Библиотека учителя математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ (9, 10 классы)

Библиотека учителя математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ для 9—10 классов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1977

513
С23

Герасимова И. С., Гусев В. А., Маслова Г. Г.,
Скопец З. А., Ягодовский М. И.

Рекомендовано Главным управлением школ
Министерства просвещения СССР

Сборник задач по геометрии для 9 и 10 классов. М.,
С23 «Просвещение», 1977.

190 с. с ил. (Б-ка учителя математики.)

На обороте тит. л. авт.: И. С. Герасимова, В. А. Гусев, Г. Г. Маслова и др.

В данный сборник включены задачи по всем разделам курса геометрии 9 и 10 классов, а также задачи для внеклассных и индивидуальных занятий с учащимися. Последняя глава сборника содержит задачи по планиметрии. Почти все задачи снабжены либо указаниями, либо подробными решениями.

С $\frac{60501-745}{103(03)-77}$ подписное 513

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебные пособия по геометрии для 9 и 10 классов содержат необходимый для преподавания курса стереометрии задачный материал. Помещенные в пособии задачи предназначены по своему разнообразию и уровню сложности для решения учащимися в процессе их обучения.

Однако современный школьный курс стереометрии включает ряд новых тем и методов изложения по сравнению со старым курсом. Стоит вспомнить такие вопросы, как аксиоматический метод, элементы векторной алгебры, метод координат, отображения и преобразования (параллельное проектирование, перенос, три вида симметрий, гомотетия), элементы математического анализа.

Учебная и методическая литература пока еще бедна сборниками задач и пособиями для учителей, в которых упражнения и задачи имели бы своей целью обеспечить в ходе их решения выработку навыков в применении указанных теоретических положений. Предлагаемый сборник восполняет в некоторой степени этот пробел. В него включены задачи по всем разделам курса, задачи для внеклассных и индивидуальных занятий, задачи и упражнения на повторение курса планиметрии.

Следует заметить, что многие задачи заимствованы из имеющихся сборников, однако их решение требует знания новых методов — метода координат, векторного исчисления, геометрических преобразований в объеме программы курса геометрии. Именно на задачах, знакомых учителю по своему содержанию, легче освоить новые методы решения, так как в этом случае отпадает трудность получения ответа и все внимание сосредотачивается на овладении самим методом решения, на поиске необходимых средств для получения ответа, пусть даже известного.

В сборнике имеется немало и таких задач, преимущественно специально составленных, которые для своего решения требуют большего: посредством новых методов решить их, не зная заранее, какой метод применить и в какой форме.

Не следует забывать также, что «Векторы» и «Преобразования» представляют собой новые темы курса геометрии, поэтому появился и новый тип задач — задачи на теорию преобразований и векторную алгебру без специальных приложений этих задач к какой-то традиционной геометрической задаче.

Особое внимание уделено в сборнике задачам на применение аксиоматического метода. Все задачи по этой теме новые, поскольку система аксиом, принятая в школьном курсе, новая.

К отдельным терминам и понятиям, знакомым учителю, но не содержащимся в новых учебных пособиях, даются в сносках пояснения. Так как предлагаемый сборник может быть использован учителем не только для самообразования, но и для работы с учащимися, то в главах I — VI помещено значительное количество задач, по трудности не превосходящих задачи из учебного пособия 9—10 классов. В некоторых случаях учащиеся могут работать со сборником самостоятельно.

Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Почти ко всем задачам даны либо ответы, либо указания, во многих случаях приводятся и полные решения задач.

Авторы выражают благодарность рецензентам Ф. М. Барчуновой, П. Б. Ройтман, а также Л. И. Кузнецовой, Т. А. Ивановой и М. Х. Приеде.

Авторы

Глава I ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Основные понятия. Аксиомы стереометрии и следствия из них

1. Какие геометрические понятия используются в определении: 1) окружности; 2) ломаной; 3) параллельности прямых; 4) перемещения плоскости? Составьте схему «родословной» для каждого из названных понятий.

2. Какие теоремы и аксиомы используются при доказательстве: 1) теоремы о конгруэнтности вертикальных углов; 2) теоремы о центральной симметричности противоположно направленных лучей; 3) теоремы Фалеса; 4) теоремы Пифагора? Составьте схему «родословной» для каждой из названных теорем.

3. Докажите, что существует точка, не принадлежащая: 1) данной плоскости; 2) данной прямой.

4. Докажите, что через каждую точку пространства можно провести: 1) прямую; 2) плоскость.

5. Докажите, что каждая плоскость содержит хотя бы одну прямую.

6. Не пользуясь аксиомами порядка, докажите, что в пространстве существуют четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

7. Докажите, что каждая прямая содержит бесконечное множество точек.

8. Докажите, что через каждую точку можно провести бесконечное множество прямых.

9. Докажите, что каждая плоскость содержит бесконечное множество точек.

10. Докажите, что через каждую точку можно провести бесконечное множество плоскостей.

11. Докажите, что в каждой плоскости существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

12. Докажите, что каждая плоскость содержит бесконечное множество прямых.

13. Докажите, что через прямую можно провести плоскость.

14. Докажите, что через каждую прямую можно провести бесконечное множество плоскостей.

15. Дано: $C \in (AB)$, $D \notin (AB)$, $M \in (AD)$, $M \neq D$. Доказать: $(ABD) = (CDM)$.

16. Дано: $\alpha \cap \beta = m$, $A \in \alpha$, $B \in m$, $A \neq B$. Верно ли утверждение: 1) $(AB) \subset \alpha$; 2) $(AB) \not\subset \beta$?

17. Даны четыре прямые, из которых каждые две пересекаются. Докажите, что все данные прямые либо лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку.

18. Вместо многоточия поставьте «необходимо» или «достаточно» или «необходимо и достаточно». 1) Для того чтобы данная точка принадлежала плоскости..., чтобы эта точка принадлежала данной прямой, лежащей в этой плоскости. 2) Для того чтобы данная точка не принадлежала данной плоскости..., чтобы эта точка принадлежала какой-либо прямой, пересекающей данную плоскость. 3) Для того чтобы данная прямая лежала в данной плоскости..., чтобы эта прямая имела с плоскостью общую точку. 4) Для того чтобы данная прямая не лежала в данной плоскости..., чтобы эта прямая проходила через какую-либо точку, не принадлежащую данной плоскости. 5) Для того чтобы две плоскости совпадали ..., чтобы они имели общую прямую (две различные общие прямые). 6) Для того чтобы две плоскости пересекались ..., чтобы они имели общую прямую. 7) Для того чтобы прямая и плоскость пересекались ..., чтобы они имели общую точку.

19. Какой фигурой может быть пересечение: 1) полупространства и прямой; 2) полупространства и луча; 3) полупространства и плоскости; 4) полупространства и полуплоскости; 5) полупространства и отрезка; 6) полупространства и треугольника?

20. Докажите свойства полупространства: 1) отрезок, соединяющий любые две точки открытого полупространства, не пересекает его границы; 2) отрезок, соединяющий любые две точки различных открытых полупространств с общей границей α, пересекает α.

§ 2. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве. Задачи на построение

21. В плоскости α даны прямые a и b, данная точка M не принадлежит α. Проведите линию пересечения плоскостей, проходящих через a и M, b и M.

22. Даны угол ABC и точка M. Проведите линию пересечения плоскостей, проходящих через (AB) и M, (BC) и M.

23. Дан треугольник ABC и точка M, не принадлежащая его плоскости. Через M и A проведите плоскость α так, чтобы линия пересечения плоскостей ABC и α: 1) разделила $[BC]$ пополам; 2) разделила угол BAC пополам.

24. Дана прямая a и точка M. Через данную точку проведите прямую, пересекающую a под прямым углом.

25. Дано: угол ABC, $M \notin (ABC)$, $P \in [BC)$, $P \neq B$. Через точки M и P проведите плоскость α так, чтобы линия пересечения плоскостей ABC и α отсекала на сторонах данного угла конгруэнтные отрезки.

26. Докажите, что середины ребер AD, AB, BC, CD тетраэдра $ABCD$ принадлежат одной плоскости. Вершинами какого четырехугольника служат эти точки?

27. Дан тетраэдр $ABCD$. Выберите в грани ABD точки M и N, а в грани ABC точку P так, чтобы сечение тетраэдра плоскостью MNC было: 1) треугольником; 2) четырехугольником. Постройте эти сечения.

28. Дан тетраэдр $ABCD$, $M \in [AB]$, $N \in [DC]$, $P \in \triangle ABC$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNP.

29. Дан тетраэдр $ABCD$; точки M и N принадлежат внутренней области треугольника ABC, точка P принадлежит грани ABD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNP.

30. Дан тетраэдр $ABCD$, точки M и N принадлежат соответственно ребрам AD и DC. Выберите точку P в грани BCD так, чтобы сечение MNP было: 1) треугольником; 2) четырехугольником. Постройте эти сечения.

31. Даны две различные прямые a и b. Через данную точку M проведите прямую, скрещивающуюся с каждой из данных прямых, если известно, что данные прямые: 1) параллельны; 2) пересекаются.

32. Даны скрещивающиеся прямые a и b, прямая c пересекает каждую из данных прямых. Докажите, что любая прямая, параллельная c и отличная от этой прямой, скрещивается по крайней мере с одной из прямых a и b.

33. Дано: $a \dot{-} b$, $C \in a$. Докажите, что плоскость, проходящая через b и C, пересекает прямую a.

34. Даны скрещивающиеся прямые a, b и точка C. Каково взаимное расположение плоскостей, проведенных через a и C, b и C?

35. Дано: $a \dot{-} b$. Через точку M, принадлежащую прямой a, проведите прямую, пересекающую a и скрещивающуюся с b.

36. Верно ли утверждение, что прямая, параллельная плоскости, не пересекает ни одной из прямых, лежащих в этой плоскости?

37. Плоскость β пересекает прямую a, параллельную плоскости α. Докажите, что плоскости α и β пересекаются.

38. Плоскость α и прямая a параллельны. Прямая b пересекает прямую a. Каким может быть взаимное расположение прямой b и плоскости α?

39. Дано: $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$. Верно ли утверждение, что $a \parallel b$?

40. Через данную точку проведите: 1) прямую, параллельную каждой из данных пересекающихся плоскостей; 2) плоскость, параллельную каждой из двух скрещивающихся прямых.

41. Дано: $a \dot{-} b$. Через прямую a проведите плоскость, параллельную прямой b.

42. Дан тетраэдр $ABCD$. 1) Постройте его сечение плоскостью, проходящей через вершину D и внутреннюю точку M грани ABC и параллельной ребру AB. 2) Вычислите площадь сечения, если все ребра тетраэдра имеют длину a, причем $|CM| : |MN| = 1$, где $N \in [AB]$.

43. Дан тетраэдр $ABCD$. 1) Через точку пересечения медиан грани ABD проведите прямую p, параллельную плоскости ABC так, чтобы прямая p пересекала (DC). 2) Вычислите длину отрезка прямой p, являющегося пересечением прямой p и тетраэдра $ABCD$, если $|AB| = |BC| = |AC| = a$.

44. Прямая c параллельна плоскости α, прямые a и b, пересекающие c в различных точках, пересекают α соответственно в точках A и B $(A \neq B)$. Докажите, что для того чтобы прямые a и b были пересекающимися или параллельными, необходимо и достаточно, чтобы прямые c и AB были параллельны.

45. Прямая c параллельна плоскости α, прямые a и b пересекают c в точках A и B, а плоскость α — в точках A_1 и B_1. Укажите, достаточным, необходимым или необходимым и достаточным условием параллельности прямых a и b являются такие условия: 1) $(A_1B_1) \parallel c$; 2) $(A_1B_1) \parallel c$, $|AA_1| = |BB_1|$; 3) $(A_1B_1) \parallel c$, $|AB| = |A_1B_1|$; 4) $|AB| = |A_1B_1|$, $|AA_1| = |BB_1|$.

46. Докажите, что прямая, параллельная каждой из пересекающихся плоскостей, параллельна их линии пересечения.

47. Даны прямые a и b. Найдите объединение всех прямых, пересекающих a и параллельных b, если a и b: 1) скрещиваются; 2) пересекаются; 3) параллельны.

48. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что: 1) $(BC_1) \parallel (A_1AD)$; 2) $(AA_1) \parallel (B_1BD)$.

49. Даны две несовпадающие параллельные прямые a и b, прямая c скрещивается с каждой из них. Проведите через прямую a плоскость α, а через прямую b плоскость β так, чтобы α и β были параллельны, а расстояние между точками их пересечения с прямой c имело заданную величину d.

50. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точки M и N принадлежат соответственно ребрам AA_1 и BC, P — внутренняя точка грани $A_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNP.

51. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N, P, где $M \in [BB_1]$, N и P — внутренние точки граней BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

52. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через (BD_1) и точку M, принадлежащую $[CC_1]$.

53. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNP, если точки M, N и P — соответственно внутренние точки граней: 1) $ABCD$, ABB_1A_1, ADD_1A_1; 2) $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1.

54. 1) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины M, N, P попарно скрещивающихся ребер. 2) Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a.

55. Дано: $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$. Каким должно быть взаимное расположение данных прямых, чтобы плоскости α и β были параллельны?

56. Через точку одной из двух параллельных плоскостей проведена прямая, параллельная другой плоскости. Докажите, что эта прямая лежит в первой плоскости.

57. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точка M принадлежит грани $ABCD$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью: 1) проходящей через точку M и параллельной грани ABB_1A_1; 2) проходящей через точку M и параллельной (ABC_1).

58. Лучи a_1, a_2, a_3, имеющие общее начало O, пересечены двумя параллельными плоскостями соответственно в точках A_1 и B_1, A_2 и B_2, A_3 и B_3. Докажите, что $\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|} = \frac{|OA_3|}{|OB_3|}$.

59. Известно, что лучи a_1, a_2, a_3, имеющие общее начало O, пересечены двумя плоскостями α и β соответственно в точках A_1 и B_1, A_2 и B_2, A_3 и B_3, причем $\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|} = \frac{|OA_3|}{|OB_3|}$. Могут ли плоскости α и β быть не параллельны? Каким должно быть взаимное расположение данных лучей, чтобы утверждение $\alpha \parallel \beta$ было верно?

60. Докажите, что для данных двух скрещивающихся прямых параллельные плоскости, каждая из которых содержит одну прямую, являются единственными.

61. Прямая a пересекает три параллельные плоскости в точках A_1, A_2, A_3, а прямая b — в точках B_1, B_2, B_3 соответственно. Докажите, что $\frac{|A_1A_2|}{|A_2A_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_2B_3|}$.

62. Дана плоскость α и скрещивающиеся прямые m и n, параллельные этой плоскости. Через произвольную точку A плоскости проведена прямая q, пересекающая прямые m и n соответственно в точках M и N. Докажите, что отношение $|AM| : |AN|$ не зависит от выбора точки A в плоскости α.

63. Найдите множество середин всех отрезков, концы которых принадлежат двум данным параллельным плоскостям.

§ 3. Параллельное проектирование

64. Докажите свойства параллельного проектирования: 1) проекция прямой есть прямая; 2) проекции параллельных прямых параллельны; 3) отношение длин проекций двух параллельных отрезков равно отношению длин проектируемых отрезков.

65. Докажите, что параллельной проекцией данного угла (меньшего развернутого) может служить угол любой величины (в границах от 0 до 180°).

66. Даны непересекающиеся прямые a и b. Найдите множество точек M, делящих в заданном отношении все отрезки AB, концы которых принадлежат данным прямым ($A \in a$, $B \in b$, $|AM| : |MB| = k$).

67. Дана плоскость α и скрещивающиеся прямые a и b, не параллельные α. Через каждую точку A, принадлежащую прямой a, проведена прямая, параллельная α и пересекающая прямую b в точке A_1. Найдите множество середин всех отрезков AA_1.

68. Дана плоскость α и две не принадлежащие ей точки A и B, такие, что $(AB) \parallel \alpha$. Найдите множество всех точек A_1 и B_1, являющихся параллельными проекциями данных точек A и B на плоскость α, чтобы при этом расстояние $|A_1B_1|$ было равно заданному расстоянию $d > 0$.

69. Трапеция $ABCD([AB] \parallel [CD])$ служит изображением равнобедренной трапеции $A_1B_1C_1D_1$, углы при основании которой равны 45°. Постройте изображение центра окружности, описанной вокруг трапеции.

70. Трапеция $ABCD$ $([AB] \parallel [CD])$ служит изображением прямоугольной трапеции $A_1B_1C_1D_1$, имеющей угол B_1, равный 60°. Известно, что в данную трапецию можно вписать окружность. Постройте центр этой окружности.

71. Треугольник ABC служит изображением прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$, у которого $\widehat{C_1} = 90°$ и $|A_1C_1| : |B_1C_1| = 3:1$. Постройте изображение высоты треугольника, проведенной из вершины прямого угла.

72. Треугольник ABC служит изображением равнобедренного треугольника $A_1B_1C_1$, у которого $|A_1C_1| = |B_1C_1|$ и высота равна основанию. Постройте изображение: 1) центра описанной окружности; 2) центра вписанной окружности.

73. Параллелограмм $ABCD$ служит изображением квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Постройте изображение: перпендикуляра, проведенного из точки $M_1(M_1 \in [D_1C_1])$ к прямой: 1) (B_1D_1); 2) (B_1E_1), где E_1 — середина $[A_1D_1]$.

Глава II ВЕКТОРЫ

§ 1. Линейные операции над векторами на плоскости и в пространстве

1. Даны три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b}+\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

2. Докажите теорему: чтобы вектор, равный сумме двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имел направление, совпадающее с направлением биссектрисы угла, направления сторон которого совпадают с направлениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, необходимо и достаточно, чтобы $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

3. Пусть точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, CA и AB треугольника ABC в одном и том же отношении λ. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются сторонами некоторого треугольника.

4. На сторонах QR, RP и PQ треугольника PQR даны соответственно такие пары точек A_1, A_2; B_1, B_2 и C_1, C_2, что $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$. Докажите, что

$$|A_1A_2|:|QR|=|B_1B_2|:|RP|=|C_1C_2|:|PQ|.$$

5. Дан треугольник ABC и на каждой стороне по две точки A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2, причем $\overrightarrow{A_1A_2}=k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1C_2}=k\overrightarrow{AB}$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют общий центроид[1].

6. Докажите, что если медианы одного треугольника параллельны сторонам другого, то и медианы второго треугольника параллельны сторонам первого.

7. Медианы двух треугольников соответственно параллельны. Докажите, что соответственные стороны этих треугольников также параллельны.

8. В треугольнике ABC проведена медиана AD, M — середина этой медианы. Разложите вектор $\overrightarrow{MB}$ по $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

---

[1] Центроид треугольника — точка пересечения его медиан.

9. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, где $M \in [AC]$, $N \in [BC]$. Разложите: 1) вектор $\overrightarrow{MN}$ по $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{AB}$ по $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{NC}$.

10. Дан параллелограмм $ABCD$ с центром O. Разложите: 1) вектор $\overrightarrow{AD}$ по $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$; 2) вектор $\overrightarrow{OC}$ по $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$.

11. Точки N и M — середины сторон AD и DC параллелограмма $ABCD$; $P = (AC) \cap (BN)$, $Q = (AC) \cap (BM)$. Докажите, что $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

12. Дан параллелограмм $ABCD$. Через вершину C проведены две прямые l_1 и l_2, пересекающие (AB) в точках M_1 и M_2, а (AD) — в точках N_1 и N_2. Докажите, что $\overrightarrow{BM_1} : \overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{DN_2} : \overrightarrow{DN_1}$[1].

13. Дана трапеция $ABCD$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, причем $|AB| = a$, $|DC| = b$. Через точку P пересечения диагоналей проведена прямая l, параллельная основаниям и пересекающая $[AD]$ в точке M, а $[BC]$ в точке N. Вычислите p и q, если $\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN} = q\overrightarrow{DC}$.

14. Дан четырехугольник $ABCD$. На сторонах AD и BC даны соответственно точки M и N, такие, что $|AM| : |MD| = |BN| : |NC| = p : q$. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{q\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{DC}}{q + p}$.

15. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Разложите: 1) вектор $\overrightarrow{AD}$ по $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) вектор $\overrightarrow{AB}$ по $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{EF}$.

16. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$, O — его центр. Докажите, что векторы $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ коллинеарны.

17. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Найдите разложения векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ и разложения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

18. Даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что существует единственная точка G, такая, что $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

19. Дан треугольник ABC, $\widehat{C} = 90°$. Точка D — основание перпендикуляра, проведенного из вершины C на гипотенузу. Разложите вектор $\overrightarrow{CD}$ по $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

20. Дан треугольник ABC, $\widehat{C} = 90°$. Точка M — центр вписанной окружности. Разложите вектор $\overrightarrow{CM}$ по $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

---

[1] Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $(\vec{b} \neq \vec{0})$, то вместо равенства $\vec{a} = k\vec{b}$ иногда удобно писать $\vec{a} : \vec{b} = k$. Символ $\vec{a} : \vec{b}$ применяется только для коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $\vec{b} \neq \vec{0}$.

21. Докажите, что если $[AM]$ — биссектриса треугольника ABC, то $\overrightarrow{AM} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, где $b = |AC|$, $c = |AB|$.

22. Даны треугольник ABC и центр O вписанной в него окружности. Докажите истинность векторного равенства $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$.

23. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$, причем $B_1 \in [AB]$, $D_1 \in [AD]$. Докажите, что прямые DB_1, BD_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

24. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки M и N — середины его ребер AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

25. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

26. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общий центроид. Докажите, что $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{B_1A}$.

27. Дан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Для каждых трех последовательных его вершин построен центроид. Докажите, что эти центроиды являются вершинами центрально-симметричного шестиугольника.

28. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки A_0, B_0, C_0, D_0 делят отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в равных отношениях. Докажите, что $A_0B_0C_0D_0$ — параллелограмм (быть может вырожденный)[1].

29. Отрезки AB, AC, DB и DC разделены соответственно точками M, N, P и Q в одном и том же отношении. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

30. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точки A_0, B_0, C_0 делят стороны BC, CA, AB в равных отношениях k. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{B_1B_0} + \overrightarrow{C_1C_0}$ не зависит от k.

31. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точки A_0, B_0, C_0 — середины ребер BC, CA, AB. Докажите, что отрезки A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0 пересекаются в одной точке. Вычислите отношения, в которых эта точка делит каждый из указанных отрезков.

32. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На прямой MM_1, где M и M_1 — соответственно центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, дана такая точка O, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM_1}$. В каком отношении точка O делит отрезок MM_1?

---

[1] Если для четырех точек A, B, C и D, не являющихся вершинами параллелограмма, выполняется равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то говорят, что $ABCD$ — вырожденный параллелограмм.

33. Дан тетраэдр $ABCD$, точки G_1, G_2, G_3 и G_4 — центроиды его граней. Для вершин второго тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ построены соответственно симметричные им точки A_2, B_2, C_2 и D_2 относительно указанных выше центроидов. Докажите, что центроиды G' и G'' тетраэдров[1] $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ симметричны относительно центроида G тетраэдра $ABCD$.

34. Дан тетраэдр $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, где M — середина медианы BB_1 грани BCD.

35. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{B_1D}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

36. Докажите, что векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$, $-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ компланарны.

37. Докажите, что векторы $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $8\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ компланарны, и разложите каждый из них по двум остальным.

38. На двух скрещивающихся прямых p и q даны по три точки P_1, P_2, P_3 и Q_1, Q_2, Q_3, причем $\overrightarrow{P_1P_2}=k\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{Q_1Q_2}=k\overrightarrow{Q_1Q_3}$. Докажите, что прямые P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 параллельны некоторой плоскости.

39. На одной из двух скрещивающихся прямых даны три точки A_1, A_2, A_3, а на другой — точки B_1, B_2, B_3, такие, что $\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{B_1B_2}:\overrightarrow{B_2B_3}=k$. Докажите, что $\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1}+k\overrightarrow{A_3B_3}}{1+k}$.

40. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в различных плоскостях. Докажите, что три прямые, проведенные соответственно через середины трех пар отрезков AB_1 и A_1B, BC_1 и B_1C, CA_1 и AC_1, параллельны некоторой плоскости.

41. Докажите, что если противоположные звенья неплоской замкнутой ломаной, состоящей из 6 звеньев, попарно параллельны, то они попарно и конгруэнтны. Убедитесь в том, что такая ломаная обладает центральной симметрией.

42. Докажите, что биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

43. Докажите, что биссектрисы трех углов, смежных плоским углам трехгранного угла, лежат в одной плоскости.

44. Дана неплоская замкнутая ломаная $ABCD$. Плоскость пересекает прямые AB, BC, CD, DA соответственно в точках P, Q, R, S. Докажите, что $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RD}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{DS}}{\overrightarrow{SA}}=1$.

---

[1] Центроид тетраэдра — точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных ребер.

§ 2. Скалярное умножение векторов

45. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

46. Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Дайте геометрическое истолкование формул:

а) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$;

б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$;

в) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$.

47. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC конгруэнтны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

48. Докажите, что большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана и обратно.

49. Точки M и N делят сторону AB треугольника ABC на конгруэнтные отрезки. Докажите, что если $|CM| = |CN|$, то $|CA| = |CB|$.

50. Докажите, что если $[AM]$ — биссектриса треугольника ABC, то $|AM| = \dfrac{2bc\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{b+c}$, где $b = |AC|$, $c = |AB|$.

51. Найдите сумму квадратов расстояний от одной из вершин правильного n-угольника до остальных, если радиус окружности, описанной вокруг n-угольника, равен R.

52. В окружность с центром O вписан треугольник ABC, в котором точка C_1 — середина $[AB]$. Докажите, что необходимое и достаточное условие перпендикулярности отрезков OC и OC_1 выражается равенством $|\widehat{A} - \widehat{B}| = 90°$.

53. Точка O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, H — ортоцентр[1] этого треугольника. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

54. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D выполняется равенство $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

55. Докажите, что три прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

56. Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $|AA_1|^2 + |CC_1|^2 = |BB_1|^2 + |DD_1|^2$.

57. Докажите, что для того, чтобы два отрезка AB и CD были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.

58. Выразите расстояние между серединами двух противоположных ребер тетраэдра через длины всех шести его ребер.

---

[1] Ортоцентр треугольника — точка пересечения трех прямых проведенных через вершины треугольника перпендикулярно противоположным сторонам.

59. Даны два треугольника с общим центроидом. Докажите, что сумма девяти квадратов расстояний от вершин одного треугольника до вершин другого зависит только от длин сторон данных треугольников.

60. На двух прямых даны соответственно отрезки AB и CD. Точками M и M_1 отрезок AB разделен в отношении $|AC|:|BD|$ внутренним и внешним образом[1]. В таком же отношении разделен отрезок CD внутренним и внешним образом точками N и N_1. Докажите, что отрезки MN и M_1N_1 перпендикулярны.

61. Все звенья замкнутой ломаной $ABCD$ конгруэнтны. Докажите, что $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}} = \widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}}$.

62. Дана замкнутая ломаная $ABCD$, причем $D\widehat{A}B = D\widehat{C}B = 90°$. Докажите, что проекции противолежащих звеньев данной ломаной на прямую AC равны.

63. Докажите, что если центроид тетраэдра совпадает с центром описанной вокруг него сферы, то противолежащие ребра тетраэдра попарно конгруэнтны.

64. Ребра прямого трехгранного угла с вершиной O пересечены плоскостью в точках A, B, C. Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

65. Известны плоские углы α, β, γ трехгранного угла $Oabc$. Вычислите косинус угла между ребром c трехгранного угла и биссектрисой противоположного плоского угла.

66. Известны плоские углы α, β, γ трехгранного угла $Oabc$. Вычислите косинусы углов между биссектрисами плоских углов трехгранного угла.

---

[1] Если точка C лежит между A и B, то точка C делит отрезок AB внутренним образом в отношении $k = |AC|:|CB|$. Если же $C \in (AB)$, но $C \notin [AB]$, то C делит $[AB]$ внешним образом в отношении $|AC|:|CB|$.

Глава III ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. ДВУГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

§ 1. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Расстояние от точки до плоскости

1. Докажите, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость.

2. Прямая a, перпендикулярная плоскости α, пересекает эту плоскость в точке A. Докажите, что прямая b, проведенная через точку A перпендикулярно прямой a, лежит в плоскости α.

3. Даны прямая a и точка M, не принадлежащая a. Найдите объединение всех прямых, проведенных через M перпендикулярно прямой a.

4. Дано: $[AB] \dotminus [CD]$, $|AC| = |CB|$, $|AD| = |DB|$. Докажите, что $(AB) \perp (CD)$.

5. Даны точки A, B, C, D. Известно, что $(AB) \perp (CD)$, $(AC) \perp (BD)$. Докажите, что $(AD) \perp (BC)$.

6. Докажите, что через данную точку нельзя провести двух различных плоскостей, перпендикулярных данной прямой.

7. Через данную точку проведите прямую, перпендикулярную двум данным скрещивающимся прямым.

8. Точка M принадлежит грани ADB тетраэдра $ABCD$, у которого $|AB| = |BD|$, $|AC| = |CD|$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной ребру AD.

9. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M, являющаяся внутренней точкой сечения ACC_1A_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной: 1) прямой BB_1; 2) прямой BC.

10. Даны два прямых угла ASB и CSD, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что линия пересечения плоскостей ASC и BSD перпендикулярна линии пересечения плоскостей ASD и BSC.

11. Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — конгруэнтные ромбы, углы между ребрами, имеющими общую точку A_1, равны. Выясните, перпендикулярна ли прямая A_1C плоскости AB_1D_1.

12. Два отрезка, наклонных к плоскости, имеют общий конец, не принадлежащий плоскости, вторые концы отрезков принадлежат этой плоскости. 1) Докажите, что достаточным и необходимым условием равенства длин данных отрезков является равенство длин их проекций на плоскость. 2) Докажите, что длина одного из данных отрезков больше длины другого тогда и только тогда, когда длина проекции первого отрезка больше длины проекции второго.

13. Точка M удалена от каждой из вершин прямоугольника на расстояние a, а от его плоскости — на расстояние b. Найдите длины сторон прямоугольника, если их отношение равно 2.

14. Точка M, не принадлежащая плоскости треугольника, одинаково удалена от его вершин. Как расположена проекция точки M по отношению к внутренней области треугольника, если этот треугольник: 1) прямоугольный; 2) остроугольный; 3) тупоугольный?

15. Через точку O пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($[AB] \parallel [CD]$ и $|AB| > |DC|$) проведен перпендикуляр $[OK]$ к ее плоскости. Докажите, что $|KB| > |KD|$.

16. Точки A и B расположены по одну сторону плоскости α и удалены от нее на расстояния a и b; точки A_1 и B_1 — различные ортогональные проекции данных точек на плоскость α. Найдите расстояние от точки пересечения прямых AB_1 и BA_1 до плоскости α.

17. Вершины треугольника ABC удалены от плоскости α соответственно на расстояния a, b, c. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до плоскости α, если известно: 1) все данные точки расположены по одну сторону плоскости α; 2) точки A и B расположены по одну сторону плоскости α, а точка C — по другую.

18. Отрезок AB длиной a параллелен плоскости α и удален от нее на расстояние b. Наклонные $[AM]$ и $[BN]$ ($\{M, N\} \subset \alpha$) перпендикулярны (AB) и имеют длины, равные c. Найдите $|MN|$.

19. Через вершину квадрата проведена плоскость α параллельно его диагонали. Докажите, что ортогональная проекция квадрата на плоскость α есть ромб.

20. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника проведена плоскость α, параллельная гипотенузе. Проекции катетов на эту плоскость равны 8 *см* и $4\sqrt{3}$ *см*. Найдите проекцию гипотенузы, если известно, что расстояние между гипотенузой и плоскостью равно 4 *см*.

21. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 *см* от противолежащей его стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 *см* и 2 *см*. Найдите проекции сторон.

22*. Длины сторон треугольника равны a, a и b ($a \neq b$), проекцией его служит равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.

23. Суммы противолежащих углов четырехугольника равны между собой. Найдите множество всех точек, каждая из которых одинаково удалена от вершин данного четырехугольника.

24. Даны два отрезка AB и CD, лежащие на скрещивающихся прямых, точки M и N — середины этих отрезков. Докажите, что

$$|MN| < \frac{|AC| + |BD|}{2}.$$

25. Даны скрещивающиеся прямые a и b, их общий перпендикуляр $[AB]$ $(A \in a, B \in b)$. Пусть $C \in a, D \in b$. Докажите, что равенство $|AC| = |BD|$ является достаточным условием конгруэнтности углов ACD и BDC.

26. 1) Постройте общий перпендикуляр диагонали куба и не пересекающей ее диагонали грани этого куба.

2) Найдите длину общего перпендикуляра, если ребро куба равно a.

27. Постройте общий перпендикуляр непересекающихся диагоналей двух смежных граней куба.

28*. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $|AB| = |BC| = a$, $|BB_1| = 2a$. Постройте общий перпендикуляр прямых BA_1 и CB_1, найдите его длину.

29. Дан тетраэдр $ABCD$, у которого грань ABC — прямоугольный треугольник с катетами CA и CB, равными a, ребра DA, DB и DC равны b. Найдите расстояние между (AB) и (DC).

30. Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ равновелики. Докажите, что общий перпендикуляр ребер AB и CD проходит через середину $[CD]$.

§ 2. Теорема о трех перпендикулярах

31. 1) Одна из сторон прямого угла параллельна плоскости α, другая — не перпендикулярна к ней. Докажите, что ортогональная проекция данного угла на плоскость α есть прямой угол.

2) Может ли ортогональная проекция прямого угла на плоскость, не параллельную ни одной из его сторон, быть прямым углом?

32. Параллелограмм $ABCD$ является изображением ромба, отрезок MN изображает перпендикуляр к плоскости ромба, причем $M \in [AB]$. 1) Постройте прямые, проходящие через точку N и перпендикулярные диагоналям ромба. 2) Достаточно ли данных для построения прямых, проходящих через N перпендикулярно сторонам ромба?

33. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина $[BC]$, точка N — середина $[AM]$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через N и перпендикулярной (MA_1).

34. Какую фигуру образует множество оснований перпендикуляров, проведенных из точки A, не принадлежащей плоскости α, ко всем прямым, лежащим в плоскости α и проходящим через данную точку M?

35. Суммы противолежащих сторон четырехугольника равны. Найдите множество всех точек, одинаково удаленных от прямых, на которых лежат стороны четырехугольника.

36. В равнобедренном треугольнике стороны равны 17 *см*, 17 *см* и 30 *см*. Из вершины большего угла проведен отрезок, перпендикулярный к плоскости треугольника, длина отрезка равна 15 *см*. Найдите расстояние от концов отрезка до большей стороны треугольника.

37. Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Из вершины A данного угла проведен перпендикуляр $[AK]$ к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки K до катета, противолежащего данному углу, если известно, что $|AK| = m$.

38. Точка M удалена от плоскости квадрата на 14 *см*, а от каждой из его сторон — на 50 *см*. Найдите сторону квадрата и расстояние от его вершин до точки M.

39. Дан треугольник со сторонами 13 *см*, 14 *см* и 15 *см*; точка M удалена от каждой из прямых, содержащих стороны треугольника, на 5 *см* и проектируется во внутреннюю точку этого треугольника. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника.

40. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма проведен перпендикуляр $[OK]$ к его плоскости. Докажите, что расстояние от точки K до любой из вершин не меньше расстояния от K до любой из сторон.

41. 1) Докажите, что точка, одинаково удаленная от вершин прямоугольника, не являющегося квадратом, неодинаково удалена от его сторон.

2) Точка, одинаково удаленная от прямых, на которых лежат стороны ромба, одинаково удалена и от его вершин. Найдите углы ромба.

42. Докажите, что точка, одинаково удаленная от вершин правильного многоугольника, одинаково удалена и от его сторон.

43. Точка M удалена от каждой вершины правильного треугольника на $\sqrt{13}$ *см*, а от каждой стороны — на 2 *см*. Найдите расстояние от M до плоскости треугольника.

44. Точка M удалена от каждой вершины правильного шестиугольника на расстояние a, а от каждой стороны — на расстояние b. Найдите расстояние от M до плоскости шестиугольника и до его меньшей диагонали.

45. Дан ромб со стороной a и углом 45°. Точка M удалена от всех прямых, на которых лежат стороны ромба, на расстояние b. Найдите расстояние от этой точки до плоскости ромба и вершины его тупого угла.

46. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Докажите, что расстояние от точки M, принадлежащей прямой a, до прямой b возрастает при возрастании расстояния от M до точки пересечения прямой a и общего перпендикуляра данных прямых.

§ 3. Угол между прямой и плоскостью

47. Докажите, что угол между диагональю куба и плоскостью его грани не зависит ни от выбора диагонали, ни от выбора грани.

48. Даны измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|BB_1| = c$, причем $a < b < c$. 1) Зависит ли угол между диагональю параллелепипеда и его гранью от выбора грани? 2) Укажите, с какой из граней диагональ BD_1 образует наименьший угол? наибольший угол?

49. 1) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между плоскостью AB_1D_1 и каждым из ребер A_1A и A_1D_1.

2) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина $[BB_1]$, точка N — середина $[CC_1]$, O — центр симметрии грани BCC_1B_1. Найдите углы между плоскостью BCC_1B_1 и каждой из прямых DM, DO, DN.

50. Рассмотрите множество всех наклонных, проведенных к плоскости из точки, не принадлежащей плоскости, и образующих равные углы с этой плоскостью. Какую фигуру образуют точки пересечения наклонных с плоскостью?

51. Основание AB равнобедренного треугольника ABC лежит в плоскости α ($\alpha \neq (ABC)$). Какой из углов больше: угол между (AC) и α или угол между (CD) и α, если D — середина $[AB]$?

52. Проекция равностороннего треугольника на плоскость, проходящую через его сторону, является прямоугольным треугольником. Найдите угол между стороной данного треугольника и плоскостью проекций.

53. Дан ромб с диагоналями d_1 и d_2. Через одну из его сторон проведена плоскость так, что угол между другой стороной ромба и этой плоскостью равен φ. Найдите площадь проекции ромба на плоскость.

54. Через диагональ ромба проведена плоскость, отличная от плоскости ромба. Докажите, что угол между этой плоскостью и прямой, на которой лежит сторона ромба, не зависит от выбора стороны.

55. Концы отрезков AB и CD принадлежат параллельным плоскостям α и β, причем $(\widehat{(AB), \alpha}) = \varphi_1$, $(\widehat{(CD), \beta}) = \varphi_2$, $\varphi_2 > \varphi_1$. Какой из данных отрезков имеет бо́льшую длину?

56. Концы отрезков AB и CD принадлежат параллельным плоскостям α и β. Проекции этих отрезков на одну из плоскостей соответственно равны a и b, а углы $(\widehat{(AB), \alpha})$ и $(\widehat{(CD), \alpha})$ относятся как 1 : 2. Найдите расстояние между плоскостями.

§ 4. Двугранные углы. Перпендикулярные плоскости

57. Докажите равенство величин двугранных углов: 1) вертикальных; 2) соответственных при параллельных плоскостях.

58. 1) Через данную прямую a, лежащую в плоскости α, проведите плоскость β так, чтобы угол между плоскостями α и β имел данную величину.

2) Через точку A, не принадлежащую данной плоскости α, проведите плоскость β так, чтобы угол между плоскостями α и β имел данную величину.

59. Из точек A и B, принадлежащих одной из граней двугранного угла, проведены перпендикуляры $[AA_1]$ и $[BB_1]$ на плоскость другой грани и перпендикуляры $[AA_2]$ и $[BB_2]$ на ребро. Найдите: 1) $|BB_2|$, если $|AA_1| = 15$ *см*, $|BB_1| = 27$ *см*, $|AA_2| = 20$ *см*; 2) $|AA_1|$ и $|BB_1|$, если $|A_1A_2| = m$, $|B_1B_2| = n$, $|AA_1| + |BB_1| = p$.

60. Проекция прямой на плоскость одной из граней двугранного угла перпендикулярна его ребру. Докажите, что проекция этой прямой на плоскость другой грани также перпендикулярна ребру.

61. Точки A и B ($A \neq B$) являются проекциями точки M на плоскости граней двугранного угла. Докажите, что прямая AB перпендикулярна к его ребру.

62. Точки A и B принадлежат различным граням двугранного угла и одинаково удалены от его ребра. Найдите на ребре такую точку M, чтобы угол AMB был наибольшим.

63. Докажите, что угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям.

64. 1) Угол между плоскостями треугольников ABC и DBC равен 45°. Найдите $|AD|$, если $|AB| = 15$ *см*, $|BC| = 14$ *см*, $|AC| = 13$ *см*, $|DB| = |DC| = 9$ *см*.

2) Концы отрезка AB принадлежат граням двугранного угла, равного φ. Из точек A и B проведены перпендикуляры $[AM]$ и $[BN]$ к ребру двугранного угла. Известно, что $|AM| = 10$ *см*, $|BN| = 5$ *см*, $|MN| = 12$ *см*. Найдите $|AB|$, если: 1) $\varphi = 90°$; 2) $\varphi = 60°$.

65. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, его катеты наклонены к этой плоскости под углами 30° и 45°. Найдите угол между плоскостью треугольника и плоскостью α.

66. Грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольники. Известно, что длины отрезков AB, BC, BB_1, B_1D пропорциональны числам 5, 1, 2, 5. Найдите двугранные углы BB_1 и CC_1.

67. В тетраэдре $ABCD$ ребро AB равно m, высоты AA_1 и BB_1 граней ACD и BCD соответственно равны a и b, отрезок A_1B_1 равен n. Найдите величину двугранного угла CD.

68. В тетраэдре $ABCD$ все ребра, кроме ребра BC, имеют равные длины, $\widehat{CAB} = 90°$. Найдите величину двугранного угла AB.

69. 1) Модель параллелограмма $ABCD$, у которого $|AB| = 2$ *дм*, $|AD| = 3$ *дм*, $\widehat{BAD} = 60°$, перегнута по диагонали AC так, что образовался двугранный угол в 120°. Какую величину после этого имеет угол между сторонами AB и AD?

2) Модель ромба со стороной a и диагональю BD, равной d, перегнута по этой диагонали так, что образовался двугранный угол, равный φ. Найдите $|AC|$.

70. Найдите объединение всех прямых, пересекающих данную прямую и перпендикулярных данной плоскости.

71. Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную данной плоскости и параллельную данной прямой.

72. Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную каждой из данных двух плоскостей.

73. Дано: $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$, $(AB) \perp \beta$. Докажите, что $(AB) \subset \alpha$.

74. Докажите, что прямая пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости, есть перпендикуляр к этой плоскости.

75. Точки A и B принадлежат различным граням прямого двугранного угла и находятся на равных расстояниях $|AA_1|$ и $|BB_1|$ от его ребра. Известно, что $|AB|:|AA_1|=2$. Найдите угол между прямой AB и ребром двугранного угла, а также углы между (AB) и каждой из его граней.

76. Два правильных треугольника ABC и ABM лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Докажите, что углы между прямой AC и прямыми AM и BM равны.

77. Катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника лежат в различных гранях прямого двугранного угла. Вершина прямого угла треугольника удалена от ребра на расстояние m, а вершина острого угла — на расстояние n. Найдите площадь треугольника.

78. В тетраэдре $ABCD$ грань ABC — правильный треугольник со стороной a, грань ABD — равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна b $(b \neq a)$, двугранный угол AB прямой. Найдите сторону сечения, являющегося квадратом.

§ 5. Трехгранные и многогранные углы

79. Сколько плоскостей симметрии может иметь трехгранный угол?

80. Через каждое ребро трехгранного угла, у которого ни одно ребро не перпендикулярно противолежащей грани, проведена плоскость перпендикулярно к противолежащей грани. Докажите, что все эти плоскости имеют общую прямую.

81. Через точку, принадлежащую внутренней области трехгранного угла, проведите плоскость так, чтобы ее пересечение с трехгранным углом было треугольником, точка пересечения медиан которого совпадает с данной точкой.

82. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Докажите, что его сечение любой плоскостью, пересекающей все три ребра, есть остроугольный треугольник.

83. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине D прямые, $|AD| = a$, $|BD| = b$, $|DC| = a + b$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине C равна $90°$.

84. В тетраэдре $ABCD$ суммы плоских углов при каждой из вершин A, B, C равны 180°. Докажите, что все грани тетраэдра конгруэнтны.

85. В трехгранном угле два двугранных угла равны по 135°, их общий плоский угол прямой. Найдите третий двугранный угол.

86. Плоские углы трехгранного угла равны α, β, γ. Найдите угол между биссектрисой угла α и противолежащим ему ребром.

87. Каждый плоский угол трехгранного угла равен α. На одном из ребер взята точка, удаленная от вершины на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до плоскости противолежащей грани.

88. Сумма плоских углов трехгранного угла равна 180°. Докажите, что сумма косинусов его двугранных углов равна 1.

89. Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60°, 90°. Найдите углы наклона ребер к плоскостям противолежащих граней.

90. Все плоские углы трехгранного угла равны, его двугранный угол равен φ. Найдите косинус плоского угла.

91. Два плоских угла трехгранного угла равны α, третий плоский угол прямой. На общей стороне равных плоских углов взята точка на расстоянии h от плоскости противолежащей грани. Найдите расстояние от этой точки до вершины трехгранного угла.

92. 1) Докажите, что через гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника нельзя провести плоскость так, чтобы каждый катет был вдвое больше своей проекции на эту плоскость.

2) Найдите наибольшую величину отношения $a : a_1$, где a — длина катета равнобедренного прямоугольного треугольника, a_1 — длина его проекции на плоскость, проходящую через гипотенузу.

93*. Верно ли утверждение, что каждый двугранный угол трехгранного угла меньше суммы двух других двугранных углов?

94*. Докажите, что для любого трехгранного угла $SABC$ с плоскими углами α, β, γ и противолежащими двугранными углами A, B, C выполняется равенство: $\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} + \sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos\alpha$ (вторая теорема косинусов для трехгранного угла).

95. Двугранные углы трехгранного угла равны 60°, 120°, 90°. Найдите его плоские углы.

96. Докажите, что против равных двугранных углов трехгранного угла лежат равные плоские углы.

97. 1) Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла больше 180°, но меньше 540°.

2) Докажите, что в трехгранном угле для любого двугранного угла A выполняется неравенство: $\widehat{A} > \widehat{B} + \widehat{C} - 180°$, где $\angle B$ и $\angle C$ два других двугранных угла.

98. В трехгранном угле два двугранных угла равны 90° и 50°. В каких границах находится третий двугранный угол?

99*. Сумма двугранных углов трехгранного угла равна 360°. Докажите, что сумма косинусов его плоских углов равна —1.

100*. Докажите, что плоские углы α, β, γ и двугранные углы $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ трехгранного угла связаны соотношением: $\frac{\sin\alpha}{\sin\widehat{A}} = \frac{\sin\beta}{\sin\widehat{B}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\widehat{C}}$ (теорема синусов для трехгранного угла).

101. В трехгранном угле сумма двух двугранных углов равна 180°. Докажите, что сумма противолежащих им плоских углов также равна 180°. Верно ли обратное утверждение?

102. Все плоские углы четырехгранного угла $SABCD$ равны по 60°, углы ASC и BSD конгруэнтны. Докажите, что каждый из них равен 90°.

103*. Четыре луча с общим началом попарно ограничивают шесть углов, равных φ. Найдите величины этих углов.

104. Докажите, что сумма двугранных углов четырехгранного угла больше 360°, но меньше 720°.

Глава IV КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Координаты вектора

1. Среди векторов $\vec{a}_1 = (1;\ -6;\ 3)$, $\vec{a}_2 = (0;\ -4;\ 5)$, $\vec{a}_3 = (3;\ 0;\ 0)$, $\vec{a}_4 = (0;\ -1;\ 0)$, $\vec{a}_5 = (5;\ 0;\ 6)$, $\vec{a}_6 = (2;\ -3;\ 6)$, $\vec{a}_7 = (0;\ 0;\ -2)$, $\vec{a}_8 = (-3;\ 1;\ 0)$, $\vec{a}_9 = (6;\ 0;\ 1)$, $\vec{a}_{10} = (0;\ 5;\ 0)$ укажите векторы, коллинеарные: а) вектору $\vec{i}$; б) вектору $\vec{j}$; в) вектору $\vec{k}$; компланарные: г) векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$; д) векторам $\vec{j}$ и $\vec{k}$; е) векторам $\vec{k}$ и $\vec{i}$.

2. Докажите, что векторы $\vec{a} = (2;\ 3;\ -1)$, $\vec{b} = (-4;\ -6;\ 2)$, $\vec{c} = (-2;\ -3;\ 1)$ коллинеарны.

3. Докажите, что векторы $\vec{a} = (2;\ 1;\ 1)$, $\vec{b} = (3;\ -1;\ 2)$, $\vec{c} = (9;\ 2;\ 5)$ компланарны.

4. Докажите, что векторы $\vec{a} = (2;\ 1;\ 1)$, $\vec{b} = (3;\ -1;\ 0)$, $\vec{c} = (7;\ 1;\ 2)$ компланарны, и вычислите коэффициенты разложения вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{k}$ соответственно углы 120° и 135°. Определите угол, который образует вектор $\vec{a}$ с вектором $\vec{j}$.

6. Найдите косинусы углов, образованных вектором $\vec{a} = (5;\ -\sqrt{2};\ 3)$ с координатными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

7. При каких значениях m угол между векторами $\vec{a} = (0;\ m;\ -2)$ и $\vec{b} = (-1;\ 0;\ -1)$ равен 60°?

8. Даны векторы $\vec{a} = (1;\ 5;\ 1)$, $\vec{b} = (1;\ -5;\ 2)$, $\vec{c} = \left(2;\ 1;\ \frac{3}{2}\right)$, $\vec{d} = (0;\ 0;\ 1)$. Вычислите их попарные скалярные произведения и укажите, образуют ли они острый, прямой или тупой угол.

9. Вычислите координаты единичного вектора $\vec{a}_0$, перпендикулярного векторам $\vec{b}=(1;\ 1;\ 0)$ и $\vec{c}=(0;\ 1;\ 1)$.

§ 2. Координаты точки

10. Точки $A(1;\ 3;\ -1)$, $B(-2;\ 1;\ 0)$, $C(-1;\ 0;\ 1)$ — вершины параллелограмма $ABCD$. Вычислите координаты четвертой вершины D.

11. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(4;\ 0;\ 1)$, $C(1;\ -1;\ 0)$ — три вершины равнобедренной трапеции $ABCD$. Вычислите координаты вершины D, если $(AB)\parallel(CD)$.

12. На луче AB дана точка M такая, что $|AM|=5$. Вычислите координаты точки M по координатам точек A и B: 1) $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ 1)$; 2) $A(1;\ 1;\ -1)$, $B(0;\ -1;\ 3)$.

13. Докажите, что три точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(2;\ -1;\ 0)$, $C(3;\ -4;\ 1)$ принадлежат одной прямой.

14. Даны две точки: $A(2;\ -1;\ 1)$ и $B(-1;\ 1;\ -2)$. Вычислите координаты точки C, если $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}=-2$.

15. Дан треугольник ABC. Прямая l пересекает прямые BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{C_1A_1}$ коллинеарны.

16. На оси Oz найдите точку, равноудаленную от точек $A(2;\ 3;\ 1)$ и $B(-2;\ 0;\ -1)$.

17. Вычислите координаты точки, принадлежащей координатной оси Oy и одинаково удаленной от точек $A(2;\ -1;\ 1)$ и $B(0;\ 1;\ 8)$.

18. Даны четыре точки: $A(-4;\ -4;\ 4)$, $B(-3;\ 2;\ 2)$, $C(2;\ 5;\ 1)$, $D(3;\ -2;\ 2)$. Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

19. Вычислите расстояния от $M(3;\ 4;\ -1)$ до осей координат.

20. Даны три точки: $A(1;\ -2;\ 0)$, $B(-1;\ 1;\ 3)$, $C(-2;\ 0;\ 1)$. Вычислите координаты проекции точки C на прямую AB.

21. Вычислите расстояние между прямой AB и координатными осями, если: 1) $A(3;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ -1;\ 2)$; 2) $A(2;\ 3;\ -1)$, $B(-1;\ 1;\ 1)$.

22. Вычислите косинусы углов треугольника ABC, если: 1) $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ -1)$, $C(-3;\ 0;\ 2)$; 2) $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ -1;\ 1)$, $C(3;\ 0;\ -4)$.

23. Вычислите координаты M центра окружности, описанной вокруг треугольника ABC, если: 1) $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(-2;\ -1;\ 0)$, $C(1;\ 1;\ -3)$; 2) $A(-1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 2)$.

24. Составьте уравнение множества всех точек, удаленных от координатной плоскости Oyz на данное расстояние d.

25. Составьте уравнение множества всех точек, равноудаленных от двух координатных плоскостей Oxy и Oxz.

26. Составьте уравнение множества всех точек, находящихся от оси Ox на расстоянии d.

27. Даны две точки: A и B. Составьте уравнение множества всех точек M, для которых $\widehat{AMB} = 90°$: 1) $A\ (2;\ 0;\ 1)$, $B\ (-2;\ 4;\ 1)$; 2) $A\ (-1;\ 2;\ 0)$, $B\ (1;\ 0;\ 4)$.

28. Составьте уравнение множества всех точек M, для которых угол $(\widehat{\vec{OM},\ \vec{k}})$ равен 45°.

29. Выясните, какое множество точек задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 0$.

30. Выясните, какие множества точек задаются уравнениями: 1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $x^2 - xy = 0$; 3) $y^2 + z^2 = 1$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

31. Выясните, какие множества точек задаются неравенствами: 1) $x > 0$; 2) $yz > 0$; 3) $x^2 + y^2 - 1 > 0$.

§ 3. Уравнение плоскости

32. Точка $A\ (2;\ 1;\ m)$ принадлежит плоскости $3x - y + 2z - 1 = 0$. Вычислите m.

33. Даны плоскости $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Докажите, что условие $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$ является необходимым и достаточным для того, чтобы данные плоскости были параллельны.

34. Найдите уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки $A\ (2;\ 1;\ 3)$ и $B\ (0;\ -1;\ 1)$, и перпендикулярной к этому отрезку.

35. Точка $A\ (1;\ m;\ n)$ принадлежит прямой пересечения плоскостей $x + y - z - 4 = 0$, $2x - y + 4z - 1 = 0$. Вычислите m и n.

36. Даны две точки $A\ (1;\ 3;\ m)$ и $B\ (-2;\ m;\ 1)$ и плоскость $3x + 4y - z - 1 = 0$. При каких значениях m прямая AB параллельна плоскости?

37. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, параллельного прямой пересечения плоскостей $3x - y - z + 2 = 0$, $x + z - 1 = 0$.

38. Найдите уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x - 5y + 2z + 11 = 0$ и проходящей через точку $A\ (3;\ -2;\ -4)$.

39. Докажите, что точки $A\ (2;\ 3;\ -4)$ и $B\ (1;\ -4;\ 1)$ лежат по разные стороны от плоскости $2x - y + z + 1 = 0$.

40. Докажите, что луч AB ($A\ (1;\ 1;\ -1)$, $B\ (-1;\ 0;\ 0)$) пересекает плоскость α $(x - y + 2z - 3 = 0)$.

41. Выясните, имеют ли четыре плоскости общую точку:
1) $x + y = 0$, $z - 1 = 0$, $x - z + 2 = 0$, $2x + y + 1 = 0$;
2) $x - y = 0$, $2z + 1 = 0$, $y + z - 1 = 0$, $2x - y + 2z + 1 = 0$.

42. Даны плоскости $x + 2y - z - 1$ и $2x + y + z = 0$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A\ (1;\ 1;\ -1)$ и прямую пересечения данных плоскостей.

43. Прямая l пересекает координатные плоскости Oxz и Oyz в точках A (2; 0; —1), B (0; 2; 4). Вычислите координаты точки пересечения прямой l с третьей координатной плоскостью.

44. Найдите координаты точек пересечения прямой AB с координатными плоскостями, если: 1) A (1; 1; —4), B (—2; 3; 1); 2) A (1; 2; 1), B (—2; —3; —1).

45. Докажите, что точки A (1; 1; 1), B (2; —1; 1), C (3; 4; —1), D $(4; 0; -\frac{3}{7})$ принадлежат одной плоскости.

46. Через точку M (1; —1; 2) проведите плоскость, перпендикулярную прямой пересечения плоскостей $3x - y - z - 1 = 0$, $2x + y + 3z + 4 = 0$.

47. Вычислите расстояние от точки A (2; 1; 1) до прямой пересечения плоскостей $3x + y - z = 2$, $x - y = 0$.

48. Даны точка M (1; 2; —4) и плоскость $y - z = 0$. Вычислите координаты точки M_1, симметричной точке M относительно данной плоскости.

49. В плоскости $3x - y - z + 1 = 0$ дан квадрат $ABCD$. Вычислите координаты вершин B и D, если A (2; 4; 3), C (1; 1; 3).

50. Сфера проходит через точку M (4; 3; 6) и касается координатных плоскостей. Составьте уравнение этой сферы.

51. Дан тетраэдр $SABC$ с прямым трехгранным углом S. Найдите множество точек P, для которых $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 3\,|PS|^2$.

52. Дано изображение осей координат Ox, Oy, Oz. Постройте изображения следов[1] плоскостей 1) $3x - 4y + 6z - 12 = 0$; 2) $x + y - 2z + 6 = 0$ на координатных плоскостях.

53. Дано изображение осей координат Ox, Oy, Oz. Постройте изображение прямой пересечения плоскостей $3x - y + z - 6 = 0$ и $2x + y - z + 4 = 0$.

54. Постройте изображение точки пересечения прямой, проходящей через точки A (1; —1; 2) и B (0; —4; 1) с плоскостью $2x + y + z - 6 = 0$.

55. Постройте изображение плоскости, проходящей через точку A (1; 2; —1) параллельно плоскости Oxy.

56. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; —2; 2), если задано уравнение $x + 2y - 1 = 0$ ее следа в плоскости Oxy.

57. Составьте уравнение плоскости, если заданы уравнения ее следов в плоскостях Oxy и Oxz: 1) $x + y - 2 = 0$, $2x - z - 4 = 0$; 2) $x - y - 1 = 0$, $3x + 2z - 3 = 0$.

58. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A (1; 0; —2) и B (0; 3; 1) параллельно оси Oz.

---

[1] Следом плоскости α на данной плоскости проекций π называется прямая $l = \alpha \cap \pi$.

59. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A\ (1;\ -1;\ 1)$ и $B\ (2;\ 0;\ -1)$ параллельно направлению вектора $\vec{a} = (3;\ 1;\ -1)$.

60. Даны четыре точки: $A\ (1;\ 1;\ 1)$, $B\ (2;\ -1;\ 0)$, $C\ (-1;\ 0;\ 1)$, $D\ (-2;\ 1;\ 1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через (AB) параллельно (CD), и плоскости, проходящей через (CD) параллельно (AB).

61. Вычислите координаты ортогональной проекции точки $M\ (2;\ -1;\ 1)$ на плоскость $y - z = 0$.

62. Найдите координаты параллельной проекции A_1 точки $A\ (2;\ -1;\ 1)$ на координатную плоскость Oxy, если $\overrightarrow{AA_1} = k\vec{a}$, где $\vec{a} = (1;\ -2;\ 3)$.

63. Найдите угол α, который образует вектор $\vec{a} = (6;\ 2;\ 3)$ с плоскостью $3x + 2y + 6z - 1 = 0$.

Глава V МНОГОГРАННИКИ

§ 1. Призма. Параллелепипед

1. Докажите, что число ребер призмы кратно трем.

2. 1) Докажите, что сумма двугранных углов при всех боковых ребрах четырехугольной призмы равна 360°.

2) Чему равна эта сумма для n-угольной призмы?

3. 1) Все диагональные сечения правильной призмы равновелики. Найдите число сторон основания призмы.

2) Правильная призма не имеет параллельных диагональных сечений, но имеет диагональные сечения без общих внутренних точек. Найдите число сторон основания призмы.

4. Каждое ребро правильной пятиугольной призмы равно a. Найдите длины диагоналей.

5. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей: 1) через внутренние точки M, N, P трех боковых граней; 2) через точки M, N, P, где M принадлежит грани AA_1B_1B, $N \in \triangle ABC$, $P \in \triangle A_1B_1C_1$.

6. Постройте сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей: 1) через внутренние точки M, N, P трех боковых граней; 2) через точки M, N, P, принадлежащие соответственно граням $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1B_1B.

7. 1) Постройте сечение правильной четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ призмы и параллельной непересекающей ее диагонали основания.

2) Найдите площадь сечения, если боковое ребро призмы равно $2b$, а сторона основания равна b.

8. Длины всех ребер прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a. 1) Постройте общий перпендикуляр прямых AA_1 и BC_1, вычислите его длину. 2) Найдите угол между (AA_1) и (BC_1).

9. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно a. Найдите: 1) длину общего перпендикуляра непересекающихся диагоналей боковых граней призмы; 2) угол между одной из этих диагоналей и непересекающей ее медианой основания призмы.

10. Найдите площадь полной поверхности прямой треугольной призмы, стороны основания которой равны 58 *см*, 50 *см*, 12 *см*, а боковое ребро равно большей высоте основания.

11. Расстояния между боковыми ребрами треугольной призмы пропорциональны числам 26, 25, 3; площадь перпендикулярного сечения равна 144 $м^2$. Дополните условие, указав длину какого-нибудь отрезка, и вычислите площадь боковой поверхности призмы.

12. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, у которого $|AB| = |AC| = 30$ *см*, $|BC| = 36$ *см*, вершина A_1 одинаково удалена от вершин A, B и C и $|AA_1| = 39$ *см*. Найдите площадь полной поверхности призмы.

13. Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен $\frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$, где d_1, d_2, d_3 — диагонали граней, имеющих общую точку.

14. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d_1, диагональ боковой грани d_2, диагональ основания d_3. Найдите площадь основания.

15. Докажите, что сумма квадратов площадей диагональных сечений параллелепипеда равна сумме квадратов площадей всех его боковых граней.

16. Докажите, что сумма квадратов длин всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов длин всех его ребер.

17. Через середины M и N ребер AB и AD и через вершину C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость. Постройте сечение куба этой плоскостью и вычислите площадь сечения, если ребро куба равно a.

18. Прямой параллелепипед, основанием которого служит ромб с тупым углом α, пересечен плоскостью, проходящей через вершину тупого угла так, что в сечении получился квадрат. Найдите угол между плоскостями сечения и основания.

19. Докажите, что для любого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ верно равенство: $|AC_1|^2 = |AC|^2 + |AB_1|^2 + |AD_1|^2 - |AB|^2 - |AD|^2 - |AA_1|^2$.

§ 2. Пирамида

20. Докажите, что любая пирамида имеет четное число ребер.

21. 1) Найдите сумму всех плоских углов четырехугольной пирамиды.

2) Чему равна сумма всех плоских углов для n-угольной пирамиды?

22. В каких границах заключена величина плоского угла при основании: 1) правильной четырехугольной пирамиды; 2) правильной n-угольной пирамиды?

23. Существует ли правильная пирамида, длины всех ребер которой равны между собой, а число сторон основания равно: 1) 5; 2) 6; 3) 8?

24. На двух боковых ребрах пятиугольной пирамиды, не лежащих в одной грани, даны точки M и N. Постройте точку пересечения прямой MN: 1) с плоскостью основания; 2) с плоскостью боковой грани, не содержащей ни одной из данных точек.

25. Постройте сечение пятиугольной пирамиды $SABCDE$ плоскостью, проходящей через точку M, принадлежащую ребру SA, и параллельной грани SCD.

26. Основание пирамиды $ABCD$ — ромб, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и образует угол 30° с боковым ребром SA. 1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину A и перпендикулярной к ребру SC; 2) найдите площадь сечения, если $|AC| = a$, $|BD| = b$.

27. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при ребре основания равен φ. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

28. 1) Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно боковому ребру, которое противолежит этой диагонали.

2) Вычислите площадь сечения, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ.

29. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, у которой двугранный угол при ребре основания равен 60°. 1) Постройте общий перпендикуляр прямых AB и SC; 2) найдите его длину, если $|AB| = a$.

30. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ вдвое больше длины стороны основания. Найдите угол: 1) между (AC) и (SB); 2) между (SM) и (BN), где M и N — соответственно середины $[AB]$ и $[SC]$.

31. Основание четырехугольной пирамиды — параллелограмм, углы диагональных сечений при вершине пирамиды равны 90°. Докажите, что этот параллелограмм является прямоугольником.

32. Основание пирамиды — квадрат, величины двугранных углов при сторонах основания пропорциональны числам 1, 2, 4, 2. Найдите величины этих углов.

33. 1) В треугольной пирамиде равны углы между боковыми ребрами и плоскостью основания. Равны также углы между боковыми гранями и плоскостью основания. Докажите, что пирамида правильная.

2) Обобщите задачу на случай n-угольной пирамиды.

34. Основание пирамиды $MABCD$ — прямоугольник. Докажите, что $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$.

35. Тетраэдр имеет две пары взаимно перпендикулярных противолежащих ребер. Докажите, что вершины тетраэдра проектируются ортогонально в ортоцентры противолежащих граней.

36. Докажите, что произвольный тетраэдр можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится ромб.

37. Пары противолежащих ребер тетраэдра имеют длины a и a_1, b и b_1, c и c_1. Докажите, что для угла φ между ребрами, имеющими длины a и a_1, верна формула:

$$\cos\varphi = \frac{|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2|}{2aa_1}.$$

38. Высота пирамиды равна H. На каком расстоянии от вершины пирамиды нужно провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения равнялась: 1) $\frac{1}{4}$ площади основания; 2) $\frac{1}{n}$ площади основания?

39. 1) Плоскость α делит боковые ребра пирамиды на отрезки, которые относятся как $m : n$ (считая от вершины). Докажите, что эта плоскость параллельна плоскости основания пирамиды.

2) Найдите площадь сечения, если площадь основания равна Q.

40. 1) Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 12 *см*, 10 *см*, высота равна 6 *см*. Через сторону большего основания и центр меньшего проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения.

2) Каким должно быть отношение сторон оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды, чтобы построенное сечение было прямоугольником?

41. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 12 *см*, 6 *см*, высота 4 *см*. Через сторону большего основания и противолежащую ей вершину меньшего основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

42. 1) Докажите, что центры граней правильного октаэдра служат вершинами куба.

2) Найдите ребро куба, если ребро октаэдра равно a.

43. Найдите величину двугранного угла: 1) правильного икосаэдра; 2) правильного додекаэдра.

44. 1) Докажите, что отрезок, соединяющий центры M_1 и M_2 противолежащих граней правильного октаэдра, перпендикулярен к плоскостям этих граней.

2) Найдите $|M_1M_2|$, если ребро октаэдра равно a.

§ 3. Площадь поверхности пирамиды

45. В правильной треугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна $96\sqrt{3}$ *см*^{2}, а площадь полной поверхности $112\sqrt{3}$ *см*^{2}. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

46. Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды равно b, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности.

47. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6 *см*. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы площадь боковой поверхности была равна 60 *см*^{2}?

48. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, проведенная через сторону основания, делит боковую поверхность на равновеликие части, а двугранный угол при основании — пополам. Найдите величину этого угла.

49. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a, высота пирамиды равна h и проходит через вершину основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

50. Основание пирамиды — правильный шестиугольник со стороной a, две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания, высота пирамиды равна a. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

51. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 *дм* и 15 *дм*, все боковые ребра имеют равные длины, высота пирамиды равна 4 *дм*. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

52. Боковые ребра четырехугольной пирамиды равны между собой, плоские углы при вершине равны α, β, α и β. Высота пирамиды равна h. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

53. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, параллельные стороны которой равны 4 *см* и 9 *см*, все двугранные углы при сторонах основания пирамиды равны, большее боковое ребро равно 7,5 *см*. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

54. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 3 *см* и 9 *см*, площадь боковой поверхности 36 $см^2$. Найдите высоту усеченной пирамиды и угол между плоскостями боковой грани и основания.

55. Стороны оснований правильной n-угольной усеченной пирамиды равны a и b $(a > b)$, угол между плоскостями боковой грани и основания равен φ. Найдите площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

56. 1) Найдите площади боковой и полной поверхностей правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны основания которой равны 10 *см* и 2 *см*, а высота 3 *см*.

2) Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 3 *дм* и 6 *дм*; высота равна 0,5 *дм*. Найдите площадь ее полной поверхности.

§ 4. Объемы многогранников

57. Площадь поверхности куба равна 96 $дм^2$. Найдите его объем.

58. У двух прямоугольных параллелепипедов равновелики основания и диагональные сечения. Равны ли объемы параллелепипедов?

59. 1) Найдите массу стальной двутавровой балки длиной 4 *м*. Сечение балки показано на рисунке 1, размеры даны в миллиметрах. (Плотность стали $\approx 7{,}8$ $г/см^3$.)

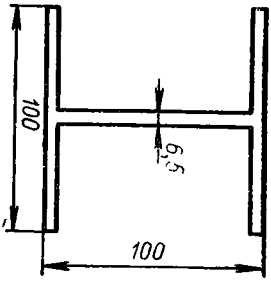

Рис. 1

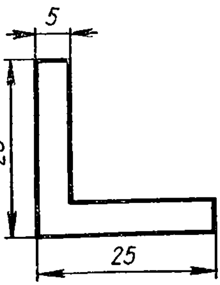

Рис. 2

2) Вычислите массу полосы профильного железа длиной 25,75 *м*. Поперечное сечение показано на рисунке 2, размеры даны в миллиметрах.

60. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $a\sqrt{5}$, $a\sqrt{10}$, $a\sqrt{13}$. Найдите его объем.

61. Диагонали прямого параллелепипеда равны 8 *м* и 10 *м*, стороны основания — 5 *м* и 3 *м*. Найдите его объем.

62. Основание прямого параллелепипеда — ромб, у которого меньшая диагональ равна d и острый угол равен α. Площадь боковой поверхности равна S. Найдите объем параллелепипеда.

63. Боковое ребро прямого параллелепипеда удалено от противолежащего диагонального сечения на m, диагональ этого сечения равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем параллелепипеда, если $m = 4{,}2$ *дм*, $l = 8$ *дм*, $\alpha = 56°$.

64. Найдите двугранные углы при боковых ребрах прямого параллелепипеда, объем которого равен V, стороны основания — a и b, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

65. В прямом параллелепипеде две диагонали, равные d, образуют угол α. Площадь каждой из боковых граней равна S. Найдите объем параллелепипеда.

66. Диагональ основания правильной четырехугольной призмы равна d_1, диагональ призмы равна d_2. Найдите ее объем.

67. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC, у которого $|AB| = |AC| = b$, $\widehat{A} = \alpha$. Известно, что боковая грань призмы является квадратом. Найдите объем призмы.

68. Основание прямой призмы — равнобедренная трапеция, боковые стороны и меньшее основание которой равны a, острый угол трапеции равен α. Сечение, проходящее через боковую сторону нижнего основания и середину меньшей из параллельных сторон верхнего основания, является ромбом. Найдите объем призмы при $a = 6{,}4$ *см*, $\alpha = 54°$.

69. 1) Докажите, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между плоскостью этой грани и противолежащим боковым ребром.

2) Докажите, что объем призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению полусуммы площадей параллельных боковых граней на расстояние между их плоскостями.

70. 1) Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной диагонали AC основания и проходящей через середины ребер BC и A_1B_1.

2) Найдите отношение объемов полученных частей параллелепипеда.

71. В наклонном параллелепипеде основание и боковая грань —

прямоугольники, их площади соответственно равны 20 $дм^2$ и 24 $дм^2$, угол между их плоскостями равен 30°. Третья грань параллелепипеда имеет площадь 15 $дм^2$. Найдите объем параллелепипеда.

72. 1) В треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 *см*, 13 *см* и 30 *см*; площадь боковой поверхности 480 $см^2$. Найдите объем призмы.

2) Площади боковых граней наклонной треугольной призмы пропорциональны числам 20, 37, 51, боковое ребро равно 0,5 *дм*, площадь боковой поверхности 10,8 $дм^2$. Найдите объем призмы.

73. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Найдите объем пирамиды, если: 1) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α; 2) угол между плоскостями боковой грани и основания равен α; 3) плоский угол при вершине пирамиды равен α.

74. 1) По данным стороне a основания и боковому ребру b правильной n-угольной пирамиды найдите ее объем.

2) Пользуясь полученной формулой, найдите по данным a и b объемы правильных треугольной и четырехугольной пирамид.

75. Ученик составил задачу: «В правильной четырехугольной пирамиде площадь основания равна Q, площадь боковой грани равна $\frac{1}{6}Q$. Найдите ее объем». Имеет ли задача решение?

76. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна m, а диагональное сечение равновелико основанию.

77. Диагональное сечение правильной шестиугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c. Найдите объем пирамиды.

78. Основанием пирамиды служит прямоугольник с площадью Q, две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β. Найдите объем пирамиды.

79. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Угол между одной из боковых граней и плоскостью основания равен α, а угол между каждым из боковых ребер, лежащих в этой грани, и плоскостью основания равен β. Найдите объем пирамиды.

80. 1) Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон (рис. 3), называется вневписанной окружностью по отношению к данному треугольнику. Обозначив радиус вневписанной окружности, касающейся стороны длиной a, через r_a, полупериметр треугольника через p, площадь через S, докажите, что $r = \frac{S}{p-a}$.

2) В треугольной пирамиде углы между плоскостью основания и каждой из боковых граней равны. Докажите, что высота пирамиды проходит либо через центр окружности, вписанной в основание, либо

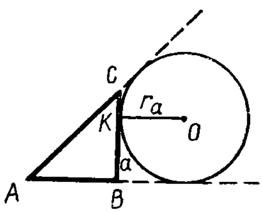

Рис. 3

через центр одной из трех вневписанных окружностей.

81. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, у которого $|AB| = |BC| = 20$ *см*, $|AC| = 32$ *см*; углы между плоскостью основания и каждой из боковых граней равны 45°. Найдите объем пирамиды. Сколько решений будет иметь аналогичная задача, если основанием пирамиды служит: а) разносторонний треугольник; б) равносторонний треугольник?

82. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник со сторонами $|AB| = |BC| = a$ и углом $\widehat{BAC} = \alpha$. Через (AC) и B_1 проведена плоскость, угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен β. Найдите объем отсеченной четырехугольной пирамиды.

83. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник; боковые грани, проходящие через его катеты, перпендикулярны к плоскости основания. Наклонные боковые ребра равны 2 *дм* и 3 *дм*, они образуют с плоскостью основания углы, которые относятся как 2 : 1. Найдите объем пирамиды.

84*. Три ребра тетраэдра, выходящие из одной вершины, равны a, b, c; противолежащие им плоские углы при той же вершине равны α, β, γ. Докажите, что объем тетраэдра выражается формулой:

$$V = \frac{1}{3} abc \sqrt{\sin\delta \sin(\delta - \alpha) \sin(\delta - \beta) \sin(\delta - \gamma)},$$

где $\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$.

85*. Противолежащие ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ имеют длины m и n, расстояние между ними равно h, а угол равен φ. Докажите, что объем тетраэдра можно вычислить по формуле: $V = \frac{1}{6} mnh \sin\varphi$.

86*. На ребрах AD и BC тетраэдра $ABCD$ соответственно даны отрезки MN и PQ, причем $|MN| = \frac{1}{3}|AD|$, $|PQ| = \frac{1}{3}|BC|$. Найдите отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $MNPQ$.

87. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a и b $(a > b)$, острый угол боковой грани равен α. Найдите объем.

88. Основания усеченной пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны m и n $(m > n)$, две боковые грани перпендикулярны основанию, а третья составляет с ним угол α. Найдите объем.

89. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1. Найдите отношение объемов полученных частей куба.

90. По данному ребру a найдите площадь поверхности и объем: 1) правильного икосаэдра; 2) правильного додекаэдра.

91. Дан правильный многогранник Ф. Докажите, что сумма расстояний от точки M, принадлежащей Ф, до плоскостей всех его граней не зависит от выбора точки M.

Глава VI ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Изображение окружности. Цилиндр и конус

1. На заданном изображении окружности постройте изображение ее центра.

2. Дано изображение окружности[1] и описанной трапеции $ABCD$ ($[AD] \parallel [BC]$). Постройте изображения высот трапеции, проведенных из точек B и C.

3. 1) Дано изображение окружности и треугольника, вписанного в эту окружность. Постройте изображения высот треугольника.

2) Дано изображение окружности и описанного треугольника. Постройте изображения высот треугольника.

4. На изображении круга постройте изображение: 1) сектора с углом 15°; 2) сегмента с дугой 150°.

5. На данном изображении окружности постройте изображение ромба с углом 60°, описанного около этой окружности.

6. На данном изображении окружности постройте изображение вписанной в окружность трапеции: 1) основания которой стягивают дуги 90° и 120°; 2) основание которой стягивает дугу 90°, а боковая сторона — дугу 60°.

7. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра, равная d, образует с высотой развертки угол α. Найдите площади основания и осевого сечения цилиндра.

8. Какие размеры должен иметь прямоугольный лист кровельного железа для изготовления водосточной трубы длиной 140 *см* и диаметром 10 *см*? (На шов добавить 2,0 *см*.)

9. Отношение диаметра основания к высоте цилиндра равно $m : n$, площадь полной поверхности цилиндра равна Q. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

10. Площадь полной поверхности цилиндра равна S, диагональ осевого сечения составляет угол φ с плоскостью основания. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

---

[1] Для простоты построения считаем заданным также изображение центра окружности.

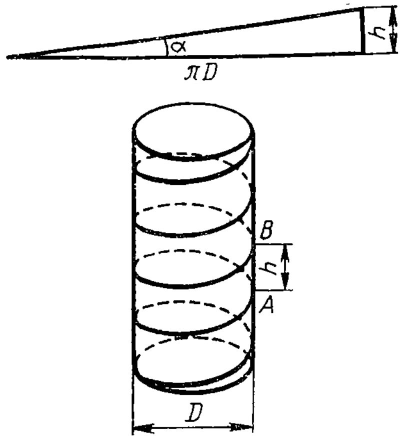

Рис. 4

11. Диагонали осевого сечения цилиндра образуют угол φ, площадь основания равна Q. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

12. На цилиндрический стержень диаметром $D = 2$ *см* наверните вырезанный из бумаги прямоугольный треугольник с катетами $h = 1$ *см* и $\pi D = 2\pi$ *см* (рис. 4). Гипотенуза при этом образует неплоскую кривую, которая называется витком винтовой линии. Катет h называется шагом, угол α, противолежащий этому катету (в прямоугольном треугольнике),— углом подъема винтовой линии.

Цилиндрический стержень диаметром D имеет винтовую резьбу, шаг которой равен h. Найдите угол α подъема резьбы и длину l n витков резьбы. Вычислите α и l при $D = 24$ *мм*, $h = 2{,}0$ *мм*.

13. Периметр осевого сечения цилиндра равен $2p$. Найдите радиус основания и высоту цилиндра с наименьшей площадью: 1) боковой поверхности; 2) полной поверхности.

14. Диагональ осевого сечения цилиндра равна a. Найдите радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей площадью: 1) боковой поверхности; 2) полной поверхности.

15. Дана точка, принадлежащая основанию конуса. Постройте точку пересечения боковой поверхности конуса и прямой, проходящей через данную точку и середину его высоты.

16. Точки M, N, P принадлежат различным образующим конуса. Постройте точку пересечения плоскости MNP с заданной образующей (или с ее продолжением), не проходящей ни через одну из данных точек.

17. Разверткой боковой поверхности конуса служит полукруг. Найдите угол при вершине осевого сечения.

18. 1) Через вершину конуса проведены две плоскости, образующие равные углы с плоскостью его основания. Докажите, что сечения конуса этими плоскостями конгруэнтны.

2) Через образующие SA и SB, SC и SD конуса проведены плоскости. Известно, что $\widehat{ASB} = \widehat{CSD}$. Докажите, что плоскости ASB и CSD образуют равные углы с плоскостью основания конуса.

19. Через вершину конуса проведена плоскость. Найдите угол при вершине получившегося сечения, если известно, что углы разверток полученных частей боковой поверхности конуса равны 30° и 60°.

20. Через вершину конуса проведено сечение под углом φ к высоте. Найдите площадь сечения, если образующая конуса, равная l, составляет угол β с плоскостью основания.

21. Дан конус, образующая которого равна l, а радиус основания R. При каком условии у данного конуса существуют две взаимно перпендикулярные образующие?

22. Радиус основания конуса равен R, высота — h. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая боковую поверхность по двум взаимно перпендикулярным образующим. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

23. Конусностью детали, имеющей форму конуса, называется отношение диаметра его основания к высоте. 1) Найдите образующую конуса, у которого высота равна 245 *мм*, а конусность $1 : 10$. 2) Вычислите конусность детали, у которой угол при вершине осевого сечения равен $12°$. 3) Выведите формулу, выражающую зависимость между конусностью и углом при вершине осевого сечения.

24. Площадь основания конуса равна Q, площадь осевого сечения S. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

25. Образующая конуса равна 20 *см*, площадь полной поверхности 400 *см*^{2}. Найдите угол развертки конуса.

26. Площадь полной поверхности конуса равна Q, площадь боковой поверхности q. Найдите: 1) угол при вершине осевого сечения; 2) угол развертки боковой поверхности.

27. Площадь полной поверхности конуса равна S, площадь осевого сечения Q. Найдите площадь основания конуса.

28. Угол при вершине осевого сечения конуса равен φ, площадь полной поверхности Q. Найдите высоту конуса.

29. Площадь боковой поверхности конуса равна Q, угол при вершине осевого сечения равен β. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен φ.

30. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, образующая l. Найдите образующую и высоту полного конуса, от которого отделен усеченный конус.

31. 1) Образующая усеченного конуса длиной l составляет с плоскостью основания угол φ, диаметр меньшего основания равен d. Найдите площадь осевого сечения.

2) Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $1 : 3$, образующая составляет с плоскостью основания угол $45°$, высота равна h. Найдите площади оснований.

32. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r. Высота разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите площади сечений.

33. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна Q. Найдите площадь сечения, которое проходит через хорды оснований, стягивающие дуги, равные 2α, если известно, что угол между плоскостями сечения и основания равен β.

34. Диагонали осевого сечения усеченного конуса образуют угол φ, бо́льшая из площадей оснований равна Q, угол между образующей и плоскостью основания равен β. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

35. Какую высоту будет иметь ведро, если у заготовки для изготовления его боковой поверхности угловые величины дуг равны 72°, а радиусы 92 *см* и 65 *см*?

36. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна S, угол между образующей и плоскостью основания φ. Найдите площадь его боковой поверхности.

37. Из круглого листа алюминия изготовлен путем штампования стакан, диаметр дна которого 40 *мм*, диаметр верхней (открытой) части 60 *мм*, а высота стакана 65 *мм*. Найдите диаметр листа.

38. Треугольник со сторонами 13 *см*, 14 *см*, 15 *см* вращается вокруг оси, проходящей через вершину меньшего угла и перпендикулярной к стороне, имеющей длину 14 *см*. Найдите площадь поверхности фигуры вращения[1].

39. Треугольник со сторонами 3 *дм*, 5 *дм* и углом 120° между ними вращается вокруг оси, проходящей через вершину большего угла и одинаково наклоненной к обеим сторонам треугольника. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

40. Равнобедренная трапеция, меньшее основание и боковые стороны которой равны a, острый угол α, вращается вокруг оси, проходящей через вершину острого угла и перпендикулярной основанию. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

§ 2. Сфера и шар

41. 1) Докажите, что через четыре точки, не принадлежащие плоскости, можно провести сферу и притом только одну.

2) Докажите, что через окружность и точку, не принадлежащую ее плоскости, можно провести сферу и притом только одну.

42. 1) Две окружности ω_1 и ω_2 лежат в параллельных плоскостях. При выполнении какого условия через ω_1 и ω_2 можно провести сферу?

2) Две окружности, расположенные в различных плоскостях, имеют две общие точки. Докажите, что через эти окружности можно провести сферу и притом только одну.

43. Даны два прямоугольника $ABCD$ и ABC_1D_1. Докажите, что все вершины прямоугольников принадлежат одной сфере.

44. Докажите, что окружность, не лежащая на сфере, не может иметь со сферой более двух общих точек.

45. Из точки M, взятой на сфере радиуса 30 *см*, проведены две взаимно перпендикулярные хорды MA и MB длиной 24 *см* и 10 *см*

---

[1] Если ломаная вращается вокруг оси, то площадью фигуры вращения будем называть сумму площадей фигур, полученных при вращении всех звеньев ломаной.

соответственно. 1) Проходит ли плоскость AMB через центр сферы? 2) На каком расстоянии от центра сферы находится хорда AB?

46. Точки A, B, C принадлежат сфере радиуса 25 *см*. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ABC, если хорды, соединяющие данные точки, равны: 1) $|AB| = 40$ *см*, $|AC| = 32$ *см*, $|BC| = 24$ *см*; 2) $|AB| = 21$ *см*, $|AC| = 17$ *см*, $|BC| = 10$ *см*.

47. Составьте уравнение сферы с центром S и радиусом R, если: 1) S (0; 0; 0), $R = \sqrt{2}$; 2) S (0; 2; —3), $R = 3$.

48. Найдите центр и радиус сферы, заданной уравнением: 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; 2) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 6$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z = 6$.

49. 1) Найдите уравнение сферы с центром в точке S(0; 0; 0), если известно, что она проходит через точку M (2; —3; 0).

2) Составьте уравнение сферы с центром S (5; —3; 7), проходящей через точку A (2; 1; 6).

50. Составьте уравнение сферы единичного радиуса, если известно, что она проходит через точки O (0; 0; 0), A (1; 0; 0), B (0; 1; 0).

51. 1) Составьте уравнение сферы с радиусом, равным $\sqrt{5}$, если известно, что центр сферы принадлежит плоскости Oxy и сфера проходит через начало координат и точку M (—2; 0; 2).

2) Составьте уравнение сферы с радиусом, равным 3, если известно, что центр сферы принадлежит оси Oy и сфера проходит через точку M (—2; —1; —2).

52. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 169$. Через начало координат O и точку P (1; 2; 4) проведена прямая l. Найдите координаты точек пересечения прямой l со сферой.

53. Прямая задана точками A (1; 2; —1), B (3; 0; 2). Найдите координаты точек пересечения (AB) со сферой $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = \frac{17}{4}$.

54. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Через точки S (0; 0; R), $A_1(a; b; 0)$ проведена прямая l, пересекающая сферу в точке $A(x_0; y_0; z_0)$. Найдите координаты точки A.

55. Сечения сферы радиуса R двумя параллельными плоскостями имеют радиусы R_1 и R_2. Найдите расстояние между этими плоскостями.

56. Плоскость, проходящая через точку M, принадлежащую сфере радиуса R, составляет с радиусом, проведенным в эту точку, угол φ. Найдите радиус сечения.

57. Через точку M (3; 4; 12), принадлежащую сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведены плоскости, перпендикулярные осям координат. Вычислите радиусы сечений.

58. Внутри сферы даны точки A и B. Проведите через эти точки плоскость, пересекающую сферу по окружности наименьшего радиуса.

59. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. 1) Составьте уравнение плоскости α, которая касается сферы в точке M (1; —2; —2). 2) Со-

ставьте уравнение плоскости β, которая касается данной сферы и параллельна касательной плоскости α (но не совпадает с ней).

60. Плоскость α касается сферы в точке A. Докажите, что сечения сферы плоскостями, проходящими через точку A и составляющими равные углы с плоскостью α, имеют равные радиусы.

61. 1) Две касательные плоскости к сфере пересекаются по прямой a. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна к a.

2) Окружность ω является сечением сферы. Докажите, что прямая, касательная к этой окружности, является касательной прямой к сфере.

62*. Скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 касаются сферы. Проведите прямую l_3, пересекающую l_1 и l_2 и касающуюся сферы.

63. Фигура вращения ограничена двумя сферами, имеющими общий центр. Докажите, что сечение фигуры плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению фигуры плоскостью, касательной к внутренней сфере.

64. Докажите, что если прямые, имеющие общую точку, пересечены сферой, то произведение расстояний от этой точки до точек пересечения каждой прямой со сферой есть величина постоянная.

65. Из точки M проведены к сфере две касательные прямые. Докажите, что их отрезки от точки M до точки касания имеют равные длины.

66. Стороны треугольника, равные a, b, c, касаются сферы радиуса R. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника. Вычислите при $a = b = 10$ *см*, $c = 12$ *см*, $R = 5$ *см*.

67. Стороны ромба, равные 8 *см*, касаются сферы радиуса 4 *см*, угол ромба равен 60°. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

68. Плоскости α и β касаются сферы ω радиуса R в точках T_1 и T_2. Касательная прямая к сфере пересекает плоскости в точках A и B. Вычислите расстояние $|AB|$, если $|AT_1| = d_1$, $|BT_2| = d_2$.

69. На каком расстоянии должна находиться точка M от центра данной сферы радиуса R, чтобы через эту точку можно было провести к сфере перпендикулярные касательные?

70. 1) В скольких гомотетиях можно одну из двух концентрических сфер отобразить на другую?

2) Докажите, что если две сферы касаются, то точка касания для них является центром гомотетии.

§ 3. Объемы фигур вращения. Площадь сферы и ее частей

71. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями: 1) $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; 2) $y = ax^2$ $(a > 0)$,

$x = m$, $x = n (m < n)$, $y = 0$; 3) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; 4) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$.

72. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, граница которой задана уравнениями: 1) $y = x^2$, $x = y^2$; 2) $y = 2 - x^2$, $y = 1$; 3) $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$; 4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

73. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом α, периметр сечения равен P. Найдите объем цилиндра.

74. 1) Площадь боковой поверхности цилиндра равна S, площадь основания Q. Найдите объем.

2) Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат со стороной a. Найдите объем цилиндра.

75. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра равна d. Найдите угол между диагональю развертки и ее основанием, при котором объем цилиндра будет наибольшим.

76. Цилиндрический шлифовальный круг диаметром 350 *мм* и шириной 60 *мм* сточили на 3 *мм* по диаметру. На сколько процентов уменьшилась его масса и рабочая поверхность?

77. Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, назовем равносторонним. 1) Найдите площадь полной поверхности и объем равностороннего цилиндра с высотой H. 2) Найдите объем равностороннего цилиндра, площадь полной поверхности которого равна S.

78. Найдите объем конуса, диаметр основания которого равен d, а угол при вершине осевого сечения равен α.

79. Треугольник со сторонами 25 *дм*, 29 *дм*, 36 *дм* вращается вокруг: 1) большей стороны; 2) меньшей стороны. Найдите отношение объемов фигур вращения, полученных в первом и во втором случаях.

80. Треугольник ABC со стороной $|BC| = a$ и площадью S вращается вокруг прямой BC. Докажите, что $V = \frac{4}{3}\pi\frac{S^2}{a}$.

81. Известно, что две взаимно перпендикулярные образующие конуса делят окружность его основания на дуги 120° и 240°. Найдите объем конуса, если его высота равна H.

82. Большее основание равнобедренной трапеции равно a, острый угол ее равен α, диагональ трапеции перпендикулярна к ее боковой стороне. Найдите объем фигуры, полученной при вращении трапеции вокруг прямой, содержащей ее большее основание.

83. Конус, диаметр которого равен образующей, называется равносторонним конусом. 1) Найдите площадь полной поверхности и объем равностороннего конуса, высота которого равна H. 2) Площадь полной поверхности равностороннего конуса равна S. Найдите его объем.

84. 1) Полные поверхности равносторонних конуса и цилиндра равновелики. Найдите отношение их объемов.

2) Объемы равносторонних конуса и цилиндра равны. Найдите отношение площадей их боковых поверхностей.

85. Ромб с площадью Q вращается вокруг стороны. Объем фигуры вращения равен V. Найдите углы ромба. Вычислите при $Q = 18$ *см*^{2}, $V = 180$ *см*^{3}.

86. Параллелограмм со сторонами a и b и острым углом α вращается вокруг прямой, содержащей сторону длины a. Найдите объем и площадь поверхности фигуры вращения.

87. Равнобедренный треугольник ABC с углом α при вершине A вращается вокруг прямой AC. При каком значении α объем фигуры вращения будет наибольшим, если $|AC|$ — величина постоянная?

88. Сколько дробинок диаметром 3,0 *мм* содержится в 1 *кг* дроби? (Плотность свинца $\approx$ 11,4 *г/см*^{3}.)

89. В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 *см*, наполненную водой до некоторого уровня, опущены четыре металлических шарика диаметром 1,0 *см*. Как изменится уровень воды в мензурке?

90. Будет ли плавать в воде полый медный шар диаметром 10 *см* и с толщиной стенки: 1) 2 *мм*; 2) 1,5 *мм*?

91. Куб, равносторонний цилиндр, равносторонний конус и шар имеют равные площади полных поверхностей. Объем какой из фигур наибольший и какой — наименьший?

92*. Найдите объем шарового сегмента, в осевом сечении которого хорда длиной a стягивает дугу 2α. Вычислите при $a = 6$ *см*, $\alpha = 60°$.

93*. Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 5,0 *м* и высотой 60 *см*?

94*. Найдите объем линзы (рис. 5), ограниченной двумя сферическими поверхностями и боковой поверхностью цилиндра. Размеры даны в миллиметрах.

95*. Цистерна имеет форму цилиндра, к основаниям которого присоединены конгруэнтные шаровые сегменты. Диаметр цилиндра равен 3,0 *м*, высота сегмента 0,57 *м*. Какую длину должна иметь образующая цилиндра, чтобы вместимость цистерны равнялась 50 *м*^{3}?

96*. 1) Радиус шарового сектора равен R, а хорда осевого сечения равна m. Найдите объем шарового сектора.

2) Радиус шарового сектора равен R, угол в осевом сечении α. Найдите объем шарового сектора.

97*. Площадь осевого сечения шарового сектора в три раза меньше площади большого круга. Во сколько раз объем шарового сектора меньше объема шара?

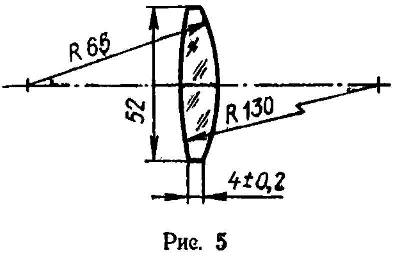

Рис. 5

98*. Двояковыпуклая линза ограничена двумя конгруэнтными сегментными поверхностями. Диаметр линзы равен 50,0 *мм*, а толщина 9,0 *мм*. Найдите площадь поверхности линзы.

99*. 1) Часть сферы, заключенная между двумя параллельными сечениями, называется сферическим поясом. Найдите площадь сферического пояса, если радиус сферы равен R, а высота пояса (расстояние между плоскостями сечений) равна H.

2) Известно, что поверхность полусферы равновелика поверхности сферического пояса, который получен при вращении дуги в 90° вокруг диаметра, параллельного хорде дуги. Найдите отношение радиусов полусферы и сферического пояса.

100*. Площадь сечения шара равна Q, угол, под которым виден из центра шара диаметр сечения, равен α ($\alpha < 180°$). Найдите площадь меньшей сегментной поверхности, отделенной от сферы этим сечением.

101*. Круговой сектор с дугой 120° и площадью S вращается: 1) вокруг прямой, содержащей крайний радиус; 2) вокруг прямой, содержащей средний радиус. Найдите площади поверхностей фигур вращения.

102*. 1) Докажите, что полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, диаметр которого равен высоте конуса.

2) Докажите, что поверхность цилиндра, образованного вращением квадрата вокруг прямой, содержащей его сторону, равновелика поверхности шара, радиус которого равен стороне квадрата.

103*. Площадь сферической поверхности шарового сегмента равна S, дуга в осевом сечении сегмента равна φ. Найдите объем сегмента.

104. В сферу радиуса R вписан цилиндр радиуса r. Найдите объем цилиндра.

105. В конус вписан шар. Найдите объем шара, если образующая конуса равна l и образует с плоскостью его основания угол α.

106. Объем шара, вписанного в конус, равен V. Найдите объем конуса, если известно, что угол при вершине его осевого сечения равен α.

107. В конус с радиусом основания R и высотой H вписан цилиндр. Найдите размеры цилиндра, при которых: 1) его объем имеет наибольшее значение; 2) площадь его боковой поверхности имеет наибольшее значение; 3) площадь его полной поверхности имеет наибольшее значение.

108. 1) Найдите отношение площадей поверхностей шара и списанного цилиндра.

2) Вокруг равностороннего цилиндра описана сфера. Найдите площадь сферы, если площадь полной поверхности цилиндра равна Q.

109. Вокруг шара радиуса r описан конус, угол между его образующей и плоскостью основания равен φ. Найдите площадь полной поверхности конуса. Вычислите при $r = 20{,}2$ *см*, $\varphi = 48°26'$.

110. Дана сфера радиуса R. Найдите радиус основания и высоту вписанного в сферу цилиндра, имеющего наибольшую площадь полной поверхности.

111. В данную сферу вписан конус, имеющий наибольшую площадь поверхности. Найдите угол при вершине его осевого сечения.

Глава VII СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. 1) В цилиндр с радиусом R и высотой H вписана правильная четырехугольная пирамида так, что ее основание вписано в одно из оснований цилиндра, а вершина принадлежит другому основанию. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2) Составьте и решите аналогичную задачу для пирамиды, основанием которой служит правильный треугольник и одно из боковых ребер служит высотой.

2. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат со стороной a. Ребро SD равно b и перпендикулярно плоскости основания. Внутри пирамиды расположен цилиндр так, что окружность одного из оснований вписана в треугольник SCD, а окружность другого основания имеет единственную общую точку с гранью SAB. Найдите высоту цилиндра.

3. Объем конуса равен V. Найдите объем правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$.

4. В конус с радиусом основания R и углом α между образующей и плоскостью основания вписана прямая треугольная призма так, что одно из ее оснований лежит на основании конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Найдите объем призмы, если все ее ребра имеют одинаковые длины.

5. Основанием призмы, вписанной в цилиндр, служит треугольник, два угла которого равны α и β. Найдите отношение площадей боковых поверхностей призмы и цилиндра. Можно ли по этим данным найти отношение: 1) их объемов; 2) площадей их полных поверхностей?

6. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a, две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с ней угол α. Цилиндр, высота которого равна радиусу основания, вписан в пирамиду так, что основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите объем цилиндра.

7. В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится на расстоянии b от противолежащей боковой грани. В пирамиду вписан конус, образующая которого составляет угол

α с плоскостью основания. Найдите объем и площадь полной поверхности конуса.

8. Дан конус, радиус основания которого относится к высоте как $1 : \sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостями боковых граней правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.

9. Дан конус, образующая которого равна l, а радиус основания R. Найдите ребро куба, вписанного в этот конус так, что одна грань куба лежит в основании конуса, а вершины противолежащей грани принадлежат его боковой поверхности.

10. Докажите, что для того, чтобы вокруг пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы вокруг основания пирамиды можно было описать окружность.

11. Докажите, что для того, чтобы вокруг призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы: а) призма была прямой; б) вокруг ее основания можно было описать окружность.

12. Укажите множества точек, пересечением которых является центр сферы: 1) описанной вокруг пирамиды; 2) описанной вокруг призмы.

13. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c. Найдите площадь описанной сферы.

14. Постройте изображение правильного октаэдра, вписанного в шар. Найдите отношение объемов этих фигур.

15. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами a и b, все боковые ребра пирамиды равны m. Найдите площадь сферы, описанной вокруг пирамиды.

16. 1) Докажите, что около всякого тетраэдра можно списать сферу.

2) Докажите, что во всякую пирамиду, двугранные углы которой при основании имеют равные величины, можно вписать сферу.

17. Около шара описан прямой параллелепипед, объем которого в m раз больше объема шара. Найдите углы между плоскостями боковых граней параллелепипеда.

18. Найдите площадь полной поверхности призмы, описанной около сферы, если площадь основания призмы равна S.

19. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом α, боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углами β, площадь сферы, вписанной в пирамиду, равна S. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

20. Около сферы описана усеченная пирамида, бо́льшим основанием которой служит треугольник ABC, где $|AB| = |AC| = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Боковые грани, проходящие через $[AB]$ и $[AC]$, перпендикулярны основанию, а третья боковая грань образует с ним двугранный угол β. Найдите радиус сферы.

Глава VIII ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ПОДОБИЯ

§ 1. Перемещения и подобия плоскости

1. Докажите, что поворот R_M^φ плоскости однозначно определяется заданием направленного угла φ поворота и парой соответственных точек A_1 и A_2.

2. Покажите, что равносторонний шестиугольник, описанный вокруг данной окружности, имеет три оси симметрии.

3. Докажите, что равноугольный шестиугольник, вписанный в данную окружность, имеет три оси симметрии.

4. Докажите, что композиция любого нечетного числа центральных симметрий есть центральная симметрия.

5. Даны два одинаково ориентированных квадрата $MPQR$ и $MUVW$. Докажите, что отрезки PU и RW равны и перпендикулярны.

6. Около окружности описан восьмиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Докажите, что противоположные стороны восьмиугольника попарно конгруэнтны.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты с центрами D и E, причем точки C и D расположены по одну сторону от (AB), а точки A и E — по разные стороны от (BC). Докажите, что угол между прямыми AC и DE равен 45°.

8. Три конгруэнтные окружности имеют общую точку. Докажите, что окружность, проведенная через вторые точки пересечения данных трех окружностей, конгруэнтна данным.

9*. На плоскости даны четыре конгруэнтные окружности, проходящие через одну точку и пересекающиеся вторично в шести точках. Докажите, что четыре окружности, проходящие через каждые три из этих шести точек, взятых по одной на каждой из данных окружностей, пересекаются в одной точке.

10*. Даны три гомотетии плоскости. Постройте такую прямую, которая при всех трех гомотетиях отображается на одну и ту же прямую.

11. Через центр симметрии M двух различных параллельных прямых p и q проведены две прямые m и n. Пересеките данные четыре прямые прямой в точках A, B, C, D так, чтобы $|AB| = |BC| = |CD|$. (Прямые m и n не параллельны p и q.)

12. Четыре прямые попарно пересекаются в шести точках A, B, C, D, E, F; точки D, E, F принадлежат соответственно прямым BC, CA, AB. Докажите, что середины отрезков AD, BE, CF принадлежат одной прямой.

13. Докажите, что если при подобии ω_1 первого рода[1] $\omega_1(A) = B$, $\omega_1(C) = D$, $\omega_1(M) = M$, то существует другое подобие ω_2 также первого рода, при котором $\omega_2(A) = C$, $\omega_2(B) = D$, $\omega_2(M) = M$, причем $\omega_2 \circ \omega_1 = \omega_1 \circ \omega_2$.

14. Докажите, что три прямые, которые содержат соответственно высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

15. Даны два одинаково ориентированных квадрата $OABC$ и $OA_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

16. Две хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что медиана AP треугольника AMC и медиана DQ треугольника DMB пересекают ось симметрии прямых AB и CD под равными углами.

17. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\widehat{C} = 90°$), в котором проведена высота CD. Докажите, что медиана AM треугольника ACB и медиана AN треугольника ACD одинаково наклонены к биссектрисе угла CAB.

18. В треугольнике ABC ($\widehat{C} = 90°$) проведена высота CD. Докажите, что медиана AM треугольника ACD перпендикулярна медиане CN треугольника CDB.

19. Дан равнобедренный треугольник ABC, точка M — середина его основания. Докажите, что если N — проекция точки M на сторону BC, то прямая AN перпендикулярна к медиане CS треугольника CMN.

20. Даны четыре прямые, которые своим пересечением по три задают четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные вокруг этих треугольников, имеют общую точку.

21*. На сторонах треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники BA_1C, CB_1A и AC_1B. Докажите, что центроиды треугольников BA_1C, A_1CB_1, CB_1A, B_1AC_1, AC_1B и C_1BA_1 являются вершинами правильного шестиугольника.

22*. При повороте треугольника ABC вокруг центра описанной вокруг него окружности получаем треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что если угол поворота φ отличен от $180°$, то точки $P = (AB) \cap (A_1B_1)$, $Q = (BC) \cap (B_1C_1)$, $R = (CA) \cap (C_1A_1)$ являются вершинами треугольника, подобного данному. Вычислите коэффициент подобия.

23. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. При повороте вокруг центра окружности на угол $\alpha (\alpha \neq 180°)$ четырехуголь-

[1] Преобразование подобия плоскости (пространства), при котором сохраняется ориентация фигуры, называется подобием первого рода. Если же ориентация меняется на противоположную, то такое преобразование подобия называется подобием второго рода.

ник отображается на четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что точки $P = (AB) \cap (A_1B_1)$, $Q = (BC) \cap (B_1C_1)$, $R = (CD) \cap (C_1D_1)$, $S = (DA) \cap (D_1A_1)$ являются вершинами параллелограмма.

24. В окружность вписан правильный n-угольник. При повороте R_O^φ, где O — центр окружности, а $\varphi \neq 180°$, многоугольник отображается на новый многоугольник. Докажите, что соответствующие при повороте стороны многоугольников (или их продолжения) пересекаются в точках, являющихся вершинами правильного n-угольника. Вычислите длину его стороны, если длина стороны данного n-угольника равна a.

25. При повороте R_M^φ треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что если точки $P = (AB) \cap (A_1B_1)$, $Q = (BC) \cap (B_1C_1)$, $R = (CA) \cap (C_1A_1)$ принадлежат одной прямой, то центр M поворота есть общая точка окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

§ 2. Перемещения и подобия пространства

26. Докажите, что при перемещении пространства сонаправленные лучи отображаются на сонаправленные.

27. Докажите, что композиция двух осевых симметрий пространства с пересекающимися осями есть поворот вокруг оси, проходящей через точку пересечения осей симметрии перпендикулярно к плоскости, в которой они лежат.

28. Докажите, что композиция двух поворотов[1], оси которых пересекаются, есть поворот вокруг оси, проходящей через точку пересечения данных осей.

29. Даны осевые симметрии S_p и S_q пространства. Докажите, что если $p \neq q$ и $S_q \circ S_p = S_p \circ S_q$, то прямые p и q пересекаются под прямым углом.

30. Докажите, что фигура, представляющая собой объединение двух скрещивающихся прямых, имеет три оси симметрии.

31. Докажите, что композиция трех плоскостных симметрий есть плоскостная симметрия тогда и только тогда, когда плоскости симметрии проходят через одну прямую или же когда они попарно параллельны.

32*. Известно, что композиция трех осевых симметрий пространства, оси которых проходят через одну точку, есть снова осевая симметрия. Как расположены эти оси?

33. Какое перемещение представляет собой композиция трех осевых симметрий пространства, оси которых параллельны?

34. Докажите, что композиция осевой симметрии и поворота вокруг оси при условии, что обе оси пересекаются и перпендикулярны, есть осевая симметрия.

---

[1] Поворотом пространства вокруг оси l называется такое перемещение пространства, при котором каждая точка оси l и только точки этой оси отображаются на себя или каждая точка пространства отображается на себя.

35*. Плоскости α, β и γ пересекаются в одной точке S. Найдите плоскость δ, которая при композиции $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ отображается на себя.

36. Перечислите все перемещения первого рода и все перемещения второго рода, которые отображают на себя правильный тетраэдр.

37. Перечислите все перемещения первого рода и все перемещения второго рода, которые отображают на себя куб.

38. Даны два отрезка AB и A_1B_1, причем $|AB| = |A_1B_1|$, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A_1B_1}$. Докажите, что существует единственный поворот вокруг оси, отображающий точку A на точку A_1, а B — на B_1.

39. Докажите, что перемещение первого рода пространства или вовсе не имеет неподвижных точек, или имеет бесконечное множество неподвижных точек.

40. Постройте тетраэдр, который имеет: 1) две плоскости симметрии; 2) одну ось симметрии; 3) три оси симметрии.

41. Даны три пересекающиеся в одной точке плоскости. Найдите множество всех точек пространства, каждая из которых равноудалена от данных трех плоскостей.

42. Дан трехгранный угол. Найдите множество всех точек, принадлежащих этому углу, через которые проходят по две сферы, касающиеся граней трехгранного угла.

43. Даны три плоскости α, β и γ, пересекающиеся попарно по трем различным параллельным прямым: $a = \beta \cap \gamma$, $b = \gamma \cap \alpha$, $c = \alpha \cap \beta$. Найдите множество всех таких точек M, чтобы через каждую из них можно было провести единственную сферу, касающуюся трех данных плоскостей в точках, принадлежащих полосам (b, c), (c, a), (a, b).

44. Постройте сферу, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся двух данных плоскостей α и β. (Рассмотрите общий случай расположения точек и плоскостей.)

45. Постройте сферу, проходящую через данную точку и касающуюся трех данных плоскостей, имеющих только одну общую точку.

46. В тетраэдре $ABCD$ $|AB| = |CD|$, $|BC| = |DA|$. Докажите, что прямая, проходящая через середины M и N ребер AC и BD, проходит через следующие три точки: центр O сферы, вписанной в тетраэдр, центр I сферы, описанной вокруг тетраэдра, центроид G тетраэдра.

47. Докажите, что если противоположные плоские углы выпуклого четырехгранного угла попарно конгруэнтны, то этот четырехгранный угол обладает осевой симметрией.

48. Две окружности с неравными радиусами лежат в различных параллельных плоскостях α и β. Докажите, что существуют две гомотетии, при которых одна окружность отображается на другую.

49. Докажите, что существуют две гомотетии, каждая из которых отображает одну из двух неравных сфер на другую.

50. Докажите, что если один из двух неравных кубов отображается на другой при некоторой гомотетии, то существует вторая гомотетия, при которой первый куб отображается на другой.

51. Докажите, что композиция трех гомотетий, центры которых A, B и C не принадлежат одной прямой, а произведение коэффициентов гомотетий отлично от единицы, есть гомотетия, центр которой принадлежит плоскости $\alpha = (ABC)$.

52. В грани ABC тетраэдра $ABCD$ дана точка M. Через точки A, B и C проведены прямые, параллельные (DM) и пересекающие плоскости (BCD), (CDA), (ABD) соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что

$$\frac{1}{|DM|} = \frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} + \frac{1}{|CC_1|}.$$

53. Даны три сферы, радиусы которых различны. Докажите, что: 1) три внешних центра гомотетии трех пар этих сфер принадлежат одной прямой; 2) два внутренних и один внешний центр гомотетии трех этих пар сфер принадлежат одной прямой.

54. Даны четыре сферы, радиусы которых различны. Докажите, что шесть внешних центров гомотетии шести пар сфер, составленных из данных четырех сфер, принадлежат одной плоскости.

55*. Даны четыре гомотетии пространства. Постройте такую плоскость, которая при каждой из этих гомотетий отображается на одну и ту же плоскость.

56. В данную сферу впишите тетраэдр так, чтобы он был подобен данному тетраэдру.

57*. Даны четыре различные параллельные плоскости α, β, γ и δ. Постройте тетраэдр $ABCD$, чтобы $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in \gamma$, $D \in \delta$ и чтобы он был подобен данному тетраэдру $A_0B_0C_0D_0$.

58. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и две им параллельные скрещивающиеся прямые a_1 и b_1. Докажите, что существует гомотетия (или перенос), при которой $a \to a_1$, $b \to b_1$.

59. Докажите, что подобие пространства, отличное от перемещения, есть композиция гомотетии и перемещения.

60. Даны два подобных, но не конгруэнтных тетраэдра. Докажите, что преобразование подобия, при котором один тетраэдр отображается на другой, имеет единственную неподвижную точку.

ВЕКТОРЫ

§ 1. Линейные операции над векторами на плоскости

61. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно по две точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, причем

$$\overrightarrow{A_1A_2} = k\overrightarrow{BC}, \ \overrightarrow{B_1B_2} = l\overrightarrow{CA}, \ \overrightarrow{C_1C_2} = m\overrightarrow{AB}.$$

Докажите, что если $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$, то $k = l = m$.

62. Точки M и N — середины сторон AD и DC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Отрезки AN и BM пересекаются в точке P, причем $|MP| : |PB| = 1 : 4$, $|AP| : |PN| = 2 : 3$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

63. Вершины A_1, B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ симметричны вершинам A_2, B_2, C_2 треугольника $A_2B_2C_2$ относительно середин A_0, B_0, C_0 сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Докажите, что центроиды G_1 и G_2 треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно центроида G треугольника ABC.

64. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC вне его построены квадраты с центрами A_1, B_1, C_1. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

65. Дан треугольник ABC, точка M — центр окружности, вписанной в треугольник. Докажите, что $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, где $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$.

66. Вокруг треугольника ABC описана окружность с центром O. Докажите, что $\overrightarrow{OA}\sin 2\widehat{A} + \overrightarrow{OB}\sin 2\widehat{B} + \overrightarrow{OC}\sin 2\widehat{C} = \vec{0}$.

67. Докажите, что если H — точка пересечения прямых, содержащих высоты непрямоугольного треугольника ABC, то $\overrightarrow{HA}\operatorname{tg}\widehat{A} + \overrightarrow{HB}\operatorname{tg}\widehat{B} + \overrightarrow{HC}\operatorname{tg}\widehat{C} = \vec{0}$.

68. Точка O — центр окружности, описанной вокруг непрямоугольного треугольника ABC. Докажите, что $(\operatorname{tg}\widehat{B} + \operatorname{tg}\widehat{C})\overrightarrow{OA} + (\operatorname{tg}\widehat{C} + \operatorname{tg}\widehat{A})\overrightarrow{OB} + (\operatorname{tg}\widehat{A} + \operatorname{tg}\widehat{B})\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

69. В плоскости треугольника ABC дана точка M, такая, что $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Постройте такую точку N, чтобы $yz\overrightarrow{NA} + zx\overrightarrow{NB} + xy\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

70. Дан треугольник ABC. Постройте такую точку M в плоскости треугольника, чтобы $\frac{\overrightarrow{MA}}{|BC|^2} + \frac{\overrightarrow{MB}}{|CA|^2} + \frac{\overrightarrow{MC}}{|AB|^2} = \vec{0}$.

71. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке M, причем $(p-a)\overrightarrow{MA} + (p-b)\overrightarrow{MB} + (p-c)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, где $2p = a + b + c$.

72. Дан треугольник ABC. Через точку P проведены прямые PA, PB, PC, пересекающие прямые BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что если $\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = z : y$, $\overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A} = x : z$, то: 1) $\overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B} = y : x$; 2) $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

73. Дан четырехугольник $ABCD$, точки M и N — середины его сторон AB и DC. Докажите, что если $[MC] \cap [NB] = P$, $[MD] \cap$

$\cap [AN] = Q$ и $MPNQ$ — параллелограмм, то и $ABCD$ — также параллелограмм.

74. Дан четырехугольник $ABCD$. Точки P, Q, R и S — середины его сторон AB, BC, CD, DA. Докажите, что если отрезки AR, BS, CP и DQ пересекаются в вершинах параллелограмма, то $ABCD$ также является параллелограммом.

75. Точки M и N — середины сторон BC и CD четырехугольника $ABCD$. Отрезки AM и AN пересекают диагональ BD в точках P и Q, причем $|BP| = |PQ| = |QD|$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

76. Дан треугольник $A_1A_2A_3$. Точки B_1, B_2 и B_3 делят стороны A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_1 в одном и том же отношении λ, а точки C_1, C_2 и C_3 делят стороны B_1B_2, B_2B_3 и B_3B_1 в одном и том же отношении $1:\lambda$. Докажите, что треугольник $C_1C_2C_3$ гомотетичен данному. Постройте центр гомотетии и вычислите коэффициент гомотетии.

77. Через центроид G треугольника ABC проведена произвольная прямая l, пересекающая прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\frac{\vec{e}}{\overrightarrow{GA_1}} + \frac{\vec{e}}{\overrightarrow{GB_1}} + \frac{\vec{e}}{\overrightarrow{GC_1}} = 0$, где $\vec{e}$ — направляющий вектор прямой l.

78. Продолжения противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках E и F. Через вершины четырехугольника проведены параллельные прямые, пересекающие прямую EF соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите истинность равенства $\frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|CC_1|} = \frac{1}{|BB_1|} + \frac{1}{|DD_1|}$.

§ 2. Линейные операции над векторами в пространстве

79. Докажите, что, каковы бы ни были данные точки A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n и O, существует и притом единственная точка G, такая, что $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n})$. (Точка G называется центроидом данных n точек.)

80. Даны две неплоские замкнутые ломаные $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, причем $\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} = \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = k$. Докажите, что центроиды обеих четверток точек A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 совпадают.

81. Через центроид G тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, пересекающая прямые DA, DB, DC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1D}} + \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1D}} + \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} = 1.$$

82. Даны тетраэдр $ABCD$ и точка M. Через центроиды G_1, G_2, G_3 и G_4 граней BCD, CDA, DAB, ABC проведены прямые, параллельные прямым MA, MB, MC и MD. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

83. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка M, причем $(AM) \cap (BCD) = A_1$, $(BM) \cap (CDA) = B_1$, $(CM) \cap (DAB) = C_1$, $(DM) \cap (ABC) = D_1$. Докажите, что

$$\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overrightarrow{AA_1}} + \frac{\overrightarrow{MB_1}}{\overrightarrow{BB_1}} + \frac{\overrightarrow{MC_1}}{\overrightarrow{CC_1}} + \frac{\overrightarrow{MD_1}}{\overrightarrow{DD_1}} = 1.$$

84. Докажите, что середины шести ребер тетраэдра образуют центрально-симметричную фигуру.

85. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AB_1}$ по векторам $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{DA_1}$.

86. На звеньях AB, BC, CD, DA неплоской замкнутой ломаной $ABCD$ даны соответственно по две точки P_1 и P_2, Q_1 и Q_2, R_1 и R_2, S_1 и S_2, причем $\overrightarrow{P_1P_2} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{Q_1Q_2} = l\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{R_1R_2} = m\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{S_1S_2} = n\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{R_1R_2} + \overrightarrow{S_1S_2} = \vec{0}$. Докажите, что $k = l = m = n$.

87. Даны два подобных четырехугольника $OABC$ и $OA_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны некоторой плоскости. (При подобии, отображающем первый четырехугольник на второй, $O \to O$, $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.)

88. Дана фигура, состоящая из пяти точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5; точки B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 — середины отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1. Докажите, что середины C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 отрезков B_1B_3, B_2B_4, B_3B_5, B_4B_1, B_5B_2 образуют фигуру, состоящую из пяти точек, гомотетичную данной фигуре. Найдите центр G этой гомотетии и вычислите ее коэффициент k.

89. Даны четыре точки A, B, C, D, причем $A \notin (BC)$. Докажите, что необходимое и достаточное условие принадлежности этих точек одной плоскости выражается равенством $\overrightarrow{OD} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}$, $p + q + r = 1$, где O — произвольная точка пространства.

90. Дана неплоская замкнутая ломаная $ABCD$ и точка M, причем $(ABM) \cap (CD) = P$, $(BCM) \cap (DA) = Q$, $(CDM) \cap (AB) = R$, $(DAM) \cap (BC) = S$. Докажите, что если $\overrightarrow{CP} : \overrightarrow{PD} = y : x$, $\overrightarrow{DQ} : \overrightarrow{QA} = z : y$, $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB} = t : z$, то: 1) $\overrightarrow{BS} : \overrightarrow{SC} = x : t$; 2) $x\overrightarrow{MC} + y\overrightarrow{MD} + z\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (P, Q, R, S не совпадают с A, B, C, D).

91. Дан тетраэдр $ABCD$, точки $M \in (AB)$, $N \in (CD)$. Докажите, что середины отрезков MC, MD, NA и NB принадлежат одной плоскости.

92. Дан тетраэдр $ABCD$. Точка M — середина отрезка DG_0, где G_0 — центроид грани ABC. Через точку M проведена прямая, пересекающая (AB) и (CD) в точках P и Q. Вычислите $k = \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB}$, $l = \overrightarrow{CQ} : \overrightarrow{QD}$.

93. Точка I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$. Докажите, что $s_1\overrightarrow{IA} + s_2\overrightarrow{IB} + s_3\overrightarrow{IC} + s_4\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$, где s_1, s_2, s_3, s_4 — площади граней BCD, CDA, DAB, ABC.

94. Через центроид G тетраэдра $ABCD$ проведена произвольная прямая l, пересекающая плоскости BCD, CDA, DAB и ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Докажите, что $\frac{\vec{e}}{\overrightarrow{GA_1}} + \frac{\vec{e}}{\overrightarrow{GB_1}} + \frac{\vec{e}}{\overrightarrow{GC_1}} + \frac{\vec{e}}{\overrightarrow{GD_1}} = 0$, где $\vec{e}$ — направляющий вектор прямой l.

95. Прямая l пересекает плоскости граней тетраэдра $ABCD$ соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 принадлежат одной плоскости.

§ 3. Скалярное произведение векторов на плоскости

96. В окружность с центром O вписан треугольник ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{OC_1}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, где C_1 — основание высоты, проведенной из вершины C.

97. Найдите зависимость между углами $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ треугольника ABC, если биссектриса угла C треугольника видна из центра описанной окружности под прямым углом.

98. Вокруг правильного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ описана окружность радиуса R. Докажите, что для любой точки M окружности $|MA_1|^2 + |MA_2|^2 + \cdots + |MA_n|^2 = 2nR^2$.

99. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон, увеличенной на удвоенное произведение оснований.

100. Дан параллелограмм $ABCD$, точка O — центр окружности радиуса R, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $|OD|^2 = R^2 + a^2 + c^2 - b^2$, где $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$.

101. На стороне AB треугольника ABC построен равнобедренный треугольник ABD: $|DA| = |DB|$, $\widehat{D} = 120°$, причем точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что $|CD|^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{6} - \frac{2S}{\sqrt{3}}$.

102. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место неравенство $\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} - \cos 2\widehat{C} \leqslant \frac{3}{2}$.

103. На стороне AB треугольника ABC построен прямоугольный равнобедренный треугольник ABD, $\widehat{D} = 90°$, такой, что точки C и D не разделены прямой AB. Докажите, что

$|CD|^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - 2S_{ABC}$. Как изменится эта формула, когда точки C и D будут разделены прямой AB?

104. В окружность радиуса R вписаны два правильных шестиугольника. Вычислите сумму квадратов расстояний от вершин одного шестиугольника до вершин другого.

105. Две конгруэнтные окружности касаются в точке M. Докажите, что если $[MX]$ и $[MY]$ — перпендикулярные хорды данных окружностей, то окружность, описанная вокруг треугольника MXY, конгруэнтна данным.

106. Даны два прямоугольных треугольника AOB и COD ($\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 90°$), причем $(AC) \cap (BD) = M$, $(AD) \cap (BC) = N$. Докажите, что треугольник MON также прямоугольный.

107. Дан треугольник ABC, в котором проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что $\operatorname{ctg} \widehat{BC_1C} + \operatorname{ctg} \widehat{CA_1A} + \operatorname{ctg} \widehat{AB_1B} = 0$.

108. Дан треугольник ABC, в котором проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что $\operatorname{ctg} \widehat{BCC_1} + \operatorname{ctg} \widehat{CAA_1} + \operatorname{ctg} \widehat{ABB_1} = \operatorname{ctg} \widehat{ACC_1} + \operatorname{ctg} \widehat{CBB_1} + \operatorname{ctg} \widehat{BAA_1}$.

109. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место равенство $\operatorname{ctg} \widehat{A} + \operatorname{ctg} \widehat{B} + \operatorname{ctg} \widehat{C} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4s}$, где $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, s — площадь треугольника.

110. Даны правильный треугольник ABC и в его плоскости произвольная точка M. Построены проекции отрезков MA, MB, MC соответственно на прямые BC, CA, AB. Докажите, что сумма двух из этих проекций равна третьей.

§ 4. Скалярное произведение векторов в пространстве

111. Докажите, что множество всех точек X, для которых $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} + p = 0$, где $\vec{n} \neq \vec{0}$ — данный вектор, p — данное число, O — данная точка, есть плоскость. Найдите расстояние d от точки O до плоскости.

112. Докажите, что множество всех точек X, для которых $\overrightarrow{OX}^2 - 2\vec{a} \cdot \overrightarrow{OX} + M = 0$, $\vec{a}^2 > M$, где $\vec{a}$ — данный вектор, O — данная точка, есть сфера.

113. Запишите условие, что плоскость $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} + p = 0$ и сфера $\overrightarrow{OX}^2 - 2\vec{a} \cdot \overrightarrow{OX} + M = 0$, $\vec{a}^2 > M$, касаются.

114. Докажите, что если противоположные ребра тетраэдра попарно конгруэнтны, то прямые, проходящие через середины противоположных его ребер, попарно перпендикулярны.

115. Выразите косинус угла между двумя противоположными ребрами тетраэдра через длины всех его ребер.

116. Выразите расстояние от вершины тетраэдра до центроида противолежащей грани через длины всех ребер тетраэдра.

117. Даны два тетраэдра $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что если $[AB] \perp [C_1D_1]$, $[AC] \perp [B_1D_1]$, $[AD] \perp [B_1C_1]$, $[BC] \perp [A_1D_1]$, $[CD] \perp [A_1B_1]$, то $[DB] \perp [A_1C_1]$.

118. Докажите, что если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то плоские углы при каждой вершине трехгранного угла тетраэдра одноименные, причем среди граней тетраэдра одна или же все четыре — остроугольные треугольники.

119. У тетраэдра $ABCD$ ребра AC и BD конгруэнтны. Докажите, что проекции ребер AB и CD на прямую, проходящую через середины $[AB]$ и $[CD]$, равны.

120. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$ имеет место неравенство $|BC|^2 + |CA|^2 + |AB|^2 \leqslant 4R^2 + |DA|^2 + |DB|^2 + |DC|^2$, где R — радиус сферы, описанной вокруг тетраэдра.

121. Вокруг прямоугольного тетраэдра $OABC$ с прямым трехгранным углом O описана сфера с центром в точке M. Прямая, проведенная через вершину O перпендикулярно к грани ABC, пересекает ее в точке P, а сферу — вторично в точке Q. Докажите, что $|OQ| = |3OP|$.

122. Дан тетраэдр $ABCD$; $[MN]$ — общий перпендикуляр ребер DA и BC $(M \in (DA),\ N \in (BC))$. Разложите вектор $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

123. Дан правильный четырехгранный угол с плоским углом α. Вычислите угол β его диагонального сечения.

124. Дан равносторонний треугольник ABC и некоторая точка M. Точки M_1, M_2, M_3 — ортогональные проекции точки M на прямые BC, CA и AB. Докажите, что одно из трех расстояний $|M_1A_1|$, $|M_2B_1|$ и $|M_3C_1|$, где A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника, равно сумме двух других.

125. В пространстве даны прямая a и равносторонний треугольник ABC с центром O. Докажите, что сумма квадратов проекций сторон треугольника на прямую a в три раза больше суммы квадратов проекций отрезков OA, OB, OC на ту же прямую.

126. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного тетраэдра до прямой, проходящей через его центроид, не зависит от положения прямой.

127. Даны четыре луча с общим началом. Из шести углов, образованных попарно этими лучами, пять углов равны по 60°. Вычислите шестой угол.

128. Дан тетраэдр $ABCD$, у которого $|AB| = |BC| = |CA| = |DA| = 1$, $|DB| = |DC| = \sqrt{2}$. Вычислите отношения, в которых основания общего перпендикуляра ребер AB и CD делят эти ребра.

129. Дан трехгранный угол $Oabc$. На его ребрах a и b отложены единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Докажите, что вектор $\vec{e}_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \vec{e}_2 \operatorname{tg} \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — величины двугранных углов при ребрах a и b, параллелен проекции ребра c на плоскость противолежащей грани.

130. Даны три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой. Выразите расстояние d от точки O до плоскости ABC через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

КООРДИНАТЫ

§ 1. Метод координат на плоскости

131. Даны пять точек с целочисленными координатами. Докажите, что середина хотя бы одного из отрезков с концами в данных точках также имеет целочисленные координаты.

132. На плоскости даны две точки A и B. Постройте такую прямоугольную систему координат, чтобы данные точки имели в ней соответственно координаты $(1; 3)$ и $(2; -1)$.

133. Пользуясь только формулой расстояния между двумя точками, вычислите координаты ортоцентра треугольника, заданного координатами своих вершин: $A\ (1; 1)$, $B\ (2; -3)$, $C(-1; 0)$.

134. Докажите, что если вершины треугольника принадлежат гиперболе $xy = k^2$, то и ортоцентр этого треугольника принадлежит гиперболе.

135. Докажите, что если AB и AC — перпендикулярные хорды гиперболы $xy = k^2$, то касательная к гиперболе в точке A перпендикулярна хорде BC.

136. Даны две параболы

$$y = x^2 + p_1x + q_1,$$
$$x = y^2 + p_2y + q_2,$$

пересекающиеся в четырех точках. Докажите, что через эти точки можно провести окружность, а также и гиперболу, асимптоты которой параллельны прямым $x \pm y = 0$.

137. Даны две параболы:

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1,$$
$$y = x^2.$$

Докажите, что гомотетией (или переносом) можно одну из парабол отобразить на другую. Вычислите координаты центра гомотетии и коэффициент гомотетии.

138. Даны четыре прямые. Каждые три из них своим пересечением задают треугольник. Докажите, что ортоцентры этих треугольников принадлежат одной прямой.

139. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность радиуса R. Прямая, проходящая через центр окружности, пересекает прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\frac{R^2}{\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}}+\frac{R^2}{\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OC_1}}+\frac{R^2}{\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}}=-3$.

140. К окружности ω проведена касательная t в точке A. На диаметре AB дана точка M, такая, что $|AM|:|MB|=2:1$. Докажите, что если прямая l, проходящая через точку M, пересекает ω в точках U и V, а касательную t — в точке W, то $\frac{\vec{e}}{\overrightarrow{MU}}+\frac{\vec{e}}{\overrightarrow{MV}}+\frac{\vec{e}}{\overrightarrow{MW}}=0$, где $\vec{e}$ — направляющий вектор прямой l[1].

§ 2. Метод координат в пространстве

141. В пространстве даны девять точек с целочисленными координатами. Докажите, что хотя бы один из отрезков с концами в данных точках имеет середину с целочисленными координатами.

142. Через вершину C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость α, пересекающая прямые AB, AD и AA_1 соответственно в точках M, N, P. Докажите, что $\frac{\overrightarrow{C_1D_1}}{\overrightarrow{MA}}+\frac{\overrightarrow{C_1B_1}}{\overrightarrow{NA}}+\frac{\overrightarrow{C_1C}}{\overrightarrow{PA}}=1$.

143. Даны шесть точек: $A(a;\ b;\ c)$, $B\ (a;\ c;\ b)$, $C\ (b;\ c;\ a)$, $D\ (b;\ a;\ c)$, $E\ (c;\ a;\ b)$, $F\ (c;\ b;\ a)$. Докажите, что эти точки принадлежат одной окружности, причем ACE и BDF — равносторонние треугольники.

144. Дана сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Из точки $P\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$, лежащей вне шара, ограниченного сферой, проведена к ней касательная, T — точка касания. Вычислите $|PT|$.

145. Запишите условие того, что две сферы

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=R_1^2,$$
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=R_2^2$$

касаются.

146. Сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ проходит через начало координат. Докажите, что уравнение касательной плоскости к сфере в начале координат имеет вид $ax+by+cz=0$.

147. Даны две точки $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Найдите множество точек $M\ (x;\ y;\ z)$, для которых $|MA_1|:|MA_2|=k$, где k — данное положительное число.

148. Даны две непересекающиеся сферы. Докажите, что множество всех точек M, таких, что длины отрезков MT_1 и MT_2, каса-

[1] Вектор $\vec{e}$, направление которого параллельно прямой l, называется направляющим вектором прямой l.

тельных к данным сферам (T_1 и T_2 — точки касания), имеют данное отношение, есть сфера или, в частности, плоскость.

149. Даны две точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Найдите множество всех точек $M(x; y; z)$, таких, что $k|MA_1|^2 + l|MA_2|^2 = d^2$, где k, l и d — данные числа.

150. Составьте уравнение сферы δ, проходящей через точки O (0; 0; 0), A (a; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c). Докажите, что прямая l, проведенная через начало координат перпендикулярно к плоскости ABC, пересекает эту плоскость и сферу δ соответственно в таких точках M и N, что $|OM| : |ON| = 1 : 3$.

151. В сферу вписан прямоугольный параллелепипед. Докажите, что для любой точки сферы одно из трех произведений ее расстояний до противоположных граней параллелепипеда равно сумме двух других.

152. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что три точки, в которых любая плоскость, проходящая через прямую AB_1, пересекает прямые BC_1, CD_1, DA_1, принадлежат одной прямой. Будет ли эта теорема иметь место для произвольного параллелепипеда?

153. Дана усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основания которой — параллелограммы. Докажите, что любая прямая, пересекающая три из четырех прямых AB_1, BC_1, CD_1, DA_1, пересекает и четвертую прямую или параллельна ей.

154. На прямых AB, BC, CD, DA, не лежащих в одной плоскости, даны по две точки M_1, M_2; N_1, N_2; P_1, P_2; Q_1, Q_2, причем $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_2B}$, $\overrightarrow{BN_1} = \overrightarrow{N_2C}$, $\overrightarrow{CP_1} = \overrightarrow{P_2D}$, $\overrightarrow{DQ_1} = \overrightarrow{Q_2A}$. Докажите, что если точки M_1, N_1, P_1, Q_1 принадлежат одной плоскости, то и точки M_2, N_2, P_2, Q_2 принадлежат одной плоскости.

ЗАДАЧИ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. Параллельное проектирование

155. Может ли параллельная проекция окружности на плоскость быть окружностью, если плоскость проекции и плоскость окружности не параллельны?

156. Даны плоскость α и отрезок AB. Найдите множество всех точек, принадлежащих отрезкам A_1B_1, конгруэнтным $[AB]$ и являющимся параллельными проекциями отрезка AB на плоскость α.

157. Даны параллельные проекции трех соседних вершин правильного пятиугольника. Постройте параллельные проекции остальных двух его вершин.

158. В одной из двух пересекающихся плоскостей даны две пересекающиеся прямые. Спроектируйте эти две прямые параллельно на другую плоскость так, чтобы проекции были перпендикулярны.

159. Выясните, можно ли любой четырехугольник параллельно спроектировать на плоскость в четырехугольник с равными и перпендикулярными диагоналями.

160. В одной из двух пересекающихся плоскостей даны две пары пересекающихся прямых a, b и c, d. Спроектируйте эти прямые на другую плоскость в две пары перпендикулярных прямых a_1, b_1 и c_1, d_1($a_1 \perp b_1$, $c_1 \perp d_1$).

161. В одной из двух пересекающихся плоскостей дан параллелограмм. Спроектируйте его на другую плоскость в квадрат.

162. В одной из двух пересекающихся плоскостей дан произвольный треугольник. Спроектируйте его параллельно на другую плоскость в равносторонний треугольник.

163. Дан тетраэдр $ABCD$ и плоскость α. Могут ли параллельные проекции A_1, B_1, C_1 и D_1 вершин тетраэдра на плоскость α быть вершинами параллелограмма? Сколько различных параллельных проектирований на плоскость α приводят к положительному ответу на поставленный вопрос?

164. Через прямую l проходят две пары плоскостей α, β и α_1, β_1. Постройте плоскость, пересекающую данные плоскости по таким прямым a, b и a_1, b_1, чтобы $a \perp b$ и $a_1 \perp b_1$.

§ 2. Задачи на построение

165. Даны четыре попарно скрещивающиеся прямые. Постройте плоскость так, чтобы точки ее пересечения с прямыми были вершинами параллелограмма.

166. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Постройте такие точки S и S_1, чтобы $(SA) \parallel (S_1A_1)$, $(SB) \parallel (S_1B_1)$, $(SC) \parallel (S_1C_1)$. (Предполагается, что $(AB) \dotplus (A_1B_1)$, $(BC) \dotplus (B_1C_1)$, $(CA) \dotplus (C_1A_1)$.)

167. В пространстве даны две пересекающиеся прямые c и d и две не принадлежащие им точки A и B. Проведите через точки A и B плоскость, пересекающую прямые c и d в точках C и D так, чтобы точки A, B, C и D принадлежали одной окружности.

168*. Известны длины всех ребер тетраэдра $ABCD$. Постройте в данной плоскости ABC точки касания восьми сфер, касающихся всех плоскостей граней тетраэдра.

169. Постройте сферу, проходящую через данную окружность и касающуюся данной прямой.

170. Постройте сферу, касающуюся данной плоскости и проходящую через данные три точки, не принадлежащие одной прямой.

171. Даны две перпендикулярные скрещивающиеся прямые. Постройте правильный тетраэдр так, чтобы две его вершины принадлежали одной прямой, а две другие — второй прямой.

172. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Постройте параллелепипед, три ребра которого лежали бы на данных прямых.

173. Даны две сферы. Постройте плоскость так, чтобы окружности, по которым она пересекает сферы, были конгруэнтными.

174. Даны три сферы. Постройте плоскость так, чтобы окружности, по которым она пересекает данные сферы, были конгруэнтными. Выясните число решений, которые может иметь задача.

175. Даны три сферы, каждая из которых расположена вне другой, причем их центры не принадлежат одной прямой. Постройте плоскость, которая касалась бы всех трех сфер.

176. Даны прямые AB, BC, CD, DA, не лежащие в одной плоскости. Постройте сферу, касающуюся данных четырех прямых. Убедитесь в том, что в общем случае существуют восемь таких сфер, однако число сфер, касающихся данных прямых, может быть и бесконечным.

§ 3. Задачи на доказательство

177. Дана усеченная треугольная пирамида $ABCA_1B_1C_1$. Докажите, что центроиды G и G_1 граней ABC и $A_1B_1C_1$ и точка M пересечения плоскостей ABC_1, BCA_1, CAB_1 принадлежат одной прямой.

178. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c, непараллельные никакой плоскости. Докажите, что существует центральная симметрия S_M, такая, что прямая $a_1 = S_M(a)$ пересекает прямые b и c, прямая $b_1 = S_M(b)$ — пересекает c и a, прямая $c_1 = S_M(c)$ — пересекает a и b.

179. Три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c пересечены тремя другими прямыми соответственно в точках A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3. Докажите, что прямые A_2B_1, A_3C_1 и B_3C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

180. Даны три окружности, не лежащие в одной плоскости, причем каждая пересекает в двух точках каждую. Докажите, что через такие три окружности можно провести сферу.

181. На сфере δ дана окружность ω. Докажите, что прямые, проходящие через данную точку $S \notin \delta$ и каждую точку окружности ω, пересекают сферу вторично в точках, принадлежащих некоторой окружности.

182. Докажите, что окружности, описанные вокруг двух граней тетраэдра, пересекаются под таким же по величине углом, что и окружности, описанные вокруг двух других его граней. (Угол, под которым пересекаются две окружности в пространстве, измеряется углом между касательными, проведенными к окружностям в их общей точке.)

183. Дана замкнутая ломаная $ABCD$. Докажите, что если отрезки AB, BC, CD и DA касаются сферы, то точки касания принадлежат одной плоскости.

184. В основание цилиндра вписан треугольник ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из точки M боковой поверхности цилиндра к прямым AB, BC и CA, принадлежат одной прямой.

185. Докажите, что если все грани параллелепипеда равновелики, то в него можно вписать сферу. Убедитесь в том, что его диагональные сечения, не имеющие общей диагонали, перпендикулярны.

186. Докажите, что если две прямые, содержащие две высоты тетраэдра, пересекаются, то и две другие прямые, содержащие остальные две высоты, также пересекаются, причем прямая, проходящая через обе точки пересечения, есть общий перпендикуляр двух перпендикулярных противолежащих ребер тетраэдра.

187. Докажите, что если три прямые, содержащие три высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке, то и прямая, содержащая четвертую высоту, проходит через эту точку.

188. Через точку S в пространстве проведены две перпендикулярные прямые a, b и еще две перпендикулярные прямые c, d; плоскости (a, c) и (b, d) пересекаются по прямой m, а плоскости (a, d) и (b, c) — по прямой n. Докажите, что прямые m и n также перпендикулярны.

189*. Докажите, что существует в общем случае восемь сфер, касающихся плоскостей граней тетраэдра. Число этих сфер равно 7, если $S_1 = S_2 \neq S_3 \neq S_4$; это число равно 6, если $S_1 = S_2 \neq \neq S_3 = S_4$; это число равно 5, если $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. (S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней тетраэдра.)

190*. Докажите, что если замкнутая неплоская ломаная из четырех звеньев касается поверхности конуса или цилиндра, то четыре точки касания принадлежат одной плоскости.

191*. К конусу (цилиндру) проведены две скрещивающиеся касательные. Докажите, что точки касания всех касательных к конусу (цилиндру), пересекающих обе данные касательные, принадлежат двум плоскостям.

192*. К сфере проведены две скрещивающиеся касательные. Докажите, что множество всех точек касания касательных к сфере, пересекающих данные две касательные, есть пара окружностей.

§ 4. Вычислительные задачи

193. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — проекции вершин A, B, C и D тетраэдра $ABCD$ на плоскости противолежащих им граней. Выясните, какое число этих проекций может быть расположено вне соответствующих граней.

194. Все грани тетраэдра — равновеликие треугольники. Убедитесь в том, что в этом случае все грани тетраэдра конгруэнтны.

195. Пары противоположных ребер тетраэдра $ABCD$ равны: $|BC| = |DA| = a$, $|CA| = |BD| = b$, $|AB| = |CD| = c$. Найдите объем тетраэдра.

196. Дан параллелепипед. Вычислите сумму квадратов расстояний между всеми парами его вершин, если известны длины ребер параллелепипеда.

197. Найдите плоские углы трехгранного угла, если они удовлетворяют соотношению $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

198. Выразите объем тетраэдра через длины всех шести его ребер.

199. Вычислите объем параллелепипеда по длинам трех его ребер, имеющих общую вершину, и по углам между ними.

200. Дан треугольник ABC. Найдите множество точек D в пространстве, чтобы $|AB|\cdot|DC|=|BC|\cdot|DA|=|AC|\cdot|DB|$.

201. Дан тетраэдр $ABCD$, площади его граней BCD, CDA, DAB, ABC равны соответственно S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_2S_3\cos(\widehat{DA})-2S_3S_1\cos(\widehat{DB})-2S_1S_2\cos(\widehat{DC})$.

202. В сферу вписан правильный тетраэдр. Докажите, что точка, диаметрально противоположная одной из вершин тетраэдра, одинаково удалена от плоскостей граней тетраэдра.

203. В тетраэдр вписана сфера. Докажите, что углы α, β, γ, под которыми из точки касания сферы с гранью видны ребра этой грани, одни и те же для всех четырех граней.

204. Докажите, что если для тетраэдра $ABCD$ выполняются условия $|AB|+|CD|=|BC|+|AD|=|CA|+|BD|$, то существует сфера, касающаяся всех его ребер.

205. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что сумма квадратов площадей трех непараллельных граней параллелепипеда равна сумме квадратов площадей граней тетраэдра ABC_1D_1.

206. Дан тетраэдр $ABCD$. Сфера, проходящая через вершины A, B и C, пересекает прямые DA, DB, DC вторично в точках A_1, B_1 и C_1. Вычислите отношения $|A_1B_1|:|B_1C_1|:|C_1A_1|$ и убедитесь в том, что величины углов треугольника $A_1B_1C_1$ не зависят от того, какая именно сфера проведена через указанные вершины.

207. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$ из трех произведений $|AB|\cdot|CD|$, $|BC|\cdot|DA|$, $|CA|\cdot|BD|$ сумма любых двух из них больше третьего.

208. Пользуясь теоремой косинусов для трехгранного угла $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\widehat{A}$, докажите, что $\alpha+\beta+\gamma<$ $<360^\circ$.

209. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точку M, $M\in[AC_1]$, проведена плоскость σ, перпендикулярная диагонали AC_1. Вычислите площадь S сечения, если $|AM|=x$, а ребро куба равно m.

210. Дан тетраэдр $ABCD$. Построены две плоскости α и β, пересекающие тетраэдр, причем $\alpha\parallel(AB)$, $\alpha\parallel(CD)$, $\beta\parallel(AB)$, $\beta\parallel(CD)$. Докажите, что если эти плоскости равноудалены от ребер AB и CD, то площади сечений тетраэдра этими плоскостями равны между собой.

Глава IX ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Задачи на вычисление

1. Найдите углы треугольника, если площадь S треугольника выражается через длины его сторон a и b формулой $S=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$.

2. Центры двух окружностей, радиусы которых R и r, лежат на гипотенузе прямоугольного треугольника. Одна окружность касается двух катетов, другая — касается катета и первой окружности. Найдите стороны треугольника.

3. Из вершины C треугольника ABC проведены высота, медиана и биссектриса. Найдите $\widehat{C}$, если биссектриса образует с высотой и медианой соответственно углы α и β.

4*. Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $|AO|=\sqrt{3}|MO|$, $|NO|=(\sqrt{3}-1)|BO|$. Вычислите углы треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC сторона BC служит диаметром полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC. Угол A равен α. Найдите углы B и C при условии, что $\widehat{B}\geqslant\widehat{C}$. Исследуйте, при каких значениях угла α задача имеет решение.

6. Вокруг окружности радиуса r описана равнобочная трапеция $ABCD$; E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен 60°. Докажите, что прямая EK параллельна прямой AB, и найдите площадь трапеции $ABEK$.

7. В трапеции $ABCD$ каждое из оснований AD и BC продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов A и B трапеции пересекаются в точке K, а внешних углов C и D — в точке E. Найдите периметр трапеции, если $|KE|=2a$.

8. Найдите величину угла между боковыми сторонами трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна полуразности их длин.

9. Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены прямые, параллельные его сторонам. Прямые разбивают данный треугольник на три параллелограмма и три треугольника. Произведение площадей полученных треугольников равно a. Найдите произведение площадей параллелограммов.

10*. В окружность, радиус которой R, вписан многоугольник, площадь которого больше $2R^2$, а длина каждой стороны больше R. Найдите число сторон многоугольника.

11. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, диагонали взаимно перпендикулярны и $\frac{|AD|}{|BC|} = k$. Найдите отношение $\frac{|BD|}{|AC|}$.

12*. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC дана точка M, а на стороне AC — точка N, такая, что $(MN) \parallel (AB)$. Известно, что $|AB| = |AN| = 1$ *см*, $|CM| = \sqrt{3}$ *см*. Найдите длину отрезка MN.

13. Высота треугольника равна 25 *см*. На каком расстоянии от вершины проходит прямая перпендикулярно этой высоте, если она делит треугольник на равновеликие части?

14. Длины оснований трапеции равны a и b. Через точку пересечения ее диагоналей проведена прямая параллельно основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции.

15. На сторонах AC и BC треугольника ABC расположены соответственно точки N и M так, что $\frac{|AN|}{|CN|} = n$, $\frac{|BM|}{|CM|} = m$. Прямые AM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $\frac{|AO|}{|MO|}$, $\frac{|BO|}{|NO|}$.

16. Две окружности радиуса r касаются. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Вычислите радиус r, если $|AB| = 12$ *см*, $R = 8$ *см*.

17. Круга радиуса r внешним образом касаются три одинаковые окружности, касающиеся попарно между собой. Найдите сумму площадей трех криволинейных треугольников, образованных указанными окружностями.

18. В равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 18 *см* и основание 12 *см*, вписана окружность. К ней проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка касательной, ограниченного точками пересечения с боковыми сторонами.

19. В сектор с радиусом R и центральным углом α вписан круг. Вычислите его радиус.

20. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиусом r. Найдите длину стороны ромба.

21. Около круга с радиусом 2 *см* описана равнобочная трапеция, площадь которой 20 *см*^{2}. Найдите длины сторон трапеции.

22. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты $ABEF$, $BCPQ$, $CAMN$. Какую наибольшую площадь может иметь шестиугольник $EFMNPQ$, если $|BC| = a$, $|CA| = b$?

23. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S. Определите длину боковой стороны этой трапеции, если известно, что острый угол при ее основании равен $\frac{\pi}{6}$.

24. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Найдите для этого треугольника отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

25. Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\widehat{ACB} = 90°$) взята точка O так, что треугольники OAB, OBC, OAC равновелики. Найдите $|OC|$, если известно, что $|OA|^2 + |OB|^2 = a^2$.

26. В квадрат вписан другой квадрат. Один из острых углов между сторонами квадратов равен α. При каком значении α площадь вписанного квадрата составляет $\frac{2}{3}$ площади описанного?

27. В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найдите значение α, при котором площадь квадрата составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника.

28. Дана трапеция с основаниями $|AD| = 8$ и $|BC| = 4$, стороной $|AB| = 2\sqrt{7}$ и углом CDA при основании, равным $\frac{\pi}{3}$. Через точку C проведена прямая, делящая трапецию на две равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри трапеции.

29. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD равна a, а расстояние от середины $[AB]$ до (CD) равно b. Найдите площадь трапеции.

30. Даны два треугольника, площадь каждого из которых 50 *см*^{2}. Основание первого из них на 10 *см* больше основания второго. В каких пределах может изменяться основание первого треугольника, чтобы разность высот треугольников, проведенных к этим основаниям, была не меньше $\frac{5}{6}$ *см*?

31. В окружности радиуса R через середину хорды AB проведена хорда KZ под углом φ к $[AB]$. Из точки B проведен перпендикуляр к $[KZ]$, пересекающий окружность в точке C. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что точка пересечения хорд KZ и BC делит $[BC]$ на отрезки, длины которых относятся как $p : q$.

32. Выразите угол ромба через его площадь Q и площадь S вписанного в него круга.

§ 2. Задачи на доказательство и построение

33. Прямые, проведенные через вершины выпуклого четырехугольника параллельно его диагоналям, ограничивают параллелограмм. Докажите, что площадь параллелограмма вдвое больше площади четырехугольника.

34. Даны две параллельные прямые a и b. Какой параллельный перенос отображает: а) прямую a на прямую b; б) прямую b на прямую a; в) прямые a и b на себя?

35*. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой его диагонали. Точка O пересечения этих прямых соединена отрезками с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что эти четыре отрезка делят площадь четырехугольника на четыре равные части.

36. O — точка пересечения отрезков AC и BD. Для того чтобы площади треугольников AOB и DOC были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны. Докажите.

37. В выпуклом десятиугольнике, вписанном в окружность, четыре пары противоположных сторон параллельны. Докажите, что стороны, входящие в пятую пару, тоже параллельны.

38*. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямая, проведенная через вершину A параллельно (BC), пересекает (BD) в точке M, а прямая, проведенная через вершину B параллельно стороне AD, пересекает (AC) в точке N. Докажите, что $[MN] \parallel [CD]$.

39. Даны два равновеликих треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, такие, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны. Докажите, что пересечение треугольников с прямой l, параллельной прямой AA_1, есть конгруэнтные отрезки.

40. Через общую точку A двух окружностей с центрами O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках M и N. Докажите, что $\angle O_1MB \cong \angle O_2NB$, где B — вторая общая точка окружностей.

41. Известно, что шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что хотя бы один из них содержит центр некоторого другого круга.

42. Из пяти окружностей каждые четыре имеют общую точку. Докажите, что все пять окружностей имеют общую точку.

43*. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон четырехугольника, описанного вокруг окружности, конгруэнтны тогда и только тогда, когда четырехугольник имеет пару конгруэнтных противоположных углов.

44*. В пространстве даны четыре точки A, B, C, D. Докажите, что если $B\widehat{C}D = C\widehat{D}A = D\widehat{A}B = \widehat{A}BC = 90°$, то четырехугольник $ABCD$ есть прямоугольник.

45*. В данный четырехугольник впишите параллелограмм при условии, что две данные вершины параллелограмма принадлежат: 1) противоположным сторонам; 2) смежным сторонам четырехугольника.

46. Дан квадрат $ABCD$; точки P, Q, R, S — середины его сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что прямые AR, BS, CP, DQ своим пересечением образуют квадрат, площадь которого составляет $\frac{1}{5}$ площади данного квадрата.

47*. В четырехугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые. Через вершины A и C проведены перпендикуляры AA_1 и CC_1 к диагонали BD. Докажите, что $|A_1B| = |C_1D|$.

48. Дан треугольник ABC и некоторая точка X. Постройте параллелограмм $BXCY$, а затем другой параллелограмм $YXAZ$. Докажите, что существует гомотетия, отображающая X в Z, и найдите ее коэффициент и центр.

49*. Даны четыре компланарных вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ одинаковой длины. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

50. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению ее оснований.

51. Дан четырехугольник $ABCD$; $[BD]$ — его диагональ. Через вершины C и D проведены прямые, параллельные соответственно (BD) и (BC), M — точка их пересечения. Докажите, что $S_{ACM} = S_{ABCD}$.

52. E — середина стороны AB трапеции $ABCD$ ($(BC) \parallel (AD)$). Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции $ABCD$.

53. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC и делящая медиану BC в отношении $1:2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

54. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята произвольная точка O и соединена с его вершинами. Докажите, что площади треугольников AOC и BOD относятся как тангенсы углов AOC и BOD.

55. Середины M и N сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ соединены с вершинами C, D и A, B. Прямые AN и DM пересекаются в точке K, прямые BN и CM — в точке L. Докажите, что площадь четырехугольника $KMLN$ равна сумме площадей треугольников AKD и BCL.

56. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ ($[DA] \perp [AB]$, $[CB] \perp [AB]$). Из двух точек M и N, расположенных на стороне AB, противоположная сторона CD видна под прямыми углами. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{MCD} + S_{NCD}$.

57. Стороны AB, BC, CA треугольника ABC служат основаниями равнобедренных треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1, причем $B\widehat{C}A_1 = C\widehat{A}B_1 = B\widehat{A}C_1 = B\widehat{A}C$. Докажите, что $S_{ABC} + S_{A_1BC} = S_{ABC_1} + S_{AB_1C}$.

58. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Вычислите площадь этого четырехугольника, если $|AB| = 12$ *см*, $|BC| = 17$ *см*, $|CD| = 4$ *см*, $|DA| = 5$ *см*.

59. Дан четырехугольник $ABCD$. Его средние линии пересекаются в точке M. Построена ломаная $MAUV$, где $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{MB}$,

$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{MC}$. Докажите, что M — середина отрезка VD. Найдите отношение площади четырехугольника $ABCD$ к площади четырехугольника $MAUV$.

60. В равнобедренном треугольнике ABC через середину H основания BC проведен перпендикуляр HE к боковой стороне AC. Точка O — середина отрезка HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

61. Рассеките данную трапецию прямой так, чтобы получилось два подобных четырехугольника.

62. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно целиком накрыть двумя меньшими подобными ему треугольниками.

63. В окружность вписан треугольник ABC, касательные к окружности в точках A и B пересекаются в точке S. Прямая CS пересекает (AB) в точке M. Докажите, что $|AM| : |MB| = b^2 : a^2$, где $a = |BC|$, $b = |AC|$.

64. В треугольнике ABC медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины B, делят угол при этой вершине на четыре конгруэнтные части. Найдите углы этого треугольника.

65. Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

66. В прямоугольном треугольнике $ABC\,(\widehat{C} = 90°)$ проведены биссектрисы AD и BF. Через основания биссектрис к гипотенузе AB проведены перпендикуляры DN и FM. Докажите, что $\widehat{MCN} = 45°$.

67. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место соотношение $2S = |OA|^2 \sin\widehat{A} + |OB|^2 \sin\widehat{B} + |OC|^2 \sin\widehat{C}$, где O — центр вписанной в треугольник окружности, а S — площадь треугольника.

68. Медиана CM треугольника ABC образует со сторонами AC и BC соответственно углы α и β. Какой из этих углов больше, если $|AC| < |BC|$?

69. Равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна m, при повороте вокруг своего центра на угол α отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что точки пересечения A_2, B_2, C_2 соответственных сторон этих треугольников являются вершинами нового равностороннего треугольника; вычислите длину его стороны.

70. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Докажите, что: а) если $|CM| > \frac{1}{2}|AB|$, то $\widehat{C} < 90°$;

б) если $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$, то $\widehat{C} = 90°$;

в) если $|CM| < \frac{1}{2}|AB|$, то $\widehat{C} > 90°$.

71. Медиана CD треугольника ABC, в котором $|AC| > |BC|$, касается окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, соответственно в точках E и F. Докажите, что $2|EF| = |AC| - |BC|$.

72. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается (AB) в точке D и (AC) — в точке E. Докажите, что точки пересечения прямой DE с биссектрисами углов B и C треугольника лежат на одной окружности с точками B и C.

73. В треугольник вписана окружность O. Точки касания ее с двумя сторонами соединены отрезком. Во вновь образовавшийся треугольник вписана окружность O_1. Докажите, что центр этой окружности принадлежит окружности O.

74. Около окружности диаметра d описана равнобочная трапеция. Докажите, что диагональ этой трапеции больше $d\sqrt{2}$.

75. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком прямой с центром O описанного круга. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH \cong \angle OAC$.

76. Дан параллелограмм $ABCD$. В треугольники ABC, ACD, ABD, BCD вписаны окружности. Докажите, что точки касания этих окружностей и диагоналей параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

77. В треугольник вписана окружность радиуса r. Параллельно сторонам треугольника к окружности проведены касательные и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности радиусов r_1, r_2, r_3. Докажите, что $r = r_1 + r_2 + r_3$.

78. Продолжения боковых сторон AD и BC равнобочной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S. Докажите, что окружности, проведенные соответственно через точки A, C, S и B, D, S, пересекаются в центре окружности, описанной вокруг данной трапеции.

79. Около окружности описана трапеция. Докажите, что длины m и n диагоналей трапеции и радиуса r окружности связаны неравенством $m^2 + n^2 \geqslant 16r^2$.

80. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке M и стороны BC — в точке N. Биссектрисы углов A и B треугольника встречают MN соответственно в точках X и Y. Докажите, что отрезки MX, NY и XY пропорциональны сторонам треугольника ABC.

81. Около окружности описан шестиугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Докажите, что его противоположные стороны попарно конгруэнтны.

82. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO, которая пересекает высоту AH в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу вписанной окружности.

83. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB соответственно в точках K, M и N. Докажите, что $\operatorname{ctg}\widehat{AKC} + \operatorname{ctg}\widehat{BMA} + \operatorname{ctg}\widehat{CNB} = 0$.

§ 3. Разные задачи

84. При помощи циркуля и линейки разделите угол в $13°$ на тринадцать конгруэнтных углов.

85. Найдите все такие треугольники, которые можно разрезать на два подобных между собой треугольника.

86. Постройте треугольник, зная его боковую сторону, угол при вершине и медиану к другой боковой стороне.

87. В плоскости даны угол, окружность с центром O и две не принадлежащие ей точки A и B. Постройте такую хорду A_1B_1 окружности, чтобы прямые AA_1 и BB_1 были параллельны, а угол A_1OB_1 был конгруэнтен данному.

88. Дан треугольник ABC. Найдите точки K и H, лежащие соответственно на сторонах AB и BC, такие, что $|BK|=|KH|=|HC|$.

89. Саша нарисовал параллелограмм $ABCD$, отметил точку M — середину стороны BC, точку N — середину стороны CD и пошел гулять. Его сестренка Лиля подобралась к чертежу и стерла все, кроме точек A, M, N. Помогите Саше восстановить чертеж, т. е. найти точки B, C и D.

90. Постройте квадрат $ABCD$ по его центру O и двум точкам M и N, принадлежащим прямым BC и CD.

91. Дан треугольник ABC. На сторонах его взяты точки: D и E на $[AB]$, F на $[AC]$, G на $[BC]$. При этом $|AD|=|AC|$, $|BE|=|BC|$, $|AE|=|AF|$, $|BG|=|BD|$. Докажите, что точки C, D, E, F, G лежат на одной окружности.

92. Через концы каждой стороны BC, CA, AB треугольника ABC проведены соответственно перпендикуляры к двум другим сторонам, пересекающиеся в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 не принадлежат одной прямой.

93. Диагонали трапеции с основаниями a и b взаимно перпендикулярны. Какие значения может принимать высота трапеции?

94. Основания равнобочной трапеции — 4 *см* и 8 *см*, ее площадь — 21 *см*^{2}. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону трапеции?

95. На плоскости заданы 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Рассматриваются все возможные треугольники с вершинами в этих точках. Докажите, что среди них будет не более 70% остроугольных треугольников.

96. Пусть A и B две точки на плоскости; будем обозначать через $[AB]$ множество точек, лежащих на отрезке между A и B, включая сами точки A и B; через $]AB]$ будем обозначать то же множество, но без точки A и аналогично будем понимать обозначения $[AB[$ и $]AB[$. Какие из следующих утверждений верны:

$$B \in [AB],\ B \in [AB] \cup [BD),\ D \in [DA] \cup [BD],$$
$$D \in [AB] \cup [BD],\ B \in [AB] \cup [BD],\ B \in\,]AB[\, \cap\,]BD].$$

97. Внутри квадрата со стороной 1 размещено $2n^2+1$ точек.

Докажите, что можно провести круг радиуса $\frac{1}{n}$, содержащий три из этих точек.

98. На плоскости даны прямая и точка, не лежащая на ней. Найдите множество центров правильных треугольников, одна вершина которых находится в данной точке, а другая — на данной прямой.

99. На плоскости даны прямая и точка, не принадлежащая ей. Найдите множество третьих вершин правильных треугольников, одна вершина которых находится в данной точке, а другая — на данной прямой.

100. Относительно точек A, B, C известно следующее: для любой точки M на плоскости длина отрезка AM меньше длины хотя бы одного из отрезков BM и CM. Докажите, что точка A принадлежит отрезку BC.

101. На основании AB трапеции $ABCD$ дана точка M. Постройте на стороне CD такую точку N, чтобы площадь четырехугольника, полученного при пересечении прямых AN, BN, CM и DM, была наибольшей.

102. В данную окружность впишите трапецию с данным острым углом, имеющую наибольшую площадь.

103. Даны параллельные прямые l_1 и l_2 и две пары точек A_1, A_2 и B_1, B_2. На прямых найдите соответственно такие точки C_1 и C_2, чтобы $(A_1C_1) \parallel (A_2C_2)$, $(B_1C_1) \parallel (B_2C_2)$.

104. Источник света s находится на расстоянии l от экрана MN. В начальный момент времени плоский предмет высоты h начинает равномерно двигаться со скоростью v от источника к экрану. Найдите зависимость скорости движения края тени по экрану от времени.

105. Стержень AB опирается своими концами на стороны тупого угла β. Верхний конец A стержня тянут со скоростью v вдоль стороны AO. Найдите зависимость скорости точки B от угла $\widehat{ABO} = \alpha$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I

1. Смотрите рисунки 6, 7, 8, 9.

2. 1) Теорема о конгруэнтности вертикальных углов. (1) Теорема об образе угла при центральной симметрии относительно его вершины; (2) теорема: центральная симметрия является перемещением; (3) теорема о задании поворота с помощью лучей OX и OX_1; (4) аксиомы расстояний; (5) аксиома подвижности плоскости. Схему «родословной» смотрите на рисунке 10. 2) Теорема о центральной симметричности противоположно направленных лучей. (1) Аксиома о разбиении плоскости на открытые полуплоскости; (2) теорема о параллельности центрально-симметричных прямых; (3) теорема о пересечении двух прямых; (4) аксиома прямой; (5) теорема: центральная симметрия является перемещением; (6) теорема о задании поворота с помощью лучей OX и OX_1; (7) аксиомы расстояний; (8) аксиома подвижности плоскости. Схему «родословной» смотрите на рисунке 11. 3) Теорема Фалеса. (1) Теорема об отрезках параллельных прямых, заключенных между параллельными прямыми; (2) теорема: параллельный перенос является перемещением; (3) теорема о конгруэнтных отрезках; (4) теорема о центральной симметричности противоположно направленных лучей; (5) аксиома о разбиении плоскости на открытые полуплоскости; (6) теорема о параллельности центрально-симметричных прямых; (7) теорема о пересечении двух прямых; (8) аксиома прямой; (9) теорема: центральная симметрия является перемещением; (10) теорема о задании поворота с помощью лучей OX и OX_1; (11) аксиомы расстояний; (12) аксиома подвижности плоскости. Схему «родословной» смотрите на рисунке 12. 4) Теорема Пифагора. (1) Теорема о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике; (2) признак подобия треугольников по двум углам; (3) следствия из свойства 3 гомотетии; (3) свойство 3 гомотетии; (5) законы векторной алгебры; (6) правило треугольника; (7) теорема: сумма векторов есть вектор; (8) теорема о необходимом и достаточном признаке вектора; (9) теорема о транзитив-

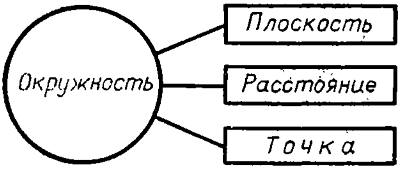

Рис. 6

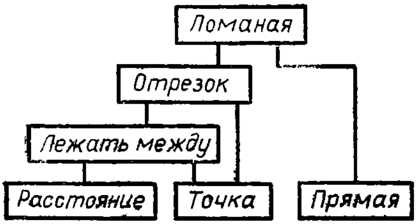

Рис. 7

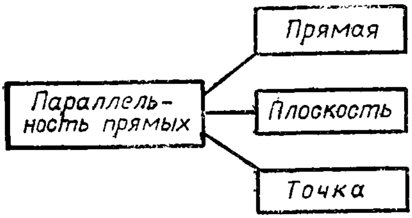

Рис. 8

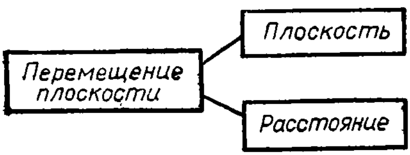

Рис. 9

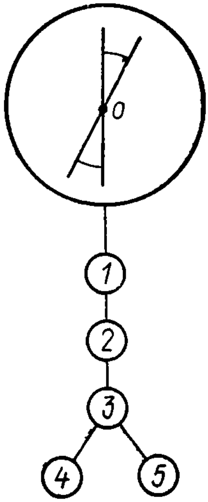

Рис. 10

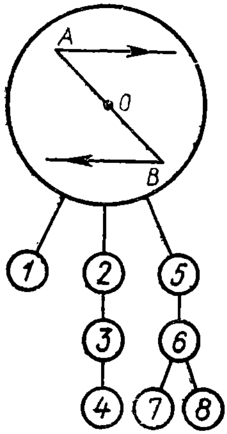

Рис. 11

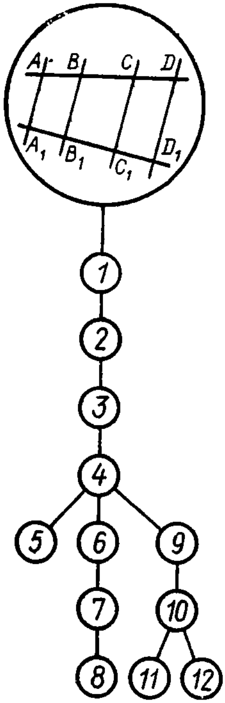

Рис. 12

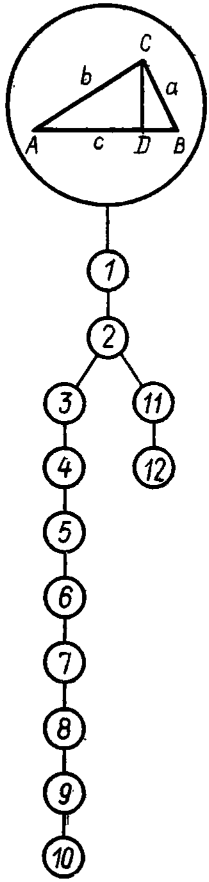

Рис. 13

ности сонаправленности лучей; (10) аксиомы порядка; (11) признак конгруэнтности треугольников по стороне и двум прилежащим углам; (12) аксиома подвижности плоскости. Схему «родословной» смотрите на рисунке 13.

3. 1) Пусть дана плоскость α. Надо доказать существование такой точки A, что $A \notin \alpha$. Согласно аксиоме 1 плоскость α не совпадает с пространством U. Так как всякая фигура есть подмножество пространства, то $\alpha \subset U$. Отсюда следует существование точки A: $A \notin \alpha$. 2) Решается аналогично.

4. 1) Пусть дана точка A; по аксиоме 1 существует прямая a. Если $A \in a$, то задача решена. Пусть $A \notin a$; согласно аксиоме 1 существует точка $B \notin a$, причем $B \neq A$. По аксиоме 2 существует прямая $b = (AB)$. Эта прямая искомая. 2) Пусть дана точка A; согласно аксиоме 1 существует плоскость α. Если $A \in \alpha$, то задача

решена. Пусть $A \notin \alpha$, тогда согласно аксиоме 1 существует точка $B \in \alpha$, причем $B \neq A$. Так как (AB) не совпадает с пространством (аксиома 1), то существует точка C, не принадлежащая (AB). Через точки A, B, C проходит плоскость β (аксиома 4), эта плоскость искомая.

5. Пусть дана плоскость α. Согласно аксиоме 1 существуют точки $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$. Через точки A и B проходит прямая a (аксиома 2); согласно аксиоме 1 существует точка $C \notin a$. По аксиоме 4 существует плоскость β, проходящая через A, B, C, причем $\beta \neq \alpha$. Эта плоскость имеет с плоскостью α общую точку A, поэтому $\alpha \cap \beta = m$ (аксиома 5). Итак, доказано существование прямой m, принадлежащей произвольной плоскости α.

6. Согласно аксиоме 1 существует плоскость α и точки: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, а также точка $C \notin (AB)$. Согласно аксиоме 4 через точки A, B, C проходит плоскость β, и по аксиоме 1 существует точка D, не принадлежащая β; A, B, C, D — искомые точки.

7. Прямой m принадлежит хотя бы одна точка (аксиома 1). Эта точка согласно аксиоме порядка III_1 разбивает m на два луча OM_1 и OM_2. А согласно аксиоме III_2 на луче OM_1 для любого расстояния a существует одна и только одна точка A, для которой $|OA| = a$. Но различных величин a существует бесконечное множество. Следовательно, луч OM_1 содержит бесконечное множество точек, а так как $[OM_1) \subset m$, то и прямая m содержит это множество.

8. Через данную точку O проходит прямая a (задача 4); вне прямой a существует точка A (аксиома 1); по той же причине вне прямой OA существует точка B. Рассмотрим прямую $(AB) = b$ (аксиома 2); данная точка O не принадлежит b. Согласно задаче 7 прямая b содержит бесконечное множество точек. Применив аксиому 2 к точке O и каждой из этих точек, получим бесконечное множество прямых.

9. Указание. Воспользуйтесь задачами 5 и 7.

10. Указание. Через данную точку O можно провести бесконечное множество прямых, причем это можно сделать так, что все прямые лежат в одной плоскости α (см. задачу 8). Выберите вне плоскости α точку A (аксиома 1), а на каждой прямой точку, отличную от O (задача 7). Рассмотрите плоскости, проходящие через A, O и каждую из выбранных точек (аксиома 4).

11. Пусть дана плоскость α. Согласно задаче 5 существует прямая $a \subset \alpha$, а согласно задаче 7 существуют точки $A \neq B$, принадлежащие прямой a. Согласно аксиоме порядка III_4 прямая a разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости α на два непустых множества. Это значит, что в плоскости α существует точка $C \notin a$, т. е. точки A, B, C — искомые.

12. Пусть дана плоскость α. Согласно задаче 11 существуют точки A, B, C, принадлежащие α, но не принадлежащие одной прямой. Рассмотрим прямую (AB) (аксиома 2), она лежит в плоскости α (аксиома 3). Прямая AB содержит бесконечное множество точек (задача 7). Применив аксиому 2 к точке C и каждой из этих точек, получим требуемое множество прямых.

13. Пусть дана прямая a. Согласно задаче 7 существуют две различные точки A и B, принадлежащие этой прямой. По аксиоме 1 существует точка $C \notin a$, тогда по аксиоме 4 существует плоскость $\alpha = (ABC)$. Так как $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, то $(AB) \subset \alpha$ (аксиома 3), но $(AB) = a$ (аксиома 2). Следовательно, $a \subset \alpha$.

14. Через данную прямую проведем плоскость α (задача 13). Плоскости α принадлежит точка $C \notin a$, а вне этой плоскости существует точка M (аксиома 1); через M и C проведем прямую c (аксиома 2). Эта прямая содержит бесконечное множество точек (задача 7); проводя плоскости через прямую a и каждую из этих точек (задача 13), получим требуемое множество.

15. Так как $C \in (ABD)$ и $M \in (ABD)$, то $(CDM) = (ABD)$.

16. 1) Да; 2) нет, так как возможно $A \in m$.

17. Пусть даны прямые a, b, c, d; обозначим $a \cap b = M$. Если c и d проходят через точку M, то задача решена. Пусть c не проходит через M, причем $c \cap a = M_1$, $c \cap b = M_2$, тогда прямые a, b, c лежат в плоскости MM_1M_2. Если $d \subset (MM_1M_2)$, то задача решена. Если $d \not\subset (MM_1M_2)$, то, пересекая a и b, прямая d должна проходить через точку M и по признаку скрещивающихся прямых $d \dotplus c$, что противоречит условию задачи.

18. 1) Достаточно; 2) необходимо; 3) необходимо; 4) необходимо и достаточно; 5) необходимо (необходимо и достаточно); 6) необходимо; 7) необходимо.

19. 1) Прямой, лучом, пустым множеством; 2) лучом, отрезком, точкой, пустым множеством; 3) плоскостью, полуплоскостью, пустым множеством; 4) полуплоскостью, полосой, углом, прямой, пустым множеством; 5) отрезком, точкой, пустым множеством; 6) треугольником, четырехугольником, отрезком, точкой, пустым множеством.

20. 1) Пусть α — граница открытого полупространства P, $[AB]$ — данный отрезок. Из условия следует, что $A \notin \alpha$, $B \notin \alpha$. В плоскости α выберем точку N, не принадлежащую (AB); через (AB) и N проведем плоскость β. Обозначим $\alpha \cap \beta = a$. Пересечением полупространства P и плоскости β является полуплоскость β_1 с границей a, причем A и B принадлежат β_1. Если предположить, что $[AB] \cap \alpha = M$, то $M \in a$ и мы пришли к противоречию с аксиомой порядка III_4. 2) Решается аналогично.

21. Пусть $a \cap b = N$, тогда (MN) искомая. Если $a \parallel b$, то искомая прямая проходит через точку M и параллельна прямой a.

22. Если $M \in (ABC)$, то решения нет.

23. 2) Проведя биссектрису AA_1 угла BAC (точку A_1 возьмем произвольно между B и C), получим, что плоскость MAA_1 искомая.

24. Если $M \notin a$, то решение единственное; если $M \in a$, то решений — бесконечное множество.

25. Отложим на $[BA)$ отрезок BN, конгруэнтный $[BP]$. Плоскость MPN искомая.

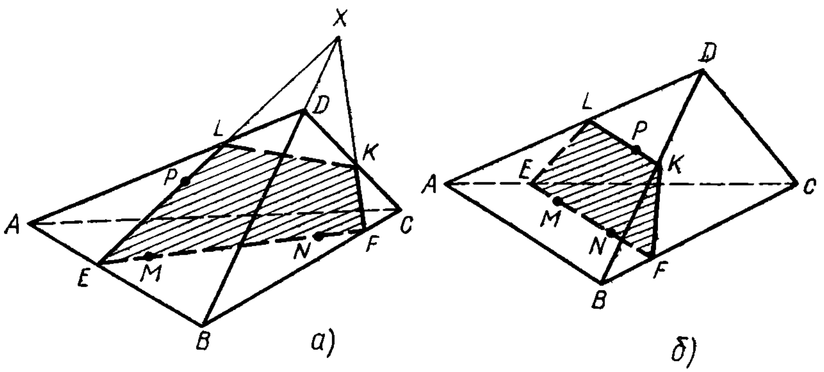

Рис. 14

26. PQ и RS — средние линии треугольников ADC и ABC, тогда $|PQ| = |RS|$, $[PQ] \parallel [RS]$ и $PQRS$ — параллелограмм.

27. 1) Выберем точки M и N так, чтобы $A \in (MN)$, тогда точку P можно выбрать в грани ABC произвольно ($P \neq A$). 2) Выберем точки M и N так, чтобы прямая MN пересекала (AB) в точке K, не совпадающей с концами отрезка AB. Через точку K в плоскости ABC проведем прямую m, не проходящую через вершину C. В качестве точки P можно взять любую, за исключением точки K, точку отрезка $m \cap \triangle ABC$.

28. Указание. Отдельно рассмотрите случай, когда $(MP) \parallel (AC)$ и $(NZ) \parallel (BD)$ $(Z = (MP) \cap (BC))$ или $(MP) \parallel (BC)$ и $(NK) \parallel (AD)$ $(K = (PM) \cap (AC))$.

29. $EFKL$ — сечение (рис. 14, *а*). Сечение может оказаться и треугольником. Отдельно рассмотрите случай, когда $(MN) \parallel (AB)$ (рис. 14, *б*). В таком случае и $(KL) \parallel (AB)$.

30. Указание. 1) Выберите $P \in [BD]$. 2) Выберите $P \in [BC]$.

31. 1) В плоскости α, содержащей данные прямые a и b, выберем точку N, не принадлежащую этим прямым. Если $M \notin \alpha$, то (MN) — искомая прямая. Если $M \in \alpha$, но $M \notin a$ и $M \notin b$, то ьыберем $N \notin \alpha$ и (MN) — искомая прямая. 2) Решается аналогично.

32. Пусть $c_1 \parallel c$. Прямая c_1 не может быть параллельна ни одной из данных прямых, так как иначе c была бы параллельна этой прямой. Если предположить, что c_1 пересекает a и b, то окажется, что a и b лежат в плоскости, проходящей через c и c_1. А это противоречит условию: $a \dot{-} b$.

33. Указание. Примените способ «от противного».

34. Плоскости пересекаются.

35. Выберем точку $B \in b$; через a и B проведем плоскость α. Всякая прямая, проведенная в плоскости α через точку M и отличная от прямых a и MB, искомая.

36. Неверно, так как прямая может лежать в плоскости.

37. Применив способ «от противного», получим, что $a \parallel \beta$, что противоречит условию задачи.

38. Могут пересекаться или быть параллельными.

39. Нет, прямые a и b могут быть также пересекающимися или скрещивающимися.

40. Указание. 1) Проведите прямую, параллельную линии пересечения данных плоскостей; 2) искомая плоскость проходит через прямые, проведенные через данную точку и соответственно параллельные данным прямым.

41. Через произвольную точку прямой a проведем прямую, параллельную прямой b. Плоскость, проходящая через a и c, искомая.

42. 1) Линия пересечения плоскости сечения α и плоскости ABC параллельна (AB). 2) $\frac{1}{16}a^2\sqrt{11}$.

43. 1) Указание. Искомая прямая параллельна медиане CC_1 треугольника ABC. 2) $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

44. *Необходимость*. Если прямые a и b пересекаются или параллельны, то плоскость, проходящая через эти прямые, пересекает плоскость α по прямой AB, причем $(AB) \parallel a$. *Достаточность*. Пусть $(AB) \parallel c$, тогда (AB) и c лежат в одной плоскости. В этой плоскости лежат прямые a и b.

45. 1) Необходимо; 2) необходимо; 3) необходимо и достаточно; 4) необходимо и достаточно.

46. Из условия следует, что в плоскости α существует прямая b, параллельная данной прямой a, и в плоскости β есть прямая c, параллельная a. Тогда $b \parallel c$ и $m \parallel b$ $(m = \alpha \cap \beta)$. Следовательно, $m \parallel a$.

47. 1), 2) Плоскость; 3) $\varnothing$.

48. Указание. 1) Заметьте, что грани BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны; 2) воспользуйтесь тем, что $(AA_1) \parallel (BB_1)$.

49. Пусть O — точка пересечения прямой c с плоскостью γ, проходящей через a и b. В этой плоскости проведем через O прямую p, пересекающую a и b соответственно в точках A и B. На прямой c выберем точки A_1 и B_1 так, чтобы $|OA_1|:|A_1B_1| = |OA|:|AB|$ и $|A_1B_1| = d$ (если O находится между A и B, то выбираем A_1 и B_1 по разные стороны от O), тогда $(AA_1) \parallel (BB_1)$. Плоскости α и β, проходящие через a и A_1, b и B_1 — искомые.

50. Пусть $(MNP) \parallel \alpha$. Спроектируем параллельно (AA_1) точку P на плоскость грани $ABCD$ (рис. 15), строим $X = (P_1A) \cap (PM)$, тогда $X \in \alpha$. Далее строим $E = (XN) \cap (AB)$; через точку P проведем $(KF) \parallel (XN)$ и т. д.

51. Указание. Рассмотрите два случая: а) $(MN) \cap (B_1C_1) = X$ (рис. 16) и б) $[MN] \parallel [B_1C_1]$ (рис. 17). Заметьте, что в последнем случае линия пересечения α и $(A_1B_1C_1)$ параллельна (MN).

52. Указание. Линия пересечения плоскости сечения с плоскостью ADD_1 параллельна (BM).

53. 1) Спроектируем параллельно (A_1A) точки N и P на плоскость грани $ABCD$ (рис. 18), получим точки N_1 и P_1. Точка $X =$

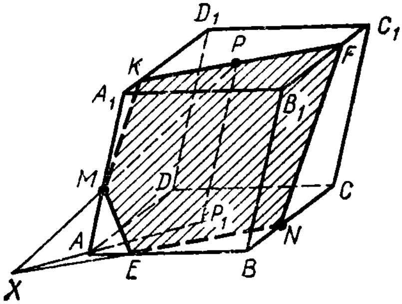

Рис. 15

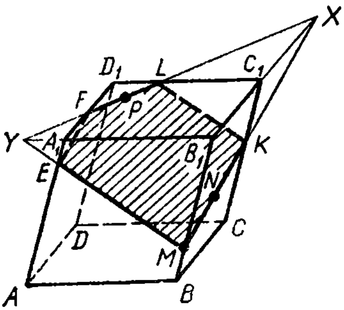

Рис. 16

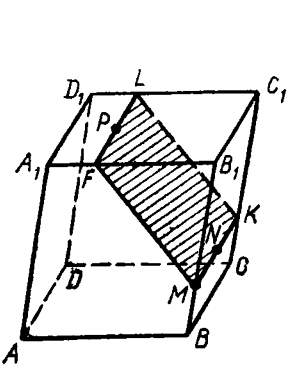

Рис. 17

$= (NP) \cap (N_1P_1)$ принадлежит плоскости сечения. Далее построим (XM), получим точки K и L и т. д. 2) Решение аналогичное.

54. 1) Построим точку $X = (PN) \cap (P_1C)$ (рис. 19), затем (XM) и точку $Q = (XM) \cap (BC)$. Далее построим отрезки QN, $[PS] \parallel [MQ]$ и т. д. Сечение — правильный шестиугольник $MQNSPF$. 2) $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

55. Пересекаются или скрещиваются.

56. Пусть $A \in a$, $A \in \alpha$, $\alpha \parallel \beta$. Через прямую a и точку $B \in \beta$ проведем плоскость γ. Получим $\gamma \cap \alpha = a_1, \gamma \cap \beta = b$, причем $b \parallel a_1$. Но $b \parallel a$ по свойству прямой, параллельной плоскости, поэтому $a = a_1$ и $a \subset \alpha$.

57. Указание. Воспользуйтесь теоремой о пересечении параллельных плоскостей третьей плоскостью.

58. Имеем: $(A_1A_2) \parallel (B_1B_2)$, $(A_1A_3) \parallel (B_1B_3)$. Применив теорему о пропорциональных отрезках, получим: $|OA_1| : |OB_1| = |OA_2| : |OB_2|$, $|OA_1| : |OB_1| = |OA_3| : |OB_3|$.

59. Плоскости α и β могут пересекаться, если все три луча лежат в одной плоскости, в противном случае $\alpha \parallel \beta$.

60. Предположим, что через данные прямые проходят соответственно еще две параллельные плоскости α_1 и β_1 (рис. 20). Имеем $\alpha \parallel \beta$, $\alpha_1 \parallel \beta_1$, причем $\alpha \cap \alpha_1 = a$, $\beta \cap \beta_1 = b$. Плоскость β_1, пересекая β, пересечет и α (иначе через прямую b будут проведены две различные плоскости, параллельные плоскости α). Пусть $\beta_1 \cap \alpha = c$, тогда $c \parallel b$. Аналогично $c \parallel a$. Получаем, что $b \parallel a$, а это противоречит условию задачи. Следовательно, плоскость β_1 не может быть отлична от β.

61. Пусть даны параллельные плоскости α_1, α_2, α_3. Через точку $A_1 \in \alpha_1$ проведем прямую c, параллельную прямой b. Имеем: $c \cap \alpha_2 = C_2$, $c \cap \alpha_3 = C_3$, причем $(C_2A_2) \parallel (C_3A_3)$. Пользуясь теоремой о пропорциональных отрезках, получим: $|A_1A_3|:|A_1A_2| = |A_1C_3|:|A_1C_2|$. Из обеих частей этого равенства вычтем по 1, тогда $|A_2A_3|:|A_1A_2| = |C_2C_3|:|C_1C_2|$ и т. д.

62. Через любую точку $B \neq A$ плоскости α проведем прямую p, пересекающую данные прямые в точках M_1 и N_1. Через прямые m и n проведем плоскости, параллельные плоскости α. Используя результат задачи 61, получаем требуемое: $|AM|:|AN| = |BM_1|:|BN_1|$.

63. Плоскость, параллельная данным плоскостям.

64. Смотрите «Пособие для учителей», с. 35—37.

65. Пусть дан угол AOB $(0° < \widehat{AOB} < 180°)$ и величина φ. Через $[OB)$ проведем плоскость α, не совпадающую с плоскостью AOB; рассмотрим в плоскости α угол BOC, величина которого равна φ. Проведем (AC); при проек-

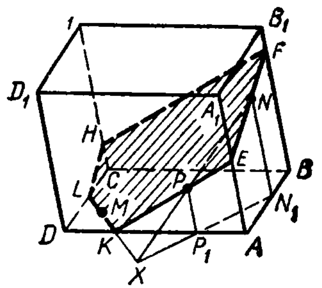

Рис. 18

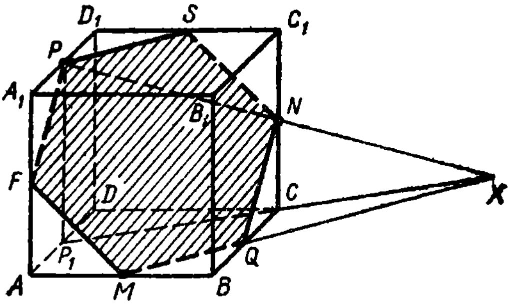

Рис. 19

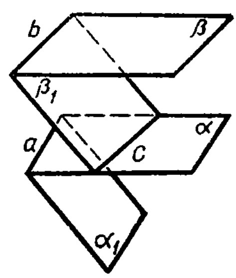

Рис. 20

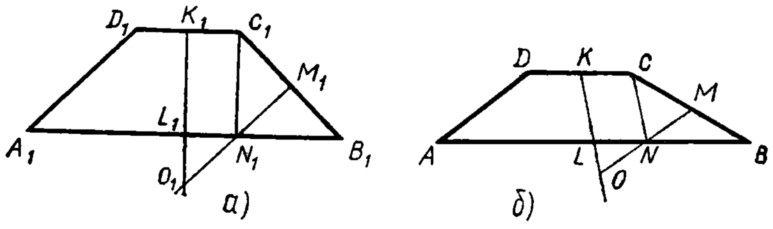

Рис. 21

тировании данного угла параллельно (AC) на плоскость α получим угол BOC.

66. Если $a \parallel b$, то искомое множество — прямая, параллельная данным прямым. Пусть $a \nparallel b$. Через прямую a и точку $F \in b$ проведем плоскость α. Рассмотрим проектирование на плоскость α параллельно прямой b. Проекцией любого данного отрезка $AB (A \in a,\ B \in b)$ служит отрезок FA; проекция M_1 точки M делит его в заданном отношении k. Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что множество всех точек M_1 есть прямая, параллельная a. Аналогично выясним, что проекция данного множества на плоскость, проходящую через b, есть также прямая. Следовательно, искомое множество — прямая.

67. Прямая, проходящая через середину отрезка MN, где $M = a \cap \alpha$, $N = b \cap \alpha$. Решается аналогично предыдущей задаче.

68. Объединение двух окружностей с центром $O = (AB) \cap \alpha$.

69. Указание. На оригинале точка O_1 является пересечением оси симметрии K_1L_1 трапеции и серединного перпендикуляра к отрезку B_1C_1 (рис. 21, *а*). Проведите $[C_1N_1] \perp [A_1B_1]$, получите равнобедренный прямоугольный треугольник; его высота M_1N_1 делит $[C_1B_1]$ пополам. Заметив это, выполните построение (рис. 21, *б*).

70. Указание: Пусть $A_1B_1C_1D_1$ — данная трапеция (рис. 22, *а*). Центр O_1 вписанной окружности — пересечение прямой p_1, проведенной через середину M_1 стороны A_1D_1 — параллельно (A_1B_1),

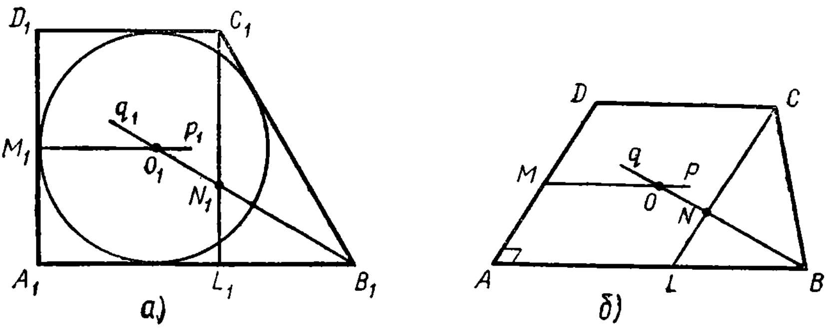

Рис. 22

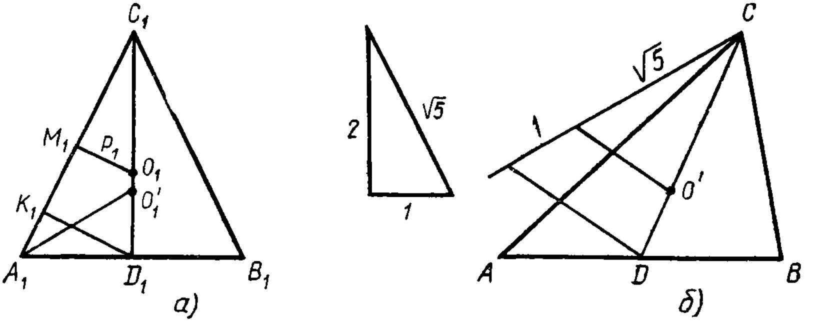

Рис. 23

и биссектрисы q_1 угла $A_1B_1C_1$. Проведите $[C_1L_1] \perp [A_1B_1]$, пусть $q_1 \cap [C_1L_1] = N_1$. Так как $|B_1L_1| = \frac{1}{2}|B_1C_1|$, то $|N_1L_1| = \frac{1}{2}|N_1C_1|$. Заметив это, выполните построение (рис. 22, *б*). Необходимо при этом учесть, что отношение оснований трапеции-оригинала и ее проекции должно быть одним и тем же.

71. Указание. Пусть $[C_1M_1] \perp [A_1B_1]$, тогда $|B_1M_1| : |M_1A_1| = |C_1B_1|^2 : |C_1A_1|^2 = 1 : 9$.

72. Указание. Рассмотрите данный треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $|A_1B_1| = |C_1D_1|$ (рис. 23, *а*). 1) Проведите $[D_1K_1] \perp [A_1C_1]$, тогда $|A_1K_1| : |K_1C_1| = |A_1D_1|^2 : |D_1C_1|^2 = 1:4$. Центр O_1 описанной окружности есть пересечение (C_1D_1) и серединного перпендикуляра p_1 к стороне C_1A_1; заметьте, что $p_1 \parallel [D_1K_1]$. 2) Биссектриса угла A_1 делит высоту C_1D_1 в отношении $|A_1D_1| : |A_1C_1| = 1 : \sqrt{5}$. (Построение показано на рисунке 23, *б*).

73. Указание. 1) Искомая прямая параллельна (AC); 2) постройте изображение перпендикуляра $[AK]$ к прямой BE $(|BK| : |KE| = 4 : 1)$. Искомая прямая параллельна (AK).

Глава II

1. $\vec{a} + \vec{b} = m\vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c} = n\vec{a} \Rightarrow \vec{a} - \vec{c} = m\vec{c} - n\vec{a} \Rightarrow (1+n)\vec{a} = (1+m)\vec{c}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны, значит, $1 + n = 0$ и $1 + m = 0 \Rightarrow m = n = -1$. Отсюда $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

2. а) Если $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то параллелограмм $OAMB$ является ромбом и диагональ OM — биссектриса угла O (рис. 24). б) Если диагональ OM является биссектрисой угла O, то параллелограмм $OAMB$ — ромб и $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$.

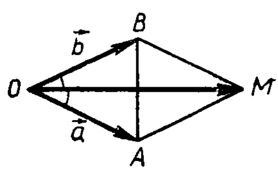

Рис. 24

3. Указание. Достаточно доказать, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. Запишите:

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}$ и т. д. Учтите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

4. $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{C_1C_2}$, $\overrightarrow{QR} = l\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{RP} = s\overrightarrow{B_1B_2} \Rightarrow \vec{0} = k(-\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{B_1B_2}) + l\overrightarrow{A_1A_2} + s\overrightarrow{B_1B_2} \Rightarrow (l-k)\overrightarrow{A_1A_2} + (s-k)\overrightarrow{B_1B_2} = \vec{0} \Rightarrow l - k = 0$, $s - k = 0 \Rightarrow s = l = k$.

5. Пусть G — центроид треугольника $A_1B_1C_1$, тогда $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$. Рассмотрим сумму $\overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GB_2} + \overrightarrow{GC_2} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{GC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1}) + k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Rightarrow G$ — центроид треугольника $A_2B_2C_2$.

6. Пусть G — центроид треугольника ABC, а G_1 — центроид треугольника $A_1B_1C_1$. По условию $\overrightarrow{GA} = \lambda(\overrightarrow{G_1B_1} - \overrightarrow{G_1C_1})$, $\overrightarrow{GB} = \mu(\overrightarrow{G_1C_1} - \overrightarrow{G_1A_1})$, $\overrightarrow{GC} = \nu(\overrightarrow{G_1A_1} - \overrightarrow{G_1B_1})$. Сложив почленно эти равенства, получим: $(\nu - \mu)\overrightarrow{G_1A_1} + (\lambda - \nu)\overrightarrow{G_1B_1} + (\mu - \lambda)\overrightarrow{G_1C_1} = \vec{0}$. Но $\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu$ и $\frac{1}{\lambda}(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} - 2\overrightarrow{G_1C_1} = -3\overrightarrow{G_1C_1} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{G_1C_1}$.

8. $\overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

9. 1) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{NC}$.

10. 1) $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; 2) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

11. Точки P и Q — центроиды треугольников ABD и BCD. Пусть $(AC) \cap (BD) = O$, тогда $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

12. Запишем: $\frac{\overrightarrow{BM_1}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{CM_1}}{\overrightarrow{N_1C}} = \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{N_1D}}$, $\frac{\overrightarrow{BM_2}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{CM_2}}{\overrightarrow{N_2C}} = \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{N_2D}}$. После почленного деления получим: $\overrightarrow{BM_1} : \overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{DN_2} : \overrightarrow{DN_1}$.

14. $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN} : \overrightarrow{NC} = p : q$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} - \frac{q}{p}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{DC} - \frac{q}{p}(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DC} - \frac{q}{p}(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{q\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{DC}}{q+p}$.

15. 1) $\overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EF}$.

16. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (рис. 25), где G — центроид треугольника ABC, $G \in [OB]$, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OF}$, а $\overrightarrow{OF} \parallel \overrightarrow{OG}$.

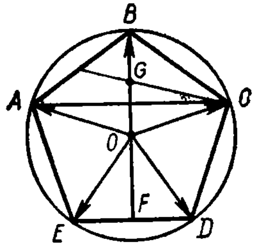

Рис. 25

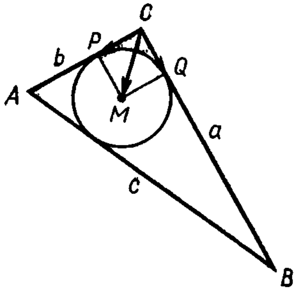

Рис. 26

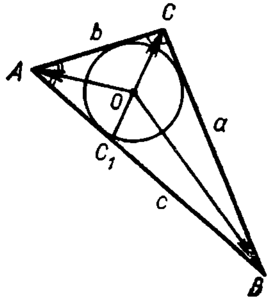

Рис. 27

17. Заметим, что $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, $k > 0$. Но $k|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$, отсюда $k = |\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{AB}| = \sin 108^\circ : \sin 36^\circ = 2\cos 36^\circ$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = 2\cos 36^\circ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$. Аналогично $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\cos 36^\circ \overrightarrow{AE}$. Из последних двух векторных равенств можно найти разложения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

18. *Единственность.* Допустим, что для двух точек G_1 и G_2 выполняются равенства: $\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{G_1A_n} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{G_2A_1} + \overrightarrow{G_2A_2} + \cdots + \overrightarrow{G_2A_n} = \vec{0}$. Почленно вычитая, получим, что $n\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$, следовательно, $G_1 = G_2$. *Существование.* Выберем произвольную точку O и положим $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})$. Сложив почленно равенства $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_2}, \cdots, \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_n}$, получим $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

19. $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \dfrac{b^2}{a^2}$, отсюда $\overrightarrow{CD} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}, |AC| = b, |BC| = a$.

20. $|PC| = |QC| = p - c$ (рис. 26), где p — полупериметр треугольника, $c = |AB|$, $\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CA}} = \dfrac{p-c}{b}$, $\overrightarrow{CP} = \dfrac{p-c}{b}\overrightarrow{CA}$. Аналогично $\overrightarrow{CQ} = \dfrac{p-c}{a}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CM} = \dfrac{p-c}{b}\overrightarrow{CA} + \dfrac{p-c}{a}\overrightarrow{CB}$.

21. $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$, где $\lambda = \dfrac{c}{b}$.

22. $\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \dfrac{b}{a}$, $\dfrac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{OC_1}} = \dfrac{a+b}{c}$ (рис. 27), поэтому $\overrightarrow{OC_1} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}$ и $\overrightarrow{OC_1} = -\dfrac{c}{a+b}\overrightarrow{OC}$.

23. Положим $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AB_1} = k\vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AD_1} = l\vec{n}$. Пусть $(DB_1) \cap (D_1B) = P$. Тогда $\overrightarrow{AP} = \alpha k\vec{m} + (1-\alpha)\vec{n} = \beta\vec{m} + (1-\beta)l\vec{n}$.

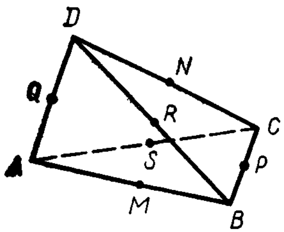

Рис. 28

Отсюда $\alpha k = \beta$, $1 - \alpha = (1 - \beta) l$, $\alpha = \frac{1-l}{1-kl}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{k(1-l)\vec{m}}{1-kl} + \frac{l(1-k)\vec{n}}{1-kl}$. Легко проверить, что $\overrightarrow{C_1C} = (1-k)\vec{m} + (1-l)\vec{n}$, $\overrightarrow{PC} = \frac{(1-k)\vec{m} + (1-l)\vec{n}}{1-kl}$, следовательно, $\overrightarrow{CC_1} = (1-kl)\overrightarrow{PC}$, и поэтому точки C, C_1, P принадлежат одной прямой.

24. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. Точка O — любая.

25. Пусть O_1, O_2, O_3 — соответственно середины отрезков MN, PQ, RS (рис. 28). Тогда $2\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $2\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $2\overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Очевидно, $O_1 = O_2 = O_3 = O$ и $|MO| : |ON| = |PO| : |OQ| = |RO| : |OS| = 1$.

26. Пусть G — общий центроид треугольников, тогда для любой точки O пространства имеем: $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, откуда $\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{B_1A}$.

27. Пусть G_{ijk} — центроид треугольника $A_iA_jA_k$. Тогда $\overrightarrow{OG_{123}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})$, $\overrightarrow{OG_{234}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4})$, $\overrightarrow{OG_{456}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6})$, $\overrightarrow{OG_{561}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_1})$. Отсюда $\overrightarrow{G_{234}G_{123}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_4})$, $\overrightarrow{G_{561}G_{456}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_1})$.

28. Из условия задачи следует: $\overrightarrow{OA_0} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_0} = k\overrightarrow{OB} + (1-k)\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_0} = k\overrightarrow{OC} + (1-k)\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OD_0} = k\overrightarrow{OD} + (1-k)\overrightarrow{OD_1}$. Но $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1}$. Отсюда $\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OC_0} = k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (1-k)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1})$, $\overrightarrow{OB_0} + \overrightarrow{OD_0} = k(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + (1-k)(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1})$. Правые части равны, поэтому $\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OB_0} + \overrightarrow{OD_0}$, т. е. $A_0B_0C_0D_0$ — параллелограмм, быть может, вырожденный.

29. По условию задачи: $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN})$, $\overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{NM}$. Аналогично $\overrightarrow{DB} = \lambda\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{DQ} \Rightarrow \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \lambda(\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DQ})$, $\overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{QP}$, значит, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{QP}$.

30. Имеем: $\overrightarrow{A_1A_0}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AA_0}$, $\overrightarrow{B_1B_0}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BB_0}$, $\overrightarrow{C_1C_0}=$ $=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CC_0}$ и $\overrightarrow{AA_0}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB_0}=\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CC_0}=\overrightarrow{CA}+$ $+k\overrightarrow{AB}$. Учитывая, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, получим: $\overrightarrow{A_1A_0}+$ $+\overrightarrow{B_1B_0}+\overrightarrow{C_1C_0}=3\overrightarrow{A_1A}$.

31. 2 : 1.

32. $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OM}=4\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}\Rightarrow$ $\Rightarrow\overrightarrow{MO}:\overrightarrow{OM_1}=-\frac{1}{4}$.

33. Очевидно, $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}=$ $=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})$, $\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OD_1}+$ $+\overrightarrow{OD_2}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. После сложения получим: $4\overrightarrow{OG'}+$ $+4\overrightarrow{OG''}=8\overrightarrow{OG}$, или $\overrightarrow{OG'}+\overrightarrow{OG''}=2\overrightarrow{OG}$.

34. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. 35. $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1C}=$ $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BD_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{B_1D}=-\overrightarrow{AB}+$ $+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$. 36. $-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-(\vec{a}-\vec{b})+0(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a})$.

37. $2(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})+3(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=8\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

38. Из условия задачи следует: $\overrightarrow{OP_2}=k\overrightarrow{OP_3}+(1-k)\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OQ_2}=k\overrightarrow{OQ_3}+(1-k)\overrightarrow{OQ_1}$. Отсюда $\overrightarrow{OQ_2}-\overrightarrow{OP_2}=k(\overrightarrow{OQ_3}-\overrightarrow{OP_3})+$ $+(1-k)(\overrightarrow{OQ_1}-\overrightarrow{OP_1})$, $\overrightarrow{P_2Q_2}=k\overrightarrow{P_3Q_3}+(1-k)\overrightarrow{P_1Q_1}$. Векторы $\overrightarrow{P_1Q_1}$, $\overrightarrow{P_2Q_2}$, $\overrightarrow{P_3Q_3}$ компланарны, поэтому прямые P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 параллельны одной плоскости.

39. Имеем: $\overrightarrow{OA_2}=\dfrac{\overrightarrow{OA_1}+k\overrightarrow{OA_3}}{1+k}$, $\overrightarrow{OB_2}=\dfrac{\overrightarrow{OB_1}+k\overrightarrow{OB_3}}{1+k}$. Отсюда $\overrightarrow{A_2B_2}=$ $=\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OA_2}=\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1}+k\overrightarrow{A_3B_3}}{1+k}$.

40. Докажем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, определяемые соответственно серединами данных отрезков, компланарны. Действительно, $2\vec{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB}$, $2\vec{b}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OC}$, $2\vec{c}=$ $=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OA}$, а сумма $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

41. Если $ABCDEF$ — данная ломаная, то $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BC}=$ $=l\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{FA}$. Но $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$, или $(k+1)\overrightarrow{DE}+(l+1)\overrightarrow{EF}+(m+1)\overrightarrow{FA}=\vec{0}$. Так как векторы $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ некомпланарны, то $k+1=l+1=m+1=0$, или $k=l=m=-1$. Отсюда $|AB|=|DE|$, $|BC|=|EF|$, $|CD|=$ $=|FA|$. Далее, $ABDE$ и $BCEF$ — параллелограммы, поэтому их диагонали AD, BE, CF имеют общую середину.

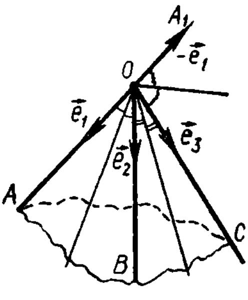

Рис. 29

42. На ребрах OA, OB и OC трехгранного угла от вершины O отложим единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ (рис. 29). Тогда векторы $\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_2+\vec{e}_3$ и $\vec{e}_3+\vec{e}_1$ имеют направления биссектрис плоских углов AOB, BOC, COA. Биссектриса угла, смежного с углом COA, имеет направление вектора $\vec{e}_3-\vec{e}_1$. Но $\vec{e}_3-\vec{e}_1=(\vec{e}_2+\vec{e}_3)-(\vec{e}_1+\vec{e}_2)$, следовательно, указанные векторы компланарны.

43. $(\vec{e}_2-\vec{e}_3)+(\vec{e}_3-\vec{e}_1)=-(\vec{e}_1-\vec{e}_2)$.

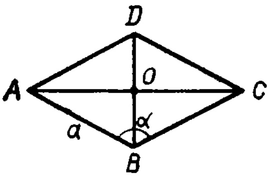

Рис. 30

45. (Рис. 30). $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=a^2\cos(180^\circ-\alpha)+a^2\cos 180^\circ+a^2+a^2\cos\alpha=0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ и $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

46. а) Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

47. $|AA_1|=|BB_1|$ по условию задачи. Имеем: $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|^2$, $3\overrightarrow{CA}^2=3\overrightarrow{CB}^2$, следовательно, $|CA|=|CB|$.

48. Пусть в треугольнике ABC $|CA|>|CB|$. Докажем, что $|AA_1|>|BB_1|$, где A_1 и B_1 — соответственно середины сторон BC и AC. $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$. Необходимо доказать, что $|\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}|>|\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}|$. Составим разность $d=(\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA})^2-(\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB})^2=(\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=3(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=3(\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2)>0$.

49. По условию задачи точка M — середина $[AN]$, точка N — середина $[MB]$, значит, $\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}$. Далее легко убедиться, что $\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{CB}^2$.

50. $$\overrightarrow{AM}^2=\left(\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}\right)^2=\frac{2b^2c^2+2b^2c^2\cos\widehat{A}}{(b+c)^2}=\frac{4b^2c^2\cos^2\frac{\widehat{A}}{2}}{(b+c)^2}.$$

51. $\overrightarrow{A_1A_k}=\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_k}^2=2R^2-2\overrightarrow{OA_k}\cdot\overrightarrow{OA_1}$ (рис. 31), $|A_1A_2|^2+|A_1A_3|^2+\cdots+|A_1A_n|^2=2R^2(n-1)-2\overrightarrow{OA_1}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=2R^2(n-1)-2\overrightarrow{OA_1}\cdot(-\overrightarrow{OA_1})=2nR^2$.

52. Из условия задачи следует, что $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ или $(\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OC}=0$. Но $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2\widehat{B}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2\widehat{A}$. Поэтому $\cos 2\widehat{A}+\cos 2\widehat{B}=0$ или $\cos(\widehat{A}+\widehat{B})\cdot\cos(\widehat{A}-\widehat{B})=0$. Случай $\widehat{A}+\widehat{B}=90°$ исключается, так как $O\neq C_1$. Следовательно, $|\widehat{A}-\widehat{B}|=90°$.

53. $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})=0$, $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=0$. Отсюда $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0$. Аналогично $(\overrightarrow{OA}-$ $-\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0$. Но векторы $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$ неколлинеарны, поэтому $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=0$.

54. $(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{BD}=$ $=(\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}-$ $-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD})=0$.

55. Обозначим через D точку пересечения двух высот треугольника ABC, проведенных к сторонам AB и BC. Тогда $\overrightarrow{AB}\times$ $\times\overrightarrow{CD}=0$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, значит, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ (см. задачу 54), т. е. $(CA)\perp(BD)$.

57. $(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})^2=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})^2\leftrightarrow$ $\leftrightarrow\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}\leftrightarrow\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=$ $=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}\leftrightarrow\overrightarrow{OC}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OD}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\leftrightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}=$ $=0\leftrightarrow[BA]\perp[DC]$.

58. $4\overrightarrow{MN}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+\overrightarrow{DC}^2+\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BC}^2$. Указание. Для любой точки O пространства (рис. 32) $2\overrightarrow{MN}=2(\overrightarrow{ON}-$ $-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}$. Вычислите $\overrightarrow{MN}^2$ и воспользуйтесь тем, что $2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{BC}^2$.

59. $|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2+|A_1B_1|^2+|B_1C_1|^2+|C_1A_1|^2$.

60. Обозначим $|AC|=p$, $|BD|=q$. Тогда $\overrightarrow{OM}=\dfrac{q\overrightarrow{OA}+p\overrightarrow{OB}}{q+p}$,

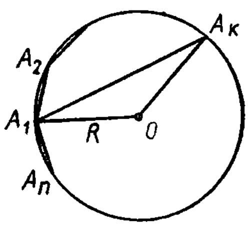

Рис. 31

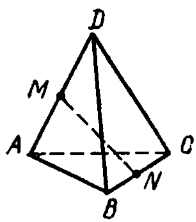

Рис. 32

$$\vec{OM_1} = \frac{q\vec{OA} - p\vec{OB}}{q-p}, \qquad \vec{ON} = \frac{q\vec{OC} + p\vec{OD}}{q+p}, \qquad \vec{ON_1} = \frac{q\vec{OC} - p\vec{OD}}{q-p},$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{M_1N_1} = \frac{q\vec{OA} + p\vec{OB} - q\vec{OC} - p\vec{OD}}{p+q} \cdot \frac{q\vec{OA} - p\vec{OB} - q\vec{OC} + p\vec{OD}}{q-p} =$$

$$= \frac{q^2(\vec{OA} - \vec{OC})^2 - p(\vec{OB} - \vec{OD})^2}{q^2 - p^2} = \frac{q^2p^2 - p^2q^2}{q^2 - p^2} = 0 \Rightarrow [MN] \perp [M_1N_1].$$

61. Учитывая конгруэнтность всех звеньев ломаной $ABCD$, для установления истинности равенства $\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}} = \widehat{\vec{BC}, \vec{DA}}$, достаточно показать, что $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{BC} \cdot \vec{DA}$.

Имеем: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$, отсюда $\vec{AB} + \vec{CD} = -\vec{BC} - \vec{DA}$. Возведя последнее равенство в квадрат, получаем: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{BC} \cdot \vec{DA}$.

62. Длину m проекции звена AB на прямую AC вычисляем так: $m = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{AC}|}$. Аналогично находим длину m_1 проекции звена CD на ту же прямую: $m_1 = \frac{|\vec{CD} \cdot \vec{CA}|}{|AC|}$. Но $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$, поэтому $m = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{DC}|}{|AC|}$. Точно так же, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, поэтому $m_1 = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|AC|}$. Следовательно, $m = m_1$.

63. Пусть G — центроид тетраэдра. Тогда $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. Кроме того, $\vec{GA}^2 = \vec{GB}^2 = \vec{GC}^2 = \vec{GD}^2 = R^2$.

Вычислим разность: $d = \vec{AB}^2 - \vec{CD}^2$. Имеем: $d = (\vec{GB} - \vec{GA})^2 - (\vec{GD} - \vec{GC})^2 = -2\vec{GB} \cdot \vec{GA} + 2\vec{GD} \cdot \vec{GC}$.

С другой стороны, $\vec{GA} + \vec{GB} = -(\vec{GC} + \vec{GD})$. После возведения этого равенства в квадрат, получим: $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \vec{GC} \cdot \vec{GD}$. Следовательно, $d = 0$, или $|AB| = |CD|$. Аналогично доказываем, что $|AC| = |BD|$ и $|AD| = |BC|$.

64. $\vec{BC}^2 = (\vec{OC} - \vec{OB})^2 = \vec{OC}^2 + \vec{OB}^2 - 2\vec{OC} \cdot \vec{OB} = \vec{OC}^2 + \vec{OB}^2$. Аналогично $\vec{AC}^2 = \vec{OC}^2 + \vec{OA}^2$ и $\vec{AB}^2 = \vec{OB}^2 + \vec{OA}^2$. Треугольник остроугольный, если квадрат длины каждой его стороны меньше суммы квадратов длин двух других сторон. Рассмотрим разность $(|AC|^2 + |AB|^2) - |BC|^2$, $\vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - \vec{BC}^2 = \vec{OC}^2 + \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + OA^2 - \vec{OC}^2 - \vec{OB}^2 = 2\vec{OA}^2 > 0$, значит, $\hat{A} < 90°$.

65. Если φ — искомый угол, то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{e}_3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}{|\vec{e}_3||\vec{e}_1 + \vec{e}_2|}, \quad \cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

66. Если φ — угол между биссектрисами углов Oab и Obc, то

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)}{|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| \cdot |\vec{e}_2 + \vec{e}_3|}, \quad \cos\varphi = \frac{1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Глава III

1. Пусть $a \perp \alpha$. Предположим, что a не пересекает α, тогда $a \parallel \alpha$ и в плоскости α существует прямая b, параллельная a. А это противоречит условию: прямые a и b должны быть перпендикулярны.

2. Через прямые a и b проведем плоскость β; пусть $\alpha \cap \beta = b_1$, тогда $a \perp b_1$. Так как в плоскости β через точку A проходит единственный перпендикуляр к прямой a, то $b = b_1$ и $b \subset \alpha$.

3. Плоскость, проведенная через данную точку и перпендикулярная данной прямой. Указание. Через точку M проведите прямую a_1, параллельную прямой a, и рассмотрите объединение всех прямых, проходящих через M и перпендикулярных a_1.

4. Точки C и D принадлежат множеству всех точек пространства, каждая из которых одинаково удалена от концов отрезка AB. Это множество является плоскостью α, проведенной через середину $[AB]$ перпендикулярно этому отрезку. Так как $(CD) \subset \alpha$, то $(AB) \perp$ $\perp (CD)$.

5. Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Достаточно доказать, что $\vec{d} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ или $\vec{d} \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{b}$ (1). По условию имеем: $\vec{b} \cdot \overrightarrow{CD} =$ $= 0$ и $\vec{c} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, откуда, $\vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c}$. Из двух последних равенств следует равенство (1).

6. Пусть $A \notin a$ (рис. 33). Предположим, что $a \perp \alpha_1$ и $a \perp \alpha_2$. Через прямую a и точку A проведем плоскость β. Получим, что через точку A к прямой a проведены в плоскости β два различных перпендикуляра: $b_1 = \beta \cap \alpha_1$ и $b_2 = \beta \cap \alpha_2$. А это невозможно.

7. Указание. Рассмотрите параллельные плоскости α и β, содержащие соответственно данные прямые a и b. Через данную точку M проведите прямую l, перпендикулярную α.

8. Указание. Стороны NP и NQ сечения (рис. 34) параллельны медианам BF и CF граней тетраэдра.

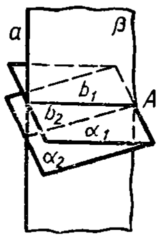

Рис. 33

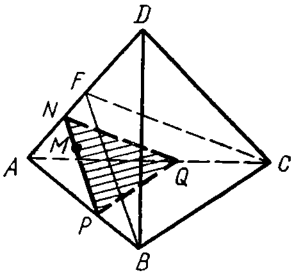

Рис. 34

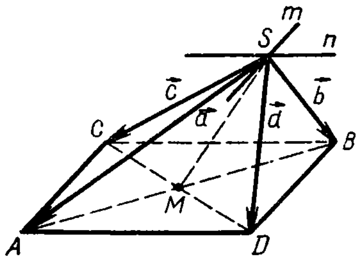

Рис. 35

9. Указание. 1) Через точку M проведите прямую, параллельную (AC), через точку пересечения этой прямой с ребром AA_1 проведите прямую, параллельную (AB). 2) Через точку M проведите прямую, параллельную (AA_1), через точку пересечения этой прямой с прямой AC проведите прямую, параллельную (AB).

10. Пусть $(ASC) \cap (BSD) = m$, $(ASD) \cap (BSC) = n$ (рис. 35). Через точку A проведем плоскость, параллельную плоскости, проходящей через m и n, она пересечет прямые, определяемые сторонами данных углов, в точках A, B, C, D (возможно, некоторые из них принадлежат продолжениям сторон данных углов). Так как $(AC) \parallel m$ и $(BD) \parallel m$, то $(AC) \parallel (BD)$. Аналогично $(AD) \parallel (BC)$, т. е. $ACBD$ — параллелограмм. Докажем, что он является прямоугольником. Обозначим $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Тогда $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{d} - \vec{a}) = \vec{c} \cdot \vec{d} - \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{a}^2$. Так как $\vec{c} \perp \vec{d}$, то $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$ и $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{c} - \vec{d})$. Пусть $(AB) \cap (CD) = M$, тогда $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$. Откуда $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ и $\vec{a} - \vec{c} - \vec{d} = -\vec{b}$. Итак, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{a} \cdot (-\vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, т. е. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$ и $m \perp n$.

11. Да. Указание. Обозначьте $\overrightarrow{A_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{c}$, длину ребра через m, плоские углы при вершине A_1 через φ. Найдите $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AD_1}$.

12. Указание. 1) Воспользуйтесь теоремой Пифагора или примените признаки конгруэнтности треугольников. 2) Примените теорему Пифагора.

13. $\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2 - b^2}$ и $\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2 - b^2}$.

14. 1) Принадлежит границе внутренней области (является серединой гипотенузы); 2) принадлежит внутренней области; 3) не принадлежит внутренней области или ее границе.

15. Так как $|OB| > |OD|$, то $|KB| > |KD|$ (см. задачу 12,2).

16. $\frac{ab}{a+b}$.

17. $\frac{1}{3}(a + b + c)$; 2) $\frac{1}{3}|a + b - c|$. Указание. Можно воспользоваться свойством средней линии трапеции. Например (рис. 36): $|DD_1| = \frac{c+b}{2}$, $|NN_1| = \frac{x+a}{2}$, где $x = |MM_1|$; $\frac{1}{2}\left(\frac{x+a}{2} + \frac{c+b}{2}\right) = x$, откуда $x = \frac{1}{3}(a + b + c)$. Для общего слу-

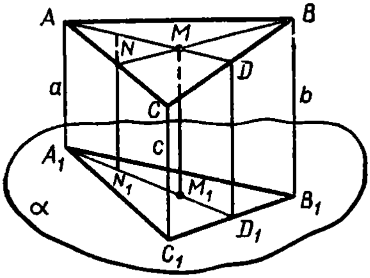

Рис. 36

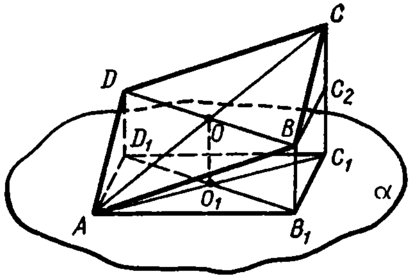

Рис. 37

чая удобно воспользоваться векторами: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1})$. Вычитая, получите: $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}((\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}))$ или $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3} \times (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$. Отсюда $|\overrightarrow{MM_1}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}|$.

1) Если векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ сонаправлены, то $|\overrightarrow{MM_1}| = \frac{1}{3}(a + b + c)$; 2) если $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AA_1}$ то $|\overrightarrow{MM_1}| = \frac{1}{3}|a + b - c|$.

18. a или $\sqrt{a^2 + 4(c^2 - b^2)}$.

19. Пусть $AB_1C_1D_1$ — проекция данного квадрата $ABCD$ на плоскость α, где $(BD) \parallel \alpha$ (рис. 37). Обозначим $|OO_1| = |BB_1| = m$, $|AB| = |BC| = a$. Тогда из треугольников ABB_1 и BCC_2 $((BC_2) \parallel (B_1C_1))$ имеем: $|AB_1| = |BC_2| = \sqrt{a^2 - m^2}$. Решение упрощается, если применить теорему о трех перпендикулярах. Действительно, так как $(DB) \perp (AC)$, то $(D_1B_1) \perp (AC)$ и $(D_1B_1) \perp (AC_1)$. Следовательно, $AB_1C_1D_1$ — параллелограмм со взаимно перпендикулярными диагоналями, т. е. ромб. **20.** 12 *см*. **21.** 5 *см* и 3 *см*.

22. Пусть дан треугольник ABC, у которого $|AB| = |BC| = a$, $|AC| = b$, его проекция—равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$. На рисунке 38 $B_1 = B$, а на рисунке 39 $A_1 = A$.

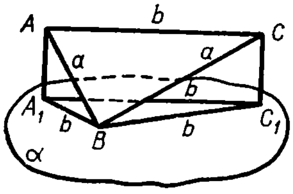

Рис. 38

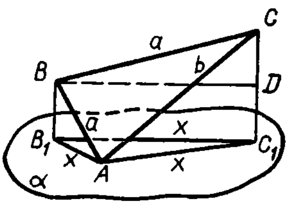

Рис. 39

Для упрощения записи рассмотрим проектирование на плоскость α, параллельную плоскости проекций, проходящую через вершину данного треугольника и находящуюся на наименьшем расстоянии от плоскости проекций. Плоскость α не может совпадать с плоскостью ABC, так как в противном случае $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$, т. е. проекция данного треугольника не является равносторонним треугольником.

Рассмотрим два случая: а) $a > b$ (рис. 38); б) $a < b$ (рис. 39). а) В этом случае плоскость α проходит через вершину B, что может быть доказано методом «от противного». Действительно, пусть α проходит через вершину одного из конгруэнтных углов данного треугольника, например через вершину A. Обозначим $|BB_1| = m$, тогда $|CC_1| = 2m$ (только в таком случае $|A_1B_1| = |B_1C_1|$), $|A_1B_1| = \sqrt{a^2 - m^2}$, $|A_1C_1| = \sqrt{b^2 - 4m^2}$. Отсюда видно, что при условии $a > b$, равенство $|A_1B_1| = |A_1C_1|$ невозможно. Итак, $B \in \alpha$.

Равенство $|A_1B_1| = |B_1C_1|$ будет выполняться только в том случае, если $|AA_1| = |CC_1|$, откуда следует, что $[AC] \parallel \alpha$ и $|A_1C_1| = |AC| = b$. Следовательно, при $a > b$ имеем $x = b$.

б) Легко проверить, что в этом случае ни одна из сторон данного треугольника не может быть параллельна плоскости α: в противном случае невозможно выполнение равенств $|A_1B_1| = |A_1C_1| = |B_1C_1|$. Отсюда следует, что плоскость α не может проходить через вершину B (иначе $[AC] \parallel \alpha$, что доказывается, как и в случае а)). Пусть $A \in \alpha$. В пункте а) было выяснено, что при этом условии $|CC_1| = 2|BB_1|$ или $\sqrt{b^2 - x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$, где x — длина стороны треугольника $A_1B_1C_1$. Решив это уравнение, получим: $x = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{\sqrt{3}}$. Итак, при $a < b$ имеем: $x = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{\sqrt{3}}$.

23. Перпендикуляр к плоскости четырехугольника, проведенный через центр описанной окружности.

24. Введем векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, как показано на рисунке 40. Имеем: $\overrightarrow{MN} = \vec{m} + \vec{p} + \vec{n}$, $\overrightarrow{MN} = -\vec{m} + \vec{q} - \vec{n}$, откуда $2\overrightarrow{MN} = \vec{p} + \vec{q}$ и $\overrightarrow{MN}\frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q})$. Но $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не могут быть коллинеарны, поэтому $|\vec{p} + \vec{q}| < |\vec{p}| + |\vec{q}|$ или $|\overrightarrow{MN}| < \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}|)$.

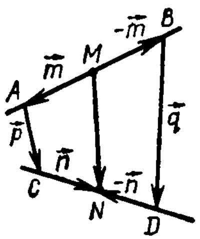

Рис. 40

25. Указание. Через середину M отрезка AB проведите плоскость γ, параллельную данным прямым; пусть $\gamma \cap [CD] = N$, тогда $|CN| = |ND|$. Далее рассмотрите треугольники AMN и BMN, ANC и BND.

26. 1) Требуется построить общий перпендикуляр прямых BD_1 и CB_1 (рис. 41). Рассмотрим сечение ABC_1D_1, содержащее $[BD_1]$. Так как $(CB_1) \perp (BC_1)$ и $(CB_1) \perp (AB)$, то $(CB_1) \perp (ABC_1)$. Искомый отрезок MN должен быть высотой прямоугольного треугольника BMO, где $[MO] \parallel [AB]$. Замечаем, что $|BN|:|NO| = |BM|^2:|MO|^2 = 2:1$, следовательно, $|BN| = \frac{2}{3}|BO| = \frac{1}{3}|BD_1|$.

2) $\frac{1}{6}a\sqrt{6}$.

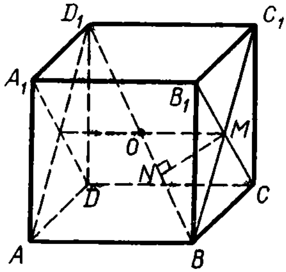

Рис. 41

27. Требуется построить общий перпендикуляр прямых A_1B и B_1C (рис. 42). Проведем анализ, пользуясь векторами. Пусть $[MN]$ — искомый перпендикуляр. Обозначим $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. По правилу многоугольника $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$. Вектор $\overrightarrow{MB}$ можно представить так: $\overrightarrow{MB} = x\overrightarrow{BA_1} = x(\vec{a} + \vec{b})$, аналогично $\overrightarrow{CN} = y(\vec{b} - \vec{c})$. Тогда $\overrightarrow{MN} = x(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} + y(\vec{b} - \vec{c}) = x\vec{a} + (x + y)\vec{b} + (1 - y)\vec{c}$. Имеем: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0$ и $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0$ или $(x\vec{a} + (x + y)\vec{b} + (1-y)\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$, $(x\vec{a} + (x + y)\vec{b} + (1-y)\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$. Преобразовав эти равенства и сократив на $\vec{a}^2$, получим:

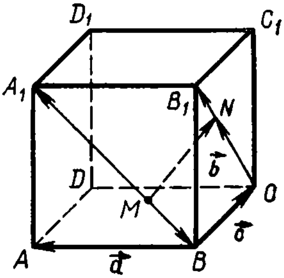

Рис. 42

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x + 2y = 1; \end{cases} x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}.$$

Итак, $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB_1}$; зная это, нетрудно построить $[MN]$.

28. Применив тот же прием, что и в предыдущей задаче (см. рис. 42), придем к системе уравнений

$$\begin{cases} x\vec{a}^2 + (x + y)\vec{b}^2 = 0, \\ (x + y)\vec{b}^2 + (y - 1)\vec{c}^2 = 0. \end{cases}$$

После упрощений получим:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 0, \\ 4x + 5y = 1. \end{cases}$$

Откуда $x = -\frac{4}{9}$, $y = \frac{5}{9}$. Возведя равенство $\overrightarrow{MN} = -\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$ в квадрат, получим $|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{36a^2}{81}$, $|MN| = \frac{2}{3}a$.

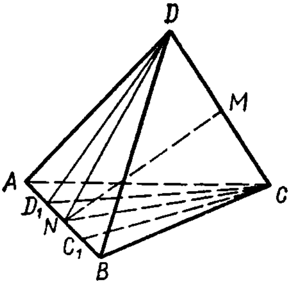

Рис. 43

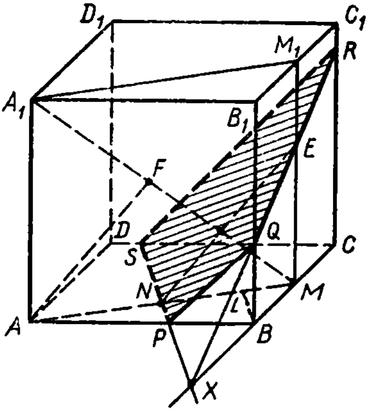

Рис. 44

29. $\frac{a\sqrt{2b^2-a^2}}{2b}$. Указание. Искомое расстояние равно длине $|MN|$ высоты прямоугольного треугольника CMD, где M — середина $[AB]$.

30. Пусть $S_{ABC} = S_{ADB}$ (рис. 43), тогда высоты CC_1 и DD_1 этих граней имеют равные длины. Из середины M ребра DC проведем перпендикуляр $[MN]$ к $[AB]$. Точки C_1, N, D_1 являются точками пересечения ребра AB с плоскостями, проведенными через точки C, M, D перпендикулярно (AB). Так как эти плоскости параллельны и $|CM| = |MD|$, то и $|C_1N| = |ND_1|$ (см. задачу 61 гл. I). Из конгруэнтности треугольников DD_1N и CC_1N следует, что $|ND| = |NC|$, а из $\triangle DNC$ получим, что $[NM] \perp [DC]$.

31. 1) Указание. Через сторону угла, параллельную плоскости α, проведите плоскость α_1, параллельную α. Рассмотрите проекцию данного угла на плоскость α_1. 2) Не может. Доказательство проведем методом «от противного». Предположим, что ортогональной проекцией прямого угла $A_1C_1B_1$ на плоскость α, не параллельную его сторонам, служит прямой угол ACB. Проведем $(C_1B_2) \parallel (CB)$. Так как $(C_1B_2) \perp (CC_1)$ и $(C_1B_2) \perp (CA)$, то $(C_1B_2) \perp (ACC_1)$ и $(C_1B_2) \perp (C_1A_1)$. Отсюда следует, что $(C_1A_1) \perp (B_1C_1B_2)$, а тогда $(C_1A_1) \parallel (CA)$, что противоречит условию $((C_1A_1) \nparallel \alpha)$.

32. 1) Указание. Проекции искомых прямых на плоскость ромба параллельны его диагоналям. 2) Нет, если данный ромб не квадрат.

33. 1) Проведем $[BL]$ (рис. 44), где $|AL| : |LM| = |AB|^2 : |BM|^2 = 4:1$, $[BL]$ — изображение высоты прямоугольного треугольника ABM. Через точку N проведем $[PS] \parallel (BL)$. 2) Проведем $[AF]$, где $|A_1F| : |FM| = |AA_1|^2 : |AM|^2 = 4:5$, $[AF]$ — изображение высоты прямоугольного треугольника AA_1M. Через точку N проведем $[NE] \parallel (AF)$. 3) Построим точку $X = (SP) \cap (BC)$. Дальнейшее построение очевидно. $PQRS$ — искомое сечение. Так как $[A_1M] \perp (NE)$ и $[A_1M] \perp (PS)$ (теорема о трех перпендикулярах), то плоскость сечения перпендикулярна (A_1M).

34. Окружность (рис. 45), диаметром которой служит отрезок

MA_1 (A_1 — ортогональная проекция данной точки A на плоскость α).

35. Перпендикуляр к плоскости четырехугольника, проведенный через центр вписанной в него окружности.

36. 8 *см* и 17 *см*. 37. $\sqrt{m^2 + c^2 \cos^2 \alpha}$. 38. 96 *см* и $\approx 69{,}3$ *см*.

39. 3 *см*.

40. Указание. Расстояние от O до любой из сторон не больше половины любой из диагоналей параллелограмма.

41. 1) Указание. Точка пересечения диагоналей данного прямоугольника неодинаково удалена от его непараллельных сторон. 2) 90°. Указание. Докажите, что ромб, имеющий равные диагонали, является квадратом.

42. Для правильного многоугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

43. 1 *см*. Указание. Рассмотрите уравнение $4 - x^2 = 13 - 4x^2$, где x — апофема правильного треугольника.

44. $\sqrt{4b^2 - 3a^2}$ и $\sqrt{3b^2 - 2a^2}$. 45. $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{8}}$ и $\sqrt{b^2 + \frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{8}}$.

46. Указание. Рассмотрите параллельные плоскости α и β, содержащие соответственно прямые a и b (рис. 46). Обозначив угол между прямыми через φ, расстояние $|AB|$ между ними через d, расстояние $|AM|$ через x, получите

$$|MN| = \sqrt{d^2 + x^2 \sin^2 \varphi}.$$

47. Указание. Воспользуйтесь конгруэнтностью треугольников.

48. 1) Да. 2) Наименьший угол диагональ параллелепипеда составляет с плоскостями граней ADD_1A_1 и BCC_1B_1, наибольший — с $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

49. 1) Каждый из углов равен $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35°\,17'$. 2) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 41°\,49'$, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 54°\,44'$, $\operatorname{arcctg}\frac{1}{2} \approx 63°\,26'$.

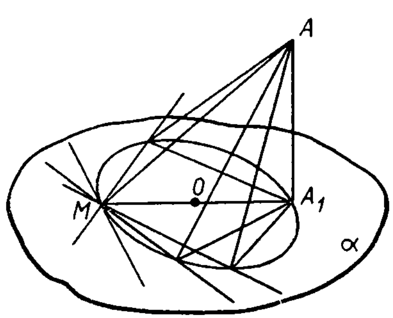

Рис. 45

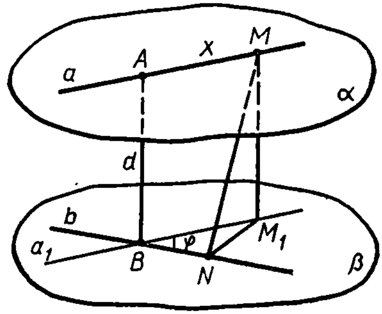

Рис. 46

50. Окружность. **51.** $(\widehat{(CD), \alpha})$ больше. **52.** 45°.

53. $\frac{1}{4}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(d_1^2+d_2^2)^2\sin^2\varphi}$.

54. Указание. Воспользуйтесь конгруэнтностью треугольников. **55.** $|AB|>|CD|$. **56.** $\sqrt{a(a-2b)}$. Указание. Рассмотрите систему уравнений

$$\begin{cases} a = y \operatorname{ctg} x, \\ b = y \operatorname{ctg} 2x, \end{cases}$$

где y — искомое расстояние.

57. Указание. Проведите плоскость, перпендикулярную ребру одного из двугранных углов.

58. 1) Проведем плоскость γ, перпендикулярную данной прямой; пусть $\alpha \cap \gamma = m$. В этой плоскости рассмотрим линейный угол заданной величины, такой, что одна его сторона лежит на прямой m, а вершина принадлежит прямой a. Через прямую a и вторую сторону линейного угла проведем плоскость β. Задача имеет два решения. 2) Через данную точку A проведем прямую a, перпендикулярную данной плоскости α, пусть $a \cap \alpha = A_1$. В плоскости γ, проходящей через прямую a, проведем через точку A прямую b, угол между которой и прямой a равен $90° - \varphi$ (φ — данная величина). Пусть $b \cap \alpha = B$; проведем в плоскости α через точку B прямую c, перпендикулярную (A_1B). Плоскость, проходящая через c и (AB), искомая. Задача имеет бесконечное множество решений.

59. 1) 36 *см*; 2) $\frac{mp}{m+n}$, $\frac{np}{m+n}$.

60. Проведем $[AA_1] \perp \alpha$ (рис. 47); пусть $(BA_1) \perp m$, $C = (BA_1) \cap m$. Тогда $m \perp (ABC)$ и $m \perp (AC)$. В плоскости ABC проведем $(BB_1) \perp (AC)$. Так как, кроме того, $m \perp (BB_1)$, то $(BB_1) \perp \beta$ и (AC) — проекция (AB) на плоскость β. Итак, проекция (AB) на плоскость β перпендикулярна ребру m.

61. Пусть дан двугранный угол $\alpha a \beta$, $(MA) \perp \alpha$, $(MB) \perp \beta$. Так как $(MA) \perp a$ и $(MB) \perp a$, то $a \perp (AMB)$ и $a \perp (AB)$.

62. Пусть $|AA_1| = |BB_1|$, $A_1 \neq B_1$ (рис. 48, *а*). Рассмотрим $\angle AMB$, где M — середина $[A_1B_1]$. Докажем, что для любой дру-

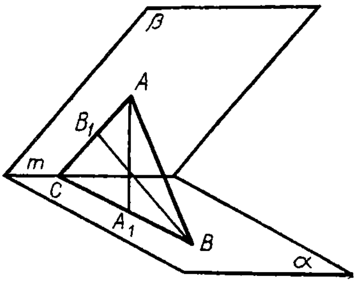

Рис. 47

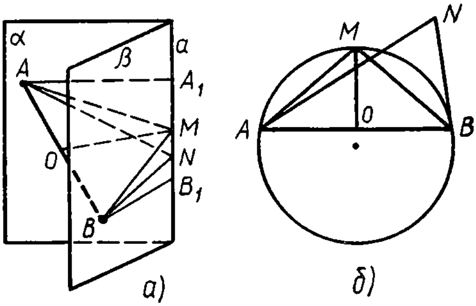

Рис. 48.

гой точки N ребра a имеем $\widehat{ANB} < \widehat{AMB}$. Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную ребру a, она разделит отрезок AB пополам (см. задачу 25). Из равнобедренного треугольника AMB следует, что $[MO] \perp [AB]$, т. е. $[MO]$ — общий перпендикуляр прямых a и AB. Вследствие этого точка N удалена от (AB) на расстояние, большее $|OM|$. Расположив треугольники AMB и ANB в одной плоскости, замечаем, что вписанный угол AMB больше угла ANB, вершина которого лежит вне окружности (рис. 48,*б*). Если $A_1 = B_1$, то наибольшим углом, очевидно, является линейный угол AA_1B.

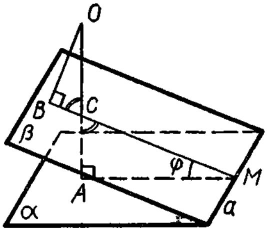

Рис. 49

63. Пусть $\widehat{\alpha a \beta} < 90°$ (рис. 49). Проведем $|OA| \perp \alpha$, $|OB| \perp \beta$; через (OA) и (OB) проведем плоскость γ, пусть $\gamma \cap \alpha = (MA)$, $\gamma \cap \beta = (MB)$. Так как ребро a перпендикулярно (OA) и (OB), то $a \perp \gamma$ и $< AMB$ — линейный угол двугранного угла $\alpha a \beta$. Из прямоугольных треугольников AMC и OBC следует, что $\widehat{OCB} = \widehat{MCA} = 90° - \varphi$, тогда $\widehat{BOC} = \varphi$.

64. 1) $\approx 9{,}17$ *см*. Указание. Найдите высоты $|AA_1|$ и $|DD_1|$ данных треугольников, возведите в квадрат равенство $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1D}$. 2) а) $\approx 16{,}4$ *см*; б) $\approx 14{,}8$ *см*. **65.** $60°$. **66.** $120°$ и $60°$. **67.** $\cos\varphi = \dfrac{a^2 + b^2 + n^2 - m^2}{2ab}$. Указание. Примените тот же прием, что и в задаче 64 (1). **68.** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 54°\,44'$.

69. 1) $\arccos\dfrac{141}{228} \approx 51°\,48'$. Указание. Найдите $|BD|$ тем же приемом, что и в задаче 64 (1), затем примените теорему косинусов к треугольнику BAD, где $\widehat{BAD} = x$. 2) $\sqrt{4a^2 - d^2}\sin\dfrac{\varphi}{2}$.

70. Плоскость, перпендикулярная данной плоскости, или пустое множество (если данная прямая перпендикулярна данной плоскости).

71. Через данную точку A проведем прямую b, параллельную данной прямой a, и прямую c, перпендикулярную данной плоскости α. Плоскость β, проходящая через прямые b и c, искомая. Задача имеет единственное решение, если данная прямая не перпендикулярна данной плоскости, и бесконечное множество решений в противном случае.

72. Указание. Рассмотрите два случая: $\alpha \parallel \beta$; $\alpha \nparallel \beta$.

73. Пусть $\alpha \cap \beta = m$. Проведем через точку A в плоскости α прямую a, перпендикулярную прямой m, тогда $a \perp \beta$ (свойство перпендикулярных плоскостей). Но из точки A можно провести

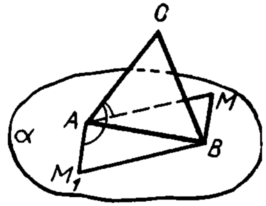

Рис. 50

к плоскости β единственный перпендикуляр, поэтому $a = (AB)$ и $(AB) \subset \alpha$.

74. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 73.

75. 45°, 30°, 30°.

76. Рассмотрим треугольник ABM_1, симметричный треугольнику AMB относительно (ABC) (рис. 50). Так как $AMBM_1$ — ромб, то $(AM_1) \parallel (BM)$ и $(\widehat{(AC),(BM)}) = (\widehat{(AC),(AM_1)})$, но углы CAM и CAM_1, симметричные относительно (ABC), конгруэнтны, поэтому $\widehat{CAM_1} = \widehat{CAM}$, следовательно, $\widehat{CAM} = (\widehat{(CA),(MB)})$.

77. $\frac{1}{4}(2m^2 + n^2 + \sqrt{4m^4 + n^4})$. Указание. Обозначьте длину катета через x, решите относительно x^2 уравнение $\left(\sqrt{x^2 - m^2} + \sqrt{x^2 - m^2 - n^2}\right)^2 + n^2 = 2x^2$.

78. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. Искомое сечение $PQRS$ должно иметь стороны, параллельные взаимно перпендикулярным ребрам данного тетраэдра, т. е. ребрам AB и DC. Обозначим: $|PQ| = |QR| = x$ (рис. 51); из подобия треугольников APQ и ADC, ANP и AMD имеем: $|PQ| : |DC| = |AN| : |AM|$ или $\frac{x}{|DC|} = \frac{a-x}{a}$, откуда $x = \frac{a\sqrt{4b^2 + 2a^2}}{\sqrt{4b^2 + 2a^2} + 2a}$.

79. Три, одну или ни одной.

80. Пусть плоскость, проведенная через ребро SM перпендикулярно грани SNK, пересекает плоскость SNK по прямой SM_1, а плоскость, проведенная через (SN) перпендикулярно грани SMK, пересекает (SMK) по (SN_1) (рис. 52). Из произвольной точки C третьего ребра проведем $[CB] \perp (SM_1)$ и $[CA] \perp (SN_1)$, где $[CB] \cap (SM_1) = A_1$ и $[CA] \cap (SN_1) = B_1$.

Рассмотрим треугольник ABC и точку $O = (AA_1) \cap (BB_1)$. По свойству перпендикулярных плоскостей $(CA) \perp (SBB_1)$, тогда $(CA) \perp (BB_1)$ и $(CA) \perp (SO)$. Аналогично $(CB) \perp (AA_1)$ и $(CB) \perp (SO)$.

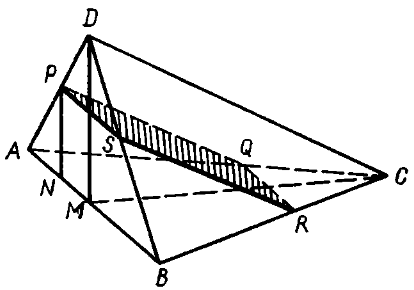

Рис. 51

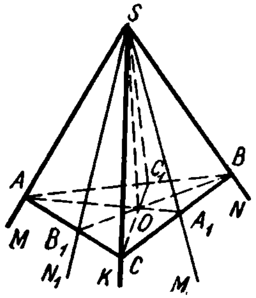

Рис. 52

O — точка пересечения высот треугольника ABC, поэтому $(CO) \perp (AB)$. Кроме того, $(SO) \perp (AB)$ $((SO) \perp (ABC))$, отсюда $(AB) \perp$ $\perp (SCC_1)$ и $(SCC_1) \perp (SAB)$.

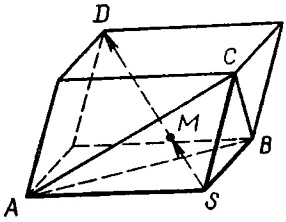

Рис. 53

81. Предположим, что треугольник ABC искомый, тогда $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$ и $3\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{SD} = 3\overrightarrow{SM}$ изображается диагональю параллелепипеда, ребра которого SA, SB, SC. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{SD} = 3\overrightarrow{SM}$ (рис. 53); через точку D проведем плоскости, параллельные граням данного трехгранного угла. Точки A, B, C пересечения этих плоскостей с ребрами трехгранного угла — вершины искомого треугольника.

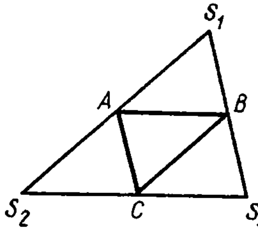

Рис. 54

82. Пусть A, B, C — произвольные точки на ребрах данного трехгранного угла. Обозначьте $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, тогда $\cos \widehat{BAC} = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{\vec{a}^2}{|AB| \cdot |AC|} > 0$ и $\widehat{BAC} <$ $< 90°$. Аналогичные рассуждения можно провести для углов ABC и ACB.

83. Указание. Пусть $\widehat{ACD} = x$, $\widehat{BCD} = y$, $\widehat{ACB} = z$. Тогда $\operatorname{tg} x = \frac{a}{a+b}$, $\operatorname{tg} y = \frac{b}{a+b}$. Докажите, что $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}(x + y)$.

84. Указание. Разверткой поверхности данного тетраэдра служит треугольник $S_1S_2S_3$ (рис. 54), причем A, B, C соответственно середины сторон S_1S_2, S_1S_3, S_2S_3. Пользуясь свойством средней линии треугольника, получите, что любые две грани конгруэнтны.

85. 120°. Указание. Можно воспользоваться теоремой косинусов для трехгранного угла.

86. Рассмотрим единичные векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{SB} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{SC} = \vec{e}_3$; рассмотрим также вектор $\overrightarrow{SD} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, здесь $[SD)$ — биссектриса угла CSB. Обозначим $(\widehat{\overrightarrow{SD}, \vec{e}_1}) = x$, тогда $\cos x = \frac{\vec{e}_1 \ (\vec{e}_2 + \vec{e}_3)}{1 \cdot |\vec{e}_2 + \vec{e}_3|} =$
$$= \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

87. Пусть дан трехгранный угол $SABC$ (рис. 55), $|SA| = a$. Проведем $[AM] \perp (BSC)$, $[MK] \perp (SB)$, тогда $[KA] \perp (SB)$ и $\angle AKM$ — линейный угол двугранного угла SB. Пусть $\widehat{AKM} = \varphi$; тогда $|AM| = a \sin\alpha \cdot \sin\varphi$. По теореме косинусов для трехгранного

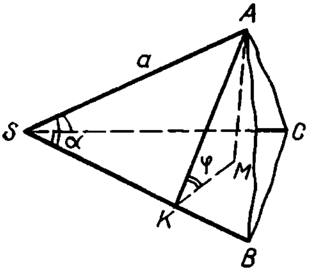

Рис. 55

угла находим $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, затем $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{1+2\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}$. Итак, $|AM| = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

88. Имеем: $\alpha+\beta+\gamma=180°$, откуда $\alpha = 180° - (\beta+\gamma)$ и $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$. По теореме косинусов

$$\cos\widehat{A} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = 1 - 2\,\mathrm{ctg}\,\beta\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma.$$

Аналогично найдем $\cos\widehat{B}$ и $\cos\widehat{C}$. Тогда $\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C} = 3 - 2(\mathrm{ctg}\,\beta\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma + \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma)$. Но $\mathrm{ctg}\,\gamma = -\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)$ или $\mathrm{ctg}\,\gamma = \frac{1-\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$, откуда $\mathrm{ctg}\,\beta\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma + \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma = 1$.

89. $x = y = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54°44'$, $z = 45°$. **90.** $\frac{\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$.

91. $\frac{h}{\sqrt{1-2\cos^2\alpha}} = \frac{h}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$, $45° < \alpha < 135°$.

92. 1) Через гипотенузу AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведем плоскость α; пусть C_1 — проекция вершины C на эту плоскость. Предположим, что $|BC| = 2|BC_1| = 2|AC_1|$. Тогда $\widehat{BCC_1} = \widehat{ACC_1} = 30°$ и $\widehat{BCC_1} + \widehat{ACC_1} < \widehat{ACB}$, что невозможно, как в случае, когда $C_1 \notin [AB]$, так и в случае $C_1 \in [AB]$. 2) Отношение $\frac{a}{a_1}$ будет иметь наибольшее значение в том случае, если a_1 будет наибольшим. Пусть D — середина $[AB]$. Если $C_1 \notin [AB]$, то из $\triangle DBC_1$ имеем: $|BC_1| > |DB|$ или $a_1 > \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Если $C_1 \in [AB]$ (в этом случае $(ABC) \perp \alpha$), то $C_1 = D$ и $a_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. При этом $\frac{a}{a_1} = \sqrt{2}$.

93. Нет. Для доказательства этого достаточно привести пример.

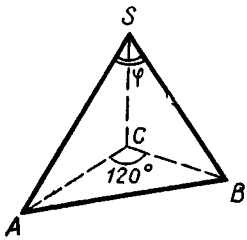

Рис. 56

Рассмотрим тетраэдр $SABC$, у которого грань ABC — равнобедренный треугольник с углом $\widehat{ACB} = 120°$ (рис. 56), а грани ASC и BSC — прямоугольные равнобедренные треугольники с прямыми углами при точке C. Трехгранный угол с вершиной в точке S имеет плоские углы $45°$, $45°$ и φ, причем $\cos\varphi = \frac{1}{4}$ (из треугольника ASB). Найдем величины двугранных углов SA и SB с помощью теоремы косинусов. Имеем:

$\cos 45° = \cos 45° \cdot \cos \varphi + \sin 45° \cdot \sin \varphi \cdot \cos \widehat{A}$, откуда $4 = 1 + \sqrt{15} \cos \widehat{A}$, $\cos \widehat{A} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5} > \frac{1}{2}$, $\widehat{A} < 60°$. Точно так же $\widehat{B} < 60°$ и $\widehat{A} + \widehat{B} < 120°$. Но третий двугранный угол есть угол SC, равный $120°$.

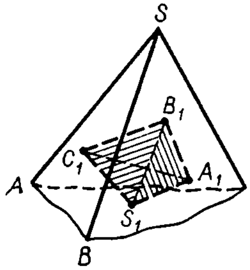

Рис. 57

94. Пусть дан трехгранный угол $SABC$ (рис. 57). Внутри него возьмем точку S_1 и проведем из нее лучи, перпендикулярные граням данного трехгранного угла. Рассмотрим трехгранный угол $S_1A_1B_1C_1$; заметим, что его плоские углы равны $180° - \widehat{A}$, $180° - \widehat{B}$, $180 - \widehat{C}$, где $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ — двугранные углы данного трехгранного угла (доказательство этого аналогично рассуждениям, проведенным в решении задачи 63 гл. III). Заметим также, что ребра угла $SABC$ перпендикулярны к граням угла $S_1A_1B_1C_1$, поэтому двугранные углы угла S_1 равны $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$, где α, β, γ — плоские углы данного трехгранного угла S. Применив к трехгранному углу S_1 теорему косинусов, получим:

$$\cos(180° - \widehat{A}) = \cos(180° - \widehat{B}) \cdot \cos(180° - \widehat{C}) + \sin(180° - \widehat{B}) \times$$
$$\times \sin(180° - \widehat{C}) \cdot \cos(180° - \alpha),$$

откуда получим требуемое равенство.

95. $\approx 54°44'$, $\approx 125°16'$, $\approx 109°28'$. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

96. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 94.

97. 1) Имеем: $0° < (180° - \widehat{A}) + (180° - \widehat{B}) + (180° - \widehat{C}) < 360°$, откуда $180° < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540°$. 2) Указание. Примените свойство плоских углов трехгранного угла к углу с вершиной S_1 (см. рис. 57).

98. $40° < x < 180°$. Указание. Примените результат предыдущей задачи.

99. Имеем: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360°$, откуда $\cos \widehat{A} = \cos(\widehat{B} + \widehat{C})$, $\cos \widehat{B} = \cos(\widehat{A} + \widehat{C})$, $\cos \widehat{C} = \cos(\widehat{A} + \widehat{B})$. Воспользовавшись формулой из задачи 94, получим:

$$\cos \alpha = \frac{2 \cos \widehat{B} \cdot \cos \widehat{C} - \sin \widehat{B} \cdot \sin \widehat{C}}{\sin \widehat{B} \cdot \sin \widehat{C}} = 2 \operatorname{ctg} \widehat{B} \cdot \operatorname{ctg} \widehat{C} - 1.$$

Аналогично $\cos \beta = 2 \operatorname{ctg} \widehat{A} \cdot \operatorname{ctg} \widehat{C} - 1$, $\cos \gamma = 2 \operatorname{ctg} \widehat{A} \cdot \operatorname{ctg} \widehat{B} - 1$. Тогда $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = -3 + 2(\operatorname{ctg} \widehat{B} \cdot \operatorname{ctg} \widehat{C} + \operatorname{ctg} \widehat{A} \cdot \operatorname{ctg} \widehat{C} +$

$+\operatorname{ctg}\widehat{A}\cdot\operatorname{ctg}\widehat{B})$. Но $\operatorname{ctg}\widehat{B}\cdot\operatorname{ctg}\widehat{C}+\operatorname{ctg}\widehat{A}\cdot\operatorname{ctg}\widehat{C}+\operatorname{ctg}\widehat{A}\cdot\operatorname{ctg}\widehat{B}=1$ (см. решение задачи 88 гл. III). Следовательно, $\cos\alpha+\cos\beta+$ $+\cos\gamma=-1$.

100. Из теоремы косинусов для трехгранного угла следует, что

$$\cos^2\widehat{A}=1-\sin^2\widehat{A}=\frac{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma}{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma},$$

отсюда

$$\sin^2\widehat{A}=\frac{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma-\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma}{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma},$$

$$\frac{\sin^2\widehat{A}}{\sin^2\alpha}=\frac{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}.$$

При замене $\widehat{A}$ и α соответственно на $\widehat{B}$ и β, $\widehat{C}$ и γ выражение в правой части не изменится. Поэтому

$$\frac{\sin\widehat{A}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\widehat{B}}{\sin\beta}=\frac{\sin\widehat{C}}{\sin\gamma}.$$

101. Можно воспользоваться формулой задачи 94; получим $\cos\alpha=-\cos\beta$, откуда $\alpha+\beta=180°$. Обратное предположение также верно.

102. Указание. Рассмотрите правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны.

103. На данных лучах от их общего начала S отложим отрезки равной длины: $|SA|=|SB|=|SC|=|SD|$ (рис. 58). Точки A, B, C, D не могут принадлежать одной плоскости, так как иначе получим четырехугольник $ABCD$, у которого длины всех сторон и диагоналей равны (это следует из конгруэнтности треугольников ASB, ASC, BSC, CSD, ASD, BSD); но такой четырехугольник невозможен. Следовательно, $ABCD$ — тетраэдр, длины всех ребер которого равны. Каждая из точек S и A принадлежит множеству точек пространства, одинаково удаленных от точек B, C, D, поэтому $(SA)\perp(BCD)$. Аналогично $(SB)\perp(CDA)$, и тогда $\widehat{ASB}$ дополняет линейный угол α двугранного угла CD до $180°$ (см. решение задачи 94 из гл. III). Так как $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, то $\cos\widehat{ASB}=\cos\varphi=$ $=-\frac{1}{3}$ и $\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\approx 109°\,28'$.

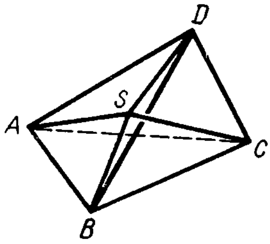

Рис. 58

104. Каждый двугранный угол меньше $180°$, поэтому $x<720°$. Проведите плоскость через два противоположных ребра. Так как для каждого из получивщихся трехгранных углов верно неравенство $y>180°$, то $x>360°$.

1. а) $\vec{a}_3$; б) $\vec{a}_4$, $\vec{a}_{10}$; в) $\vec{a}_7$; г) $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$, $\vec{a}_8$, $\vec{a}_{10}$. 2. $\vec{b} = -2\vec{a} = 2\vec{c}$. 3. $3\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. 4. $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

5. Пусть $|\vec{a}| = 1$, тогда $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$, $\cos\gamma = z$, где $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{i}})$, $\beta = (\widehat{\vec{a}, \vec{j}})$, $\gamma = (\widehat{\vec{a}, \vec{k}})$, $\vec{a} = (x, y, z)$. Получаем: $x = -\frac{1}{2}$, $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, отсюда $y^2 = \frac{1}{4}$, $y = \pm\frac{1}{2}$. Следовательно, $\beta_1 = 60°$, $\beta_2 = 120°$.

6. Если $\vec{a} = (x, y, z)$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{5}{6}$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{1}{2}$.

7. $m = \pm 2$.

8. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2{,}2$, $\quad 90° < (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) < 180°$,

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 8\frac{1}{2}$, $\quad 0° < (\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) < 90°$,

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, $\quad (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 90°$,

$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{d} = 2$, $\vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{3}{2}$.

9. $\vec{a}_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\vec{a}_0 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
Указание. Если $a_0 = (x, y, z)$, то $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Далее, $\vec{a}_0 \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow x + y = 0$,
$\vec{a}_0 \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow y + z = 0$.

10. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D(2;\ 2;\ 0)$.

11. $D\left(\frac{20}{17};\ -\frac{19}{17};\ \frac{2}{17}\right)$. Указание. Воспользуйтесь тем, что $|AD| = |BC|$ и $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$, $k > 0$.

12. 1) $M\left(\frac{10}{\sqrt{14}};\ \frac{15}{\sqrt{14}};\ \frac{5}{\sqrt{14}}\right)$; 2) $M\left(1 - \frac{5}{\sqrt{21}};\ 1 - \frac{10}{\sqrt{21}};\ -1 + \frac{20}{\sqrt{21}}\right)$. Указание. 1) $|AB| = \sqrt{14}$, $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = 5 : (\sqrt{14} - 5) = \lambda$. 2) $|AB| = \sqrt{21}$, $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = 5 : (\sqrt{21} - 5) = \lambda$, $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$.

13. $\overrightarrow{AB} = (1;\ -3;\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2;\ -6;\ 2)$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow B \in (AC)$.

14. $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$, $\lambda = -2 \Rightarrow C(-4;\ 3;\ -5)$.

15. Указание. Введите систему координат: $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$.

16. Искомая точка $C(0;\ 0;\ z)$. По условию задачи $|AC| = |BC|$, $z = \frac{9}{4}$. 17. $\left(0;\ \frac{59}{4};\ 0\right)$. 18. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$.

19. $|MM_1| = \sqrt{17}$, $|MM_2| = \sqrt{10}$, $|MM_3| = 5$. Указание. Обозначьте проекции точки M на координатные оси соответственно $M_1(3;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ 4;\ 0)$, $M_3(0;\ 0;\ -1)$.

20. $D\left(-\frac{4}{11};\ \frac{1}{22};\ \frac{45}{22}\right)$. Указание. Проекция C на прямую AB — точка $D(x;\ y;\ z)$. Заметьте, что $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ и $\vec{AB} = k\vec{AD}$.

21. Вычислим расстояние ρ между прямой AB и осью Oz. Оно равно расстоянию между ортогональными проекциями (A_1B_1) и O на плоскость Oxy соответственно прямой AB и оси Oz. Прямая A_1B_1 пересекает оси Ox и Oy в точках $A_1(3;\ 0;\ 0)$ и $C_1(0;\ -3;\ 0)$. Искомое расстояние ρ — длина высоты треугольника OA_1C_1; $|OA_1| \cdot |OC_1| = \rho\,|A_1C_1|$, $\rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

22. 1) $\cos\widehat{A} = -\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\cos\widehat{B} = \frac{11}{5\sqrt{7}}$, $\cos\widehat{C} = \frac{8}{\sqrt{70}}$. 2) $\cos\widehat{A} = \frac{2}{5\sqrt{6}}$, $\cos\widehat{B} = \frac{5}{9\sqrt{2}}$, $\cos\widehat{C} = \frac{23}{15\sqrt{3}}$.

23. $M = \left(-\frac{163}{298};\ \frac{60}{298};\ -\frac{361}{298}\right)$. Указание. Предварительно выведите формулу

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA}\sin 2\widehat{A} + \vec{OB}\sin 2\widehat{B} + \vec{OC}\sin 2\widehat{C}}{\sin 2\widehat{A} + \sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C}}.$$

24. $|x| = d \Rightarrow x^2 - d^2 = 0$. 25. $|y| = |z| \Rightarrow y^2 - z^2 = 0$.

26. $y^2 + z^2 = d^2$. Указание. Точка $M(x;\ y;\ z)$ принадлежит искомому множеству. Ее проекция на ось Ox — точка $M_0(x;\ 0;\ 0)$, значит, $d = |M_0M|$.

27. $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 8$. Указание. $M(x;\ y;\ z)$, $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$. 28. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Указание. $\cos(\widehat{\vec{OM};\ \vec{k}}) = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{k}}{|\vec{OM}| \cdot |\vec{k}|}$, $\vec{OM} = (x,\ y,\ z)$, $\vec{k} = (0;\ 0;\ 1)$.

29. $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 0$. Искомое множество — начало координат.

30. 1) Точки оси Oz; 2) $x(x-y) = 0$ — точки координатной плоскости Oyz и плоскости, проходящей через ось Oz и биссектрису угла Oxy $(x = y)$; 3) точки цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Ox и которая пересекает плоскость Oyz по окружности с центром в начале координат, радиусом 1; 4) начало координат.

31. 1) Точки того полупространства, границей которого служит координатная плоскость Oyz и первая координата $x > 0$; 2) плоскости Oxy и Oxz разбивают точки пространства на четыре прямых двугранных угла. Искомые точки принадлежат первому и третьему углам; 3) $x^2 + y^2 > 1$. Точки пространства, принадлежащие внешней области по отношению к цилиндрической поверхности с уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

32. $m = -2$. 34. $x + y + z - 3 = 0$. 35. $m = \frac{11}{3}$, $n = \frac{2}{3}$.

36. $m = \frac{22}{5}$. Указание. Вектор $\vec{n} = (3;\ 4;\ -1)$ перпендикулярен данной плоскости. Чтобы прямая AB была параллельна плоскости, достаточно, чтобы $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$.

37. Указание. Достаточно указать две точки, принадлежащие каждой из заданных плоскостей, например $(0;\ 1;\ 1)$ и $\left(-\frac{1}{4};\ 0;\ \frac{5}{4}\right)$. 38. $4x - 5y + 2z - 14 = 0$.

39. Прямая AB пересекает плоскость в точке C, которая делит отрезок AB в отношении λ. Если $\lambda > 0$, то C — внутренняя точка отрезка AB. Получаем: $\lambda = \frac{3}{4}$.

40. Пусть $\alpha \cap (AB) = C$, $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$. Получаем $\lambda = -\frac{5}{4}$, значит, луч AB пересекает плоскость α, так как $|\lambda| = \frac{5}{4} > 1$.

41. 1) Да, $(-1;\ 1;\ 1)$; 2) нет.

Указание. Решите систему трех уравнений и проверьте, принадлежит ли найденная точка четвертой плоскости.

42. Данные плоскости пересекаются. Любая плоскость, проходящая через линию пересечения, имеет уравнение: $(x + 2y - z - 1) + \alpha(2x + y + z) = 0$. Но плоскость проходит через точку $A\ (1;\ 1;\ -1)$, отсюда $\alpha = -\frac{3}{2}$. Искомая плоскость будет: $4x - y + 5z + 2 = 0$.

43. Пусть $l \cap (Oxy) = C$, $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$. Так как $z_C = 0$, то $\lambda = \frac{1}{4}$, $C\left(\frac{8}{5};\ \frac{2}{5};\ 0\right)$.

44. 1) $(AB) \cap (Oxy) = C$, $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$, $z_C = 0$, $\lambda = 4$, $C\left(-\frac{7}{5};\ \frac{13}{5};\ 0\right)$,

$$(AB) \cap (Oyz) = D,\ D\left(0;\ \frac{5}{3};\ -\frac{7}{3}\right),$$

$$(AB) \cap (Oxz) = E,\ E\left(\frac{5}{2};\ 0;\ -\frac{13}{2}\right).$$

45. $(ABC):\ 4x + 2y + 7x - 13 = 0$, $D \in (ABC)$.

46. Найдем две точки, принадлежащие прямой пересечения плоскостей: пусть это $A\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ и $B\left(-\frac{1}{11}; 0; -\frac{14}{11}\right)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{11}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{22}\right)$. Плоскость, проходящая через M и перпендикулярная $\overrightarrow{AB}$, имеет уравнение $4x - 11y + z + 17 = 0$.

47. $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Указание. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой пересечения данных плоскостей, и вычислите координаты точки пересечения этой плоскости с прямой (см. задачу 46).

48. Точка M_0 — середина $[MM_1]$, принадлежит плоскости $y - z = 0$, значит, M_0 имеет координаты $(\alpha; \beta; \beta)$. Вектор $\vec{n} = (0; 1; -1)$ перпендикулярен плоскости и коллинеарен вектору $\overrightarrow{MM_0}$: $\frac{0}{\alpha - 1} = \frac{1}{\beta - 2} = \frac{-1}{\beta + 4}$, $M_0(1; -1; -1)$, $M_1(1; -4; 2)$.

50. Сфера имеет уравнение $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$, $a = \frac{13 \pm \sqrt{47}}{2}$.

51. Введем прямоугольную систему координат, у которой начало — вершина S тетраэдра, а вершины A, B, C принадлежат осям координат: $S(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, $P(x, y, z)$. Из условия задачи следует: $(x-a)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-b)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-c)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. После упрощения получаем:

$$ax + by + cz = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Искомое множество точек есть плоскость, проходящая через точку $P_0\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(a; b; c)$.

52. Указание. Найдите и постройте точки пересечения данной плоскости с осями координат.

53. Указание. Постройте точки пересечения следов данных плоскостей в координатных плоскостях.

54. Указание. Постройте в плоскости Oxy точку пересечения следа данной плоскости и проекции прямой AB.

56. Уравнение плоскости: $x + 2y + cz - 1 = 0$. Зная точку M, находим c: $c = 2$.

57. 1) $2x + 2y - z - 4 = 0$;
2) $3x - 3y + 2z - 3 = 0$.

58. $3x + y - 3 = 0$.

Указание. Уравнение искомой плоскости $ax + bx + d = 0$ или $a_1x + b_1y = 1$, где $a_1 = -\frac{d}{a}$, $b_1 = -\frac{d}{b}$. Условие принадлежности точек A и B искомой плоскости позволяет определить a_1 и b_1: $a_1 = 1$, $b_1 = \frac{1}{3}$.

59. $x - 5y - 2z - 4 = 0$. Указание. Найдите третью точку C искомой плоскости как образ точки A $(1; -1; 1)$ при переносе на $\vec{a} = (3; 1; -1)$, C $(4; 0; 0)$.

60. $x + y - z - 1 = 0$ и $x + y - z + 2 = 0$ — плоскости параллельны.

61. Искомая точка $M_1(\alpha; \beta; \beta)$. Имеем: $\overrightarrow{MM_1} \parallel \vec{n}$, где $\vec{n} = (0; 1; -1)$, $M_1(2; 0; 0)$. **62.** $A_1\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; 0\right)$. **63.** $\alpha \approx 54°45'$.

Глава V

1. В n-угольной призме число сторон двух оснований равно $2n$, число боковых ребер равно n.

2. 2) $180° (n - 2)$. Указание. Рассмотрите перпендикулярное сечение призмы.

3. 1) $n = 4$ или $n = 5$; 2) $n = 5$.

4. Число всех диагоналей равно $2(C_5^2 - 5) = 10$; $d = a\sqrt{1 + 4\sin^2 54°} \approx 1{,}90a$.

5. 1) *Способ 1* (метод внутреннего проектирования). Проектируем параллельно (AA_1) данные точки на плоскости оснований, получим точки $M_1N_1P_1$ и $M_2N_2P_2$ (рис. 59, *а*). Построим $[EE_1] = M_2N_2N_1M_1 \cap BP_2P_1B_1$, затем точку $F = (EE_1) \cap (MN)$ и точку $R = (PF) \cap (BB_1)$. Дальнейшие построения очевидны. Сечение может быть треугольником, четырехугольником, пятиугольником.

Способ 2 (метод «следов»). Проектируя параллельно (AA_1) данные точки на плоскость ABC, получим точки M_1, N_1, P_1 (рис. 59, *б*). Затем строим точки $X = (MN) \cap (M_1N_1)$ и $Y = (MP) \cap (M_1P_1)$. Точки R и S строим как точки пересечения прямой XY с прямыми AB и AC и т. д.

2) Указание. Удобнее применить «метод следов» (рис. 60). Следует учесть, что $(RS) \parallel (PT)$.

6. Решается аналогично задаче 5 (рис. 61, 62).

7. 1) Построим сечение данной призмы плоскостью, проходящей через $[BD_1]$ и параллельной (AC) (рис. 63). Плоскость сечения пересекает плоскость ACC_1A_1 по прямой PQ, проходящей через точку $F = [OO_1] \cap [BD_1]$ и параллельной (AC); 2) $b^2\sqrt{3}$.

8. 1) Высоты AF и A_1F_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ перпендикулярны плоскости BCC_1B_1. Пусть $[BC_1] \cap [FF_1] = M$. Отрезок MN, параллельный (AF) $(N \in [AA_1])$,— искомый перпендикуляр. Его длина равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 2) $(\widehat{(AA_1), (BC_1)}) = (\widehat{(FF_1), (BC_1)}) = 45°$.

9. 1) Пусть $[MN]$ — искомый отрезок (рис. 64). Обозначим $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Имеем: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$. Так как векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{MB} = x\overrightarrow{BC_1} = x(\vec{b} + \vec{c})$. Аналогично $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AB_1} = y(\vec{b} - \vec{a})$.

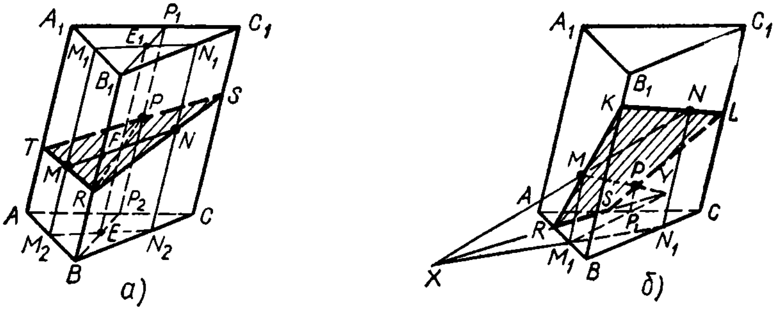

Рис. 59

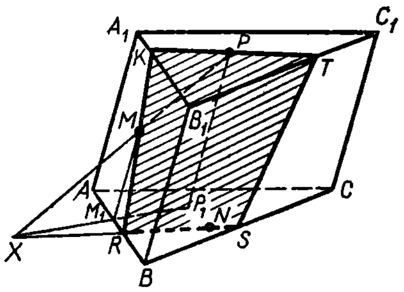

Рис. 60

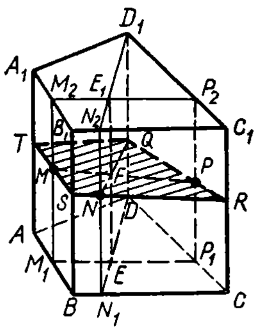

Рис. 61

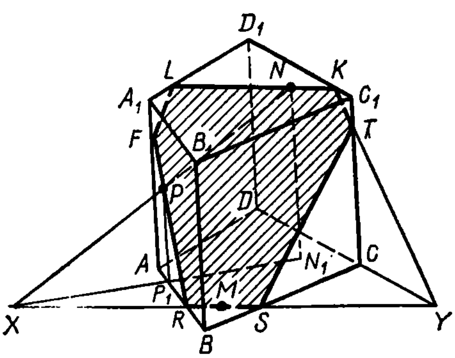

Рис. 62

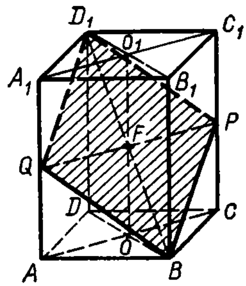

Рис. 63

Тогда $\overrightarrow{MN} = x(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}+y(\vec{b}-\vec{a}) = (1-y)\vec{a}+(x+y)\vec{b}+x\vec{c}$. Отрезки MN и BC_1, MN и AB_1 взаимно перпендикулярны, поэтому $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$ и $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$. Или

$$((1-y)\vec{a}+(x+y)\vec{b}+x\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0,$$
$$((1-y)\vec{a}+(x+y)\vec{b}+x\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0.$$

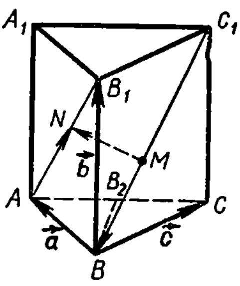

Рис. 64

Заметив, чт $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=a^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=a^2\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a^2$, получим систему уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases}\left(x+y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y+x\right)a^2=0,\\ \left(x+y-1+y-\frac{1}{2}x\right)a^2=0.\end{cases}$$

Отсюда $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{3}{5}$. Следовательно, $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{c}$ и $\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{25}(4a^2+a^2+4a^2-2\cdot 2a^2)=\frac{1}{5}a^2$, а $|MN|=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

2) Найдем угол между (AB_1) и (BB_2) (рис. 64). Обозначим искомый угол через φ, тогда

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BB_2}|}{|AB_1|\cdot|BB_2|}=\frac{\left|(\vec{b}-\vec{a})\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})\right|}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left|-a^2-\frac{1}{2}a^2\right|}{\frac{a^2\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \varphi\approx 52^\circ 20'.$$

10. 5280 *см*^{2}. **12.** 4428 *см*^{2}. **13.** Обозначим измерения параллелепипеда через a, b, c, тогда $d^2=a^2+b^2+c^2$, $d_1^2=a^2+b^2$, $d_2^2=a^2+c^2$, $d_3^2=b^2+c^2$. Сложив почленно три последних равенства и разделив обе части на 2, получим:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}(d_1^2+d_2^2+d_3^2)\text{ или}$$

$$d^2=\frac{1}{2}(d_1^2+d_2^2+d_3^2).$$

14. $\sqrt{(d_1^2-d_2^2)(d_3^2+d_2^2-d_1^2)}$ или $\sqrt{(d_1^2-d_3^2)(d_2^2+d_3^2-d_1^2)}$. Указание. Обозначьте измерения параллелепипеда через a, b, c. Из равенств $d_1^2=a^2+b^2+c^2$, $d_2^2=a^2+c^2$, $d_3^2=a^2+b^2$ выразите

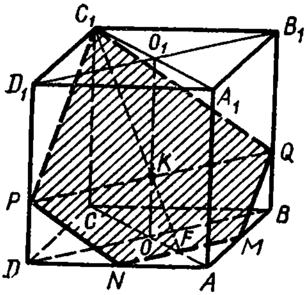

Рис. 65

a^2 и b^2, затем найдите ab. Если $d_2^2 = b^2 + c^2$, то получим второй ответ.

15. Рассмотрим перпендикулярное сечение параллелепипеда. Обозначим длины непараллельных сторон и диагоналей сечения соответственно через m и n, d_1 и d_2, длину бокового ребра обозначим через l. Имеем:

$$S_1^2 = l^2(d_1^2 + d_2^2), \quad S_2^2 = l^2(2m^2 + 2n^2).$$

Для доказательства равенства $d_1^2 + d_2^2 = 2(m^2 + n^2)$ заметим, что $\vec{d_1} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{d_2} = \vec{m} - \vec{n}$. Возведя в квадрат и сложив, получим требуемое равенство.

16. Пусть дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обозначим: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC_1} = \vec{d_1}$, $\overrightarrow{CA_1} = \vec{d_2}$, $\overrightarrow{BD_1} = \vec{d_3}$, $\overrightarrow{DB_1} = \vec{d_4}$. Имеем:

$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$
$$\vec{d_2} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b},$$
$$\vec{d_3} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a},$$
$$\vec{d_4} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}.$$

Возведя в квадрат и сложив, получим требуемое равенство.

17. 1) Построим точку $F = [MN] \cap [AC]$ и точку $K = [FC_1] \cap [OO_1]$ (рис. 65). Плоскость сечения пересечет плоскость BDD_1 по прямой PQ, проходящей через точку K и параллельной (MN) (или (BD)). Сечение — пятиугольник $MNPC_1Q$; 2) $S_{\text{сеч.}} = \frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.

18. $\cos x = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 19. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d_1}$, $\overrightarrow{AB_1} = \vec{d_2}$, $\overrightarrow{AD_1} = \vec{d_3}$, $\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$. Имеем:

$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}, \ \vec{d_2} = \vec{a} + \vec{c}, \ \vec{d_3} = \vec{b} + \vec{c}, \ \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Отсюда следует, что

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{b} + \vec{c})^2 + (\vec{c} + \vec{a})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2 - \vec{c}^2 =$$
$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{d}^2.$$

20. В n-угольной пирамиде n сторон основания и n боковых ребер.

21. 1) $x_4 = 360° + 4 \cdot 180° = 1080°$;

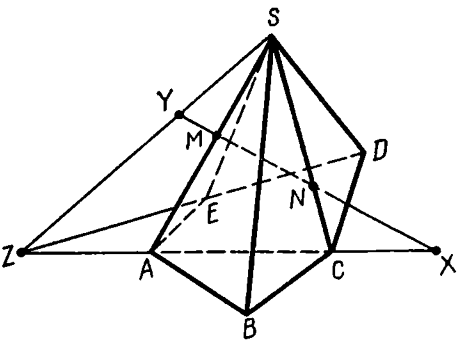

Рис. 66

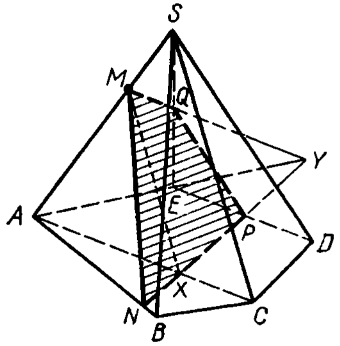

Рис. 67

2) $x_n = 180° (n-2) + n \cdot 180° = 360° (n-1)$.

22. 1) $45° < x < 90°$; 2) $\frac{90° (n-2)}{n} < x < 90°$.

23. 1) Да, ее высота равна $\sqrt{a^2 - R^2}$, где $R = \frac{a}{2 \sin 36°} < a$; 2), 3) нет, так как $R \geqslant a$.

24. Построение искомых точек X и Y показано на рисунке 66.

25. Пусть дана пирамида $SABCDE$, $M \in [SA]$ (рис. 67). В плоскости SAC построим $[MX] \parallel (SC)$ $(X \in (AC))$, затем построим прямую, проходящую через точку X и параллельную (CD). Получим точки N и P, а также точку $Y = (NP) \cap (AE)$. Дальнейшее построение очевидно. $MNPQ$ — искомое сечение. Сечение может быть также треугольником или пятиугольником.

26. 1) Замечаем (рис. 68), что $\triangle SAC$ равносторонний, тогда его медиана AM перпендикулярна (SC). Строим также точку $K = [SO] \cap [AM]$. По теореме о трех перпендикулярах $(SC) \perp (BD)$, поэтому линия EF пересечения плоскости сечения с плоскостью SDB должна быть параллельна (DB); 2) $\frac{ab\sqrt{3}}{6}$.

27. 1) $\frac{1}{8} a^2 \operatorname{tg} \varphi$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4} a^2 \operatorname{tg} \varphi$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \operatorname{tg} \varphi$.

28. 1) Указание. Через точку пересечения диагоналей основания проведите прямую, параллельную боковому ребру; 2) $\frac{a^2}{4 \cos \varphi}$.

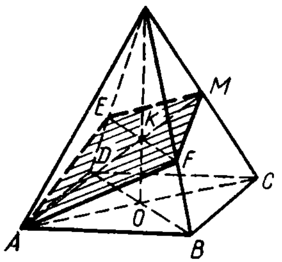

Рис. 68

29. 1) Построим апофемы SM и SN данной пирамиды (рис. 69). Согласно условию $\triangle SMN$ равносторонний, поэтому его медиана MM_1 перпендикулярна (SN). Вследствие перпендикулярности плоскостей

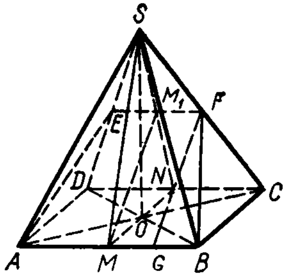

Рис. 69

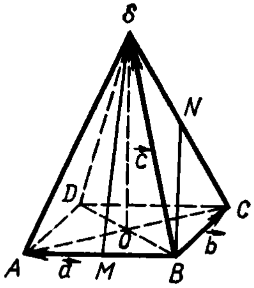

Рис. 70

SMN и SDC имеем $[MM_1] \perp (SDC)$ и $[MM_1] \perp (SC)$. Через точку M_1 проведем $[EF] \parallel (AB)$ $(F \in [SC])$, тогда отрезок FG, параллельный (M_1M), искомый; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

30. 1) $x = 90°$, так как $(AC) \perp (SB)$ (рис. 70).

2) Обозначим $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BS} = \vec{c}$, тогда $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{MS} = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. Плоский угол SBC обозначим через φ, искомый угол — через x. Имеем:

$$\cos x = \frac{\left|\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) \cdot \left(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\right|}{|BN| \cdot |SM|}.$$

Пусть $|AB| = m$, тогда $|SB| = 2m$, $|SM| = \frac{m\sqrt{15}}{2}$, $|BN| = m\sqrt{\frac{3}{2}}$. Следовательно, $\cos x = \frac{\frac{1}{2}\left(\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2\right)}{\frac{3m^2\sqrt{10}}{4}} =$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2\right)}{3m^2\sqrt{10}} = \frac{17m^2}{6m^2\sqrt{10}} = \frac{17}{6\sqrt{10}}, \quad x \approx 26°20'.$$

31. Замечаем, что общий отрезок диагональных сечений данной пирамиды является общей медианой прямоугольных треугольников, проведенной из вершин прямых углов. А так как эта медиана равна половине гипотенузы, то гипотенузы имеют равные длины. Следовательно, у данного параллелограмма диагонали равны, т. е. он является прямоугольником.

32. Проведем высоту пирамиды, обозначим ее длину через h, величины углов обозначим соответственно: x, $2x$, $4x$, $2x$. Имеем: $h \operatorname{ctg} x + h \operatorname{ctg} 4x = 2h \operatorname{ctg} 2x$, откуда $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 4x = 2 \operatorname{ctg} 2x$, $\operatorname{ctg} 4x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}$, $\operatorname{ctg} 4x = -\operatorname{tg} x$, $\frac{\cos 3x}{\sin 4x \cos x} = 0$, откуда $3x = 90°$, $x = 30°$. Ответ: $30°$, $60°$, $120°$, $60°$.

33. 1) У данной пирамиды равны длины боковых ребер, а также длины высот боковых граней. Отсюда следует равенство величин плоских углов при сторонах основания и конгруэнтность всех боковых граней. Следовательно, основание — правильный треугольник, и вершина проектируется в его центр.

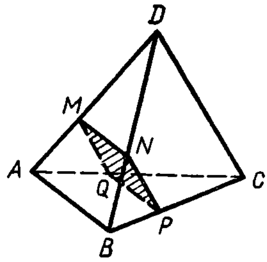

Рис. 71

2) Конгруэнтность боковых граней и равенство длин сторон основания пирамиды доказывается точно так же, как и в пункте 1) Остается доказать, что углы многоугольника, являющегося основанием пирамиды, равны по величине. Действительно, проекциями боковых граней на плоскость основания служат конгруэнтные равнобедренные треугольники; если обозначить величины их конгруэнтных углов через φ, то каждый угол основания пирамиды будет равен 2φ.

34. Пусть $O = [AC] \cap [BD]$. Имеем: $\overrightarrow{MO} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$, откуда $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ (1). Из равенства $|AC| = |BD|$ следует, что $(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA})^2 = (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB})^2$ (2). Возведя равенство (1) в квадрат и сложив почленно с равенством (2), получим искомый результат.

35. Указание. Проведите одну из высот тетраэдра, вершину основания соедините с основанием высоты. Затем примените теорему о трех перпендикулярах.

36. Дан тетраэдр $ABCD$ (рис. 71), требуется доказать существование такого сечения $MNPQ$, что $[MN] \parallel [PQ]$, $[MQ] \parallel [NP]$ (1), $|MN| = |MQ|$ (2). Условие (1) выполняется тогда и только тогда, когда плоскость сечения параллельна (AB) и (DC). Докажем существование такой точки M ребра AD, что выполняется условие (2). Обозначим $|AB| = c$, $|DC| = d$, $|MN| = |MQ| = x$. Из подобия треугольников AMQ и ADC имеем: $\frac{x}{d} = \frac{|AM|}{|AD|}$ (3). Из подобия треугольников MDN и ADB получим $\frac{x}{c} = \frac{|MD|}{|AD|}$ (4) или $\frac{x}{c} = \frac{|AD| - |AM|}{|AD|}$, откуда $\frac{x}{c} = 1 - \frac{x}{d}$ и $x = \frac{cd}{c+d}$. Из равенства (4) находим: $|MD| = \frac{d}{c+d}|AD|$. Построив точку M в соответствии с последней формулой и выполнив остальные очевидные построения, получим сечение, существование которого следовало доказать.

37. Пусть дан тетраэдр $ABCD$, у которого $|DA| = a$, $|DB| = b$, $|DC| = c$, $|BC| = a_1$, $|AC| = b_1$, $|AB| = c_1$. Обозначим $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Доказываемое равенство равносильно равенству: $|2\vec{a}\cdot\vec{CB}| = |\vec{b}^2-\vec{c}^2+\vec{AC}^2-\vec{AB}^2|$ или $|2\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})|=|\vec{b}^2-\vec{c}^2+(\vec{c}-\vec{a})^2-(\vec{b}-\vec{a})^2|$. Выполнив простые преобразования, получаем тождество.

38. 1) $\frac{H}{2}$; 2) $\frac{H}{\sqrt{n}}$. **39.** 2) $\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 Q$. **40.** 1) 192 *см*^{2}; 2) 1 : 2.

41. 48 *см*^{2}.

42. 1) Указание. Рассмотрите сечение октаэдра плоскостью, проходящей через центры четырех граней, имеющих общую точку; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

43. 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\approx 138°10'$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\approx 116°30'$.

44. 1) Центр O симметрии октаэдра соединим с вершинами A_1, B_1, C_1 грани и с точкой M_1 пересечения медиан этой грани. Рассмотрим правильную пирамиду $OA_1B_1C_1$, ее высота проходит через точку M_1. Аналогичное рассуждение верно для грани $A_2B_2C_2$, противолежащей $\triangle A_1B_1C_1$. Но $(A_1B_1C_1)\parallel(A_2B_2C_2)$, поэтому $[OM_1]\cup[OM_2]=[M_1M_2]$.

Возможно применение векторов. Имеем: $\vec{OM_1}=\frac{1}{3}(\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1})$. Умножив обе части этого равенства на $\vec{A_1B_1}=\vec{OB_1}-\vec{OA_1}$, получим, что $\vec{OM_1}\cdot\vec{A_1B_1}=0$; аналогично $\vec{OM_1}\cdot\vec{B_1C_1}=0$, т. е. $\vec{OM_1}\perp(A_1B_1C_1)$ и т. д.; 2) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

45. 8 *см*, $\approx$13,7 *см*. **46.** $\frac{1}{2}nb^2\sin\alpha$, $\alpha<\frac{360°}{n}$. **47.** 4 *см*.

48. Пусть $SABCD$ — данная пирамида, $ABNM$ — ее сечение (рис. 72). Так как $\frac{1}{2}S_{бок}=2S_{\triangle SAB}$, то согласно условию имеем: $S_{\triangle SNM}+2S_{\triangle SMA}=S_{\triangle SAB}$. Обозначив боковое ребро через b, плоский угол при вершине S через φ, $|SM|$ через y, приходим к уравнению $\frac{1}{2}y^2\sin\varphi+by\sin\varphi=\frac{1}{2}b^2\sin\varphi$, откуда

$$y=b(\sqrt{2}-1).$$

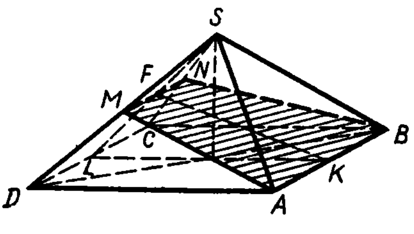

Рис. 72

Так как $[KF]$ — биссектриса треугольника SKL, то $\frac{|FL|}{|FS|}=\frac{|KL|}{|KS|}$, или $\frac{|FL|}{|FS|}=2\cos x$. Но $\frac{|FL|}{|FS|}=\frac{|MD|}{|SM|}=\frac{b-y}{y}=\frac{b}{y}-1=\sqrt{2}$. Итак, $2\cos x=\sqrt{2}$, $x=45°$.

49. $a(a+h+\sqrt{a^2+h^2})$. **50.** $\frac{1}{2}a^2(6+\sqrt{7}+3\sqrt{3})\approx 6{,}92\ a^2$.

51. 126 $\partial м^2$.

52. $2h^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. Указание. Докажите, что основание пирамиды — прямоугольник. Искомую площадь выразите через длину b бокового ребра и данные углы, затем с помощью теоремы Пифагора найдите зависимость между h^2 и b^2.

53. 117 $см^2$. **54.** 1 $см$, 30°. **55.** $\frac{1}{4}n \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\left(\frac{a^2-b^2}{\cos\varphi}+a^2+b^2\right)$.

56. 1) 120 $см^2$ и 224 $см^2$; 2) $\approx 33{,}0\ \partial м^2$. **57.** 64 $\partial м^3$.

58. Вообще говоря, нет. Достаточно привести пример: в качестве одного параллелепипеда возьмем единичный куб, за основание другого примем прямоугольник со сторонами 2 и $\frac{1}{2}$, диагонали оснований параллелепипедов обозначим соответственно a и b (где $a < b$). Основания параллелепипедов равновелики, равновелики будут и диагональные сечения, если высоту второго параллелепипеда взять равной $\frac{a}{b}$. Но $\frac{a}{b} \neq 1$, следовательно, объемы параллелепипедов различны.

59. 1) ≈ 58 $кг$; 2) ≈ 45 $кг$. **60.** $6a^3$. **61.** $48\sqrt{3}$ $м^3 \approx 83{,}1$ $м^3$. **62.** $\frac{1}{4}Sd\cos\frac{\alpha}{2}$. **63.** $\frac{1}{2}ml^2\sin 2\alpha\approx 125\ \partial м^3$.

64. $\arcsin\frac{\sqrt{(a+b)V}}{ab}$, $180°-\arcsin\frac{\sqrt{(a+b)V}}{ab}$. Указание. Обозначив один из углов основания через x, а боковое ребро через y, получите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2ab\sin x = 2(a+b)y, \\ V = yab\sin x. \end{cases}$$

65. $\frac{1}{4}d\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{16S^2-d^4\sin^2\alpha}$ или $\frac{1}{4}d\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{16S^2-d^4\sin^2\alpha}$.

66. $\frac{1}{2}d_1^2\sqrt{d_2^2-d_1^2}$. **67.** $\frac{1}{2}b^3\sin\alpha$ или $b^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$.

68. $\sqrt{3}a^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\approx 292\ см^3$.

69. 1) Указание. Рассмотрите перпендикулярное сечение призмы, примените формулу $V = S_{сеч}\cdot l$. Можно поступить так: дополнить данную призму до параллелепипеда, основанием которого принять данную боковую грань. 2) Обозначим площади параллельных боковых граней через S_1 и S_2, расстояние между плоскостями этих граней — через m. Рассмотрим две треугольные призмы, на которые разбивает данную призму плоскость диагонального сечения. Применив формулу из пункта 1), получим: $V=\frac{1}{2}S_1 m + \frac{1}{2}S_2 m=\frac{1}{2}(S_1+S_2)m$.

70. 2) $7:1$. **71.** Пусть в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани $ABCD$ и ADD_1A_1 — прямоугольники. Тогда $[AD] \perp (ABB_1)$ и $V = S_{ABB_1A_1} \cdot |AD| = (|AB| \cdot |AA_1| \sin 30°) \cdot |AD| = \frac{1}{2}|AB| \times \times |AA_1| \cdot |AD|$. Дальнейшие вычисления можно выполнить, не находя длины этих отрезков. Имеем: $|AB| \cdot |AD| = 20$, $|AA_1| \times \times |AD| = 24$, $\frac{1}{2}|AA_1| \cdot |AB| = 15$. Перемножив эти равенства почленно, получим $2V^2 = 15 \cdot 24 \cdot 20$, откуда $V = 60$ *дм*^{3}.

72. 1) 1080 *см*^{3}; 2) 6,12 *дм*^{3}. **73.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{1}{6}a^3 \operatorname{tg}\alpha$; 3) $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$. **74.** 1) $\frac{na^2 \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\sqrt{4b^2\sin^2\frac{180°}{n} - a^2}}{24\sin\frac{180°}{n}}$;

2) $\frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2-a^2}$ и $\frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2-2a^2}$.

75. Нет, так как площадь боковой грани должна быть больше $\frac{1}{4}Q$. **76.** $\frac{\sqrt{2}}{3}m^3$. **77.** $\frac{1}{16}c^3\sqrt{3}$ или $\frac{1}{12}c^3\sqrt{2}$. **78.** $\frac{1}{3}Q\sqrt{Q \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.

79. $\frac{\sqrt{3}\,a^3\sin\alpha\sin\beta}{24\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$. Указание. Обозначьте высоту пирамиды через x и составьте уравнение $x^2\operatorname{ctg}^2\beta - x^2\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{a^2}{4}$.

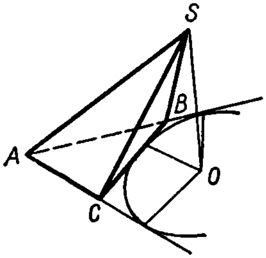

Рис. 73

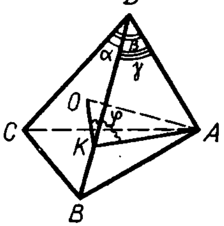

Рис. 74

80. 1) Точку O соединим с вершинами треугольника, выразим площади получившихся треугольников через a, b, c, r. Получим $\frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr - \frac{1}{2}ar = S_{\triangle ABC}$, откуда выразим r. 2) Указание. Возможны два случая: а) $O \in \triangle ABC$; б) $O \notin \triangle ABC$. Во втором случае O — центр вневписанной окружности (рис. 73).

81. 1) $341\frac{1}{3}$ *см*^{3}, 768 *см*^{3}, 3072 *см*^{3}; 2) а) 4 решения; б) 2 решения.

82. $\frac{1}{3}a^3\sin 2\alpha \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$.

83. $\frac{9\sqrt{7}}{128}$ *дм*^{3} $\approx 0{,}186$ *дм*^{3}. Указание. Обозначьте углы через x и $2x$, составьте уравнение $2\sin 2x = 3\sin x$.

84. Пусть в тетраэдре $ABCD$ (рис. 74) $|DA| = a$, $|DB| = b$, $|DC| = c$. Проведем $[AO] \perp (BDC)$, $[OK] \perp (DB)$ и соединим точки A и K. Угол AKO обозначим через φ. Объем тетраэдра $V = \frac{1}{3}S_{\triangle BDC} \cdot |AO| =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} bc \sin\alpha \cdot a \sin\gamma \sin\varphi = \frac{1}{6} abc \sin\alpha \sin\gamma \sin\varphi. \quad (1)$$

По теореме косинусов для трехгранного угла

$$\cos\varphi = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

Тогда

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)^2}{(\sin\alpha\sin\gamma)^2}} = \frac{1}{\sin\alpha\sin\gamma} \times$$

$$\times \sqrt{(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)} =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sin\gamma} \sqrt{(\cos\beta - \cos(\alpha+\gamma))(\cos(\alpha-\gamma) - \cos\beta)}.$$

Выполнив преобразования и подставив в (1), получим требуемую формулу.

85. *Способ 1.* Пусть $DABC$ — данный тетраэдр (рис. 75): $|AB| = m$, $|DC| = n$, $|MN| = h$, $((AB), \widehat{(DC)}) = \varphi$. Пусть $M \in [AB]$, $N \in [CD]$; рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью α, проходящей через (AB) и (MN). Проведем также $[CC_1] \perp \alpha$ и $[DD_1] \perp \alpha$. Плоскость DD_1N и прямая AB, перпендикулярные прямой MN, параллельны, поэтому линия (D_1C_1) пересечения плоскостей DD_1N и α параллельна (AB). Отсюда следует, что $\widehat{CNC_1} = \widehat{DND_1} = \varphi$.

$$V = V_{DABN} + V_{CABN} =$$

$$= \frac{1}{3} S_{\triangle ABN} (|CC_1| + |DD_1|) =$$

$$= \frac{1}{6} mnh \sin\varphi.$$

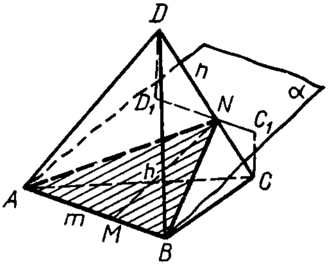

Рис. 75

Аналогичные рассуждения верны и в том случае, когда точки M и N не принадлежат отрезкам AB и CD: в таком случае находим разность объемов двух тетраэдров.

Способ 2. Через каждую пару противолежащих ребер данного тетраэдра $ABCD$ проводим параллельные плоскости. Получим параллелепипед $APBSRCQD$ (рис. 76) (выполнение рисунка удобнее начинать с изображения параллелепипеда). Замечаем, что этот параллелепипед является объединением данного тетраэдра и еще четырех тетраэдров $CAPB$, $BCQD$, $DABS$ и $ARCD$. Объем каждого из дополнительных тетраэдров равен $\frac{1}{6}$ V параллелепипеда,

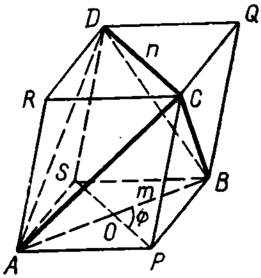

Рис. 76

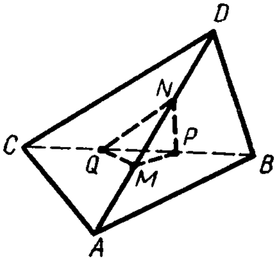

Рис. 77

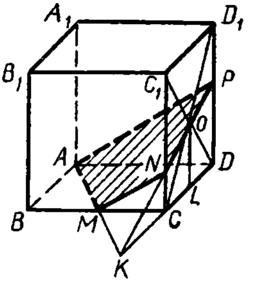

Рис. 78

поэтому объем тетраэдра $ABCD$ составляет третью часть объема параллелепипеда. Но объем параллелепипеда равен $S_{APBS} \cdot h$, где h — расстояние между плоскостями его оснований, равное расстоянию между (AB) и (DC). Итак,

$$V = \frac{1}{3} S_{APBS} \cdot h =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |PS| \sin \varphi \cdot h =$$
$$= \frac{1}{6} mnh \sin \varphi.$$

86. $\frac{1}{9}$. Указание. У данных тетраэдров $ABCD$ и $MPQN$ (рис. 77) расстояние и угол между (AD) и (BC) равны соответственно расстоянию и углу между (MN) и (PQ). Заметив это, примените формулу объема тетраэдра из задачи 84.

87. $\frac{(a^3 - b^3)\sqrt{-\cos 2\alpha}}{6 \cos \alpha}$, $45° < \alpha < 90°$.

88. $\frac{1}{24}(m^3 - n^3) \operatorname{tg} \alpha$ или $\frac{\sqrt{2}}{24}(m^3 - n^3) \operatorname{tg} \alpha$.

Указание. В первом случае высота усеченной пирамиды проходит через вершину прямого угла основания, а во втором — через вершину его острого угла.

89. Пусть M — середина $[BC]$, $O = [CD_1] \cap [DC_1]$ (рис. 78). Построим $K = (AM) \cap (CD)$, $N = (KO) \cap (CC_1)$, $P = (KO) \cap (DD_1)$, $AMNP$ — искомое сечение. Обозначим длину ребра куба через a, тогда $|KC| = |AB| = a$, а из подобия треугольников KCN и KLO получим $|CN| = \frac{a}{3}$. Тогда $S_{\triangle MCN} = \frac{a^2}{12}$, $S_{\triangle ADP} = 4 \cdot \frac{a^2}{12} = \frac{a^3}{3}$. Высотой усеченной пирамиды служит $[CD]$. Получим: $V_1 = \frac{7a^3}{36}$, $V_2 = a^3 - \frac{7a^3}{36} = \frac{29a^3}{36}$, $V_1 : V_2 = 7 : 29$.

90. 1) $5a^2\sqrt{3} \approx 8{,}66a^2$, $\frac{5a^3 \cos 36°}{3\sqrt{1 - 2\cos 72°}} \approx 2{,}18a^3$;

2) $15a^2 \operatorname{ctg} 36° \approx 20{,}6a^2$, $\frac{5a^3 \operatorname{ctg}^2 36°}{2\sqrt{1 - 2\cos 72°}} \approx 7{,}66a^3$.

Указание. Многогранник разделите на пирамиды, общей вершиной которых служит центр симметрии, а основаниями — его грани.

91. Рассмотрим все пирамиды, общей вершиной которых служит точка M, а основаниями — грани многогранника. Тогда $V = \frac{1}{3} S (x + y + z + \cdots)$, откуда находим, что $x + y + z + \cdots = \frac{3V}{S}$ (S — площадь грани).

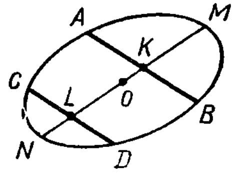

Рис. 79

1. См. рис. 79. $[AB] \parallel [CD]$, K — середина $[AB]$, L — середина $[CD]$, O — середина $[MN]$.

2. См. рис. 80. $[BE] \parallel [MN]$, $[CF] \parallel \parallel [MN]$.

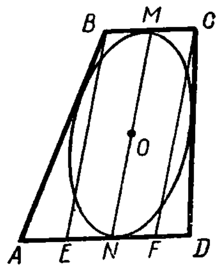

Рис. 80

3. 1) См. рис. 81. M — середина $[AB]$, $[CC_1] \parallel [OM]$ и т. д. 2) См. рис. 82. $[CC_1] \parallel [OM]$, где M — точка касания окружности и $[AB]$ и т. д.

4. См. рис. 83. $[AB]$ и $[CD]$ — сопряженные диаметры, M — середина $[CO]$; $[KL] \parallel (AB)$; F — середина $[AL]$. 1) Сектор с углом FOA искомый; 2) сегмент LCB искомый.

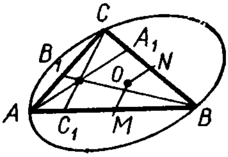

Рис. 81

5. См. рис. 84. Строим точки P, Q, R, S так, что $[PQ] \parallel [RS]$ и дуги PQ и RS служат изображением дуг окружности, содержащих 120°.

6. 1) См. рис. 85. Строим сопряженные диаметры MN и PQ, $[PN]$ — меньшее основание искомой трапеции. Затем строим диаметр ED, делящий пополам $[PN]$, и точки L и L_1 — соответственно середины $[OD]$ и $[OE]$. Трапеции $ABNP$ и A_1B_1NP искомые. 2) См. рис. 86. Строим хорду AB так, что дуга AB изображает дугу 150° (см. указание к задаче 4 (2)). Затем строим диаметр MN, параллельный $[AB]$, и сопряженный с $[MN]$ диаметр $[PQ]$. Построив F — середину хорды QN, найдем точку C пересечения (OF) и эллипса, изображающую середину дуги QN. Проведем $[CD] \parallel [AB]$, $ABCD$ — искомое изображение.

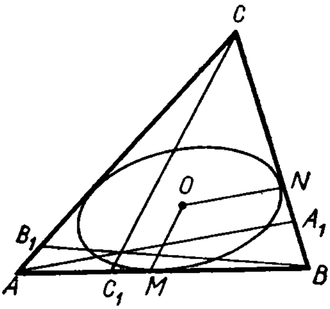

Рис. 82

7. $\frac{d^2 \sin^2 \alpha}{4\pi}$ и $\frac{d^2 \sin 2\alpha}{2\pi}$. 8. 140 *см* $\times$ $\times$ 33 *см*. 9. $\frac{2Qn}{\pi(m+2n)}$.

10. $\frac{2S \operatorname{tg} \varphi}{\pi(2\operatorname{tg}\varphi + 1)}$. 11. $4Q \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ или $4Q \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. 12. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{\pi D} \approx 1°30'$, $l = n\sqrt{h^2 + (\pi D)^2} \approx 75{,}5\, n$ *мм*. 13. 1), 2) Не существует. 14. 1) $R = \frac{1}{4} a\sqrt{2}$, $H = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$. 2) Угол между данной

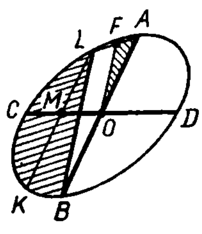

Рис. 83

диагональю и плоскостью основания равен $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 \approx 31°43'$. Тогда $R \approx 0{,}526a$, $H \approx$ $\approx 0{,}425a$.

15. Указание. Рассмотрите осевое сечение конуса, содержащее данную точку. **16.** См. рис. 87. **17.** 60°. **18.** 2) Указание. Докажите конгруэнтность треугольников, общим катетом которых служит высота конуса, а гипотенузами — высоты сечений. Можно также сравнить синусы линейных углов. **19.** $\approx 25°$.

20. $\dfrac{l^2 \sin\beta \sqrt{\cos(\varphi+\beta)\cos(\varphi-\beta)}}{\cos^2\varphi}$.

21. $l \leqslant R\sqrt{2}$. Указание. Угол между образующими изменяется в промежутке $[0°;\ \varphi]$, где φ — угол осевого сечения. Если $\varphi \geqslant 90°$, то конус имеет перпендикулярные образующие.

22. $\arcsin \dfrac{h\sqrt{2}}{\sqrt{h^2+R^2}}$ при $h \leqslant R$. Указание. Рассмотрите треугольник, катетом которого служит высота конуса, а гипотенузой — высота сечения.

23. 1) ≈ 245 *мм*; 2) $\approx 0{,}21$; 3) $k =$ $= 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **24.** $\sqrt{Q^2+\pi^2S^2}$. **25.** $\approx 91°$.

26. 1) $2\arcsin \dfrac{Q-q}{q}$; 2) $\dfrac{Q-q}{q}\cdot 360°$.

27. $\dfrac{S^2-\pi^2Q^2}{2S}$.

28. $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}Q\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\left(45°-\dfrac{\varphi}{4}\right)}$.

29. $\dfrac{Q\sin\varphi}{2\pi\sin\frac{\beta}{2}}$. **30.** $\dfrac{lR}{R-r}$, $\dfrac{R\sqrt{l^2-(R-r)^2}}{R-r}$.

31. 1) $l(d+l\cos\varphi)\sin\varphi$; 2) $\dfrac{\pi h^2}{4}$, $\dfrac{9\pi h^2}{4}$.

32. $\pi\left(\dfrac{R+2r}{3}\right)^2$ и $\pi\left(\dfrac{2R+r}{3}\right)^2$. **33.** $\dfrac{Q\sin\alpha}{\sin\beta}$.

34. $\dfrac{2Q\sin\varphi\sin\beta}{\cos^2\left(\beta-\frac{\varphi}{2}\right)}$ или $\dfrac{2Q\sin\varphi\sin\beta}{\sin^2\left(\beta+\frac{\varphi}{2}\right)}$.

35. ≈ 26 *см*. **36.** $\dfrac{\pi S}{\sin\varphi}$. **37.** ≈ 12 *см*.

38. 630π *см*$^2 \approx 1980$ *см*^{2}. **39.** 45π *дм*$^2 \approx$ ≈ 141 *дм*^{2}. **40.** $\pi a^2(4+10\cos\alpha+4\cos^2\alpha)$.

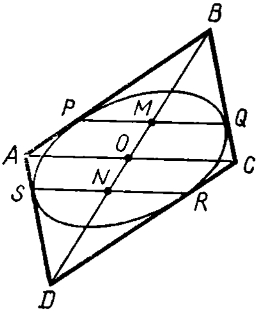

Рис. 84

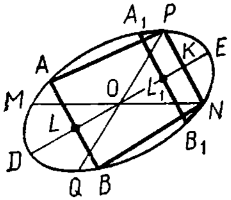

Рис. 85

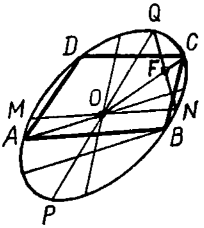

Рис. 86

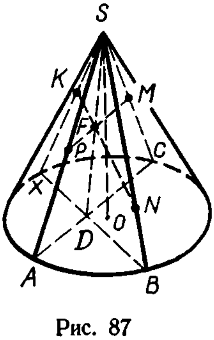

Рис. 87

41. 1) Пусть A, B, C, D — данные точки (рис. 88). Точка O, одинаково удаленная от данных точек, должна принадлежать плоскости α, перпендикулярной $[AB]$ и проходящей через его середину. Аналогичные утверждения верны для плоскостей β и γ, проведенных соответственно через середины $[BD]$ и $[BC]$ перпендикулярно к этим отрезкам. Плоскости α и β не могут быть параллельны. Действительно, если $\alpha \parallel \beta$, то прямая BD, перпендикулярная β, была бы перпендикулярна и α, а тогда через точку B к плоскости α были бы проведены два различных перпендикуляра (BA) и (BD).

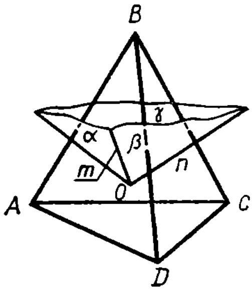

Рис. 88

Пусть $\alpha \cap \beta = m$, аналогично получим $\gamma \cap \beta = n$. Прямые m и n, лежащие в плоскости β, не могут быть параллельны. Докажем это. Прямая m перпендикулярна к прямым AB и AD, поэтому $m \perp (ADB)$. Аналогично $n \perp (BDC)$. Если предположим, что $m \parallel n$, то $m \perp (BDC)$, а тогда $(ADB) \parallel (BDC)$, что противоречит условию задачи. Итак, $m \cap n = O$, причем эта точка единственная.

2) Три произвольно взятые точки данной окружности и данная точка D составляют четыре точки, не принадлежащче плоскости.

42. 1) Прямая, соединяющая центры данных окружностей, должна быть перпендикулярна к плоскостям этих окружностей. Центр сферы является пересечением этой прямой и плоскости, проведенной через середину отрезка, соединяющего любые две точки окружностей, и перпендикулярной этому отрезку. Если $\omega_1 = \omega_2$, то через данные окружности проходит бесконечное множество сфер. 2) Пусть даны две окружности, имеющие общие точки A и B. Выберем произвольно точку M первой окружности и точку N второй окружности (выбранные точки не должны совпадать с A и B). Через точки A, B, M, N проходит единственная сфера (задача 41,1). Сфера останется той же, если изменить выбор точек M и N, что можно доказать методом от противного.

43. Указание. Рассмотрите окружности, описанные около данных прямоугольников. Примените предыдущую задачу.

44. Предположим, что окружность и сфера имеют третью общую точку. В таком случае сечение сферы плоскостью, проходящей через эти три точки, совпадает с данной окружностью. А это противоречит условию задачи.

45. 1) Нет; 2) $\approx 27{,}0$ *см*.

46. 1) 15 *см*; 2) $\approx 22{,}6$ *см*.

47. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; 2) $x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

48. $S(0;\ 0;\ 0)$, $R = \sqrt{3}$; 2) $S(2;\ -2;\ 0)$, $R = \sqrt{6}$; 3) $S(0;\ -1;\ 3)$, $R = 4$.

49. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 13$; 2) $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 26$.

50. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$ или $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+$ $+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$.

51. 1) $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=5$ или $(x+2)^2+(y+1)^2+$ $+z^2=5$; 2) $x^2+y^2+z^2=9$ или $x^2+(y+2)^2+z^2=9$.

52. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — точка пересечения прямой OP и данной сферы. Тогда векторы $\overrightarrow{OM}=(x;\ y;\ z)$ и $\overrightarrow{OP}=(1;\ 2;\ 4)$ коллинеарны. Согласно признаку коллинеарности векторов имеем: $\overrightarrow{OM}=$ $=k\overrightarrow{OP}$ или $(x;\ y;\ z)=k(1;\ 2;\ 4)$.

Отсюда $x=k,\ y=2k,\ z=4k$. (1)

Так как координаты точки M удовлетворяют уравнению сферы, то получим уравнение: $k^2+4k^2+16k^2=169$, откуда $k=\pm\frac{13}{\sqrt{21}}$.

Применив равенства (1), находим две точки пересечения сферы и прямой: $M_1\left(\frac{13}{\sqrt{21}};\ \frac{26}{\sqrt{21}};\ \frac{52}{\sqrt{21}}\right)$ и $M_2\left(-\frac{13}{\sqrt{21}};\ -\frac{26}{\sqrt{21}};\ -\frac{52}{\sqrt{21}}\right)$.

53. $M\left(2;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$ и $M_1\left(0;\ 3;\ -\frac{5}{2}\right)$. Указание. Векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, поэтому $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-$ $-\overrightarrow{OA})$. Переходя к координатам, получим: $(x-1;\ y-2;\ z+1)=$ $=k(2;\ -2;\ 3)$, откуда выражаем $x,\ y,\ z$. Подставив эти выражения в уравнение сферы, находим k, а затем $x,\ y,\ z$.

54. $A\left(\frac{2R^2a}{a^2+b^2+R^2};\ \frac{2R^2b}{a^2+b^2+R^2};\ \frac{(a^2+b^2-R^2)R}{a^2+b^2+R^2}\right)$.

55. $\left|\sqrt{R^2-R_1^2}-\sqrt{R^2-R_2^2}\right|$ или $\sqrt{R^2-R_1^2}+\sqrt{R^2-R_2^2}$.

56. $R\cos\varphi$. 57. $4\sqrt{10}$, $3\sqrt{17}$, 5.

58. Пусть центр сферы O не принадлежит прямой AB. Проведем из точки O перпендикуляр $[OM]$ к (AB) $(M\in(AB))$. Сечение сферы плоскостью α, проведенной через M перпендикулярно (OM), — искомая окружность. Докажем это. Пусть $|OM|=d$, тогда радиус сечения $r=\sqrt{R^2-d^2}$. Проведем через (AB) любую другую плоскость β, получим сечение радиуса $r_1=\sqrt{R^2-d_1^2}$, где d_1 — расстояние от O до β. Но плоскость β не может быть перпендикулярна (OM), поэтому $[OM]$ — наклонная к β и $|OM|>$ $>d_1$, т. е. $d>d_1$. А тогда $\sqrt{R^2-d_1^2}>\sqrt{R^2-d^2}$ или $r_1>r$. Решение единственное.

Если $O\in(AB)$, то любая плоскость, проходящая через A и B, проходит и через O, т. е. искомым сечением является большая окружность сферы. В этом случае задача имеет бесконечное множество решений.

59. 1) В качестве вектора, перпендикулярного к касательной плоскости α, возьмем вектор $\overrightarrow{OM} = (1; -2; -2)$. Искомое уравнение: $1\cdot(x-1)+(-2)\cdot(y+2)+(-2)\cdot(z+2)=0$, или $x-2y-2z=9$. 2) $x-2y-2z=-9$. У к а з а н и е. Точкой касания служит точка M_1 $(-1; 2; 2)$, симметричная точке M относительно центра сферы.

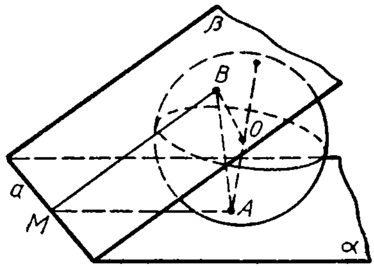

Рис. 89

60. У к а з а н и е. Угол между перпендикулярами, проведенными из центра сферы к касательной плоскости и плоскости сечения, равен углу между этими плоскостями. Отсюда следует, что в обоих случаях радиус сечения равен $R \sin \varphi$, где φ — угол между касательной плоскостью и плоскостью сечения. Равенство радиусов сечений можно также доказать, пользуясь конгруэнтностью треугольников.

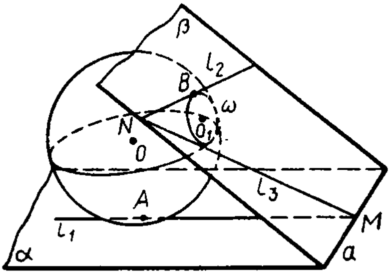

Рис. 90

61. 1) Точки A и B касания данной сферы с плоскостями α и β соединим с центром O сферы (рис. 89). Через (OA) и (OB) проведем плоскость γ. Так как $(OA) \perp a$ и $(OB) \perp a$, то $a \perp \gamma$ и $a \perp (AB)$.

2) У к а з а н и е. Точку M касания прямой и окружности соедините с центром O сферы и с центром O_1 сечения, проведите также (OO_1). Так как $a \perp (O_1M)$, то $a \perp (OM)$ (теорема о трех перпендикулярах) и a лежит в плоскости, перпендикулярной (OM), т. е. в касательной плоскости.

62. Рассмотрим плоскость α, касательную к данной сфере и содержащую данную прямую l_1 (рис. 90). Через прямую l_2 и точку M, принадлежащую l_1 и отличную от точки касания A, проведем плоскость β. Пусть $\alpha \cap \beta = a$, $a \cap l_1 = M$. Сечение сферы плоскостью β обозначим через ω. Если ω — окружность, то касательная l_3, проведенная к ней из точки M, вообще говоря, не параллельна l_2 и поэтому является искомой прямой. Если $\omega = B$, т. е. β — касательная плоскость, содержащая l_2, то прямая MB искомая. Задача имеет бесконечное множество решений.

63. В обоих случаях площадь сечения равна $\pi(R^2 - r^2)$, где R и r — радиусы сфер.

64. У к а з а н и е. Если данная точка принадлежит сфере ω, то указанные в условии произведения равны нулю. Если $M \notin \omega$, то рассмотрите сечение сферы плоскостью, проходящей через данные прямые (рис. 91, *а*, *б*). Соединив концы хорд, как указано

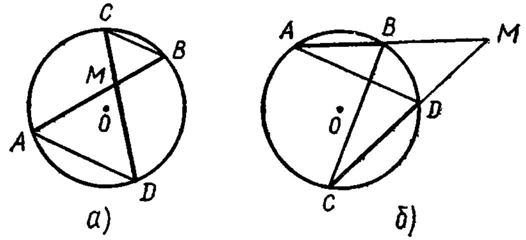

Рис. 91

на рисунках, получите подобные треугольники AMD и CMB, из пропорциональности их сторон следует доказываемое равенство.

65. Указание. Рассмотрите сечение сферы плоскостью, проходящей через данные прямые. Можно также воспользоваться конгруэнтностью треугольников.

66. $d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{p}\right)^2} = 4$ *см* (S — площадь треугольника, p — его полупериметр).

67. 2 *см*. **68.** $|AB| = d_1 + d_2$.

69. $R \leqslant x \leqslant R\sqrt{2}$. Указание. Рассмотрите боковую поверхность конуса, вершиной которого служит данная точка, а образующими — отрезки касательных к сфере, проведенных из данной точки.

70. 1) Пусть O общий центр сфер, их радиусы R_1 и R_2. При гомотетии H_O^k, где $k = \pm \frac{R_2}{R_1}$, сфера ω_1 отображается на ω_2. 2) Данные сферы ω_1 и ω_2 могут быть получены при вращении касающихся окружностей вокруг их линии центров (O_1O_2) (рис. 92, *а*, *б*). Обозначим точки пересечения прямой O_1O_2 со сферами через B_1 и B_2, общую точку сфер — через A. Произвольную точку M_1 первой сферы ($M_1 \neq B_1$, $M_1 \neq A$) соединим с точкой A, пусть $(AM_1) \cap \omega_2 = M_2$. В плоскости сечения, проходящего через (O_1O_2) и (M_1M_2), имеем $(B_1M_1) \parallel (B_2M_2)$, так как обе эти прямые перпендикулярны к (M_1M_2). Рассмотрим гомотетию с центром A и коэффициентом k, где $k = -\frac{R_2}{R_1}$ для случая внешнего касания

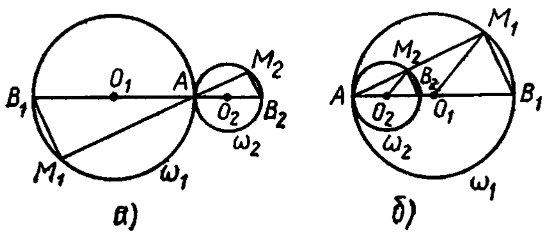

Рис. 92

(рис. 92, a) и $k = \frac{R_2}{R_1}$ для случая внутреннего касания (рис. 92, $б$). Тогда $H_A^k(M_1) = M_2$, $H_A^k(A) = A$, $H_A^k(B_1) = B_2$. Итак, $H_A^k(\omega_1) = \omega_2$.

71. 1) $\frac{31\pi}{20}$; 2) $\frac{\pi a^2}{5}(n^5 - m^5)$; 3) $\frac{512\pi}{15}$; 4) $\frac{\pi^2}{2}$. Указание. Замените: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

72. 1) $\frac{3\pi}{10}$; 2) $\frac{56\pi}{15}$; 3) $\frac{32\pi}{3}$.

Указание. Замените $2\pi \int\limits_0^1 (3 - x^2)^2\,dx - 2\pi \int\limits_0^1 (1 + x^2)^2\,dx = 2\pi \int\limits_0^1 (8 - 8x^2)\,dx$; 4) $\frac{\pi}{2}$. Указание. Замените $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

73. $\frac{\pi \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{32}\left(\frac{P}{1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)^3$ или $\frac{\pi \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{32}\left(\frac{P}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^3$. 74. 1) $\frac{S\sqrt{\pi Q}}{2\pi}$; 2) $\frac{a^3}{4\pi}$. 75. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35°16'$. 76. $\approx 2\%$ и $\approx 1\%$. 77. 1) $\frac{3}{2}\pi H^2$, $\frac{1}{4}\pi H^3$; 2) $\frac{S\sqrt{6\pi S}}{18\pi}$. 78. $\frac{1}{24}\pi d^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 79. $25:36$.

81. Пусть у конуса (рис. 93) $[SA] \perp [SB]$, $\widehat{AOB} = 120°$. Обозначим $|OA| = R$, тогда $|AB| = R\sqrt{3}$, $|OK| = \frac{R}{2}$, $|SK| = |AK| = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Имеем: $H^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$, откуда $R^2 = 2H^2$. Следовательно, $V = \frac{2}{3}\pi H^3$.

82. $\frac{1}{3}\pi a^3 \sin^2 2\alpha \sin(\alpha + 30°)\sin(\alpha - 30°)$. 83. 1) πH^2; $\frac{1}{9}\pi H^3$; 2) $\frac{S\sqrt{\pi S}}{9\pi}$. 84. 1) $V_{кон} : V_{цил} = \sqrt{2} : \sqrt{3}$; 2) $S_{бок.кон} : S_{бок.цил} = \sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{2}$. 85. $\arcsin \frac{V^2}{\pi^2 Q^3} \approx 34°20'$, $180° - \arcsin\frac{V^2}{\pi^2 Q^3} \approx 145°40'$.

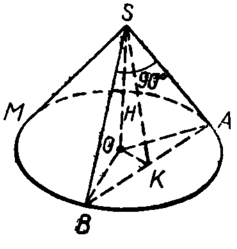

Рис. 93

86. $\pi ab^2 \sin^2\alpha$, $2\pi(a+b)b\sin\alpha$. 87. $\alpha = 90°$. 88. ≈ 6200. 89. $\approx 4{,}3$ *мм*. 90. 1) Нет; 2) да. 91. Конус имеет наименьший объем, а шар — наибольший. 92. $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(2+\cos\alpha)}{24(1+\cos\alpha)} \approx 27{,}2$ *см*^{3}.

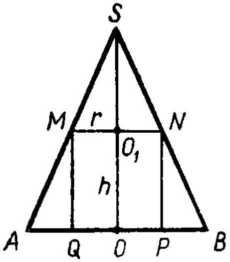

Рис. 94

93. $\approx 24\ м^3$. **94.** $\approx 17\ см^3$. **95.** $\approx 6{,}5\ м$.
96. 1) $\frac{1}{3}\pi R^2(2R \pm \sqrt{4R^2 - m^2})$; 2) $\frac{4}{3}\pi R^3 \times \sin^2\frac{\alpha}{4}$. **97.** В 4 раза. **98.** $\approx 41\ см^2$.
99. 1) $2\pi RH$. Указание. Рассмотрите разность площадей двух сегментных поверхностей. 2) $1 : \sqrt[4]{2}$. **100.** $\frac{Q}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}$.

101. 1) $1{,}5(6 + \sqrt{3})S$; 2) $1{,}5(2 + \sqrt{3})S$.

103. $\dfrac{S\sqrt{S}\sin\frac{\varphi}{4}\left(2 + \cos\frac{\varphi}{2}\right)}{6\sqrt{\pi}}$. **104.** $2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$.

105. $\frac{4}{3}\pi\left(l\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^3$. **106.** $\frac{1}{4}V\,\mathrm{ctg}^3\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

107. 1) $r = \frac{2}{3}R$, $h = \frac{1}{3}H$.

Указание. Обозначьте радиус основания цилиндра через r, высоту через h (рис. 94). Из подобия треугольников AMQ и ASO следует: $\frac{R-r}{h} = \frac{R}{H}$, отсюда $h = \frac{(R-r)H}{R}$. Тогда $V = \frac{\pi H}{R}(Rr^2 - r^3)$, $V' = \frac{\pi H}{R}(2Rr - 3r^2)$ и т. д. 2) $r = \frac{1}{2}R$, $h = \frac{1}{2}H$.
3) $r = \frac{HR}{2(H-R)}$, $h = \frac{H(H-2R)}{2(H-R)}$, $H > 2R$.

108. 1) $2:3$; 2) $\frac{4}{3}Q$. **109.** $\dfrac{2\pi r^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \approx 159\ дм^2$.

110. Пусть H — высота вписанного цилиндра, r — радиус его основания, тогда $S = 4\pi\sqrt{R^2r^2 - r^4} + 2\pi r^2$, $0 < r < R$.

$$S' = 2\pi\left(\frac{2R^2r - 4r^3}{\sqrt{R^2r^2 - r^4}} + 2r\right),$$

$S' = 0$ только при условии $R^2r - 2r^3 + r\sqrt{R^2r^2 - r^4} = 0$. (1) Так как $r \neq 0$, то $\sqrt{R^2r^2 - r^4} = 2r^2 - R^2$, откуда видно, что $r^2 \geqslant \frac{R^2}{2}$. Возведя в квадрат, получим: $R^2r^2 - r^4 = 4r^4 - 4R^2r^2 + R^4$, откуда $r^2 = \frac{5R^2 \pm R^2\sqrt{5}}{10}$. Значение $r^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}R^2$ не удовлетворяет неравенству $r^2 \geqslant \frac{R^2}{2}$, значение $r^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}R^2$ удовлетворяет уравнению (1) и неравенствам $r < R$ и $r^2 \geqslant \frac{R^2}{2}$. Итак, $r_0 = R\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$. Исследуя знак S' при $r < r_0$ и $r > r_0$ (например, методом «проб»), приходим к выводу, что в точке r_0 функция $S(r)$ имеет максимум, совпадающий с наибольшим значением функции на $\left]\frac{R}{\sqrt{2}},\ R\right[$.

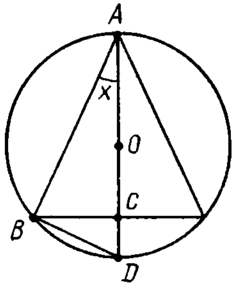

Рис 95

111. Обозначим искомый угол через $2x$ (рис. 95). Рассмотрев $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$, получим: $S = 4\pi R^2(\cos^2 x \sin x + \cos^2 x \sin^2 x) = 4\pi R^2(1 - \sin^2 x)(\sin x + \sin^2 x) = 4\pi R^2 \times (\sin x - \sin^2 x)(1 + \sin x)^2$, $S' = 4\pi R^2(\cos x - 2\sin x \cos x)(1 + \sin x)^2 + 2(1 + \sin x)\cos x \times (\sin x - \sin^2 x)$. Так как при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\cos x(1 + \sin x) \neq 0$, то $S' = 0$ только в том случае, если $(1 - 2\sin x)(1 + \sin x) + 2(\sin x - \sin^2 x) = 0$, $-4\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$, $\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$. Но $\sin x > 0$, поэтому $2x = 2\arcsin\frac{1 + \sqrt{17}}{8}$. Для исследования знака производной удобно исследовать знак трехчлена $z = -4\sin^2 x + \sin x + 1$; $z > 0$ при $\sin x < \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ и $z < 0$ при $\sin x > \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$.

Глава VII

1. 1) $2R(\sqrt{R^2 + 2H^2} + R)$; 2) $RH\sqrt{3} + \frac{1}{4}R\sqrt{12H^2 + 27R^2} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Находим диаметр окружности, вписанной в $\triangle SDC$ (рис. 96): $d = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию и отстоящей от вершины на расстоянии $b - (a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) = \sqrt{a^2 + b^2} - a$, сторона этого сечения равна образующей цилиндра. Сечение и основание пирамиды гомотетичны, поэтому

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}, \text{ откуда } x = \frac{a(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{b}.$$

3. 1) $\frac{3V\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}413V$; 2) $\frac{2V}{\pi} \approx 0{,}637V$.

4. Обозначим длину ребра вписанной призмы (рис. 97) через x; тогда $|AO| = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $|AM| = x\operatorname{ctg}\alpha$. Имеем: $R = \frac{x}{\sqrt{3}} + x\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $x = \frac{R}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}60^\circ} = \frac{R\sin\alpha\sin 60^\circ}{\sin(\alpha + 60^\circ)}$ и т. д.

5. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)}{\pi} = \frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}}{\pi}$. Указание. Пусть основание пирамиды — треугольник ABC, у которого $\widehat{A} =$

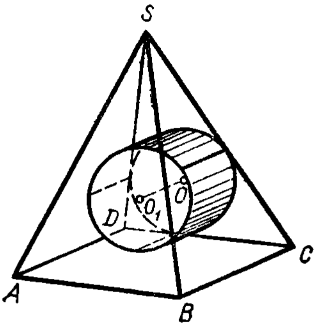

Рис. 96

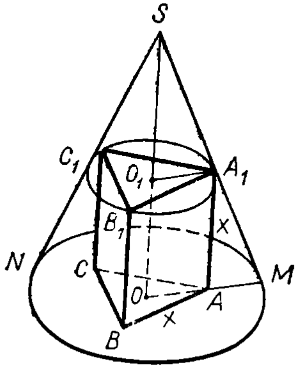

Рис. 97

$= \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Проведите диаметр AM основания цилиндра; из треугольника AMB найдете $|AB| = 2R \sin \alpha$. Стороны AC и BC получите по теореме синусов. Если учащимся известна формула $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, то этот же результат можно получить без вспомогательного построения. 1) Можно; 2) нельзя.

6. Обозначим высоту вписанного цилиндра через x. Применив тот же прием, что и в задаче 4, получим уравнение $3x + x \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{a\sqrt{3}}{2(3+\operatorname{ctg}\alpha)}$ и $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{3}}{8(3+\operatorname{ctg}\alpha)^3}$.

7. $\frac{2\pi b^3}{81 \sin 2\alpha \sin \alpha}$, $\frac{2\pi b^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{9 \sin 2\alpha}$.

8. $\arccos \frac{1}{3} \approx 70°30'$. Указание. Вписанная пирамида является правильным тетраэдром.

9. $\frac{R\sqrt{2(l^2 - R^2)}}{R\sqrt{2} + \sqrt{l^2 - R^2}}$.

10. 1) *Достаточность*. Пусть около основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ описана окружность ω (рис. 98). Через точку S и окружность ω проходит единственная сфера σ (см. задачу 41 из гл. VI). Эта сфера описана около данной пирамиды. 2) *Необходимость*. Пусть существует сфера σ, описанная около пирамиды $SABCD$.

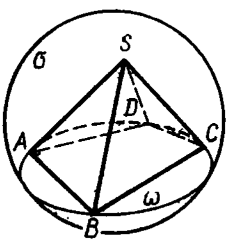

Рис. 98

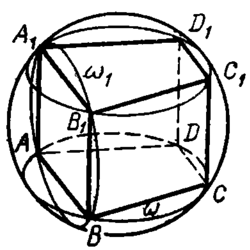

Рис. 99

Плоскость основания пирамиды пересекает сферу по окружности ω, описанной около этого основания.

11. *Достаточность.* Пусть около основания $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно описать окружность ω (рис. 99). Через эту окружность и точку A_1 проходит единственная сфера σ. Плоскость боковой грани ABB_1A_1 пересекает сферу по окружности, которая, проходя через вершины A, B, A_1 прямоугольника, проходит и через его четвертую вершину B_1. Следовательно, $B_1 \in \sigma$. Аналогично доказываем, что $C_1 \in \sigma$, $D_1 \in \sigma$. *Необходимость.* Пусть существует сфера, описанная около данной призмы Ф. Плоскость основания призмы пересекает сферу по окружности ω, описанной около этого основания. Плоскость боковой грани ABB_1A_1 пересекает сферу по окружности ω_1, описанной около параллелограмма ABB_1A_1, следовательно, этот параллелограмм является прямоугольником и $(AA_1) \perp (AB)$. Аналогично доказываем, что $(AA_1) \perp (AD)$. Итак, $(AA_1) \perp (ABC)$, т. е. призма Ф прямая.

12. 1), 2) Перпендикуляр к плоскости основания пирамиды (призмы), проведенный через центр окружности, описанной около этого основания; плоскость, перпендикулярная боковому ребру и проходящая через его середину.

13. $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$.

14. Изображение шара считаем заданным (рис. 100). Вершинами октаэдра служат полюсы M и N и концы сопряженных диаметров AB и CD экватора. $V_ш : V_{окт} = \pi : 1$.

15. $\dfrac{4\pi m^4}{4m^2 - a^2 - b^2}$.

16. 1) См. задачу 41 (1) гл. VI. 2) Указание. Рассмотрите вращение вокруг высоты пирамиды полуокружности, вписанной в треугольник, сторонами которого являются высота пирамиды, высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, и проекция высоты боковой грани на плоскость основания.

17. $\varphi_1 = \arcsin\dfrac{6}{\pi m}$, $m \geqslant \dfrac{6}{\pi}$, $\varphi_2 = 0°$.

18. Обозначим радиус сферы через R, объем призмы через U, тогда $U = \frac{1}{3} S_{пр} \cdot R$. Так как высота описанной призмы равна $2R$, то $U = S \cdot 2R$ и $\frac{1}{3} S_{пр} \cdot R = S \cdot 2R$. Отсюда $S_{пр} = 6S$

19. $\dfrac{S \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta}{\pi \sin \alpha}$. Указание. Найдите площадь основания, применив формулу $S_{бок} = \dfrac{Q}{\cos\beta}$.

20. $\dfrac{b \sin\alpha}{2\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)}$. Указание. Рассмотрите ортогональную проекцию сферы на плоскость основания усеченной пирамиды.

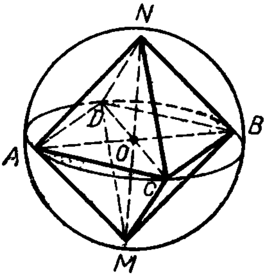

Рис. 100

Получите уравнение $x \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}=b\cos\frac{\alpha}{2}$, откуда находите x.

Глава VIII

1. Указание. Заметьте, что точка M принадлежит серединному перпендикуляру отрезка A_1A_2, причем различным точкам M этого перпендикуляра соответствуют различные углы поворота.

2. Указание. Оси симметрии шестиугольника проходят через его противолежащие вершины, причем эти оси пересекаются в центре окружности. Воспользуйтесь тем, что углы шестиугольника, взятые через один, конгруэнтны.

3. У равноугольного шестиугольника, вписанного в окружность, противоположные стороны попарно параллельны. Оси симметрии каждой пары проходят через центр окружности. Эти оси являются осями симметрии шестиугольника.

4. Композиция нечетного числа центральных симметрий есть перемещение, которое каждый луч отображает на противоположно направленный луч. Следовательно, такое перемещение есть центральная симметрия.

5. Указание. Рассмотрите поворот плоскости вокруг точки M на угол 90°.

6. Указание. Воспользуйтесь симметрией, центр которой совпадает с центром окружности.

7. Рассмотрим композицию двух поворотов: $R_D^{90°}$ и $R_E^{270°}$. Получаем перенос $\overrightarrow{AC}$. При этом переносе точка D отображается на F, причем $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AC}$. Но $\widehat{FDE}=45°$, поэтому и искомый угол равен 45°.

8. Пусть M — общая точка данных окружностей ω_1, ω_2, ω_3. Точки A, B, C — вторые точки пересечения ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_1, ω_1 и ω_2. Рассмотрим композицию трех осевых симметрий $S_{(MA)}$, $S_{(MB)}$, $S_{(MC)}$, являющуюся симметрией с осью (MO_2), где O_2 — центр окружности ω_2. Если точка P диаметрально противоположна точке M на ω_2, то $S_{(MA)}(P)=Q$, $S_{(MB)}(Q)=R$, $S_{(MC)}(R)=P$, причем $|PA|=|AQ|$, $|QB|=|BR|$, $|RC|=|CP|$. Следовательно, $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ — средние линии в треугольнике PQR, а поэтому окружность, описанная вокруг треугольника ABC, имеет тот же радиус, что и окружности, описанные вокруг треугольников QAB, RBC, PCA.

9. См. решение задачи 8.

10. Пусть x — искомая прямая: $H_A^k(x)=x_1$, $H_B^l(x)=x_1$, $H_C^m(x)=x_1$. Следовательно, $H_B^{\frac{1}{l}}\circ H_A^k(x)=x$. Поэтому прямая x

проходит через центр гомотетии композиции $H_B^{\frac{1}{l}} \circ H_A^k$. Точно так же прямая x проходит через центр композиции $H_C^{\frac{1}{m}} \circ H_A^k$; этими условиями прямая x определяется однозначно. Если одна из композиций есть перенос, а вторая композиция отлична от переноса, то прямая x определяется однозначно. Если обе композиции — переносы, то задача имеет бесчисленное множество решений или же не имеет совсем решений.

11. Пусть $m \cap p = P$, $n \cap q = Q$. На прямой PQ построим две точки R и S так, чтобы $|RP| = |PQ| = |QS|$. Точки $A = (MR) \cap p$ и $D = (MS) \cap q$ искомые. Возможны еще три решения.

13. Указание. Рассмотрите две пары подобных треугольников.

14. Указание. Примените решение задачи 13.

15. Указание. Опишите вокруг квадратов окружности и докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через вторую точку пересечения окружностей.

16. Заметим, что треугольник AMC отображается на треугольник DMB при подобии второго рода с центром M и осью, являющейся осью симметрии прямых AB и CD. Отсюда следует, что медианы одинаково наклонены к каждой из осей симметрии.

17. Указание. Рассмотрите преобразование подобия второго рода, при котором треугольник ACD отображается на треугольник ABC, и постройте ось подобия этого преобразования.

18. Треугольники ADC и CDB подобны и одинаково ориентированы. Подобие плоскости, отображающее треугольник ACD на треугольник CDB, преобразует медиану AM в медиану CN. Но подобие первого рода отображает каждый луч на луч, угол между которыми постоянный для данного подобия. Поскольку $[DA) \to [DC)$ и $[DA) \perp [DC)$, то лучи AM и CN также перпендикулярны.

19. Указание. Проведите медиану MQ треугольника MNB и воспользуйтесь результатом задачи 18.

20. Указание. Рассмотрите два подобия первого рода с общим центром, который совпадает с точкой пересечения четырех окружностей. (Воспользуйтесь построением центра подобия посредством двух окружностей.)

21. Указание. Заметьте, что центроиды трех (а также оставшихся трех) треугольников являются вершинами равносторонних треугольников, причем центроиды обоих равносторонних треугольников совпадают.

22. Из центра O окружности проведем перпендикуляр OM к хорде AB, точка M — середина хорды. Точка M отображается на точку P при подобии с центром O, коэффициентом $\left(1 : \cos\frac{\varphi}{2}\right)$, углом поворота $\frac{\varphi}{2}$.

23. Точка P получается из середины P_0 хорды AB при композиции поворота плоскости около центра окружности на угол

$\frac{\alpha}{2}$ и гомотетии с центром O и коэффициентом $k = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Но середины P_0, Q_0, R_0, S_0 сторон четырехугольника $ABCD$ являются вершинами параллелограмма, который при повороте $R_O^{\frac{\alpha}{2}}$ и гомотетии H_O^k $\left(k = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$ отображается на параллелограмм $PQRS$.

25. Указание. Убедитесь в том, что для того, чтобы точки P, Q, R принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы точка M принадлежала окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Предварительно докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из точки M на прямые BC, CA, AB, принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда точка M принадлежит описанной вокруг треугольника ABC окружности.

26. Указание. Воспользуйтесь тем, что при перемещении полупространство отображается на полупространство, луч — на луч, причем пересечение двух фигур отображается на пересечение их образов.

27. Указание. Каждую из осевых симметрий представьте как композицию двух плоскостных симметрий с перпендикулярными плоскостями симметрии. Общую плоскость данных осей выберите в качестве одной из плоскостей симметрии.

28. Указание. Представьте каждый поворот вокруг оси в виде композиции двух плоскостных симметрий, причем в обеих композициях в качестве одной из плоскостей симметрии выберите ту, которая проходит через данные оси поворота.

29. Очевидно, что $p \nparallel q$, так как в противном случае $S_q \circ S_p = \vec{a} \neq \vec{0}$, $S_p \circ S_q = -\vec{a}$ и $\vec{a} = -\vec{a}$, откуда $\vec{a} = \vec{0}$, что противоречит условию задачи. Если же допустить, что $p \dot{-} q$, то перемещение $S_q \circ S_p$ отображает общий перпендикуляр m прямых p и q на себя, причем это отображение прямой m есть перенос $\vec{c} \neq \vec{0}$, но тогда $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$, что снова противоречит условию задачи. Итак, p пересекает q. Далее следует рассмотреть плоскость (p, q).

30. Композиция центральной симметрии относительно середины отрезка общего перпендикуляра данных скрещивающихся прямых и плоскостной симметрии относительно одной или же другой плоскости, проходящих через этот общий перпендикуляр и одинаково наклоненных к данным прямым, отображает одну из данных прямых на другую. Но такая композиция есть осевая симметрия. Третья ось симметрии совпадает с общим перпендикуляром данных прямых.

31. Если плоскости α, β и γ пересекаются по прямой l, то композиция $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ есть перемещение с точечно неподвижной прямой l. Такое перемещение есть либо поворот вокруг l, либо плоскостная симметрия S_δ, где $l \subset \delta$. Но рассматриваемая композиция есть перемещение второго рода, поэтому она представляет собой симметрию S_δ. Обратно, если $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = S_\delta$, то $S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ S_\delta$ и плоскости α, β, γ и δ либо проходят через одну прямую, либо попарно параллельны.

32. Ось проходит через точку пересечения данных осей и лежит в их плоскости. Если a, b, c — данные оси, а d — полученная ось, то $(\widehat{a, b}) = (\widehat{d, c})$.

33. Осевая симметрия. Если a, b и c — данные три оси, то получаем: $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$, где $d \parallel a$, причем средняя линия для a и c совпадает со средней линией для b и d.

34. Если l и p — оси, $l \perp p$, $(l, p) = \alpha$, то $S_l = S_\alpha \circ S_\beta$, R_p^φ[1] $= S_\gamma \circ S_\alpha$, где $\beta \perp \alpha$, $\beta \perp p$. Поэтому $\beta \perp \gamma$. Следовательно, $R_p^\varphi \circ S_l = S_\gamma \circ S_\alpha \circ S_\alpha \circ S_\beta = S_\gamma \circ S_\beta = S_q$, где $q = \beta \cap \gamma$ (1).

35. Пусть $\beta \cap \gamma = a$, $\gamma \cap \alpha = b$, $\alpha \cap \beta = c$. Построим ортогональные проекции a_1 и c_1 прямых a и c соответственно на плоскостях α и γ. Плоскость δ, проходящая через a_1 и c_1, искомая.

36. 12 перемещений первого рода: 3 осевые симметрии, 8 поворотов вокруг 4 осей и тождественное преобразование; 12 перемещений второго рода: 6 плоскостных симметрий, 6 поворотных симметрий на $+90°$ вокруг прямых, проходящих через середины противоположных ребер, причем плоскости этих поворотных симметрий проходят через центроид тетраэдра перпендикулярно противолежащим ребрам.

37. 24 перемещения первого рода: по два поворота (на 120° и 240°) вокруг каждой диагонали куба, 6 осевых симметрий относительно прямых, проходящих через середины противолежащих ребер куба, 12 поворотов (на углы 90°, 180°, 270°), тождественное отображение; 24 перемещения второго рода.

38. Плоскости двух симметрий, при которых соответственно $A \to A_1$ и $B \to B_1$, пересекаются по оси поворота.

39. Перенос является примером перемещения первого рода, которое не имеет неподвижных точек. Если M — неподвижная точка, а $A \to A_1$, $B \to B_1$, то этими парами точек перемещение первого рода определяется однозначно и, как нетрудно доказать, оно представимо как композиция двух плоскостных симметрий, причем прямая l пересечения плоскостей проходит через M. Все точки прямой l неподвижны.

40. 1) $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$. Плоскости симметрий проходят через ребра BD и AC. Они пересекаются по оси симметрии; 2) $|AB| = |DC|$, $|BC| = |AD|$. Оси симметрии проходят через середины ребер AC и BD; 3) $|AB| = |DC|$, $|BC| = |AD|$, $|AC| = |BD|$. Оси симметрии проходят через середины противоположных ребер.

---

[1] Символом R_p^α обозначается поворот пространства вокруг оси p на направленный угол α.

41. Искомое множество — четыре прямые. Если α, β, γ — данные плоскости, то эти четыре прямые получаются от пересечения пары плоскостей симметрии для α и β с парой плоскостей симметрии для β и γ.

42. Указание. Постройте плоскости симметрии для каждой пары граней данного трехгранного угла. Они пересекаются по оси круговой конической поверхности, касающейся плоскостей граней трехгранного угла. Через каждую точку, принадлежащую трехгранному углу и внутренней области конической поверхности, проходят по две сферы, касающиеся граней трехгранного угла.

43. Указание. См. решение задачи 42.

44. Указание. Рассмотрите следующие случаи:

1) Точки A и B не разделены ни плоскостью α, ни плоскостью β.

2) Точки A и B разделены хотя бы одной из данных плоскостей.

45. Данная точка принадлежит одному из 8 трехгранных углов, определяемых данными плоскостями. Впишем в соответствующий трехгранный угол произвольную сферу, центр которой принадлежит прямой, по которой пересекаются биссекторные плоскости трехгранного угла. Далее следует воспользоваться преобразованием гомотетии. Задача имеет или два, или одно решение или не имеет ни одного решения. Указание. Отдельно рассмотрите случай, когда точка принадлежит плоскости.

46. Указание. Заметьте, что прямая l, проходящая через середины M и N ребер AC и BD, является для тетраэдра осью симметрии, поэтому прямой l принадлежат точки O, I и G, которые однозначно определяются данным тетраэдром.

47. Отложим на ребрах четырехгранного угла от его вершины равные отрезки $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$. Пусть точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости, тогда $|AB| = |CD|$, $|BC| = |AD|$. Опишем сферу вокруг тетраэдра $ABCD$. Вершина O четырехгранного угла — центр сферы. Но тетраэдр имеет ось симметрии, проходящую через середины отрезков AC и BD. Эта ось проходит через центр сферы и является искомой.

48. Если R_1 и R_2 — радиусы данных окружностей, то коэффициенты гомотетии равны $k_1 = R_1 : R_2$, $k_2 = -R_1 : R_2$, а центры гомотетии принадлежат прямой, проходящей через центры окружностей.

49. Указание. См. решение задачи 48.

50. Указание. Опишите вокруг данных кубов сферы. Проведите через линию центров сфер плоскость, параллельную двум граням данных кубов, и рассмотрите задачу применительно к этой плоскости.

51. Композиция данных гомотетий есть подобие; поскольку это подобие отображает каждый луч на ему сонаправленный (или на противоположно направленный), то подобие есть гомотетия. Но при этой гомотетии плоскость α отображается на себя, поэтому полученный центр гомотетии принадлежит плоскости α.

53. Указание. Воспользуйтесь тем, что композиция двух гомотетий H_M^k, H_N^l, $kl \neq 1$, есть снова гомотетия H_P^m, причем центр P этой гомотетии принадлежит прямой MN.

54. Каждые три внешних центра гомотетии принадлежат прямой. Полученные четыре прямые попарно пересекаются, но все четыре не имеют общей точки, поэтому они лежат в одной плоскости.

55. Пусть H_A^k, H_B^l, H_C^m, H_D^n — данные гомотетии, отображающие плоскость σ на плоскость σ_1. Чтобы построить плоскость σ, необходимо построить центры трех гомотетий: $H_B^{\frac{1}{l}} \circ H_A^k$, $H_C^{\frac{1}{m}} \circ H_A^k$, $H_D^{\frac{1}{n}} \circ H_A^k$. Через эти центры проходит искомая плоскость σ. В частных случаях задача имеет бесконечное множество решений или же не имеет решений.

56. Вокруг данного тетраэдра опишем сферу. Гомотетия, отображающая эту сферу на данную сферу, отображает данный тетраэдр на искомый.

57. Пусть прямая l пересекает данные плоскости соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Построим на прямой A_0D_0 точки B_0' и C_0', такие, чтобы $\overrightarrow{A_1B_1} : \overrightarrow{B_1C_1} : \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{A_0B_0'} : \overrightarrow{B_0'C_0'} : \overrightarrow{C_0'D_0}$. Проведем прямые B_0B_0' и C_0C_0'. Через вершины A_0, B_0, C_0, D_0 проведем плоскости α_0, β_0, γ_0, δ_0, параллельные прямым B_0B_0', C_0C_0'. Подобие пространства, при котором $\alpha_0 \to \alpha$, $\beta_0 \to \beta$, $\gamma_0 \to \gamma$, $\delta_0 \to \delta$, отображает тетраэдр $A_0B_0C_0D_0$ на искомый тетраэдр $ABCD$.

58. При гомотетии сохраняются углы, поэтому общий перпендикуляр p прямых a и b должен отображаться на общий перпендикуляр p_1 прямых a_1 и b_1. Если $a \cap p = A$, $b \cap p = B$, $a_1 \cap p_1 = A_1$, $b_1 \cap p_1 = B_1$, то $[A_1B_1] \parallel [AB]$. Гомотетия (или перенос), отображающая A на A_1 и B на B_1, искомая.

59. Если Π^k есть данное подобие с коэффициентом k, $k \neq 1$, а $H_M^{\frac{1}{k}}$ есть гомотетия с произвольным центром M, то композиция $H_M^{\frac{1}{k}} \circ \Pi^k$ есть перемещение D. Отсюда $\Pi^k = H_M^k \circ D$.

60. Построим две параллельные различные прямые так, чтобы на них были соответственно по паре соответствующих при данном подобии точек: A и A_1, B и B_1. Поскольку $|AB| \neq |A_1B_1|$, то прямые AB и A_1B_1 пересекаются в центре подобия.

61. Согласно условию задачи $k\overrightarrow{BC} + l\overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ и $k\overrightarrow{BC} + l\overrightarrow{CA} + m(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$. Отсюда $(m - l)\overrightarrow{AC} + (m - k)\overrightarrow{CB} = \vec{0}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ неколлинеарны, то $m - l = m - k = 0$, откуда $k = l = m$.

62. Имеем: $2\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$, $2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}$. Но $\overrightarrow{PB}=-4\overrightarrow{PM}$, $3\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PN}$, следовательно, $-3\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$, $2\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PB}$. Отсюда находим: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

63. Имеем:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

Отсюда после почленного сложения получаем:

$$3\overrightarrow{OG_1}+3\overrightarrow{OG_2}=2\cdot 3\overrightarrow{OG},\ \overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}=2\overrightarrow{OG}.$$

64. Имеем: $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$, так как $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, а сумма $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}$ есть вектор, полученный из нуль-вектора $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$ при повороте плоскости на угол $-45°$ и при подобии с коэффициентом $k=1:\sqrt{2}$.

65. Очевидно, что

$$k\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b},\ k>0.$$

Отсюда

$$k=\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right|:|\overrightarrow{AM}|=2\cos\frac{\widehat{A}}{2}:\frac{r}{\sin\frac{\widehat{A}}{2}}=\frac{\sin\widehat{A}}{r}=\frac{a}{2Rr}.$$

Поэтому $a\overrightarrow{AM}=2Rr\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$. Аналогично

$$b\overrightarrow{BM}=2Rr\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c}+\frac{\overrightarrow{BC}}{a}\right),\quad c\overrightarrow{CM}=2Rr\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{b}+\frac{\overrightarrow{CB}}{a}\right).$$

После почленного сложения этих равенств получим:

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

66. Имеем: $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. Если $(OB)\cap(AC)=B_1$, то

$$\alpha=-\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=-\frac{\sin 2\widehat{A}}{\sin 2\widehat{C}};\ \text{аналогично}\ \beta=-\frac{\sin 2\widehat{B}}{\sin 2\widehat{C}}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{OC}\sin 2\widehat{C}=-\overrightarrow{OA}\sin 2\widehat{A}-\overrightarrow{OB}\sin 2\widehat{B}$.

67. Имеем: $\overrightarrow{HC} = \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB}$; если $(BH) \cap (AC) = B_1$, то

$$\alpha = -\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -\frac{\operatorname{ctg}\widehat{C}}{\operatorname{ctg}\widehat{A}} = -\frac{\operatorname{tg}\widehat{A}}{\operatorname{tg}\widehat{C}}.$$

Аналогично $\beta = -\dfrac{\operatorname{tg}\widehat{B}}{\operatorname{tg}\widehat{C}}$.

После подстановки найденных значений α и β в разложение вектора $\overrightarrow{HC}$ убедимся в истинности доказываемого равенства.

68. Из соотношения $\overrightarrow{HA} \cdot \operatorname{tg}\widehat{A} + \overrightarrow{HB} \cdot \operatorname{tg}\widehat{B} + \overrightarrow{HC} \cdot \operatorname{tg}\widehat{C} = \vec{0}$ (см. задачу 67) следует: $\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OA} \cdot \operatorname{tg}\widehat{A} + \overrightarrow{OB} \cdot \operatorname{tg}\widehat{B} + \overrightarrow{OC} \cdot \operatorname{tg}\widehat{C}) : (\operatorname{tg}\widehat{A} + \operatorname{tg}\widehat{B} + \operatorname{tg}\widehat{C})$. Но $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, где O — центр окружности, описанной вокруг данного треугольника. Приравнивая правые части этих равенств, получим искомое соотношение.

69. Пусть $(MA) \cap (BC) = A_1$, $(MB) \cap (CA) = B_1$, $(MC) \cap (AB) = C_1$. Имеем: $\overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B} = y : x$; аналогично $\overrightarrow{AD_1} : \overrightarrow{D_1B} = zx : yz = x : y$. Следовательно, точки $A_1' = (NA) \cap (BC)$, $B_1' = (NB) \cap (CA)$, $C_1' = (NC) \cap (AB)$ симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин сторон треугольника.

70. Если $(MA) \cap (BC) = A_1$, $(MB) \cap (CA) = B_1$, $(MC) \cap (AB) = C_1$, то $\overrightarrow{MC_1} = k\overrightarrow{MC} = \dfrac{\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB}}{1+\lambda}$, где $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}$. Отсюда $\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} - k(1+\lambda)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Учитывая условие задачи, получаем: $1 : \lambda : -k(1+\lambda) = |BC|^2 : |CA|^2 : |AB|^2$. Следовательно, $\lambda = |CA|^2 : |BC|^2$, т. е. точка C_1 делит сторону AB пропорционально квадратам прилежащих сторон треугольника. Аналогично строим точки A_1 и B_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в искомой точке M.

71. Указание. См. решение задачи 70.

72. Имеем:

$$\overrightarrow{PA_1} = \frac{y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC}}{y+z} = k\overrightarrow{PA}, \quad \overrightarrow{PB_1} = \frac{z\overrightarrow{PC} + x\overrightarrow{PA}}{z+x} = l\overrightarrow{PB}.$$

Отсюда

$$(y+z)\,k\overrightarrow{PA} - y\overrightarrow{PB} - z\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad xPA - l\,(z+x)\,\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

Из этой системы находим k: $k = -x : (y+z)$. После подстановки этого значения k в первое равенство получим: $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

76. Из условия задачи следует:

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \lambda\overrightarrow{OA_2}}{1+\lambda}, \quad \overrightarrow{OB_2} = \frac{\overrightarrow{OA_2} + \lambda\overrightarrow{OA_3}}{1+\lambda}, \quad \overrightarrow{OC_1} = \frac{\lambda\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}}{1+\lambda}.$$

После подстановки значений $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB_2}$ получим:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{(1+\lambda)^2}(\lambda^2\overrightarrow{OA_2} + \lambda(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}) + \overrightarrow{OA_2}).$$

Аналогично

$$\overrightarrow{OC_2} = \frac{1}{(1+\lambda)^2}(\lambda^2\overrightarrow{OA_3} + \lambda(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1}) + \overrightarrow{OA_3}).$$

Отсюда

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{(1+\lambda)^2}(\lambda^2\overrightarrow{A_2A_3} - \lambda\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_2A_3}) = \frac{\lambda^2-\lambda+1}{(1+\lambda)^2}\overrightarrow{A_2A_3}.$$

Искомый коэффициент гомотетии равен $1 - \frac{3\lambda}{(1+\lambda^2)}$. Центр гомотетии совпадает с центроидом данного треугольника.

84. Пусть P_1 и P_2, Q_1 и Q_2, R_1 и R_2 — середины противоположных ребер тетраэдра $ABCD$. Тогда

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \quad \overrightarrow{OP_2} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

Для середины G отрезка P_1P_2 имеем:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Итак, точка G — центр симметрии для середин ребер тетраэдра.

85. Указание. Убедитесь в том, что $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{DA_1}$. Отсюда $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{DA_1}$.

86. Имеем: $k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{CD} + n\overrightarrow{DA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$. Отсюда $(l-k)\overrightarrow{BC} + (m-k)\overrightarrow{CD} + (n-k)\overrightarrow{DA} = \vec{0}$; так как векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ некомпланарны, то $k = l = m = n$.

87. Из подобия треугольников следует, что

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}, \qquad \overrightarrow{OC_1} = \alpha\overrightarrow{OA_1} + \beta\overrightarrow{OB_1},$$

откуда $\overrightarrow{CC_1} = \alpha\overrightarrow{AA_1} + \beta\overrightarrow{BB_1}$; следовательно, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны плоскости.

88. Пусть O — произвольная точка. Имеем:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_3}}{2} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}),\ \overrightarrow{OC_2} =$$
$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5}).$$

Отсюда $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_5} - \overrightarrow{OA_1}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{A_1A_5}$; аналогично $\overrightarrow{C_2C_3} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A_2A_1}$ и т. д. Следовательно,

$$\{C_2, C_3, C_4, C_5, C_1\} = H_O^k(\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}),$$

где $k = -\frac{1}{4}$, $G = (A_1C_2) \cap (A_2C_3)$.

89. *Необходимость.* Пусть A, B, C и D принадлежат плоскости. Тогда $\overrightarrow{CD} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = p(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + q(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$. Следовательно, $\overrightarrow{OD} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + (1 - p - q)\overrightarrow{OC}$, $r = 1 - p - q$.

Достаточность. Из условий задачи следует

$$\overrightarrow{OD} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + (1 - p - q)\overrightarrow{OC},$$

или $\overrightarrow{CD} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$, т. е. A, B, C, D принадлежат одной плоскости.

90. Имеем: $\overrightarrow{MP} = \frac{x\overrightarrow{MC} + y\overrightarrow{MD}}{x+y}$, $\overrightarrow{MQ} = \frac{y\overrightarrow{MD} + z\overrightarrow{MA}}{y+z}$, $\overrightarrow{MR} = \frac{z\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB}}{z+t}$, $\overrightarrow{MS} = \frac{\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}}{1+k}$. Но $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{MR}$, $\overrightarrow{MQ} = \mu\overrightarrow{MS}$, поэтому

$$\begin{cases} x\overrightarrow{MC} + y\overrightarrow{MD} = \frac{\lambda(x+y)}{z+t}(z\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB}), \\ y\overrightarrow{MD} + z\overrightarrow{MA} = \frac{\mu(y+z)}{1+k}(\overrightarrow{MB} + kMC). \end{cases}$$

Исключив из этой системы $\overrightarrow{MD}$, получим:

$$x\overrightarrow{MC} - z\overrightarrow{MA} = \frac{\lambda(x+y)}{z+t}(z\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB}) - \frac{\mu(y+z)}{1+k}(\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}).$$

Но векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны, поэтому

$$x = -\frac{k\mu(y+z)}{1+k}, \quad -z = \frac{\lambda(x+y)z}{z+t}, \quad \frac{\lambda(x+y)t}{z+t} = \frac{\mu(y+z)}{1+k}.$$

Отсюда $\lambda = -\frac{z+t}{x+y}$, следовательно, $x\overrightarrow{MC} + y\overrightarrow{MD} + z\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Далее, $\mu = -\frac{z+t}{x+y}$, поэтому $k = x:t$, $\overrightarrow{MS} = \frac{t\overrightarrow{MB} + x\overrightarrow{MC}}{t+x}$ и $\overrightarrow{BS} : \overrightarrow{SC} = x:t$.

91. Пусть M_1, M_2, N_1, N_2 — середины отрезков DM, CM, AN, BN. Имеем:

$$\overrightarrow{M_1N_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MA}\right), \quad \overrightarrow{N_1N_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{N_2M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{BM}),$$

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

Все указанные векторы компланарны с $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, поэтому точки M_1, M_2, N_1, N_2 принадлежат одной плоскости. **92.** $k = 1$, $l = 3$.

93. Пусть $(DI) \cap (ABC) = I_0$. Вначале надо доказать, что

$$\overrightarrow{II_0} = \frac{s_1\overrightarrow{IA} + s_2\overrightarrow{IB} + s_3\overrightarrow{IC}}{s_1 + s_2 + s_3}, \quad \overrightarrow{DI} : \overrightarrow{II_0} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{s_4}.$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{DI} = \frac{s_1\overrightarrow{IA} + s_2\overrightarrow{IB} + s_3\overrightarrow{IC}}{s_4}$ и $s_1\overrightarrow{IA} + s_2\overrightarrow{IB} + s_3\overrightarrow{IC} + s_4\overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

95. Указание. Если принять точку A за начало, то $\overrightarrow{AB_1} = m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{AD} + q\overrightarrow{AB}$; числами m, n, p и q прямая l определяется однозначно. Выразите векторы $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ через эти числа и векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, затем проверьте истинность теоремы.

96. Имеем:

$$\overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{CC_1} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

Но $\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, следовательно

$$(k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

или

$$(k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0.$$

Отсюда

$$k = -\frac{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})}{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2} = -\frac{R^2(\cos 2\widehat{C} - \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{A} - 1)}{c^2},$$

$$k = \frac{1}{4\sin^2\widehat{C}}(1 - \cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} - \cos 2\widehat{C}).$$

97. $2\sin^2\frac{\widehat{C}}{2} = \cos(\widehat{A} - \widehat{B})$.

98. Пусть O — центр окружности. Тогда $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MA_1}^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OM}$. Следовательно,

$$|MA_1|^2 + |MA_2|^2 + \cdots + |MA_n|^2 = 2nR^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}).$$

Но $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, поэтому $|MA_1|^2 + |MA_2|^2 + \cdots + |MA_n|^2 = 2nR^2$.

99. Пусть $ABCD$ — данная трапеция ($[AB] \parallel [CD]$). Необходимо проверить равенство

$$(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})^2 + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}).$$

После раскрытия скобок убеждаемся в истинности доказываемого соотношения.

100. Очевидно, что $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$. Отсюда $\overrightarrow{OD}^2=3R^2+2R^2(\cos 2\widehat{B}-\cos 2\widehat{C}-\cos 2\widehat{A})=3R^2+2R^2(-1-2\sin^2\widehat{B}+2\sin^2\widehat{C}+2\sin^2\widehat{A})=R^2+a^2+c^2-b^2$.

102. Указание. См. решение задачи 100.

103. Имеем: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD}$, где M — середина $[AB]$.

$$|CD|^2=a^2+\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}-2a\cdot\frac{c}{2}\cos\widehat{B}+2a\cdot\frac{c}{2}\cos(90^\circ+\widehat{B})=$$
$$=a^2+\frac{c^2}{2}-a\cdot c\cos\widehat{B}-a\cdot c\sin\widehat{B}=\frac{a^2+b^2}{2}-2S_{ABC}.$$

Если точки C и D разделены прямой AB, то

$$|CD|^2=\frac{a^2+b^2}{2}+2S_{ABC}.$$

104. Согласно задаче 98 имеем: $x^2=72R^2$.

105. Пусть A и B — центры окружностей. Очевидно, что $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MA}$, $(\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MA})^2=\overrightarrow{MA}^2$, $(\overrightarrow{MY}+\overrightarrow{MA})^2=MA^2$, $\overrightarrow{MX}\times\overrightarrow{MY}=0$. Отсюда $\overrightarrow{MX}^2-2\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{MA}=0$, $\overrightarrow{MY}^2+2\overrightarrow{MY}\cdot\overrightarrow{MA}=0$. Заметим, что $\overrightarrow{MX}^2-\overrightarrow{MY}^2=2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{MY})$ и

$$(\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MY})^2=2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MY}).$$

Из системы

$$\begin{cases}(\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{MY})\cdot(\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MY}-2\overrightarrow{MA})=0,\\(\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MY})\cdot(\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MY}-2\overrightarrow{MA})=0\end{cases}$$

следует, что $\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MY}=2\overrightarrow{MA}$, т. е. диаметр окружности, описанной вокруг треугольника MXY, равен $2|\overrightarrow{MA}|$.

106. Указание. Разложите векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ по $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найдите разложения векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ по $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и проверьте их перпендикулярность.

107.

$$\operatorname{ctg} B\widehat{C_1}C=\frac{\frac{\vec{c}}{2}\cdot\left(\frac{\vec{c}}{2}+\vec{a}\right)}{s},\quad \operatorname{ctg} C\widehat{A_1}A=\frac{\frac{\vec{a}}{2}\cdot\left(\frac{\vec{a}}{2}+\vec{b}\right)}{s},$$
$$\operatorname{ctg} A\widehat{B_1}B+\frac{\frac{\vec{b}}{2}\left(\frac{\vec{b}}{2}+\vec{c}\right)}{s},$$

где $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, s — площадь треугольника.

Отсюда $\operatorname{ctg}\widehat{BC_1C}+\operatorname{ctg}\widehat{CA_1A}+\operatorname{ctg}\widehat{AB_1B}=\frac{1}{4s}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=0$.

108. $-\dfrac{\vec{a}\cdot\left(-\vec{a}-\dfrac{\vec{c}}{2}\right)}{s}=\dfrac{2\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{c}}{2s}=\operatorname{ctg}\widehat{BCC_1}$, где $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, s — площадь треугольника ABC. Левую часть доказываемого равенства можно записать так:

$$\frac{1}{2s}(2\vec{a}^2+2\vec{b}^2+2\vec{c}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4s}.$$

Точно такой же вид имеет и правая часть.

109. $\operatorname{ctg}\widehat{A}+\dfrac{-\vec{b}\cdot\vec{c}}{2s}$, $\operatorname{ctg}\widehat{B}=\dfrac{-\vec{c}\cdot\vec{a}}{2s}$, $\operatorname{ctg}\widehat{C}=-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2s}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Но $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Отсюда

$$-(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=\frac{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2}{2}.$$

110. Если p_1, p_2, p_3 — рассматриваемые проекции, то $|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{MA}|\cdot|\cos\varphi_1|=ap_1$, $|\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB}|=ap_2$, $|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}|=ap_3$. Но $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$, поэтому из трех чисел ap_1, ap_2, ap_3 сумма двух равна третьему.

111. Пусть $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OX_1}+p=0$; тогда $\vec{n}(\overrightarrow{OX_1}-\overrightarrow{OX})=0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{X_1X}=0$. Но множество всех таких точек X, что $\overrightarrow{X_1X}\perp\vec{n}$, есть плоскость, проходящая через X_1 перпендикулярно $\vec{n}$. $d=\dfrac{|p|}{|\vec{n}|}$.

112. Имеем: $(\overrightarrow{OX}-\vec{a})^2=\vec{a}^2-M=R^2$. Если $\vec{a}=\overrightarrow{OP}$, то получаем сферу $\overrightarrow{PX}^2=R^2$ с центром P радиуса R.

113. Если $\vec{a}=\overrightarrow{OP}$, то точка P — центр сферы (см. задачу 112). Воспользуемся тем, что расстояние от точки P до плоскости равно R. Имеем: $\left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{n}+p}{|\vec{n}|}\right|=\sqrt{\vec{a}^2-M}$.

114. Указание. Необходимо проверить, что для тетраэдра $ABCD$ из равенств $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})^2$, $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})^2$, $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})^2$ следуют равенства: $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})=0$, $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0$, $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})\times\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0$.

115. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. Тогда

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|} = \frac{(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|} =$$

$$= \frac{2}{2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}) =$$

$$= -\frac{1}{2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}(|BD|^2 + |AC|^2 - |BC|^2 - |AD|^2).$$

116. Если D_0 — центроид грани ABC тетраэдра $ABCD$, то $\overrightarrow{DD_0} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$. Отсюда $|DD_0|^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})^2 = \frac{1}{3}(|DA|^2 + |DB|^2 + |DC|^2) - \frac{1}{9}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2)$.

117. Указание. Запишите в векторной форме условия перпендикулярности пяти пар соответствующих ребер данных тетраэдров и убедитесь, что следствием этих условий является условие перпендикулярности шестой пары ребер.

118. Заметим, что если высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке, то противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны. Поэтому $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ или $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0$, $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0$, $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$. Следовательно, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = k$. Если $k < 0$, все углы тупые; если $k > 0$ — острые, если $k = 0$ — углы прямые.

119. Указание. Докажите, что равенство $(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2 = (OD - OB)^2$ влечет за собой истинность равенства:

$$\frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})}{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}|} = \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})}{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}|}.$$

В виду того что из этого равенства следует и предыдущее равенство, то верна и обратная теорема.

120. Если O — центр сферы, описанной вокруг тетраэдра, то $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})^2 \geqslant 0$, откуда $4R^2 + 2R^2 - |AB|^2 + 2R^2 - |BC|^2 + 2R^2 - |CA|^2 - 2R^2 + |AD|^2 - 2R^2 + |BD|^2 - 2R^2 + |CD|^2 \geqslant 0$, $|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leqslant 4R^2 + |DA|^2 + |DB|^2 + |DC|^2$.

121. Пусть $\lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$; тогда $(\lambda\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM})^2 = 1$; отсюда $\lambda = 2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM} : \overrightarrow{OP}^2$. Необходимо доказать, что $\lambda = 3$. Имеем: $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA}^2}\overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OB}^2}\overrightarrow{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OC}^2}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}^2$. Отсюда

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OP}^2}{\overrightarrow{OA}^2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} + \frac{\overrightarrow{OP}^2}{\overrightarrow{OB}^2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM} + \frac{\overrightarrow{OP}^2}{\overrightarrow{OC}^2}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM},$$

$$\frac{2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PM}}{\overrightarrow{OP}^2}=\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OA}^2}+\frac{2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OB}^2}+\frac{2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OC}^2}=$$

$$=\frac{\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{AM}^2}{\overrightarrow{OA}^2}+\frac{\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{BM}^2}{\overrightarrow{OB}^2}+\frac{\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{CM}^2}{\overrightarrow{OC}^2}=3.$$

123. Отложим от вершины O равные единичные отрезки: $|OA|=|OB|=|OC|=|OD|$. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат. Имеем: $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$. Отсюда $\cos\alpha-1-\cos\beta+\cos\alpha=0$, $\cos\beta=2\cos\alpha-1$.

124. Из тождества $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ следует утверждение задачи, если учесть, что

$|\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}|=|M_1A_1|$, $|\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}|=|M_2B_1|$, $|\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}|=|M_3C_1|$, $|AB|=|BC|=|CA|=1$.

125. Пусть $\vec{e}$ — направляющий единичный вектор прямой a. Учитывая, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, имеем: $((\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot\vec{e})^2+((\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\vec{e})^2+((\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot\vec{e})^2=6((\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}))$, $(\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OC}\cdot\vec{e})^2=2((\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}))$.

126. Опишем около тетраэдра $ABCD$ куб со стороной a и с центром M. Имеем: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$, где O — вершина куба. Пусть $\vec{e}$ — единичный вектор прямой l, проходящей через M. Квадрат расстояния от A до l равен: $|MA|^2-((\overrightarrow{MA}\times\vec{e})\ \vec{e})^2=\frac{3a^2}{4}-((\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\cdot\vec{e})^2=\frac{3}{4}a^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})^2-(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e})^2+2(\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e})$. Составив еще три аналогичных выражения, получим в результате суммирования искомую сумму: $x^2=4\times\frac{3}{4}a^2-((\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OC}\cdot\vec{e})^2+(\overrightarrow{OD}\cdot\vec{e})^2)-4(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e})^2+2(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e})((\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e})+(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e})+(\overrightarrow{OC}\cdot\vec{e})+(\overrightarrow{OD}\cdot\vec{e}))=3a^2-a^2-4(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e})^2+4(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e})^2=2a^2$.

127. $x=2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

128. $|CN|:|ND|=\frac{3}{4}$, $|AM|:|MB|=\frac{2}{5}$.

129. Пусть $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC}=\vec{e}_3$. Если C_1 — ортогональная проекция точки C на плоскость OAB, то $\overrightarrow{OC_1}=p\vec{e}_1+q\vec{e}_2$, где $p=\frac{\sin\widehat{A}\cos\widehat{B}}{\sin\widehat{C}}$, $q=\frac{\sin\widehat{B}\cos\widehat{A}}{\sin\widehat{C}}$.

Отсюда следует, что $p:q=\operatorname{tg}\widehat{A}:\operatorname{tg}\widehat{B}$.

130. Пусть D — основание перпендикуляра, проведенного из точки O к плоскости ABC. Тогда $\overrightarrow{OD} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}$, $p + q + r = 1$. Но $\overrightarrow{OD} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 0$, $\overrightarrow{OD} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 0$, или $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}$. Таким образом, $p\overrightarrow{OA}^2 + q\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OB}^2 + r\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = p\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + q\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + r\overrightarrow{OC}^2$. Из полученной системы находим p, q, r, а затем и $d = \sqrt{\overrightarrow{OD}^2}$.

131. Если соответствующие координаты двух точек одновременно четные или нечетные, то середина отрезка с концами в этих точках имеет целочисленные координаты. Из пяти точек всегда две точки имеют соответствующие координаты одновременно четные или нечетные.

132. В произвольно выбранной системе координат $O_1x_1y_1$ построим точки $A_1(1;\ 3)$ и $B_1(2;\ -1)$. Преобразование подобия, при котором $A_1 \to A$, $B_1 \to B$, отображает точку O_1 на искомую точку O, а оси O_1x_1 и O_1y_1 — на искомые оси Ox и Oy. Задача имеет два решения в зависимости от рода подобия.

133. Заметим, что для того, чтобы отрезки MN и RS были перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство: $|MR|^2 - |MS|^2 = |NR|^2 - |NS|^2$. Если H — ортоцентр треугольника ABC, то $|HA|^2 - |HB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2$, $|HC|^2 - |HB|^2 = |AC|^2 - |AB|^2$. Записав эти равенства в координатной форме и решив полученную систему двух линейных уравнений с двумя переменными, найдем координаты точки H: $x = y = \frac{1}{3}$.

134. Для любой точки гиперболы имеем: $x = t$, $y = \frac{k^2}{t}$, где t — любое отличное от нуля число. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности хорд PQ и RS гиперболы имеет вид:

$$\frac{\frac{k^2}{t_2} - \frac{k^2}{t_1}}{t_2 - t_1} \cdot \frac{\frac{k^2}{t_4} - \frac{k^2}{t_3}}{t_4 - t_3} = -1 \Rightarrow t_1t_2t_3t_4 = -k^2.$$

Если PQR — треугольник, вписанный в гиперболу, а перпендикуляр, проведенный через P к (QR), пересекает гиперболу в точке H, причем точкам P, Q, R, H соответствуют значения t, равные t_1, t_2, t_3 и t_4, то $t_1t_2t_3t_4 = -k^2$. Но тогда и $(HQ) \perp (RP)$ и $(HR) \perp (PQ)$, т. е. H — ортоцентр.

135. Указания. См. решение задачи 134.

136. Координаты точек пересечения парабол удовлетворяют двум уравнениям:

1) $x + y = x^2 + y^2 + p_1x + p_2y + q_1 + q_2$;

2) $y - x = x^2 - y^2 + p_1x - p_2y + q_1 - q_2$.

В первом случае имеем уравнение окружности:

$$\left(x+\frac{p_1-1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{p_2-1}{2}\right)^2=\frac{(p_1-1)^2+(p_2-1)^2}{4}+q_1+q_2;$$

во втором случае — гиперболу:

$$\left(x+\frac{p_1+1}{2}\right)^2-\left(y+\frac{p_2+1}{2}\right)^2=\frac{(p_1+1)^2+(p_2+1)^2}{4}+q_1-q_2.$$

137. При $a_1=1$ имеем перенос. Пусть $a_1\neq 1$. Если $x_1=kx+(1-k)m$, $y_1=ky+(1-k)n$ — формулы преобразования гомотетии с центром $M(m;\ n)$ и коэффициентом k, то первая парабола отображается на вторую при

$$k=a_1,\ m=\frac{b_1}{2(1-a_1)},\ n=\frac{b^2-4a_1c_1}{4(1-a_1)}.$$

138. Указание. Если ABC — один из треугольников, а точка O — проекция вершины C на прямую AB, то примите точку O за начало координат, оси координат направьте по прямым OA и OC. Составьте уравнение прямой, проходящей через два ортоцентра, и проверьте, что координаты остальных ортоцентров удовлетворяют этому уравнению.

139. Указание. Начало координат выберите в центре окружности, а оси координат направьте так, чтобы вершины треугольника имели координаты: $A(0;\ R)$, $B\left(\frac{R\sqrt{3}}{2};\ \frac{R}{2}\right)$, $C\left(-\frac{R\sqrt{3}}{2};\ \frac{R}{2}\right)$. Запишите уравнения прямых BC, CA и AB и пересеките окружность и эти прямые прямой $y=kx$.

140. Выберем систему координат так, чтобы окружность имела уравнение $x^2+(y-1)^2=1$, а касательная t — уравнение $y=0$. Если $\vec{e}=(m,\ n)$ — направляющий вектор прямой l, то координаты любой точки прямой l таковы: $x=km$, $y=\frac{4}{3}+kn$.

Далее получаем: $k_1+k_2=\frac{-2n}{3(m^2+n^2)}$, $k_1\cdot k_2=-\frac{8}{9(m^2+n^2)}$, $k_3=-\frac{4}{3n}$, где k_1, k_2, k_3 — значения k в точках U, V, W.

Отсюда $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}+\frac{1}{k_3}=\frac{3n}{4}-\frac{3n}{4}=0.$

141. Указание. См. решение задачи 131.

142. Уравнение плоскости α в координатной системе $(A,\ \vec{AM},\ \vec{AN},\ \vec{AP})$ имеет вид: $x+y+z=1$.

Если C_1 имеет координаты a, b, c, то $a+b+c=1$,

где $a=\frac{\vec{D_1C_1}}{\vec{AM}}$, $b=\frac{\vec{B_1C_1}}{\vec{AN}}$, $c=\frac{\vec{CC_1}}{\vec{AP}}$.

143. Указанные шесть точек принадлежат плоскости $x+y+z=a+b+c$ и сфере $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$, поэтому они принадлежат одной окружности. Равенство сторон треугольников проверяется по формуле расстояния между двумя точками.

144. $|PT|^2=(x_0-a)^2+(y_0-b^2)+(z_0-c)^2-R^2$.

145. $(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2=(R_1\pm R_2)^2$.

146. Касательная плоскость проходит через начало координат и перпендикулярна вектору $\overrightarrow{OM}=(a;\ b;\ c)$, где $M(a;\ b;\ c)$ — центр сферы. Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$ax+by+cz=0.$$

147. Искомое множество точек есть сфера:

$$\left(x-\frac{x_1-k^2x_2}{1-k^2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1-k^2y_2}{1-k^2}\right)^2+\left(z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right)^2=$$
$$=\frac{k^2}{(1-k^2)^2}((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2),\ k\neq 1.$$

Если $k=1$, то получаем плоскость, проходящую через середину отрезка A_1A_2, перпендикулярную к этому отрезку.

148. $|MT_1|^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-R_1^2$,
$|MT_2|^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-R_2^2$.

Искомое множество точек задается уравнением:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-R_1^2=k^2((x-a_2)^2+(y-b_2)^2+$$
$$+(z-c_2)^2-R_2^2),$$

где $k=|MT_1|:|MT_2|$.

149. Если $k\neq -l$, то искомое множество точек есть сфера с центром N, причем $\overrightarrow{A_2N}:\overrightarrow{NA_1}=k:l$. Если же $k=-l$, то искомое множество есть плоскость, перпендикулярная к (A_1A_2).

150. Уравнение сферы σ имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0,$$

а уравнение плоскости (ABC):

$$bcx+acy+abz-abc=0.$$

Координаты точки прямой l: kbc, kca, kab. Подставив эти координаты в уравнения сферы и плоскости, найдем два значения k, отношение которых равно 3.

151. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный прямоугольный параллелепипед. Выберем систему координат так, чтобы

$$A\ (0;\ 0;\ 0),\ B\ (a;\ 0;\ 0),\ C\ (a;\ b;\ 0),\ D\ (0;\ b;\ 0),\ A_1(0;\ 0;\ c).$$

Уравнение сферы, описанной вокруг параллелепипеда, имеет вид:

$$x(x-a)+y(y-b)+z(z-c)=0.$$

Из этого уравнения и следует утверждение задачи.

152. Пусть $\vec{AB}=\vec{i}$, $\vec{AD}=\vec{j}$, $\vec{AA_1}=\vec{k}$, где $(\vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$ — прямоугольный базис, а A — начало координат. Плоскость α, проходящая через (AB_1), имеет уравнение $x+qy-z=0$. Точки прямой BC_1 имеют координаты 1, m, m; точки прямой CD_1 — координаты n, 1, $1-n$, точки прямой DA_1 — координаты 0, p, $1-p$. Следовательно, плоскость α пересекает прямую BC_1 в точке $M(1;\ m_0;\ m_0)$, причём значение m_0 находим из условия $1+m_0q-m_0=0$, т. е. $m_0=\frac{1}{1-q}$. Итак, точка M имеет координаты $1, \frac{1}{1-q}, \frac{1}{1-q}$. Аналогично точка $N=\alpha\cap(CD_1)$ имеет координаты $\frac{1-q}{2}$, 1, $\frac{1+q}{2}$; точка $P=\alpha\cap(DA_1)$ имеет координаты 0, $\frac{1}{1+q}$, $\frac{q}{1+q}$. Проверкой убеждаемся, что векторы $\vec{MN}$ и $\vec{MP}$ коллинеарны, а поэтому точки M, N, P принадлежат одной прямой. Да.

153. Указания. См. решение задачи 152.

154. Заметим, что

$$\vec{OM_1}=\frac{\vec{OA}+k\vec{OB}}{1+k},\quad \vec{OM_2}=\frac{\vec{OB}+k\vec{OA}}{1+k},\quad \vec{ON_1}=\frac{\vec{OB}+l\vec{OC}}{1+l},$$

$$\vec{ON_2}=\frac{\vec{OC}+l\vec{OB}}{1+l},\quad \vec{OP_1}=\frac{\vec{OC}+m\vec{OD}}{1+m},\quad \vec{OP_2}=\frac{\vec{OD}+m\vec{OC}}{1+m},$$

$$\vec{OQ_1}=\frac{\vec{OD}+n\vec{OA}}{1+n},\quad \vec{OQ_2}=\frac{\vec{OA}+n\vec{OD}}{1+n}.$$

Принадлежность точек M_1, N_1, P_1, Q_1 одной плоскости выражается равенством $klmn=1$ и обратно. Поэтому и точки M_2, N_2, P_2, Q_2 также принадлежат одной плоскости.

155. Может. Указание. Постройте плоскость симметрии для плоскости проекций и плоскости окружности; спроектируйте окружность перпендикулярно плоскости симметрии.

156. Если $[AB]\cap\alpha=\varnothing$, $(AB)\nparallel\alpha$, то искомое множество — круговое кольцо, центр которого есть точка $M=(AB)\cap\alpha$.

157. Если A_1, A_2, A_3 — данные три вершины, то точкой D разделим отрезок A_1A_3 на два отрезка так, чтобы $|A_1D|:|DA_3|=|DA_3|:|A_1A_3|$. Вершина A_5 принадлежит прямой A_2D. Аналогично строим $D_1\in[A_1A_3]$, чтобы $|A_1D_1|:|D_1A_3|=|A_1A_3|:|A_2D_1|$, $A_4\in(A_2D_1)$. Кроме того, $(A_1A_4)\parallel(A_2A_3)$. Отсюда находим A_4. Точка A_5 удовлетворяет условию: $(A_3A_5)\parallel(A_1A_2)$. Это позволяет построить точку A_5.

158. Указание. Пусть $p\subset\alpha$, $q\subset\alpha$, $p\subset q=M$, $\beta\cap\alpha=s$. Если $p\cap s=P$, $q\cap s=Q$, то постройте в плоскости β окружность ω с диаметром PQ. Проектирование производится параллельно прямой MN, где $N\in\omega$.

159. Указание. Середины сторон данного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Спроектируйте этот параллелограмм на плоскость в квадрат.

160. Пусть данные прямые, проходящие через точку S, пересекают общую прямую l данных плоскостей соответственно в точках A и B, A_1 и B_1. Окружности, построенные на диаметрах AB и A_1B_1, пересекаются в точках S_1 и S_1'. Проектирование следует проводить параллельно прямой SS_1 или SS_1'.

162. Пусть $\triangle ABC \subset \alpha$, G — точка пересечения медиан треугольника, $\beta \cap \alpha = l$. Пусть $(GB) \cap l = B_0$, $(GC) \cap l = C_0$. Найдем в плоскости β множество точек G_1, для которых $\widehat{B_0G_1C_0} = 120°$. Аналогично найдем множество точек G_2, для которых $\widehat{C_0G_2A_0} = 120°$. Если G_0 — одна из общих точек указанных множеств, то проектирование необходимо выполнить параллельно прямой GG_0. Заметим, что указанные выше множества точек представляют собой пары дуг окружностей, симметричных относительно l.

163. Если прямая l проходит через середины противолежащих ребер AB и CD, то проектирование параллельно l отображает тетраэдр на параллелограмм. Таких проектирований три.

164. Пусть плоскость σ_0 перпендикулярна l и $\sigma_0 \cap l = S_0$ Введем обозначения: $\sigma_0 \cap \alpha = \tilde{a}$, $\sigma_0 \cap \beta = \tilde{b}$, $\sigma_0 \cap \alpha_1 = \tilde{a}_1$, $\sigma_0 \cap \beta_1 = \tilde{b}_1$. Рассмотрим эллипс, сопряженные диаметры которого лежат на указанных прямых, и построим главные его диаметры. Искомая плоскость проходит через бо́льшую ось эллипса. Она наклонена к σ_0 под углом, косинус которого равен отношению малой оси эллипса к большой.

Чтобы построить прямые m и n, на которых лежат главные диаметры эллипса, необходимо прямые $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_1$ спроектировать параллельно на вспомогательную плоскость σ_0' на две пары перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке S_0' (см. задачу 160). Приняв точку $O \in l_1 = \sigma_0 \cap \sigma_0'$, равноудаленную от S_0 и S_0', за центр сферы радиуса OS_0, найдем ее точки пересечения M и N с прямой l_1, после чего строим прямые $(S_0M) = m$ и $(S_0N) = n$.

165. Через две скрещивающиеся прямые проведем пару параллельных плоскостей и построим для них среднюю плоскость α; аналогично построим среднюю плоскость β, соответствующую другой паре скрещивающихся прямых. Если плоскости α и β пересекаются по прямой q, то любая точка $Q \in q$ является центром искомого параллелограмма. Возможны другие решения, если данные четыре прямые объединить в пары по-иному.

166. Через (AB) и (A_1B_1) проведем параллельные плоскости γ и γ_1, через (BC) и (B_1C_1) — параллельные плоскости α и α_1, через (CA) и (C_1A_1) — параллельные плоскости β и β_1. Если $\alpha \cap \beta \cap \gamma = S$ и $\alpha_1 \cap \beta_1 \cap \gamma_1 = S_1$, то точки S и S_1 искомые.

167. Построим след M_0 прямой AB в плоскости α, содержащей прямые c и d. Рассмотрим множество таких точек $P \in \alpha$, чтобы $\overrightarrow{M_0A} \cdot \overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0P} \cdot \overrightarrow{M_0Q}$, где $Q = d \cap (M_0P)$. Это множество есть окружность; ее точки пересечения D и C с прямой c искомые.

168. Поворотами в двух возможных направлениях вокруг (AB), (BC) и (CA) отобразим соответственно грани ABD, BCD и CAD в плоскость ABC. Возможны восемь различных случаев. Если D_1, D_2, D_3 — образы вершины D в одном из указанных случаев, то центр окружности, описанной вокруг треугольника $D_1D_2D_3$, есть одна из восьми возможных точек. Число этих точек может быть 5, 6 и 7. (См. задачу 189.)

169. Если прямая l пересекает плоскость окружности в точке M, то точка касания сферы и прямой l удалена от M на расстояние, равное длине отрезка касательной, проведенной из точки M к окружности. Задача имеет не более двух решений.

170. Если T — точка касания сферы и плоскости, а A_1, B_1, C_1 — следы прямых BC, CA, AB (A, B и C — данные три точки) в плоскости, то $|A_1T|^2 = |A_1B| \cdot |A_1C|$, $|B_1T|^2 = |B_1C| \cdot |B_1A|$, $|C_1T|^2 = |C_1A| \cdot |C_1B|$. Точка T есть общая точка трех окружностей с центрами A_1, B_1 и C_1 с радиусами $\sqrt{|A_1B| \cdot |A_1C|}$, $\sqrt{|B_1C| \cdot |B_1A|}$, $\sqrt{|C_1A| \cdot |C_1B|}$.

171. Построим общий перпендикуляр MN данных прямых. Если $|MN| = d$, то $|AB| = 2|MA| = d\sqrt{2}$. Отсюда $|MA| = |MB| = |NC| = |ND| = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

172. У к а з а н и е. Через каждые две прямые проведите пару параллельных плоскостей.

173. Построим плоскость α_1, пересекающую сферу σ_1 по окружности, конгруэнтной окружности, по которой какая-то плоскость α_2 пересекает сферу σ_2. Далее, построим сферу σ_1', концентрическую с σ_1 и касающуюся α_1, и сферу σ_2', концентрическую с σ_2 и касающуюся α_2. Плоскость, касательная к σ_1' и σ_2',— искомая.

174. У к а з а н и е. См. решения задач 53 и 173. Задача имеет в общем случае не более 8 решений.

175. Построим плоскость α, проходящую через центры данных сфер и пересекающую сферы по трем окружностям. Центры гомотетий этих трех окружностей, взятых по две, лежат по три на четырех прямых. Через каждую из этих прямых проходят по две плоскости, касательные к данным сферам.

176. Центр искомой сферы принадлежит пересечению двух плоскостей симметрии прямых AB и BC, двух плоскостей симметрии прямых BC и CD и двух плоскостей симметрии прямых CD и DA. Эти плоскости пересекаются в общем случае в восьми точках. Задача имеет в общем случае восемь решений. Если в частном случае решений больше 8, то их бесконечное множество.

177. Рассмотрим середины A_0, B_0, C_0 сторон треугольника ABC. Треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику $A_0B_0C_0$, M — центр гомотетии. Но центры гомотетии треугольников ABC и $A_0B_0C_0$ совпадают с G. При гомотетии центроид отображается на центроид. Следовательно, M, G и G_1 — коллинеарные точки.

178. Указание. Проведите через каждые две прямые пару параллельных плоскостей и рассмотрите образовавшийся параллелепипед, центр которого совпадает с искомой точкой M.

179. Прямые A_2B_1 и A_3C_1 лежат в одной плоскости. Точно так же лежат в одной плоскости соответственно пары прямых A_3C_1 и B_3C_2, B_3C_2 и A_2B_1. Поскольку эти прямые попарно пересекаются и не лежат все в одной плоскости, то они имеют общую точку или параллельны.

180. Через две окружности можно провести единственную сферу. Третья окружность пересекает первые две в четырех точках, поэтому она лежит на сфере.

181. Зафиксируем на окружности точку M_0 и проведем сферу σ_1 через окружность ω и точку S. Плоскость α, проходящая через прямую SM_0, пересекает сферы σ и σ_1 по двум окружностям, а окружность ω в точке M_1. Если (SM_0) и (SM_1) пересекают σ в точках N_0 и N_1, то прямая N_0N_1 параллельна касательной к σ_1 в точке S. Отсюда следует, что все хорды N_0N_1 лежат в одной плоскости, а точка N_1 — принадлежит окружности ω_1.

183. Пусть $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [DA]$ — точки касания сферы и отрезков AB, BC, CD, DA. Если $(MN) \cap (AC) = S$, то $|AM|:|NC| = |AS|:|SC|$. Аналогично, если $(PQ) \cap (AC) = S_1$, то $|AQ|:|CP| = |AS_1|:|S_1C|$. Но левые части пропорций равны, поэтому равны и правые, т. е. $S = S_1$ (обе точки лежат вне отрезка AC).

184. Указание. Рассмотрите эту задачу для точки окружности, описанной вокруг треугольника ABC, и примените теорему о трех перпендикулярах.

185. Заметьте, что высоты параллелепипеда равны. Постройте сферу, касающуюся двух пар противолежащих граней параллелепипеда и пятой грани. Убедитесь, что эта сфера касается и шестой грани. Учитывая, что диагональное сечение лежит в общей плоскости симметрии для плоскостей граней, проходящих через ребро и противолежащее ему ребро параллелепипеда, убедитесь, что две плоскости симметрии двух диагональных сечений, не пересекающиеся по диагонали параллелепипеда, перпендикулярны.

186. Если перпендикуляры, проведенные через вершины A и B тетраэдра $ABCD$ к плоскостям BCD и CDA, пересекаются, то $(AB) \perp (CD)$. Но в таком случае и перпендикуляры, проведенные через C и D к плоскостям DAB и ABC, также перпендикулярны.

187. Для тетраэдра $ABCD$ из условия задачи следует (см. задачу 186):

$$[AB] \perp [CD], \ [BC] \perp [AD], \ [CA] \perp [BD].$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что каждые три перпендикуляра, проведенных через вершины тетраэдра к плоскостям противолежащих граней, пересекаются в одной точке. Поэтому все четыре перпендикуляра пересекаются в одной точке.

188. Пусть $(a, c) \cap (b, d) = m$, $(a, d) \cap (b, c) = n$. Пересечем данные прямые плоскостью σ, параллельной плоскости (m, n). Точки $A = \sigma \cap a$, $B = \sigma \cap b$, $C = \sigma \cap c$, $D = \sigma \cap d$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$, так как $(AC) \parallel (BD) \parallel m$, $(BC) \parallel (AD) \parallel n$. Треугольники ABS и CDS прямоугольные, поэтому $|SM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CD|$, где M—центр параллелограмма. Из равенства $|AB| = |CD|$ следует, что $ABCD$ — прямоугольник, т. е. $(AC) \perp (BC)$, поэтому $m \perp n$.

189. Для каждой пары плоскостей граней тетраэдра проведем две плоскости симметрии; они пересекаются в 8 точках. Эти точки — центры 8 сфер. Если две грани равновелики, то одна из точек пересечения не существует и число сфер становится равным 7. В этом случае точки D_1, D_2, D_3 (задача 168) принадлежат одной прямой. Аналогично выясняются и оставшиеся случаи.

190. Указание. Проведите плоскость, перпендикулярную оси конуса, и из его вершины S спроектируйте ломаную $ABCD$ на эту плоскость. Полученный четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является описанным. Точки касания P_1, Q_1, R_1, T_1 его с окружностью являются проекциями точек касания P, Q, R, T с конусом. Используя теорему Менелая для четырехугольника ABB_1A_1 и секущей PS, получите

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|SB_1|}{|BS|} \cdot \frac{|A_1P_1|}{|P_1B_1|} \cdot \frac{|SA_1|}{|A_1S|}.$$

Запишите аналогичные равенства, вычисляя отношения $\frac{|BQ|}{|QC|}$, $\frac{|CR|}{|RD|}$, $\frac{|DT|}{|TA|}$. На основании задачи 44 гл. II сделайте необходимые заключения.

191. Указание. Воспользуйтесь задачей 190.

192. Примем радиус сферы за единицу. Пусть P — точка касания сферы и некоторой прямой c, пересекающей данные скрещивающиеся прямые a и b соответственно в точках A_1 и B_1; единичные направляющие векторы прямых a и b обозначим через $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} + \mu\vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + k\overrightarrow{OB_1}}{1+k}$, где A и B — точки касания сферы с прямыми a и b.

Учитывая, что $|A_1A| = |A_1B| = |\lambda|$, $|B_1B| = |B_1P| = |\mu|$, имеем: $|k| = \left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$, т. е. $k = \pm\frac{\lambda}{\mu}$.

В случае, когда $k = \frac{\lambda}{\mu}$, вектор $\overrightarrow{OP}$ запишется так:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \lambda\mu(\vec{a} + \vec{b})}{\lambda + \mu}.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{a} - \overrightarrow{OB} - \mu\vec{b}$ перпендикулярны, то из равенства нулю их скалярного произведения выражаем значение λ через μ:

$$\lambda = \frac{1 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OA}\cdot\vec{b}}{\mu(1+\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{a}\cdot\overrightarrow{OB}}$$

и

$$\lambda + \mu = \frac{1 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OA}\cdot\vec{b} + \mu^2(1+\vec{a}\cdot\vec{b}) + \mu\vec{a}\cdot\overrightarrow{OB}}{\mu(1+\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{a}\cdot\overrightarrow{OB}}.$$

При $\mu = -\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{OB}}{1+\vec{a}\cdot\vec{b}}$ значение λ не существует. В этом случае касательная c параллельна прямой a, значение λ стремится к бесконечности, а точка P займет положение точки P_0, причем

$$\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OB} - \frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{OB}}{1+\vec{a}\cdot\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Вектор $\overrightarrow{OP}$ можно разложить по некомпланарным векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP_0}$, т. е.

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + l\left(\overrightarrow{OB} - \frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{OB}}{1+\vec{a}\cdot\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})\right).$$

Но

$$\overrightarrow{OP} = \frac{(\mu^2(1+\vec{a}\cdot\vec{b}) + \mu\vec{a}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA} + (1 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OA}\cdot b)\overrightarrow{OB}}{N} +$$

$$+\frac{\mu(1 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OA}\cdot\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})}{N},$$

где $N = 1 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OA}\cdot\vec{b} + \mu\vec{a}\cdot\overrightarrow{OB} + \mu^2(1+\vec{a}\cdot\vec{b})$. В силу теоремы о единственности разложения вектора по трем некомпланарным векторам, получаем:

$$m = \frac{\mu^2(1+\vec{a}\cdot\vec{b}) + \mu\vec{a}\cdot\overrightarrow{OB}}{N},\quad n + l = \frac{1 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OA}\cdot\vec{b}}{N},$$

откуда находим, что сумма $m+n+l$ коэффициентов разложения вектора $\overrightarrow{OP}$ по $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP_0}$ равна единице. Это означает, что точки P, A, B, P_0 принадлежат одной плоскости α. Плоскость α пересекает сферу по окружности. Следовательно, искомая точка P принадлежит окружности.

Для случая, когда $k = -\dfrac{\lambda}{\mu}$, получаем еще одну окружность.

194. Указание. Докажите, что прямая, проходящая через середины двух противолежащих ребер тетраэдра, является для этих ребер общим перпендикуляром, т. е. осью симметрии тетраэдра. Отсюда следует, что две другие пары противоположных ребер попарно равны.

195. Через противоположные ребра тетраэдра проведем пары параллельных плоскостей. Полученный параллелепипед прямоугольный.

Если x, y, z — его измерения, то

$$y^2+z^2=a^2,\quad z^2+x^2=b^2,\quad x^2+y^2=c^2,$$

откуда

$$x=\sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}},\quad y=\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}},\quad z=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}.$$

Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}xyz=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}.$$

196. Если a, b, c — длины ребер параллелепипеда, имеющих общую вершину, то сумма квадратов всех ребер равна $4(a^2+b^2+c^2)$, сумма квадратов диагоналей всех граней равна $8(a^2+b^2+c^2)$, сумма квадратов всех диагоналей равна $4(a^2+b^2+c^2)$. Искомая сумма равна $16(a^2+b^2+c^2)$.

197. Воспользуемся формулой:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sin\gamma}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

где φ — угол наклона ребра к плоскости плоского угла трехгранного угла. Учитывая условие задачи, получаем $\cos\varphi=0$, т. е. $\alpha=\beta=90°$, γ — принимает любые значения.

198. Указание. Воспользуйтесь формулой из задачи 197. Вычислите высоту тетраэдра, а затем и объем тетраэдра:

$$V=\frac{abc}{6}\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma},$$

где a, b, c — длины трех ребер, имеющих общую вершину, α, β, γ — плоские углы, определяемые этими ребрами. Далее, воспользуйтесь теоремой косинусов для треугольника.

199. $V=abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. Указание. Воспользуйтесь формулой, приведенной при решении задачи 198.

200. Множества всех точек D, для которых $\frac{|CD|}{|AD|}=\frac{|BC|}{|AB|}$, есть сфера. Аналогично, множество всех точек D, для которых $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$, есть также сфера. Обе сферы пересекаются по окружности.

201. Имеем:

$$S_1=S_2\cos(\widehat{CD})+S_3\cos(\widehat{DB})+S_4\cos(\widehat{BC}),$$
$$S_2=S_1\cos(\widehat{CD})+S_3\cos(\widehat{DA})+S_4\cos(\widehat{AC}),$$
$$S_3=S_1\cos(\widehat{BD})+S_2\cos(\widehat{AD})+S_4\cos(\widehat{AB}),$$
$$S_4=S_1\cos(\widehat{BC})+S_2\cos(\widehat{AC})+S_3\cos(\widehat{AB}).$$

После умножения этих равенств соответственно на S_1, S_2, S_3 и S_4 и последующего сложения получим искомую зависимость.

202. Если D_1 — диаметрально противоположная точка для D, точка O — центр сферы радиуса R, S — площадь грани тетраэдра, d — расстояние от D_1 до плоскостей BCD, CDA, DAB, $d_1 = \frac{2}{3}R$ — до плоскости ABC, то $3d \cdot S - \frac{2}{3}R \cdot S = \frac{4}{3}R \cdot S$. Отсюда $d = \frac{2}{3}R = d_1$.

203. В грани BCD: $\varphi_{23} + \varphi_{34} + \varphi_{42} = 360°$;
в грани CDA: $\varphi_{34} + \varphi_{41} + \varphi_{13} = 360°$;
в грани DAB: $\varphi_{41} + \varphi_{12} + \varphi_{24} = 360°$;
в грани ABC: $\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31} = 360°$.
Отсюда имеем: $\varphi_{12} = \varphi_{34}$, $\varphi_{23} = \varphi_{41}$, $\varphi_{31} = \varphi_{42}$.

204. Указание. Впишите в две грани окружности. Воспользуйтесь свойством касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки.

205. Указание. Воспользуйтесь формулой, приведенной в задаче 201.

206. Указание. Убедитесь в том, что

$$|A_1B_1| : |B_1C_1| : |C_1A_1| = |AB| \cdot |DC| : |BC| \cdot |DA| : |CA| \cdot |BD|,$$

для чего рассмотрите три пары подобных треугольников.

207. Указание. См. решение задачи 206.

208. Так как $\cos\widehat{A} < 1$, то

$$\cos(\beta+\gamma) < \cos\alpha < \cos(\beta-\gamma).$$

Если $\beta+\gamma \leqslant 180°$, то $\alpha+\beta+\gamma \leqslant 360°$. Если же $\beta+\gamma > 180°$, то $360° - (\beta+\gamma) < 180°$, $\cos(360° - (\beta+\gamma)) < \cos\alpha$ и $360° - (\beta+\gamma) > \alpha$, откуда $\alpha+\beta+\gamma < 360°$.

209. 1) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$, $0 < x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}m$;

2) $S = 9mx - 3\sqrt{3}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m^2$, $\frac{\sqrt{3}}{3}m \leqslant x \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}m$;

3) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}(m\sqrt{3} - x)^2$; $\frac{2}{3}m\sqrt{3} \leqslant x < m\sqrt{3}$.

210. Оба сечения представляют собой параллелограммы с равными углами, поэтому их площади относятся как произведения прилежащих сторон. Но эти произведения равны между собой.

Глава IX

1. Воспользуемся известной формулой $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$, тогда будем иметь: $\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$. Отсюда $(a-b)^2 + 2ab(1-\sin\widehat{C}) = 0$. Последнее возможно, если

$$\begin{cases} a - b = 0, \\ 1 - \sin\widehat{C} = 0. \end{cases}$$

Итак, $a = b$, $\widehat{C} = 90°$, следовательно $\widehat{A} = \widehat{B} = 45°$.

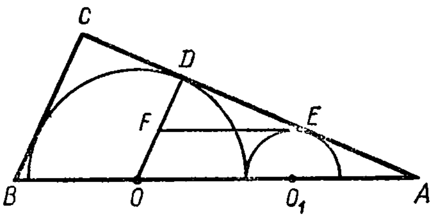

Рис. 101

2. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle ACB$ прямой, O и O_1 — центры окружностей радиусов R и r; D и E — точки касаний окружностей катета CA (рис. 101). Проведем $(EF) \parallel (AB)$ и обозначим $\widehat{BAC} = \alpha$. Тогда из $\triangle FDE$ имеем

$$\sin\alpha = \frac{R-r}{R+r}. \qquad (1)$$

Заметив, что $|CD| = R$, и обозначив $|AC| = b$, получим из $\triangle ODA$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{b-R}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует:

$$1 + \left(\frac{b-R}{R}\right)^2 = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2,$$

откуда, решая относительно b, получим

$$b = r + \frac{2R}{R-r}\sqrt{Rr}.$$

Теперь можно найти другой катет и гипотенузу.

3. Заметим, прежде всего, что если один из углов α или β равен 0°, то $\widehat{C}$ может принимать любые значения, заключенные между 0 и π, поэтому будем считать, что углы α, β отличны от 0. Пусть в треугольнике ABC (рис. 102) $|AC| > |BC|$, $[CD]$ — высота, $[CE]$ — биссектриса, $[CF]$ — медиана; тогда $|AD| - |BD| =$

$$= 2|FD|, \text{ т. е. } |CD| \operatorname{tg}\left(\frac{\widehat{C}}{2} + \alpha\right) - |CD| \operatorname{tg}\left(\frac{\widehat{C}}{2} - \alpha\right) =$$
$$= 2|CD| \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \text{ или}$$
$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\widehat{C} + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

откуда

$$\widehat{C} = \arccos\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

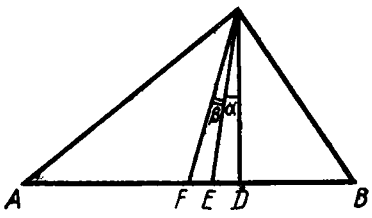

Рис. 102

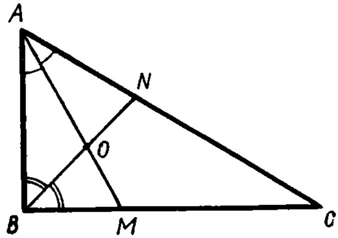

Рис. 103

4. Пусть $|AB| = x$, $|BC| = y$, $|AC| = z$ (рис. 103). Из треугольников ABM и ABN по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника получаем:

$$\frac{|BM|}{|AB|} = \frac{|MO|}{|AO|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|NO|}{|BO|} = \sqrt{3} - 1.$$

Отсюда

$$|BM| = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad |AN| = x(\sqrt{3} - 1).$$

Из треугольника ABC имеем: $\frac{|AN|}{|CN|} = \frac{|AB|}{|BC|}$, $\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|AB|}{|AC|}$,

или $$\begin{cases} \dfrac{x(\sqrt{3}-1)}{z - x(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{x}{y\sqrt{3} - x} = \dfrac{x}{z}. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим: $y = x\sqrt{3}$, $z = 2x$. Отсюда следует, что $x^2 + y^2 = z^2$, и по теореме, обратной теореме Пифагора, заключаем, что $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\widehat{BAC} = \arcsin \frac{y}{z} = \frac{\pi}{3}$, тогда $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.

5. $$\widehat{B} = \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\pi}{2} \sin\alpha - \cos\alpha\right),$$
$$\widehat{C} = \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\pi}{2} \sin\alpha - \cos\alpha\right),$$
$$0 < \alpha \leqslant 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{\pi}.$$

6. $\frac{9\sqrt{3}}{4} r^2$. Указание. Докажите, что $\widehat{DKE} = \widehat{CEK}$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Выразив углы DKE и DAB через угол AMB, докажите, что $\widehat{DAB} = \widehat{DKE}$.

7. Так как точки K и E лежат на пересечении биссектрис, то они равноудалены от прямых AD и BC и, следовательно, $[MN]$ — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 104).

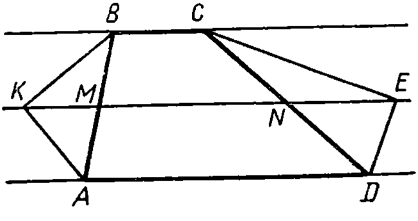

Рис 104

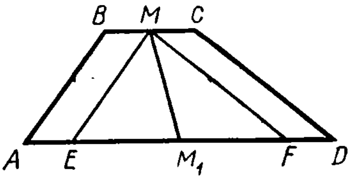

Рис. 105

Треугольники ABK и DCE прямоугольные, откуда $|AB| = 2|KM|$ и $|CD| = 2|EN|$. Периметр трапеции

$$P_{ABCD} = |AD| + |BC| + |AB| + |CD| = 2|MN| + 2|KM| + 2|EN| = 2 \cdot 2a = 4a.$$

8. Пусть M и M_1 — середины оснований BC и AD трапеции (рис. 105). Проведя $(ME) \parallel (AB)$ и $(MF) \parallel (CD)$, получим $|M_1E| = |M_1F| = \frac{1}{2}(|AD| - |BC|)$. Так как по условию и $|MM_1| = \frac{1}{2}(|AD| - |BC|)$, то $|EM_1| = |M_1F| = |M_1M|$ и поэтому $\widehat{EMF} = 90°$ (опирается на диаметр окружности, описанной около $\triangle EMF$). Следовательно, искомый угол тоже равен 90°. **9.** $8a$.

10. Так как длина каждой стороны больше R, то число сторон многоугольника меньше шести. Покажем, что оно больше четырех. Известно, что среди вписанных в окружность треугольников наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник, площадь которого равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Так как $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 < 2R^2$, то никакой вписанный треугольник не удовлетворяет условию задачи.

Среди выпуклых четырехугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат, площадь которого равна $2R^2$. Следовательно, ни один из вписанных четырехугольников также не удовлетворяет условию задачи.

Нетрудно проверить, что, например, правильный пятиугольник удовлетворяет всем условиям задачи.

11. Через точку B проведем прямую, параллельную диагонали AC, до пересечения с прямой AD в точке M (рис. 106). Тогда по теореме о свойстве катета прямоугольного треугольника имеем:

$$|BD| = \sqrt{|DM| \cdot |AD|}, \quad |BM| = \sqrt{|DM| \cdot |AM|}.$$

Учитывая, что $|AC| = |BM|$, $|AM| = |BC|$, находим:

$$\frac{|BD|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BM|} = \frac{\sqrt{|DM| \cdot |AD|}}{\sqrt{|DM| \cdot |AM|}} = \sqrt{\frac{|AD|}{|BC|}} = \sqrt{k}.$$

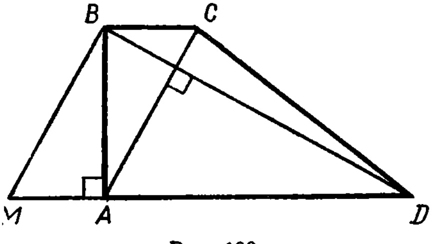

Рис. 106

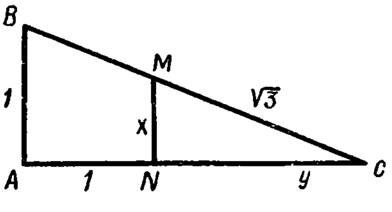

Рис. 107

12. Обозначим $|MN|$ через x, $|CN|$ через y (рис. 107). Тогда легко получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ \dfrac{y+1}{y} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

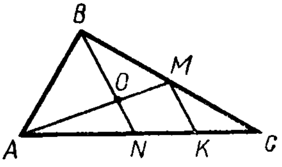

Рис. 108

Из второго уравнения этой системы находим: $y - x = xy$. Возведя в квадрат, получим: $x^2 + y^2 - 2xy = x^2y^2$. Вычитая из этого уравнения первое уравнение системы, будем иметь: $(xy)^2 + 2xy - 3 = 0$, $xy = -1 \pm 2$. Учитывая, что $x > 0$, $y > 0$, получаем систему $\begin{cases} xy = 1, \\ y - x = 1 \end{cases}$, решая которую, находим $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

13. $h_1 = \frac{25\sqrt{2}}{2}$ *см*. Указание. Воспользуйтесь тем, что площади подобных треугольников относятся как квадраты высот.

14. Пусть h_1 и h_2 — расстояния от точки пересечения диагоналей до оснований трапеции, а x_1 и x_2 — длины отрезков, на которые делит точка пересечения диагоналей искомый отрезок. Тогда из подобия треугольников следует:

$$\frac{x_1}{b} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad \frac{x_2}{b} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}.$$

Отсюда находим $x_1 + x_2 = \dfrac{2ab}{a+b}$.

15. Проведем $(MK) \parallel (BN)$ (рис. 108). Из подобия треугольников BCN и CKM находим $|CK|$:

$$|CK| = |CN| \cdot \frac{|CM|}{|BC|} = |CN| \cdot \frac{|CM|}{|CM| + |BM|} = |CN| \cdot \frac{m}{1+m}.$$

Следовательно,

$$|KN| = |CN| - |CK| = |CN|\left(1 - \frac{m}{1+m}\right) = |CN| \frac{1}{1+m}.$$

Из подобия треугольников AON и AMK находим искомые отношения $\dfrac{|AO|}{|MO|} = \dfrac{|AN|}{|KN|} = \dfrac{|AN|}{|CN|} \cdot \dfrac{1+m}{m} = \dfrac{n}{m}(1+m)$ и аналогично $\dfrac{|BO|}{|NO|} = \dfrac{m}{n}(1+n)$. **16.** $r = 24$ *см*.

17. Искомая площадь равна площади равностороннего треугольника (с вершинами в центрах больших окружностей) без половины площадей большего круга и площади круга с радиусом r, т. е. $S = R^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi R^2 - \pi r^2$. Из соотношения $r + R = \dfrac{R}{\cos 30^\circ}$, определив R, окончательно получим: $S = r^2\left((2\sqrt{3} + 3)^2 \times \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) - \pi\right)$. **18.** 6 *см*. **19.** $r = \dfrac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$.

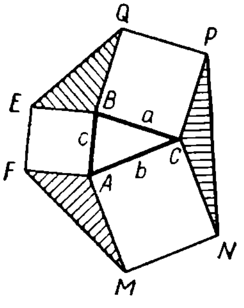

Рис. 109

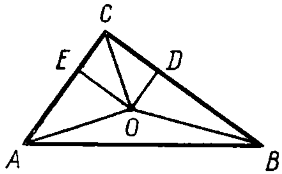

Рис. 110

20. Половина большей диагонали ромба равна $\frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r$. Сторона ромба равна $\frac{2r}{\cos 30^\circ} = \frac{4r\sqrt{3}}{3}$. **21.** 8 *см*, 2 *см* и 5 *см*.

22. $S_{EFMNPQ} = S_{ABEF} + S_{BCPQ} + S_{CAMN} + S_{ABC} + S_{EBQ} + S_{CPN} + S_{MAF}$.

Покажем, что треугольники ABC, NCP, EBQ и MAF (рис. 109) равновелики; $S_{NCP} = \frac{1}{2}ab\sin \widehat{NCP} = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - \widehat{ACB}) = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{ACB} = S_{ABC}$. Аналогично $S_{MAF} = S_{ABC}$, $S_{EBQ} = S_{ABC}$, $S_{EFMNPQ} = c^2 + a^2 + b^2 + 2ab\sin\widehat{ACB}$.

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ACB}$. Поэтому $S_{EFMNPQ} = 2a^2 + 2b^2 + 2ab(\sin\widehat{ACB} - \cos\widehat{ACB}) = 2(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab\sin(\widehat{ACB} - 45^\circ))$. Площадь шестиугольника будет наибольшей, когда $\sin(\widehat{ACB} - 45^\circ)$ принимает наибольшее значение, равное 1, что имеет место при $\widehat{ACB} = 135^\circ$.

Итак, максимальное значение площади шестиугольника $2(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})$.

23. Пусть x — длина искомой боковой стороны. Так как угол при основании равен $\frac{\pi}{6}$, то высота трапеции равна $2r = \frac{x}{2}$, где r — радиус вписанного круга. Так как в данную трапецию может быть вписан круг, то сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований. Соединим центр вписанного круга O со всеми вершинами трапеции. Высоты полученных треугольников, проведенные через точку O, равны r. Тогда, если $[AB]$ — боковая сторона, $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{4}S$, так как трапеция равнобочная. С другой стороны, $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}xr$. Приравнивая выражения для площади $\triangle AOB$, получим $2S = x^2$. Откуда $x = \sqrt{2S}$.

24. Пусть r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, $2a$ — основание треугольника, l — боковая сторона.

Тогда $\frac{r}{a} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{a}{l} = \cos\alpha$, $R = \frac{l}{2\sin\alpha}$. $\frac{r}{R} = \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

25. Треугольники AOC и ABC (рис. 110) имеют равные основания, а площади их относятся как $1:3$, следовательно, $|OE| = \frac{1}{3}|BC|$. Аналогично $|OD| = \frac{1}{3}|AC|$. Отсюда следует

$|AO|^2 = \frac{4}{9}|AC|^2 + \frac{1}{9}|BC|^2$, $|OB|^2 = \frac{1}{9}|AC|^2 + \frac{4}{9}|BC|^2$, $|OC|^2 = |OD|^2 + |OE|^2 = \frac{1}{9}(|AC|^2 + |BC|^2)$, $|OC| = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

26. Пусть вершины вписанного квадрата делят стороны описанного квадрата на отрезки a и b, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. По условию $a^2 + b^2 = \frac{2}{3}(a+b)^2$ или $(a+b)^2 - 2ab = \frac{2}{3}(a+b)^2$. Подставив значение $\frac{a}{b}$, получим $\operatorname{tg}^2\alpha - 4\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$, откуда $\alpha_1 = \operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})$.

27. $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 4$. **28.** 6.

29. Проведем через середину K стороны AB прямую, параллельную (CD), и пусть M и N — точки ее пересечения с (BC) и (AD). Тогда треугольники KBM и KNA равновелики, и поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна площади параллелограмма $MNDC$, т. е. равна ab.

30. Обозначим основание первого треугольника через x, тогда основание второго будет $x - 10$, и поэтому $x > 10$ (1). Высота первого треугольника будет $\frac{50}{\frac{x}{2}} = \frac{100}{x}$, а второго $\frac{100}{x-10}$. Согласно условию задачи имеем: $\frac{100}{x-10} - \frac{100}{x} \geqslant \frac{5}{6}$. Учитывая неравенство (1), получим $x^2 - 10x - 1200 \leqslant 0$ (2), или $(x+30)(x-40) \leqslant 0$, откуда $-30 \leqslant x \leqslant 40$. Если учесть теперь ограничение (1), то получаем ответ:

$$10 < x \leqslant 40.$$

31. $$S = \frac{4R^2\left(1 + \frac{q}{p}\right)\sin\varphi\cos^3\varphi}{4 + \left(\frac{q}{p} + 1\right)\left(\frac{q}{p} - 3\right)\sin^2\varphi}.$$

32. Пусть длины диагоналей ромба равны $2a$ и $2b$, радиус вписанного круга — r, а острый угол 2α. Тогда $S = \pi r^2$, $a = \frac{r}{\cos\alpha}$, $b = \frac{r}{\sin\alpha}$, $Q = 2ab$. Исключая из этих соотношений a, b и r, получим $\sin 2\alpha = \frac{4S}{\pi Q}$, откуда $2\alpha = \arcsin\frac{4S}{\pi Q}$.

33. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 111). Диагонали AC и BD четырехугольника разбивают параллелограмм $EFKL$ на четыре параллелограмма, а диагональ каждого из этих параллелограммов делит его на два конгруэнтных треугольника.

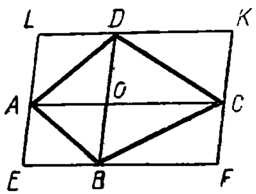

Рис. 111

34. Любым вектором, изображаемым направленным отрезком: а) начало которого лежит на прямой a, конец — на прямой b; б) с началом на прямой b и концом на прямой a; в) коллинеарным данным прямым.

35. Указание. Сделайте крупный чертеж. Обозначьте на нем середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно через M, T, P, K, а середину диагонали AC через H. Чтобы доказать, что площадь одной из четырех полученных частей (например, $MOKA$) равна $\frac{1}{4}$ площади всего четырехугольника, докажите, что четырехугольники $MOKA$ и $MHKA$ равновелики.

36. Указание. Чтобы решить эту задачу, нужно доказать: 1) если площади треугольников ABO и DOC равны, то прямые BC и AD параллельны; 2) если прямые BC и AD параллельны, то площади треугольников AOB и DOC равны.

37. Пусть $(AB) \parallel (A_1B_1)$, $(BC) \parallel (B_1C_1)$, $(CD) \parallel (C_1D_1)$, $(DE) \parallel (D_1E_1)$. Требуется доказать, что $(A_1E) \parallel (AE_1)$. Действительно, $\widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$ и $\widehat{CDE} = \widehat{C_1D_1E_1}$ как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, $\overset{\smile}{AB_1C} = \overset{\smile}{A_1BC_1}$, откуда $\overset{\smile}{ABC} = \overset{\smile}{A_1B_1C_1}$. Аналогично докажем, что $\overset{\smile}{CDE} = \overset{\smile}{C_1D_1E_1}$. Складывая полученные равенства, имеем $\overset{\smile}{ACE} = \overset{\smile}{A_1C_1E_1}$. Проведя прямую EE_1, заметим, что $\widehat{A_1EE_1} = \widehat{AE_1E}$.

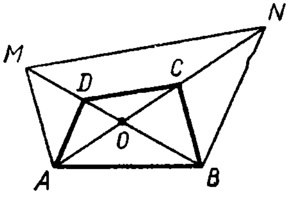

Рис. 112

Из равенства величин этих углов следует параллельность сторон A_1E и AE_1.

38. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (рис. 112). Из условия задачи следует, что

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OM|}{|OB|} \text{ и } \frac{|OA|}{|ON|} = \frac{|OD|}{|OB|}.$$

Разделив первое равенство на второе, получим:

$$\frac{|ON|}{|OC|} = \frac{|OM|}{|OD|}.$$

Откуда и следует, что $(MN) \parallel (DE)$.

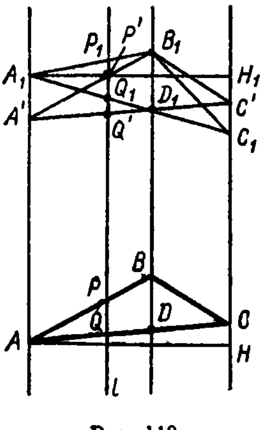

Рис. 113

39. Из равновеликости треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 113) следует, что $|BD| \cdot |AH| = |B_1D_1| \cdot |A_1H_1|$, где $(AH) \parallel (A_1H_1)$ и $(AH) \perp (AA_1)$. Тогда $|BD| = |B_1D_1|$ и, следовательно, треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ также равновелики. Выполнив перенос $\overrightarrow{BB_1}$, отображающий отрезок BD на отрезок B_1D_1, получим, что

$$\frac{|P_1Q_1|}{|B_1D_1|} = \frac{|A_1P_1|}{|A_1B_1|} = \frac{|A'P'|}{|A'B_1|} =$$

$$= \frac{|P'Q'|}{|B_1D_1|} \Rightarrow |P_1Q_1| = |P'Q'|.$$

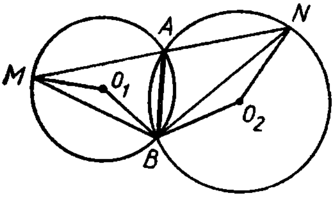

Рис. 114

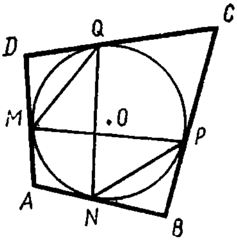

Рис. 115

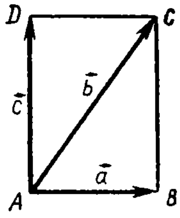

Рис. 116

Так как $|P'Q'| = |PQ|$, то $|PQ| = |P_1Q_1|$.

40. Пусть $O_1\widehat{M}B = \alpha$ и $O_2\widehat{N}B = \beta$ (рис. 114), тогда $B\widehat{A}M = 90° - \alpha$ и $B\widehat{A}N = 90° + \beta$. Но сумма этих углов равна 180°, $90° - \alpha + 90° + \beta = 180°$, откуда $\alpha = \beta$.

41. Указание. Пусть A — общая точка кругов. Соедините A с центрами кругов и рассмотрите наименьший из образовавшихся углов. Покажите, что отрезок, соединяющий соответствующие центры O_1 и O_2, лежит целиком в одном из кругов.

42. Обозначим окружности через c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. Пусть окружности c_1, c_2, c_3, c_4 пересекаются в точке A, окружности c_1, c_2, c_3, c_5 — в точке B, окружности c_1, c_2, c_4, c_5 — в точке C. Если A, B, C — различные точки, то окружности c_1 и c_2 имеют три общие точки и поэтому совпадают. Но тогда общая точка окружностей c_1, c_3, c_4, c_5 принадлежит и c_2. Если же, например, точки A и C совпадают, то общей для всех окружностей будет точка A.

43. *Достаточность.* Пусть $\widehat{B} = \widehat{D}$ (рис. 115). Так как по свойству касательных $|BP| = |BN|$, $|DM| = |DQ|$, то в равнобедренных треугольниках $B\widehat{N}P = D\widehat{M}Q$ и, значит, $N\overset{\smile}{P} = M\overset{\smile}{Q}$. Отсюда $N\overset{\smile}{PQ} = P\overset{\smile}{QM}$ и, следовательно, $|NQ| = |MP|$.

Необходимость. Если $|NQ| = |MP|$, то $N\overset{\smile}{PQ} = P\overset{\smile}{QM}$ и $\overset{\smile}{NP} = \overset{\smile}{MQ}$, а тогда $|NP| = |MQ|$. Равнобедренные треугольники NBP и MQD конгруэнтны по трем сторонам, следовательно, $\widehat{B} = \widehat{D}$.

44. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ (рис. 116). Достаточно доказать, что $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$. Согласно условию задачи $(\vec{a} - \vec{b}) \times \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, $\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$. Отсюда $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2$, $\vec{c}^2 = \vec{c} \cdot \vec{b}$, а, следовательно, $(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, т. е. $\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} = 0$.

45. 1) Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм, вписанный в данный четырехугольник $LMNK$, точка O — центр симметрии

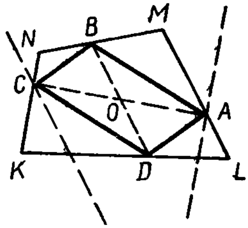

Рис. 117

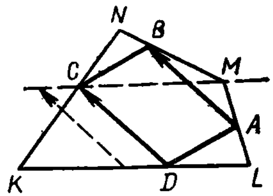

Рис. 118

параллелограмма, $B \in [MN]$, $D \in [KL]$ — данные точки (рис. 117). Очевидно, $A = (ML) \cap Z_O((NK))$, $C = (NK) \cap Z_O((ML))$.

2) Пусть $A \in [LM]$, $B \in [MN]$ — данные точки (рис. 118). Так как $\overrightarrow{AB}(A) = B$, $\overrightarrow{AB}(D) = C$, то $C = (KN) \cap \overrightarrow{AB}((KL))$.

Примечание. В этой задаче предполагается, что вершины искомого параллелограмма могут принадлежать сторонам четырехугольника или их продолжениям.

46. Из конгруэнтности треугольников DAR и ASB (рис. 119) следует, что $\angle DAR \cong \angle ABS$, поэтому $\widehat{ASK} + \widehat{SAK} = 90°$, и, следовательно, все углы четырехугольника $KLMN$ прямые. Проводя через A прямую параллельно (BS) до пересечения с продолжением $[CL]$, получим точку A_1. Аналогично строим точки B_1, C_1, D_1. Восемь треугольников с гипотенузами, равными половинам сторон данного квадрата, очевидно, конгруэнтны, следовательно, равны их большие катеты — стороны прямоугольника $KLMN$, который является, таким образом, квадратом. С другой стороны, из конгруэнтности этих треугольников следует, что получившийся «крест» равновелик данному квадрату и состоит из пяти квадратов, конгруэнтных $KLMN$, т. е. $S_{KLMN} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$.

47. Так как треугольники ABC и ADC прямоугольные с общей гипотенузой AC (рис. 120), то

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 \tag{1}$$

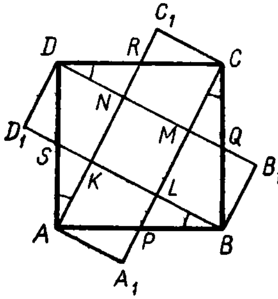

Рис. 119

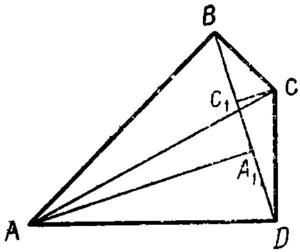

Рис. 120

согласно теореме косинусов, для треугольников ABD и BCD имеем соответственно:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB| \cdot |BD| \cos \widehat{ABD}, \quad (2)$$

$$|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 - 2|BD| \cdot |DC| \cdot \cos \widehat{BDC}. \quad (3)$$

Подставив значение $|AD|^2$ и $|BC|^2$ из равенств (2) и (3) в равенство (1), получим $|AB|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 - 2|BD| \cdot |DC| \times \times \cos \widehat{BDC} = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB| \cdot |BD| \cos \widehat{ABD} + |DC|^2$, откуда $|DC| \cdot \cos \widehat{BDC} = |AB| \cos \widehat{ABD}$ и, следовательно, $|C_1D| = |A_1B|$.

48. Середина стороны BC, точка M, является центром симметрии параллелограмма $BXCY$ (рис. 121). Поэтому отображение $X \to Y$ есть симметрия относительно центра M, или, что то же самое, гомотетия H_1 с центром M и коэффициентом $k_1 = -1$.

Так как $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AZ}$, то $\overrightarrow{AZ} = 2\overrightarrow{MY}$.

Следовательно, отображение $Y \to Z$ есть гомотетия H_2 с центром S в точке пересечения прямых ZY и AM и коэффициентом $k_2 = 2$.

Композиция этих гомотетий $H_2 \circ H_1$ есть некоторая гомотетия H с коэффициентом $k = k_1 \cdot k_2 = -2$. Найдем ее центр O. Так как $H_1(M) = M$, то $H(M) = H_2(M) \circ H_1(M) = H_2(M) = A$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OM} = -2$. Это значит, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Итак, отображение $X \to Z$ есть гомотетия с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC с коэффициентом $k = -2$.

49. Пусть $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{ON}$, тогда $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ — противоположные векторы, т. е. точка O — середина отрезка MN (рис. 122). Кроме того, так как $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$, то четырехугольники $OAMB$ и $OCND$ — конгруэнтные ромбы, тогда $[AB]$ и $[CD]$ — вторые диагонали этих ромбов, а точки A и D симметричны соответственно точкам B и C относительно прямой MN. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник.

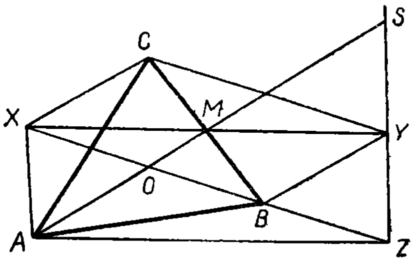

Рис 121

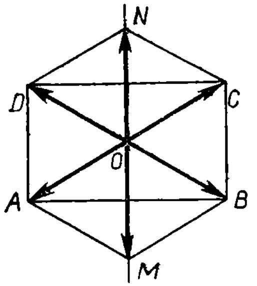

Рис. 122

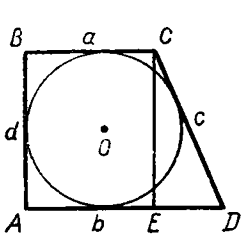

Рис. 123

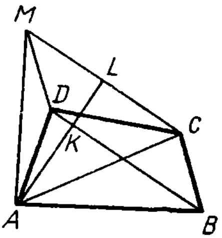

Рис. 124

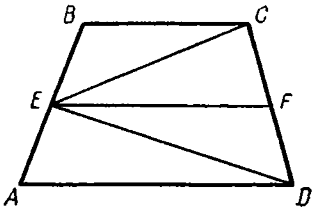

Рис. 125

50. Пусть $|BC| = a$, $|AD| = b$, $|AB| = d$, $|CD| = c$ (рис. 123). Из $\triangle CED$ имеем: $c^2 = (b-a)^2 + d^2$. Используя свойство описанного четырехугольника $c + d = a + b$, получим соотношение $(a+b-d)^2 = (b-a)^2 + d^2$, откуда $a + b = \frac{2ab}{d}$. Тогда $S = (a+b)\cdot\frac{d}{2} = ab$.

51. Пусть прямая, проведенная через вершину A, перпендикулярна к прямой CM и пересекает ее в точке L, а прямую BD — в точке K (рис. 124). Тогда $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}|BD| \times |AK| + \frac{1}{2}|BD|\cdot|KL| = \frac{1}{2}|BD|\cdot|AL| = \frac{1}{2}|CM|\cdot|AL| = S_{ACM}$.

52. Проведем среднюю линию EF трапеции (рис. 125). Тогда $S_{ABCD} = |EF|\cdot H$, где H — высота трапеции. С другой стороны $S_{ECD} = S_{ECF} + S_{EFD} = \frac{1}{2}|EF|\cdot\frac{H}{2} + \frac{1}{2}|EF|\cdot\frac{H}{2} = \frac{1}{2}|EF|\cdot H$.

53. Указание. Проведите через точку M прямую, параллельную $[AK]$, и с ее помощью найдите отношение длин отрезков BK и BC.

54. $$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOD}} = \frac{|AO|\cdot|OC|\sin\widehat{AOC}}{|BO|\cdot|OD|\sin\widehat{BOD}}. \qquad (1)$$

По теореме косинусов имеем:

$$|AC|^2 = |AO|^2 + |OC|^2 - 2|AO|\cdot|OC|\cos\widehat{AOC} \text{ и}$$

$$|BD|^2 = |BO|^2 + |OD|^2 - 2|BO|\cdot|OD|\cos\widehat{BOD} \quad (\text{рис. } 126).$$

Пусть K — середина $[AC]$ и $[BD]$, $|AC| = |BD|$, тогда $2(|AO|^2 + |OC|^2) = 4|KO|^2 + |AC|^2 = 2(|BO|^2 + |OD|^2)$ и, следовательно,

$$|AO|\cdot|OC|\cos\widehat{AOC} = |BO|\cdot|OD|\cos\widehat{BOD}.$$

Отсюда

$$\frac{|AO|\cdot|OC|}{|BO|\cdot|OD|} = \frac{\cos\widehat{BOD}}{\cos\widehat{AOC}}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) и следует требуемое утверждение.

55. Через точки C, D и N проведем перпендикуляры h_1, h_2, h_3 к стороне AB (рис. 127), тогда $2h_3 = h_1 + h_2$.

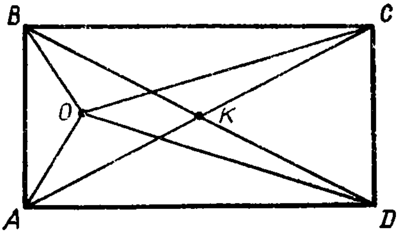

Рис. 126

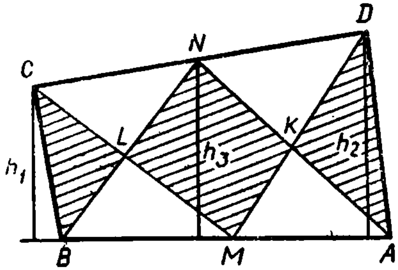

Рис. 127

Так как $|AM| = |MB|$, то из равенства

$$2h_3 \cdot |AM| = (h_1 + h_2) \cdot |AM|$$

следует равенство площадей: $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BCM}$, отсюда площадь четырехугольника $KMLN$ равна сумме площадей треугольников AKD и BCL, что и требовалось доказать.

56. Окружность, построенная на $[DC]$ как на диаметре, пройдет через точки M и N (рис. 128). Средняя линия OE трапеции перпендикулярна хорде MN, поэтому $|EM| = |EN|$. Пусть E_1, M_1, N_1 — проекции точек E, M и N на диаметр DC. Тогда $|EE_1| = \frac{1}{2}(|MM_1| + |NN_1|)$. Через точку E проведем прямую, параллельную (DC) и пересекающую (AD) и (BC) соответственно в точках A_1 и B_1. Тогда получим:

$$S_{ABCD} = S_{A_1B_1CD} = |DC| \cdot |EE_1| = |DC| \cdot \frac{1}{2}(|MM_1| + |NN_1|) =$$

$$= \frac{1}{2}|DC| \cdot |MM_1| + \frac{1}{2}|DC| \cdot |NN_1| = S_{MCD} + S_{NCD}.$$

57. Пусть $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$, тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (рис. 129).

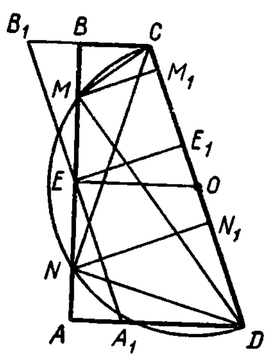

Рис. 128

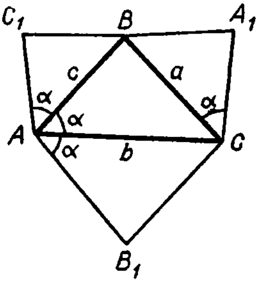

Рис. 129

Площади равнобедренных треугольников ABC_1, AB_1C, A_1BC легко вычислить, зная основание и угол при основании

$$S_{A_1BC} = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg} \alpha,$$
$$S_{ABC_1} = \frac{1}{4} c^2 \operatorname{tg} \alpha,$$
$$S_{AB_1C} = \frac{1}{4} b^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда $S_{ABC} + S_{A_1BC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha + \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4}(2bc \cos \alpha + a^2)$. Но по теореме косинусов имеем: $a^2 + 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2$, тогда

$$S_{ABC} = S_{A_1BC} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4}(b^2 + c^2).$$

Кроме того,

$$S_{ABC_1} + S_{AB_1C} = \frac{1}{4} c^2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{4} b^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4}(b^2 + c^2).$$

Таким образом,

$$S_{ABC} + S_{A_1BC} = S_{ABC_1} + S_{AB_1C}.$$

58. Пусть в прямоугольной системе координат xOy точка A имеет кординаты $(x;\ 0)$, точка D — $(0;\ y)$. Тогда координаты точек B и C будут соответственно $(x + 12;\ 0)$ и $(0;\ y + 4)$.

Используя формулу расстояния между точками через их координаты и условия $|BC| = 17$ *см*, $|DA| = 5$, получим систему уравнений

$$x^2 + y^2 = 25,$$
$$(x + 12)^2 + (y + 4)^2 = 289,$$

из которой находим, что либо $x = 3$, $y = 4$, либо $x = 4{,}8$, $y = -1{,}4$. В первом случае $S = S_1 - S_2$, где S_1 и S_2 соответственно площади треугольников OBC и OAD (рис. 130); во втором случае $S = S_1 + S_2$ (рис. 131). Вычислив S_1 и S_2 в первом и во втором случаях, получим: $S = 54$ *см*^{2} и $S = 25{,}2$ *см*^{2}.

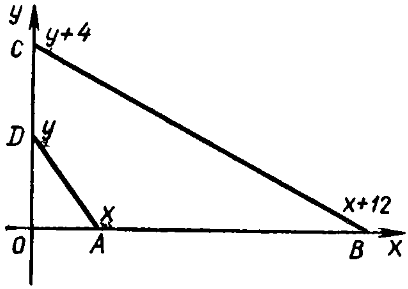

Рис. 130

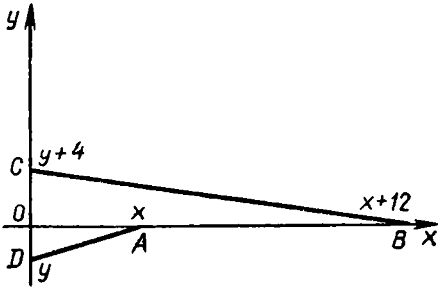

Рис. 131

59. Так как $\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}{2}=-\frac{\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{2}$,

$$\text{то } \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0},$$
$$\text{т. е. } \overrightarrow{MD}=-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).$$

Имеем: $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MD}$, т. е. $\vec{V}=-\overrightarrow{MD}$. Это значит, что M — середина отрезка DV.

Выражаем площадь четырехугольника $MAUV$:

а) $S_{MAUV}=S_{MAU}+S_{MUV}=S_{MAB}+S_{MCD}$;

б) $S_{MAUV}=S_{MAV}+S_{UAV}=S_{MAD}+S_{MBC}$.

Отсюда $2S_{MAUV}=S_{MAB}+S_{MCD}+S_{MAD}+S_{MBC}=S_{ABCD}$.

Итак, $S_{ABCD}:S_{MAUV}=2$.

60. Проведем через точку B перпендикуляр BD на (AC). Треугольники CBD, CEH и AHE подобны. Точки E и O — середины соответственных сторон, поэтому $\triangle BEC$ подобен $\triangle AHO$. А так как (AH) перпендикулярна (BC), то и (AO) перпендикулярна (BE).

61. Одно из решений можно получить, проведя прямую, параллельную основанию, так, чтобы у образовавшихся двух трапеций высоты были пропорциональны нижним основаниям.

62. Пусть $|AB|>|AC|$. Треугольник $AB'C'$, подобный ABC и такой, что $|AC|<|AB'|<|AB|$, приложим к стороне AC треугольника ABC, как показано на рисунке 132. Проведем через точку E пересечения $[BC]$ и $[B'C']$ прямую DE, параллельную (AC). Треугольники $AB'C'$ и DBE удовлетворяют условию.

63. Обозначим $\widehat{ACM}=x$, $\widehat{BCM}=y$. Из треугольников ACM и BCM имеем:
$\frac{|AM|}{b}=\frac{\sin x}{\sin \widehat{AMC}}$, $\frac{|BM|}{a}=\frac{\sin y}{\sin \widehat{BMC}}$. Поэтому $\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin x}{\sin y}$. Из треугольников ACS и BCS имеем:

$$\frac{\sin x}{|AS|}=\frac{\sin(\widehat{A}+\widehat{C})}{|CS|},\quad \frac{\sin y}{|BS|}=\frac{\sin(\widehat{B}+\widehat{C})}{|CS|}.$$

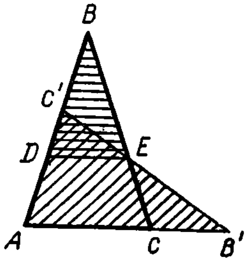

Рис. 132

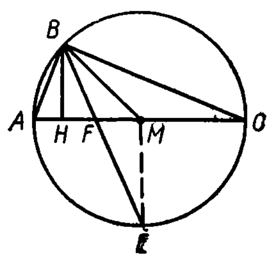

Рис. 133

Отсюда (так как $|AS| = |BS|$)

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin(\widehat{A}+\widehat{C})}{\sin(\widehat{B}+\widehat{C})} = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{b^2}{a^2}$.

64. Указание. Пусть в данном треугольнике $[BH]$ — высота, $[BM]$ — медиана, $[BF]$ — биссектриса, продолженная до пересечения с описанной окружностью в точке E (рис. 133). Покажите, что треугольник BME равнобедренный. Выведите отсюда, что угол B прямой.

65. Указание. Докажите предварительно лемму: если в двух треугольниках равны основания, углы при вершине и биссектрисы этих углов, то треугольники конгруэнтны. С этой целью совместите основания треугольников и продолжите биссектрисы до пересечения с описанной окружностью. Используя эту лемму, докажите, что треугольники AFC и BEC конгруэнтны, если равны биссектрисы (рис. 134).

66. По свойству биссектрисы угла $|FC| = |FM|$, поэтому $\widehat{FCM} = \widehat{FMC} = \alpha$ (рис. 135). Аналогично $\widehat{DCN} = \widehat{DNC} = \beta$, $\widehat{BAC} + 2\alpha = 90°$ и $\widehat{ABC} + 2\beta = 90°$. Сложив два последних равенства, получим $\alpha + \beta = 45°$. Следовательно, $\widehat{MCN} = 45°$.

67. Пусть окружность касается сторон AC, AB, BC треугольника соответственно в точках D, E, F. Из $\triangle AOD$ имеем: $|AD| = |OA| \cdot \cos\frac{\widehat{A}}{2}$, $|OD| = |OA| \cdot \sin\frac{\widehat{A}}{2}$, $2S_{AOD} = |AD| \cdot |OD| = |OA|^2 \cdot \sin\frac{\widehat{A}}{2} \cdot \cos\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{1}{2}|OA|^2 \cdot \sin\widehat{A}$. Аналогично $2S_{COD} = \frac{1}{2}|OC|^2 \cdot \sin\widehat{C}$, $2S_{BOF} = \frac{1}{2}|OB|^2 \cdot \sin\widehat{B}$. Таким образом,

$$S_{ABC} = 2S_{AOD} + 2S_{COD} + 2S_{BOF} =$$
$$= \frac{1}{2}(|OA|^2 \sin\widehat{A} + |OB|^2 \sin\widehat{B} + |OC|^2 \sin\widehat{C}).$$

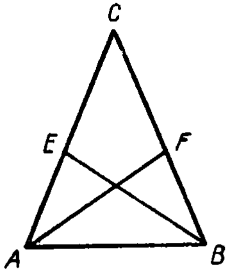

Рис. 134

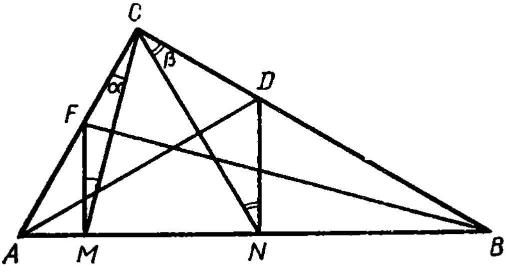

Рис. 135

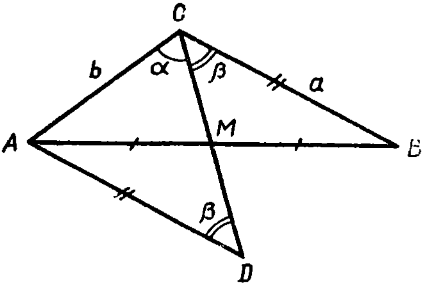

Рис. 136

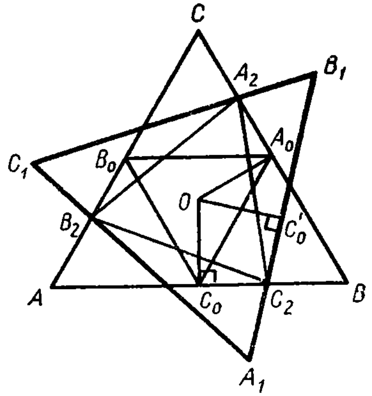

Рис. 137

68. Обозначим $|BC| = a$, $|AC| = b$, тогда по условию $a > b$. Остановимся на двух способах решения этой задачи.

Способ 1. Построим точку D, симметричную точке C относительно середины M стороны AB, и соединим точку D с вершиной A (рис. 136). Построенный треугольник ADM симметричен треугольнику BCM относительно точки M, следовательно, $|AD| = |BC| = a$ и $\widehat{ADM} = \widehat{BCM} = \beta$. Мы получим треугольник ACD, который содержит интересующие нас углы α и β, причем противолежащие им стороны AD и AC равны соответственно a и b. Согласно условию $a > b$, поэтому $\alpha > \beta$.

Способ 2. Соединим середину E стороны AC с точкой M (рисунок сделайте самостоятельно), образуется треугольник CEM со сторонами $|EM| = \frac{a}{2}$, $|CE| = \frac{b}{2}$.

Углы треугольника CEM, противолежащие этим сторонам, равны соответственно α и β. Это легко доказать, используя свойство средней линии треугольника.

69. Отрезок OC_0' — образ отрезка OC_0 в заданном повороте R_O^{α}, следовательно, $\widehat{C_0OC_2} = \frac{\alpha}{2}$ (рис. 137). Треугольник $A_2B_2C_2$—образ треугольника $A_0B_0C_0$ при композиции поворота R_O^{α} и гомотетии $H_O^{\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$, т. е. треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_0B_0C_0$ с коэффициентом $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Но треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда из свойства транзитивности отношения подобия треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом, равным произведению коэффициентов данных подобий. В таком случае $k = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Так как

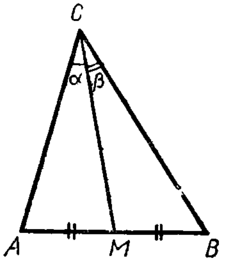

Рис. 138

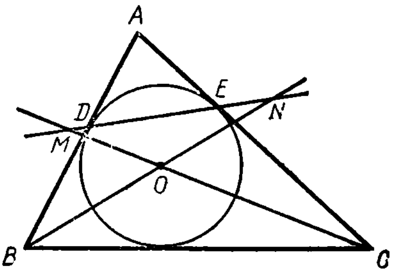

Рис. 139

треугольник ABC равносторонний, то и подобный ему треугольник $A_2B_2C_2$ также равносторонний и его стороны равны $\frac{m}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

70. Обозначим $\widehat{ACM}=\alpha$, $\widehat{BCM}=\beta$ (рис. 138).

а) $|CM|>|AM|$.

Рассмотрим треугольники ACM и BCM. Так как в треугольнике против большей стороны лежит и больший угол, то $\widehat{A}>\alpha$, $\widehat{B}>\beta$. Сложив эти неравенства почленно, получим $\widehat{A}+\widehat{B}>\widehat{C}$. Отсюда следует, что $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}>\widehat{C}+\widehat{C}=2\widehat{C}$ и, поскольку $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$, $\widehat{C}<90°$.

Случаи б) и в) доказываются аналогично.

71. Имеем: $2|EF|=2|DF|-2|DE|=(|BD|+|CD|-|BC|)-(|AD|+|CD|-|AC|)$. Так как $|AD|=|BD|$, то $2|EF|=|AC|-|BC|$.

72. Пусть M и N — точки пересечения биссектрис углов C и B с прямой DE (рис. 139). Тогда

$$\widehat{NMC}=\widehat{AED}-\widehat{ECM}=90°-\frac{\widehat{A}}{2}-\frac{\widehat{C}}{2}=\frac{\widehat{B}}{2}=\widehat{NBC}.$$

Следовательно, точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

73. Треугольник ADE равнобедренный (рис. 140), $[OA]$ — биссектриса его угла A. Пусть (AO) пересекает дугу, лежащую внутри треугольника ADE в точке O_1. Тогда $\smile{DO_1}=\smile{O_1E}$. Поэтому $\widehat{ADO_1}=\widehat{O_1DE}$. Следовательно, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник DAE.

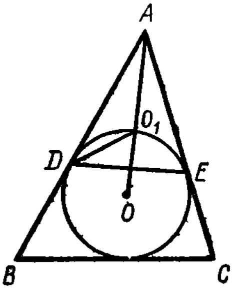

Рис. 140

74. Из прямоугольного треугольника AEC (рис. 141) имеем:

$$|AC|^2=|CE|^2+|AE|^2.$$

Так как

$$|AE|=\frac{|AD|}{2}+\frac{|BC|}{2}=|CD|>|CE|, \text{ то}$$

$$|AC|^2=|CE|^2+|CD|^2>2|CE|^2.$$

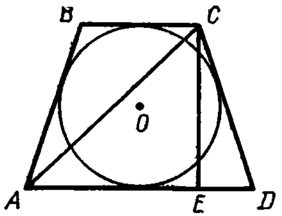

Рис. 141

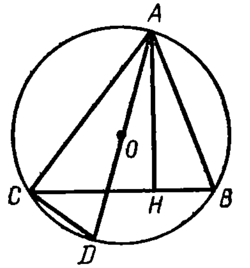

Рис. 142

Следовательно, $|AC| > |CE|\sqrt{2}$, т. е. $|AC| > d\sqrt{2}$.

75. Указание. Продлите отрезок AO до пересечения с окружностью в точке D и заметьте, что $\angle ADC \cong \angle ABC$ (рис. 142.)

76. Пусть $|AB| \geqslant |BC|$, K, L, M, N — точки касания диагоналей с окружностями, вписанными в треугольники ABC, ACD, ABD, BCD соответственно; O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

Имеем: $|OK| = |AK| - |AO| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC| - |BC|) - \frac{|AC|}{2} = \frac{1}{2}(|AB| - |BC|)$.

Аналогично $|OL| = |OM| = |ON| = |OK| = \frac{1}{2}(|AB| - |BC|)$.

Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — прямоугольник.

77. Малые треугольники подобны большому, следовательно, $\frac{r_1}{r} = \frac{p_1}{p}$, $\frac{r_2}{r} = \frac{p_2}{p}$, $\frac{r_3}{r} = \frac{p_3}{p}$, откуда $rp_1 = r_1p$, $rp_2 = r_2p$, $rp_3 = r_3p$ (p, p_1, p_2, p_3 — периметры соответствующих треугольников). Складывая почленно три последних равенства, получим:

$r(p_1 + p_2 + p_3) = (r_1 + r_2 + r_3)p$, но $p_1 + p_2 + p_3 = p$.

Следовательно, $r = r_1 + r_2 + r_3$.

78. Пусть O — центр окружности, описанной около данной трапеции $ABCD$ (рис. 143). Тогда

$$\widehat{SCO} + \widehat{OAD} = \widehat{SDO} + \widehat{ODA} = 180°.$$

Следовательно, около четырехугольника $AOCS$ можно описать окружность. Аналогично доказывается, что окружность можно описать и около четырехугольника $DOBS$. Итак, окружности, проведенные через точки A, C, S и B, D, S, проходят также через O.

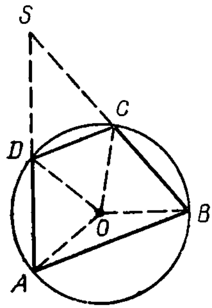

Рис. 143

79. Пусть a и b — длины оснований трапеции, c и d — длины боковых сторон, α — величина угла между диагоналями.

Так как трапеция описана около окружности, то $a + b = c + d > 4r$.

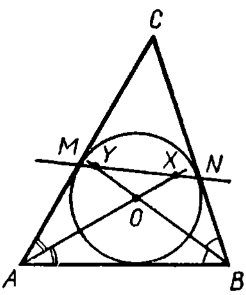

Рис. 144

Зная, что $|\sin\alpha| \leqslant 1$, имеем: $2mn \geqslant 2mn\sin\alpha$. Учитывая, что $m^2 + n^2 > 2mn$ и $2mn\sin\alpha = 4S$, где S — площадь трапеции, получим: $m^2 + n^2 \geqslant 4S$; в то же время $S = \frac{a+b}{2} \cdot 2r$. Отсюда $m^2 + n^2 \geqslant 4(a+b)r$, или $m^2 + n^2 \geqslant 16r^2$. Равенство возможно, если к числу трапеций условно отнести квадраты.

80. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 144), a, b, c — длины его сторон, p — полупериметр; имеем: $\widehat{AOB} = 180° - \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$ и $\widehat{AMX} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$. Так как $\widehat{MAX} = \widehat{BAX}$, то $\widehat{AXM} = \frac{\widehat{B}}{2}$. По теореме синусов из треугольника AMX имеем $\frac{|MX|}{|AM|} = \frac{\sin\frac{\widehat{A}}{2}}{\sin\frac{\widehat{B}}{2}}$, откуда после несложных преобразований получим: $|MX| = a\sin\frac{\widehat{C}}{2}$. Ясно, что $|NY| = b\cdot\sin\frac{\widehat{C}}{2}$. Далее, $|XY| = |MX| + |NY| - |MN| = (a + b)\sin\frac{\widehat{C}}{2} - 2(p-c)\sin\frac{\widehat{C}}{2} = c\sin\frac{\widehat{C}}{2}$. Следовательно, $|MX|:|NY|:|XY| = a:b:c$.

81. Продолжив стороны CB, CD, FA и FE данного шестиугольника (рис. 145), получим четырехугольник $PCQF$, который является ромбом, описанным около данной окружности; диагональ CF проходит через центр окружности. Диагонали AD и BE шестиугольника также проходят через центр O (докажите!). Пусть $[OK]$ и $[OL]$ — высоты треугольников AOF и COD, тогда $|OK| = |OL| = R$. Так как $\triangle AOF \sim \triangle COD$ и их высоты, проведенные к соответственным сторонам, конгруэнтны, то $\triangle AOF \cong \triangle COD$ и $|AF| = |CD|$. Аналогично доказывается равенство длин других противоположных сторон.

82. Обозначим длины сторон треугольника, противолежащих вершинам A, B, C, через a, b, c соответственно. Пусть $b > a$

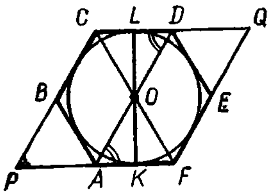

Рис. 145

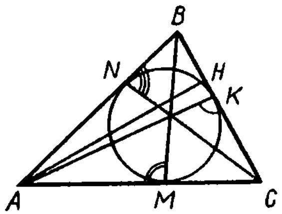

Рис. 146

($b \neq c$, так как иначе прямые MO и AH не пересекались бы, а совпадали). Проведем перпендикуляр $|OP| = r$ на (BC). Тогда $|MC| = \frac{a}{2}$, $|PC| = \frac{a+b-c}{2}$, $|HC| = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, $\frac{|EH|}{|OP|} = \frac{|HM|}{|PM|} = \frac{|HC|-|MC|}{|PC|-|MC|} = \frac{2|HC|-a}{b-c} = \frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)} = \frac{b+c}{a}$ и т. д.

83. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, $2p$ — его периметр, S — площадь, $[AH]$ — высота, проведенная из вершины A (рис. 146). Из очевидных равенств

$$2|AN|+2|BK|+2|KC| = 2p \text{ и } |AN|+|BK| = c$$

получаем, что $|KC| = p - c$.

Далее имеем:

$$\operatorname{ctg} \widehat{AKC} = \frac{|KC|-|HC|}{|AH|} = \frac{|p-c| - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}}{|AH|} =$$

$$= \frac{a(a+b-c)-a^2-b^2+c^2}{2a|AH|} = \frac{a(b-c)-(b-c)(b+c)}{4S} =$$

$$= \frac{(c-b)(b+c-a)}{4S}.$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg} \widehat{BMA} = \frac{(a-c)(a+c-b)}{4S},$$

$$\operatorname{ctg} \widehat{CNB} = \frac{(b-a)(a+b-c)}{4S}.$$

Из полученных трех равенств легко следует доказываемое равенство.

84. Пусть окружность произвольного радиуса с центром в вершине O данного угла пересекает стороны угла в точках A и B. Построим прямой угол BOC, не содержащий луч OA. На дуге CBA строим дугу CB_1, угловая величина которой равна $13° \cdot 7$, т. е. $91°$. Тогда величина угла BOB_1 равна $1°$. Дальнейшие построения очевидны.

85. Линия разреза треугольника ABC должна проходить через вершину. Пусть (BD) — линия разреза (D — точка пересечения (BD) с (AC)). Тогда $[BD] \perp [AC]$, так как в противном случае или $\angle ADB$ или $\angle BDC$ тупой и не может быть конгруэнтен ни одному углу того треугольника, для которого он является внешним. Из подобия треугольников ABD и BCD вытекает, что или $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$, тогда $\triangle ABC$ равнобедренный, или $\widehat{BAD} = \widehat{CBD}$, тогда угол B прямой и $\triangle ABC$ прямоугольный. Следовательно, только равнобедренные и прямоугольные треугольники можно разрезать на два подобных между собой треугольника.

86. В треугольнике ABC ($[AC]$ — основание) продолжите медиану AM за точку M так, что $|MD| = |AM|$. Заметив, что $|BD| = |AC|$, постройте треугольник ABM.

87. Пусть A_1 и B_1 такие точки данной окружности ω, что $(AA_1) \parallel (BB_1)$ и $\widehat{A_1OB_1} = \varphi$, где φ — величина данного угла. При повороте R_O^φ точка A_1 отображается на точку B_1, точка A — на точку A_0, луч A_1A — на луч B_1A_0. Так как угол между лучами A_1A и B_1A_0 равен φ, то $\widehat{BB_1A_0} = \varphi$ или $\widehat{BB_1A_0} = 180° - \varphi$. Таким образом, отрезок BA_0 из точки B_1 виден под углом φ или $180° - \varphi$. Следовательно, если задача имеет решение, то точка B_1 есть точка пересечения дуги сегмента, построенного на хорде BA_0 и вмещающего угол φ или $180° - \varphi$, с данной окружностью ω.

88. Анализ. Поскольку $|KB| = |KH|$, то $\angle KHB \cong \angle B$. Проведем (KC). Так как $|KH| = |HC|$, то $\angle HKC \cong \angle HCK$. Но $\widehat{HKC} + \widehat{KCH} = \widehat{KHB}$. Значит $\widehat{CKH} = \widehat{KCH} = \frac{1}{2}\widehat{KHB} = \frac{1}{2}\widehat{B}$.

Построение. Пусть дан $\triangle ABC$. Разделим $\angle B$ пополам и построим угол $\widehat{BCM} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ так, что луч CM лежит по ту же сторону от прямой BC, что и точка A. Пусть луч CM пересекает сторону AB (а не ее продолжение) в точке K. Построим угол $\widehat{CKN} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ так, что луч KN лежит по ту же сторону от прямой CK, что и точка B. Пусть луч KN пересекает сторону BC в точке H. Построенные точки K, H — искомые.

Доказательство. По построению $\angle HKC \cong \angle HCK$, поэтому $|KH| = |HC|$. Далее $\widehat{KHB} = \widehat{HKC} + \widehat{HCK} = \frac{1}{2}\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{B}$, поэтому $|KH| = |KB|$.

Исследование. В пункте «Анализ» было доказано, что если K, H искомые точки, то $\widehat{CKH} = \widehat{KCB} = \frac{1}{2}\widehat{B}$.

Пользуясь этим, легко доказать, что решение (если оно существует) единственное.

Выясним теперь, при каком условии задача имеет решение. При построении были сделаны два предположения:

1) что луч CM пересекает (AB),

2) что луч KN пересекает (BC).

Первое из этих предположений выполняется, если в $\triangle ABC$ $\frac{1}{2}\widehat{B} < \widehat{C}$. Второе, если $\frac{1}{2}\widehat{B} < \widehat{CKB} = 180° - \widehat{B} - \frac{1}{2}\widehat{B}$, то есть при $\widehat{B} < 90°$.

Если оба эти условия выполняются, то построение выполнимо и решение существует.

Докажем, что если решение существует, то эти два условия выполняются. Пусть K, H — искомые точки. Тогда по доказанному $\widehat{BCK} = \frac{1}{2}\widehat{B}$. Но поскольку точка K лежит на (AB), то $\widehat{BCK} < \widehat{BCA}$, откуда $\frac{1}{2}\widehat{B}<\widehat{C}$. Далее, так как точка H лежит на $[BC]$, то $C\widehat{K}H < C\widehat{K}B$. Поскольку точки K, H искомые, то (как доказано)

$$C\widehat{K}H=\frac{1}{2}\widehat{B},\ C\widehat{K}B=180^\circ-\frac{3}{2}\widehat{B}.$$

Поэтому $\frac{1}{2}\widehat{B}<180^\circ-\frac{3}{2}\widehat{B}$, откуда $\widehat{B}<90^\circ$.

Итак, если в $\triangle ABC$ $\widehat{B}<90^\circ$ и $\frac{1}{2}\widehat{B}<\widehat{C}$, то решение существует, и единственно, в противном случае (т. е. если хотя бы одно из этих условий не выполняется) решений нет.

89. Указание. Можно воспользоваться тем, что середина отрезка MN лежит на диагонали AC и делит ее в отношении 3 : 1.

90. Пусть квадрат $ABCD$ построен. При повороте $R_O^{90^\circ}$ плоскости квадрат $ABCD$ отображается на себя, причем прямая BC отображается на прямую CD, $M\to M_1$. Точки M_1 и N определяют прямую CD. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно (CD), есть прямая BC, $(CD)\cap(BC)=C$. Построение вершин A,B и D очевидно.

Задача имеет два решения, так как направление обхода вершин квадрата не указано: поворот можно выполнить по часовой стрелке и против движения стрелки часов.

Если $|OM|=|ON|$, $M\widehat{O}N=90^\circ$, то задача имеет бесконечное множество решений — любые две перпендикулярные прямые, из которых одна проходит через точку M, а другая через N, определяют точку C. Если $|OM|\neq|ON|$ и $M\widehat{O}N=90^\circ$, задача не имеет решений.

91. Из подобия равнобедренных треугольников CBE и GBD следует, что $CGDE$ — равнобочная трапеция, около которой, как известно, можно описать окружность. Аналогично, около равнобочной трапеции $CDEF$ тоже можно описать окружность. Но эти две окружности совпадают, так как обе они проходят через точки C, D и E. На этой окружности и лежат данные пять точек.

92. В треугольниках ABC и AB_1C $\angle B$ и $\angle B_1$ — углы с взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно, они или равны по величине, или сумма их величин равна 180°. И в том, и в другом случае точка B_1 принадлежит окружности, описанной около треугольника ABC. Кроме того, из точек A и C отрезок BB_1 виден под прямым углом, значит, $[BB_1]$ диаметр этой окружности и точки B и B_1 симметричны относительно ее центра.

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что точки A_1 и C_1 также принадлежат окружности, описанной около треугольника ABC и симметричны соответственно точкам A и C относительно центра этой окружности. Так как никакие три точки окружности не принадлежат одной прямой, то точки A_1, B_1, C_1 не принадлежат одной прямой.

93. При параллельном переносе $\overrightarrow{BC}$ диагональ BD отобразится на отрезок CD_1. Из определения и свойств параллельного переноса следует:

$$D_1 \in (AD),$$

$$|DD_1| = |BC| = b,$$

$$\widehat{AOD} = \widehat{ACD_1} = 90^\circ \quad (O = [AC] \cap [BD]).$$

Итак, получили прямоугольный треугольник ACD_1, в котором длина гипотенузы AD_1 равна $a+b$, а высота CH, проведенная к гипотенузе, является высотой трапеции. Медиана CM прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Имеем очевидное неравенство

$$|CH| \leqslant |CM| = \frac{a+b}{2}.$$

Равенство достигается, когда $\triangle ACD_1$ равнобедренный, т. е. когда данная трапеция равнобочная.

94. Пусть в трапеции $ABCD$ $(BC) \parallel (AD)$ $(|AD| > |BC|)$.

Проведем из точек B и C высоты BE и CF. Площадь трапеции равна $\frac{1}{2}|BE| \cdot (|AD| + |BC|)$.

Отсюда $|BE| = 3{,}5$ *см*. Очевидно, $|AE| = |FD|$. Так как

$$|AE| + |FD| = |AD| - |BC| = 4 \text{ см, то } |AE| = 2 \text{ см}.$$

Тогда

$$|AB| = \sqrt{|AE|^2 + |BE|^2} = \sqrt{4 + (3{,}5)^2}\,\text{см} = \frac{\sqrt{65}}{2}\,\text{см}.$$

Проведем теперь диагональ AC. Мы должны узнать, по какую сторону от нее проходит биссектриса AM угла BAD. Для этого сравним величины углов BAC и CAD. Поскольку $\angle CAD \cong \angle BCA$, то можно сравнивать величины углов BAC и BCA. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Значит, надо сравнить стороны AB и BC.

Их длины: $\frac{\sqrt{65}}{2}$ *см* и 4 *см*. Но $\sqrt{65} > \sqrt{64} = 8$. Поэтому $|AB| > |BC|$, отсюда $\widehat{BCA} > \widehat{BAC}$. Следовательно,

$$\widehat{CAD} > \widehat{MAD}.$$

Итак $[AM]$ — биссектриса угла BAD — пересекает $[CD]$, а не $[BC]$.

95. Указание. Докажите, что для четырех точек не менее 3 из 4 треугольников остроугольные.

Возьмите 5 точек и покажите, что не менее трех треугольников с вершинами в этих точках не остроугольные. Затем подсчитайте общее число остроугольных треугольников, учитывая, что остроугольные треугольники могут входить и в другие пятерки точек. В заключение найдите отношение полученного числа к общему числу треугольников.

97. Прямыми, параллельными сторонам квадрата, разобьем его на n^2 конгруэнтных квадратов, сторона каждого из них будет равна $\frac{1}{n}$. Среди этих n^2 квадратов существует хотя бы один, внутри или на границе которого содержится не менее трех точек, так как в противном случае точек было бы меньше $2n^2+1$. Из центра выбранного квадрата опишем окружность радиуса $\frac{1}{n}$.

Итак, квадрат и, следовательно, построенный круг содержат три из заданных точек.

98. Пусть A — данная точка, l — данная прямая и $[AO] \perp l$. Легко видеть, что искомое множество F симметрично относительно (AO), и поэтому достаточно рассмотреть лишь правую от (AO) полуплоскость, включая и прямую AO.

Множеству F принадлежит, очевидно, точка K ($K \in [AO]$) такая, что $|AK| = 2|KO|$. Через точку K проведем прямую m, параллельную прямой l.

Пусть точка M является центром правильного треугольника ABC и лежит выше прямой m, $[AD]$ — высота $\triangle ABC$. Так как углы AOB и ADB прямые, то точки O и D лежат на окружности с диаметром AB, и поэтому $\widehat{AOD} = \widehat{ABD} = 60°$. Но треугольники OAD и KAM подобны (их сходственные стороны пропорциональны), так что $\widehat{AKM} = 60°$. Если точка M лежит ниже прямой m, то получаем аналогично, что $\widehat{AKM} = 120°$.

Нетрудно убедиться в обратном: всякая точка M такая, что $\widehat{AKM}$ равен $60°$ или $120°$, принадлежит искомому множеству F.

Окончательно получаем, что множество F представляет собой две прямые, проходящие через точку K под углом $60°$ и $120°$ к прямой AO, или, что то же самое, под углами $30°$ и $150°$ к данной прямой l.

99. Пусть A — данная точка, l — данная прямая, A' — точка, симметричная A относительно l, и m — прямая, проходящая через A' и параллельная l.

Легко видеть, что искомое множество F точек симметрично относительно прямой AA', и поэтому достаточно рассмотреть лишь полуплоскость, лежащую справа от этой прямой (исключая эту прямую).

Пусть C—точка, принадлежащая множеству F и лежащая выше прямой m; B — вторая вершина правильного треугольника ABC. Тогда окружность радиуса AB с центром в точке B проходит через точки A, A' и C. Отсюда сразу же следует, что $\widehat{AA'C} = 30°$. Если же точка C лежит ниже прямой, то $\widehat{AA'C} = 150°$.

Ясно также, что на прямой m множеству F принадлежит только точка A'.

Таким образом, точки множества F, находящиеся в правой от AA' полуплоскости, лежат на двух лучах, выходящих из точки A' и составляющих с (AA') углы 30° и 150°. Очевидно, верно и обратное утверждение: любая точка этой пары лучей принадлежит F.

Окончательно получаем, что множество F представляет собой две прямые, проходящие через точку A' под углами 30° и 150° к (AA') или, что то же самое, под углами 60° и 120° к данной прямой l.

100. Докажем требуемое от противного. Предположим, что точка A не принадлежит отрезку BC, т. е. докажем, что тогда неверно утверждение: «для любой точки M на плоскости длина отрезка AM меньше длины хотя бы одного из отрезков BM и CM».

Иными словами, найдем такую точку M на плоскости, что длина отрезка AM не меньше длин каждого из отрезков BM и CM. Рассмотрим два случая.

а) Точка A принадлежит прямой BC, но находится вне отрезка BC. Расположим точку M на прямой BC так, чтобы отрезок BC лежал внутри отрезка AM.

Тогда, очевидно, будут выполняться неравенства: $|AM| > |BM|$, $|AM| > |CM|$. Но это противоречит условию.

б) Точка A не принадлежит прямой BC. Тогда можно построить треугольник ABC и описать около него окружность. Поместим точку M в центр этой окружности. Тогда $|AM| = |BM|$, $|AM| = |CM|$, что также противоречит условию.

101. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O. Пусть $N = (DC) \cap (OM)$, $F = (MC) \cap (BN)$, $E = (AN) \cap (MD)$. На $[DC]$ возьмем произвольную точку N_1, и пусть $E_1 = (MD) \cap (AN_1)$, $Q = (AN_1) \cap (BN)$, $F_1 = (MC) \cap (BN_1)$, $L = (EF) \cap (AN_1)$, $K = (EF) \cap (BN_1)$. Докажем, что точка N искомая, т. е. $S_{MENF} > S_{ME_1N_1F_1}$. Очевидно, $|DN| : |AM| = |NC| : |MB|$, следовательно, коэффициент подобия треугольников DEN и AEM равен коэффициенту подобия треугольников NFC и MFB. Отсюда: $|NE| : |EA| = |NF| : |FB|$, т. е. $(EF) \parallel (AB)$. Далее, $|EL| = |NN_1| \cdot \frac{|AE|}{|AN|} = |NN_1| \cdot \frac{|BF|}{|BN|} = |FK|$ и, следовательно, $S_{NN_1LE} = S_{NN_1KF}$; очевидно,

$$S_{NQE_1E} > S_{NQLE} = S_{N_1QFK} > S_{N_1QFF_1}.$$

Откуда

$$S_{MENF} > S_{ME_1N_1F_1}.$$

102. Пусть R — радиус окружности, $\widehat{BAD} = \alpha$, $\widehat{BDA} = x$, тогда диагональ $d = 2R\sin\alpha$, высота $h = d\sin x$, средняя линия трапеции равна $d\cos x$. Площадь трапеции

$$S = \frac{d^2}{2} \sin 2x.$$

Так как $x \leqslant \alpha$, то для $\alpha < 45^\circ$ функция S достигает максимума при $x = \alpha$. Но в этом случае искомая трапеция вырождается в треугольник, и, строго говоря, трапеции с наибольшей площадью не существует. Для $x \geqslant 45^\circ$ наибольшее значение площади будет при $x = 45^\circ$. Построение очевидно.

103. Если отрезки A_1A_2 и B_1B_2 лежат на прямых, параллельных l, то в случае, когда $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$, имеется бесконечно много решений: достаточно на прямой взять любой отрезок C_1C_2 такой, что $\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$.

Если же данные отрезки таковы, что $\overrightarrow{A_1A_2} \neq \overrightarrow{B_1B_2}$, то требуемых точек C_1, C_2, очевидно, не существует.

Предположим теперь, для определенности, что $(A_1A_2) \nparallel l$ и пусть A_3 — точка пересечения прямых A_1A_2 и l. На прямой B_1B_2 построим две точки M такие, что $|B_1B_2| : |B_2M| = |A_2A_1| : |A_2A_3|$ и обозначим через B_3 ту из них, для которой выполняется условие: если A_1 лежит между двумя другими точками на прямой A_1A_2, то и B_1 лежит между двумя другими точками на прямой B_1B_2.

Теперь соединим точки B_3 и A_3 и проведем через точки B_1 и B_2 прямые, параллельные (A_3B_3), их точки C_1 и C_2 пересечения с прямой l и являются искомыми. В самом деле:

$$\frac{|C_1C_2|}{|C_2A_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_2B_3|} = \frac{|A_1A_2|}{|A_2A_3|},$$

откуда с помощью производной пропорции имеем

$$\frac{|C_2A_3|}{|C_2A_3|} = \frac{|A_1A_3|}{|A_2A_3|}.$$

Тогда углы $A_1C_1A_3$ и $A_2C_2A_3$ конгруэнтны как соответственные углы подобных треугольников $A_1C_1A_3$ и $A_2C_2A_3$, так что $(A_1C_1) \parallel (A_2C_2)$.

104. В данной задаче в роли стержня выступает луч SB. В точке A луч «соприкасается» с предметом, а в точке B с экраном образуя границу тени. Составим два уравнения, связывающие проекции скоростей в точках A и B; $\omega|SA| = v\cos(\pi - \alpha)$ — проекция на (LK), $\omega|SB| = u\cos\alpha$ — проекция на (MN). Здесь ω — угловая скорость вращения луча. Разделив второе равенство на первое и учитывая, что $\frac{|SB|}{|SA|} = \frac{l}{|SL|} = \frac{l}{vt}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{|SC|} = \frac{h}{vt}$, получим $u = \frac{lh}{vt^2}$.

105. Так как длина стержня AB неизменна, проекции скоростей его концов на направление стержня одинаковы:

$$u \cos \alpha = -v \cos (\pi - \alpha - \beta)$$

или

$$u = -\frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \cdot v.$$

Рассмотрим случай, когда длина стержня изменяется во время движения («стержнем» может служить, например, отрезок, соединяющий две заданные точки, расстояние между которыми меняется). Тогда соотношение, связывающее проекции скоростей концов стержня, принимает вид $|v_A'' - v_B''| = u$, где u — скорость изменения длины стержня.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Библиотека учителя математики

ИБ № 146

Герасимова Ирина Сергеевна
Гусев Валерий Александрович
Маслова Галина Герасимовна
Скопец Залман Алтерович
Ягодовский Михаил Ильич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ (9, 10 КЛАССЫ)

Редактор *С. В. ПАЗЕЛЬСКИЙ*
Художник переплета *Б. Н. ЮДКИН*
Художественный редактор
Е. Н. КАРАСИК
Технические редакторы *С. А. ПТИЦЫНА*,
С. Н. ФИЛАТОВА
Корректор *К. А. ИВАНОВА*

Сдано в набор 6/V 1977 г. Подписано к печати 17/X 1977 г. 60×90 1/16. Бумага тип. № 2. Печ. л. 12. Уч.-изд. л. 10,98. Тираж 252 тыс. экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8 в типографии издательства «Горьковская правда», г. Горький, ул. Фигнер, 32. Заказ № 5564. Цена 45 коп.