Большая перемена

Э.Н. Балаян,
З.Н. Каспарова

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ для подготовки к ГИА и ЕГЭ

Издание четвертое

Ростов-на-Дону
Феникс
2014

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Справочник по математике для подготовки к ГИА и ЕГЭ / Э.Н. Балаян, З.Н. Каспарова. Изд. 4-е. — Ростов н/Д : Феникс, 2014. — 186, [1] с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-22079-5

Справочник предназначен для выпускников средних образовательных заведений: школ, гимназий, лицеев, училищ или техникумов и абитуриентов высших учебных заведений при подготовке и сдаче выпускных и вступительных экзаменов.

ISBN 978-5-222-22079-5

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Часть 1

Алгебра и начала анализа

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -\dfrac{b}{a}$ (корень уравнения).

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.

3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Система линейных уравнений

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

1) Если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное

решение (прямые пересекаются в одной точке);

2) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений (прямые не пересекаются, т. е. параллельны);

3) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают).

3. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$, a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если $D = 0$, то

$x = -\dfrac{b}{2a}$ — один корень.

3) Если $D < 0$, корней нет (действительных).

Частные случаи

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$,

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, если коэффициенты a и c имеют разные знаки; если коэффициенты a и c имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$,

$$x_2 = -\frac{b}{a};$$

в) $ax^2 = 0$, $x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

3) Квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

4. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \ x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

б) для приведенного вида: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Виета для кубического уравнения

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения, то

$x_1 + x_2 + x_3 = -a;$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b;$

$x_1\, x_2\, x_3 = -c.$

5. Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c =$

$= a\,(x - x_1)\,(x - x_2),$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.

Если $D = 0$, то
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

6. Биквадратное уравнение

Общий вид:
$ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному вида $ay^2 + by + c = 0$.

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

7. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$, $a \neq 0$.

Приводится к виду

$$a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0$$

и заменой $y = x + \frac{m}{x}$ и $y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2}$ приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, **(**$m = 1$**) — симметрическое уравнение I рода.**

Решается подстановкой $y = x + \dfrac{1}{x}$**;**

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, **(**$m = -1$**) — симметрическое уравнение II рода.**

Решается подстановкой $y = x - \dfrac{1}{x}$**.**

8. Свойства степеней

Для любых x, y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства:

$a^0 = 1$ (по определению);

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

$a^x : a^y = a^{x-y}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$;

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

9. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$;

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab;$$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;

$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$;

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

10. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\ ;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}\ ;$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}\ ;$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}\ ;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}\text{, если } 0 \leq a < b;$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ ghb } a \geq 0, \\ -a \text{ ghb } a < 0; \end{cases}$$

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;

$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$ $(a \geq 0)$.

11. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

12. Формулы сложения

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+$
$+\cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-$
$-\sin\alpha\sin\beta;$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta -$
$- \cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta +$
$+ \sin\alpha\sin\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Дополнительные формулы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta};$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) =$$
$$= \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha \sin\alpha \cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma -$$
$$- \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma;$$
$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) =$$
$$= \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma -$$
$$- \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma -$$
$$- \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma -$$
$$- \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

13. Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

14. Формулы половинного аргумента (для функции sin и cos — формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

15. Универсальные тригонометрические подстановки

$$\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

16. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ ;$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=$$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi),$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Дополнительные формулы:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\,\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\,\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,\sin\beta};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha);$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1-\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$$1-\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha.$$

17. Формулы преобразования произведения в сумму

$2\sin\alpha\sin\beta =$
$=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta);$
$2\cos\alpha\cos\beta =$
$=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta);$

$2 \sin \alpha \cos \beta =$
$= \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$

Дополнительные формулы:

$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) =$
$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta =$
$= \cos^2\beta - \cos^2\alpha;$
$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) =$
$= \cos^2\beta - \sin^2\alpha =$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\beta.$

18. Радианная и градусная меры углов

$$1 \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ};$$

$$1 \text{ рад.} \approx 57{,}3^{\circ};$$

$$\alpha \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^{\circ};$$

$$1^{\circ} = \frac{180}{\pi} \text{ рад.}$$

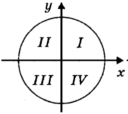
$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi}\cdot\alpha \text{ рад.}$$

$l = \alpha R$ — длина дуги окружности;

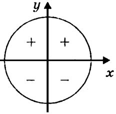
α — угол в радианах;
R — радиус окружности.

$S = \dfrac{R^2}{2}\alpha$ — площадь кругового сектора, $0 < \alpha < \pi$.

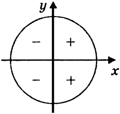
19. Знаки тригонометрических функций



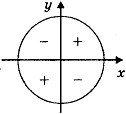
Четверти



Знаки sin



Знаки cos



Знаки tg и ctg

20. Формулы приведения

Функция α	Аргумент α							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

21. Значения тригонометрических функций для некоторых углов

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

22. Периоды тригонометрических функций

Периоды функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равны 2π.

Периоды функций $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$ равны π.

Периоды функций $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ находят по формуле $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, а функций $y = A\, \mathrm{tg}(\omega x + \varphi)$ и $y = A\, \mathrm{ctg}(\omega x + \varphi)$ по формуле $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

23. Обратные тригонометрические функции

Функция	**Область определения**	**Область значений**
$y = \mathrm{arcsin}x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \mathrm{arccos}x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \mathrm{arctg}x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \mathrm{arcctg}x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$

$\sin(\arcsin x) = x,\ -1 \le x \le 1;$
$\cos(\arccos x) = x,\ -1 \le x \le 1;$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$,
$-1 \le x \le 1;$
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$,
$-1 \le x \le 1;$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{x},\ x \ne 0;$
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x},\ x \ne 0;$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
$-1 \le x \le 1;$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$-1 \le x < 0,\ 0 < x \le 1;$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$-1 \le x < 0,\ 0 < x \le 1;$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$-1 < x < 1;$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

24. Значения обратных тригонометрических функций некоторых углов

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

25. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$, где $|a| \le 1$,
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$.

$\cos x = a$, $|a| \le 1$,
$x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\operatorname{tg} x = a$, $a \in R$,
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in R$,
$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

Частные случаи ($a = 0$, $a = 1$, $a = -1$):

$\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n\ , n \in Z;$

$\text{tg}\ x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z;$

$\text{ctg}\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n\ , n \in Z;$

$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\ , n \in Z;$

$\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\ ,$
$n \in Z;$

$\cos\ x\ =\ -1,\ x\ =\ \pi\ +\ 2\pi n,$
$n \in Z.$

26. Средние величины

1. Среднее арифметическое $A = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

2. Среднее геометрическое $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

3. Среднее гармоническое $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$.

4. Среднее квадратичное $K = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$.

5. Среднее взвешенное

$$V = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

27. Некоторые важные неравенства

1. Неравенство Коши:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\text{ , где } x \geq 0, y \geq 0.$$

2. Неравенство треугольника: $|x + a| \leq |x| + |a|$.

3. Неравенство для двух взаимно обратных величин:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\text{ , где } x > 0.$$

4. $\dfrac{a^2+1}{2} \geq 2.$

5. $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}.$

28. Прогрессии

1. Арифметическая прогрессия

(a_1 — 1-й член, d — разность, n — число членов, a_n – n-й член, S_n — сумма n первых членов**).**

Определение арифметической прогрессии:

$a_{n+1} = a_n + d.$

Формула n-го члена:
$a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Формула суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}),$$

где $n > 1$.

2. Геометрическая прогрессия

(b_1 – 1-й член, q — знаменатель ($q \neq 0$), n — число членов, b_n – n-й член, S_n — сумма n первых членов).

Определение геометрической прогрессии:

$b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Формула n-го члена:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Характеристическое свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Формула членов *бесконечной геометрической прогрессии:*

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ где } |q| < 1.$$

29. Логарифмы и их свойства

1. Если $x > 0$, то $x = a^{\log_a x}$ — основное логарифмическое тождество.

2. $\log_a a = 1$.

3. $\log_a 1 = 0$.

4. Если $x > 0$, $y > 0$, то $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ — логарифм произведения.

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — логарифм частного.

6. Если $x > 0$, $p \in R$, то $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ — логарифм степени.

7. Если $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ — формула перехода от основания a к основанию b.

В частности, если $x = b$, то $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

8. $\log_a b = \log_{a^p} b^p =$

$= p\log_{a^p} b$ ($p \in R$, $p \neq 0$).

9. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b.$$

10. $\log_a x \cdot \log_b y =$
$= \log_a y \cdot \log_b x$, где $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

30. Неравенства

1. Основные свойства числовых неравенств:

1. Если $a > b$, то $b < a$.

2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$, $a - c > b - c$ для любого c.

4. $ac > bc$ при $c > 0$; $ac < bc$ при $c < 0$.

$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ при $c > 0$; $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ при $c < 0$.

5. Если $0 < a < b$, то $a^c < b^c$ при $c > 0$, $a^c > b^c$ при $c < 0$.

6. Если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$, $a - d > b - c$.

7. Если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$, $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

8. Если $a < x < b$, то $(x - a)(x - b) < 0$, и обратно.

2. Неравенство I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b > 0$.

1. Если $a > 0$, то $x > -\frac{b}{a}$.

2. Если $a < 0$, то $x < -\dfrac{b}{a}$.

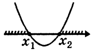
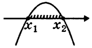
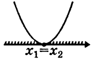
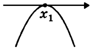
3. Если $a = 0$, то при $b > 0$ $x \in R$, при $b \leq 0$ решений нет.

3. Неравенство II степени (квадратное)

Общий вид:

$ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$.

В зависимости от знака a и от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ имеем 6 возможностей:

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 $x \le x_1,\ x \ge x_2$	 $x_1 \le x \le x_2$
$D < 0$	 $x \in R$	 *Решений нет*
$D = 0$	 $x \in R$	 $x = x_1$

4. Иррациональные неравенства

1. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$

равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

2. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

5. Показательное неравенство

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ неравенству $f(x) < g(x)$.

6. Логарифмическое неравенство

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

7. Тригонометрические неравенства

$\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{ctg} x > a$ (вместо знака $>$ могут быть знаки $<$, $\geq$, $\leq$) решаются графически: находят точки пересечения графика функции с прямой $y = a$, расположенной ближе к началу координат, а затем используют периодичность функции.

31. Таблица производных и первообразных элементарных и сложных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Первообразная $F(x)$
C, где C – const	0	Cx
Cx	C	$\frac{1}{2}Cx^2$
$x^p,\ p \in R$	px^{p-1}	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Первообразная** $F(x)$
$ax + b,\ a \neq 0$	a	$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$
$(ax + b)^p$	$pa(ax + b)^{p-1}$	$\frac{(ax+b)^{p+1}}{a(p+1)} + C$
e^x	e^x	e^x
$e^{ax+b},\ a \neq 0$	ae^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Первообразная** $F(x)$
$a^x, a > 0, a \neq 0$	$a^x \ln a$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$a^{kx+b}, a > 0, a \neq 0$	$ka^{kx+b} \ln a$	$\frac{a^{kx+b}}{k \ln a} + C$
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$
$\ln(ax+b), a \neq 0$	$\frac{a}{ax+b}$	–
$\log_a x, x > 0, a > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Первообразная** $F(x)$
$\log_a(kx+b)$	$\dfrac{k}{(kx+b)\ln a}$	–
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Первообразная $F(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	–	$\operatorname{tg} x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	–	$-\operatorname{ctg} x + C$

32. Правила дифференцирования

(u, v — функции, C — const):

$(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

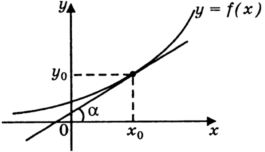
$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2};$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}.$$

$(g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, где $g(f(x))$ — сложная функция.

33. Уравнение касательной

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ имеет вид



$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$
где (x_0, y_0) — точка касания.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = k,$$
где k — угловой коэффициент касательной к графику функции.

34. Правила нахождения первообразных

1. Если F — первообразная для f, а H — первообразная для h, то $F + H$ есть первообразная для $f + h$.

2. Если F — первообразная для f, а k – const, то kF есть первообразная для kf.

3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.

35. Формула Ньютона–Лейбница

Формула Ньютона–Лейбница имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =$$

$$= F(x)\Big|_a^b.$$

Свойства:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx +$

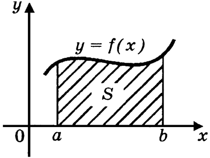
$$+\int_c^b f(x)dx,$$

где $a < c < b$.

36. Площадь криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке

$[a, b]$, находится по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

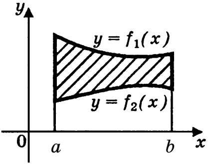


37. Площадь фигуры, заключенной на отрезке

Площадь фигуры, заключенной на отрезке **$[a, b]$**

между графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \geq f_2(x))$, находится по формуле

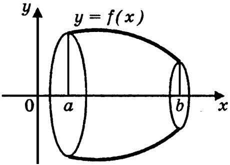
$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx.$$



38. Объем тела вращения

Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$



39. Формула Лагранжа

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

40. Функция

1. Зависимость переменной y от x называется *функцией*, если каждому значению x соответствует единственное значение y.

2. Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом*, а переменная y — *зависимой переменной*, или *функцией*.

3. Значение y, соответствующее заданному значению x, называется *значением функции*.

4. Все значения, которые принимает аргумент, называются *областью определения функции*; все значения, которые принимает сама функция, называются областью изменения (множеством значений) функции.

5. $D(f)$ или $D(y)$ — область определения функции; $E(f)$ или $E(y)$ — мно-

жество значений функции; $y(x_0)$ или $f(x_0)$ — значение функции в точке x_0.

6. *Графиком функции* называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям самой функции.

41. Способы задания функции

1. Аналитический способ, т. е. в виде формулы.

2. Табличный (с помощью пар).

3. Графический.

Заметим, что не всякая кривая является графиком некоторой функции.

Для того, чтобы кривая на плоскости являлась графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы каждому значению аргумента x соответствовало лишь одно значение переменной y.

42. Монотонность функции

1. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка X, таких что $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

2. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке X для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка X, таких что $x_1 > x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

3. Если функция только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется *монотонной* на этом промежутке.

43. Четные и нечетные функции

1. *Четная функция* — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = y(x)$ для каждого x из области определения.

Например, $y = x^2$, $y = \cos x$ — четные функции.

2. *График четной функции* симметричен относительно оси ординат.

3. *Нечетная функция* — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = -y(x)$ для каждого x из области определения.

Например, $y = x^3$, $y = \sin x$ — нечетные функции.

4. *График нечетной функции* симметричен относительно начала координат.

44. Экстремумы функции

1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ *возрастает* на промежутке X.

2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь

конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ *убывает* на промежутке X.

3. Точка $x = x_0$ называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x = x_0$) выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

4. Точка $x = x_0$ называется *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех

точек которой (кроме самой точки $x = x_0$) выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

5. *Точка экстремума* функции — точка максимума или минимума.

6. Точки, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными*, а точки, в которых функция непрерывна, но производная функции не существует, — *критическими*.

45. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма)

Если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие экстремума

Если при переходе через стационарную точку x_0 производная функция меняет знак с «+» на «−», то x_0 — *точка максимума функции*; если производная меняет знак с «−» на «+», то x_0 — *точка минимума*.

46. Наибольшее и наименьшее значения функции

x_1 и x_3 — точки минимума, x_2 — точка максимума. В точке x_3 функция достигает своего наименьшего значения.

Наибольшее значение функция принимает на конце отрезка в точке b, где функция не имеет экстремума (так как справа от точки b функция не определена).

Для нахождения *наибольшего* и *наименьшего значений функции на отрезке* нужно найти значения функции в точках экстремума и на концах отрезка, тогда большее из них будет наибольшим, а меньшее — наименьшим значением функции.

47. Область определения основных элементарных функций

1. Область определения любого многочлена — R.

2. $D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. $D(\sqrt[2n]{x}) = [0; +\infty)$.

4. $D(\sqrt[2n+1]{x}) = R$.

5. $D(\log_a x) = (0; +\infty)$.

6. $D(a^x) = R$.

7. $D(\sin x) = D(\cos x) = R$.

8. $D(\arcsin x) =$
$= D(\arccos x) = [-1; 1]$.

9. $D(\mathrm{tg}\, x): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

10. $D(\mathrm{ctg}\ x)$: $x \neq \pi n$, $n \in Z$.

11. $D(\mathrm{arctg}\ x) = D(\mathrm{arcctg}\ x) = R$.

48. Множество (область) значений основных элементарных функций

1. Областью значений всякого многочлена *нечетной* степени является R.

2. Областью значений всякого многочлена *чет-*

ной степени является промежуток $[a; +\infty)$, где a — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty; b]$, где b — наибольшее значение этого многочлена.

3. $E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

4. $E(\sqrt[2n]{x}) = [0; +\infty)$.

5. $E(\sqrt[2n+1]{x}) = R$.

6. $E(\log_a x) = R$.

7. $E(a^x) = (0; +\infty)$.

8. $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1]$.

9. $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

10. $E(\arccos x) = [0; \pi]$.

11. $E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R$.

12. $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

13. $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$.

Характеристики элементарных функций

Функция	ООФ	ОЗФ	Период	Четность	Нули
$y = ax + b$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	Неч. при $b = 0$	$x = \frac{b}{a}$
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	–	Чет.	$x = 0$
$y = x^3$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	Неч.	$x = 0$

Функция	ООФ	ОЗФ	Период	Четность	Нули
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	–	Неч.	Нет
$y = \sqrt{x}$	$[0;\ +\infty)$	$[0;\ +\infty)$	–	–	$x = 0$
$y = \sqrt[3]{x}$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$	–	Неч.	$x = 0$
$y = x^a$, $a > 0$	$[0;\ +\infty)$	$[0;\ +\infty)$	–	–	$x = 0$

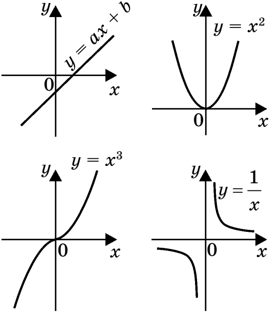
Функция	ООФ	ОЗФ	Период	Четность	Нули
$y = x^a$, $a < 0$	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	–	–	Нет
$y = a^x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	–	–	Нет
$y = \log_a x$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	–	$x = 1$
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	2π	Неч.	$x = \pi n$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	2π	Чет.	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

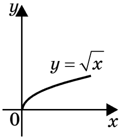
Функция	ООФ	ОЗФ	Период	Четность	Нули
$y = \mathrm{tg}x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$(-\infty; +\infty)$	π	Неч.	$x = \pi n$
$y = \mathrm{ctg}\, x$	$x \neq \pi n$	$(-\infty; +\infty)$	π	Чет.	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

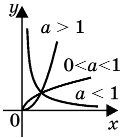
Примечание. ООФ — область определения функции.

ОЗФ — область (множество) значений функции.

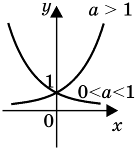
Характеристики элементарных функций



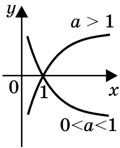




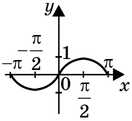
$y = x^a$



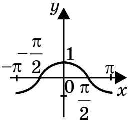
$y = a^x$



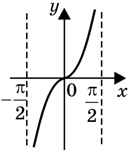
$y = \log_a x$



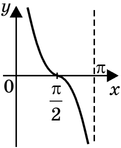
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \mathrm{tg}\ x$

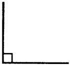


$y = \mathrm{ctg}\ x$

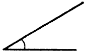
Глава 2
ГЕОМЕТРИЯ

Часть 1
Планиметрия

49. Классификация углов



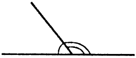
Прямой угол



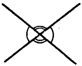
Острый угол

Тупой угол

Развернутый угол



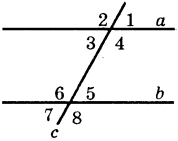
Смежные углы



Вертикальные углы

50. Углы при параллельных прямых

($a \parallel b$, c — секущая)



1. Соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$.

Каждые два соответственных угла равны.

2. Внутренние накрест лежащие углы: $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$.

3. Внешние накрест лежащие углы: $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$.

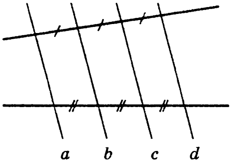
Каждые два накрест лежащих угла равны.

4. Внутренние односторонние углы: $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$.

5. Внешние односторонние углы: $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$.

Каждая пара односторонних углов равна в сумме $180°$.

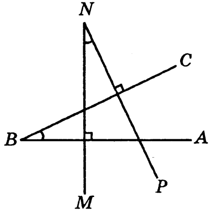
51. Теорема Фалеса

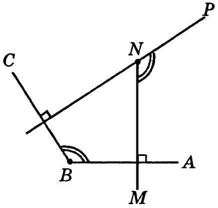


$a \parallel b \parallel c \parallel d$

52. Равенство углов со взаимно перпендикулярными сторонами

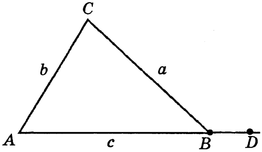
Если $AB \perp MN$ и $BC \perp NP$, то $\angle ABC = \angle MNP$.





53. Произвольный треугольник

(*a*, *b*, *c* — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы; *p* — полупериметр; *R* — радиус описанной



окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a; l_a — биссектриса; m_a — медиана).

1. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ — *сумма углов* ΔABC.

2. $\angle CBD = \angle A + \angle B$ — *внешний угол* ΔABC.

3. *Неравенства треугольника*:

$a < b + c$,

$b < a + c$,

$c < a + b$.

4. *Определение вида* Δ *по его сторонам.*

Пусть c — наибольшая сторона. Тогда:

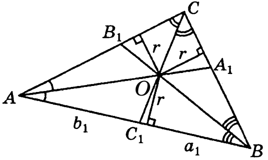
а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то Δ остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то Δ прямоугольный;

в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то Δ тупоугольный.

5. *Биссектрисы треугольника* пересекаются в точке O — центре вписанной окружности.

$BC = a$, $AB = c$, $AC = b$.



6. *Свойство биссектрисы внутреннего угла* Δ:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BC_1}{AC_1}\text{, или }\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

7. *Длина биссектрисы*:

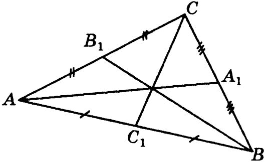
$$l_c=\sqrt{ab-a_1b_1};$$

$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

8. *Медианы треугольника* пересекаются в одной точке (центр тяжести, или центроид Δ) и делятся в этой точке в

отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1.$$



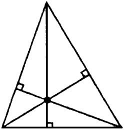
9. *Длина медианы*:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}\ .$$

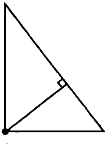
10. *Длина высоты*:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

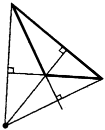
11. *Высоты треугольника* пересекаются в одной точке (ортоцентре Δ).



Остро-
угольный



Прямо-
угольный



Тупоугольный

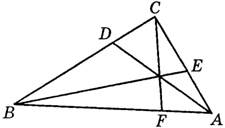
12. *Зависимость между сторонами и высотами*:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

13. *Зависимость между высотами h_a, h_b, h_c и радиусом r вписанной окружности*:

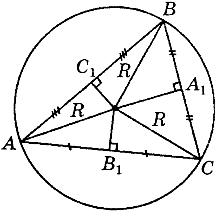
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

14. *Теорема Чевы*:



Для того, чтобы прямые BE, AD и CF пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$.

15. *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника*



пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника.

16. *Теорема синусов*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R .$$

17. *Теорема косинусов*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

18. *Площадь треугольника*:

$$S = \frac{1}{2} a h_a ; \ S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma ;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ —

формула Герона

$$S = p \cdot r,$$

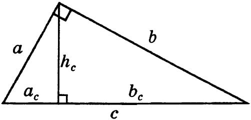
где $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$;

$$S = \frac{abc}{4R};$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

54. Прямоугольный треугольник

(a, b — катеты; c — гипотенуза; a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу)



$$S = \frac{1}{2}ab;\ S = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$R = \frac{1}{2}c;$$

$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора).

$h_c^2 = a_c \cdot b_c$; $a^2 = a_c \cdot c$;

$b^2 = b_c \cdot c$;

$a = c \sin \alpha = c \cos \beta =$
$= b \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \operatorname{ctg} \beta$;

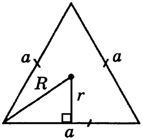
$c = 2m_c$, где m_c — медиана.

55. Равносторонний (правильный) треугольник

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

$$R = 2r;$$

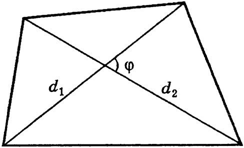


$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}\,;\; r = \frac{a}{2\sqrt{3}}\,;$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,.$$

56. Четырехугольник

1. Произвольный выпуклый (d_1 и d_2 — диа-



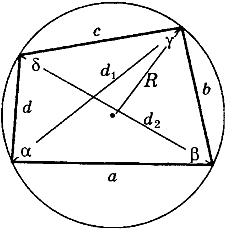
гонали, φ — угол между ними).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

2. Вписанный

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$;

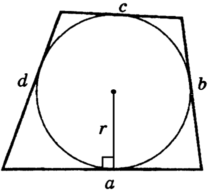
$ac + bd = d_1 d_2$ (теорема Птоломея).



$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c + d)$.

3. *Описанный*

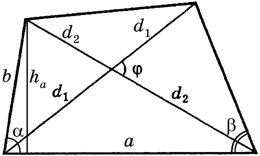


$a + c = b + d$ — суммы противоположных сторон равны:

$$S = p \cdot r.$$

57. Параллелограмм

(a и b — смежные стороны, α — угол между ними; d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними; h_a — высота к стороне a):



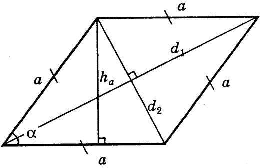
$\alpha + \beta = 180°$ — сумма углов, прилежащих к одной стороне.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2) \text{ —}$$

зависимость между сторонами и диагоналями.

$$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

58. Ромб

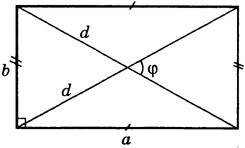


$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2;$$

$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\, d_1 d_2.$$

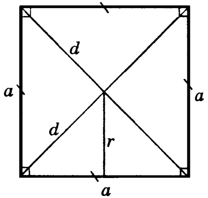
59. Прямоугольник



$$d^2 = a^2 + b^2;$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

60. Квадрат

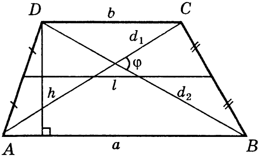


$$d = a\sqrt{2}\ ;$$
$$a = R\sqrt{2} = 2r;$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ ;}$$

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2.$$

61. Трапеция



(a и b — основния; h — высота; l — средняя линия; d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними)

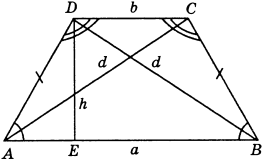
$$l = \frac{1}{2}(a + b);$$

$$\angle A + \angle D = 180°;$$
$$\angle B + \angle C = 180°.$$

$$S = lh = \frac{1}{2}(a+b)h =$$

$$= \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

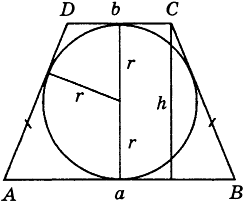
1. Равнобедренная трапеция



$AC = BD = d$; $AD = BC$;
$\angle A = \angle B$; $\angle D = \angle C$;

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

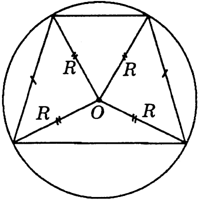
Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.



$AB + CD = 2AD.$

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности.

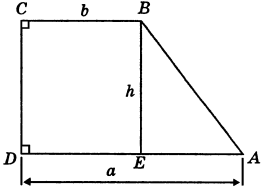
$h = \sqrt{ab}.$



R — радиус описанной окружности;

O — центр окружности, описанной около треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции.

2. Прямоугольная трапеция



$AE = a - b$;

$\angle D = \angle C = 90°$;

$BE = CD = h$ — высота трапеции.

62. Многоугольник (выпуклый)

(n — число сторон (углов))

Основные свойства:

1. $180°(n - 2)$ — сумма внутренних углов;
2. $360°$ — сумма внешних углов;
3. $\frac{1}{2}n(n - 3)$ — число диагоналей.

63. Правильный многоугольник

(a_n — сторона; R_n — радиус описанной окружности; r_n — радиус вписанной окружности, α_n — величина угла; P_n — периметр; S_n — площадь**)**

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°;$$

$$a_n = 2R \sin \frac{180°}{n};$$

$$a_n = 2r_n \operatorname{tg} \frac{180°}{n};$$

$$r_n = R_n \cos\frac{180^\circ}{n};$$

$$P_n = na_n = 2nR_n \sin\frac{180^\circ}{n};$$

$$S_n = \frac{1}{2}nR_n^2 \sin\frac{360^\circ}{n} =$$

$$= \frac{1}{4}na_n^2 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

64. Длина окружности. Площадь круга и его частей

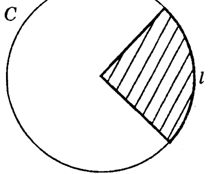
(R — радиус окружности, круга; D — диаметр;

C — длина окружности; l — длина дуги; α — радианная мера центрального угла; n° — градусная мера; S — площадь круга; $S_{\text{сект.}}$ — площадь сектора).

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности.

$$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$$ — длина дуги окружности.

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{2}CR;$$



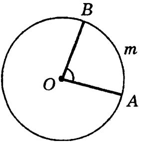
$$\pi = \frac{C}{D} \approx 3{,}14\,;$$

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} R^2 \alpha\,.$$

65. Углы и окружность

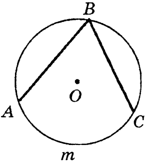
1. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается:

$$\angle AOB = \cup AmB.$$



2. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

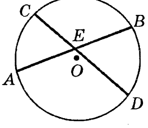
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$



66. Метрические отношения в окружности

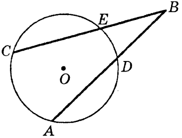
1. ***Если хорды*** AB и CD ***пересекаются*** в точке E, то

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

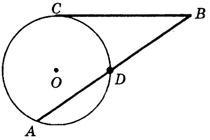


2. Если из точки B к окружности проведены две ***секущие***, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB.$$



3. Если из точки B к окружности проведены ***секущая*** и ***касательная***,



то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной:

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

Часть 2

Стереометрия

67. Призма

1. Произвольная призма

(l — боковое ребро;

P — периметр основания;

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания;

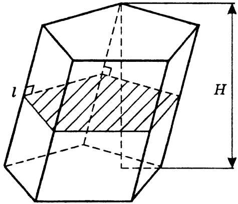
H — высота;

$P_{\text{сеч}}$ — периметр перпендикулярного сечения;

$S_{\text{сеч}}$ — площадь сечения;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

V — объем).



$S_{бок} = P_{сеч} \cdot l;$
$V = S_{сеч} \cdot H;$
$V = S_{сеч} \cdot l.$
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}.$

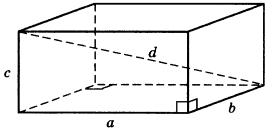
2. Прямая призма

$S_{бок} = P \cdot H;$
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн};$
$V = S_{осн} \cdot H.$

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

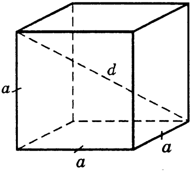
68. Прямоугольный параллелепипед

(a, b, c — измерения, d — диагональ, S — поверхность)



$S_{бок} = P \cdot H$;
$V = abc$;
$S = 2(ab + bc + ac)$;
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

69. Куб (a — ребро)



$V = a^3$;
$d = a\sqrt{3}$.
$S = 6a^2$.

70. Пирамида

1. Произвольная пирамида

($S_{\text{осн}}$ — площадь основания**;**

H — высота**;**

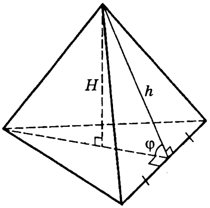
V — объем**).**

$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$

2. Правильная пирамида

(h — апофема**,** H — высота**,** φ — двугранный угол при основании**)**



$$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot h;$$

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos \alpha};$$

$$S_{пол} = S_{бок} + S_{осн};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

3. Произвольная усеченная пирамида

(H — высота;

S_1 и S_2 — площади оснований;

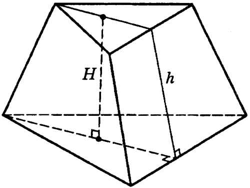
V — объем**);**

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

4. Правильная усеченная пирамида

(h — апофема;

P_1 и P_2 — периметры оснований**)**

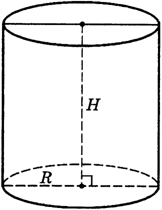


$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h;$$

$$S_{пол} = S_{бок} + S_1 + S_2.$$

71. Цилиндр

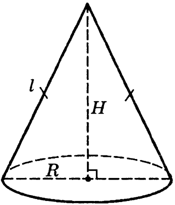
(H — высота;
R — радиус основания)



$S_{\text{бок}} = 2\pi RH;$
$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}};$
$S_{\text{пол}} = 2\pi R(R + H);$
$V = \pi R^2 H.$

72. Конус

(H — высота;
R — радиус основания;
l — образующая)



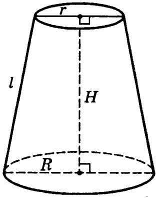
$S_{\text{бок}} = \pi Rl;$
$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$

$S_{\text{пол}} = \pi R(R + l);$

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

Усеченный конус

(H — высота;
l — образующая;



R и r — радиусы оснований)

$S_{бок} = \pi l(R + r)$;

$S_{пол} = S_{бок} + S_1 + S_2$;

$S_1 = \pi R^2$;

$S_2 = \pi r^2$;

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

73. Шар, сфера

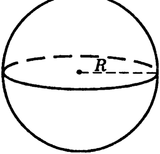
(R — радиус шара;

S — площадь сферической поверхности;

V — объем;

D — диаметр)

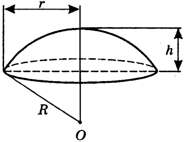
$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$;



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

74. Шаровой сегмент

(R — радиус шара;
h — высота сегмента;
S — площадь сферической поверхности сегмента;



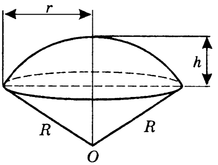
V — объем;
r — радиус основания)

$S = 2\pi Rh = \pi Dh =$
$= \pi(r^2 + h^2)$;

$S_{\text{полн}} = \pi(2Rh + r^2) =$
$= \pi(h^2 + 2r^2)$;

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

75. Шаровой сектор



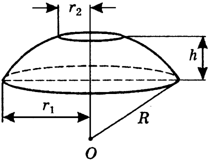
$S = \pi R(2h + r);$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi D^2 h .$$

76. Шаровой пояс

(h — высота пояса;

r_1 и r_2 — радиусы оснований)



$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$
$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Условные обозначения

N — множество натуральных чисел;

Z — множество целых чисел;

Z_0 — множество целых неотрицательных чисел;

Q — множество рациональных чисел;

R — множество действительных чисел (числовая прямая);

C — множество комплексных чисел;

$[a; b]$, или $a \le x \le b$ — замкнутый промежуток (или отрезок) с началом a и концом b;

$(a; b)$, или $a < x < b$ — открытый промежуток (или интервал);

$(a; b]$, или $a < x \le b$; $[a; b)$, или $a \le x < b$ — полуоткрытые промежутки (полуинтервалы);

$[a; +\infty)$, или $x \ge a$; $(-\infty; b]$, или $x \le b$ — лучи;

$(a; +\infty)$, или $x > a$; $(-\infty; b)$, или $x < b$ — открытые лучи;

$(-\infty; +\infty) = R$ — числовая прямая;

$a = b$ — a равно b;

$a \neq b$— a не равно b;

$a \approx b$ — a приближенно равно b;

$a > b$ — a больше b;

$a \geq b$ — a больше или равно b;

$a < b$ — a меньше b;

$a \leq b$— a меньше или равно b;

$a \in A$ — a принадлежит множеству A;

$a \notin A$ — a не принадлежит множеству A;

$B \subset A$ — B является подмножеством A;

$A \cup B$ — объединение множеств A и B;

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;

$\varnothing$ — пустое место;

% — процент;

‰ — промилле;

НОД (a; b) — наибольший общий делитель чисел a и b;

НОК (a; b) — наименьшее общее кратное чисел a и b;

$|a|$ — модуль (абсолютная величина) действительного числа a;

a^n — n-я степень числа a;

$\sqrt[n]{a}$ — корень n-й степени из числа a;

$\sqrt{a}$ — арифметический квадратный корень из числа a;

$\pi \approx 3{,}1415$ — отношение длины окружности к диаметру;

$e \approx 2{,}71828$ — основание натурального логарифма;

$\log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ — логарифм числа x по основанию a;

$\lg x$ — десятичный логарифм числа x;

$\ln x$ — натуральный логарифм числа x;

$\sin x$ — синус x;

$\cos x$ — косинус x;

$\mathrm{tg}\, x$ — тангенс x;

$\mathrm{ctg}\, x$ — котангенс x;

$1/\sin x$ — косеканс x;

$1/\cos x$ — секанс x;

$\arcsin x$ — арксинус x;

$\arccos x$ — арккосинус x;

$\mathrm{arctg}\, x$ — арктангенс x;

$\operatorname{arcctg} x$ — арккотангенс x;

Δx — приращение аргумента;

Δy — приращение функции;

y', $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$ в точке x;

$y_{\text{наиб.}}$, $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ — наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$;

$y_{\text{наим.}}$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ — наименьшее значение функции на отрезке $[a; b]$;

$\int_a^b f(x)dx$ — интеграл функции $f(x)$ от a до b;

A — точка A;

a, AB — прямая a, прямая AB;

α, ABC — плоскость α, плоскость ABC;

ΔABC — треугольник ABC;

$\angle$ — знак угла, например, $\angle(a; b)$, $\angle ABC$;

$\parallel$ — знак параллельности, например, $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$;

$\perp$ — знак перпендикулярности, например, $a \perp b$, $\alpha \perp \beta$;

$\cup$ — знак дуги, например, $\cup AB$;

~ — знак подобия, например, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;

$M(x)$ — точка M на координатной прямой имеет координату x;

$M(x;\ y)$ — точка M в прямоугольной (декартовой) системе координат имеет абсциссу x и ординату y;

$M(x;\ y;\ z)$ — точка в пространстве имеет абсциссу x, ординату y, аппликату z.

Таблицы

Квадраты натуральных чисел от 10 до 99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Кубы натуральных чисел от 1 до 9

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Степени некоторых чисел

n	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8
1	1	1	1	1	1
2	16	32	64	128	256
3	81	243	729	2187	6561
4	256	1024	4096	16384	65536
5	625	3125	15625	78125	390625
6	1296	7776	46656	279936	1679616
7	2401	16807	117649	823543	5764801
8	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	6561	59049	531441	4782969	43046721

Простые числа до 997

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Содержание

Большая перемена

Э.Н. Балаян, З.Н. Каспарова

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ
для подготовки к ГИА и ЕГЭ

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Подписано в печать 30.10.2013.
Формат 60*90/128. Бумага офсетная.
Тираж 10000 экз. Заказ №

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону,
пер. Халтуринский, 80.
Сайт издательства www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Для заметок