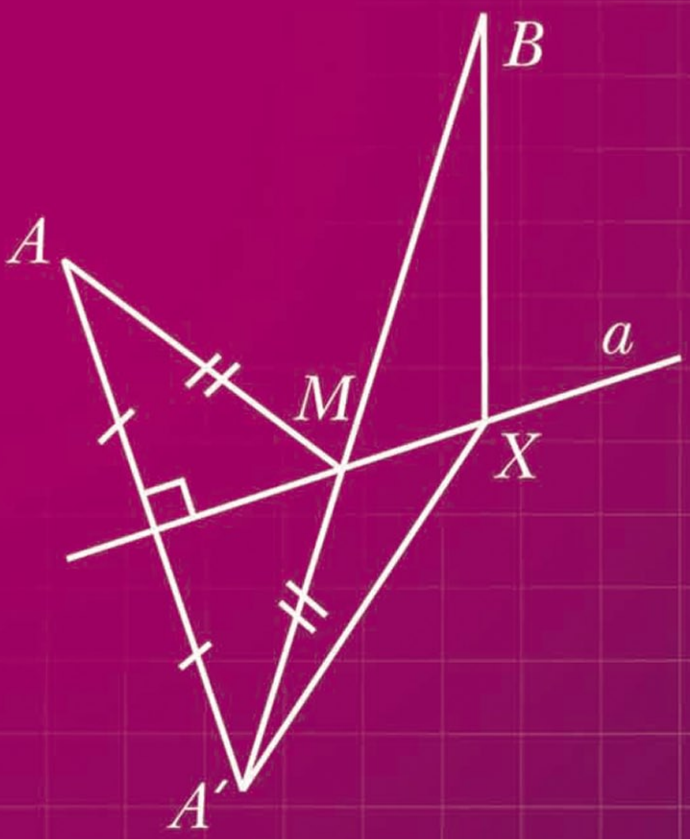


Э.Н. БАЛАЯН

ГЕОМЕТРИЯ

Лучшие задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ

7 - 11 классы

Большая перемена

Э.Н. Балаян

ГЕОМЕТРИЯ

Лучшие задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ

7–11 классы

Ростов-на-Дону
Феникс
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Геометрия : лучшие задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ : 7–11 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2013. — 274 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-21133-5

Предлагаемая вниманию читателя книга содержит более 1000 разноуровневых задач по основным темам программы геометрии 7–11 классов на готовых чертежах.

Задачи 7–9 классов скомпонованы в 3 комплекта, содержащих 49 таблиц, а 10–11 классы — 80 таблиц.

Эти задачи дают возможность учителю в течение минимума времени решить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках.

Кроме того, предлагаемые задачи не только помогут учащимся углубить свои знания, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении курса геометрии, но и представляют хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к успешной сдаче ГИА и ЕГЭ.

Для удобства пользования книгой приводятся подробные решения к наиболее трудным задачам, а также краткие теоретические сведения, сопровождаемые определениями, рисунками и необходимыми справочными материалами. Ко всем задачам даны ответы.

Пособие является прекрасным дополнением к существующим учебникам геометрии, адресовано прежде всего учащимся общеобразовательных школ, лицеев, колледжей, учителям математики, студентам — будущим учителям, а также репетиторам.

УДК 373.167.1:51
ISBN 978-5-222-21133-5 ББК 22.1я72

© Балаян Э.Н., 2013
© Оформление, ООО «Феникс», 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 8

ПЛАНИМЕТРИЯ

Раздел I. **Краткие теоретические сведения** 10

Раздел II. **Задачи в таблицах** 33

VII класс

Таблица 1. Смежные углы 33
Таблица 2. Вертикальные углы 35
Таблица 3. Признаки равенства треугольников 36
Таблица 4. Периметр равнобедренного треугольника 39
Таблица 5. Свойства равнобедренного треугольника 40
Таблица 6. Признаки параллельности прямых 41
Таблица 7. Свойства углов при параллельных прямых 44
Таблица 8. Углы треугольника 45
Таблица 9. Углы треугольника 46
Таблица 10. Некоторые свойства прямоугольных треугольников 49
Таблица 11. Признаки равенства прямоугольных треугольников 51
Таблица 12. Расстояние от точки до прямой 52

VIII класс

Таблица 1. Определение и признаки параллелограмма 53
Таблица 2. Свойства параллелограмма 55
Таблица 3. Свойства параллелограмма 57
Таблица 4. Параллелограмм 58
Таблица 5. Параллелограмм 59
Таблица 6. Трапеция 60
Таблица 7. Трапеция 61
Таблица 8. Площадь прямоугольника 62
Таблица 9. Площадь параллелограмма 63
Таблица 10. Площадь треугольника 65
Таблица 11. Площадь трапеции 67
Таблица 12. Теорема Пифагора 69
Таблица 13. Определение подобных треугольников 74
Таблица 14. Признаки подобия треугольников 77

Таблица 15. Признаки подобия треугольников 79
Таблица 16. Средняя линия треугольника 81
Таблица 17. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике 82
Таблица 18. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике 83
Таблица 19. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике 84
Таблица 20. Касательная к окружности 86
Таблица 21. Центральные и вписанные углы 88
Таблица 22. Четыре замечательные точки треугольника 92
Таблица 23. Вписанная и описанная окружности 94
Таблица 24. Векторы 101
Таблица 25. Средняя линия трапеции 104

IX класс

Таблица 1. Координаты вектора 106
Таблица 2. Простейшие задачи в координатах 107
Таблица 3. Применение метода координат к решению задач 109
Таблица 4. Уравнение окружности 110
Таблица 5. Уравнение прямой 112
Таблица 6. Решение треугольников. Площадь треугольника 113
Таблица 7. Решение треугольников. Теорема синусов 115
Таблица 8. Решение треугольников. Теорема косинусов 117
Таблица 9. Скалярное произведение векторов 119
Таблица 10. Длина окружности. Длина дуги 121
Таблица 11. Площадь круга 123
Таблица 12. Площадь круга 125

СТЕРЕОМЕТРИЯ

***Раздел III*. Краткие теоретические сведения по курсу стереометрии X–XI классов 126**

***Раздел IV*. Задачи в таблицах 135**

X–XI классы

§ 1. Угол между двумя прямыми 135
Таблица 1. Куб 135
Таблица 2. Правильная треугольная призма 138
Таблица 3. Правильная шестиугольная призма 139
Таблица 4. Правильный тетраэдр 141
Таблица 5. Правильная четырехугольная пирамида 142
Таблица 6. Правильная шестиугольная пирамида 143

§ 2. Угол между прямой и плоскостью 144
Таблица 7. Куб 144
Таблица 8. Правильная треугольная призма 146
Таблица 9. Правильная шестиугольная призма 147
Таблица 10. Правильный тетраэдр 149
Таблица 11. Правильная четырехугольная пирамида 150
Таблица 12. Правильная шестиугольная пирамида 151
§ 3. Угол между двумя плоскостями 152
Таблица 13. Куб 152
Таблица 14. Правильная треугольная призма 153
Таблица 15. Правильная шестиугольная призма 154
Таблица 16. Правильная четырехугольная пирамида 156
Таблица 17. Правильная шестиугольная пирамида 157
§ 4. Расстояние от точки до прямой 158
Таблица 18. Куб 158
Таблица 19. Правильная треугольная призма 160
Таблица 20. Правильная шестиугольная призма 161
Таблица 21. Правильная шестиугольная пирамида 163
§ 5. Расстояние от точки до плоскости 164
Таблица 22. Куб 164
Таблица 23. Правильная треугольная призма 166
Таблица 24. Правильная шестиугольная призма 168
Таблица 25. Правильная четырехугольная пирамида 170
Таблица 26. Правильная шестиугольная пирамида 171
§ 6. Расстояние между двумя прямыми 172
Таблица 27. Куб 172
Таблица 28. Правильная треугольная призма 174
Таблица 29. Правильная шестиугольная призма 175
Таблица 30. Правильная четырехугольная пирамида 176
Таблица 31. Правильная шестиугольная пирамида 177
§ 7. Площади сечений многогранников 178
Таблица 32. Куб 178
Таблица 33. Прямоугольный параллелепипед 180
Таблица 34. Правильная треугольная призма 181
Таблица 35. Правильная шестиугольная призма 182
Таблица 36. Правильный тетраэдр 183
Таблица 37. Правильная четырехугольная пирамида 184
Таблица 38. Многогранники 185
§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур 186
Таблица 39. Квадрат 186

Таблица 40. Прямоугольник 187
Таблица 41. Прямоугольный треугольник 188
Таблица 42. Равнобедренный треугольник 189
Таблица 43. Ромб 190
Таблица 44. Круг и его части 191
Таблица 45. Правильный шестиугольник 192
§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур 192
Таблица 46. Квадрат 192
Таблица 47. Прямоугольник 193
Таблица 48. Прямоугольный треугольник 194
Таблица 49. Равнобедренный треугольник 195
Таблица 50. Трапеция 196
Таблица 51. Ромб 197
Таблица 52. Правильный шестиугольник 198
Таблица 53. Многоугольник 198
Таблица 54. Круг и его части 199
§ 10. Объемы тел вращения многогранников 200
Таблица 55. Куб 200
Таблица 56. Правильная треугольная призма 200
Таблица 57. Правильная четырехугольная пирамида 201
Таблица 58. Правильная шестиугольная пирамида 201
Таблица 59. Многогранники 202

***Раздел V*. Разные задачи** 203
§ 11. Многогранники 203
Таблица 60. Куб 203
Таблица 61. Прямоугольный и прямой параллелепипеды 205
Таблица 62. Правильная и прямая треугольная призмы 207
Таблица 63. Правильная четырехугольная призма 209
Таблица 64. Правильная шестиугольная призма 210
Таблица 65. Правильная треугольная пирамида 211
Таблица 66. Правильный тетраэдр 214
Таблица 67. Треугольная пирамида 215
Таблица 68. Треугольная усеченная пирамида 216
Таблица 69. Правильная четырехугольная пирамида 217
Таблица 70. Четырехугольная пирамида 219
Таблица 71. Правильная четырехугольная усеченная пирамида 220
Таблица 72. Правильная шестиугольная пирамида 221
Таблица 73. Многогранники 222
§ 12. Фигуры вращения **223**
Таблица 74. Цилиндр 223

Таблица 75. Конус 225
Таблица 76. Усеченный конус 227
Таблица 77. Шар 228
Таблица 78. Треугольник 229
Таблица 79. Прямоугольник 231
Таблица 80. Параллелограмм и трапеция 232

***Раздел VI*. Решения наиболее трудных задач** 234
VII класс 234
VIII класс 235
IX класс 242
X–XI классы 247

Ответы 258

Предисловие

На начальном этапе изучения геометрии основную трудность для учащихся представляет выполнение чертежа. Кроме того, на его выполнение расходуется много времени.

Предлагаемое вниманию читателя пособие ставит целью устранить этот пробел с помощью готовых чертежей.

Задачи на готовых чертежах оказывают неоценимую помощь в усвоении и закреплении новых понятий и теорем. Эти задачи дают возможность в течение минимума времени усвоить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках.

Кроме того, эти задачи способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, обучают умению грамотно рассуждать, находить в них общее и делать различия, сопоставлять и противопоставлять, делать правильные выводы.

В книге на всех чертежах равные углы и отрезки отмечены одинаковыми знаками, прямые углы — квадратиками, что дает возможность учащимся значительно быстрее ориентироваться в условиях задачи.

Предлагаемая методика проведения уроков с использованием задач на готовых чертежах несомненно способствует повышению творческой активности учащихся, развитию логического мышления, является эффективным средством усвоения и закрепления теоретического материала.

Книга состоит из шести разделов.

В первом и третьем разделах, для удобства пользования книгой, приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии (планиметрии и стереометрии), сопровождаемые необходимыми определениями, свойствами и справочными материалами. Изложение материала сжатое, в конспективной форме, но достаточное, чтобы им мог пользоваться не только школьник, но и тот, кто незнаком с каким-либо разделом, и тот, кто окончил школу ранее и изрядно позабыл материал.

Во втором и четвертом разделах приводятся наиболее интересные задачи, составленные в виде таблиц с готовыми рисунками.

Количество задач в самих таблицах — различно, среди них есть легкие, а более сложные расположены, как правило, в конце каждой таблицы, что дает возможность учителю вести дифференцированное обучение учащихся, а старшекласснику выбрать те или иные задачи в зависимости от уровня своей подготовленности.

В пятом разделе автором собраны разные задачи на многогранники и фигуры вращения.

В заключительном, шестом разделе приводятся подробные решения к наиболее трудным задачам.

Ко всем задачам в конце книги даны ответы, что дает возможность проверить правильность решенной задачи.

Отметим, что предлагаемые задачи не ставят целью заменить систему задач из существующих учебников по геометрии, а являются лишь (как надеется автор) прекрасным дополнением к учебникам. Они дают возможность учителю сэкономить значительную часть времени на изучение соответствующих тем и способствуют усилению практической направленности преподавания геометрии.

В дополнениие к этой книге и для основательной подготовки к урокам, ГИА и ЕГЭ, автор настоятельно рекомендует использовать вышедшие в издательстве «Феникс» книги автора «Репетитор по геометрии для подготовки к ГИА и ЕГЭ. 7–11 классы», 2013 и книгу «Сборник задач по геометрии с решениями для подготовки к ГИА и ЕГЭ. 7–11 классы», 2013.

Раздел I

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Планиметрия

1. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

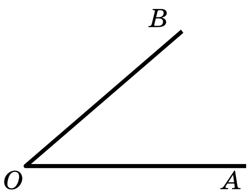


Рис. 1

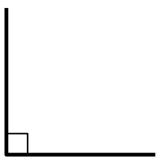


Рис. 2

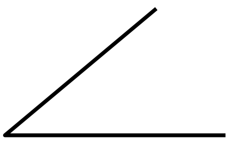


Рис. 3

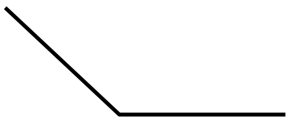


Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

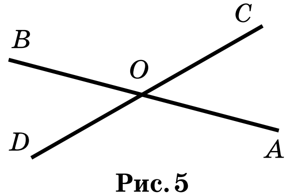


Рис. 5

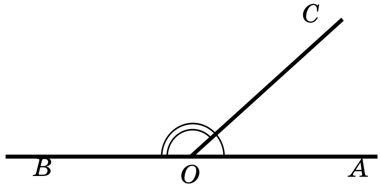


Рис. 6

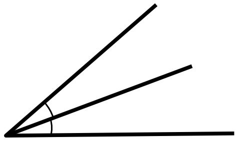


Рис. 7

Сумма смежных углов равна 180°.

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

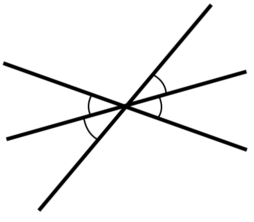


Рис. 8

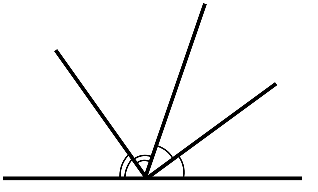


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

соответственные углы:
$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;
внутренние накрест лежащие:
$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;
внешние накрест лежащие:
$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;
внутренние односторонние:
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;
внешние односторонние:
$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

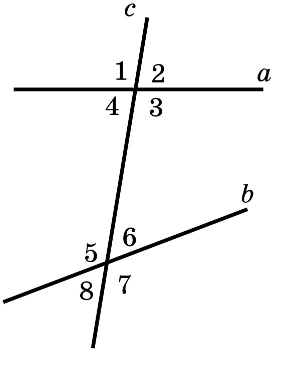


Рис. 10

2. Многоугольник

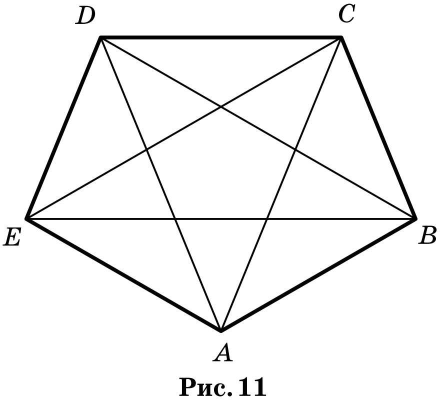


Рис. 11

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ — углы; AB, BC, CD и т. д. — стороны; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + ... + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$.
2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.
3. В выпуклом n-угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n-угольник на $(n - 2)$ треугольников.
4. В выпуклом n-угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

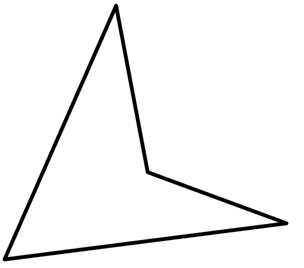


Рис. 12

3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным.**

Свойства:

1. Каждый угол правильного n-угольника равен $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.
2. Около правильного n-угольника можно описать окружность, и притом только одну.
3. В правильный n-угольник можно вписать окружность, и притом только одну.
4. Окружность, вписанная в правильный n-угольник, касается всех сторон n-угольника в их серединах.
5. Центр окружности, описанной около правильного n-угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n-угольник.
6. Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a = 2R\sin\frac{180°}{n}$.
7. Длина стороны правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r, равна $a = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$.

4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

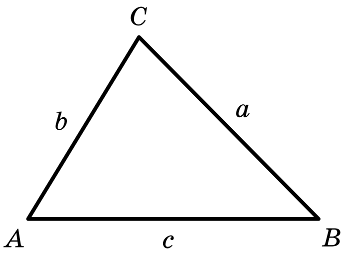


Рис. 13

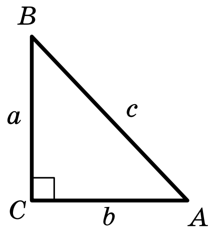


Рис. 14

Точки A, B, C — **вершины** ΔABC.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — **углы.**

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c,\ BC = a,\ AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** (c).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

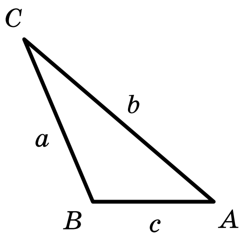


Рис. 15

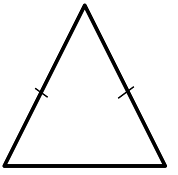


Рис. 16

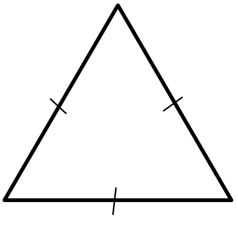


Рис. 17

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.

4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18): $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

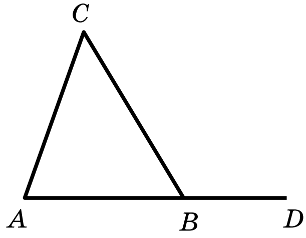


Рис. 18

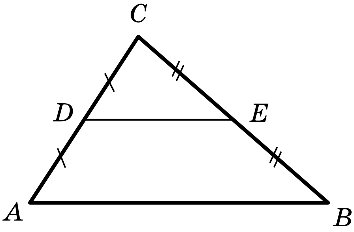


Рис. 19

5. Признаки равенства треугольников

I признак *(признак равенства по двум сторонам и углу между ними)*

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

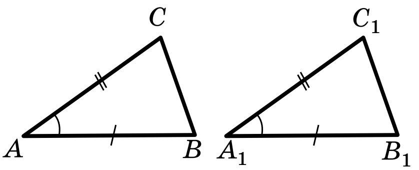


Рис. 20

II признак *(признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам)*

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

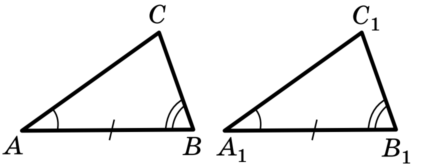


Рис. 21

III признак *(признак равенства по трем сторонам)*

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

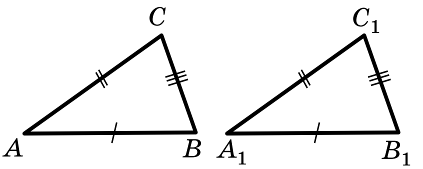


Рис. 22

6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$

7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:
а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;
б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный;
в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90°.$$

2) Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

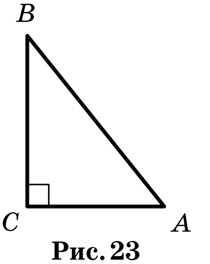


Рис. 23

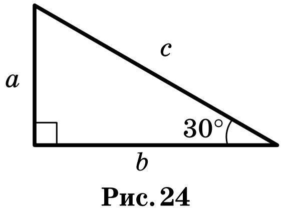


Рис. 24

9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. **Если катеты** одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1.$$

2. **Если катет и прилежащий к нему острый угол** одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1.$$

3. **Если гипотенуза и острый угол** одного прямоугольного треугольника

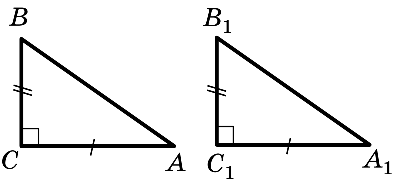


Рис. 25

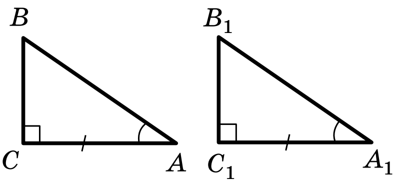


Рис. 26

соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1,\ \angle A = \angle A_1.$$

4. **Если гипотенуза и катет** одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1.$$

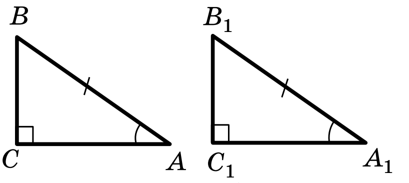


Рис. 27

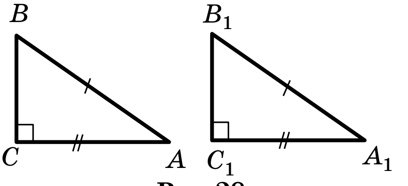


Рис. 28

10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

1) точка пересечения медиан;

2) точка пересечения биссектрис;

3) точка пересечения высот (или их продолжений);

4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противолежащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

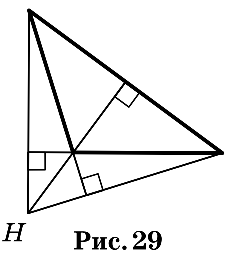


Рис. 29

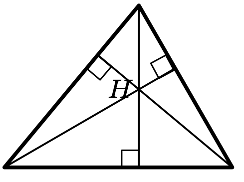


Рис. 30

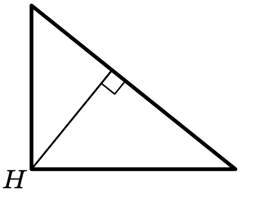


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

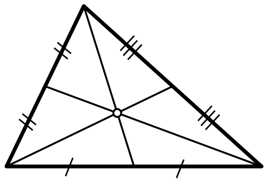


Рис. 32

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противолежащей стороной.

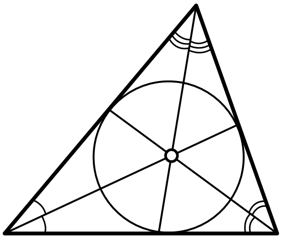


Рис. 33

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности.**

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине** гипотенузы.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

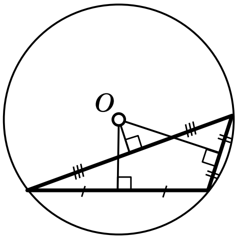


Рис. 34

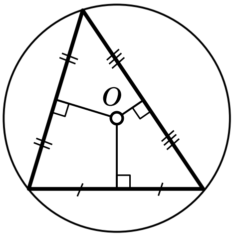


Рис. 35

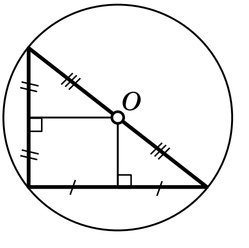


Рис. 36

11. Произвольный треугольник

1) **Свойство биссектрисы** (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

2) **Длина биссектрисы:**

$$l_c=\sqrt{ab-a_1b_1};$$

$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

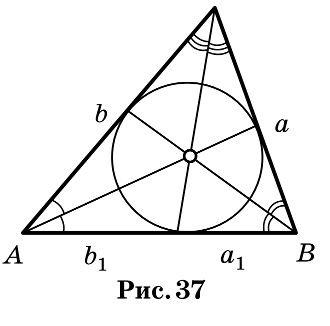


Рис. 37

3) Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}\ .$$

4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,$$

где a, b, c — стороны треугольника,

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр,

h_c — высота, проведенная к стороне c.

5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\,.$$

6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}\,.$$

12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE, AD и CF (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} = 1.$$

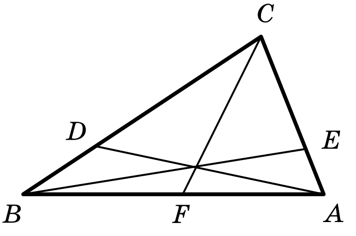


Рис. 38

13. Теорема Менелая

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC ΔABC за точку C отмечены соответственно точки A_1, C_1 и B_1, лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

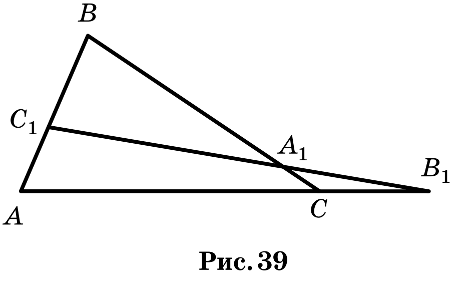


Рис. 39

14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

16. Площадь треугольника

1) $S = \frac{1}{2}ah_a$;

2) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);

4) $S = p\,r$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$;

5) $S = \frac{abc}{4R}$;

6) $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$.

17. Равносторонний (правильный) треугольник (рис. 40)

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$;

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

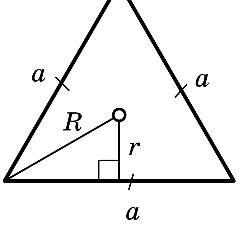


Рис. 40

18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

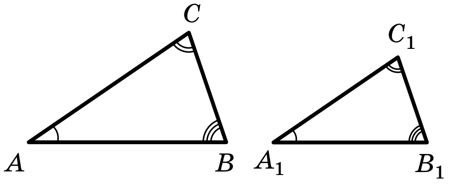


Рис. 41

AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2, т. е. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2$.

19. Признаки подобия треугольников

I признак: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = A_1,\ \angle B = B_1.$$

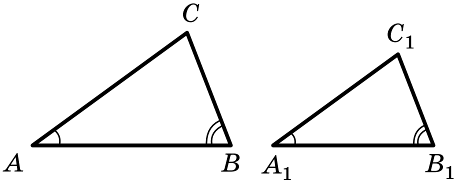


Рис. 42

II признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

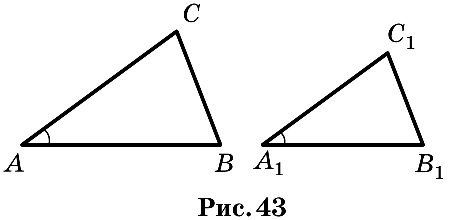


Рис. 43

III признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

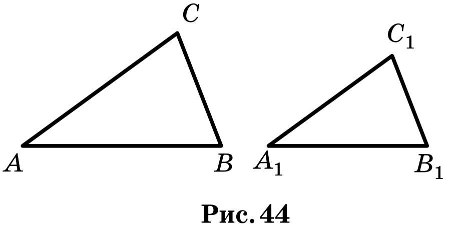


Рис. 44

Площади подобных фигур (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, **площади кругов** относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

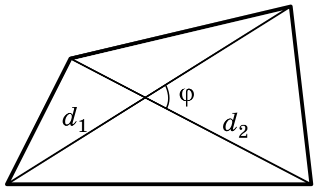


Рис. 45

20. Четырехугольник

1. Произвольный выпуклый (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

2. Вписанный (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°.$$

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1 d_2$$

(теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

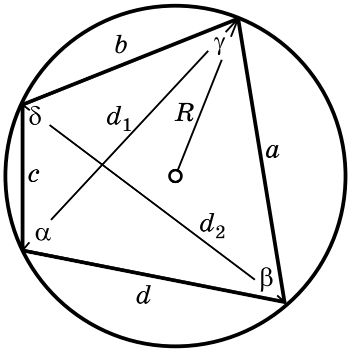


Рис. 46

3. Описанный.

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

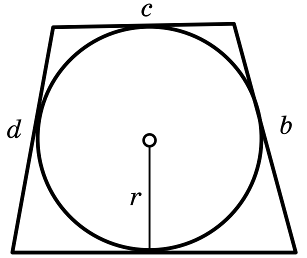


Рис. 47

21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ — площадь параллелограмма.

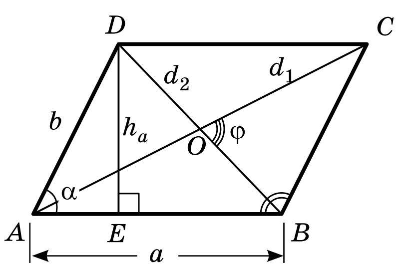


Рис. 48

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна $180°$ ($\angle A + \angle B = 180°$ и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\Delta ADC = \Delta ABC$, $\Delta ABD = \Delta BCD$).

5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

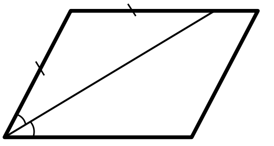


Рис. 49

Признаки параллелограмма (рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel CD$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = BC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

22. Трапеция

a и b – основания; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними (рис. 50).

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC — основания трапеции, AD и BC — боковые стороны.

Отрезок l, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции.**

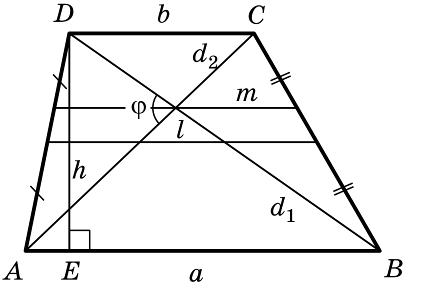


Рис. 50

$l = \dfrac{1}{2}(a + b)$ — длина средней линии трапеции.

$m \parallel a \parallel b$, $m = \dfrac{2ab}{a+b}$.

$\angle A + \angle D = 180°$; $\angle B + \angle C = 180°$.

$S = l \cdot h = \dfrac{1}{2}(a + b) \cdot h = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi$ — площадь трапеции.

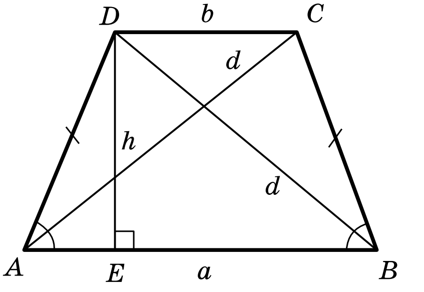


Рис. 51

1. Равнобедренная трапеция

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется равнобедренной (рис. 51).

$$AD = BC.$$

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2}\,(a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$AB + CD = 2AD$ (рис. 52).

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

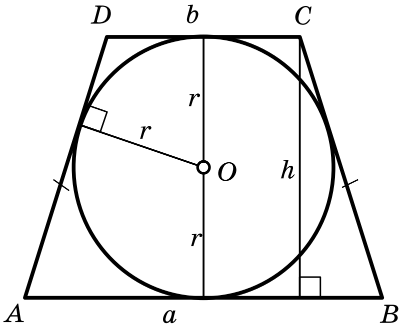


Рис. 52

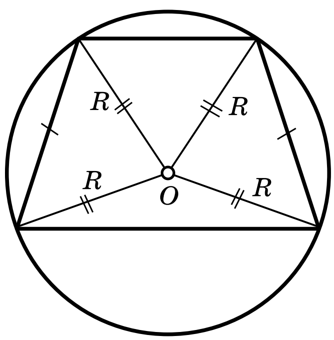


Рис. 53

2. Прямоугольная трапеция

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется **прямоугольной** (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90^\circ.$$

$BE = CD = h$ (высота трапеции).

$$AE = a - b.$$

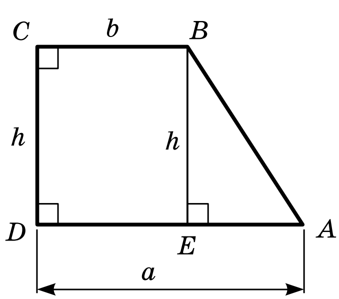


Рис. 54

23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

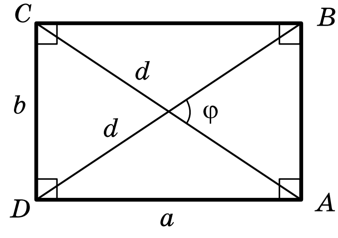


Рис. 55

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, **у прямоугольника диагонали равны.**

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi.$$

24. Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

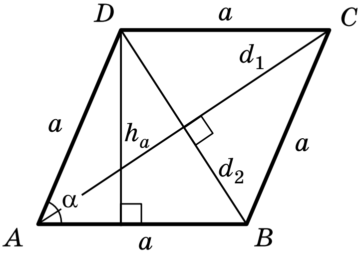


Рис. 56

$$AC \perp BD.$$

AC — биссектриса углов A и C; BD — биссектриса углов B и D.

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

25. Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

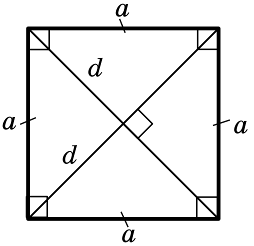


Рис. 57

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

26. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом.**

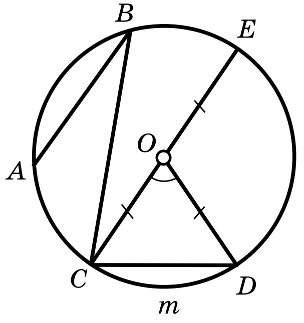


Рис. 58

Обозначение: r или R.

На рисунке $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой.**

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром.**

AB, BC, CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D.

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом.**

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом.**

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором.**

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральным** ($\angle COD$ на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например, $\angle ABC$).

27. Свойства касательных к окружности

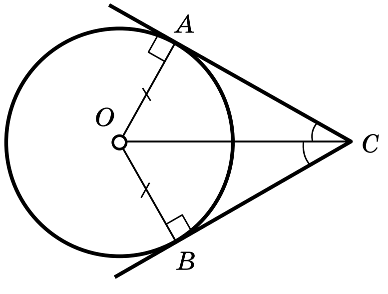


Рис. 59

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 59).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.
2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

28. Окружность и треугольник

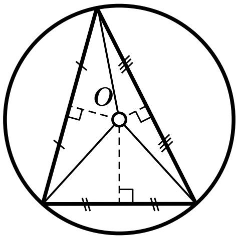


Рис. 60

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).
2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

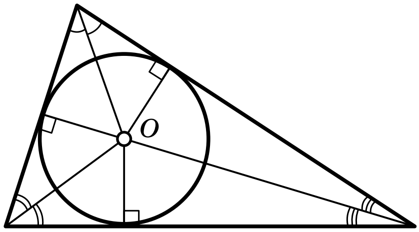


Рис. 61

29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180°.$$

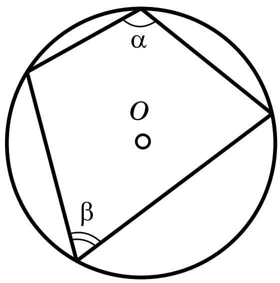


Рис. 62

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

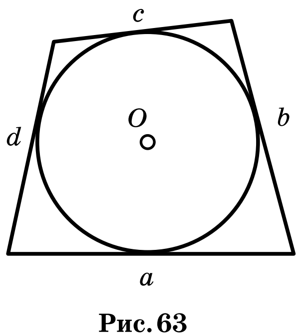


Рис. 63

30. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64).

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AmC.$$

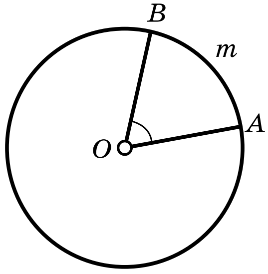


Рис. 64

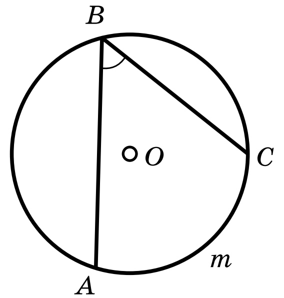


Рис. 65

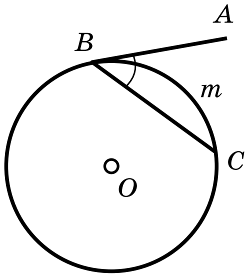


Рис. 66

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnC).$$

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68).

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\cup AmC + \cup BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup CnD).$$

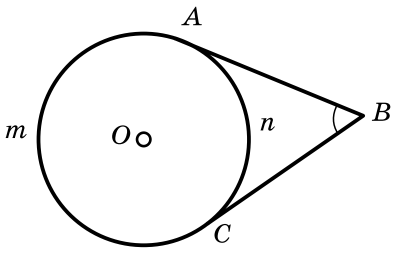


Рис. 67

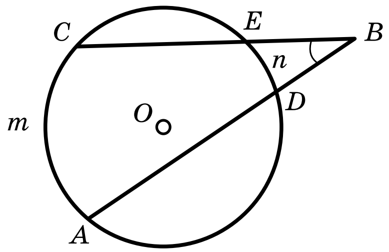


Рис. 69

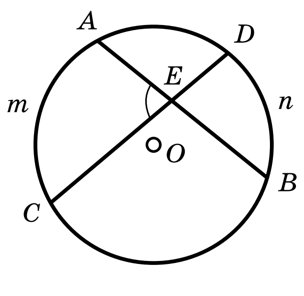
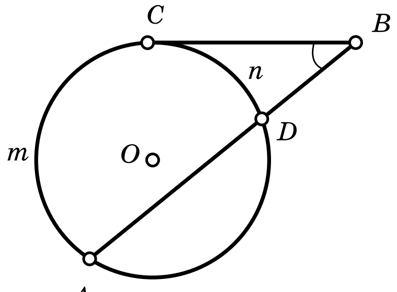


Рис. 68



A

Рис. 70

31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E, то **произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой** (рис. 71).

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC, то **произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной** (рис. 73).

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

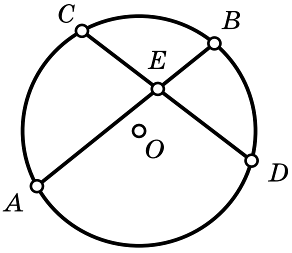


Рис. 71

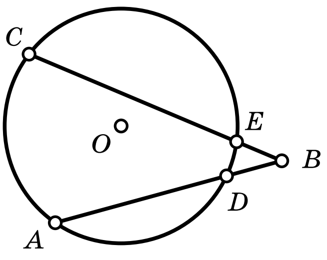


Рис. 72

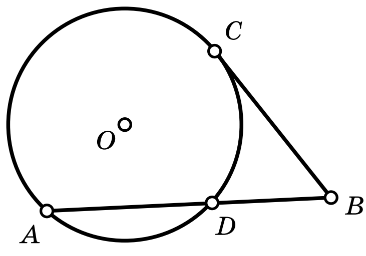


Рис. 73

32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$l = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$ — длина дуги окружности;

$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \dfrac{1}{4}\pi D^2 = \dfrac{1}{2}CR$ — площадь круга;

$\pi = \dfrac{C}{D} \approx 3{,}14$ — отношение длины окружности к ее диаметру;

$S_{\text{сект.}} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ — площадь сектора.

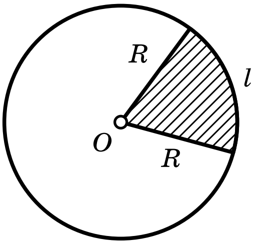


Рис. 74

33. Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок (рис. 75).

Всякий вектор характеризуется:

1) начальной точкой;
2) направлением;
3) длиной (модулем).

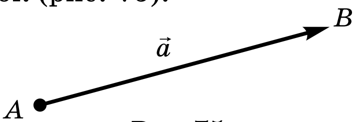


Рис. 75

Длиной (модулем) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

34. Равенство векторов

Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются *коллинеарными* (рис. 76).

Коллинеарные векторы:

$\vec{a}$, $\vec{m}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Неколлинеарные векторы:

$\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{ST}$.

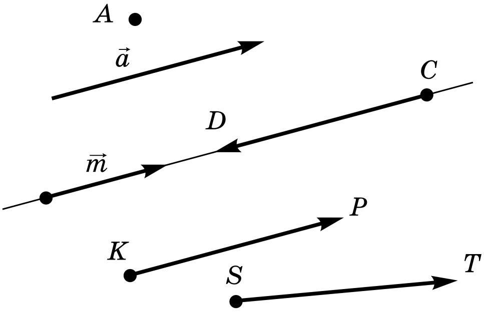


Рис. 76

Коллинеарные векторы называются *сонаправленными*, если они имеют одинаковые направления.

Например, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$, $\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$.

Коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*, если они имеют разные направления.

Например, $\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\vec{m}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KP}$.

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

35. Координаты вектора

Пусть $A(x_1; y_1)$ — начало вектора $\vec{a}$, $B(x_2; y_2)$ — конец вектора $\vec{a}$ (рис. 75).

Координатами вектора $\vec{a}$ называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и обозначают $\vec{a}(a_1; a_2)$.

Тогда абсолютная величина (модуль) вектора с координатами a_1, a_2 равна $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Если векторы равны, то у них равны соответствующие координаты. И обратно, если у векторов равны соответствующие координаты, то векторы равны.

36. Действия над векторами

1. Сумма двух векторов.

Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство (рис. 77):

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \text{ (правило треугольника),}$$

$$\text{или } \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$$

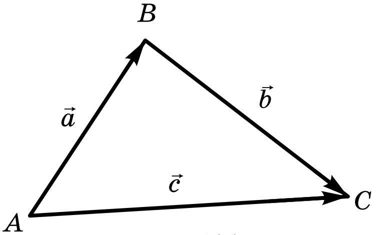


Рис. 77

2. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 78): сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало, изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

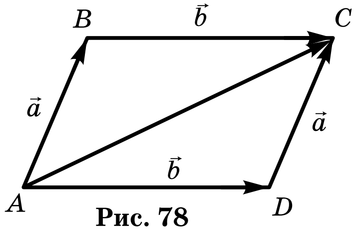


Рис. 78

3. Для векторов справедливы *переместительный* и *сочетательный* законы сложения:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

4. *Разностью векторов* $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ называется такой вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т. е.

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a} \text{ (рис. 79).}$$

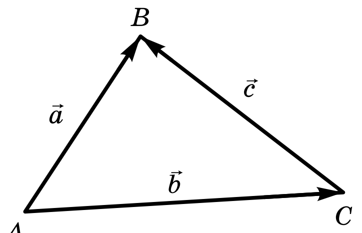


Рис. 79

5. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ *на число* k называется вектор $k\vec{a}(ka_1;\ ka_2)$.

Из определения следует, что:

1) *произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;*

2) *для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.*

Основные свойства умножения вектора на число:

1) $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ — *сочетательный* закон;

2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ — *I распределительный* закон;

3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ — *II распределительный* закон.

37. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80).

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$

1) Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\alpha=90^\circ$, $\cos\alpha=0$, тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Верно и обратное: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

2) Если $\alpha<90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$; если $\alpha>90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.

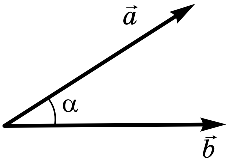


Рис. 80

38. Скалярное произведение в координатах

Если $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Следствие 1. $\vec{a} \perp \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Следствие 2. $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где α — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$.

39. Свойства скалярного произведения векторов

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон);
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон);
4) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

40. Уравнение окружности

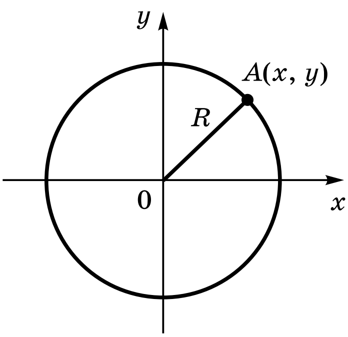


Рис. 81

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности $M(x_0;\ y_0)$, то уравнение окружности имеет вид (рис. 82)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

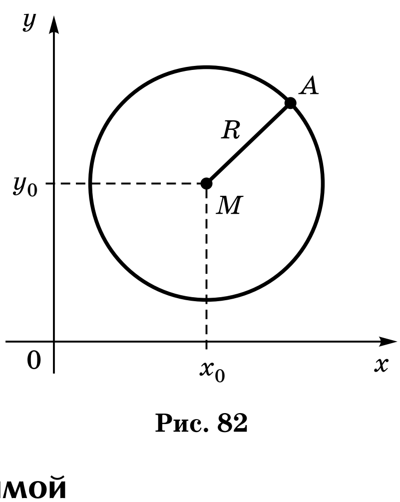


Рис. 82

41. Уравнение прямой

1) Любая прямая в декартовых координатах x и y задается уравнением вида $ax + by + c = 0$, где a и b — коэффициенты при неизвестных, c — свободный член.

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $y = -\frac{c}{b}$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox (рис. 83).

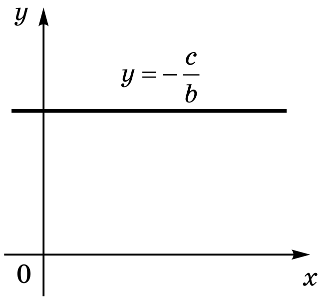


Рис. 83

3) Если $b = 0$, $a \neq 0$, то $x = -\frac{c}{a}$ — уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 84).

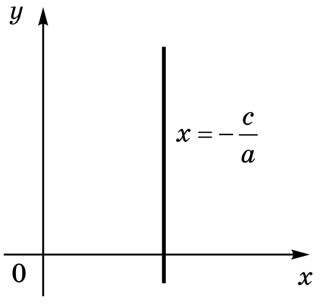


Рис. 84

4) Если $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $ax + by = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат (0; 0) (рис. 85).

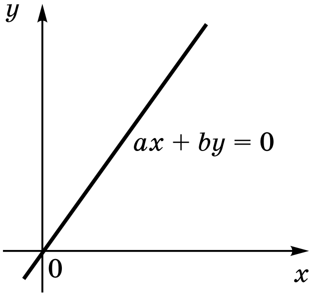


Рис. 85

Раздел II

ЗАДАЧИ В ТАБЛИЦАХ

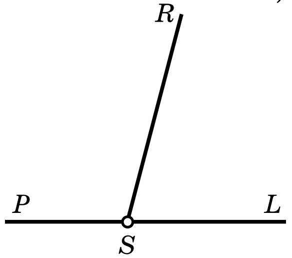
VII класс

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

Таблица 1

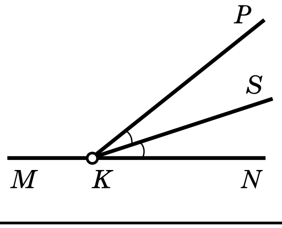
1

$\angle RLS = 80\%\ \angle PLR$
$\angle PLR,\ \angle RLS$ — ?



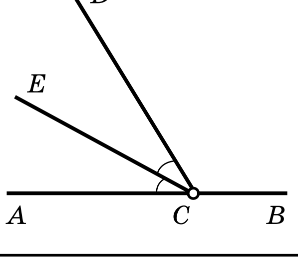
2

$\angle PKN = 40°$
$\angle MKS$ — ?



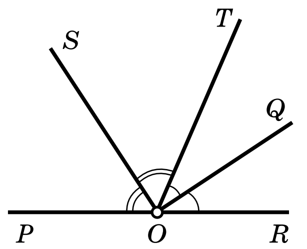
3

$\angle BCD = 120°$
$\angle BCE$ — ?



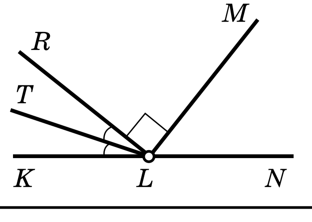
4

$\angle SOQ$ — ?



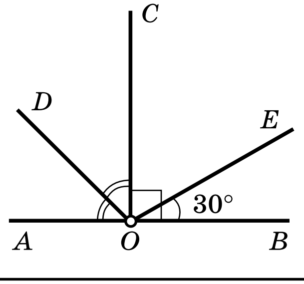
5

$\angle KLR = 40°$
$\angle TLN$ — ?



6

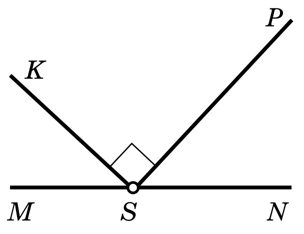
$\angle DOE$ — ?



Окончание табл. 1

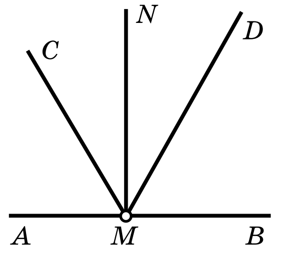
7

$\angle MSP = \angle NSK$
$\angle MSP$ — ?



8

$\angle AMN$, $\angle BMN$ — ?



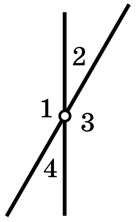
ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Таблица 2

1

$\angle 1 - \angle 2 = 120°$

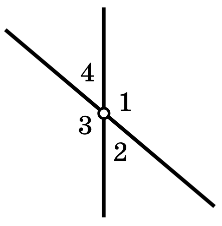
$\angle 3,\ \angle 4$ — ?



2

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 5\ \angle 4$

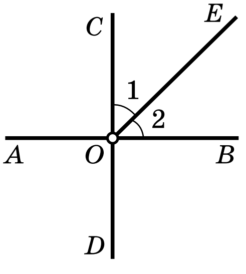
$\angle 4$ — ?



3

$AB \perp CD$

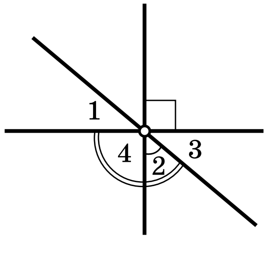
$\angle AOE$ — ?



4

$\angle 1 = 40°$

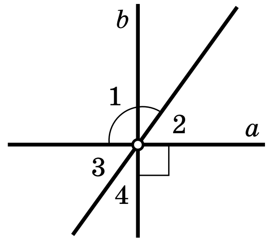
$\angle 2,\ \angle 3,\ \angle 4$ — ?



5

$\angle 1 = 125°$

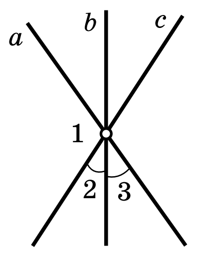
$\angle 2,\ \angle 3,\ \angle 4$ — ?



6

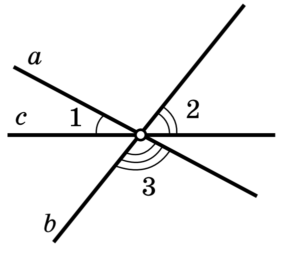
$\angle 1 - \angle 2 = 75°$

$\angle 1,\ \angle 2,\ \angle 3$ — ?



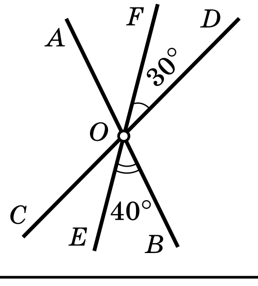
7

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ — ?



8

$\angle AOC$ — ?

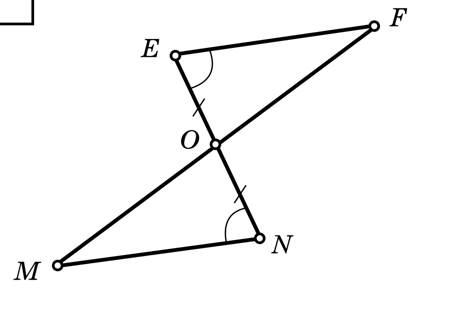


ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

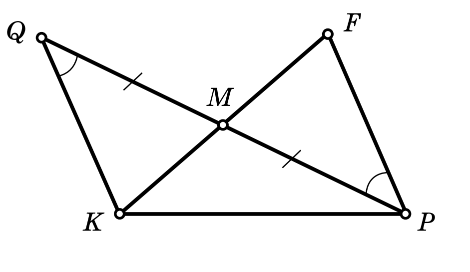
Таблица 3

Найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.

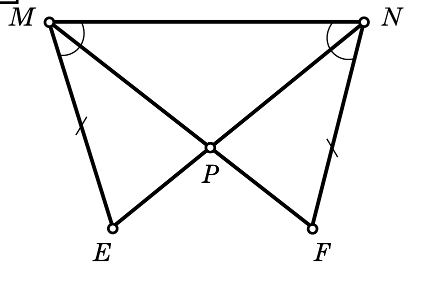
1



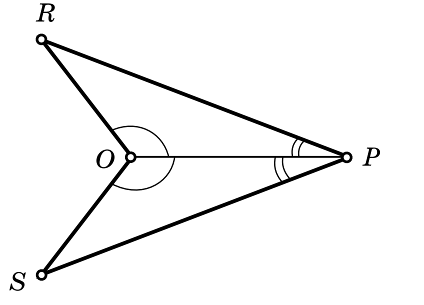
2



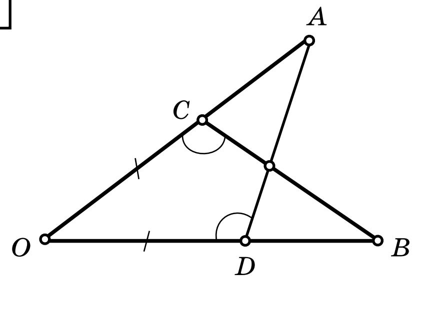
3



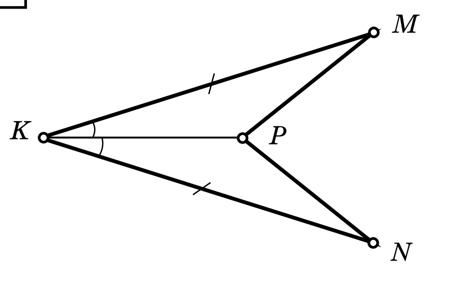
4



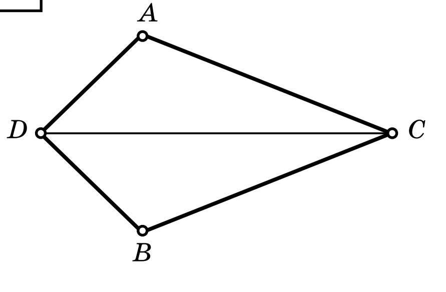
5



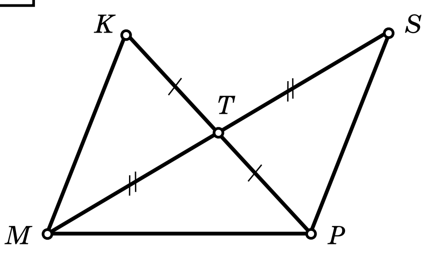
6



7



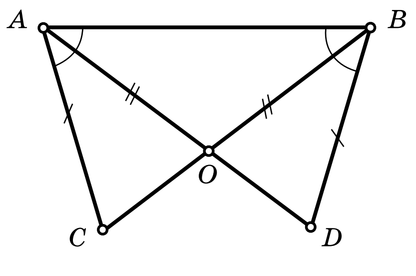
8



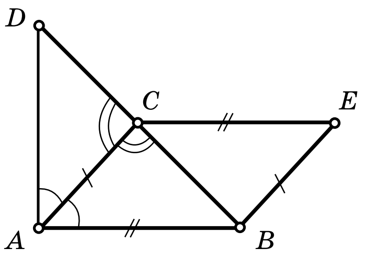
Продолжение табл. 3

9

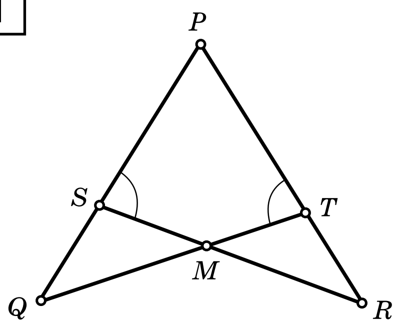
$BC = AD$



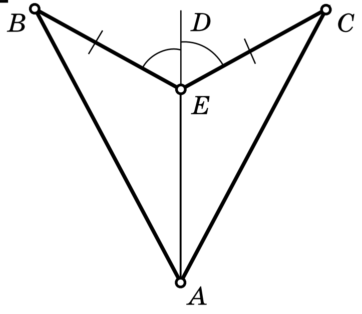
10



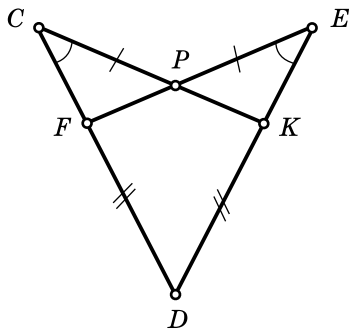
11



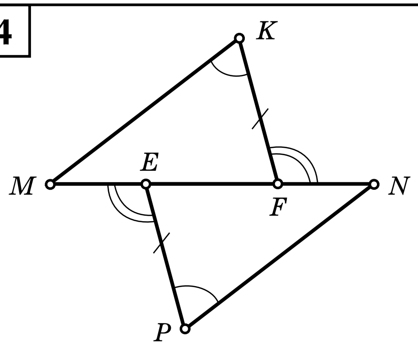
12



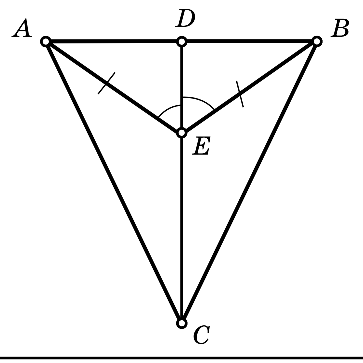
13



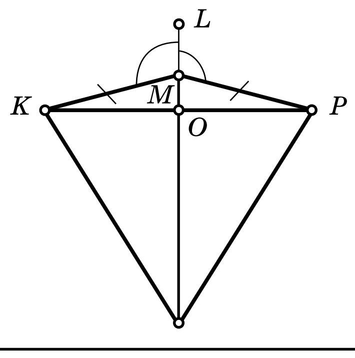
14



15

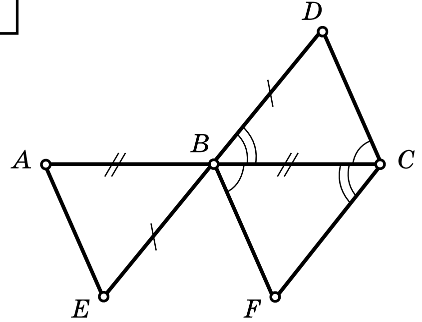


16

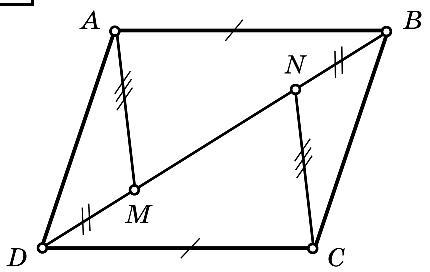


Окончание табл. 3

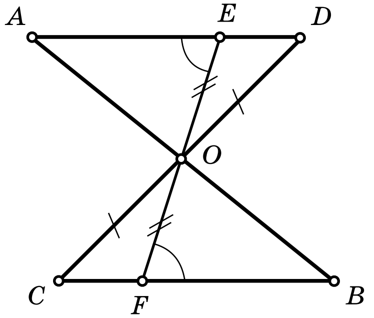
17



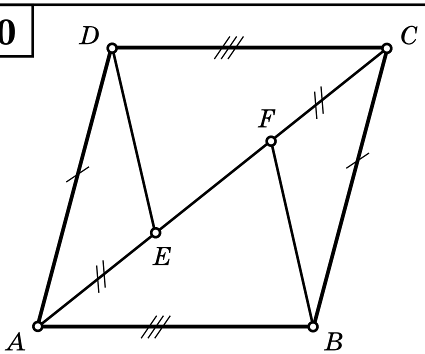
18



19

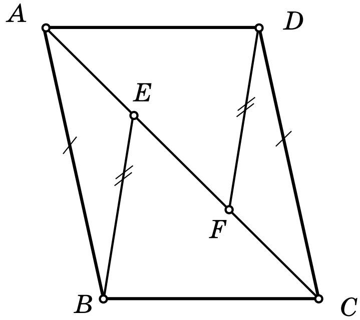


20

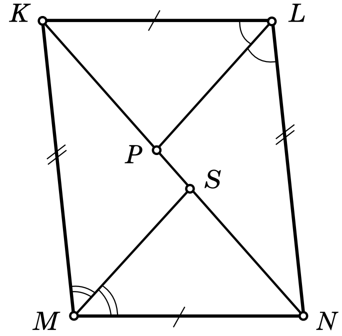


21

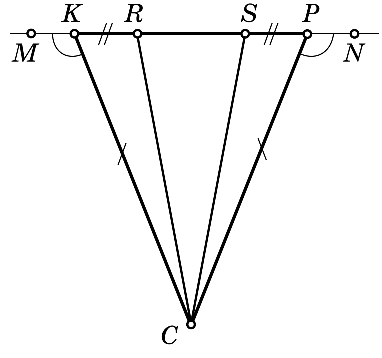
$CE = AF$



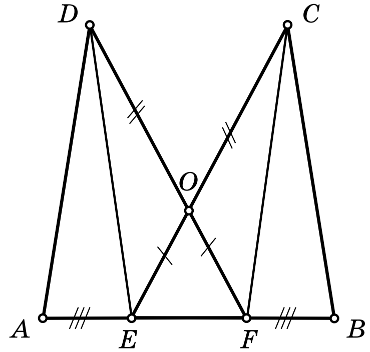
22



23



24

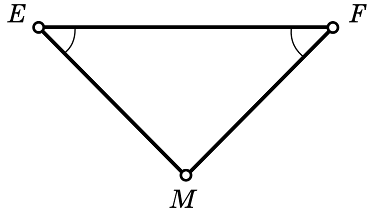


ПЕРИМЕТР РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 4

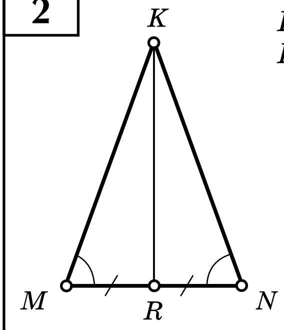
1

$P = 35$
$EF : EM = 3 : 2$
$EF,\ EM,\ MF$ — ?



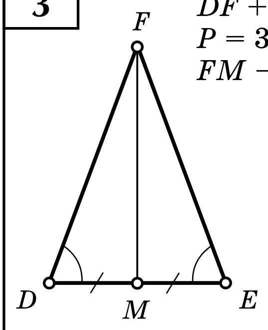
2

$KM + MR = 25$
P — ?



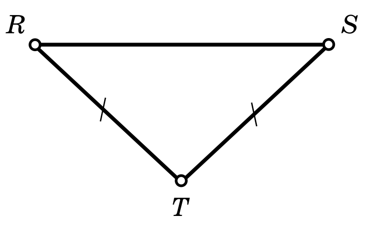
3

$DF + FM + DM = 28$
$P = 36$
FM — ?



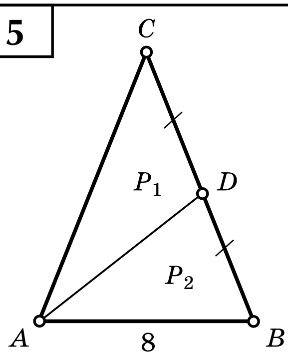
4

$RT : RS = 4 : 7$
$P = 45$
$RT,\ TS,\ RS$ — ?



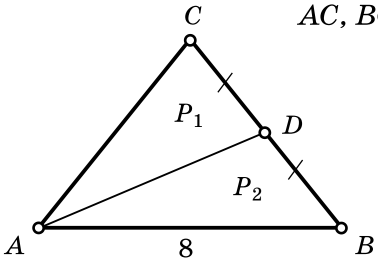
5

$AC = BC$
$P_1 - P_2 = 2$
$AC,\ BC$ — ?



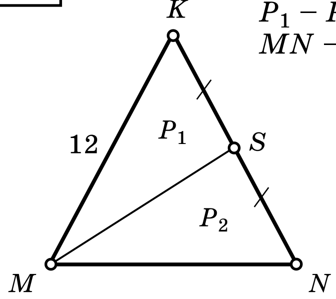
6

$AC = BC$
$P_2 - P_1 = 2$
$AC,\ BC$ — ?



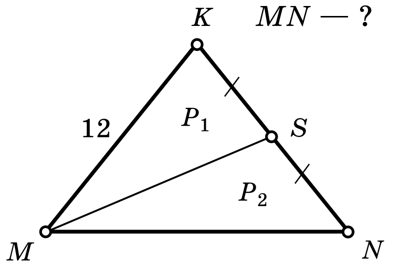
7

$MK = KN = 12$
$P_1 - P_2 = 3$
MN — ?



8

$MK = KN = 12$
$P_2 - P_1 = 3$
MN — ?

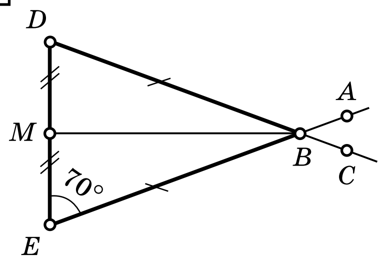


СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

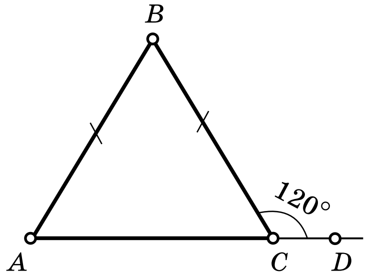
Таблица 5

Найдите $\angle CBA$.

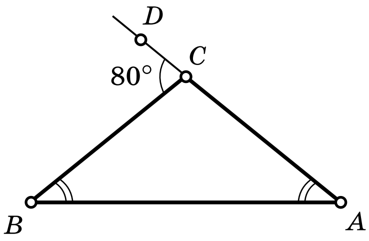
1



2

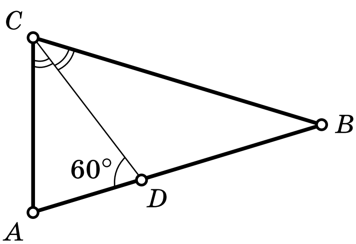


3

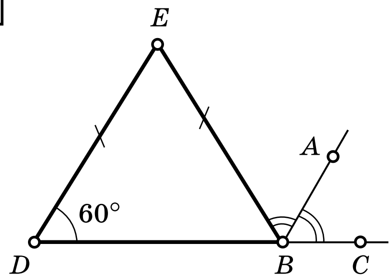


4

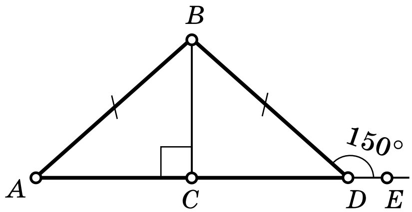
$BC = AB$



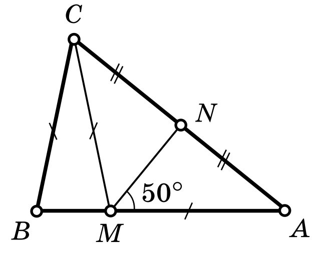
5



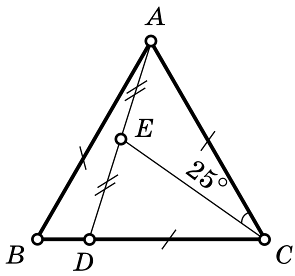
6



7



8

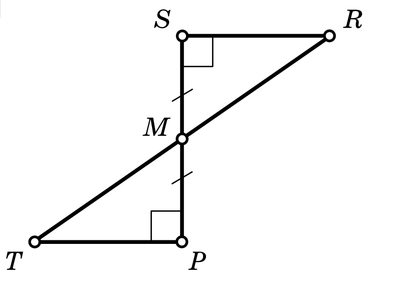


ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

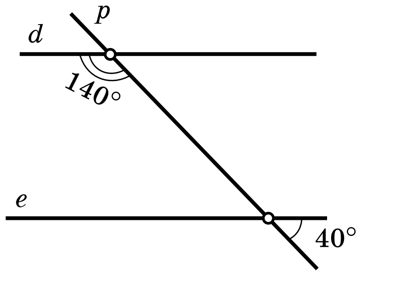
Таблица 6

Укажите пары параллельных прямых (отрезков) и докажите их параллельность.

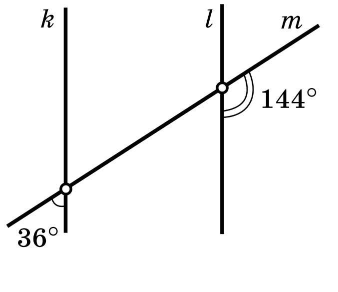
1



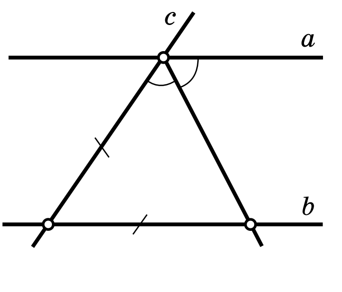
2



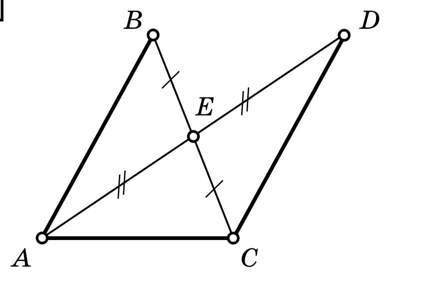
3



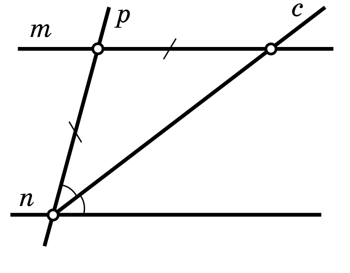
4



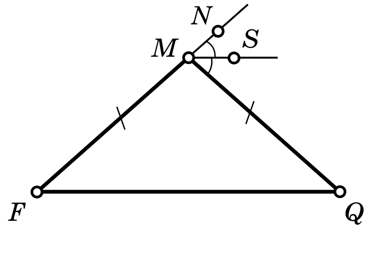
5



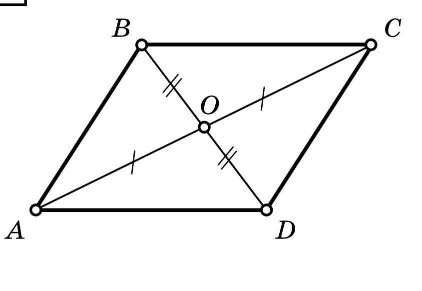
6



7

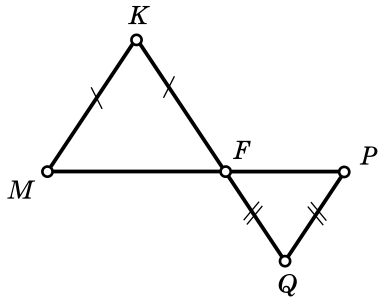


8

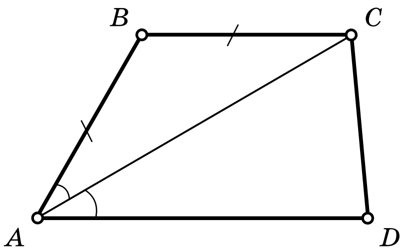


Продолжение табл. 6

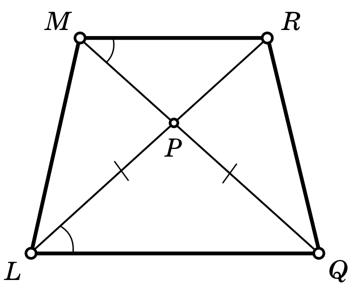
9



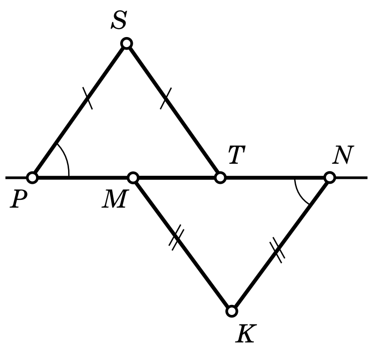
10



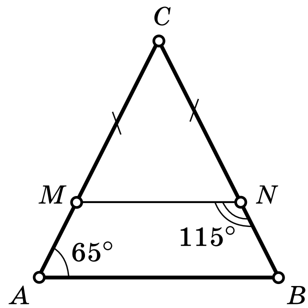
11



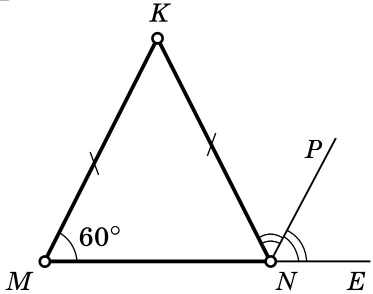
12



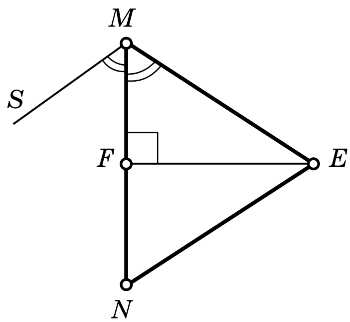
13



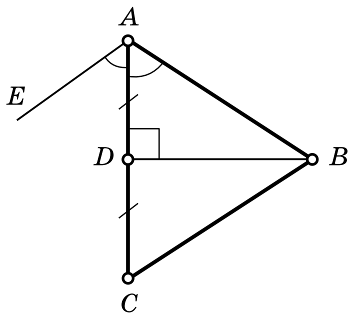
14



15

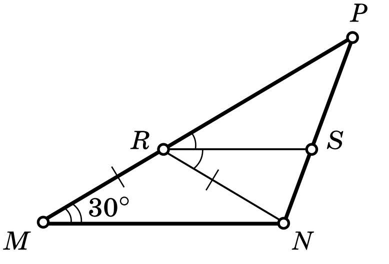


16

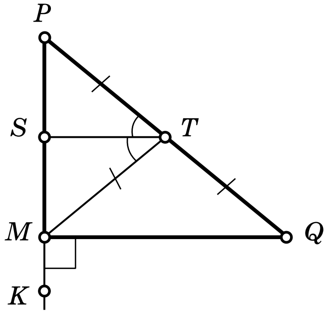


Окончание табл. 6

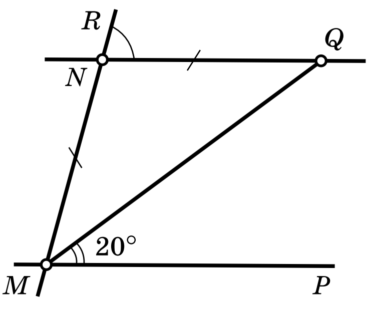
17



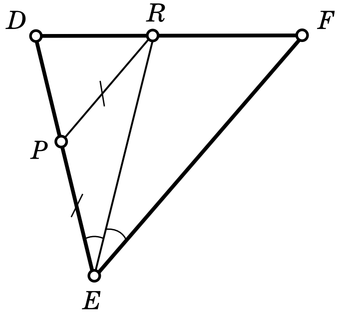
18



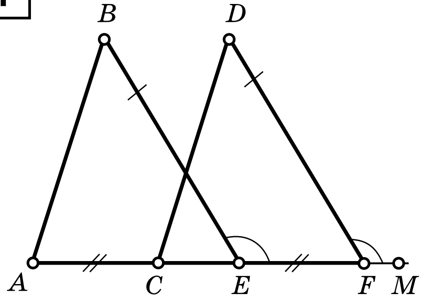
19



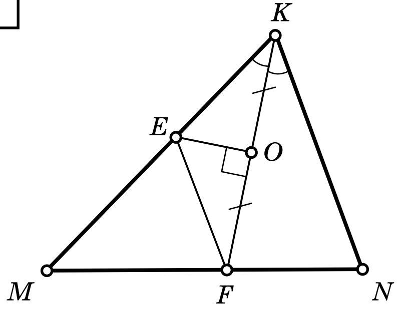
20



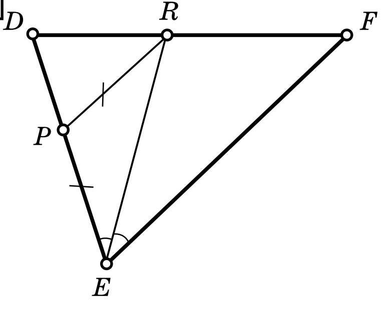
21



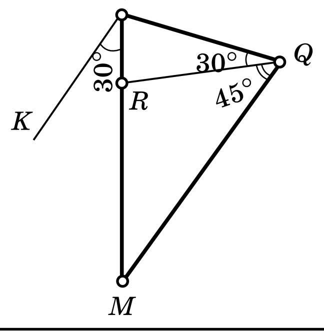
22



23



24

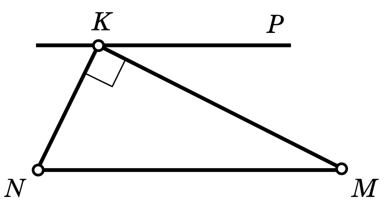


СВОЙСТВА УГЛОВ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Таблица 7

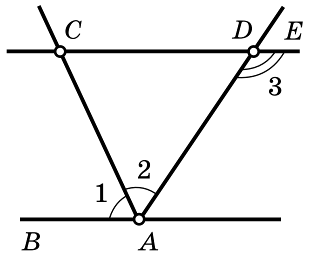
1

$KP \parallel NM$
$\angle NKP = 120°$
$\angle N$, $\angle M$ — ?



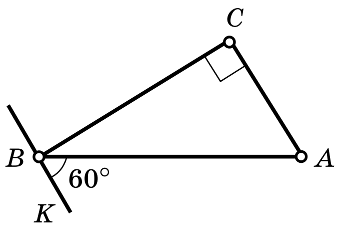
5

$CE \parallel BA$
$\angle 3 = 130°$
$\angle ACD$ — ?



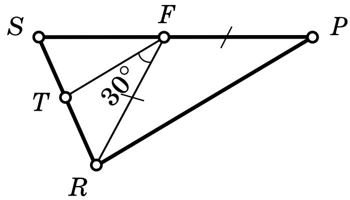
2

$AC \parallel BK$
$\angle A$, $\angle ABC$ — ?



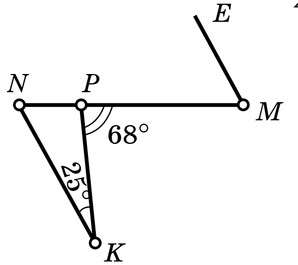
6

$TF \parallel RP$
$\angle RPF$, $\angle SFT$ — ?



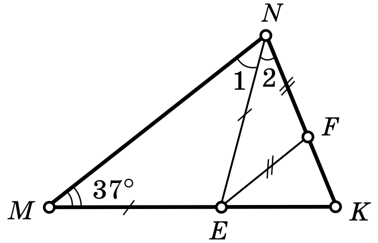
3

$KN \parallel ME$
$\angle EMN$ — ?



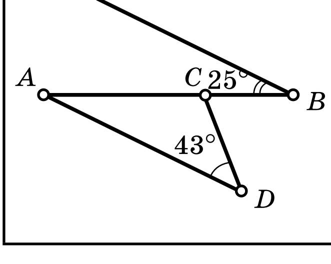
7

$\angle KFE$ — ?



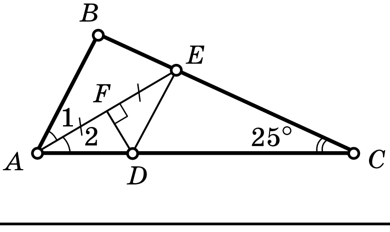
4

$AD \parallel BE$
$\angle DCB$ — ?



8

$\angle 1 = \angle 2 = 30°$
$AB \parallel DE$
$\angle AEB$ — ?



УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

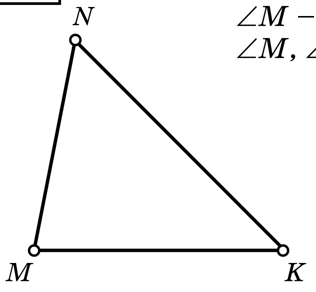
Таблица 8

1

$\angle M = 2\angle K$

$\angle M - \angle N = 20^\circ$

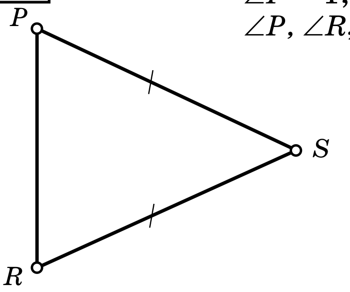
$\angle M, \angle N, \angle K$ — ?



2

$\angle P = 1{,}5\angle S$

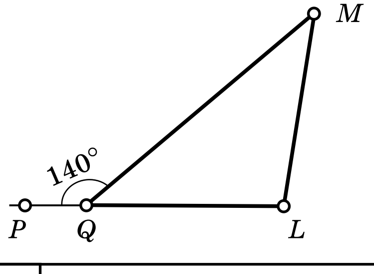
$\angle P, \angle R, \angle S$ — ?



3

$\angle Q = 0{,}4\angle L$

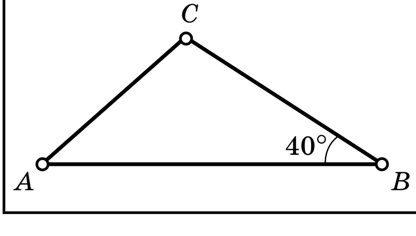
$\angle Q, \angle M, \angle L$ — ?



4

$\angle A : \angle C = 2 : 5$

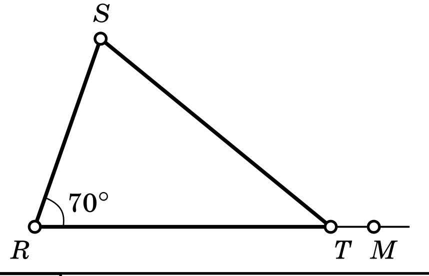
$\angle A, \angle C$ — ?



5

$\angle STM = 2\angle S$

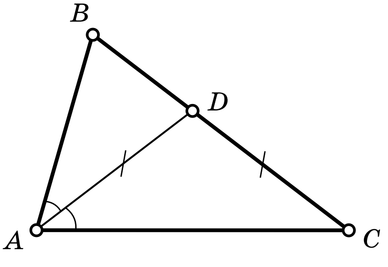
$\angle S, \angle STR$ — ?



6

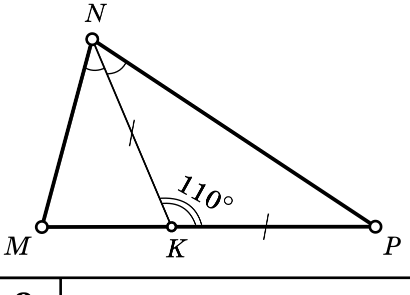
$\angle B = 2\angle C$

$\angle BAC, \angle B, \angle C$ — ?



7

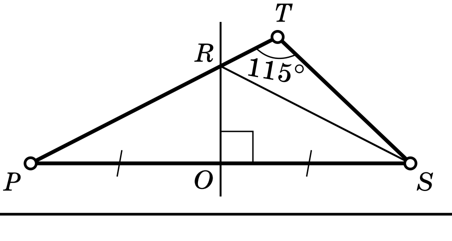
$\angle M, \angle MNP, \angle P$ — ?



8

$\angle TSR : \angle RSP = 3 : 5$

$\angle P, \angle TSP$ — ?

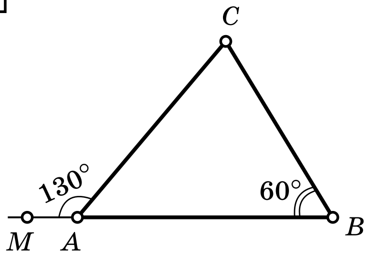


УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

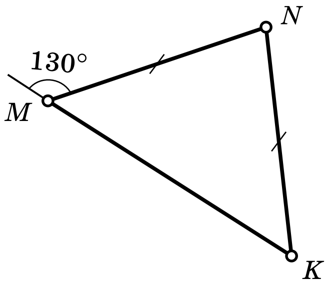
Таблица 9

Найдите все неизвестные углы треугольника.

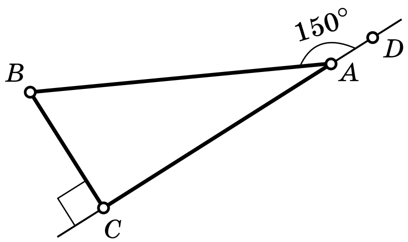
1



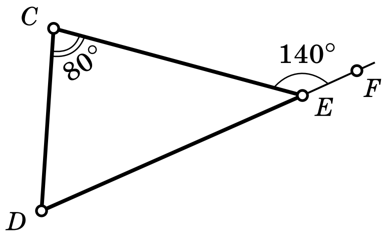
2



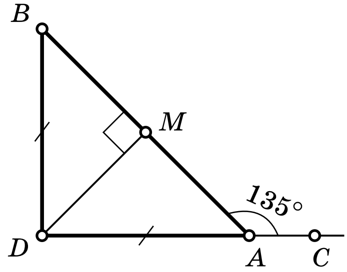
3



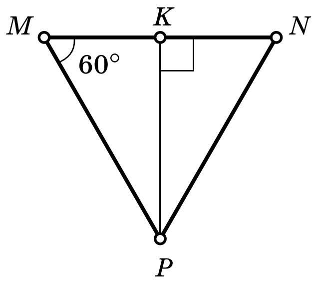
4



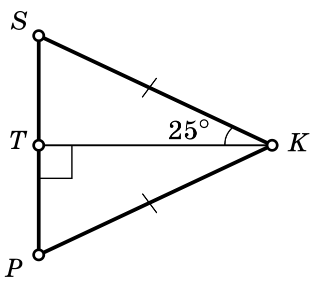
5



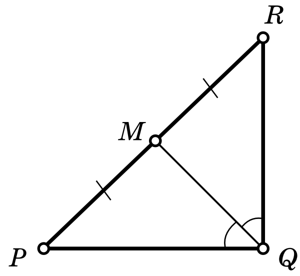
6



7

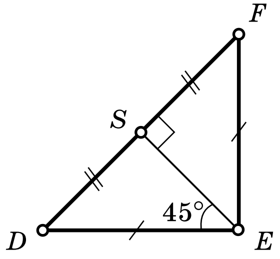


8

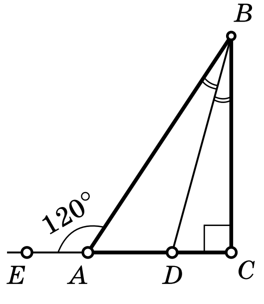


Продолжение табл. 9

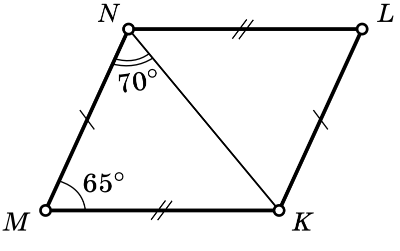
9



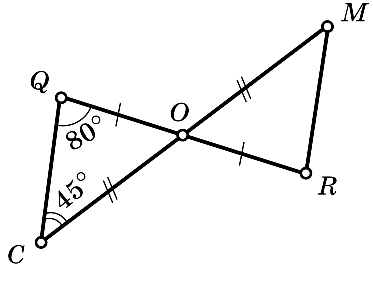
10



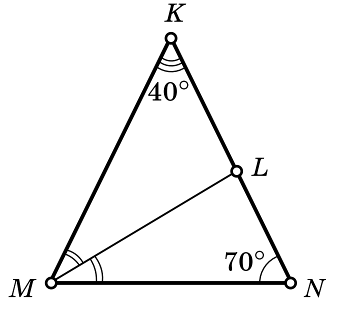
11



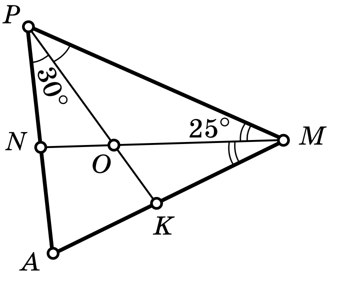
12



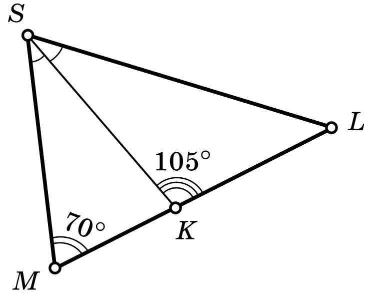
13



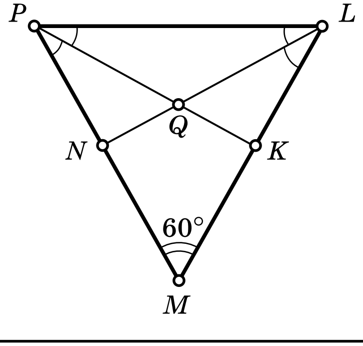
14



15

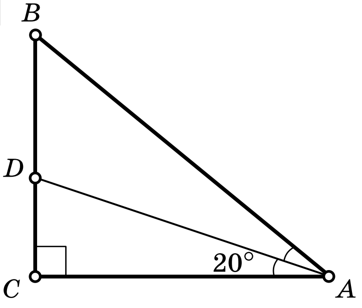


16

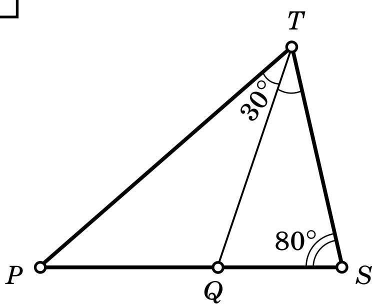


Окончание табл. 9

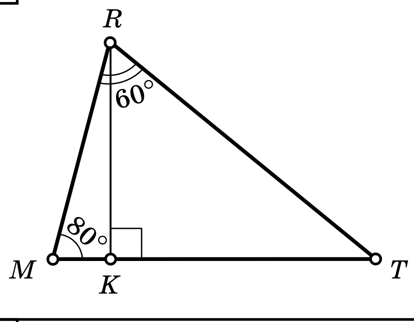
17



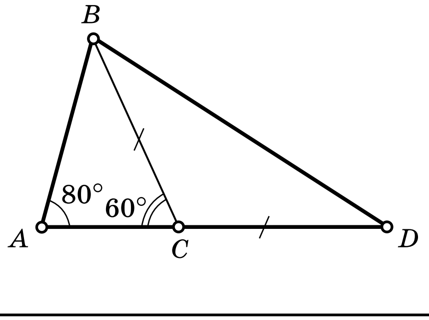
18



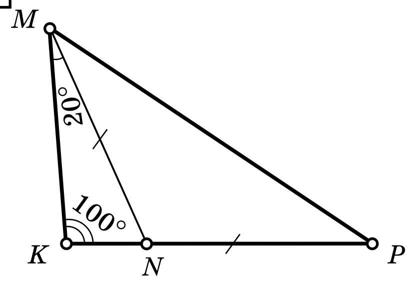
19



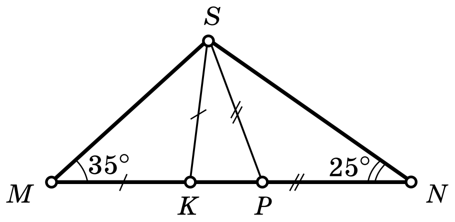
20



21

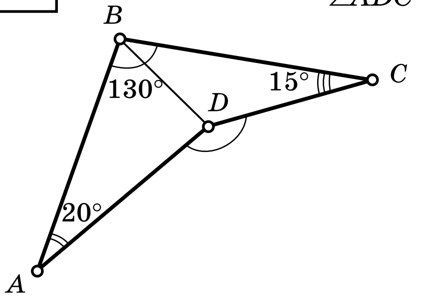


22



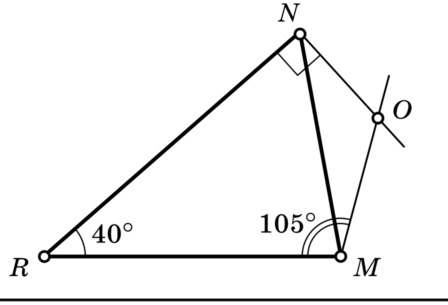
23

$\angle ADC$ — ?



24

$\angle MON$ — ?

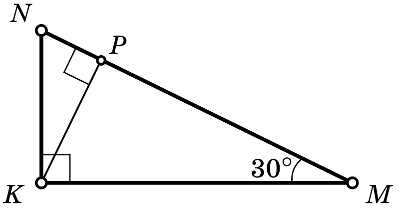


НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 10

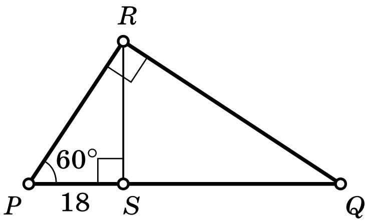
1

$MN = 36$
MP, PN — ?



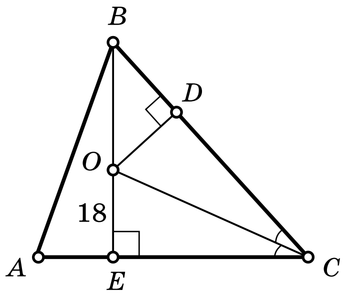
2

QS — ?



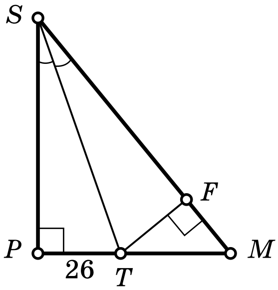
3

OD — ?



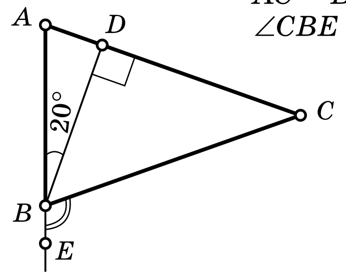
4

TF — ?



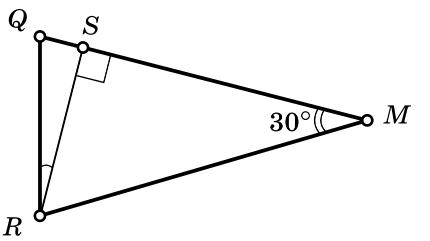
5

$AC = BC$
$\angle CBE$ — ?



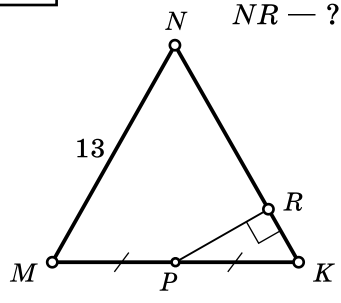
6

$\angle QRS$ — ?



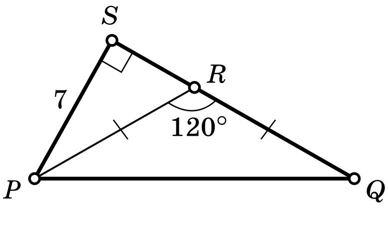
7

$MN = NK = MK$
NR — ?



8

$PR = RQ$
PQ — ?

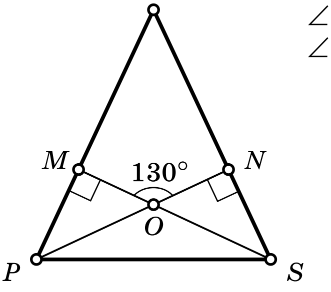


Окончание табл. 10

9

$PT = TS$

$\angle T$, $\angle TPS$, $\angle TSP$ — ?

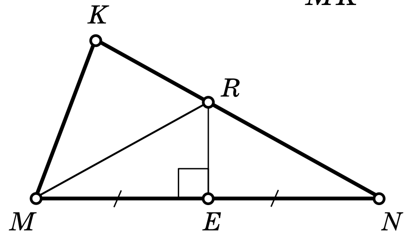


13

$KN = 26$

$P_{\Delta MKR} = 32$

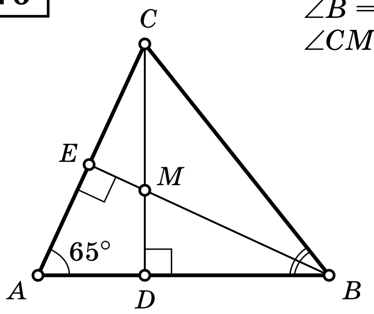
MK — ?



10

$\angle B = 53°$

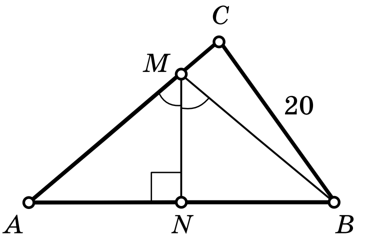
$\angle CMB$ — ?



14

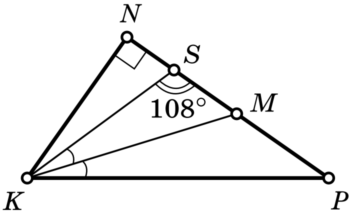
$AC = 24$

$P_{\Delta MCB}$ — ?



11

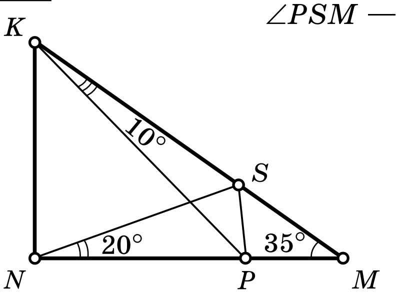
$SK = SP$ $\angle KNM$, $\angle NKM$, $\angle KMN$ — ?



15

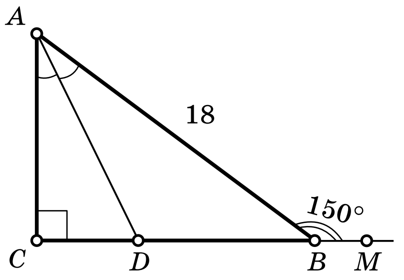
$\angle KNM = 90°$

$\angle PSM$ — ?



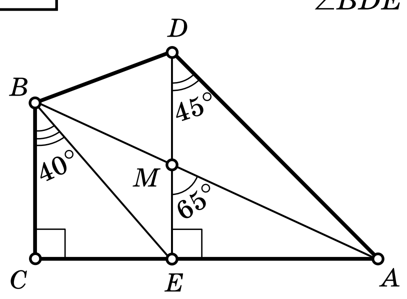
12

CB, CD — ?



16

$\angle BDE$ — ?

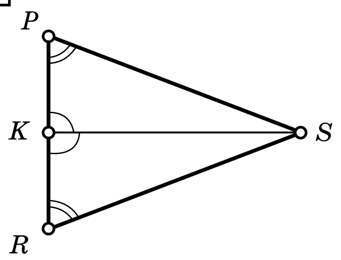


ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

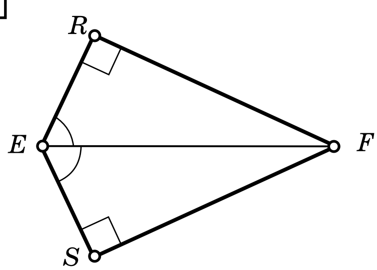
Таблица 11

Найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.

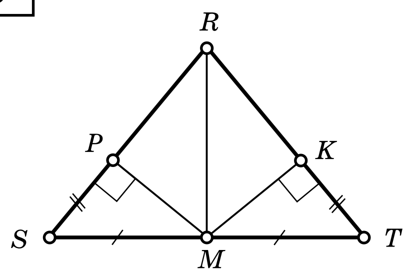
1



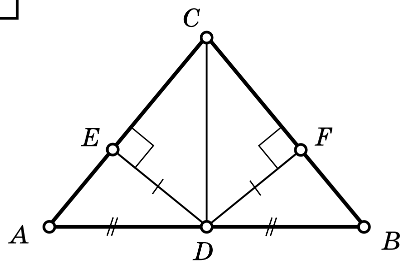
2



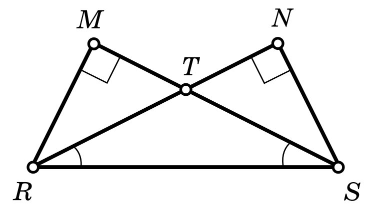
3



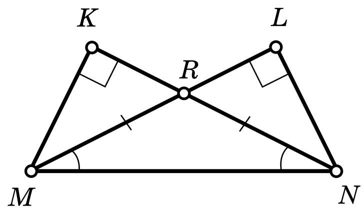
4



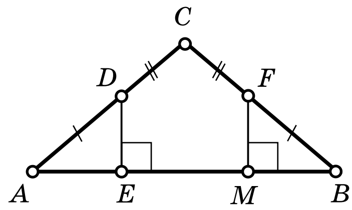
5



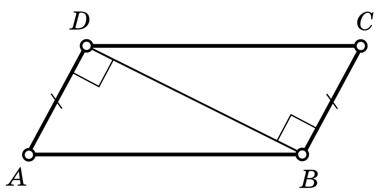
6



7



8

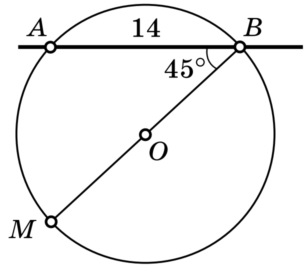


РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Таблица 12

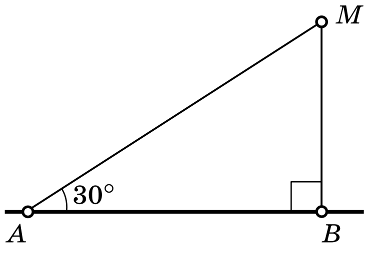
Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

1



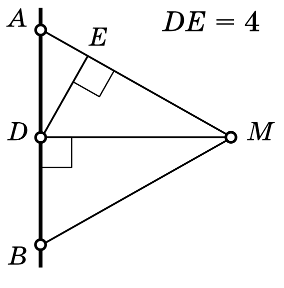
2

$AM - MB = 7$

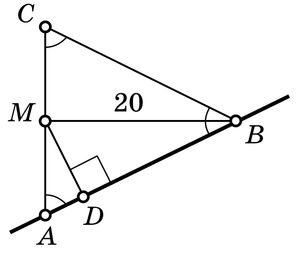


3

$AM = MB = AB$
$DE = 4$

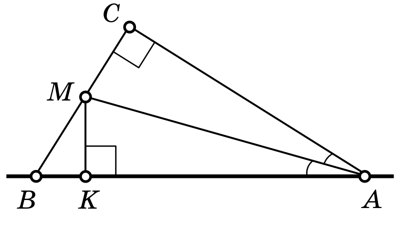


4



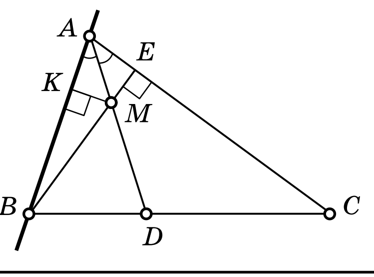
5

$MC = 13$

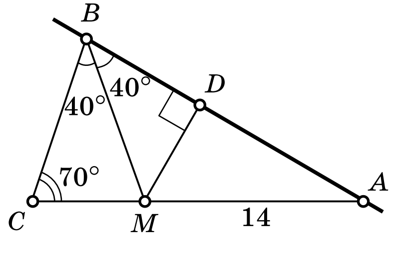


6

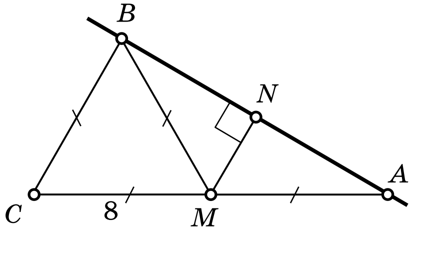
$ME = 13$



7



8



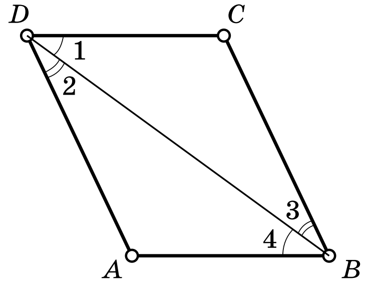
VIII класс

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

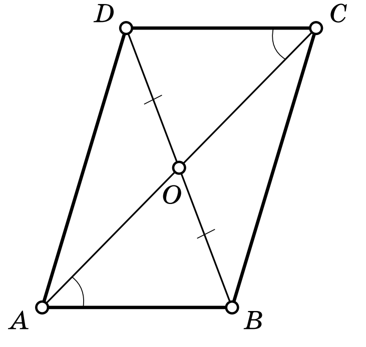
Таблица 1

Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

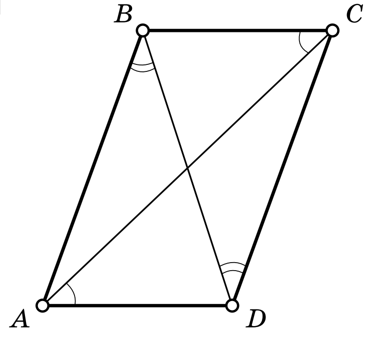
1



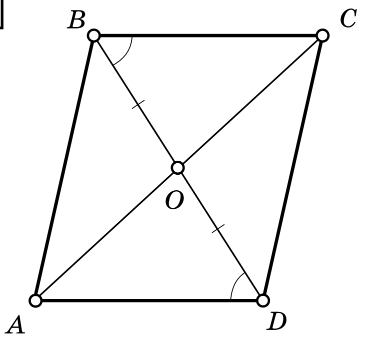
4



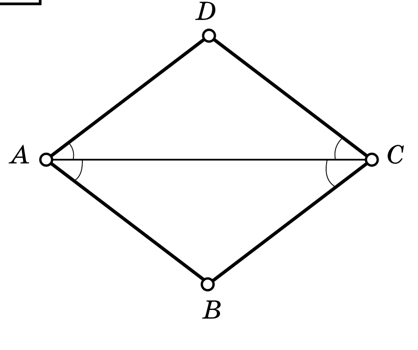
2



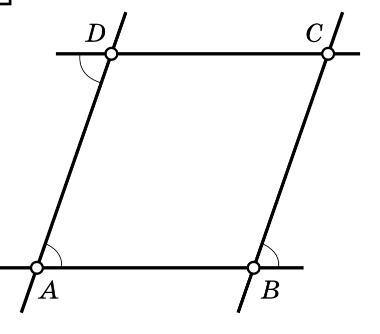
5



3

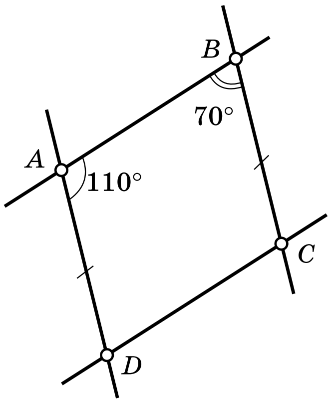


6



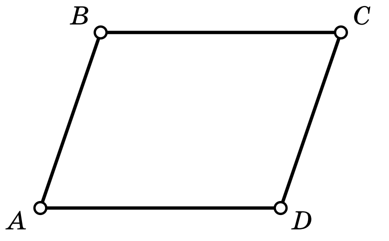
Окончание табл. 1

7



8

$\angle A + \angle D = 180°$
$BC \parallel AD$

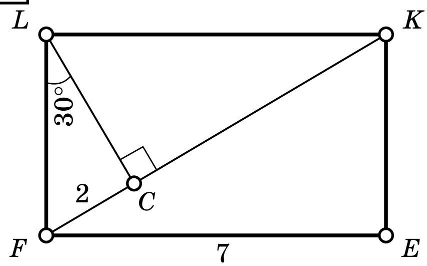


СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

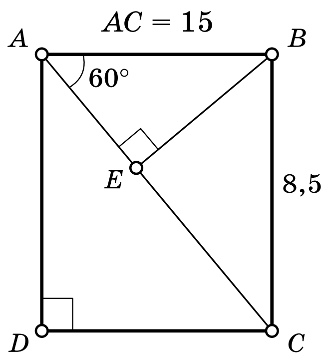
Таблица 2

Найдите периметр параллелограмма.

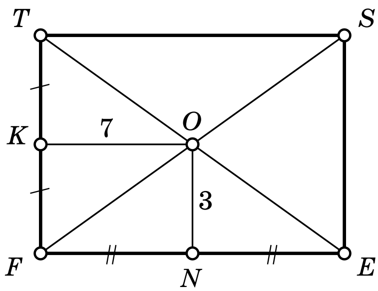
1



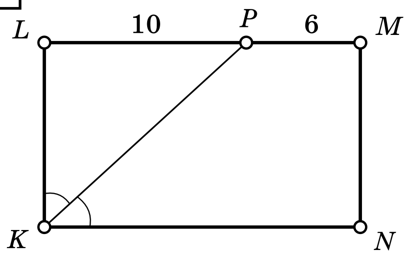
2



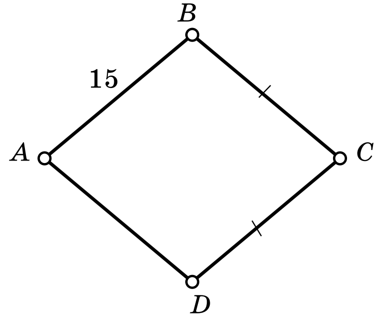
3



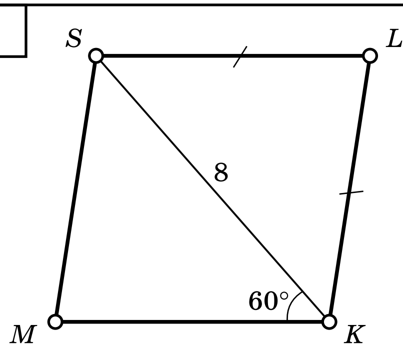
4



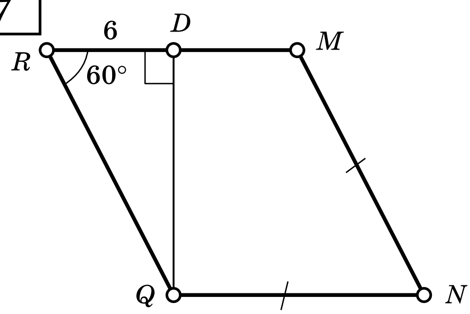
5



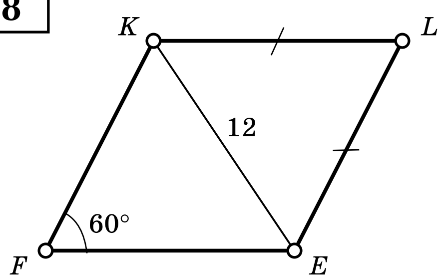
6



7

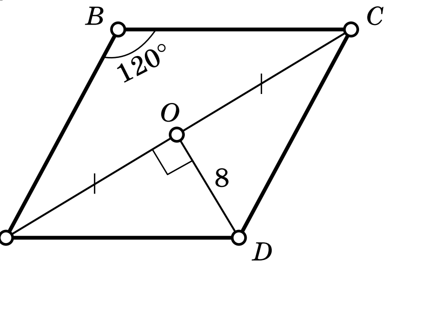


8

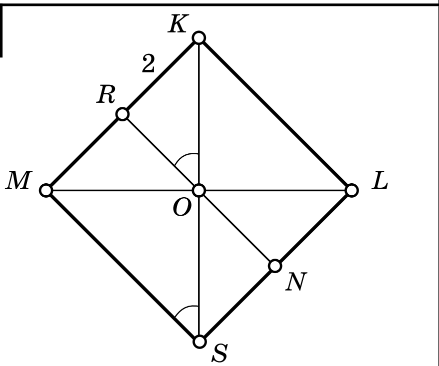


Окончание табл. 2

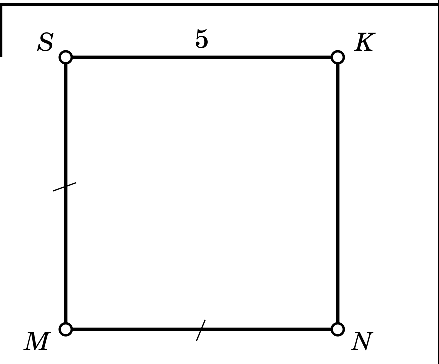
9



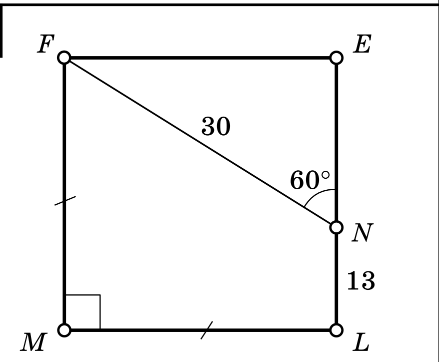
10



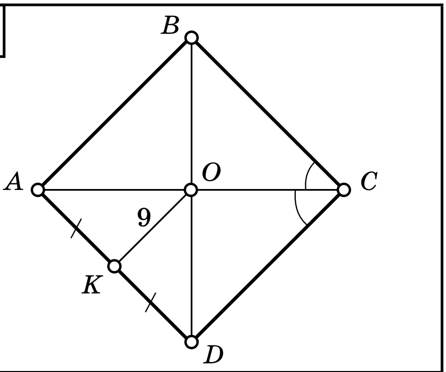
11



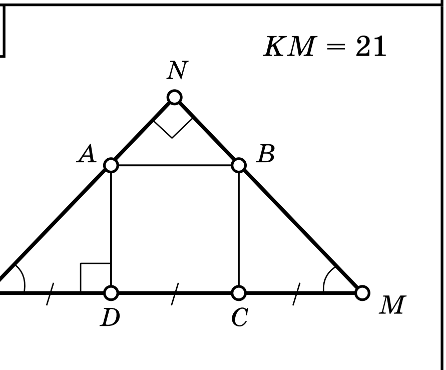
12



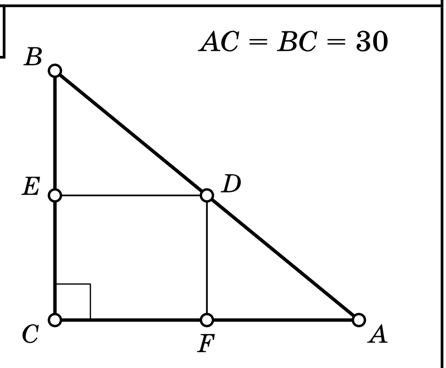
13



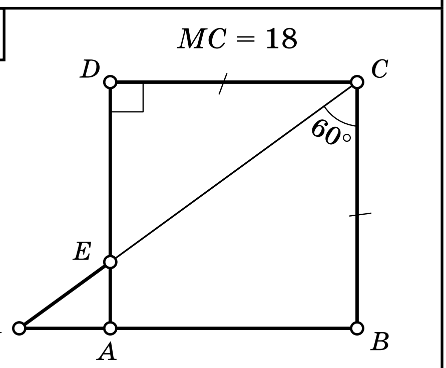
14



15



16

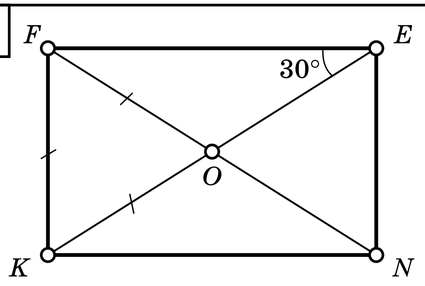


СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

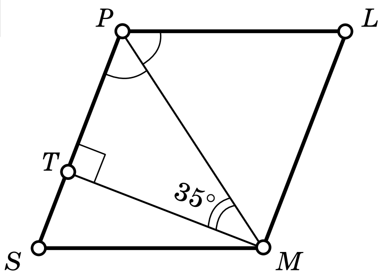
Таблица 3

Найдите неизвестные углы.

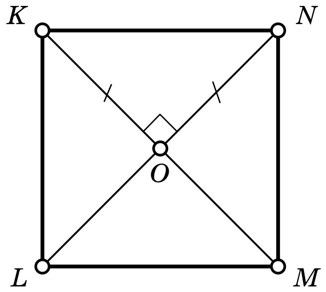
1



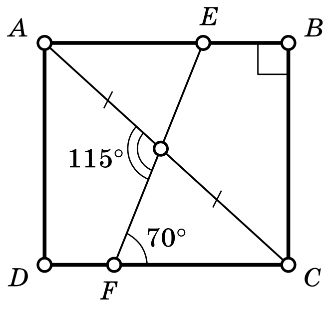
2



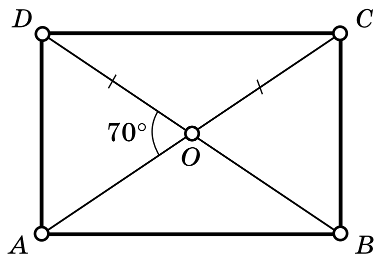
3



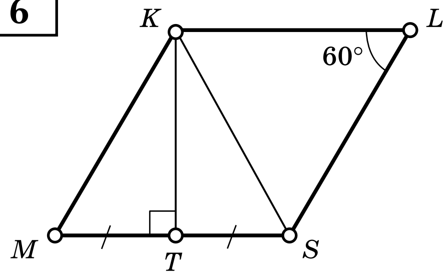
4



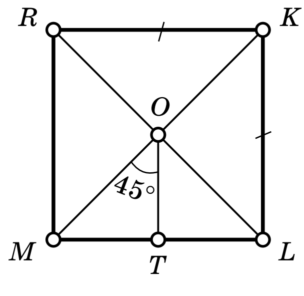
5



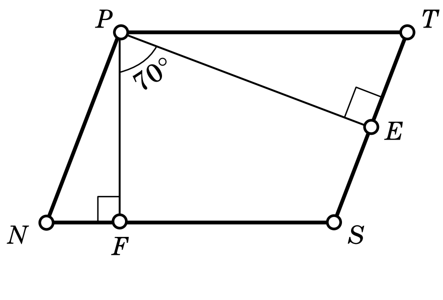
6



7



8



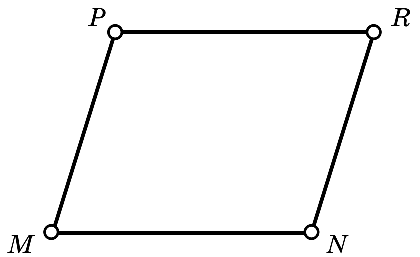
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Таблица 4

Найдите углы параллелограмма.

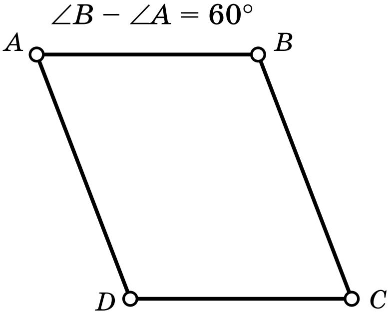
1

$\angle M + \angle R = 140^\circ$



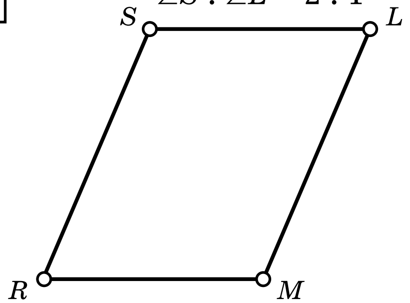
2

$\angle B - \angle A = 60^\circ$



3

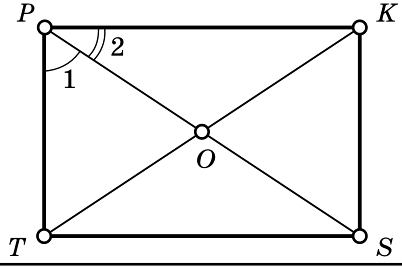
$\angle S : \angle L = 2 : 1$



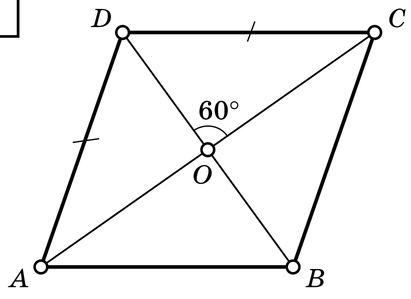
4

$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 1$

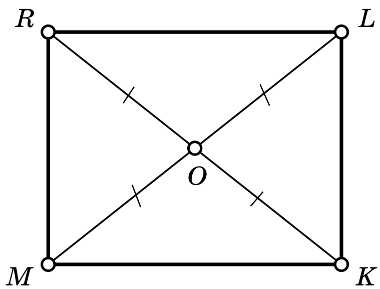
$\angle 1 - \angle 2 = 30^\circ$



5

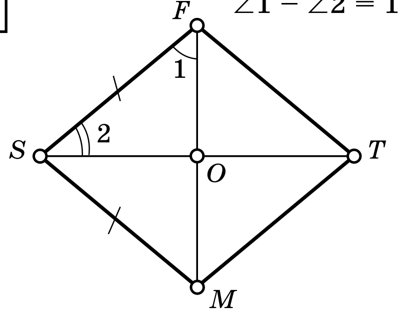


6



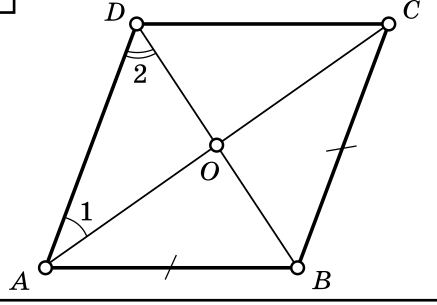
7

$\angle 1 - \angle 2 = 10^\circ$



8

$\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$



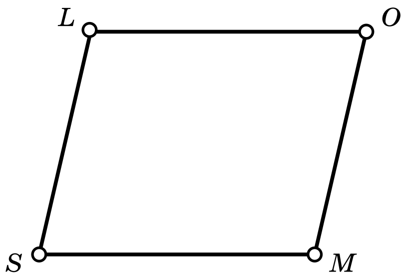
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Таблица 5

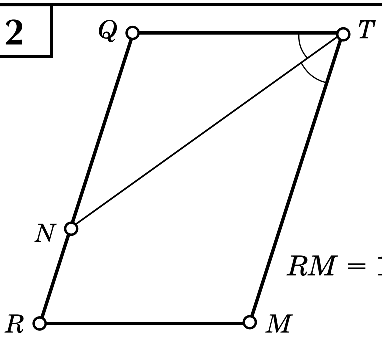
Найдите стороны параллелограмма, если $P = 36$.

1

$LO - LS = 1$

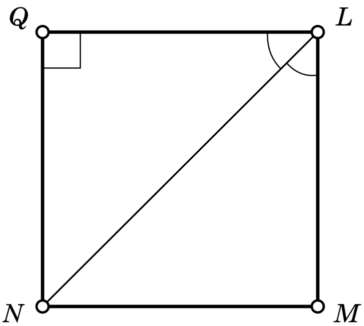


2



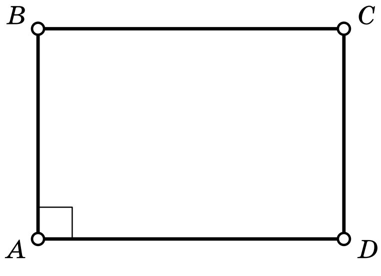
$RM = 1{,}5\ RN$

3



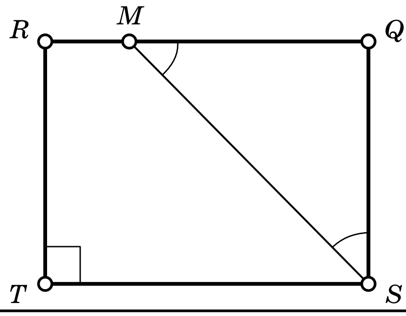
4

$AB : BC = 2 : 3$



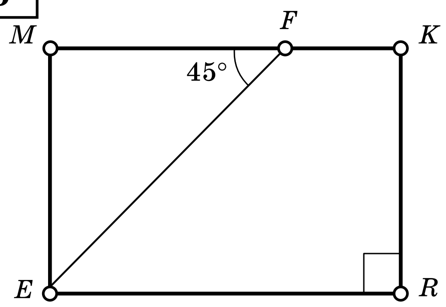
5

$RM + MQ = 10$



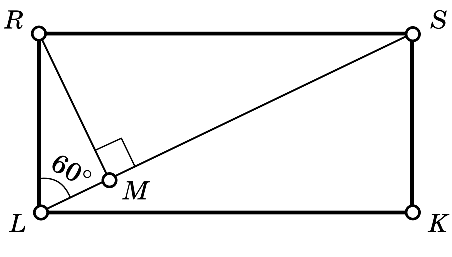
6

$MF - FK = 6$

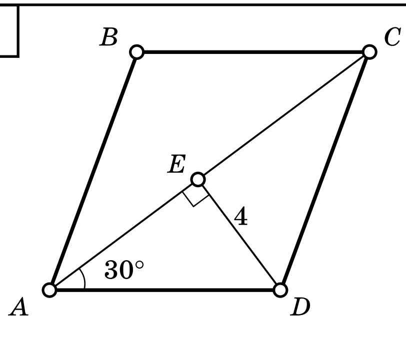


7

$LM = 2$



8

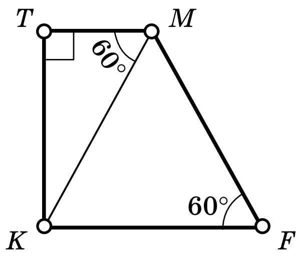


ТРАПЕЦИЯ

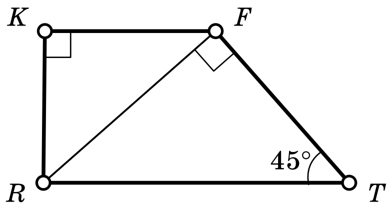
Таблица 6

Найдите углы трапеции.

1

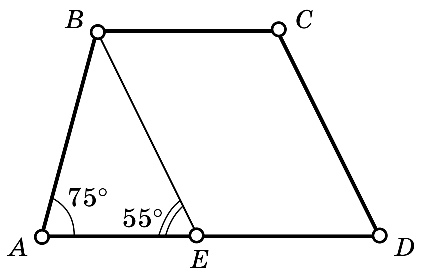


2

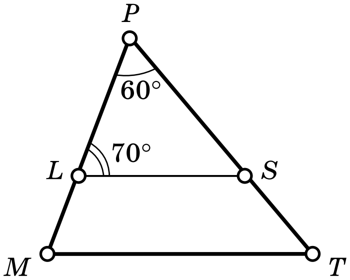


3

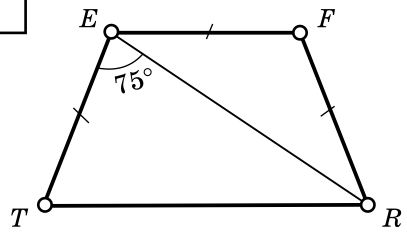
$BE \parallel CD$



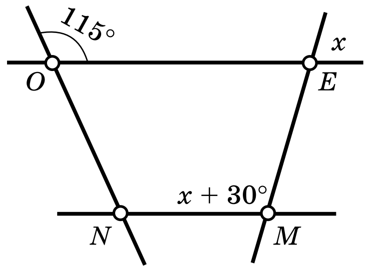
4



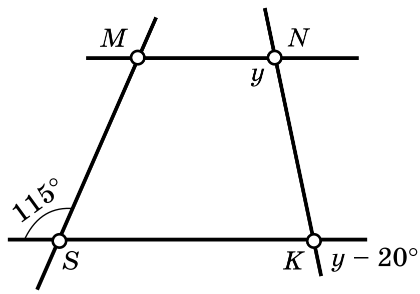
5



6



7



8

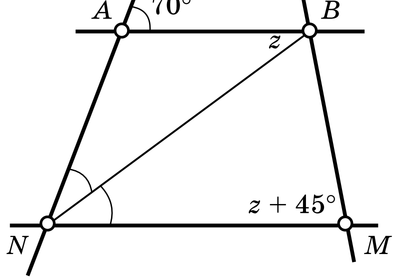
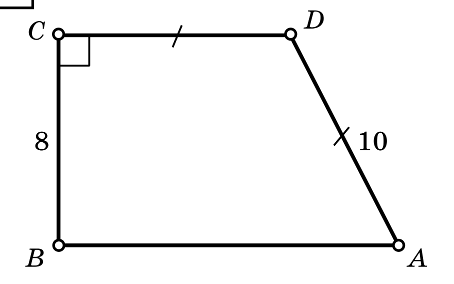


Таблица 7

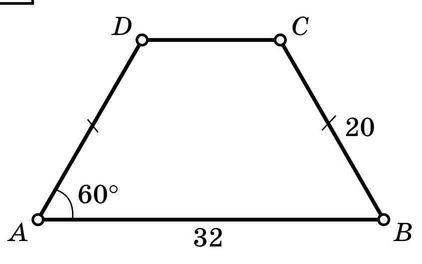
ТРАПЕЦИЯ

Найдите P_{ABCD}.

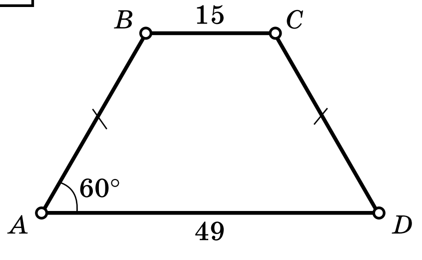
1



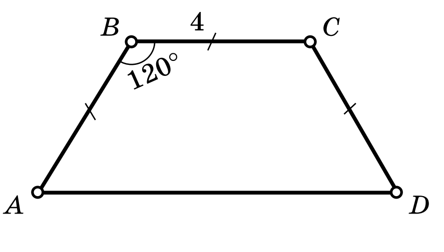
2



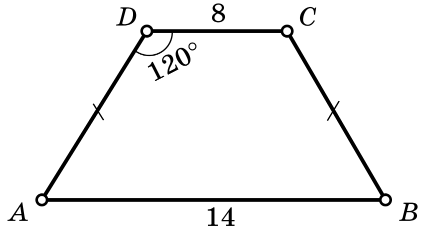
3



4

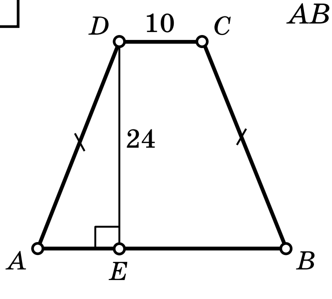


5



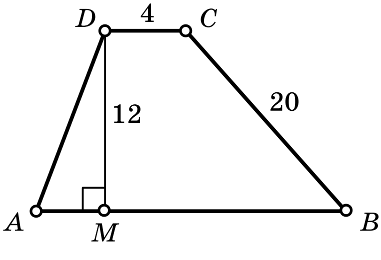
6

$AB = DE$



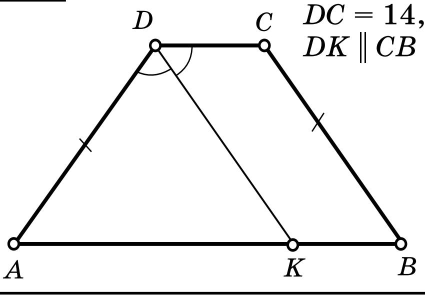
7

$AB = 25$



8

$AB = 27{,}65$
$DC = 14{,}15$
$DK \parallel CB$



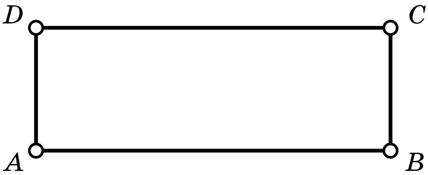
ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Таблица 8

Найдите S_{ABCD}.

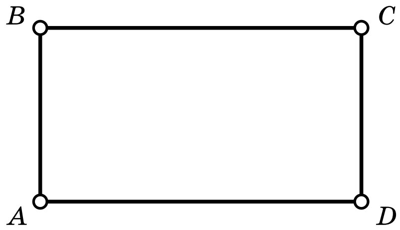
1

$P = 30$
$AB = 4\ BC$



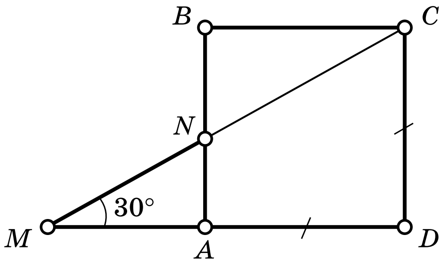
2

$P = 36$
$AD : DC = 2 : 1$



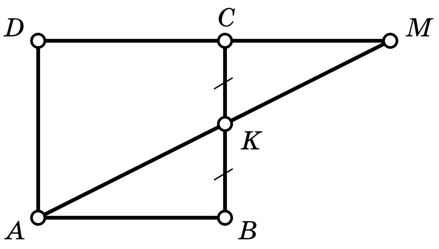
3

$MC = 20$

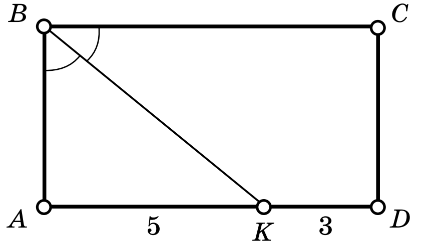


4

$S_{\Delta AMD} = 33$

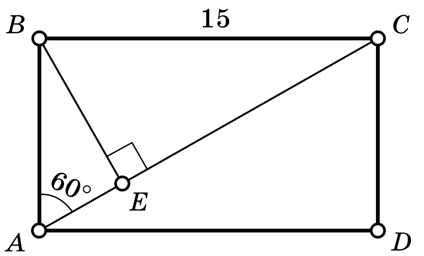


5

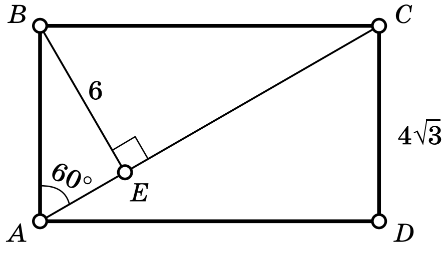


6

$AE = 2{,}5\sqrt{3}$

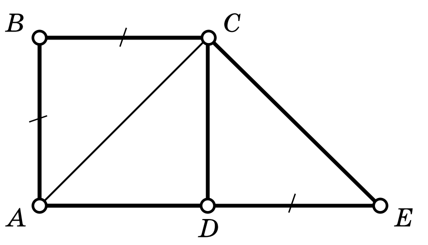


7



8

$S_{\Delta ACE} = 64$



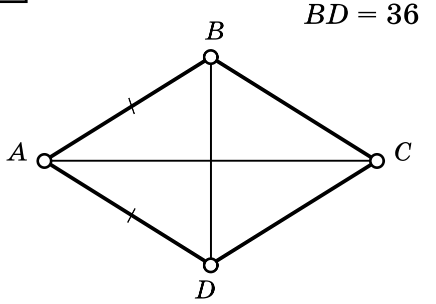
ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Таблица 9

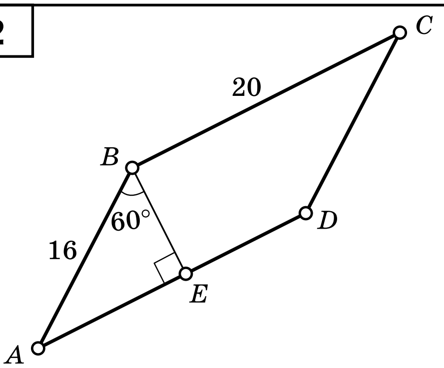
Найдите S_{ABCD}.

1

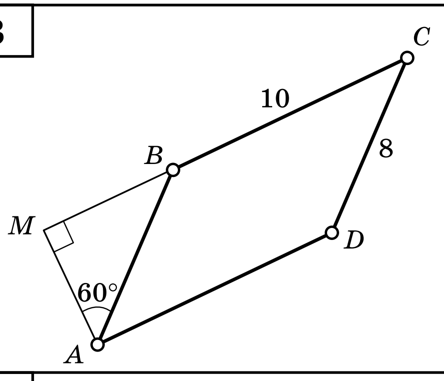
$AC = 48$
$BD = 36$



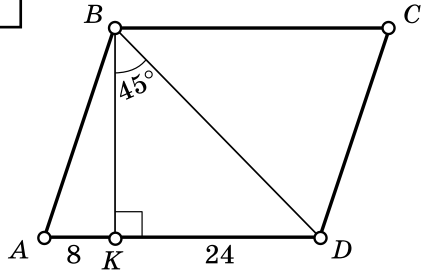
2



3

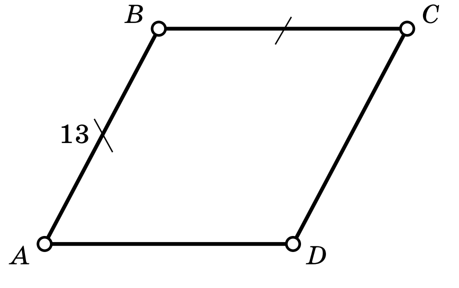


4

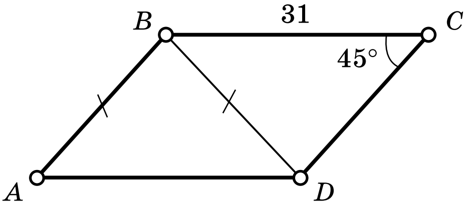


5

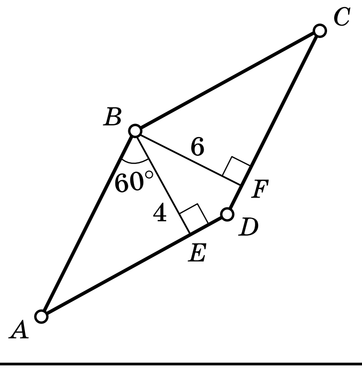
$\angle B = 2\ \angle A$



6

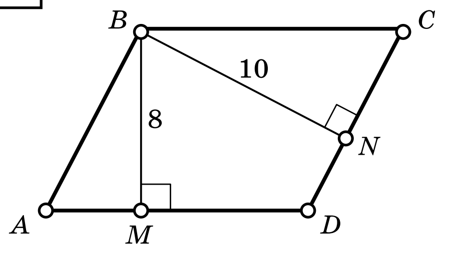


7



8

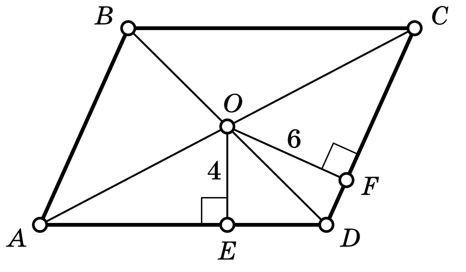
$P = 84$



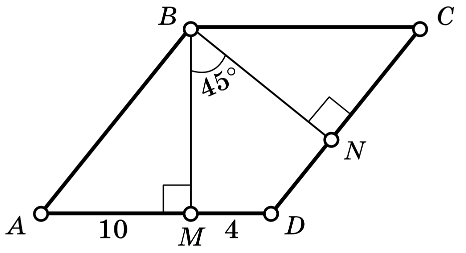
Окончание табл. 9

9

$P = 20$

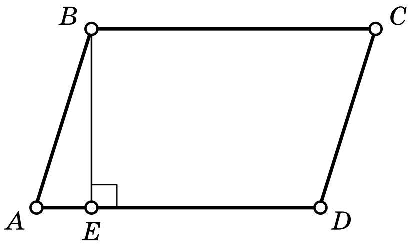


10



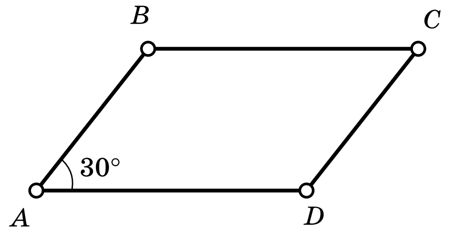
11

$BE : AD = 1 : 3$
$AD - BE = 8$



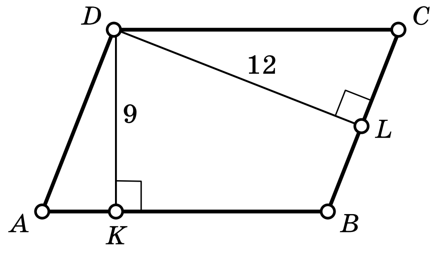
12

$P = 92$
$BC - AB = 4$



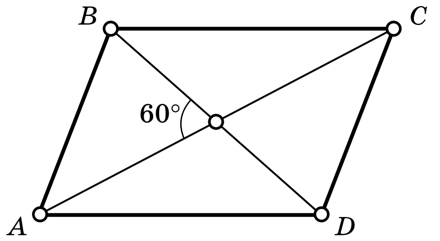
13

$AB - BC = 4$

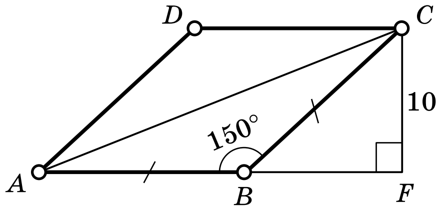


14

$BD = 12$
$AC = 16$

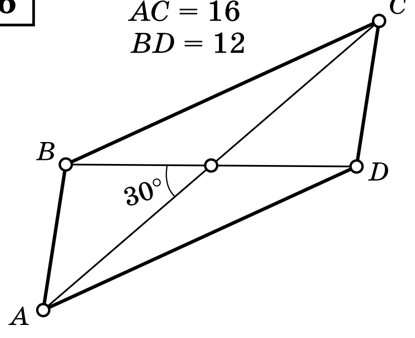


15



16

$AC = 16$
$BD = 12$



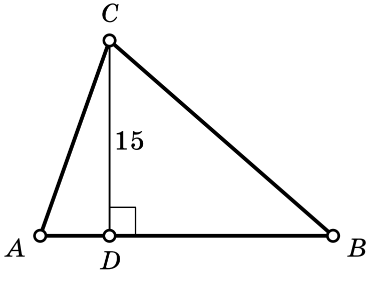
ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 10

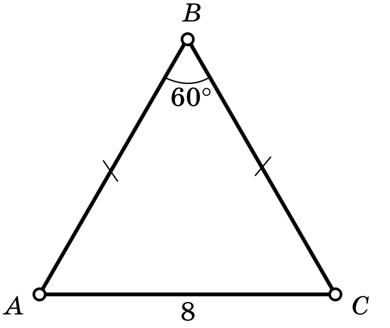
Найдите $S_{\Delta ABC}$.

1

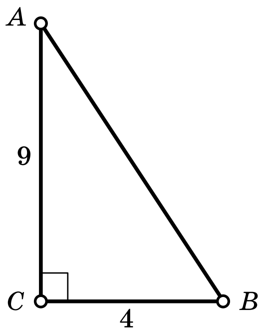
$AB = 22$



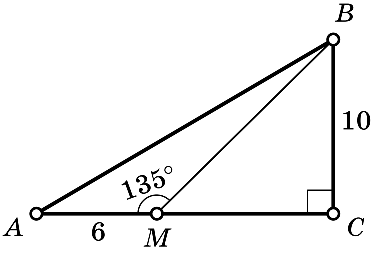
5



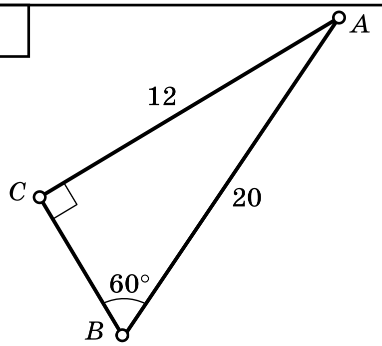
2



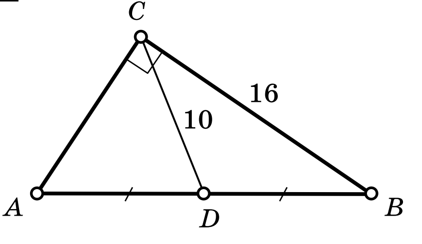
6



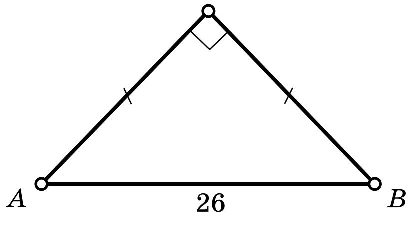
3



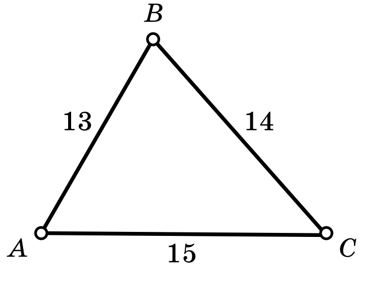
7



4

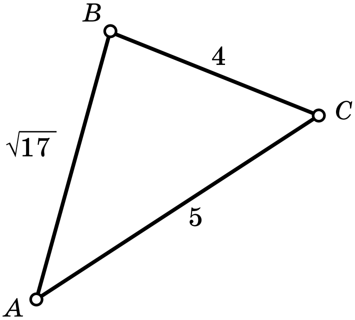


8

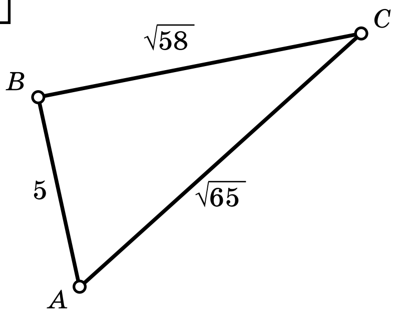


Окончание табл. 10

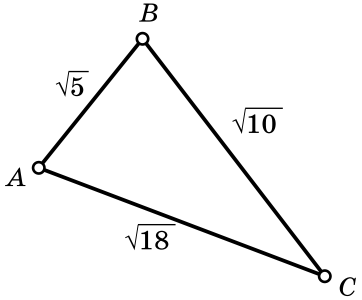
9



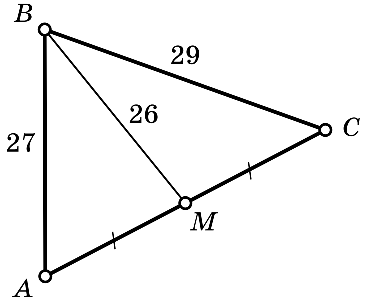
10



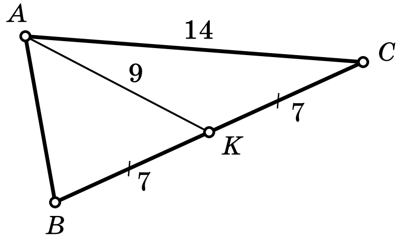
11



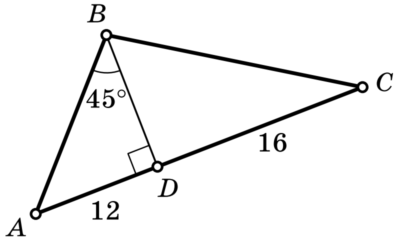
12



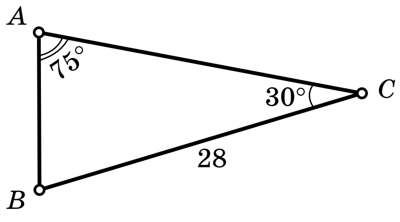
13



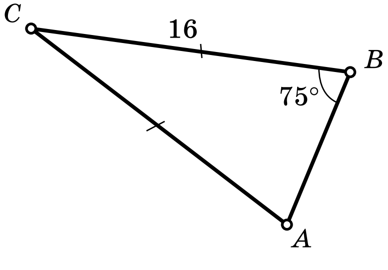
14



15



16

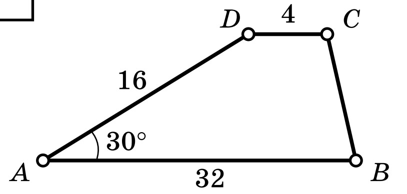


ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Таблица 11

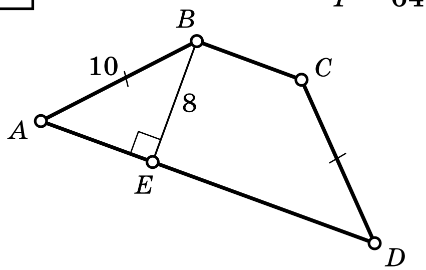
Найдите S_{ABCD}.

1



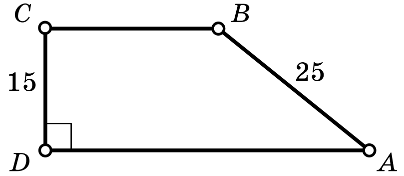
2

$P = 64$



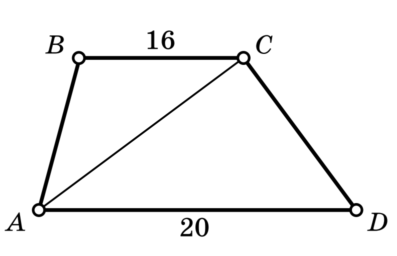
3

$P = 80$

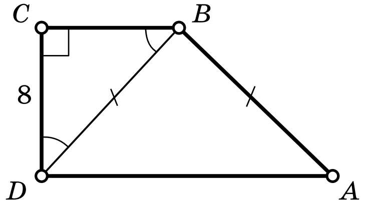


4

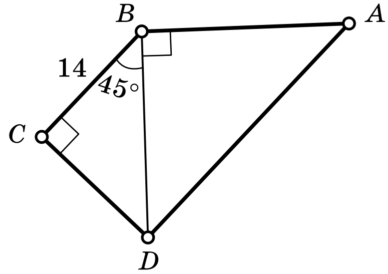
$S_{\Delta ACD} = 60$



5



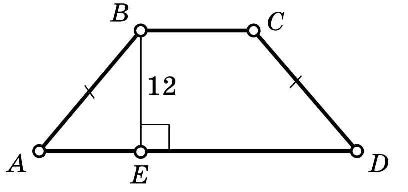
6



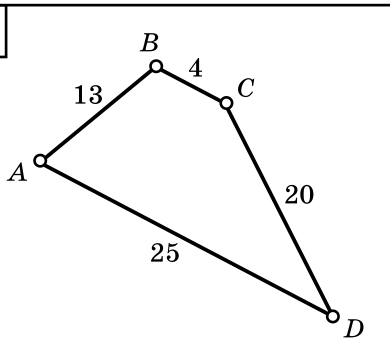
7

$BC = \frac{1}{2}\,ED$

$AD - BC = 4$



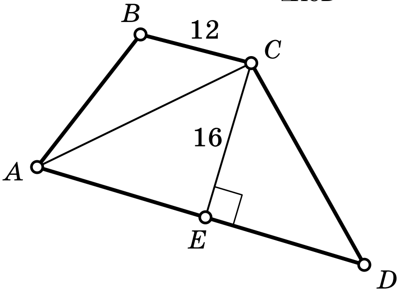
8



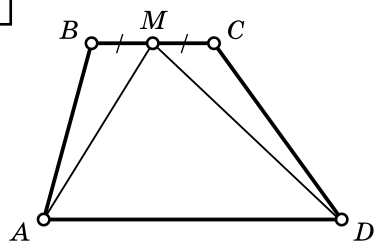
Окончание табл. 11

9

$S_{\Delta ACD} = 196$



10

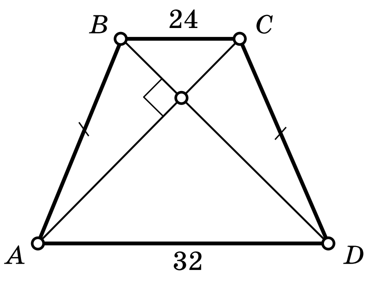


$AD : BC = 2 : 1$

$S_{\Delta AMD} = 120$

11

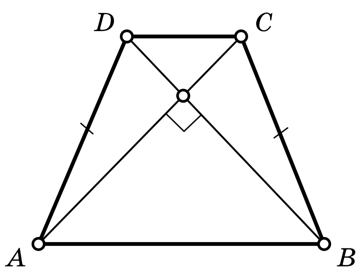
$ABCD$ — трапеция



12

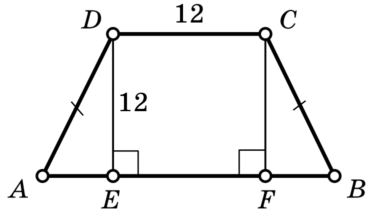
$ABCD$ — трапеция

$AC = BD = 8$



13

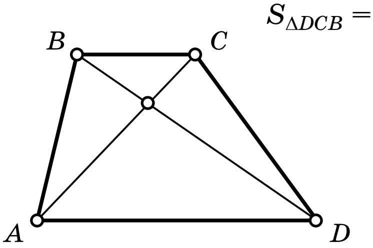
$AE = FB = \dfrac{1}{2}\, EF$



14

$S_{\Delta ACD} = 32$

$S_{\Delta DCB} = 13$



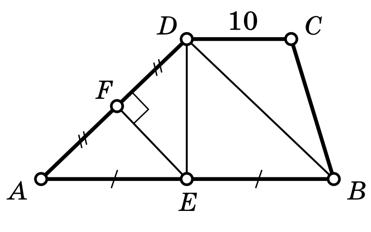
$ABCD$ — трапеция

15

$ABCD$ — трапеция

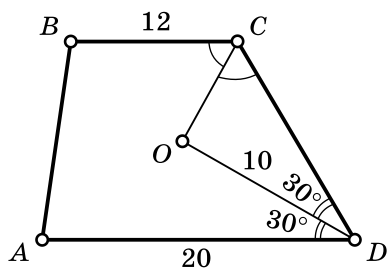
$AD = DB$

$AB = 24$



16

$ABCD$ — трапеция



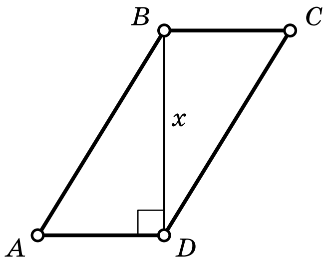
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Таблица 12

Найдите x.

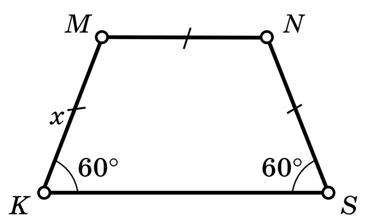
1

$AB - BC = 3 \quad P = 50$



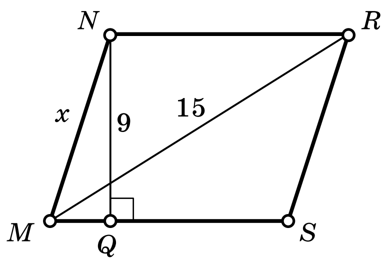
2

$S_{KMNS} = 96\sqrt{3}$



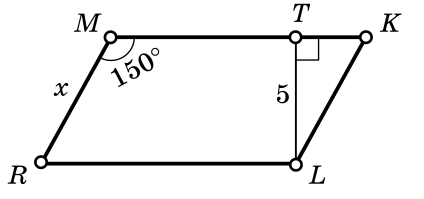
3

$S_{MNRS} = 99$

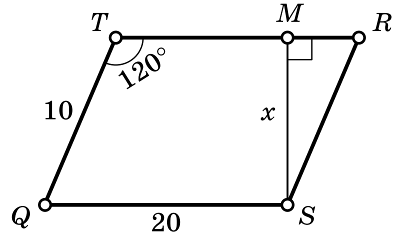


4

$RLKM$ — параллелограмм

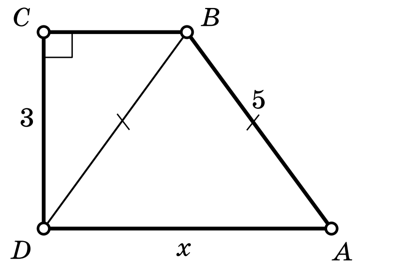


5



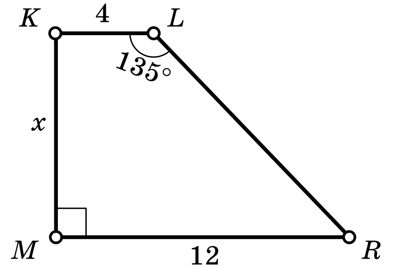
6

$ABCD$ — трапеция

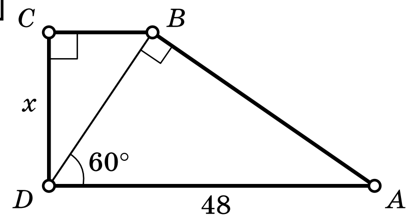


7

$MKLR$ — трапеция

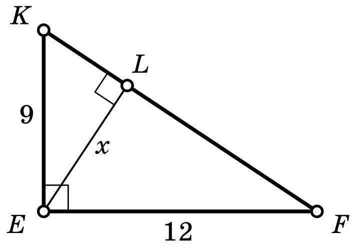


8

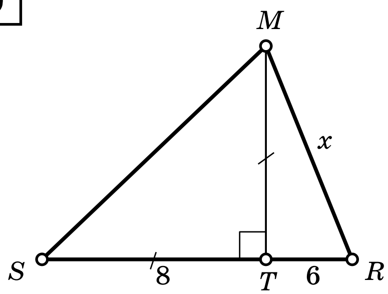


Продолжение табл. 12

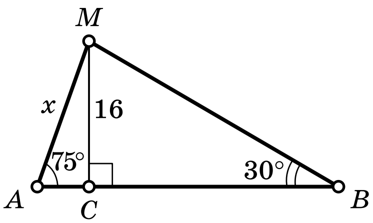
9



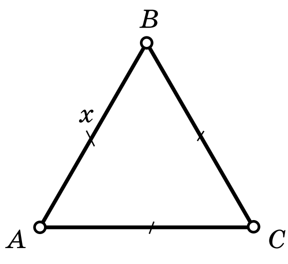
10



11



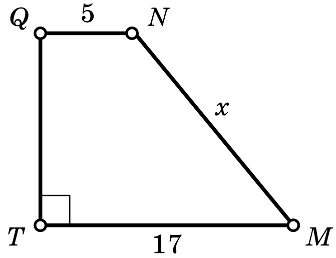
12



$S = 4\sqrt{3}$

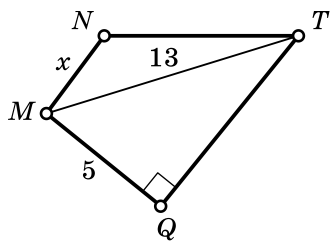
13

$S = 55$



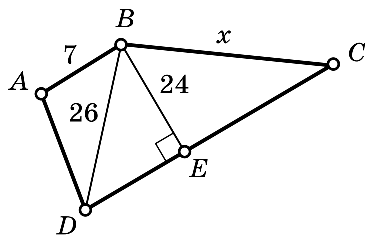
14

$MNTQ$ — трапеция
$S_{MNTQ} = 50$

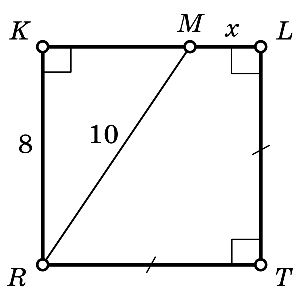


15

$ABCD$ — трапеция
$S_{ABCD} = 432$



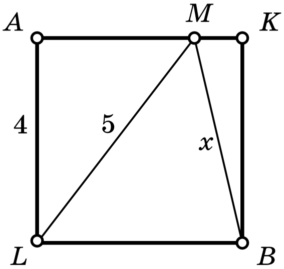
16



Продолжение табл. 12

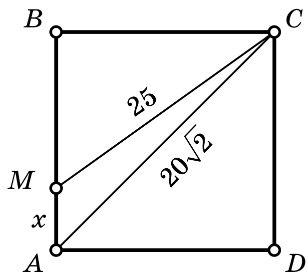
17

$AKBL$ — квадрат



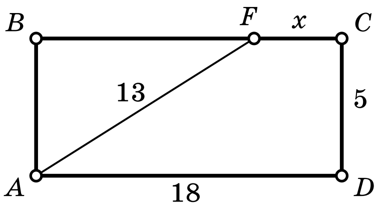
18

$ABCD$ — квадрат



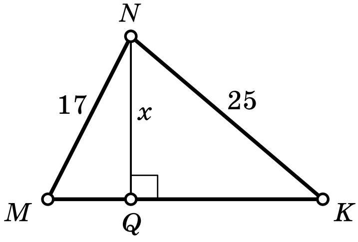
19

$ABCD$ — прямоугольник



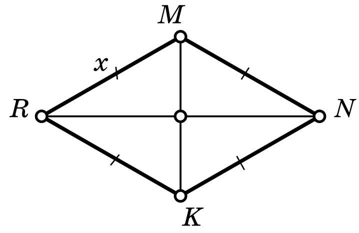
20

$P_{\Delta MNK} = 70$



21

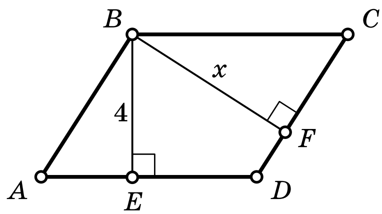
$RN - MK = 4$
$S_{RMNK} = 96$



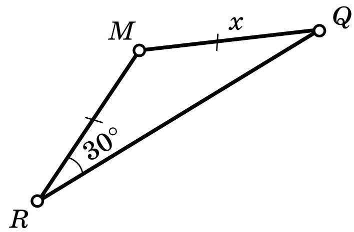
22

$ABCD$ — параллелограмм

$P_{ABCD} = 42,\ \ S_{ABCD} = \dfrac{140}{3}$



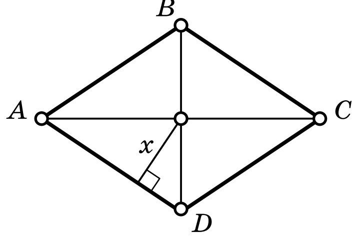
23



$S = 100\sqrt{3}$

24

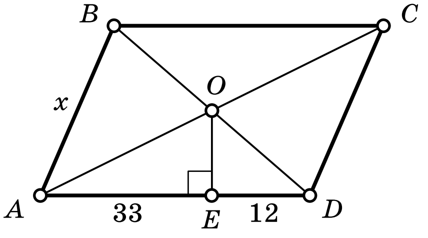
$ABCD$ — ромб
$S_{ABCD} = 480$
$BD = 20$



Продолжение табл. 12

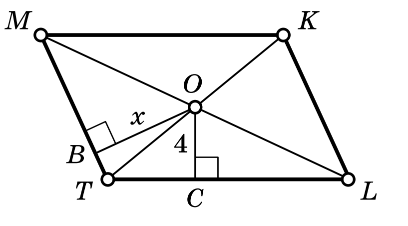
25

$ABCD$ — параллелограмм
$S = 900$



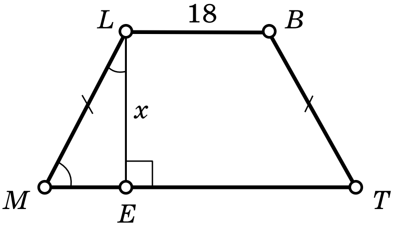
26

$MKLT$ — параллелограмм
$S_{MKLT} = 48$, $P_{MKLT} = 40$



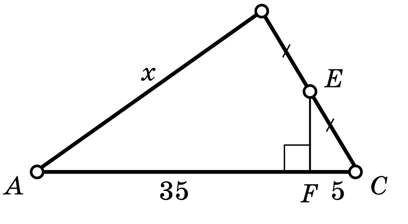
27

$MLBT$ — трапеция
$S = 243$



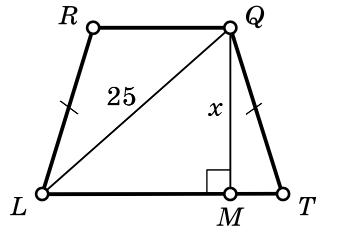
28

$S_{\Delta ABC} = 320$



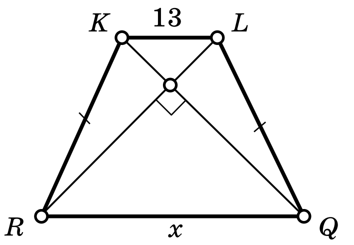
29

$LRQT$ — трапеция
$S_{LRQT} = 300$



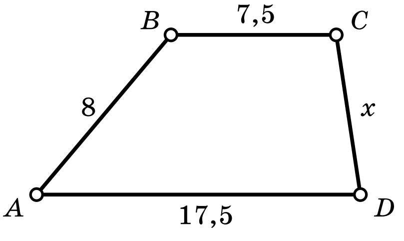
30

$RKQL$ — трапеция
$S = 100$



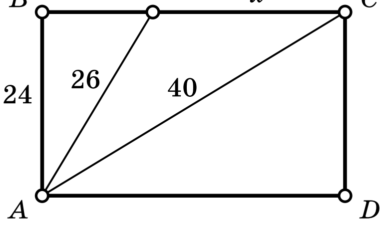
31

$S_{ABCD} = 60$, $AD \parallel BC$



32

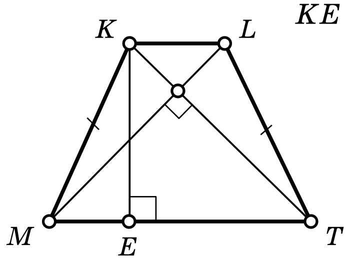
$ABCD$ — прямоугольник



Окончание табл. 12

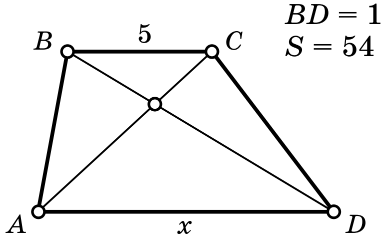
33

$MKLT$ — трапеция
$S = 81$
$KE = x$



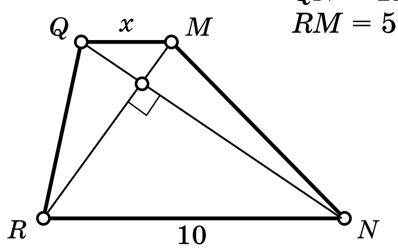
34

$ABCD$ — трапеция
$AC = 9$
$BD = 12$
$S = 54$



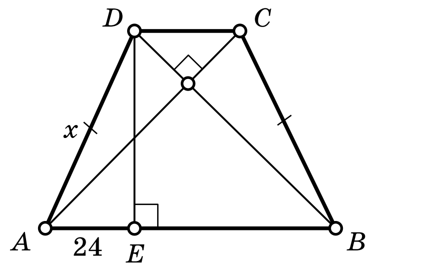
35

$RQMN$ — трапеция
$QN = 12$
$RM = 5$



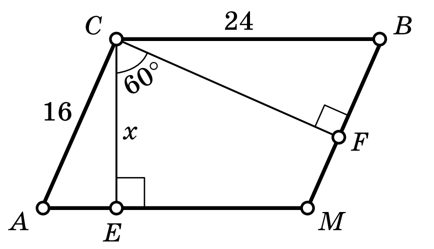
36

$ABCD$ — трапеция
$S = 100$



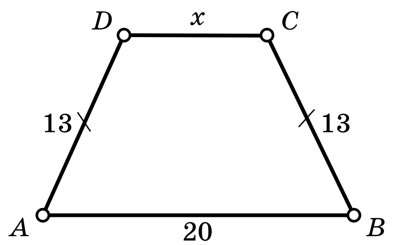
37

$ACBM$ — параллелограмм



38

$S_{ABCD} = 180$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

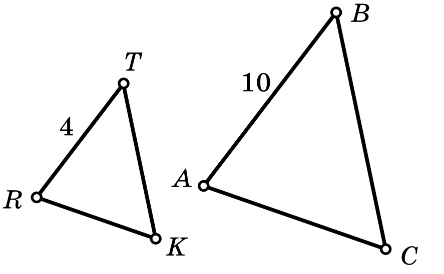
Таблица 13

Найдите x, y, z.

1

$\Delta RTK \sim \Delta ABC$

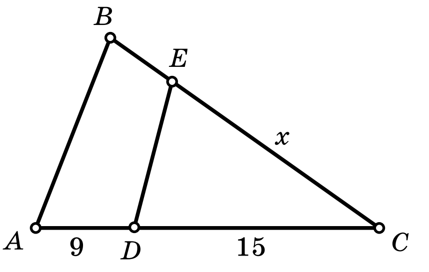
$S_{\Delta RTK} = 16$, $S_{\Delta ABC} = x$



5

$\Delta ABC \sim \Delta DEC$

$BC = 21$

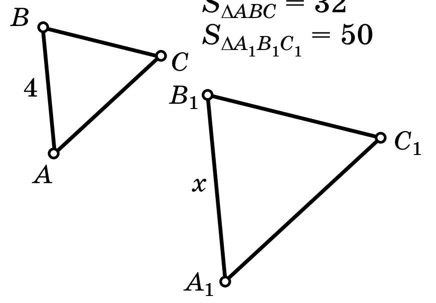


2

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

$S_{\Delta ABC} = 32$

$S_{\Delta A_1B_1C_1} = 50$

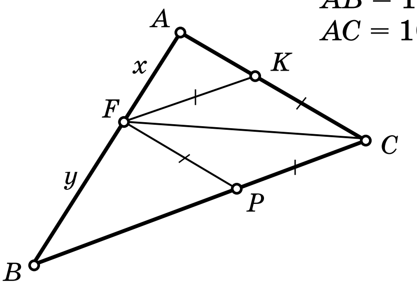


6

$BC = 14$

$AB = 12$

$AC = 10$

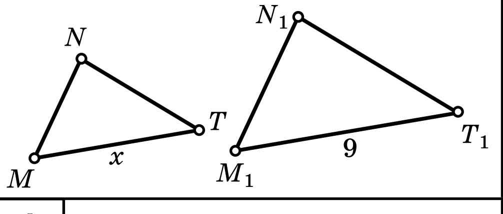


3

$\Delta MNT \sim \Delta M_1N_1T_1$

$S_{\Delta MNT} = 75$

$S_{\Delta M_1N_1T_1} = 225$

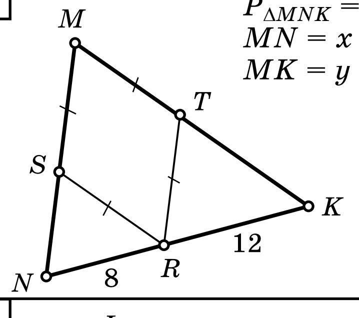


7

$P_{\Delta MNK} = 55$

$MN = x$

$MK = y$



4

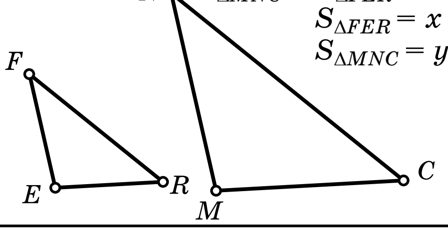
$\Delta FER \sim \Delta NMC$

$MN : FE = 7 : 6$

$S_{\Delta MNC} - S_{\Delta FER} = 26$

$S_{\Delta FER} = x$

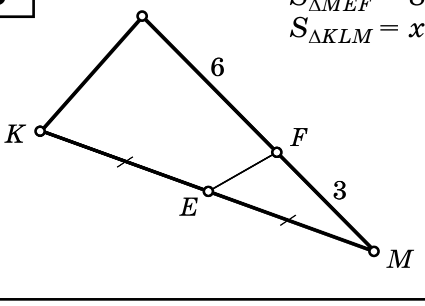
$S_{\Delta MNC} = y$



8

$S_{\Delta MEF} = 8$

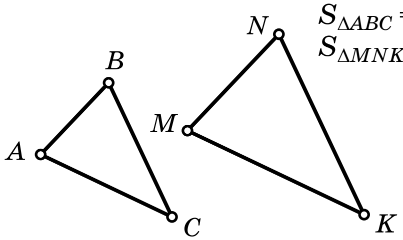
$S_{\Delta KLM} = x$



Продолжение табл. 13

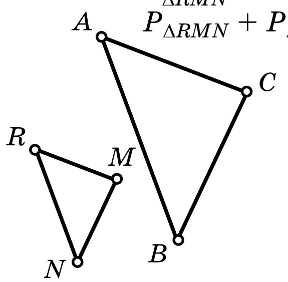
9

$\Delta ABC \sim \Delta MNK$
$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta MNK} = 2 : 3$
$S_{\Delta ABC} + S_{\Delta MNK} = 130$
$S_{\Delta ABC} = x$
$S_{\Delta MNK} = y$



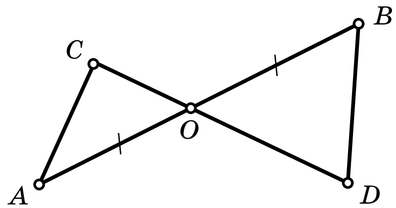
10

$\Delta RMN \sim \Delta ACB$
$S_{\Delta RMN} = 18,\ S_{\Delta ACB} = 32$
$P_{\Delta RMN} + P_{\Delta ACB} = 91$
$P_{\Delta RMN} = x$
$P_{\Delta ACB} = y$



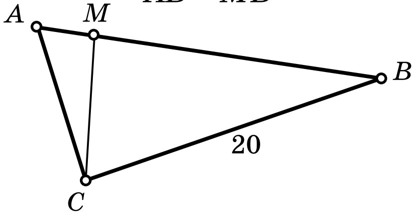
11

$CO : OD = 5 : 6$
$S_{\Delta AOC} = 5$
$S_{\Delta BOD} = x$



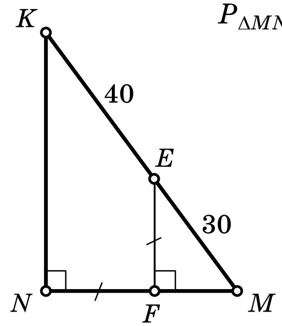
12

$S_{\Delta AMC} : S_{\Delta MCB} = 1 : 3$
$AB = x$
$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AM}{MB}$



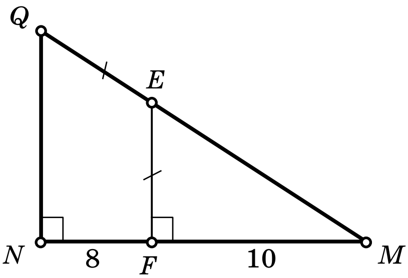
13

$P_{\Delta MNK} = x$



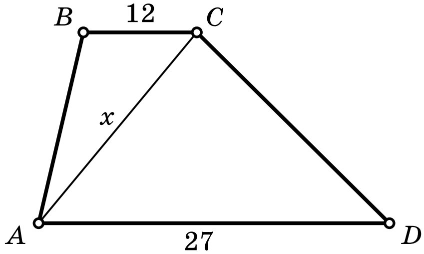
14

$P_{\Delta MNQ} = x$



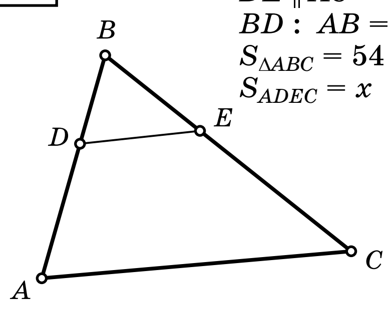
15

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$
$BC \parallel AD$



16

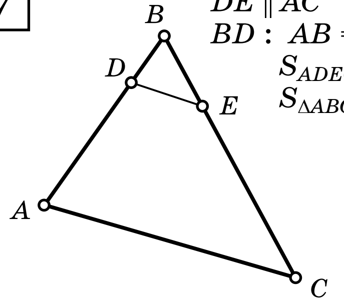
$DE \parallel AC$
$BD : AB = 1 : 3$
$S_{\Delta ABC} = 54$
$S_{ADEC} = x$



Окончание табл. 13

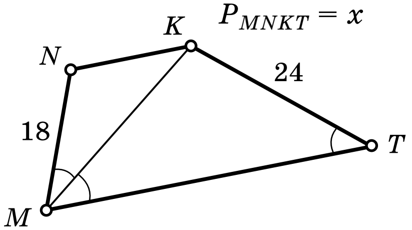
17

$DE \parallel AC$
$BD : AB = 1 : 4$
$S_{ADEC} = 60$
$S_{\Delta ABC} = x$



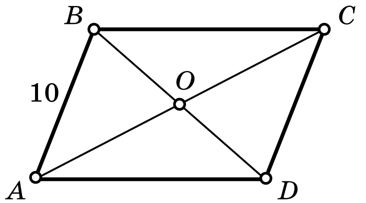
18

$\Delta MNK \sim \Delta MKT$
$NK \parallel MT$
$P_{MNKT} = x$



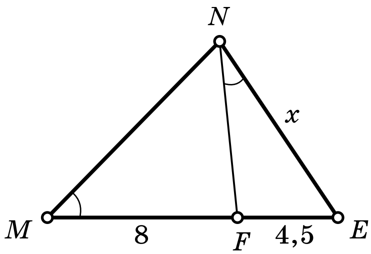
19

$ABCD$ — параллелограмм
$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{OC}$, $P_{ABCD} = x$

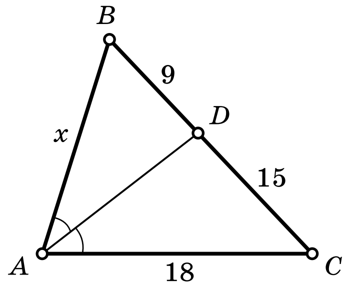


20

$\Delta NFE \sim \Delta MNE$

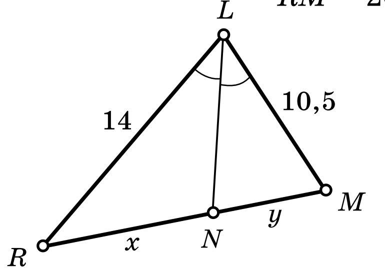


21



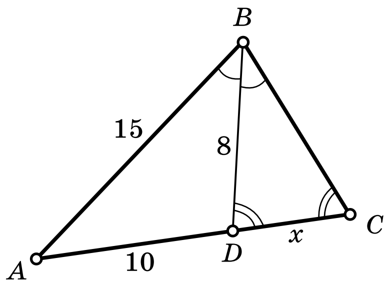
22

$RM = 20$



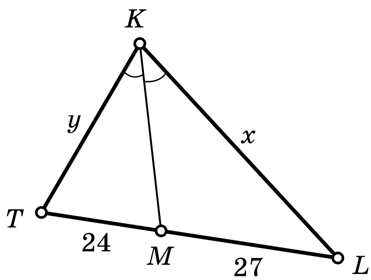
23

$DC = x$



24

$P_{\Delta TKL} = 153$



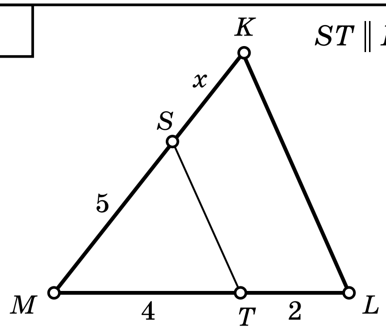
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 14

Найдите x, y.

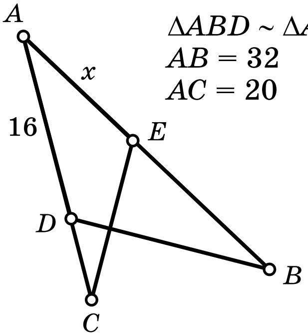
1

$ST \parallel KL$



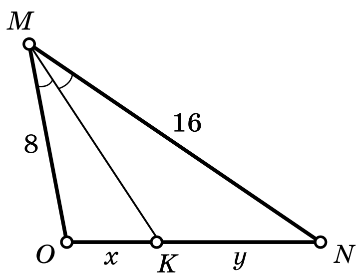
2

$\Delta ABD \sim \Delta AEC$
$AB = 32$
$AC = 20$



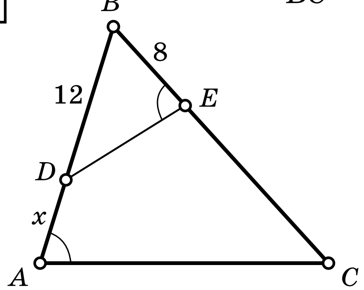
3

$ON = 12$

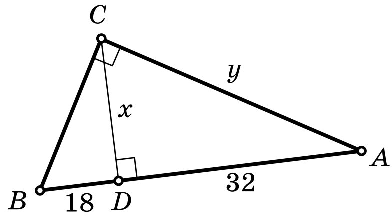


4

$BC = 24$

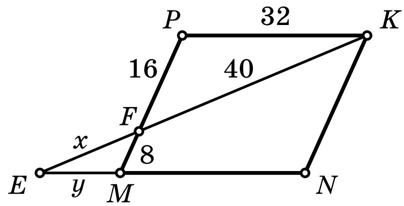


5



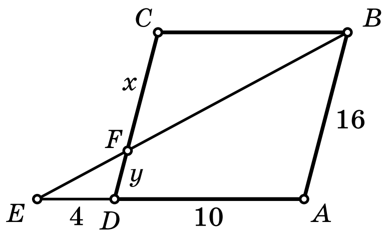
6

$PK \parallel MN$



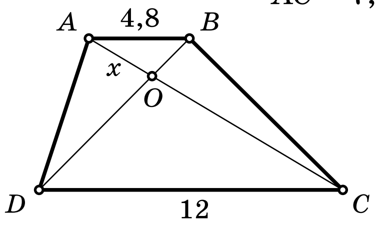
7

$CB \parallel DA$



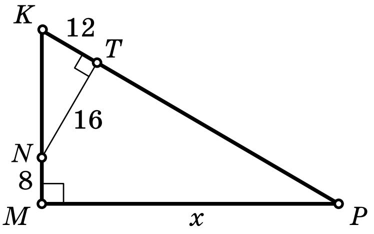
8

$AB \parallel DC$
$AC = 7{,}5$



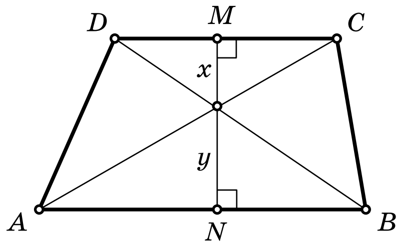
Окончание табл. 14

9



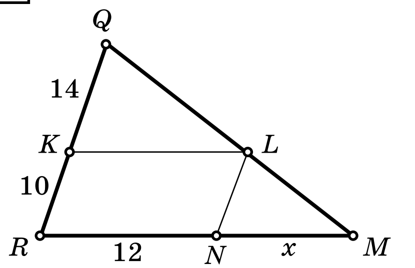
10

$AB \parallel DC$, $AB = 18$
$DC = 12$, $x + y = 20$



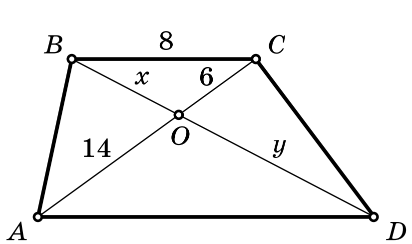
11

$RKLN$ — параллелограмм



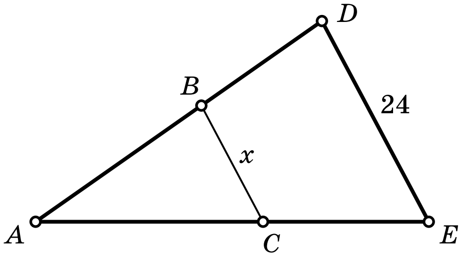
12

$ABCD$ — трапеция
$BD = 32$



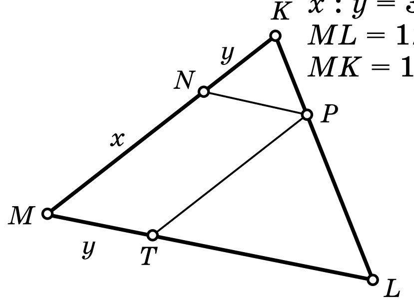
13

$BC \parallel DE$
$AB : BD = 2 : 1$



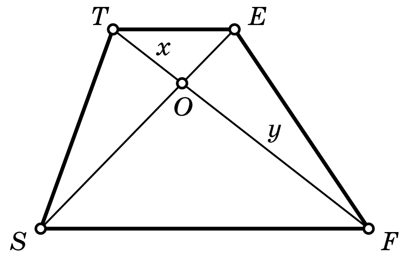
14

$MNPT$ — параллелограмм
$x : y = 3 : 1$
$ML = 12$
$MK = 18$



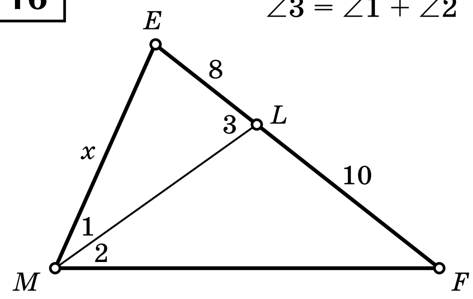
15

$P_{\Delta TOE} : P_{\Delta SOF} = 2 : 3$
$x + y = 10$, $TE \parallel SF$



16

$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$

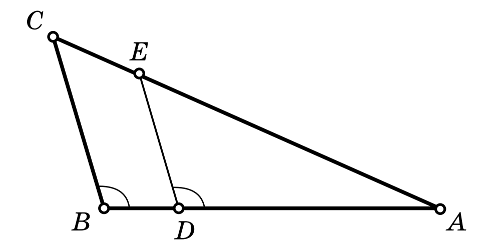


ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

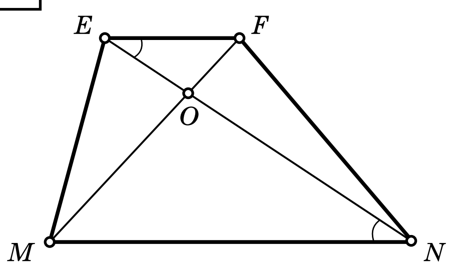
Таблица 15

Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

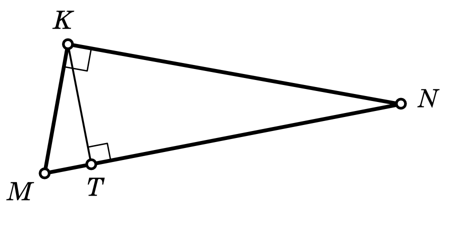
1



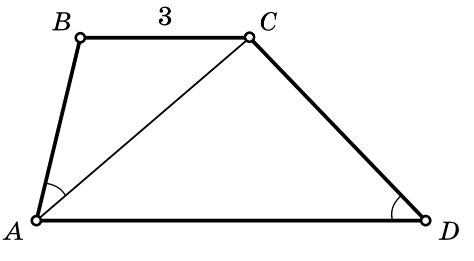
2



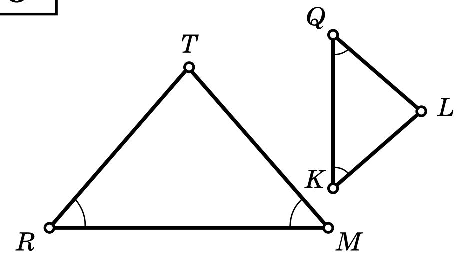
3



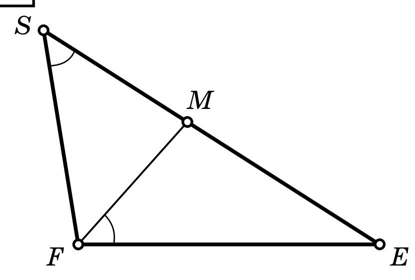
4 *ABCD* — трапеция



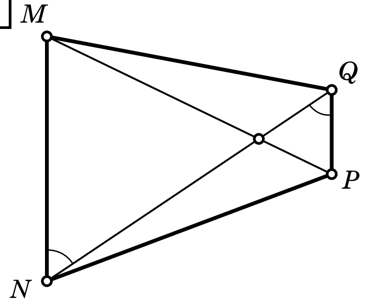
5



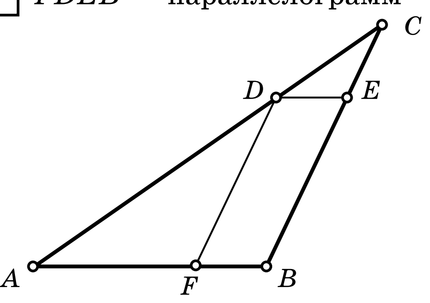
6



7

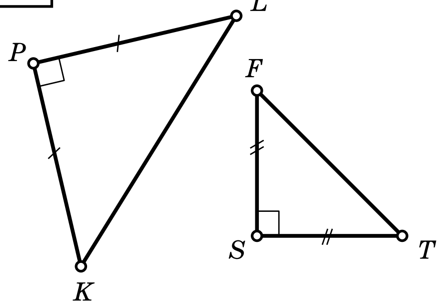


8 *FDEB* — параллелограмм

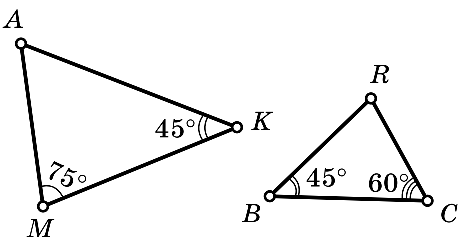


Окончание табл. 15

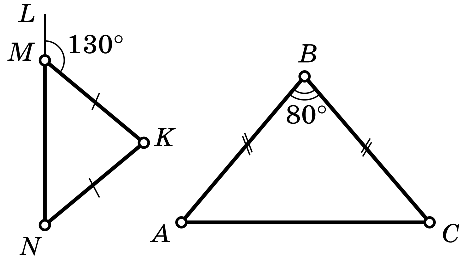
9



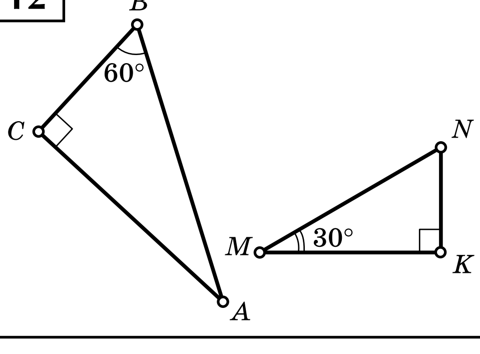
10



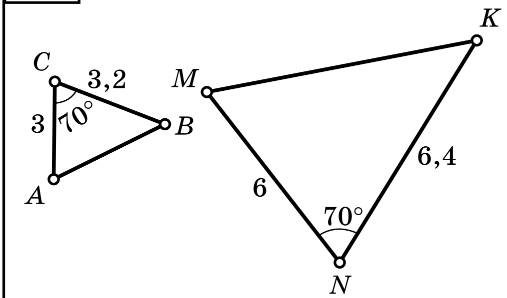
11



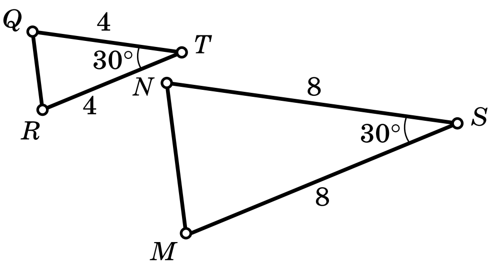
12



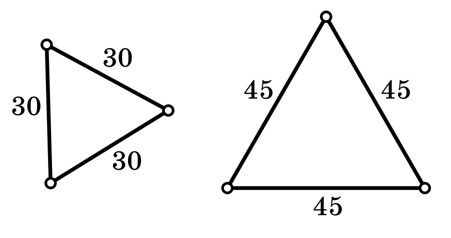
13



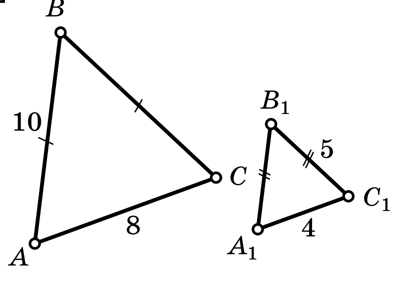
14



15



16

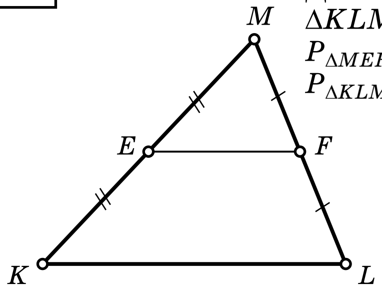


СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 16

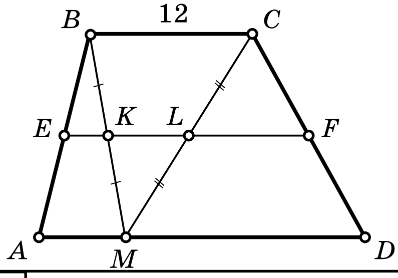
1

Дано: ΔKLM
$P_{\Delta MEF} = 31$
$P_{\Delta KLM}$ — ?



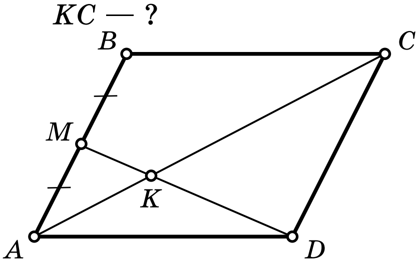
5

Дано: $ABCD$ — трапеция
$AD = 2\ BC$, EF — ?



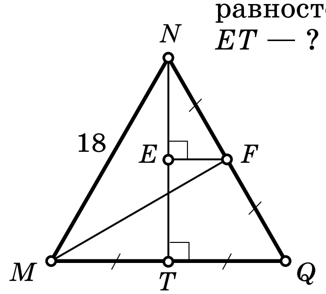
2

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC = 18$, AK — ?, KC — ?



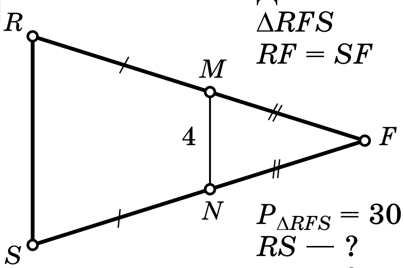
6

Дано: ΔMNQ — равносторонний
ET — ?



3

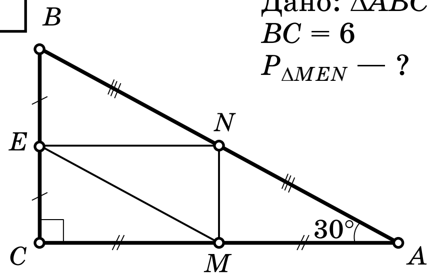
Дано: ΔRFS
$RF = SF$



$P_{\Delta RFS} = 30$
RS — ?
RF — ?

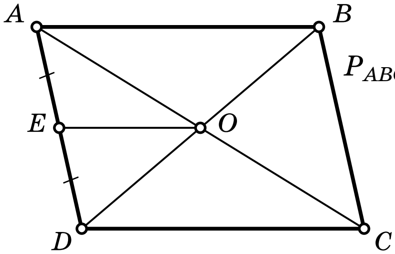
7

Дано: ΔABC
$BC = 6$
$P_{\Delta MEN}$ — ?



4

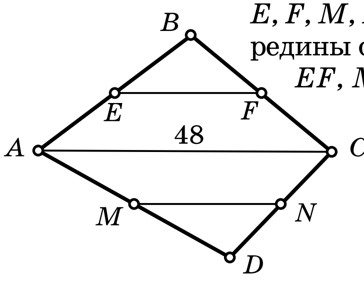
Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $EO = 4$, $ED = 3$,



P_{ABCD} — ?

8

Дано: $ABCD$ — четырехугольник
E, F, M, N — середины сторон
EF, MN — ?



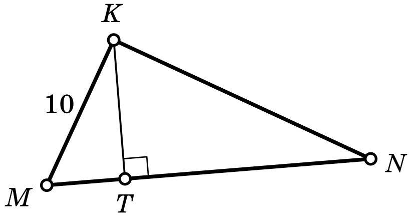
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Таблица 17

Найдите неизвестные линейные элементы ΔMNK ($\angle K = 90°$).

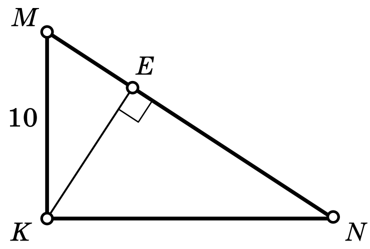
1

$MN = 26$



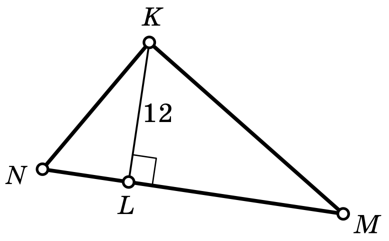
5

$MN = 25$



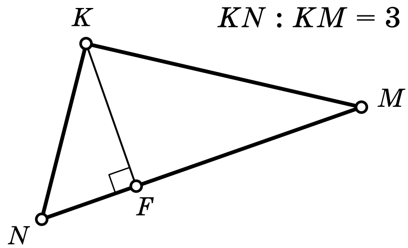
2

$MN = 25$

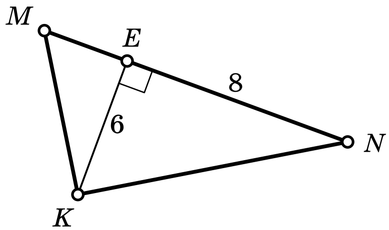


6

$MN = 50$
$KN : KM = 3 : 4$

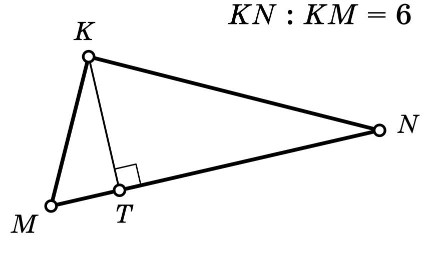


3

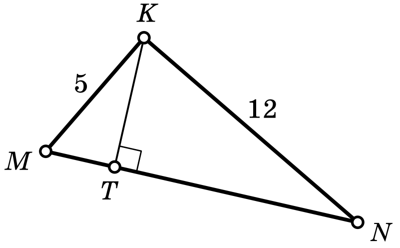


7

$TN - MT = 11$
$KN : KM = 6 : 5$

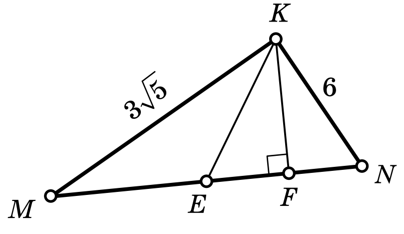


4



8

$ME = EN$

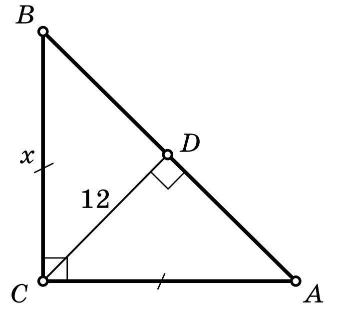


СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Таблица 18

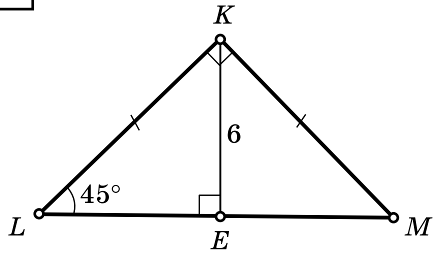
Найдите x.

1

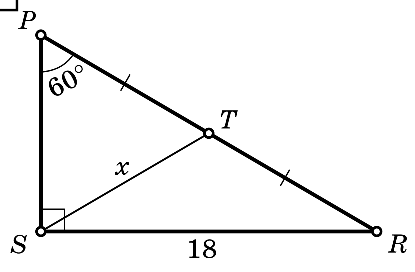


2

$LM = x$ — ?

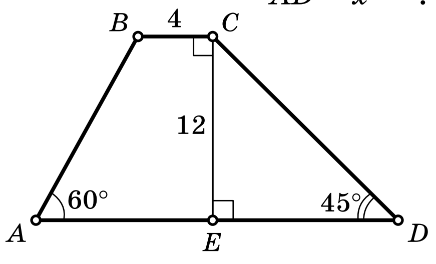


3

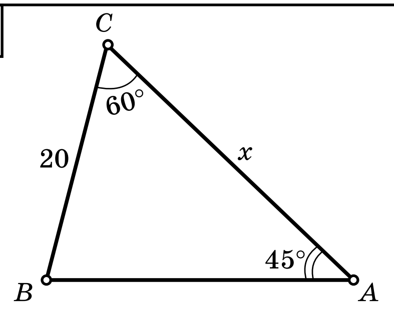


4

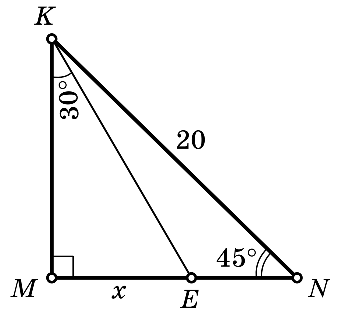
$AD = x$ — ?



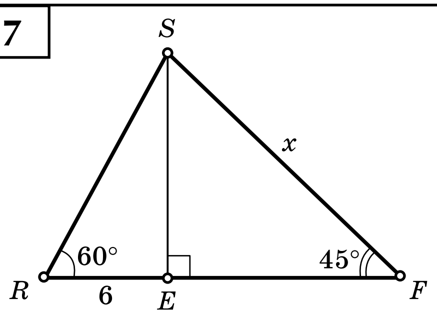
5



6

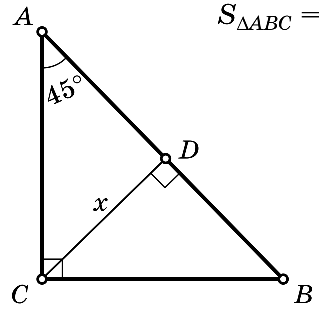


7



8

$S_{\Delta ABC} = 50$



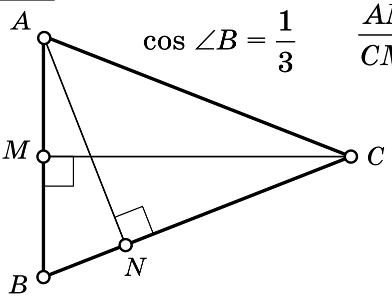
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Таблица 19

1

$AC = BC$

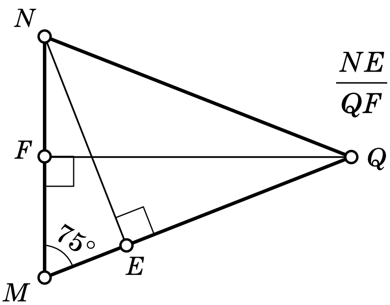
$\cos\angle B = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{AN}{CM}$ — ?



2

$NQ = MQ$

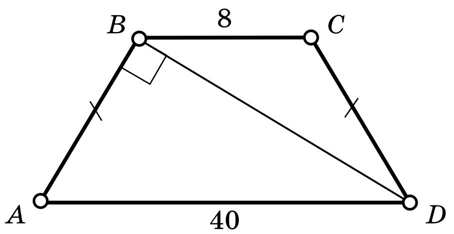
$\frac{NE}{QF}$ — ?



3

$ABCD$ — трапеция

S_{ABCD} — ?

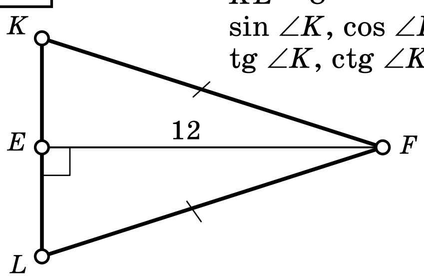


4

$KL = 8$

$\sin\angle K$, $\cos\angle K$

$\operatorname{tg}\angle K$, $\operatorname{ctg}\angle K$



5

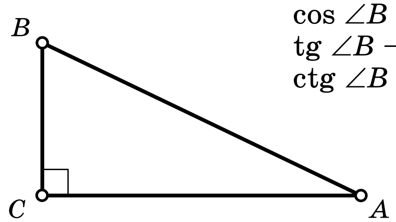
$AB = 5\,BC$

$\sin\angle B$ — ?

$\cos\angle B$ — ?

$\operatorname{tg}\angle B$ — ?

$\operatorname{ctg}\angle B$ — ?

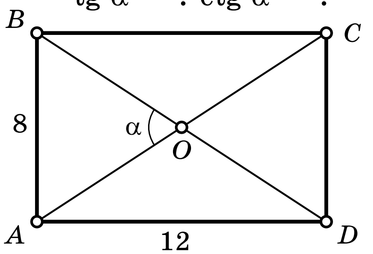


6

$ABCD$ — прямоугольник

$\sin\alpha$ — ? $\cos\alpha$ — ?

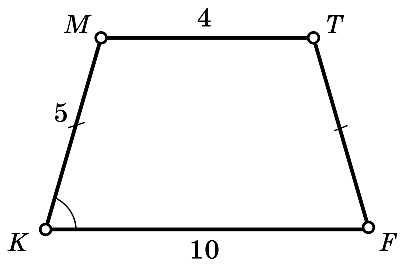
$\operatorname{tg}\alpha$ — ? $\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



7

$KMTF$ — трапеция

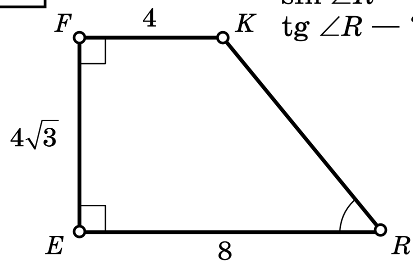
$\sin\angle K$ — ? $\cos\angle K$ — ?



8

$\sin\angle R$ — ?

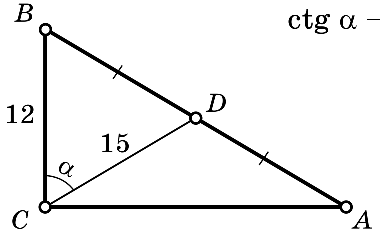
$\operatorname{tg}\angle R$ — ?



Окончание табл. 19

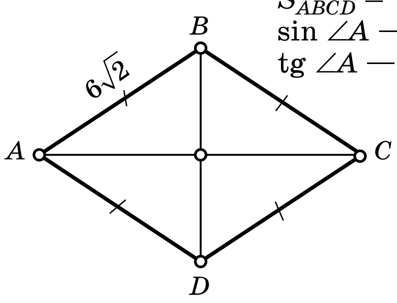
9

$\angle ACB = 90°$
$\cos\alpha$ — ?
$\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



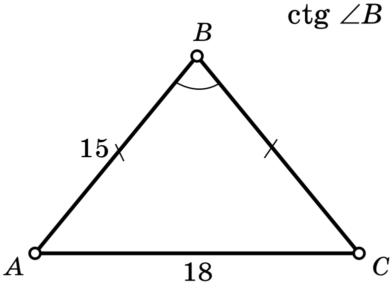
10

$S_{ABCD} = 12\sqrt{2}$
$\sin\angle A$ — ?
$\operatorname{tg}\angle A$ — ?



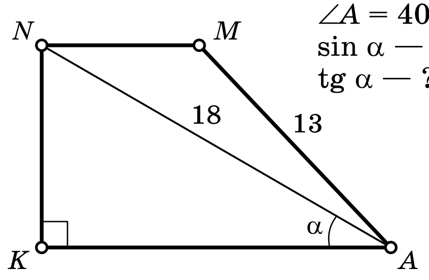
11

$\cos\angle B$ — ?
$\operatorname{ctg}\angle B$ — ?



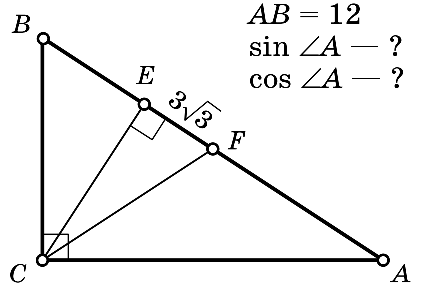
12

$AMNK$ — трапеция
$\angle A = 40°$
$\sin\alpha$ — ?
$\operatorname{tg}\alpha$ — ?



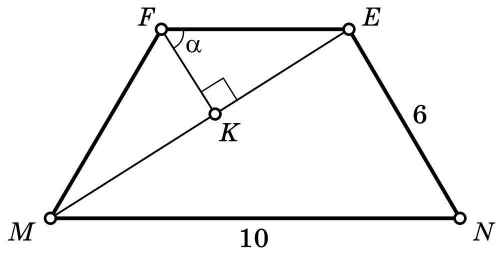
13

CF — медиана
$AB = 12$
$\sin\angle A$ — ?
$\cos\angle A$ — ?



14

$MNEF$ — трапеция
$ME = 8$, $\sin\alpha$ — ?

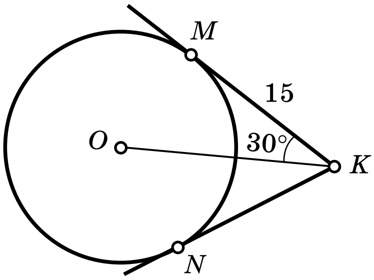


КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Таблица 20

1

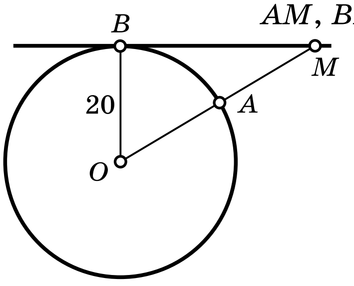
MN — ?



2

$OM = 30$

AM, BM — ?



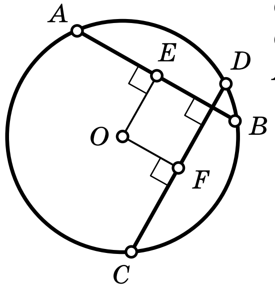
3

$AO = 10$

$OE = 8$

$OF = 6$

AB, CD — ?



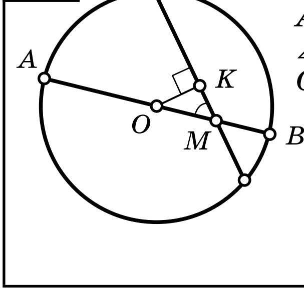
4

$MB = 4$

$AM = 12$

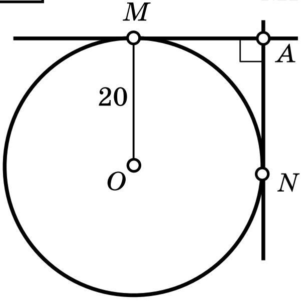
$\angle OMK = 30°$

OK — ?



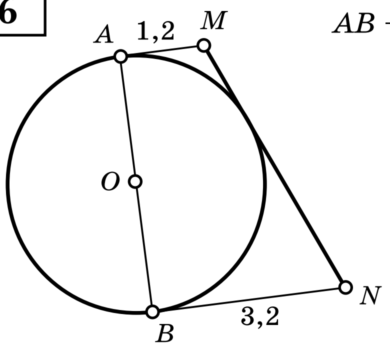
5

MA, NA — ?



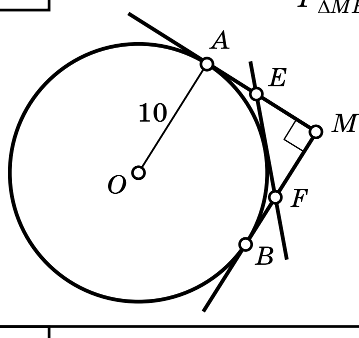
6

AB — ?



7

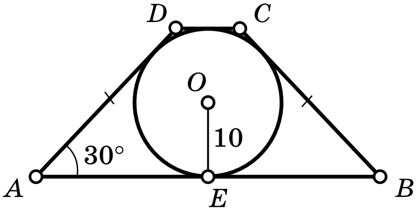
$P_{\triangle MEF}$ — ?



8

$ABCD$ — трапеция

AD, BC — ?

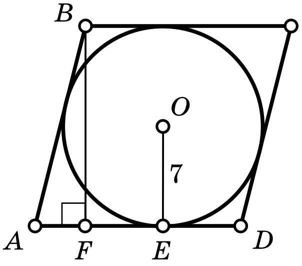


Окончание табл. 20

9

$ABCD$ — ромб

BF — ?

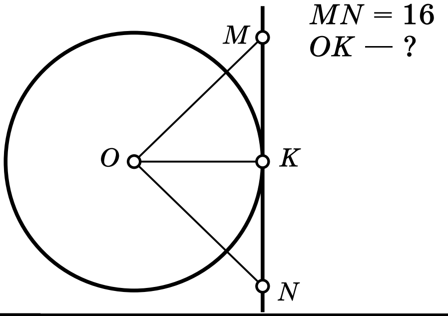


10

$OM = ON = 10$

$MN = 16$

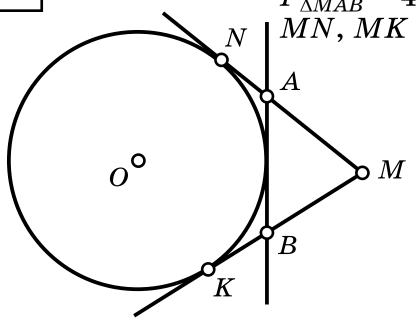
OK — ?



11

$P_{\Delta MAB} = 48$

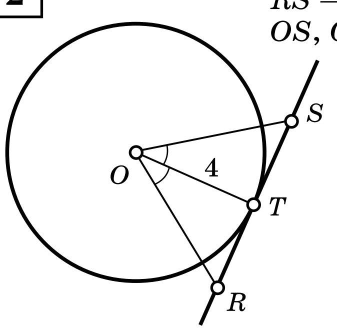
MN, MK — ?



12

$RS = 15$

OS, OR — ?

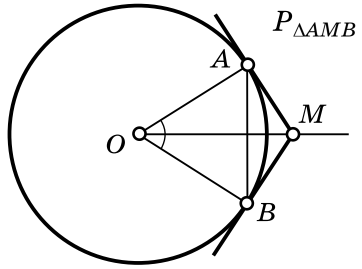


13

$OM = 24$

$\angle AOB = 60°$

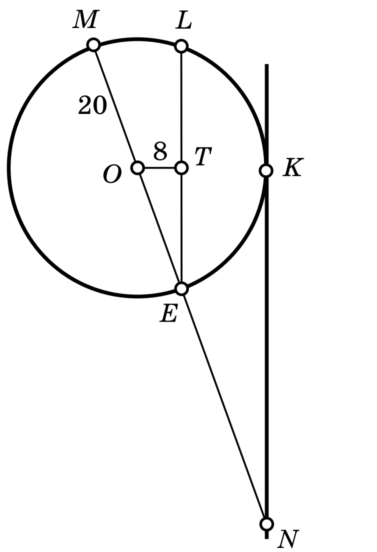
$P_{\Delta AMB}$ — ?



14

$EL \parallel NK$

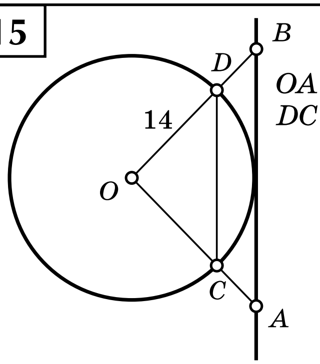
MN — ?



15

$OA = OB = 20$

DC — ?



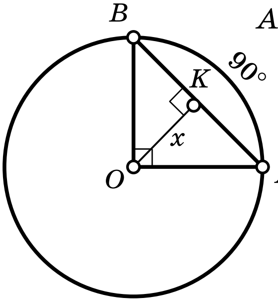
ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

Таблица 21

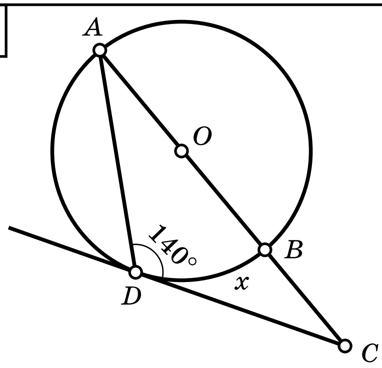
Найдите x.

1

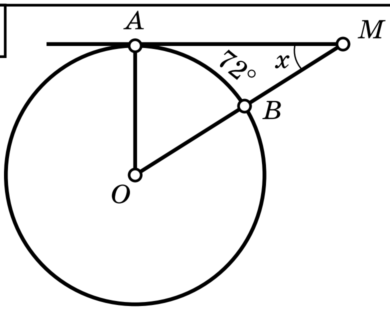
$AB = 8$



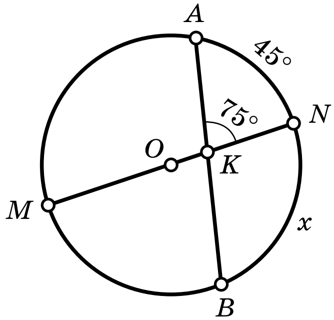
5



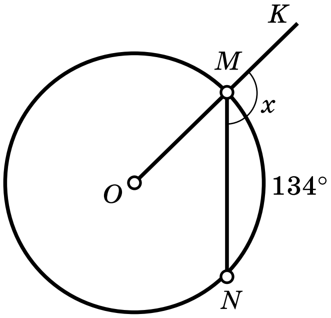
2



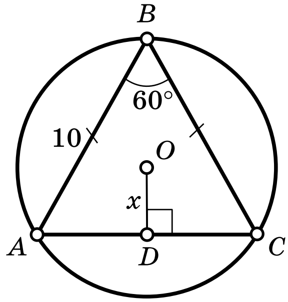
6



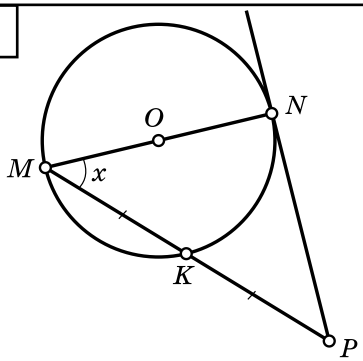
3



7

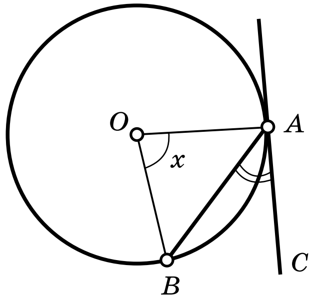


4



8

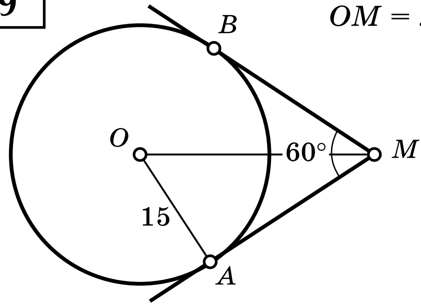
$\angle BAC = 40°$



Продолжение табл. 21

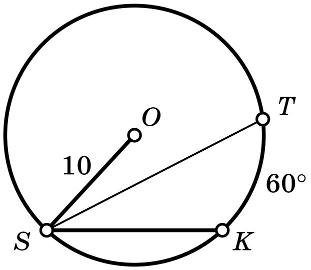
9

$OM = x$

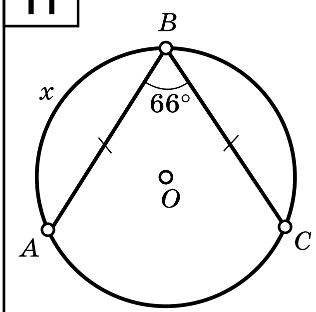


10

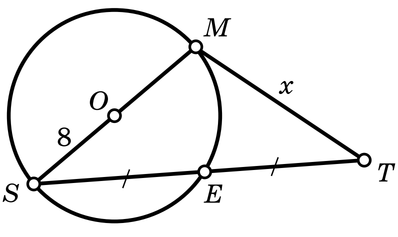
$TK = x$



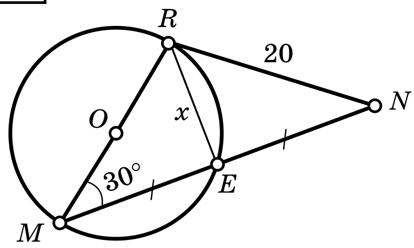
11



12

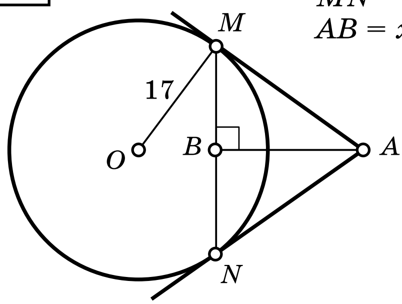


13

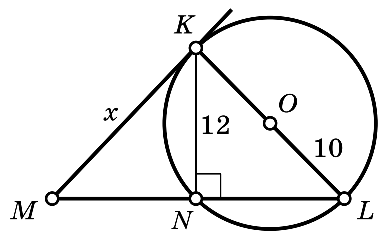


14

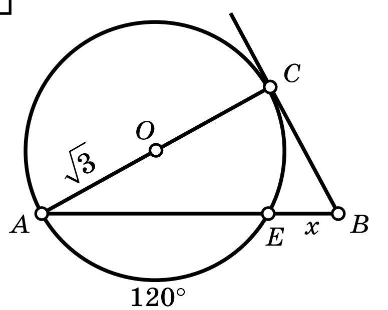
$MN = 30$
$AB = x$



15

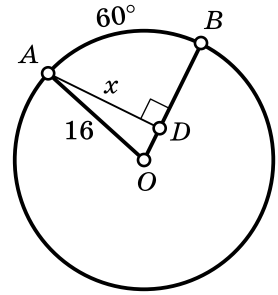


16

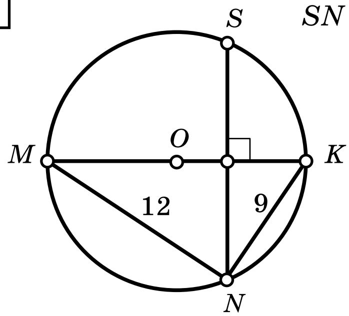


Продолжение табл. 21

17

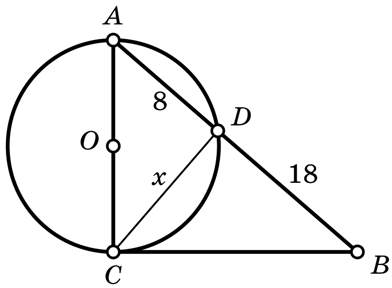


18

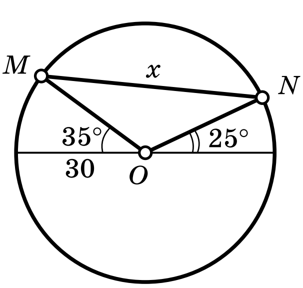


$SN = x$

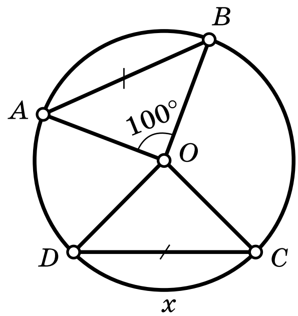
19



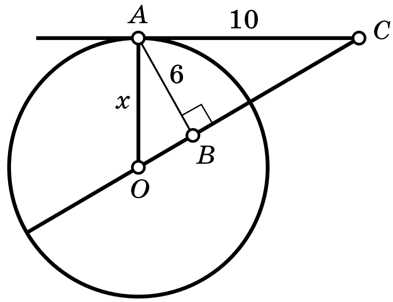
20



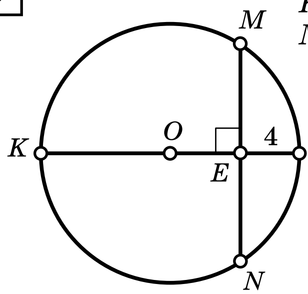
21



22

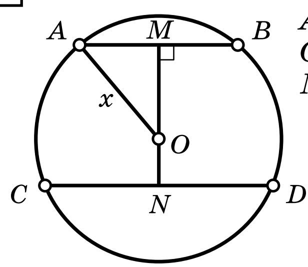


23



$KE = 12$
$MN = x$

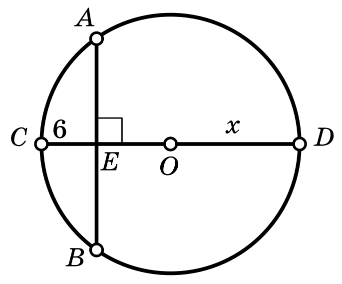
24



$AB \parallel CD$
$AB = 12$
$CD = 16$
$MN = 14$

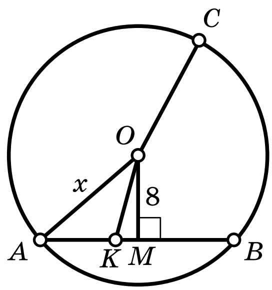
Продолжение табл. 21

25



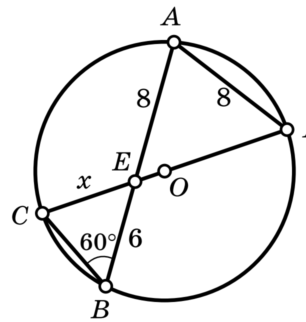
$AB + CE = CD$

26

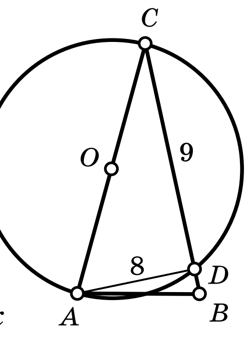


$AK = OK = 10$

27

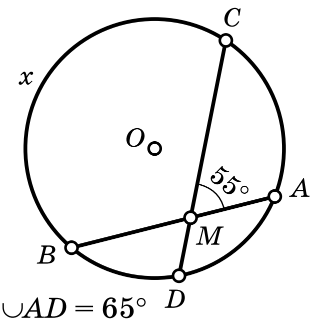


28



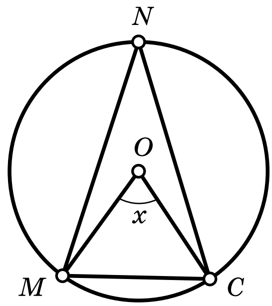
$AC = BC$
$S_{\Delta ABC} = x$

29



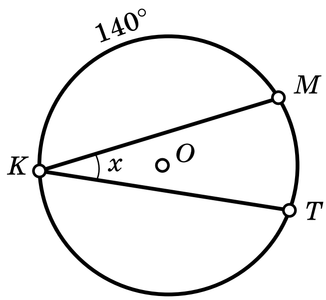
$\cup CB - \cup AD = 65°$

30



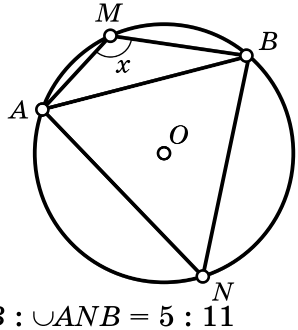
$\angle NMC = 75°$, $\cup NM : \cup MC = 2 : 1$

31



$\cup KT : \cup TM = 7 : 4$

32

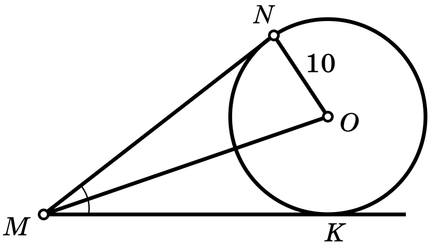


$\cup AMB : \cup ANB = 5 : 11$

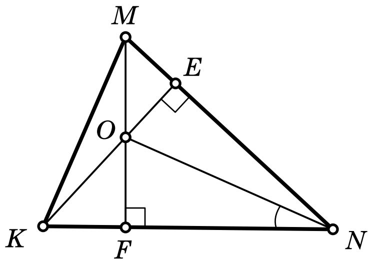
ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 22

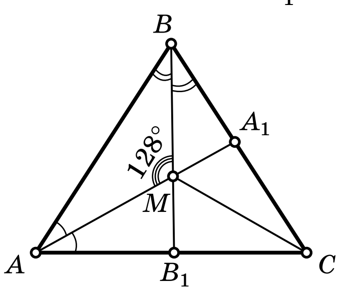
1 $\angle NMK = 60^\circ$, MO — ?



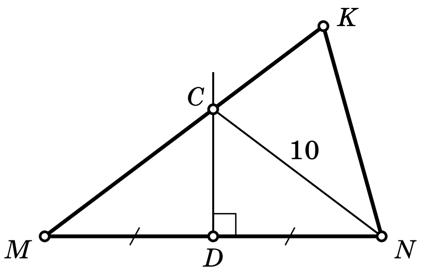
2 $\angle MKN = 66^\circ$, $\angle FNO$ — ?



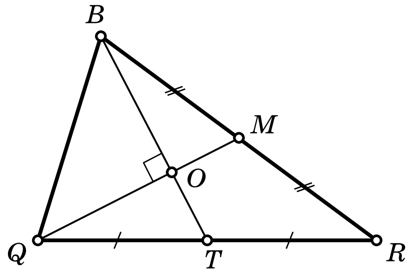
3 $\angle MCB_1$ — ?



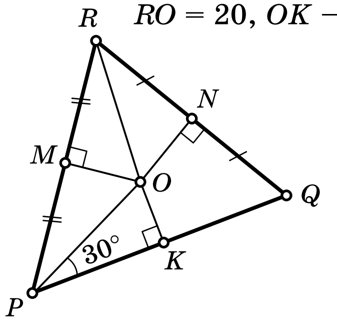
4 $MK = 17$, CK — ?



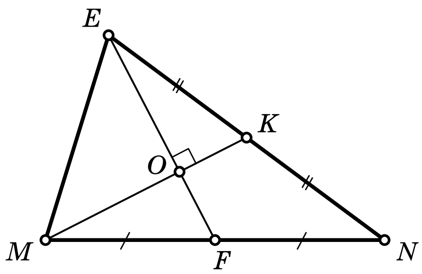
5 $QM = 9$, $BT = 12$, $S_{\Delta BOQ}$ — ?



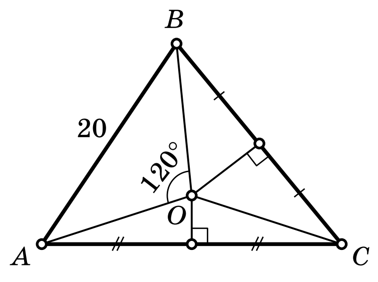
6 $RO = 20$, OK — ?



7 $EF = 18$, $MK = 15$, ON — ?



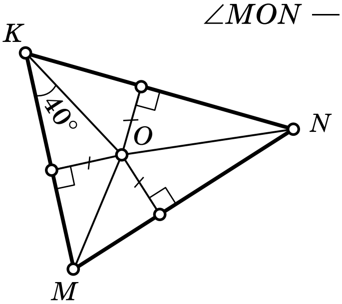
8 OC — ?



Окончание табл. 22

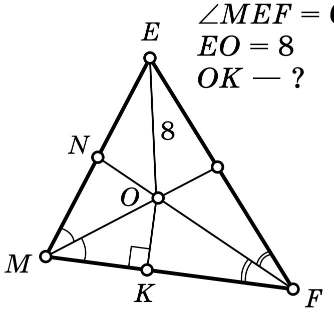
9

$\angle MON$ — ?



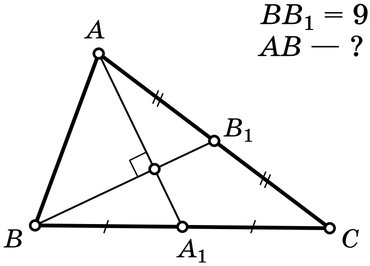
10

$\angle MEF = 60°$
$EO = 8$
OK — ?



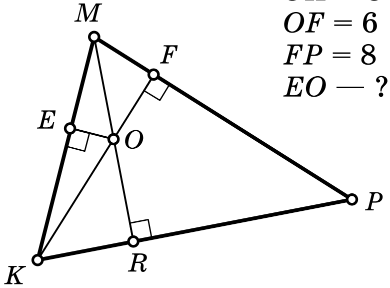
11

$AA_1 = 12$
$BB_1 = 9$
AB — ?



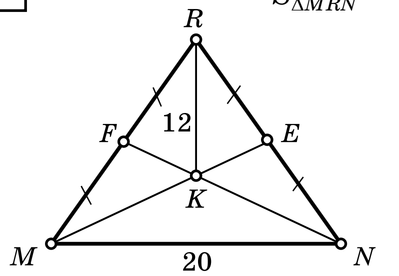
12

$OK = 8$
$OF = 6$
$FP = 8$
EO — ?



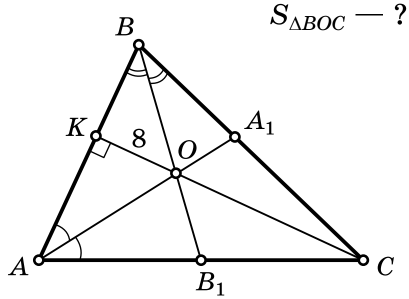
13

$S_{\Delta MRN}$ — ?



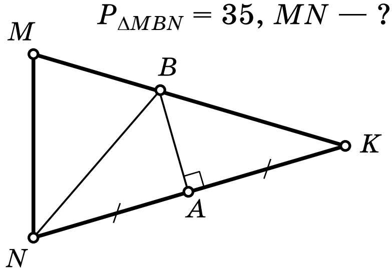
14

$BC = 20$
$S_{\Delta BOC}$ — ?



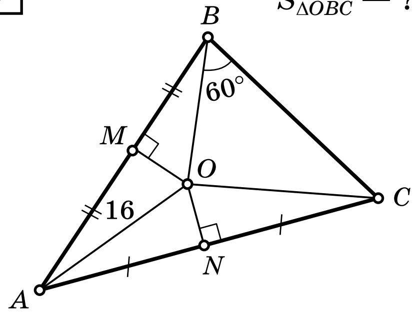
15

$MK = NK = 20$
$P_{\Delta MBN} = 35$, MN — ?



16

$S_{\Delta OBC}$ — ?

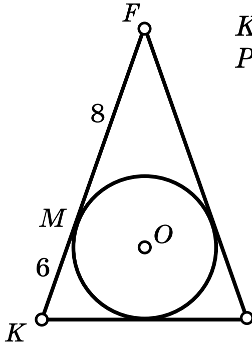


ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ

Таблица 23

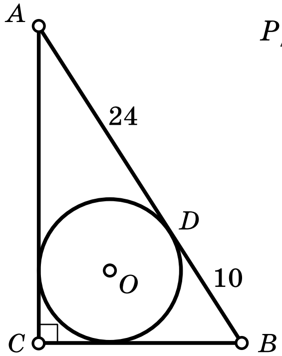
1

$KF = EF$
$P_{\Delta KFE}$ — ?



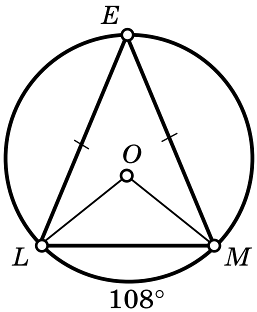
2

$P_{\Delta ABC}$ — ?



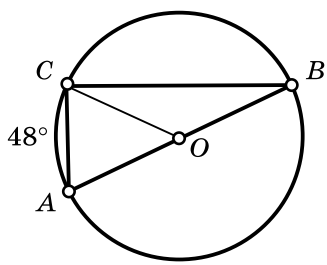
3

$\angle L$, $\angle M$, $\angle E$ — ?



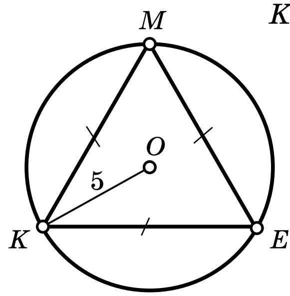
4

$\angle A$, $\angle B$, $\angle ACB$ — ?



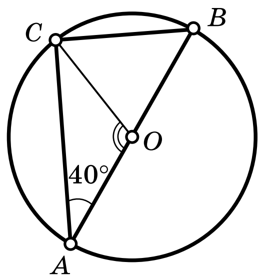
5

KE — ?



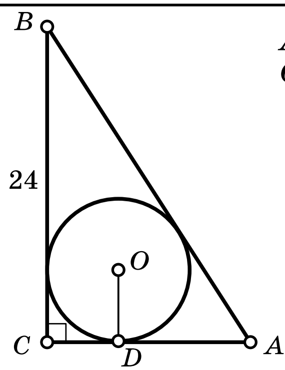
6

$\angle AOC$ — ?



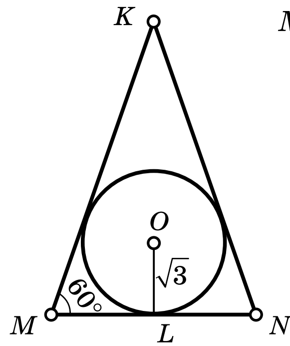
7

$AC = 10$
OD — ?



8

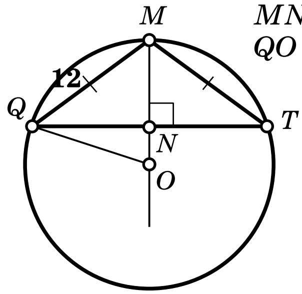
MN — ?



Продолжение табл. 23

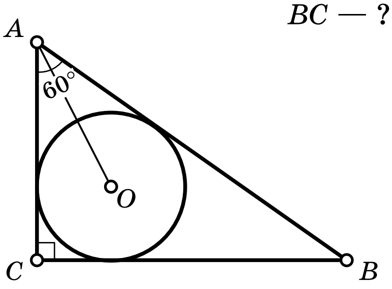
9

$MN = 8$
QO — ?



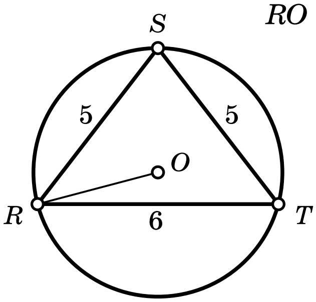
10

$AO = 20$
BC — ?



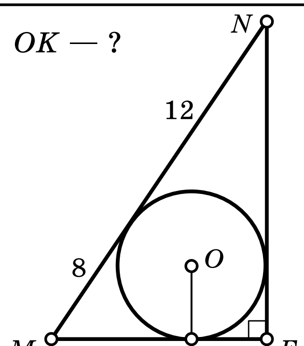
11

RO — ?



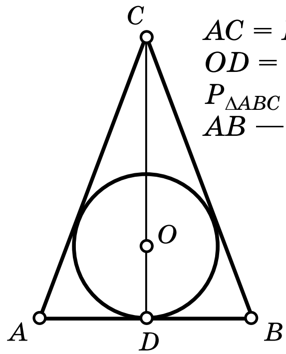
12

OK — ?



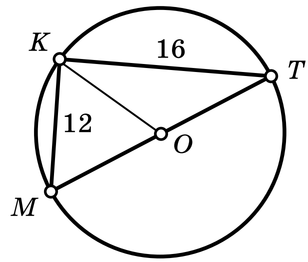
13

$AC = BC$
$OD = 0{,}4\ CD$
$P_{\Delta ABC} = 40$
AB — ?



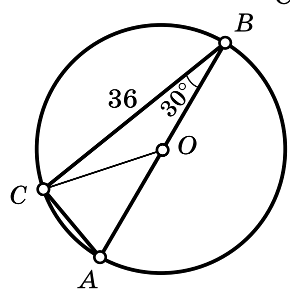
14

KO — ?



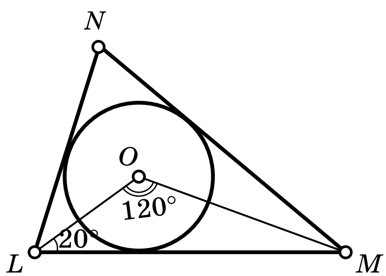
15

CO — ?



16

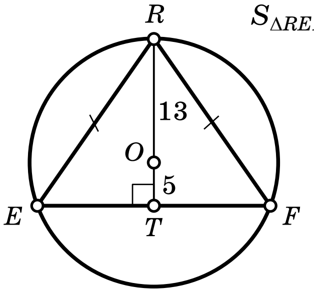
$\angle N$ — ?



Продолжение табл. 23

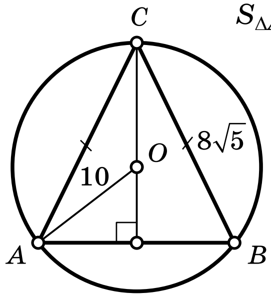
17

$S_{\Delta REF}$ — ?



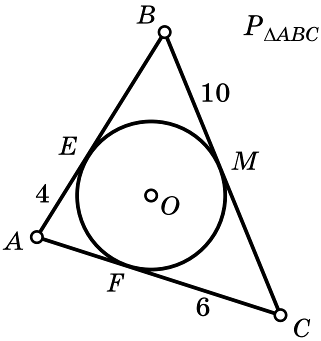
18

$S_{\Delta ABC}$ — ?



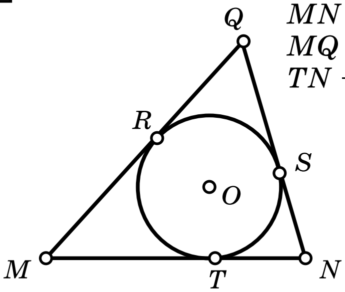
19

$P_{\Delta ABC}$ — ?



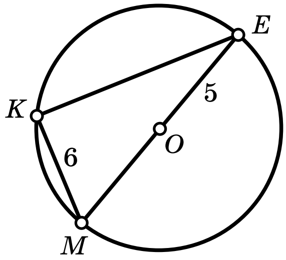
20

$QN = 10$
$MN = 20$
$MQ = 24$
TN — ?



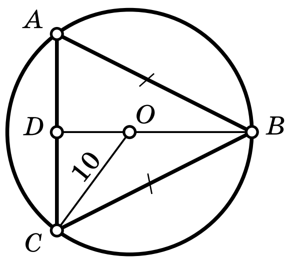
21

KE — ?



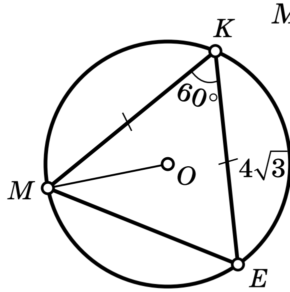
22

$AB = BC = AC$, BD — ?



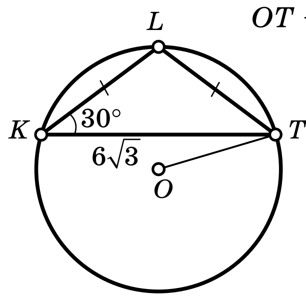
23

MO — ?



24

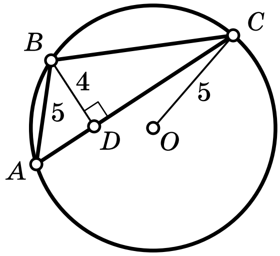
OT — ?



Продолжение табл. 23

25

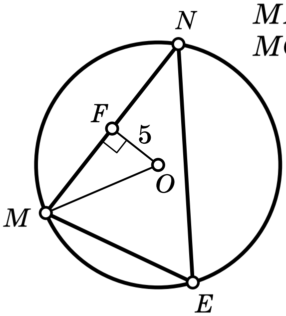
BC — ?



26

$MN = 24$

MO — ?

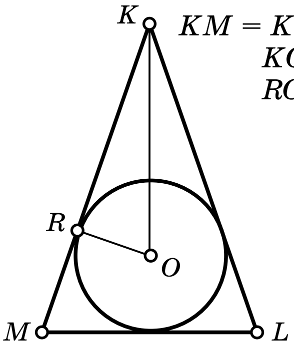


27

$KM = KL = 20$

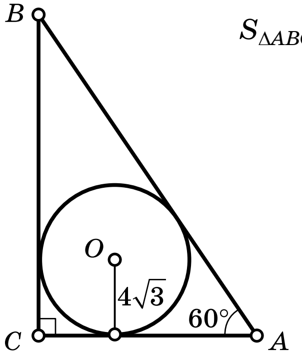
$KO = 10$

RO — ?



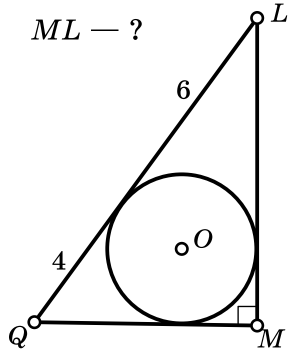
28

$S_{\Delta ABC}$ — ?



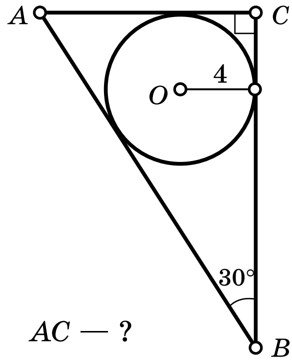
29

ML — ?



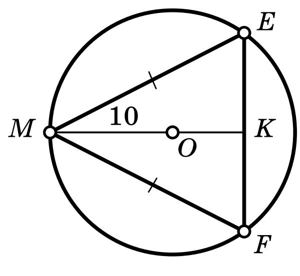
30

AC — ?



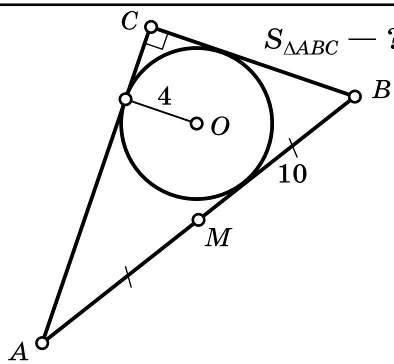
31

$MK = 16$, ME, EF — ?



32

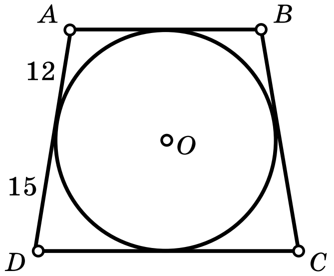
$S_{\Delta ABC}$ — ?



Продолжение табл. 23

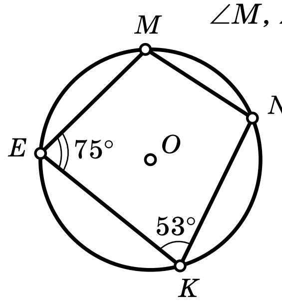
33

$AD = BC$, AB, DC — ?



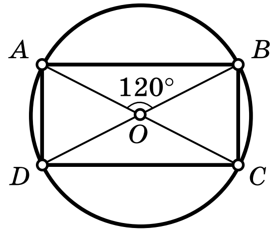
34

$\angle M$, $\angle N$ — ?



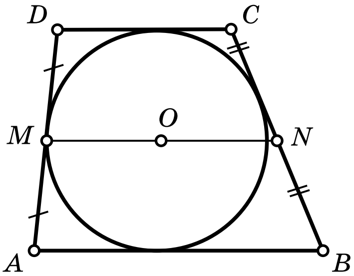
35

$ABCD$ — прямоугольник
$AD = 10$, AO — ?



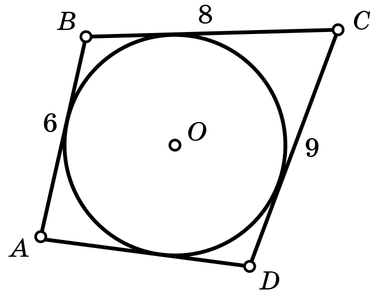
36

$P_{ABCD} = 48$, MN — ?



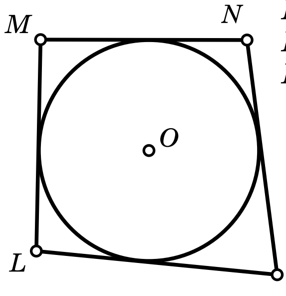
37

P_{ABCD} — ?



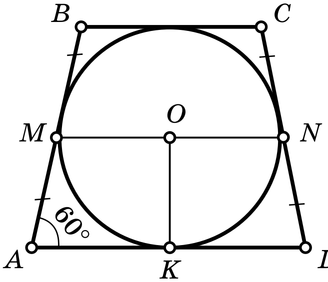
38

$MN : NK : KL = 2 : 6 : 7$
$P_{MNKL} = 54$
MN, NK,
KL, LM — ?



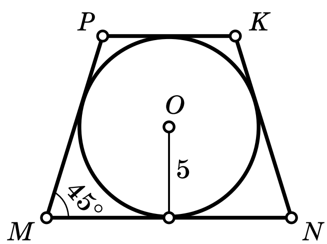
39

$ABCD$ — трапеция
$MN = 20$ — средняя линия
OK — ?



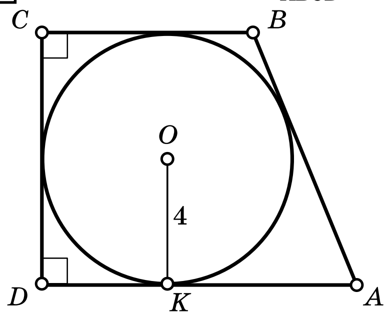
40

$MNKP$ — трапеция
$MP = NK$, S_{MNKP} — ?

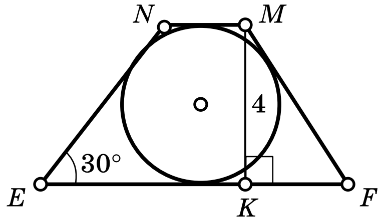


Продолжение табл. 23

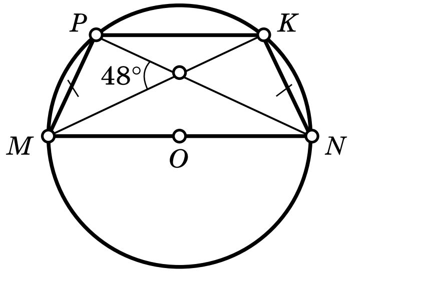
41 $AD - BC = 6$, P_{ABCD} — ?



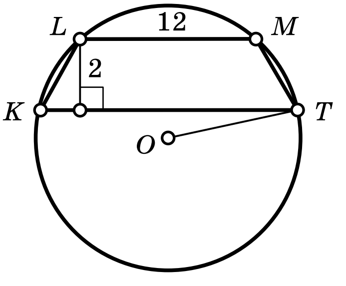
45 $EFMN$ — трапеция
$NE = MF$
$EF + MN$ — ?



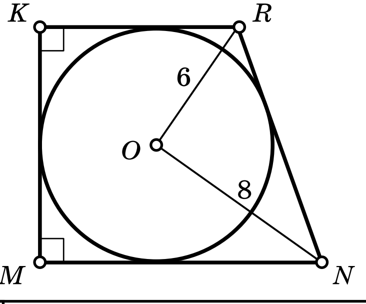
42 $MNKP$ — трапеция
$\angle M$, $\angle N$, $\angle K$, $\angle P$ — ?



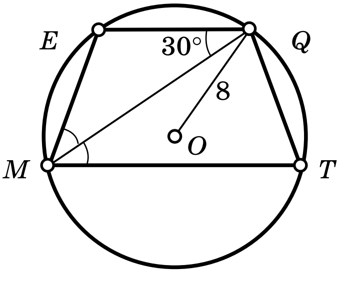
46 $LM \parallel KT$, $KT = 16$, OT — ?



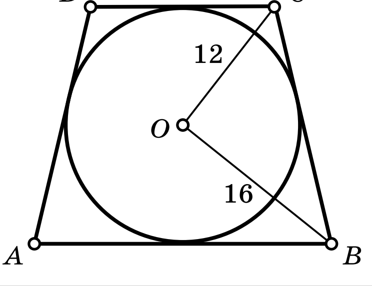
43 S_{MNRK} — ?



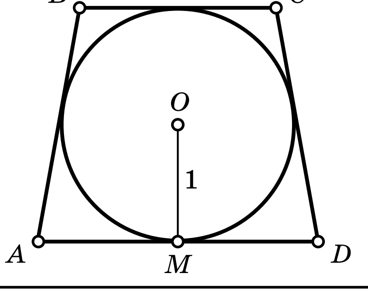
47 $EQ \parallel MT$, S_{MTQE} — ?



44 $AD = BC$, S_{ABCD} — ?



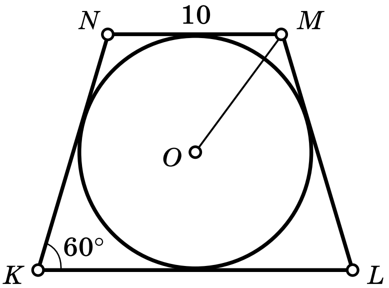
48 $BC \parallel AD$, $AB = CD$, AD — ?



Окончание табл. 23

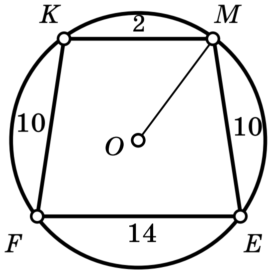
49

$MN \parallel KL$, $KN = NM = ML = 10$, MO — ?



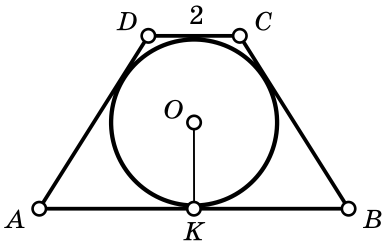
50

$KM \parallel FE$, MO — ?



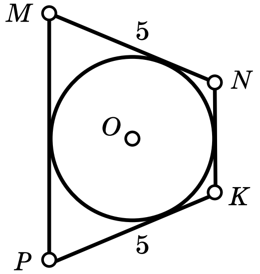
51

$ABCD$ — трапеция
$AD = BC$, $AB = 18$
OK — ?



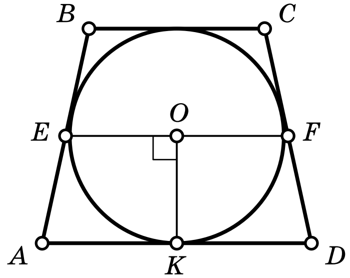
52

$MP \parallel NK$, $MN = PK$
$MP - NK = 6$, S_{MPKN} — ?



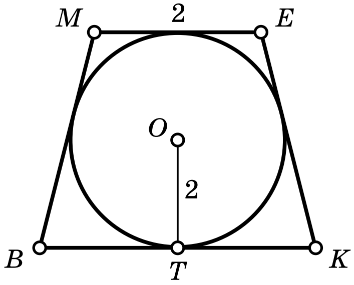
53

$BC \parallel AD$, $AB = CD$, $EF = 8$
$OK = 5$, S_{ABCD} — ?



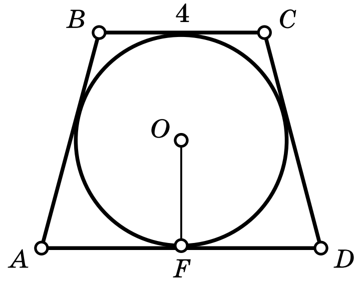
54

$ME \parallel BK$, $MB = EK$
S_{MEKB} — ?



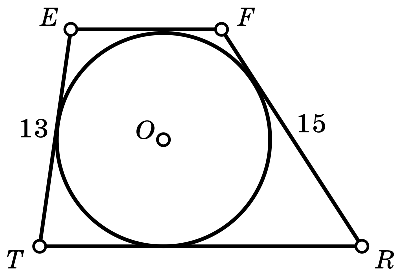
55

$AD \parallel BC$, $AB = CD$
$AD = 9$, OF — ?



56

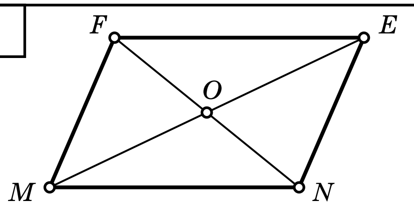
$EF \parallel TR$, $TR - EF = 14$
S_{TRFE} — ?



ВЕКТОРЫ

Таблица 24

1



$MFEN$ — параллелограмм. Доказать, что

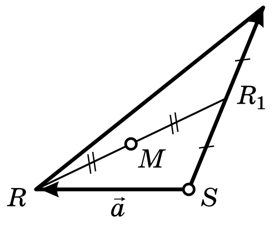
$$\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{FM}$$

2

Найдите $\overrightarrow{X}$, если

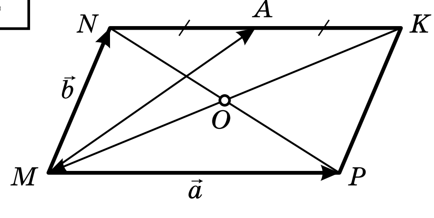
$$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{X}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}$$

3



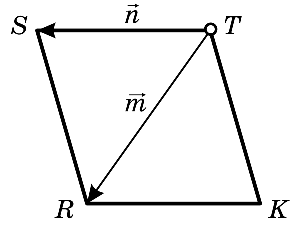
Выразите вектор $\overrightarrow{SM}$ через $\overrightarrow{SR}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{ST}=\vec{b}$

4



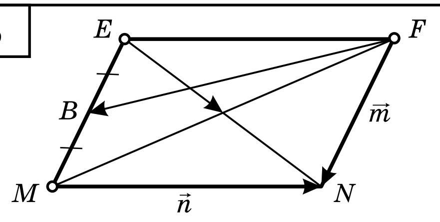
$MNKP$ — параллелограмм. Выразите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{MA}$ через векторы $\overrightarrow{MP}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MN}=\vec{b}$

5



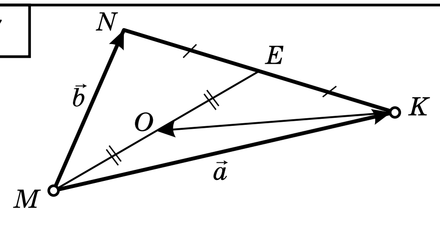
$RSTK$ — параллелограмм. Выразите векторы $\overrightarrow{RK}$, $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{SR}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$

6



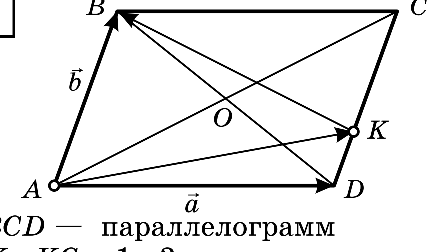
$MNFE$ — параллелограмм. Выразите векторы $\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{FB}$ через векторы $\overrightarrow{FN}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{MN}=\vec{n}$

7



Выразите вектор $\overrightarrow{KO}$ через векторы $\overrightarrow{MK}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MN}=\vec{b}$

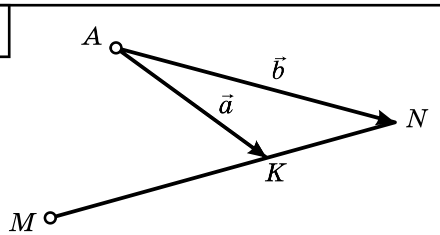
8



$ABCD$ — параллелограмм $DK : KC = 1 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KB}$ через векторы $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

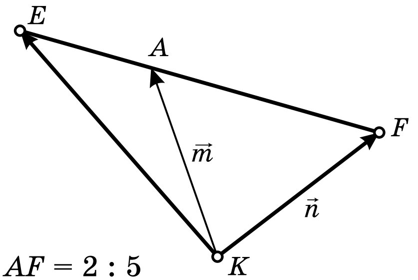
Продолжение табл. 24

9



$MK : KN = 3 : 2$
Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$

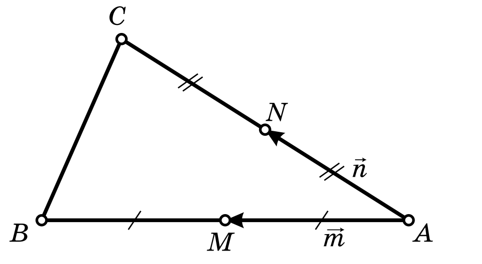
10



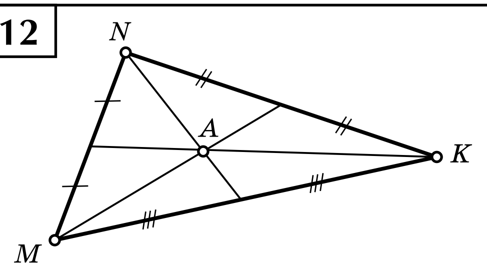
$EA : AF = 2 : 5$
Выразите вектор $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{KA}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{KF}$

11

$\overrightarrow{AM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$
$\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ — ?

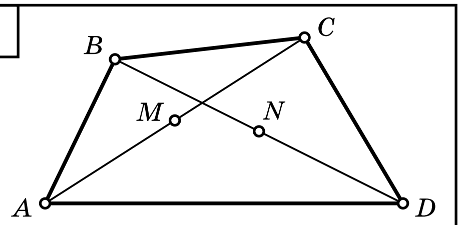


12



Доказать, что
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$

13

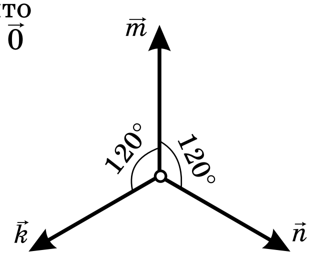


M — середина BD
N — середина AC

Доказать, что $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$

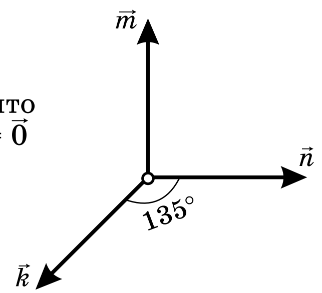
14

$|\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{k}|$
Доказать, что
$\vec{m} + \vec{n} + \vec{k} = \vec{0}$

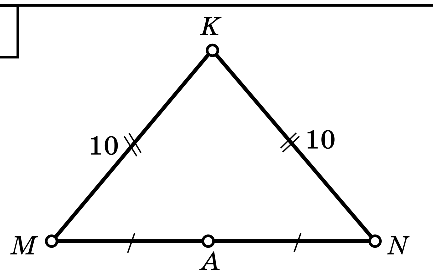


15

$|\vec{n}| = |\vec{k}| = 1$
$|\vec{m}| = \sqrt{2}$
Доказать, что
$\vec{m} + \vec{n} + \vec{k} = \vec{0}$



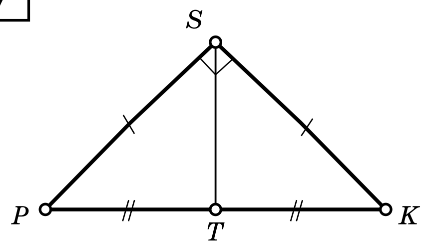
16



$KA = 8$
Найдите $\left|\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{KM}\right|$

Окончание табл. 24

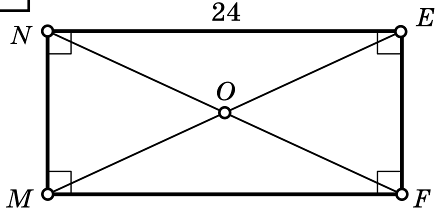
17



$KP = 12$

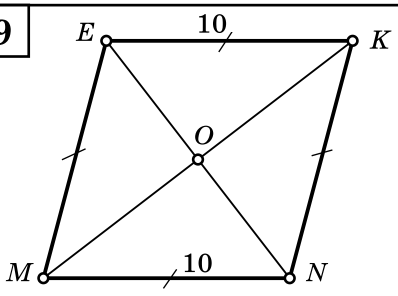
Найдите $|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{PT}|$

18



Найдите $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE} - \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{OF}|$

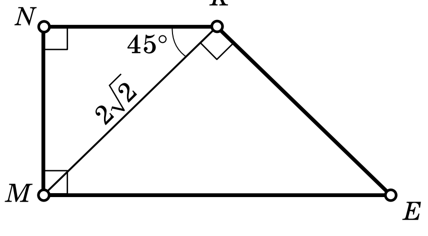
19



$EN = 12$

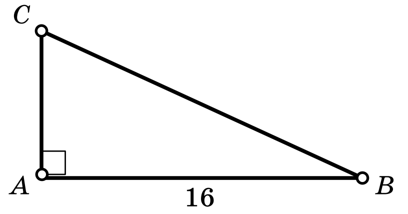
Найдите $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{OE}|$

20



Найдите $|\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN}|$

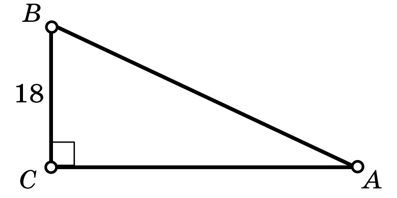
21



$\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

$|\vec{p}|$ — ?

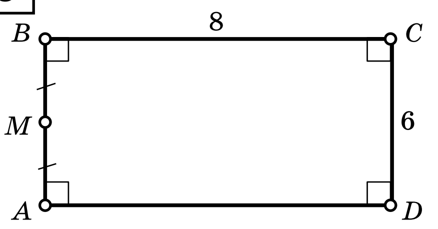
22



$\vec{k} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$

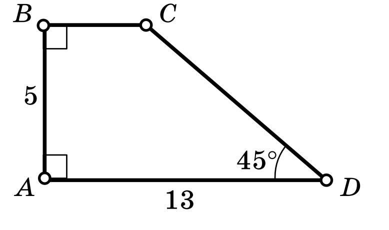
$|\vec{k}|$ — ?

23



Найдите: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{DC}|$, $|\overrightarrow{MC}|$

24



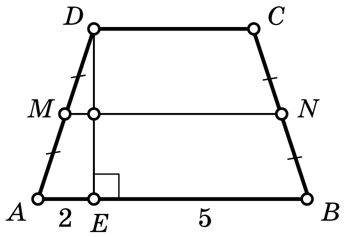
Найдите: $|\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{AC}|$

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

Таблица 25

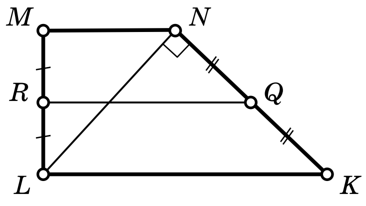
1

MN, DC — ?



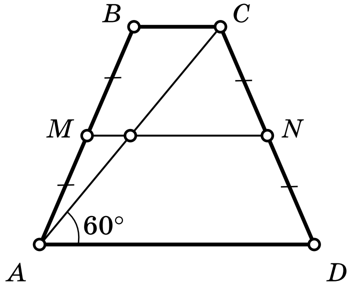
2

$ML = 4$, $\angle MNK = 135°$
RQ — ?



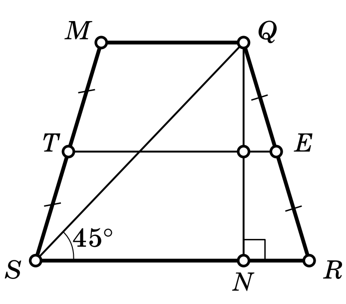
3

$AC = 16$, MN — ?



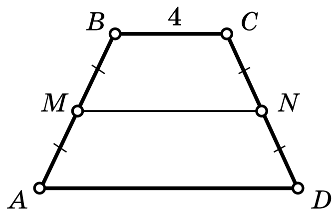
4

$QN = 4$, TE — ?



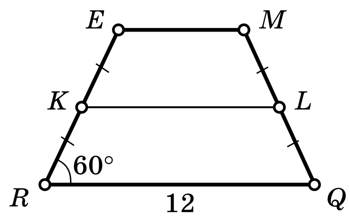
5

$AD - BC = 4$, MN — ?



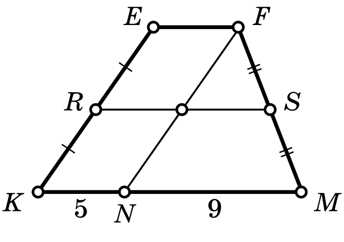
6

$RE = EM = MQ$, KL — ?



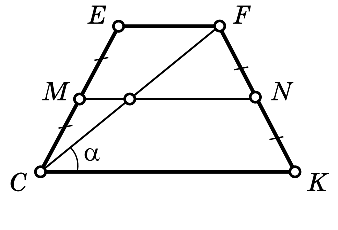
7

$KE \parallel NF$, RS — ?



8

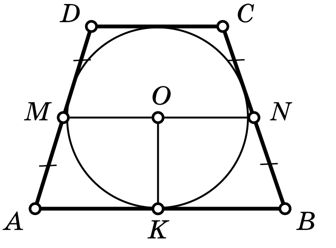
$MN = 4$, $S_{CEFK} = 8$
$\operatorname{tg} \alpha$ — ?



Окончание табл. 25

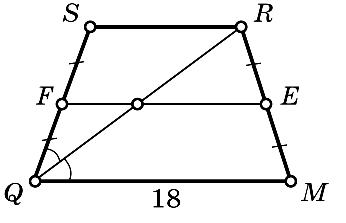
9

$MN = 68$, $AB - DC = 64$
OK — ?



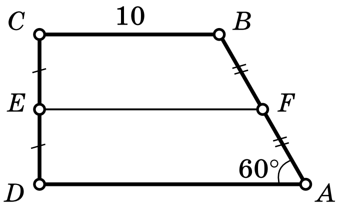
10

$P_{QSRM} = 48$, EF — ?



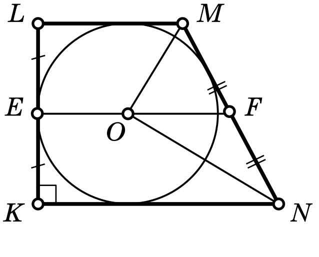
11

$AB = 8$, EF — ?



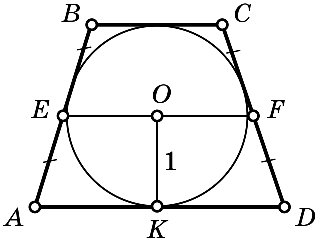
12

$OM = 6$, $ON = 8$, EF — ?



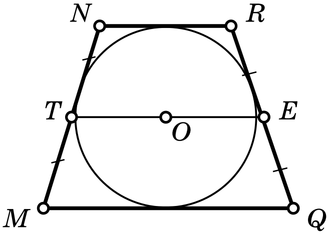
13

$AD = 2\ BC$, EF — ?



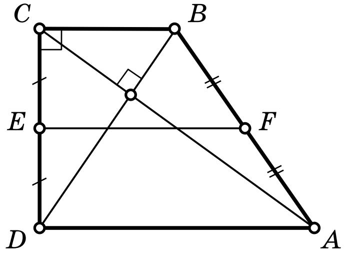
14

$S_{MNRQ} = 20$, $\sin\angle M = 0{,}8$
TE — ?



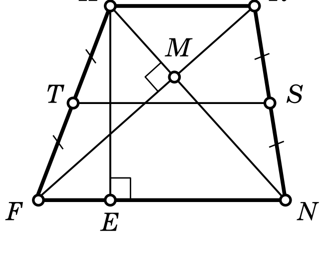
15

$BC : CD = 1 : 2$, $EF = 20$
BC — ?



16

$KF = RN$, $KE = 10$
TS — ?

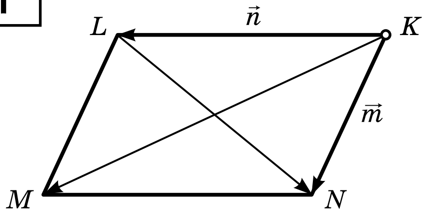


IX класс

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

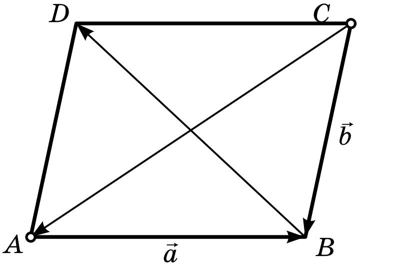
Таблица 1

1



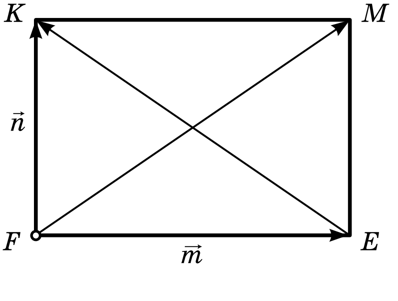
$MNKL$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{LN}$ и $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$

2



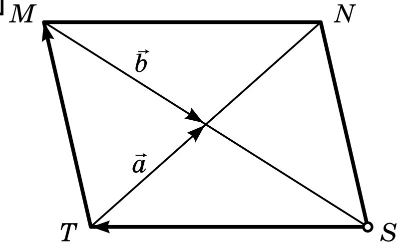
$ABCD$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3



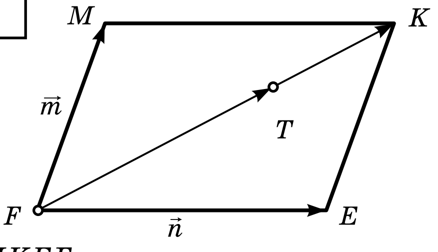
$FKME$ — прямоугольник
Выразите векторы $\overrightarrow{EK}$ и $\overrightarrow{FM}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$

4



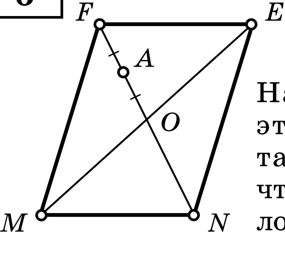
$TMNS$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{ST}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

5



$MKEF$ — параллелограмм
$FT : TK = 3 : 1$
Разложите вектор $\overrightarrow{FT}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$

6



$FENM$ — параллелограмм
Найдите (если это возможно) такое число k, чтобы выполнялось равенство:

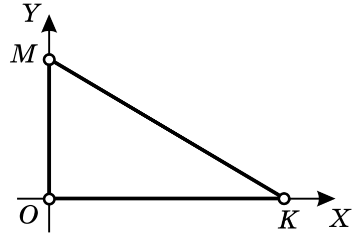
а) $\overrightarrow{FN} = k \cdot \overrightarrow{FO}$;
б) $\overrightarrow{MO} = k \cdot \overrightarrow{ME}$;
в) $\overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{NF}$;
г) $\overrightarrow{FM} = k \cdot \overrightarrow{NE}$;
д) $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{EF}$;
е) $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{NF}$;
ж) $\overrightarrow{AN} = k \cdot \overrightarrow{FA}$;
з) $\overrightarrow{FN} = k \cdot \overrightarrow{NA}$;
и) $\overrightarrow{NE} = k \cdot \overrightarrow{EF}$;
к) $\overrightarrow{FO} = k \cdot \overrightarrow{ME}$

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ

Таблица 2

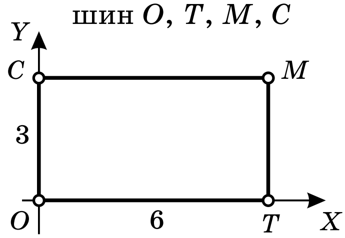
1

Дано: $OK = 3$, $OM = 2$
Найдите координаты вершин ΔMOK



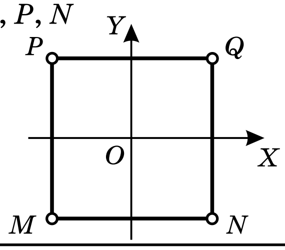
2

Дано: $TOCM$ — прямоугольник
Найдите координаты вершин O, T, M, C



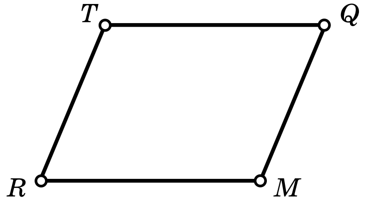
3

Дано: $MQPN$ — квадрат
$M\ (-2; -2)$
Найдите координаты вершин Q, P, N



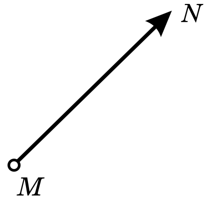
4

Дано: $TQMR$ — параллелограмм
$R\ (0; 0)$, $M\ (10; 0)$, $Q\ (24; 6)$
Найдите координату вершины T



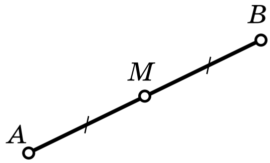
5

Дано: $M\ (3; 5)$, $N\ (-2; 4)$
Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MN}$



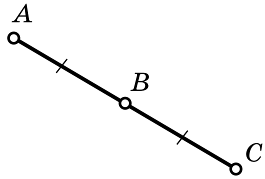
6

Дано: $A\ (2; 6)$, $B\ (6; 2)$
Найдите координаты точки M



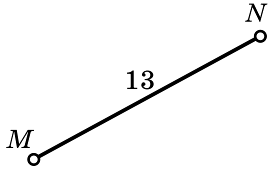
7

Дано: $A\ (2; 4)$, $B\ (0; 18)$
Найдите координаты точки C



8

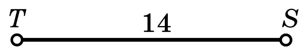
Дано: $M\ (4; 6)$, $N\ (x; 1)$
Найдите: x



Окончание табл. 2

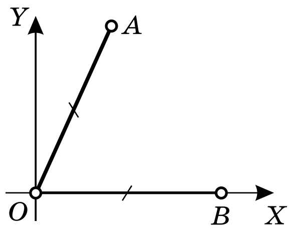
9

Дано: $S\ (2x; -2)$, $T\ (6; 4x)$
Найдите: x



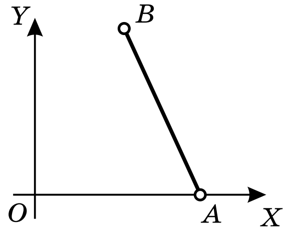
10

Дано: $A\ (1; 2)$, $B\ (x; 0)$
Найдите: x



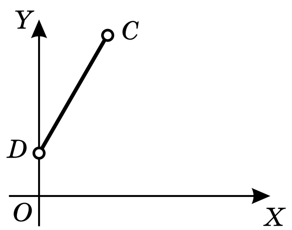
11

Дано: $A\ (3; 0)$, $B\ (2; 5)$
Найдите: AB



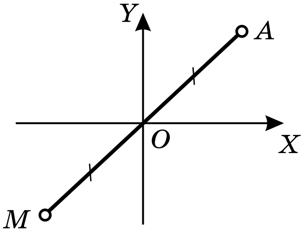
12

Дано: $C\ (1; 4)$, $D\ (0; 3)$
Найдите: CD



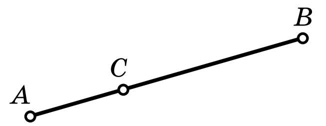
13

Дано: $A\ (3; 3)$
Найдите координаты точки M



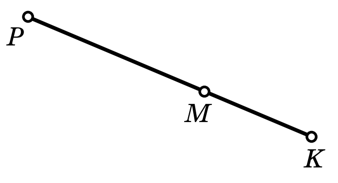
14

Дано: $A\ (1; 2)$, $B\ (7; 10)$
$AC : CB = 1 : 3$
Найдите координаты точки C



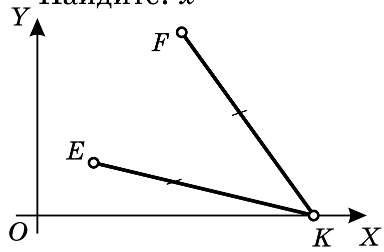
15

Дано: $P\ (6; 3)$, $M\ (14; 9)$
$PM : MK = 2 : 1$
Найдите координаты точки K



16

Дано: $E\ (2; 2)$, $F\ (6; 10)$, $K\ (x; 0)$
Найдите: x

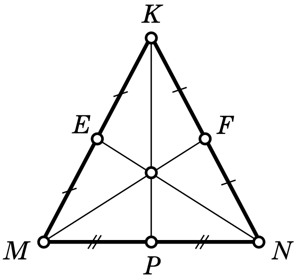


ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Таблица 3

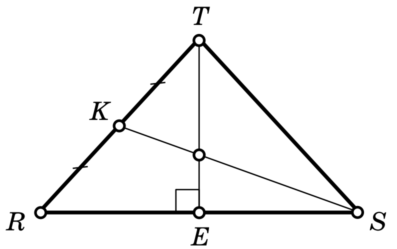
1

Дано: ΔMKN
$KP = 80$, $MN = 40$
Найдите: MF и NE



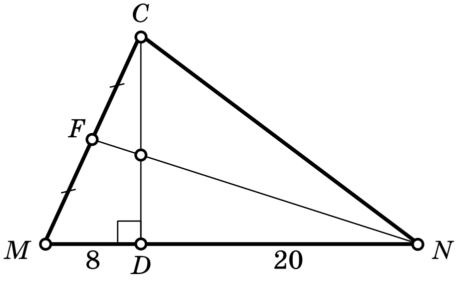
2

Дано: ΔTRS
$RT = TS$
$TE = 8$, $RS = 24$
Найдите: SK



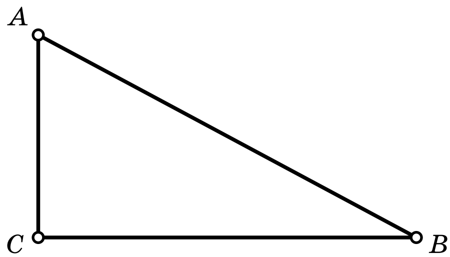
3

Дано: ΔMCN
$CD = 20$
Найдите: NF



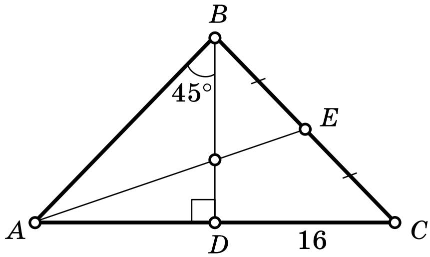
4

Дано: ΔABC
$B\ (0;\ 0)$, $C\ (6;\ 2\sqrt{3})$, $A\ (4;\ 4\sqrt{3})$
Найдите: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$



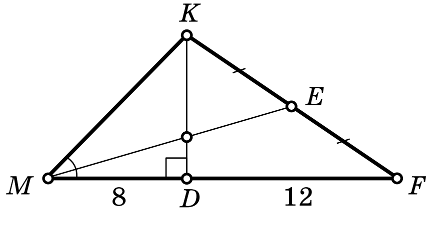
5

Дано: ΔABC
$BD = 12$
Найдите: AE



6

Дано: ΔMKF
$\angle KMF = 45°$
Найдите: ME

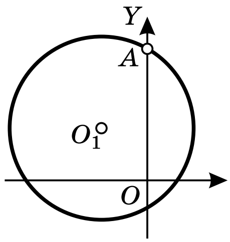


УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Таблица 4

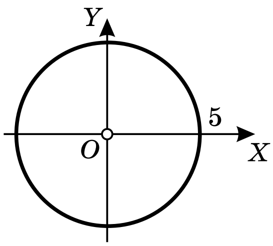
1

Дано: $O_1\ (-4;\ 2)$, $A\ (0;\ 5)$
Составьте уравнение окружности



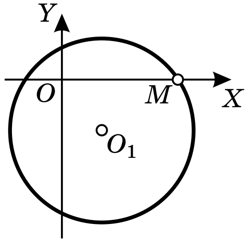
2

Какие из точек $A\ (0;\ 4)$, $B\ (5;\ 0)$, $C\ (3;\ -4)$, $D\ (4;\ -3)$ принадлежат окружности?



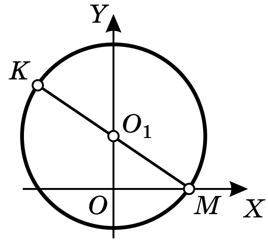
3

Дано: $O_1\ (2;\ -4)$, $M\ (5;\ 0)$
Составьте уравнение окружности



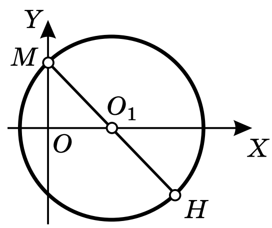
4

Дано: $K\ (-2;\ 6)$, $M\ (2;\ 0)$
Составьте уравнение окружности



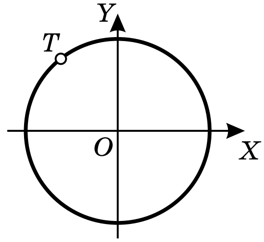
5

Дано: $M\ (0;\ 2)$, $H\ (6;\ -2)$
Составьте уравнение окружности



6

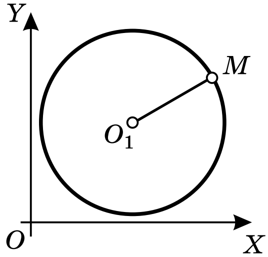
Дано: $T\ (-2;\ 3)$
Составьте уравнение окружности



Окончание табл. 4

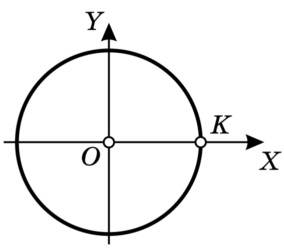
7

Дано: O_1 (4; 5), $O_1M = 3$
Составьте уравнение окружности



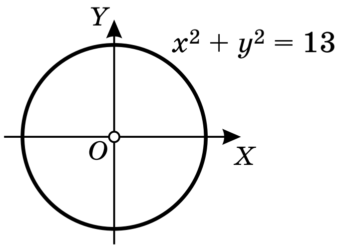
8

Дано: $OK = 5$, A (4; −3), B (3; 4)
Докажите, что AB — хорда окружности



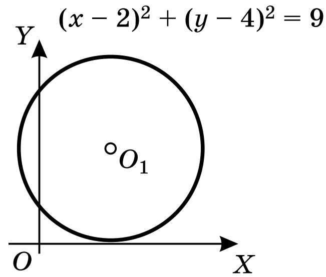
9

Найдите точки:
а) с абсциссой $x = 2$;
б) с ординатой $y = 3$



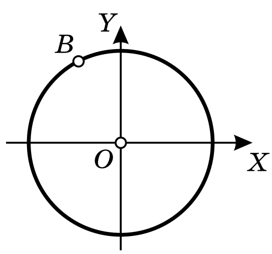
10

На окружности найдите точки:
а) с абсциссой $x = 2$;
б) с ординатой $y = 4$



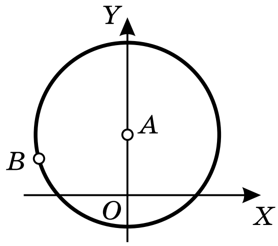
11

Дано: B (−2; 6)
Составьте уравнение окружности, проходящей через точку B



12

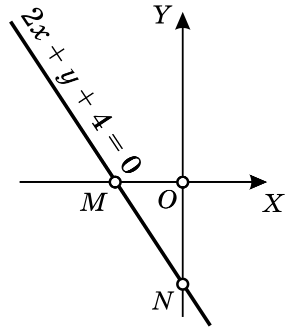
Дано: A (0; 2), B (−3; 1)
Составьте уравнение окружности, проходящей через точку B



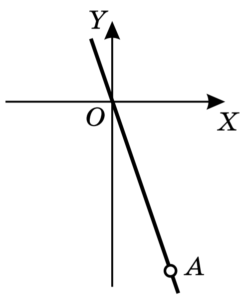
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Таблица 5

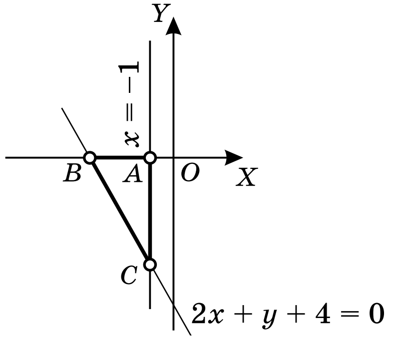
1 Найдите: $S_{\Delta MON}$



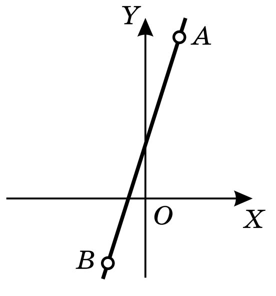
2 Дано: $A\ (2; -10)$
Составьте уравнение прямой, проходящей через точки O и A



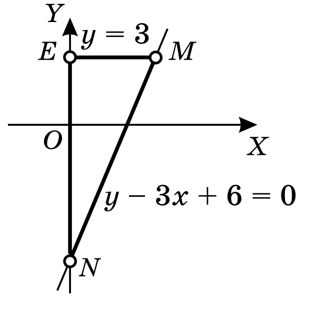
3 Найдите: $S_{\Delta BAC}$



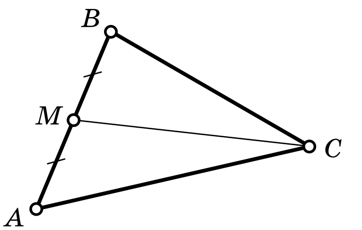
4 Дано: $A\ (1; 10)$, $B\ (-1; -4)$
Составьте уравнение прямой AB



5 Найдите: $S_{\Delta MEN}$



6 Дано: ΔABC
$A\ (8; 12)$, $B\ (-8; 0)$, $C\ (-2; -8)$
Составьте уравнение медианы CM

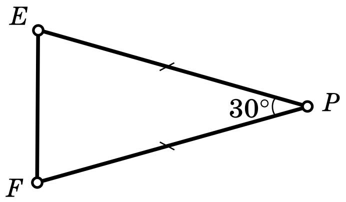


РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 6

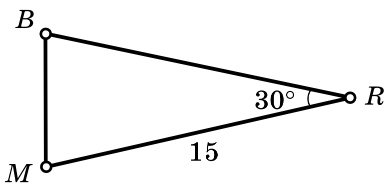
1

Дано: $S_{\Delta EPF} = 20$
Найдите: EP



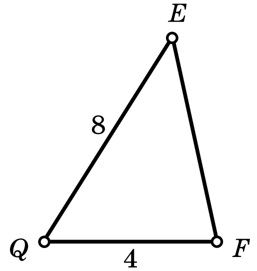
2

Дано: $S_{\Delta MBR} = 90$
Найдите: BR



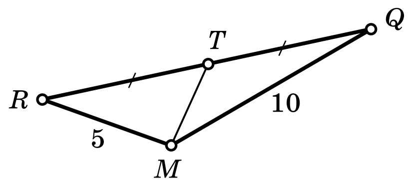
3

Дано: $S_{\Delta EFQ} = 8\sqrt{3}$
Найдите: $\angle EQF$



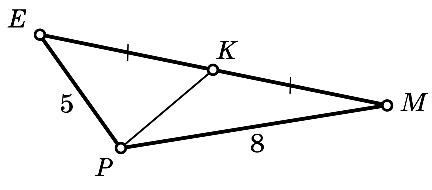
4

Дано: $\angle RMQ = 135°$
Найдите: $S_{\Delta TMQ}$



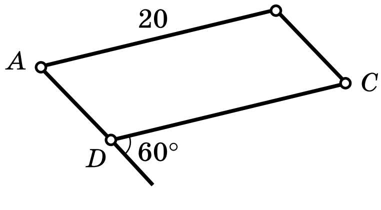
5

Дано: $\angle EPM = 120°$
Найдите: $S_{\Delta EKP}$



6

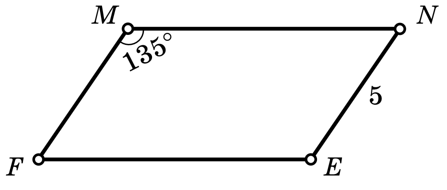
Дано: $ABCD$ — параллелограмм
$S_{ABCD} = 50\sqrt{3}$
Найдите: P_{ABCD}



Продолжение табл. 6

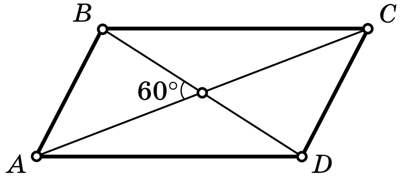
7

Дано: $MNEF$ — параллелограмм
$S_{MNEF} = 25\sqrt{2}$
Найдите: P_{MNEF}



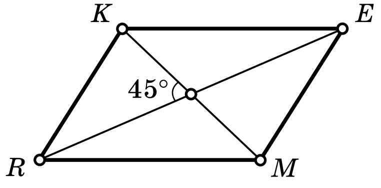
8

Дано: $ABCD$ — параллелограмм
$BD = 16$, $AC = 20$
Найдите: S_{ABCD}



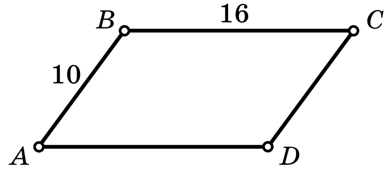
9

Дано: $KEMR$ — параллелограмм
$KM = 12$, $RE = 20$
Найдите: S_{KEMR}



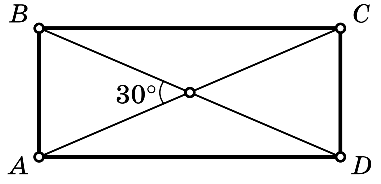
10

Дано: $ABCD$ — параллелограмм
$\cos \angle B = -0{,}6$
Найдите: S_{ABCD}



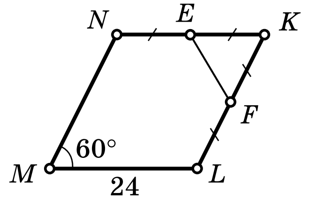
11

Дано: $ABCD$ — прямоугольник
$AC = 26$
Найдите: S_{ABCD}



12

Дано: $MNKL$ — параллелограмм
Найдите: $S_{\Delta EKF}$ — ?

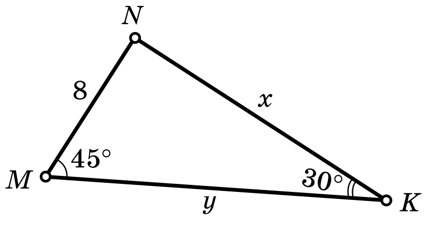


РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

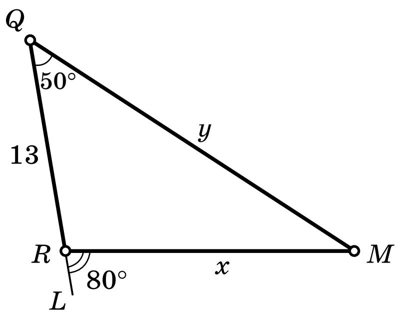
Таблица 7

Найдите x, y.

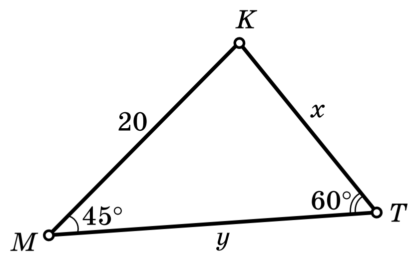
1



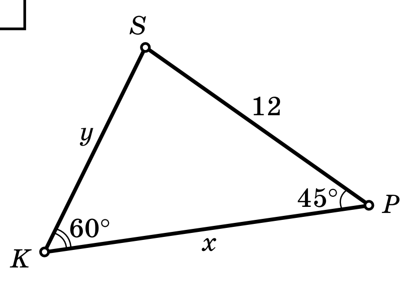
2



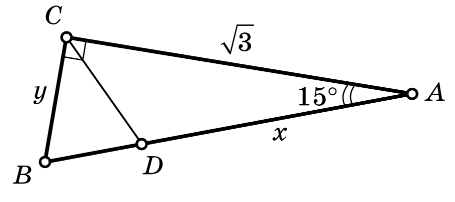
3



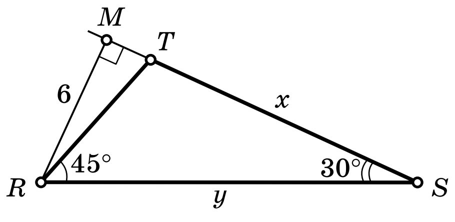
4



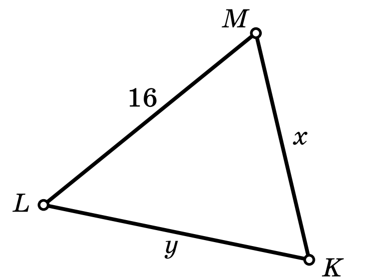
5 CD — биссектриса



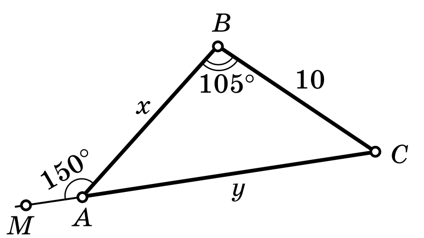
6



7 $\angle K : \angle L : \angle M = 4 : 2 : 3$



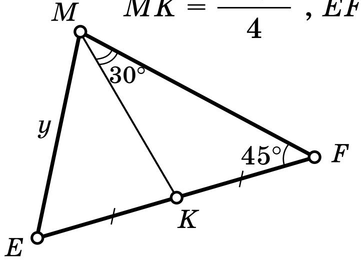
8



Окончание табл. 7

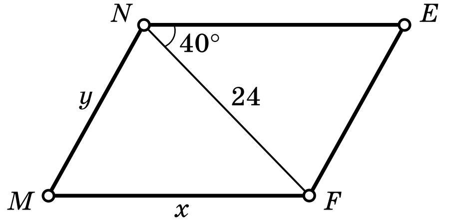
9

$MK = \dfrac{13\sqrt{2}}{4}$, $EF = x$

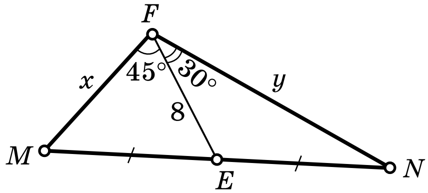


13

$MNEF$ — параллелограмм
$\angle MFE = 120°$

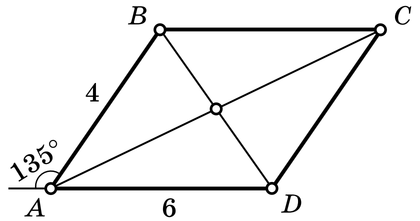


10

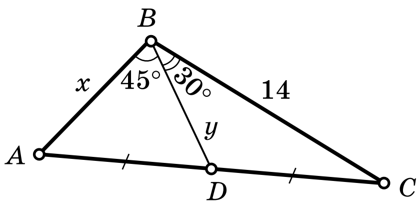


14

$ABCD$ — параллелограмм
$BD = x$, $AC = y$

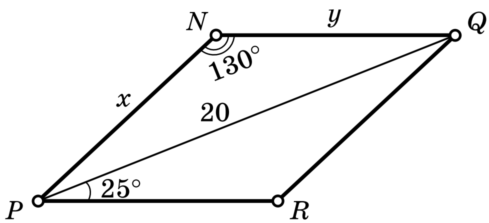


11



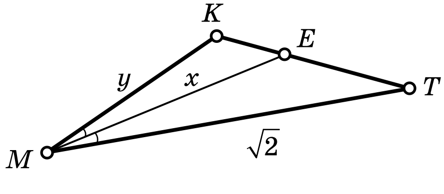
15

$PNQR$ — параллелограмм
$PQ = 20$



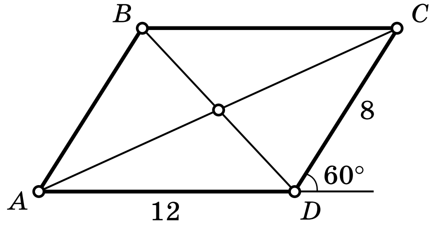
12

ME — биссектриса
$\angle M = 30°$
$MK = KT = y$



16

$ABCD$ — параллелограмм
$AC = x$, $BD = y$



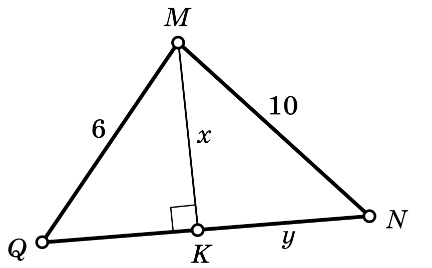
РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Таблица 8

Найдите x, y.

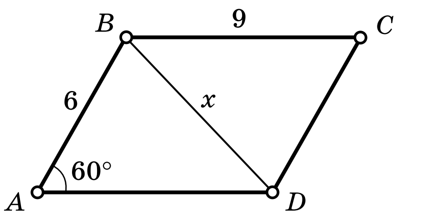
1

$QN = 12$



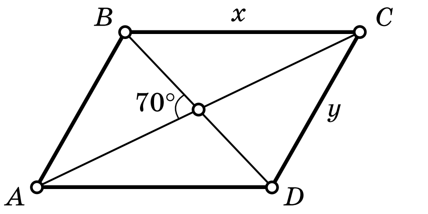
2

$ABCD$ — параллелограмм



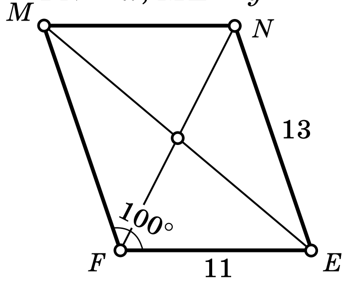
3

$ABCD$ — параллелограмм
$AC = 8$, $BD = 6$



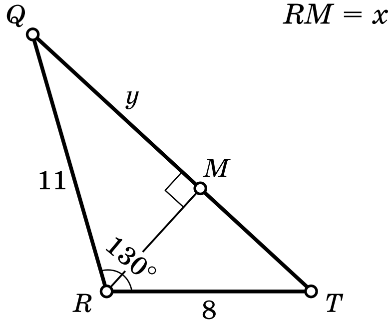
4

$MNEF$ — параллелограмм
$FN = x$, $ME = y$

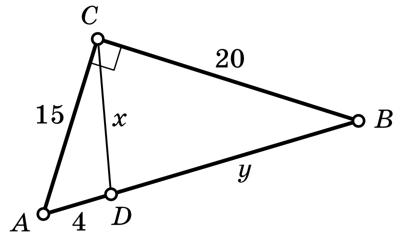


5

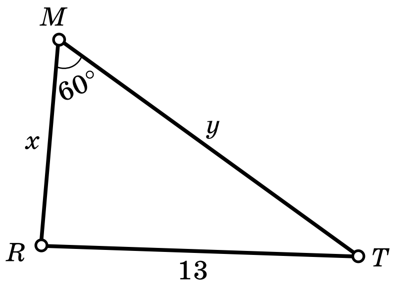
$RM = x$



6

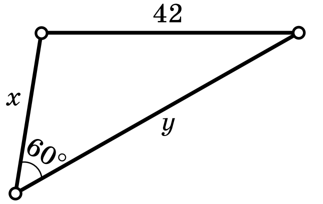


7



8

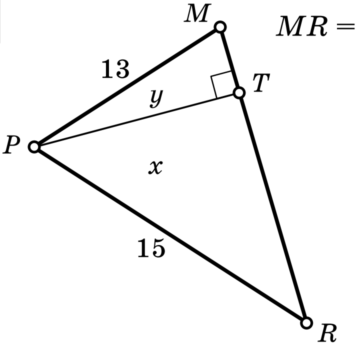
$x : y = 3 : 8$



Окончание табл. 8

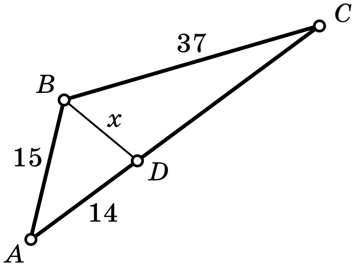
9

$MR = 14$



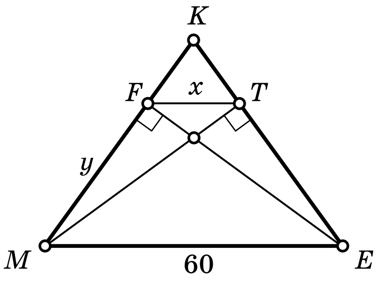
10

$AC = 44$



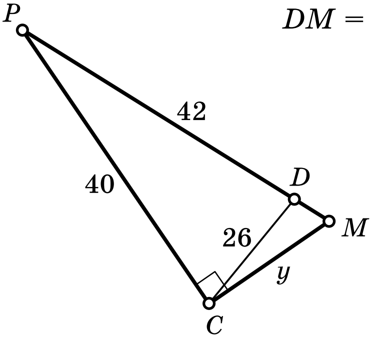
11

$ME \parallel FT$, $MK = EK = 50$

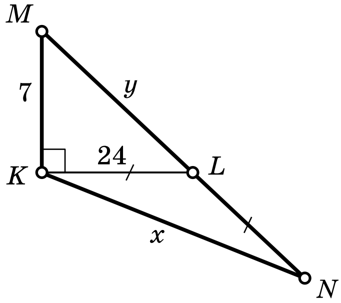


12

$DM = x$

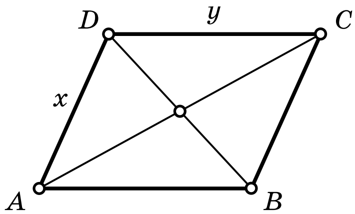


13



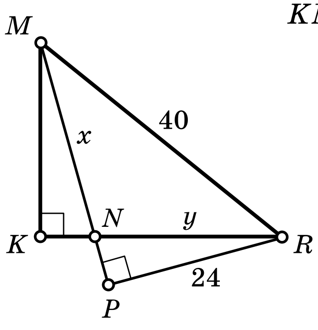
14

$ABCD$ — параллелограмм
$x : y = 2 : 3$
$BD = 17$, $AC = 19$



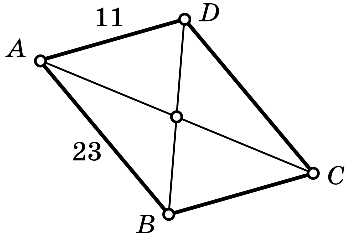
15

$KN = 7$



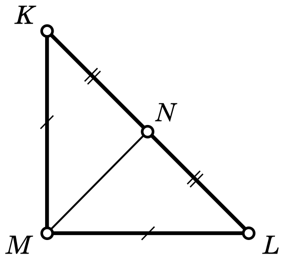
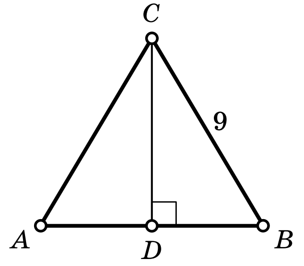
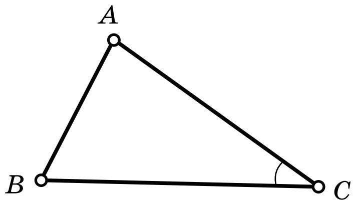
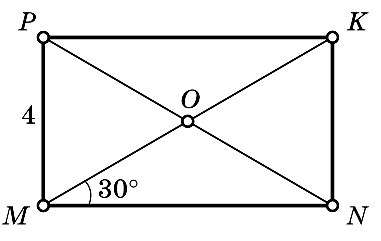
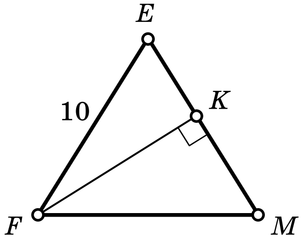
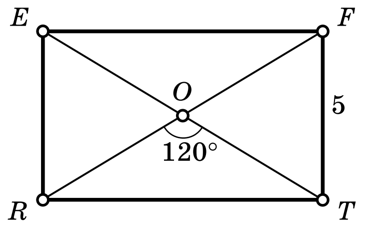
16

$ABCD$ — параллелограмм
$BD = x$, $AC = y$
$x : y = 2 : 3$



СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Таблица 9

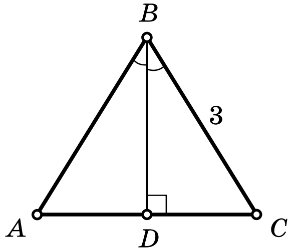
1 $\angle KML = 90°$, $KL = 2\sqrt{2}$ Найдите: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{KL}$ 	**4** ΔABC $AB = AC = BC$ Найдите: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 
2 $A\ (-4;\ 8)$, $B\ (2;\ 14)$, $C\ (4;\ 0)$ Найдите: $\cos \angle C$ 	**5** $MNKP$ — прямоугольник Найдите: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}$ 
3 ΔFEM $FE = EM = FM$ Найдите: $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EM}$ 	**6** $REFT$ — прямоугольник Найдите: $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FT}$ 

Окончание табл. 9

7

ΔABC — равносторонний

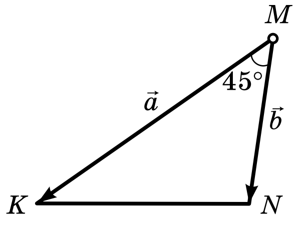
Найдите: $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$



8

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$

Найдите: $S_{\Delta MKN}$

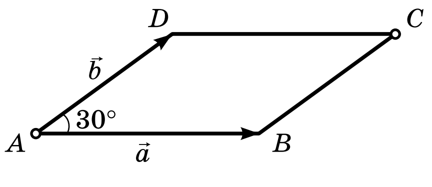


9

$ABCD$ — параллелограмм

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$

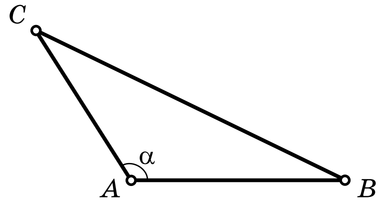
Найдите: S_{ABCD}



10

$A\ (2;\ 4)$, $B\ (2;\ 8)$, $C\ (6;\ 4)$

Найдите: $\angle CAB$

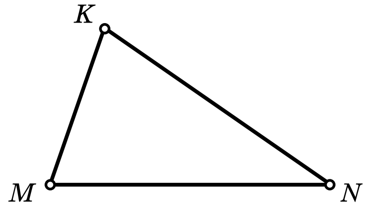


11

$M\ (-1;\ \sqrt{3})$, $N\ (1;\ -\sqrt{3})$

$K\ (0{,}5;\ \sqrt{3})$

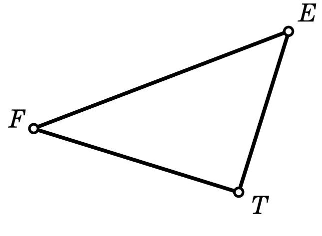
Найдите: $\angle M$



12

$E\ (-1;\ 5)$, $F\ (2;\ 8)$, $T\ (3;\ 1)$

Найдите: $\cos \angle E$



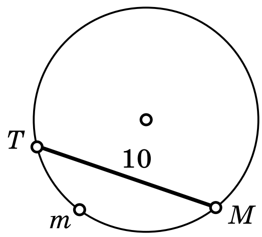
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ДЛИНА ДУГИ

Таблица 10

C — длина окружности, l — длина дуги.

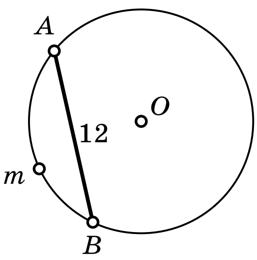
1

$\smile TmM = 120°$
Найдите: l



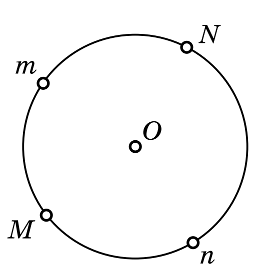
2

$C = 24\pi$
Найдите: $\smile AmB$



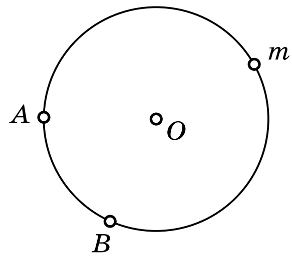
3

$\smile MmN : \smile NnM = 2 : 3$
Найдите: $\smile MmN$, $\smile NnM$



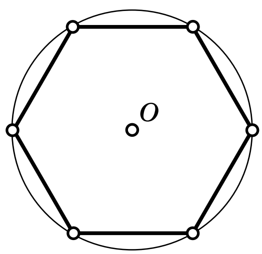
4

$\smile AmB - \smile BA = 90°$
Найдите: $\smile AmB$, $\smile BA$



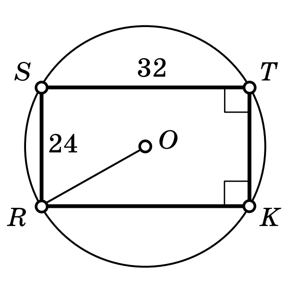
5

P — периметр
$C - P = 7$
Найдите: C



6

Найдите: C

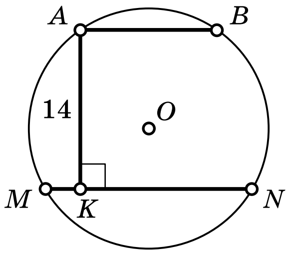


Продолжение табл. 10

7

$AB \parallel MN$, $MN = 16$, $AB = 12$

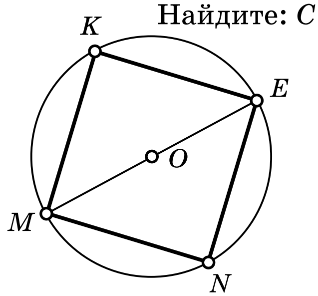
Найдите: C



11

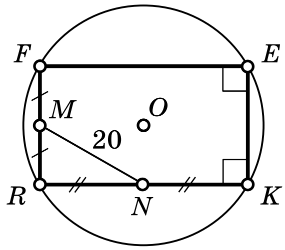
$ME = 7\sqrt{5}$

Найдите: C



8

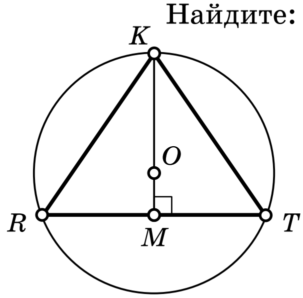
Найдите: C



12

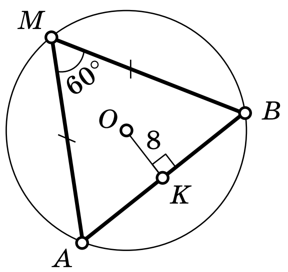
$KM = 6$, $RT = 14$

Найдите: C



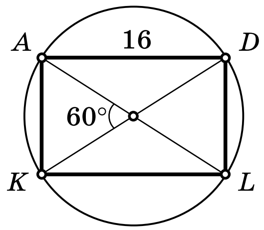
9

Найдите: C



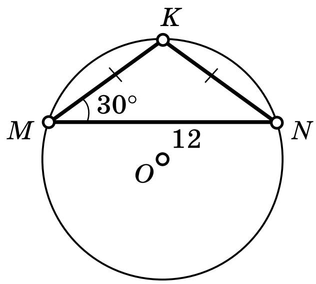
13

Найдите: C



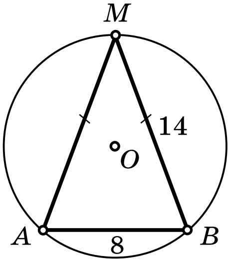
10

Найдите: C



14

Найдите: C



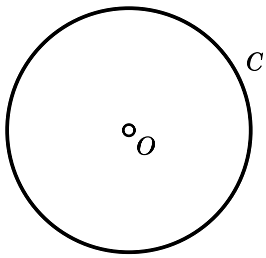
ПЛОЩАДЬ КРУГА

Таблица 11

C — длина окружности, l — длина дуги. Найдите $S_{\text{кр}}$.

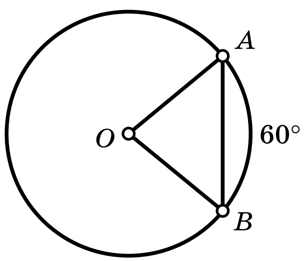
1

$C = 4\sqrt{\pi}$



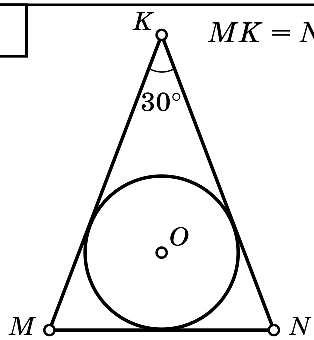
2

$AB = 8$



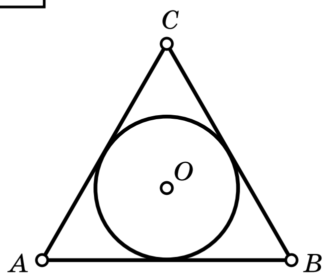
3

$MK = NK = 20$

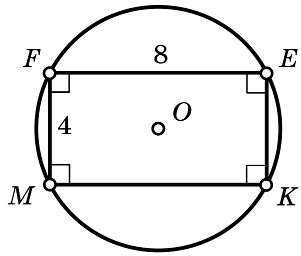


4

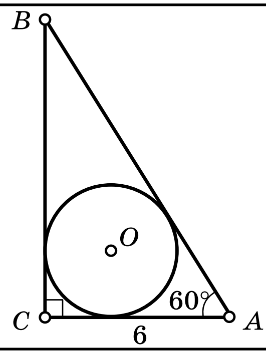
$AB = BC = AC = 12$



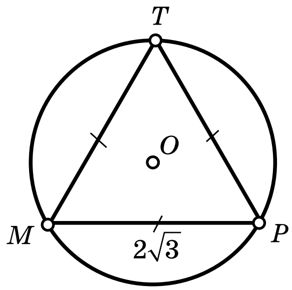
5



6

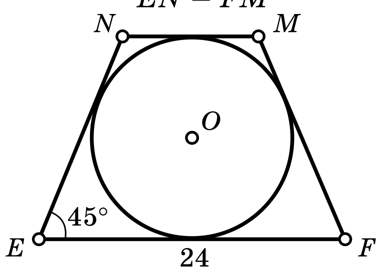


7



8

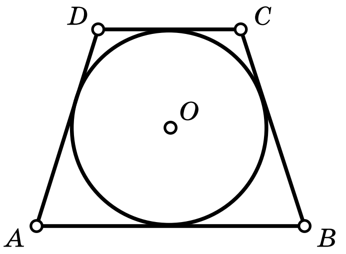
$ENMF$ — трапеция
$EN = FM$



Окончание табл. 11

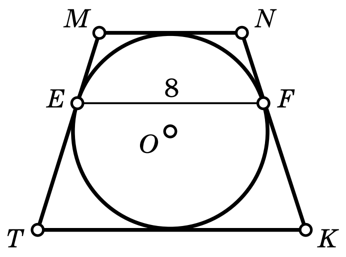
9

$ABCD$ — трапеция
$AD = BC = 6$, $S = 12$



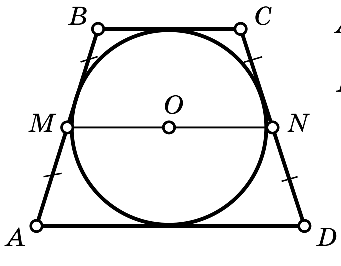
10

$TMNK$ — трапеция
$TM = KN$, $S_{TMNK} = 125$



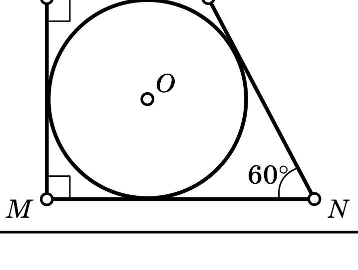
11

$ABCD$ — трапеция
$AB = CD$,
$AD = 2\,BC$,
$MN = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$



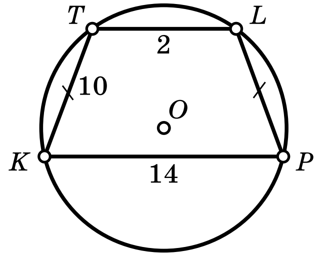
12

$S_{MFEN} = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$



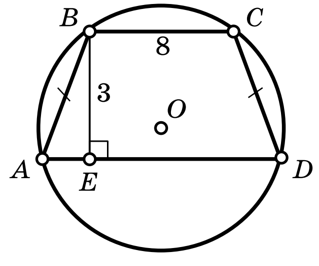
13

$KTLP$ — трапеция



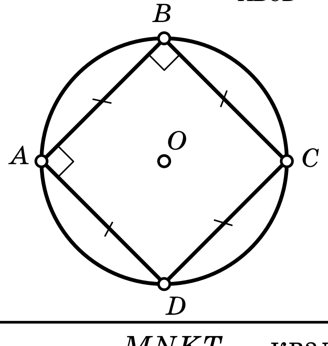
14

$ABCD$ — трапеция
$AD = 10$



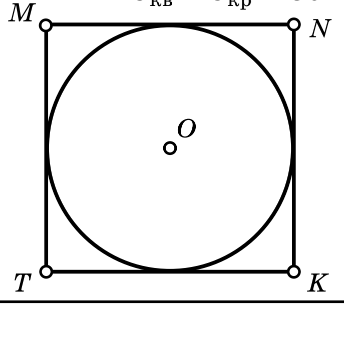
15

$S_{ABCD} = 121$



16

$MNKT$ — квадрат
$S_{кв} - S_{кр} = 86$

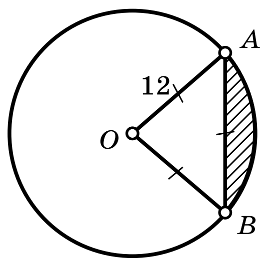


ПЛОЩАДЬ КРУГА

Таблица 12

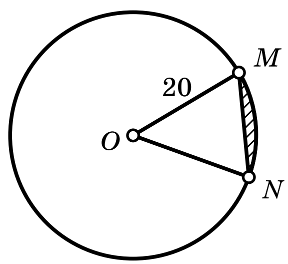
Найдите площадь заштрихованной фигуры.

1

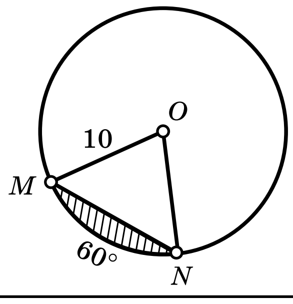


2

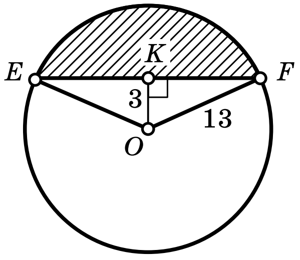
$MN = 12$



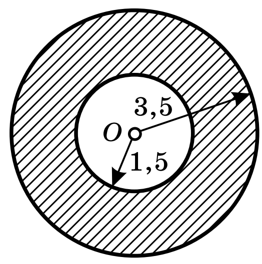
3



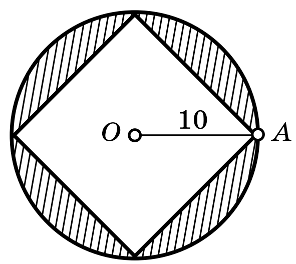
4



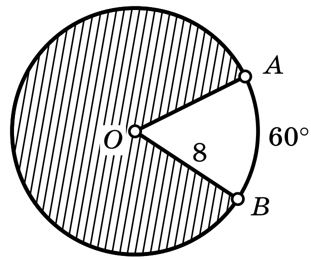
5



6

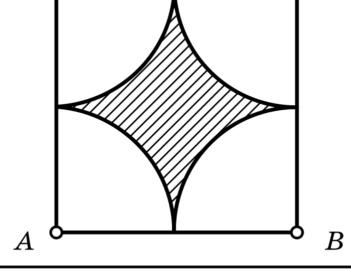


7



8

$ABCD$ — квадрат, $AB = 8$



Раздел III

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРИИ X–XI КЛАССОВ

При решении задач стереометрии возрастают требования к качеству чертежа и его наглядности.

Освоение принципов и техники построения пространственного чертежа — необходимое условие для успешного решения задач.

Пространственные тела можно условно разделить на удобные для пространственного изображения и неудобные. К первой категории относятся многогранники: параллелепипед, треугольная призма, треугольная и четырехугольная пирамида. Все остальные будем считать неудобными для изображения.

В некоторых случаях при решении задач можно вообще обойтись одним плоским чертежом или несколькими (в случае необходимости) и не строить пространственное изображение.

Основным средством решения задач является аналитический метод.

Многогранники

К этому разделу отнесем два основных типа задач:

1) задачи на вычисление;

2) задачи на сечения.

К задачам на вычисление относятся те, где требуется найти линейные элементы правильных призм и пирамид, а именно: сторону основания, боковое ребро, апофему и т. д., далее угловые элементы: двугранные углы при основании, линейные углы при вершине; площади: боковой поверхности, полной поверхности, основания.

В основе второго типа задач — задач на построение — лежит умение построить сечение данного многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. В задачах этого типа сечение задается точкой и прямой, тремя точками, двумя точками и прямой, параллельной плоскостью сечения и т. д.

Многогранником называется тело, граница которого состоит из многоугольников.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами многоугольника**.

Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями многогранника**.

Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые.**

Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он называется **выпуклым.**

Например, тетраэдр, октаэдр, параллелепипед — выпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.

1. Призма

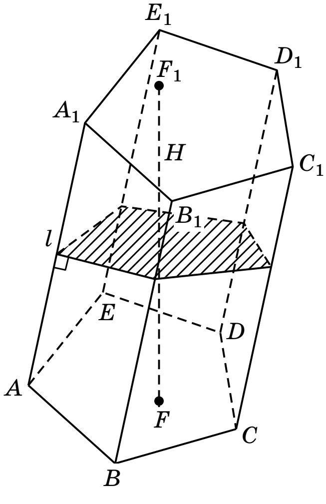


Рис. 1

Призмой (рис. 1) называется многогранник, у которого две грани $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ **(основания призмы)** — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани (AA_1B_1B; BB_1C_1C и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой (AA_1, BB_1 и т. д.).

Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями**, а ребра AA_1, BB_1 и т. д. называются **боковыми.**

Перпендикуляр FF_1, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы.

Если в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник и т. д., то призма называется соответственно **треугольной**, **четырехугольной** и т. д.

Призма называется **прямой**, если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется **наклонной.**

Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма называется **правильной.**

У правильной призмы все боковые грани — **равные прямоугольники.**

Сечение, которое образовано плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы, называется **перпендикулярным сечением** (см. рис. 1).

Произвольная призма

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot l; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H; \ V = S_{\text{сеч.}} \cdot l;$$
$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Прямая призма

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H$; $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$; $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$.

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

2. Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 2).

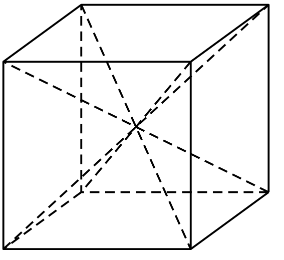


Рис. 2

У параллелепипеда **6 граней** и все они параллелограммы.

Противоположные грани попарно равны и **параллельны.**

Параллелепипед имеет **4 диагонали,** которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Любая грань параллелепипеда может быть принята за **основание.**

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется **прямым.**

Прямой параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 3).

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани квадраты, называется **кубом.**

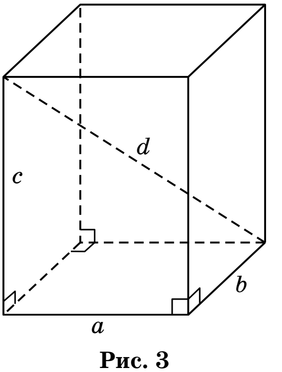


Рис. 3

Прямоугольный параллелепипед (рис. 3):

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 2(a + b)c$;
$V = abc$;
$S_{\text{полн.}} = 2(ab + bc + ac)$;
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Куб

Если a — ребро куба, то

$$V = a^3; \ d = a\sqrt{3}; \quad S_{\text{полн.}} = 6a^2.$$

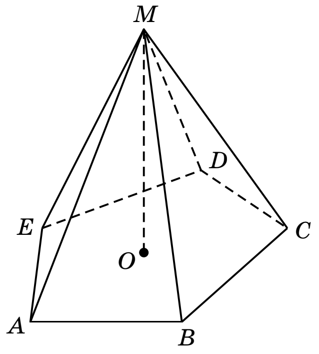


Рис. 4

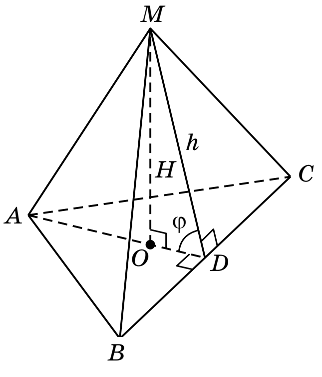


Рис. 5

3. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — **основание пирамиды** — произвольный многоугольник $ABCDE$ (рис. 4), а остальные **боковые грани** — треугольники с общей вершиной M.

Перпендикуляр MO, опущенный из вершины на основание, называется **высотой пирамиды.**

Если в основании пирамиды треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д.

Треугольная пирамида называется **тетраэдром** (четырехгранником).

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания, то пирамида называется **правильной** (рис. 5).

В правильной пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани — равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани MD называется **апофемой** правильной пирамиды.

Произвольная пирамида

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Правильная пирамида (рис. 5)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h; \quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то часть пирамиды, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой** (рис. 6).

Параллельные грани усеченной пирамиды (ABC и $A_1B_1C_1$) называются ее **основаниями**; расстояние между ними (OO_1) — **высотой**.

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она получена, была правильной.

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции.

Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

Произвольная усеченная пирамида

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Правильная усеченная пирамида (рис. 6)

$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, где P_1, P_2 — периметры оснований.

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2$, где S_1, S_2 — площади оснований.

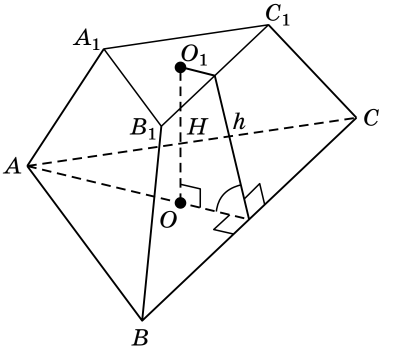


Рис. 6

4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

1. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы (рис. 7), длины всех боковых ребер равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка O является также точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

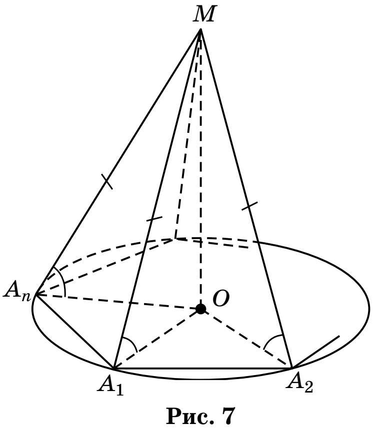


Рис. 7

2. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды (рис. 8).

3. Если высота треугольной пирамиды $MABC$ проходит через точку пересечения высот ΔABC, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е. $AM \perp BC$, $MC \perp AB$ и $MB \perp AC$. Справедливо и обратное утверждение (рис. 9).

4. Если MO — высота пирамиды $MABC$ и $MA \perp BC$, то $(MAO) \perp BC$ (рис. 9).

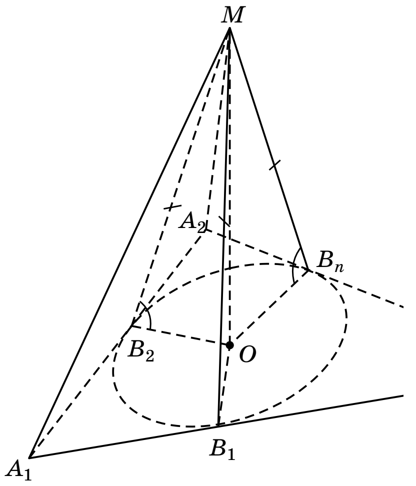


Рис. 8

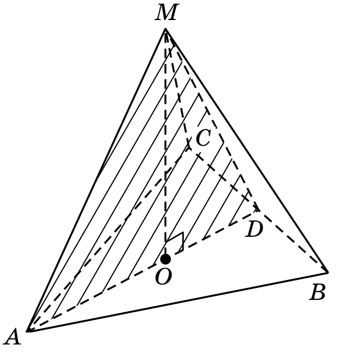


Рис. 9

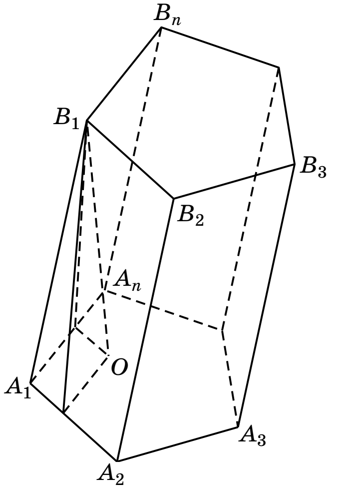


Рис. 10

5. Если в наклонной призме $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1, то точка O основания высоты B_1O лежит на биссектрисе $\angle A_1$ (рис. 10).

Круглые тела

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно трудно поддаются изображению. Это замечание прежде всего относится к шару. По этой причине при решении стереометрических задач, как правило, сам шар (а тем более шары) стараются не изображать, так как многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхность (боковая и полная) и соответственно параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или просто конуса), то здесь добавляются угол при вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

1. Цилиндр

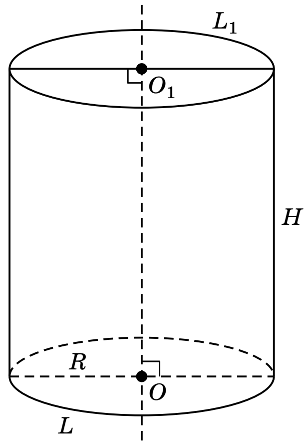


Рис. 11

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром** (рис. 11).

Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги — **основаниями цилиндра**.

Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, а длина образующей — **высотой цилиндра**.

Прямая OO_1 называется **осью цилиндра**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, представляет собой **прямоугольник**, у которого две стороны — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра, а само сечение называется **осевым**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, является **кругом**.

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}};$$
$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H); \quad V = \pi R^2 H.$$

2. Конус

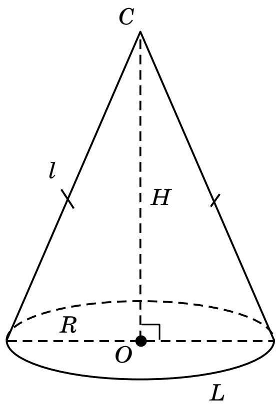


Рис. 12

Конусом называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L (рис. 12).

Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг — **основанием конуса**.

Точка C — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса**.

Прямая OC называется **осью конуса**, а отрезок OC называется **высотой конуса**.

Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым**.

$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$
$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

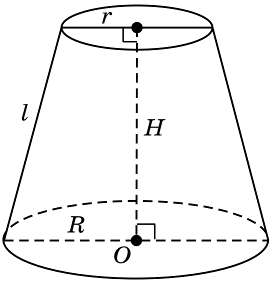


Рис. 13

Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к его оси, то та часть конуса, которая заключена между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 13).

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой** усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r);\ \ S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2;\ \ S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2;\ \ V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

3. Шар

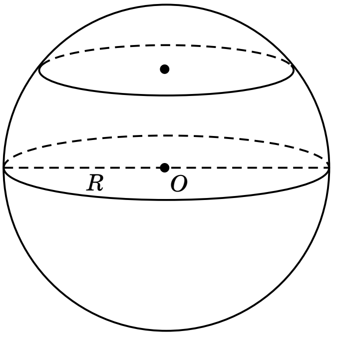


Рис. 14

Шаровой, или **сферической**, **поверхностью** (или просто **сферой**) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — **центра** шара (точка O, рис. 14).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Шар можно получить вращением полукруга (или круга) около его диаметра.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр O, представляет собой наибольший круг.

Если плоскость имеет со сферой только одну общую точку, то она называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка — **точкой касания** плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Верно и обратное.

Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**.

Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника**.

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \pi D^2; \quad V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

1. Шаровой сегмент (рис. 15).

Если S — площадь сферической поверхности сегмента, h — высота, V — объем, r — радиус основания, то

$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

2. Шаровой сектор (рис. 15).

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi d^2 h.$$

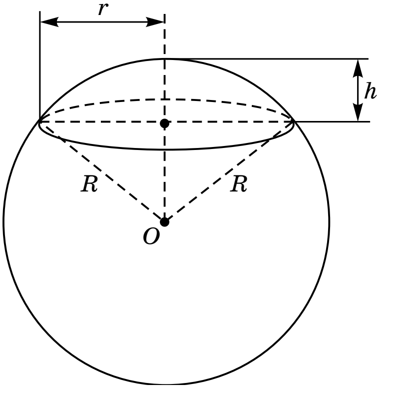


Рис. 15

3. Шаровой пояс (рис. 16).

Если h — высота шарового пояса, r_1 и r_2 — радиусы оснований, то

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

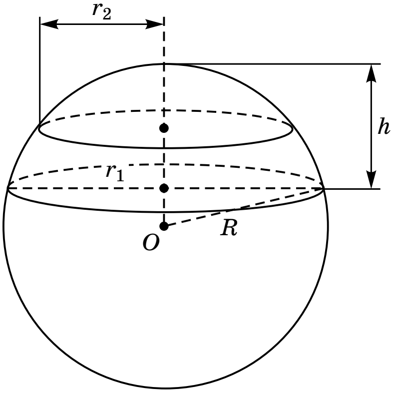


Рис. 16

Раздел IV

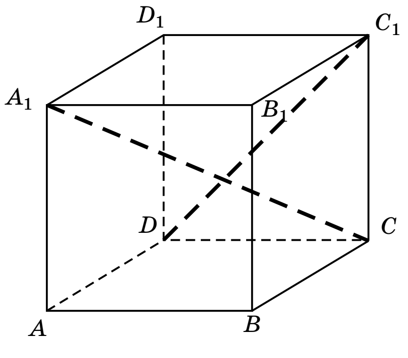
ЗАДАЧИ В ТАБЛИЦАХ
X–XI классы

§ 1. Угол между двумя прямыми

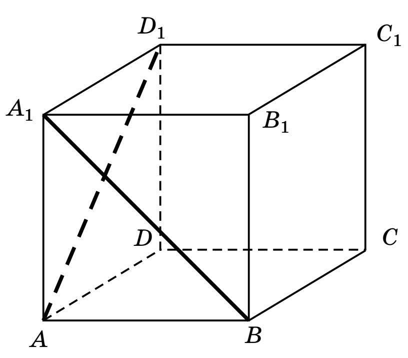
КУБ

Таблица 1

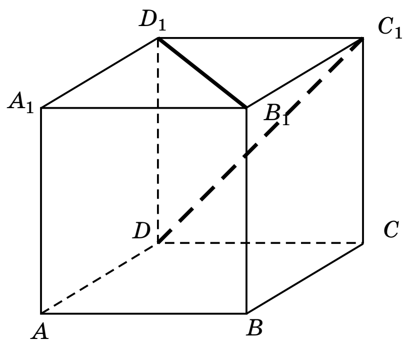
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и DC_1.



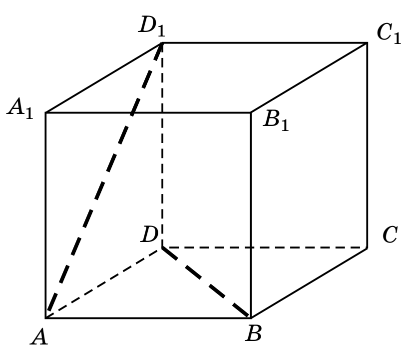
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и A_1B.



3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и D_1B_1.

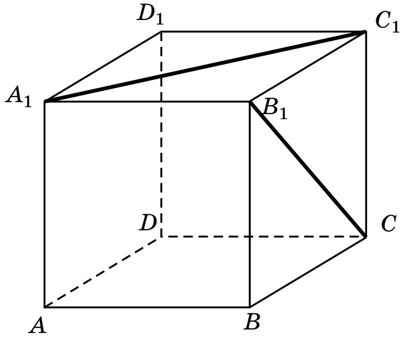


4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и BD.

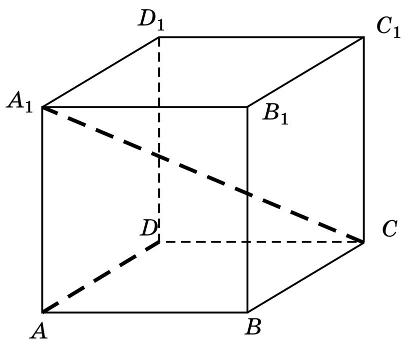


Продолжение табл. 1

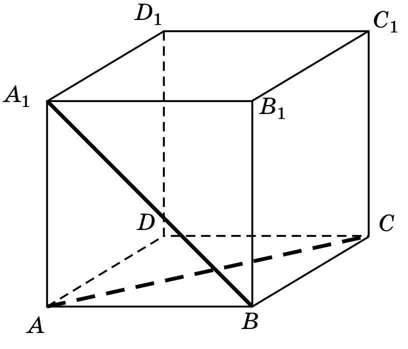
5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C.



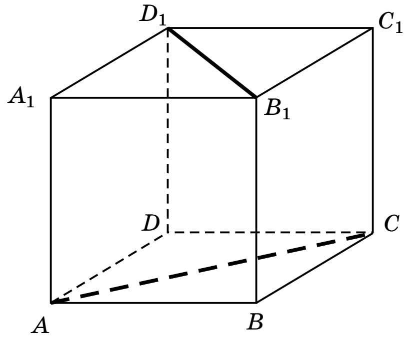
6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и AD.



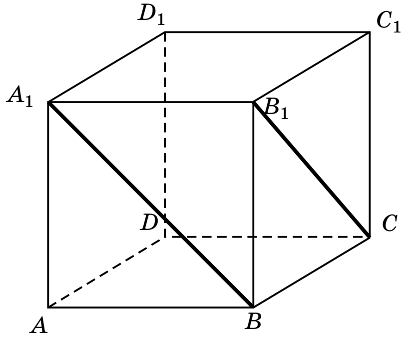
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и AC.



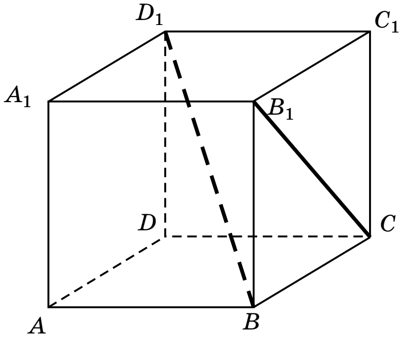
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и B_1D_1.



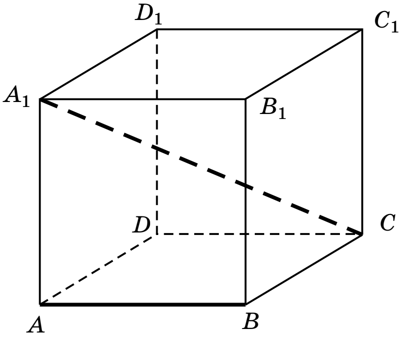
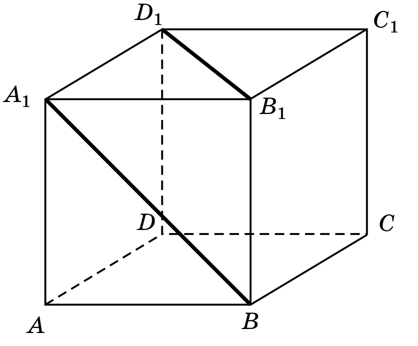
9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и CB_1.



10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми B_1C и BD_1.



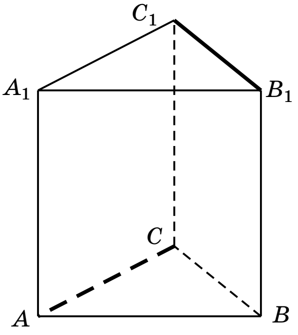
Окончание табл. 1

11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и CA_1. 	**12** В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и B_1D_1. 

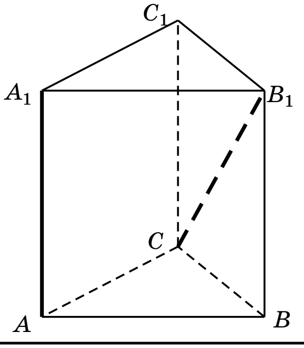
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 2

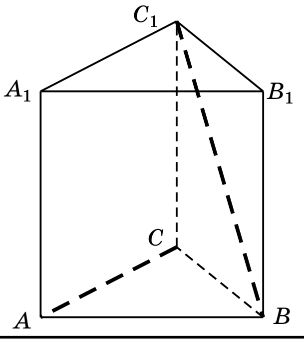
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1C_1.



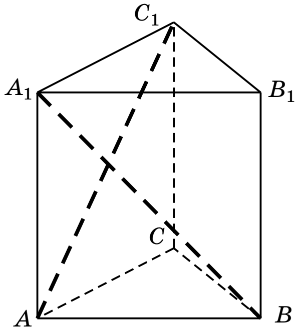
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C.



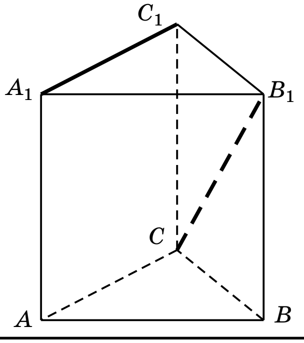
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и BC_1.



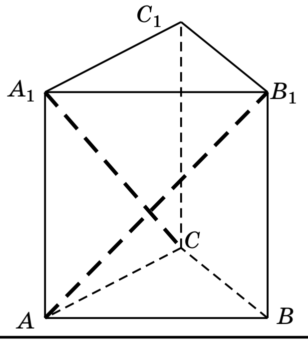
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B.



5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C.



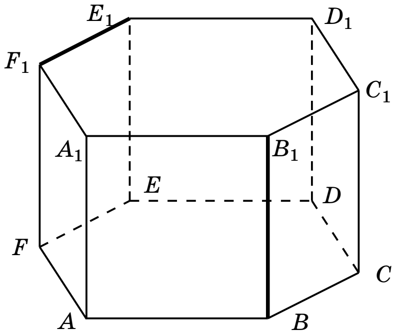
6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и A_1C.



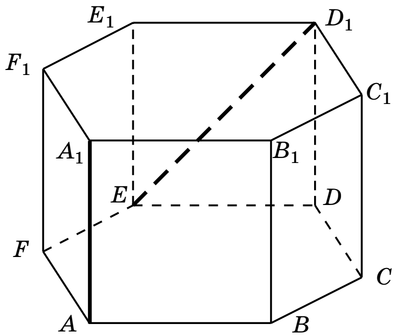
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 3

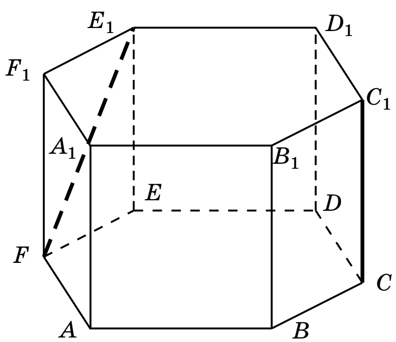
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BB_1 и F_1E_1.



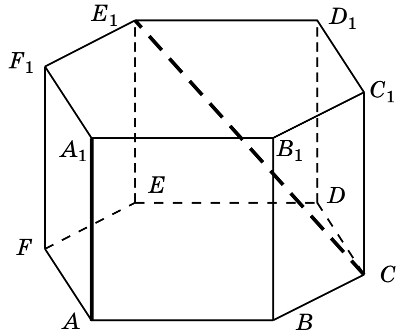
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и D_1E.



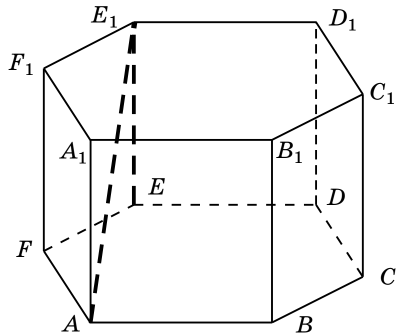
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми CC_1 и FE_1.



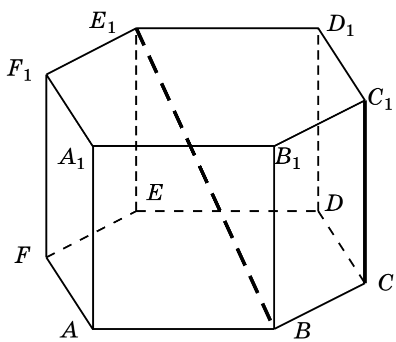
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и E_1C.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AE_1 и EE_1.

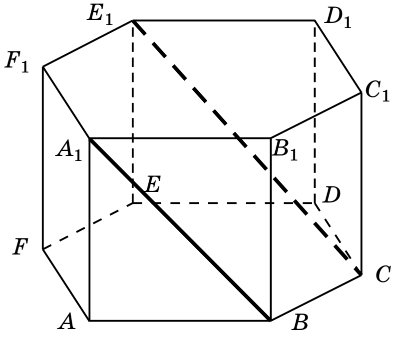


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми CC_1 и BE_1.

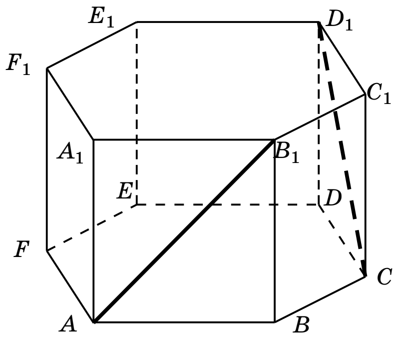


Окончание табл. 3

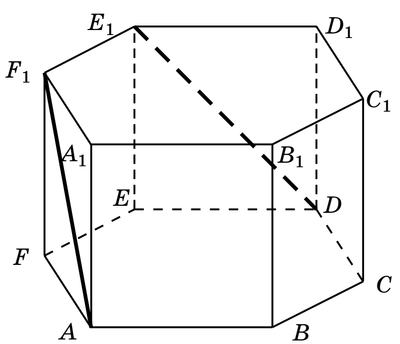
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1B и E_1C.



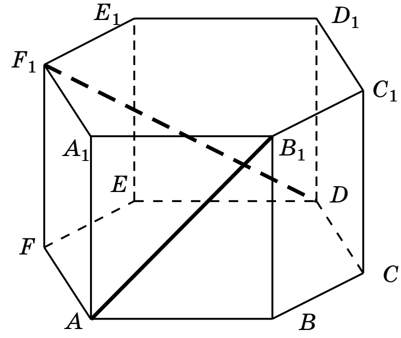
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и D_1C.



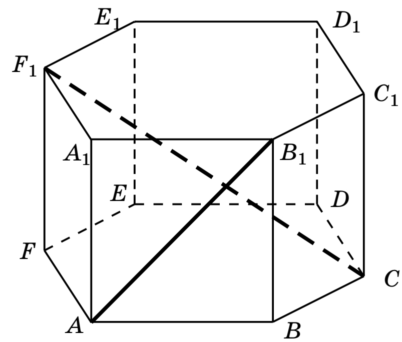
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AF_1 и DE_1.



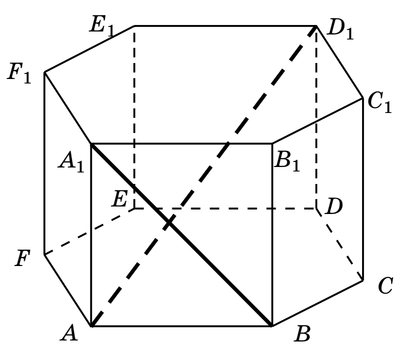
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и F_1D.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми F_1C и AB_1.



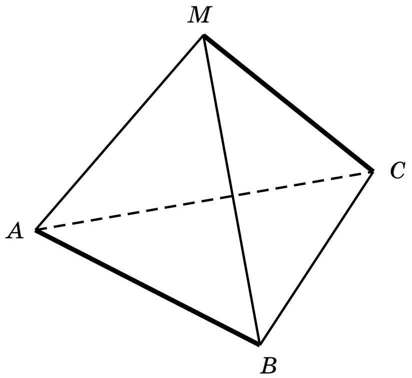
12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1B и AD_1.



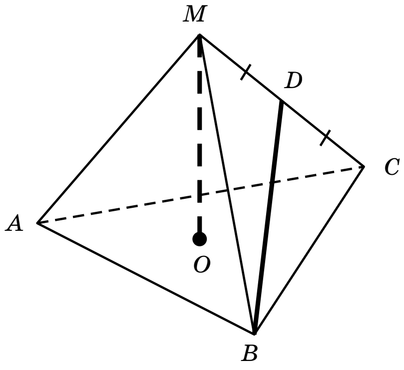
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 4

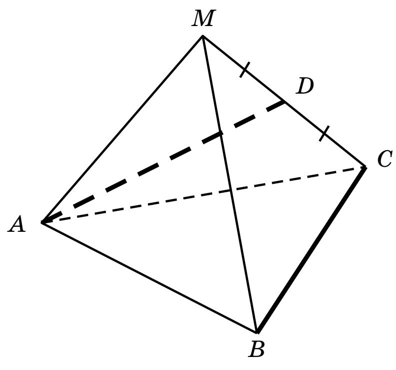
1 В правильном тетраэдре $MABC$ найдите угол между прямыми AB и CM.



2 В правильном тетраэдре $MABC$ найдите угол между высотой MO и медианой BD боковой грани MBC.



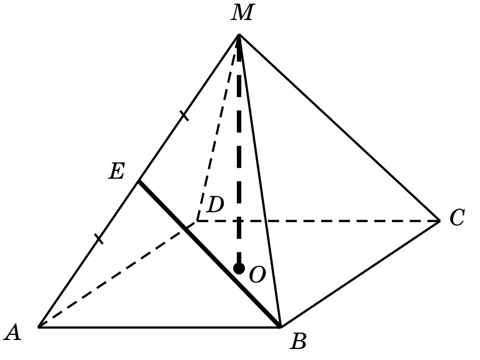
3 В правильном тетраэдре $MABC$ точка D — середина ребра CM. Найдите угол между прямыми BC и AD.



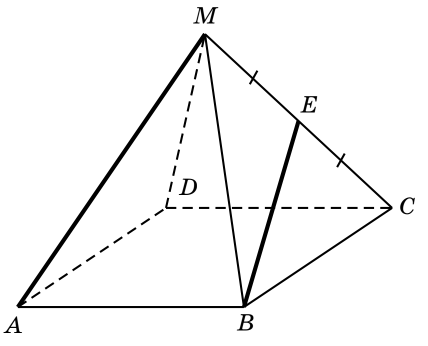
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 5

1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми MO и BE, где E — середина ребра AM.



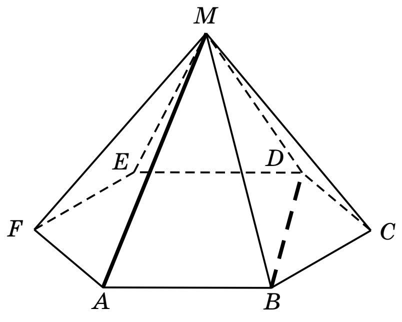
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра MC. Найдите угол между прямыми MA и BE.



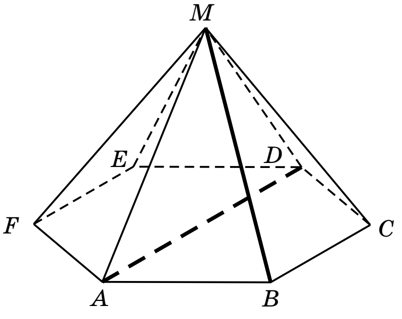
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 6

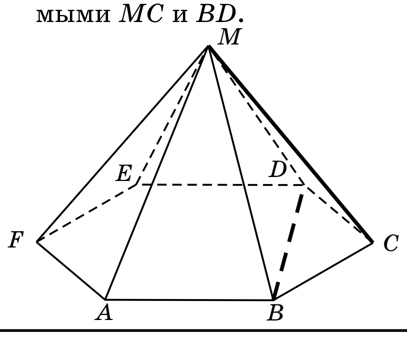
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми MA и BD.



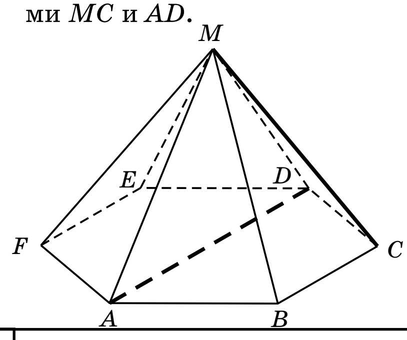
2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми MB и AD.



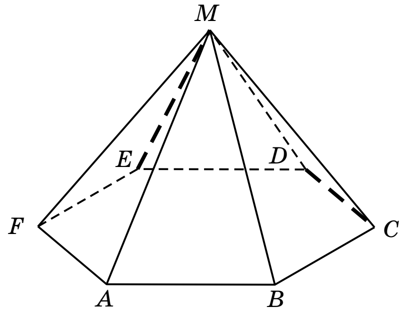
3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми MC и BD.



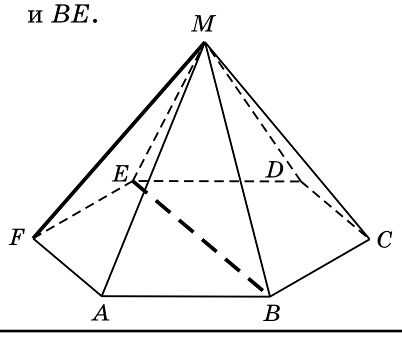
4 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми MC и AD.



5 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми ME и CD.



6 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми MF и BE.

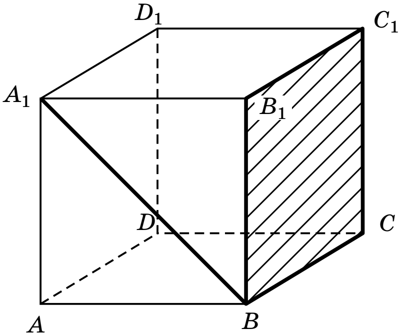


§ 2. Угол между прямой и плоскостью

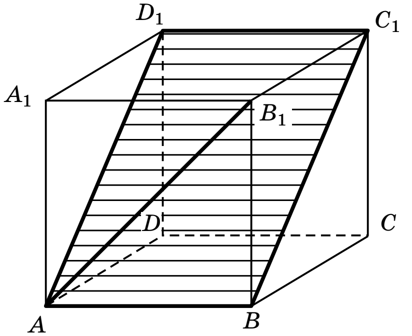
КУБ

Таблица 7

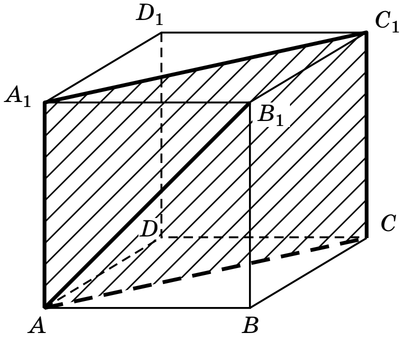
1 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.



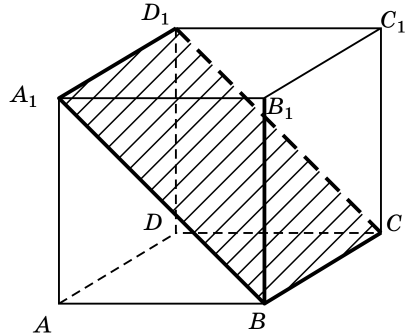
2 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



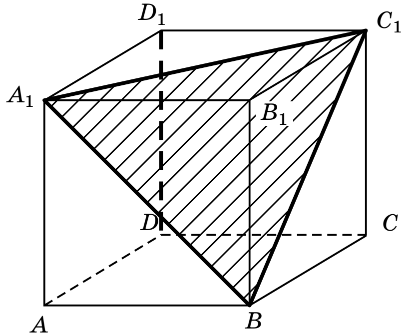
3 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ACC_1.



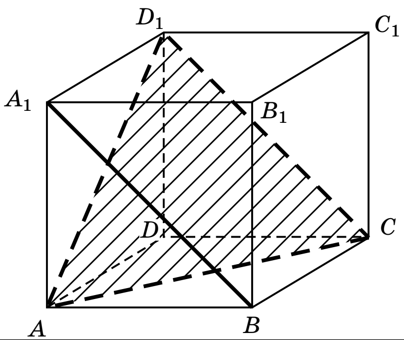
4 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью A_1BC.



5 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой DD_1 и плоскостью A_1BC_1.

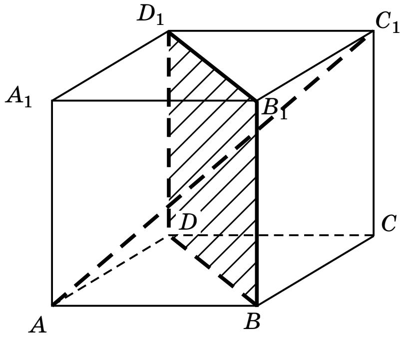


6 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1B и плоскостью ACD_1.

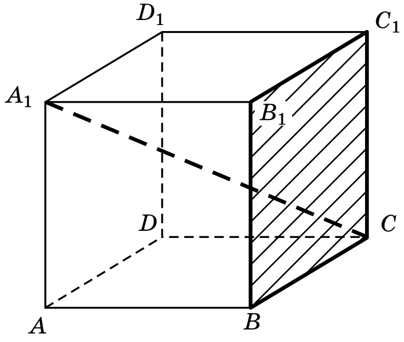


Окончание табл. 7

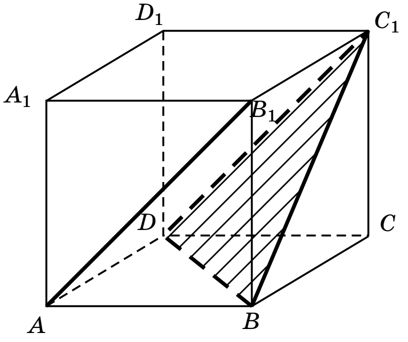
7 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BB_1D_1.



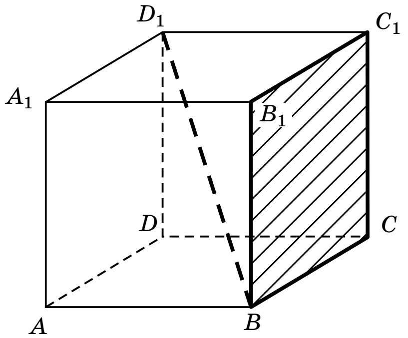
8 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1C и плоскостью BCC_1.



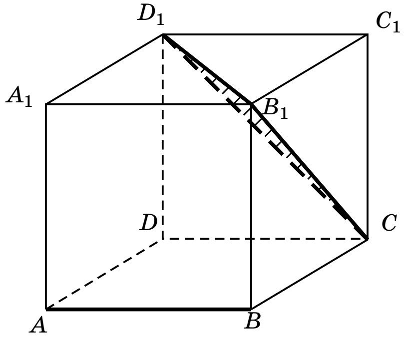
9 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BC_1D.



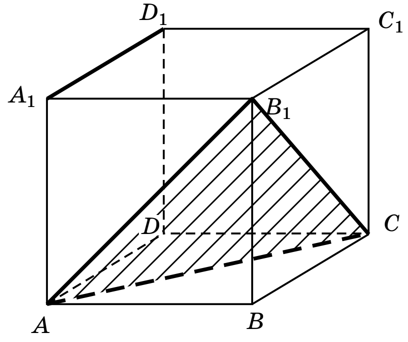
10 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью BCC_1.



11 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.



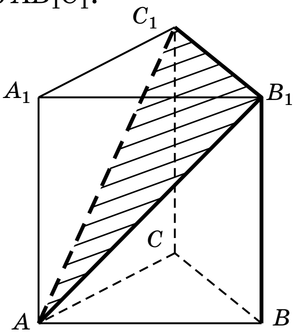
12 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1D_1 и плоскостью ACB_1.



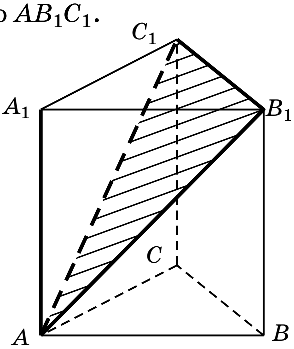
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 8

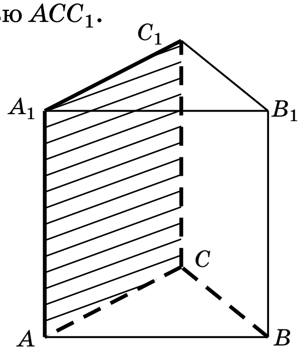
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.



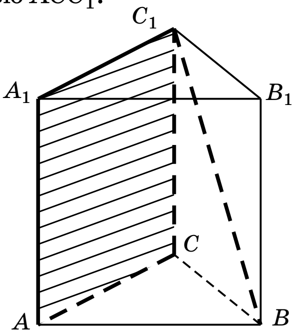
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



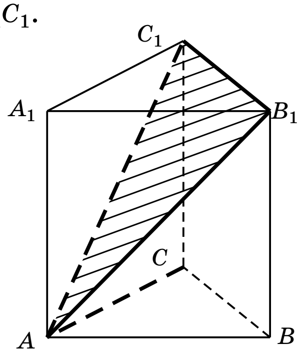
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC и плоскостью ACC_1.



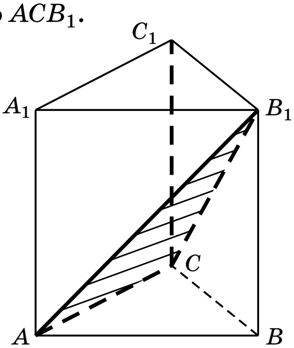
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью ACC_1.



5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC и плоскостью AB_1C_1.



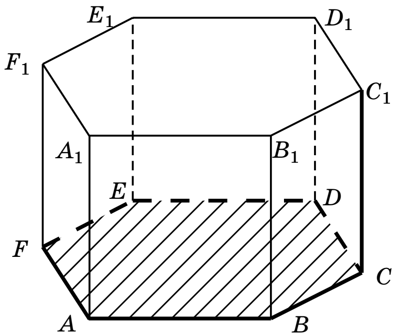
6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ACB_1.



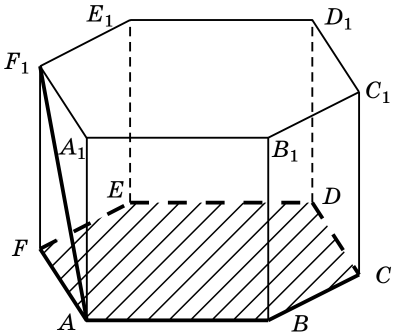
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 9

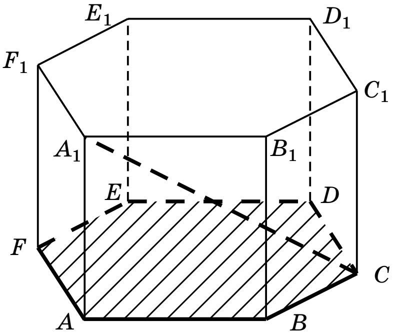
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABC.



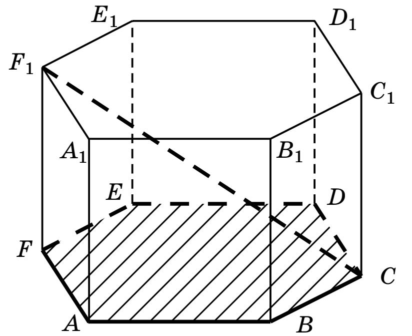
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF_1 и плоскостью ABC.



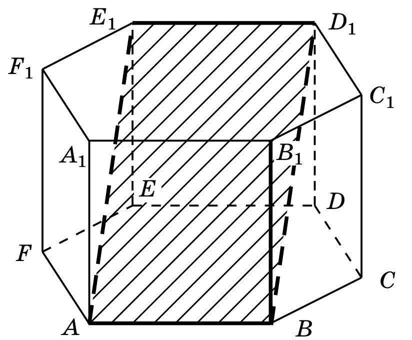
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABC.



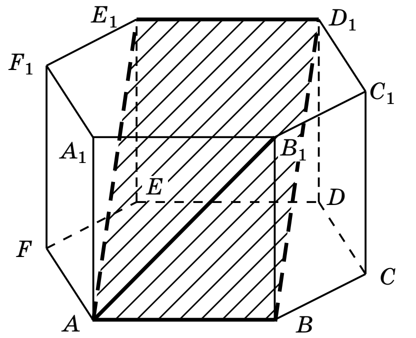
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CF_1 и плоскостью ABC.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью ABD_1.

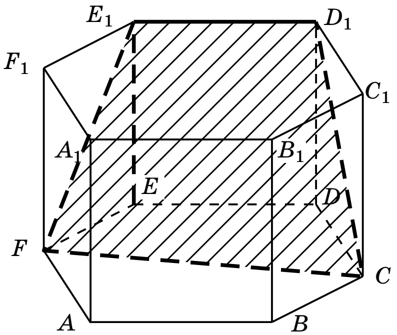


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABD_1.

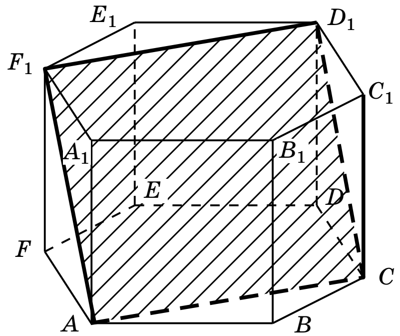


Окончание табл. 9

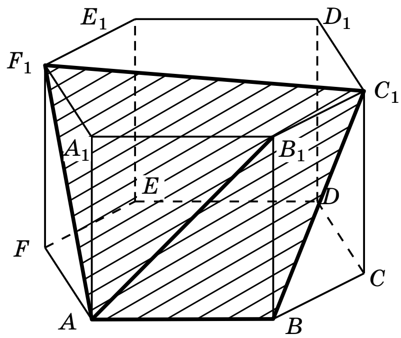
7 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой EE_1 и плоскостью FCD_1.



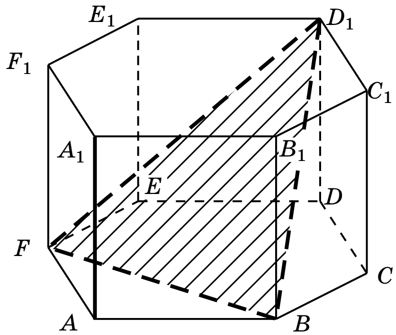
8 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ACD_1.



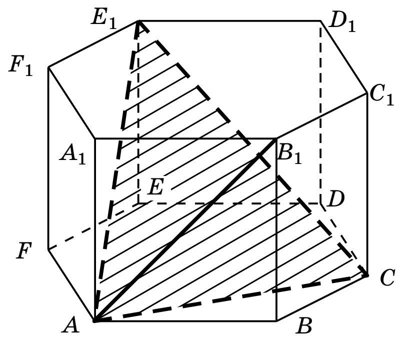
9 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



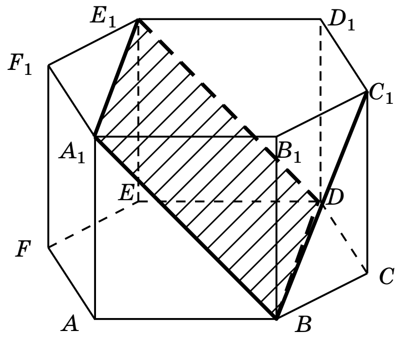
10 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BD_1F.



11 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.



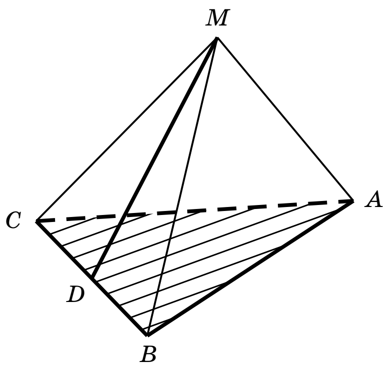
12 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BDE_1.



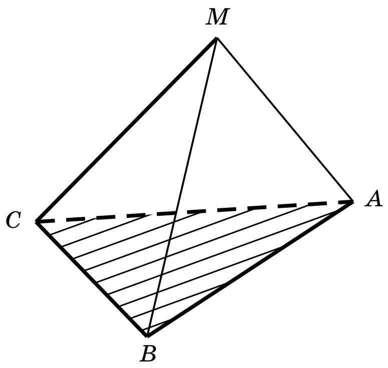
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 10

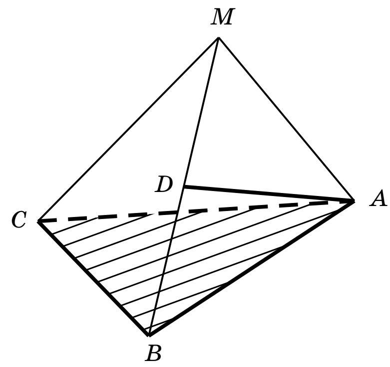
1 В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1, найдите угол между апофемой MD и плоскостью ABC.



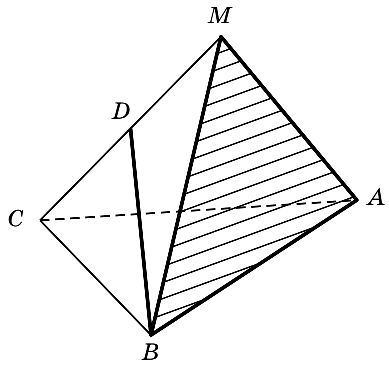
2 В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1, найдите угол между ребром MC и плоскостью ABC.



3 В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1, точка D — середина ребра BM. Найдите угол между прямой AD и плоскостью ABC.



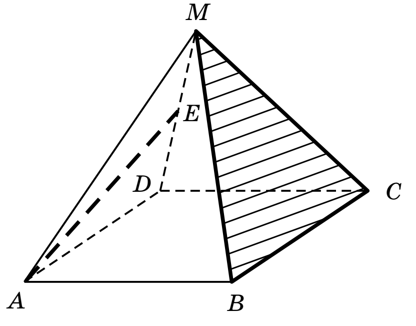
4 В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1, найдите угол между медианой BD грани MBC и плоскостью MAB.



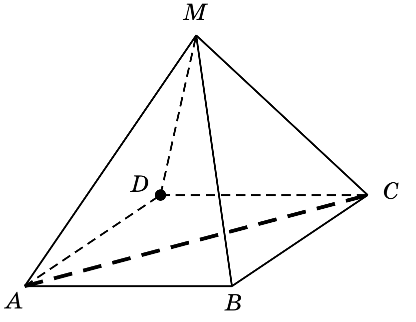
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 11

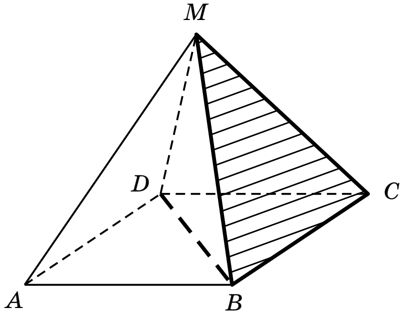
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AE и плоскостью MBC, где E — середина MD.



3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно AC.



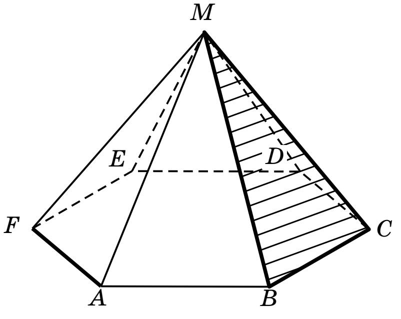
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BD и плоскостью MBC.



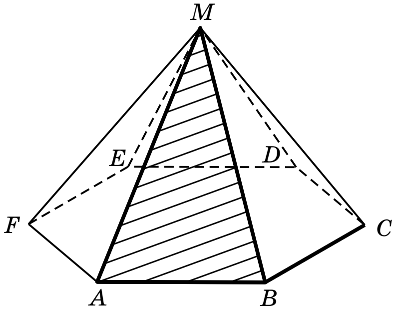
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 12

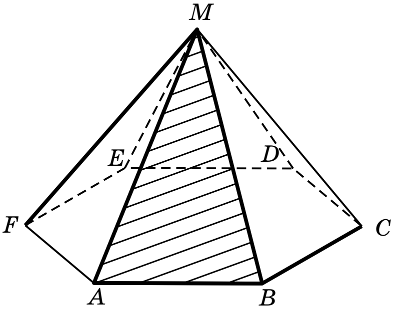
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой AF и плоскостью MBC.



2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой BC и плоскостью MAB.



3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой MF и плоскостью MAB.

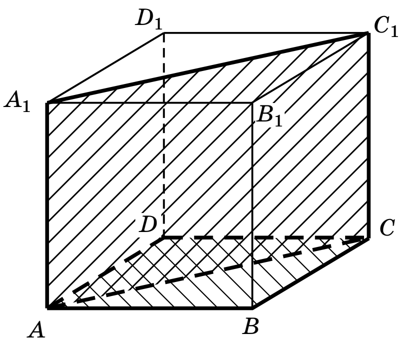


§ 3. Угол между двумя плоскостями

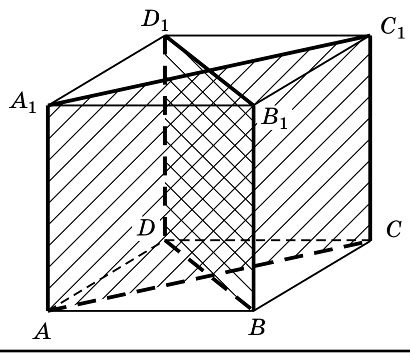
КУБ

Таблица 13

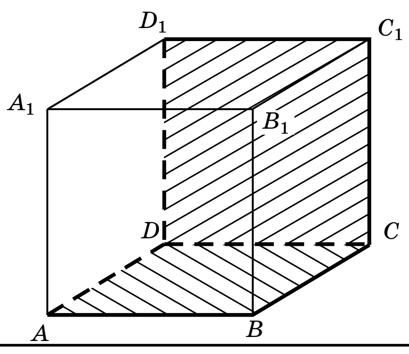
1 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и ACC_1.



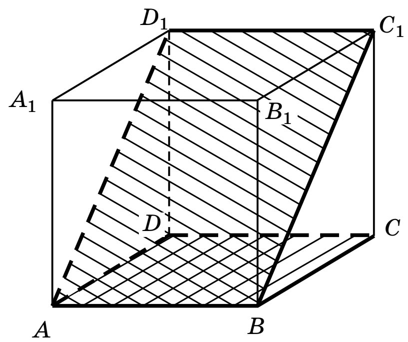
2 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ACC_1 и BDD_1.



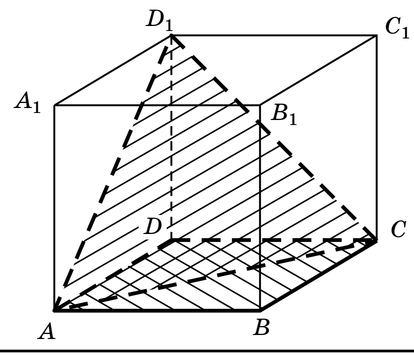
3 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и CDD_1.



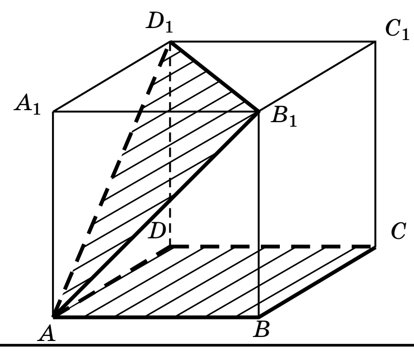
4 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC_1 и ABC.



5 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и ACD_1.



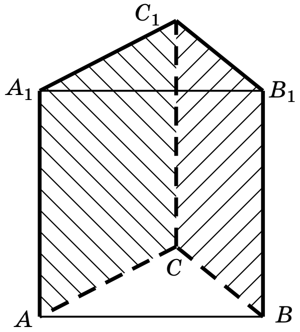
6 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и AB_1D_1.



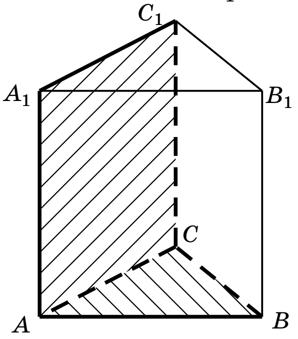
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 14

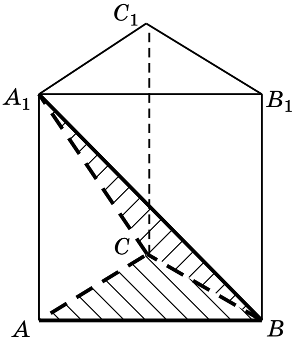
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1.



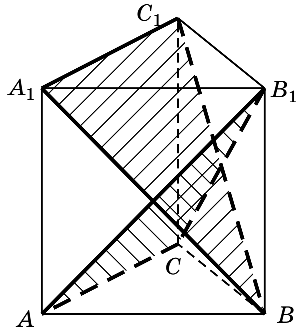
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и ABC.



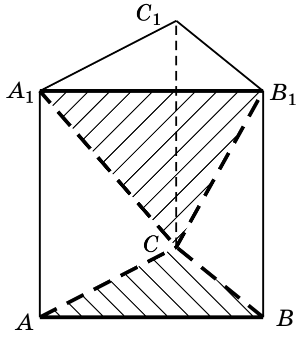
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и A_1BC.



4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AB_1C и A_1BC_1.



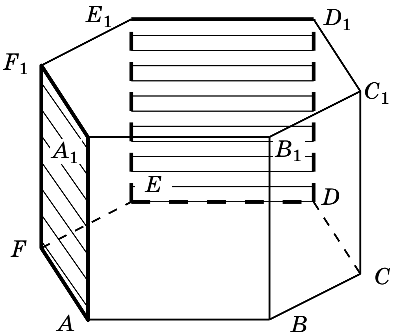
5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и A_1CB_1.



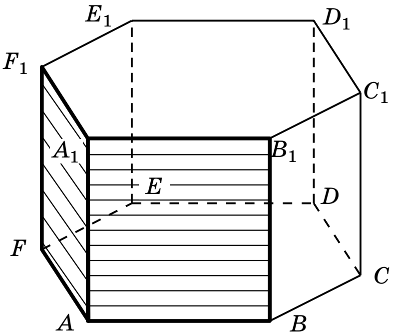
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 15

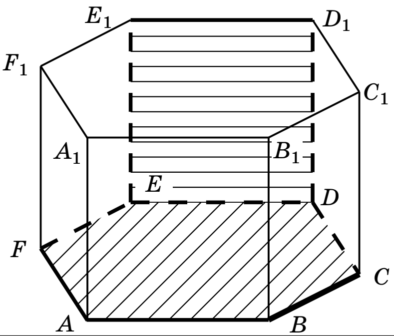
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFF_1 и DD_1E_1.



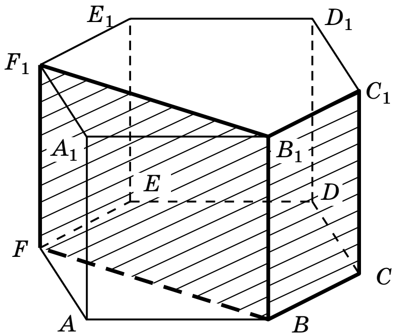
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABB_1 и AFF_1.



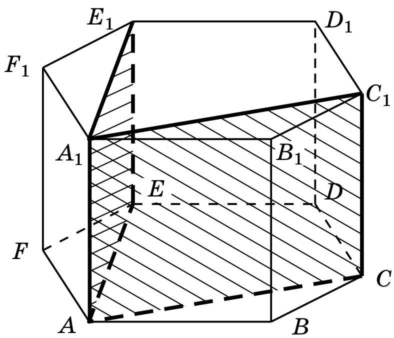
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и DEE_1.



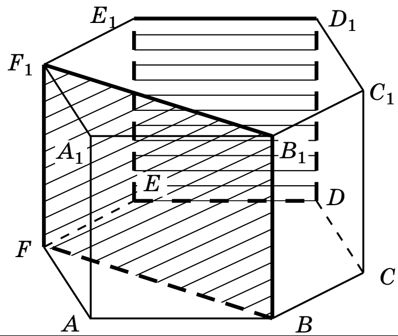
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BFF_1 и BCC_1.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и AEE_1.



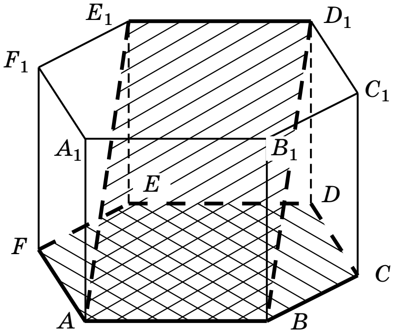
6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BFF_1 и DEE_1.



Окончание табл. 15

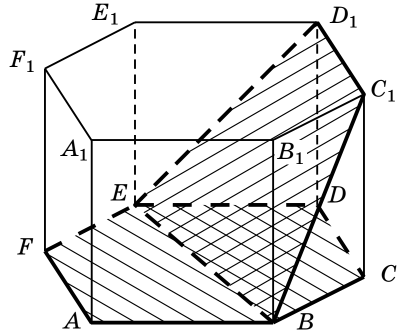
7

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ABD_1.



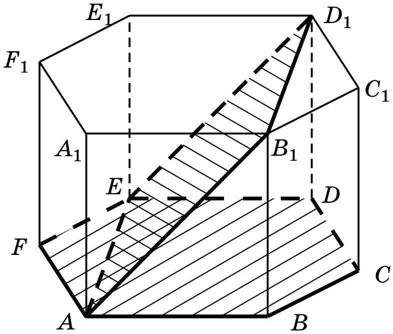
10

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.



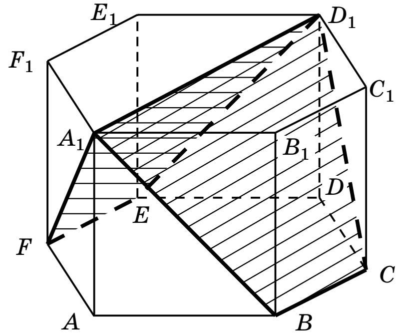
8

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и AB_1D_1.



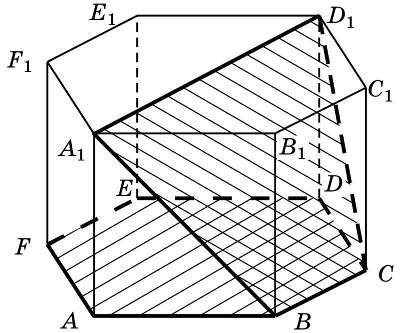
11

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BCD_1 и FED_1.



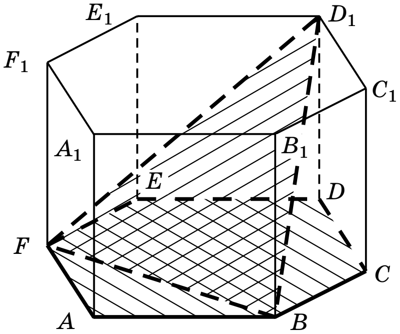
9

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD_1.



12

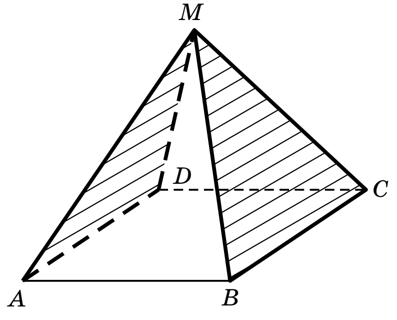
В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и FBD_1.



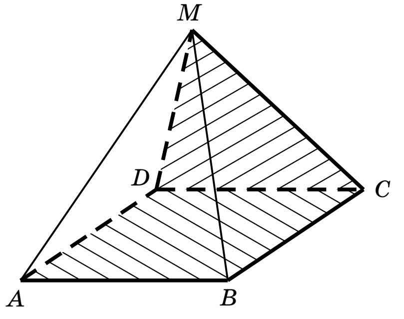
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 16

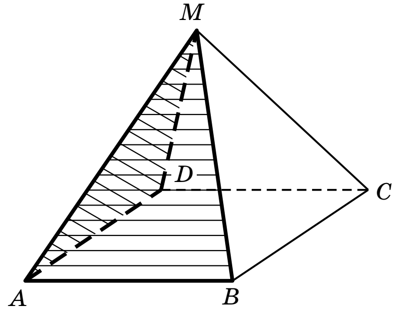
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями MAD и MBC.



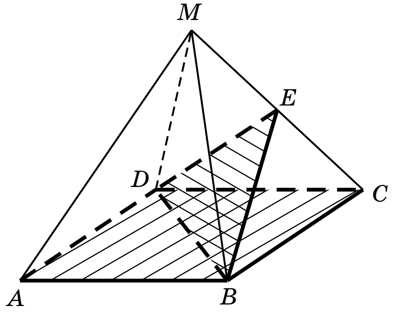
3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и MCD.



2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол между гранями MAD и AMB.



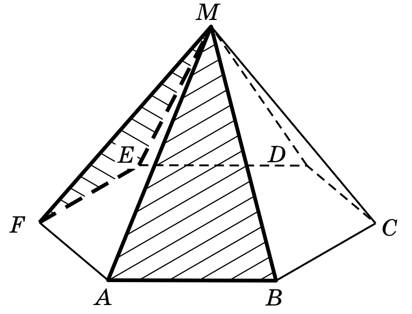
4 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра MC. Найдите угол между плоскостями ABC и BDE.



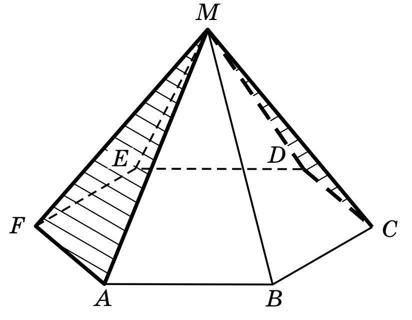
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 17

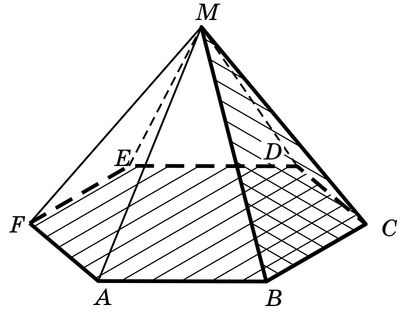
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями MFE и MAB.



2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями MAF и MCD.



3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями ABC и MBC.

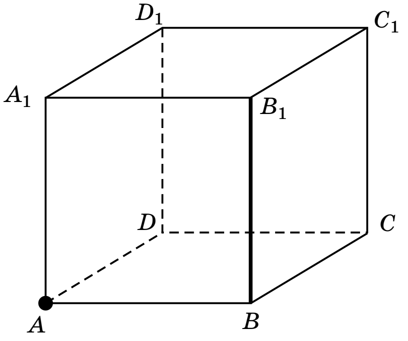


§ 4. Расстояние от точки до прямой

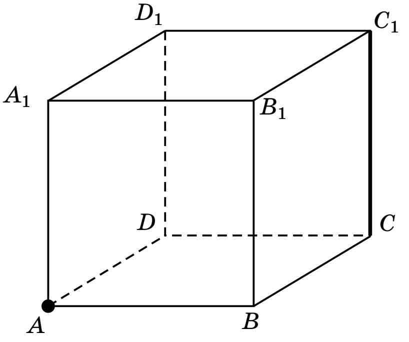
КУБ

Таблица 18

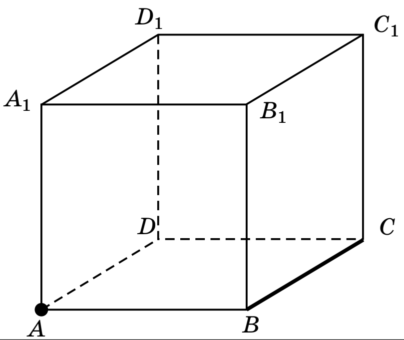
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BB_1.



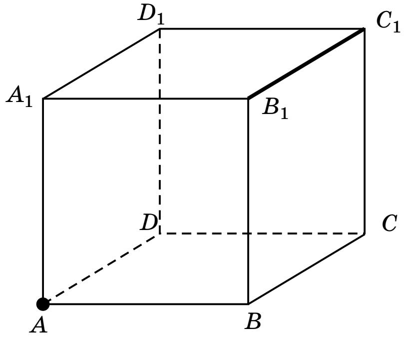
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой CC_1.



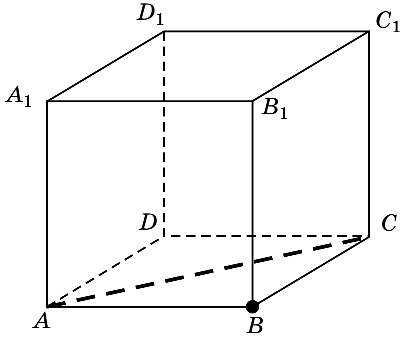
3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BC.



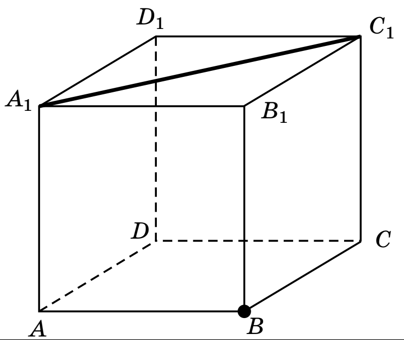
4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.



5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AC.

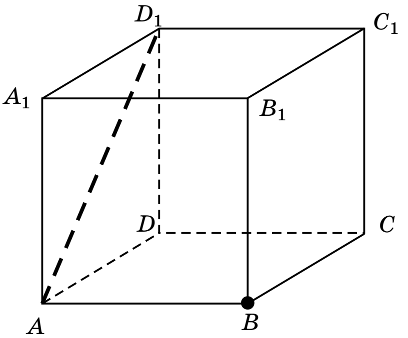


6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.

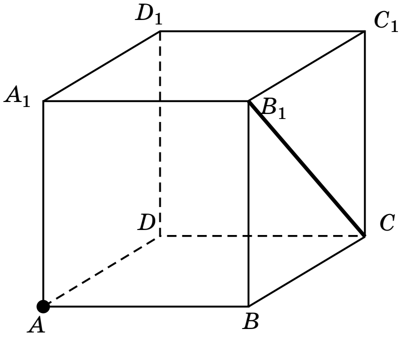


Окончание табл. 18

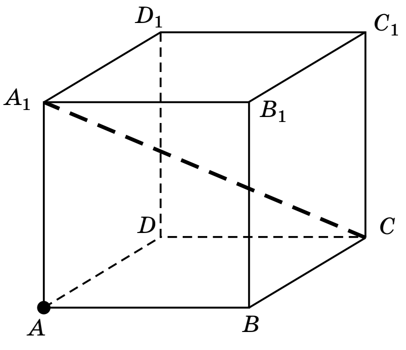
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AD_1.



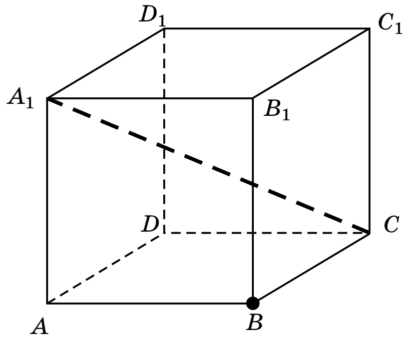
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой B_1C.



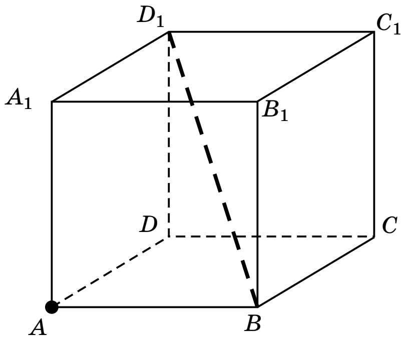
9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой A_1C.



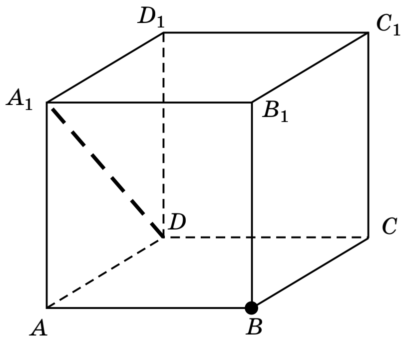
10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой A_1C.



11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.



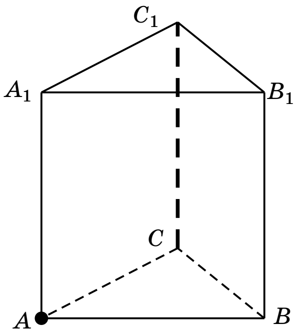
12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой DA_1.



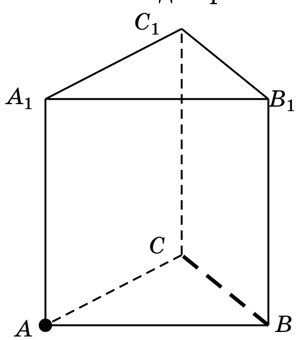
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 19

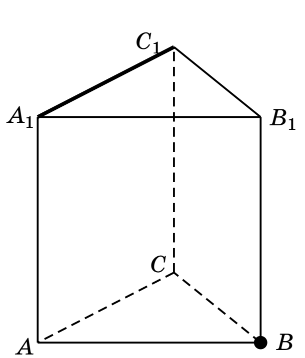
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CC_1.



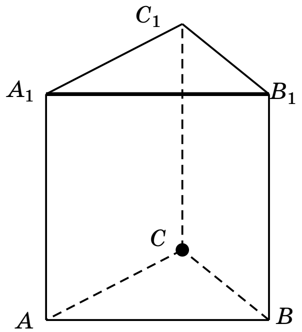
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC.



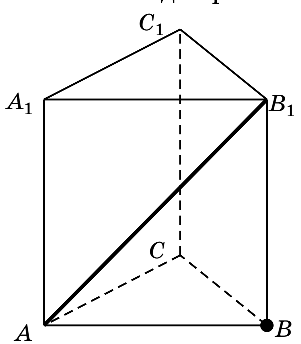
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.



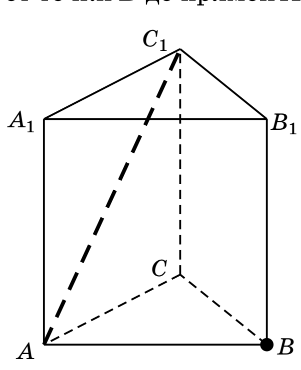
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.



5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1.



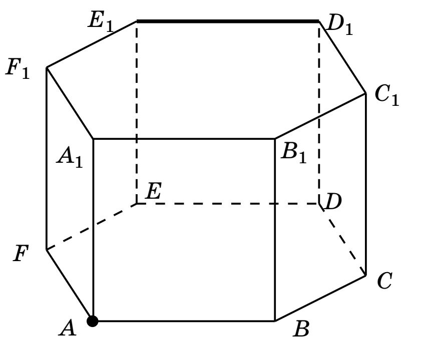
6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.



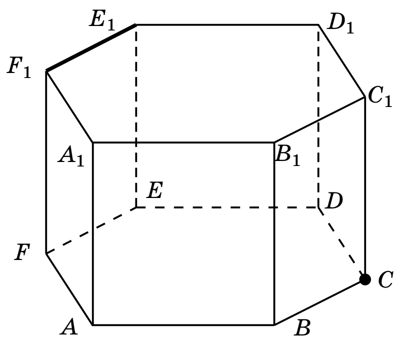
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 20

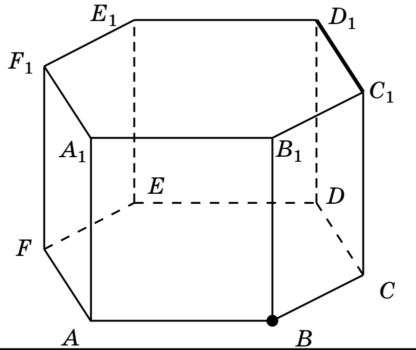
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1E_1.



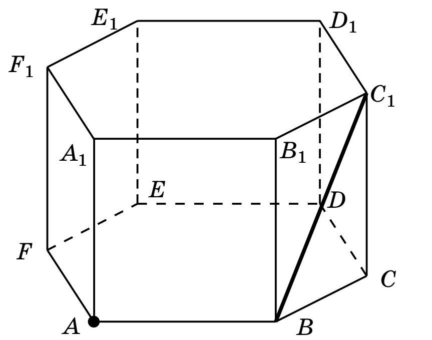
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.



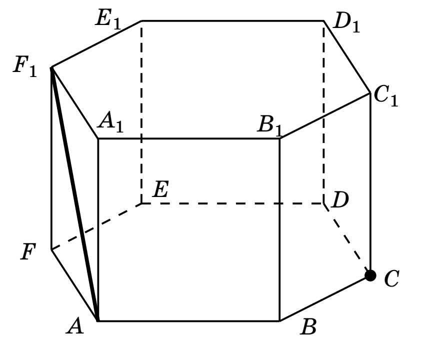
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой D_1C_1.



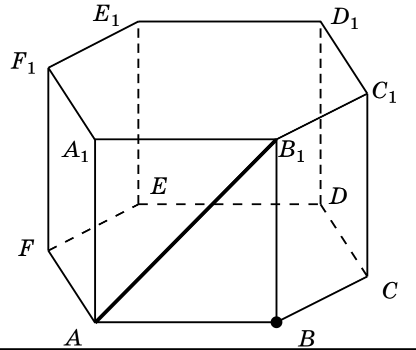
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой AF_1.

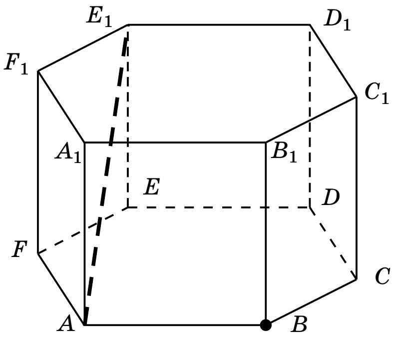


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1.

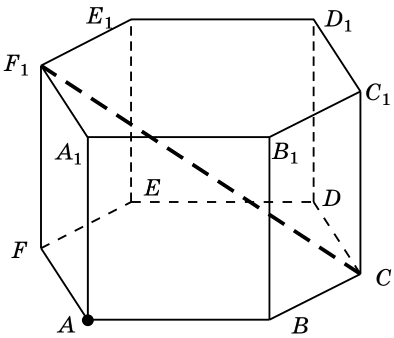


Окончание табл. 20

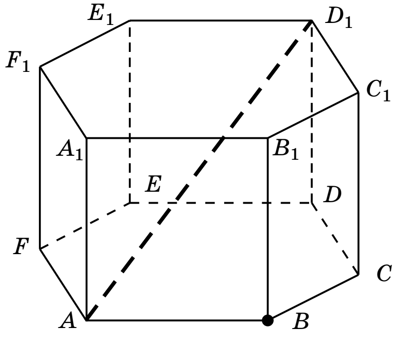
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AE_1.



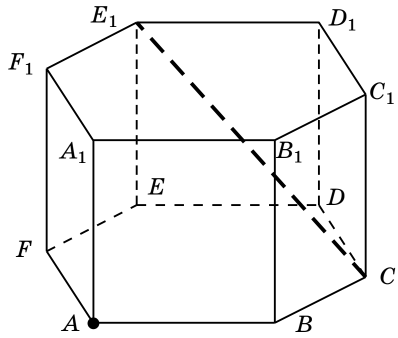
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CF_1.



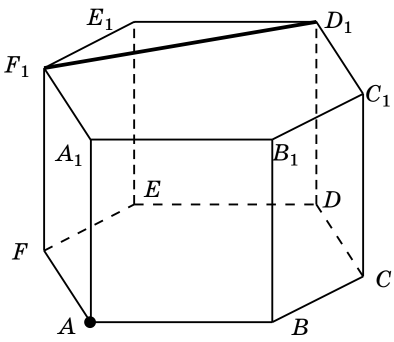
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AD_1.



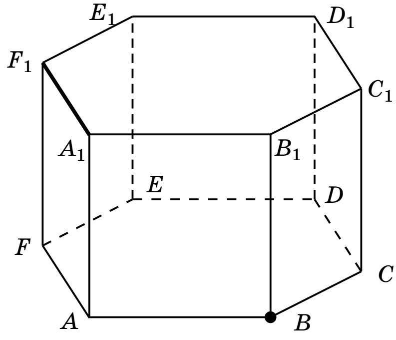
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CE_1.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1F_1.



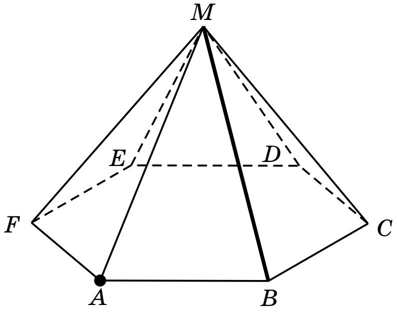
12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.



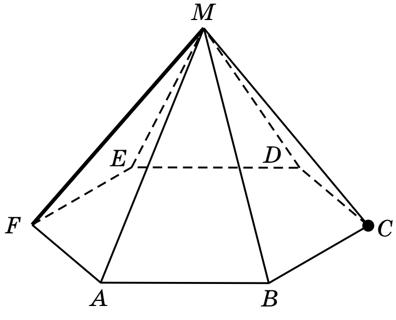
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 21

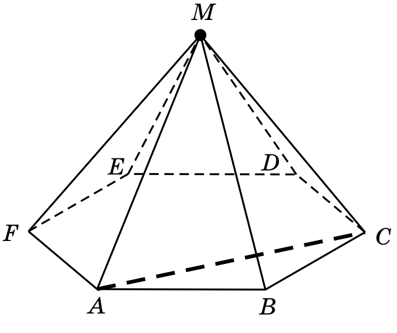
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до прямой MB.



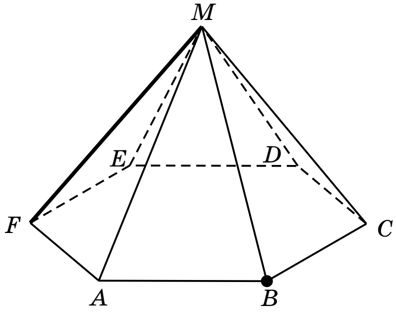
3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой MF.



2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки M до прямой AC.



4 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой MF.

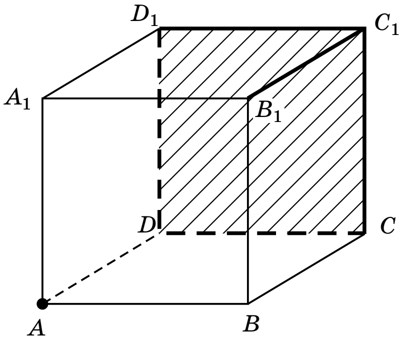


§ 5. Расстояние от точки до плоскости

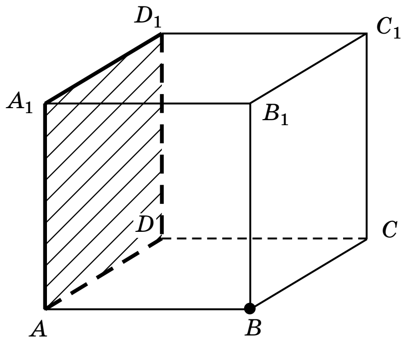
КУБ

Таблица 22

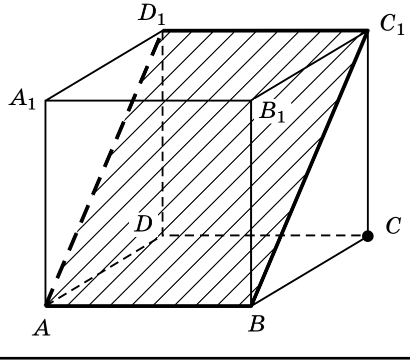
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CDD_1.



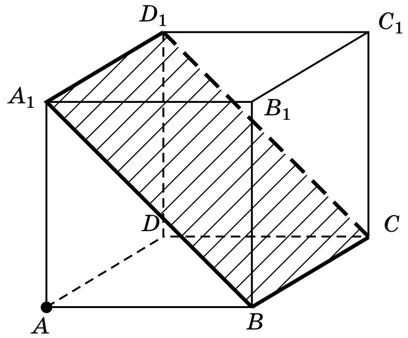
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ADD_1.



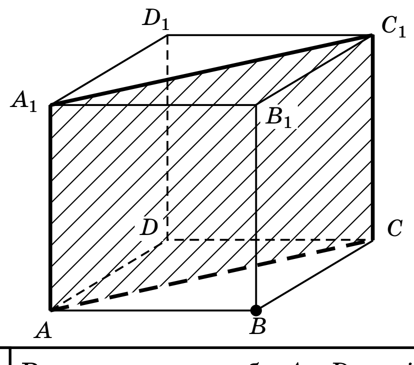
3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки C до плоскости ABC_1.



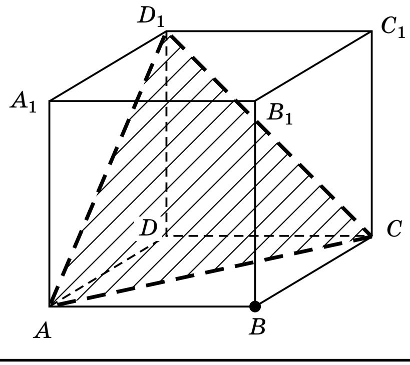
4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BCD_1.



5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1.

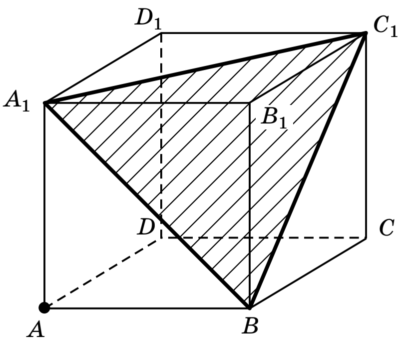


6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACD_1.

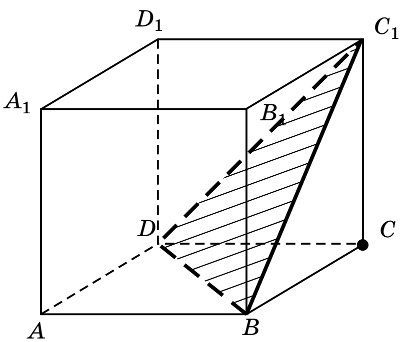


Окончание табл. 22

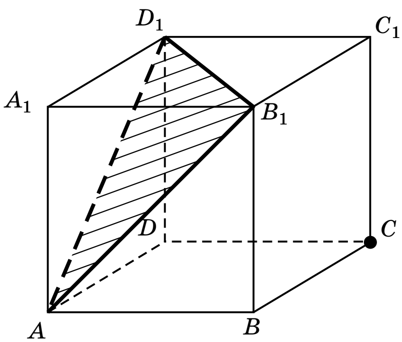
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости A_1BC_1.



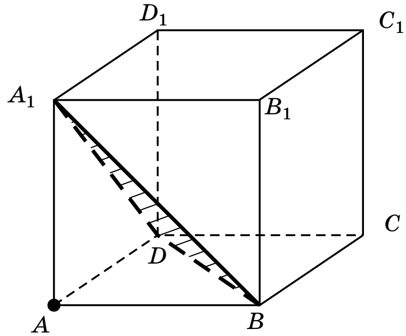
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки C до плоскости BDC_1.



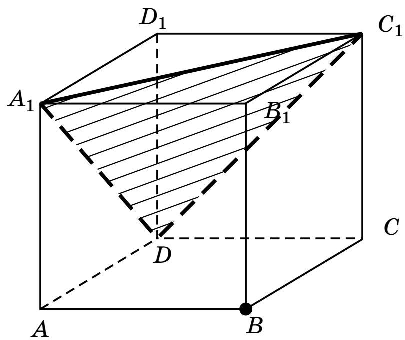
9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1.



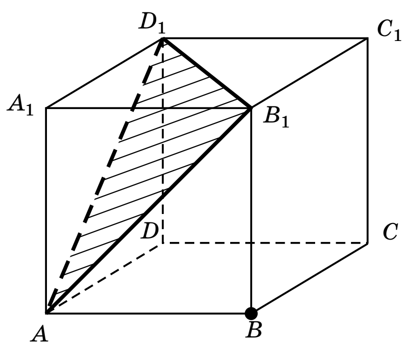
10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.



11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости DA_1C_1.



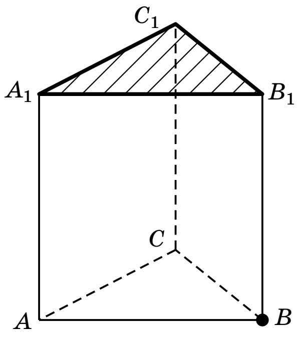
12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1.



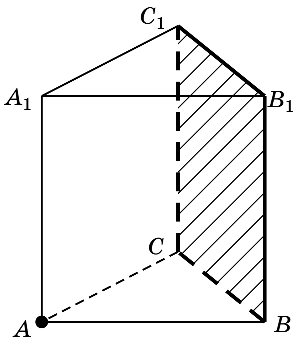
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 23

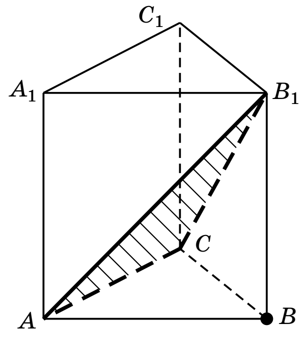
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости $A_1B_1C_1$.



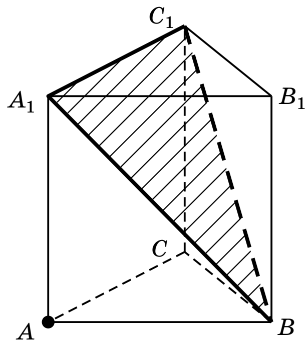
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.



3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.

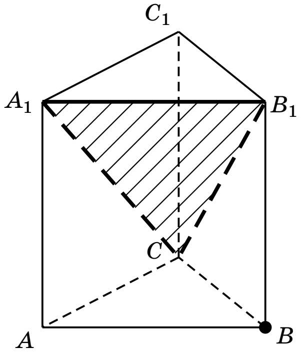


4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1BC_1.

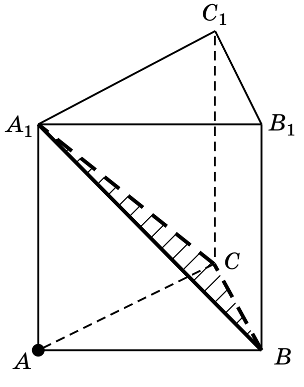


Окончание табл. 23

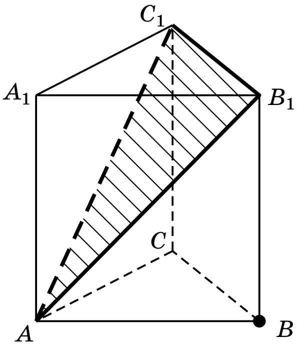
5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости A_1B_1C.



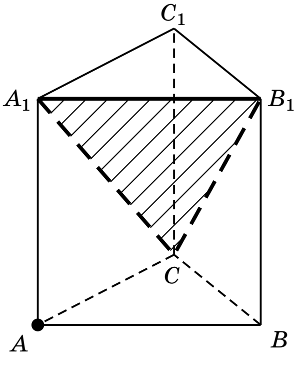
6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCA_1.



7 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C_1.



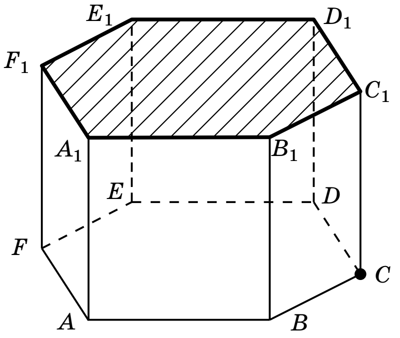
8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.



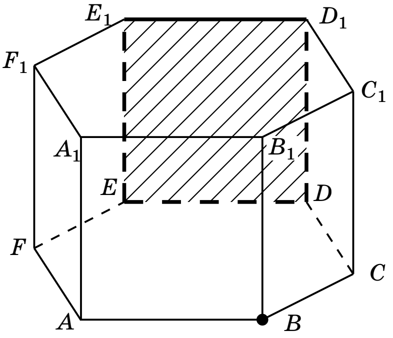
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 24

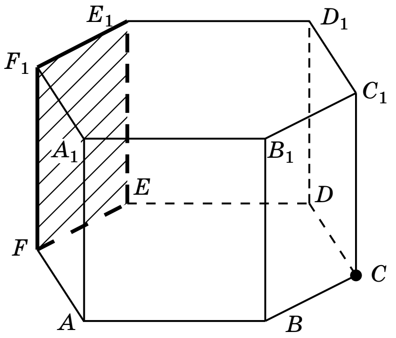
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до плоскости $A_1B_1C_1$.



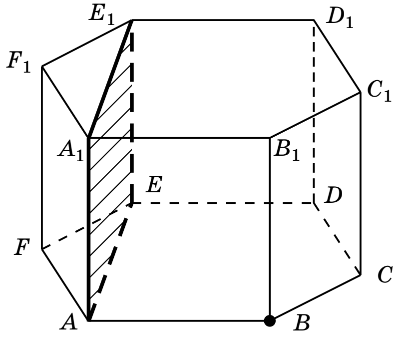
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DEE_1.



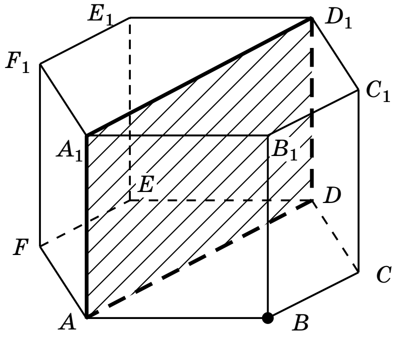
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до плоскости EFF_1.



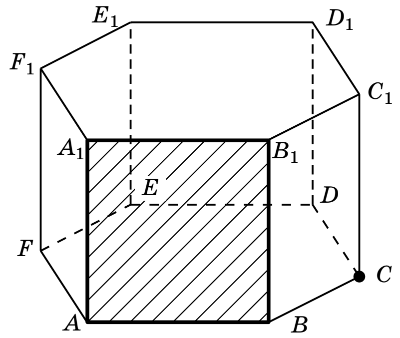
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AEE_1.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ADD_1.

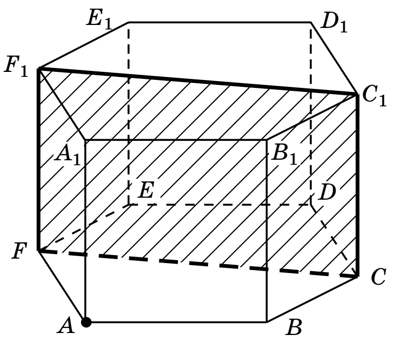


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до плоскости ABB_1.

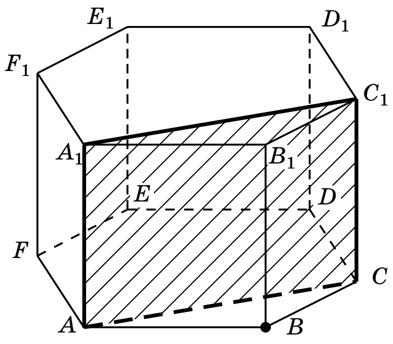


Окончание табл. 24

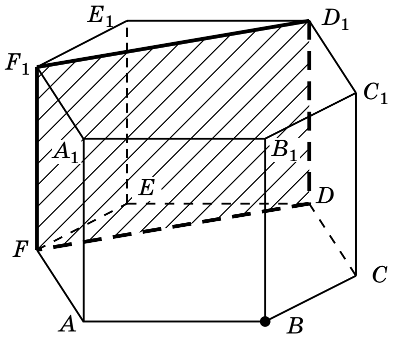
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости FCC_1.



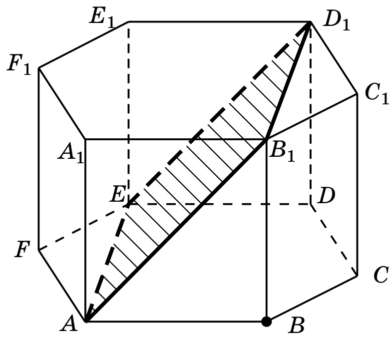
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1.



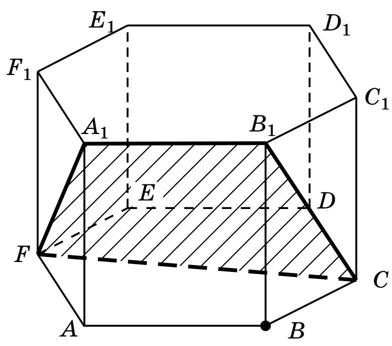
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости FDD_1.



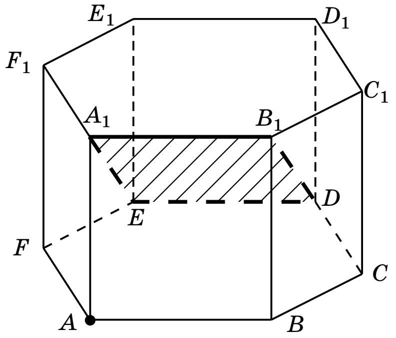
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AED_1.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CFA_1.



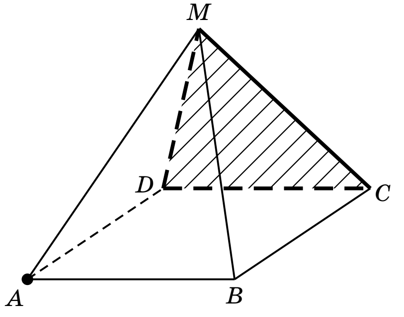
12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости DEA_1.



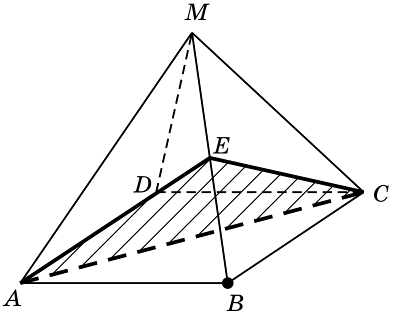
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 25

1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости MCD.



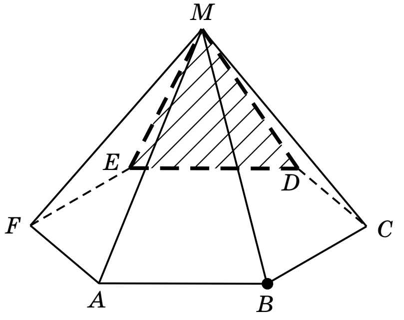
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра BM. Найдите расстояние от точки B до плоскости AEC.



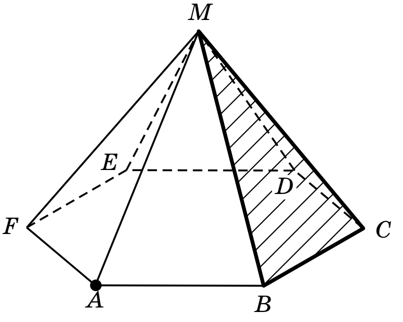
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 26

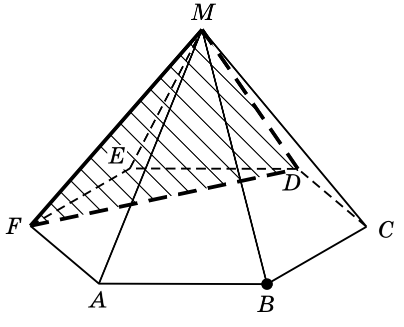
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости MED.



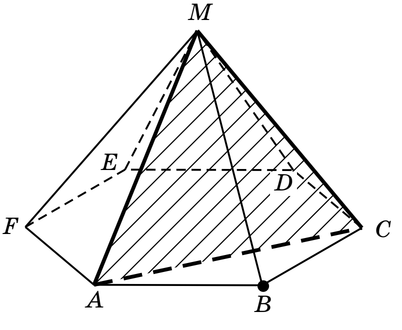
3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости MBC.



2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости MDF.



4 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости MAC.

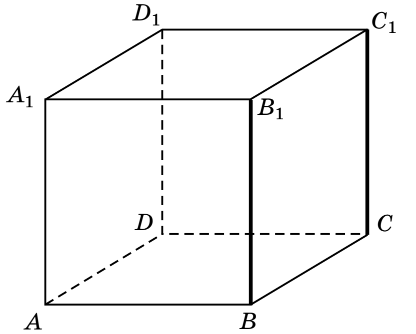


§ 6. Расстояние между двумя прямыми

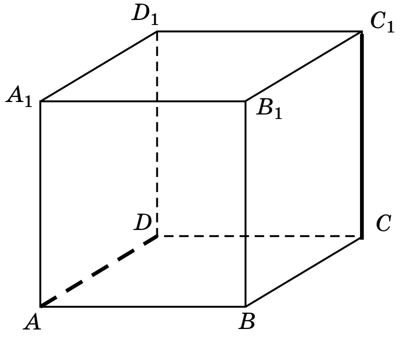
КУБ

Таблица 27

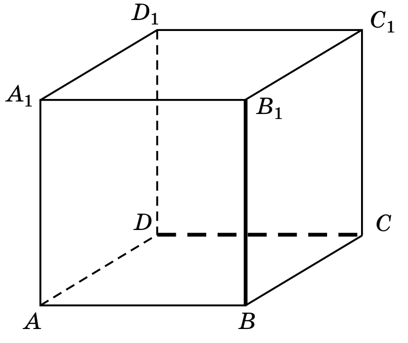
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и CC_1.



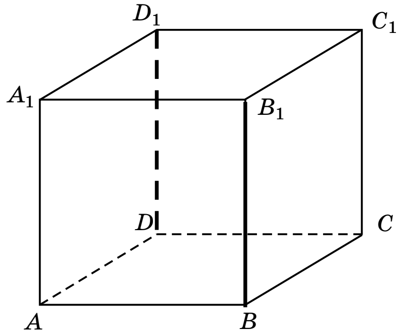
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми CC_1 и AD.



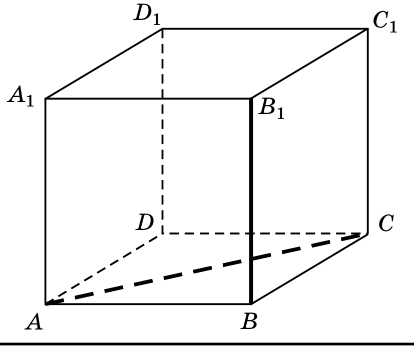
3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и CD.



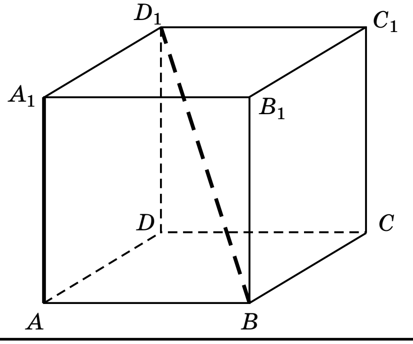
4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и DD_1.



5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AC и BB_1.

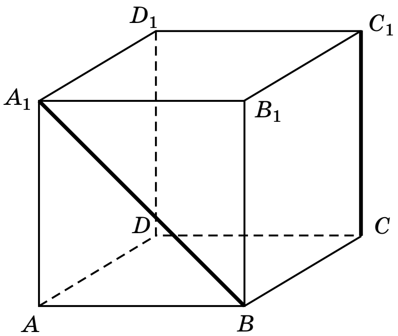


6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.

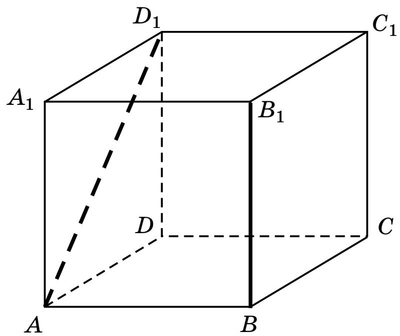


Окончание табл. 27

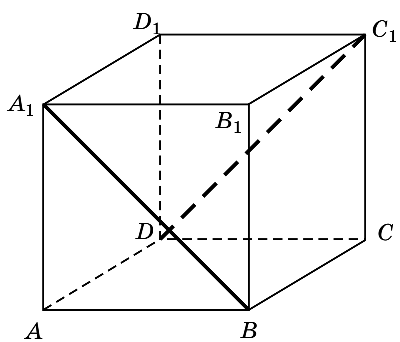
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и CC_1.



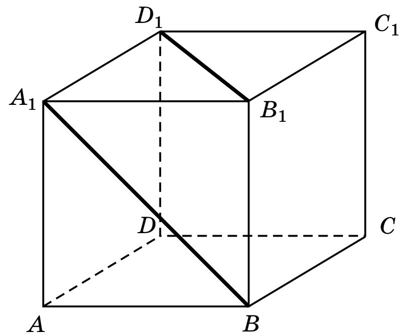
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и AD_1.



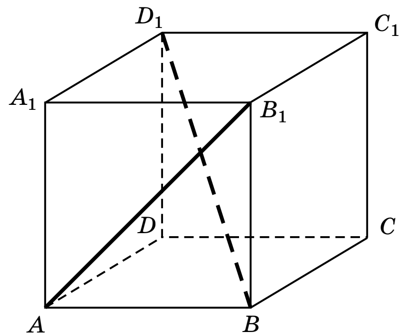
9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и DC_1.



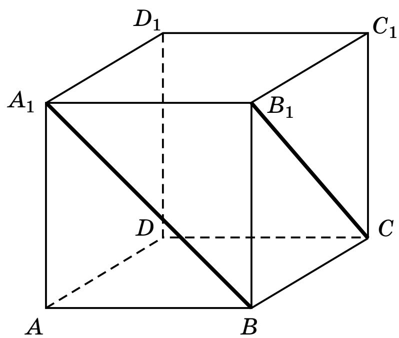
10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1D_1.



11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.



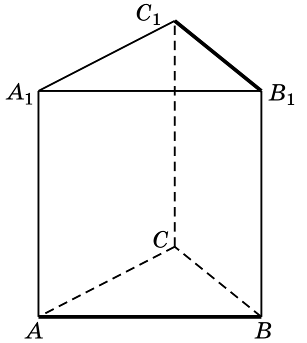
12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и CB_1.



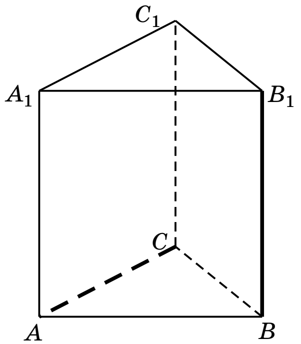
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 28

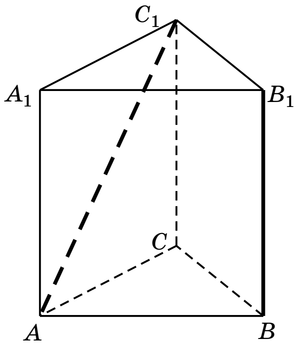
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1.



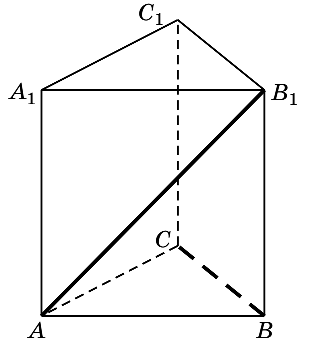
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AC.



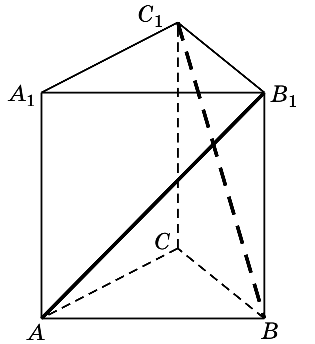
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AC_1.



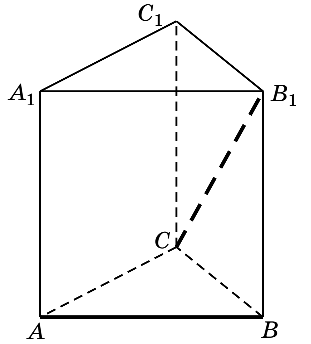
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC.



5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.



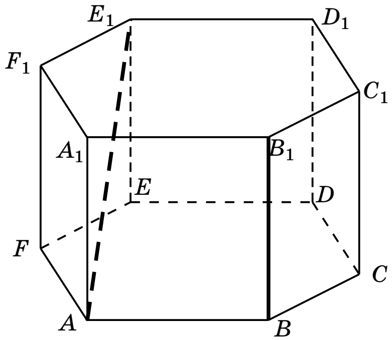
6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1.



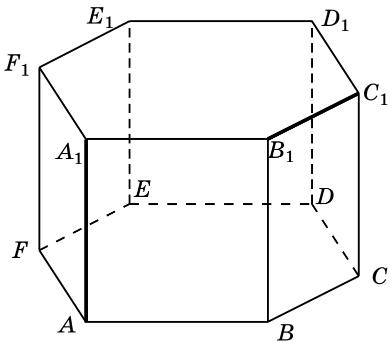
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 29

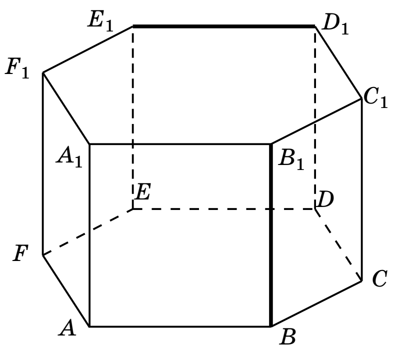
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AE_1.



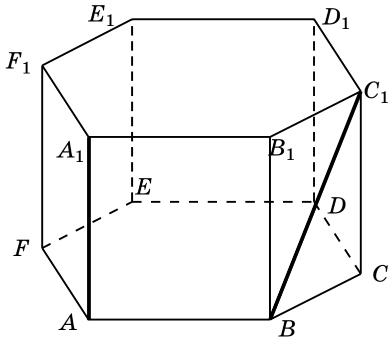
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1C_1.



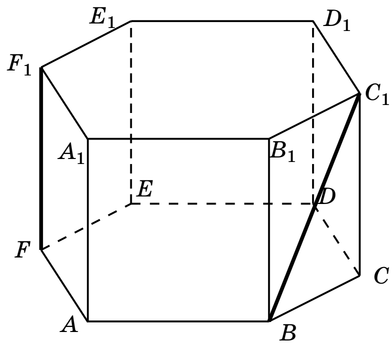
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и D_1E_1.



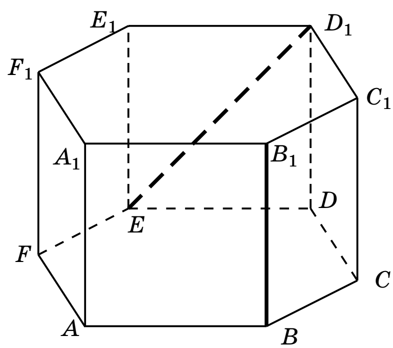
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми FF_1 и BC_1.



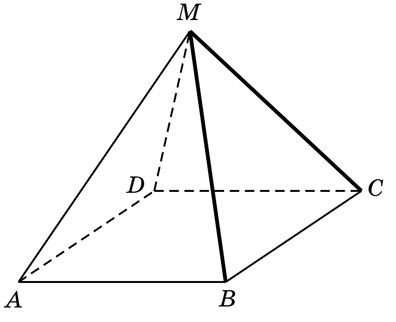
6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и ED_1.



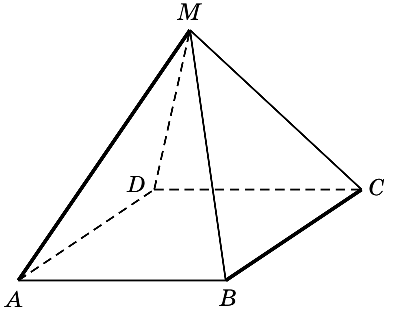
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 30

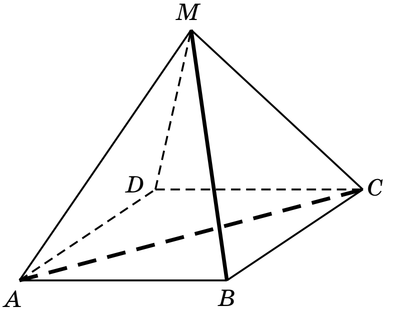
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MB и MC.



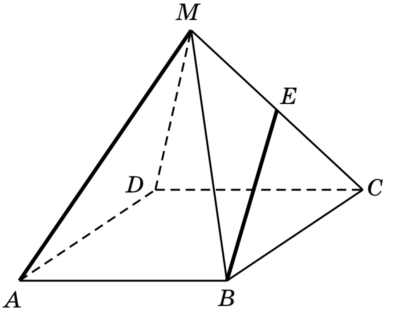
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MA и BC.



3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MB и AC.



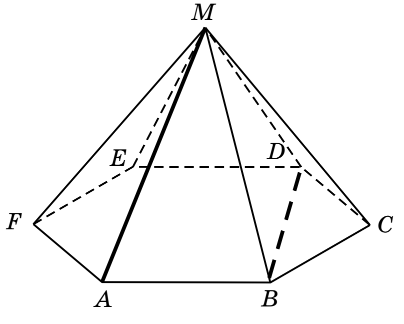
4 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MA и BE.



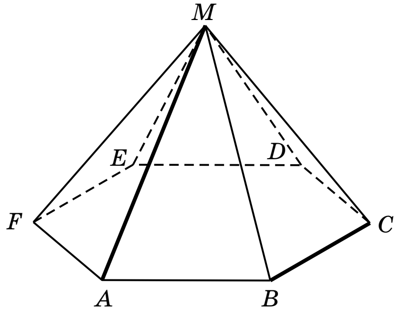
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 31

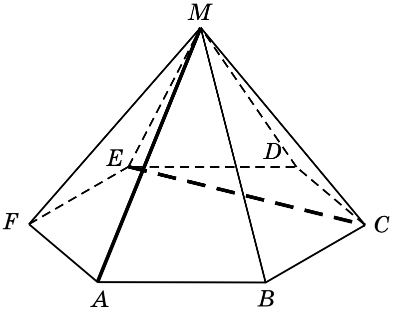
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми MA и BD.



2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми MA и BC.



3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми MA и CE.

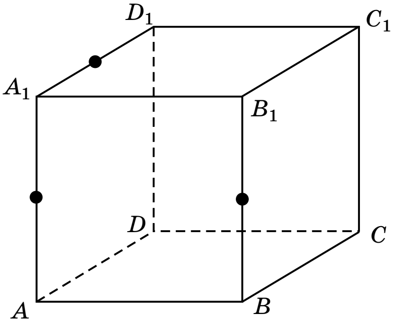


§ 7. Площади сечений многогранников

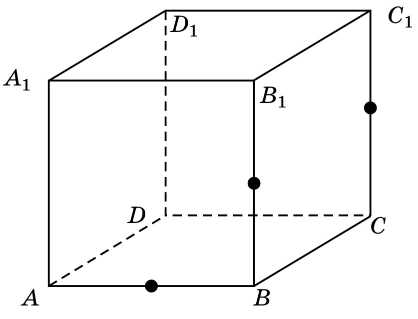
КУБ

Таблица 32

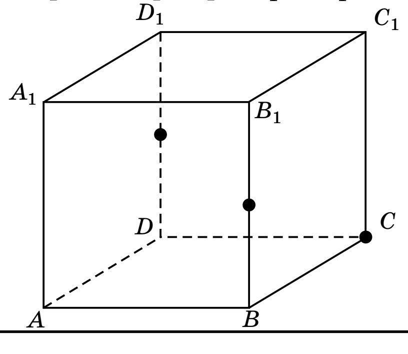
1 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1, A_1D_1.



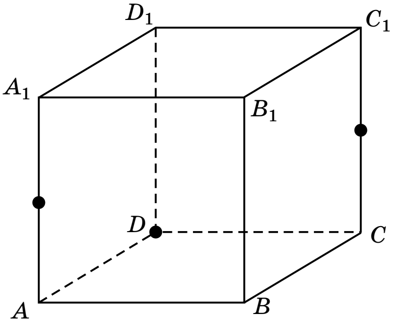
2 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер BB_1, CC_1, AB.



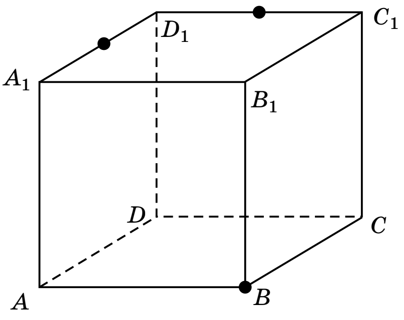
3 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину C и середины ребер BB_1, DD_1.



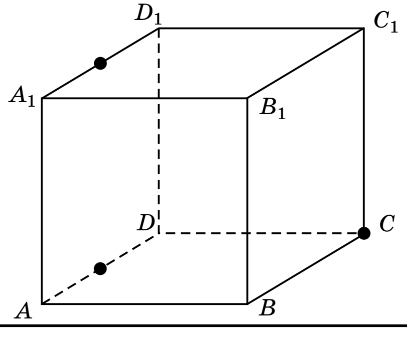
4 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину D и середины ребер AA_1, CC_1.



5 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и середины A_1D_1, D_1C_1.

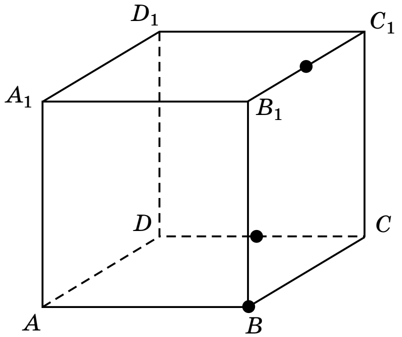


6 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину C и середины ребер AD, A_1D_1.

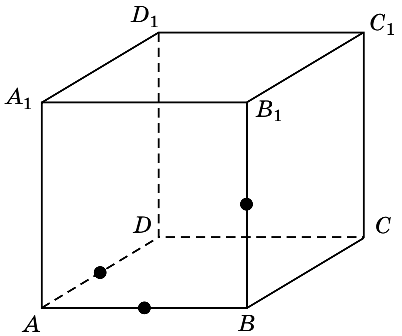


Окончание табл. 32

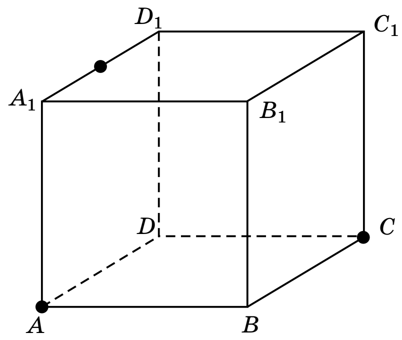
7 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и середины CD, B_1C_1.



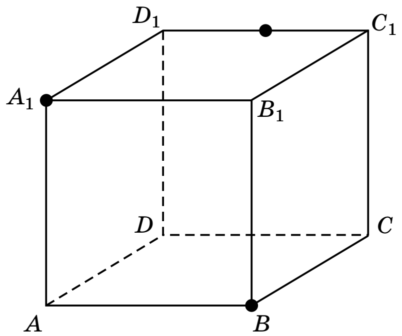
8 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AD, AB, BB_1.



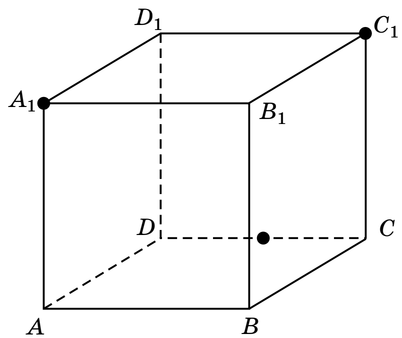
9 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину A_1D_1.



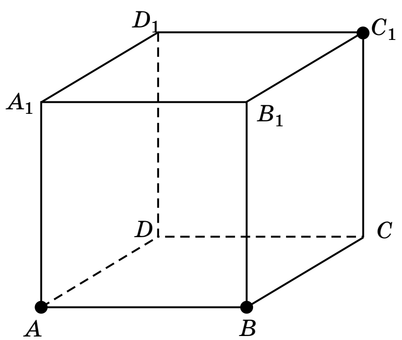
10 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A_1, B и середину ребра C_1D_1.



11 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A_1, C_1 и середину ребра DC.



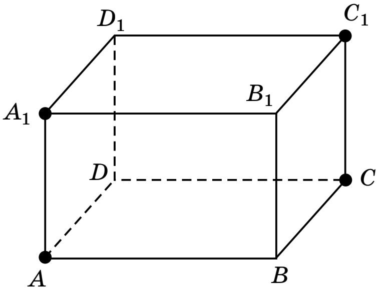
12 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, B, C_1.



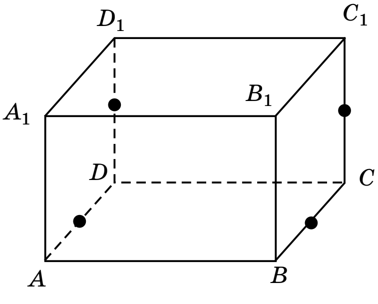
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Таблица 33

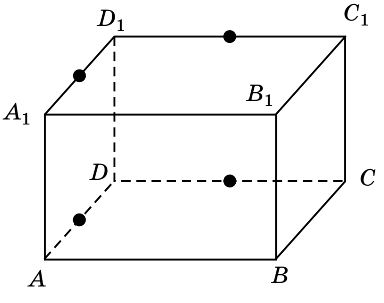
1 Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются вершины A, A_1, C, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 2$, $BC = 1$, $AA_1 = 1$.



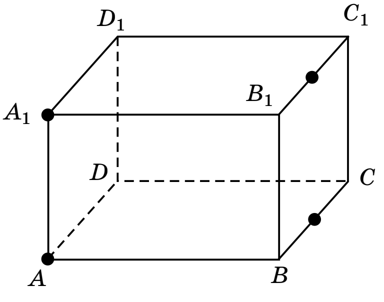
2 Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины ребер AD, BC, DD_1, CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$.



3 Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины ребер AD, A_1D_1, DC, D_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$.



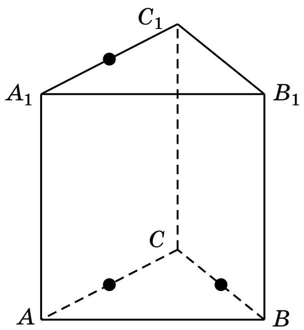
4 Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются вершины A, A_1, середины ребер BC, B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$.



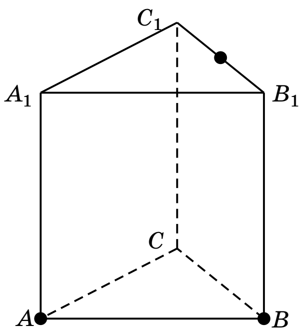
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 34

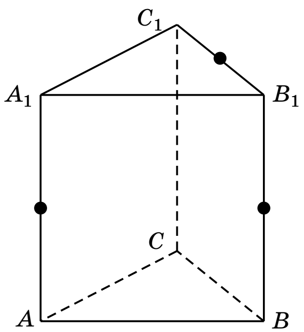
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер AC, BC, A_1C_1.



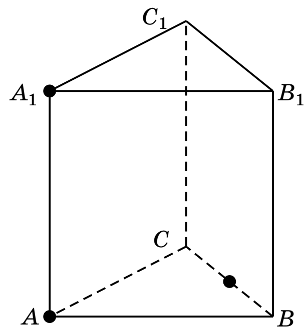
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, B и середину ребра B_1C_1.



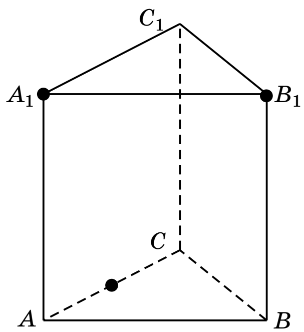
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер AA_1, BB_1 и B_1C_1.



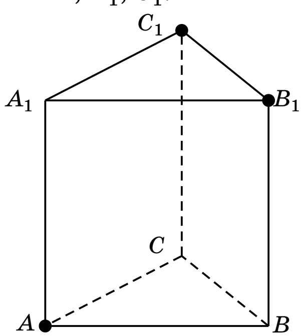
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и середину ребра BC.



5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины A_1, B_1 и середину ребра AC.



6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, B_1, C_1.

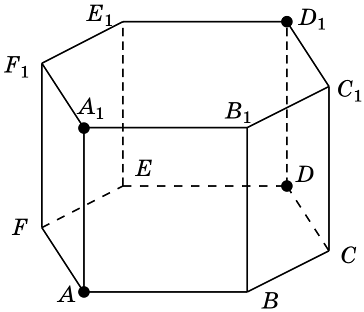


ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 35

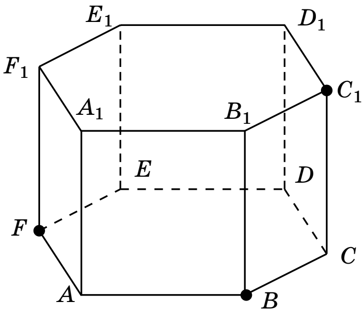
1

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь четырехугольника, проходящего через вершины A, D, A_1, D_1.



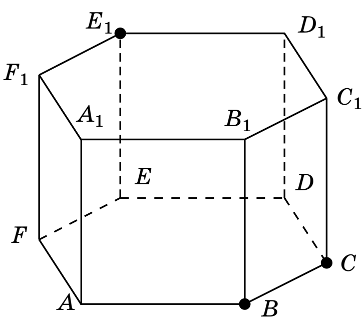
2

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, F и C_1.



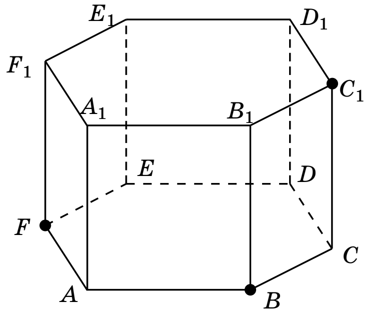
3

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, C и E_1.



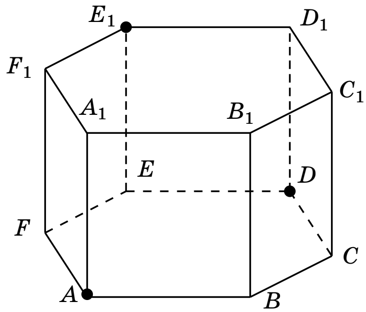
4

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины F, B и C_1.



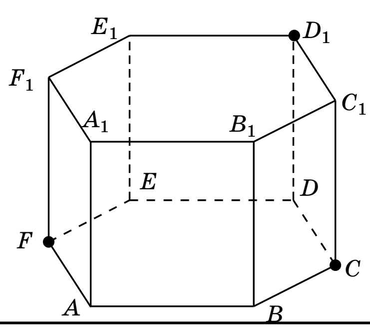
5

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, D и E_1.



6

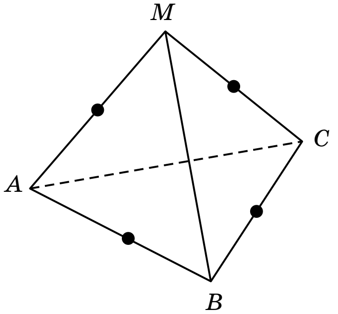
В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины F, C и D_1.



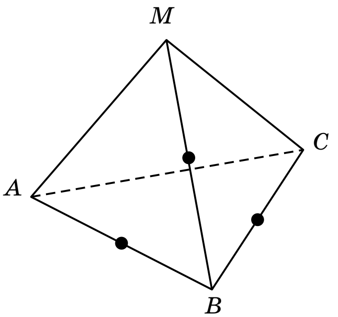
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 36

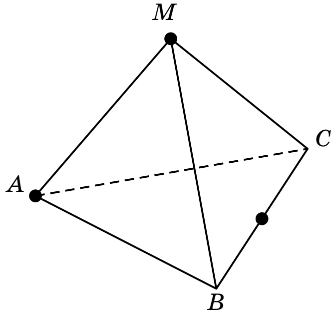
1 В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, вершинами которого являются середины ребер AB, BC, CM, AM.



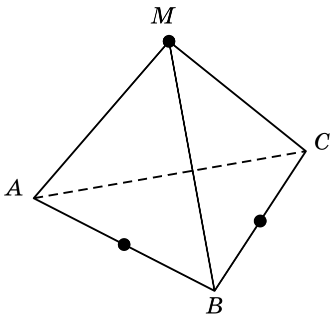
2 В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, вершинами которого являются середины ребер AB, BC и BM.



3 В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, M и середину ребра BC.



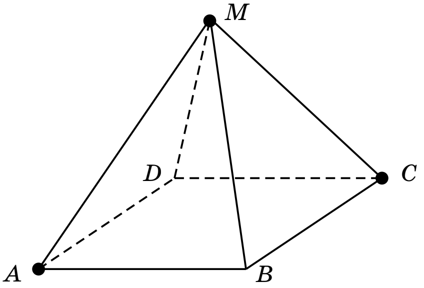
4 В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, проходящего через вершину M и середины ребер AB и BC.



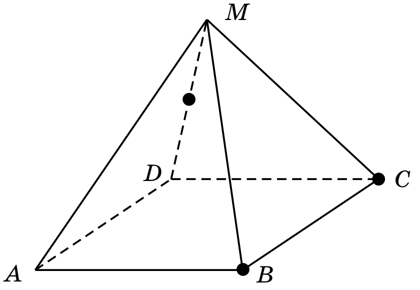
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 37

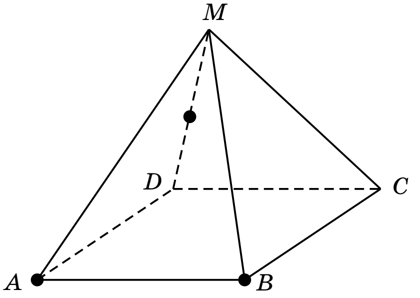
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, вершинами которого являются вершины M, A, C.



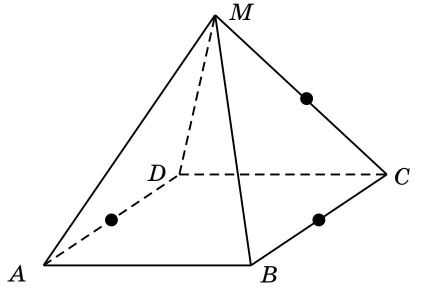
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, C и середину ребра MD.



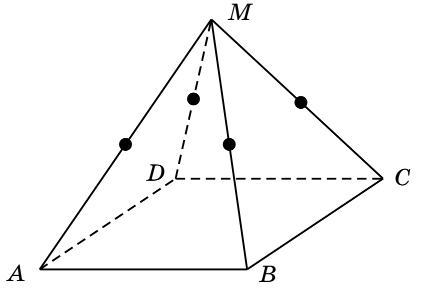
3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, B и середину ребра MD.



4 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер AD, BC и MC.



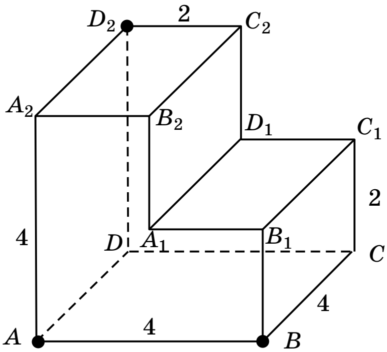
5 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, вершинами которого являются середины ребер MA, MB, MC, MD.



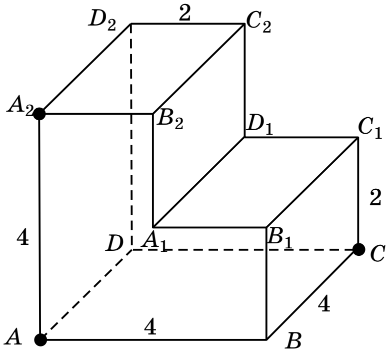
МНОГОГРАННИКИ

Таблица 38

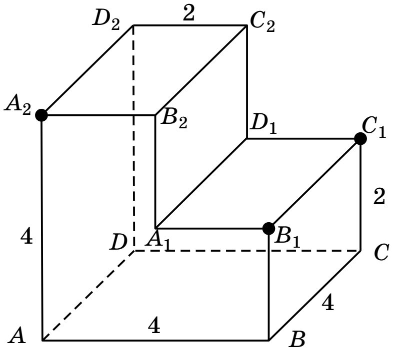
1 Найдите площадь сечения многогранника, проходящего через вершины A, B и D_2. Все двугранные углы прямые.



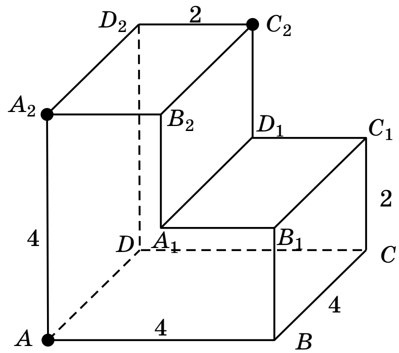
2 Найдите площадь сечения многогранника, проходящего через вершины A, C и A_2. Все двугранные углы прямые.



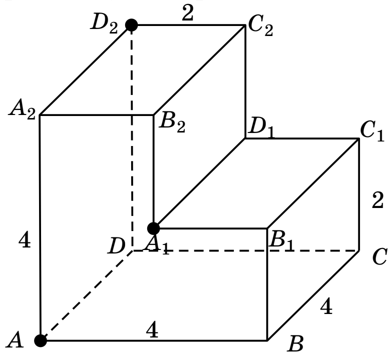
3 Найдите площадь сечения многогранника, проходящего через вершины B_1, C_1 и A_2. Все двугранные углы прямые.



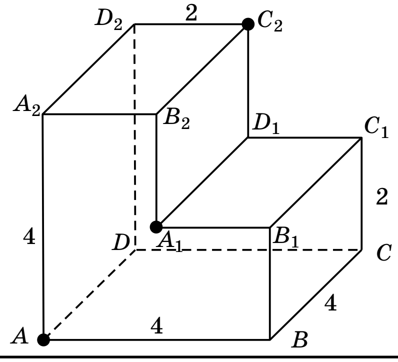
4 Найдите площадь сечения многогранника, проходящего через вершины A, A_2 и C_2. Все двугранные углы прямые.



5 Найдите площадь сечения многогранника, проходящего через вершины A, A_1 и D_2. Все двугранные углы прямые.



6 Найдите площадь сечения многогранника, проходящего через вершины A, A_1 и C_2. Все двугранные углы прямые.

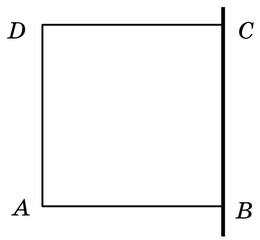


§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур

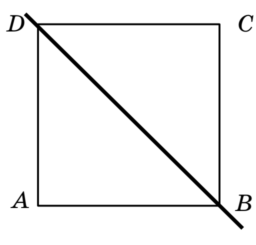
КВАДРАТ

Таблица 39

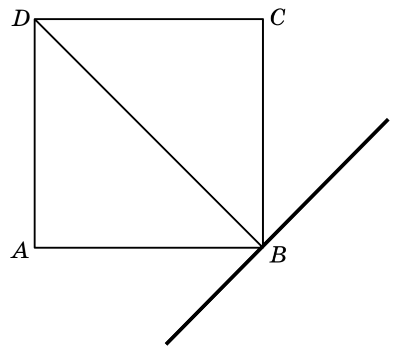
1 Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг прямой BC.



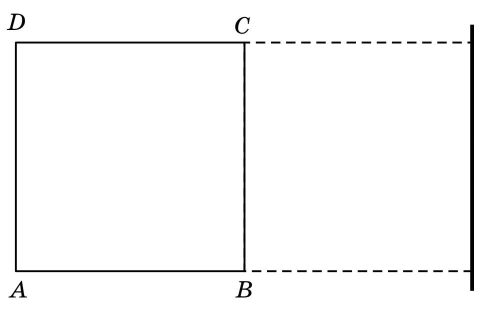
2 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг прямой BD.



3 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец.



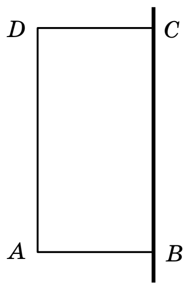
4 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг внешней оси, параллельной его стороне и отстоящей от нее на длину стороны.



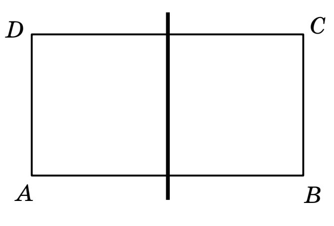
ПРЯМОУГОЛЬНИК

Таблица 40

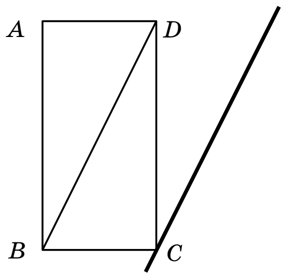
1 Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$ вокруг прямой BC.



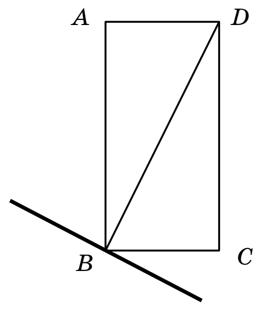
2 Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой, проходящей через середины AB и CD.



3 Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг оси, проходящей через вершину C параллельно диагонали BD.



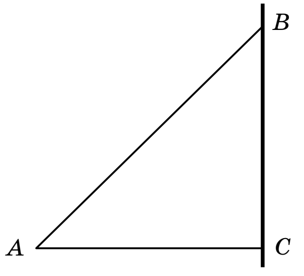
4 Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг перпендикуляра к диагонали BD, проведенного через ее конец B.



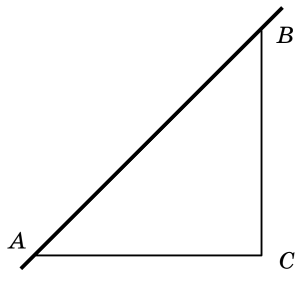
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 41

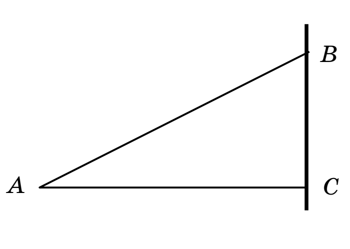
1 Найдите площадь боковой поверхности конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой BC.



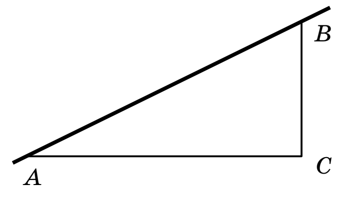
2 Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой AB.



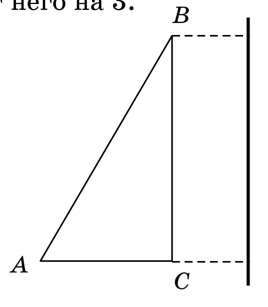
3 Найдите площадь боковой поверхности конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой BC.



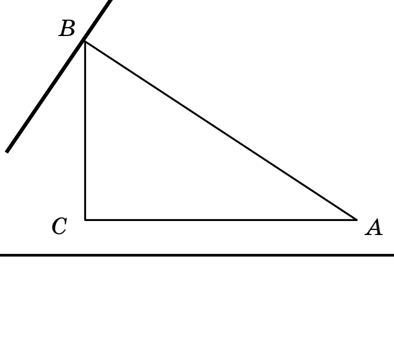
4 Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой AB.



5 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами 5 и 12 вокруг внешней оси, параллельной большему катету и отстоящему от него на 3.



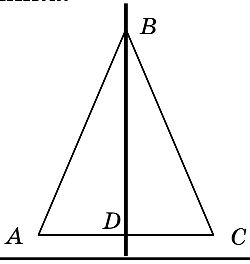
6 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами 15 и 20 вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведенного через вершину большего острого угла B.



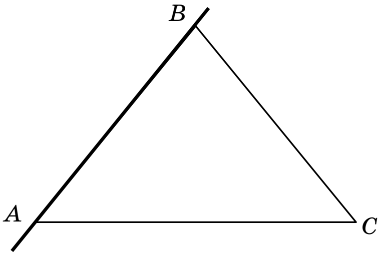
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 42

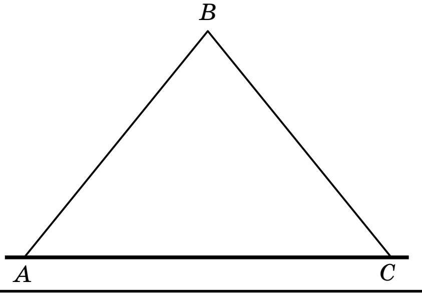
1 Найдите площадь полной поверхности конуса, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 4$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой, содержащей высоту BD этого треугольника.



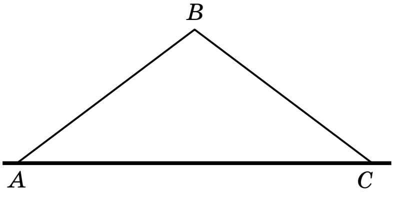
2 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 6$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой AB.



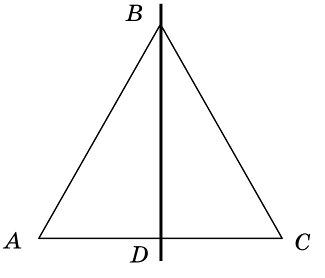
3 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 6$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой AC.



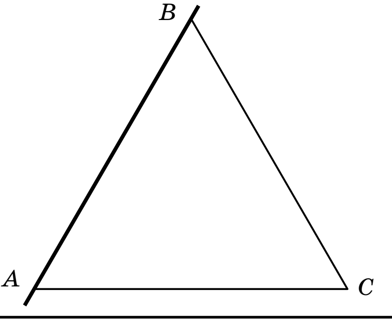
4 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC, у которого боковые стороны равны по 5, а один из углов 120°, вокруг основания AC.



5 Найдите площадь полной поверхности конуса, полученного вращением равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг прямой, содержащей медиану BD.



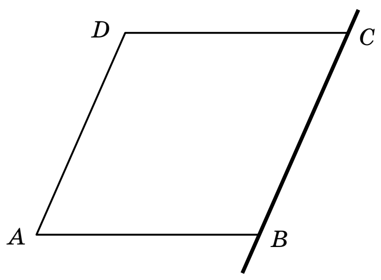
6 Найдите площадь поверхности вращения равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг прямой AB.



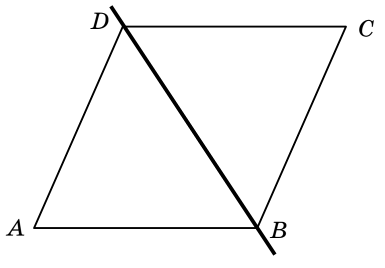
РОМБ

Таблица 43

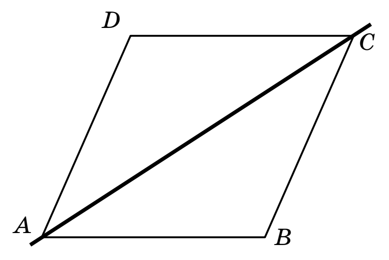
1 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ с площадью, равной 1, вокруг стороны BC.



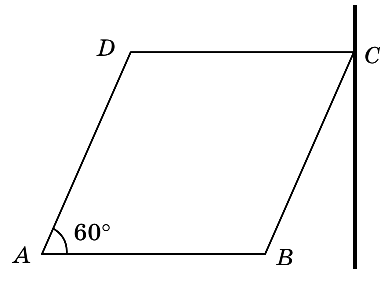
2 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом 60°, вокруг прямой BD.



3 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом 60°, вокруг прямой AC.



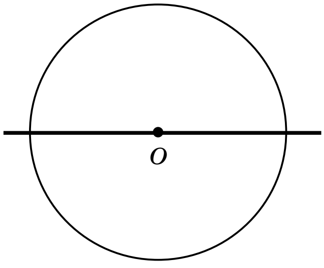
4 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом в 60°, вокруг оси, проведенной через вершину C перпендикулярно к стороне DC.



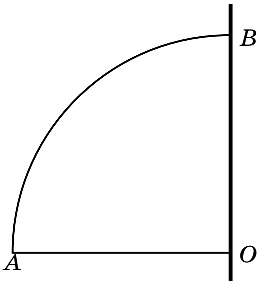
КРУГ И ЕГО ЧАСТИ

Таблица 44

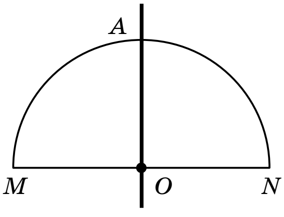
1 Найдите площадь поверхности вращения круга радиуса 1 вокруг прямой, содержащей его диаметр.



3 Найдите площадь поверхности вращения четверти круга радиуса 1 вокруг прямой OB.



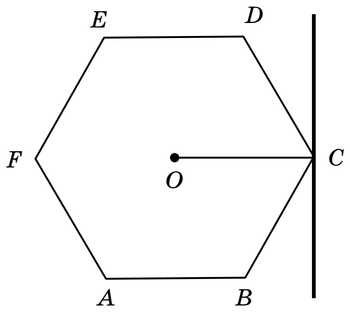
2 Найдите площадь поверхности вращения полукруга радиуса 1 вокруг прямой OA, перпендикулярной диаметру MN.



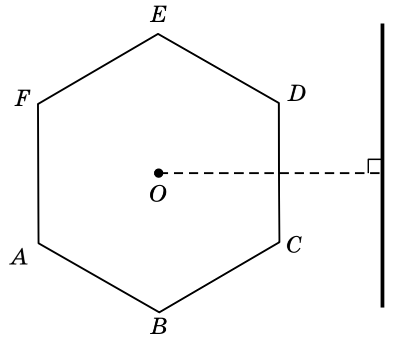
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

Таблица 45

1 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту вершину.



2 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от нее на длину апофемы.

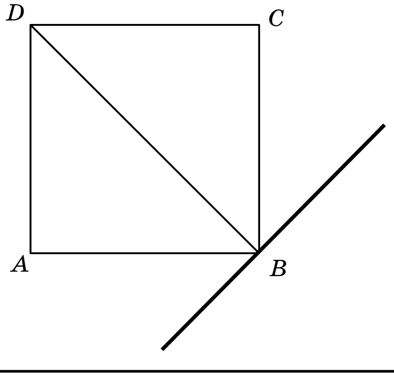


§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур

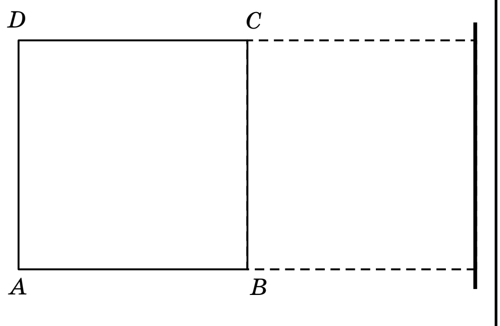
КВАДРАТ

Таблица 46

1 Найдите объем тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец.



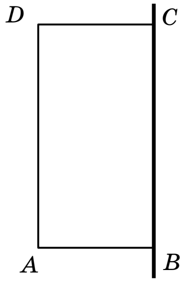
2 Найдите объем тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг внешней оси, параллельной его стороне и отстоящей от нее на длину стороны.



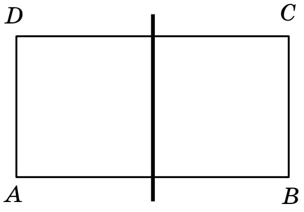
ПРЯМОУГОЛЬНИК

Таблица 47

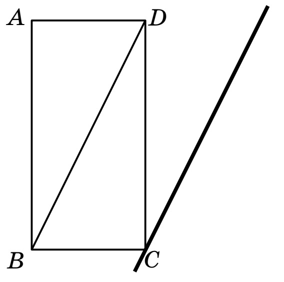
1 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$ вокруг прямой BC.



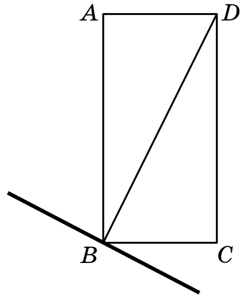
2 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой, проходящей через середины AB и CD.



3 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг оси, проходящей через вершину C параллельно диагонали BD.



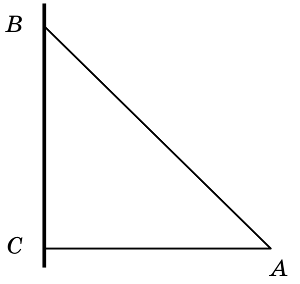
4 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг перпендикуляра к диагонали BD, проведенного через ее конец.



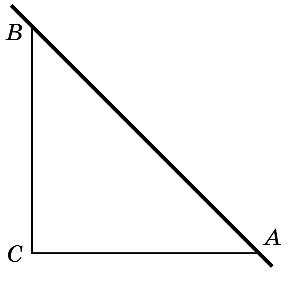
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 48

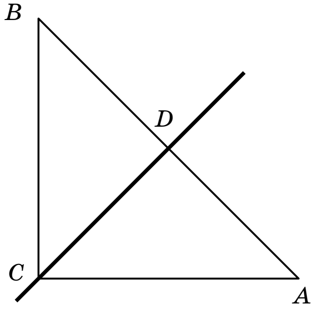
1 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой BC.



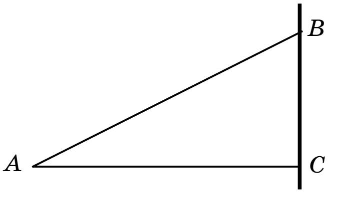
2 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой AB.



3 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой CD, где D — середина AB.



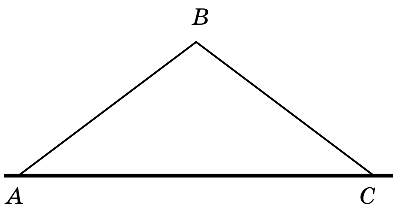
4 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой BC.



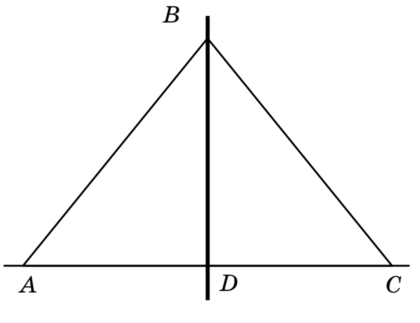
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 49

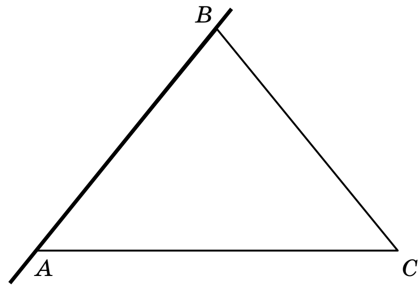
1 Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC, $AB = BC = 1$, $\angle B = 120°$, вокруг прямой AC.



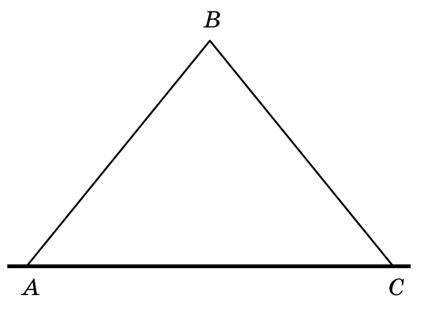
2 Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой, содержащей биссектрису BD этого треугольника.



3 Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой AB.



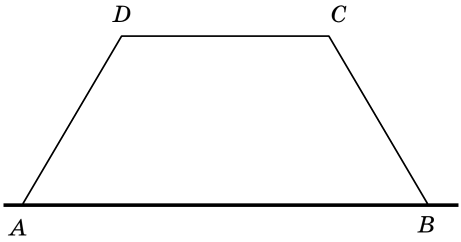
4 Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой AC.



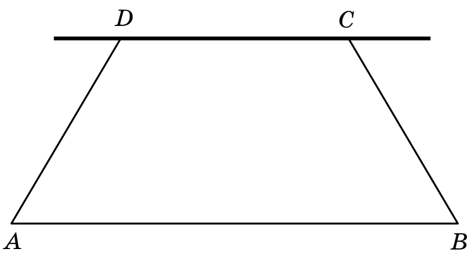
ТРАПЕЦИЯ

Таблица 50

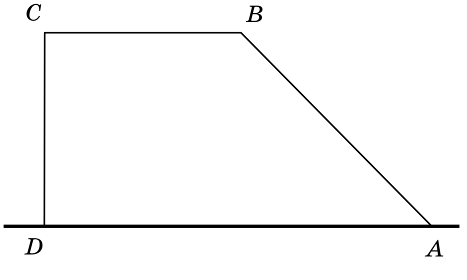
1 Найдите объем тела, полученного вращением трапеции $ABCD$, у которой $AD = DC = BC = 1$, $AB = 2$ вокруг прямой AB.



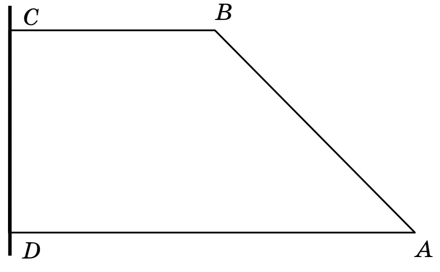
2 Найдите объем тела, полученного вращением трапеции $ABCD$, у которой $AD = DC = BC = 1$, $AB = 2$ вокруг прямой CD.



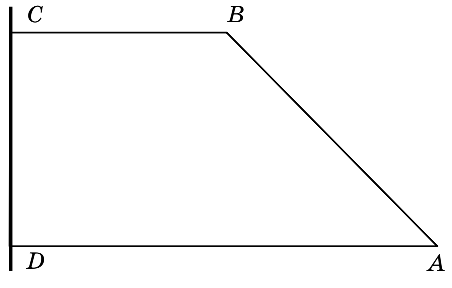
3 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$, вокруг прямой AD.



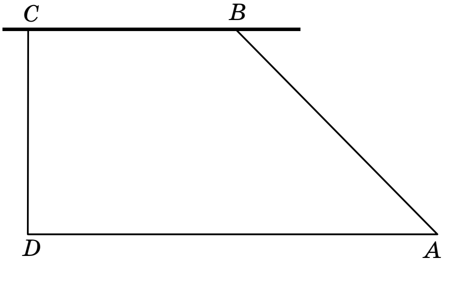
4 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$, вокруг прямой CD.



5 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и острым углом в $45°$, вокруг прямой CD.



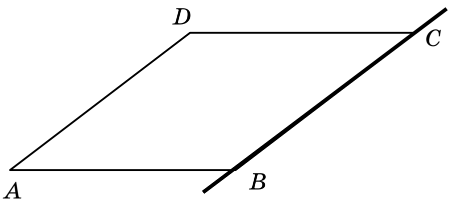
6 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$, вокруг прямой BC.



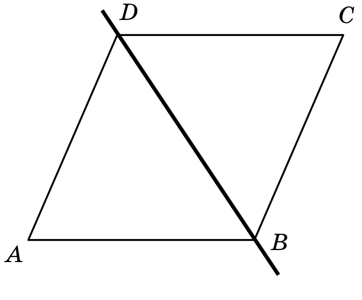
РОМБ

Таблица 51

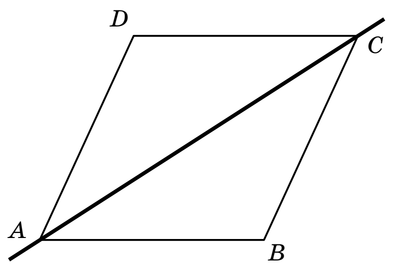
1 Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом 30°, вокруг стороны BC.



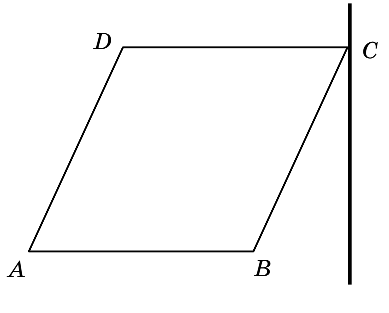
2 Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом 60°, вокруг прямой, содержащей меньшую диагональ BD.



3 Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом в 60°, вокруг прямой, содержащей большую диагональ AC.



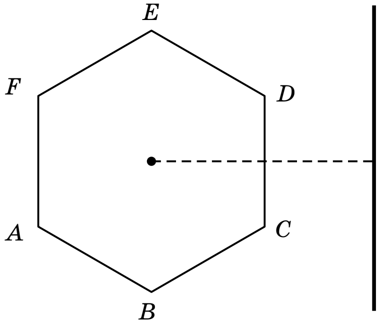
4 Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом в 60°, вокруг оси, проведенной через вершину C перпендикулярно к стороне DC.



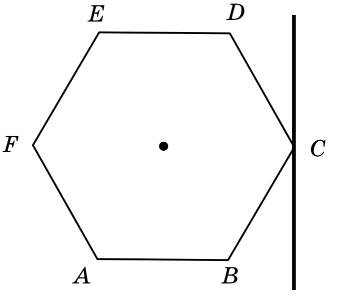
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

Таблица 52

1 Найдите объем тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от нее на длину апофемы.



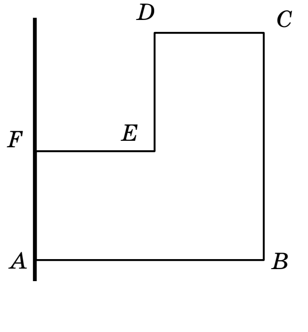
2 Найдите объем тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту вершину.



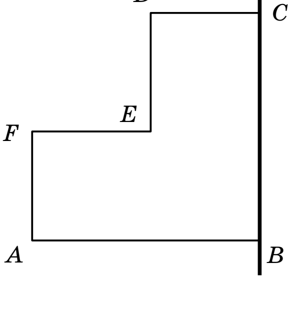
МНОГОУГОЛЬНИК

Таблица 53

1 Найдите объем тела, полученного вращением многоугольника $ABCDEF$, составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой AF.



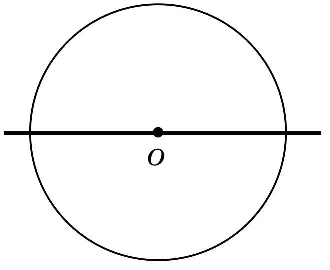
2 Найдите объем тела, полученного вращением многоугольника $ABCDEF$, составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой BC.



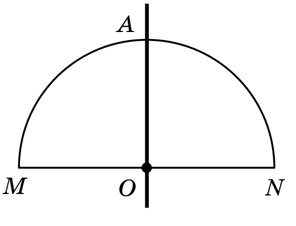
КРУГ И ЕГО ЧАСТИ

Таблица 54

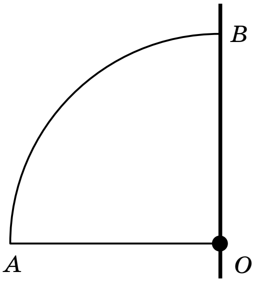
1 Найдите объем тела, полученного вращением круга радиуса 1 вокруг прямой, содержащей его диаметр.



2 Найдите объем тела, полученного вращением полукруга радиуса 1 вокруг прямой OA, перпендикулярной диаметру MN.



3 Найдите объем тела, полученного вращением четверти круга радиуса 1 вокруг прямой OB.

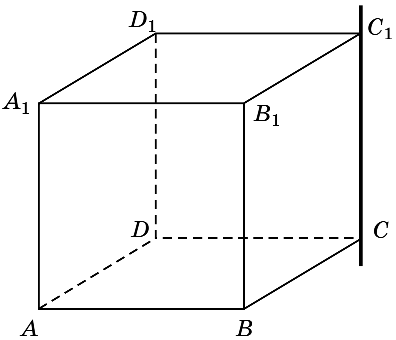


§ 10. Объемы тел вращения многогранников

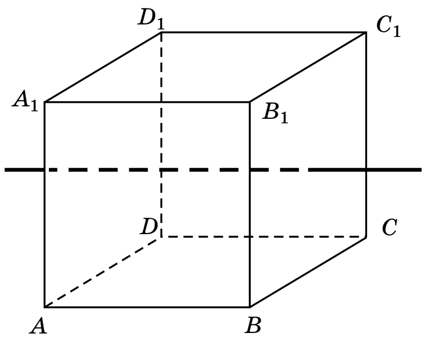
КУБ

Таблица 55

1 Найдите объем тела, полученного вращением единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вокруг прямой CC_1.



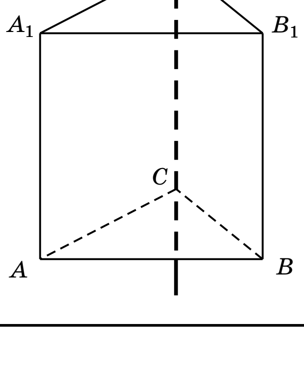
2 Найдите объем тела, полученного вращением единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вокруг прямой, проходящей через центры граней ADD_1A_1 и BCC_1B_1.



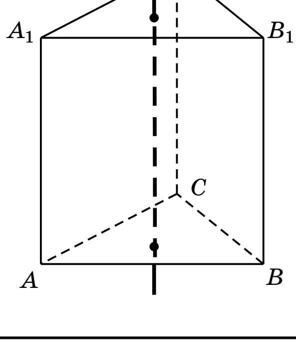
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 56

1 Найдите объем тела, полученного вращением правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой CC_1.



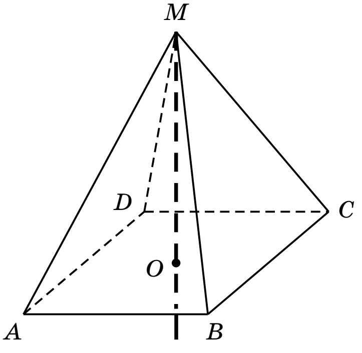
2 Найдите объем тела, полученного вращением правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, проходящей через центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$.



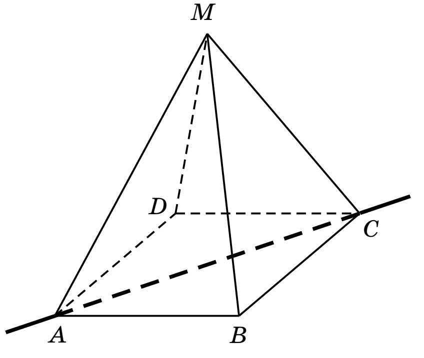
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 57

1 Найдите объем тела, полученного вращением правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, содержащей высоту MO пирамиды.



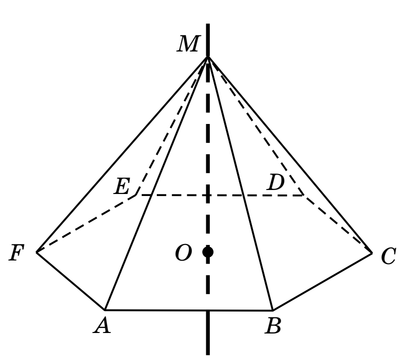
2 Найдите объем тела, полученного вращением правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, содержащей диагональ основания AC.



ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 58

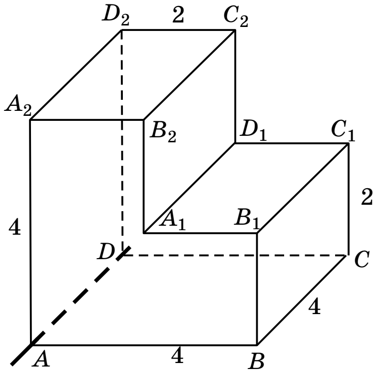
1 Найдите объем тела, полученного вращением правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, вокруг прямой, содержащей высоту MO.



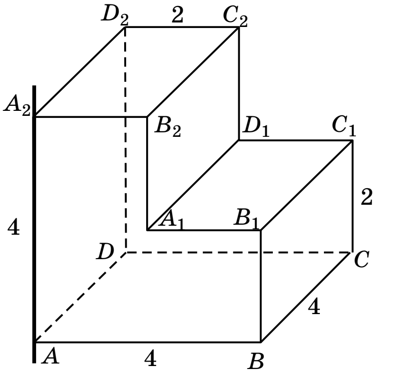
МНОГОГРАННИКИ

Таблица 59

1 Найдите объем тела, полученного вращением многогранника вокруг прямой AD. Все двугранные углы прямые.



2 Найдите объем тела, полученного вращением многогранника вокруг прямой AA_2. Все двугранные углы прямые.



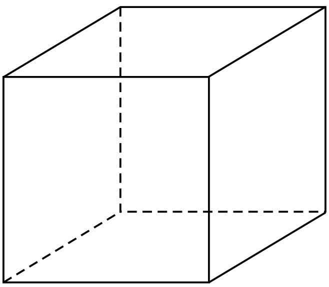
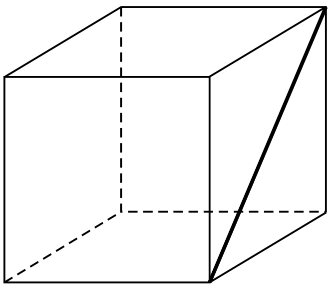
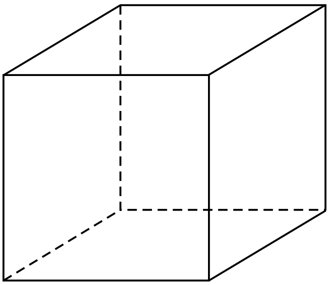
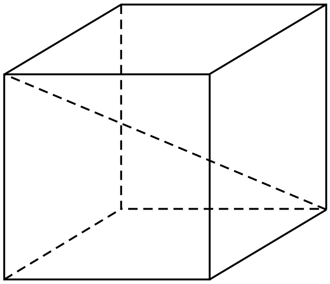
Раздел V

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 11. Многогранники

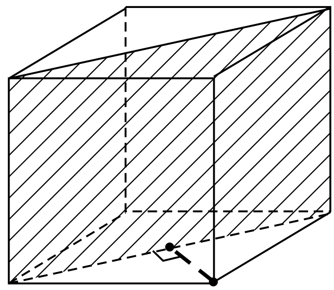
КУБ

Таблица 60

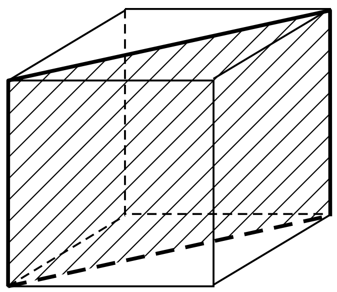
1 Площадь поверхности куба равна 150. Найдите его объем. 	**3** Площадь полной поверхности куба равна 48. Найдите длину диагонали грани куба. 
2 Площадь поверхности куба равна 96. Найдите ребро куба. 	**4** Диагональ куба равна 18. Найдите площадь его одной грани. 

Окончание табл. 60

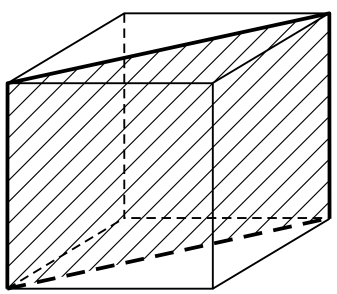
5 Ребро куба равно $5\sqrt{2}$. Найдите расстояние от плоскости диагонального сечения до непересекающего его ребра.



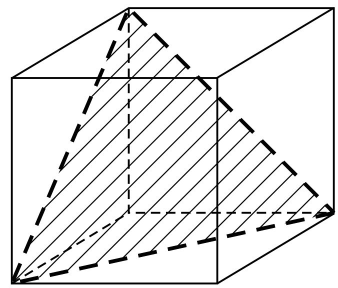
6 Найдите площадь диагонального сечения куба, объем которого равен $4\sqrt[4]{2}$.



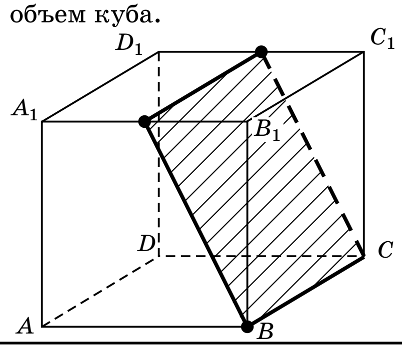
7 Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагонали верхнего и нижнего оснований, равна $16\sqrt{2}$. Найдите длину ребра куба.



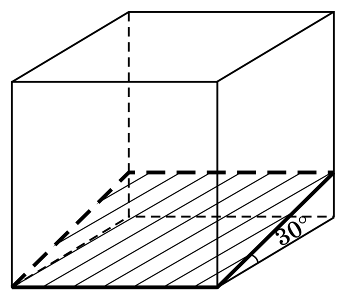
8 Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через три несмежные вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.



9 В кубе $A...D_1$ через середины ребер A_1B_1, D_1C_1 и вершину B проведено сечение, площадь которого равна $32\sqrt{5}$. Найдите объем куба.



10 В кубе через сторону основания проведено сечение под углом $30°$ к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно $7\sqrt[4]{3}$.

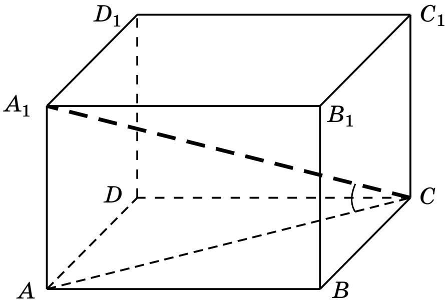


ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ И ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ

Таблица 61

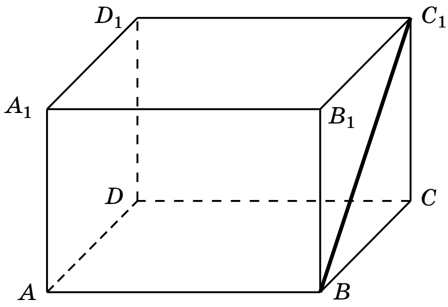
1

Найдите квадрат расстояния между вершинами A_1 и C прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$, если $AB = 6$, $BC = 3$, $AA_1 = 4$.



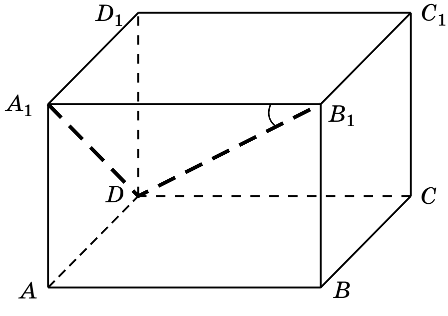
2

Найдите расстояние между вершинами B и C_1 прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$, если $AB = 6$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.



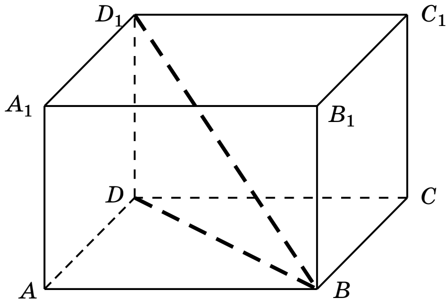
3

В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ найдите $\angle DB_1A_1$, если известно, что $AB = 13$, $BC = 5$, $AA_1 = 12$.



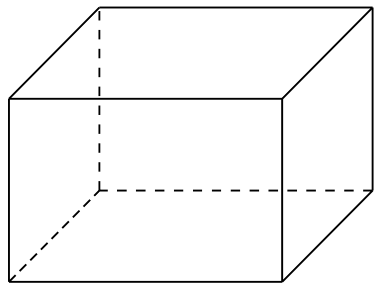
4

В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ найдите $\angle DBD_1$, если известно, что $AB = 13$, $BC = 5$, $AA_1 = 12$.



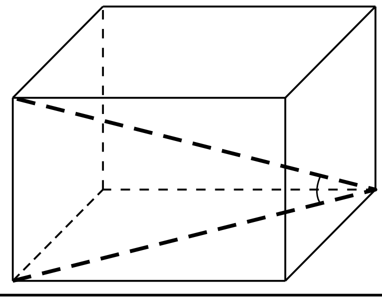
5

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 6 и 8. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 208. Найдите длину третьего ребра, выходящего из той же вершины.



6

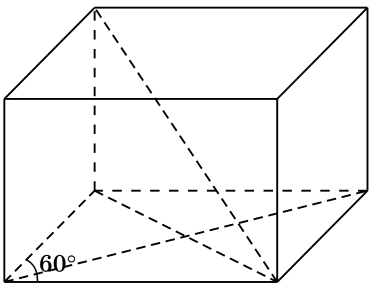
Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен 0,8. Определите полную поверхность параллелепипеда.



Окончание табл. 61

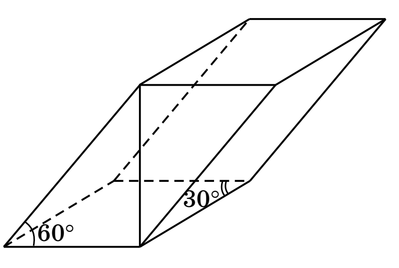
7

В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 и 1, острый угол между ними равен 60°. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



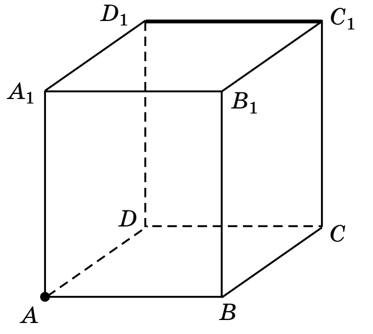
8

Основанием параллелепипеда служит ромб с острым углом 30°. Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите сторону основания, если полная поверхность параллелепипеда равна $4\sqrt{3}$.



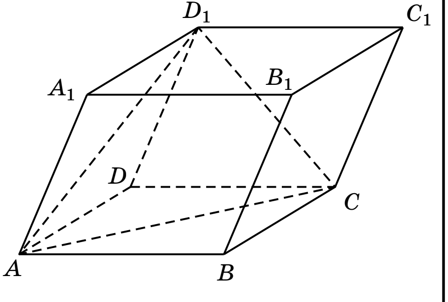
9

Основанием прямого параллелепипеда $A...D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60°. Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.



10

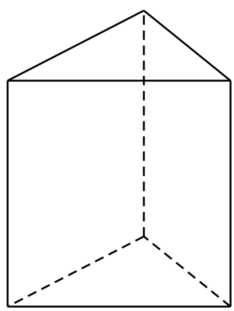
Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 18. Найдите объем треугольной пирамиды D_1ADC.



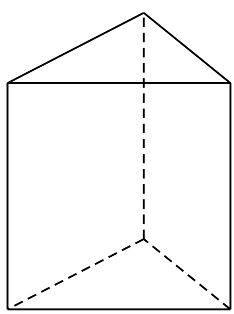
ПРАВИЛЬНАЯ И ПРЯМАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМЫ

Таблица 62

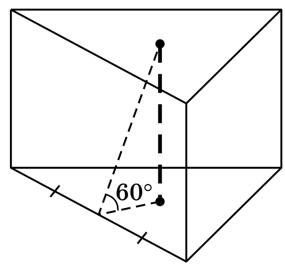
1 Объем правильной треугольной призмы равен $25\sqrt{3}$. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен $5/\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы.



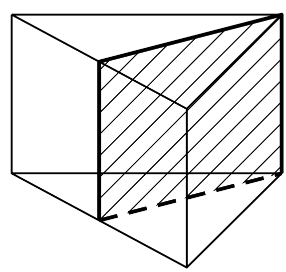
2 Объем правильной треугольной призмы равен $72\sqrt{3}$, ее высота равна 8. Найдите сторону основания.



3 Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна 6. Найдите высоту призмы, если прямая, проходящая через центр верхнего основания и середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60°.

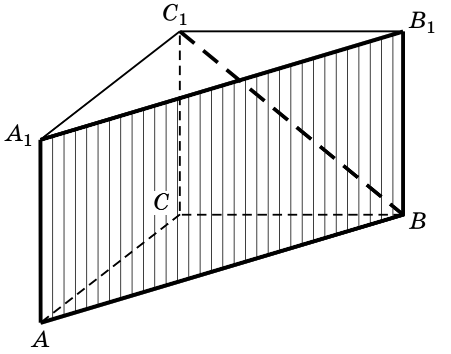


4 Объем правильной треугольной призмы равен 3. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и равного ему высоту основания.

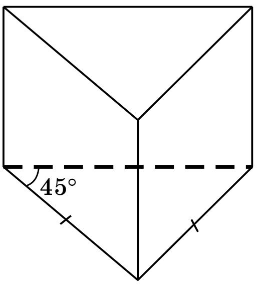


Окончание табл. 62

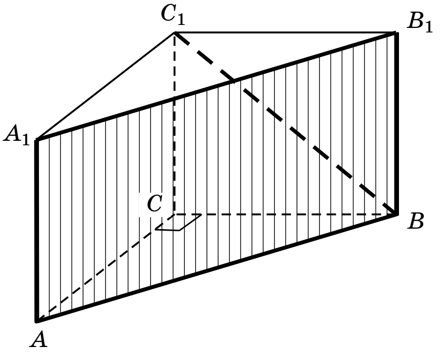
5 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямой C_1B и плоскостью ABB_1.



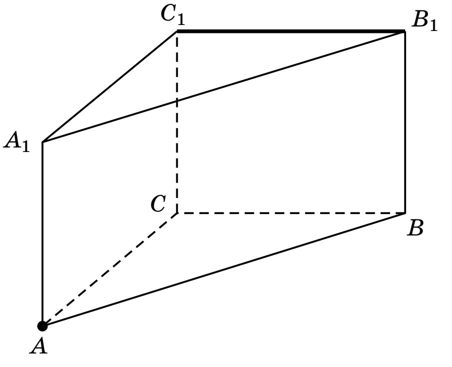
7 Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом 45° при основании. Найдите основание треугольника, если объем призмы равен $\sqrt{2}-1$, а боковая поверхность равна сумме площадей оснований.



6 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, $AB = 10$, $BC = 2\sqrt{5}$, высота призмы равна $2\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью ABB_1.



8 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, боковая сторона которого равна $8\sqrt{3}$, а $\angle ACB = 120°$. Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1, если боковое ребро $AA_1 = 5$.

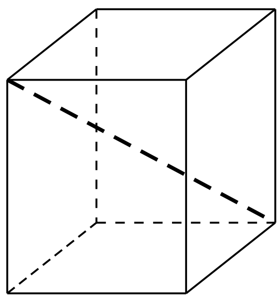


ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 63

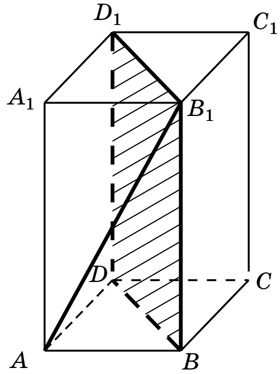
1

В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144, а высота — 14. Определите диагональ этой призмы.



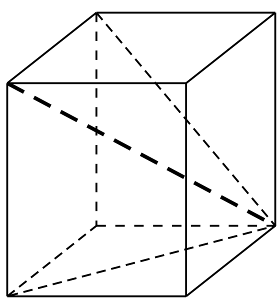
3

В правильной четырехугольной призме $A...D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.



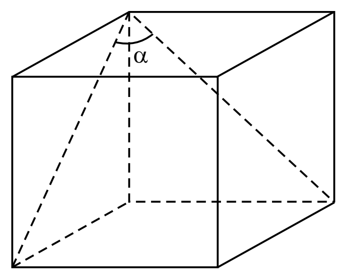
2

Определите диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8, а диагональ боковой грани равна 7.



4

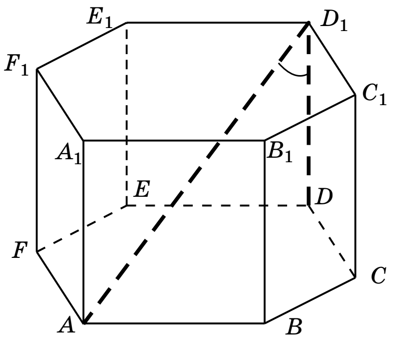
Объем правильной четырехугольной призмы равен 1, а $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, где α — угол между диагоналями двух смежных боковых граней. Найдите сторону основания призмы.



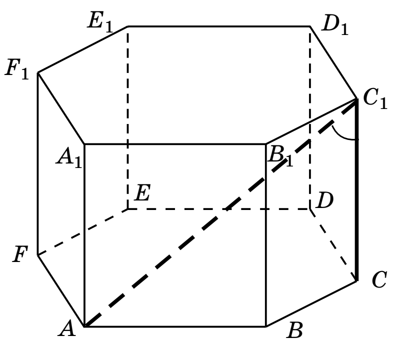
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 64

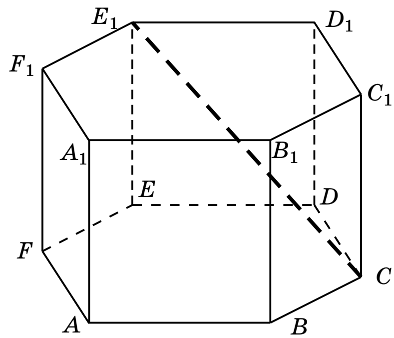
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{13}$, найдите тангенс угла AD_1D.



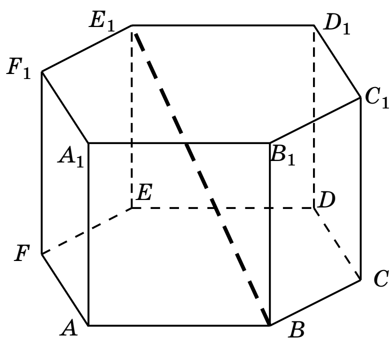
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{7}$, найдите угол AC_1C.



3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 13, найдите расстояние между точками C и E_1.



4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $2\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками B и E_1.

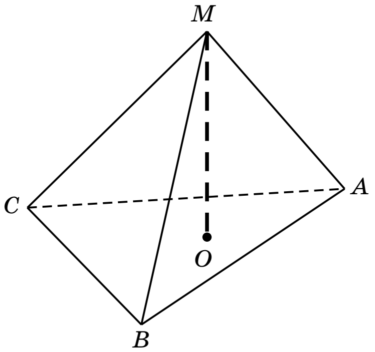


ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 65

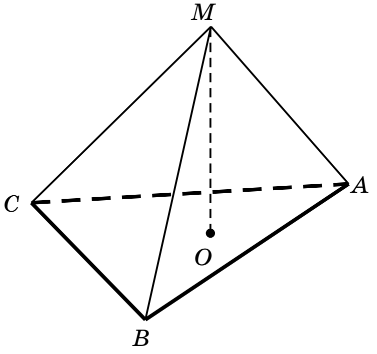
1

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ площадь основания равна 13, объем пирамиды равен 91. Найдите длину высоты MO.



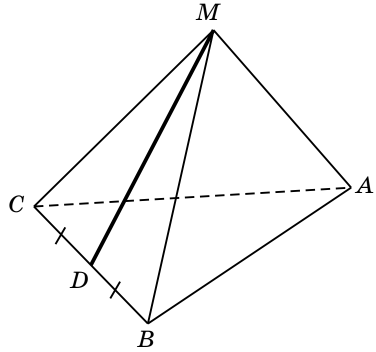
2

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ объем равен 72, а высота MO равна 12. Найдите площадь основания пирамиды.



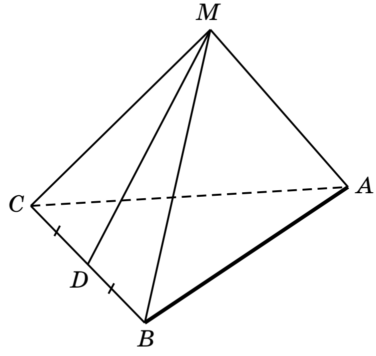
3

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ D — середина ребра BC. Известно, что $AB = 8$, а площадь боковой поверхности равна 96. Найдите длину апофемы MD.



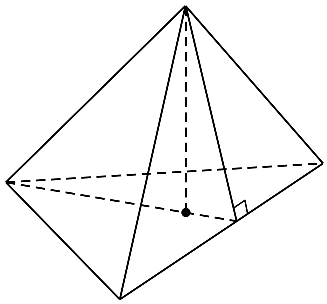
4

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ D — середина BC. Известно, что $MD = 12$, а площадь боковой поверхности равна 90. Найдите длину отрезка AB.

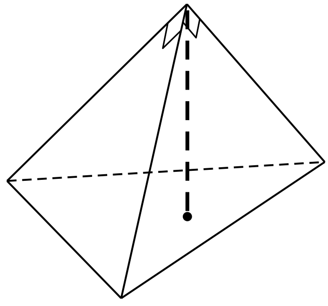


Продолжение табл. 65

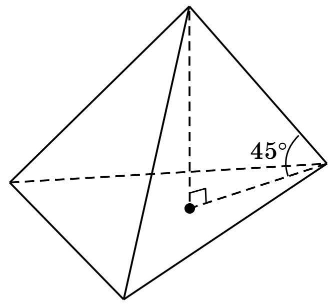
5 Определите объем правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника в основании пирамиды равна 1, а апофема равна 2.



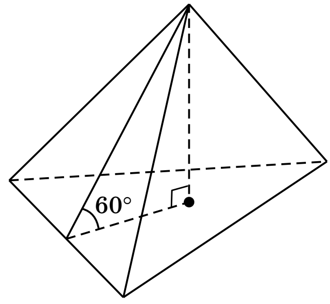
6 Определите высоту правильной треугольной пирамиды, объем которой равен $4\sqrt{3}$, если все плоские углы при вершине прямые.



7 Высота правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол $45°$. Найдите объем пирамиды.

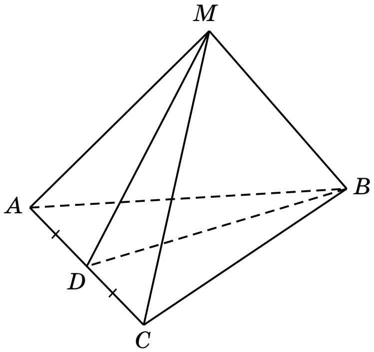


8 Высота правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объем пирамиды.

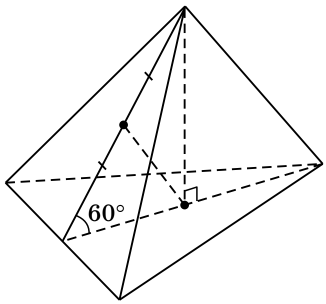


Окончание табл. 65

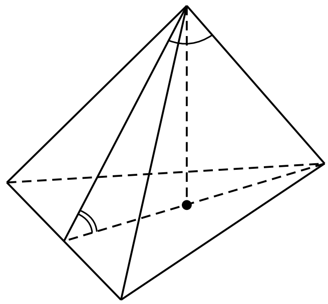
9 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ D — середина AB, $AB = 9$, $MD = 6$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



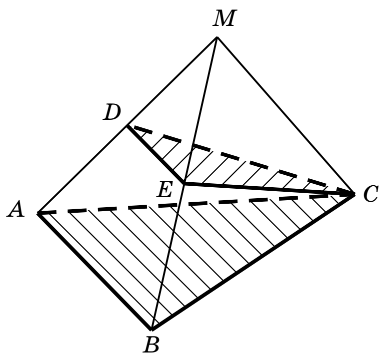
10 Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен 60°. Найдите боковую поверхность пирамиды, если расстояние от центра основания до середины апофемы боковой грани равно 1.



11 Боковая грань правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен 2. Найдите тангенс угла между боковым ребром и апофемой противолежащей грани.



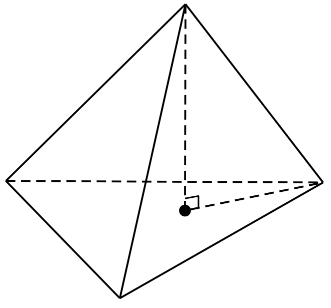
12 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC, точка D — середина ребра MA, точка E — середина ребра MB. Найдите угол между плоскостями CDE и ABC, если $MC = 18$, $AB = 12$.



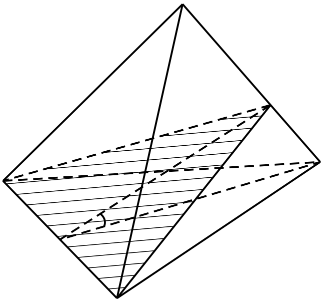
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 66

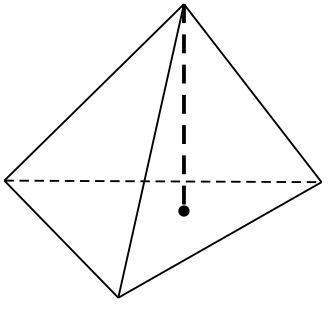
1 Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен 1.



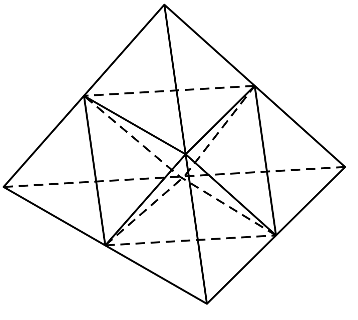
3 В правильном тетраэдре через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении 2 : 3, считая от основания. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания.



2 Полная поверхность правильного тетраэдра равна $24\sqrt{3}$. Определите высоту тетраэдра.



4 Площадь поверхности тетраэдра равна 6,8. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.

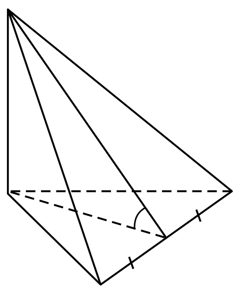


ТРЕУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 67

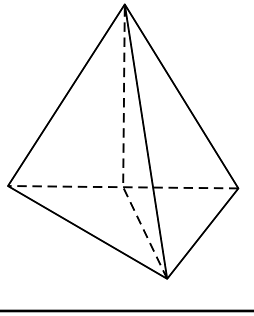
1

Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания. Найдите угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания как 13 : 3.



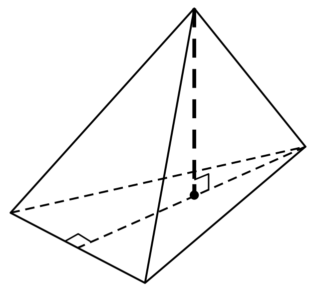
2

Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник. Одна из боковых граней — также равносторонний треугольник и перпендикулярна плоскости основания. Определите сторону основания пирамиды, если полная поверхность пирамиды равна $\sqrt{5}+2$.



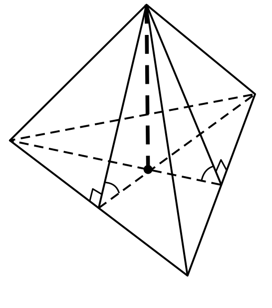
3

Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6 и высота 9; боковые ребра равны между собой, и каждое равно 13. Определите высоту пирамиды.



4

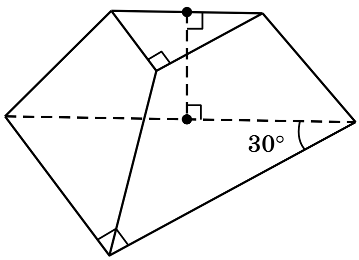
Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12, а боковая сторона — 10. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определите высоту пирамиды.



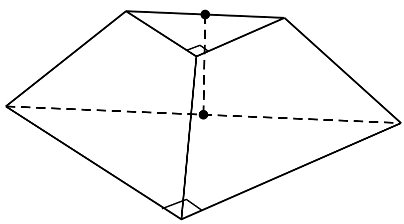
ТРЕУГОЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Таблица 68

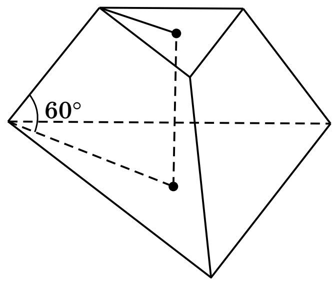
1 Основаниями усеченной пирамиды служат прямоугольные треугольники с острым углом 30°. Гипотенузы треугольников равны соответственно 6 и 4. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{3}$.



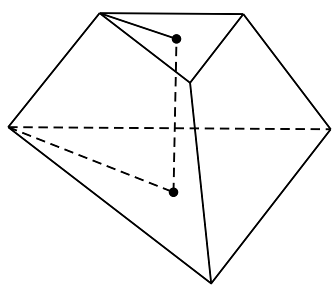
2 Основаниями усеченной пирамиды служат равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны 7 и 5. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 12.



3 Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 2 и 1, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем усеченной пирамиды.



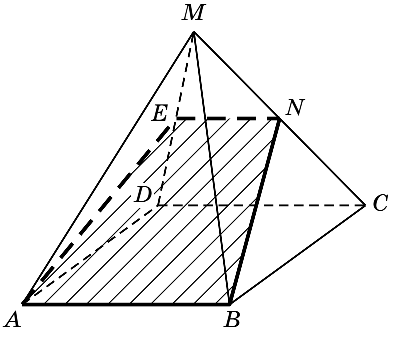
4 Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 и 12, высота равна 1. Найдите боковую поверхность.



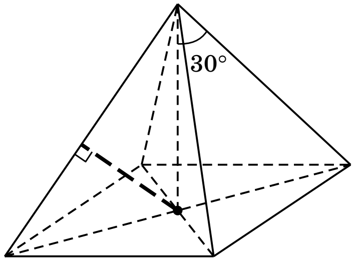
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 69

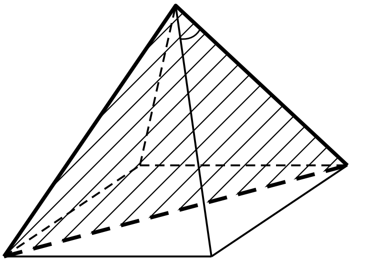
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро $MA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABN, где N — середина ребра MC.



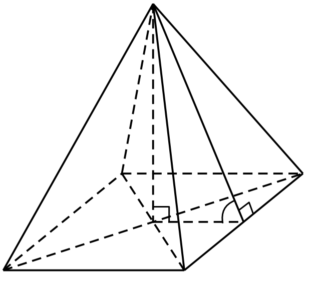
2 В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 1, а плоский угол при вершине пирамиды равен 30°. Найдите расстояние от центра основания пирамиды до ее бокового ребра.



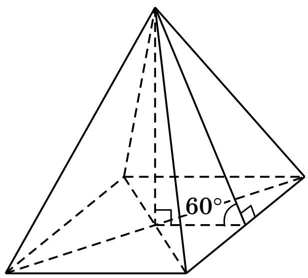
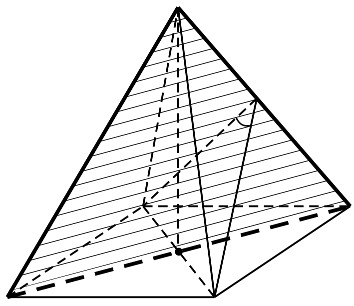
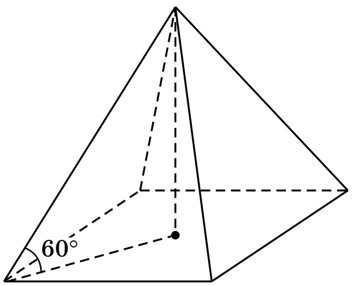
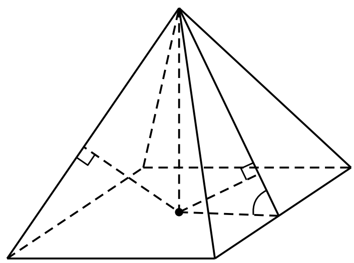
3 В правильной четырехугольной пирамиде косинус плоского угла при вершине равен 16/25. Найдите отношение площади диагонального сечения к площади ее основания.



4 Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 10. Тангенс двугранного угла при основании равен 4/3. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.



Окончание табл. 69

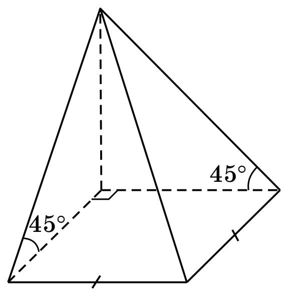
5 Апофема боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$, а угол между апофемой боковой грани и плоскостью основания — $60°$. Найдите объем пирамиды. 	**7** В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен $120°$. Найдите площадь диагонального сечения, если боковая поверхность равна 4. 
6 Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 1 и наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Найдите объем пирамиды. 	**8** В правильной четырехугольной пирамиде расстояния от центра основания до боковой грани и до бокового ребра равны соответственно $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Найдите двугранный угол при основании пирамиды. 

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 70

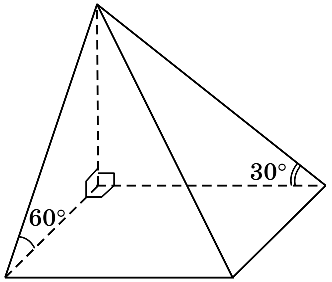
1

В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом $45°$. Найдите объем пирамиды, если длина среднего по величине ребра равна 1.



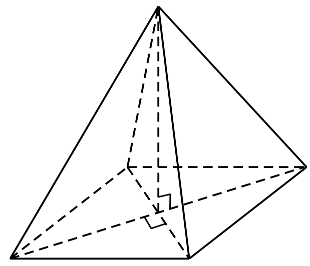
2

В основании пирамиды лежит прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами $30°$ и $60°$. Найдите площадь основания пирамиды, если объем равен 9.



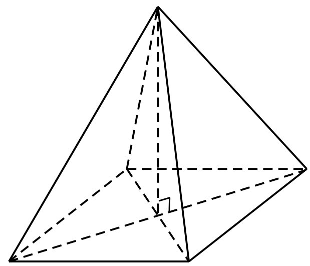
3

Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями, равными 6 и 8; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды, и равна 1. Определите боковую поверхность пирамиды.



4

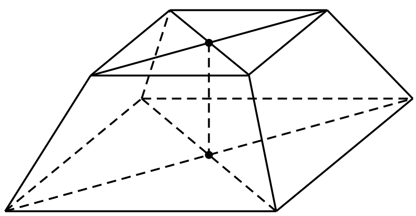
Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 20 и 36, а площадь равна 360, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12. Определите боковую поверхность пирамиды.



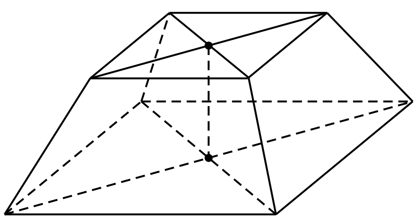
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Таблица 71

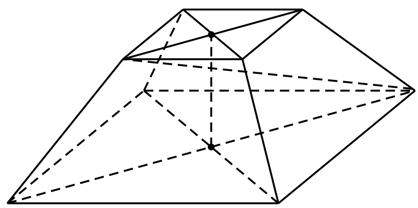
1 Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 5, ребро усеченной пирамиды равно $\sqrt{17}$. Найдите площадь полной поверхности.



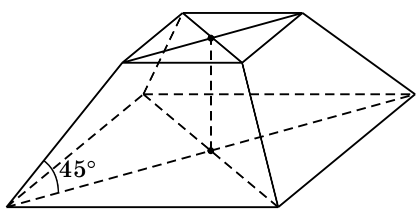
2 Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 1. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 3.



3 Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18, а длины сторон оснований равны 14 и 10.



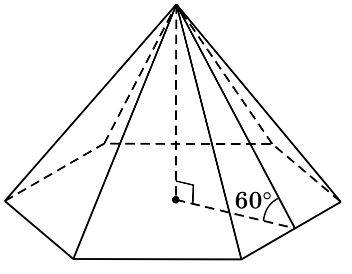
4 Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 3, сторона большего основания равна $9\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро составляет с основанием угол 45°.



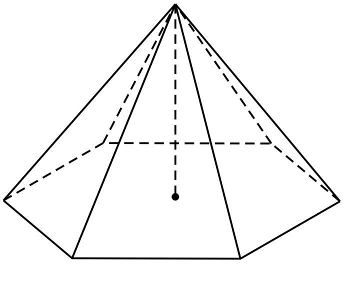
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 72

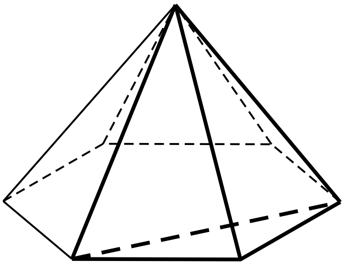
1 В правильной шестиугольной пирамиде апофема равна 1, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.



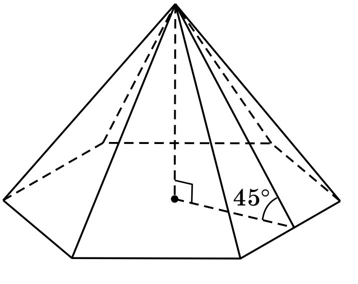
2 Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой равна 1, а боковое ребро равно 2.



3 Объем треугольной пирамиды, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



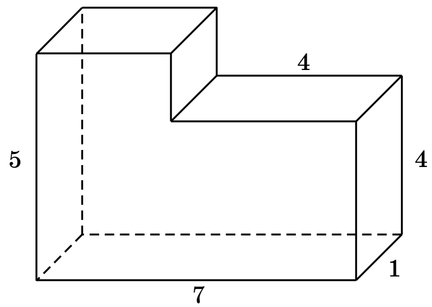
4 Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 8, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.



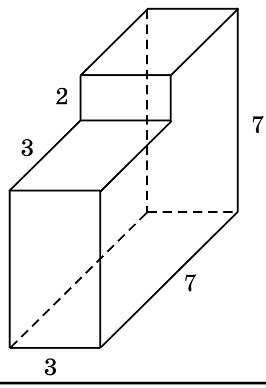
МНОГОГРАННИКИ

Таблица 73

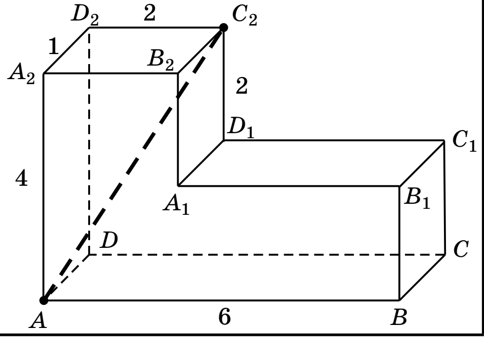
1 Найдите объем многогранника (все двугранные углы прямые).



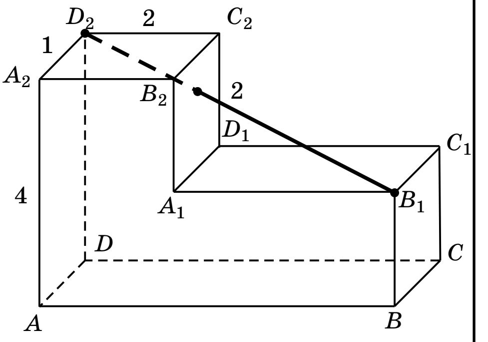
2 Найдите объем многогранника (все двугранные углы прямые).



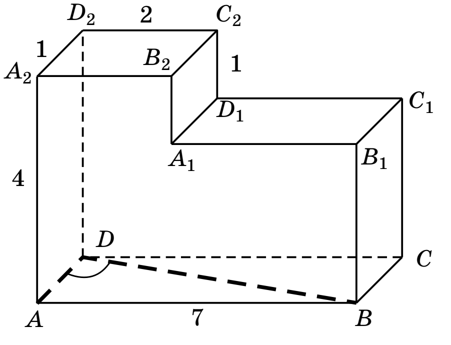
3 Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника. Все двугранные углы прямые.



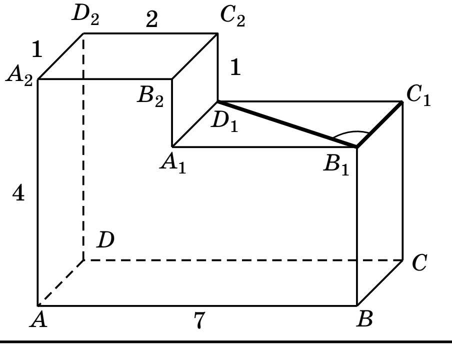
4 Найдите квадрат расстояния между вершинами B_1 и D_2 многогранника. Все двугранные углы прямые.



5 Найдите $\operatorname{tg} \angle ADB$ многогранника. Все двугранные углы прямые.



6 Найдите $\operatorname{tg} \angle D_1B_1C_1$ многогранника. Все двугранные углы прямые.

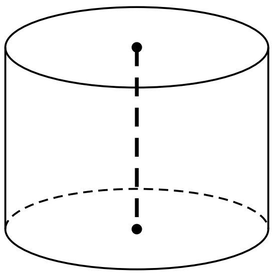


§ 12. Фигуры вращения

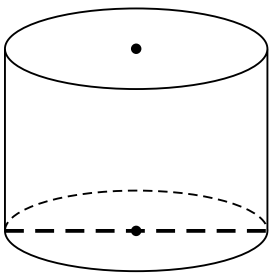
ЦИЛИНДР

Таблица 74

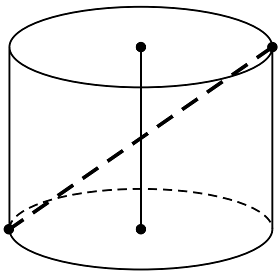
1 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 81π, а диаметр основания — 9. Найдите высоту цилиндра.



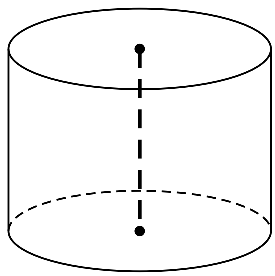
2 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 20π, а высота — 4. Найдите диаметр основания.



3 Объем цилиндра равен $8\pi\sqrt{5}$, а высота — $2\sqrt{5}$. Найдите диагональ осевого сечения.

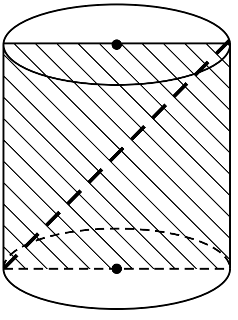


4 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его объем равен 48π. Найдите его высоту.

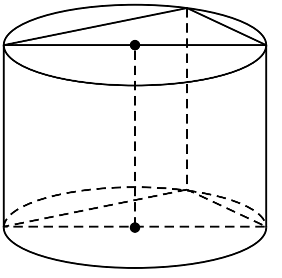


Окончание табл. 74

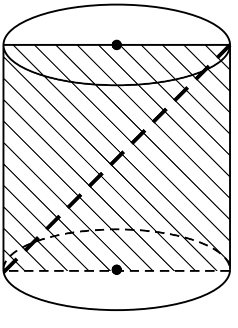
5 Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $6\sqrt[6]{2/\pi^2}$. Найдите объем цилиндра.



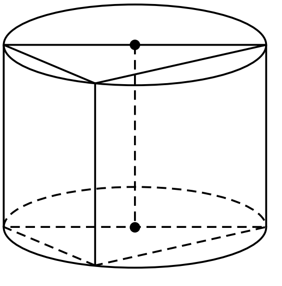
7 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $7/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



6 Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $\sqrt[3]{72\sqrt{2}/\pi}$. Найдите объем цилиндра.



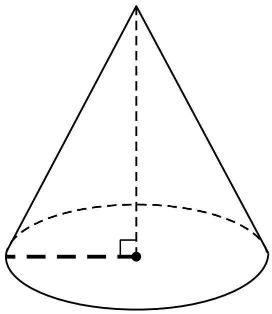
8 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 12 и 5. Боковые ребра равны $16/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



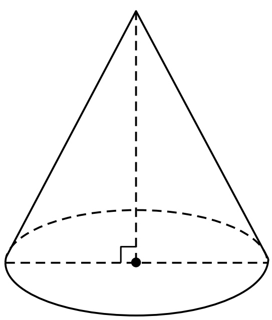
КОНУС

Таблица 75

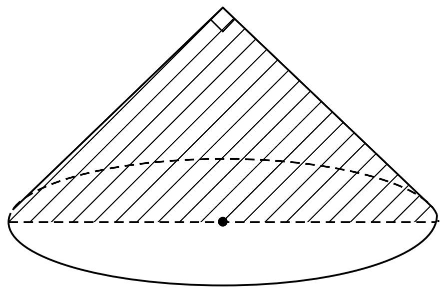
1 Объем конуса равен $2\pi^2/3$, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Найдите радиус основания конуса.



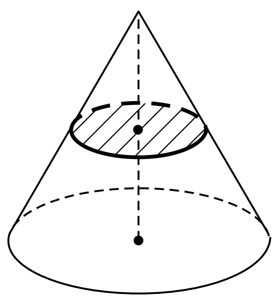
2 Разность между образующей и высотой конуса равна 1, а угол между ними равен 60°. Найдите объем конуса.



3 Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь его равна 9. Найдите объем конуса.

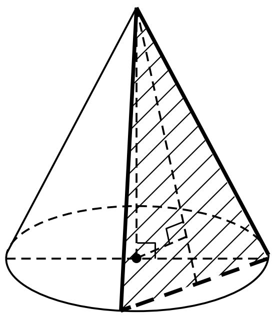


4 Объем конуса равен 24. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

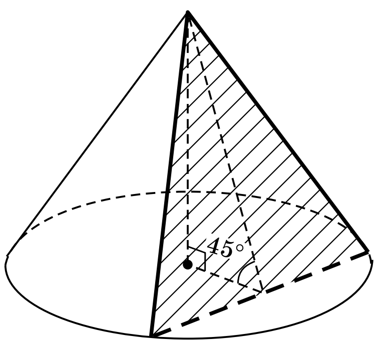


Окончание табл. 75

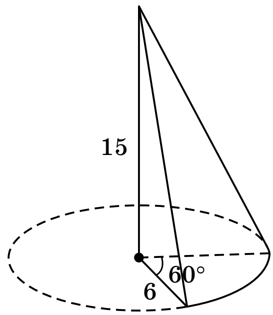
5 Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12.



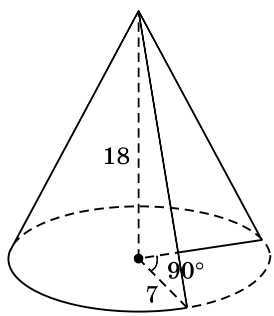
6 Через вершину конуса под углом в 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10. Определите площадь сечения.



7 Найдите объем V части конуса. В ответе укажите значение V/π.



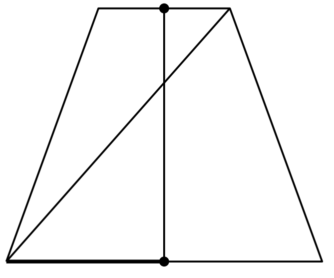
8 Найдите объем V части конуса. В ответе укажите значение V/π.



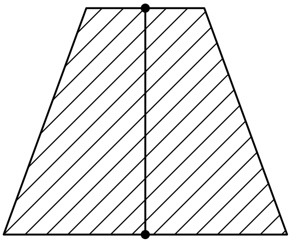
УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Таблица 76

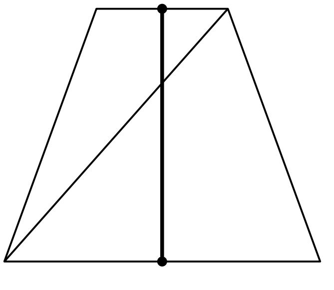
1 В усеченном конусе диагональ осевого сечения равна 10, радиус меньшего основания 3, высота 10. Найдите радиус большего основания.



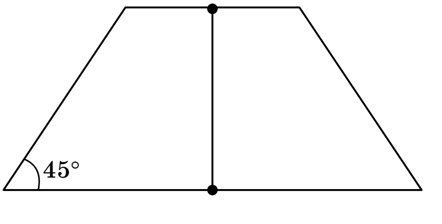
3 Радиус одного основания усеченного конуса вдвое больше другого; боковая поверхность равна сумме площадей оснований; площадь осевого сечения равна 36. Найдите объем.



2 В усеченном конусе диагональ осевого сечения равна 10, радиусы оснований 2 и 4. Найдите высоту конуса.



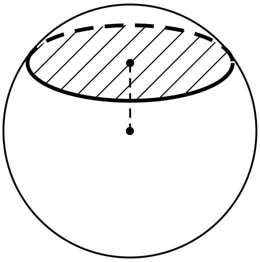
4 Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найдите объем.



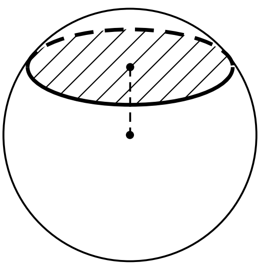
ШАР

Таблица 77

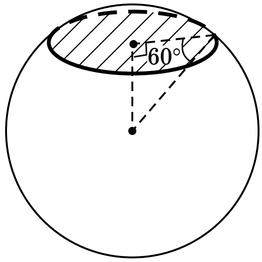
1 Площадь поверхности шара 64. На расстоянии $3/2\sqrt{\pi}$ от центра шара проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.



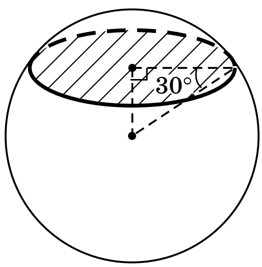
2 Площадь поверхности шара равна $37/\pi$. На расстоянии $1/2\pi$ от центра шара проведена плоскость. Найдите длину полученной в сечении окружности.



3 Дан шар радиуса $R = 8/\sqrt{\pi}$. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.

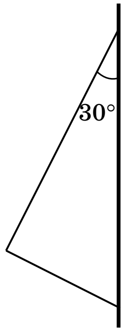
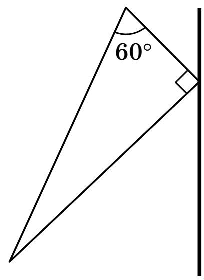
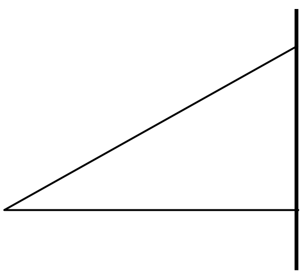
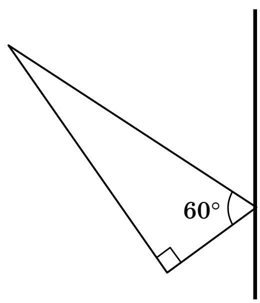


4 Дан шар радиуса $R = 12/\sqrt{\pi}$. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 30° к нему. Найдите площадь сечения.



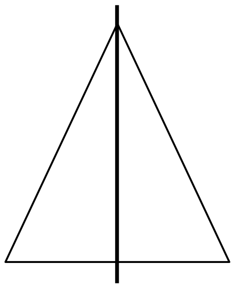
ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 78

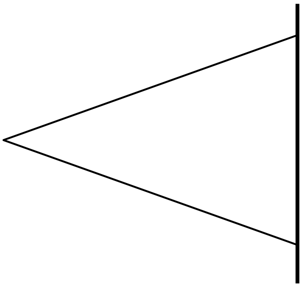
1 Прямоугольный треугольник с гипотенузой $10/\sqrt[3]{\pi}$ и острым углом 30° вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения. 	**3** Прямоугольный треугольник с острым углом 60° и гипотенузой, равной 1, вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найдите объем тела вращения. 
2 Прямоугольный треугольник с катетами $5/\sqrt{\pi}$ и $12/\sqrt{\pi}$ вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь полной поверхности тела вращения. 	**4** Прямоугольный треугольник с острым углом 60° и противолежащим катетом длиной 1 вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной его биссектрисе. Найдите объем тела вращения. 

Окончание табл. 78

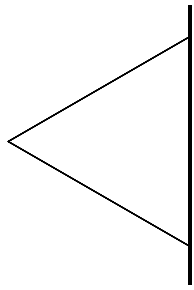
5 Равнобедренный треугольник с основанием $2\sqrt{3/\pi}$ и высотой $\frac{1}{2}\sqrt{15/\pi}$ вращается вокруг высоты. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.



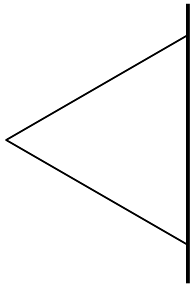
6 Равнобедренный треугольник с основанием $6/\pi$ и высотой $5\sqrt{2}$ вращается вокруг основания. Найдите объем тела вращения.



7 Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt[3]{16/\pi}$ вращается вокруг одной из сторон. Найдите объем полученной фигуры вращения.



8 Равносторонний треугольник со стороной $a = 6/\sqrt[3]{\pi}$ вращается вокруг одной из сторон. Найдите объем полученной фигуры вращения.

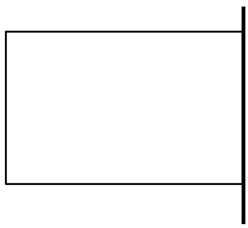


ПРЯМОУГОЛЬНИК

Таблица 79

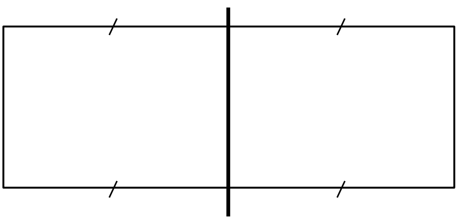
1

Прямоугольник со сторонами $\sqrt{5/\pi}$ и $\sqrt{125/\pi}$ вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.



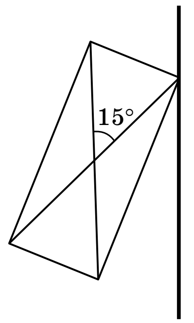
2

Прямоугольник со сторонами $2\sqrt{7/\pi}$ и $2\sqrt{1/7\pi}$ вращается вокруг прямой, проходящей через середины бо́льших сторон. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.



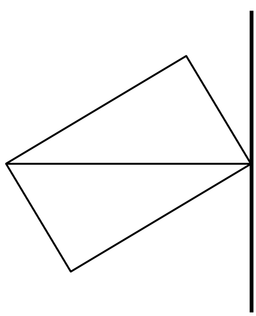
3

Прямоугольник, площадь которого равна 1, а угол между диагоналями равен 15°, вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Найдите поверхность тела вращения.



4

Прямоугольник со сторонами 5 и 12 вращается вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец. Найдите объем тела вращения.

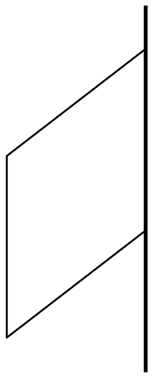


ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ТРАПЕЦИЯ

Таблица 80

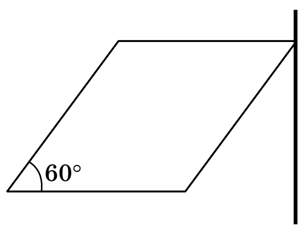
1

Ромб, площадь которого равна 13, вращается вокруг стороны. Определите поверхность полученного тела вращения.



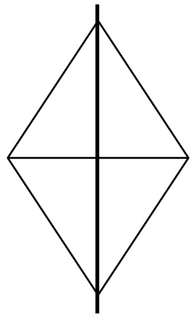
2

Ромб со стороной 7 и острым углом в 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно к стороне. Определите поверхность тела вращения.



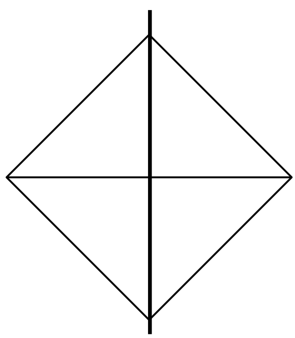
3

Ромб с диагоналями $\sqrt{15}$ и $120/\pi$ вращается вокруг большей диагонали. Найдите объем полученного тела вращения.

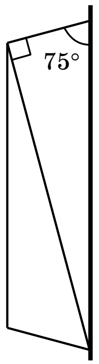
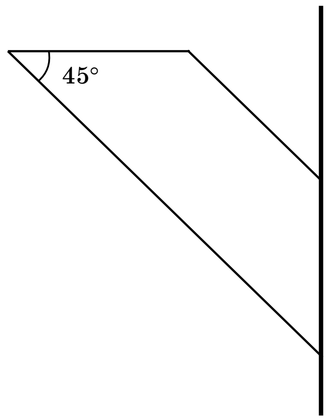


4

Квадрат со стороной $\sqrt[6]{81/2\pi^2}$ вращается вокруг диагонали. Найдите объем полученного тела вращения.



Окончание табл. 80

5	В равнобедренной трапеции с острым углом 75° большее основание равно 1, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите объем тела, полученного вращением трапеции вокруг ее большего основания. 	**6**	Равнобедренная трапеция с острым углом в 45° вращается вокруг боковой стороны длиной 6, равной меньшему основанию. Найдите объем полученного тела вращения. 

Раздел VI

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ ТРУДНЫХ ЗАДАЧ

VII класс

К таблице 10

7. ΔMKN — равносторонний (по условию), тогда $\angle K = 60°$; $RK \perp PR$, значит, ΔPRK прямоугольный, тогда $\angle RPK = 90° - 60° = 30°$, т. е. $RK = \frac{1}{2}PK$. Но $PK = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}MN = 6{,}5$, т. е. $PK = \frac{13}{4} = 3{,}25$ и $NR = 13 - 3{,}25 = 9{,}75$.

Ответ: 9,75.

16. В ΔAME $\angle MAE = 90° - 65° = 25°$. В ΔBCE $\angle CEB = 90° - 40° = 50°$, $\angle BEM = \angle CBE = 40°$, тогда в ΔAEB $\angle BEA = 90° + 40° = 130°$, значит, $\angle EBA = 180° - (25° + 130°) = 25°$, т. е. $BE = AE$.

В ΔAED $\angle DEA = 90°$, $\angle EDA = 45°$, тогда $\angle DAE = 45°$, $AE = DE$. Следовательно, $BE = DE$, значит ΔBED — равнобедренный, где $\angle BED = 40°$, тогда $\angle BDE = (180° - 40°) : 2 = 70°$.

Ответ: 70°.

К таблице 11

7. Так как $AD = BF$, $DC = CF$ (по условию), то ΔACB — равнобедренный, тогда $\angle A = \angle B$ (по свойству). Значит, $\Delta AED = \Delta BMF$ (по гипотенузе и острому углу).

К таблице 12

8. MN — искомое расстояние. По условию $BC = BM = MA = MC = 8$, значит, ΔBCM — равносторонний, т. е. $\angle CMB = 60°$, тогда $\angle BMA = 180° - 60° = 120°$, и, так как MN — высота равнобедренного ΔAMB, то MN — биссектриса, т. е. $\angle AMN = 60°$, тогда $\angle A = 30°$, значит $MN = \frac{1}{2}MA = 4$.

Замечание. Можно использовать теорему Фалеса и теорему о средней линии треугольника.

Ответ: 4.

VIII класс

К таблице 2

16. В параллелограмме $ABCD$ $\angle D = \angle B = 90°$, тогда $\angle A = \angle DCB = 90°$, т. е. $ABCD$ — прямоугольник и, так как $DC = CB$, то $ABCD$ — квадрат. Поскольку $\angle MCB = 60°$ и $\angle B = 90°$, то $\angle CMB = 30°$, тогда $CB = \frac{1}{2}MC = 9$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

Следовательно, $P = 9 \cdot 4 = 36$.

Ответ: 36.

К таблице 4

7. Так как $SFTM$ — параллелограмм и $SF = SM$ (по условию), то $SFTM$ — ромб, тогда $ST \perp FM$ и диагонали ST и FM ромба являются биссектрисами его углов. Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = 10 + x$, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, или $10 + x + x = 90$, $2x = 80$, $x = 40$, т. е. $\angle 2 = 40°$, $\angle 1 = 10° + 40° = 50°$, тогда $\angle FSM = \angle FTM = 80°$, $\angle SFT = \angle SMT = 100°$.

Ответ: 80°; 80°; 100°; 100°.

К таблице 5

6. В параллелограмме $\angle R = 90°$, значит, $EMKR$ — прямоугольник. Так как $\angle EFM = 45°$ и $\angle R = \angle M = 90°$, то ΔEMF — равнобедренный и $ME = MF$.

Пусть $FK = x$, тогда $ME = MF = x + 6$ и $MK = 2x + 6$. По условию задачи $P = 36$, тогда имеем уравнение $2((x + 6) + (2x + 6)) = 36$, откуда находим $x = 2$, значит, $ME = KR = x + 6 = 8$, $MK = ER = 2x + 6 = 10$.

Ответ: 8; 8; 10; 10.

К таблице 6

8. Так как $ABCD$ — трапеция, то $AB \parallel NM$, тогда $\angle ANM = 70°$, $\angle NAB = 180° - 70° = 110°$.

Поскольку NB — биссектриса $\angle ANM$ (по условию), то $\angle ANB = \angle BNM = 35°$. Но $\angle BNM = z = 35°$ — как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и NM и секущей BM, тогда $\angle NMB = z + 45° = 80°$ и $\angle ABM = 180° - 80° = 100°$.

Ответ: 110°; 70°; 100°; 80°.

К таблице 9

9. *Указание.* Обозначить $AD = x$, $AB = y$, тогда $2(x + y) = 20$. Пусть S — площадь параллелограмма, тогда $x \cdot 2 \cdot 4 = y \cdot 2 \cdot 6$. Далее решить систему уравнений $x + y = 10$; $2x = 3y$, и т. д.

14. Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$, где $AC = 16$, $BD = 12$. Так как $AO = OC$ и $BO = OD$, то $\Delta AOB = \Delta COD$ (по I признаку равенства треугольников) и $\Delta BOC = \Delta AOD$ (по той же причине). Но равные многоугольники имеют равные площади, т. е. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$ и $S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC}$, значит, $S_{ABCD} = 2S_{\Delta AOB} + 2S_{\Delta BOC} = 2(S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC})$.

Но $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot BO \cdot \sin 60° = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}d_1\cdot\frac{1}{2}d_2 \sin 60° = \frac{1}{8}d_1 d_2 \sin 60°$;

$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}BO \cdot OC \cdot \sin(180° - 60°) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}d_2\cdot\frac{1}{2}d_1 \sin 60° = \frac{1}{8}d_1 d_2 \sin 60°$.

Следовательно, $S_{ABCD} = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}d_1 d_2 \sin 60° + \frac{1}{8}d_1 d_2 \sin 60°\right) =$

$= \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin 60°$.

Поскольку $d_1 = 16$, $d_2 = 12$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$.

Замечание 1. Фактически мы доказали, что площадь параллелограмма $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними.

Замечание 2. Полученная формула верна для любого выпуклого четырехугольника.

Ответ: $48\sqrt{3}$.

К таблице 10

11. Задачу можно решить по формуле Герона. Покажем другое решение, основанное на применении формулы $S = \frac{1}{2}a \cdot h$, которое приводит к относительно более простым вычислениям.

Проведем высоту BD. Пусть $DC = x$. Из ΔADB $BD^2 = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{18} - x)^2$; из ΔBDC $BD^2 = (\sqrt{10})^2 - x^2$. Сравнивая правые части полученных равенств, имеем $5 - (\sqrt{18} - x)^2 = 10 - x^2$, откуда после упрощений находим $x = 23/6\sqrt{2}$, тогда $BD^2 = 10 - x^2$, или $BD^2 = \frac{191}{72} = \frac{382}{144}$, откуда $BD = \sqrt{382}/12$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \sqrt{191}/4$.

Ответ: $\sqrt{191}/4$.

12. *Указание.* Достроить ΔABC до параллелограмма $ABCD$, затем применить свойство $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, где d_1 и d_2 — диагонали, a и b — смежные стороны параллелограмма.

Замечание. Задачу можно решить и по формуле $S = \frac{1}{2}a \cdot h$ (см. № 11).

К таблице 11

10. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 2x$. Проведем высоту MN. По условию задачи $S_{\Delta AMD} = 120$, или $\frac{1}{2}AD \cdot MN = 120$, или $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = 120$, $xh = 120$, где $h = MN$ — высота ΔAMD (и трапеции). $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}BM \cdot h\right) + S_{\Delta AMD} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}MC \cdot h\right) = \frac{1}{2}xh + 120$.

Так как $xh = 120$, то $S_{ABCD} = 180$.

Замечание. Нетрудно заметить, что $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta MCD} = \frac{1}{4}xh$ и $S_{\Delta AMD} = xh$, т. е. $S_{\Delta AMD} = 2(S_{\Delta ABM} + S_{\Delta MCD})$.

12. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, где $AD = BC$. Так как $AC \perp BD$ (по условию), то $S = S_{\Delta DAC} + S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot OD + \frac{1}{2}AC \cdot OB = \frac{1}{2}AC \cdot (OD + OB) = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Но $AC = BD = 8$, тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32$.

Замечание. Фактически мы доказали, что «если в трапеции диагонали перпендикулярны, то площадь $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей. В частности, если трапеция равнобедренная, то $d_1 = d_2 = d$, тогда $S = \frac{1}{2}d^2$».

К таблице 12

26. Пусть $TL = a$, $MT = b$, тогда $P_{MKLT} = 2(a + b) = 40$, или $a + b = 20$. Заметим, что $S_{MKLT} = TL \cdot 2CO = MT \cdot 2BO$, где $BO = x$, значит, $8a = 2bx = 48$, $a = 6$, $b = 20 - 6 = 14$, тогда $2bx = 48$, $x = \frac{12}{7}$.

Ответ: $\frac{12}{7}$.

29. Пусть $LT = a$, $RQ = b$, тогда $MT = \dfrac{1}{2}(a - b)$. По условию $S_{LRQT} = \dfrac{a+b}{2}\cdot x$, где $QM = x$ — высота трапеции, $S_{LRQT} = 300$, или $\dfrac{a+b}{2}\cdot x = 300$, $(a + b)x = 600$. $LM = LT - MT = a - \dfrac{1}{2}(a - b) = \dfrac{1}{2}(a + b)^2$.

Но $a+b=\dfrac{600}{x}$, тогда $LM=\dfrac{300}{x}$. Из ΔLMQ имеем $\left(\dfrac{300}{x}\right)^2+x^2=625$, или $\dfrac{90000}{x^2}+x^2=625$.

Решая полученное биквадратное уравнение, находим $x_1 = 15$; $x_2 = 20$.

Ответ: 15; 20.

34. *Указание.* Из точки C провести прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с продолжением основания AD в точке E. Далее доказать, что ΔACE — прямоугольный.

38. *Указание.* Провести высоту DE, обозначив $AE = y$, где $y = \dfrac{1}{2}(20 - x)$.

Для нахождения $DC = x$, составить систему уравнений

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(20-x), \\ y^2+h^2=13^2, \\ (20+x)h=360, \end{cases}$$

в результате чего получится уравнение $(20 + x)^2(6 + x)(46 - x) = 720^2$, а после упрощений решить уравнение $x^4 - 1476\,x^2 - 27\,040\,x + 408\,000 = 0$. Далее доказать, что $x = 10$ — единственный корень.

Ответ: 10.

К таблице 13

14. Пусть $QN = a$, $QE = EF = b$, $EM = c$. Так как $QE = EF$, то ΔQEF — равнобедренный, тогда $\angle FQE = \angle QFE$. Но $EF \perp NM$ и $QN \perp NM$, значит, $QN \parallel EF$, тогда $\angle NQF = \angle EFQ$, т. е. QF — биссектриса $\angle NQM$, следовательно, $\dfrac{NF}{FM}=\dfrac{QN}{QM}$, или $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{4}{5}$.

Из подобия ΔMFE и ΔMNQ, имеем $\dfrac{b+c}{8+10}=\dfrac{c}{10}$, или $\dfrac{b+c}{9}=\dfrac{c}{5}$.

Кроме того, из ΔMFE $c^2 - b^2 = 100$.

Решая систему $\begin{cases} \dfrac{b+c}{9}=\dfrac{c}{5}, \\ c^2-b^2=100, \end{cases}$ находим $c=\dfrac{50}{3}$, $b=\dfrac{40}{3}$;

так как $\frac{a}{b+c}=\frac{4}{5}$, то $a = 24$. Значит, $P_{\Delta MNQ} = x = a + b + c + 18 = 72$.

Ответ: 72.

К таблице 14

16. Пусть $\angle E = \angle 4$, тогда в ΔMEL $\angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$; $\angle MLF = \angle 5$, тогда $\angle 5 = \angle 1 + \angle 4 = 180° - \angle 3$; $\angle F = 180° - (\angle 2 + \angle 5) = 180° - (\angle 2 + 180° - \angle 3) = \angle 3 - \angle 2$.

Так как $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ (по условию), то $\angle F = \angle 1$, значит, $\Delta EML \sim \Delta MEF$ (по I признаку), тогда $EL : EM = EM : EF$, или $x^2 = 8 \cdot 18$, $x = 12$.

Ответ: 12.

К таблице 23

7. Так как ΔABC — прямоугольный, то $AB = \sqrt{24^2+10^2} = 26$. Пусть $OD = r$ — радиус вписанной окружности. Заметим, что $BM = BN$, $AN = AD$ и $MC = CD = OD = r$. Пусть N — точка касания AB и окружности, тогда $AB = BN + AN = BM + AD = (BC - r) + (AC - r) = AC + BC - 2r$, откуда находим $r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = 4$.

Ответ: 4.

17. $RT = 13 + 5 = 18$. $S_{\Delta REF} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot EF = 9EF$. Пусть $RE = RF = x$, $ET = TF = y$, тогда $S_{\Delta REF} = 18y$. Из ΔERT $x^2 - y^2 = 18^2$. Кроме того, $S_{\Delta REF} = \frac{abc}{4R}$, где $a = b = RE = x$, $c = EF = 2y$, $R = 13$ — радиус описанной окружности. Значит, $S_{\Delta REF} = \frac{x^2 \cdot 2y}{4 \cdot 13} = 18y$, откуда $x^2 = 26 \cdot 18$.

Но $x^2 - y^2 = 18^2$, тогда $y^2 = 18 \cdot (26 - 18) = 144$, $y = 12$, тогда $S_{\Delta REF} = 18 \cdot 12 = 216$.

Ответ: 216.

32. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $r = 4$, тогда $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ (см. № 11), или $\frac{1}{2}(a + b - 20) = 4$, где $c = AM + MB = 20$. Значит, $a + b = 28$.

Кроме того, $a^2 + b^2 = 400$. Имеем систему уравнений $\begin{cases} a^2+b^2=400, \\ a+b=28, \end{cases}$

$(a + b)^2 = 400 + 2ab$, или $400 + 2ab = 784$, откуда $ab = 192$.

Значит, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab = 96$.

Ответ: 96.

39. *I способ.*

Проведем высоту трапеции BE. Так как $\angle A = 60°$, то $\angle ABE = 30°$. Точка O — центр вписанной окружности, значит, AO — биссектриса угла A, т. е. $\angle OAK = 30°$, тогда $\Delta ABE \sim \Delta AOK$ как прямоугольные, имеющие равные острые углы.

Пусть $AD = 2x$, $BC = 2y$, $MN = 20$, тогда $(2x + 2y) : 2 = 20$, или $2x + 2y = 40$.

Но $AB + CD = BC + AD$ (по свойству описанного четырехугольника), или $2AB = 2x + 2y = 40$, $AB = 20$. Следовательно, $AB : BE = AO : AK$, или $10 : OK = AO : x$. Из ΔAOK, где $\angle OAK = 30° \Rightarrow OK = \frac{1}{2}AO$, тогда $AO = 2 \cdot OK$, т. е. $10 : OK = 2 \cdot OK : x^2$.

Но $\operatorname{ctg} 30° = \dfrac{x}{OK} \Rightarrow x = OK\sqrt{3}$, тогда $\dfrac{10}{OK} = \dfrac{2 \cdot OK}{OK\sqrt{3}}$, или $\dfrac{5}{OK} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $OK = 5\sqrt{3}$.

II способ.

$MN = 20$, $x + y = 10$, $2AB = 40$, $AB = 20$ (см. I способ).

Из ΔBEA $\cos 30° = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{2 \cdot OK}{20} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $OK = 5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

43. По условию $MNRK$ — прямоугольная трапеция. Заметим, что $\angle N + \angle R = 180°$ (как сумма односторонних углов). Но точка O — центр вписанной окружности, OR и ON — соответственно биссектрисы углов R и N, тогда $\angle ORN + \angle ONR = 90°$, т. е. ΔRON — прямоугольный, значит $RN = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Высота ΔRON равна радиусу вписанной в трапецию окружности, тогда высота трапеции равна диаметру этой окружности. Пусть OT — высота ΔORN, тогда $S_{\Delta RON} = \frac{1}{2}OR \cdot ON = \frac{1}{2}RN \cdot OT$, или $6 \cdot 8 = 10 \cdot OT$, откуда $OT = 4{,}8$, значит, $RE = 2 \cdot OT = 9{,}6$, где RE — высота трапеции, опущенная на основание MN.

Но $MN + KR = KM + RN$ (по свойству описанного четырехугольника), значит, $KM + RN = RE + RN = 19{,}6$, тогда $S_{MNRK} = \frac{1}{2}(MN + KR) \cdot RE = \frac{1}{2}(KM + RN) \cdot RE = \dfrac{19{,}6}{2} \cdot 9{,}6 = 94{,}08$.

Ответ: 94,08.

47. Проведем высоты EF и QK на основание MT. Так как $EQ \parallel MT$, то $MTQE$ — трапеция (равнобедренная). По условию MQ — биссектриса $\angle M$.

Заметим, что $\angle QMT = \angle MQE = 30°$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых MT и EQ и секущей MQ). Тогда $\angle EMQ = \angle MQE = 30°$, т. е. ΔMQE — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Пусть $EQ = 2x$, $MT = 2y$, $ME = EQ = 2x$.

Из ΔMEF $MF = \frac{1}{2}ME = x$, $EF = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$.

Из ΔMQK $MQ = 2 \cdot QK = 2 \cdot EF = 2x\sqrt{3}$.

$S_{\Delta MQT} = \frac{1}{2}MT \cdot QK = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x\sqrt{3} = xy\sqrt{3}$; с другой стороны,

$S_{\Delta MQT} = \frac{MQ \cdot QT \cdot MT}{4 \cdot QO}$, или $S_{\Delta MQT} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y$, значит, $xy\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y$, откуда $x = 4$.

Следовательно, $S_{MTQE} = \frac{1}{2}(MT + QE) \cdot EF = (x + y) \cdot x\sqrt{3}$.

Но $MT = 2MF + FK = 2MF + EQ = 4x$, или $2y = 4x$, $y = 8$, значит, $S_{MTQE} = (4 + 8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$.

Ответ: $48\sqrt{3}$.

56. Так как $EF \parallel TR$, то $TRFE$ — трапеция. По свойству описанного четырехугольника $TR + EF = ET + FR$, или $TR + EF = 28$. Но $TR - EF = 14$. Пусть $TR = x$, $EF = y$, где $x > 0$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 28, \\ x - y = 14; \end{cases} \begin{cases} 2x = 42, \\ 2y = 14; \end{cases} \begin{cases} x = 21, \\ y = 7. \end{cases}$$

Итак, $TR = 21$, $EF = 7$.

Проведем высоты AE и FB трапеции. Пусть $TA = z$, тогда $AB = EF = 7$, $BR = 21 - (z + 7) = 14 - z$.

Из ΔTAE $EA^2 = 13^2 - z^2$; из ΔFBR $FB^2 = 15^2 - (14 - z)^2$. Так как $EA = FB$, то $13^2 - z^2 = 15^2 - (14 - z)^2$, или $(14 - z)^2 - z^2 = 15^2 - 13^2$, откуда находим $z = 5$, тогда $EA^2 = 13^2 - 5^2$, $EA = 12$.

Значит, $S_{TRFE} = \frac{1}{2}(TR + EF) \cdot EA = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 12 = 168$.

Ответ: 168.

К таблице 24

10. Пусть $EA = 2x$, $AF = 5x$, тогда $EF = 7x$. По правилу треугольника $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{KF}$, или $\overrightarrow{KE} + 7\vec{x} = \vec{n}$.

Аналогично $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{KF}$, или $\vec{m} + 5\vec{x} = \vec{n}$; $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{KA}$, или $\overrightarrow{KE} + 2\vec{x} = \vec{m}$, откуда $\overrightarrow{KE} = \vec{m} - 2\vec{x}$. Так как $\overrightarrow{KE} + 7\vec{x} = \vec{n}$, то $\vec{m} - 2\vec{x} + 7\vec{x} = \vec{n}$, или $5\vec{x}=\vec{n}-\vec{m}$, откуда $\vec{x}=-\frac{1}{5}\vec{m}+\frac{1}{5}\vec{n}$, значит, $\overrightarrow{KE}=\vec{m}-2\cdot\left(-\frac{1}{5}\vec{m}+\frac{1}{5}\vec{n}\right)=$

$=\frac{7}{5}\vec{m}-\frac{2}{5}\vec{n}.$

Ответ: $\overrightarrow{KE}=\frac{7}{5}\vec{m}-\frac{2}{5}\vec{n}.$

13. Поскольку M — середина AC, то $AM = MC$; аналогично $BN = ND$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$, что и требовалось доказать.

20. По условию $MNKE$ — прямоугольная трапеция, где $MK = 2\sqrt{2}$, $\angle MKN = 45°$ и $\angle MKE = 90°$.

Проведем высоту KF к основанию ME. Заметим, что $\angle MKN = \angle KME = 45°$, как внутренние накрестлежащие углы при параллельных прямых NK и ME и секущей MK. Но тогда $\angle E = 45°$, т. е. ΔMKE — равнобедренный, и $MK = KE$. Кроме того, $NM = KF$ (как высоты трапеции) и $NM \parallel KF$, значит, $|\overrightarrow{KE}-\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{FK}|=|\overrightarrow{FE}|$.

Из ΔMKE, где $\angle MKE = 90°$, $MK = KE = 2\sqrt{2}$, $ME^2 = (2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2 = 16$, откуда $ME = 4$. Тогда $FE = 2$, значит, $|\overrightarrow{FE}| = 2$.

Ответ: 2.

IX класс

К таблице 8

8. *Указание.* Применить теорему косинусов.

Далее решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1764, \\ \frac{x}{y}=\frac{3}{8}. \end{cases}$

Ответ: $x = 18$, $y = 48$.

10. *Указание.* Дважды применить теорему косинусов для ΔABC и ΔABD для угла A.

Ответ: $x = 13$.

11. Так как $ME \parallel FT$, то $\Delta KFT \sim \Delta KME$ (по двум углам), тогда $\frac{FK}{FT} = \frac{KM}{ME}$, или $\frac{50-y}{x} = \frac{50}{60}$; $\frac{50-y}{x} = \frac{5}{6}$. Из ΔMFE по теореме Пифагора $FE^2 = 60^2 - y^2$, а из ΔKFE $FE^2 = 50^2 - (50 - y)^2$.

Сравнивая полученные равенства, имеем $60^2 - y^2 = 50^2 - (50 - y)^2$, откуда находим $y = 36$. Поскольку $\frac{50-y}{x} = \frac{5}{6}$ и $y = 36$, то $\frac{14}{x} = \frac{5}{6}$, откуда $x = \frac{84}{5} = 16{,}8$.

Ответ: $x = 16{,}8$; $y = 36$.

15. Пусть $MK = a$, $NP = b$. Из ΔMPR $MP = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$.

Пусть $\angle PMR = \alpha$. Заметим, что $\Delta MKN \sim \Delta NPR$ ($\angle K = \angle P = 90°$ и $\angle KNM = \angle PNR$ как вертикальные), тогда $\cos\alpha = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$. Из ΔMNR по теореме косинусов $y^2 = x^2 + 40^2 - 2 \cdot x \cdot 40 \cdot \frac{4}{5}$, или $y^2 = x^2 - 64x + 1600$.

Пусть $\angle KMN = \angle NRP = \beta$, тогда $\cos\beta = \frac{a}{x} = \frac{24}{y}$, откуда $a = \frac{24x}{y}$.

Из ΔMKN $a^2 = x^2 - 49$, значит, $\left(\frac{24x}{y}\right)^2 = x^2 - 49$, или $\frac{576x^2}{y^2} = x^2 - 49$.

Подставляя значение y^2, имеем $(x^2 - 64x + 1600)(x^2 - 49) = 576x^2$.

Упрощая полученное уравнение, получим

$x^4 - 64x^3 + 975x^2 + 3136x - 78\,400 = 0$.

Можно проверить, что $x = 25$ — корень уравнения, тогда $x^3(x - 25) - 39x^2(x - 25) + 3136(x - 25) = 0$, или $(x - 25)(x^3 - 39x^2 + 3136) = 0$, откуда $x_1 = 25$, тогда $y^2 = 25^2 - 64 \cdot 25 + 1600$, $y^2 = 25^2$, $y = 25$.

Итак, $x = 25$, $y = 25$ одно из решений задачи. Остается решить уравнение $x^3 - 39x^2 + 3136 = 0$. Можно убедиться, что оно не имеет целых корней. Запишем его в виде $x^2(39 - x) = 3136$, или $39 - x = \left(\frac{56}{x}\right)^2$.

Графическое решение показывает, что полученное уравнение имеет еще три корня, из которых один отрицательный, что не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$.

Два других корня можно вычислить приближенно: $x_2 \approx 10{,}5$, $x_3 \approx 36{,}7$, тогда $y_2^2 = 10{,}5^2 - 64 \cdot 10{,}5 + 1600$, откуда находим $y_2 \approx 32{,}2$.

Аналогично $y_3^2 = 36{,}7^2 - 64 \cdot 36{,}7 + 1600$, $y_3 \approx 24{,}5$. Как видим, задача оказалась довольно сложной.

Ответ: $x_1 = 25$, $y_1 = 25$; $x_2 \approx 10{,}5$, $y_2 \approx 32{,}2$; $x_3 \approx 36{,}7$, $y_3 \approx 24{,}5$.

К таблице 9

2. $\cos \angle C = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{CA}\{-4 - 4; 8 - 0) = \{-8; 8\}$, $\overrightarrow{CB}\{2 - 4; 14 - 0\} = \{-2; 14\}$, тогда

$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 14^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$

$= -8 \cdot (-2) + 8 \cdot 14 = -16 + 112 = 96$.

Следовательно, $\cos \angle C = \dfrac{96}{8\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}} = \dfrac{12}{2 \cdot 10} = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

10. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha$, где $\alpha = \angle CAB$. По условию $A(2; 4)$, $B(2; 8)$, $C(6; 4)$, тогда $\overrightarrow{AB}\{2 - 2; 8 - 4\} = \{0; 4\}$, $\overrightarrow{AC} = \{6 - 2; 4 - 4\} = \{4; 0\}$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 0$, $\cos\alpha =$

$= \dfrac{0}{4 \cdot 4} = 0$, т. е. $\angle CAB = 90°$.

Ответ: 90°.

К таблице 10

1. Так как $\cup TmM = 120°$, то $\angle TOM = 120°$. В равнобедренном ΔTOM ($TO = MO = R$); $\angle OTM = \angle OMT = 30°$.

Проведем высоту OK, тогда из ΔOTK, где $TK = 5$, $OT = \dfrac{5}{\cos 30°} = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$,

следовательно, $l = \dfrac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \dfrac{\pi \cdot 10}{180 \cdot \sqrt{3}} \cdot 120 = \dfrac{20\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{20\pi\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\dfrac{20\pi\sqrt{3}}{9}$.

7. *I способ.*

$\cup AM = \cup BN$ — как дуги окружности, заключенные между параллельными хордами AB и MN ($AB \parallel MN$ — по условию).

Но тогда $AM = BN$, т. е. $ABNM$ — равнобедренная трапеции.

Проведем диагональ AN. Так как $MN = 16$, $AB = 12$, то $MK = \frac{1}{2}(16 - 12) = 2$.

Из ΔAMK $AM = \sqrt{2^2 + 14^2} = 10\sqrt{2}$. $KN = MN - MK = 14$.

Из ΔAKN, где $AK = KN = 14$, $AN = 14\sqrt{2}$.

Известно, что $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны, R — радиус описанной окружности. Но $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 14 = \frac{10\sqrt{2} \cdot 16 \cdot 14\sqrt{2}}{4R}$, откуда $R = 10$.

Тогда $C = 2\pi R = 20\pi$.

II способ.

Соединим точки B и N с центром окружности, тогда $OB = ON = R$. Проведем диаметр EF, перпендикулярный данным хордам. Пусть L и T соответственно точки пересечения хорд AB и MN с диаметром EF, тогда $LT = AK = 14$, $LB = \frac{1}{2}AB = 6$ и $TN = \frac{1}{2}MN = 8$. Пусть $OT = x$, тогда $OL = 14 - x$. Из ΔOLB и ΔOTN имеем: $\begin{cases} 6^2 + (14 - x)^2 = R^2, \\ 8^2 + x^2 = R^2. \end{cases}$

Сравнивая левые части системы, получим: $36 + 196 - 28x + x^2 = 64 + x^2$, $28x = 168$, откуда $x = 6$. Значит, $R^2 = 64 + 36 = 100$, $R = 10$ и $C = 2\pi R = 20\pi$.

III способ.

Пусть $EL = x$, $TF = y$, тогда получим систему:

$$\begin{cases} TN^2 = ET \cdot TF, \\ BL^2 = EL \cdot LF; \end{cases} \quad \begin{cases} y(14 + x) = 64, \\ x(14 + y) = 36. \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения II, получим $14(y - x) = 28$, $y - x = 2$, $y = x + 2$. Подставим значение y в одно из уравнений системы $(x + 2)(14 + x) = 64$, или $x^2 + 16x - 36 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -18$ (не имеем смысла). Если $x = 2$, то $y = 4$, тогда $EF = 2R = x + y + LT = 20$, откуда $R = 10$, значит, $C = 2\pi R = 20\pi$.

Ответ: 20π.

14. *I способ.*

По условию $AM = BM = 14$, т. е. ΔAMB — равнобедренный. Проведем высоту ME, тогда ME — медиана ΔMAB; $AE = BE = 4$.

$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot ME = 4ME$. Из ΔAME $ME^2 = AM^2 - AE^2$, $ME = \sqrt{14^2 - 4^2} = 6\sqrt{5}$. $S_{\Delta AMB} = 24\sqrt{5}$.

С другой стороны, $S_{\Delta AMB} = \dfrac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны ΔAMB, R — радиус описанной окружности.

Значит, $\dfrac{14\cdot 14\cdot 8}{4R}=24\sqrt{5}$, откуда $R=\dfrac{49}{3\sqrt{5}}$, тогда

$C = 2\pi R = 2\pi \cdot \dfrac{49}{3\sqrt{5}}=\dfrac{98\pi\sqrt{5}}{15}$.

II способ.

Соединим точку A с центром O окружности. $ME = 6\sqrt{5}$ (см. I способ), $AO = MO = R$. Из ΔAOE $AO^2 - OE^2 = AE^2$, или $R^2-(6\sqrt{5}-R)^2=16$, откуда находим $R=\dfrac{49}{3\sqrt{5}}$, и т. д. (см. I способ).

К таблице 11

8. Проведем высоту NK. Пусть $EK = x$. Так как $\angle E = 45°$, то $\angle ENK = 45°$, т. е. $NK = EK = x$. Пусть $MN = y$, тогда $EF = 2x + y = 24$. По условию $EN = FM$, тогда по свойству описанного четырехугольника, имеем: $2EN = EF + NM = 2x + 2y$, или $EN = x + y$. Из ΔENK $EN^2 = EK^2 + NK^2$, или $(x + y)^2 = 2x^2$, $x + y = x\sqrt{2}$. Так как $2x + y = 24$, то $y = 24 - 2x$, значит, $x + 24 - 2x = x\sqrt{2}$, $x(\sqrt{2}+1)=24$, откуда $x=\dfrac{24}{\sqrt{2}+1}=24(\sqrt{2}-1)$.

Но $x = 2r$, тогда $r=12(\sqrt{2}-1)$.

Следовательно, $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 144\pi(3-2\sqrt{2})$.

Ответ: $144\pi(3-2\sqrt{2})$.

10. Проведем диаметр окружности $AB \perp MN$ и $AB \perp TK$, проходящий через центр O окружности. По условию $TM = KN$, $S_{TMNK} = 125$ и $EF = 8$ — расстояние между точками касания ее боковых сторон.

Пусть $EM = MA = m$, $TE = TB = b$, $EO = r$ — радиус вписанной окружности; $AB = 2r$, $EC = \dfrac{1}{2}EF = 4$, где C — точка пересечения EF и AB.

Из ΔEOC $OC = \sqrt{r^2-16}$, тогда $AC = AO - OC = r-\sqrt{r^2-16}$, $BC = BO + OC = r+\sqrt{r^2-16}$; следовательно, $ME : ET = AC : BC$, или $m : n = (r-\sqrt{r^2-16}):(r+\sqrt{r^2-16})$. Из ΔMOT, где $\angle MOT = 90°$ (MO и TO — биссектрисы углов TMN и MTK, где $\angle TMN + \angle MTK = 180°$), имеем: $OE^2 = ME \cdot ET$, или $mn = r^2$.

По условию $S_{TMNK} = 125$, или $\frac{1}{2}(MN + TK) \cdot AB = 125$.

Но $2MT = MN + TK$ (по свойству описанного четырехугольника), тогда $2(m + n) = MN + TK$, или $(m + n) \cdot 2r = 125$. Имеем систему уравнений: $\begin{cases} m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16}), \\ mn = r^2, \\ 2(m + n)r = 125. \end{cases}$

Пусть для краткости $r - \sqrt{r^2 - 16} = \alpha$, $r + \sqrt{r^2 - 16} = \beta$, тогда $m = \frac{\alpha}{\beta} \cdot n$ и II уравнение системы примет вид $\frac{\alpha}{\beta} \cdot n^2 = r^2$, следовательно, III уравнение преобразуется к виду $2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot n + n\right) \cdot r = 125$, или $2nr\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = 125$.

Но $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot n = r$, $n = \frac{r}{\sqrt{\alpha / \beta}}$, значит, $2r^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = 125\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Преобразуем выражения $\frac{\alpha}{\beta} + 1$ и $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

$$\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} + 1 = \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}}; \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{\sqrt{r^2 - r^2 + 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} =$$

$$= \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}.$$

Следовательно, $2r^2 \cdot \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}} = 125 \cdot \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}$, или $r^3 = 125$, $r = 5$. Тогда $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 25\pi$.

Ответ: 25π.

X–XI классы

К таблице 9

9. Обозначим точку M — пересечение прямых F_1C_1 и B_1D_1. Далее, из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1N на прямую BM. Тогда $\angle B_1AN = \alpha$ — искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1. В прямоугольном ΔBB_1M известно: $BB_1 = 1$ (по условию), $B_1M = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. № 8,

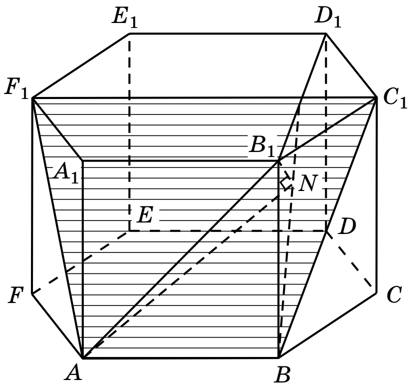
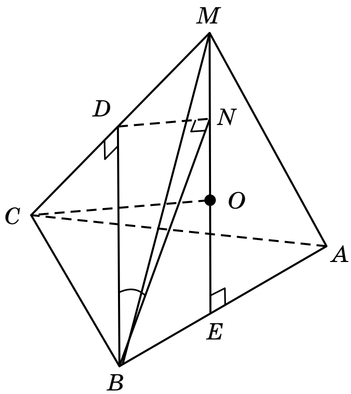


табл. 3), тогда $BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2}$, $BM = \sqrt{1+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Заметим, что $\Delta B_1NM \sim \Delta BB_1M$ (как прямоугольные, имеющие общий угол B_1MN), тогда имеем $B_1N = \frac{\sqrt{21}}{7}$ (см. № 5). Так как $AB_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, то из ΔAB_1N $\sin\alpha = B_1N{:}AB_1 = \frac{\sqrt{42}}{14}$, тогда $\alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{42}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3}{\sqrt{42}}$.

К таблице 10



4. Пусть в правильном тетраэдре $MABC$ $AB = 1$, ME — апофема грани MAB, O — центр правильного ΔMAB. Так как $BD = ME$ как высоты правильных треугольников, то DN — средняя линия ΔMOC, тогда $CO \perp (MAB)$, $CO \parallel DN$, значит, $DN \perp (MAB)$ и $\angle DBN = \alpha$ — искомый.

Поскольку $OE = ON = NM$ (N — середина MO), то $EN = \frac{2}{3}ME$. Из ΔAEM, где $AM = 1$, $AE = \frac{1}{2}$, $ME = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $EN = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Сторону BN найдем из прямоугольного ΔBEN:

$$BN = \sqrt{BE^2 + EN^2},\ BN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}.$$

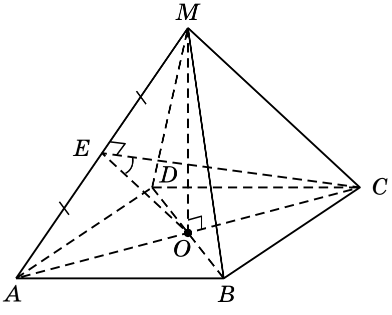
Наконец, из ΔBND найдем искомый угол:

$$\cos\alpha = \frac{BN}{BD} = \sqrt{\frac{7}{12}} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3},\ \text{откуда } \alpha = \arccos\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Ответ: $\alpha = \text{acrcos}\frac{\sqrt{7}}{3}$.

К таблице 11

3. Пусть E — середина ребра AM. Так как диагонали AC и BD квадрата перпендикулярны и $MO \perp AC$, то плоскость $(MBD) \perp AC$. Значит, плоскость (MBD) и есть плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно AC. Соединим точку E с точками O и C. Поскольку ΔMDC правильный, то $AM \perp CE$. В ΔAOM OE — медиана и высота, тогда $OE \perp AM$. Следовательно, $\angle OEC = \alpha$ — искомый угол.



Из ΔABC $AC = \sqrt{2}$, тогда $OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; из ΔAOE, где $AO = OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $AE = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{1}{2}$, найдем $OE = \sqrt{AO^2 - AE^2}$, или $OE = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$; из ΔECM $CE = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

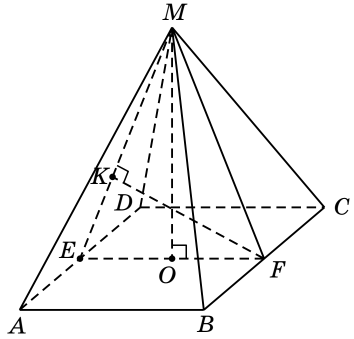
Наконец, из ΔOEC по теореме косинусов имеем $OC^2 = OE^2 + CE^2 - 2 \cdot OE \cdot CE \cdot \cos\alpha$, или $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

К таблице 30

2. Так как $BC \parallel AD$, то $BC \parallel$ плоскости AMD. Значит, расстояние между скрещивающимися прямыми AM и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости AMD.

Соединим точки E и F соответственно середины ребер AD и BC. Тогда высота FK ΔMEF будет искомым расстоянием. В ΔMEF $EF = AB = 1$; ME найдем из ΔAME, где $AE = \dfrac{1}{2}$, $AM = 1$, $ME = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



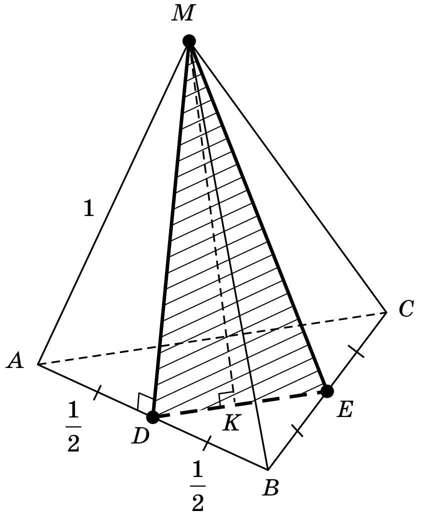
Высоту MO пирамиды найдем из ΔMOE: $MO = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, где $OE = \dfrac{1}{2}EF$.

Из сравнения площадей ΔMEF имеем: $\frac{1}{2} \cdot ME \cdot FK = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot MO$,

откуда $FK = \frac{EF \cdot MO}{ME} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

К таблице 36



4. Так как по условию тетраэдр единичный, а точки D и E соответственно середины ребер AB и BC, то сечение MDE — равнобедренный треугольник, тогда $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} DE \cdot MK$, где $DE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}$ — средняя линия ΔABC, MK — высота сечения.

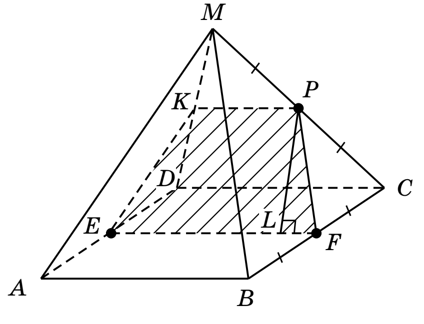
Из ΔMDK $MK = \sqrt{MD^2 - DK^2}$,

$DK = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{4}$, $MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $MK = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

Тогда $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{16}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{16}$.

К таблице 37



4. По условию все ребра правильной пирамиды равны 1. Так как E, F и P — середины соответственно ребер AD, BC и MC, то $EF = AB = 1$, $KP = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2}$ — средняя линия ΔMDC, аналогично $KE = PF = \frac{1}{2} MA = \frac{1}{2}$.

Следовательно, сечение, проходящее через данные точки, — равнобедренная трапеция. Проведем высоту трапеции

PL, тогда $LF = \dfrac{1}{2}(EF - KP) = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$; из ΔPLF $PL = \sqrt{PF^2-LF^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

Значит, $S_{\text{сеч.}} = = \dfrac{1}{2}(EF + KP)\cdot PL = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}.$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

К таблице 45

1 (см. рис. к табл. 52, № 2).

При вращении правильного шестиугольника со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно радиусу, проведенному в эту вершину, получим два равных усеченных конуса с общим основанием и два «пустых» конуса.

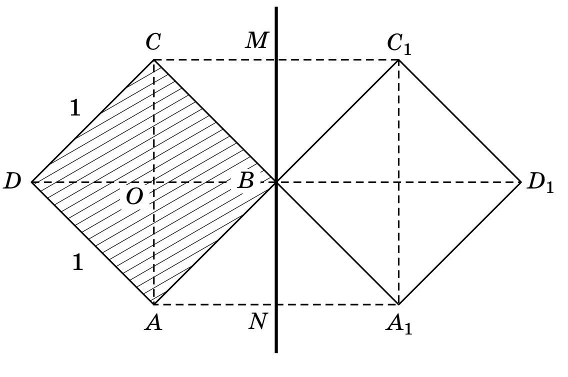
Следовательно, $S = 2(\pi l(R + r) - \pi r_1 l) = 2\pi l(R + r - r_1)$, где $l = EF = 1$; $R = EC = 2$; $r = EM = \dfrac{3}{2}$; $r_1 = DM = \dfrac{1}{2}$, тогда

$$S = 2\pi\cdot 1\cdot\left(2+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) = 2\pi\cdot 3 = 6\pi.$$

Ответ: 6π.

К таблице 46

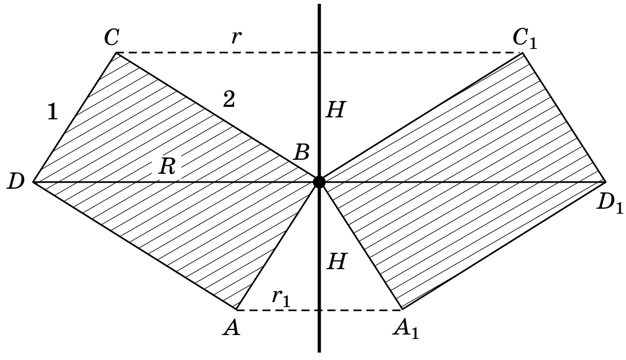
1. Заметим, что $\Delta DOC = \Delta CMB$ и $\Delta AOD = \Delta ABN$. Равные треугольники имеют равные площади, следовательно, квадрат $ABCD$ можно заменить прямоугольником $ACMN$. Тогда при вращении прямоугольника $ACMN$ получим цилиндр с осевым сечением ACC_1A_1. Значит, $V_{\text{т.в.}} = \pi R^2 H$, где $R = OB = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $H = 2R = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$.



$$V_{\text{т.в.}} = \pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

К таблице 47



4. При вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой, перпендикулярной диагонали BD, проведенной через точку B, получим два усеченных конуса с общим основанием и два «пустых» конуса с основаниями CC_1 и AA_1. Введем обозначения, показанные на рисунке.

Высоту H найдем из соотношения: $\frac{1}{2}CD \cdot CB = \frac{1}{2}BD \cdot H$, или $1 \cdot 2 = R \cdot H$. Но $R = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{5}$, тогда $H = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $r = \sqrt{2^2 - H^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$; $r_1 = \sqrt{1 - H^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

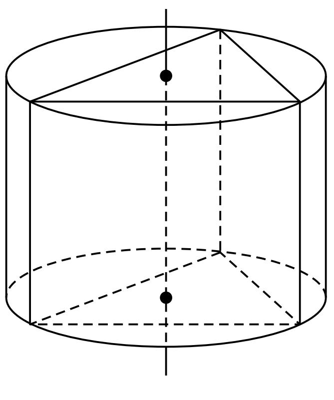
Следовательно, искомый объем будет равен:

$$V_{\text{т.в.}} = V_{CDB} - V_{CBC_1} + V_{ADB} - V_{ABA_1} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{\pi H}{3}(R^2 + r_1^2 + Rr_1) - \frac{1}{3}\pi r_1^2 H = \frac{\pi H}{3}(2R^2 + r^2 + r_1^2 + R \cdot r + R \cdot r_1 - r^2 - r_1^2) = \frac{\pi HR}{3} \cdot (2R + r + r_1).$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(2\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{5}) = \frac{2\pi}{3} \cdot 3\sqrt{5} = 2\pi\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\pi\sqrt{5}$.

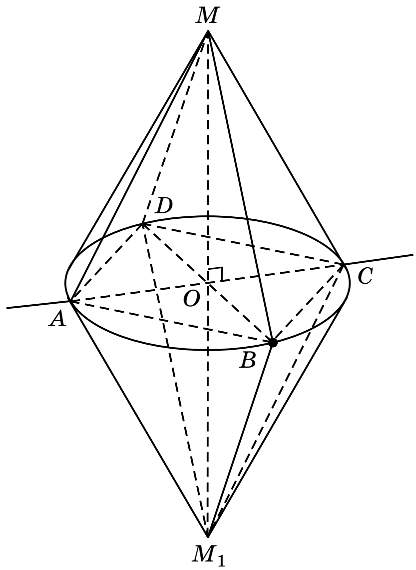


К таблице 56

2. При вращении правильной призмы, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, проходящей через центры оснований, получим цилиндр, у которого высота $H = 1$, радиус основания $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H = \pi \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{3}$.

К таблице 57



2. При вращении правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой AC, образуются два равных конуса радиуса $OC = R$ и высоты $MO = H$.

Тогда $V_{\text{т.в.}} = 2V_{\text{кон.}} = 2 \cdot \dfrac{1}{3}\pi R^2 H =$

$= \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$, где $R = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Высоту H найдем из прямоугольного ΔAOM, где $AM = 1$, тогда

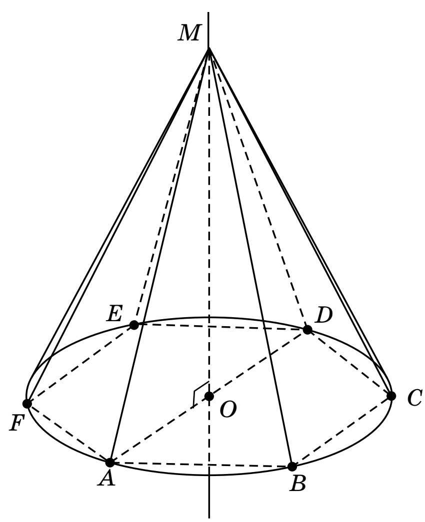
$H = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно,

$V_{\text{т.в.}} = \dfrac{2}{3}\pi \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

К таблице 58



1. При вращении правильного шестиугольника $MABCDEF$ вокруг прямой, содержащей высоту MO, получим конус, у которого радиус основания $AO = R$, а высота $MO = H$. Тогда $V_{\text{т.в.}} =$ $= V_{\text{кон.}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

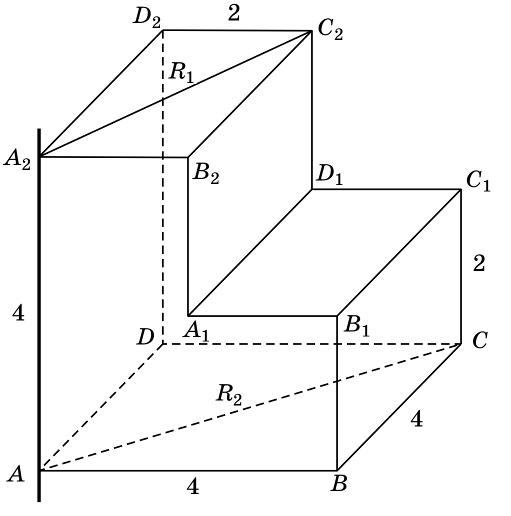
По условию $AB = 1$ — сторона основания, $AM = 2$ — длина бокового ребра. Известно, что в правильном шестиугольнике $AB = a = R = AO = 1$; из ΔAOM найдем $MO = H = \sqrt{AM^2 - AO^2}$, или $H = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, тогда

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

К таблице 59

2. Тело,полученное вращением многогранника вокруг прямой AA_2, состоит из двух цилиндров, у которых радиусы оснований равны R_1 и R_2, а высоты равны $A_1B_2 = CC_1 = H = 2$.



Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_1 + V_2 = \pi R_1^2 H + \pi R_2^2 H = \pi H(R_1^2 + R_2^2)$. Из $\Delta A_2B_2C_2$, где $A_2B_2 = 2$, $B_2C_2 = BC = 4$, имеем $R_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Аналогично из ΔABC $R_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. Значит, $V_{\text{т.в.}} = \pi \cdot 2 \cdot (20 + 32) = 104\pi$.

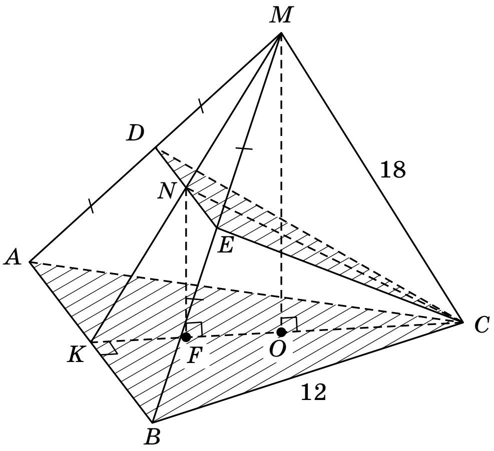
Ответ: 104π.

К таблице 65

12. Из точки C проведем перпендикуляр CN к DE. Из точки N опустим перпендикуляр NF на плоскость основания. CK — медиана, биссектриса и высота ΔABC. $NF \perp DE$ и $CN \perp DE$, значит, $\angle NCF$ — линейный угол между плоскостями CDE и ABC.

В ΔABC $BC = OC \cdot \sqrt{3}$,

$$OC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$



Из ΔMOC $MO = \sqrt{18^2-(4\sqrt{3})^2} = \sqrt{324-48} = \sqrt{276} = 2\sqrt{69}$.

$NF = \dfrac{1}{2}MO = \sqrt{69}$ — средняя линия ΔKOM. Из ΔCKB, где $BC = 12$, $BK = 6$, $KC = \sqrt{144-36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

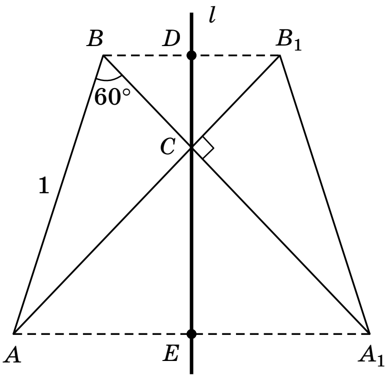
Так как $CO = 2 \cdot OK$ и $OF = FK$, то $FC = \dfrac{5}{6}KC = 5\sqrt{3}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \angle NCF = \dfrac{NF}{FC} = \dfrac{\sqrt{69}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{23}}{5}$, откуда

$\angle NCF = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

К таблице 78



3. Рассмотрим осевое сечение тела вращения. Из ΔABC $BC = AB \cdot \cos 60° = \dfrac{1}{2}$; $AC = AB \cdot \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

По условию l — биссектриса прямого угла BCB_1, значит, $BD = DC = x = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{AB \cdot \cos 60°}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot 1/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

$AE = CE = y = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{AB \cdot \sin 60°}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Следовательно, $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{BCB_1} - V_{ACA_1} = \dfrac{1}{3}\pi(x + y)(x^2 + xy + y^2) - \left(\dfrac{\pi}{3}x^3 + \dfrac{\pi}{3}y^3\right) = \dfrac{1}{3}\pi(x + y)(x^2 + xy + y^2) - \dfrac{\pi}{3}(x + y)(x^2 - xy + y^2) =$

$= \frac{2\pi}{3} xy(x+y) = \frac{\pi \cdot 1^3}{6} \sin 120° \cdot \sin 105°.$

Но $\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 105° = \sin(60° + 45°) =$

$= \sin 60° \cdot \cos 45° + \cos 60° \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$

Значит, $V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) = \frac{\pi\sqrt{6}}{48}(\sqrt{3}+1).$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{6}}{48}(\sqrt{3}+1).$

К таблице 79

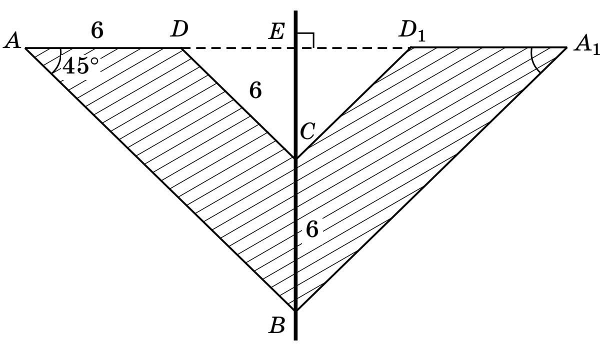
2. Пусть $a = 2\sqrt{7/\pi}$ и $b = 2\sqrt{1/7\pi}$ соответственно длина и ширина прямоугольника. При вращении его вокруг прямой, проходящей через середины бóльших сторон, получим цилиндрическую поверхность.

Тогда $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H)$, где $R = \frac{1}{2}a = \sqrt{7/\pi}$, $H = b = 2\sqrt{1/7\pi}$, значит, $S_{\text{полн.}} = 2\pi \cdot \sqrt{7/\pi}(\sqrt{7/\pi} + 2\sqrt{1/7\pi}) = 2\pi \cdot \frac{7}{\pi} + 4\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 14 + 4 = 18.$

Ответ: 18.

К таблице 80

6. Рассмотрим осевое сечение тела вращения, полученного вращением равнобедренной трапеции $ABCD$ с острым углом в 45° вокруг боковой стороны BC, длина которой равна DC. Так как $\angle A = 45°$, то $\angle CDE = 45°$, тогда $DE = CE = r$.



По условию $AD = DC = CB = 6$.

Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{ABA_1} - V_{DCD_1}$; в ΔDEC $DE = CE = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$. $V_{ABA_1} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H =$

$$= \frac{1}{3}\pi(AD + DE)^2 \cdot BE = \frac{1}{3}\pi(6+3\sqrt{2})^2 \cdot (6+3\sqrt{2}) = \frac{1}{3}\pi \cdot 9(2+\sqrt{2})^2 \cdot 3(2+\sqrt{2}) =$$

$$= 9\pi(2+\sqrt{2})^3 = 9\pi(8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}) = 9\pi(20+14\sqrt{2}) = 18\pi(10+7\sqrt{2});$$

$$V_{DCD_1} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot DE^2 \cdot CE = \frac{1}{3}\pi(DE)^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{2})^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 27 \cdot 2\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\pi.$$

Значит, $V_{\text{т.в.}} = 18\pi(10+7\sqrt{2}) - 18\sqrt{2}\pi =$

$$= 18\pi(10+7\sqrt{2}-\sqrt{2}) = 18\pi \cdot (10+6\sqrt{2}) = 36\pi(5+3\sqrt{2}).$$

Ответ: $36\pi(5+3\sqrt{2})$.

ОТВЕТЫ

7 класс

Таблица 1

1. $\angle PLR = 100°$; $\angle RLS = 80°$. **2.** 160°. **3.** 150°. **4.** 90°. **5.** 160°. **6.** 105°. **7.** 135°. **8.** $\angle AMN = \angle BMN = 90°$.

Таблица 2

1. $\angle 3 = 150°$; $\angle 4 = 30°$. **2.** 60°. **3.** 135°. **4.** $\angle 2 = 50°$; $\angle 3 = 40°$; $\angle 4 = 140°$. **5.** $\angle 2 = \angle 3 = 55°$; $\angle 4 = 35°$. **6.** $\angle 1 = 110°$; $\angle 2 = \angle 3 = 35°$. **7.** 180°. **8.** 110°.

Таблица 4

1. $EF = 15$; $EM = MF = 10$. **2.** 50. **3.** 10. **4.** $RT = TS = 12$, $RS = 21$. **5.** 10; 10. **6.** 6; 6. **7.** 9. **8.** 15.

Таблица 5

1. 40°. **2.** 60°. **3.** 40°. **4.** 20°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** 80°. **8.** 50°.

Таблица 7

1. $\angle N = 60°$; $\angle M = 30°$. **2.** $\angle A = 60°$; $\angle ABC = 30°$. **3.** 43°. **4.** 68°. **5.** 65°. **6.** 30°; 30°. **7.** 74°. **8.** 55°.

Таблица 8

1. $\angle M = 80°$; $\angle N = 60°$; $\angle K = 40°$. **2.** $\angle P = \angle R = 67°30'$; $\angle S = 45°$. **3.** $\angle Q = \angle M = 40°$; $\angle L = 100°$. **4.** $\angle A = 40°$; $\angle C = 100°$. **5.** $\angle S = 70°$; $\angle STR = 40°$. **6.** $\angle BAC = \angle B = 72°$; $\angle C = 36°$. **7.** $\angle M = 75°$; $\angle MNP = 70°$; $\angle P = 35°$. **8.** $\angle P = 25°$; $\angle TSP = 40°$.

Таблица 9

1. $\angle A = 50°$; $\angle C = 70°$. **2.** $\angle M = \angle K = 50°$; $\angle N = 80°$. **3.** $\angle A = 30°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 90°$. **4.** $\angle D = 60°$; $\angle E = 40°$. **5.** $\angle A = \angle B = 45°$; $\angle D = 90°$. **6.** 60°; 60°. **7.** $\angle S = \angle P = 65°$; $\angle SKP = 50°$. **8.** $\angle P = \angle R = 45°$; $\angle PRQ = 90°$. **9.** $\angle D = \angle F = 45°$; $\angle DEF = 90°$. **10.** $\angle BAC = 60°$; $\angle ABC = 30°$; $\angle C = 90°$. **11.** $\angle L = 65°$; $\angle MKN = \angle KNL = 45°$; $\angle NKL = 70°$. **12.** $\angle QOC = \angle MOR = 55°$; $\angle M = 45°$; $\angle R = 80°$. **13.** $\angle KMN = 70°$; $\angle KML = \angle LMN = 35°$; $\angle MLK = 105°$; $\angle MLN = 75°$. **14.** $\angle PMA = 50°$; $\angle APM = 60°$; $\angle A = 70°$. **15.** $\angle MSL = 70°$; $\angle L = 40°$. **16.** $\angle MPL = \angle MLP = 60°$; $\angle PNL = \angle MNL = 90°$; $\angle PKM = \angle PKL = 90°$. **17.** $\angle C = 90°$; $\angle B = 50°$; $\angle A = 40°$. **18.** $\angle P = 40°$; $\angle PTS = 60°$. **19.** $\angle T = 40°$; $\angle MRK = 10°$; $\angle KPT = 50°$; $\angle RKT = 90°$. **20.** $\angle ABD = 70°$; $\angle D = 30°$; $\angle ABC = 40°$; $\angle CBD = 30°$; $\angle BCD = 120°$. **21.** $\angle P = 30°$; $\angle KMP = 50°$; $\angle NMP = 30°$; $\angle MNP = 120°$. **22.** $\angle MSN = 120°$; $\angle MSK = 35°$; $\angle PSN = 25°$; $\angle MKS = 110°$; $\angle SPN = 130°$; $\angle SKP = 70°$; $\angle SPK = 50°$; $\angle KSP = 60°$. **31.** 165°. **32.** 125°.

Таблица 10

1. $MP = 27$; $PN = 9$. **2.** 54. **3.** 18. **4.** 26. **5.** 110°. **6.** 15°. **7.** 9,75. **8.** 14. **9.** $\angle T = 50°$; $\angle TPS = \angle TSP = 65°$. **10.** 115°. **11.** $\angle KNM = 90°$; $\angle NKM = 36°$; $\angle KNM = 54°$. **12.** $CB = 27$; $CD = 9$. **13.** 6. **14.** 44. **15.** 45°. **16.** 70°.

Таблица 12

1. 14. **2.** 7. **3.** 8. **4.** 10. **5.** 13. **6.** 13. **7.** 7. **8.** 4.

8 класс

Таблица 2

1. 22. **2.** 32. **3.** 40. **4.** 52. **5.** 60. **6.** 32. **7.** 48. **8.** 48. **9.** 64. **10.** 16. **11.** 20. **12.** 112. **13.** 72. **14.** 28. **15.** 60. **16.** 36.

Таблица 3

1. $\angle KFE = \angle KNE = \angle FKN = \angle FEN = 90°$. **2.** $\angle S = \angle L = 70°$; $\angle SPL = \angle SML = 110°$. **3.** $\angle LKN = \angle LMN = \angle KLM = \angle KNM = 90°$. **4.** $\angle B = \angle D = \angle DAB = \angle DCB = 90°$. **5.** $\angle ADC = \angle DCB = \angle CBA = \angle DAB = 90°$. **6.** $\angle M = 60°$; $\angle MKL = \angle MSL = 120°$. **7.** $\angle MRK = \angle RKL = \angle MLK = \angle LMR = 90°$. **8.** $\angle N = \angle T = 70°$; $\angle S = \angle NPT = 110°$.

Таблица 4

1. $\angle M = \angle R = 70°$; $\angle P = \angle N = 110°$. **2.** $\angle A = \angle C = 60°$; $\angle B = \angle D = 120°$. **3.** $\angle R = \angle L = 60°$; $\angle S = \angle M = 120°$. **4.** $\angle TPK = \angle PKS = \angle KST = \angle STK = 90°$. **5.** $\angle DAB = \angle DCB = 60°$; $\angle ADC = \angle ABC = 120°$. **6.** $\angle RMK = \angle MKL = \angle KLR = \angle MRL = 90°$. **7.** $\angle FSM = \angle FTM = 80°$; $\angle SFT = \angle SMT = 100°$. **8.** $\angle DAB = \angle DCB = 36°$; $\angle ADC = \angle ABC = 144°$.

Таблица 5

1. 8,5; 8,5; 9,5; 9,5. **2.** 6,75; 6,75; 11,25; 11,25. **3.** Квадрат со стороной **9**. **4.** 7,2; 7,2; 10,8; 10,8. **5.** 8; 8; 10; 10. **6.** 8; 8; 10; 10. **7.** 4; 4; 14; 14. **8.** 8; 8; 10; 10.

Таблица 6

1. $\angle TKF = 90°$; $\angle TMF = 120°$. **2.** $\angle KRT = 90°$; $\angle KFT = 135°$. **3.** $\angle ABC = 105°$; $\angle C = 125°$; $\angle D = 55°$. **4.** $\angle M = 70°$; $\angle T = 50°$; $\angle MLS = 110°$; $\angle LST = 130°$. **5.** $\angle T = \angle TRF = 70°$; $\angle TEF = \angle F = 120°$. **6.** $\angle NOE = 65°$; $\angle ONM = 115°$; $\angle OEM = 75°$; $\angle NME = 105°$. **7.** $\angle MSK = 65°$; $\angle SMN = 115°$; $\angle MNK = 100°$; $\angle SKN = 80°$. **8.** $\angle NAB = 110°$; $\angle ANM = 70°$; $\angle ABM = 100°$; $\angle NMB = 80°$.

Таблица 7

1. 44. **2.** 84. **3.** 132. **4.** 20. **5.** 34. **6.** 84. **7.** 62. **8.** 68,8.

Таблица 8

1. 36. **2.** 72. **3.** 100. **4.** 33. **5.** 40. **6.** $75\sqrt{3}$. **7.** $48\sqrt{3}$. **12.** 64.

Таблица 9

1. 864. **2.** 160. **3.** 40. **4.** 768. **5.** $84{,}5\sqrt{3}$. **6.** 480,5. **7.** 48. **8.** $373\frac{1}{3}$. **9.** 48. **10.** 140. **11.** 48. **12.** 262,5. **13.** 144. **14.** $48\sqrt{3}$. **15.** 200. **16.** 48.

Таблица 10

1. 165. **2.** 18. **3.** 60. **4.** 169. **5.** $16\sqrt{3}$. **6.** 80. **7.** 96. **8.** 84. **9.** 8. **10.** 18,5. **11.** $\sqrt{191}/4$. **12.** 270. **13.** $24\sqrt{5}$. **14.** 168. **15.** 196. **16.** 64.

Таблица 11

1. 144. **2.** 176. **3.** 300. **4.** 108. **5.** 96. **6.** 294. **7.** 48. **8.** $58\sqrt{3}$. **9.** 292. **10.** 180. **11.** 784. **12.** 32. **13.** 216. **14.** 45. **15.** 204. **16.** 160.

Таблица 12

1. $5\sqrt{3}$. **2.** $8\sqrt{2}$. **3.** $\sqrt{82}$. **4.** 10. **5.** $5\sqrt{3}$. **6.** 8. **7.** 8. **8.** $12\sqrt{3}$. **9.** 7,2. **10.** 10. **21.** $16\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. **12.** 4. **13.** 13. **14.** 8. **15.** $\sqrt{937}$. **16.** 2. **17.** $\sqrt{17}$. **18.** 5. **19.** 6. **20.** 15. **21.** 10. **22.** 15. **23.** 20. **24.** 120/13. **25.** 29. **26.** 12/7. **27.** 9. **28.** 34. **29.** 15; 20. **30.** 7. **31.** 6. **32.** 22. **33.** 9. **34.** 10. **35.** 3. **36.** 26. **37.** $8\sqrt{3}$. **38.** 10.

Таблица 13

1. 100. **2.** 5. **3.** $3\sqrt{3}$. **4.** $x = 72$; $y = 98$. **5.** 13,125. **6.** $x = 5$; $y = 7$. **7.** $x = 14$; $y = 21$. **8.** 48. **9.** $x = 40$; $y = 90$. **10.** $x = 39$; $y = 52$. **11.** 6. **12.** 60. **13.** 168. **14.** 72. **15.** 18. **16.** 48. **17.** 64. **18.** 92. **19.** 60. **20.** 7,5. **21.** 10,8. **22.** $x = 11\frac{3}{7}$; $y = 8\frac{4}{7}$. **23.** $5\frac{1}{3}$. **24.** $x = 54$; $y = 48$.

Таблица 14

1. 2,5. **2.** 25,6. **3.** $x = 4$; $y = 8$. **4.** 4. **5.** $x = 24$; $y = 40$. **6.** $x = 20$; $y = 16$. **7.** $x = 11\frac{3}{7}$; $y = 4\frac{4}{7}$. **8.** $2\frac{1}{7}$. **9.** $37\frac{1}{3}$. **10.** $x = 8$; $y = 12$. **11.** $8\frac{4}{7}$. **12.** $x = 9{,}6$; $y = 22{,}4$. **13.** 16. **14.** $x = 12$; $y = 4$. **15.** $x = 4$; $y = 6$. **16.** 12.

Таблица 16

1. 62. **2.** $AK = 6$; $KC = 12$. **3.** $RS = 8$; $RF = 6$. **4.** 28. **5.** 18. **6.** $9\sqrt{3}/2$. **7.** $3\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$. **8.** $EF = MN = 24$.

Таблица 17

1. $KN = 24$; $MT = 50/13$; $TN = 288/13$. **2.** $NL = 9$; $LM = 16$; $NK = 15$; $KM = 20$. **3.** $ME = 4{,}5$; $MK = 7{,}5$; $KN = 10$. **4.** $MT = 25/13$; $TN = 144/13$. **5.** $KN = 5\sqrt{21}$; $ME = 4$; $EN = 21$. **6.** $KN = 30$; $KM = 40$; $NF = 18$; $FM = 32$. **7.** $KM = 5\sqrt{61}$; $KN = 6\sqrt{61}$; $MN = 61$; $MT = 25$; $TN = 36$. **8.** $MN = 9$; $ME = EN = 4{,}5$; $EF = 0{,}5$; $FN = 4$.

Таблица 18

1. $12\sqrt{2}$. **2.** 12. **3.** $6\sqrt{3}$. **4.** $4(4 + \sqrt{3})$. **5.** $10(\sqrt{3} + 1)$. **6.** $10\sqrt{6}/3$. **7.** $6\sqrt{6}$. **8.** $5\sqrt{2}$.

Таблица 19

1. 2/3. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$. **3.** $192\sqrt{6}$. **4.** $\sin\angle K = 3/\sqrt{10}$; $\cos\angle K = 1/\sqrt{10}$; $\mathrm{tg}\,\angle K = 3$; $\mathrm{ctg}\,\angle K = 1/3$. **5.** $\sin\angle B = 2\sqrt{6}/5$; $\cos\angle B = 1/5$; $\mathrm{tg}\,\angle B = 2/\sqrt{6}$; $\mathrm{ctg}\,\angle B = 1/2\sqrt{6}$. **6.** $\sin\alpha = 12/13$; $\cos\alpha = 5/13$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 12/5$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = 5/12$. **7.** $\sin\angle K = 0{,}8$; $\cos\angle K = 0{,}6$. **8.** $\sin\angle R = \sqrt{3}/2$; $\mathrm{tg}\,\angle R = \sqrt{3}$. **9.** $\cos\alpha = 0{,}4$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2/\sqrt{21}$. **10.** $\sin\angle A = \sqrt{2}/6$; $\mathrm{tg}\,\angle A = \sqrt{17}/17$. **11.** $\cos\angle B = 7/25$; $\mathrm{ctg}\,\angle B = 7/24$. **12.** $\sin\alpha \approx 0{,}46$; $\mathrm{tg}\,\alpha \approx 0{,}52$. **13.** $\sin\angle A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$; $\cos\angle A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$. **14.** 0,8.

Таблица 20

1. 15. **2.** $AM = 10$; $BM = 10\sqrt{5}$. **3.** $AB = 12$; $CD = 16$. **4.** 2. **5.** 20; 20. **6.** $1{,}2\sqrt{6}$. **7.** 20. **8.** 40; 40. **9.** 14. **10.** 6. **11.** 24; 24. **12.** 8,5; 8,5. **13.** $12(2 + \sqrt{3})$. **14.** 70. **15.** $2{,}8\sqrt{51}$.

Таблица 21

1. 4. **2.** 18°. **3.** 157°. **4.** 45°. **5.** 100°. **6.** 75°. **7.** $5\sqrt{3}$. **8.** 80°. **9.** 30. **10.** 10. **11.** 114°. **12.** 16. **13.** 10. **14.** 28,125. **15.** 15. **16.** 1. **17.** $8\sqrt{3}$. **18.** 14,4. **19.** 12. **20.** $30\sqrt{3}$. **21.** 100°. **22.** 7,5. **23.** $8\sqrt{3}$. **24.** 10. **25.** 15. **26.** $8\sqrt{5}$. **27.** 6. **28.** $4\sqrt{145}$. **29.** 157°30′. **30.** 70°. **31.** 40°. **32.** 123°45′.

Таблица 22

1. 20. **2.** 24°. **3.** 38°. **4.** 7. **5.** 24. **6.** 10. **7.** $2\sqrt{61}$. **8.** $20\sqrt{3}$. **9.** 130°. **10.** 4. **11.** 10. **12.** 4,8. **13.** 180. **14.** 80. **15.** 15. **16.** $64\sqrt{3}$.

Таблица 23

1. 40. **2.** 80. **3.** $\angle L = \angle M = 63°$; $\angle E = 54°$. **4.** $\angle A = 66°$; $\angle B = 24°$; $\angle ACB = 90°$. **5.** $5\sqrt{3}$. **6.** 100°. **7.** 4. **8.** 6. **9.** 9. **10.** $20(\sqrt{3} + 1)$. **11.** 25/8. **12.** 4. **13.** 16. **14.** 10. **15.** $12\sqrt{3}$. **16.** 60°. **17.** 216. **18.** 128. **19.** 40. **20.** 3. **21.** 8. **22.** 15. **23.** 4. **24.** 6. **25.** 8. **26.** 13. **27.** 6. **28.** $48\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$. **29.** 8. **30.** $4(\sqrt{3} + 1)$. **31.** $ME = 8\sqrt{5}$; $EF = 12$. **32.** 96. **33.** $AB = 24$; $DC = 30$. **34.** $\angle M = 127°$; $\angle N = 105°$. **35.** 10. **36.** 12. **37.** 30. **38.** $MN = 6$; $NK = 18$; $KL = 21$; $LM = 9$. **39.** $5\sqrt{3}$. **40.** $100\sqrt{2}$. **41.** 36. **42.** 66°; 66°; 114°; 14°. **43.** 94,08. **44.** 384. **45.** 16. **46.** 10. **47.** $48\sqrt{3}$. **48.** 4. **49.** 10. **50.** $5\sqrt{2}$. **51.** 3. **52.** 20. **53.** 80. **54.** 20. **55.** 3. **56.** 168.

Таблица 24

2. $\overrightarrow{DF}$. **3.** $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. **4.** $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. **5.** $\overrightarrow{RK} = -\vec{n}$; $\overrightarrow{KT} = -\vec{m} + \vec{n}$; $\overrightarrow{SR} = \vec{m} - \vec{n}$. **6.** $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$; $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\vec{m} - \vec{n}$. **7.** $\overrightarrow{KO} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. **8.** $\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$; $\overrightarrow{KB} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$. **9.** $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$. **10.** $\overrightarrow{KE} = \frac{7}{5}\vec{m} - \frac{2}{5}\vec{n}$. **11.** $\overrightarrow{BM} = -\vec{m}$; $\overrightarrow{NC} = \vec{n}$; $\overrightarrow{MN} = -\vec{m} + \vec{n}$; $\overrightarrow{BN} = -2\vec{m} + \vec{n}$. **16.** 12. **17.** 6. **18.** 13. **19.** 8. **20.** 2. **21.** 32. **22.** 36. **23.** $\sqrt{73}$. **24.** $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{194}$; $|\overrightarrow{CD}| = 5\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{89}$.

Таблица 25

1. $MN = 5$; $DC = 3$. **2.** 6. **3.** 8. **4.** 4. **5.** 6. **6.** 9. **7.** 9,5. **8.** 0,5. **9.** 30. **10.** 14. **11.** 12. **12.** 9,8. **13.** $3\sqrt{2}/2$. **14.** 5. **15.** 8. **16.** 10.

9 класс

Таблица 1

1. $\overrightarrow{LN} = \vec{m} - \vec{n}$; $\overrightarrow{KM} = \vec{m} + \vec{n}$. **2.** $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{CA} = -\vec{a} + \vec{b}$. **3.** $\overrightarrow{EK} = -\vec{m} + \vec{n}$; $\overrightarrow{FM} = \vec{m} + \vec{n}$. **4.** $\overrightarrow{TM} = \vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{ST} = -\vec{a} - \vec{b}$. **5.** $\overrightarrow{FT} = \frac{3}{4}\vec{m} + \frac{3}{4}\vec{n}$.

6. а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) −1; д) −1; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и), к) число не существует.

Таблица 2

1. $O(0; 0)$, $K(3; 0)$, $M(0; 2)$. **2.** $O(0; 0)$, $T(6; 0)$, $M(6; 3)$, $C(0; 3)$. **3.** $Q(-2; 2)$, $P(2; 2)$, $N(2; -2)$. **4.** $T(14; -6)$. **5.** $\overrightarrow{MN}\{-5; -1\}$. **6.** $M(4; 4)$. **7.** $C(-2; 32)$. **8.** 16 или –8. **9.** 3 или –2,6. **10.** $\sqrt{5}$. **11.** $\sqrt{26}$. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** $M(-3; 3)$. **14.** $C(2{,}5; 4)$. **15.** $K(18; 12)$. **16.** 16.

Таблица 3

1. 50; 50. **2.** $2\sqrt{85}$. **3.** 26. **4.** $\angle A = 60°$; $\angle B = 30°$; $\angle C = 90°$. **5.** $2\sqrt{109}$. **6.** $2\sqrt{53}$.

Таблица 4

1. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$. **2.** B, C, D. **3.** $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$. **4.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **5.** $(x - 3)^2 + y^2 = 13$. **6.** $x^2 + y^2 = 13$. **7.** $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$. **9.** а) (2; –3), (2; 3); б) (–2; 3), (2; 3). **10.** а) (2; 7), (2; 1); б) (5; 4), (–1; 4). **11.** $x^2 + y^2 = 40$. **12.** $x^2 + (y - 2)^2 = 10$.

Таблица 5

1. 4. **2.** $y + 5x = 0$. **3.** 1. **4.** $7x - y + 3 = 0$. **5.** 13,5. **6.** $7x - y + 6 = 0$.

Таблица 6

1. $4\sqrt{5}$. **2.** 24. **3.** 60. **4.** $25\sqrt{2}/4$. **5.** $5\sqrt{3}$. **6.** 50. **7.** 30. **8.** $80\sqrt{3}$. **9.** $60\sqrt{2}$. **10.** 128. **11.** 169. **12.** $36\sqrt{3}$.

Таблица 7

1. $x = 8\sqrt{2}$; $y = 4\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$. **2.** $x \approx 19{,}9$; $y \approx 25{,}6$. **3.** $x \approx 16{,}3$; $y \approx 22{,}3$. **4.** $x \approx 13{,}9$; $y \approx 9{,}8$. **5.** $x \approx 1{,}8$; $y \approx 0{,}5$. **6.** $x \approx 8{,}8$; $y \approx 12$. **7.** $x \approx 10{,}4$; $y \approx 14{,}1$. **8.** $x \approx 14{,}1$; $y \approx 19{,}3$. **9.** $x = 6{,}5$; $y \approx 4{,}9$. **10.** $x \approx 8{,}3$; $y \approx 14{,}3$. **11.** $x \approx 9{,}9$; $y \approx 9{,}6$. **12.** $x = 1$; $y = \sqrt{6}/3$. **13.** $x \approx 27{,}3$; $y \approx 17{,}8$. **14.** $x = \sqrt{52 - 24\sqrt{2}} \approx 4{,}2$; $y = \sqrt{52 + 24\sqrt{2}} \approx 9{,}3$. **15.** $x = y \approx 11$. **16.** $x = 4\sqrt{19}$; $y = 4\sqrt{7}$.

Таблица 8

1. $x = 4\sqrt{14}/3$; $y = 26/3$. **2.** $\sqrt{63}$. **3.** $x \approx 5{,}8$; $y \approx 4{,}1$. **4.** $x \approx 15{,}5$; $y \approx 18{,}4$. **5.** $x \approx 3{,}9$; $y \approx 10{,}3$. **6.** $x = 13$; $y = 21$. **7.** $x = 7$; $y = 15$. **8.** $x = 18$; $y = 48$. **9.** $x = 9$; $y = 12$. **10.** 13. **11.** $x = 16{,}8$; $y = 36$. **12.** $x = 8$; $y = 30$. **13.** $x = 168\sqrt{2}/5$; $y = 25$. **14.** $x = 10$; $y = 15$. **15.** $x_1 = 25$; $y_1 = 25$; $x_2 \approx 10{,}5$; $y_2 \approx 32{,}2$; $x_3 \approx 36{,}7$; $y_3 \approx 24{,}5$. **16.** $x = 20$; $y = 30$.

Таблица 9

1. 0. **2.** 0,6. **3.** 50. **4.** 0. **5.** 8. **6.** –12,5. **7.** 6,75. **8.** 2. **9.** 1. **10.** 90°. **11.** 60°. **12.** 0.

Таблица 10

1. $20\pi\sqrt{3}/9$. **2.** 60°. **3.** 144°; 216°. **4.** 225°; 135°. **5.** $\dfrac{7\pi}{\pi-3}$. **6.** 40π. **7.** 20π. **8.** 40π. **9.** 32π. **10.** $8\pi\sqrt{3}$. **11.** $7\sqrt{5}\,\pi$. **12.** $\dfrac{85}{6}\pi$. **13.** $32\pi/\sqrt{3}$. **14.** $98\pi\sqrt{5}/15$.

Таблица 11

1. 4. **2.** 64π. **3.** $100\pi/(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 \approx 49{,}5$. **4.** 12π. **5.** 20π. **6.** $18\pi\,(2-\sqrt{3})$. **7.** 4π. **8.** $144\pi(3-2\sqrt{2})$. **9.** π. **10.** 25π. **11.** $\dfrac{27}{32}\pi$. **12.** π. **13.** 50π. **14.** 25π. **15.** $60{,}5\pi$. **16.** $\dfrac{86\pi}{4-\pi}$.

Таблица 12

1. $12(2\pi-3\sqrt{3})$. **2.** $\approx 7{,}6$. **3.** 9. **4.** $\approx 413{,}2$. **5.** 10π. **6.** $100(\pi-2)$. **7.** $128\pi/3$. **8.** $16(4-\pi)$.

X–XI классы

Таблица 1

1. 90°. **2.** 60°. **3.** 60°. **4.** 60° **5.** 60°. **6.** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.. **7.** 60°. **8.** 90°. **9.** 60°. **10.** 90°. **11.** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **12.** 60°.

Таблица 2

1. 60°. **2.** 45°. **3.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **4.** $\arccos\dfrac{1}{4}$. **5.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **6.** $\arccos\dfrac{1}{4}$.

Таблица 3

1. 90°. **2.** 45°. **3.** 45°. **4.** 60°. **5.** 60. **6.** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **7.** $\arccos\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$. **8.** $\arccos\dfrac{1}{4}$. **9.** $\arccos\dfrac{3}{4}$. **10.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **11.** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **12.** 90°.

Таблица 4

1. 90°. **2.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **3.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Таблица 5

1. $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. **2.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Таблица 6

1. 30°. **2.** 60°. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **4.** $\frac{1}{4}$. **5.** 60°. **6.** $\arccos\frac{1}{4}$.

Таблица 7

1. 45°. **2.** 30°. **3.** 30°. **4.** 45°. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** 0°. **7.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **8.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.
9. 0°. **10.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **11.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **12.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 8

1. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** 60°. **4.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **5.** $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$. **6.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таблица 9

1. 90°. **2.** 45°. **3.** 30°. **4.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **5.** 60°. **6.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **7.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** 45°.
9. $\arcsin\frac{3}{\sqrt{42}}$. **10.** $\operatorname{arctg} 1{,}5$. **11.** $\arcsin\frac{4}{\sqrt{26}}$. **12.** $\arcsin\frac{3}{4}$.

Таблица 10

1. $\arccos\frac{1}{3}$. **2.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. **4.** $\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Таблица 11

1. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. **2.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 12

1. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **2.** $\frac{3}{\sqrt{15}}$. **3.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

Таблица 13

1. 90°. **2.** 90°. **3.** 90°. **4.** 45°. **5.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **6.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Таблица 14

1. $60°$. **2.** $90°$. **3.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$. **4.** $\arccos\frac{1}{7}$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Таблица 15

1. $60°$. **2.** $120°$. **3.** $90°$. **4.** $90°$. **5.** $60°$. **6.** $30°$. **7.** $30°$. **8.** $45°$. **9.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$. **11.** $\arccos\frac{1}{7}$. **12.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Таблица 16

1. $\arccos\frac{1}{3}$. **2.** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. **3.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.** $45°$.

Таблица 17

1. 0,2. **2.** 0,6. **3.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Таблица 18

1. 1. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** 1. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **7.** 1. **8.** $\sqrt{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

12. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Таблица 19

1. 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Таблица 20

1. 2. **2.** 2. **3.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **5.** $\sqrt{3}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** 1. **8.** $\frac{\sqrt{30}}{5}$. **9.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **10.** $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

11. $\sqrt{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Таблица 21

1. $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **2.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **3.** $\sqrt{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

Таблица 22

1. 1. **2.** 1. **3.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **8.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **9.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **10.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **12.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 23

1. 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **4.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **5.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **6.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **7.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **8.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Таблица 24

1. 1. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** $\sqrt{3}$. **4.** 1. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** $\frac{3}{2}$. **10.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **11.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таблица 25

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **2.** $\frac{1}{2}$.

Таблица 26

1. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. **2.** $\frac{9}{\sqrt{39}}$. **3.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **4.** $\frac{3}{\sqrt{39}}$.

Таблица 27

1. 1. **2.** 1. **3.** 1. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **7.** 1. **8.** 1. **9.** 1. **10.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **11.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **12.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 28

1. 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **6.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Таблица 29

1. 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\sqrt{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\sqrt{3}$. **6.** $\sqrt{3}$.

Таблица 30

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Таблица 31

1. $\frac{6}{\sqrt{39}}$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Таблица 32

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **5.** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. **6.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **7.** $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. **8.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **9.** $\frac{9}{8}$. **10.** $\frac{9}{8}$. **11.** $\frac{9}{8}$. **12.** $\sqrt{2}$.

Таблица 33

1. $\sqrt{5}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Таблица 34

1. 0,5. **2.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **3.** $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **6.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Таблица 35

1. 2. **2.** $\sqrt{6}$. **3.** 3. **4.** $\sqrt{6}$. **5.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **6.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Таблица 36

1. 0,25. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{16}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **4.** $\frac{\sqrt{11}}{16}$.

Таблица 37

1. 0,5. **2.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **3.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **4.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **5.** 0,5.

Таблица 38

1. $12\sqrt{2}$. **2.** $12\sqrt{2}$. **3.** $4\sqrt{5}$. **4.** $8\sqrt{5}$. **5.** $6\sqrt{3}$. **6.** 12.

Таблица 39

1. 2π. **2.** $\sqrt{2}\pi$. **3.** $4\sqrt{2}\pi$. **4.** 12π.

Таблица 40

1. 4π. **2.** 4π. **3.** $\frac{24\pi}{\sqrt{5}}$. **4.** $6\sqrt{5}\pi$.

Таблица 41

1. $\sqrt{2}\,\pi$. **2.** $\sqrt{2}\,\pi$. **3.** $2\sqrt{5}\,\pi$. **4.** $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$. **5.** 270π. **6.** 1440π.

Таблица 42

1. 14π. **2.** $26{,}4\pi$. **3.** 40π. **4.** 25π. **5.** $\frac{3\pi}{4}$. **6.** $\sqrt{3}\,\pi$.

Таблица 43

1. 4π. **2.** $\sqrt{3}\,\pi$. **3.** π. **4.** 6π.

Таблица 44

1. 4π. **2.** 3π. **3.** 3π.

Таблица 45

1. 12π. **2.** 6π.

Таблица 46

1. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2.** 3π.

Таблица 47

1. 2π. **2.** π. **3.** $\frac{8\pi}{\sqrt{5}}$. **4.** $2\sqrt{5}\,\pi$.

Таблица 48

1. $\frac{\pi}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$. **4.** $\frac{4\pi}{3}$.

Таблица 49

1. $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **2.** 12π. **3.** $\frac{192\pi}{5}$. **4.** 32π.

Таблица 50

1. π. **2.** $\frac{5\pi}{4}$. **3.** $\frac{4\pi}{3}$. **4.** $\frac{7\pi}{3}$. **5.** $\frac{7\pi}{3}$. **6.** $\frac{5\pi}{3}$.

Таблица 51

1. $\frac{\pi}{4}$. **2.** $\frac{\pi}{4}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **4.** $\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$.

Таблица 52

1. 9π. **2.** $\frac{73\sqrt{3}\pi}{12}$.

Таблица 53

1. 7π. **2.** 5π.

Таблица 54

1. $\frac{4\pi}{3}$. **2.** $\frac{5\pi}{3}$. **3.** $\frac{4\pi}{3}$.

Таблица 55

1. 2π. **2.** $\frac{\pi}{2}$.

Таблица 56

1. π. **2.** $\frac{\pi}{3}$.

Таблица 57

1. $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

Таблица 58

1. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

Таблица 59

1. 80π. **2.** 104π.

Таблица 60

1. 125. **2.** 4. **3.** 4. **4.** 108. **5.** 5. **6.** 4. **7.** 4. **8.** 6. **9.** 512. **10.** 98.

Таблица 61

1. 61. **2.** 5. **3.** 45°. **4.** 45°. **5.** 4. **6.** 320. **7.** $2\sqrt{3}$. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 3.

Таблица 62

1. 4. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 3. **5.** arctg 0,6. **6.** 45°. **7.** 2. **8.** 13.

Таблица 63

1. 22. **2.** 9. **3.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$. **4.** $\sqrt[6]{2}$.

Таблица 64

1. 2. **2.** 60°. **3.** 26. **4.** 10.

Таблица 65

1. 21. **2.** 18. **3.** 8. **4.** 5. **5.** $\frac{\sqrt{105}}{27}$. **6.** 2. **7.** 144. **8.** 192. **9.** 81. **10.** $6\sqrt{3}$. **11.** 3. **12.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}$.

Таблица 66

1. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **2.** 4. **3.** $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2}}{11}$. **4.** 3,4.

Таблица 67

1. $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$. **2.** $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. **3.** 12. **4.** 3.

Таблица 68

1. 9,5. **2.** 109. **3.** $\frac{7\sqrt{3}}{12}$. **4.** 54.

Таблица 69

1. 1. **2.** $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** 384. **5.** 324. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Таблица 70

1. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **2.** 9. **3.** 26. **4.** 768.

Таблица 71

1. 98. **2.** 13. **3.** 872. **4.** 342.

Таблица 72

1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\frac{3\sqrt{39}}{2}$. **3.** 6. **4.** 384,5.

Таблица 73

1. 298. **2.** 294. **3.** 66. **4.** 116. **5.** 31. **6.** 129.

Таблица 74

1. 9. **2.** 5. **3.** 6. **4.** 3. **5.** 27. **6.** 9. **7.** 175. **8.** 5.

Таблица 75

1. $\sqrt[3]{\pi^2-1}$. **2.** π. **3.** 9π. **4.** 3. **5.** 500. **6.** $100\sqrt{2}$. **7.** 30. **8.** 220,5.

Таблица 76

1. 5. **2.** 8. **3.** 84π. **4.** 63π.

Таблица 77

1. 13,75. **2.** 6. **3.** 16. **4.** 108.

Таблица 78

1. 12,5. **2.** 300. **3.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{48}(\sqrt{3}+1)$. **4.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **5.** 7,5. **6.** 100. **7.** 4. **8.** 54.

Таблица 79

1. 72. **2.** 18. **3.** $2\pi(\sqrt{3}+1)$. **4.** 780π.

Таблица 80

1. 52π. **2.** 294π. **3.** 150. **4.** 1,5.

Серия «Большая перемена»

Балаян Эдуард Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Лучшие задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ

7–11 классы

Ответственный редактор *С.Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Сдано в набор 25.12.2012. Подписано в печать 04.03.2013.
Формат 70×100/16. Бумага офсетная.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Сайт издательства: **www.phoenixrostov.ru**
Интернет-магазин: **www.phoenixbooks.ru**

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов
в ООО «Кубаньпечать»
350059, г. Краснодар, ул. Уральская, 98/2