Большая перемена

Э.Н. Балаян

800 лучших олимпиадных задач по математике

для подготовки к ЕГЭ

9–11 классы

Большая перемена

Э.Н. Балаян

800
ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

9–11 классы

извините
страницы
72-85, 270-317
отсутствуют

Ростов-на-Дону
Феникс
2013

Предисловие

Роль олимпиад с каждым годом становится все более значимой. И не случайно многие вузы стали проводить свои олимпиады для будущих абитуриентов, преследуя цель — привлечь школьников в данный вуз. Победителей, занявших призовые места, освобождали от сдачи экзаменов и зачисляли в вуз.

В связи с этим, назрела необходимость в доступной форме ознакомить широкие массы школьников с характером и типом задач, предлагаемых на олимпиадах.

Обычно традиционные олимпиады проходят в пять туров: школьный, районный (городской), областной (республиканский, краевой), зональный (окружной) и всероссийский.

В книге представлены задачи разного уровня трудности, причем сделано это сознательно с тем, чтобы каждый участник мог что-то решить, ибо если задачи слишком трудны, то дети теряют интерес не только к олимпиаде, но и к изучению математики.

Как правило, олимпиадная задача — это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решения. Среди предложенных задач встречаются как нетривиальные, для решения которых требуются необычные идеи и специальные методы, так и более стандартные, которые могут быть решены оригинальным способом. К числу таких методов можно отнести делимость и остатки, признаки делимости чисел, решение уравнений в целых числах, метод инвариантов, принцип Дирихле, задачи на проценты, логического характера и др.

Эти задачи способствуют резкой активизации мыслительной деятельности, умственной активности, дают возможность самостоятельно составлять подобные, а возможно, и более оригинальные задачи, что в итоге приводит со временем к творческим открытиям в различных областях математики.

Автор старался привести наиболее рациональные и изящные решения, доступные школьникам 9–11 классов. Разумеется, читатель может привести и другие, возможно, более изящные решения, за что автор будет весьма признателен.

Книга состоит из двух разделов. В первом приводятся условия задач для 9–11 классов.

Задачи, отмеченные значком (А), авторские, составленные на протяжении многих лет педагогической деятельности.

Во втором разделе книги приводятся ответы, краткие указания, а к наиболее трудным — решения. Автор настоятельно рекомендует обращаться к решениям в случае, когда задача уже решена, или после неоднократных, но безуспешных попыток самостоятельно ее решить. Надо иметь в виду, что одна самостоятельно решенная задача принесет значительно больше пользы для развития ума, чем несколько других, прочитанных в книге. Только настойчивость, терпение и выдержка помогут вам преодолеть трудности, и вас непременно ожидает успех.

Раздел I

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

9 класс

1. Может ли число $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ оканчиваться цифрой 7?

2. Сравнить 80^{13} и 10^{28}.

3. Найти условие делимости $(x + 1)^n + (x - 1)^n$ на x, где $n \in N$.

4(А). Делится ли $2^{54} + 1$ на $2^{27} + 2^{14} + 1$?

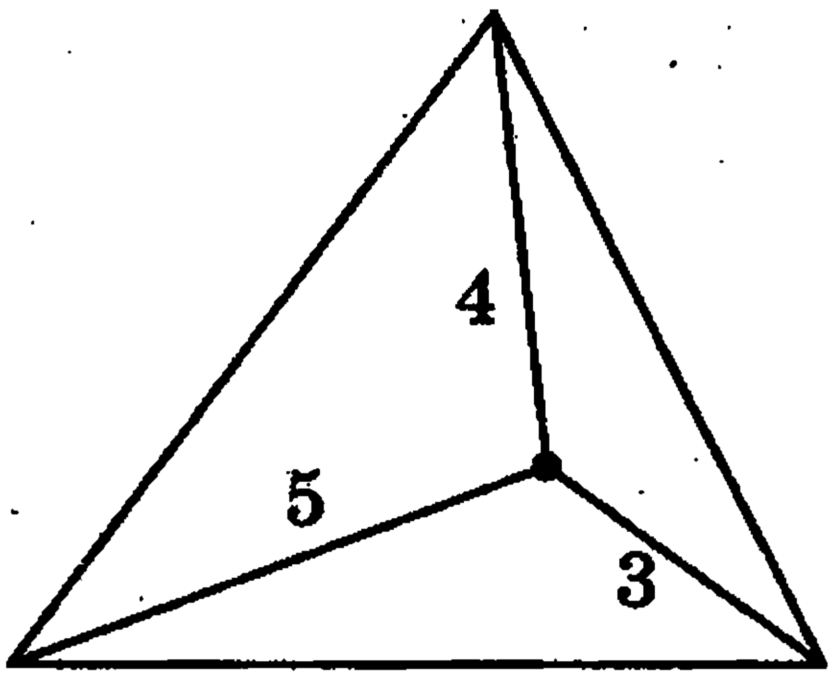
5. Доказать, что если $x > 0$, то $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \dfrac{x}{3}$.

6. Разложить на множители $(x + y)^5 - x^5 - y^5$.

7(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $2(a^5 + b^5 + c^5) = 25a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4)$.

8. Доказать, что для любого натурального n найдется такое число a, что число $an + 4$ составное.

9(А). Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}$.



10. Точка, взятая внутри правильного треугольника, удалена от его вершин на расстояния 3, 4, 5 единиц. Чему равна сторона треугольника?

11(А). Можно ли разложить 1000 орехов в 7 корзин, расставленных по кругу так, чтобы в любых двух корзинах число орехов отличалось на 1?

12(А). Упростить выражение $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$.

13. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

14. В выпуклом пятиугольнике $MNKPE$ углы MNK и KPE равны 30°, а каждая из сторон NK, KP и ME равна 1 и сумма длин сторон MN и PE равна 1. Доказать, что площадь $MNKPE$ равна 1.

15(А). Решить уравнение
$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9.$

16(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases}(x+y)^5-x^5-y^5=-30,\\(x+y)^3-x^3-y^3=-6.\end{cases}$$

17(А). Доказать, что не существует целых чисел a, b и c, таких, что выражение ax^2+bx+c равно 2 при $x=13$ и 3 при $x=60$.

18(А). Решить уравнение $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$

19(А). Как разрезать прямоугольник со сторонами 10 и 33 см на три подобных прямоугольника, среди которых нет равных?

20(А). В ΔABC $\angle A=60°$, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Найти $\angle B$.

21. Доказать, что если a и b — катеты, а c — гипотенуза, то $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, где r — радиус вписанной окружности.

22(А). Доказать, что выражение

$$(5x + 7y)^3 + (7x + 5y)^3$$

делится без остатка на $12(x + y)$.

23. Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 423. Определите номер дома, пятого от угла квартала.

24(А). Известно, что в ΔABC $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2 см больше стороны AB, $AC = 5$ см. Найти AB и BC.

25. Разложить многочлен $x^3 + y^3 + 3xy - 1$ на множители.

26. Разложить многочлен $a^3(b - c) + c^3(a - b) - b^3(a - c)$ на множители.

27(А). В ΔABC $\sin \angle C = \frac{3}{5}$, $AC = 5$, $BC = 4$. Найти радиус вписанной окружности, если $AB < AC$.

28(А). При каких значениях x значение выражения $\frac{x^2 - 3}{(x-4)^2}$ будет равно $\frac{a^2 - 3}{(a-4)^2}$?

29(А). Решить уравнение $4x^2 + \frac{10}{3x} = \frac{61}{9}$.

30(А). На графике функции $y = |5x - 3|$ найти точку, ближайшую к точке $A(2; 0)$.

31(А). Решить уравнение

$$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{2-x} + 1) = 2(x - 1).$$

32(А). Доказать, что $333^{777} + 777^{333}$ делится на 10.

33. Решить уравнение $\sqrt[6]{\frac{1}{2}-\cos x} + \sqrt[6]{\frac{1}{2}+x} = 1$.

34(А). Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}} = \frac{1}{5-2x}.$$

35(А). В классе из 30 учащихся получили на контрольной оценки «5», «4», «3», «2». Сумма полученных оценок равна 90, причем «троек» было больше, чем «пятерок» и «четверок». Кроме этого, известно, что число «четверок» кратно 5, а число «троек» кратно 7. Сколько и каких оценок получил класс?

36(А). Упростить выражение $\left(\frac{27^x-3^x}{9^x+3^x}\right)^2 + 3^{1+x}$.

37. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2-8xy+4y^2=0, \\ x^2+y^2+13(x-y)=0. \end{cases}$$

38. Стороны одного треугольника 17; 25 и 26 см, а две стороны другого 17; 25 и 26 см. Найти длину третьей стороны, если у треугольников равны радиусы вписанной окружностей.

39(А). Сократить дробь $\frac{x+4-5\sqrt{x-2}}{x-3\sqrt{x-2}}$.

40(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2+y^2)xy=30, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$$

41(А). В ΔABC стороны a, b, c ($a < b < c$) образуют арифметическую прогрессию. Известно, что

$R \cdot r = 130$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Найти наименьшую целую тройку (a, b, c).

42. Найти все простые числа p, такие, что $14p^2 + 1$ — также простые.

43(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5(x^4+y^4)=17(x^2+y^2), \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$$

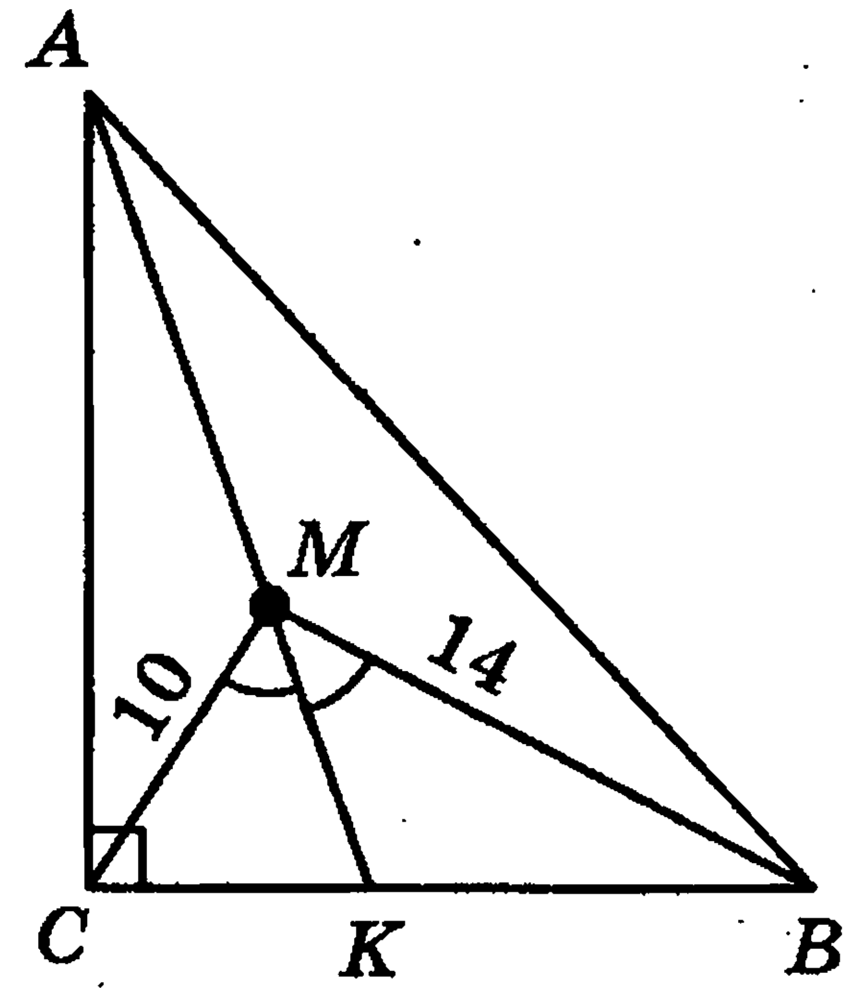
44(А). Доказать, что $\left(1+\dfrac{7}{\sin x}\right)\left(1+\dfrac{19}{\cos x}\right) > 293$, если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

45(А). Решить в натуральных числах уравнение $x^3 - 8y^3 = 19$.

46. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3+xyz=\sqrt{xyz}, \\ y^3+xyz=\sqrt{xyz}, \\ z^3+xyz=\sqrt{xyz}. \end{cases}$

47(А). Заменить буквы цифрами так, чтобы равенство БЕСЫ = (Б + Е + С + Ы)^4 оказалось верным.

48(А). В ΔABC ($\angle C = 90°$) найти AB и AC по данным, приведенным на рисунке, если $BC = 18$.



49. Доказать неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$, где $a, b, c > 0$.

50(А). В 46 клетках находятся 1000 кроликов. Доказать, что в каких-то двух клетках находится поровну кроликов (могут быть пустые клетки).

51(А). Найти площадь круга, вписанного в трапецию, площадь которой 125 м^2, если расстояние между точками касания боковых сторон равно 8 см.

52. Доказать, что если в арифметической прогрессии $S_m = S_n = 0$, то $S_{m+n} = 0$.

53(А). Доказать, что $35 \sin^2 x \geq 6 \sin 2x - 1$.

54(А). Решить уравнение

$$\sqrt{2x+14+8\sqrt{2x-2}} + \sqrt{2x+2-4\sqrt{2x-2}} = 6.$$

55. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовать геометрическую прогрессию?

56(А). Решить уравнение $(1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2)$.

57(А). Решить уравнение $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geq 1$.

58(А). Вычислить $1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + 996^2 - 995^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

59(А). В трапеции диагональ $KLMT$ $LM \parallel KT$, $KL = MT$, диагональ $MK = 8$ м и $\angle MKT = 75°$. Найти площадь трапеции.

60(А). Решить уравнение $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$.

61. Доказать неравенство $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$.

62(А). Сумма нескольких последовательных четных чисел равна 100. Найти эти числа.

63. Найти арифметическую прогрессию, если сумма ее n членов равна $2n^2 - 3n$.

64. Чему равен $\angle C$ ΔABC, если $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$?

65(А). В ΔABC $BC = 14$, BD — медиана, $\angle ABD = 45°$, $\angle CBD = 30°$. Найти AB и BD.

66(А). Решить уравнение $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$.

67(А). Доказать, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} < 0{,}999.$$

68(А). Сколько существует двузначных чисел, делящихся на произведение своих цифр?

69. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

70. Известно, что $a + b + c$ делится на 6, где a, b, c — целые числа. Доказать, что $a^5 + b^3 + c$ также делится на 6.

71(А). Сумма цифр трехзначного числа равна 17. Если из исходного числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 792. Найти трехзначное число.

72(А). Найти хотя бы одну пару целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^5$.

73. Известно, что уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет 3 действительных корня. Доказать, что $p \le 0$.

74(А). Стороны параллелограмма равны 11 и 23 м, а диагонали относятся как 2 : 3. Найти длины диагоналей.

75(А). В прямоугольнике со сторонами 20 и 25 расположено 120 квадратиков со стороной 1. Доказать, что внутри прямоугольника можно поместить круг диаметра 1, не налегающий ни на один из квадратиков.

76(А). Решить уравнение $3\sqrt{x-2} - \frac{1}{9}x^2 = 2$.

77(А). Найти расстояние между осью параболы $y = -x^2 - 7x + 2$ и осью Oy.

78. Доказать, что при всех целых n выражение $n(n^4 - 125n^2 + 4)$ кратно 120.

79(А). Доказать, что если x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $x^2 + 2ax - \frac{1}{8a^2} = 0$, где $a \in R$, то $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

80(А). При каком значении m график функции $y = 2x^2 - 3x + 17 + m$ имеет одну общую точку с осью Ox?

81(А). Решить уравнение $\frac{3}{1+x+x^2} = 3 - x - x^2$.

82(А). Две стороны остроугольного треугольника равны соответственно 13 и 20 см. Радиус описанного около треугольника круга $\frac{65}{6}$ см. Найти третью сторону треугольника.

83. Цена товара со 100 000 рублей дважды понижалась, каждый раз на 30%. Какова окончательная цена товара?

84(А). Решить уравнение $1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12x}$.

85. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с острым углом в $15°$ произведение катетов равно квадрату половины гипотенузы.

86(А). При каких значениях a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$?

87(А). Решить уравнение

$$16x^2 + 9x + 117 = 24x\sqrt{x+13}.$$

88(А). Сумма двух чисел равна 1338. Найти эти числа, если известно, что они станут равными друг другу, если в конце первого числа приписать цифру 2, а в конце второго числа отбросить цифру 5.

89(А). Является ли число $5\frac{2}{3}$ членом последовательности, заданной формулой $a_n = 2n - 1\frac{(-1)^{n+1}}{n}$?

90(А). Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найти $\frac{R}{r}$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

91. Доказать, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то разность ее равна радиусу вписанного круга.

92(А). Решить неравенство $\left|\frac{2x-5}{x+1}\right| \geq 1$.

93(А). Величина одного из углов остроугольного треугольника равна $30°$. Доказать, что площадь треугольника равна $r(R + (2 + \sqrt{3})r)$, где r и

R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

94(А). Найти сумму тангенсов острых углов прямоугольного треугольника, если радиус описанной окружности относится к радиусу вписанной как 5 : 2.

95(А). Найти наибольшее целое решение неравенства $\frac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3}<0$.

96(А). Доказать, что если $a^3+7a+19=0$, $b^3+7b+19=0$, $c^3+7c+19=0$, где $a\neq b$, $b\neq c$, $a\neq c$, то $a+b+c=0$.

97(А). От данной трапеции отрезать треугольник, площадь которого составляет $\frac{2}{3}$ ее площади.

98. Вычислить без таблиц $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

99(А). Исключив x и y из равенств $x-y=a$, $x^3-y^3=b$, $x^5-y^5=c$, найти зависимость между a, b и c.

100(А). Решить уравнение

$$\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2.$$

101(А). Решить уравнение

$$\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x.$$

102. Найти зависимость между a, b и c, если $a=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $b=x+y$, $c=x^2+y^2$.

103(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y+3=(4-x)^2, \\ (y+5)^2=z(2y+7), \\ x^2+z^2=6x, \quad \text{если } z\geq 0. \end{cases}$$

104(А). Решить уравнение $1+4+7+\ldots+x=117$.

105(А). Решить неравенство
$$\sqrt{1-4x+4x^2}\leq \frac{x^2-2x-3}{x-3}.$$

106(А). Решить уравнение
$$\sqrt{8x-7}+\sqrt{3x-8}=\sqrt{7x-3}+\sqrt{2x-4}.$$

107(А). Доказать, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в $15°$ составляет восьмую часть квадрата гипотенузы.

108(А). Решить неравенство
$$\sqrt{x^2-\frac{6x^2}{|x|}+\frac{3}{\operatorname{tg}^2 30°}}<\frac{1}{2}\sin^2 30°.$$

109(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2+5y^2-4xy+2x-8y+5=0, \\ x^3+y^3+xy=41. \end{cases}$$

110(А). Найти четырехзначное число, которое в 9 раз меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

111(А). Решить неравенство
$$\left|\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}\right|>0{,}4\cdot 2\frac{1}{2}+5|x|^0-\frac{x^{2k+1}}{x^{2k}}.$$

112(А). При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3-12x+ax-28=0$ образуют арифметическую прогрессию?

113(А). Чему равно значение выражения

$a^{2010} + \dfrac{1}{a^{2010}}$, если $a^2 + a + 1 = 0$?

114(А). Решить неравенство

$$\sqrt{9x^2 - 6x + x^0} > \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}.$$

115(А). При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 48x - 27 = 0$ составляют геометрическую прогрессию?

116(А). Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} + \frac{x^{2k-1}}{x^{k-1}} - x^k - 2x^0.$$

117(А). Решить неравенство $\dfrac{x}{|x|} \geq \sqrt{9 - x^2}$.

118(А). В равнобедренном остроугольном ΔABC основание $AC = 24$, а расстояние от вершины B до точки M пересечения высот равно 7. Найти радиус окружности, вписанной в ΔABC.

119(А). Решить уравнение

$$\cos 2010° + \cos 30° + \operatorname{tg} 30° \cdot \frac{3}{|x|} = \sqrt{x^2} - 3\sin 30°.$$

120(А). Решить неравенство

$$\left|\frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}\right| > |3x|^0 + 2{,}4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} - \frac{x^{n+2}}{x^n}.$$

121(А). Центр окружности, касающийся катетов прямоугольного треугольника, лежит на гипотенузе. Найти радиус окружности, если он в 7 раз меньше суммы катетов, а площадь треугольника равна 56.

122(А). Решить уравнение

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 6} + 2\sqrt{(x - 2)(x + 6)} = 2(8 - x).$$

123(А). Решить неравенство

$$\frac{x^7 \cdot \operatorname{tg}189° \cdot \sin 180°}{\operatorname{tg} 9°} + \operatorname{ctg} 45° + \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq 5.$$

124(А). Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, равны соответственно 6 и 8. Найти площадь треугольника.

125(А). Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x-2| \geq 3, \\ \left|\frac{x-1}{x}\right| < 1. \end{cases}$$

126(А). При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

127(А). Точка M лежит внутри правильного ΔABC. Найти площадь треугольника, если $AM = BM = 2$ см, $CM = 1$ см.

128(А). Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \geq 4.$

129(А). При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (6+a)x + 2y = 3 + a, \\ -4x + ay = 1 + a \end{cases}$ не имеет решений?

130(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то
$50(a^7 + b^7 + c^7) = 49(a^4 + b^4 + c^4)(a^5 + b^5 + c^5)^2$.

131(А). Существует ли треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 13$?

132(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(x+1)(2x^2-3y^2)=12, \\ 2x+4x^2-3y^2=14. \end{cases}$$

133. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего ΔABC, взята произвольная точка M. Отрезки AM и BC пересекаются в точке N. Доказать, что $\dfrac{1}{MN}=\dfrac{1}{BM}+\dfrac{1}{CM}$.

134(А). Построить график функции

$$y=\frac{2|x|}{x}\sqrt{4-x}.$$

135(А). Найти уравнение общей касательной к параболам $y=x^2-6x+8$ и $y=x^2+x+2$.

136(А). Сколькими нулями оканчивается число 2010? Четна или нечетна его последняя ненулевая цифра?

137(А). Решить уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 3x}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

138(А). При каком значении m корни уравнения $x^4-(3m-5)x^2+(m+1)^2=0$ составляют арифметическую прогрессию?

139(А). Существует ли квадратный трехчлен $y(x)$ с целыми коэффициентами, который в точке $x=1$ принимает нечетное значение, а в точке $x=3$ — четное?

140(А). Решить неравенство

$$\frac{x^{0,4}\cdot x^{1\frac{3}{5}}+4\operatorname{ctg}4^\circ\operatorname{ctg}94^\circ}{|x|-2}\ge x^2.$$

141(А). Решить уравнение $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

142(А). В ΔABC длины сторон образуют арифметическую прогрессию, причем $BC < AC < AB$. Известно, что $\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Найти $\angle B$.

143(А). Найти наименьшее 4-значное число, удовлетворяющее соотношению $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{ab} + \overline{cd}$.

144(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185,\\(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65.\end{cases}$$

145(А). Решить уравнение $\cos x + \cos 7x = 2$.

146(А). Найти площадь треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, если известно, что произведение радиусов вписанной и описанной окружностей равно 130.

147(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^3-3xy^2=1,\\3x^2y-y^3=1.\end{cases}$$

148(А). Доказать, что $19^{2010} - 1$ делится на 5.

149. Доказать, что площадь равнобедренной трапеции определяется по формуле $S = \frac{1}{2}m^2\sin\alpha$, где m — длина диагонали, α — угол между ними.

150. Решить систему уравнений $\begin{cases}x+y=xyz,\\y+z=xyz,\\z+x=xyz.\end{cases}$

151. Числа a, b, c такие, что $(a + b + c) \cdot c < 0$. Доказать, что $b^2 > 4ac$.

152(А). Найти сумму целых чисел из области определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}$.

153(А). Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 26, а сумма квадратов этих чисел — 364.

154(А). Решить уравнение $(x - 1)^2 - x^3 = 17$.

155(А). Решить неравенство $\dfrac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3} < 0$.

156(А). Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, стоящих на нечетных местах, равна 36, а на четных местах — 12. Найти эту прогрессию.

157(А). Доказать, что уравнение $xy = 2010(x + y)$ имеет решение в целых числах.

158(А). Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4$.

159(А). Решить уравнение

$$4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3(\sin x + \cos x).$$

160(А). Известно, что $a + b + c = 12$, $ab + ac + bc = 72$. Найти значение $a^2 + b^2 + c^2$.

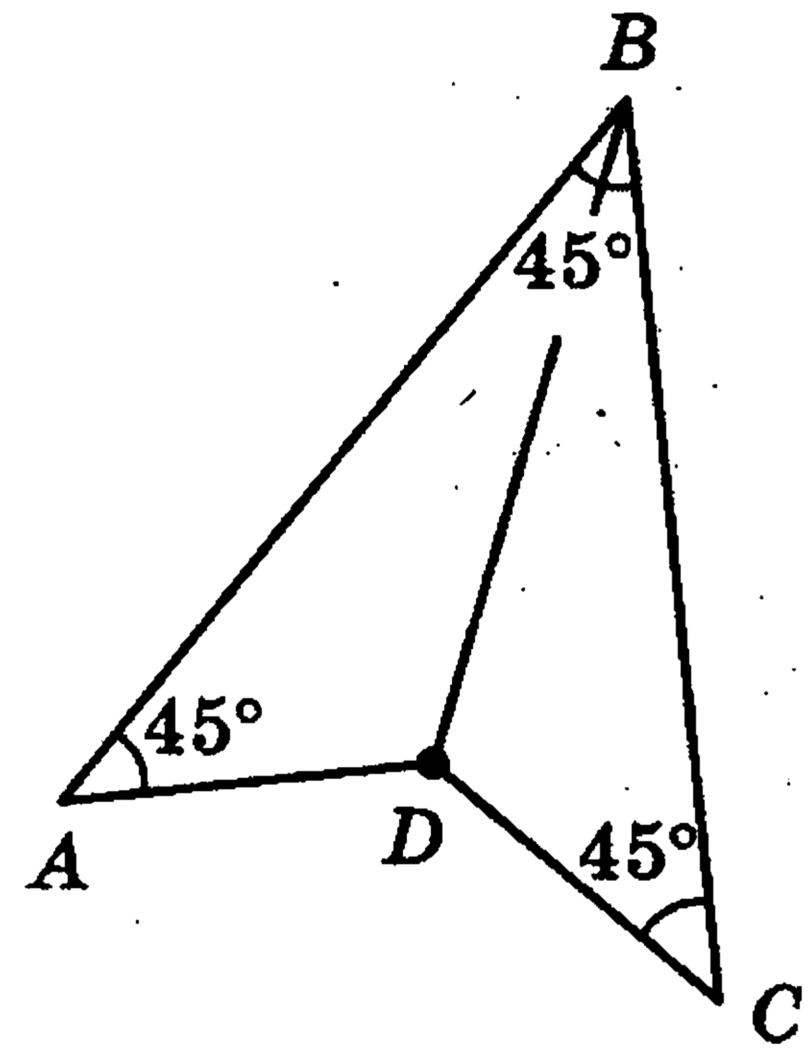
161. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой. Потом из бака вылили столько же литров смеси. После этого в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй, если вместимость бака 64 л?

162(А). Решить уравнение

$$\frac{x^2}{|x|}(4-x)+(1-|x|)(1+|x|)=3.$$

163(А). В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A=\angle B=\angle C=45°$.

Доказать, что $S_{ABCD}=\frac{1}{2}BD^2$.



164(А). Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 10, а в остатке — некоторое число. Если же это число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, опять разделить на произведение его цифр, то в частном получится 2, а в остатке — то же число.

165(А). Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}=\sin x+\sqrt{x-3}.$$

166(А). Решить в целых числах уравнение

$$x^3-x=2013.$$

167. Сколько можно провести различных прямых линий, соединяя попарно n точек на плоскости, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой?

168. Разложить многочлен $x^{13}+x^{11}+1$ на два множителя.

169(А). Решить неравенство

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x+2012)(x+2013)}\leq 0.$$

170(А). Периметр прямоугольного треугольника равен 12 см. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

171(А). Представить многочлен $1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}$ в виде произведения четырех многочленов не ниже первой.

172(А). Решить уравнение $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\ldots=16$.

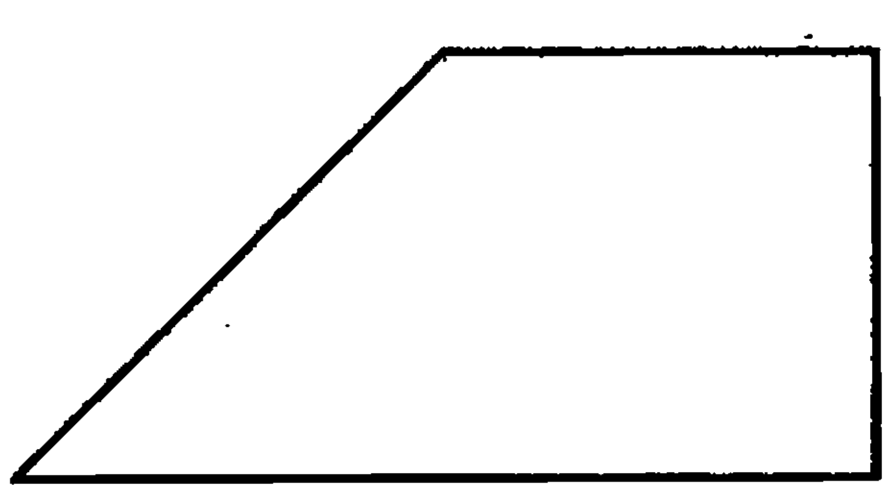
173(А). Решить уравнение $\cos x+\cos\frac{3x}{4}=2$.

174(А). При каких значениях a и b многочлен $M(x)=ax^3+bx^2-73x+102$ делится на x^2-5x+6 без остатка?

175(А). Решить в натуральных числах уравнение $\sqrt{3x+2\sqrt{2}}+\sqrt{3x-2\sqrt{2}}=\sqrt{8y}$.

176(А). Решить неравенство $|x+1|-|x-2|<3$.

177(А). Из трех различных цифр x, y, z образованы всевозможные трехзначные числа. Сумма этих чисел в три раза больше трехзначного числа, каждая цифра которого есть x. Найти цифры x, y, z.



178. Разделить данную трапецию на 9 равных и подобных заданной.

179(А). При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x+(a-1)y=a+3, \\ (a+2)x+2ay=6a+8 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

180(А). Решить уравнение $(x^2 - x - 2)^2 - x^3 = 10$.

181(А). В 9 «А» классе присутствуют учитель и несколько учеников. Сколько учеников в классе, если известно, что возраст учителя на 40 лет больше среднего возраста учеников и на 36 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе?

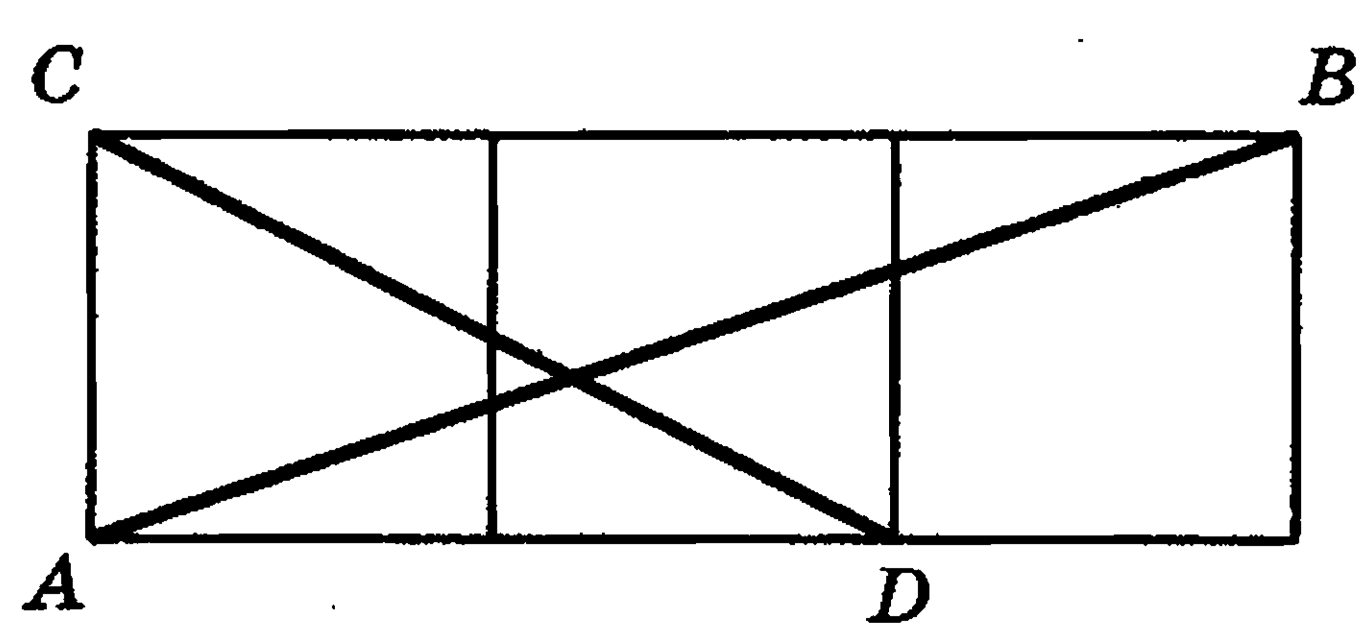
182(А). Решить уравнение $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3} = \dfrac{7}{8}$.

183. Через сколько минут после того, как часы показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую?

184(А). Найти пятизначное число, которое в 45 раз больше произведения своих цифр?

185(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3+8y^3=27, \\ x^2+4y^2=9. \end{cases}$

186. Три квадрата расположены, как показано на рисунке. Найти величину угла между прямыми AB и CD.



187(А). Часы отстают каждые сутки на 5 мин. Через сколько дней они опять будут показывать верное время?

188(А). Решить уравнение

$$4x = (\sqrt{x} + 39)(1 - \sqrt{1-\sqrt{x}})^2.$$

189. Внутри произвольного треугольника взяты две точки так, что расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 2; 4 и 16, а от другой (в том же порядке) – 5; 6 и 12. Найти радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

190(А). Решить в целых числах уравнение $5(x^2 + y^2) = 5 + 8xy$.

191(А). Решить уравнение $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4}{3}\right) = 1$.

192(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - xy + 3y - 2x + 2 = 0, \\ y = \left(\frac{x^2+1}{5}\right)^4. \end{cases}$$

193(А). Сократить дробь $\frac{x+3-3\sqrt{x+1}}{x+1-2\sqrt{x+1}}$.

194(А). При каких значениях параметров m и n многочлен $2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n$ делится без остатка на $x^3 + x + 1$?

195(А). Решить уравнение $x^3 - 2x - 4\sqrt{6} = 0$.

196. Найти все решения в простых числах уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$.

197(А). На основании равнобедренного треугольника построен правильный треугольник, площадь которого в 3 раза больше площади данного. Найти углы треугольника.

198(А). Решить уравнение

$$(x^2 - 5x - 8)^3 = x^2(x^2 + x - 8).$$

199. В прямоугольном треугольнике сумма катетов больше гипотенузы, сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Что можно сказать о сумме кубов катетов и куба гипотенузы?

200(А). Решить уравнение

$$\frac{1}{6x^2-5x+1}+\frac{1}{2x^2-3x+1}=3x^2-4x.$$

201(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}xy+y^2, \\ y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{18}x^2. \end{cases}$$

202(А). Построить график функции

$$y=\left(\frac{4^3\cdot 2^4}{16^2\cdot 8}\right)\cdot x^{3n+2}\cdot x^{-3n}+(-1)^{2n+1}.$$

203(А). Решить уравнение

$$\sqrt{7}\,(y-2x)=x^2+y^2+\frac{35}{4}.$$

204(А). Решить уравнение

$$(3x-1)(\sqrt{x}+3x-1)=2x.$$

205(А). Решить уравнение $\sqrt{6-x}=(|x|+2x)^0$.

206(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=xy+61, \\ x^2+y^2=xy+13. \end{cases}$$

207(А). Доказать, что для корней трехчлена $x^2+px+\frac{1}{p^2}$, где $p\in R$, выполняется неравенство $x_1^8+x_2^8>11$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

208(А). Найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{x^2+4x+4}{|x+2|}\le\frac{9x^2-24x+16}{|3x-4|}$.

209(А). Решить уравнение $x^2 - 4x\cos(xy) + 4 = 0$.

210(А). При каких значениях a и b многочлен $x^3 + 7x^2 + ax + b$ делится на $x^2 + x + 2013$?

211(А). Построить график функции

$$|y| = \frac{3x^0 - \operatorname{tg} 45^\circ}{x - 1}.$$

212(А). При каком целом значении a уравнения $4x^2 - (2a + 1)x - 2 = 0$ и $7x^2 + (3a - 1)x - 44 = 0$ имеют общий корень?

213(А). На оси ординат найти точку, через которую проходят две взаимно перпендикулярные касательные к графику функции $y = x^2 - 4x + 7$.

214(А). Решить уравнение $1 + x^5 = 2(1 + x)^5$.

215(А). Решить уравнение

$$\sin 2010^\circ \cdot \sin 540^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \frac{x^0 x^2}{3|x|} = x^2 \cos 30^\circ.$$

216(А). Основание равнобедренного треугольника равно 12, а расстояние от вершины основания до точки пересечения биссектрис равно $3\sqrt{5}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

217(А). В треугольник вписана окружность. Прямые, соединяющие центр окружности с вершинами, делят треугольник на части с площадями 120; 104 и 112. Найти радиус вписанной окружности.

218(А). В равнобедренной трапеции острый угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. При каком значении α диагональ трапеции в 2 раза больше высоты?

219(А). Центр окружности, касающийся катетов прямоугольного треугольника, лежит на гипотенузе. Найти радиус окружностей, если он в 7 раз меньше суммы катетов, а площадь треугольника равна 56.

220(А). Найти целые корни уравнения
$$(x+3)(x+4)(x+9)(x+12)=3x^2.$$

221(А). Доказать, что уравнение $x^5-px^3+1=0$ при целом $p>2$ не имеет рациональных корней.

222(А). В равнобедренном треугольнике ABC ($AC=BC$) биссектрисы AE и CD пересекаются в точке 0. Известно, что $S_{\Delta ACE}=24$, $S_{\Delta BOE}=36$. Найти $S_{\Delta ABC}$.

223(А). Выражение $\dfrac{1-\sqrt{2x^2-5x+4}}{5x-2x^2-3}$ рассматривается только для целых значений x. При каком значении x это выражение имеет наибольшее значение?

224(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^5+y^5=33y, \\ 8(x+y)=3x^3y^2. \end{cases}$$

225(А). Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\dfrac{x+3a-4}{x+a}>0$ выполняется для всех $x\in[1;3]$.

226(А). Высота равнобедренной трапеции, равная 21, делит основание трапеции в отношении 1 : 9. Определить радиус описанного круга, если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию.

227(А). Доказать, что при любом целом m выражение $\frac{m^3}{6} + \frac{3m^2}{2} + \frac{13m}{3} + 4$ является целым числом.

228(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-12y+26=0, \\ \sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}+\sqrt{x^2+y^2+2x-14y+50}=5. \end{cases}$$

229(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10(y-x)=x^4+9, \\ \sqrt{y}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}. \end{cases}$$

230(А). Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найти R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

231(А). Решить уравнение

$$\frac{x^3-2}{x+2}-\frac{13x+4}{x^2-10}=x-3.$$

232(А). Найти значение выражения

$\sqrt{x+24\sqrt{x-144}} - \sqrt{x-24\sqrt{x-144}}$ при $x = 2010$.

233(А). Доказать, что если $a^2b^2 = a + b$, где $a > 0$, $b > 0$, то $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^3+a^2+1}{b^3+b^2+1}$.

234(А). Решить уравнение

$$(x-6)^2+(x-5)^3+(x-4)^4=2.$$

235(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y^2-1}+y\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{x^2+y^2-2}, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$$

236(А). Решить неравенство $7^n + 8^n < 9^n$, $n \in N$.

237(А). Решить уравнение
$$\sqrt{x^4+x^3-2x^2+2x-1}+\sqrt{3x^2-x^4-x^3}=$$
$$=\frac{1}{2}(3x^2-2x+3).$$

238(А). В треугольнике высота, равная 4, делит основание в соотношении 1 : 2. Найти основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен $\dfrac{18}{7+\sqrt{13}}$.

239(А). Представить многочлен $1+x^2+x^4+$ $+x^6+x^8+x^{10}$ в виде произведения четырех многочленов не ниже первой степени.

240(А). Решить уравнение
$$\sqrt{4x^3+3x^2+2}+\sqrt{2x^2-4x^3+4x-1}=3x^2+3x+2.$$

241(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2+z=0, \\ 2x-y+\dfrac{5}{8}=2z. \end{cases}$$

242(А). Основания трапеции равны 4 и 16. В нее вписана и около нее описана окружность. Найти произведение радиусов вписанной и описанной окружностей.

243(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{5}{12z}\right)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{5z}{12}\right)=1, \\ 3x+2y^2+z^3=22. \end{cases}$$

244(А). В трапеции $ABCD$ основание $BC=\sqrt{3}$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E, причем $BE=1$, $AE=2$, $\angle BAC=\angle DAC$. Найти площадь трапеции.

245(А). Доказать, что выражение

$$\frac{1\cdot4\cdot6+2\cdot8\cdot12+3\cdot12\cdot18+\ldots}{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+3\cdot6\cdot9+\ldots}$$

является целым числом — квадратом.

246(А). Решить уравнение $x^3+6=7\sqrt[3]{7x-6}$.

247(А). В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AD = 8$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 120°$. Найти сторону CD.

248(А). В ΔABC $AB = 7$, $AC = 20$, $BC = 15$. Окружность, вписанная в этот треугольник, касается его сторон в точке M, N и K. Найти $S_{\Delta MNK}$.

249(А). Решить уравнение

$$\cos 2010°\cdot\sin 360° - \operatorname{tg}^2 60°\cdot\frac{x^0x^3}{|x|} = 6x\sin 30°.$$

250(А). Известно, что $x=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}$. Найти значение выражения x^3-30x.

251(А). Определить числа a и b так, чтобы многочлен $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ делился без остатка на многочлен $g(x) = x^2 - x + b$.

252(А). Пусть x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $x^2 - 12mx + n = 0$. Числа m, x_1, x_2, n — четыре последовательных числа геометрической прогрессии. Найти x_1 и x_2.

253(А). Доказать, что $\operatorname{tg}127°30' + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ есть целое число.

254(А). Решить уравнение $x+\dfrac{4}{x}(x-3)^3=\sqrt{x}+3$.

255. В равнобедренную трапецию вписан круг. Определить радиус этого круга, если боковая сторона делится точкой касания на отрезки длиной m и n.

256(А). В прямоугольном ΔABC из вершины прямого угла C опущен перпендикуляр CD на гипотенузу AB. Из точки D опущены перпендикуляры DE и DF соответственно на катеты AC и BC. Доказать, что $r = r_1 + r_2$, где r, r_1 и r_2 — соответственно радиусы окружностей, вписанных в ΔABC, ΔAED и ΔDFB.

257. Разложить на множители

$$(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3.$$

258(А). Решить уравнение

$$14\sqrt{\frac{2x+7}{x+8}} - \frac{27}{2x+7} = 11.$$

259. Сократить дробь $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$.

260. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $r = \sqrt{S+R^2}$, где S — площадь, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

261(А). Освободиться от корня в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[4]{11} - \sqrt[4]{8}}$.

262(А). Решить уравнение

$$\sqrt{23x^2 + 11x + 4} = 7x^2 + 7x + 4.$$

263(А). Решить уравнение

$$x^9 - 2013x^3 + \sqrt{2012} = 0.$$

264(А). Решить уравнение

$$\sqrt[2013]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[2013]{\frac{x+3}{5-x}} = 2.$$

265(А). Решить уравнение
$$\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}}-\frac{12}{7(7x+2)}=\frac{53}{28}.$$

266. На сколько сумма всех четных чисел первой сотни больше суммы всех нечетных чисел этой сотни?

267. Доказать, что если a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, то
$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

268(А). Построить график функции $|y|y=\frac{2|x|}{x}$.

269(А). Решить уравнение
$$3x^2+2y^2+z^2-2xz+4x-8y+10=0.$$

270(А). Найти положительные корни уравнения $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-1}\cdot(\sqrt[3]{x}+1)=\sqrt[3]{3}$.

271(А). Решить уравнение $x^2+19x-x!=0$.

272(А). При каком значении a ось параболы $y=x^2+2ax+a^2+b$ имеет уравнение $x=-1$?

273(А). Решить уравнение
$$x^5+\frac{1}{x^5}=\frac{205}{16}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

274(А). При каких целых x квадратный трехчлен x^2+2x-3 есть простое число?

275(А). Имеет ли решения в натуральных числах уравнение $x^2+y^7=z^2$?

276. *Дано:* b_1 и q. Найти произведение всех членов геометрической прогрессии от b_{k-2} до b_{k+4}.

277(А). Решить неравенство
$$\operatorname{tg}5\operatorname{ctg}(\pi-5)+x\sin 30^\circ+\sqrt{(x-3)^2}<1.$$

278(А). Решить неравенство $(z-1)^{10} > (z-1)^9$.

279(А). Показать, что многочлен

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$$

есть квадрат трехчлена.

280(А). Найти наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{1+x} < \sqrt[3]{1-2x}$.

281(А). Два угла треугольника, прилежащих к одной стороне, равны 45° и 60°. Найти отношение R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

282(А). Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - |x-6|}.$$

283(А). Упростить выражение $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$.

284. Число $\overline{aabb}$ — точный квадрат. Найти это число.

285. Доказать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии q_1, q_2, q_3, ..., то $\dfrac{S}{S-q_1} = \dfrac{q_1}{q_2}$.

286(А). Задача на вычисление числа сторон выпуклого многоугольника свелась к решению уравнения $x^2 - 131x - 333 = 0$. Есть ли смысл решать уравнение?

287. Может ли число $1+2+3+\ldots+n$ оканчиваться цифрой 9?

288(А). В ромб, который разделяется диагональю на два равносторонних треугольника, вписан круг, радиус которого равен $\sqrt{3}$. Найти сторону ромба.

2. Зак. 463

289. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

290. Диагонали параллелограмма разбивают его на 4 треугольника. Найти отношение площади каждого из них к площади параллелограмма.

291. Цифры трехзначного числа образуют арифметическую прогрессию. Если к нему прибавить 101, то получится число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Найти трехзначное число.

292. Диагонали прямоугольника уменьшили в 3 раза. Будет ли полученный прямоугольник подобен данному?

293(А). Высота CD, стороны AC, AB и CB ΔABC составляют арифметическую прогрессию с разностью d. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что высота CD опущена на сторону AB.

294(А). Высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, пропорциональные числам 16 и 25. В каком отношении делит гипотенузу биссектриса прямого угла?

295(А). При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x^2 - ax + 45$ на $[-3; +\infty)$ равно 9?

296(А). На 500 рублей куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты таковы: арбуз, 1 штука — 50 рублей, яблоки, 1 штука — 10 рублей, сливы, 1 штука — 1 рубль. Сколько фруктов каждого вида было куплено?

297(А). Делится ли число $10^n + 6^n - 3^n - 1$ на 63 при $n \in N$?

298(А). Мальчики из 9 «А» обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что рукопожатий было 78. Сколько мальчиков в классе?

299(А). Решить в целых числах уравнение

$$xy^2 - 7(x + y^2) = 1.$$

300(А). Найти пятизначное число, которое от перестановки всех цифр в обратном порядке увеличивается в 9 раз.

301(А). Доказать, что выражение $9 \cdot 3^{3n+1} - 8^{n+1}$ кратно 19 при любом целом неотрицательном n.

302(А). Доказать, что для любых чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ выполняется неравенство $a^6 + b^6 \leq \frac{a^9}{b^3} + \frac{b^9}{a^3}$.

303. Доказать тождество

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha = \frac{\sin 16\alpha}{16 \sin\alpha}.$$

304(А). Доказать, что $13! - 11!$ кратно 31.

305. Доказать, что если корни уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

составляют арифметическую прогрессию, то один из корней равен $-\frac{b}{3a}$.

306. Медианы ΔABC пересекаются в точке O. Доказать, что $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$.

307. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right) = 0$. Доказать, что $f(-1) \cdot f(1) = 0$.

10 класс

1(А). Чему равно значение выражения

$$\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} - \sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}\ ?$$

2. Каким должно быть число m, чтобы уравнения $x^3 + mx + 1 = 0$ и $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ имели общий корень?

3. Доказать, что число $\lg 2$ иррациональное.

4(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то

$$2(a^7 + b^7 + c^7) = 7abc(a^4 + b^4 + c^4).$$

5(А). Доказать, что число $4^7 + 7^{16}$ составное.

6(А). Доказать, что в круге радиуса 10 нельзя поместить 400 точек так, чтобы расстояние между каждыми двумя было больше 1.

7(А). Решить уравнение $x^2 - 13 = \sqrt{x+13}$.

8(А). Решить уравнение $(\sqrt[4]{125} - \sqrt[4]{0{,}2})^x = 51{,}2$, где $x \in Z$.

9. Доказать, что объем многогранника, описанного около шара радиуса R, равен $\frac{1}{3}RS$, где S — площадь поверхности многогранника.

10(А). Решить уравнение $\sqrt[3]{4-x^2} + \sqrt{x^2-3} = 1$.

11(А). Разложить на множители выражение, не группируя члены $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$.

12(А). Решить уравнение

$$(\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x)^2=5+\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right).$$

13. Найти двузначное число, обладающее тем свойством, что если сложить его с суммой кубов его цифр, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

14(А). Доказать, что если ab и $a+b$ делится на c, то a^6+b^6 делится на c^3.

15(А). Решить уравнение

$$16^{\sin^2\frac{\pi x}{4}}+16^{\cos^2\frac{\pi x}{4}}=\sqrt{61+6x-3x^2}.$$

16(А). Доказать, что выражение $(9x+4y)^5+(4x+9y)^5$ делится без остатка на $13(x+y)$.

17. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего ΔABC, взята произвольная точка M. Отрезки AM и BC пересекаются в точке K. Доказать, что $\dfrac{1}{MK}=\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{MC}$.

18. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy=y^x, \\ x^3=y^2. \end{cases}$

19. Разложить многочлен $(x+y)^5-x^5-y^5$ на множители.

20(А). Доказать, что если $7a+13b=47$, то верно неравенство $20(7a^2+13b^2)\ge 47^2$.

21. Решить уравнение $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

22(А). Сократить дробь $\dfrac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}$.

23(А). Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2010}<\frac{1}{44}.$$

24. В арифметической прогрессии $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$.

Доказать, что $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

25(А). Упростить выражение $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

26(А). Существует ли треугольник, стороны и высота которого связаны соотношением $a>b>c>h$ и выражаются последовательными целыми числами, если высота h опущена на сторону b?

27(А). Сколькими нулями оканчивается число 2010! ? Четна или нечетна его ненулевая цифра?

28(А). Решить уравнение

$$(1+x)\sqrt{1+x}-(1-x)\sqrt{1-x}=x.$$

29(А). Решить уравнение $(\sqrt{12})^{2x}+5^x=13^x$.

30(А). В равнобедренном остроугольном ΔABC основание $AC=24$, а расстояние от вершины B до точки M пересечения высот равно 7. Найти радиус окружности, вписанной в ΔABC.

31(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+xy^3=6,\\ x+xy^2+xy^4=9. \end{cases}$$

32(А). Найти все натуральные числа m, при которых дробь $\frac{13m-1}{3m+5}$ равна целому числу.

33(А). Доказать равенство

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

34(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^4+x^4y^4=33, \\ x-xy+y=1. \end{cases}$$

35(А). Решить уравнение $\cos x+\cos 7x=2$.

36(А). Решить уравнение

$$(\sin 3x+\cos 3x)\sin 6x=\sqrt{2}.$$

37(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+z=19, \\ x^2+4y^2+z^2=133, \\ xz=4y^2. \end{cases}$$

38(А). В ΔABC длины сторон образуют арифметическую прогрессию, причем $BC<AC<AB$. Известно, что $r/R=\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})$, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Найти величину $\angle B$.

39(А). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(2+a)x^2+(1-a)x+a+5=0$ имеет по крайней мере один корень и все его корни являются целыми числами.

40. Доказать неравенство

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geq 64ab(a+b)^2,\text{ если } a\geq 0,\ b\geq 0.$$

41(А). Решить в натуральных числах уравнение $193(x^3y^3+x^2+y^2)=1753(xy^3+1)$.

42(А). Для каждого значения параметра a решить уравнение $\sqrt{|x|+4}-\sqrt{|x|}=a$.

43(А). Решить уравнение $3^x - \sqrt[x+1]{8^x} = 36$.

44(А). В четырехзначном числе первая цифра совпадает с третьей, а вторая — с четвертой. Доказать, что это число кратно 101.

45(А). При каком значении параметра a уравнение $125 \cdot 25^{-x-\frac{3}{2}} - (2a+3) \cdot 5^{-x} + (3a+1)(2-a) = 0$ имеет один корень?

46(А). Решить уравнение $\sqrt[x]{9} - \sqrt[x]{6} = \sqrt[x]{4}$.

47(А). Что больше: 100^{100} или 101^{99}?

48. Доказать, что если $a > 1$, то $\lg a + \log_a 10 \geq 2$.

49(А). Известно, что $\log_{12} 27 = a$. Найти $\log_6 16$.

50(А). Может ли сумма нескольких последовательных целых чисел равняться 100?

51. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ y^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ z^3 + xyz = \sqrt{xyz}. \end{cases}$

52(А). Найти сумму $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2$.

53(А). Найти все пятизначные числа, обладающие тем свойством, что если приписать впереди этого числа некоторое однозначное число, а затем приписать в конце этого числа то же однозначное число, то отношение полученного большего числа к меньшему будет равно 3.

54(А). Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

55(А). Вычислить

$12(13^{12} + 13^{11} + 13^{10} + \ldots + 13^2 + 14) + 1.$

56(А). В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания.

57. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^y=9, \\ \sqrt[y]{324}=2x^2. \end{cases}$

58(А). Решить уравнение $x^x + x^{2-x} = x^2 + 1$.

59(А). Не решая уравнения $4x^2-\sqrt{85}\,x+5\frac{1}{4}=0$, вычислить разность кубов его корней.

60(А). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{x+2}=4\sqrt[6]{(x+1)(x+2)}.$$

61(А). Какой многочлен при возведении в 3-ю степень дает многочлен $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$?

62(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x+z}{6}=\dfrac{y+z}{7}, \\ (x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2=110. \end{cases}$$

63(А). Решить уравнение

$$\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

64(А). Решить уравнение $2013^x - 2012^x = 1$.

65(А). Найти натуральные числа, удовлетворяющие равенству $\overline{abc}(a+\overline{bc}) = a^3 + \overline{bc}^3$, где a, b, c — различные числа.

66(А). В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\sqrt{2x+a} = x - 2$.

67(А). Доказать (не пользуясь таблицами), что число 27^{2010} имеет меньше 3016 цифр.

68(А). Решить уравнение

$$(x^2 + x)^2 + |x^2 + x| - 2 = 0.$$

69(А). В уравнении $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = y$ освободиться от радикала.

70. Доказать, что если числа a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то справедливо равенство $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$.

71(А). Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^3+1}}.$$

72(А). Доказать, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

73(А). Доказать тождество

$$3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1.$$

74(А). Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Доказать, что построенное сечение — трапеция.

75(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy = 9(x-2y), \\ x^2 - 3y^2 = 6(x-2y). \end{cases}$$

76(А). Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Найти отношение r/R, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

77(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11, \\ x^2+2xy+3y^2=17. \end{cases}$$

78(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (x^2+y^2)xy=78, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$$

79. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2\cos^2 y=\dfrac{\cos x}{\sin y}, \\ 2\sin^2 y=\dfrac{\sin x}{\sin y}; \end{cases} \quad \text{где } x,\ y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

80(А). Трехзначное число оканчивается цифрой 5. Если эту цифру переставить на первое место и найти разность между исходным и полученным числом, то получится трехзначное число с одинаковыми цифрами. Найти это число.

81(А). Решить в натуральных числах уравнение $(16x-21)yz+16(x+z)=21$.

82(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x}(x-1)=\sqrt{y}(y+5), \\ x-y=3. \end{cases}$$

83(А). Решить уравнение
$$\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=2.$$

84(А). Решить в целых числах уравнение
$$5(x^2+y^2-1)=8xy.$$

85(А). Решить уравнение
$$3x^3+10=17\sqrt[3]{\frac{17}{3}x-\frac{10}{3}}.$$

86(А). Делится ли $13^{13}+13^{14}+13^{15}$ на 61?

87(А). Решить в натуральных числах уравнение $5(x+y)^3=54\,(x^2+y^2)$.

88(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2+yx^2-18x-8y+81=0,\\ \sqrt{x^2+y^2-2x-14y+50}+\sqrt{x^2+y^2-18x-2y+82}=10. \end{cases}$$

89(А). Доказать, что на графике функции $y=x^3-3x^2+3x+1$ есть точка, которая является центром симметрии графика.

90(А). Решить в целых числах уравнение
$$x^3+xy+y^3=13.$$

91(А). В ΔABC $\sin\angle C=\frac{3}{5}$, $AC=5$, $BC=4$. Найти радиус вписанной окружности, если $AB<AC$.

92(А). Найти площадь равнобедренной трапеции, у которой длина диагонали равна 8 дм, а угол между диагоналями — 45°.

93(А). Решить уравнение $5^{\log_3(x-1)}-3^{\log_5(x+1)}=2$.

94(А). В трапеции $ABCD$ основание $BC=\sqrt{3}$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E, причем $BE=1$, $AE=2$, $\angle BAC=\angle DAC$. Найти площадь $ABCD$.

95(А). Решить уравнение
$$16x^2+9x+117=24x\sqrt{x+13}.$$

96(А). Решить уравнение $\sin 9x+2\cos 6x=2$.

97(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $4(a^7 + b^7 + c^7) = 7abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

98(А). Решить уравнение $|x - 4| + |x - 3| = x - 7$.

99(А). Решить уравнение $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

100(А). Какое число стоит на 2010-м месте в последовательности 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... ?

101(А). Произведение числа 13 на некоторое четырехзначное число есть точный куб. Найти неизвестный множитель.

102. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{1}{2}\left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right) = |\cos ax|$ имеет решение?

103(А). Найти целочисленный треугольник Пифагора, площадь которого численно равна периметру.

104(А). Не решая уравнения $x^2 - \sqrt{13}\,x + 3 = 0$, найти значение $x_1^5 - x_2^5$, где x_1 и x_2 — корни уравнения.

105(А). Решить уравнение $\sin 3x = \dfrac{a}{3}\sin x$.

106(А). Решить уравнение $x^4 + 26x^2 - x + 182 = 0$.

107(А). Какие натуральные числа увеличиваются в 7 раз, если между цифрами единиц и десятков вставить нуль?

108(А). Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x)\sin 6x = \sqrt{2}.$$

109(А). В ΔABC $\angle A = 60°$, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Найти $\angle B$.

110(А). Около круга описан прямоугольный треугольник с острым углом 60° и прилежащим катетом длиной 6 дм. Найти площадь круга.

111(А). В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Длины боковых ребер равны 8; 9 и 10 см. Чему равен объем пирамиды?

112(А). Решить уравнение

$$\sin x + \sin^7 x - \sin 7x = 3.$$

113(А). Найти трехзначные числа, кратные 13, у которых сумма цифр также кратна 13.

114(А). При каком целом a множитель $x^{13} + x + 90$ делится на $x^2 - x - a$?

115(А). Решить уравнение

$$x^4 - (x-1)(5x^4 - 4x + 4) = 0.$$

116(А). В ΔABC длины сторон a, b, c и площадь S связаны соотношением $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$. Найти $\angle A$.

117(А). Найти наименьший положительный период T функции $y = \cos\dfrac{4x}{15} - 2\sin\dfrac{2x}{21} + \cos\dfrac{6x}{35}$.

118(А). Стороны одного треугольника 17; 25 и 26 см, а две стороны другого 17 и 25 см. Найти длину третьей стороны, если у треугольников равны радиусы вписанных окружностей.

119(А). Решить уравнение

$$x = 2\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{x^3-3x^2}.$$

120(А). Решить уравнение $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$.

121(А). Найти сумму $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2010}}$.

122(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$

123(А). Доказать, что если $\sin x + \sin y = a$, $\cos x + \cos y = b$, то $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{(a^2+b^2+2b)(a^2+b^2-2b)}{(a^2+b^2+2a)(a^2+b^2-2a)}$.

124(А). При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 8|x| + 12| = a$ имеет ровно 8 корней?

125(А). Решить уравнение $|x^3 - 2x| = 2x + 15$.

126(А). Найти функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} f(3x-2) + 7g(x-5) = x+1, \\ f(x+1) - g\left(\dfrac{x}{3} - 4\right) = 3x. \end{cases}$$

127(А). Построить график функции

$$y = \sqrt{\sin^4 x - 3\cos 2x + 6} + \sqrt{\cos^4 x + 2\cos 2x + 6}.$$

128(А). В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 12, а сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна 83/8. Найти стороны треугольника.

129(А). Решить уравнение $\dfrac{3}{\cos^2 x} + 1 = \dfrac{7\sin x}{|\cos x|}$.

130(А). Решить уравнение $\dfrac{1-2|\cos x|\cos x}{\sqrt{x(7-x)}} = 0$.

131(А). Решить уравнение $\sin\dfrac{5x}{4} + \cos x = 2$.

132(А). Решить неравенство

$$\operatorname{ctg} 77^\circ \cdot \operatorname{ctg} 13^\circ + \sqrt{x^2\cos 60^\circ \sin 30^\circ} - x^2 \sin^2 60^\circ \le 0.$$

133(А). Решить уравнение $x^2 - 2 = \sqrt{x+2}$.

134(А). Доказать, что если $7 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$, то $3 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4 \operatorname{tg} \alpha$.

135(А). Решить неравенство

$$\operatorname{tg} 5 \operatorname{ctg}(\pi - 5) + x \sin 30^\circ + \sqrt{(x-3)^2} < 1.$$

136. Разложить многочлен $x^5 + x + 1$ на два множителя.

137(А). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$$

138(А). Решить неравенство

$$\arcsin\sqrt{x^2-3} > \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

139(А). Решить неравенство

$$3^y - 3\cos x + \sqrt{y-2x^2-1} \le 0.$$

140(А). Построить график функции

$$y = (\cos x)^0\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

141(А). Решить уравнение

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{48}{35}.$$

142(А). Решить неравенство

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\geq\frac{21}{30}.$$

143(А). Решить уравнение

$$\cos\left(\pi\sqrt{x^2-4x-5}\right)=\frac{1-x^3}{x^2+x+1}+x.$$

144(А). Решить уравнение

$$\frac{1}{4}\log_{x-2}(x-6)^4-8+4\log_{6-x}(8x-x^2-12)=0.$$

145(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=2,\\ y^4+4=4(x+y).\end{cases}$$

146(А). Найти катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна c, а биссектриса одного из острых углов равна $\frac{c}{\sqrt{3}}$.

147(А). Окружность радиуса r проходит через середину трех сторон ΔABC, где $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$. Найти площадь треугольника.

148(А). Решить в целых числах уравнение

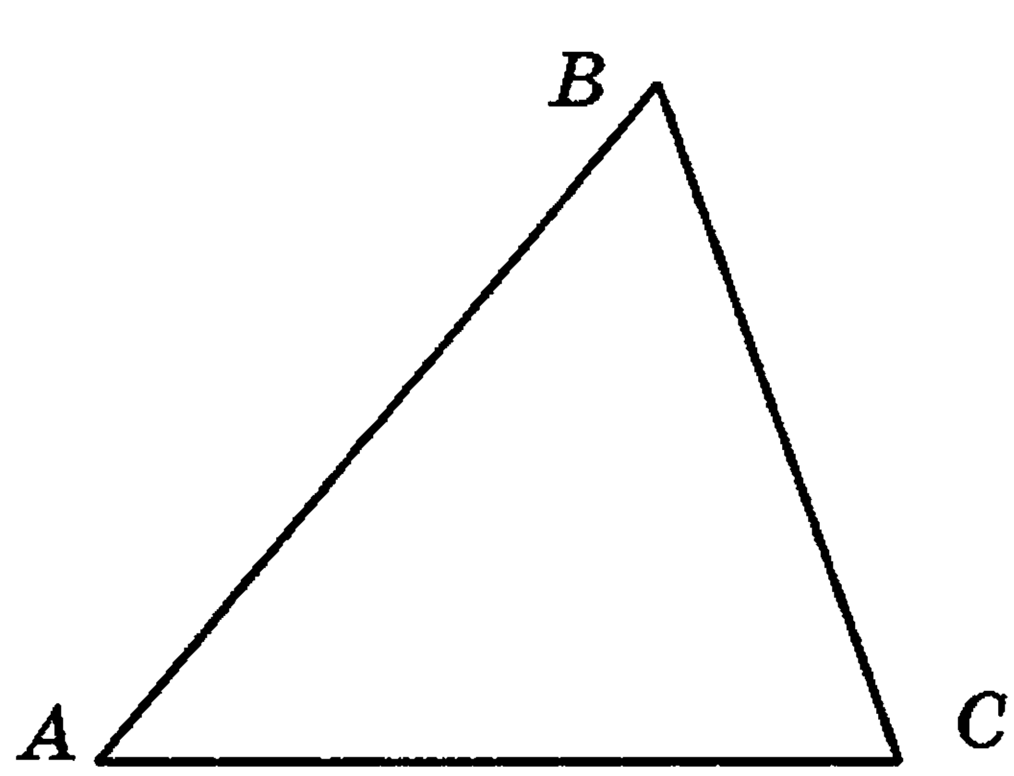
$$x^3+y^3+2=2(x+y).$$

149(А). Сравнить $\sin 9$ и $\sin 10$.

150(А). Решить неравенство

$$\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}.$$

151. Разрезать произвольный ΔABC в два приема на 3 такие части, чтобы из них можно было составить прямоугольник.



152(А). Решить уравнение $37\operatorname{tg} 3x = 11\operatorname{tg} x$.

153. Представить многочлен $x^{12} + x^{10} + x^8 + \ldots + x^2 + 1$ в виде произведения двух многочленов не ниже первой.

154. Найти наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 станет квадратом, а после умножения на 3 — кубом натурального числа.

155. Доказать, что если a и b — катеты, c — гипотенуза, то $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, где r — радиус вписанной окружности.

156(А). Решить уравнение
$\sqrt{x^2+x-16} + \sqrt{x-x^2+16} = x^2 - 7x + 17$.

157(А). Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(x^5 + x^4 - 1)^{2009} \cdot (x^2 - x + 1)^{2010}.$$

158(А). Если сложить два двузначных числа, разделить большее на меньшее, вычесть из большего меньшее, а затем полученные числа сложить, то получится 111. Найти эти числа.

159(А). Между двумя равными двузначными числами вставили вдвое большее число, и полученное число оказалось точным квадратом. Найти все такие числа.

160. Найти все четырехзначные числа, которые, будучи приписаны к числу 400 справа, дадут семизначное число, являющееся квадратом натурального числа.

161(А). В параллелограмме $ABCD$ луч, проведенный из вершины A, делит сторону BC в отношении 3 : 5 ($BC > AB$). В каком отношении луч делит диагональ BD?

162(А). Вычислить $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\sin\alpha = 3\cos\alpha$.

163(А). Решить уравнение

$$\left(\frac{3x-2}{4x+3}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{4x-3}\right)^2 = \frac{2(9x^2-4)}{16x^2-9}.$$

164(А). Найти $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

165(А). Решить уравнение

$$x^2 - 8x\sqrt{x+1} + 26x - 40\sqrt{x+1} + 41 = 0.$$

166(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6x(y+1) - 27(y+1)^2 = 0, \\ (x-9y-9)^2 + (x+3y+3)^2 = 36. \end{cases}$$

167(А). Решить неравенство $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.

168(А). Решить в натуральных числах уравнение $x^3 - 27y^3 = 37$.

169(А). Найти сумму квадратов корней многочлена $M(x) = 4p^2(x) + 3p(x) \cdot q(x) - q^2(x)$, если $p(x) = \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{x}{5} - \dfrac{27}{5}$, $q(x) = -\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{4x}{5} + \dfrac{17}{5}$.

170(А). Найти все трехзначные числа, которые в 3 раза больше суммы всевозможных двузначных чисел, составленных из них без перестановок.

171(А). Построить график функции $y = 3^{\log_9 \frac{x^2-4}{x-2}}$.

172(А). В равнобедренной трапеции длины боковых сторон равны по 13 см, большее основание — 20 см, а площадь — 180 см². Найти длину меньшего основания.

173(А). Построить график функции
$y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x} \cdot \sqrt{x^2-4x+4}$.

174(А). Решить неравенство

$$\sin^2 2013° + \cos^2 213° \geq 2\sin\frac{x}{2}.$$

175(А). Построить график функции

$$y = 3^{\log_9(x^2-2x+1)}.$$

176(А). Решить уравнение

$$\frac{x^2}{|x|}(4-x) + (1-|x|)(1+|x|) = 3.$$

177(А). Найти по крайней мере 2010 решений уравнения $y^2 = x^2 + x^3$ в целых числах.

178(А). Решить уравнение $2\log_2(|x| - x) = -1$.

179(А). Решить неравенство

$$\sqrt{9x^2-6x+x^0} > \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}.$$

180. Доказать тождество $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

181(А). Решить неравенство

$$\arcsin\sqrt{x^2-2} \leq \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

182(А). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+3y^2=1, \\ x-y=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

183. Доказать тождество
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)$.

184(А). Построить график функции
$$y = (\cos x)^0\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

185(А). Решить уравнение
$$\sqrt[3]{\frac{x+56}{x}} + 4\sqrt[3]{\frac{x+19}{x}} = 8.$$

186(А). Решить уравнение
$$\sqrt{x^2-x-1} + \sqrt{1-x-x^2} = x^2 + x + 2.$$

187(А). Решить уравнение
$$\sin\left(\pi\sqrt{4-3x-x^2}\right) = (|x| + x)^0.$$

188(А). Найти наименьшую пару чисел x, $y \in N$, таких, что выполняется равенство $x^2 + y^2 + xy = \overline{aaa}^2$.

189. Доказать, что любой четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограмм.

190(А). При каких значениях a выражение $3 + \cos x \cdot (6\cos x + a\sin x)$ будет равно 1 хотя бы при одном значении x?

191(А). Найти все трехзначные числа, которые при делении на 11 дают полный квадрат.

192(А). Доказать, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 (n — натуральное число).

193. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (1+y)^x = 100, \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}. \end{cases}$$

194. Доказать неравенство
$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2.$$

195(А). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{3x^2+6x+11}+\sqrt[3]{2x^2+4x+2}=\sqrt{3-x^2-2x}.$$

196(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=\lg\dfrac{x}{y}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$$

197(А). Найти число, при делении на которое числа 200513, 200631 и 200749 давали бы один и тот же остаток.

198(А). Решить уравнение

$$(x+2)9^x+(x-1)3^{x+1}=27.$$

199. Шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ равновелик прямому конусу, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания. Найти высоту конуса.

200(А). Найти четырехзначное число, у которого сумма двух первых и двух последних цифр равна 13, а сумма квадратов двух последних цифр равна двузначному числу, образованному первыми двумя цифрами искомого числа.

201(А). Решить уравнение

$$\log_3^2 x+(x-2)\log_3 x=8-2x.$$

202(А). Решить уравнение

$$5^{3x}\cdot 4^{4+x}\cdot 3^{16+x}=540^{8-x}.$$

203(А). Стороны треугольника $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см. Две из них (a и b) служат касательными к кругу, центр которого лежит на третьей стороне. Определить радиус круга.

204(А). Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x^2+a^2}{a(x+7)} \geq 1$ выполняется для всех $x \in (-2;\ 2)$.

205(А). Периодическая нечетная функция определена для всех действительных чисел. Ее период равен 5 и $f(1) = 3$, $f(2) = -4$. Найти значение $f(9) + f(-7) + f(6)$.

206(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$$

207(А). Решить уравнение

$$16x = 9(\sqrt{x} + 13)(2 - \sqrt{4-\sqrt{x}})^2.$$

208(А). Решить уравнение

$$2|x|\ln x + \frac{x^2-4}{|x|+2} = \frac{1}{\cos\dfrac{4\pi}{3}}.$$

209(А). Доказать тождество

$$\frac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4\alpha.$$

210(А). Решить неравенство

$$3^{2|x|-x} \leq \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

211(А). Решить уравнение $\sqrt[3]{\dfrac{7+x}{x}} + \sqrt[3]{\dfrac{9-x}{x}} = 4.$

212(А). При каком значении параметра a существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $2(x + y + z) = 4x^2 + y^2$ и $x + 2y + 3z = a$?

213(А). Найти сумму всех значений параметра a из интервала (3; 5), при каждом из которых существует хотя бы одно $x \in [4; 5]$, удовлетворяющее уравнению $\log_3(4 - |\sin ax|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$.

214(А). В квадрате $KCNM$ на серединах сторон KM и MN отмечены точки A и B, которые соединены с вершиной C. Найти $\angle ACB$.

215(А). Решить уравнение

$$\log_{x+3}(x^3 - 7x + 5) \cdot \log_{x-3}(x + 3) = 3.$$

216. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника можно найти по формуле $S = (2R + r) \cdot r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

217(А). Решить уравнение $64^x - 27^x = 3(48^x - 36^x)$.

218(А). Решить уравнение $1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12x}$.

219(А). Решить неравенство

$$\sqrt{7x^2 - 11x - 13} + \sqrt{7x^2 - 13x - 10} \le |2x - 3|.$$

220. Найти цифры x, y, z, если $\sqrt{\overline{xyz}} = x + y^2 + z^3$.

221(А). Решить уравнение

$$(x - 1)\sqrt{x} + \sqrt{4 - x} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

222(А). Решить уравнение $x - x^2 - 2x^3 = \frac{1}{3}$.

223(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 13(y - x) = 7x^4 + 6, \\ \sqrt{y} + \sqrt{y - 2x} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

224(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

225(А). Найти все a, при которых неравенство $\frac{x-2a-4}{x-a+4}<0$ выполняется для всех $x\in[2;3]$.

226(А). Решить уравнение

$$\sqrt{4x^2+4x+3}\cdot \operatorname{arctg}(2x+1)+$$
$$+\sqrt{x^2-4x+6}\cdot \operatorname{arctg}(2-x)=0.$$

227. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

228(А). Найти функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} f(3x-2)+7g(x-5)=1, \\ f(x+2)-g\left(\frac{x}{3}-4\right)=3x. \end{cases}$$

229(А). Решить уравнение

$$\log_5(16+6x-x^2)=\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}.$$

230(А). В прямоугольном ΔABC ($\angle C=90°$) разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см. Найти отношение R/r, если $S_{\Delta ABC}=144$ см^2.

231(А). Решить уравнение $x\left(\frac{\sqrt{9x^2-1}+1}{\sqrt{9x^2-1}}\right)=\frac{35}{36}$.

232(А). Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1C_1B_1D_1$ плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах CC_1, AD и BB_1.

233(А). Является ли число $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ рациональным или иррациональным?

234(А). Решить уравнение

$$50505^x + 121212^x = 131313^x.$$

235(А). Упростить выражение

$$\sqrt[3]{3(4+\sqrt[3]{13}-\sqrt[3]{169})} - \sqrt[3]{13}.$$

236. Решить в натуральных числах уравнение

$$\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2.$$

237(А). Сколько диагоналей можно провести в правильном десятиугольнике?

238(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x = xy + y^2, \\ 4y = x^2 + 2x. \end{cases}$

239(А). Доказать, что уравнение $\sin x = ax$ не может иметь 2010 корней.

240(А). Доказать, что числа вида

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 35) + 36$$

есть точный квадрат.

241(А). Требуется на 100 рублей купить 40 почтовых марок — рублевых, четырехрублевых и двенадцатирублевых. Сколько окажется марок каждого достоинства?

242(А). Доказать, что если $\sin x + \cos x = 1$, то $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$.

243. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 дает остаток 2, на 5 — остаток 3, наконец, на 7 — остаток 2.

244(А). Расположить многочлен $x^3 + x^2 + x + 2013$ по степеням $x + 7$.

245(А). Решить уравнение

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4.$$

246(А). Решить уравнение $2x^7 + x^{28} = 3x^{21}$.

247(А). Представить многочлен $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$ в виде произведения четырех многочленов не ниже первой.

248(А). Известно, что числа x и y удовлетворяют условию $\dfrac{x}{2y} + \dfrac{9y}{2x} + \dfrac{18xy}{x^2+9y^2} = 6$. Найти наименьшее значение выражения $(x - 7)^2 + 3xy$.

249(А). Углы треугольника относятся как $1 : 5 : 6$. Длина наименьшей стороны равна 2. Найти радиус вписанной окружности.

250(А). Решить неравенство $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1$.

251(А). Доказать, что при любом неотрицательном n число $29^n + 19^n + 15^n - 2^n \cdot (1 + 2^{3n} + 3^n)$ делится на 13.

252(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$.

253(А). Решить уравнение $\dfrac{x(4x^2+3)}{(2x+1)^3} = 7$.

254(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 9(x-y)^3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

255(А). Решить уравнение

$$(3x + 1)^2 = 8\sqrt{x}(3x - 2\sqrt{x}) + 1.$$

256(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x^{x+y} = y^{24}, \\ y^{x+y} = x^{6}. \end{cases}$

257. Доказать, что если p и $2p + 1$ — числа простые и $p \geq 5$, то $4p + 1$ — число составное.

258(А). Доказать, что ни при каком целом значении x дроби $\dfrac{x^2-3x+4}{49}$; $\dfrac{x^2+5x-9}{169}$; $\dfrac{x^2+3x+15}{121}$ не могут быть равны целым числам.

259. Разложить на множители $(x + y)^7 - x^7 - y^7$.

260. Упростить выражение

$$30\sqrt[3]{\frac{1}{12}} + 3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 5\sqrt[3]{144}.$$

261(А). Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$.

262. В уравнении $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$ освободиться от радикала.

263. Доказать, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

264. Доказать, что если n — целое число, то $n^5 - n$ делится на 5.

265. Четырехзначное число делится на 7 и 19. После умножения его на 29 и деления на 41 получился остаток 39. Найти это число.

266(А). Чему равен n-й член ряда

$$-13 + 17 - 13 + 17 - 13 + 17 - \ldots ?$$

267. Доказать, что если для углов A, B, C некоторого треугольника выполняется соотношение

$\operatorname{tg}(A-B)+\operatorname{tg}(B-C)+\operatorname{tg}(C-A)=0$, то треугольник равнобедренный.

268(А). Решить уравнение

$$x^2(x+1)^2-3x(x^2-1)=4(x-1)^2.$$

269(А). Доказать, что если

$$(x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-1})(y\sqrt{y}+\sqrt{y^3-1})=1,$$

то $\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y^3-1}=0$.

270. Доказать, что $\operatorname{tg}15°\cdot\operatorname{tg}25°\cdot\operatorname{tg}35°\cdot\operatorname{tg}85°=1$.

271. Сколько существует пятизначных чисел, оканчивающихся цифрой 6, которые делятся на 3.

272. Решить уравнение $8^x\cdot(3x+1)=6$.

273. Доказать, что если натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=c^2$, то по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3.

11 класс

1(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)$.

2(А). Решить уравнение

$$\frac{1}{(x+2009)(x+2010)} + \frac{1}{(x+2010)(x+2011)} + \frac{1}{(x+2011)(x+2012)} + \frac{1}{(x+2012)(x+2013)} = \frac{1}{999999}.$$

3(А). Решить уравнение

$$\frac{(x+4)(x-2)}{x+2} - \frac{3x+4}{x^2-14} = 4.$$

4(А). Доказать, что выражение $(x^3 - x^2y + xy^2 + y^3)^5 + (x^3 + x^2y - xy^2 + y^3)^5$ делится без остатка на $2(x^3 + y^3)$.

5(А). Не пользуясь таблицами логарифмов, доказать неравенство $\dfrac{1}{\log_7 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 3$.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3^x + 3^y + 3^z = 9, \\ 9^x + 9^y + 9^z = 27, \\ x^z + z^y + y^x = 3. \end{cases}$

7. Разложить многочлен $(x + y)^7 - x^7 - y^7$ на множители.

8(А). По двум сторонам треугольника a и b найти радиус описанной окружности, если известно, что угол, лежащий против третьей стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

9(А). Доказать, что если $a + b + c = 12$, то
$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \le 9.$$

10. Сократить дробь $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$.

11. Доказать, что при $n \in Z$ и $n \ge 0$ выражение $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ кратно 57.

12. Доказать, что для любого целого числа n число $(\sqrt{2} - 1)^n$ можно представить в виде разности $\sqrt{m+1} - \sqrt{m}$, где m — целое.

13(А). Упростить выражение
$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}.$$

14. Найти все простые числа p, такие, что $p + 10$ и $p + 14$ также являются простыми.

15(А). Упростить выражение $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.

16(А). Решить уравнение
$$(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = \frac{1}{4}x.$$

17(А). Доказать, что выражение $(x^2 - xy + y^2)^7 + (x^2 + xy + y^2)^7$ делится без остатка на $2x^2 + 2y^2$.

18(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^4 - y^4 = 20(x+y). \end{cases}$$

19(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy(x^2 + y^2) = 78. \end{cases}$$

20(А). Пусть $f(\cos x) = \cos 13x$. Доказать, что $f(\sin x) = \sin 13x$.

21(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y^2-1}+y\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{x^2+y^2-2}, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$$

22(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{121}{13}, \\ x+y=2. \end{cases}$$

23(А). Известно, что отрезки с длинами a, b, c образуют треугольник. Доказать, что отрезки с длинами $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$ также образуют треугольник.

24(А). Решить неравенство $3x^7 - x^4 + x > 3$.

25. Доказать, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \le \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

26(А). Решить уравнение $2\sin\dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{x^2+1}{x}$.

27(А). Решить неравенство

$$\arccos\left(\log_2\frac{x}{3}\right) < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

28(А). Решить уравнение $\sqrt[x]{4} + 2x\sqrt[x]{2} - 6x = 9$, где $x > 0$.

29(А). Что больше: $(1{,}001)^{1000}$ или 2?

30(А). Роща имеет форму круга радиуса 258 м. Расстояние между двумя деревьями в ней не менее 12 м. Доказать, что в роще менее 2013 деревьев.

31. Решить уравнение $\sqrt[x]{x} = \sqrt{x^x}$.

32(А). Делится ли число $10^n + 6^n - 3^n - 1$, $n \in N$, на 63?

33(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (4x^3 - 3x)^4 + (4y^3 - 3y)^4 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

34. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^{x+y} - y^{12} = 0, \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases}$

35(А). Решить уравнение $\sin x + \sin^7 x - \sin 7x = 3$.

36(А). Решить уравнение
$(x^3 + 2x + 10)^3 + 2(x^3 + 2x + 10) + 10 = x$.

37. Доказать, что если a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, то справедливо равенство $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

38(А). Решить уравнение $x^4 + 26x^2 - x + 182 = 0$.

39(А). Решить уравнение

$$6 \operatorname{tg}^3 x - 5 = \sqrt[3]{\frac{1}{6}(\operatorname{tg} x + 5)}.$$

40(А). Решить уравнение

$$(x^2 + x + 1)(x^{12} + x^{11} + x^{10} + \ldots + 1) = \\ = (x^7 + x^6 + \ldots + 1)^2.$$

41(А). Построить график функции

$$y = (\log_{2013} x^{2013})^0 \cdot \frac{|x^3| + 8}{x^2 - 2x + 4}.$$

42(А). Решить неравенство $5x^2 + \dfrac{2}{x} \le 3\sqrt[3]{5}$.

43(А). Решить систему уравнений

$\begin{cases} xy + yz + xz = 27, \\ xyz = x + y + z; \end{cases}$ где $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

44(А). Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = \sin x + \sqrt{x-3}.$$

45(А). Решить неравенство $3^{2|x|-x} \le \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

46(А). Доказать, что если $\sin x + \cos x = a$, то $\sin^5 x + \cos^5 x = \frac{a}{4}(5 - a^5)$.

47(А). Решить неравенство $\frac{x}{|x|} \le \sqrt{9-x^2}$.

48(А). Решить неравенство

$$2^{\sqrt{x-3}} \le \arccos(\cos 2\sqrt{2}).$$

49(А). Решить уравнение

$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1) = 6.$$

50(А). Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $5f(x) = 3f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}$, где $x > 0$.

51(А). Решить неравенство

$$|\operatorname{arctg}(\log_2 x)| < \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

52(А). Найти все значения a, при которых корни x_1, x_2, x_3 многочлена $x^3 - 9x^2 + 3ax + a$ удовлетворяют равенству $(x_1-2)^3 + (x_2-2)^3 + (x_3-2)^3 = 0$.

53(А). Доказать, что если $7\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$, то $3\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 4\operatorname{tg}\alpha$.

54(А). Решить уравнение

$$\cos(\pi\sqrt{x^2-4x-5}) = \frac{1-x^3}{x^2+x+1} + x.$$

55(А). Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + (\sqrt{x-6,5}\,)^2 + 13,5 = \frac{x^2-4x+4}{x-4} + x.$$

56(А). Сравнить $\frac{1}{2013}$ и $\ln\frac{2013}{2010}$.

57(А). Решить уравнение

$$(\sin^2 x)' = \frac{4}{\pi}(\arcsin x + \arccos x).$$

58(А). Решить уравнение

$$x^2\sqrt{4-x^2} = |x|^3 - 4|x| + 4\sqrt{2}.$$

59(А). В конус вписан шар. Радиус окружности, которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между его высотой и образующей равен α.

60(А). Решить неравенство

$$(4x^2 - x + \sqrt{7})\frac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0.$$

61(А). Решить уравнение $\sqrt{1-x^2} = 3x - 4x^3$.

62(А). В шестизначном числе первая цифра 2. Если ее перенести в конец, не изменяя порядка остальных цифр, то полученное число будет втрое больше исходного. Найти исходное число.

63(А). Решить неравенство $(a-6)2^{\sqrt{x-4}} < a - 3$.

64(А). Решить уравнение $x^2 + \frac{18}{x} = 9\sqrt[3]{3}$.

65(А). Решить неравенство $|x^2 - 1| + |x^2 - 9| < 8$.

66. При каком значении a график функции $y = a^x$ касается графика функции $y = \log_a x$?

67(А). Решить уравнение

$$5+4\cos\frac{x-y}{2}+\cos(x-y)=$$
$$=4\sqrt{4x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{4}=0.$$

68(А). Вычислить
$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7.$

69(А). Сравнить числа
$a=\operatorname{ctg}^2(\lg(2+\sqrt{3}))$ и $b=\operatorname{ctg}^2(\lg(2-\sqrt{3}))$.

70(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2y^2-4x+4y^2=0,\\x^2-4x+5+y^3=0.\end{cases}$$

71(А). Решить уравнение $5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500.$

72(А). Решить уравнение

$$\log_2(3+2x-x^2)=\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}.$$

73(А). Решить уравнение
$4(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=-1$, если $x\in[0;1)$.

74. Найти значение $\sin 18°$ и $\cos 18°$, не пользуясь таблицами.

75(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}y^2z^2+4x^2z^2+9x^2y^2=25x^2y^2z^2,\\x^2+4y^2+25z^2=16,\\13\sqrt{5}x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y+2\sqrt{3}z=24.\end{cases}$$

76(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = 3 + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \\ y^2 = \dfrac{1}{z^2} - 1, \\ z = 12x - 2x^2 - 17. \end{cases}$$

77(А). Найти множество значений функции

$$y = \frac{10}{\pi} \arccos (0,5(\cos x - \sin x)).$$

78(А). Решить систему уравнений

$$7x - 11y = \sqrt[3]{x+y} = \sqrt[5]{x+9y}.$$

79(А). Решить неравенство $3x^7 - x^4 + x > 3$.

80(А). В правильной пирамиде $MABCD$ MO — высота пирамиды. Объем пирамиды равен $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Найти наименьшую площадь боковой поверхности пирамиды.

81(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$

82(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^3 = y^2. \end{cases}$

83(А). Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} (\sin^4 x - \cos^4 x)\, dx$.

84(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4, \\ x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$$

85(А). Решить уравнение

$$5\log_2\left(x-4+\frac{x-6}{x-4}\right)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3(x-5)}+\frac{1}{3(x-2)}\right)+7.$$

86(А). Найти целое число, которое обращается в квадрат как при увеличении его на 307, так и после уменьшения на 192.

87(А). Найти все целые положительные числа, произведение цифр которых равно $x^2 - 10x - 22$.

88(А). Решить уравнение

$$\log_3^2 x + (x-2)\log_3 x = 8 - 2x.$$

89(А). Решить систему неравенств $\begin{cases} x-2|x|>1, \\ |x-3|<5. \end{cases}$

90. Решить неравенство $\log_a(x-a) > \log_{\frac{1}{a}}(x+a)$.

91(А). Решить уравнение

$$\log_6(9x^2+1) - \log_6 x = 3x(2-3x).$$

92(А). Вычислить $\log_3 18$, если $\log_3 12 = a$.

93. Доказать, что число вида

$$(10^n + 10^{n+1} + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 35) + 36$$

есть точный квадрат.

94(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то

$$18(a^5 + b^5 + c^5) = 25(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4).$$

95(А). Решить уравнение $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$.

96. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \sin(\arccos x).$$

97(А). Найти хотя бы одну тройку целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^{13}$.

98(А). Сколько существует четырехзначных чисел — квадратов, у которых одинаковы две первые и две последние цифры?

99(А). Решить неравенство

$$\cos\left(\arcsin\sqrt{2x+1}\right) < \arccos(\cos 5).$$

100(А). В ΔABC стороны a, b, c ($a < b < c$) образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $R \cdot r = 130$, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Найти наименьшую тройку натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих условию задачи.

101(А). Трехзначное число $\overline{abc}$ является квадратом. Найти все такие числа, если $\overline{abc} = \overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ac}$.

102(А). Построить график функции

$$y = \frac{|x|}{x} - 2\sin|x|\sin x.$$

103(А). Решить неравенство

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) \geq 1.$$

104(А). Доказать, что если $\cos\alpha + \cos\beta = a$ и $\sin\alpha + \sin\beta = b$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$.

105(А). Решить в целых числах уравнение $x^{10} + 5x^5 - y^8 - 4y^4 = 1$.

106(А). При каких значениях x дробь $\dfrac{x^3+6x^2+35x-42}{x^3+5x^2+28x-84}$ можно сократить на 2010?

107. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{7}{16}$.

извините
страница 72 отсутствует

извините
страница 73 отсутствует

извините
страница 74 отсутствует

извините
страница 76 отсутствует

извините
страница 76 отсутствует

извините
страница 77 отсутствует

извините
страница 78 отсутствует

извините
страница 79 отсутствует

извините
страница 80 отсутствует

извините
страница 81 отсутствует

извините
страница 82 отсутствует

извините
страница 83 отсутствует

извините
страница 84 отсутствует

извините
страница 85 отсутствует

247. Доказать, что при любом натуральном n следующие выражения есть целые числа:

$$\frac{10^2+2}{3};\ \frac{10^2+8}{9};\ \frac{10^2+5}{5}.$$

248. При каком условии многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ является кубом двучлена первой степени?

249(А). Найти условие делимости $(x + 1)^m + (x - 1)^m$ на x, где $x \in N$.

250(А). Разложить на множители $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.

251. Решить в рациональных числах уравнение $x^y = y^x$.

252(А). Произведение первой цифры числа на оставшуюся часть равно 104, а последней цифры на оставшуюся часть — 243. Найти это число.

253. Найти прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы целыми числами, причем все 9 цифр, участвующих в записи сторон, различны.

254. Найти все тройки чисел a, b, $c \in N$, являющихся длинами сторон треугольника с диаметром описанной окружности, равным 6,25.

255(А). Решить в целых числах систему уравнений $\begin{cases} 4k+1=m^2, \\ 3k+1=n^2, \end{cases}$ где $k > 0$.

256(А). Найти в целых числах решение системы уравнений $\begin{cases} a+b+c=x+y, \\ a^2+b^2+c^2=x^2+y^2, \end{cases}$ если числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию.

Раздел II

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

9 класс

1. *Решение.* Данная сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$ и может оканчиваться на 0, 1, 3, 5, 6, 8, но не на 7.

Ответ: нет.

2. *Решение.* $80^{13} < 81^{13} = (3^4)^{13} = 3^{52} < 3^{56} = (3^4)^{14} = (3^2)^{28} = 9^{28} < 10^{28}$.

Ответ: $80^{13} < 10^{28}$.

3. *Указание.* Если n — нечетное, то делится; если n — четное, то не делится. Положить $x = 0$.

4. *Ответ:* делится.

Указание. Положить $2^{13} = x$, тогда $2^{54} + 1 = 4x^4 + 1$; $2^{27} + 2^{14} + 1 = 2x^2 + 2x + 1$, и т. д.

5. *Решение.* Возведем обе части неравенства в куб: $1 + x < 1 + 3 \cdot \frac{x}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} = \left(1+\frac{x}{3}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$.

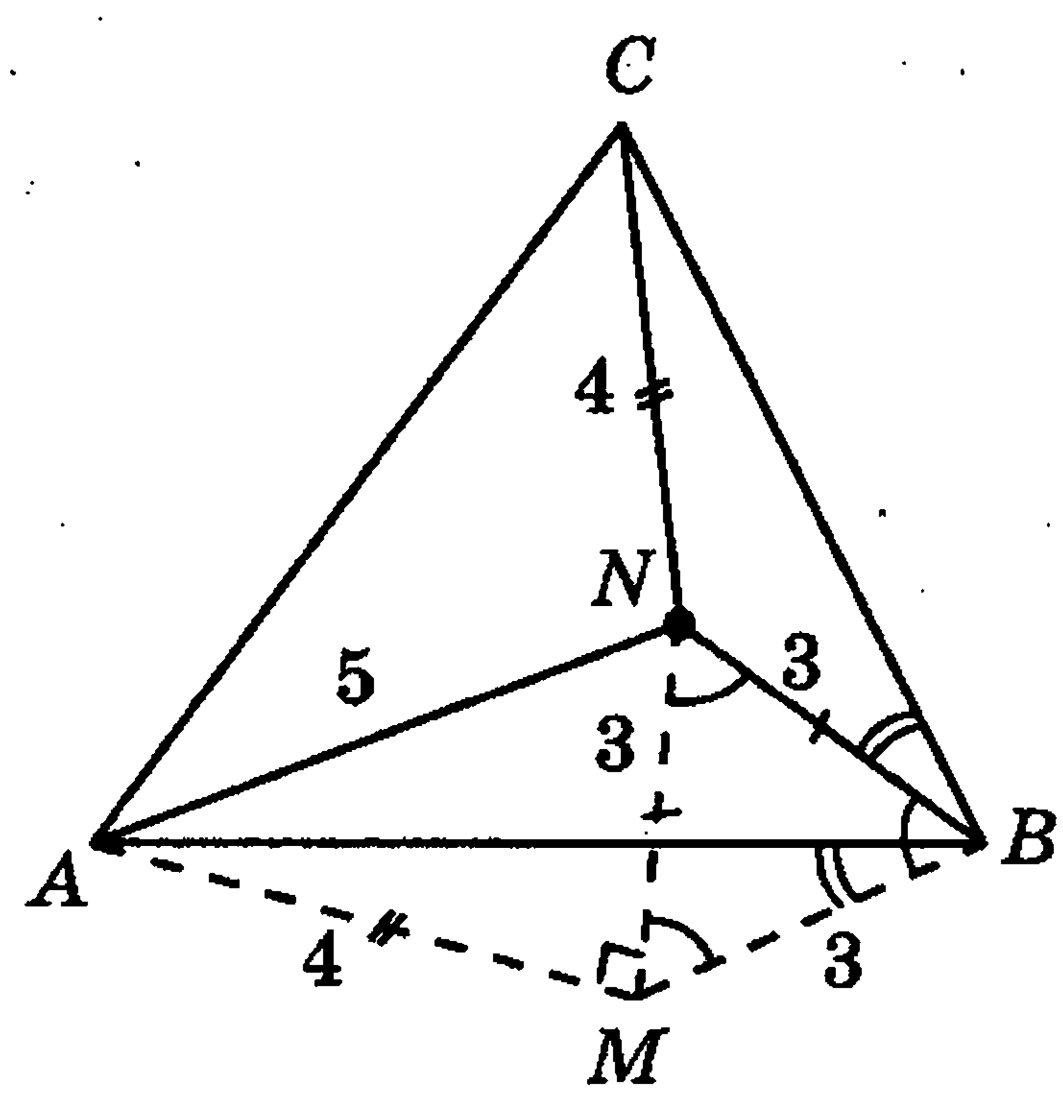
6. *Ответ:* $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

7. *Указание.* Показать, что $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

8. *Указание.* Достаточно взять $a = n + 4$, тогда $an + 4 = (n + 2)^2$ — составное.

9. *Ответ:* $(\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

10. *Указание.* $\angle AMB = 150°$ (см. рис.). AB находим из ΔAMB по теореме косинусов.



Ответ: $\sqrt{25+2\sqrt{3}}$.

11. *Решение.* Нет, так как иначе корзины с четным и нечетным количеством орехов должны чередоваться, т. е. корзин должно быть четное число.

12. *Ответ:* $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

13. *Ответ:* 4567.

14. *Указание.* Учесть, что ΔMNK и ΔKPE вместе составляют ΔMKE. Тогда площадь пятиугольника равна двум площадям ΔMKE, т. е. равна $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot = 1$.

15. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = 5{,}5$.

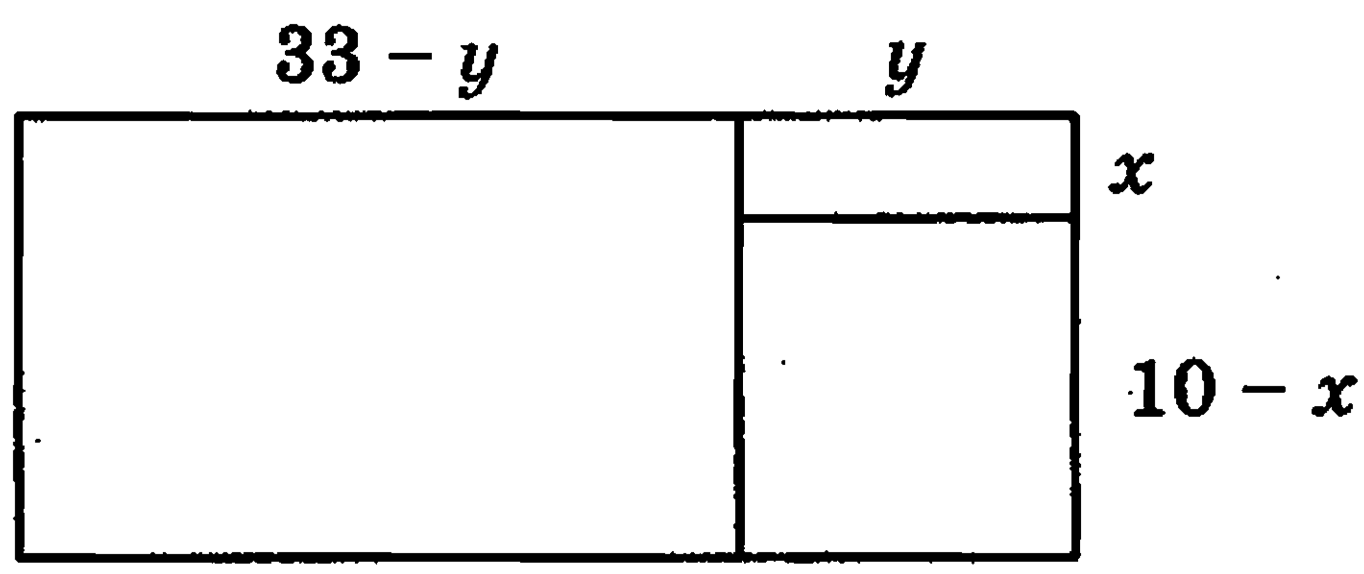
16. *Ответ:* (2; −1), (−1; 2), (−1; 1).

Указание. $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$. Далее замена $x + y = a$, $xy = b$, и т. д.

17. *Решение.* При $x = 13$ имеем $a \cdot 13^2 + b \cdot 13 + c = 2$, а при $x = 60$ получим $a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 3$. Вычитая из второго равенства первое, находим $a(60^2 - 13^2) + b(60 - 13) + c = 1$, а если a и b — целые, то 1 делится на $60 - 13 = 47$, что неверно.

18. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 8$.

19. ***Решение.*** Из подобия прямоугольников имеем $\frac{x}{y} = \frac{y}{10-x} = \frac{10}{33-y}$.



Из I и II уравнений $x = \frac{10}{33-y}$. (1)

Из II и III уравнений получим $y(33 - y) = 100 - 10x$, или, учитывая (1), находим $y(33 - y) = \frac{100(33-2y)}{33-y}$, или $y(33 - y)^2 = 100(33 - 2y)$, или

$y^3 - 66y^2 + 1289y - 3300 = 0$. (2)

Можно убедиться, что $y = 3$ — корень уравнения (2), тогда $(y - 3)(y^2 - 63y + 1100) = 0$, откуда $y = 3$. Уравнение $y^2 - 63y + 1100 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$. Итак, $y = 3$, тогда из (1) получим $x = 1$.

20. *Ответ:* 75°.

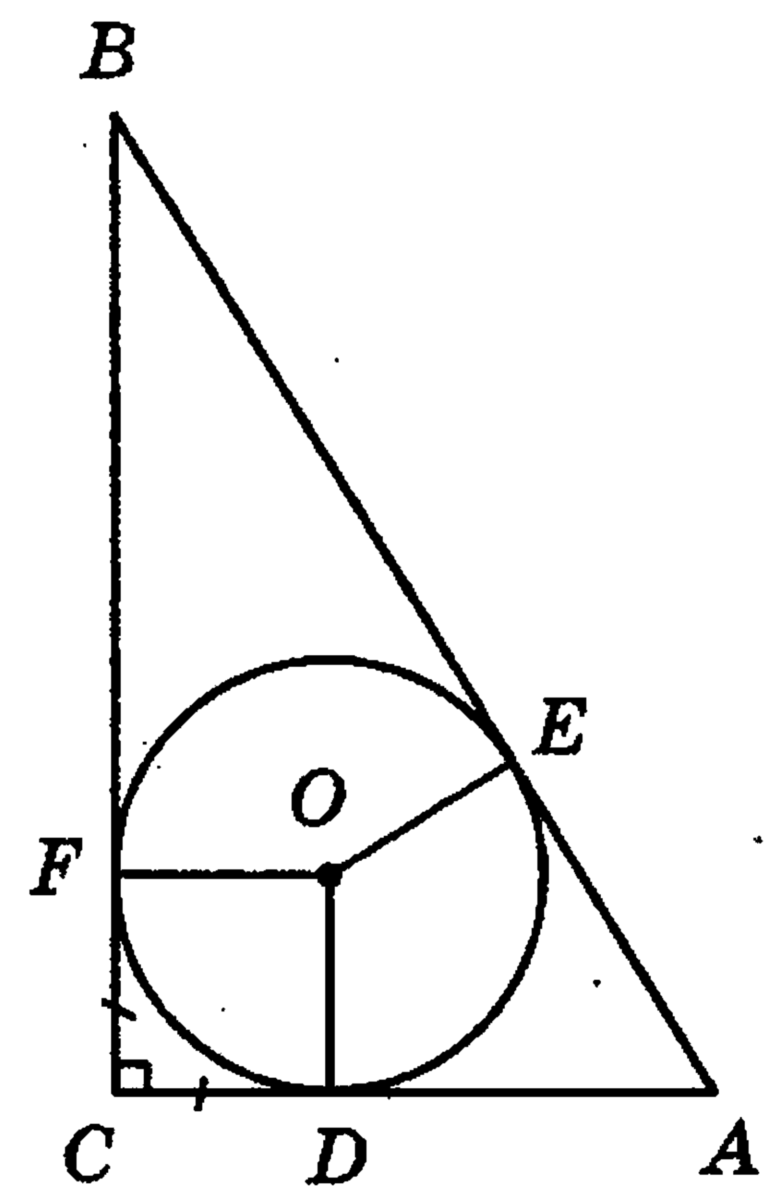
Указание. Использовать теоремы синусов и косинусов.

21. *Решение.*

I способ

Поскольку $OD \perp AC$, $OF \perp BC$ и $\angle C = 90°$, то $FODC$ — квадрат. $OD = OF = OE = r$, $AD = b - r$, $BF = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки. Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB =$

$= AE + BE$, т. е. $c = (b - r) + (a - r)$, откуда $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, ч. т. д.



II способ

Заметим, что $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c)r$, тогда $ab = (a + b + c)r$, откуда $r = \frac{ab}{a+b+c}$. (1)

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, или $(a + b)^2 - 2ab = c^2$, т. е. $2ab = (a + b)^2 - c^2$, или $2ab = (a + b - c)(a + b + c)$, тогда (1) примет вид $r = \frac{2ab}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}$, ч. т. д.

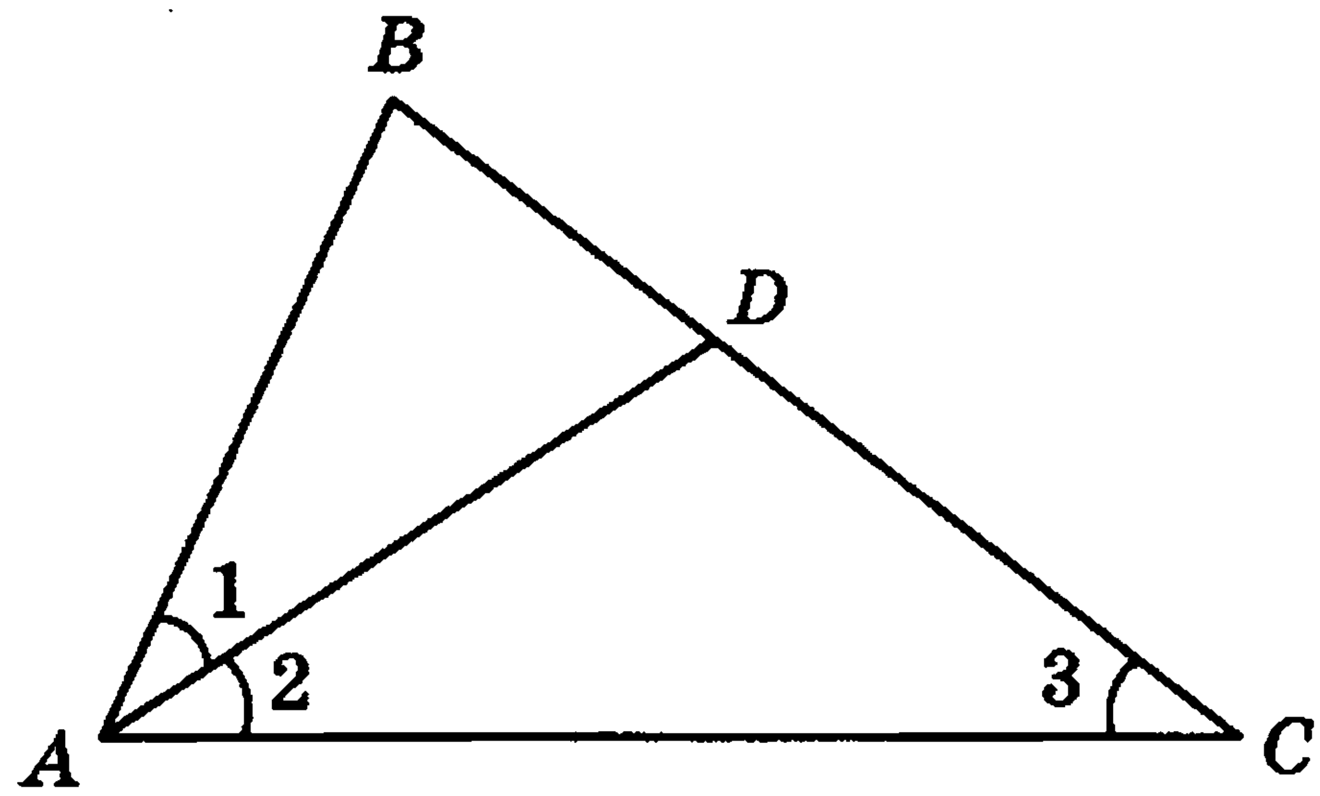
22. *Указание.* $12(x + y) = (5x + 7y) + (7x + 5y)$.

23. Пусть n — число домов, a — первый и b — последний номера домов. Так как номера домов возрастают на 2, то имеем возрастающую арифметическую прогрессию, тогда $S_n = \frac{a+b}{2} \cdot n = 423$. Но $423 = 3 \cdot 3 \cdot 47$, и так как $n \geq 5$, то $n = 9$. Значит, номер пятого (среднего) дома равен 47.

24. *Решение.*

I способ

Проведем биссектрису AD угла A, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, т. е. $AD = DC$. Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$.



Заметим, что $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle 1 = \angle 3$). Из подобия имеем $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$, или $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x+2} = \frac{y}{5}$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x+2} = \frac{y}{5}; \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases}$ откуда, вычитая из I уравнения II, получим $5y - 10 = 2y$, или $y = \frac{10}{3}$, тогда

$5x = \frac{10}{3}x + \frac{20}{3}$, откуда $x = 4$.

Значит, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

II способ

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 180° - 3\alpha$. Полагая, что $AB = x$, $BC = x + 2$, по теореме синусов имеем $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin(180° - 3\alpha)}$, или

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{x+2}{\sin 2\alpha}, & (1)\\ \dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{5}{\sin 3\alpha}. & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) находим $\dfrac{x+2}{x} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$, или

$$1 + \frac{2}{x} = 2\cos\alpha. \qquad (3)$$

Из уравнения (2) получим $x = \dfrac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Поскольку $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, то

$$x = \frac{5}{3-4\sin^2\alpha}.$$

Учитывая (3), имеем $1 + \dfrac{6-8\sin^2\alpha}{5} = 2\cos\alpha$ или $8\cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 3 = 0$, откуда находим $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Если $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$, то, учитывая (3), имеем $x = 4$.

Если $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, то $1 + \dfrac{2}{x} = 1$, что невозможно.

Итак, $AB = 4$ см, тогда $BC = x + 2 = 6$ (см).

Замечание. Если $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, то $\alpha = 60°$, тогда $\angle C = 60°$, $\angle A = 120°$, чего не может быть.

25. *Ответ:* $(x + y - 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1)$.

26. *Ответ:* $(a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)$.

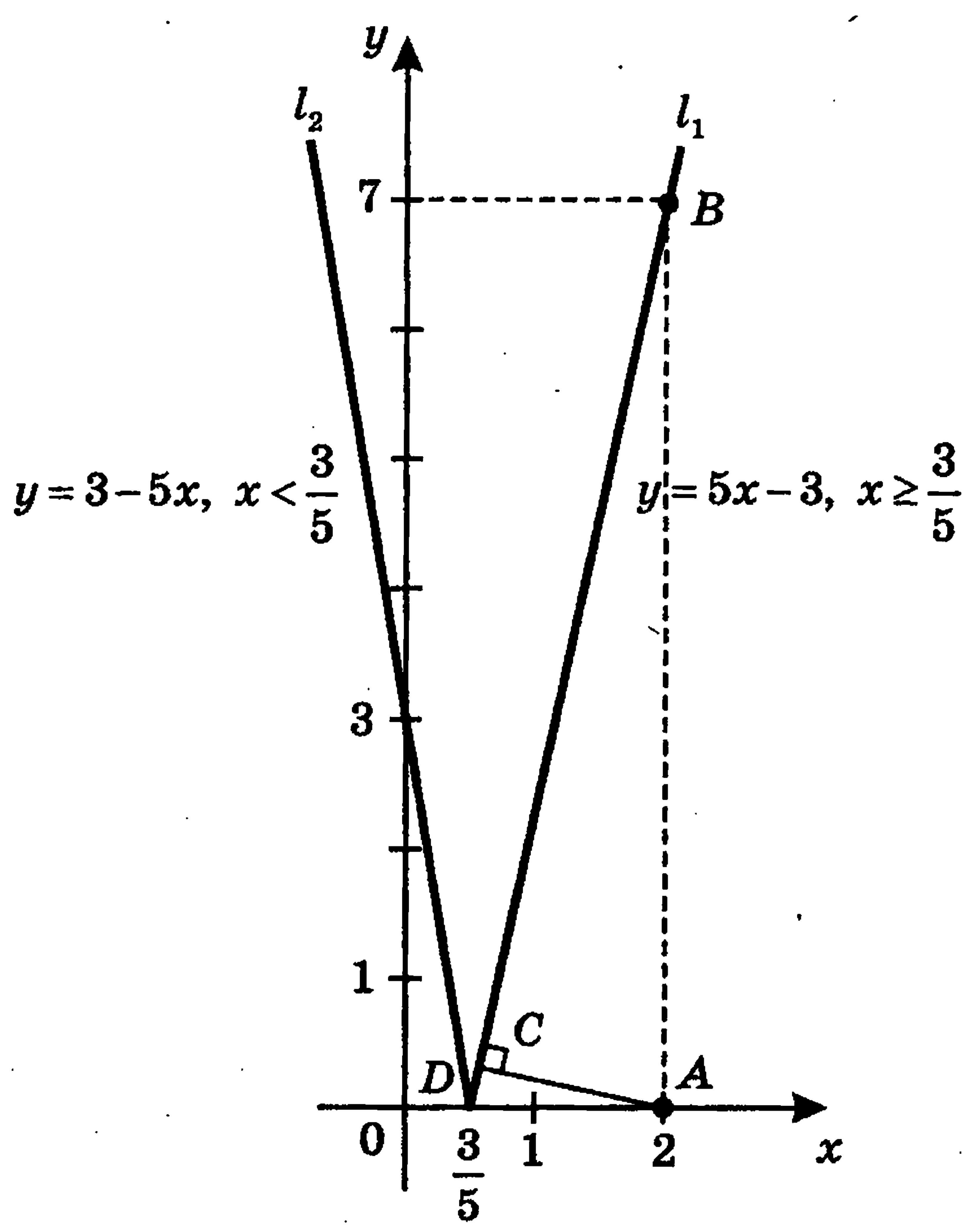
27. *Ответ:* 1.

28. *Ответ:* $x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{24-19a}{19-8a}$.

29. *Указание.* Записать уравнение в виде $4x^2 - \dfrac{25}{9} = 4 - \dfrac{10}{3x}$, откуда находим $x_1 = \dfrac{5}{6}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = -\dfrac{3}{2}$.

30. *Решение.*

При $x \geq \dfrac{3}{5}$, $y = 5x - 3$, а ее графиком является прямая l_1.



Заметим, что $k_1 = 5$ — угловой коэффициент прямой l_1. Поскольку $AC \perp l_1$, то угловой коэффициент k_1 прямой AC связан с коэффициентом k_1 соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$, или $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{5}$.

Тогда уравнение прямой AC примет вид

$$y = -\frac{1}{5}(x-2).$$

Следовательно, точку пересечения прямых AC и l_1 найдем из системы

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}(x-2), \\ y = 5x-3, \end{cases} \quad \text{или } 5x - 3 = -\frac{1}{5}(x-2),$$

откуда находим $x = \frac{17}{26}$, тогда $y = \frac{7}{26}$.

Ответ: $C\left(\frac{17}{26}; \frac{7}{26}\right)$.

Замечание. Можно привести еще по крайней мере 5 способов решения этой задачи (см. *Балаян Э.Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009. — С. 175–179).

31. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{25}$.

Указание. $2(x-1) = 2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$.

32. *Указание.* Записать данное выражение в виде $333^{777} + 777^{333} = (333^{777} + 7^{777}) + (777^{333} - 7^{333}) - (7^{777} - 7^{333})$. Далее учесть, что сумма нечетных степеней делится на сумму оснований, а разность любых целых степеней делится на разность оснований. Наконец, $7^{777} - 7^{333} = 7^{333} \cdot (7^{4 \cdot 111} - 1) = 7^{333} \cdot (2401^{111} - 1)$ — кратно 10.

33. *Решение.*

Легко заметить, что $\cos x = \pm\frac{1}{2}$ удовлетворяет данному уравнению, откуда находим $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

При других возможных значениях слева имеем сумму иррациональных чисел, а справа — число 1. Следовательно, других решений данное уравнение не имеет.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Замечание. Можно привести и другие решения (см. *Балаян Э.Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009. — С. 181–182).

34. *Указание.* Умножить числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения на $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-2}$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

35. *Решение.* Обозначим через x, y, z, u соответственно количество «двоек», «троек», «четверок» и «пятерок». Согласно условию имеем

$$\begin{cases} x + y + z + u = 30, & (1) \\ 2x + 3y + 4z + 5u = 90. & (2) \end{cases}$$

Кроме того, $u < z < y$. (3)

По условию z кратно 5 и y кратно 7. Из (3) $\Rightarrow$ $\Rightarrow y \neq 0$, $z \neq 0$. Из (1) и (2) исключим x:

$\begin{cases} 2x+2y+2z+2u=60, \\ 2x+3y+4z+5u=90, \end{cases}$ откуда

$$y + 2z + 3u = 30. \qquad (4)$$

Так как z кратно 5 и $z \neq 0$, то из (4) $\Rightarrow z = 5$, или $z = 10$.

1. Если $z = 5$, то (4) примет вид $y + 3u = 20$. (5)

Так как $y \neq 0$ и y кратно 7, то с учетом (5) находим $y = 7$ или $y = 14$. Но если $y = 7$, то из (5) $\Rightarrow$ $\Rightarrow 3u = 13$ — не подходит, так как u — целое число. Если $y = 14$, то $3u = 6$, $u = 2$, тогда $x = 9$.

2. Если $z = 10$, то $y + 3u = 10$. Так как $y \neq 0$ и y кратно 7, то с учетом условия $z < y$ следует, что при $z = 10$ должно быть $y > z$ и уравнение $y + 3u = 10$ не имеет решения при указанном ограничении.

Итак, $x = 9$, $y = 14$, $z = 5$, $u = 2$, т. е. «пятерок» — 2, «четверок» — 5, «троек» — 14, «двоек» — 9.

36. *Указание.* Обозначить $y = 3^x$.

37. *Ответ:* (0; 0), (2; 3), $\left(-\frac{26}{5}; -\frac{13}{5}\right)$.

Указание. Записать I уравнение в виде $(x - 2y)(3x - 2y) = 0$, и т. д.

38. *Решение.* Пусть $a = 17$, $b = 25$, $c = 26$ см — стороны I треугольника, $a = 17$, $b = 25$ — две стороны II треугольника и x — длина третьей стороны. По условию у данных треугольников равны радиусы вписанных окружностей, тогда

$r = \frac{S_1}{p_1} = \frac{S_2}{p_2}$, где $S_1 = \sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - b)(p_1 - c)}$,

$p_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) = 34$ и

$S_1 = \sqrt{34 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 8} = 204$ (см^2).

Аналогично, $p_2 = \dfrac{42+x}{2}$,

$$S_2=\sqrt{\frac{42+x}{2}\cdot\left(\frac{42+x}{2}-17\right)\cdot\left(\frac{42+x}{2}-25\right)\cdot\left(\frac{42+x}{2}-x\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{42+x}{2}\cdot\frac{42-x}{2}\cdot\frac{8+x}{2}\cdot\frac{x-8}{2}}.$$

Итак, $\dfrac{1}{4}\sqrt{(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)}:\dfrac{1}{2}(42+x)=$

$=\dfrac{204}{34}$, $\dfrac{\sqrt{(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)}}{2(42+x)}=6$, или

$(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)=144(42+x)^2$,
$42+x\neq 0$
$(42-x)(x^2-64)=144(42+x)$, или
$x^3-42x^2+80x+8736=0$, или
$x^2(x-28)-14x(x-28)-312(x-28)=0$,
$(x-28)(x^2-14x-312)=0$, $x_1=28$,
$x^2-14x-312=0$,

откуда находим $x_2 = 26$, $x_3 = -12$ (не подходит). Если $x = 26$, то получим I треугольник. Итак, длина третьей стороны II треугольника равна 28 см. При этом $r = 6$ см (можно проверить непосредственно).

Ответ: 28 см.

Замечание 1. Условие этой задачи заимствовано из книги *Тригг Ч.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975. № 167. С. 41–42.

Замечание 2. Редким примером «тупоугольных близнецов» служат треугольники со сторонами, равными соответственно 97, 169, 122 и 97, 169, 228. У каждого из них $r = 30$ (см. там же).

Замечание 3. Представляет интерес нахождение двух треугольников подобного вида, у которых равны радиусы описанных окружностей (прим. авт.).

39. *Указание.* Ввести замену $\sqrt{x-2} = y$.

40. *Ответ:* (±3; ±1), (±1; ±3).

Указание. Возвести I уравнение в квадрат и учесть II уравнение.

41. *Решение.* Известно, что $S_\Delta = \dfrac{abc}{4R} = pr$, или

$$\frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2}r, \text{ откуда } 2Rr(a+b+c) = abc. \qquad (1)$$

По условию $Rr = 130$, тогда (1) примет вид

$$260(a+b+c) = abc. \qquad (2)$$

Поскольку стороны a, b, c ΔABC образуют арифметическую прогрессию, то $2b = a + c$, тогда (2) примет вид $260 \cdot 3b = abc$, откуда $ac = 780$.

Итак, $a + c = 2b$, $ac = 780$, т. е. стороны a и c можно принять за корни некоторого квадратного уравнения

$x^2 - 2bx + 780 = 0$,

$D/4 = b^2 - 780$, $x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 780}$.

Наименьшую тройку (a, b, c) получим, полагая $b = 28$, $x_{1,2} = 28 \pm 2$, откуда $x_1 = 30$, $x_2 = 26$.

Так как $a < b < c$, то условию задачи удовлетворяет наименьшая тройка чисел (26; 28; 30).

Ответ: (26; 28; 30).

42. *Решение.* Если $p \neq 3$, то $14p^2 + 1$ делится на 3. И действительно, $p = 3k + 1$, или $p = 3k - 1$, тогда $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$ или $p^2 = 9k^2 - 6k + 1$, а это значит, что остаток от деления числа p^2 на 3 равен 1. Следовательно, $14p^2 + 1$ делится на 3 при любом p, не делящемся на 3, т. е. не является простым числом. Если же $p = 3$, то число $14p^2 + 1 = 127$ — простое.

Ответ: 127.

43. *Ответ:* $(\pm 2; \pm 1)$, $(\pm 1; \pm 2)$.

Указание. Выразить $x^4 + y^4$ через xy, а из II второго уравнения $x^2 + y^2 = 7 - xy$ и т. д.

44. *Решение.* $\left(1+\dfrac{7}{\sin x}\right)\left(1+\dfrac{19}{\cos x}\right) > 293,$

$$1 + \frac{7}{\sin x} + \frac{19}{\cos x} + \frac{7\cdot 19\cdot 2}{2\sin x\cos x} =$$

$$= 1 + \frac{7}{\sin x} + \frac{19}{\cos x} + \frac{266}{\sin 2x} > 1 + 7 + 19 +$$

$+ 266 = 293$, ч. т. д.

45. *Ответ:* $(3; -1)$.

Указание. Учесть, что $x - 2y < x < x^2 + 2xy + 4y^2$.

46. *Ответ:* $(0; 0; 0)$, $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}, \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}, \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)$.

Указание. Перенести xyz в каждом уравнении в правую часть, а затем перемножить.

47. *Решение.* Поскольку четвертая степень числа БЕС $= x$ является четырехзначным числом, то само число x не меньше 6 и не больше 9, так что БЕСЫ — одно из чисел 1296, 2401, 4096, 6561. Из перечисленных чисел лишь второе удовлетворяет требуемому условию, а именно: Б = 2, Е = 4, С = 0, Ы = 1.

Ответ: $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4$.

48. *Ответ:* 1) $AB = \dfrac{21\sqrt{6}}{2}$ м ; $AC = \dfrac{15\sqrt{6}}{2}$ м.

2) $AB = \dfrac{51\sqrt{66}}{22}$ м ; $AC = \dfrac{15\sqrt{66}}{22}$ м.

49. *Решение.* $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$; $b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2$; $a^4 + c^4 \geq 2a^2c^2$. Складывая полученные неравенства и учитывая, что $a^2 + c^2 \geq 2ac$, получим требуемое.

50. *Решение.* Допустим противное. Тогда общее количество кроликов будет не меньше, чем

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 45 = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 46 = 1035 > 1000.$$

51. *Ответ:* 25π м^2.

Указание. Соединить точку касания и вершины оснований трапеции с центром окружности.

52. *Указание.* Найти сумму m, n и $m + n$ членов.

53. *Указание.* Привести неравенство к виду $(6 \sin x - \cos x)^2 > 0$.

54. *Ответ:* $[1; 3]$.

Указание. Ввести замену $y = \sqrt{2x-2}$, где $y \geq 0$. Можно решить иначе, например, выделить полный квадрат под каждым подкоренным выражением.

55. *Ответ:* могут, если знаменатель прогрессии $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

56. *Решение.*

I способ

$(x^4 + 4x^3 + 4x^2) - 2x^2 - 4x + 1 = 0$, или
$(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) \cdot 1 + 1 = 0$,
$(x^2 + 2x - 1)^2 = 0$, или $x^2 + 2x - 1 = 0$,
откуда находим $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

II способ

Запишем уравнение в виде
$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$.
Из условия следует, что $x \neq 0$, тогда
$x^2 + 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$,
или $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

Заменой $x - \frac{1}{x} = t$ получим $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$,
тогда $t^2 + 4t + 4$, $(t + 2)^2 = 0$, $t = -2$.

Значит, $x - \frac{1}{x} = -2$, или $x^2 + 2x = -1$, и т. д. (см. I способ).

III способ

Вычтем из обеих частей уравнения $4x^2$.
$(1 + x^2)^2 - 4x^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$, или
$(1 - x^2)^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$.
Разделим обе части на $x(1 - x^2) \neq 0$.
Получим $\frac{1-x^2}{x} = 4 - 4 \cdot \frac{x}{1-x^2}$.
Пусть $\frac{1-x^2}{x} = y$, тогда $y = 4 - \frac{4}{y}$,
или $y^2 - 4y + 4 = 0$, $(y - 2)^2 = 0$, $y = 2$, и т. д. (см. I способ).

IV способ

Пусть $x = \operatorname{tg} t$, тогда $(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2 = 4 \operatorname{tg} t\ (1 - t^2)$.
Далее имеем $\frac{1}{\cos^4 t} = \frac{4\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t}$, или
$\frac{1}{\cos t} = 4 \sin t \cos 2t$; $4 \sin t \cos t \cos 2t = 1$;

$2\sin 2t\cos 2t = 1$, или $\sin 4t = 1$, $4t = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$t = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, тогда $x = \left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}\right)$, и т. д.

57. *Ответ:* $(-\infty; 0)$.

58. *Ответ:* 500 500.

Указание. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Далее использовать формулу суммы $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

59. *Ответ:* 16 м^2.

Указание. Использовать формулу

$S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$, где $d_1 = d_2$ и φ — угол между диагоналями.

60. *Ответ:* $x = 55$.

61. *Решение.* $\dfrac{a^3 + b^3}{2} - \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^3 =$

$= \dfrac{3}{8}(a + b)(a - b)^2 \geq 0$.

62. *Ответ:* $22 + 24 + 26 + 28 = 100$;
$16 + 18 + 20 + 22 + 24 = 100$.

Указание. $2a + (2a + 2) + (2a + 4) + \ldots +$
$+ (2a + 2k) = 100$,
или $a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + k) = 50$.

Далее использовать формулу суммы арифметической прогрессии

$\dfrac{a + (a + k)}{2} \cdot n = 50$, или $(2a + k) \cdot n = 100$.

Далее учесть, что $a_n = a + k$, а с другой стороны, $a_n = a_1 + (n - 1)d$, тогда $a + k = a + n - 1$, $n = k + 1$ и $(2a + k)(k + 1) = 100$, и т. д.

63. *Указание.* Положить $n = 1$ и $n = 2$.

64. *Решение.* Поскольку $a + b + c \neq 0$, то, умножив обе части равенства на $a + b + c$, получим

$$\frac{(a+c)+b}{a+c} + \frac{(b+c)+a}{b+c} = 3, \text{ или}$$

$$1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3,$$

или $\dfrac{b}{a+c} + \dfrac{a}{b+c} = 1$, откуда $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

Но $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$ (по теореме косинусов), тогда $\cos\angle C = \dfrac{1}{2}$, $\angle C = 60°$.

Ответ: 60°.

65. *Ответ:* $AB = 7\sqrt{2}$, $BD = \dfrac{7}{2}(1 + \sqrt{3})$.

Указание. Достроить ΔABC до параллелограмма $ABCE$. Далее применить теорему синусов. После преобразований находим AB и BD.

66. *Ответ:* $\dfrac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$.

67. *Решение.* $\dfrac{1}{2^2} < 1 - \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3^2} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$; ...

$$\frac{1}{1000^2} < \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}.$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} < 1 - \frac{1}{1000} = 0{,}999.$$

68. *Ответ:* 5 чисел: 11, 12, 24, 36, 15.

69. *Указание.* Умножить обе части уравнения на 4 и прибавить по единице.

70. *Решение.* Так как $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных целых чисел кратно 2 и 3, то оно кратно 6, тогда $a^5 - a = (a^2+1)(a^3-a)$ и $b^3 - b$ кратно 6.

Значит, делится на 6 и $a + b + c + (a^5 - a) + (b^5 - b) = a^5 + b^3 + c$, ч. т. д.

71. *Ответ:* 971.

Указание. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=17, \\ \overline{abc}-\overline{cba}=792. \end{cases}$$

72. *Ответ:* например, $122^2 + 597^2 = 13^5$.

73. *Решение.* По теореме Виета для кубического уравнения имеем $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = p$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения.

Значит, $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$, или $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p = 0$.

Следовательно, $p \le 0$, ч. т. д.

74. *Ответ:* 20 м и 30 м.

Указание. Использовать формулу $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2)$, где x, y — длины диагоналей, a, b — стороны параллелограмма.

75. *Решение.* Центр искомого круга не должен располагаться ближе 0,5 к сторонам прямоугольника или к одному из квадратиков.

Присоединив к каждому квадратику 1×1 точки, находящиеся от него на расстоянии не больше 0,5, получим фигуру (квадрат со скругленными вершинами) площадью $3 + 0{,}25\pi$.

Эти фигуры не могут покрыть прямоугольник 19×24, даже если они не будут налегать друг на друга, так как $120 \cdot (3 + 0{,}25\pi) < 19 \times 24$.

76. *Ответ:* $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

Указание. $y = \frac{1}{9}x^2 + 2$, тогда $x = \frac{1}{9}y^2 + 2$. Далее вычесть из I уравнения II.

77. *Ответ:* $-3,5$.

78. *Решение.* $n(n^4 - 125n^2 + 4) =$
$= n(n^4 - 5n^2 + 4) - 120n^3 =$
$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) - 120n^3$.

79. *Решение.* По теореме Виета $x_1 + x_2 = -2a$, $x_1x_2 = -\frac{1}{8a^2}$, тогда $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2x_2^2 =$

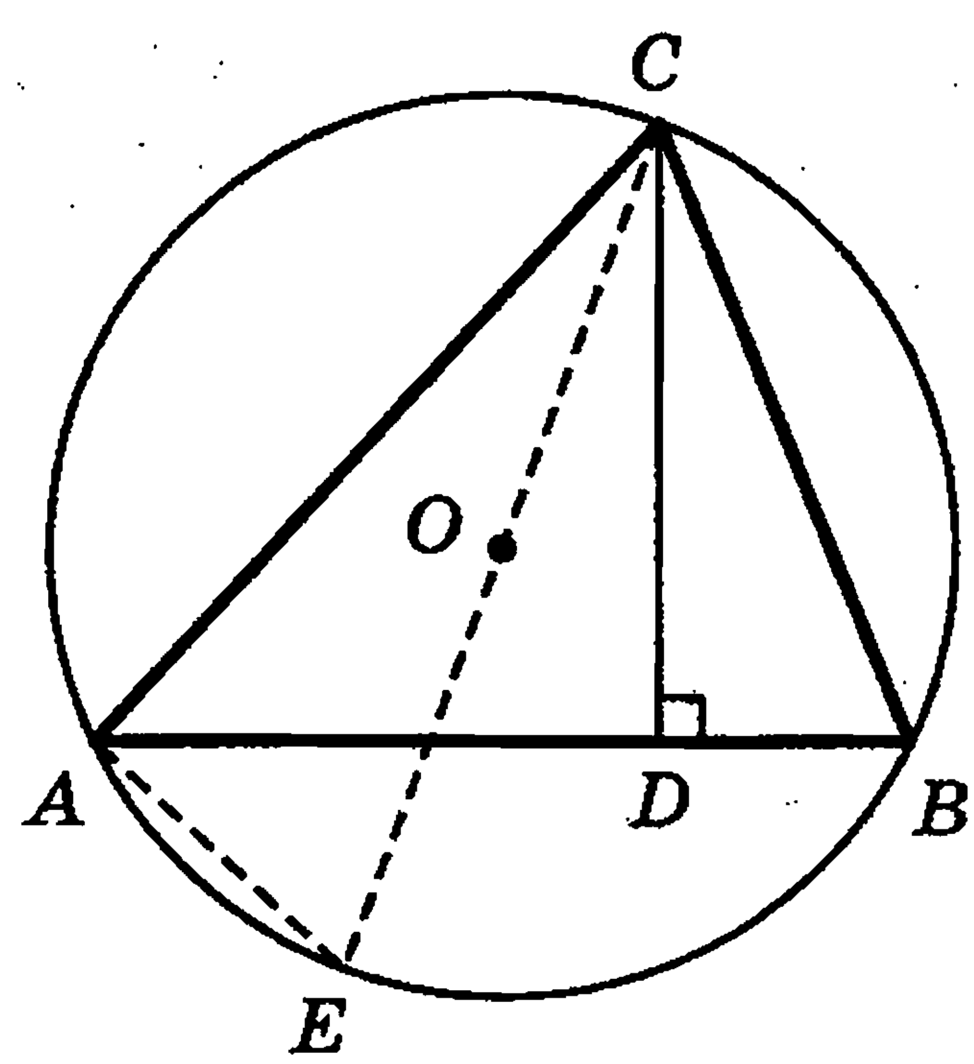
$= ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = \left(4a^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2 -$

$- 2 \cdot \frac{1}{64a^4} = 16a^4 + 2 + \frac{1}{32a^4} \geq 2 + 2\sqrt{16a^4 \cdot \frac{1}{32a^4}} =$
$= 2 + \sqrt{2}$, ч. т. д.

80. *Указание.* $D = b^2 - 4ac = 0$, или
$9 - 2 \cdot 2 \cdot (17 + m) = 0$, откуда $m = -15\frac{7}{8}$.

81. *Ответ:* $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = \pm 1$.

82. *Решение.* Пусть в ΔABC $AC = 20$ см, $BC = 13$ см, $OC = \frac{65}{6}$ см.



Из вершины C опустим высоту CD и проведем диаметр CE. Далее соединим точку A с точкой E. Тогда ΔCAE прямоугольный, так как вписанный угол CAE опирается на диаметр CE. Из подобия ΔACE и ΔCDB имеем

$\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{AC}{CE}$, откуда $CD = \dfrac{CB \cdot AC}{CE} = 12$ (см).

Из ΔCDB $DB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см).

Из ΔACD $AD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (см).

Значит, $AB = 16 + 5 = 21$ (см).

Ответ: 21 см.

83. *Решение.* $100\,000 \cdot 0{,}3 = 30\,000$ (руб.).

84. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$. (1)

Возведем обе части (1) в квадрат:

$\left(x^2 + \dfrac{x^2}{x^2-1}\right) + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1225}{144}$, или

$$\frac{x^4}{x^2-1} + 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1225}{144}. \qquad (2)$$

Пусть $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = y$, где $y > 0$, тогда уравнение (2) примет вид $y^2 + 2y - \dfrac{1225}{144} = 0$.

$D/4 = 1 + \dfrac{1225}{144} = \left(\dfrac{37}{12}\right)^2 > 0$, $y_{1,2} = -1 \pm \dfrac{37}{12}$, откуда $y_1 = \dfrac{25}{12}$, $y_2 = -\dfrac{49}{12}$ (не удовлетворяет условию $y > 0$). Учитывая замену, получим $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} =$

$= \frac{25}{12}$, или $\frac{x^4}{x^2-1} = \frac{625}{144}$, $144x^4 - 625x^2 + 625 = 0$,

$D = 175^2 > 0$, $x^2 = \frac{25}{9}$, $x = \frac{5}{3}$, $x^2 = \frac{25}{16}$, $x = \frac{5}{4}$, поскольку $x > 0$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{5}{4}$.

II способ

Пусть $\sqrt{x^2-1} = y$, где $y > 0$, тогда $x^2 = y^2 + 1$ и уравнение (1) примет вид

$$1 + \frac{1}{y} = \frac{35}{12x}. \qquad (3)$$

Возведем обе части (3) в квадрат:

$1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{1225}{144x^2}$, и так как $x^2 = y^2 + 1$, то имеем $1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{1225}{144(y^2+1)}$, или $y + 2 + \frac{1}{y} = \frac{1225y}{144(y^2+1)}$, $y > 0$.

Полученное уравнение запишем в виде

$$y + \frac{1}{y} + 2 = \frac{1225}{144\left(y + \frac{1}{y}\right)}. \qquad (4)$$

Заменой $y + \frac{1}{y} = t$ уравнение (4) приводим к виду $t^2 + 2t - \frac{1225}{144} = 0$, и т. д., как в I способе.

Замечание. Исходное уравнение можно решить заменой $x = \dfrac{1}{\sin t}$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

85. *Указание.* Из второго конца гипотенузы провести прямую внутри треугольника под углом 15° к гипотенузе.

86. *Ответ:* при $a \in (2; 4)$.

87. *Решение.*

I способ (выделение в левой части полного квадрата)

Запишем данное уравнение в виде

$$16x^2 - 24x\sqrt{x+13} + 9(x + 13) = 0. \qquad (1)$$

$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3\sqrt{x+13} + 3^2(x + 13) = 0$, или

$(4x - 3\sqrt{x+13})^2 = 0$; $4x = 3\sqrt{x+13}$, $x > 0 \Rightarrow$ из исходного уравнения, так как $16x^2 + 9x + 117 > 0$ при любом $x \in R$ и $x + 13 \geq 0$.

Далее имеем $16x^2 + 9(x + 13) = 0$, или

$16x^2 - 9x - 117 = 0$, откуда получим

$x_1 = 3$, $x_2 = -\dfrac{39}{16} < 0$.

Ответ: $x = 3$.

II способ (замена переменной)

Разделим обе части (1) на $x\sqrt{x+13} \neq 0$.

Получим $16 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x+13}} + 9 \cdot \dfrac{\sqrt{x+13}}{x} - 24 = 0$.

Далее замена $\dfrac{x}{\sqrt{x+13}} = y$, где $x > 0$, тогда $y > 0$,

и т. д.

III способ (приведение к однородному)

$\sqrt{x+13} = y$, тогда $9x + 117 = 9(x + 13) = 9y^2$, и данное уравнение примет вид

$16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$, или $(4x - 3y)^2 = 0$, и т. д.

88. *Ответ:* 13 и 1325.

89. *Ответ:* является при $n = 3$.

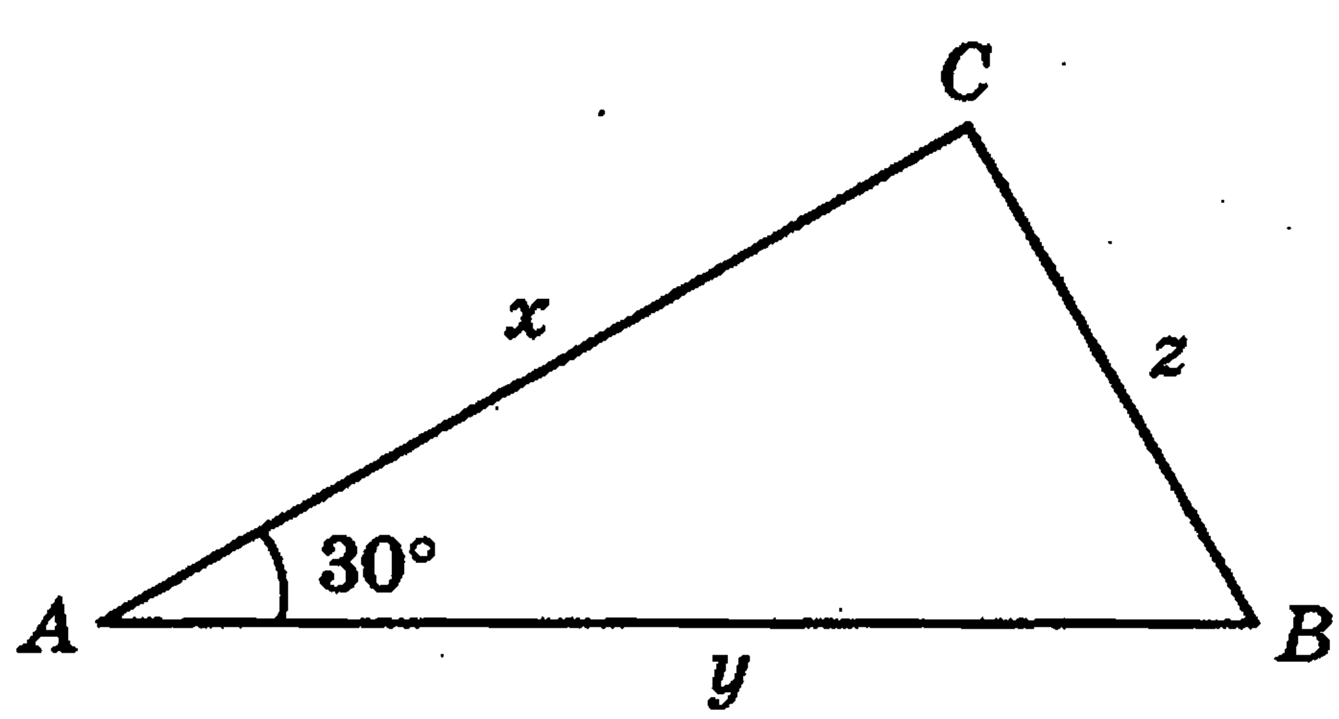
90. *Ответ:* $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$.

91. *Решение.* Пусть стороны прямоугольного треугольника a, $a + d$ и $a + 2d$, где d — разность прогрессии, тогда по теореме Пифагора получим $a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2$, откуда $a = 3d$.

Известно, что площадь треугольника $S = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(a + a + d + a + 2d) = \frac{3}{2}(a + d)$ — полупериметр, $S = \frac{1}{2}a(a + d)$, тогда $r = \frac{S}{p} = \frac{a}{3} = d$, ч. т. д.

92. *Ответ:* $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{4}{3}\right] \cup [6; +\infty)$.

93. *Решение.* Пусть $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$, тогда по теореме синусов $\frac{z}{\sin 30°} = 2R$, откуда $z = 2R \cdot \frac{1}{2} = R$ — радиус описанной окружности.



Известно, что $S_\Delta = \dfrac{xyz}{4R}$, $S_\Delta = \dfrac{xyz}{4R} = \dfrac{1}{4}xy$. (1)

Замечание. Соотношение (1) можно получить по формуле $S_\Delta = \dfrac{1}{2}xy\sin\alpha$, где $\alpha = 30°$.

С другой стороны, $S_\Delta = p \cdot r = \dfrac{1}{2}(x + y + z)r$. (2)

Сравнивая (1) и (2), имеем $\dfrac{1}{4}xy = \dfrac{1}{2}(x + y + z)$, или $xy = 2(x + y + z)r$. (3)

По теореме косинусов $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 30°$, или $R^2 = x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,xy$, $R^2 = (x + y)^2 - (2 + \sqrt{3})xy$. (4)

Из (3) $\Rightarrow x + y + R = \dfrac{xy}{2r}$, откуда $x + y = \dfrac{xy}{2r} - R$, тогда (4) примет вид

$R^2 = \left(\dfrac{xy}{2r} - R\right)^2 - (2 + \sqrt{3})xy$, или

$\left(\dfrac{xy}{2r}\right)^2 = \left(\dfrac{R}{r} + 2 + \sqrt{3}\right)xy$, $xy \neq 0$, тогда

$\dfrac{xy}{4r^2} = \dfrac{R}{r} + 2 + \sqrt{3}$, откуда

$\dfrac{xy}{4} = \left(\dfrac{R}{r} + 2 + \sqrt{3}\right)r^2 = r(R + (2 + \sqrt{3})r) = S_{\Delta ABC}$,

ч. т. д.

94. *Ответ:* $\dfrac{25}{12}$.

Указание. Если x и y — катеты, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей, то $x^2 + y^2 = 4R^2$, $2r = x + y + 2R$, и т. д.

95. *Ответ:* $x = 15$.

Указание. Ввести замену $\sqrt{x} = y$, $y \geq 0$. Далее разложить на множители числитель и знаменатель дроби. Полученное неравенство решить методом интервалов.

96. *Решение.* $a^3 + 7a + 19 = 0, \quad (1)$

$b^3 + 7b + 19 = 0, \quad (2)$

$c^3 + 7c + 19 = 0. \quad (3)$

Вычтем из (1) – (2): $a^3 - b^3 + 7(a - b) = 0$.

Так как $a - b \neq 0$, то $a^2 + ab + b^2 + 7 = 0. \quad (4)$

Теперь вычтем из (1) (3):

$a^3 - c^3 + 7(a - c) = 0$ или, разделив обе части на $a - c \neq 0$, имеем $a^2 + ab + c^2 + 7 = 0. \quad (5)$

Аналогично, вычитая из (4) (5), получим

$a^2 + ab + b^2 + 7 - (a^2 + ac + c^2 + 7) = 0$, или

$$a(b - c) + (b^2 - c^2) = 0. \quad (6)$$

Наконец, разделив обе части (6) на $b - c \neq 0$, находим $a + b + c = 0$, ч. т. д.

97. *Указание.* Обратить трапецию в равновеликий треугольник, для чего продолжить нижнее основание на длину верхнего.

98. *Ответ:* $\frac{1}{8}$.

Указание. Умножить и разделить выражение на $2 \sin 20°$, а затем применить формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

99. *Решение.* Известно, что $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$. Так как $x - y = a$, $x^3 - y^3 = b$, то $a^3 + 3axy = b$, откуда

$$xy = \frac{b - a^3}{3a}. \quad (1)$$

Далее имеем $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$, откуда

$x^5 - y^5 = (x - y)^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4$,
или $c = a^5 + 5xy(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3)$,
или $c = a^5 + 5xy((x^3 - y^3) - 2xy(x - y))$,
$c = a^5 + 5xy(b - 2axy)$. (2)
Учитывая (1), равенство (2) примет вид

$$c = a^5 + 5 \cdot \frac{b-a^3}{3a} \cdot \left(b-2\cdot\frac{b-a^3}{3a}\right), \text{ или}$$

$$c = a^5 + \frac{5(b-a^3)(b+2a^3)}{9a}, \text{ или}$$

$9ac = 9a^6 + 5b^2 + 5a^3b - 10a^6$,
$a(a^5 + 9c) = 5b(a^3 + b)$.
Ответ: $a(a^5 + 9c) = 5b(a^3 + b)$.

100. *Решение.* Замена $\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}} = y$, где $y \geq 0$, приводит к уравнению $\frac{12}{x^2} = x^2 - y^2$, при котором исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{12-x^2+y^2} = x^2 - y^2, \text{ или}$$

$$12 - x^2 + y^2 = x^4 - 2x^2y + y^2,\ 2y = \frac{x^4+x^2-12}{x^2}.$$

Запишем полученное равенство в виде

$$2y = \left(x^2-\frac{12}{x^2}\right) + 1.$$

Но $x^2 - \frac{12}{x^2} = y^2$, тогда $y^2 - 2y + 1 = 0$, $(y - 1)^2 = 0$, откуда $y = 1$. Значит, $x^2 - \frac{12}{x^2} = 1$, или

$x^4 - x^2 - 12 = 0$, откуда $x^2 = 4$, т. е.
$x_{1,2} = \pm 2$, $x^2 = -3$ — нет действительных корней.
Ответ: $x_{1,2} = \pm 2$.

101. *Ответ:* $x = \dfrac{\pi n}{8}$, $n \in Z$.

102. *Ответ:* $2(b^2 - c) = (a^2 - b)^2$.

103. *Решение.* Упростить II уравнение системы
$y^2 + 10y + 25 - 2zy - 7z = 0$, или
$(y + 5)^2 - 2z(y + 5) + z^2 = z^2 - 3z$, или
$(y + 5 - z)^2 = z^2 - 3z$.
Третье уравнение запишем в виде
$(x - 3)^2 = 9 - z^2$.
Следовательно, исходная система примет вид

$$\begin{cases}(4-x)^2 = y+3,\\(y+5-z)^2 = z^2-3z,\\(x-3)^2 = 9-z^2.\end{cases}$$

При этом будут выполняться условия

$$\begin{cases}y+3 \ge 0,\\z^2-3z \ge 0,\\9-z^2 \ge 0.\end{cases}$$

Из II и III неравенств $\Rightarrow z \in [-3;\ 0] \cup \{3\}$. Поскольку $z \ge 0$, то $z = 0$, или $z = 3$. Если $z = 0$, то исходная система не имеет решений; если $z = 3$, то $x^2 + 9 = 6x$, откуда $x = 3$, тогда $y = -2$.
Ответ: (3; –2; 3).

104. *Ответ:* $x = 25$.

105. *Ответ:* [0; 2].
Указание. Записать неравенство в виде
$|1 - 2x| \le x + 1$. Далее рассмотреть два случая:
1) $1 - 2x \ge 0$; 2) $1 - 2x < 0$.

106. *Ответ:* $x = 3$.
Указание. Записать уравнение в виде
$\sqrt{8x-7} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{7x-3} + \sqrt{3x-8}$.

Такая форма записи обусловлена тем, что
$(8x - 7) + (2x - 4) = (7x - 3) + (3x - 8)$.

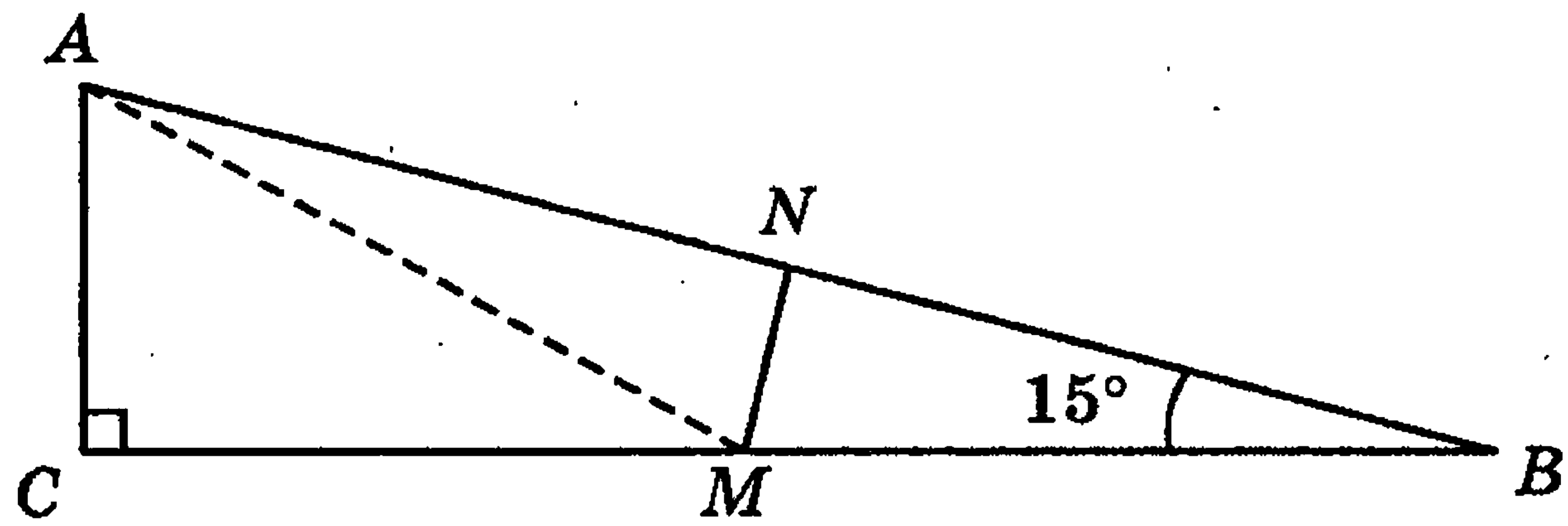
Это дает возможность значительно упростить уравнение.

107. *Решение.*

I способ

Пусть $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$. Проведем AM так, чтобы $\angle BAM = 15°$, тогда $\angle AMC = \angle MAB + \angle MBA = 30°$ (внешний угол ΔAMB), $AM = 2AC = 2b$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). Значит, и $MB = 2b$.

Построим $MN \perp AB$, тогда $\Delta MNB \sim \Delta ACB$ и $\frac{MB}{AB} = \frac{BN}{BC}$, или $\frac{2b}{c} = \frac{c}{2a}$, откуда $ab = \frac{1}{4}c^2$, и так как $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$, то $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8}c^2$, ч. т. д.



II способ

$a = c\cos 15°$, $b = c\sin 15°$, тогда $S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2\sin 15°\cos 15° = \frac{1}{4}c^2\sin 30° = \frac{1}{8}c^2$, ч. т. д.

108. *Ответ:* $-3\frac{1}{8} < x < -2\frac{7}{8}$; $2\frac{7}{8} < x < 3\frac{1}{8}$.

109. *Ответ:* (3; 2).

Указание. Записать I уравнение системы в виде $x^2 - 2(2y - 1)x + (5y^2 - 8y + 5) = 0$.

Далее полученное уравнение рассмотреть как квадратное относительно x.

110. *Ответ:* 1089.

111. *Ответ:* $(4; +\infty)$.

112. *Ответ:* $a = 39$.

Указание. Обозначить корни уравнения $x_1 = m - d$, $x_2 = m$, $x_3 = m + d$.

Далее использовать метод неопределенных коэффициентов.

113. *Решение.* Если $a^2 + a + 1 = 0$, то

$a + \frac{1}{a} = -1$, тогда $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 2 = -1$;

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right) - \left(a+\frac{1}{a}\right) =$$

$$= -1 \cdot (-1) - (-1) = -2;$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right) - \left(a^2+\frac{1}{a^2}\right) = -1;$$

$$a^5 + \frac{1}{a^5} = \left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right) - \left(a^3+\frac{1}{a^3}\right) = -1;$$

$a^6 + \frac{1}{a^6} = 2$, $a^7 + \frac{1}{a^7} = -1$, и т. д.

Из этих соотношений видно, что для показателей степени, кратных 3, значение выражения равно 2, а в остальных случаях равно -1. Поскольку 2010 кратно 3, то значение данного выражения равно 2.

Ответ: 2.

114. *Ответ:* $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

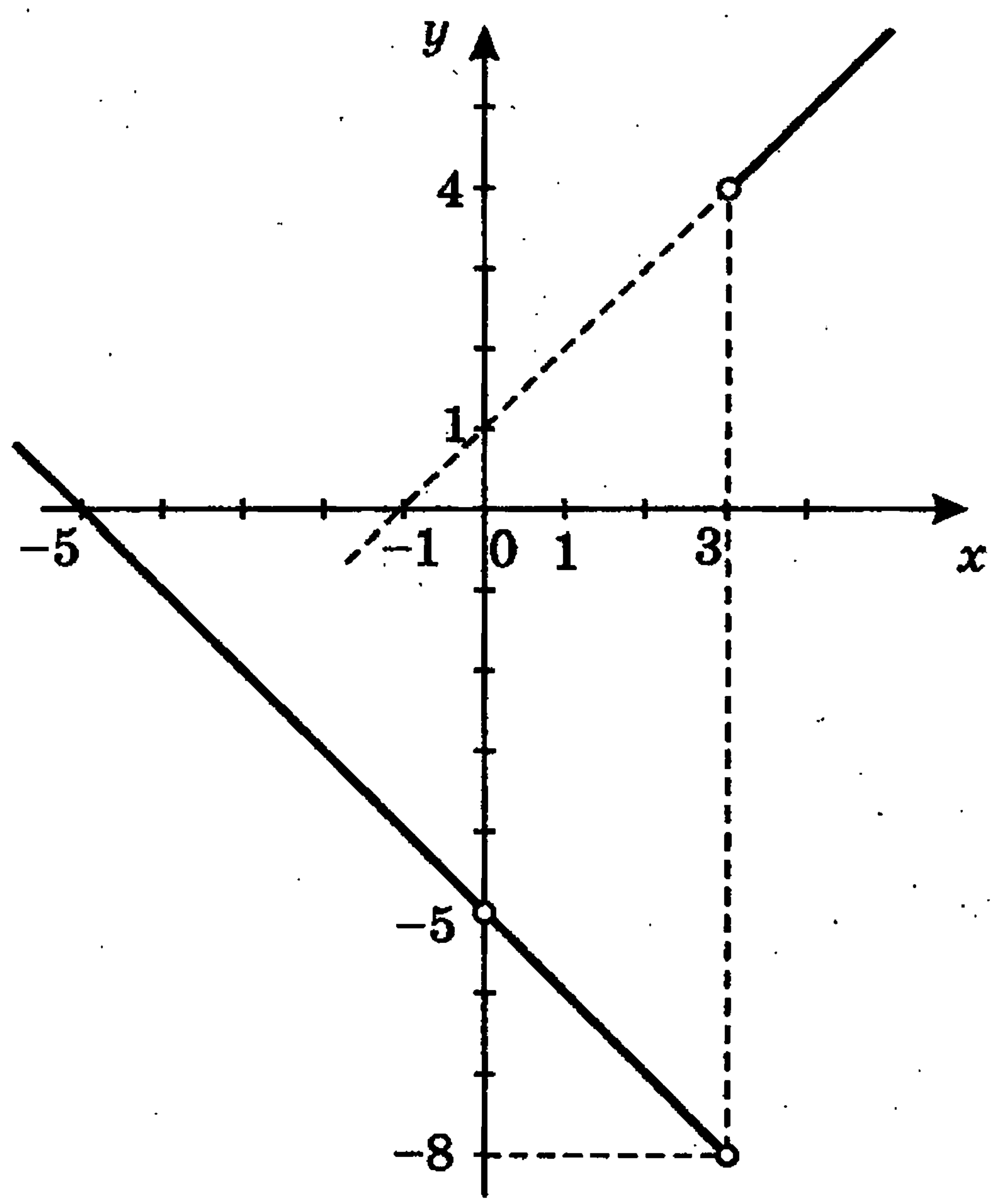
Указание. Записать неравенство в виде $|3x + 1| > |\sqrt{3} + 1| - \sqrt{3}$, и т. д.

115. *Ответ:* при $a = -16$.

116. *Решение.* $y = \dfrac{(x-3)(x+3)}{|x-3|} + x^{2k-1-k+1} -$

$- x^k - 2 = \dfrac{(x-3)(x+3)}{|x-3|} - 2.$

D: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$ 1) $\begin{cases} x > 3, \\ y = x+1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 3, \\ y = -x-5. \end{cases}$



117. *Ответ:* $[-2\sqrt{2}; 0) \cup (0; 2\sqrt{2}]$.

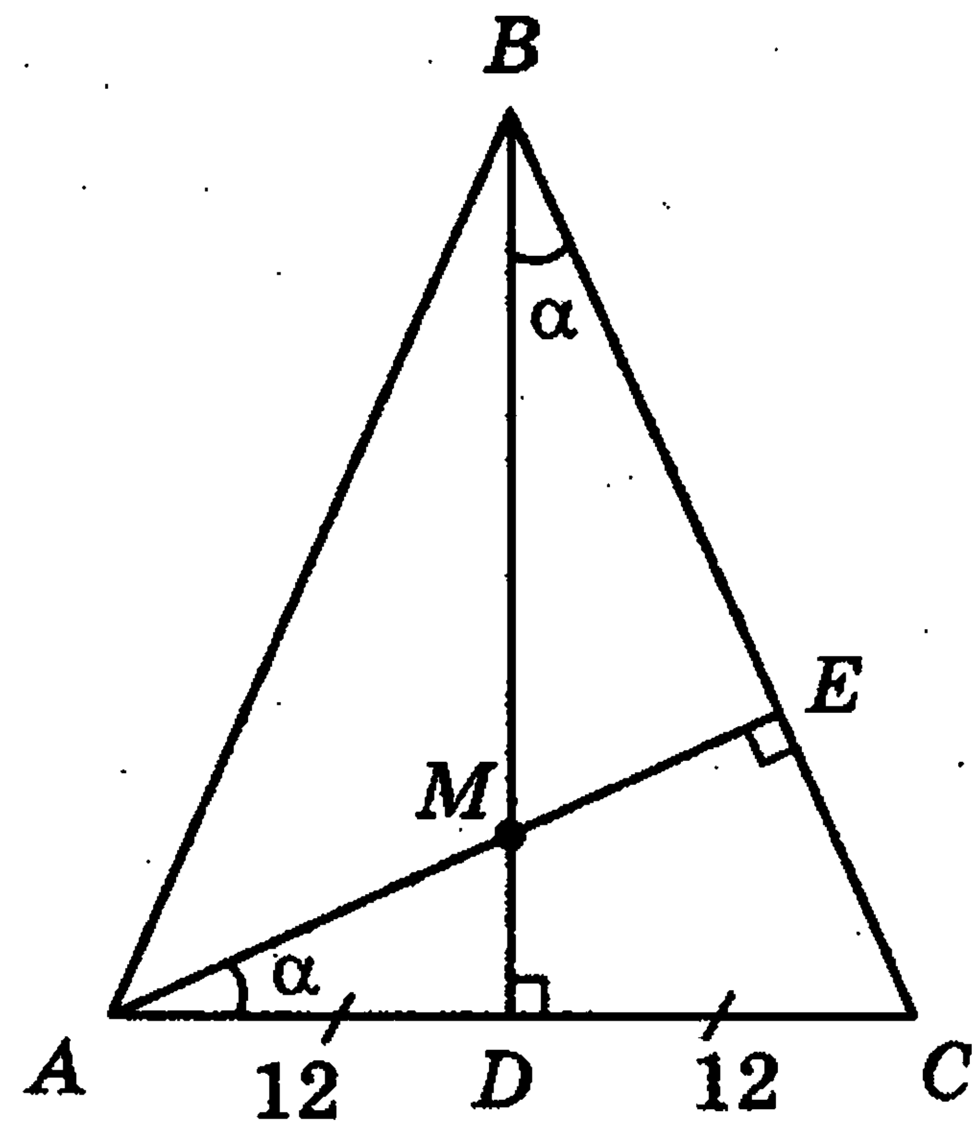
118. *Решение.*

I способ

Пусть $\angle CBD = \angle CAE = \alpha$.

Из ΔAEC $EC = 24 \sin \alpha$. С другой стороны, $EC =$

$= BC - BE = \dfrac{12}{\sin\alpha} - 7 \cos \alpha$.



Получим уравнение $24\sin\alpha = \dfrac{12}{\sin\alpha} - 7\cos\alpha$, или $24\sin^2\alpha + 7\sin\alpha\cos\alpha - 12 = 0$.

Учитывая, что $12 = 12(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$, имеем
$12\sin^2\alpha + 7\sin\alpha\cos\alpha - 12\cos^2\alpha = 0$, или
$12\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 7\,\mathrm{tg}\,\alpha - 12 = 0$, откуда
$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

Так как $0 < \alpha < 90°$ и $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$, то $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{4}{3}$ не подходит. Из ΔAMD $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{MD}{AD} = \dfrac{MD}{12} = \dfrac{3}{4}$, откуда $MD = 9$, тогда $BD = 7 + 9 = 16$.

Значит, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = 192$.

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r$, где
$p = \dfrac{1}{2}(2AB + AC)$, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 20$, тогда
$p = \dfrac{1}{2}(40 + 24) = 32$ и $r = \dfrac{192}{32} = 6$.

Ответ: 6.

II способ

Из ΔABD $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Пусть $AB = y$, $MD = x$, тогда $y^2 = (7 + x)^2 + 144$. Из подобия ΔAEC и ΔBDE имеем $\dfrac{EC}{AC} = \dfrac{DC}{BC}$, или $\dfrac{EC}{24} = \dfrac{12}{y}$.

Но $EC = y - BE$, тогда $\dfrac{y - EC}{24} = \dfrac{12}{y}$.

Заметим, что $\dfrac{BE}{BM} = \dfrac{BD}{y}$, или $BE = \dfrac{7(7+x)}{y}$.

$y - BE = \dfrac{1}{y}(y^2 - 49 - 7x)$, тогда $\dfrac{y^2 - 49 - 7x}{24y} = \dfrac{12}{y}$, или $y^2 = 7x + 337$.

Так как $y^2 = (7 + x)^2 + 144$, то получим
$(7 + x)^2 + 144 = 7x + 337$, откуда
$x_1 = 9$, $x_2 = -16$ (не подходит).
Если $x = 9$, то $BD = 7 + 9 = 16$, и т. д. (см. I способ).

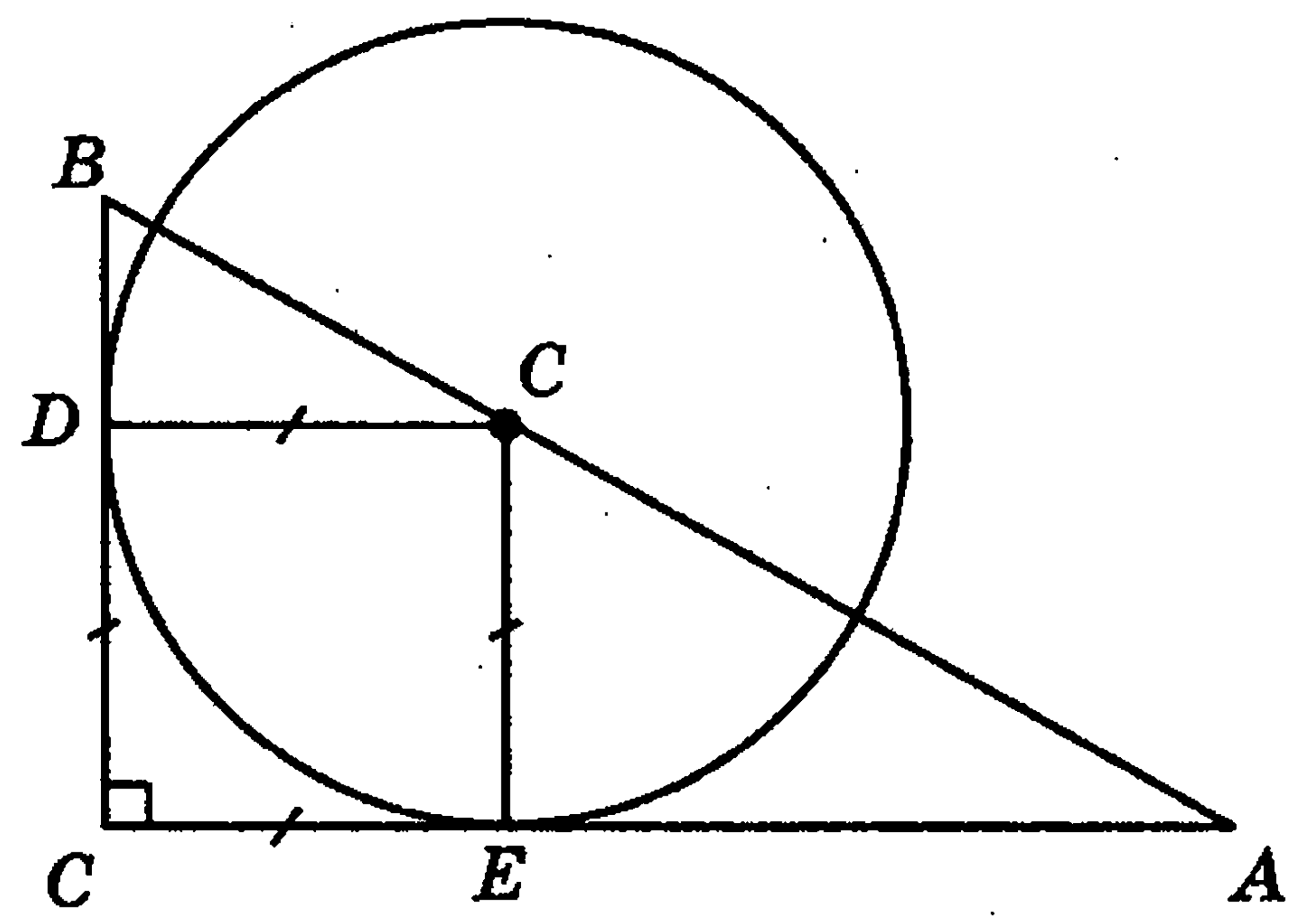
119. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 2$.

120. *Ответ:* $\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{17}); -1\right) \cup (1; +\infty)$.

Указание. Преобразовать неравенство к виду $|x + 1| > 3 - x^2$. Далее рассмотреть два случая:
1) $x \geq -1$; 2) $x < -1$, и т. д.

121. *Решение.*

Пусть точка O — центр окружности, касающейся катетов AC и BC в точках, соответственно, E и D. Пусть $AC = x$, $BC = y$, $AE = b$, $BD = a$. Так как $BC \perp OD$, $AC \perp OE$ и $OE = OD = r$, то $CDOE$ —



квадрат, тогда $AC = b + r$, $BC = a + r$, т. е. $x = b + r$, $y = a + r$.

Из подобия ΔBDO и ΔBCA имеем $\frac{a}{r} = \frac{a+r}{b+r}$, откуда находим $ab = r^2$. (1)

Кроме того, $S_{\Delta ABC} = 56$, тогда $(a + r)(b + r) = 112$, или $ab + (a + b)r + r^2 = 112$.

Учитывая (1), имеем

$$2r^2 + (a + b)r = 112. \qquad (2)$$

Согласно условию $7r = x + y$, или $a + b = 5r$, тогда (2) примет вид $2r^2 + 5r^2 = 112$, $r^2 = 16$, $r = 4$.

Ответ: 4.

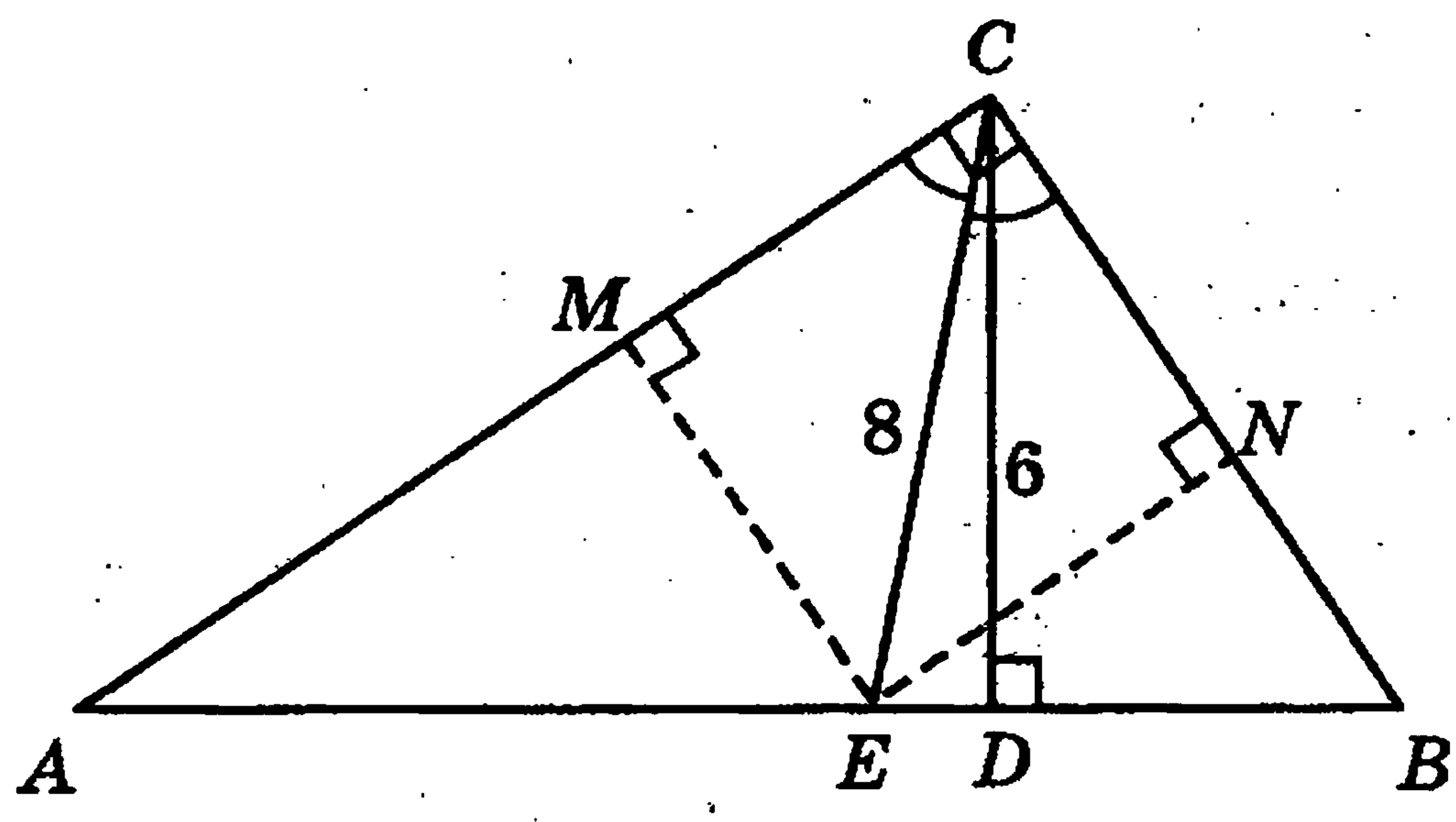
122. *Ответ:* $x = 3$.

Указание. Представить уравнение в виде $(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6})^2 + (\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}) = 20$. Далее замена $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = y$, где $y > 0$, и т. д.

123. *Ответ:* $(-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$.

124. *Решение.*

Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, CE — биссектриса, CD — высота. Из точки E опустим перпендикуляры EM и EN на катеты AC и BC. Поскольку CE — биссектриса, то $EN = EM$, тогда $EMCN$ — квадрат.



Из ΔCME, где $CE = 8$, находим $ME = \dfrac{CE}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, $EN = ME = 4\sqrt{2}$. Пусть $BC = x$, $AC = y$. Тогда $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACE} + S_{\Delta CEB} = \dfrac{1}{2}y \cdot 4\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}x \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(x + y)$. (1)

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}xy$. (2)

Сравнивая (1) и (2), имеем $2\sqrt{2}(x + y) = \dfrac{1}{2}xy$, или $32(x + y)^2 = x^2y^2$.

Наконец, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD = 3\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}xy$, откуда $36(x^2 + y^2) = x^2y^2$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 32(x+y)^2 = x^2y^2, & (3) \\ 32(x+y)^2 = x^2y^2. & (4) \end{cases}$$

Заметим, что для нахождения искомой площади ΔABC нет необходимости находить в отдельности x и y.

Из уравнения (3) имеем $x^2 + y^2 = \dfrac{x^2y^2}{32} - 2xy$.

Из уравнения (4) находим $x^2 + y^2 = \frac{x^2y^2}{36}$.

Приравнивая правые части полученных равенств, получим

$$\frac{x^2y^2}{32} - 2xy = \frac{x^2y^2}{36}, \text{ или } x^2y^2\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{36}\right) = 2xy,$$

$\frac{1}{8\cdot 36}xy = 2$, откуда $xy = 2 \cdot 8 \cdot 36$.

Значит, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}xy = 8 \cdot 36 = 288$ (кв. ед.).

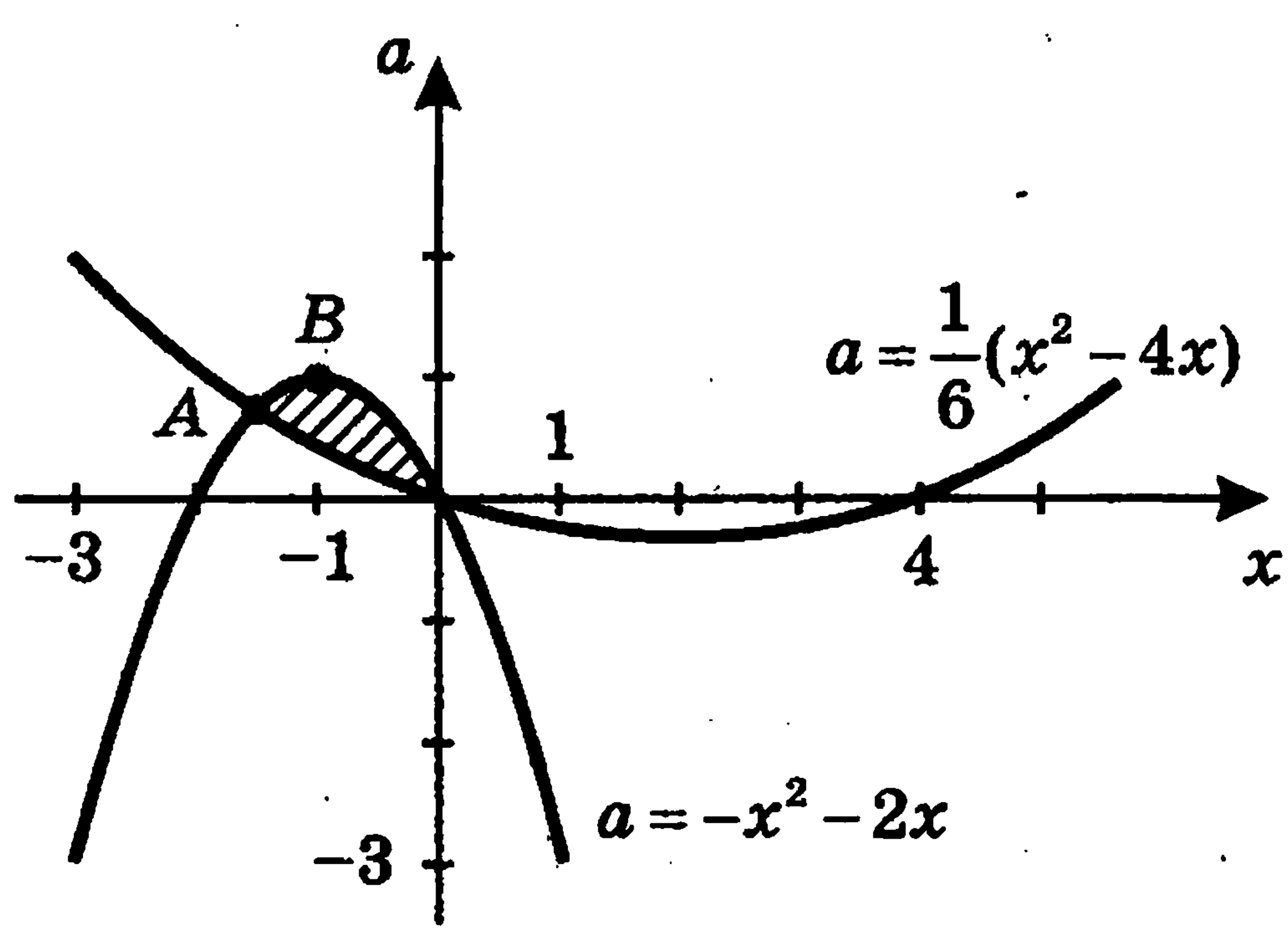
Ответ: 288.

125. *Ответ:* $[5; +\infty)$.

126. *Решение.*

На плоскости xOa изобразим параболы

$$a = -x^2 - 2x \quad \text{и} \quad a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x).$$



Как видно из рисунка, точки, координаты которых удовлетворяют данной системе, лежат ниже параболы $a = -x^2 - 2x$ и выше параболы $a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$.

Решая уравнение $-x^2 - 2x = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$, найдем абсциссы точек пересечения парабол:

$-6x^2 - 12x = x^2 - 4x$, или $7x^2 + 8x = 0$;

$x(7x + 8) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{8}{7}$.

Если $x_1 = 0$, то $a_1 = 0$; если $x_2 = -\frac{8}{7}$, то

$$a_2 = -\left(\frac{64}{49} - \frac{16}{7}\right) = -\frac{16}{7}\left(\frac{4}{7} - 1\right) = \frac{48}{49}.$$

Итак, параболы $a = -x^2 - 2x$ и $a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$ пересекаются в точках $O(0; 0)$ и $A\left(-\frac{8}{7}; \frac{48}{49}\right)$. Заметим, что точка A расположена левее вершины первой параболы $B(-1; 1)$.

Горизонтальная прямая пересекает заштрихованную область по единственной точке, если она проходит через точки O и B, т. е. при $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ: при $a = 0$ и $a = 1$.

127. *Ответ:* $\frac{1}{8}(9\sqrt{3} + 3\sqrt{15})$ см^2.

128. *Ответ:* $1 < x \leq 2$.

129. *Ответ:* при $a = -4$.

Указание. Данная система не имеет решений, если

$$\frac{6+a}{-4} = \frac{2}{a} \neq \frac{3+a}{1+a}.$$

130. *Указание.* Предварительно показать, что $8(a^7 + b^7 + c^7)^2 = 49a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2(a^4 + b^4 + c^4)$ и $25a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^5 + b^5 + c^5)^2$.

131. *Ответ:* существует, например, со сторонами 25; 38 и 51 ед.

132. *Ответ:* $\left(-3; \pm\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $(2; \pm\sqrt{2})$.

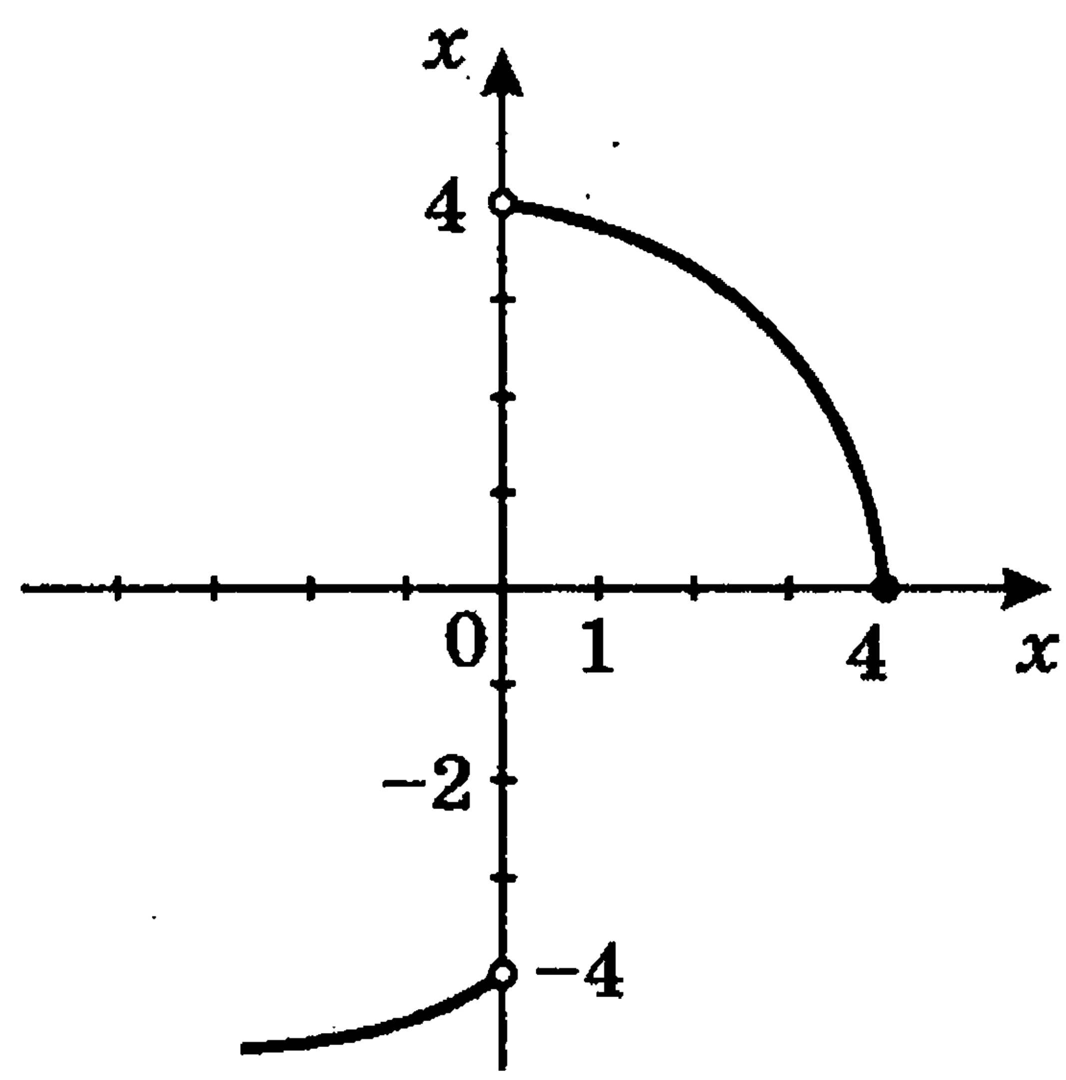
133. *Решение.* На продолжении отрезка BM за точку M возьмем точку D, так что $MD = CM$. Тогда ΔCDM правильный и $CD \parallel MN$.

Значит, $BM : MN = BD : DC = (BM + CM) : CM$, т. е. $\frac{1}{MN} + \frac{1}{CM} = \frac{1}{BM}$.

134. *Решение.* D: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \leq 4. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 0 < x \leq 4, \\ y = 2\sqrt{4-x}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ y = -2\sqrt{4-x}. \end{cases}$



135. *Решение.* Уравнение общей касательной запишем в виде $y = kx + b$. Следовательно, уравнения $x^2 - 6x + 8 = kx + b$ и $x^2 + x + 2 = kx + b$ должны иметь единственное решение, т. е. дискриминанты соответствующих квадратных уравнений

$$x^2 - (6 + k)x + 8 - b = 0 \text{ и } x^2 - (k - 1)x + 2 - b = 0$$

должны быть равны нулю:

$$D_1 = (6 + k)^2 - 4(8 - b) = 0 \text{ и}$$
$$D_2 = (k - 1)^2 - 4(2 - b) = 0.$$

Для нахождения значений k и b получим систему уравнений

$$\begin{cases} 36 + 12k + k^2 - 32 + 4b = 0, \\ k^2 - 2k + 1 - 8 + 4b = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 36 + 16k + 4 + 4b = 0, \\ k^2 + 2k - 7 + 4b = 0, \end{cases}$$

откуда $16k + 4 - (2k - 7) = 0$, $14k = -11$, $k = -\dfrac{11}{14}$,

тогда $\left(-\dfrac{11}{14}\right)^2 + 16 \cdot \left(-\dfrac{11}{14}\right) + 14 + 4b = 0$, или

$\dfrac{121}{196} - \dfrac{176}{14} + 4 + 4b = 0$, откуда находим $b = \dfrac{1559}{2744}$,

значит, $y = -\dfrac{11}{14}x + \dfrac{1559}{2744}$.

Ответ: $y = -\dfrac{11}{14}x + \dfrac{1559}{2744}$.

136. *Решение.* Так как $10 = 2 \cdot 5$, то нулей в числе 2010! будет столько же, сколько цифра 5 входит в разложение на простые множители этого числа. Заметим, что каждое пятое число делится на 5, значит, чисел от 1 до 2010, делящихся на 5, будет 402, на 25 — 80, на 125 — 16, на 625 — 3. Следовательно, 5 входит в разложение в $402 + 80 + 16 + 3 = 501$-й степени. Значит, в числе 2010! будет 501 нуль. Учитывая, что двойка входит в разложение в большей степени, чем 5, заключаем, что последняя его ненулевая цифра будет четной.

137. *Ответ:* $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Указание. Преобразовать уравнение к виду $|\cos 3x| = \dfrac{a^2 + b^2}{2ab}$.

138. *Ответ:* при $m = \dfrac{5}{19}$ и $m = -25$.

139. *Ответ:* нет.

Указание. $y(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

$y(3) - y(1) = 24a + 4b$ — четное, а по условию должно быть нечетным.

140. *Ответ:* $(-2; 0)$.

Указание. Преобразовать неравенство к виду $\frac{x^2-4}{|x|-2} \geq x^2$. Далее рассмотреть 2 случая: 1) $x \geq 0$; 2) $x < 0$.

141. *Указание.* Возвести в куб и учесть, что $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$. Возможны и другие способы решения, например, замены

$x + 45 = a^3$, $x - 16 = b^3$.

142. *Решение.* Пусть a, b, c — стороны треугольника, причем $a < b < c$.

По условию $a + c = 2b$. (1)

Кроме того, $\frac{b}{\sin\angle B} = 2R$, откуда $b = 2R \sin R$.

$S_{\Delta ABC} = p \cdot r = \frac{abc}{4R}$, или $\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{abc}{4R}$, тогда, учитывая (1), получим $ac = 6Rr$. (2)

По теореме косинусов $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$, или $b^2 = (a + c)^2 - 2ac(1 + \cos \angle B)$,

$2ac(1 + \cos \angle B) = 3b^2$,

$12Rr(1 + \cos \angle B) = 3b^2$, или

$12Rr(1 + \cos \angle B) = 12R^2 \sin^2 \angle B$,

$r(1 + \cos \angle B) = R(1 - \cos \angle B)(1 + \cos \angle B)$.

Но $1 + \cos \angle B \neq 0$, т. е. $\angle B \neq 180°$, тогда

$r = R(1 - \cos \angle B)$, откуда $1 - \cos \angle B = \frac{r}{R}$.

По условию $\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, тогда $\cos \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle B = 30°$.

Ответ: 30°.

143. *Ответ:* 1099.

144. *Указание.* Сложить уравнения системы и найти значение $x^2 + y^2$, после чего подставить в первое уравнение.

145. *Ответ:* $2\pi n$, $n \in Z$.

Указание. $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 7x = 1, \end{cases}$ и т. д.

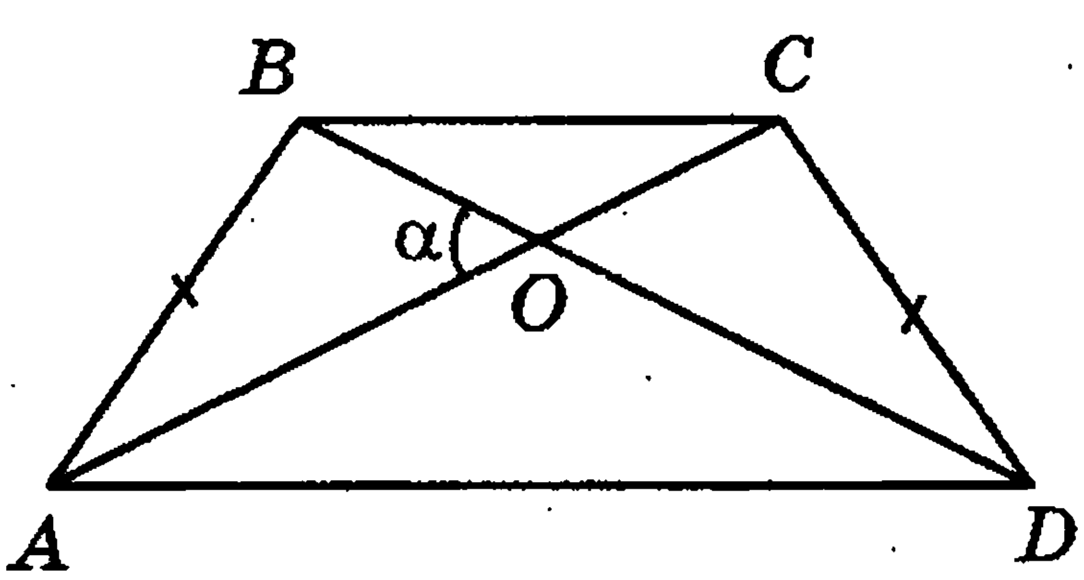
146. *Ответ:* 336.

Указание. Использовать формулы $R = \dfrac{abc}{4R}$ и $r = \dfrac{S}{p}$. Далее обозначить стороны треугольника $a = x$, $b = x + 2$, $c = x + 4$, тогда $\dfrac{abc}{4p} = \dfrac{x(x+4)}{6} = 130$, и т. д.

147. *Ответ:* $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}; \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)$.

148. *Указание.* Учесть, что $a^{2k} - 1$ делится на $a^2 - 1$.

149. Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = CD$, $AC = BD = m$ и $\angle AOB = \alpha$, $AO = x$, $CO = y$.



Заметим, что $S = 2S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} = 2 \cdot \dfrac{1}{2}xy \sin\alpha + \dfrac{1}{2}y^2 \sin(180° - \alpha) + \dfrac{1}{2}x^2 \sin(180° - \alpha) = xy \sin\alpha + \dfrac{1}{2}y^2 \sin\alpha +$

$$+\frac{1}{2}x^2\sin\alpha = \frac{1}{2}(x+y)^2\sin\alpha = \frac{1}{2}m^2\sin\alpha,$$

где $x + y = AC = BD = m$. Итак, $S = \dfrac{1}{2}m^2\sin\alpha$, ч. т. д.

150. *Ответ:* $(0; 0; 0)$, $(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$.

151. *Решение.* Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Заметим, что $f(1)\cdot f(0) = (a + b + c)\cdot c < 0$.

Следовательно, на концах отрезка $[0; 1]$ функция принимает значения разных знаков, поэтому ее график пересекает ось Ox, а значит, дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$, т. е. $b^2 > 4ac$, ч. т. д.

152. *Ответ:* 4.

153. *Решение.*

I способ

Пусть b_1, b_2, b_3 — искомые числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию. Согласно условию, имеем систему

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1^2(1+q+q^2)^2 = 676, \\ b_1^2(1+q^2+q^4) = 364. \end{cases}$$

Разделим почленно I уравнение на II:

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{13}{7}. \qquad (1)$$

Заметим, что $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2)^2 - q^2 = (1 + q^2 + q)(1 + q^2 - q)$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$\dfrac{1+q+q^2}{1+q^2-q} = \dfrac{13}{7}$, или $6q^2 - 20q + 6 = 0$,

$3q^2 - 10q + 3 = 0$, откуда находим $q_1 = 3$, $q_2 = \dfrac{1}{3}$.

Поскольку прогрессия возрастающая (по условию), то $q = 3$, тогда $b_1 = \dfrac{26}{1+q+q^2} = 2$.

Ответ: $b_1 = 2$, $q = 3$.

II способ

Известно, что если все члены геометрической прогрессии возвести в некоторую степень, то опять получим геометрическую прогрессию.

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=26, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=364; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b_1(1-q^3)}{1-q}=26, \\ \dfrac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2}=364. \end{cases}$$

Разделим почленно II уравнение полученной системы на I: $\dfrac{b_1(1+q^3)}{1+q} = 14$.

А теперь разделим I уравнение системы на полученное: $\dfrac{(1-q^3)(1+q)}{(1+q^3)(1-q)} = \dfrac{13}{7}$, или $\dfrac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \dfrac{13}{7}$, и т. д. (см. I способ).

III способ

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=26, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=364; \end{cases} \quad \begin{cases} (b_1+b_2+b_3)^2=26^2, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=364; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1^2+b_2^2+b_3^2+2b_1b_2+2b_1b_3+2b_2b_3=676, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=364; \end{cases}$$

$364 + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) = 676$, или
$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = 156$.
Но $b_2^2 = b_1b_3$, тогда $b_1b_2 + b_2^2 + b_2b_3 = 156$,

$b_2(b_1 + b_2 + b_3) = 156$. Так как $b_1 + b_2 + b_3 = 26$, то $b_2 = 156 : 26 = 6$, и т. д.

Ответ: $b_2 = 2$, $q = 3$.

154. *Ответ:* $x = -2$.

Указание. $(x - 1)^2 - 9 = x^3 + 8$.

155. *Ответ:* (1; 16).

Указание. Заменой $\sqrt{x} = y$, где $y \geq 0$, данное неравенство приводится к виду $\frac{(y-4)(y+1)}{(y+3)(y-1)} < 0$ и решается методом интервалов.

156. *Ответ:* $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{3}$.

157. *Ответ:* например, $x = y = 4020$.

Указание. Записать уравнение в виде $(x - 2010)(y - 2010) = 2010^3$.

158. *Ответ:* $x_1 = 16$, $x_2 = 96$.

Указание. Заменой $\begin{cases} \sqrt[4]{97-x} = a, \\ \sqrt[4]{x-15} = b \end{cases}$ получим $\begin{cases} a+b = 4, \\ a^4 + b^4 = 82 \end{cases}$ и т. д.

159. *Решение.*

I способ

Так как $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$, то исходное уравнение примет вид

$4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) =$
$= 3(\sin x + \cos x)$, или
$(\sin x + \cos x)(4 - 4\sin x \cos x - 3) = 0$,
$(\sin x + \cos x)(1 - 4\sin x \cos x) = 0$, откуда

$\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$,

или $1 - 2\sin 2x = 0$, $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

II способ

$4\cos^3 x - 3\cos x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Но $4\cos^3 x - \cos x = \cos 3x$ и $3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 3x$, тогда $\cos 3x = \sin 3x$, т. е. $\operatorname{tg} 3x = 1$, $3x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

160. *Ответ:* 0.
Указание. Возвести обе части равенства $a + b + c = 12$ в квадрат.

161. *Ответ:* в I раз 8 л спирта, во II раз — 7 л.
Указание. Согласно условию, имеем уравнение $(64 - x) - \dfrac{x(64-x)}{64} = 49$, и т. д.

162. *Ответ:* $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1$.
Указание. Рассмотреть два случая:
1) $x > 0$; 2) $x < 0$, и т. д.

163. *Решение.* Продолжим AD до пересечения с BC в точке E. Так как $\angle A = \angle B = 45°$, то $\angle AEB = 90°$, значит, ΔAEB равнобедренный и прямоугольный. Аналогично в ΔDEC $DE = EC$, $\angle EDC = \angle C = 45°$. Пусть $AE = BE = x$, $DE = CE = y$, тогда $S_{\Delta ABE} = \dfrac{1}{2} AE \cdot BE = \dfrac{1}{2}x^2$, $S_{\Delta DEC} = \dfrac{1}{2}y^2$.

Значит, $S_{\Delta ABCD} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Но в ΔDEB $x^2 + y^2 =$
$= BD^2$, следовательно, $S_{\Delta ABCD} = \frac{1}{2}BD^2$, ч. т. д.

164. *Ответ:* 91.

Указание. $10a + b = 10ab + k$; $10b + a = 2ab + k$, где k — остаток. Тогда, вычитая из I равенства II, получим $9a = b(8a + 9)$, и т. д.

165. *Ответ:* $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \geq 2$.

Указание. Привести уравнение к виду
$|\sqrt{x-3} + 1| = \sin x + \sqrt{x-3}$.

166. *Ответ:* нет решений.

Указание. Левая часть уравнения $x^3 - x =$
$= (x - 1)x(x + 1)$ кратна 6.

167. *Решение.* Из первой точки можно провести $(n - 1)$ прямых линий ко всем остальным. Из второй точки можно провести $(n - 2)$ прямых линий, так как прямая, идущая к первой точке, уже учтена. Из третьей точки можно провести $(n - 3)$ прямых линий и т. д. Из последней точки нельзя будет провести ни одной прямой линии. Таким образом, число прямых линий представляет сумму членов арифметической прогрессии.

$S_n = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 3 + 2 + 1$, где $a_1 = n - 1$, $a_n = 1$ и число членов $(n - 1)$.

Тогда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot (n - 1) = \frac{(n-1+1)}{2} \cdot (n - 1) =$
$= \frac{n(n-1)}{2}$.

Ответ: $\frac{n(n-1)}{2}$ прямых.

168. *Ответ:* $x^{13} + x^{11} + 1 = (x^2 + x + 1)(x^{11} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

Указание. Показать, что данный многочлен делится на $x^2 + x + 1$.

169. *Ответ:* (–2013; 0).

Указание. $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

170. *Ответ:* 1 см.

171. *Решение.* Данный многочлен представляет собой сумму шести членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1$, $q = x^2$, $b_n = x^{10}$.

По формуле суммы $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$ имеем

$$\frac{x^{10}\cdot x^2 - 1}{x^2-1} = \frac{x^{12}-1}{x^2-1} = \frac{(x^6-1)(x^6+1)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{(x^3-1)(x^3+1)((x^2)^3+1)}{x^2-1} =$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Ответ: $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

172. *Ответ:* $x = 4$.

Указание. Левую часть уравнения записать в виде $x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}$. Далее использовать формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

173. *Ответ:* $8\pi m$, $m \in Z$.

Указание. Учесть ограниченность косинуса.

174. *Решение.* Заметим, что $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, тогда многочлен $M(x)$ делится без остатка на $(x - 2)$ и $(x - 3)$. Согласно теореме Безу имеем

$$\begin{cases} M(2) = 8a + 4b - 146 + 102 = 0, \\ M(3) = 27a + 9b - 219 + 102 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a + 4b = 44, \\ 27a + 9b = 117; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + b = 11, \\ 3a + b = 13, \end{cases}$$

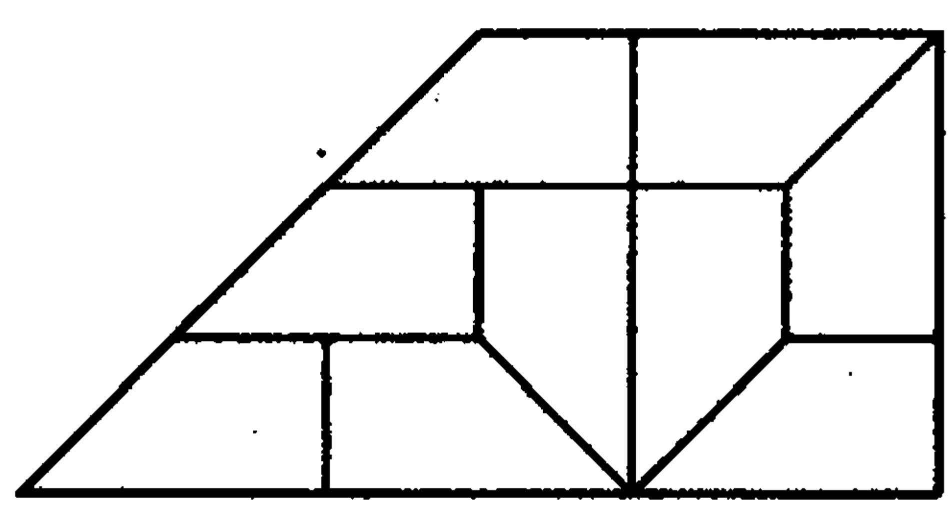
откуда находим $a = 2$, $b = 7$.
Ответ: $a = 2$, $b = 7$.

175. *Ответ:* (1; 1).

176. *Ответ:* $(-\infty; 2)$.

177. *Ответ:* 1) $x = 6$, $y = 2$, $z = 1$; 2) $x = 6$, $y = 1$, $z = 2$; 3) $x = 8$, $y = 3$, $z = 1$; 4) $x = 8$, $y = 1$, $z = 3$.

178. *Решение.*



179. *Ответ:* при $a = 2$ и $a = -1$.
Указание. Выразить из I уравнения x через y и подставить во II уравнение.

180. *Указание.* Записать уравнение в виде
$(x^2 - x - 2)^2 - 3^2 = x^3 + 1$.

181. *Ответ:* 9 учеников.
Указание. Пусть x — количество учеников, y — средний возраст учеников, тогда получим уравнение
$(xy + y + 40) : (x + 1) + 36 = y + 40$, и т. д.

182. *Ответ:* $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Указание. Заменой $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{x+1}=b$ исходное уравнение сводится к решению системы $\begin{cases} a^3-b^3=\frac{7}{8}, \\ \frac{a-b}{ab}=1, \end{cases}$ откуда новой заменой $2ab=t$ получим уравнение $t^3+6t-7=0$, корень которого $t=1$, и т. д.

183. *Решение.* Поскольку скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой, то, обозначив через x время, пройденное часовой стрелкой, $12x$ — минутной, и, учитывая, что первоначально между стрелками было ровно 15 минут, получим уравнение

$12x=x+15$, откуда $x=1\frac{4}{11}$, тогда минутная догонит часовую через $15+1\frac{4}{11}=16\frac{4}{11}$ мин.

Ответ: через $16\frac{4}{11}$ мин.

184. *Решение.* $\overline{abcde}=45abcde$, тогда все цифры числа нечетные, в противном случае оно кратно 10, но тогда $e=0$, значит, и само число равно 0. Значит, $e=5$, следовательно, искомое число кратно 25 и $d=7$ (2 — четное).

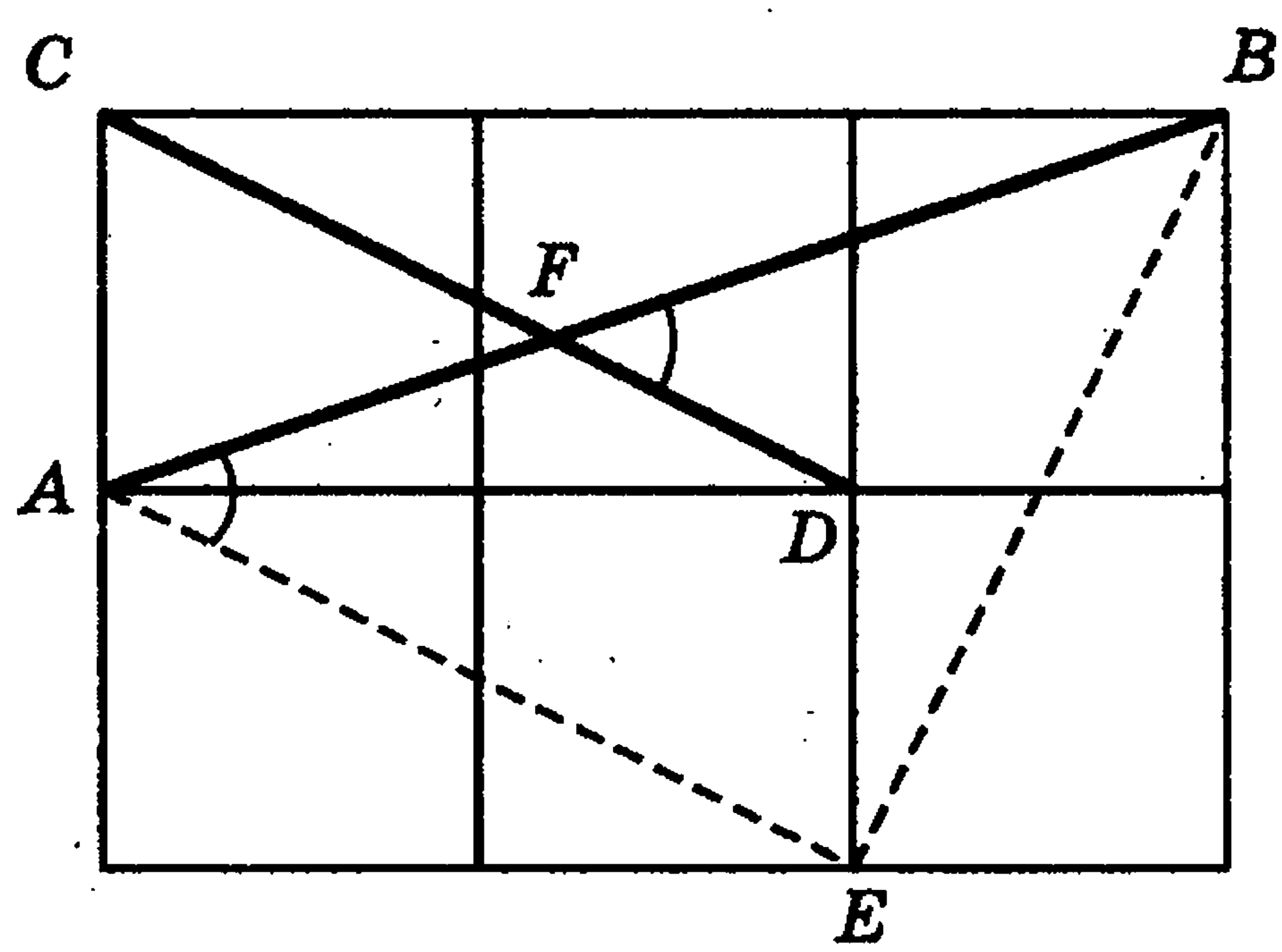
Заметим, что $a+b+c+12$ делится на 9, тогда $a+b+c=15$.

Кроме того, $45\cdot35\cdot abc<100\,000$, т. е. $abc\le63$, откуда подходит число 77 175.

Ответ: 77 175.

185. *Ответ:* (0; 1,5), (3; 0).

186. *Решение.* Пусть сторона квадрата равна x, тогда $AE = BE = x\sqrt{5}$ и $AB = \sqrt{5x^2+5x^2} = x\sqrt{10}$.



Из ΔABE, где $\angle BAE = \angle ABE = \alpha$, $\angle AEB = \beta$, по теореме косинусов имеем $10x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2x\sqrt{5}\cos\beta$, т. е. $\cos\beta = 0$, откуда $\beta = 90°$, тогда $\angle BAE = \angle BFD = 45°$.

Замечание. Можно применить скалярное произведение векторов CD и AB.

Ответ: 45°.

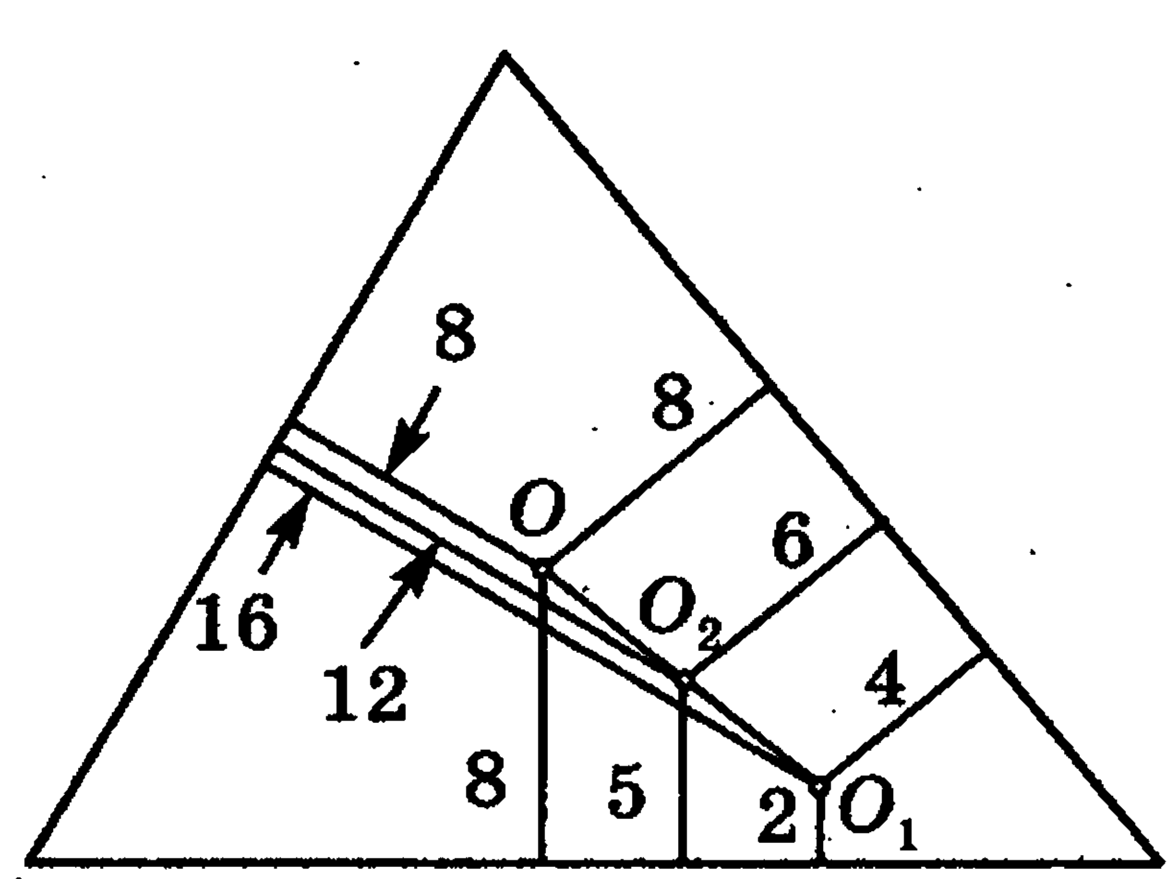
187. *Ответ:* через 144 суток.

188. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Заменой $\sqrt{1-\sqrt{x}} = 2y$ данное уравнение преобразуется к виду

$$4(1 - 4y^2)^2 = (40 - 4y^2)(1 - 2y)^2,$$ и т. д.

189. *Решение.* Пусть O_1 и O_2 — данные точки, O — такая точка, при которой O_2 — середина OO_1. Согласно свойству средней линии трапеции, расстояния от точки O до сторон



треугольника будут равны соответственно $2 \cdot 5 - 2 = 8$; $2 \cdot 6 - 4 = 8$; $2 \cdot 12 - 16 = 8$. Учитывая, что отрезок OO_1 не может пересекать ни одной стороны треугольника, то точка O — центр окружности, вписанной в данный треугольник радиуса $r = 8$.

Ответ: 8.

190. *Ответ:* $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 1)$.

191. *Ответ:* $\pi + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

192. *Ответ:* $(2; 1)$.

Указание. Разложить на множители левую часть I уравнения системы.

193. *Ответ:* $\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}$.

Указание. Ввести замену $\sqrt{x+1} = y$.

194. *Указание.* Имеет место тождество

$(x^3 + x + 1)(ax^2 + bx + c) = 2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n$.

Далее раскрыть скобки и сгруппировать слагаемые при одинаковых степенях. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $a = 2$, $b = -1$, $a + c = 0$, откуда $m = -3$, $n = -2$.

195. *Решение.* Заменой $x = y\sqrt{6}$ уравнение приводится к виду

$\sqrt{6}\,y^3 - 2y\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 0$, или $3y^3 - y - 2 = 0$.

Заметим, что $y = 1$ — корень полученного уравнения, тогда получим $3y(y^2 - 1) + 2(y - 1) = 0$, или $(y - 1)(3y^2 + 3y + 2) = 0$, откуда $y = 1$ — единственный корень полученного уравнения, так как уравнение $3y^2 + 3y + 2 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$). Итак, $y = 1$, тогда $x = y\sqrt{6} = \sqrt{6}$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = \sqrt{6}$.

196. *Решение.* Так как $x^2 = 2y^2 + 1$, то x — число нечетное. Пусть $x = 2m + 1$, тогда $2m(m + 1) = y^2$, откуда y — четное число. Но число 2 — единственное четное простое, значит, $y = 2$, тогда $x = 3$.

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

197. *Ответ:* 30°, 30°, 120°.

198. *Ответ:* $x_1 = -1$, $x_2 = 8$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $x^3 \neq 0$ и ввести замену $x - 5 - \dfrac{8}{x} = y$.

199. *Решение.* Пусть x, y — катеты, z — гипотенуза, причем $x \leq y \leq z$.

По теореме Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$, значит, $x^2y + y^3 = z^2y$, тогда $x^3 + y^3 \leq x^3y + y^3 = z^3y < z^3$.

Следовательно, $x^3 + y^3 < z^3$, т. е. куб гипотенузы больше суммы кубов катетов.

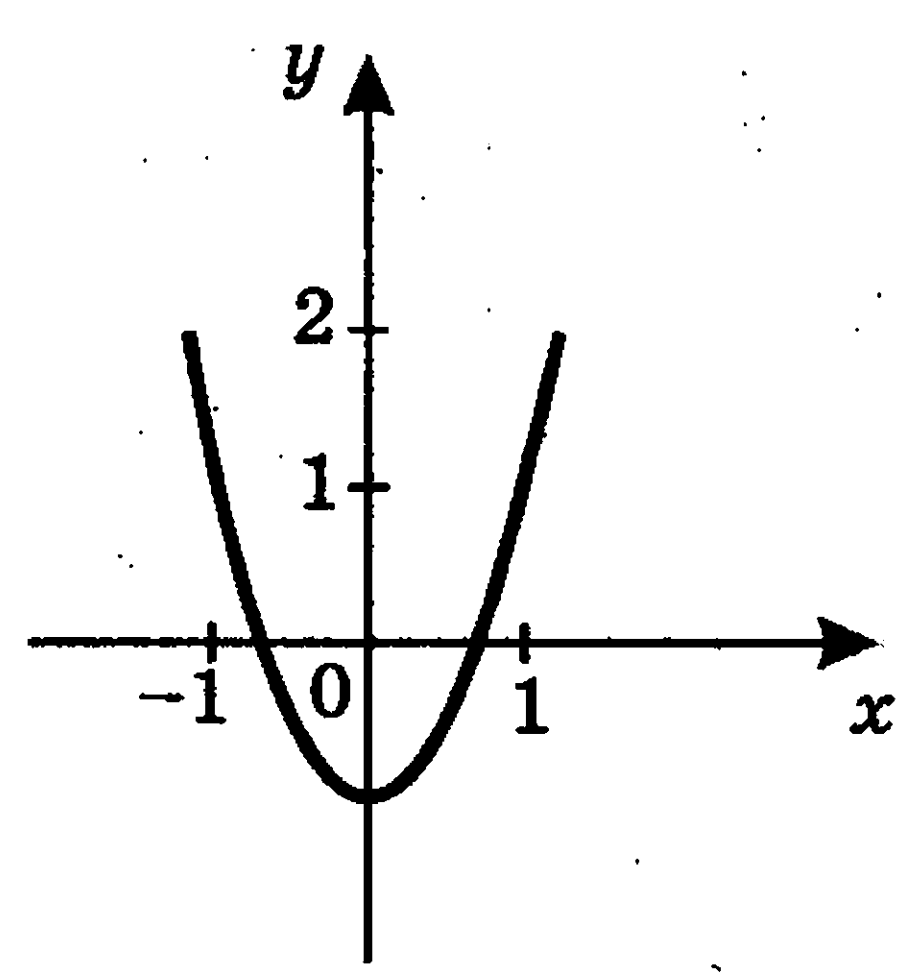
200. *Ответ:* $x_{1,2} = \dfrac{1}{3}(2 \pm \sqrt{7})$.

201. *Ответ:* (0; 0), (−9; 3), (3; 1), (−12; 6).

Указание. Записать систему в виде $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}xy + y^2, \\ 2y - \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{9}x^2, \end{cases}$

а затем почленно сложить.

202. *Указание.* После преобразования получим $y = 2x^2 - 1$.



203. *Ответ:* $x = -\sqrt{7}$, $y = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Указание. Представить уравнение в виде

$$(x + \sqrt{7})^2 + \left(y - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 0.$$

204. *Ответ:* $x_1 = \dfrac{1}{6}(1 + \sqrt{13})$, $x_2 = \dfrac{1}{9}$.

Записать уравнение в виде $3\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right) +$ $+ 9\left(x + \dfrac{1}{9x}\right) - 8 = 0$ и затем ввести замену $\sqrt{x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}} = t$.

205. *Ответ:* $x = 5$.

206. *Ответ:* (4; 1), (1; 4).

207. *Решение.* Если x_1 и x_2 — корни трехчлена, то по теореме Виета имеем $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{p^2}. \end{cases}$

Тогда $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - \dfrac{2}{p^2}$;

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = p^4 + \frac{2}{p^4} - 4;$$

$$x_1^6 + x_2^6 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) =$$

$$= \left(p^4 + \frac{2}{p^4} - 4\right)\left(p^2 - \frac{2}{p^2}\right) - \frac{1}{p^4}\left(p^2 - \frac{2}{p^2}\right) =$$

$$= p^6 - \frac{2}{p^2} + \frac{9}{p^2} - 6p^2;$$

$$x_1^8 + x_2^8 = (x_1^6 + x_2^6)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2^2 (x_1^4 + x_2^4) =$$
$$= \left(p^6 - \frac{2}{p^6} + \frac{9}{p^6} - 6p^2\right)\left(p^2 - \frac{2}{p^2}\right) - \frac{1}{p^4}\left(p^4 + \frac{2}{p^4} - 4\right) =$$
$$= \left(p^8 + \frac{2}{p^8}\right) - 8\left(p^4 + \frac{2}{p^4}\right) + 20.$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем

$$x_1^8 + x_2^8 = \left(p^8 + \frac{2}{p^8}\right) - 8\left(p^4 + \frac{2}{p^4}\right) + 20 \geq$$
$$\geq 2\sqrt{p^8 \cdot \frac{2}{p^8}} - 8\sqrt{p^4 \cdot \frac{2}{p^4}} + 20 = 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} +$$
$$+ 20 = 20 - 6\sqrt{2} > 11,$$ ч. т. д.

208. *Ответ:* $x = -1$.

Указание. Рассмотреть 3 случая:

1) $x < -2$; 2) $-2 < x < \frac{4}{3}$; 3) $x > \frac{4}{3}$.

209. *Решение.* Запишем уравнение в виде
$(x - 2\cos(xy))^2 + 4(1 - \cos^2(xy)) = 0$, или
$(x - 2\cos(xy))^2 + (2\sin(xy))^2 = 0$, откуда
$x - 2\cos(xy) = 0$ и $\sin(xy) = 0$,
т. е. $x - 2\cos(xy) = 0$ и $\cos(xy) = \pm 1$.
Имеем 2 системы:

1) $\begin{cases} x - 2\cos(xy) = 0, \\ \cos(xy) = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ xy = 2\pi n; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = \pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2\cos(xy) = 0, \\ \cos(xy) = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2, \\ xy = \pi + 2\pi k; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2, \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$

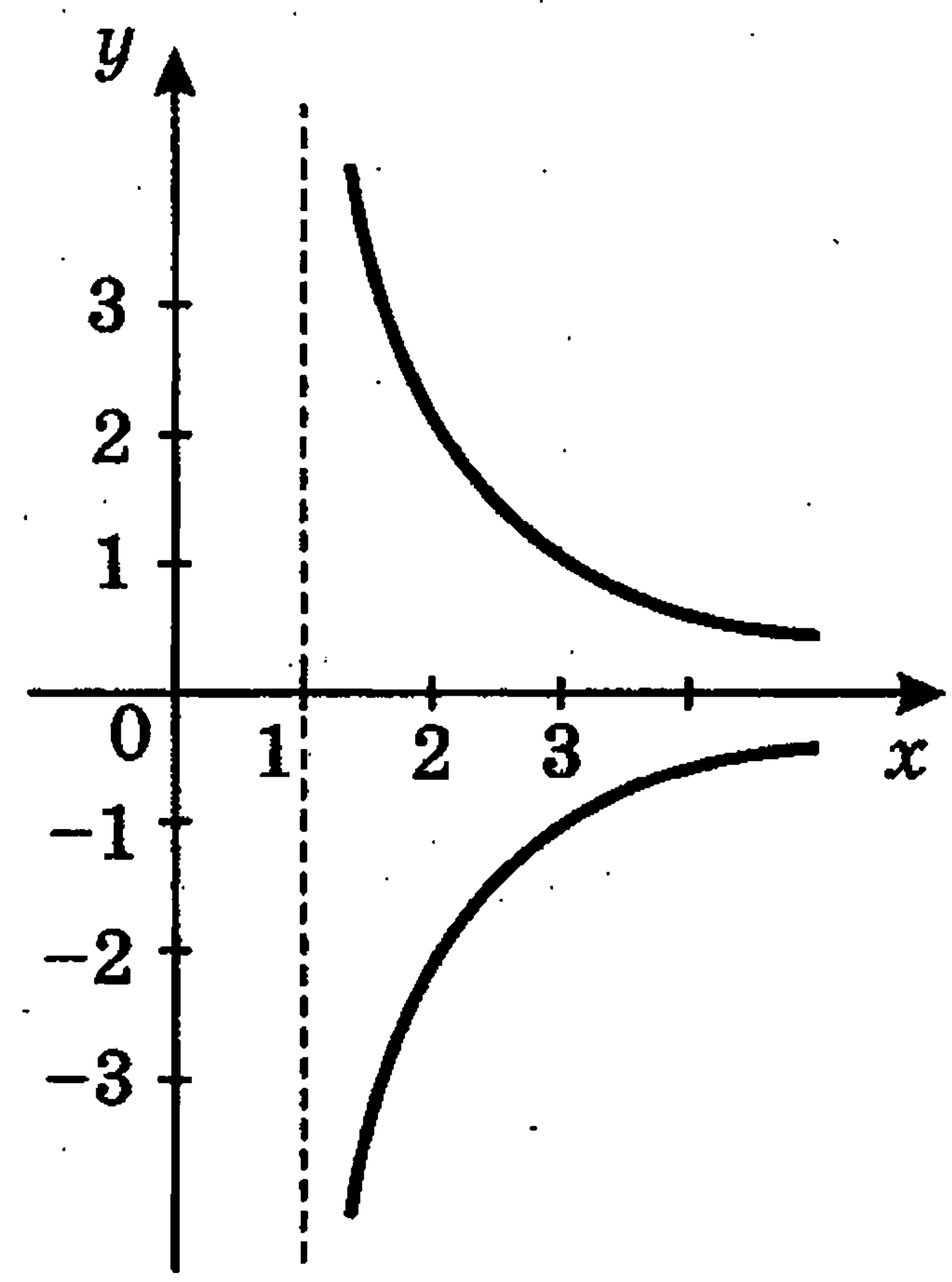
210. *Ответ:* при $a = 2019$, $b = 12\,078$.

Указание. $x^2 + 7x^2 + ax + b = (x^2 + x + 2013)(x + c)$. Далее применить метод неопределенных коэффициентов.

211. *Решение.* $x \neq 0$, $x \neq 1$.

$$|y| = \frac{3\cdot 1 - 1}{x-1} = \frac{2}{x-1}.$$

$$1)\ \begin{cases} y > 0, \\ y = \dfrac{2}{x-1}; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} y < 0, \\ y = \dfrac{2}{1-x}. \end{cases}$$



212. *Ответ:* при $a = 3$.

213. *Решение.* Пусть $M(0;\ y)$ — точка на оси Oy. Уравнение касательной имеет вид $y = ax + b$. В точке касания дискриминант D квадратного уравнения равен нулю, т. е.

$x^2 - 4x + 7 = ax + b$, или $x^2 - (a + 4)x + 7 - b = 0$.

Имеем $D = (a + 4)^2 - 4(7 - b) = 0$, или

$$a^2 + 8a + (4b - 12) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) должно иметь корни a_1 и a_2, такие, что $a_1 \cdot a_2 = -1$ — условие перпендикулярности данных прямых, a_1 и a_2 — угловые коэффициенты.

Но $a_1 \cdot a_2 = 4b - 12$, тогда $4b - 12 = 1$, $b = \dfrac{11}{4}$, и на оси Oy получили точку $M\left(0; \dfrac{11}{4}\right)$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{11}{4}\right)$.

214. *Ответ:* $x = -1$.

215. *Указание.* Учесть, что $\sin 540° = \sin(3 \cdot 180°) = 0$, тогда уравнение после упрощений примет вид $\frac{|x|}{3} = \frac{1}{2}x^2$.

Далее рассмотреть два случая, после чего находим $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$.

216. *Ответ:* 6,25.

217. *Ответ:* 8.

Указание. Если x, y, z — стороны треугольника, r — радиус вписанной окружности, то задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} rx = 214, \\ ry = 208, \\ rz = 240. \end{cases}$

Далее применить формулу Герона.

218. *Ответ:* при $\alpha = 60°$.

219. *Ответ:* 6.

220. *Ответ:* -6.

Указание. Привести уравнение к виду

$$\left(x+15+\frac{36}{x}\right)\left(x+13+\frac{36}{x}\right) = 3.$$

Далее замена $y = x + \frac{36}{x}$.

221. *Решение.* Допустим, что уравнение имеет рациональный корень $x_0 = \frac{m}{n}$, причем $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^5 - p \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^3 + 1 = 0$. (1)

Умножим обе части (1) на n^3:

$$\frac{m^5}{n^2} - pm^3 + n^3 = 0, \text{ или } \frac{m^5}{n^2} = pm^3 - n^3. \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, то и $\frac{m^5}{n^2}$ — несократимая дробь, тогда как правая часть (2) есть целое число.

Следовательно, равенство (2) не может выполняться, а это и означает, что наше допущение неверно, т. е. исходное уравнение не имеет рациональных корней.

222. *Ответ:* 210.

223. *Решение.* Пусть $y = \frac{1-\sqrt{2x^2-5x+4}}{5x-2x^2-3}$, или $y = \frac{\sqrt{2x^2-5x+4}-1}{2x^2-5x+3} = \frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+4}+1}$ (здесь мы знаменатель дроби представили в виде
$(2x^2 - 5x + 4) - 1$ и разложили на множители).

Пусть $2x^2 - 5x + 4 = t$, где $t > 0$ при всех $x \in R$, так как $D = -7 < 0$ и $a = 2 > 0$.

Следовательно, $E(t) \in (0; +\infty)$.

Заметим, что функция $f(x) = f(t(x)) = \frac{1}{\sqrt{t}+1}$ убывающая, тогда свое наибольшее значение она получит при наименьшем значении t, т. е. при $x = -\frac{b}{2a} = 1\frac{1}{4}$.

Так как ближайшими к $x = 1\frac{1}{4}$ целыми числами будут 0 и 2 (при $x = 1$ функция не определена), то $y(0) = \frac{1}{3}$ и $y(2) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Но $y(2) > y(0)$, следовательно, исходное выражение имеет наибольшее значение при $x = 2$.

Ответ: 2.

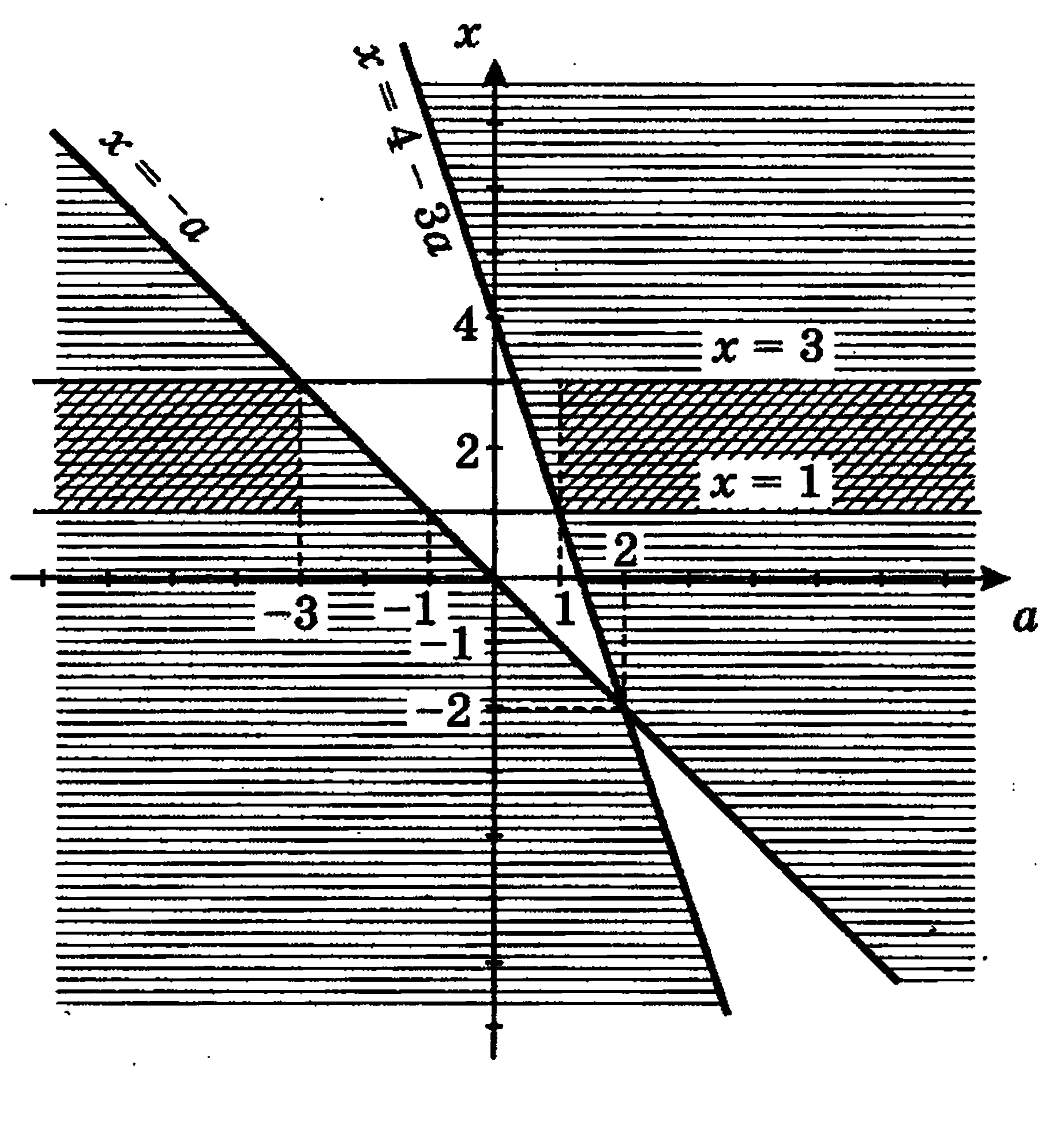
224. *Ответ:* (0; 0), (±2; ±1), $(\pm\sqrt[4]{2}; \pm 2\sqrt[4]{2})$.

Указание. Пара (0; 0) — решение системы. Пусть $xy \neq 0$, тогда, перемножив обе части системы, а затем разделив на $x^3y^3 \neq 0$, получим

$$8\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^3}{x^3}\right) = 99.$$

Далее замена $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$. В результате упрощений получим $\frac{x}{y} = 2$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, затем подстановкой во II уравнение исходной системы, и т. д.

225. *Решение.* В координатной системе Oax отметим штриховкой все точки $(a;\ x)$, координаты



которых удовлетворяют указанным неравенствам (двойной штриховке соответствуют те точки, у которых $x \in [1; 3]$). Из рисунка видно, что только при $a < -3$ и $a > 1$ полоса $1 \le x \le 3$ целиком принадлежит заштрихованной области.

Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

226. *Ответ:* 16.

227. *Указание.* Преобразовать данное выражение к виду $\frac{1}{6}(m + 2)(m + 3)(m + 4)$, откуда и следует требуемое.

228. *Решение.* Упростим II уравнение системы

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2} = 5. \qquad (1)$$

Заметим, что I квадратный корень — это расстояние от точки координатной плоскости с координатами $C(x, y)$ до точки с координатами $M(2; 3)$, а II корень — расстояние от точки $C(x, y)$ до точки $N(-1; 7)$. Кроме того, $MN = \sqrt{(-1-2)^2+(7-3)^2} = 5$.

Следовательно, уравнение (1) имеет геометрический смысл: решением этого уравнения являются такие пары чисел $(x; y)$, для которых геометрическое место точек с координатами $C(x, y)$ на координатной плоскости задано равенством $MC + CN = MN$. Очевидно, что лишь точки отрезка AB и только они образуют геометрическое место точек. Упростим теперь I уравнение системы:

$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 26. \qquad (2)$$

Уравнение (2) есть уравнение окружности с центром (4; 6) и радиусом $\sqrt{26}$. Найдем точки пересечения отрезка MN с окружностью (2).

Уравнение прямой MN имеет вид $y = kx + b$. Поскольку точки M и N принадлежат прямой, то координаты точек должны удовлетворять прямой $y = kx + b$, т. е. имеем

$$\begin{cases} 2x+b=3, \\ -x+b=7; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}, \\ b=\dfrac{17}{3}. \end{cases}$$

Тогда уравнение прямой примет вид

$$y=-\frac{4}{3}+\frac{17}{3}. \qquad (3)$$

Подставим значение y из (3) в уравнение окружности (2):

$$(x-4)^2+\left(-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}-6\right)^2=26, \text{ или}$$

$$(x-4)^2+\frac{(4x+1)^2}{9}=26,\ 25x^2-64x-89=0,$$

откуда находим $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{89}{25}$, тогда $y_1 = 7$,

$y_2 = \dfrac{23}{25}$.

Заметим, что из полученных точек лишь точка с абсциссой $x = -1$ и ординатой $y = 7$ будет принадлежать отрезку AB. Значит, пара $(-1;\ 7)$ является решением исходной системы уравнений.

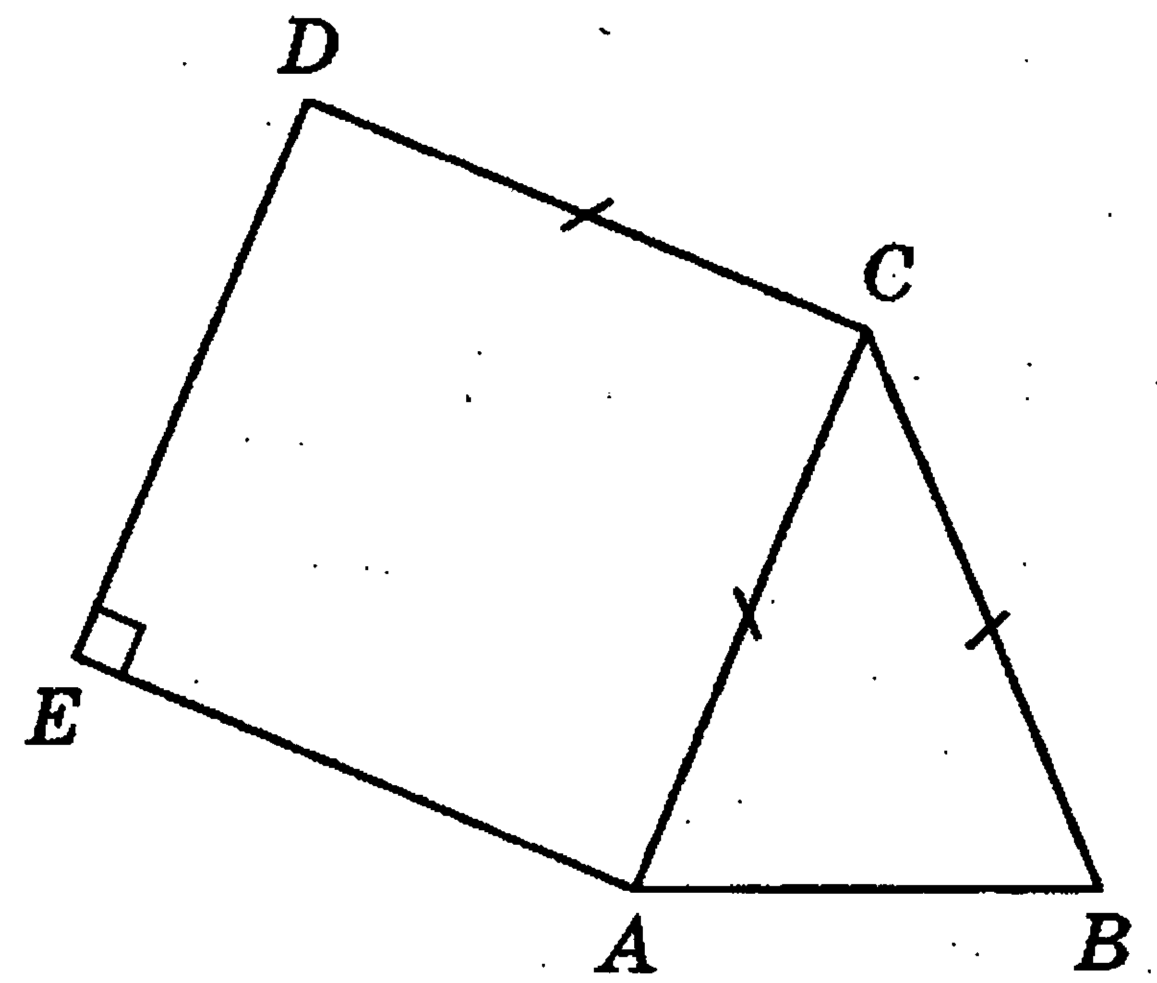
Ответ: $(-1;\ 7)$.

229. *Ответ:* $(1;\ 2)$, $(-1;\ 0)$, $(2;\ 4{,}5)$, $(-2;\ 0{,}5)$.

230. *Решение.* Пусть $AC = BC = CD = x$.

По условию $x^2 = 4S_{\Delta ABC}$. (1)

Но $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC \sin \angle C = \dfrac{1}{2}x^2 \sin \angle C$.



Учитывая (1), получим $x^2 = 2x^2 \sin \angle C$, $x \neq 0$, $\sin \angle C = \frac{1}{2}$, откуда $\angle C = 30°$, тогда $\angle A = \angle B = 75°$.

По следствию из теоремы синусов $\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$, откуда $R = \frac{y}{2 \cdot \frac{1}{2}} = y$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(2x + y)$, тогда

$$r = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{x^2}{2(2x+y)}, \quad \frac{R}{r} = \frac{2y(2x+y)}{x^2}. \qquad (2)$$

Но $\cos \angle A = \frac{0,5y}{x} = \cos 75°$, или $y = 2x \cos 75°$, тогда (2) примет вид

$$\frac{R}{r} = 8 \cos 75° \cdot (1 + \cos 75°). \qquad (3)$$

Но $\cos 75° = \cos (30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$, тогда (3) примет вид $\frac{R}{r} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)\right) =$

$= (\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + $
$+ 4 = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1).$

Ответ: $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1).$

231. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$$\left(\frac{x^3-2}{x+2}+3\right) - \left(\frac{13x+4}{x^2-10}+x\right) = 0,$$

$$\frac{x^3+3x+4}{x+2} - \frac{x^3+3x+4}{x^2-10} = 0.$$

В таком представлении и заключается идея решения. Далее имеем

$$(x^3 + 3x + 4)\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-10}\right) = 0,$$

$x \neq -2,\ x \neq \pm\sqrt{10}$.

$(x^3 + 3x + 4)(x^2 - x - 12) = 0$, или

$(x + 1)(x^2 - x + 4)(x - 4)(x + 3) = 0$, откуда получим $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$.

Уравнение $x^2 - x + 4 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$.

232. *Ответ:* 24.

Указание. Обозначить $\sqrt{x-144} = y$, и т. д.

233. *Решение.* При $a = b$ получим тождество. Пусть $a \neq b$. Так как $a^2b^2 = a + b$, то $a^2b^2(a - b) = (a + b)(a - b)$, или $a^3b^2 - a^2b^3 = a^2 - b^2$. (1)

Прибавим к обеим частям (1) $a^2b^2 \neq 0$:

$a^3b^2 - a^2b^3 + a^2b^2 = a^2 - b^2 + a^2b^2$, или

$a^2(b^3 + b^2 + 1) = b^2(a^3 + a^2 + 1)$, откуда

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3+a^2+1}{b^3+b^2+1},\text{ ч. т. д.}$$

234. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$(x-6)^2-1+(x-5)^3+(x-4)^4-1=0$, или

$(x-7)(x-5)+(x-5)^3+(x^2-8x+16-1)(x^2-8x+16+1)=0$,

$(x-7)(x-5)+(x-5)^3+(x-5)(x-3)(x^2-8x+17)=0$,

$(x-5)(x-7+x^2-10x+25+(x-3)(x^2-8x+17))=0$,

$(x-5)((x-3)(x-6)+(x-3)(x^2-8x+17))=0$,

$(x-5)(x-3)(x^2-7x+11)=0$, откуда $x_1=5$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{5})$.

Ответ: $x_1=5$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{5})$.

235. *Ответ:* $\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

236. *Указание.* Рассмотреть функцию $f(n)=\left(\frac{7}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n$. Далее установить, что неравенство выполняется при $n\geq 4$.

237. *Решение.* Заметим, что на основании теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем

$$\sqrt{x^4+x^3-2x^2+2x-1}\leq\frac{1}{2}(x^4+x^3-2x^2+2x),$$

$$\sqrt{3x^2-x^4-x^3}\leq\frac{1}{2}(3x^2-x^4-x^3+1).$$

Тогда $\sqrt{x^4+x^3-2x^2+2x-1}+\sqrt{3x^2-x^4-x^3}\leq\frac{1}{2}(x^2+2x+1)$.

Следовательно, и правая часть исходного уравнения удовлетворяет условию

$\frac{1}{2}(3x^2 - 2x + 3) \le \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$, или

$2x^2 - 4x + 2 \le 0$, $x^2 - 2x + 1 \le 0$, $(x - 1)^2 \le 0$, откуда $x = 1$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

238. *Решение.* Пусть в ΔABC $CD = 4$ — высота, AB — основание, $AD : DB = 1 : 2$, $r = \frac{18}{7+\sqrt{13}}$ — радиус вписанной окружности.

Пусть $AD = x$, $DB = 2x$, $x > 0$, тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 4 = 6x$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p\cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(3x + AC + BC)$, тогда имеем

$6x = \frac{9(3x + AB + BC)}{7+\sqrt{13}}$, или

$2(7 + \sqrt{13})x = 3(3x + AB + BC)$.

Из ΔADC $AC = \sqrt{x^2+16}$,

из ΔCDB $BC = \sqrt{4x^2+16} = 2\sqrt{x^2+4}$.

Получим уравнение $2(7 + \sqrt{13})x = 3(3x + \sqrt{x^2+16} + 2\sqrt{x^2+4})$, или

$(5 + 2\sqrt{13})x = 3(\sqrt{x^2+16} + 2\sqrt{x^2+4})$.

Возведя обе части в квадрат и упрощая, получим

$((8 + 5\sqrt{13})x^2 - 72)^2 = (9\sqrt{(x^2+4)(x^2+16)})^2$, или

$(8 + 5\sqrt{13})^2x^2 - 144(8 + 5\sqrt{13}) = 81x^2 + 1620$,

$(308 + 80\sqrt{13})x^2 = 9(308 + 80\sqrt{13})$, откуда

$x^2 = 9$, $x = 3$.

Итак, $AD = 3$, $DB = 2x = 6$, тогда $AB = 3 + 6 = 9$.
Ответ: 9.

239. *Ответ:* $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1) \cdot$
$\cdot (x^4 - x^2 + 1)$.

240. *Решение.* I слагаемое в левой части уравнения есть среднее геометрическое $4x^3 + 3x^2 + 2$ и 1, т. е.

$$\sqrt{1\cdot(4x^3+3x^2+2)} \le \frac{1}{2}((4x^3 + 3x^2 + 2) + 1), \text{ или}$$

$$\sqrt{4x^3+3x^2+2} \le \frac{1}{2}(4x^3 + 3x^2 + 3). \qquad (1)$$

Аналогично $\sqrt{2x^2-4x^3+4x-1} \le$

$$\le \frac{1}{2}(2x^2 - 4x^3 + 4x). \qquad (2)$$

Складывая почленно (1) и (2) получим

$$\sqrt{4x^3+3x^2+2} + \sqrt{2x^2-4x^3+4x-1} \le$$
$$\le \frac{1}{2}(5x^2 + 4x + 3).$$

Следовательно, и правая часть исходного неравенства должна удовлетворять условию

$$3x^2 + 3x + 2 \le \frac{1}{2}(5x^2 + 4x + 3) \text{ или } x^2 + 2x + 1 \le 0,$$

$(x + 1)^2 \le 0$, откуда $x = -1$.
Ответ: -1.

241. *Ответ:* $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{5}{16}\right)$.

242. *Ответ:* $5\sqrt{41}$.

243. *Решение.* Преобразуем уравнение системы:

$$12\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{4y}+\frac{5}{12z}\right) \cdot 12\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{5z}{12}\right) = 144,$$

$\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}\right)(4x+3y+5z)=144$, или

$$12\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+20\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+15\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=94. \qquad (1)$$

Но $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$, тогда (1) выполняется при условии, что $x=y=z=2$.

При этих значениях II уравнение исходной системы примет вид

$$x^3+2x^2+3x=22. \qquad (2)$$

Так как число 2 удовлетворяет (2), то
$x^2(x-2)+4x(x-2)+11(x-2)=0$, или
$(x-2)(x^2+4x+11)=0$, откуда $x=2$ — единственный корень уравнения (2), так как уравнение $x^2+4x+11=0$ не имеет действительных корней.

Итак, исходная система имеет единственное решение (2; 2; 2).

Ответ: (2; 2; 2).

244. *Ответ:* $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. Использовать подобие ΔBEC и ΔAED, а затем теорему косинусов в ΔABE.

245. *Решение.* Обозначим данное выражение буквой A,

$$A=\frac{1\cdot 4\cdot 6\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots)}=\frac{1\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=4=2^2.$$

246. *Ответ:* $x_1=1$, $x_2=-3$.

Указание. Заменой $y=\sqrt[3]{7x-6}$ уравнение преобразуется в систему $\begin{cases}x^3+6=7y,\\ y^3+6=7x,\end{cases}$ которая легко решается вычитанием.

247. *Ответ:* $CD = \sqrt{113-64\sqrt{3}} \approx 1{,}5$ см.

248. *Ответ:* 3,36.

Указание. Использовать свойство касательной к окружности и формулу Герона.

249. *Ответ:* нет корней.

250. *Решение.* Пусть $x = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{40} = y + z$, где $y^3 = 25$, $z^3 = 40$ и $yz = \sqrt[3]{25 \cdot 40} = \sqrt[3]{10^3} = 10$.

Тогда $x^3 - 30x = x(x^2 - 30) = (y + z)(y^2 + 2yz + z^2 - 3yz) = (y + z)(y^2 - yz + z^2) = y^3 + z^3 = 25 + 40 = 65$.

Ответ: 65.

251. *Ответ:* 1) $a = -7$, $b = -1$; 2) $a = -12$, $b = -2$.

252. *Ответ:* $(-4; 16)$, $(3, 9)$.

Указание. Если числа m, x_1, x_2 и n образуют геометрическую прогрессию, то

$$\begin{cases} x_1^2 = mx_2, \\ x_2^2 = x_1 n; \end{cases} \quad m = \frac{x_1^2}{x_2}, \ n = \frac{x_2^2}{x_1}.$$

Далее применить теорему Виета.

253. *Решение.* Заметим, что $\operatorname{tg} 127°\,30' = -\operatorname{tg} 52°\,30'$.

Так как $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, то $\operatorname{tg} 127°\,30' =$

$$= \frac{\cos(45°+60°)-1}{\sin(45°+60°)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} - 1}{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} - 4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} =$$

$= \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} -$
$- 2\sqrt{2})(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} - 2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Тогда исходное выражение примет вид
$\operatorname{tg} 127° 30' + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - 2 - \sqrt{6} +$
$+ \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = -2$, ч. т. д.

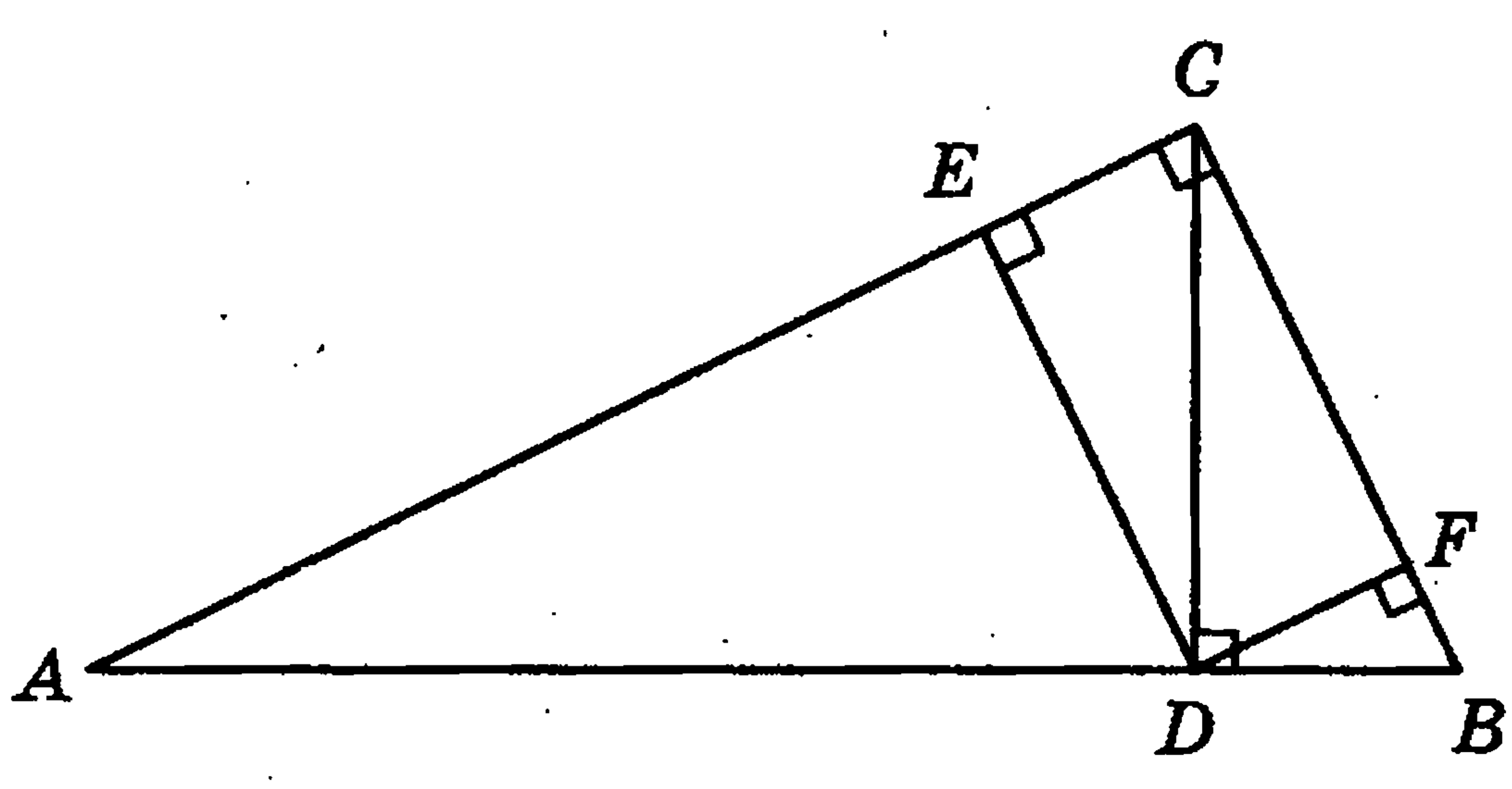
254. *Ответ:* $x = 4$.

Указание. Умножить обе части уравнения на x, а затем разделить на $(x - 3)^3 \neq 0$. Далее замена $\frac{\sqrt{x}}{x-3} = y$, и т. д.

255. *Ответ:* $\sqrt{mn}$.

256. *Решение.* Известно, что $r = \frac{1}{2}(AC + BC -$
$- AB)$, тогда $r_1 = \frac{1}{2}(AE + DE - AD)$ и

$$r_2 = \frac{1}{2}(DF + FB - DB).$$



Складывая полученные равенства, имеем
$r_1 + r_2 = \frac{1}{2}((AE + DF) + (DE + FB) - (AD +$

$+ DB)) = \frac{1}{2}((AE + EC) + (CF + FB) - AB) =$

$= \frac{1}{2}(AC + CB - AB) = r$, ч. т. д.

257. *Ответ:* $2(x^2 + y^2)(x^4 + 5x^2y^2 + y^4)$.

258. *Ответ:* $x = 1$.

Указание. Учесть, что $\frac{27}{2x+7} = \frac{6(x+8)}{2x+7} - 3$.

259. *Ответ:* $\frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2)$.

260. *Решение.* Легко показать, что $p = 2R + r$, где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр, тогда $S = pr = (2R + r)r = 2Rr + r^2$.

Следовательно, $S + R^2 = (2Rr + r^2) + R^2 = (R + r)^2$, или $R + r = \sqrt{S+R^2}$, откуда $r = \sqrt{S+R^2} - R$, ч. т. д.

261. *Ответ:* $\frac{1}{3}(\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8})$.

262. *Ответ:* $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{4}{7}$.

Указание. Решить заменой $y = 7x^2 + 7x + 4$. Далее применить способ группировки.

263. *Ответ:* $x_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2012} \pm \sqrt{2016})}$,

$x_3 = \sqrt[6]{2012}$.

Указание. Заменой $\sqrt{2012} = a$, где $a > 0$, исходное уравнение приводится к виду

$x^9 - (a^2 + 1)x^3 + a = 0$, или $x^3a^2 - a + (x^3 - x^9) = 0$.

Далее полученное уравнение решаем как квадратное относительно a.

264. *Ответ:* $x = 1$.

265. *Ответ:* $x = 2$.

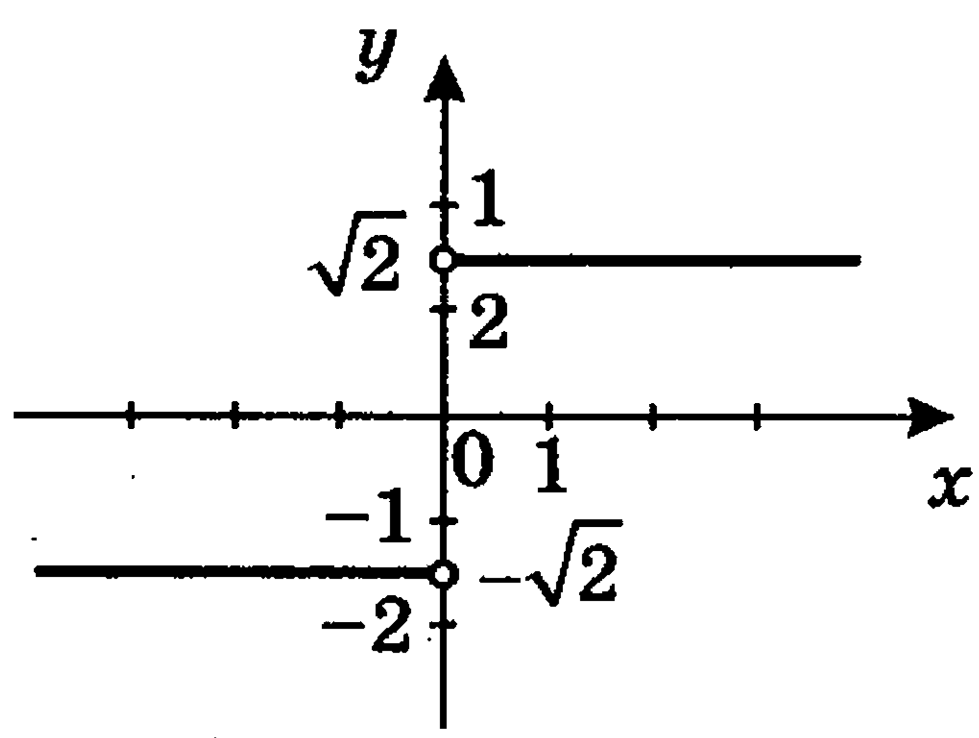
Указание. Представить уравнение в виде
$$\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{x+2}{7x+2} = \frac{7}{2}.$$

Далее замена $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} = y$, и т. д.

266. *Ответ:* на 50.

267. *Указание.* Выразить левую часть через первый член и знаменатель прогрессии, и т. д.

268. *Ответ:* (см. рис.).



269. *Указание.* Преобразовать уравнение к виду $(x - z)^2 + (x + y - 1)^2 + (x - y + 3)^2 = 0$, откуда находим $x = -1$, $y = 2$, $z = -1$.

270. *Ответ:* $x = 2$.

Указание. Обозначить $\sqrt[3]{x} = t$.

271. *Решение.* Заметим, что $x \neq 0$, тогда $(x + 19) = (x - 1)!$

Пусть $x - 1 = y$, тогда $x = y + 1$ и $y + 20 = y!$ (1)

Очевидно, что $y = 4$ — корень уравнения (1). Учитывая, что $y!$ возрастает быстрее, чем $y + 20$, то при $y > 4$ уравнение (1) корней не имеет. Следовательно, $y = 4$ — единственный корень (1), тогда

$x = y + 1 = 5$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 5$.

272. *Ответ:* при $a = 1$.

273. *Ответ:* $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = -2$.

Указание. Показать, что если $x + \frac{1}{x} = y$, то $x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y$, где $y \neq 0$. Далее решить уравнение $16y^4 - 80y^2 - 125 = 0$, и т. д.

274. *Ответ:* при $x = -4; -2; 0; 2$.

275. *Решение.* Запишем уравнение в виде $y^7 = z^2 - x^2$.

Заметим, что $y^7 = \left(\frac{y^7+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y^7-1}{2}\right)^2$.

Полученное равенство является тождеством. При нечетном $y > 1$ можно положить $z = \frac{1}{2}(y^7 + 1)$ и $x = \frac{1}{2}(y^7 - 1)$. Таким образом, всякая тройка чисел $\left(\frac{y^7-1}{2}; y; \frac{y^7+1}{2}\right)$, где $y > 1$ и y — нечетное число, является решением исходного уравнения.

Например, при $y = 3$, $z = 1094$, $x = 1093$, $y^7 = 2187$ и $1093^2 + 2187 = 1094^2$. Таким образом, исходное уравнение имеет сколько угодно решений в натуральных числах.

276. *Ответ:* $(b_1q^k)^7$.

277. *Ответ:* $\left[3; \frac{10}{3}\right) \cup (2; 3)$.

278. *Ответ:* $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

279. *Указание.* Показать, что данный многочлен имеет вид $(x^2 + Bx + Ca^2)^2$. Далее раскрыть скобки в обеих частях равенства, упростить и сравнить коэффициенты при x^3 и x, откуда находим $B = 5a$, $C = 5$, т. е. получим $(x^2 + 5ax + 5a^2)^2$.

280. *Ответ:* $x = -1$.

281. *Ответ:* $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$.

282. *Ответ:* $D(y) = (-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$.

283. *Ответ:* $3 + \sqrt{2}$.

284. *Ответ:* 7744.

285. *Указание.* $S = \frac{q_1}{1-q}$, где q — знаменатель прогрессии, тогда $S - q_1 = \frac{q_2}{1-q}$. Разделив I равенство на II, получим требуемое.

286. *Ответ:* нет.

Указание. $D = 18\,493$ — не является полным квадратом.

287. *Решение.* Искомая сумма равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$$

и может оканчиваться лишь одной из цифр: 0, 1, 3, 5, 6, 8. Так что цифрой 9 оканчиваться не может.

Ответ: не может.

288. *Ответ:* 4.

289. *Ответ:* 4567.

290. *Ответ:* 1 : 4.

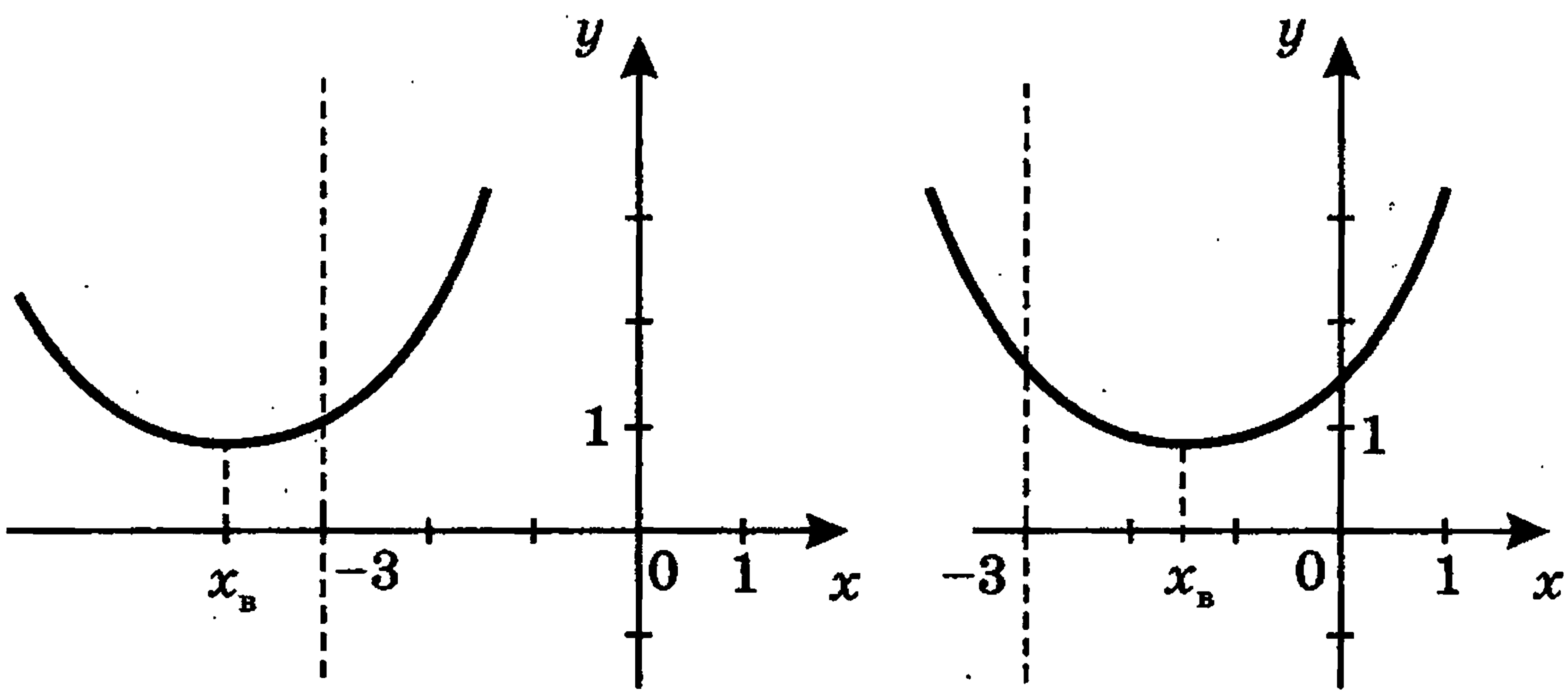
291. *Ответ:* 147.

292. *Указание.* Если угол между диагоналями останется без изменения.

293. *Ответ:* $r = 4d$.

294. *Ответ:* 4 : 5.

295. *Решение.* Имеем две возможности расположения вершин параболы:



1) $x_в = a < -3$. Тогда наименьшее значение функции $y = x^2 - 4ax + 45$ достигается в точке $x = -3$.

Имеем $y(-3) = 9 + 12a + 45 = 9$, откуда $a = -\dfrac{15}{4}$;

2) $x_в \geq -3$. Тогда наименьшее значение функции на $[-3; +\infty)$ достигается при $x = a$. Получим $y(a) = a^2 - 4a^2 + 45 = 9$, $a^2 = 12$, откуда $a = 2\sqrt{3}$.

296. *Ответ:* 1 арбуз, 39 яблок, 60 слив.

297. *Ответ:* делится при $n = 2k$, $k \in N$.

Указание. Рассмотреть два случая: 1) $n = 2k$; 2) $n = 2k + 1$.

298. *Ответ:* 13.

299. *Ответ:* (32; –3), (32; 2).

Указание. Преобразовать уравнение к виду $x = 7 + \dfrac{50}{y^2-7}$, откуда $y^2 - 7 = \pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm25, \pm50$.

300. *Ответ:* 10 989.

301. *Указание.* Записать данное выражение в виде $27^{n+1} - 8^{n+1}$, откуда и следует требуемое.

302. *Решение.* Так как $a \neq 0$, $b \neq 0$, то умножив обе части данного неравенства на $a^3b^3 \neq 0$, получим $a^9b^3 + a^3b^9 \le a^{12} + b^{12}$, или $(a^3 - b^3)(a^9 - b^9) \ge 0$, откуда $(a^3 - b^3)^2(a^6 + a^3b^3 + b^6) \ge 0$ — верно при любых $a \neq 0$, $b \neq 0$. Значит, верно и равносильное ему исходное неравенство.

303. *Указание.* Умножить и разделить левую часть тождества на $2\sin\alpha$. Далее применить формулу синуса двойного угла.

304. *Решение.* $13! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 \cdot (12 \cdot 13) = 11! \cdot 12 \cdot 13$;

$13! - 11! = 11!(12 \cdot 13 - 1) = 11! \cdot 5 \cdot 31$ — кратно 31, ч. т. д.

305. *Решение.* Между корнями x_1, x_2 и x_3 данного уравнения существует зависимость

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

По условию задачи $x_1 + x_3 = 2x_2$, тогда, учитывая (1), имеем $2x_2 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, откуда $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$, ч. т. д.

306. *Решение.* Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b})$, $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{c})$, $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$.

Значит, $(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2) - 3(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - \frac{1}{3}((\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{b} - \vec{c})^2 + (\vec{c} - \vec{a})^2) = \frac{1}{3}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + 2\vec{b}\,\vec{c} + 2\vec{a}\,\vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$, ч. т. д.

307. *Решение.* $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = \frac{a(a-b-c)^2}{4a^2} + \frac{b(a-b-c)}{2a} + c = \frac{(a-b-c)^2 + 2b(a-b-c) + 4ac}{4a} = \frac{(a-b-c)(a-b+2b) + 4ac}{4a} = \frac{(a-c)^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{4a} = \frac{(a-b+c)(a+b+c)}{4a} = \frac{f(-1)\cdot f(1)}{4a} = 0$, ч. т. д.

10 класс

1. *Решение.* $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} = \sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} =$
$= \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3} = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Аналогично $\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Тогда значение выражения равно 1.

2. *Решение.* Пусть x_0 — общий корень уравнений, тогда $x_0^3 + mx_0 = -1$ и $x_0^4 + mx_0^2 = -1$.

Разделив почленно второе уравнение на первое, имеем $\dfrac{x_0^4+mx_0^2}{x_0^3+mx_0} = x_0 = 1$, тогда $1 + m \cdot 1 + 1 = 0$, $m=-2$.

Ответ: $m=-2$.

3. *Решение.* Пусть $\lg 2 = \dfrac{m}{n}$ — рациональное число, тогда $m = n \lg 2$, или $m = \lg 2^n$, откуда $10^m = 2^n$, что невозможно при целых m и n. Значит, $\lg 2$ — иррациональное число.

4. *Указание.* Показать, что $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Далее $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$, и т. д.

5. *Решение.* Заметим, что $4^7 + 7^{16} = 2^{14} + 7^{16} =$ $= 2^{14} + 2 \cdot 2^7 \cdot 7^8 + 7^{16} - 14^8 = (2^7 + 7^8)^2 - 14^8 =$ $= (2^7 + 7^8 + 14^4)(2^7 + 7^8 - 14^4)$ — составное число, ч. т. д.

6. *Решение.* В круг радиуса 10 нельзя поместить 400 кругов диаметра 1, не налегающих друг

Так как ab и $a + b$ делятся на c (по условию), то каждый множитель делится на c, значит, произведение делится на c^2.

15. *Ответ:* $x = 1$.

16. *Указание.* $13(x + y) = (9x + 4y) + (4x + 9y)$. Далее учесть, что $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

17. *Решение.* На продолжении BM за точку M возьмем точку D так, что $MD = CM$. Тогда ΔCDM правильный и $CD \parallel KM$, поэтому $BM : MK = BD : DC = (BM + CM) : CM$, т. е.

$$\frac{1}{MK} = \frac{1}{CM} + \frac{1}{BM}.$$

18. *Ответ:* $(1; 1)$, $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

19. *Ответ:* $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

20. *Решение.* Из условия $7a + 13b = 47$ имеем $a = \frac{1}{7}(47 - 13b)$, тогда исходное неравенство примет вид $20(\frac{1}{7}(47 - 13b)^2 + 13b^2) \geq 2209$, откуда имеем $5200b^2 - 2440b + 28\,717 \geq 0$, или после упрощения получим $(20b - 47)^2 \geq 0$, верно при любом b, а значит, верно и исходное неравенство, ч. т. д.

21. *Указание.* Прологарифмировать обе части уравнения по основанию 10 (или по другому основанию).

22. *Ответ:* $(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

Указание. Умножить числитель и знаменатель на $x^4 - 1$.

23. *Решение.* Пусть $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2006}{2007} = A_1$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2007}{2008} = A_2$.

Так как $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$; ...; $\frac{2009}{2010} < \frac{2010}{2011}$, то $A_1^2 < A_1 \cdot A_2 = \frac{1}{2011}$.

Следовательно, $A_1 < \frac{1}{\sqrt{2011}} < \frac{1}{44}$, ч. т. д.

24. *Указание.* Из отношения $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ находим $a_1 = \frac{1}{2}d$.

25. *Ответ:* $\sqrt{5} - 2$.

26. *Ответ:* существует; $h = 12$, $c = 13$, $b = 14$, $a = 15$.

27. *Решение.* Так как $10 = 2 \cdot 5$, то количество нулей в числе $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot = 2010$ столько же, сколько раз 5 входит в разложение на простые множители этого числа. Каждое пятое число делится на 5, значит, чисел от 1 до 2010, делящихся на 5, будет 402, делящихся на 25 — 80, на 125 — 16, на 625 — 3. Значит, число 5 входит в разложение в $402 + 80 + 16 + 3 = 501$-й степени. Тогда в числе 2010! будет 501 нуль, и поскольку двойка входит в разложение в большей степени, чем 5, то последняя цифра четная.

Ответ: оканчивается 501 нулем, последняя цифра четная.

28. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Показать, что левая часть уравнения приводится к виду $(\sqrt{1+x})^3 - (\sqrt{1-x})^3$, и т. д.

29. *Ответ:* $x = 2$.

Указание. Записать уравнение в виде $\left(\frac{12}{13}\right)^x +$ $+ \left(\frac{5}{13}\right)^x = 1$. Далее учесть свойство монотонности функций.

30. *Ответ:* 6.

31. *Ответ:* (3; 1).

Указание. Разделить II уравнение на I, и т. д.

32. *Ответ:* 4 и 21.

33. *Указание.* Обозначить левую часть через x и возвести обе части полученного равенства в куб, использовать формулу $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Замечание. Можно решить иначе, выделив полный куб подкоренных выражений.

34. *Ответ:* (2; 1), (1; 2), (–2; 1), (1; –2).

Указание. Записать уравнения системы в виде

$x^4 + y^4 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$,

$x + y = xy + 1$. Далее подставить в I уравнение, затем замена $xy = a$, и т. д.

35. *Решение.* Так как $|\cos\alpha| \le 1$ при любом $\alpha \in R$, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos x = 1, \\ \cos 7x = 1;\end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\pi n, \\ x = \dfrac{2\pi k}{7},\end{cases}$$ откуда $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

36. *Указание.* $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Преобразовать уравнение к виду

$\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin 6x = 1$, равносильное двум системам.

37. *Ответ:* (4; 3; 9), (9; 3; 4).

Указание. Возвести I уравнение в квадрат и вычесть II.

38. *Решение.* Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, причем $a < b < c$. Так как по условию задачи стороны a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то

$$a + c = 2b. \qquad (1)$$

По теореме синусов $\dfrac{b}{\sin\angle B} = 2R$, откуда $b = 2R\sin\angle B$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r = \dfrac{abc}{4R}$, или $\dfrac{a+b+c}{2} \cdot r = \dfrac{abc}{4R}$, или, учитывая (1), имеем $\dfrac{3}{2}br = \dfrac{abc}{4R}$, откуда

$$ac = 6Rr. \qquad (2)$$

По теореме косинусов $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$, или $b^2 = (a + c)^2 - 2ac - 2ac\cos\angle B$,

$12Rr(1 + \cos\angle B) = 12R^2\sin^2\angle B$,

$2ac\,(1 + \cos\angle B) = 3b^2$.

Учитывая (2), находим $12Rr(1 + \cos\angle B) = 3b^2$, и, так как $b = 2R\sin\angle B$, то получим

$r(1 + \cos\angle B) = R\sin^2\angle B$, или

$r(1 + \cos\angle B) = R\,(1 - \cos\angle B)\,(1 + \cos\angle B)$.

Но $1 + \cos\angle B \neq 0$, так как $\angle B \neq 180°$, тогда

$r = R(1 - \cos\angle B)$, откуда $1 - \cos\angle B = \dfrac{r}{R}$.

По условию задачи $\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, откуда $\cos \angle B =$ $= \sqrt{3}/2$. Значит, $\angle B = 30°$.

Ответ: 30°.

39. *Решение.* Заметим, что при $2 + a = 0$, т. е. $a = -2$ уравнение обращается в линейное: $3x - 2 +$ $+ 5 = 0$, откуда $x = -1$. Пусть $a \neq -2$, тогда исходное уравнение является квадратным и, согласно теореме Виета и обратной к ней (при наличии пары корней x_1 и x_2), равносильно системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{a-1}{2+a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{a+5}{2+a}. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 + x_2 + x_1x_2 = \frac{a-1}{2+a} + \frac{a+5}{2+a} = 2$, или $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 3$. Если корни x_1 и x_2 — целые числа, то это означает, что пара чисел $(x_1 + 1;$ $x_2 + 1)$ совпадает либо с парой (1; 3), либо с парой (–1; –3), а пара $(x_1; x_2)$ — либо с (0; 2), либо с (–2; 4) соответственно, т. е. либо $\frac{a+5}{2+a} = 0 \cdot 2$, откуда $a = -5$, либо $\frac{a+5}{2+a} = (-2)\cdot(-4)$, или $\begin{cases} a+5 = 8(2+a), \\ 2+a \neq 0; \end{cases}$

$7a = -11$, $a = -\frac{11}{7}$.

Ответ: $-2; -5; -\frac{11}{7}$.

40. *Указание.* $\frac{x+y}{2} \geq \frac{a+b}{2}$, где $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \sqrt{ab}$. Далее возвести полученное неравенство в 4-ю степень, и т. д.

41. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$$\frac{x^3y^3+x^2+y^2}{xy^3+1} = \frac{1753}{193}, \text{ или}$$

$$\frac{x^2(xy^3+1)+y^2}{xy^3+1} = \frac{193\cdot 9+16}{193}.$$

Далее имеем $x^2 + \frac{y^2}{xy^3+1} = 9 + \frac{16}{193}$, или

$$x^2 + \frac{1}{xy+\frac{1}{y^2}} = 9 + \frac{1}{12+\frac{1}{16}}.$$

Известно, что всякое натуральное число можно представить в виде цепной дроби единственным образом. Тогда $x^2 = 9$, $xy = 12$, $y^2 = 16$, т. е. $x = 3$, $y = 4$.

Ответ: $x = 3$, $y = 4$.

42. *Решение.* Поскольку $\sqrt{|x|+4} > \sqrt{|x|}$ при любом x, то $a > 0$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{|x|+4} > \sqrt{|x|} + a$, или $|x| + 4 = |x| + a^2 + 2a\sqrt{|x|}$, $2a\sqrt{|x|} = 4 - a^2$, или

$$\sqrt{|x|} = \frac{4-a^2}{2a}. \qquad (1)$$

Заметим, что $4 - a^2 \geq 0$, $a^2 \leq 4$, откуда $-2 \leq a \leq 2$. Так как $a > 0$, то $0 < a \leq 2$.

Из (1) $\Rightarrow |x| = \left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$, откуда $x_{1,2} = \pm\left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$.

Ответ: при $0 < a \le 2$, $x_{1,2} = \pm\left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$; при остальных a решений нет.

43. *Ответ:* $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{\lg 3}(\lg 2 + \lg 3)$.

44. *Решение.* Пусть $\overline{xyzt} = 1000x + 100y + 10z + t$.

По условию $x = z$, $y = t$, тогда

$1000x + 100y + 10z + t = 1000x + 100y + 10x + y = 1010x + 101y = 101 \cdot (10x + y)$ — кратно 101.

45. *Ответ:* при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup [2; +\infty)$.

46. *Ответ:* $x = \dfrac{\lg 3 - \lg 2}{\lg(1+\sqrt{5}) - \lg 2}$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $\sqrt[x]{6}$.

47. *Решение.* Рассмотрим отношение

$$\frac{101^{99}}{100^{100}} = \frac{101^{100} \cdot 101^{-1}}{100^{100}} = \left(\frac{101}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} =$$
$$= \left(\frac{100+1}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} <$$
$$< 3 \cdot 101^{-1} < 1 \Rightarrow 101^{99} < 100^{100}, \text{ т. е. } 100^{100} > 101^{99}.$$

Замечание. Здесь мы использовали тот факт, что $2 \le \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < 3$.

48. *Указание.* $\lg a + \log_a 10 = \lg a + \dfrac{1}{\lg a}$, и т. д.

49. *Ответ:* $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

50. *Решение.* Если искомая последовательность существует, то ее можно представить в виде

$$a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + k) = 100. \qquad (1)$$

Левая часть (1) представляет собой возрастающую арифметическую прогрессию, где

$$a_1 = a,\ \ a_n = a + k;\ n = k + 1,\ \ S_n = 100.$$

Замечание. Из $a_n = a + k$ получаем $n = k + 1$. По формуле суммы n членов арифметической прогрессии имеем

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = S_n, \text{ или } \frac{a + a + k}{2} \cdot (n + 1) = 100,$$

откуда $(2a + k)(k + 1) = 200$. (2)

Заметим, что $(2a + k) - (k + 1) = 2a - 1$ — нечетно, следовательно, один из множителей четен, а другой нечетен.

Кроме того, $2a + k > k + 1$ и для числа 200 получим разложение, удовлетворяющее (2):

$200 = 200 \cdot 1 = 40 \cdot 5 = 25 \cdot 8$.

Следовательно, имеем

1) $\begin{cases} 2a + k = 200, \\ k + 1 = 1, \end{cases}$ откуда $k = 0$ — не удовлетворяет, так как получим одно число;

2) $\begin{cases} 2a + k = 40, \\ k + 1 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 18, \\ k = 4, \end{cases}$ откуда получим последовательность $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$;

на друга, так как сумма их площадей $400 \cdot \frac{\pi}{4}$ равна площади круга 100π.

7. *Решение.*

I способ

Пусть $13 = a$, тогда $x^2 - a = \sqrt{x+a}$, или $x^4 - 2ax^2 + a^2 = x + a$, $a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0$, откуда $a_{1,2} = \dfrac{(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2}$, $a_1 = x^2 + x + 1$, $a_2 = x^2 - x$. Значит, $x^2 + x + 1 = 13$, $x^2 - x = 13$.

Из I уравнения находим $x_1 = -4$, $x_2 = 3$ (не удовлетворяет, так как $x^2 - 13 \geq 0$); из II уравнения $x_3 = \dfrac{1+\sqrt{53}}{2}$, $x_4 = \dfrac{1-\sqrt{53}}{2}$ (не удовлетворяет).

Ответ: -4; $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{53})$.

II способ

$x^4 - 26x^2 + 169 - x - 13 = 0$, или
$(x^2 - 12{,}5)^2 - (x + 0{,}5)^2 = 0$, или
$(x^2 - x - 13)(x^2 + x - 12) = 0$, и т. д.

8. *Ответ:* 4.

9. *Указание.* Соединить центр шара с вершинами многогранника и найти сумму объемов полученных пирамид.

10. *Ответ:* ± 2; $\pm 2\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{3}$.

Указание. $\sqrt[3]{4-x^2} = a$, $\sqrt{x^2-3} = b$, $b \geq 0$. Далее решить систему $\begin{cases} a^3 + b^3 = 1, \\ a + b = 1. \end{cases}$

II способ

Замена $\sqrt{x^2-3}=y$, $4-x^2=1-y^2$, $\sqrt[3]{1-y^2}=1-y$, или $y^3-4y^2+3y=0$, и т. д.

11. *Решение.* $x^6-y^6=(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+$
$+x^2y^3+xy^4+y^5)=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=$
$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$,
откуда $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5=$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$.

12. *Ответ:* $x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$.

Указание. Учесть, что $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=$
$=-2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Далее решить уравнение

$$4\cos^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-5=0$$

как квадратное относительно $\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, и т. д.

13. *Ответ:* 21.

Указание. Согласно условию, имеем

$$10x+y+x^3+y^3=10y+x,$$
$$\text{или } x^3+y^3=9(y-x).$$

Заметим, что ни одна из цифр не превышает 4. Единственное число $21=12+1^3+2^3$.

14. *Решение.* $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)(a^4-$
$-a^2b^2+b^4)=(a^2+b^2)((a^2+b^2)^2-3a^2b^2)=((a+b)^2-$
$-2ab)(a^2+b^2-\sqrt{3}ab)(a^2+b^2+\sqrt{3}ab)=((a+b)^2-$
$-2ab)((a+b)^2-(2+\sqrt{3})ab)((a+b)^2-(2-\sqrt{3})ab)$.

3) $\begin{cases} 2a+k=25, \\ k+1=8; \end{cases}$ $\begin{cases} a=9, \\ k=7, \end{cases}$

т. е. $9 + 10 + 11 + \ldots + 16 = 100$.

Таким образом, существуют две последовательности, удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: а) $18 + 19 + \ldots + 22 = 100$; б) $9 + 10 + \ldots + 16 = 100$.

51. *Указание.* Перенести xyz в каждом уравнении в правую часть и перемножить полученные уравнения.

52. *Ответ:* $S_n = \dfrac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)x^{2n}} + (2n-1)$.

Указание. Раскрыть скобки и сгруппировать члены.

53. *Ответ:* 42 857 и 85 714.

Указание. Если X — искомое пятизначное число и k — приписываемое число, то получим $\dfrac{10X+k}{X+k\cdot 100000} = 3$, откуда $X = k \cdot 42\,857$, где $0 < k \le 9$, и т. д.

54. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 2$.

55. *Ответ:* 13^{13}.

Указание. $12 = 13 - 1$; $14 = 13 + 1$.

Далее учесть, что $a^n - 1 = (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1)$.

56. *Решение.* Пусть r_1 и r_2 — соответственно радиусы нижнего и верхнего оснований усеченного конуса, R — радиус шара, α — искомый угол между образующей и плоскостью основания.

Согласно условию имеем

$$2r_1 + 2r_2 = 5R. \qquad (1)$$

Но $r_1 = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $r_2 = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, тогда (1) примет вид

$$2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 5R, \text{ или}$$

$$2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 2 = 0,$$

откуда находим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$ или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Так как $2\operatorname{arctg} 2 > \frac{\pi}{2}$, то значение $\alpha = 2\operatorname{arctg} 2$ не подходит. Значит, $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

57. *Ответ:* (3; 2).

58. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
Указание. Записать уравнение в виде
$(x^x - x^2)(x^x - 1)$.

59. *Ответ:* 1.

Указание. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения, тогда $x_1 + x_2 = \sqrt{85}/4$, $x_1x_2 = 21/16$. Пусть $x_1 > x_2$, тогда $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2)$.

$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$, и т. д.

60. *Ответ:* $x = -\frac{1457}{728}$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $\sqrt[3]{x+2} \neq 0$ и ввести замену $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x+2}} = y$.

Замечание. Уравнение можно решить иначе.

61. *Ответ:* $x^2 + x + 1$.

62. *Ответ:* $(-2; -3; -4)$, $(4; 3; 4)$.

Указание. Замена $\frac{x+y}{5} = \frac{x+z}{6} = \frac{y+z}{7} = t$, тогда II уравнение системы примет вид $25t^2 + 36t^2 + 49t^2 = 110$, откуда $t_{1,2} = \pm 1$, и т. д.

63. *Указание.* Преобразовать уравнение к виду $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$.

Далее замена $\sin x + \cos x = y$.

Замечание. Возможны и другие способы решения.

64. *Ответ:* $x = 1$.

Указание. Записать уравнение в виде $\left(\frac{2013}{2012}\right)^x - 1 = \left(\frac{1}{2012}\right)^x$ и использовать свойство монотонности функции.

65. *Ответ:* 832.

66. *Ответ:* если $a < -5$, то корней нет;
если $a = -5$, то $x = 3$;
если $-5 < a \le -4$, то $x = 3 \pm \sqrt{5+a}$;
если $a > -4$, то $x = 3 + \sqrt{5+a}$.

67. *Решение.* Заметим, что $27^{2010} < 30^{2010} = 9^{1005} \cdot 10^{2010} < 10^{1005} \cdot 10^{2010} = 10^{3015}$.

10^{3015} — наименьшее целое число, имеющее 3016 цифр, т. е. 27^{2010} имеет меньше 3016 цифр.

68. *Ответ:* $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

Указание. $(x^2 + x)^2 = |x^2 + x|^2$.

Обозначив $|x^2 + x| = t$, где $t > 0$, получим $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -2$ — не подходит, и т. д.

69. *Указание.* Возвести в куб обе части уравнения и заменить $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = y$, после чего получим $x + 3xy + x^2 = y^2$.

70. *Указание.* Учесть, что $a + c = 2b$, тогда, подставив $b = \frac{1}{2}(a + c)$ в данное равенство, получим тождество.

71. *Ответ:* $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

72. *Решение.* Общий метод: положить $20 + 14\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^3$. Далее решить систему уравнений

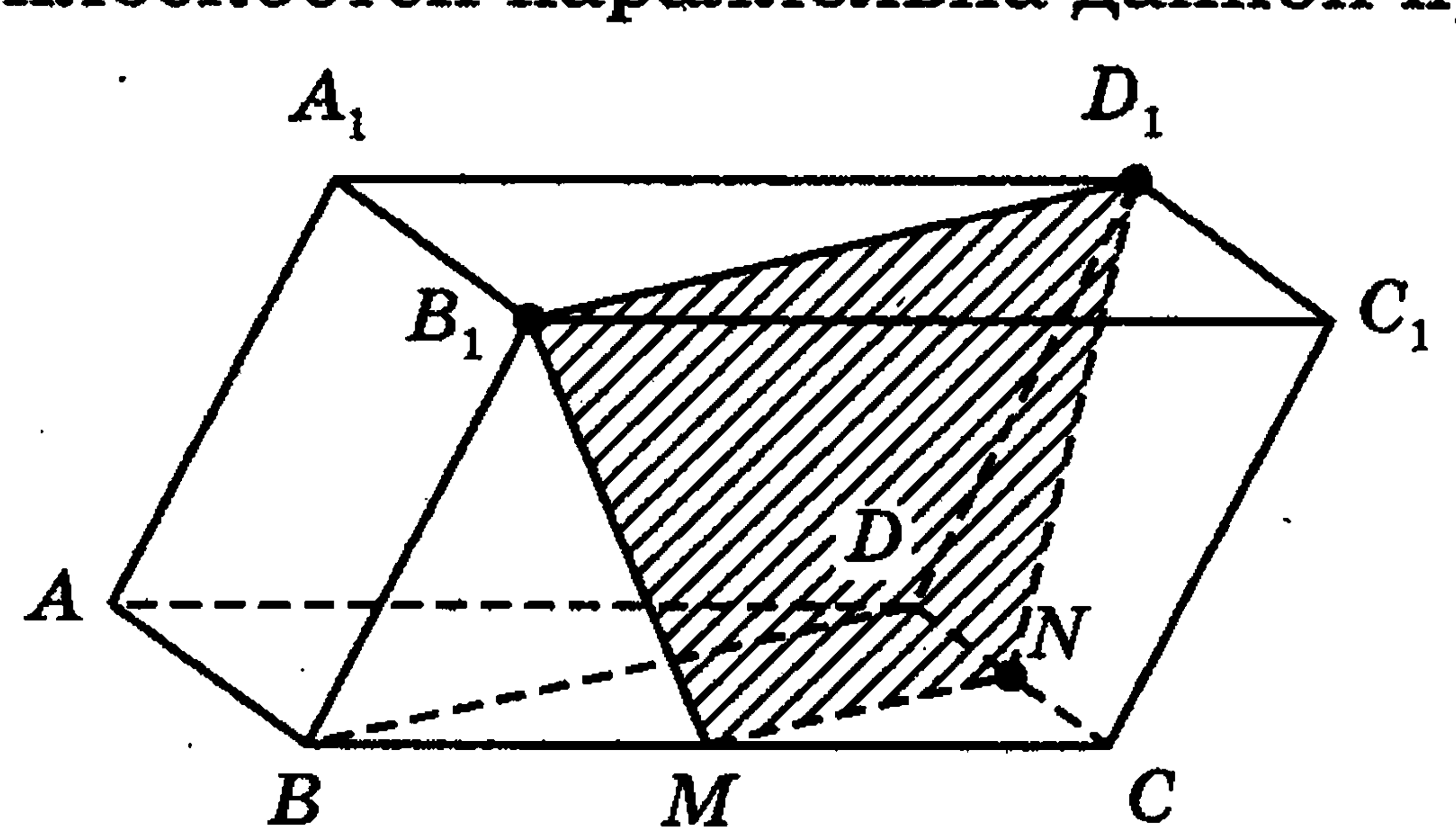
$$\begin{cases} a^3 + 6ab^2 = 20, \\ 3a^2b + 2b^3 = 14, \end{cases}$$

откуда находим $a = 2$, $b = 1$.

Тогда получим $a + b\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$ и $a - b\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$. Значит, $(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$, ч. т. д.

73. *Указание.* Использовать основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

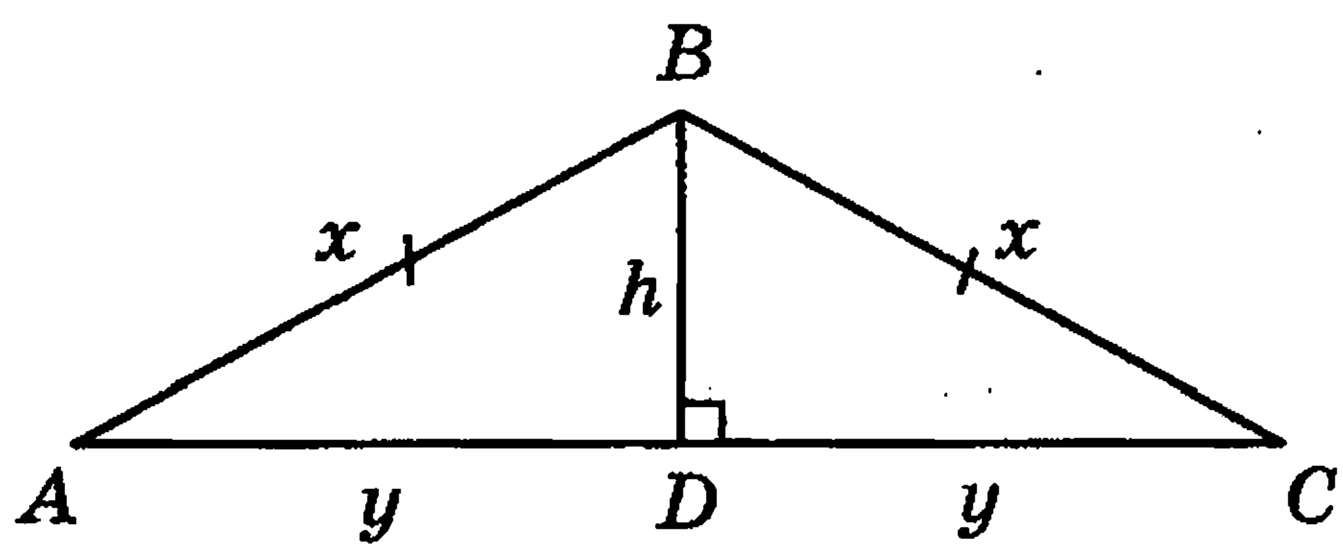
74. *Решение.* По условию задачи точка N — середина DC. Известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



Значит, плоскость сечения пересечет основания $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ по параллельным отрезкам. Проведем $BD \parallel B_1D_1$. Из точки N проводим $MN \parallel BD$, значит, $MN \parallel B_1D_1$. Соединим точки B_1 и M, D_1 и N, тогда B_1D_1NM — искомое сечение. Таким образом, в четырехугольнике B_1D_1NM имеем $B_1D_1 \parallel MN$, значит, B_1D_1NM — трапеция (по определению).

75. *Ответ:* (0; 0), (3; 1).

76. *Решение.* Пусть x — длина боковой стороны, $2y$ — основания, h — высота равнобедренного треугольника. Так как $\angle ABC = 120°$, то $\angle A = \angle C = 30°$.



$$S_{\Delta ABC} = pr = (x + y)r. \qquad (1)$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{x^2y}{2R}$. (2)

Сравнивая (1) и (2), имеем $(x + y)r = \dfrac{x^2y}{2R}$. (3)

По теореме синусов $\dfrac{x}{\sin\angle A} = 2R$, откуда $x = R$,

тогда равенство (3) примет вид $(R + y)r = \dfrac{R^2y}{2R}$,

или $(R + y)y = \dfrac{1}{2}Ry$. (4)

Из ΔABD по теореме Пифагора $x^2 - y^2 = h^2 = \frac{1}{4}x^2$, или $\frac{3}{4}x^2 = y^2$, т. е. $y = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, тогда (4) запишется в виде $2\left(R + \frac{1}{2}R\sqrt{3}\right)r = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, или

$$2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Значит, $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$.

77. *Ответ:* $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}; \mp\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$, $(\pm1; \pm2)$.

Указание. Заменой $x = ty$ данная система приводится к виду $\begin{cases} y^2(3t^2 + 2t + 1) = 11, \\ y^2(t^2 + 2t + 3) = 17, \end{cases}$ и т. д.

78. *Указание.* Возвести первое уравнение в квадрат и заменить $x^4 + y^4$ через 97. Возможны и другие способы решения.

79. *Ответ:* $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Указание. Сложить почленно левые и правые части.

80. *Решение.* Пусть x и y — соответственно цифры сотен и десятков, тогда искомое число имеет вид $100x + 10y + 5$. Если цифру 5 перенести на I место, то получим число вида $500 + 10x + y$. Согласно условию получим уравнение

$100x + 10y + 5 - (500 + 10x + y) = \overline{aaa}$, где $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a$ — трехзначное число с одинаковыми цифрами, тогда

$$100x + 10y + 5 - 500 - 10x - y = 111a,$$

$$\text{или } 3(10x + y - 55) = 37a. \qquad (1)$$

Так как число 37 простое, то a кратно 3, т. е. $a = 3k$, тогда $1 \le 3k \le 9$, откуда $k = 1, 2, 3$ ($k \in N$). Соотношение (1) примет вид

$$10x + y - 55 = 37k.$$

Имеем 3 возможности:

1. Если $k = 1$, то $10x + y = 92$, что выполняется лишь при $y = 2$, $x = 9$, так как $1 \le x \le 9$, $1 \le y \le 9$. Искомое число 925.

2. Если $k = 2$, то $10x + y = 129$ не имеет решений при указанных ограничениях.

3. Если $k = 3$, то $10x + y = 166$ также не имеет решений. Итак, 925 — единственное число.

Ответ: 925.

81. *Ответ:* (1; 3; 5).

Указание. Записать уравнение в виде

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}.$$

82. *Решение.* Пусть $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} a(a^2 - 1) = b(b^2 + 5), & (1) \\ a^2 = b^2 + 3. & (2) \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат, учитывая уравнение (2):

$$\begin{cases} a^2(a^2 - 1)^2 = b^2(b^2 + 5)^2, \\ a^2 = b^2 + 3, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$(b^2+3)(b^2+2)^2=b^2(b^2+5)^2. \qquad (3)$$

Пусть $b^2=t$, где $t\geq 0$, тогда получим

$$(t+3)(t+2)^2=t(t+5)^2 \text{ или}$$

$$(t+3)(t^2+4t+4)=t(t^2+10t+25).$$

После упрощения получим $t^2+3t-4=0$, откуда $t_1=-4$, $t_2=1$. Так как $t\geq 0$, то $t=1$, тогда $b^2=1$, $a^2=b^2+3=4$, значит, $x=a^2=4$; $y=b^2=1$.

Ответ: (4; 1).

83. *Ответ:* $x=0$.

Указание. Умножить обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части уравнения. Полученное уравнение решить с данным как систему способом сложения, и т. д.

84. *Указание.* Преобразовать уравнение к виду $(x-2y)^2+(y-2x)^2=5=1^2+2^2$, и т. д.

85. *Решение.* Пусть $\sqrt[3]{\frac{17}{3}x-\frac{10}{3}}=y$, тогда $\frac{17}{3}x-$ $-\frac{10}{3}=y^3$, или $3y^3+10=17x$. (1)

При этом исходное уравнение запишется в виде

$$3x^3+10=17y. \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), имеем систему уравнений

$\begin{cases}3x^3+10=17y,\\3y^3+10=17x,\end{cases}$ тогда $3x^3-3y^3=17y-17x$, или

$3(x-y)(x^2+xy+y^2)+17(x-y)=0$,

$(x-y)(3x^2+3xy+3y^2+17)=0$, откуда $x-y=0$, или $3x^2+3xy+3y^2+17=0$.

Так как $3x^2+3y^2\geq|3xy|$,

то $3x^2+3xy+3y^2+17>0$.

Если $x-y=0$, то $x=y$, тогда уравнение (2) примет вид $3x^3-17x+10=0$, или $3x(x^2-4)-$

$-5(x-2)=0$, $(x-2)(3x^2+6x-5)=0$, откуда $x_1=2$, или $3x^2+6x-5=0$, $D/4=9+15=24>0$,

$$x_{2,3}=\frac{-3\pm2\sqrt{6}}{3}=-1\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

86. *Указание.* Разложить заданное число на множители. Тогда получим $13^3\cdot3\cdot61$ — делится на 61.

87. *Решение.* Имеем $5(x+y)^3+54(x+y)^2-108xy$, откуда $xy=\dfrac{(x+y)^2(54-(x+y))}{108}$.

Так как $x>0$, $y>0$, то $54-5(x+y)>0$, или $x+y<10{,}8$, т. е. $x+y\le10$.

Следовательно, $x+y=2, 3, 4, \dots, 10$. Условию задачи удовлетворяет лишь $x+y=6$, тогда $xy=8$, т. е. получим 2 пары решений: (2; 4), (4; 2).

88. *Решение.* Выделим полные квадраты в каждом уравнении системы

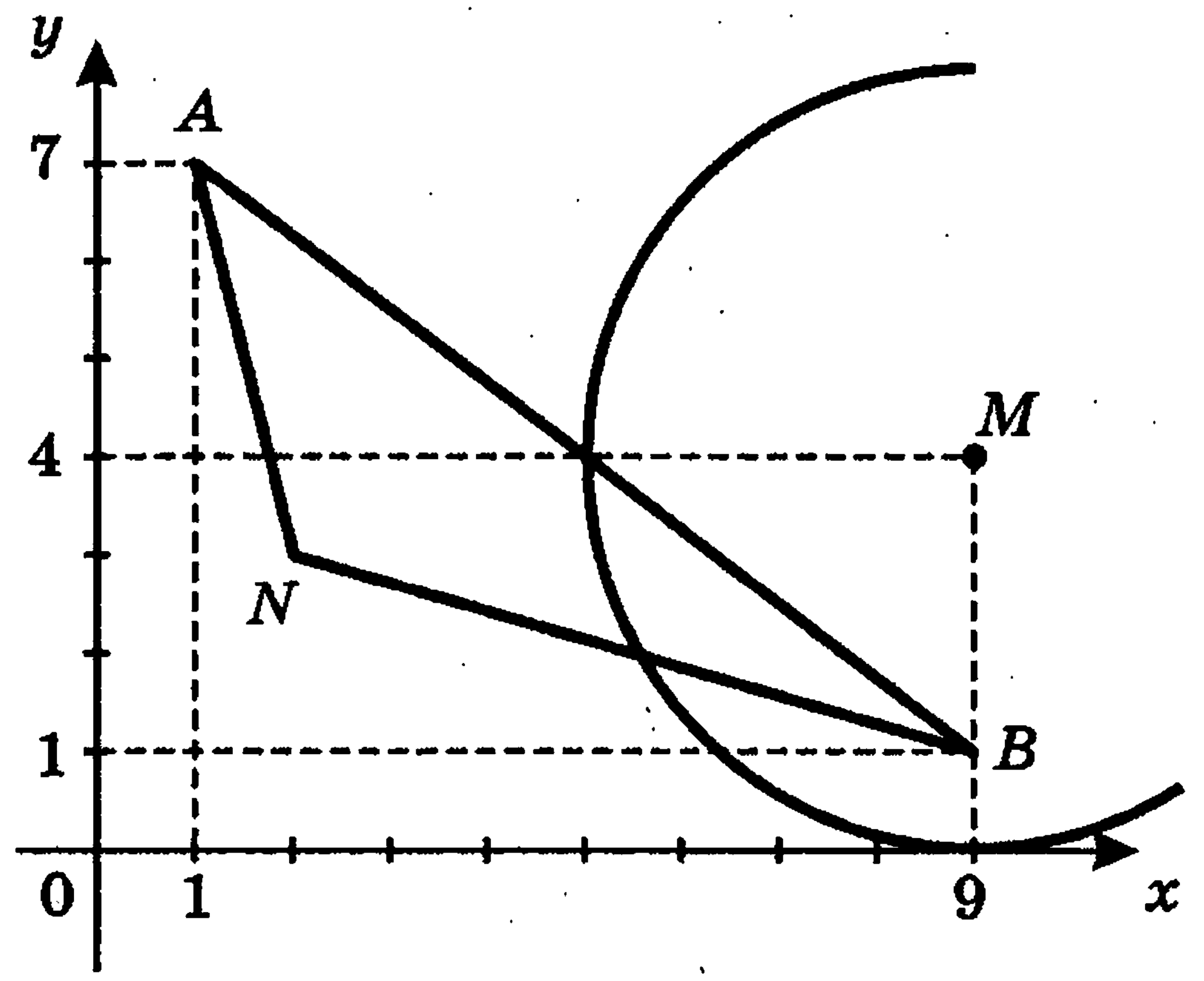
$$\begin{cases}(x-9)^2+(y-4)^2=16, & (1)\\ \sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}+\sqrt{(x-9)^2+(y-1)^2}=10. & (2)\end{cases}$$

Уравнение (1) есть уравнение окружности радиуса $r=4$ с центром в точке $M(9; 4)$.

Пусть $N(x; y)$ — произвольная точка координатной плоскости.

Тогда $d_1=\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$ — расстояние от точки N до точки $A(1; 7)$,

$d_2=\sqrt{(x-9)^2+(y-1)^2}$ — до точки $D(9; 1)$.



Следовательно, уравнению (2) удовлетворяют координаты тех и только тех точек плоскости, при которых выполняется равенство $d_1 + d_2 = 10$.

Заметим, что $|AB| = \sqrt{(9-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{100} = 10.$

Значит, точка N находится на отрезке AB. Уравнение прямой AB имеет вид $y = kx + b$. Для нахождения значений k и b учтем, что точки A и B принадлежат прямой, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} k+b=7, \\ 9k+b=1, \end{cases}$ откуда находим $y = -\frac{3}{4}x + \frac{31}{4}$.

В этом случае уравнение (1) примет вид

$$(x-9)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{31}{4} - 4\right) = 16,$$

или после упрощений получим $25x^2 - 378x + 1265 = 0$, откуда $x_1 = 5$, $x_2 = 10{,}12$ — не подходит, так как точка с такой абсциссой не принадлежит отрезку AB.

Если $x = 5$, то $y = -\frac{3}{4} \cdot 5 + \frac{31}{4} = 4$.

Точка $N(5; 4) \in AB$, значит, пара $(5; 4)$ — решение исходной системы уравнений.

Ответ: $(5; 4)$.

89. *Решение.* Поскольку $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2$, то $y = (x-1)^3 + 2$. График этой функции может быть получен из графика функции $y = x^3$ параллельным переносом. Так как у графика функции $y = x^3$ начало координат $(0; 0)$ — центр симметрии, то у исходного графика функции центром симметрии будет точка $(1; 2)$.

90. *Указание.* Записать уравнение в виде

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y) + xy = 13.$$

Далее заменой $x + y = z$ привести к виду $xy = \dfrac{z^3-13}{3z-1}$, после чего выделить целую часть. Возможны и другие способы решений.

91. *Решение.*

I способ

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot AC \sin\angle C = 6$. Так как $AB < AC$, то $\angle C < \angle B$, т. е. $\angle C = 90°$, тогда $\cos\angle C > 0$. Но $\cos\angle C = \sqrt{1-\sin^2\angle C} = \dfrac{4}{5}$. По теореме косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle C$, откуда $AB = 3$. Известно, что $r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$, где r — радиус вписанной окружности, $p = \dfrac{1}{2}(AB + BC + AC) = 6$.

Значит, $r = \dfrac{6}{6} = 1$.

Ответ: 1.

II способ

Так как $AB = 3$ и $3^2 + 4^2 = 5^2$, то ΔABC прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), где $\angle B = 90°$.

Тогда $r = \dfrac{1}{2}(AB + BC - AC) = 1$.

92. *Ответ:* $16\sqrt{2}$ дм^2.

93. *Решение.* Запишем уравнение в виде
$5^{\log_3(x-1)} - 1 = 1 + 3^{\log_5(x+1)}$, или
$5^{\log_3(x-1)} + 3^{\log_3(x-1)} = 5^{\log_5(x+1)} + 3^{\log_5(x+1)}$, откуда, пользуясь монотонностью функции $5^t + 3^t$, получим

$$\log_3(x-1) = \log_5(x+1).$$

Пусть $\log_3(x-1) = y$, тогда $x - 1 = 3^y$ и $\log_5(x+1) = y$, откуда $5^y = x + 1$.

Значит, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^y + \dfrac{2}{5^y} = 1$.

Поскольку левая часть полученного уравнения — убывающая функция, то $y = 1$ — единственный корень, тогда $x = 3^y + 1 = 4$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 4$.

94. *Ответ:* $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Указание. Показать, что ΔABC равнобедренный. Далее применить теорему косинусов в ΔABE и использовать подобие ΔBEC и ΔAED.

95. *Решение.*

I способ (выделение в левой части полного квадрата)

$(4x - 3\sqrt{x+16})^2 = 0$, или $4x = 3\sqrt{x+13}$.

После возведения обеих частей в квадрат получим уравнение $16x^2 - 9x - 117 = 0$, откуда находим $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{78}{32} < 0$ — не подходит, так как $x > 0$ и $16x^2 + 9x + 117 > 0$ ($D < 0$, $a = 16 > 0$).

Ответ: $x = 3$.

II способ (замена переменной)

$x\sqrt{x+13} \neq 0$, тогда

$16 \cdot \frac{x}{\sqrt{x+13}} + 9 \cdot \frac{\sqrt{x+13}}{x} - 24 = 0.$

Далее замена $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = y$, где $x > 0$, $y > 0$, и т. д.

III способ (приведение к однородному)

Пусть $\sqrt{x+13} = y$, тогда $9x + 117 = 9y^2$.

Получим уравнение $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$, или $(4x - 3y)^2 = 0$, и т. д.

96. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде

$$\sin 9x = 2(1 - \cos 6x). \qquad (1)$$

Так как $1 - \cos 6x = 2\sin^2 3x$, то уравнение (1) примет вид

$$\sin 9x = 4\sin^2 3x. \qquad (2)$$

Вычтем из обеих частей (2) $\sin 3x$:

$\sin 9x - \sin 3x = \sin 3x\,(4\sin 3x - 1)$, или

$2\sin 3x \cos 6x = \sin 3x\,(4\sin 3x - 1)$.

Отсюда имеем

1) $\sin 3x = 0$; $3x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

2) $2\cos 6x - 4\sin 3x + 1 = 0$.

Так как $\cos 6x = 1 - 2\sin^2 3x$,
то $2(1 - 2\sin^2 3x) - 4\sin 3x + 1 = 0$, или
$4\sin^2 3x + 4\sin 3x - 3 = 0$, откуда находим
$\sin 3x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;
$\sin 3x = -1{,}5$ — нет корней.

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$; $(-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

II способ

Пусть $3x = y$, тогда получим $\sin 3y + 2\cos 2y = 2$. Так как $\sin 3y = 3\sin y - 4\sin^3 y$ и $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$, то получим $3\sin y - 4\sin^3 y + 2(1 - 2\sin^2 y) = 2$, или $\sin y \cdot (3 - 4\sin^2 y - 4\sin y) = 0$, откуда:

1) $\sin y = 0$, $y = \pi n$, т. е. $3x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

2) $3 - 4\sin^2 y - 4\sin y = 0$, или
$4\sin^2 y + 4\sin y - 3 = 0$, откуда $\sin y = -1{,}5$ — нет корней, $\sin y = \frac{1}{2}$.

Если $\sin y = \frac{1}{2}$, то $y = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, т. е.

$3x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, откуда $x = (-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

III способ

Левая часть уравнения не превосходит 2 и равна 2, если $\begin{cases}\sin 9x = 0,\\ \cos 6x = 1,\end{cases}$ и т. д.

97. *Указание.* Предварительно показать, что
$2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$ и
$10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)$.

98. *Указание.* Учесть, что $x - 7 > 0 \Rightarrow x - 4 > 0$ и $x - 3 > 0$, тогда $x - 4 + x - 3 = x - 7$, откуда $x = 0$ — не подходит, так как $x > 7$. Значит, исходное уравнение не имеет корней.

99. *Указание.* Решить заменой $\sqrt{x^2+1} = y$, $y > 0$.

Замечание. Уравнение можно решить заменой $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

100. *Решение.* Заметим, что число n в последовательности занимает подряд n мест. Следовательно, перед первым числом $(n + 1)$ стоит $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$ чисел. Значит, нам надо найти такое n, что $\frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n - 1) < 2010 \leq \frac{1+n}{2} \cdot n$, откуда подбором находим $n = 63$.

Ответ: 63.

101. *Решение.* Пусть четырехзначное число имеет вид $\overline{abcd}$. По условию $13 \cdot \overline{abcd}$ — точный куб, тогда $13 \cdot \overline{abcd}$ имеет вид $(13k)^3$.

Значит, $\overline{abcd} = 13^2 \cdot k^3$, т. е. $\overline{abcd}$ кратно $13^2 = 169$. Но $1000 : 169 = 5{,}9\ldots > 5$, $9999 : 169 = 59{,}1\ldots < 60$, т. е. $5 < k < 60$.

Нетрудно заметить, что между числами 5 и 60 находятся лишь два числа – 8 и 27, являющиеся точными кубами. Следовательно, имеем две возможности:

1) $169 \cdot 8 = 1352$; 2) $169 \cdot 27 = 4563$.

Действительно, $1352 \cdot 13 = 13 \cdot 13^2 \cdot 2^3 = 26^3 = 17\,576$; $4563 \cdot 13 = 13 \cdot 13^2 \cdot 3^3 = 39^3 = 59\,319$.

102. *Решение.* Из условия следует, что $\sin x + \frac{1}{\sin x} > 0$, откуда $\sin x > 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin x} - \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right)^2 + 1 \geq 1,$$

$|\cos ax| \leq 1$.

Тогда равенство возможно тогда и только тогда, если $\begin{cases} \sin x = 1, \\ |\cos x| = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + +2\pi n, \\ ax = \pi k, \end{cases}$ откуда

$a = \frac{\pi k}{x} = \frac{2k}{1+4n}$, где $n, k \in Z$.

Ответ: $a = \frac{2k}{1+4n}$, $n, k \in Z$.

103. *Ответ:* 1) $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$; 2) $x = 8$, $y = 6$, $z = 10$.

Указание. Если x, y — катеты, z — гипотенуза, то согласно условию $\frac{1}{2}xy = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ и т. д.

104. *Ответ:* 61.

Указание. Использовать теорему Виета и формулу $x_1^5 - x_2^5 = (x_1 - x_2)(x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_2^4)$.

105. *Ответ:* $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-3}{6} + \pi n$, $a \in [-3; 9]$.

Указание. Использовать формулу $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Далее учесть, что $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и $|\cos 2x| \leq 1$.

106. *Ответ:* корней нет.

Указание. $x - 13 = (13 + x^2)^2$, и т. д.

107. *Ответ:* 15.

108. *Ответ:* $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Указание. Привести уравнение к виду

$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin 6x = 1.$

Полученное уравнение равносильно двум системам

1) $\begin{cases}\sin 6x = 1,\\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin 6x = -1,\\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1,\end{cases}$ и т. д.

109. *Ответ:* 75°.

Указание. Применить теоремы синусов и косинусов.

110. *Ответ:* $18\pi(2 - \sqrt{3})$ дм^2.

111. *Указание.* 120 см^2. Поставить пирамиду на одну из боковых граней.

112. *Ответ:* $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Указание. Учесть, что $|\sin x| \le 1$, тогда $\sin x = 1$, $\sin^7 x = 1$; $-\sin 7x = 1$, и т. д.

113. *Ответ:* 247; 364; 481; 715; 832.

114. *Решение.* Пусть $f(x) = x^2 - x + a$; $g(x) = x^3 + x + 90$. Тогда $f(0) = a$; $f(1) = a$; $g(0) = 90$; $g(1) = 92$. Значит, НОД (90; 92), т. е. 2 должен делиться на a. Кроме того, $f(-1) = a + 2$; $g(-1) = 88$, поэтому a не равно ни 1, ни -2; $f(-2) = a + 6$; $g(-2) = -8104$,

поэтому $a \neq -1$. Следовательно, $a = 2$ и $\dfrac{x^{13}+x+90}{x^2-x+2} =$
$= x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 17x^3 -$
$- 11x^2 + 23x + 45$.

115. *Ответ:* $x = 2$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $(x-1)^2 \neq 0$. Далее замена $\dfrac{x^2}{x-1} = y$, и т. д.

116. *Ответ:* 60°.

Указание. Использовать формулу площади треугольника $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\angle A$ и теорему косинусов.

117. *Решение.* $T = \dfrac{2\pi k}{d}$, где $d =$ НОД (4; 2; 6) = 2, $k =$ НОК (15; 21; 35) = 105.

Следовательно, $T = \dfrac{2\pi \cdot 105}{2} = 105\pi$.

Ответ: 105π.

118. *Ответ:* 28 см.

Указание. $r = \dfrac{S_1}{p_1} = \dfrac{S_2}{p_2}$, где

$S_1 = \sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-b)(p_1-c)}$,

$S_2 = \sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-x)}$,

где x — неизвестная сторона второго треугольника, $p_1 = 34$, $p_2 = \dfrac{42+x}{2}$.

Примечание автора. Редким примером «тупоугольных близнецов» служат треугольники со сторонами, равными соответственно 97, 169, 122 и 97, 169, 228. У каждого из них $r = 30$ (см. № 167 *Тригг Ч.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975).

Представляет интерес нахождение двух треугольников подобного вида, у которых равны радиусы описанной окружности.

119. *Ответ:* $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

Указание. Записать уравнение в виде $x - \sqrt{x-3} = \sqrt[4]{x-3}\,(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3})$. Далее разложить левую часть уравнения на множители.

120. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt[3]{x+45} = 1 + \sqrt[3]{x-16}. \qquad (1)$$

Возведем обе части уравнения (1) в куб:

$x + 45 = 1 + 3\sqrt[3]{x-16} + 3\sqrt[3]{(x-16)^2} + x - 16$, или

$$\sqrt[3]{(x-16)^2} + \sqrt[3]{x-16} - 20 = 0. \qquad (2)$$

Заменой $\sqrt[3]{x-16} = t$ уравнение (2) приводится к виду $t^2 + t - 20 = 0$, корни которого $t_1 = 4$, $t_2 = -5$. Если $t = 4$, то $\sqrt[3]{x-16} = 4$, $x - 16 = 64$, $x_1 = 80$; если $t = -5$, то $\sqrt[3]{x-16} = -5$, $x - 16 = -125$, $x_2 = -109$.

Ответ: $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

II способ

Возведем обе части уравнения в куб, используя формулу $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$. Тогда получим $x + 45 - (x - 16) - 3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}\,(\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16}) = 1$, или $60 - 3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)} \cdot 1 = 0$, $\sqrt[3]{(x+45)(x-16)} = 20$; $(x + 45)(x - 16) = 8000$, откуда находим $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

III способ

Пусть $x + 45 = a^3$, $x - 16 = b^3$, тогда

$$a^3 - b^3 = 61. \qquad (1)$$

Кроме того, $a - b = 1$. (2)

Уравнения (1) и (2) решаем как систему.

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 61, \\ a - b = 1, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} a = 5, \\ b = 4, \end{cases} \text{или} \begin{cases} a = -4, \\ b = -5. \end{cases}$$

Учитывая замены $x + 45 = a^3$, $x - 16 = b^3$, получим $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

Ответ: $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

121. *Ответ:* $\sqrt{2010} - 1$.

Указание. Умножить числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю.

122. *Ответ:* (4; 1), (1; 4).

123. *Решение.* Возведем в квадрат обе части данных равенств:

$a^2 = \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y$, (1)

$b^2 = \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y$. (2)

Складывая (1) и (2), получим

$a^2 + b^2 = 2 + 2 \cos (x - y)$. (3)

Аналогично вычитая, находим

$a^2 - b^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^2 y - \cos^2 y) +$
$+ 2(\sin x \sin y - \cos x \cos y)$, или

$b^2 - a^2 = \cos 2x + \cos 2y + 2 \cos (x + y)$, или

$b^2 - a^2 = 2 \cos (x + y) (\cos (x - y) + 1)$. (4)

Учитывая (3), имеем $2 \cos (x - y) = a^2 + b^2 - 2$,

$b^2 - a^2 = \cos (x + y) \cdot (2 \cos (x - y) + 2) =$

$= \cos (x + y) \cdot (a^2 + b^2 - 2 + 2) =$

$= (a^2 + b^2) \cos (x + y)$, откуда $\cos (x + y) = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$.

Так как $\cos(x-y) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2)$, то

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{(b^2-a^2)\cdot 2}{(a^2+b^2)(a^2+b^2-2)}.$$

Но $\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$, тогда

$$\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = \frac{2(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2-2)}.$$

Известно, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$,

тогда $\frac{2}{2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = \frac{(b^2+a^2)(a^2+b^2-2)+2(b^2-a^2)}{(b^2+a^2)(a^2+b^2-2)-2(b^2-a^2)}$, или

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y = \frac{(a^2+b^2)^2-4b^2}{(a^2+b^2)^2-4a^2} = \frac{(a^2+b^2+2b)(a^2+b^2-2b)}{(a^2+b^2+2a)(a^2+b^2-2a)},$$

ч. т. д.

124. *Ответ:* при $0 < a < 4$.

Указание. Проще привести графическое решение.

125. *Ответ:* $x_1 = 3$, $x_2 = -\sqrt[3]{15}$.

Указание. Данное уравнение равносильно двум смешанным системам:

1) $\begin{cases} x^3-2x \geq 0, \\ x^3-2x = 2x+15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-2x < 0, \\ x^3-2x = 2x+15, \end{cases}$ и т. д.

126. *Решение.* Пусть $3x - 2 = t + 1$, тогда

$x = \frac{1}{3}(t+3)$, $x - 5 = \frac{1}{3}t - 4$ и $x + 1 = \frac{1}{3}(t+6)$.

Следовательно, I уравнение примет вид

$f(t+1) + 7g\left(\frac{t}{3} - 4\right) = \frac{1}{3}(t+6)$, т. е. $f(x+1)+7g\left(\dfrac{x}{3}-4\right)=\dfrac{1}{3}(x+6)$.

Решая это уравнение совместно со II уравнением исходной системы, имеем

$$\begin{cases} f(x+1)+7g\left(\dfrac{x}{3}-4\right)=\dfrac{1}{3}(x+6), \\ f(x+1)-g\left(\dfrac{x}{3}-4\right)=3x, \end{cases}$$

откуда, вычитая из первого уравнения второе, получим $8g\left(\dfrac{x}{3}-4\right)=\dfrac{x+6}{3}-3x$, или

$$g\left(\frac{x}{3}-4\right)=\frac{1}{12}(3-4x). \qquad (1)$$

Пусть $\dfrac{x}{3}-4=k$, $x=3(k+4)$, тогда (1) примет вид

$g(k)=\dfrac{1}{12}(3-12(k+4))$, или $g(k)=-\dfrac{1}{4}(4k+15)$,

т. е. $g(x)=-\dfrac{1}{4}(4x+15)$.

Из II уравнения последней системы имеем

$f(x+1)=-\dfrac{1}{12}(3-4x)=3x$,

$f(x+1)=\dfrac{1}{12}(32x+3)$,

$f(x+1)=\dfrac{1}{12}(32(x+1)-29)$,

т. е. $f(x)=\dfrac{1}{12}(32x-29)$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{12}(32x-29)$, $g(x)=-\dfrac{1}{4}(4x+15)$.

127. *Ответ:* графиком является прямая $y = 5$. *Указание.* $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

128. *Решение.* Пусть в ΔABC основание $AB = 2x$, $AC = BC = y$, высота $CD = 12$ (по условию), тогда из ΔADC получим

$$y^2 - x^2 = 144. \qquad (1)$$

Известно, что $S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R}$, где $a = b = y$, $c = AB = 2x$, тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{xy^2}{2R}$. (2)

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = pr = (x + y)r$. (3)

Кроме того, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD = 12x$. (4)

Учитывая (4), соотношения (2) и (3) примут вид

$$\frac{xy^2}{2R} = 12x, \text{ или } y^2 = 24R,\ R = \frac{y^2}{24}. \qquad (5)$$

Аналогично из (3) имеем $(x + y)r = 12x$, откуда

$$r = \frac{12x}{x+y}. \qquad (6)$$

По условию задачи $R + r = \dfrac{83}{8}$, тогда, складывая (5) и (6), получим $\dfrac{12x}{x+y} + \dfrac{y^2}{24} = \dfrac{83}{8}$, или, учитывая (1), имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{12x}{x+y} + \dfrac{y^2}{24} = \dfrac{83}{8}, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$

Пусть $y = tx$, где $t > 0$, тогда получим

$$\begin{cases} \frac{12}{1+t}+\frac{t^2x^2}{24}=\frac{83}{8}, \\ x^2=\frac{144}{t^2-1}. \end{cases}$$

Решая систему способом подстановки, получим $35t^2 - 96t + 13 = 0$, откуда $t_1 = \frac{13}{5}$, $t_2 = \frac{1}{7}$.

Учитывая подстановку $y = tx$, получим две системы уравнений:

1) $\begin{cases} y=\frac{13}{5}x, \\ y^2-x^2=144; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=\frac{1}{7}x, \\ y^2-x^2=144. \end{cases}$

Из системы 1) имеем $x = 5$, $y = 13$. Система 2) не имеет решений. Итак, $x = 5$, $y = 13$, тогда $AB = 10$, $AC = BC = 13$.

Ответ: 10; 13; 13.

129. *Ответ:* $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Указание. Используя формулу $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, данное уравнение примет вид $3\operatorname{tg}^2 x + 4 = \frac{7\sin x}{|\cos x|}$.

Далее рассмотреть 2 случая:

1) $\cos x > 0$; 2) $\cos x < 0$.

130. *Ответ:* $x = \frac{7\pi}{4}$.

Указание. 1) $\cos x < 0$; 2) $\cos x \geq 0$.

131. *Решение.* Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin\frac{5x}{4}=1, \\ \cos x=1; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5x}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=2\pi k; \end{cases}$

$2\pi k = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}$, откуда $k = \frac{1}{5}(4n + 1)$.

Так как $k \in Z$, то $n = 1 + 5m$, тогда $x = 2\pi + 8\pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $x = 2\pi + 8\pi m$, $m \in Z$.

132. *Ответ:* $\left(-\infty; \frac{1}{3}(-1-\sqrt{13})\right] \cup$

$\cup \left[\frac{1}{3}(1+\sqrt{13}); +\infty\right)$.

Указание. После упрощений получим неравенство $3x^2 - 2|x| - 4 \ge 0$. Далее рассмотреть 2 случая: 1) $x \ge 0$; 2) $x < 0$.

133. *Ответ:* $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$.

Указание. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим

$(x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1) = 0$, и т. д.

134. *Решение.* $7\sin\beta = 6\sin\beta + \sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$, или $6\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta) - \sin\beta =$
$= 2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$. (1)

С другой стороны, $7\sin\beta = 8\sin\beta - \sin\beta$, или $8\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta) + \sin\beta =$
$= 2\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha$. (2)

Разделив обе части (2) на (1), получим

$\frac{4}{3} = \mathrm{tg}(\alpha + \beta)\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, откуда $3\,\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = 4\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

ч. т. д.

135. *Ответ:* $\left(2; 3\dfrac{1}{3}\right)$.

136. *Ответ:* $(x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$.

137. *Ответ:* $x = -1$.

Указание. После почленного возведения уравнения в куб и подстановки $\sqrt[3]{x-1}$ вместо $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$ получим уравнение $(3x + 1)(x - 1) = -(x + 1)^2$, и т. д.

138. *Решение.* $\begin{cases} 0 \le x^2 - 3 \le 1, \\ \arcsin\sqrt{x^2 - 3} > \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le x^2 - 3 \le 1, \\ \sqrt{x^2 - 3} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le x^2 - 3 \le 1, \\ x^2 - 3 > \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{3}{4} < x^2 - 3 < 1$. Тогда $\dfrac{15}{4} < x^2 \le 4$,

или $\dfrac{\sqrt{15}}{2} < |x| \le 2$. Значит, $|x| \le 2$, т. е. $-2 \le x \le 2$.

Из неравенства $|x| > \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ получим $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{\sqrt{15}}{2}, \\ x < -\dfrac{\sqrt{15}}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left[-2; -\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}; 2\right]$.

139. *Решение.* Поскольку $y - 2x^2 - 1 \ge 0$, то $2x^2 + 1 \le y$, откуда $y \ge 1$, тогда $3^y \ge 3$. Так как $\cos x \le 1$, то $-3\cos x \ge -3$. Из данного неравенства следует, что $\sqrt{y - 2x^2 - 1} \ge 0$. Учитывая полученные соотношения, имеем $3^y - 3\cos x + \sqrt{y - 2x^2 - 1} \ge 0$, а по условию $3^y - 3\cos x + \sqrt{y-2x^2-1} \le 0$, значит, должно выполняться равенство

$3^y - 3\cos x + \sqrt{y-2x^2-1} = 0$, откуда

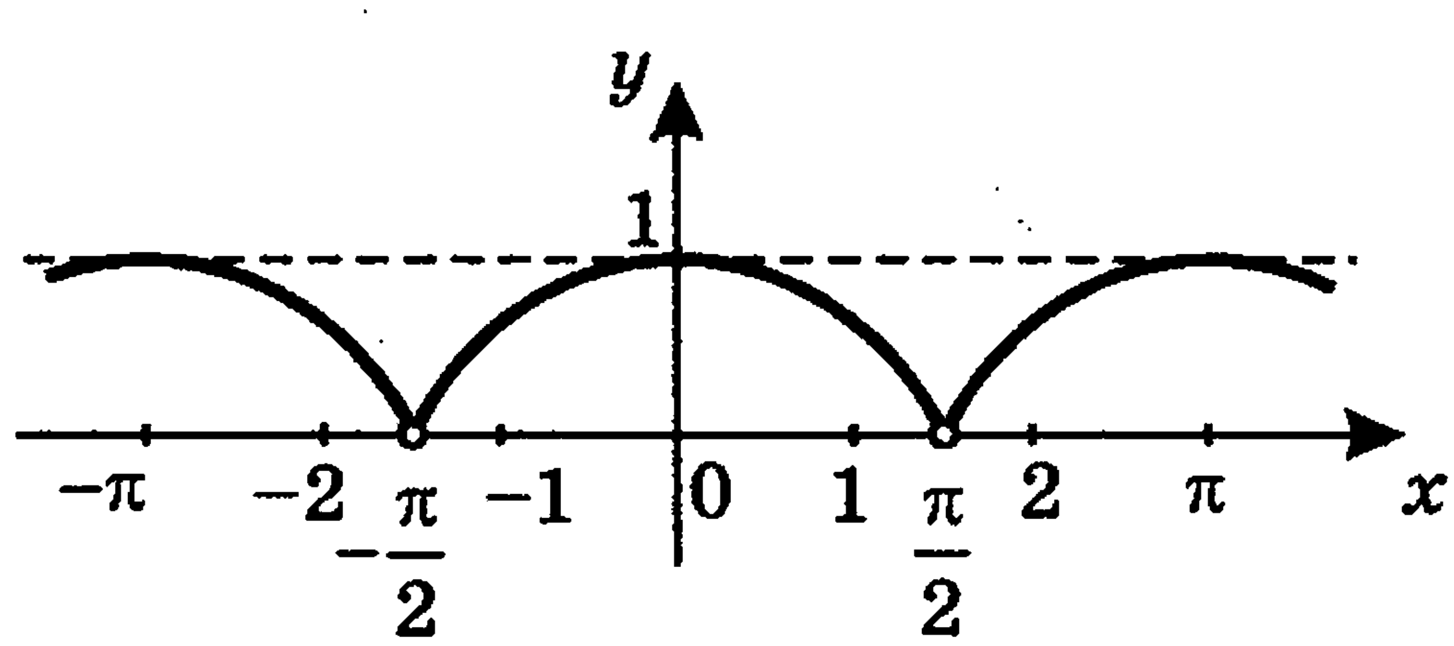
$$\begin{cases} 3^y = 3, \\ 3\cos x = 3, \\ \sqrt{y-2x^2-1} = 0. \end{cases}$$

Решением системы будет $x = 0$, $y = 1$.

Ответ: $x = 0$, $y = 1$.

140. *Решение.* $y = 1 \cdot \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$.

$$\begin{cases} \cos x \ne 0, \\ y = |\cos x|; \end{cases} \quad x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$



141. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде

$$\frac{3}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)} = \frac{48}{35}, \text{ или}$$

$$(1 + \cos^2 x)(1 + \sin^2 x) = \frac{35}{16}. \qquad (1)$$

Но $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ и $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, тогда уравнение (1) примет вид

$$\left(1+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(1+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)=\frac{35}{16},\text{ или}$$

$$(3+\cos 2x)(3-\cos 2x)=\frac{35}{4},\text{ откуда}$$

$$\cos^2 2x=\frac{1}{4},\text{ или }\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{4};$$

$$\cos 4x=-\frac{1}{2};\ 4x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,$$

т. е. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

II способ

Пусть $1+\cos^2 x=a$, $1+\sin^2 x=b$, где $a>0$, и $b>0$. Тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{48}{35}. \qquad (2)$$

Кроме того, $a+b=2+(\cos^2 x+\sin^2 x)=3$, или

$$a+b=3. \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) решаем как систему

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{48}{35},\\ a+b=3.\end{cases}$$

Решая систему способом подстановки, находим $a_1=\frac{7}{4}$, $a_2=\frac{5}{4}$, тогда $b_1=\frac{5}{4}$, $b_2=\frac{7}{4}$.

Так как $1+\cos^2 x=a$, то $\cos^2 x=\frac{3}{4}$, или

$1+\cos 2x=\frac{3}{2}$, $\cos 2x=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Аналогично $1 + \cos^2 x = \frac{5}{4}$, $\cos^2 x = \frac{1}{4}$,

$1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

III способ

Поскольку $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, то исходное уравнение примет вид

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\cos^2 x + \sin^2 x} + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \frac{48}{35}. \qquad (4)$$

Разделив числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения (4) на $\cos^2 x \neq 0$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{2\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{48}{35}.$$

После упрощения получим биквадратное уравнение

$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$, откуда $\operatorname{tg}^2 x = 3$,

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$. Если $\operatorname{tg}^2 x = 3$, то $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$, если $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$, то $\operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

142. *Ответ:* $[-5; -4) \cup [-2 - 2\sqrt{\frac{3}{7}}; -3) \cup$

$\cup (-1; -2 + 2\sqrt{\frac{3}{7}}] \cup (0; 1]$.

Указание. Ввести замену $x^2 + 4x = t$, предварительно записав неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)\ge\frac{21}{20}.$$

143. *Ответ:* $2 \pm \sqrt{9+4n^2}$, $n = 0, 1 \ldots$

Указание. Так как $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$, то уравнение примет вид $\cos(\pi\sqrt{x^2-4x-5}) = 1$, которое равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} x^2-4x-5\ge 0,\\ \pi\sqrt{x^2-4x-5}=2\pi n, \end{cases} \quad n = 0.\ 1.\ \ldots, \text{ и т. д.}$$

144. *Ответ:* $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})$.

145. *Ответ:* $(1; 0)$, $\left(\frac{1}{4};1\right)$.

Указание. Дважды возвести первое уравнение в квадрат.

146. *Решение.* Пусть в ΔABC ($\angle C = 90°$), $AB = c$, $AD = \frac{c}{\sqrt{3}}$ — биссектриса $\angle A$. Пусть $\angle CAD = \alpha = \angle DAB$.

Из ΔACD $AC = AD\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{3}}\cos\alpha$, из ΔABC $AC = AB\cos 2\alpha = c\cos 2\alpha$. Сравнивая правые части полученных равенств, имеем $\frac{c}{\sqrt{3}}\cos\alpha = \cos 2\alpha$, или $\sqrt{3}\cos 2\alpha - \cos\alpha = 0$. Поскольку $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, то полученное уравнение примет вид $2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0$, откуда

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ — не подходит, так как $\angle A < 90^\circ$, тогда $\cos\alpha > 0$.

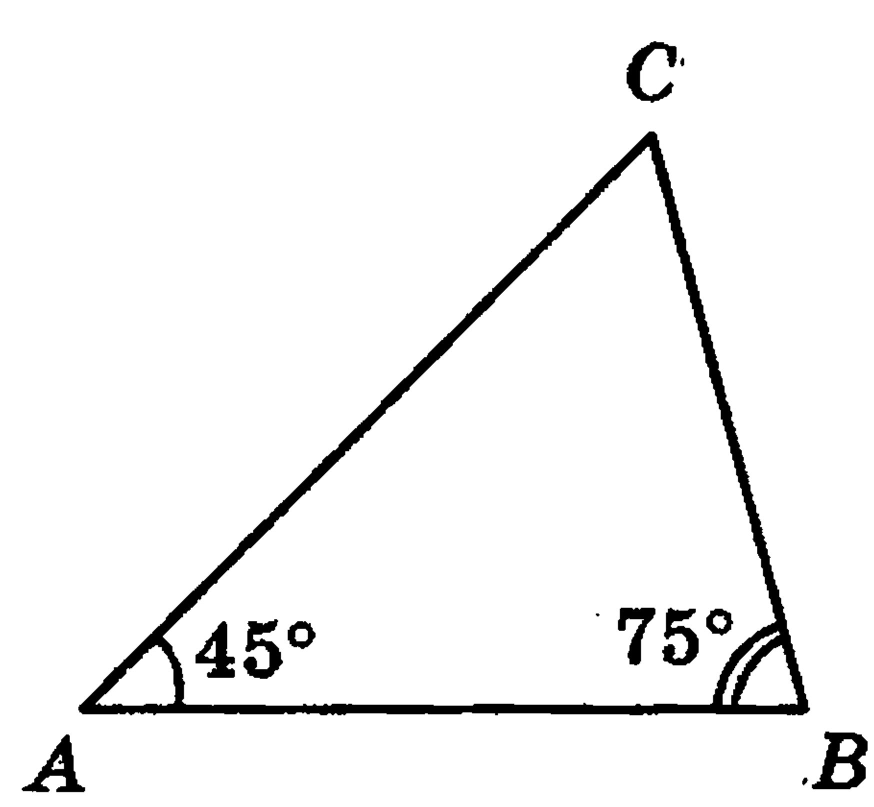
Если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha = 30^\circ$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle B = 30^\circ$.. Следовательно, $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Замечание. Попытка решить задачу алгебраическим способом приводит к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными, например,

$$AC = x,\ BC = y,\ CD = z, \text{ тогда } \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = \frac{1}{3}c^2, \\ \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z}, \end{cases} \text{ и т. д.}$$

Ответ: $\frac{1}{2}c$, $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

147. *Решение.* $\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$. Заметим, что ΔABC подобен треугольнику с вершинами в серединах его сторон с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$.



Значит, радиус окружности, описанной около ΔABC, равен $R = 2r$, тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C =$$

$$= \frac{1}{2}(2r\sin\angle B)\cdot(2r\sin\angle A)\cdot\sin\angle C =$$

$$= 2r^2\sin 75^\circ\cdot\sin 45^\circ\cdot\sin 60^\circ =$$

$$= 2r^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin(30^\circ+45^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}r^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})r^2 \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})r^2$.

148. *Ответ:* (1; 1).

Указание. Записать уравнение в виде $(x+y)(x^2-xy+y^2)+2=2(x+y)$, откуда $x+y=$ $=\pm1;\ \pm2$. Далее записать уравнение в виде

$$xy=\frac{(x+y)^3-2(x+y)+2}{3(x+y)}, \text{ и т. д.}$$

149. *Ответ:* $\sin 9 > \sin 10$.

Указание. Рассмотреть разность $\sin 10 - \sin 9$ и учесть, в какой угловой четверти находятся полученные углы.

150. *Решение.* Пусть $8x-x^2-12=a$, $7-2x=b$, где $a\ge 0$, $b\ge 0$. Заметим, что $6x-x^2-5=(8x-$ $-x^2-12)+(7-2x)=a+b$, где $a+b\ge 0$.

В этом случае исходное неравенство примет вид $\sqrt{a+b}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$, если $a+b\ge a+b+2\sqrt{ab}$, $\sqrt{ab}\le 0$, $ab=0$.

Следовательно, имеем две смешанные системы:

а) $\begin{cases}8x-x^2-12=0,\\ 7-2x\ge 0;\end{cases}$ $x^2-8x+12=0$, $x_1=2$, $x_2=4$.

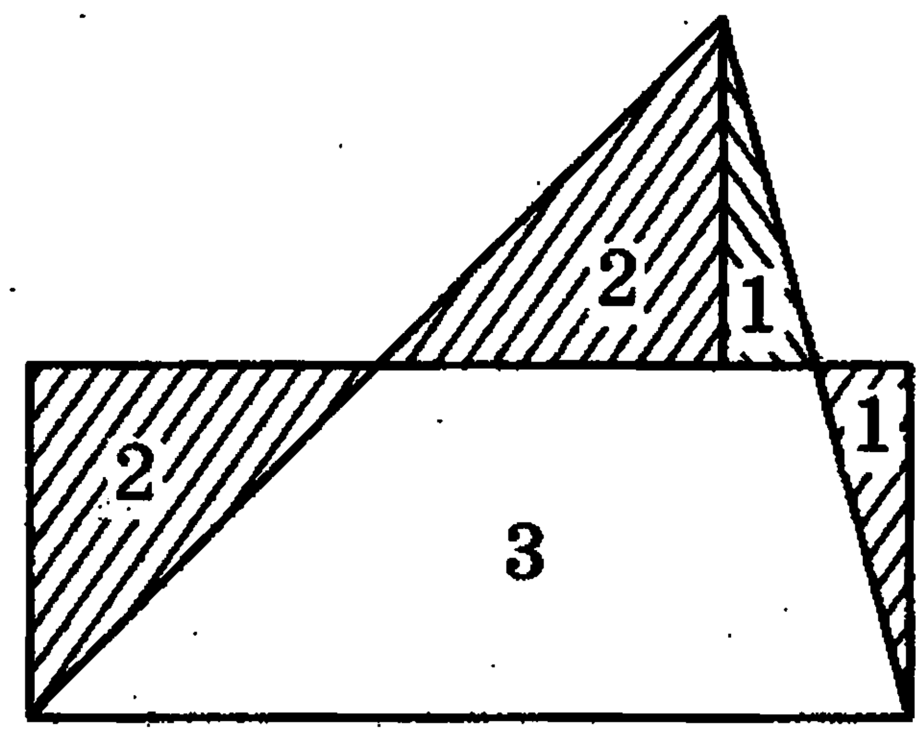
Так как $x\le 3{,}5$, то $x=2$.

б) $\begin{cases} 7-2x=0, \\ 8x-x^2-12\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3{,}5, \\ x^2+8x+12\le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3{,}5, \\ 2\le x\le 6, \end{cases}$

откуда $x = 3{,}5$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3{,}5$.

151. *Решение* (см. рис.).



152. *Ответ:* $x = \pi n$, $x = \pm\operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in Z$.

Указание. Применить формулу

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}.$$

153. *Решение.* По формуле суммы n членов геометрической прогрессии получим

$$x^{12} + x^{10} + x^9 + \ldots + x^2 + 1 = \frac{x^{14}-1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x^7-1}{x-1} \cdot \frac{x^7+1}{x+1} = (x^6 + x^5 + x^4 + \ldots + x + 1)(x^6 -$$

$$-x^5 + x^4 - \ldots - x + 1).$$

154. *Ответ:* 72.

Указание. $2x = a^2$, $3x = b^3$, т. е. $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot c = 72c \Rightarrow c = 1$.

155. *Решение.*

I способ

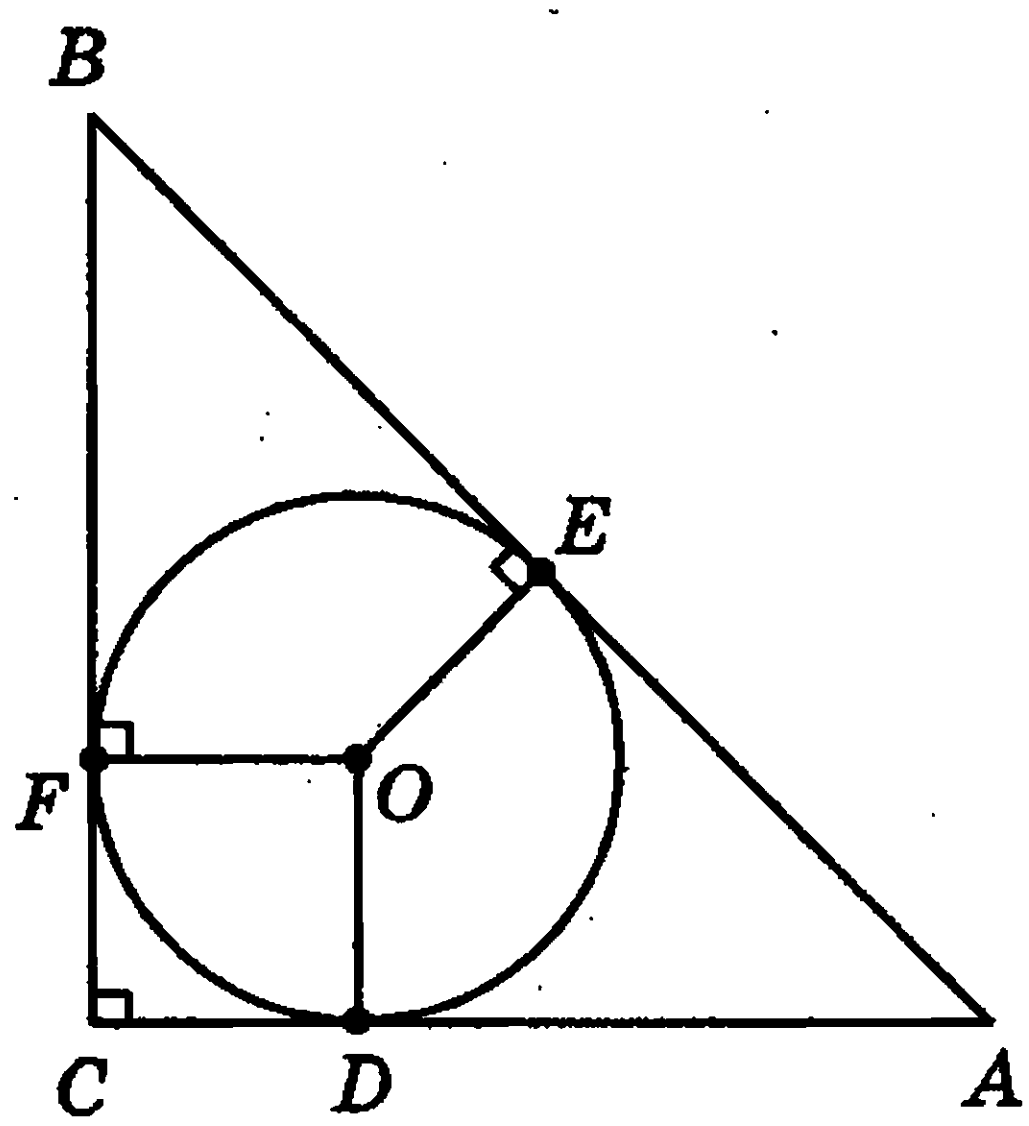
$$S = \frac{1}{2}ab = pr = \frac{1}{2}(a + b + c)r, \text{ откуда}$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c}. \tag{1}$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, или $(a + b)^2 - 2ab = c^2$, значит, $2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$, тогда (1) примет вид $r = \dfrac{2ab}{2(a+b+c)} =$

$= \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \dfrac{a+b-c}{2}$, ч. т. д.

II способ



Из центра O вписанной окружности проведем радиусы OD, OE и OF в точки касания, тогда $OD \perp AC$, $OF \perp BC$, $OE \perp AB$. Следовательно, $CFOD$ — квадрат, тогда $OD = OF = OE =$ $= r$; $AD = AC - CD = b - r$; $BF = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки.

Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB = AE + BE$, т. е. $c = (b - r) + (a - r)$, откуда $r = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$, ч. т. д.

156. *Решение.* В силу неравенства Коши

$$\sqrt{x^2+x-16} \le \frac{(x^2+x-16)+1}{2} = \frac{x^2+x-15}{2},$$

$$\sqrt{x-x^2+16} \le \frac{(x-x^2+16)+1}{2} = \frac{x-x^2+17}{2}.$$

Следовательно, $\sqrt{x^2+x-16} + \sqrt{x-x^2+16} \le x+1$.

Значит, из исходного уравнения следует, что $x^2 - 7x + 17 \le x + 1$ или $(x - 4)^2 \le 0$, т. е. $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

157. *Ответ:* 1.

Указание. Подставить в выражение, данное в условии, $x = 1$.

158. *Ответ:* 54 и 18.

159. *Решение.* Пусть $A = \overline{xyztxy}$ — искомое число. Вставленное двузначное число четное. Обозначив его через $2a$, получим

$A = \overline{xyztxy} = 10\,000a + 100 \cdot 2a + a = 10\,201a = 101^2 a.$

Так как A — шестизначное число и a — точный квадрат, то $16 \le a \le 81$, откуда $a = 16; 25; 36; 49$. В этом случае получим соответственно 4 числа: $163\,216 = 404^2$; $255\,025 = 505^2$; $367\,236 = 606^2$; $499\,849 = 707^2$.

160. *Ответ:* 4001 и 8004.

161. *Ответ:* 3 : 8.

Указание. Учесть, что $\Delta AKD \sim \Delta EKD$, где точка K — точка пересечения DB и AE ($E \in CB$).

162. *Решение.* Если $\sin\alpha = 3\cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = 3$, тогда $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 3}{1-9} = -\dfrac{3}{4}$;

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{3+\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{3-\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{12-3}{4+9} = \frac{9}{13}.$$

Ответ: 9/13.

163. *Ответ:* $x = 0$.

164. *Ответ:* $\dfrac{7}{25}$.

Указание. Разложить $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ на множители. Далее использовать формулы

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

165. *Ответ:* $x = 3$.

Указание. Замена $\sqrt{x+1} = y$, тогда после упрощений получим уравнение $(y^2 - 4y)^2 + 8(y^2 - 4y) + 16 = 0$ — квадрат суммы, и т. д.

II способ

Запишем уравнение в виде

$(x - 4\sqrt{x+1})^2 + 10(x - 4\sqrt{x+1}) + 25 = 0$, или

$(x - 4\sqrt{x+1} + 5)^2 = 0$, или $x - 4\sqrt{x+1} + 5 = 0$.

Полученное уравнение запишем в виде

$(\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0$, и т. д.

Ответ: $x = 3$.

166. *Ответ:* $\left(\frac{9}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{9}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

167. *Ответ:* $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

Указание. Замена $\sqrt[3]{2-x} = t$, тогда $x - 1 = 1 - t^3$. Получим $\sqrt{1-t^3} > 1 - t$, и т. д.

168. *Решение.* $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) = 37 = 1 \cdot 37$, причем $x - 3y < x < x^2 + 3xy + 9y^2$.

Значит, $\begin{cases} x-3y=1, \\ x^2+3xy+9y^2=37, \end{cases}$ откуда, решая способом подстановки, находим $x = 4$, $y = 1$.

Ответ: $x = 4$, $y = 1$.

169. *Ответ:* 54.

Указание. Разложить многочлен $M(x)$ на множители, а затем подставить значения $p(x)$ и $g(x)$.

170. *Ответ:* 351 и 459.

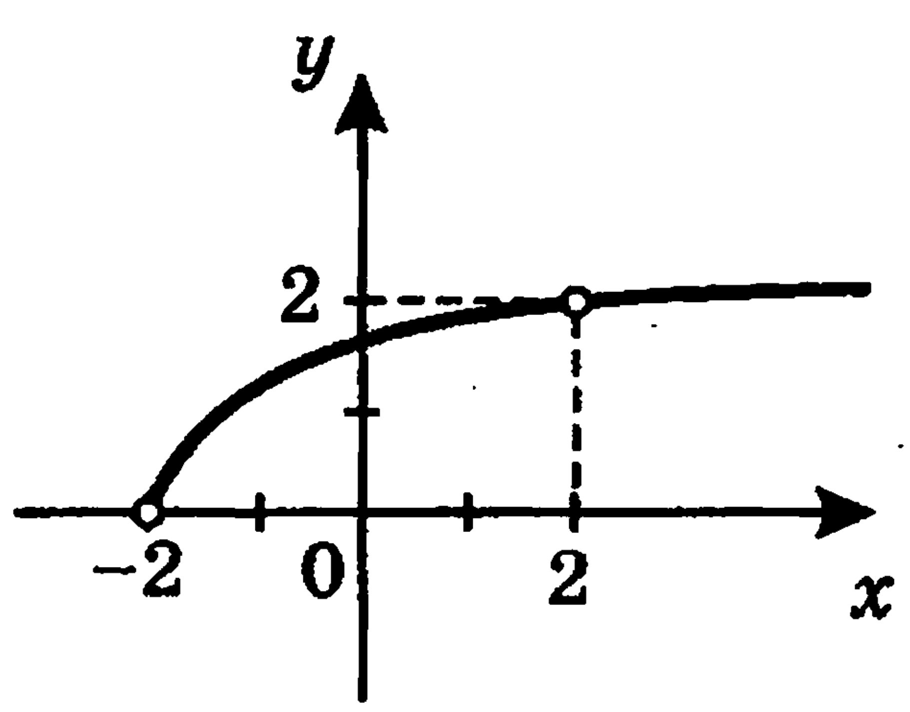
Указание. Согласно условию

$100x + 10y + z = 3(\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{xz})$, или

$40x = 23y + 5z$.

Далее учесть, что $0 \le y \le 9$, $0 \le z \le 9$, $0 \le x \le 9$, и т. д.

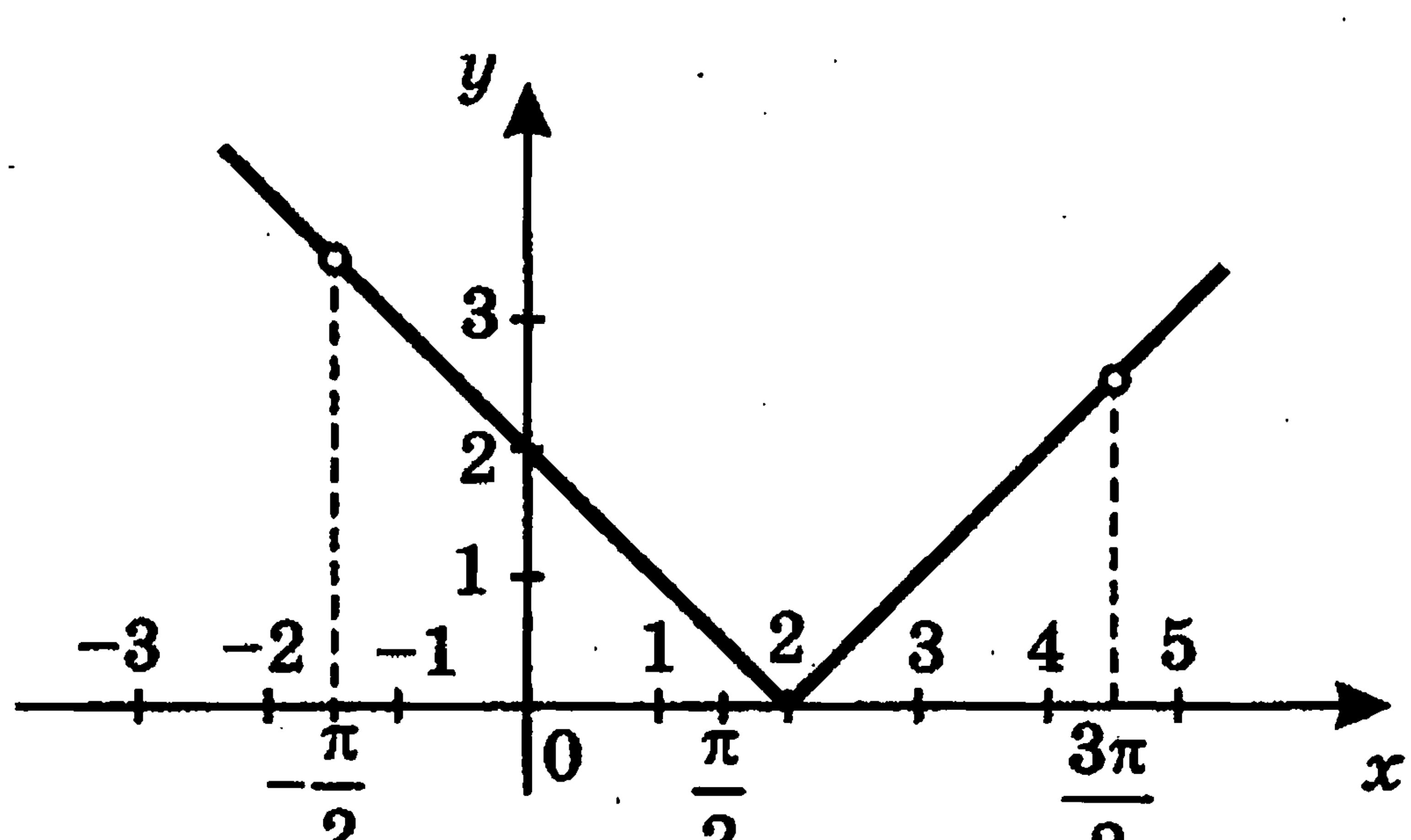
171. *Указание.* $y = \sqrt{x+2}$, $x \ne 2$, $x > -2$.



172. *Ответ:* 10 см.

173. *Указание.* Данную функцию привести к виду $y = |x - 2|$, где $\cos x \ne 0$, т. е.

$$\begin{cases} y = |x-2|, \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

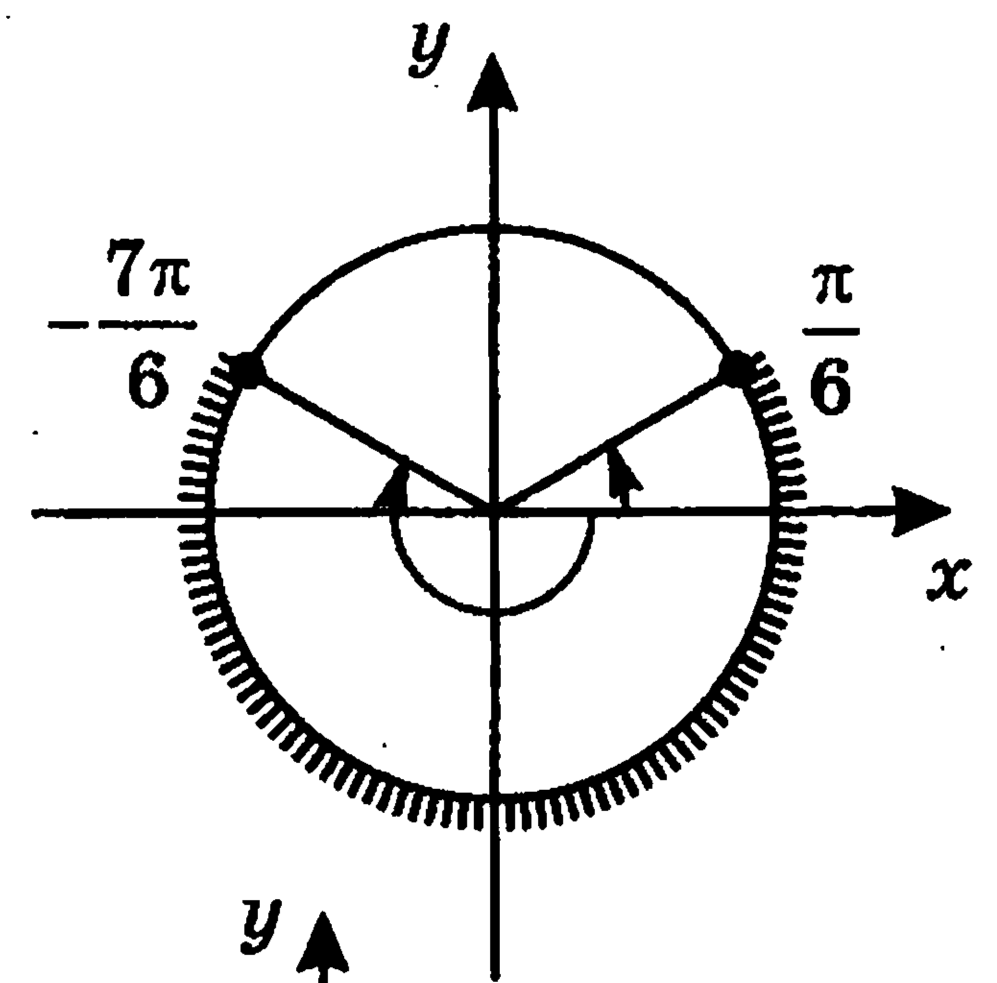


174. *Указание.* Неравенство приводится к виду

$$\sin\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}, \text{ откуда}$$

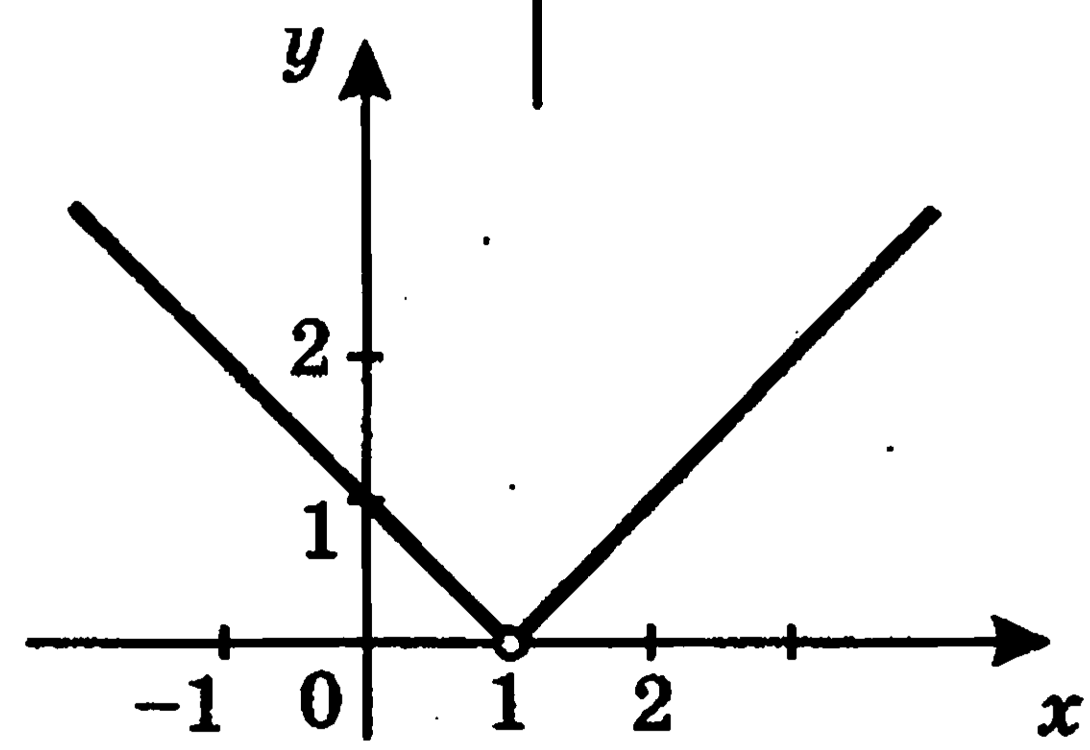
$$4\pi n - \frac{7\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + 4\pi n,$$

$n \in Z$.



175. *Указание.* После преобразования получим

$$\begin{cases} y = |x-1|, \\ x \ne 1. \end{cases}$$



176. *Ответ:* $x_1 = 1$,
$x_2 = -0{,}5$.

Указание. Рассмотреть 2 случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$.

177. *Решение.* $y^2 = x^2(1 + x)$. Полагая $1 + x = a^2$, получим бесконечную серию решений $x = a^2 - 1$, $y = ax$.

178. *Ответ:* $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

179. *Ответ:* $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Решение. Преобразовать неравенство к виду $|3x - 1| > 1$, и т. д.

180. *Решение.*

I способ

Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, тогда $\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$; $\cos(\alpha + \beta) = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} +$

$+\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \dfrac{\sin\gamma(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} =$

$= \operatorname{tg}\gamma\cdot\dfrac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\gamma\cdot\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$

$= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

II способ

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha +$

$+\operatorname{tg}\beta - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\left(1-\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right) =$

$= \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}(-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot(-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) =$

$= \operatorname{tg}(180^\circ-\gamma)\cdot(-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

III способ

Так как $\alpha+\beta = 180^\circ-\gamma$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(180^\circ-\gamma)$.

$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma$, или

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, или

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, ч. т. д.

181. *Ответ:* $\left[-\dfrac{\sqrt{10}}{2};\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

Указание. Имеем $\begin{cases} 0 \le x^2-2 \le 1, \\ \arcsin\sqrt{x^2-2} \le \dfrac{\pi}{6}, \end{cases}$ или

$$\begin{cases} 0 \le x^2 - 2 \le 1, \\ x^2 - 2 \le \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

182. *Ответ:* $a = \pm 2\sqrt{3}$.

Указание. Заменой $x = a + y$ первое уравнение системы привести к виду $4y^2 + 2ay + (a^2 - 1) = 0$, и т. д.

183. *Решение.*

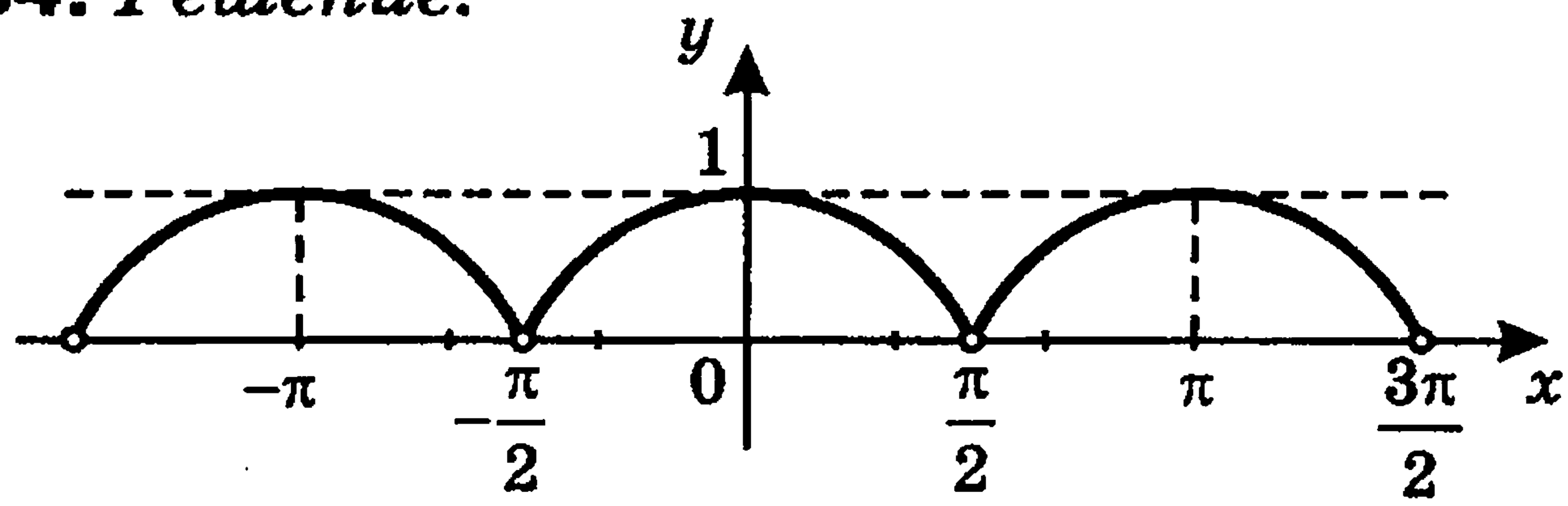
I способ

Применяя формулы $2 \sin x \cos y = \sin (x - y) + \sin (x + y)$ и $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, получим $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha (\sin (\alpha + 2\beta) - \sin \alpha) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin (\alpha + 2\beta) - \sin^2 \alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) + \dfrac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos (2\alpha + 2\beta)) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos (2\alpha + 2\beta)) = \sin^2 (\alpha + \beta)$, ч. т. д.

II способ

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \alpha = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 = \sin^2 (\alpha + \beta)$, ч. т. д.

184. *Решение.*



185. *Ответ:* $x = 8$.

Указание. Записать уравнение в виде

$$\sqrt[3]{1+\frac{56}{x}} + 4\sqrt[3]{1+\frac{19}{x}} = 8.$$

Далее замена $1 + \dfrac{56}{x} = a^3$, $1 + \dfrac{19}{x} = b^3$. Имеем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{56}{x} = a^3 - 1, \\ \dfrac{19}{x} = b^3 - 1. \end{cases}$ Далее перемножить обе части уравнений и решить полученную систему (с учетом замен) $\begin{cases} 19a^3 - 56b^3 = -37, \\ a + 4b = 8, \end{cases}$ и т. д.

186. *Решение.*

I способ

В силу неравенства Коши

$$\sqrt{x^2-x-1} \le \frac{(x^2-x-1)+1}{2} = \frac{x^2-x}{2};$$

$$\sqrt{1-x-x^2} \le \frac{(1-x-x^2)+1}{2} = \frac{2-x-x^2}{2}.$$

Значит, левая часть неравенства не превосходит $1 - x$, так как $\dfrac{x^2-x}{2} + \dfrac{2-x-x^2}{2} = 1 - x$.

Следовательно, $x^2 + x + 2 \le 1 - x$, или $(x + 1)^2 \le 0$, откуда $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

II способ

Известно, что $a_1a_2 + b_1b_2 \le \sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}$ (неравенство Коши—Буняковского).

Тогда $1 \cdot \sqrt{x^2-x-1} + 1 \cdot \sqrt{1-x-x^2} \le$
$\le \sqrt{2} \cdot \sqrt{-2x} = 2\sqrt{-x}$.

Из коллинеарности векторов (1; 1) и
$(\sqrt{x^2-x-1}; \sqrt{1-x-x^2})$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}, \text{ или}$$

$x^2 - x - 1 = 1 - x - x^2$, $x^2 = 1$, $x = -1$ $(x < 0)$.

III способ

Заметим, что $x^2 + x + 2 > 0$ при всех $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$. Тогда область определения уравнения равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-x-1 \ge 0, \\ 1-x-x^2 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \ge \frac{5}{4}, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{5}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left|x-\frac{1}{2}\right| \ge \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ \left|x+\frac{1}{2}\right| \le \frac{\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

откуда находим $x \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$.

На полученном отрезке левая часть исходного уравнения является возрастающей функцией, а правая — убывающая. Значит, уравнение может иметь не более одного корня и $x = -1$ — единственный корень.

IV способ

Область определения уравнения

$$x \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \sqrt{t}.$$

Заметим, что $u + v - 2\sqrt{uv} = t$, или

$(x^2 - x - 1) + (1 - x - x^2) - 2\sqrt{uv} = x^2 + x + 2;$

$-2\sqrt{uv} = x^2 + 3x + 2$, или

$-2\sqrt{uv} = (x + 1)(x + 2),$

поскольку $uv \geq 0$, то последнее равенство возможно, если $(x + 1)(x + 2) = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ (не удовлетворяет ОДЗ уравнения).

Итак, $x = -1$ — единственный корень исходного уравнения

Ответ: $x = -1$.

187. *Ответ:* $x_1 = \frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{6})$, $x_2 = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{2})$,

$$x_3 = \frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{3}).$$

Указание. Рассмотреть 2 случая:

1) $x \leq 0$; 2) $x > 0$.

188. *Решение.* $x^2 + y^2 + xy = (x - py)^2$, $y \in N$, откуда $x^2 + 2px = p^2y - y$, или $y = \dfrac{x(2p+1)}{p^2-1}$, где $p > 1$,

а x надо выбрать так, чтобы y было целым, что достигается, если положить $x = p^2 - 1$, $y = 2p + 1$.

В этом случае исходное равенство примет вид

$(p^2 - 1)^2 + (2p + 1)^2 + (p^2 - 1)(2p + 1) =$

$= p^4 + 2p^2(p + 1) + (p + 1)^2 = (p^2 + (p + 1))^2 =$

$= (p^2 + p + 1)^2 = \overline{aaa}^2$.

Подбором легко установить, что требуемое равенство выполняется при $p = 10$.

$(10^2 + 10 + 1)^2 = 111^2$, тогда $x = 10^2 - 1 = 99$,

$y = 2 \cdot 10 + 1 = 21$.

При этих значениях исходное равенство запишется в виде

$99^2 + 21^2 + 99 \cdot 21 = 111^2$.

Итак, $x = 99$, $y = 21$ — наименьшая пара.

Ответ: $x = 99$, $y = 21$.

189. *Указание.* Следует продолжить две пары плоскостей противоположных граней угла до пересечения и провести плоскость, параллельную двум получившимся прямым.

190. *Решение.* $3 + \cos x\,(6 \cos x + a \sin x) = 1$, или $6 \cos^2 x + a \sin x \cos x + 2 = 0$.

Поскольку $2 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$, то получим

$8 \cos^2 x + a \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0$ — однородное уравнение второй степени.

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим равносильное уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2\, x + a\,\mathrm{tg}\, x + 8 = 0.$$

Пусть $\mathrm{tg}\, x = t$, $t \in R$, тогда уравнение $2t^2 + at + 8 = 0$ имеет корни, если $D \geq 0$, т. е. $a^2 - 64 \geq 0$, $a^2 \geq 64$, $|a| \geq 8$, откуда $a \geq 8$ и $a \leq -8$. Следовательно, $a \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

191. *Решение.* Согласно условию имеем $\overline{abc} = 11k^2$, или $100a + 10b + c = 11k^2$, где $0 < a, b, c \leq 9$.

Полученное равенство запишем в виде

$$11(9a + b) + (a - b - c) = 11k^2. \qquad (1)$$

Чтобы (1) делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы $a - b + c$ делилось на 11, т. е. $a - b + c = 11m$.

Так как $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, то

$-9 \leq 11m \leq 18$, откуда $m = 0$ или $m = 1$.

1. Если $m = 0$, то получим $\begin{cases} 11(9a+b)+0=11k^2, \\ a-b+c=0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 9a+b=k^2, \\ a-b+c=0, \end{cases}$$

или, складывая уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} 10a+c=k^2, \\ b=a+c, \end{cases} \quad a>0,$$

где $10 \le 10a + c \le 99$, или $10 \le k^2 \le 99$, т. е. $k^2 = 16$; 25; 36; 49; 64; 81.

Из этих значений получим трехзначные числа: 176, 275, 396, 891.

2. Если $m = 1$, то $11(9a + b) + 11 = 11k^2$, или

$$\begin{cases} 9a+b+1=k^2, \\ a-b+c=11; \end{cases} \quad \begin{cases} 10a+c+1=k^2+11, \\ b=a+c=11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a+c=k^2+10, \\ b=a+c-11. \end{cases}$$

Значит, $10 \le 10a + c \le 99$; $10 \le k^2 + 10 \le 99$; $0 < k^2 \le 89$, т. е. $k^2 = 1$; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81.

Из этих значений получим еще два числа: 539; 704.

Ответ: 176; 275; 396; 891; 539; 704.

192. *Решение.* $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = (121 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n) + (12 \cdot 144^n - 12 \cdot 11^n) = 11^n(121 + 12) + 12(144^n - 11^n)$. Дальнейшее очевидно.

193. *Ответ:* $\left(\dfrac{2}{\lg 102}; 101\right)$.

194. *Решение.* $3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 = 3 + 3a^2 + 3a^4 - 1 - a^2 - a^4 - 2a^3 - 2a - 2a^2 = 2 + 2a^2 + 2a^4 - 2a^3 - 2a - 2a^2 = (a^2 - a)^2 + (a^2 - 1)^2 + (a - 1)^2 \ge 0$.

Замечание. Неравенство можно доказать иначе.

$1 + a^2 + a^4 = (1 + a)^2 - a^2 = (1 + a + a^2)(1 - a + a^2)$.

Так как $1 + a + a^2 > 0$, то доказательство исходного неравенства сводится к доказательству неравенства

$3(1 - a + a^2) \geq 1 + a + a^2$, или

$3(1 - a + a^2) - 1 - a - a^2 = 2(a - 1)^2 \geq 0$.

195. *Ответ:* $x = -1$.

196. *Ответ:* (4; 4).

197. *Решение.* Согласно условию задачи, при делении данных чисел на искомое получаются одинаковые остатки, значит, если мы вычтем одно число из другого, то разность разделится на искомое число без остатка.

$$\begin{array}{r} -\,200\,631 \\ 200\,513 \\ \hline 118 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,200\,749 \\ 200\,631 \\ \hline 118 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,200\,749 \\ 200\,513 \\ \hline 236 \end{array}$$

Найдем простые делители полученных чисел:
$118 = 2 \cdot 59$; $236 = 2 \cdot 2 \cdot 59$.

Как видим, единственный общий делитель полученных разностей равен 59, а общий остаток (нетрудно проверить) — 31.

Ответ: 59.

198. *Ответ:* $x = 1$.

Указание. Замена $3^x = t$, где $t > 0$. В результате получим: 1) $3^x = -3$; 2) $3^x = \dfrac{9}{x+2}$, и т. д.

199. *Ответ:* 4.

200. *Ответ:* 8567 и 8576.

Указание. Задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} c+d=13, \\ 2cd=156-9a, \end{cases}$ где $\overline{abcd} = 1000a +$

$+ 100b + 10c + d$ — искомое число. Далее доказать, что a — четное число.

201. *Ответ:* $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 3$.

202. *Решение.* Заметим, что в левой части уравнения имеем возрастающую функцию, в правой — убывающую. А это означает, что уравнение может иметь не более одного корня. Поскольку $540 = 3^3 \cdot 4 \cdot 5$, то уравнение запишется в виде $5^{3x} \cdot 4^{4+x} \cdot 3^{16+x} = 5^{8-x} \cdot 4^{8-x} \cdot 3^{3(8-x)}$.

Нетрудно убедиться, что $x = 2$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 2$.

203. *Ответ:* 56/9.

204. *Решение.* Если данное неравенство выполняется при $x \in (-2; 2)$, то оно, в частности, должно выполняться при $x = 0$. В этом случае неравенство примет вид $\frac{a^2}{7a} \geq 1$, откуда $a \geq 7$. Кроме того, поскольку $x \in (-2; 2)$, то $x + 7 > 0$.

Следовательно, исходное неравенство с учетом ограничений преобразуется к виду

$$x^2 + a^2 \geq a(x + 7), \text{ или } x^2 - ax + a^2 - 7a \geq 0. \quad (1)$$

Заметим, что абсцисса x_0 вершины параболы $y = x^2 - ax + a^2 - 7a$ равна $x_0 = \frac{a}{2}$, где $\frac{a}{2} > 1$, так как $a \geq 7$. Значит, неравенство (1) выполняется при всех $x \in (-2; 2)$, если оно выполняется при $x = 1$, т. е. $1 - a + a^2 - 7a \geq 0$, или $a^2 - 8a + 1 \geq 0$. Решая полученное неравенство методом интервалов, находим $a \in (-\infty; 4 - \sqrt{15}\,] \cup [4 + \sqrt{15}\,; +\infty)$.

Учитывая, что $a \geq 7$, окончательно получим $a \in [4 + \sqrt{15}\ ; +\infty)$.

Ответ: $[4 + \sqrt{15}\ ; +\infty)$.

205. *Ответ:* 4.
Указание. $f(9) = -3$; $f(-7) = 4$; $f(6) = 3$.

206. *Ответ:* $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi m; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$,

$$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi m; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n,\ m \in Z$$

207. *Ответ:* $x_1 = 0$, $x_2 = 9$.
Указание. Замена $\sqrt{4-\sqrt{x}} = y$, тогда $x = (4 - y^2)^2$. В этом случае данное уравнение примет вид $16(2 - y)^2 (2 + y)^2 - 9(17 - y^2)(2 - y)^2 = 0$, и т. д.

208. *Ответ:* $1/\sqrt{e}$.

209. *Решение.*

I способ

Упростим числитель дроби: $3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = (1 + \cos 4\alpha) + (2 + 4 \cos 2\alpha) = 2 \cos^2 2\alpha + 4 \cos 2\alpha + 2 = 2(1 + \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 2(1 + \cos 2\alpha)^2 = 2(2 \cos^2 \alpha)^2 = 8 \cos^4 \alpha$.

Аналогично упростим знаменатель дроби:
$3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = (1 + \cos 4\alpha) + (2 - 4 \cos 2\alpha) = 2 \cos^2 2\alpha + 2 - 4 \cos 2\alpha = 2(1 - 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 2(1 - \cos 2\alpha)^2 = 2(2 \sin^2 \alpha)^2 = 8 \sin^4 \alpha$.

Следовательно, $\dfrac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha} = \dfrac{8\cos^4\alpha}{8\sin^4\alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha$, ч. т. д.

II способ

$3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = (4 + 4 \cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) = 4(1 + \cos 2\alpha) - 2 \sin^2 2\alpha =$

$= 4 \cdot 2\cos^2\alpha - 2(\sin 2\alpha)^2 = 8\cos^2\alpha -$
$- 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 8\cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) =$
$= 8\cos^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 8\cos^4\alpha.$

Аналогично $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha =$
$= (4 - 4\cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) = 4(1 - \cos 2\alpha) -$
$- 2\sin^2 2\alpha = 8\sin^2\alpha - 2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$
$= 8\sin^2\alpha(1 - \cos^2\alpha) = 8\sin^4\alpha$, и т. д.
(см. I способ).

III способ

$3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha +$
$+ \cos 2 \cdot (2\alpha) = 3 + 4 \cdot (2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos^2 2\alpha -$
$- 1 = 3 + 8\cos^2\alpha - 4 + 2(\cos 2\alpha)^2 - 1 = -2 +$
$+ 8\cos^2\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 = -2 + 8\cos^2\alpha +$
$+ 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 2 = 8\cos^4\alpha.$

Аналогично упрощаем и знаменатель дроби, и т. д.

IV способ

$3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha +$
$+ (2\cos^2 2\alpha - 1) = 2 + 4\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha =$
$= 2(1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 2 \cdot (1 + \cos 2\alpha)^2 =$
$= 2(2\cos^2\alpha)^2 = 8\cos^4\alpha$, и т. д. (см. I способ).

210. *Ответ:* нет решений.

211. *Ответ:* $x = -1$.

Указание. Ввести подстановки $\frac{7}{x} + 1 = a^3$;
$\frac{9}{x} - 1 = b^3$. Далее исключить переменную x.

212. *Решение.* Так как $x + 2y + 3z = a$, то
$z = \frac{a}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y$, и первое уравнение примет вид

$$2\left(x + y + \frac{a}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right) = 4x^2 + y^2,$$ или

$4x + 2y + 2a = 12x^2 + 3y^2$, или

$$\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{9} - \frac{2a}{3} = 0.$$

Отсюда видно, что условию задачи удовлетворяет тройка чисел (x, y, z), если $\frac{2}{9} + \frac{2a}{3} = 0$, откуда $a = -\frac{1}{3}$.

Ответ: при $a = -\frac{1}{3}$.

213. *Решение.* Нетрудно заметить, что $\log_3 (4 - |\sin ax|) \geq 1$, а $\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$.

Следовательно, равенство выполняется при условии $\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ и $|\sin ax| = 1$.

Если $\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$, то $\pi x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$, откуда $x = \frac{1}{4} + 2n$, $n \in Z$, и поскольку $x \in [4; 5]$, то $x = \frac{17}{4}$ — единственный корень.

Значения $a \in (3; 5)$ находим, решив уравнения $\left|\sin\frac{17a}{4}\right| = 1$, или $\sin^2\frac{17a}{4} = 1$, откуда $\cos^2\frac{17a}{4} = 0$, $\cos\frac{17a}{4} = 0$, $\frac{17a}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, т. е. $a = \frac{2\pi}{17}(1 + 2n)$, $n \in Z$.

По условию $a \in (3;\ 5)$, т. е. $3 < \frac{2\pi}{17}(1 + 2n) < 5$,

или $\frac{51-2\pi}{4\pi} < n < \frac{85-2\pi}{4\pi}$.

Так как $n \in Z$, то подходят значения

$a_1 = \frac{2\pi}{17}(1 + 2 \cdot 4) = \frac{18\pi}{17}$;

$a_2 = \frac{2\pi}{17}(1 + 2 \cdot 5) = \frac{22\pi}{17}$;

$a_3 = \frac{2\pi}{17}(1 + 2 \cdot 6) = \frac{26\pi}{17}$ (получены при $n = 4;\ 5;\ 6$).

Тогда $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{66\pi}{17}$.

Ответ: $\frac{66\pi}{17}$.

214. *Ответ:* arccos 0,8.

215. *Ответ:* нет корней.

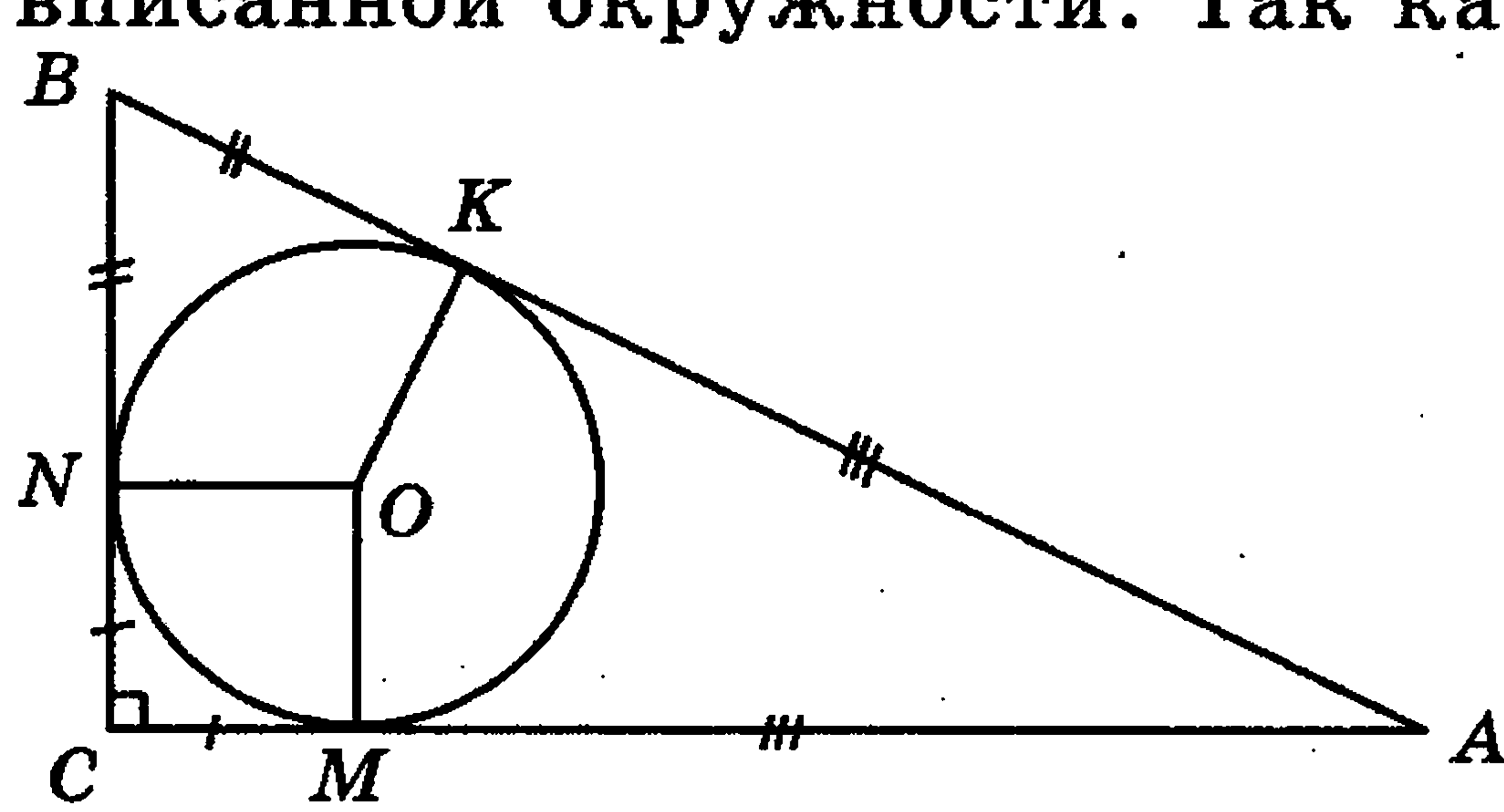
Указание. Преобразовать уравнение к виду

$\frac{\log_{x+3}(x^3 - 7x + 5)}{\log_{x+3}(x-3)} = 3$, и т. д.

216. *Решение.*

I способ

Пусть в ΔABC ($\angle C = 90^\circ$) $OM = ON = OK = r$ — радиус вписанной окружности. Так как ΔABC



прямоугольный, то AB — диаметр описанной окружности, тогда $AB = 2R$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r$, где p — полупериметр. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $AC + BC = 2r + AB$, тогда $S = \frac{1}{2}(2r + 2AB)r = (r + AB)r = (r + 2R)r$. Итак, $S = (2R + r)r$, ч. т. д.

II способ

Так как ΔABC прямоугольный, то $AB = 2R$, тогда $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC$. Пусть $AC = x$, $BC = y$, тогда $S = \frac{1}{2}xy$.

Из ΔABC $x^2 + y^2 = 4R^2$. (1)

Известно, что $r = \frac{1}{2}(x + y - 2R)$, откуда

$x + y = 2(R + r)$. (2)

Из (1), (2) имеем систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4R^2, \\ x + y = 2(R + r). \end{cases}$

Из I уравнения имеем $(x + y)^2 - 2xy = 4R^2$, или, учитывая (2), получим $4(R + r)^2 - 2xy = 4R^2$, откуда $\frac{1}{2}xy = (R + r)^2 - R^2$, или $S = r(2R + r)$, ч. т. д.

217. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Записать уравнение в виде $(4^x)^3 - (3^x)^2 = 3((4^x)^2 \cdot 3^x - 4^x \cdot (3^x)^2)$.
Далее обозначить $4^x = a$, $3^x = b$, и т. д.

218. *Ответ:* $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{5}{4}$.

219. *Ответ:* $\left[\frac{9-\sqrt{417}}{12}; \frac{11-\sqrt{485}}{14}\right] \cup$

$$\cup \left[\frac{13+\sqrt{449}}{14}; \frac{9+\sqrt{417}}{12}\right].$$

220. *Ответ:* $x = 4$, $y = 4$, $z = 1$.

Указание. Учесть, что $10 \le \sqrt{xyz} \le 31$, тогда $z \le 3$, т. е. $z = 1; 2; 3$, и т. д.

221. *Решение.* ОДЗ: $0 \le x \le 4$. Запишем уравнение в виде $(x-1)\sqrt{x} = 2\sqrt{x^2-2x+2} - \sqrt{4-x}$. (1)

Возведем обе части (1) в квадрат:

$(x-1)^2 x = 4(x^2 - 2x + 2) + (4 - x) -$

$- 4\sqrt{(x^2-2x+2)(4-x)}$,

или $4\sqrt{(x^2-2x+2)(4-x)} = -x^3 + 6x^2 - 10x + 8 + 4$.

Но $-x^3 + 6x^2 - 10x + 8 = (x^2 - 2x + 2)(4 - x)$, тогда получим

$4\sqrt{(x^2-2x+2)(4-x)} = (x^2 - 2x + 2)(4 - x) + 4$. (2)

Пусть $\sqrt{(x^2-2x+2)(4-x)} = y$, где $y \ge 0$, тогда уравнение (2) преобразуется к виду $y^2 - 4y + 4 = 0$, или $(y-2)^2 = 0$, откуда $y = 2$.

Учитывая замену, имеем $(x^2 - 2x + 2)(4 - x) = 4$, или $x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0$. (3)

Заметим, что $x = 2$ — корень уравнения (3), тогда получим $(x-2)(x^2 - 4x + 2) = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$. Найденные корни удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$.

222. *Ответ:* $x = \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{7}}$.

Указание. Преобразовать уравнение к виду $(x-1)^3 = 7x^3$, откуда $x - 1 = \sqrt[3]{7}\,x$, и т. д.

223. *Ответ:* $(-1; 0)$, $(1; 2)$.

Указание. Умножить и разделить левую часть второго уравнения на $\sqrt{y} - \sqrt{y-2x}$. В результате упрощения получим систему уравнений

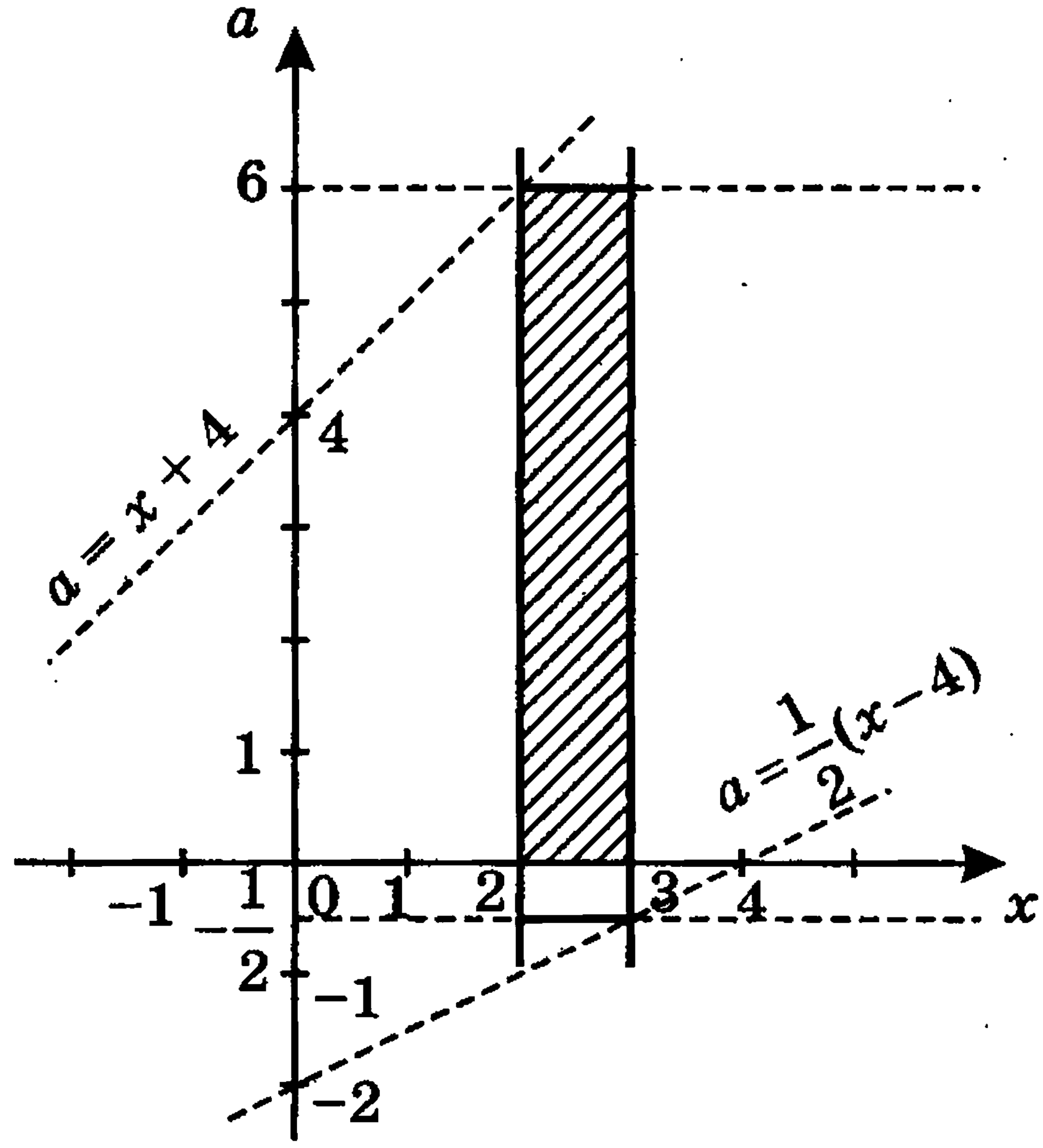
$$\begin{cases}\sqrt{y}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2},\\ \sqrt{y}-\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}x.\end{cases}$$

Далее сложить уравнения системы, получим $y = \dfrac{1}{2}(1+x)^2$. В этом случае I уравнение исходной системы примет вид

$$13\left(\frac{1}{2}(1+x)^2 - x\right) = 7x^4 + 6, \text{ и т. д.}$$

224. *Ответ:* $(3; 1)$, $(1; 3)$.

225. *Решение.* На плоскости xOa изобразим множество пар (x, y), для которых выполняется данное неравенство. Искомые значения a_0 характеризуются тем, что отрезок прямой $a = a_0$ при $x \in [2; 3]$ полностью принад-



лежит заштрихованной области, что достигается при $a \in \left(-\frac{1}{2};6\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};6\right)$

226. *Решение.* Заметим, что $4x^2 + 4x + 3 = (2x+1)^2 + 2$ и $x^2 - 4x + 6 = (2-x)^2 + 2$, тогда

$$\sqrt{(2x+1)^2+2}\cdot \operatorname{arctg}(2x+1) - \sqrt{(2-x)^2+2}\cdot \operatorname{arctg}(x-2) = 0.$$

Функция $f(t) = \sqrt{t^2+2}\cdot \operatorname{arctg} t$ монотонно возрастающая. Следовательно, последнее равенство означает, что при $t_1 = 2x + 1$ и $t_2 = x - 2$ значения функции совпадают, что возможно при условии, если $t_1 = t_2$, т. е. $2x + 1 = x - 2$, откуда $x = -3$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = -3$.

227. *Ответ:* $\dfrac{a^2\sin^2 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$.

228. *Ответ:* $f(x) = \frac{1}{12}(32x - 29)$,

$g(x) = -\frac{1}{4}(4x + 15)$.

229. *Решение.* Так как $16 + 6x - x^2 = 25 - (x-3)^2$, то $\log_5(16 + 6x - x^2) = \log_5(25 - (x-3)^2) \le \log_5 25 = 2$.

Кроме того, $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4} \ge 2$.

Следовательно, обе части уравнения одновременно выполняются лишь при $x = 3$, так как $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4} = \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} = 1$ и $\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{4} = 1$.

Итак, $x = 3$ — корень исходного уравнения.

230. *Ответ:* 4.

231. *Решение.* Из условия следует, что $x > 0$ и $9x^2 - 1 > 0$, откуда $x > \frac{1}{3}$.

Запишем уравнение в виде

$$1 + \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 1}} = \frac{35}{36x}. \qquad (1)$$

Существует единственное значение $0 < t < \frac{\pi}{2}$, такое, что $x = \frac{1}{3\sin t}$, тогда $\sqrt{9x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t}$, где $\cos t > 0$, $\sin t > 0$, так как $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

В этом случае уравнение (1) примет вид

$1 + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{35}{12}\sin t$, если

$12(\cos t + \sin t) = 35 \sin t \cos t. \qquad (2)$

Пусть $\sin t + \cos t = y$, тогда $y^2 = 1 + 2\sin t \cos t$, откуда $\sin t \cos t = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$, и уравнение (2) преобразуется к виду $12y = \frac{35}{2}(y^2 - 1)$, или $35y^2 - 24y - 35 = 0$, откуда $y_1 = -\frac{5}{7}$, $y_2 = \frac{7}{5}$.

Поскольку $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $y > 0$, тогда $y = \frac{7}{5}$.

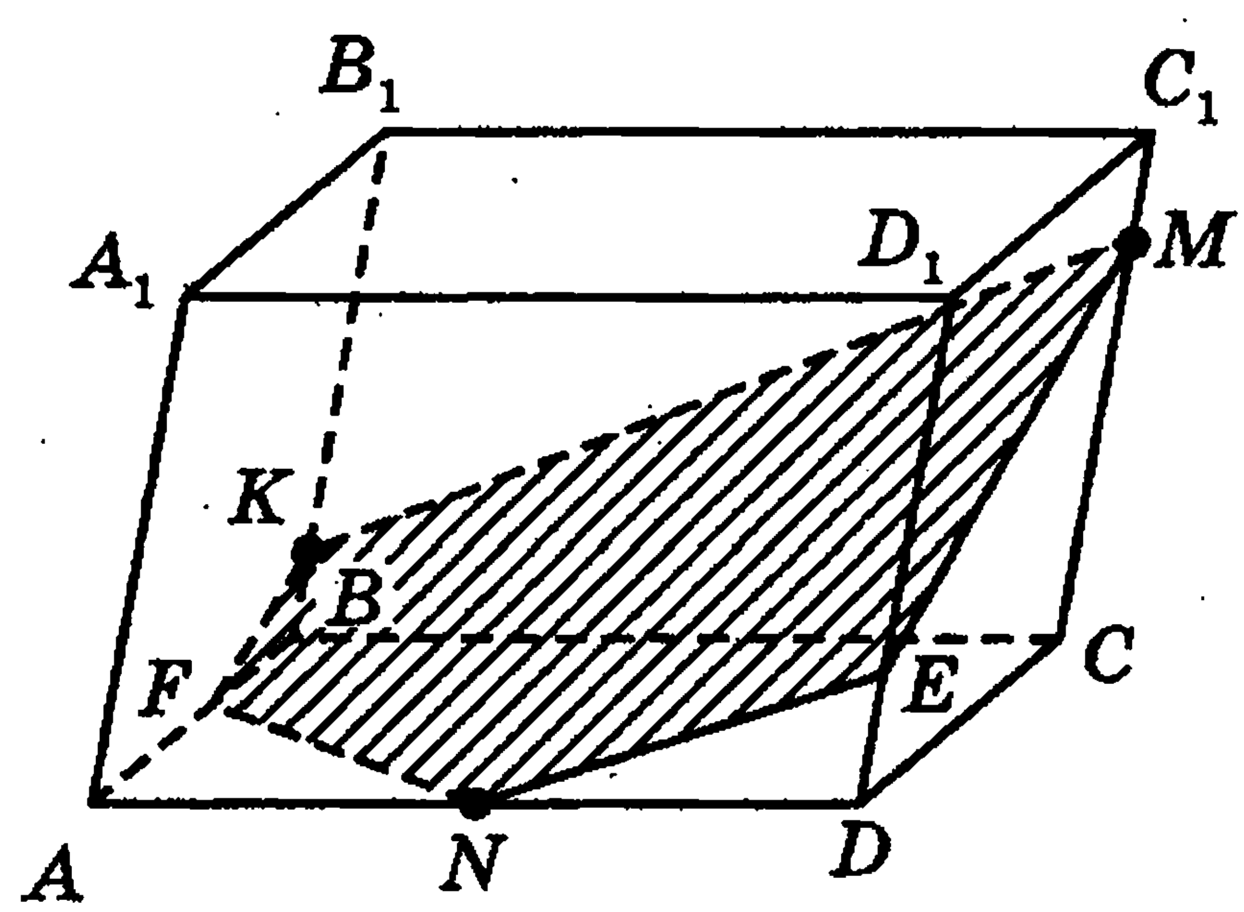
Получим систему уравнений $\begin{cases} \sin t + \cos t = \frac{7}{5}, \\ \sin t \cos t = \frac{12}{5}, \end{cases}$

откуда находим $\left[\begin{array}{l} \sin t = \dfrac{3}{5}, \\ \sin t = \dfrac{4}{5}. \end{array}\right.$

Так как $x = \dfrac{1}{3\sin t}$, то $x_1 = \dfrac{5}{9}$, $x_2 = \dfrac{5}{12}$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{5}{9}$, $x_2 = \dfrac{5}{12}$.

232. *Ответ:* (см. рис.). Пятиугольник $KMENF$ — искомое сечение.



233. *Ответ:* 1.

Указание. Установить, что данное число — корень уравнения $x^3 + 3x - 4 = 0$.

234. *Ответ:* $x = 2$.

Указание. Исходное уравнение записать в виде

$$\left(\frac{50505}{131313}\right)^x + \left(\frac{121212}{131313}\right)^x = 1. \qquad (1)$$

Далее исследовать на монотонность функцию в левой части уравнения (1), и т. д.

235. *Ответ:* -1.

Указание. Привести выражение к виду

$$\sqrt[3]{(\sqrt[3]{13}-1)^3} - \sqrt[3]{13}.$$

236. *Ответ:* $8833 = 88^2 + 33^2$.

Указание. Имеем $\overline{xxyy} = 1100x + 11y$. По условию $1100x + 11y = (11x)^2 + (11y)^2$, или $99x + (x + y) = 11(x^2 + y^2)$. Значит, $x + y$ кратно 11, и т. д.

237. *Ответ:* 35.

Указание. $\dfrac{n(n-3)}{2}$, где n — число диагоналей.

238. *Ответ:* $(0; 0)$, $(-4; 2)$, $(-2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $(-2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$.

239. *Решение.* Графики функций $y = \sin x$ и $y = ax$ проходят через начало координат и симметричны относительно начала координат. Следовательно, число корней данного уравнения нечетно, а 2010 — четное, ч. т. д.

240. *Решение.* Заметим, что выражение в I скобке есть сумма $(n + 1)$ членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1$, $q = 10$, $b_n = 10^n$, тогда

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1).$$

Значит, данное число можно представить в виде

$$\frac{10^{n+1}-1}{9}\cdot(10^{n+1} + 35) + 36, \text{ или}$$

$$\frac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+35)+9\cdot 36}{9} =$$

$$= \frac{10^{2(n+1)}+34\cdot 10^{n+1}-35+324}{9} =$$

$$= \frac{10^{2(n+1)}+34\cdot 10^{n+1}+17^2}{9} = \left(\frac{10^{n+1}+17}{3}\right)^2.$$

Поскольку $10^{n+1} + 17$ кратно 3, то искомое число есть точный квадрат, ч. т. д.

241. *Ответ:* 1) 20 рублевых и 20 четырехрублевых; 2) 28 рублевых, 9 четырехрублевых и 3 двенадцатирублевых.

242. *Указание.* Если $\sin x + \cos x = 1$, то $\sin x \cos x = 0$. Далее использовать формулу $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

243. *Ответ:* 23.

244. *Ответ:* $x^3 + x^2 + x + 2013 = -91(x + 7)^3 + 716(x + 7)^2 - 510(x + 7) + 1712$.

Указание. Имеет место тождество $x^3 + x^2 + x + 2013 = A(x + 7)^3 + B(x + 7)^2 + C(x + 7) + D$.

Далее раскрыть скобки и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях.

245. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 2$.

Указание. Учесть, что $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, и т. д.

246. *Решение.* Пусть $x^7 = y$, тогда $x^{28} = y^4$, $x^{21} = y^3$. Имеем $2y + y^4 = 3y^3$, или $y(y^3 - 3y^2 + 2) = 0$, или $y(y - 1)(y^2 - 2y - 2) = 0$, откуда $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$. Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \sqrt[7]{1 \pm \sqrt{3}}$.

247. *Ответ:* $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1)$.

248. *Решение.* Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{x^2 + 9y^2}{2xy} + \frac{18xy}{x^2 + 9y^2} = 6. \qquad (1)$$

Пусть $\frac{x^2 + 9y^2}{2xy} = t$, тогда (1) примет вид $t + \frac{9}{t} = 6$, или $(t - 3)^2 = 0$, откуда $t = 3$, тогда $\frac{x^2 + 9y^2}{2xy} = 3$, или $(x - 3y)^2 = 0$, $x = 3y$.

Следовательно, данное выражение запишется в виде $(x-7)^2+3xy=(x-7)^2+x^2=2x^2-14x+49$. Поскольку графиком квадратного трехчлена является парабола, то наименьшее значение данного выражения достигается в вершине параболы при $x_0=-\dfrac{b}{2a}=3{,}5$.

Ответ: 3,5.

249. *Ответ:* $r=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)$.

Указание. Доказать, что треугольник прямоугольный.

250. *Ответ:* $(0;\,1)\cup(1;\,\sqrt[10]{10})$.

251. *Указание.* Запишем данное число в виде

$$(29^n-16^n+(19^n-6^n)+(15^n-2^n).$$

Поскольку разность одинаковых степеней делится на разность оснований, то каждое из чисел в скобках делится на 13, а значит, и данное число кратно 13, ч. т. д.

252. *Решение.* Так как $a+b+c=0$, то

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc). \qquad (1)$$

Возведем обе части (1) в квадрат:
$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+$
$+2ab^2c+2abc^2)$, или
$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+$
$+2abc(a+b+c))$, или

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2). \qquad (2)$$

С другой стороны, $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+$
$+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. (3)

Из (2) и (3) получим
$4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=a^4+b^4+c^4+$
$+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$, откуда $2(a^4+b^4+c^4)=$
$=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$,
или $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$, ч. т. д.

253. *Ответ:* $x = -1$.

Указание. Умножить обе части уравнения на 4, а затем вычесть по единице.

254. *Ответ:* $(-1; -2)$, $(2; 1)$.

Указание. Умножить обе части II уравнения на 4, а затем вычесть из I уравнения системы полученное.

255. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

Указание. Привести данное уравнение к виду $\frac{(3x+1)^2}{x} = 8 \cdot \frac{3x+1}{\sqrt{x}} - 16$, $x > 0$.

Далее замена $\frac{(3x+1)^2}{x} = y$, и т. д.

256. *Ответ:* $(1; 1)$, $(9; 3)$.

257. *Указание.* Показать, что выражение $\frac{(2p+2)(2p+1)\cdot 2p}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{2p(p+1)(2p+1)}{3}$ — число целое.

Но по условию задачи p и $2p + 1$ — числа простые, значит, $p + 1$ делится на 3, а поэтому $4p + 1 = 3p + (p + 1)$ — число составное, ч. т. д.

258. *Указание.* Заметим, что $\frac{x^2-3x+4}{49} = \left(\frac{x+2}{7}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{7x}{49}}\right)^2$. $x + 2$ может делиться на 7 только в том случае, когда x делится на 7, а $7x$ может делиться на 49 только в том случае, если x делится на 7. Аналогично доказывается в остальных случаях.

259. *Ответ:* $7\,xy\,(x+y)\,(x^2+xy+y^2)^2$.

260. *Ответ:* $\frac{97}{6}\sqrt[3]{18}$.

261. *Ответ:* $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{72}+4)$.

262. *Ответ:* $(x+y+z)^3=27\,xyz$.

Указание. Записать уравнение в виде $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=$ $=-\sqrt[3]{z}$.

Далее возвести обе части в куб, используя формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3\,ab\,(a+b)$.

263. *Указание.* $\sqrt[n]{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1+2+\ldots+n}{n}=$ $=\frac{n(n+1)}{2n}$, и т. д.

264. *Решение.* $n^5-n=n(n^2-1)(n^2+1)$.

Если n не делится на 5, то число имеет вид $5k\pm1$, $5k\pm2$, тогда $n^2=(5k\pm1)^2=25k^2+10k+1$ и $n^2=(5k\pm2)^2=25k^2\pm20k+4$, т. е. n^2-1 кратно 5, или n^2+1 кратно 5. Значит, либо n^2-1, либо n^2+1 делится на 5.

265. *Решение.* Неполное частное

$$x=\frac{7\cdot19a\cdot29-39}{41}=94a-1+\frac{3a+2}{41}.$$

Наименьшее натуральное a, при котором $\frac{3a+2}{41}$ — целое число, $a=13$. При этом $x=1222$.

Значит, искомое число будет равно

$(1222\cdot41+39):29=1729$.

266. *Решение.* Вычитая $\frac{1}{2}(17-13)=2$ из каждого члена ряда, получим $-15+15-15+15-$

$- 15 + 15 - \ldots$ Следовательно, n-й член данного ряда равен $2 + 15 \cdot (-1)^n$.

267. *Указание.* Пусть $a = \operatorname{tg} A$, $b = \operatorname{tg} B$, $c = \operatorname{tg} C$, тогда по формуле тангенса разности получим $\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = 0$, или $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, откуда и следует, что исходный треугольник равнобедренный.

Замечание. Можно было воспользоваться соотношением $A + B + C = \pi$.

268. *Ответ:* $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Указание. Привести уравнение к виду

$$\left(\frac{x^2+x}{x-1}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x^2+x}{x-1} = 4.$$

Далее замена $\frac{x^2+x}{x-1} = y$, и т. д.

269. *Решение.* Умножим обе части данного равенства на $x\sqrt{x} - \sqrt{x^3-1}$, тогда после упрощений получим

$$y\sqrt{y} + \sqrt{y^3-1} = x\sqrt{x} - \sqrt{x^3-1}. \qquad (1)$$

Аналогично, умножая обе части на $y\sqrt{y} - \sqrt{y^3-1}$, получим

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x^3-1} = y\sqrt{y} - \sqrt{y^3-1}. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2), имеем

$2(\sqrt{x^3-1} + \sqrt{y^3-1}) = 0$, откуда

$\sqrt{x^3-1} + \sqrt{y^3-1} = 0$, ч. т. д.

270. *Решение.* Заметим, что $\operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ =$

$= \operatorname{tg}(30^\circ - 5^\circ) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + 5^\circ) =$

$$= \frac{\operatorname{tg} 30° - \operatorname{tg} 5°}{1 + \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg} 5°} \cdot \frac{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 5°}{1 - \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg} 5°} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 30° - \operatorname{tg}^2 5°}{1 - \operatorname{tg}^2 30° \operatorname{tg}^2 5°} = \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 5°}{3 - \operatorname{tg}^2 5°}.$$

Кроме того, $\operatorname{tg} 15° = \dfrac{\sin 15°}{\cos 15°} = \dfrac{\sin(3 \cdot 5°)}{\cos(3 \cdot 5°)}$.

Но $\sin(3 \cdot 5°) = \sin 5° \cdot (3 - 4\sin^2 5°)$ и $\cos(3 \cdot 5°) = \cos 5° \cdot (4\cos^2 5° - 3)$, тогда $\operatorname{tg} 15° =$

$$= \operatorname{tg} 5° \cdot \frac{4\cos^2 5° - 1}{4\cos^2 5° - 3} = \operatorname{tg} 5° \cdot \frac{4 \cdot \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 5°} - 1}{4 \cdot \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 5°} - 3} =$$

$$= \operatorname{tg} 5° \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 5°}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5°}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} 15° \cdot \operatorname{tg} 25° \cdot \operatorname{tg} 35° \cdot \operatorname{tg} 85° =$

$$= \operatorname{tg} 5° \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 5°}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5°} \cdot \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 5°}{3 - \operatorname{tg}^2 5°} \cdot \operatorname{tg} 85° =$$

$= \operatorname{tg} 5° \cdot \operatorname{tg} 85° = \operatorname{tg} 5° \cdot \operatorname{ctg} 5° = 1$, ч. т. д.

271. *Решение.* Пятизначные числа, оканчивающиеся цифрой 6, делятся на 3 в том и только в том случае, если четырехзначное число, полученное при отбрасывании последней цифры, делится на 3. Четырехзначных чисел будет всего 9999 − 999 = 9000. Заметим, что каждое третье из них делится на 3. Значит, существует 3000 четырехзначных чисел, кратных 3, и ровно столько же пятизначных чисел, которые оканчиваются на 6 и делятся на 3.

272. *Решение.* Заметим, что $x = \dfrac{1}{3}$ — корень уравнения. Докажем, что других корней исходное уравнение не имеет. При $x > -\frac{1}{3}$ функции $y_1(x) = 8^x$ и $y_2(x) = 3x + 1$ принимают положительные значения и возрастают, значит, левая часть уравнения также является возрастающей функцией. Тогда на промежутке $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ уравнение не может иметь более одного корня. Далее при $x \le -\frac{1}{3}$ имеем $y_1(x) > 0$, $y_2(x) \le 0$.

Значит, $y_1(x) \cdot y_2(x) \le 0$, т. е. на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ уравнение не имеет корней.

Итак, $x = \frac{1}{3}$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

273. *Решение.* При делении на 3 квадрат целого числа дает остаток 0, если число делится на 3, и остаток 1, если число не делится на 3. Если бы ни a, ни b не делились на 3, то остаток от деления числа $a^2 + b^2$ на 3 был бы равен 2, что в силу приведенного выше замечания невозможно, так как сумма $a^2 + b^2$ равна по условию c^2. Следовательно, по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3, ч. т. д.

11 класс

1. *Указание.* Учесть, что $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, и т. д.

2. *Решение.* Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{x+2009} - \frac{1}{x+2010} + \frac{1}{x+2010} - \frac{1}{x+2011} + \frac{1}{x+2011} - \frac{1}{x+2012} + \frac{1}{x+2012} - \frac{1}{x+2013} = \frac{1}{999999},$$

или $\frac{1}{x+2009} - \frac{1}{x+2013} = \frac{1}{999999}$,

$$\frac{4}{(x+2009)(x+2013)} = \frac{1}{999999}.$$

Пусть $x + 2011 = y$, тогда получим
$y^2 = 4\,(999\,999 + 1)$, или $(x + 2011)^2 = 4 \cdot 10^6$,
откуда $x + 2011 = \pm\, 2000$.
Значит, $x_1 = -11$, $x_2 = -4011$.
Ответ: $x_1 = -11$, $x_2 = -4011$.

3. *Ответ:* -4; $\pm\, 3$; 6.

Указание. Запишем уравнение в виде $\frac{(x+4)(x-2)}{x+2} - 5 + 1 - \frac{3x+4}{x^2-14} = 0$, или $\frac{x^2-3x-18}{x+2} + \frac{x^2-3x-18}{x^2-14} = 0$. Далее вынести общий множитель за скобки, и т. д.

4. *Указание.* $2(x^3 + y^3) = (x^3 - x^2y + xy^2 + y^3) + (x^3 + x^2y - xy^2 + y^3)$, а сумма $a^5 + b^5$ делится на $a + b$, где $a = x^3 - x^2y + xy^2 + y^3$, $b = x^3 + x^2y - xy^2 + y^3$.

5. *Решение.* Пусть $\log_7 \pi = \alpha$, тогда $\pi = 7^\alpha$. (1)

Аналогично $\log_5 \pi = \beta$, тогда $\pi = 5\beta$. (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow \pi^{1/\alpha} = 7$; $\pi^{1/\beta} = 5$, или $\pi^{1/\alpha} \cdot \pi^{1/\beta} = 35$, или $\pi^{1/\alpha + 1/\beta} = 35 > \pi^3$, или $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} > 3$.

Так как $\alpha = \log_7 \pi$ и $\beta = \log_5 \pi$, то получим

$\dfrac{1}{\log_7 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 3$, ч. т. д.

6. *Решение.* Пусть $\vec{a}(3^x; 3^y; 3^z)$ и $\vec{b}(1; 1; 1)$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3^x \cdot 1 + 3^y \cdot 1 + 3^z \cdot 1 = 9$; $|\vec{a}| = \sqrt{(3^x)^2 + (3^y)^2 + (3^z)^2} = \sqrt{9^x + 9^y + 9^z} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$; $|\vec{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 9$.

Имеем $\dfrac{3^x}{1} = \dfrac{3^y}{1} = \dfrac{3^z}{1}$, откуда $3^x = 3^y = 3^z$, т. е. $x = y = z$. Учитывая I уравнение исходной системы, имеем $3^x + 3^y + 3^z = 9$; $3^x = 3$, $x = 1$, тогда $y = 1$, $z = 1$.

Ответ: (1; 1; 1).

7. *Ответ:* $7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2$.

8. *Ответ:* $\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}}$, где $a < 3b$.

9. *Решение.* Известно, что если даны векторы $\vec{x} = (x_1; y_1)$ и $\vec{y} = (x_2; y_2)$, то $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1x_2 + y_1y_2$ и $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\vec{y}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

Так как $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos\gamma$, где $\cos\gamma = 1$, то $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \le |\vec{x}|\,|\vec{y}|$.

Следовательно, $x_1x_2 + y_1y_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

Аналогично для трехмерного пространства

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. (1)

Пусть $\vec{x}(\sqrt{2a+1}; \sqrt{2b+1}; \sqrt{2c+1})$, $\vec{y}=(1; 1; 1)$.

Согласно (1) имеем $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \le$ $\le \sqrt{2a+1+2b+1+2c+1}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2(a+b+c)+3}\cdot\sqrt{3} =$ $= \sqrt{2\cdot 12+3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{81} = 9$.

Итак, $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \le 9$, ч. т. д.

10. *Ответ:* $\frac{7}{5}(x^2+xy+y^2)$.

11. *Решение.* $7^{n+2}+8^{2n+1}=(7^{n+2}+7^n\cdot 8)+(8^{2n+1}-$ $-7^n\cdot 8) = 7^n(7^2+8)+8((8^2)^n-7^n) = 57\cdot 7^n+$ $+8(64^n-7^n)$. Поскольку 64^n-7^n кратно разности $64-7=57$, то и данное выражение кратно 57.

12. *Решение.* После возведения в n-ю степень и приведения подобных членов, получим

$$(\sqrt{2}-1)^n = A\sqrt{2}-B,$$

где A и B — целые числа.

Далее доказать, что $(\sqrt{2}+1)^n = A\sqrt{2}+B$.

Перемножив полученные равенства, имеем

$1=(\sqrt{2}-1)^n\cdot(\sqrt{2}+1)^n = 2A^2-B^2$, или

$B=\sqrt{2A^2-1}$, а это и дает требуемое представление $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{2A^2}-\sqrt{2A^2-1}$, ч. т. д.

13. *Ответ:* 1.

14. *Решение.* Простое число может иметь следующий вид: $p=3$, $p=3k+1$, $p=3k+2$. Если $p=3$, то $p+10=13$ и $p+14=17$ удовлетворяют условию задачи.

Если $p=3k+1$, то $p+10=3k+11$ и $p+14=$ $=3k+15$ — число составное.

Если $p=3k+2$, то $p+10=3k+12$ — число составное, значит, $p=3$.

Ответ: $p=3$.

15. *Решение.* $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}\cdot 8(2+\sqrt{5})} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1+3\sqrt{5}+3(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Ответ: $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

16. *Ответ:* $x_1 = 0$, $x_2 = 240/289$.

Указание. Умножить обе части уравнения на $\sqrt{1+x}+1$.

17. *Решение.* Поскольку $2x^2 + 2y^2 = (x^2 - xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2)$, то сумма седьмых степеней делится на сумму первых степеней.

18. *Указание.* Предварительно преобразовать второе уравнение системы. В результате получится система $x - y = 26$, $(x - y)(x + y) = 20$, и т. д.

19. *Ответ:* $(\pm 3; \pm 2)$.

Указание. Возвести I уравнение в квадрат, из II уравнения $x^2 + y^2 = \dfrac{78}{xy}$. Далее возвести в квадрат и вычесть I уравнение.

20. *Решение.* Пусть $x = \frac{\pi}{2} - y$, тогда

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \cos y \text{ и}$$

$$= \sin 13x = \sin\left(13\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right) = \sin\left(6\pi+\frac{\pi}{2}-13y\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}-13y\right) = \cos 13y = f(\cos y) = f(\sin x).$$

Заметим, что число 13 можно заменить любым целым числом вида $4n + 1$.

21. *Решение.* Рассмотрим вектор $\vec{u}\,(x,\ y)$ и $\vec{v}\,(\sqrt{y^2-1};\ \sqrt{x^2-1})$. Тогда $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2} = 3$ и I уравнение системы примет вид

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|. \qquad (1)$$

Равенство (1) означает, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны, тогда $x\sqrt{x^2-1} = y\sqrt{y^2-1}$. (2)

Заметим, что функция $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ возрастающая на $(-\infty;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$, тогда из (2) имеем $x = y$.

В этом случае II уравнение исходной системы с учетом области определения уравнения примет вид $x = y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Нетрудно проверить, что пара $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ является единственным решением системы.

Ответ: $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

22. *Ответ:* $(-1;\ 3)$, $(3;\ -1)$.

23. *Решение.* Если a, b, c — стороны треугольника, то $a + b > c$ (по неравенству треугольника), и т. д. Следовательно, $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 > a + b > c = (\sqrt[3]{c})^3$, откуда $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} > \sqrt[3]{c}$. Аналогично рассматриваются остальные случаи проверки неравенства треугольника. Значит, отрезки с длинами $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{c}$ также образуют треугольник.

24. *Ответ:* $x \in (1;\ +\infty)$. Исследовать функцию $f(x) = 3x^7 - x^4 + x - 3$ с помощью производной.

25. *Указание.* $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} < \dfrac{1+2+\ldots+n}{n} =$
$= \dfrac{n(n+1)}{2n}$, и т. д.

26. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 1$.

27. *Указание.* $\arccos\left(\log_2 \dfrac{x}{3}\right) < \dfrac{\pi}{3}$, откуда
$3\sqrt{2} < x \le 6$.

28. *Ответ:* $x = \dfrac{\lg 2}{\lg 3}$.

Указание. Прибавить и вычесть x^2, тогда $(\sqrt[x]{2} + x)^2 = (x + 3)^2$, и т. д.

29. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Записать уравнение в виде $(3^x)^3 -$
$- (2^x)^3 = 3 \cdot (2^x \cdot (3^x)^2 - 3^x \cdot (2^x)^2)$.

Далее замена $2^x = a$, $3^x = b$, и т. д.

30. *Решение.* Пусть в роще всего x деревьев. Опишем вокруг каждого дерева круг радиуса 6 м. Согласно условию, эти круги не пересекаются и расположены в круге радиуса $258 + 6 = 264$ м. Следовательно, площадь большого круга не меньше суммарной площади маленьких. Имеем неравенство $\pi \cdot 264^2 \ge \pi \cdot 6^2 \cdot x$, или $x \le 44^2 = 1936 < 2013$, ч. т. д.

31. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Указание. Прологарифмировать обе части уравнения, например, по основанию 10.

32. *Указание.* Достаточно показать, что данное выражение делится одновременно на 7 и 9. Далее рассмотреть 2 случая: 1) $n = 2k$; 2) $n = 2k + 1$.

33. *Решение.* Пусть $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, тогда $x^2 + y^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. В этом случае I уравнение системы примет вид $\sin^4 3\alpha + \cos^4 3\alpha = 1$, или $(\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha)^2 - 2\sin^2 3\alpha\cos^2 3\alpha = 1$, или $\sin^2 3\alpha = 0$, или $\cos^2 3\alpha = 0$, т. е. $\sin 3\alpha = 0$, или $\cos 3\alpha = 0$.

1. Если $\sin 3\alpha = 0$, то $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 0$, или $\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = 0$, $\sin\alpha = 0$, или $3 - 4\sin^2\alpha = 0$, $\sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

а) если $\sin\alpha = 0$, то $x = 0$, $y = \pm 1$;

б) если $\sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \pm\dfrac{1}{2}$,

т. е. имеем 6 пар решений.

2. Поскольку исходная система является симметрической, то существует еще 6 пар решений, так что имеем всего 12 пар решений.

Ответ: $(\pm1;\ 0)$, $\left(\pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\pm\dfrac{1}{2}; \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$(0;\ \pm1)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \mp\dfrac{1}{2}\right)$.

34. *Ответ:* $(4;\ 2)$, $(9;\ -3)$, $(1;\ 1)$.

35. *Решение.* Так как $|\sin x| \le 1$, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin x = 1,\\ \sin^7 x = 1,\\ -\sin 7x = 1.\end{cases}$

Из I уравнения имеем $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Полученное решение удовлетворяет II и III уравнениям системы, так как $\sin^7 x = (\sin x)^7 =$

$$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)^7 = \cos^7 2\pi n = 1,$$

$$-\sin 7x = -\sin\left(\frac{7\pi}{2}+14\pi n\right) = \cos 14\pi n = 1.$$

Итак, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

36. *Решение.* Пусть $f(x) = x^3 + 2x + 10$. Заметим, что данное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$. Так как $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ при всех $x \in R$, то функция $f(x)$ является возрастающей на всей числовой прямой. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $f(x) = x$, т. е. уравнению

$x^3 + 2x + 10 = x$, или $x^3 + x + 10 = 0$,

$(x^3 + 8) + (x + 2) = 0$;

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (x + 2) = 0$,

$(x + 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$, откуда $x = -2$.

Уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$).

Ответ: $x = -2$.

37. *Указание.* Выразить левую часть равенства через первый член b_1 и знаменатель прогрессии q, и т. д.

38. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$x - 13 = (13 + x^2)^2$, откуда $\sqrt{x-13} = 13 + x^2$. (1)

Пусть $f(x) = 13 + x^2$, тогда $x = \sqrt{f-13}$,

т. е. $g(x) = \sqrt{x-13}$, или $g(x) = f(x)$, тогда $f(x) = x$, т. е. $13 + x^2 = x$ или $x^2 - x + 13 = 0$.

Полученное уравнение, а значит, и исходное, корней (действительных) не имеет, так как $D < 0$.

Замечание. Уравнение $x - 13 = (13 + x^2)^2$ можно решить иначе. Так как $13 + x^2 > 0$ при всех $x \in R$, то $x > 13$. Но при $x > 13$, $(13 + x^2)^2 > x - 13$, так что равенство $x - 13 = (13 + x^2)^2$ не может выполняться ни при каких x, т. е. исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

39. *Решение.* Пусть $f(x) = 6\ \mathrm{tg}^3\, x - 5$, тогда $\mathrm{tg}\, x = \sqrt[3]{\frac{1}{6}(\mathrm{tg}\, x+5)}$, т. е. $g(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{6}(f(x)+5)}$ — обратная функция (правая часть исходного уравнения). Тогда $g(x) = f(x)$, где $f(x)$ — монотонно возрастающая на области определения. Значит, $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = x$, или $6\ \mathrm{tg}^3\, x - 5 = \mathrm{tg}\, x$,

$$6\ \mathrm{tg}^3\, x - \mathrm{tg}\, x - 5 = 0. \qquad (1)$$

Пусть $\mathrm{tg}\, x = y$, тогда (1) примет вид

$$6y^3 - y - 5 = 0.$$

Очевидно, что $y = 1$ — корень полученного уравнения, тогда

$$6y\,(y^2 - 1) + 5\,(y - 1) = 0,$$
$$(y - 1)\,(6y^2 + 6y + 5) = 0,$$

откуда $y = 1$ — единственный корень, так как уравнение $6y^2 + 6y + 5 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$).

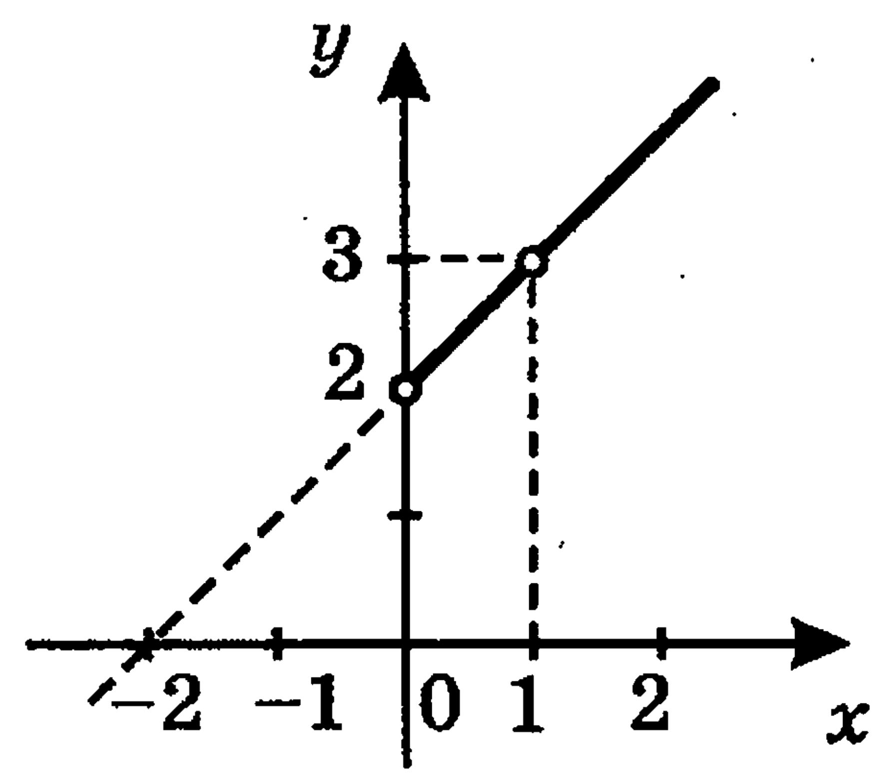
Если $y = 1$, то $\mathrm{tg}\, x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

40. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. $x = 1$ не является корнем. Далее умножить обе части уравнения на $(x^2 - 1) \neq 0$. В результате получим $(x^3 - 1)\,(x^{13} - 1) = (x^8 - 1)^2$, и т. д.

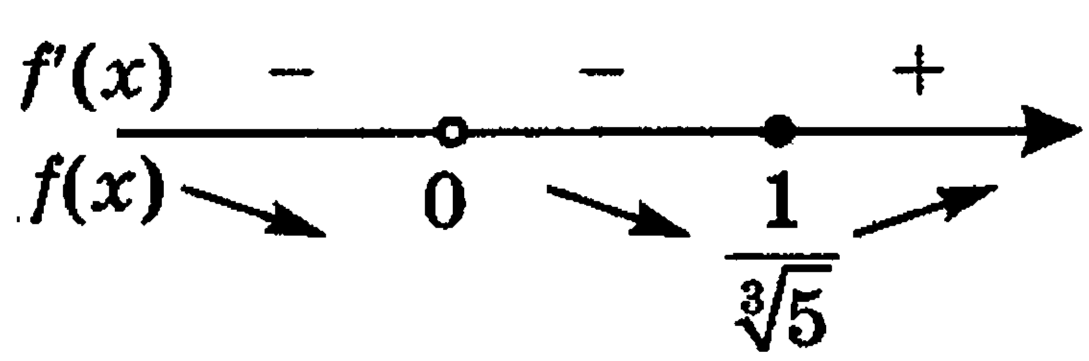
41. *Решение.* $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$



Тогда $y = 1 \cdot \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}$, или

$y = x + 2$ (см. рис.).

42. *Решение.* Заметим, что корнями уравнения $5x^2 + \dfrac{2}{x} = 3\sqrt[3]{5}$ являются абсциссы точек пересечения или касания графика функции $f(x) = 5x^2 + \dfrac{2}{x}$ и прямой $y = 3\sqrt[3]{5}$. Найдем промежутки монотонности функции $y = f(x)$ и точки ее экстремумов. $f'(x) = 10x - \dfrac{2}{x^2}$, $f'(x) = 0$, или $\dfrac{2(5x^3-1)}{x^2} = 0$, откуда $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$, $x \neq 0$.



Итак, $f'(x) > 0$ при $x \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $0 < x \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Следовательно, функция $y = f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right]$ и возрастает на $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ — точка минимума функции, тогда $y_{min} = y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{25}} + 2\sqrt[3]{5} = \frac{15}{\sqrt[3]{25}} = $
$= \frac{15\sqrt[3]{5}}{5} = 3\sqrt[3]{5}$.

Таким образом, число $3\sqrt[3]{5}$ является корнем уравнения $5x^2 + \frac{2}{x} = 3\sqrt[3]{5}$, и при $x > 0$ неравенство выполняется лишь в точке минимума. Поскольку функция $f(x) = 5x^2 + \frac{2}{x}$ непрерывна и убывает на $(-\infty;\ 0)$, то если мы найдем точку $x_0 \in (-\infty;\ 0)$, такую, что $f(x_0) = 3\sqrt[3]{5}$, то решением исходного неравенства будет интервал $[x_0;\ 0)$. Значит, если точка x_0 существует, то она является корнем уравнения $5x^2 + \frac{2}{x} = 3\sqrt[3]{5}$ и равносильного ему уравнения $5x^3 - 3\sqrt[3]{5}\,x + 2 = 0$.

Разделив многочлен $5x^3 - 3\sqrt[3]{5}\,x + 2$ на двучлен $\sqrt[3]{5}\,x - 1$, получим

$$5x^3 - 3\sqrt[3]{5}\,x + 2 = (\sqrt[3]{5}\,x - 1)(5x^2 + \sqrt[3]{25}\,x - 2\sqrt[3]{5}) = 0.$$

Так как $5x^2 + \sqrt[3]{25}\,x - 2\sqrt[3]{5} = (\sqrt[3]{5}\,x - 1)(\sqrt[3]{25}\,x + 2\sqrt[3]{5})$, то $x_0 = -\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$. Следовательно, решением исходного неравенства являются все числа из промежутка $\left[-\frac{2}{\sqrt[3]{5}};\ 0\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{2}{\sqrt[3]{5}};\ 0\right) \cup \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right\}$.

43. *Решение.* Поскольку $27 = xy + yz + xz \geq \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$, $xyz = x + y + z + 18 \geq 4\sqrt[4]{18xyz}$, то из первого неравенства имеем $xyz \leq 27$, а из второго, с учетом того, что $xyz \geq 0$ (по условию), получим $xyz \geq 27$. Значит, $xyz = 27$, откуда $x = y = z = 3$ (из неравенства между средними).

Ответ: (3; 3; 3).

44. *Ответ:* $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \geq 2$.

Указание. $x - 2 + 2\sqrt{x-3} = (x-3) + 2\sqrt{x-3} + 1$. После преобразований решить уравнение $\sin x = 1$, где $x \geq 3$.

45. *Ответ:* нет решений. Преобразовать неравенство к виду $2|x| - x \leq -0{,}5$. Далее рассмотреть два случая: 1) $x \geq 0$; 2) $x < 0$.

46. *Указание.* Предварительно доказать, что $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{a}{2}(3 - a^2)$, тогда $\sin^5 x + \cos^5 x = = (\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) - \sin^2 2x \cos^2 x \cdot \cdot (\sin x + \cos x)$, где $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}(a-1)^2$, и т. д.

47. *Ответ:* $[-2\sqrt{2};\ 0) \cup (0;\ 2\sqrt{2}]$.

48. *Ответ:* [3; 5,25].

49. *Решение.* В силу того, что $|\sin\alpha| \le 1$ и $|\cos\alpha| \le 1$, имеем неравенство

$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1) \le 6,$$

причем равенство выполняется, если

$$\sin(x-y) = 1 \text{ и } \cos(2x-y) = 1.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(x-y)=1, \\ \cos(2x-y)=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \\ 2x-y=2\pi m, \end{cases} \quad n, m \in Z.$$

Решая полученную систему (например, вычитанием), находим

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2(m-n)\pi = 2\pi k - \frac{\pi}{2},$$

$$y = (2(m-2n)-1)\pi = (2(k-n)-1)\pi + (2l+1)\pi.$$

50. *Решение.* Заменяя x на $\dfrac{1}{x}$, получим

$$5f\left(\frac{1}{x}\right) = 3f(x) + \sqrt{x}, \text{ где } x > 0.$$

Решая полученное уравнение с данным, имеем

$$\begin{cases} 5f(x)-3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \\ 3f(x)-5f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\sqrt{x}. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения на 5, а второго на (-3), а затем почленно складывая, получим $16f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}$, $x > 0$, откуда

$$f(x) = \frac{5+3x}{16\sqrt{x}}.$$

51. *Ответ:* $(2^{-1/\sqrt{3}};\ 2^{1/\sqrt{3}})$.

52. *Решение.* Пусть $y = x - 2$, тогда числа $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 3$ являются корнями многочлена $(y + 2)^3 - 9(y + 2)^2 + 3a(y + 2) + a = y^3 - 3y^2 + 3(a - 8)y + 7a - 28$.

Согласно теореме Виета для кубического уравнения, имеем

$y_1 + y_2 + y_3 = 3$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 3(a - 8)$,
$y_1y_2y_3 = 28 - 7a$.

Кроме того, $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0$, но $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3y_1y_2y_3$, тогда получим $0 = 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot (a - 8) \cdot 3 + 3 \cdot (28 - 7a)$, откуда находим $a = \dfrac{109}{16}$.

Ответ: $a = \dfrac{109}{16}$.

53. *Решение.* $7\sin\beta = 6\sin\beta + \sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$,
или $6\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta) - \sin\beta = 2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$. (1)
С другой стороны, $7\sin\beta = 8\sin\beta - \sin\beta$,
или $8\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta) + \sin\beta = 2\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha$. (2)
Разделив обе части (2) на (1), получим

$$\frac{8\sin\beta}{6\sin\beta} = \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)},$$ или

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$, откуда $3\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4\operatorname{tg}\alpha$, ч. т. д.

54. *Ответ:* $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{9 + 4n^2}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Указание. После упрощения получим

$\cos\left(\pi\sqrt{x^2-4x-5}\right) = 1$, или $\begin{cases} x^2-4x-5 \ge 0, \\ \pi\sqrt{x^2-4x-5} = 2\pi n, \end{cases}$

$n = 0, 1, \ldots$, и т. д.

55. *Решение.* ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 6{,}5, \\ x \ne 4, \end{cases}$ т. е. $x \in [6{,}5; +\infty)$.

Запишем уравнение в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + x - 6{,}5 +$

$+ 13{,}5 = \frac{(x-2)^2}{x-4} + x$, или $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + 7 = \frac{(x-2)^2}{x-4}$. (1)

Заметим, что $x = 6$ — корень уравнения (1). Докажем, что других корней уравнение (1) не имеет. Так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + 7$ убывает. Для функции $y = \frac{(x-2)^2}{x-4}$ найдем производную:

$$y' = \frac{2(x-2)(x-4)-(x-2)^2\cdot 1}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{(x-2)(2x-8-x+2)}{(x-4)^2} = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)^2}.$$

Если $x \ge 6{,}5$, то $y' > 0$, значит, функция $y = \frac{(x-2)^2}{x-4}$ возрастает на $[6{,}5; +\infty)$. Следовательно, $x = 6$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 6$.

56. *Решение.* Рассмотрим функцию

$$y = \ln(1 + x) - \frac{x}{1+x}.$$

Заметим, что при $x > 0$ функция возрастает, так как при $x > 0$

$$y' = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0,$$

а при $x = 0$, $y' = 0$.

Значит, при $x > 0$ выполняется неравенство $\ln(1 + x) - \dfrac{x}{1+x} > 0$. Полагая $x = \dfrac{1}{2012}$, получим

$$\ln\frac{2013}{2012} - \frac{1/2012}{2010/2012} > 0, \text{ или } \ln\frac{2013}{2012} > \frac{1}{2013},$$

т. е. I число меньше II.

57. *Ответ:* нет корней.

Указание. $\arcsin x + \arccos = \dfrac{\pi}{2}$.

58. *Решение.* ОДЗ. $4 - x^2 \geq 0$, $x^2 \leq 4$, $|x| \leq 2$.

Заметим, что левая и правая части уравнения — четные функции, так как

$$(-x)^2\sqrt{4-(-x)^2} = x^2\sqrt{4-x^2} \text{ и}$$

$$|-x|^3 - 4|-x| + 4\sqrt{2} = |x|^3 - 4|x| + 4\sqrt{2}.$$

Следовательно, для нахождения корней исходного уравнения (если они существуют) достаточно ограничиться нахождением положительных корней, а затем указать в ответе противоположные им значения. Тогда существует, причем единственное, число $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, такое, что $x = 2\sin t$, при котором данное уравнение примет вид

$4\sin^2 t \cdot 2\cos t = 8\sin^3 t - 8\sin t + 4\sqrt{2}$, или

$\sin^2 t\cos t - \sin^3 t + \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, или

$\sqrt{2}\sin t\,(\sin t\cos t + \cos^2 t) = 1$, или

$2\sin t\cos t\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right) = 1$, или

$\sin 2t\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $\sin 2t > 0$ и

$\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ (так как $t \in [0;\ \pi/4]$), тогда

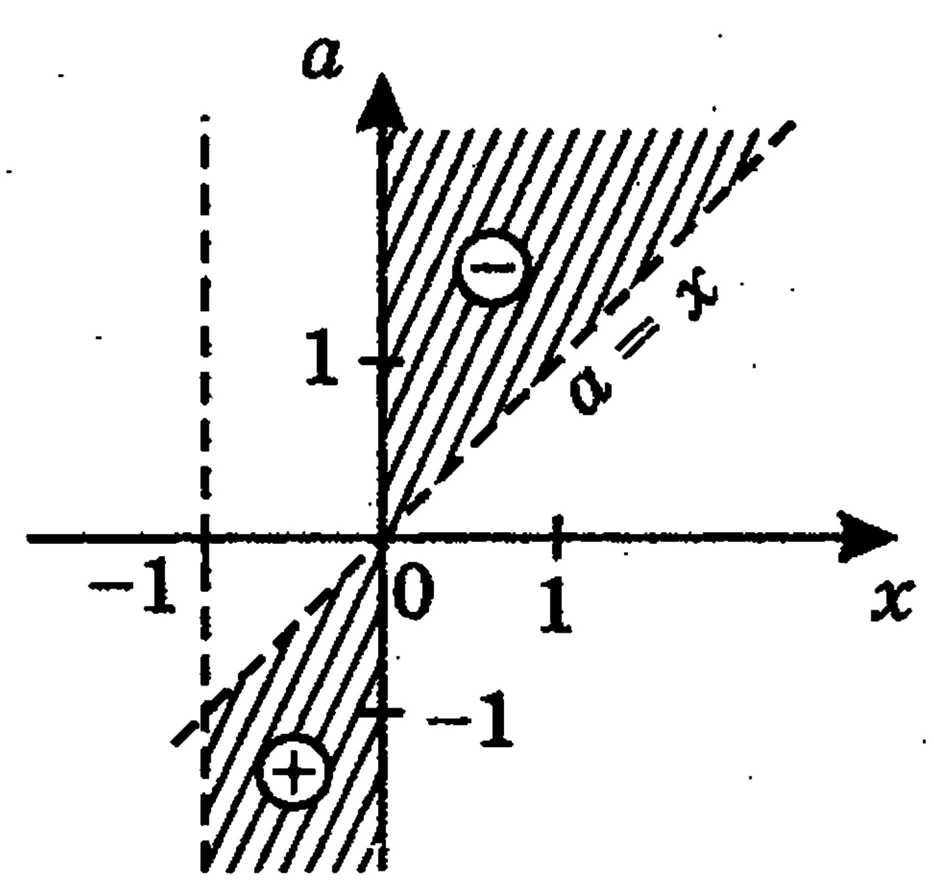
$\left[\begin{array}{l}\sin 2t = 1,\\ \sin(t+\pi/4) = 1,\end{array}\right.$ откуда $t = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

Следовательно, как указывалось ранее, $x = -\sqrt{2}$ — также корень исходного уравнения.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

59. *Ответ:* $\dfrac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

60. *Решение.* Заметим, что $4x^2 - x + \sqrt{7} > 0$ при всех $x \in R$ (так как $D < 0$ и первый коэффициент $4 > 0$). Тогда данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0$.



Для решения полученного неравенства на координатной плоскости $(x;\ a)$ найдем области, где выражение, стоящее в левой части неравенства, сохраняет знак, и определим его. Границы этих областей задаются соотношениями $x + 1 > 0$, $x + 1 = 1$, т. е. $x = 0$ и $a = x$. На рисунке заштрихованы те области, координаты точек которых удовлетворяют неравенству.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1]$, $x \in (-1; 0)$;
при $a \in (-1; 0)$, $x \in (a; 0)$;
при $a = 0$ решений нет;
при $a \in (0; +\infty)$, $x \in (0; a)$.

61. *Решение.* ОДЗ: $\left[-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Заменой $x = \sin\alpha$, где $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, уравнение приводится к виду $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Но $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha$ и $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = |\cos\alpha|$.

Так как $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$, тогда

$\sin 3\alpha = \cos\alpha$, или $\sin 3\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0$;

$2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = 0$,

или $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 0$.

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = 0$, $\frac{\pi}{4} - 2\alpha = \pi n$, откуда

$\alpha = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Тогда $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2} \le \frac{\pi}{2}$.

Решая полученное неравенство, находим
$-\frac{3}{4} \le n \le \frac{5}{4}$, т. е. $n = 0; 1$.

Если $n = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{8}$; если $n = 1$, $\alpha = -\frac{3\pi}{8}$.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = 0$, откуда $\frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

т. е. $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Следовательно, $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + \pi n \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{4} \le n \le \frac{1}{4}$,

$n = 0$, тогда $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

а) $\alpha = \frac{\pi}{8}$, $x = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

б) $\alpha = \frac{3\pi}{8}$, $x = \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) =$

$= -\cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

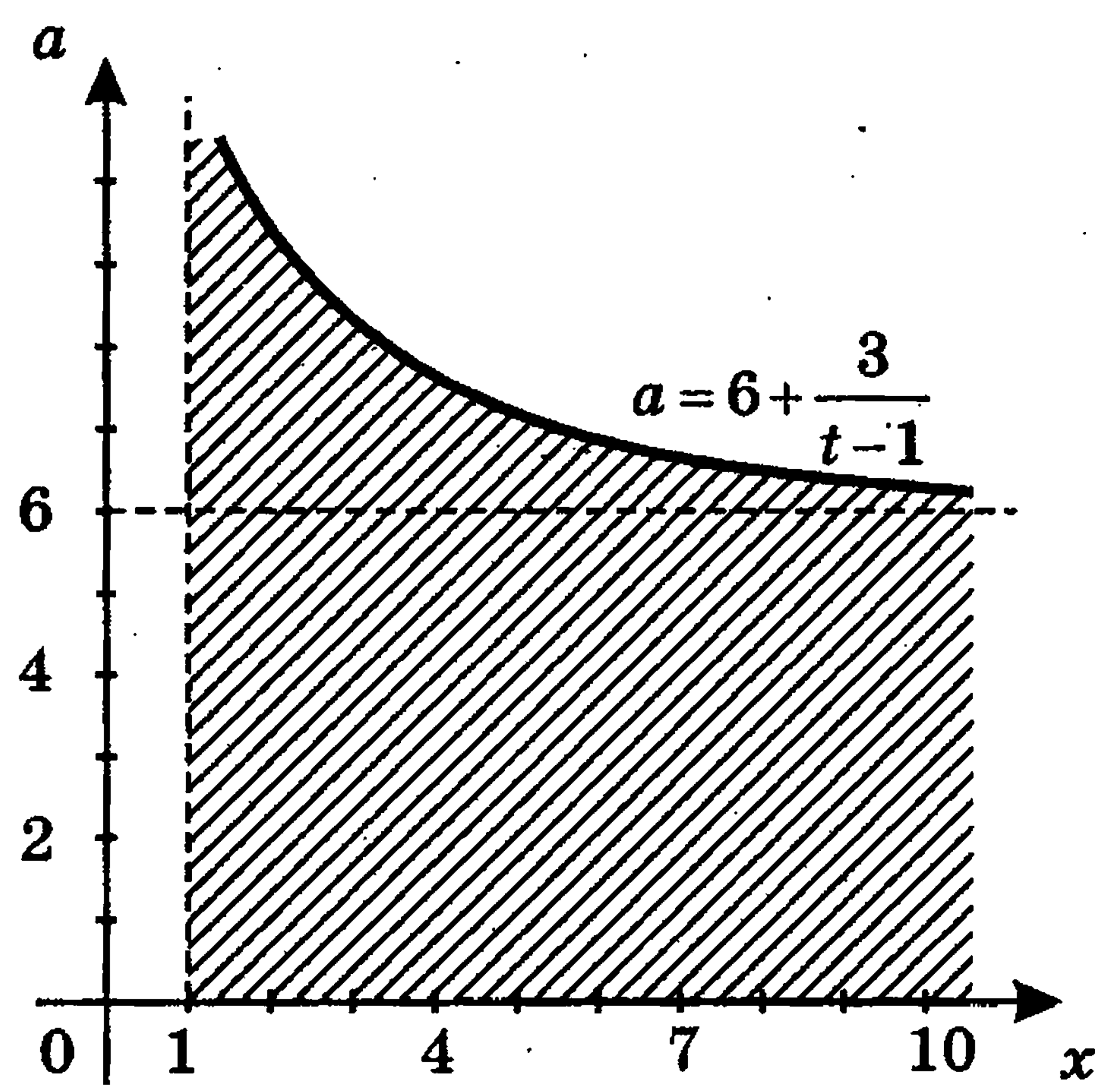
62. *Решение.* Согласно условию, искомое число имеет вид $\overline{2abcde}$, тогда имеем $\overline{abcde2} = 3 \cdot \overline{2abcde}$, или $\overline{abcde} \cdot 10 + 2 = 3 \cdot (2 \cdot 10^5 + \overline{abcde})$.

Пусть $\overline{abcde} = X$ — пятизначное число, тогда $10X + 2 = 3 \cdot (2 \cdot 10^5 + X)$, или $7X = 6 \cdot 10^5 - 2$,

$X = 85\,714$, тогда исходное число будет равно $\overline{2abcde} = \overline{2X} = 285\,714$.

Ответ: 285 714.

63. *Решение.* Пусть $2^{\sqrt{x-4}} = t$, где $t \geq 1$, тогда получим неравенство $(a - b)t < a - 3$.



На координатной плоскости $(t;\ a)$ изобразим области, координаты точек которых удовлетворяют соотношению $t = 1$ и $(a - 6)t = a - 3$, откуда $a = \dfrac{3(2t-1)}{t-1} = 6 + \dfrac{3}{t-1}$. На рисунке нужная область заштрихована. Следовательно, при $a \in (-\infty;\ 6]$ $t \in [1;\ +\infty)$; при $a \in (6;\ +\infty)$ $t \in \left[1; \dfrac{a-3}{a-6}\right)$,

Учитывая замену, получим ответ.

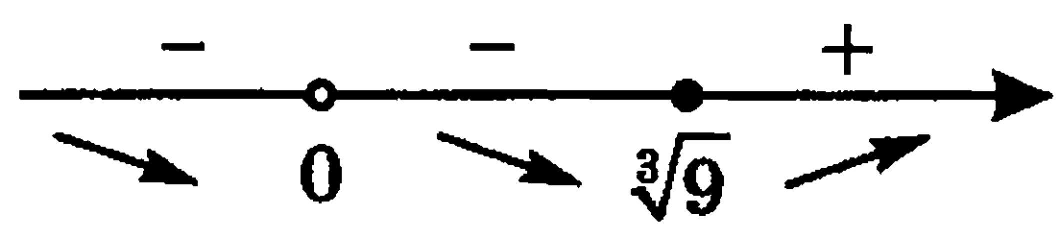
Ответ: при $a \in (-\infty;\ 6)$, $x \in [4;\ +\infty)$;

при $a \in (6;\ +\infty)$, $x \in \left[4; 4+\log_2^2\left(\dfrac{a-3}{a-6}\right)\right)$.

64. *Решение.* Пусть $f(x) = x^2 + \dfrac{18}{x}$.

Найдем с помощью производной наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ (если они существуют).

$f'(x) = 2x - \dfrac{18}{x}$, $f'(x) = 0$, $x \neq 0$, или $2x^3 - 18 = 0$, $x = \sqrt[3]{9}$.



Следовательно, $x = \sqrt[3]{9}$ — точка минимума, тогда $f_{min} = f(\sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{9^2} + \dfrac{18}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{27}{\sqrt[3]{9}} = 9\sqrt[3]{3}$.

Итак, $x_0 = \sqrt[3]{9}$ — один из корней исходного уравнения. Записав его в виде $x^3 - 9\sqrt[3]{3}\,x + 18 = 0$, разложим левую часть на множители по степеням $(x - \sqrt[3]{9})$ (например, делением «уголком»).

Имеем $(x - \sqrt[3]{9})(x^2 + \sqrt[3]{9}\,x - 6\sqrt[3]{3}) = 0$, откуда $x_1 = \sqrt[3]{9}$, $x^2 + \sqrt[3]{9}\,x - 6\sqrt[3]{3} = 0$, $D = 27\sqrt[3]{3} > 0$, $x_{2,3} = \dfrac{-\sqrt[3]{9} \pm \sqrt{27\sqrt[3]{3}}}{2} = \dfrac{-\sqrt[3]{9} \pm 3\sqrt[3]{9}}{2}$, $x_2 = \sqrt[3]{9}$, $x_3 = -2\sqrt[3]{9}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет 3 корня, из которых x_1 и x_2 совпадают.

Ответ: $\sqrt[3]{9}$, $-2\sqrt[3]{9}$.

65. *Ответ:* нет решений.

66. *Решение.* Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ взаимно обратные. В силу симметрии их графиков относительно прямой $y = x$ следует, что в случае касания оба графика либо касаются прямой $y = x$, либо перпендикулярны ей.

Следовательно, в точке касания имеем

$y' = a^x \ln a = \pm 1$, $x = a^x$, откуда $a = e^{\frac{1}{e}}$ $(x = e)$ для знака «+» и a^{-e} $(x = e^{-1})$ для знака «−». Таким образом, график $y = a^x$ касается графика $y = \log_a x$ при $a = e^{1/e}$, $a = e^{-e}$.

67. *Решение.* $4 + 4\cos\dfrac{x-y}{2} + (1 + \cos(x - y)) =$

$$= 4\sqrt{4x - x^2}\cdot\frac{1+\cos\frac{x-y}{2}}{2},$$

$$4 + 4\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos^2\frac{x-y}{2} =$$

$$= 2\sqrt{4x - x^2}\left(1+\cos\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos^2\frac{x-y}{2} + (2 - \sqrt{4x-x^2}\cos\frac{x-y}{2} + (2 - \sqrt{4x-x^2}) = 0.$$

Полученное уравнение решаем как квадратное относительно $\cos\dfrac{x-y}{2}$.

$D = (2 - \sqrt{4x-x^2})^2 - 4(2 - \sqrt{4x-x^2}) =$
$= -(2 - x)^2 \le 0$, откуда $x = 2$, тогда

$\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{4x-x^2}-2}{2}$, или $\cos\dfrac{2-y}{2} = 0$, или

$\cos\dfrac{y-2}{2} = 0$, откуда $y = \pi + 2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $(2; \pi + 2 + 2\pi n)$, $n \in Z$.

68. *Решение.* Данное выражение приведем к основанию 2:

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 6}\cdot\frac{\log_2 6}{\log_2 7}\cdot\frac{\log_2 7}{\log_2 8}=$$

$$=\frac{\log_2 2}{\log_2 8}=\frac{1}{3}.$$

Замечание. Известно, что $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$. (1) Если поставить в соответствие логарифму $\log_a b$ дробь $\frac{b}{a}$ и то же сделать для других логарифмов, то равенству (1) можно поставить в соответствие равенство $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, которое означает обычное сокращение на a. Рассматривая наш пример, имеем после сокращения дробь $\frac{2}{8}$, которой соответствует $\log_2 8=\frac{1}{3}$ (см. *Шарыгин И.* Математика для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1997. С. 139–140).

69. *Ответ:* $b = a$.

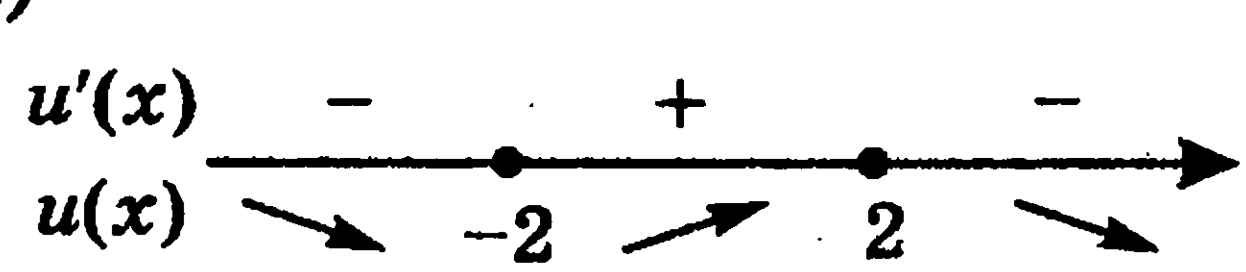
Указание. Учесть, что $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, и т. д.

70. *Решение.* Запишем I уравнение в виде $y^2=\frac{4x}{x^2+4}$. Пусть $y^2=u$, где $u\geq 0$, тогда $u(x)=\frac{4x}{x^2+4}$.

Найдем множество значений функции $u(x)$:

$u'(x)=\frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$; $u'(x)=0$, или

$\frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}=0$, откуда $x_{1,2}=\pm 2$.

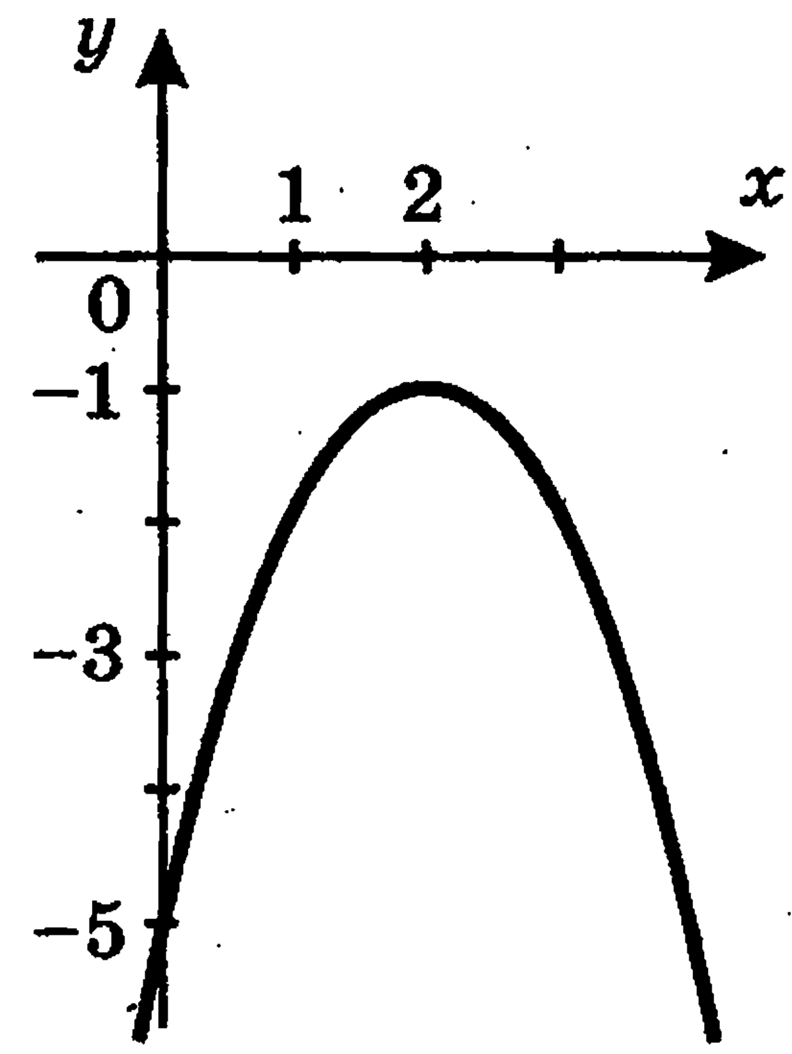


Следовательно, $x_1 = -2$ — точка минимума функции $u(x)$, тогда $u_{min} = u(-2) = \frac{4\cdot(-2)}{4+4} = -1$.

Аналогично $x_2 = 2$ — точка максимума и $u_{max} = u(2) = 1$.

Значит, $E(u) = [0; 1]$.

Так как $u = y^2$, то $0 \le y^2 \le 1$, т. е. $y \in [-1; 1]$.



Запишем II уравнение системы в виде $y^3 = -x^2 + 4x - 5$.

Пусть $y^3 = v$, тогда $v(x) = -x^2 + 4x - 5$, где $E(v) = (-\infty; v_0)$, где v_0 — ордината вершины параболы.

Найдем абсциссу вершины параболы $x_0 = -b/2a = 2$, тогда $v_0 = -4 + 8 - 5 = -1$, т. е. $E(v) = (-\infty; -1]$.

Значит, $v \le -1$, $y^3 \le -1$, $y \le -1$. Исходная система имеет решение при $y = -1$, тогда $x = 2$.

Ответ: (2; –1).

71. *Ответ:* $x = 3$.

Указание. Преобразовать уравнение к виду $2 \cdot 5^x = 125 \cdot 8^{\frac{1}{x}}$, а затем прологарифмировать обе части по основанию 5 (или 8), и т. д.

72. *Ответ:* $x = 1$.

Указание. Учесть, что $a + \frac{1}{a} \ge 2$, и т. д.

73. *Решение.* Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения. Так как $8x^4 - 8x^2 + 1 = -1 + 2(1 - 4x^2 + 4x^4) = -1 + 2(1 - 2x^2)^2$, то уравнение примет вид

$$4(1 - 2x^2)(2(1 - 2x^2)^2 - 1) = -1. \quad (1)$$

Пусть $x = \cos t$, где $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $1 - 2x^2 = 1 - 2\cos^2 t = \cos 2t$ и уравнение (1) преобразуется к виду $4\cos 2t\,(2\cos^2 2t - 1) = -1$.

Но $2\cos^2 2t - 1 = \cos 4t$, тогда получим

$$4\cos 2t \cos 4t = -1. \qquad (2)$$

Так как $t \neq 0$, то $\sin 2t \neq 0$, тогда умножив и разделив левую часть уравнения (2) на $\sin 2t \neq 0$, имеем $\frac{2(2\cos 2t \sin 2t)\cos 4t}{\sin 2t} = -1$, или

$$\frac{2\sin 4t \cos 4t}{\sin 2t} = -1, \text{ или } \frac{\sin 8t}{\sin 2t} = -1.$$

Значит, $\sin 8t + \sin 2t = 0$, тогда $2\sin 5t \cos 3t = 0$, откуда находим $t_1 = \frac{\pi n}{5}$, $t_2 = \frac{\pi + 2\pi n}{6}$, $n \in Z$.

Так как $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то из первой серии находим $t = \frac{\pi}{5}$ (при $n = 1$) и $t = \frac{2\pi}{5}$ (при $n = 2$), а из второй при $n = 0$ имеем $t = \frac{\pi}{6}$.

Учитывая, что $x = \cos t$, получим ответ.

Ответ: $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

74. *Ответ:* $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$,

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Указание. Учесть, что $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ и $\sin 54^\circ = \sin(3 \cdot 18^\circ) = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$, $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$. Тогда получим уравнение $4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0$, и т. д.

75. *Решение.* Заметим, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Тогда, разделив обе части первого уравнения на $x^2y^2z^2 \neq 0$, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{9}{z^2}=25, & (1)\\ x^2+y^2+z^2=16, & (2)\\ 13\sqrt{5}x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y+2\sqrt{3}z=24. & (3)\end{cases}$$

Введем векторы $\vec{u}\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{2}{y}, \dfrac{3}{z}\right)$, $\vec{v}\,(x, 2y, 5z)$.

Тогда $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{x} \cdot x + \dfrac{2}{y} \cdot 2y + \dfrac{3}{z} \cdot 5z =$

$= 1 + 4 + 15 = 20$.

Из (1) и (2) следует, что $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 4$.

Следовательно, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Значит, эти векторы коллинеарны, т. е. $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{3}{5z^2}$, откуда $y^2 = x^2$ и $z^2 = \dfrac{3}{5}x^2$.

Тогда уравнение (2) примет вид

$x^2 + 4x^2 + 25 \cdot \dfrac{3}{5}x^2 = 16$, или $20x^2 = 16$,

откуда $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $z = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

Всего получим 8 троек чисел, которые являются решениями уравнений (1) и (2). Проверкой можно убедиться, что лишь тройка чисел $(2/\sqrt{5}$, $-2/\sqrt{5}$, $-2\sqrt{3}/5)$ удовлетворяет уравнению (3), а значит, является решением исходной системы.

Ответ: $(2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, -2\sqrt{3}/5)$.

76. *Решение.*

I способ

Запишем III уравнение в виде $z = 1 - 2(x - 3)^2$. (1)

Из I уравнения имеем $x - 3 = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$. (2)

Тогда уравнение (1) примет вид

$$z = 1 - \frac{2y^2}{1+y^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2}. \qquad (3)$$

Теперь упростим II уравнение, учитывая (3):

$$y^2 = \left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right)^2 - 1, \text{ или } y^2 = \left(\frac{1+y^2}{1-y^2}-1\right)\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}+1\right),$$

или $y^2 = \dfrac{4y^2}{(1-y^2)^2}$, откуда $y = 0$, или $\dfrac{4}{(1-y^2)^2} = 1$.

Если $y = 0$, то $x = 3$, $z = 1$; если $\dfrac{4}{(1-y^2)^2} = 1$, то $1 - y^2 = \pm 2$, откуда $y^2 = -1$ — нет корней, $y^2 = 3$, $y_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

а) $y_2 = -\sqrt{3}$, тогда $x_2 = 3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \dfrac{1-3}{1+3} = -\dfrac{1}{2}$;

б) $y_3 = \sqrt{3}$, $x_3 = 3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: (3; 0; 1), $\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{3};-\frac{1}{2}\right)$,

$\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3};-\frac{1}{2}\right)$.

II способ

Замена $z = \cos t$, где $t \in [0; \pi]$, и т. д.

77. *Решение.* Пусть $t = 0{,}5\,(\cos x - \sin x)$, или

$$t = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Итак, $E(t) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Заметим, что функция $y = \frac{10}{\pi}\arccos t$ убывающая и непрерывна, тогда

$$E(y) = \left[\frac{10}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{10}{\pi}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{5}{2};\frac{15}{2}\right] = [2{,}5;\ 7{,}5].$$

Ответ: $E(y) = [2{,}5;\ 7{,}5]$.

78. *Указание.* Положить $7x - 11 = \sqrt[3]{x+y} = \sqrt[3]{x+9y} = k$. После преобразований решить уравнение $18k^5 - 74k^3 + 8k = 0$.

79. *Решение.* Пусть $f(x) = 3x^7 - x^4 + x - 3$, тогда $f'(x) = 21x^6 - 4x^3 + 1$. Поскольку $D/4 = -17 < 0$ и $a = 21 > 0$, то $f'(x) > 0$ при любом $x \in R$. Следовательно, функция f является возрастающей и непрерывной на всей числовой оси, т. е. ее график может пересекать ось Ox лишь в одной точке. Так как $f(1) = 3 \cdot 1^7 - 1^4 + 1 - 3 = 0$, то решениями исходного неравенства являются все числа из промежутка $x \in (1; +\infty)$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

80. *Решение.* Проведем апофему MK на грань MDC. Пусть $OK = x$, где $x > 0$ — необходимое условие, $OM = y$ — высота пирамиды, тогда $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot MO = \frac{4}{3}x^2y.$

По условию $V_{\text{пир.}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, тогда $\frac{4}{3}x^2y = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, откуда $y = \frac{\sqrt{2}}{x^2}$.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн.}} \cdot h,$$

где $P_{\text{осн.}} = 8x$; $h = \sqrt{x^2 + y^2}$,

тогда $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 8x\sqrt{x^2 + y^2} = 4x\sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $y = \frac{\sqrt{2}}{x^2}$, то $S_{\text{бок.}} = S(x) = 4x\sqrt{x^2 + \frac{2}{x^4}}$ или $S(x) = 4\sqrt{x^4 + \frac{2}{x^2}}$.

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^2}$ при $x > 0$. Найдем производную $f'(x) = \frac{4}{x^3}(x^6 - 1)$;

$f'(x) = 0$ при $x = 1$. Заметим, что при $0 < x < 1$ $f'(x) < 0$, при $x > 1$ $f'(x) > 0$.

Значит, функция f непрерывная в точке $x = 1$, убывает при $0 < x \le 1$ и возрастает при $x \ge 1$. Следовательно, функции f и $S_{\text{бок.}} = 4\sqrt{f(x)}$ при $x = 1$ будут иметь наименьшие значения.

При $x = 1$, $S_{\text{бок.}} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

81. *Указание.* Положить $x^2 = a$, $y^2 = b$.

82. *Ответ:* $\left(\frac{9}{4}; \frac{27}{8}\right)$.

83. *Ответ:* 0.

84. *Указание.* Возвести I уравнение в квадрат и подставить значение $x + y + z$.

Получим $\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5$.

II уравнение возвести в квадрат и вычесть III. После преобразований получится система

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + xz + yz = 9, \\ xyz = 4, \end{cases}$$

которую можно решить с использованием обобщенной формулы Виета.

85. *Ответ:* $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

Указание. $x - 4 - \frac{x-6}{x-4} = \frac{(x-5)(x-2)}{x-4}$;

$$\frac{1}{3(x-5)} + \frac{2}{3(x-2)} = \frac{x-4}{(x-5)(x-2)}.$$

Получим уравнение

$$5\log_2\frac{(x-5)(x-2)}{x-4} = \log_{\sqrt{2}}\frac{x-4}{(x-5)(x-2)} + 7,$$ или

после упрощений $\log_2\frac{(x-5)(x-2)}{x-4} = 1$, и т. д.

86. *Ответ:* $x = 62\,193$.

Указание. Если x — искомое число, то получим систему уравнений $\begin{cases} x+307=m^2, \\ x-192=n^2, \end{cases}$ откуда $m^2 - n^2 = 499$, и т. д.

87. *Решение.* Заметим, что $x^2 - 10x - 22 \geq 0$, так как произведение цифр неотрицательно. Следовательно, $x \geq 5 + \sqrt{47} > 11$. Можно доказать, что произведение цифр любого числа не больше самого числа.

Действительно, $x = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$, тогда

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq a_1 \cdot 9^{n-1} \leq a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n = x.$$

Значит, $x^2 - 10x - 22 \leq 0$, откуда находим $x \leq \frac{1}{2}(11 + \sqrt{209}) < 13$.

Итак, целое число x удовлетворяет неравенству $11 < x < 13$, откуда $x = 12$.

Проверка. $144 - 120 - 22 = 1 \cdot 2$.

Ответ: 12.

88. *Решение.* Пусть $\log_3 x = y$, тогда данное уравнение примет вид

$$y^2 + (x-2)y + (2x-8) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является квадратным относительно y.

$D = (x-2)^2 - 4(2x-8) = (x-6)^2$, тогда $y_1 = -2$, $y_2 = 4 - x$. Учитывая замену $\log_3 x = y$, получим совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = -2,\\ \log_3 x = 4 - x.\end{array}\right.$$

Из I уравнения совокупности находим $x = \dfrac{1}{9}$.

Нетрудно заметить, что $x = 3$ — корень второго уравнения совокупности. Других корней оно иметь не может, так как функция, стоящая в левой части уравнения, возрастает на ОДЗ переменной, а функция в правой части убывает. Итак, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{9}$, $x_2 = 3$.

89. *Ответ:* решений нет.

90. *Ответ:* если $0 < a < 1$, то $a < x < \sqrt{a^2+1}$, если $a > 1$, то $x > \sqrt{a^2+1}$.

Указание. Преобразовать неравенство к виду $\log_a (x^2 - a^2) > 0$ и рассмотреть два случая.

91. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$$\log_6 \frac{9x^2+1}{x} = 3x(2-3x), \text{ где } x > 0. \qquad (1)$$

Можно доказать (например, с помощью производной), что наименьшее значение функции $y_1 = \dfrac{9x^2+1}{x}$, или $y_1 = 9x + \dfrac{1}{x}$ достигается при $x = \dfrac{1}{3}$ и равно 6, тогда наименьшее значение

$$\log_6 \frac{9x^2+1}{x} = \log_6 6 = 1.$$

Аналогично в правой части уравнения наибольшее значение функции $y_2 = 3x(2 - 3x)$ достигается при $x = \frac{1}{3}$ и равно также 1. Следовательно, равенство (1) выполняется лишь при $x = \frac{1}{3}$. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

92. *Ответ:* $\frac{a+3}{2}$.

93. *Решение.* Заметим, что выражение

$$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1} + 10^n$$

есть сумма $(n + 1)$ членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1$, $q = 10$, $b_n = 10^n$, тогда

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{10^n \cdot 10 - 1}{10-1} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}.$$

Значит, данное число можно представить в виде $\frac{10^{n+1}-1}{9}(10^{n+1} + 35) + 36$, или

$$\frac{1}{9}((10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 35) + 9 \cdot 36) =$$

$$= \frac{1}{9}((10^{2(n+1)} + 34 \cdot 10^{n+1} - 35 + 324) =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2(n+1)} + 34 \cdot 10^{n+1} + 17^2) = \left(\frac{10^{n+1}+17}{3}\right)^2.$$

Но $10^{n+1} + 17$ кратно 3 (по признаку делимости), значит, искомое число есть точный квадрат, ч. т. д.

извините
страница 270 отсутствует

извините
страница 271 отсутствует

извините
страница 272 отсутствует

извините
страница 273 отсутствует

извините
страница 274 отсутствует

извините
страница 275 отсутствует

извините
страница 276 отсутствует

извините
страница 277 отсутствует

извините
страница 278 отсутствует

извините
страница 279 отсутствует

извините
страница 280 отсутствует

извините
страница 281 отсутствует

извините
страница 282 отсутствует

извините
страница 283 отсутствует

извините
страница 284 отсутствует

извините
страница 285 отсутствует

извините
страница 286 отсутствует

извините
страница 287 отсутствует

извините
страница 288 отсутствует

извините
страница 289 отсутствует

извините
страница 290 отсутствует

извините
страница 291 отсутствует

извините
страница 292 отсутствует

извините
страница 293 отсутствует

извините
страница 294 отсутствует

извините
страница 295 отсутствует

извините
страница 296 отсутствует

извините
страница 297 отсутствует

извините
страница 298 отсутствует

извините
страница 299 отсутствует

извините
страница 300 отсутствует

извините
страница 301 отсутствует

извините
страница 302 отсутствует

извините
страница 303 отсутствует

извините
страница 304 отсутствует

извините
страница 305 отсутствует

извините
страница 306 отсутствует

извините
страница 307 отсутствует

извините
страница 308 отсутствует

извините
страница 309 отсутствует

извините
страница 310 отсутствует

извините
страница 311 отсутствует

извините
страница 312 отсутствует

извините
страница 313 отсутствует

извините
страница 314 отсутствует

извините
страница 315 отсутствует

извините
страница 316 отсутствует

извините
страница 317 отсутствует

Литература

1. *Балаян Э.Н.* 1001 олимпиадная и занимательные задачи по математике. — 3-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2008.

2. *Балаян Э.Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

3. *Балаян Э.Н.* 555 олимпиадных и занимательных задач по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

4. *Бартенев Ф.А.* Нестандартные задачи по алгебре — М.: Просвещение, 1976.

5. *Дьюдени Г.Э.* 520 головоломок. — М.: Просвещение, 1983.

6. *Коваль С.* Математическая смесь. — Варшава, 1972.

7. *Лоповок Л.М.* 1000 проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995.

8. *Мазаник А.А.* Реши сам. Ч. III. — Минск: Народная Асвета, 1972.

9. *Малаховский В.С.* Числа знакомые и незнакомые. — Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2005.

10. *Минаева С.С.* Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике. — М.: Просвещение, 1983.

11. *Сивашинский И.Х.* Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967.

12. *Тригг У.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975.

Содержание

Серия «Большая перемена»

Балаян Эдуард Николаевич

800

ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

9–11 классы

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Сдано в набор 25.05.2012. Подписано в печать 08.08.2012.
Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.
Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,8. Тираж 2500 экз.
Заказ № 463.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.
Сайт издательства www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ : 9–11 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феникс, 2013. — 317, [2] с. — (Большая перемена)

ISBN 978-5-222-20106-0

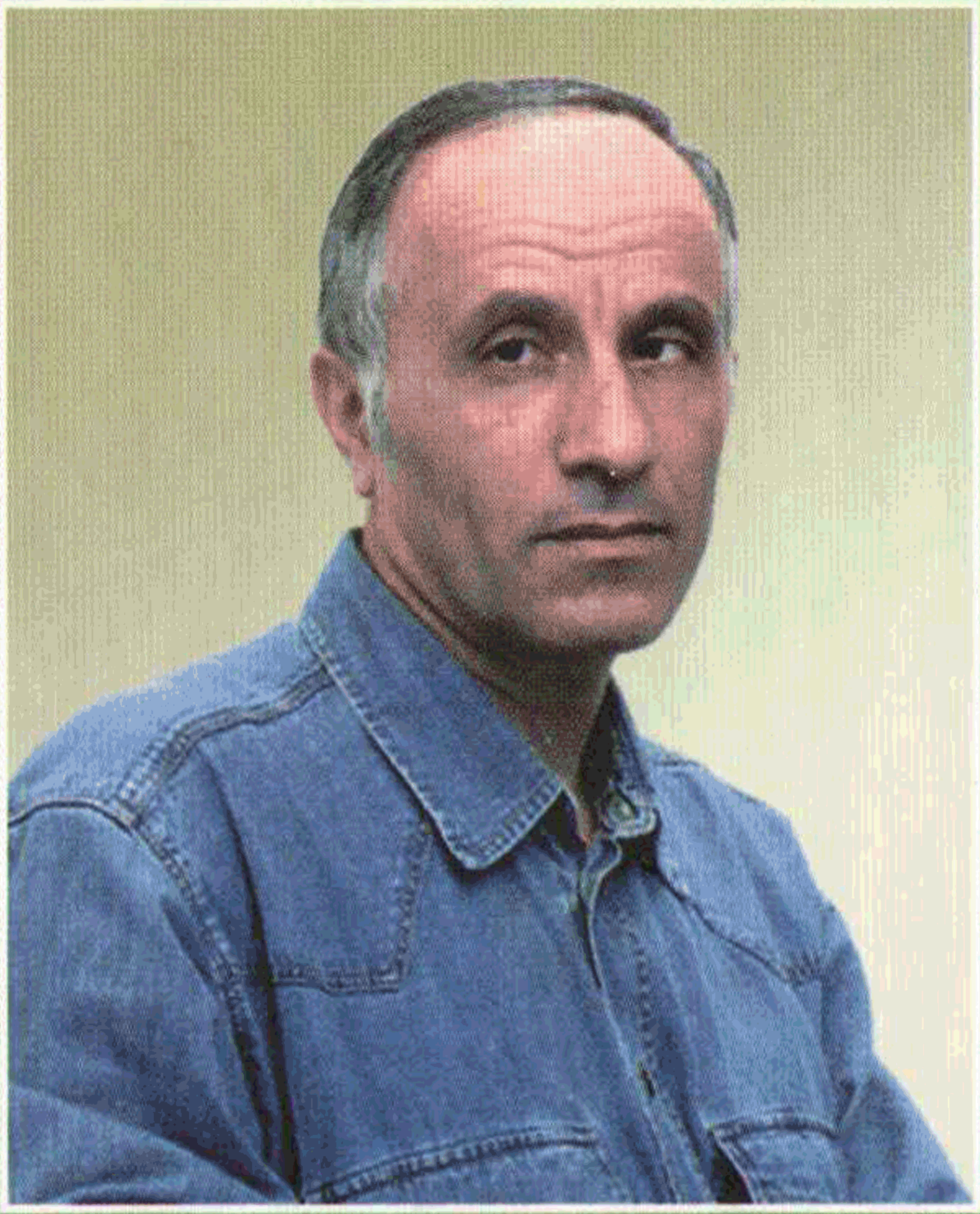
В предлагаемом пособии рассмотрены различные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня трудности для учащихся 9–11 классов.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, инварианты, диофантовы уравнения, принцип Дирихле, геометрические задачи и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения, причем некоторые задачи решены различными способами. Большинство задач авторские, отмечены значком (А).

Пособие предназначено прежде всего старшеклассникам общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, учителям математики для подготовки детей к олимпиадам различного уровня, а также к ЕГЭ, студентам — будущим учителям, работникам центров дополнительного образования, и всем любителям математики.

УДК 373.167.1:51
ISBN 978-5-222-20106-0 ББК 22.1я721



Эдуард Николаевич Балаян

профессор РАЕ, известный учитель математики, автор более 70 книг. Имеет большой педагогический опыт работы, в том числе в специализированном математическом лицее. Его выпускники ныне работают в Российской Федерации, странах СНГ, дальнего и ближнего зарубежья, с благодарностью вспоминая его увлекательные уроки.

За многолетний педагогический труд, большой личный вклад в разработку учебно-методической литературы по математике, награжден медалью им. В.И. Вернадского, Почетной грамотой МО и науки РФ и другими наградами.

В настоящее время работает на подготовительном отделении Донского государственного технического университета (ДГТУ)

ISBN 978-5-222-20106-0

9785222201060

Феникс