

**ПРИЕМ  
ИМПУЛЬСНЫХ  
СИГНАЛОВ  
В ПРИСУТСТВИИ  
ШУМОВ**

ГОСЭНЕРГОИЗДАТ

# ПРИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В ПРИСУТСТВИИ ШУМОВ

*СБОРНИК ПЕРЕВОДНЫХ СТАТЕЙ*

*под редакцией д. т. н. БАШАРИНОВА А. Е.  
и к. т. н. АЛЕКСАНДРОВА М. С.*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1960 ЛЕНИНГРАД

В сборнике переводов «Прием импульсных сигналов в присутствии шумов» содержатся статьи, освещающие вопросы теории пороговых сигналов и устройств обнаружения сигналов в шумах.

Сборник рассчитан на научных работников, инженерно-технический персонал и студентов вузов.

---

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В сборнике приведены статьи, освещающие вопросы теории пороговых сигналов и устройств обнаружения сигналов в шумах.

Теоретические исследования приема сигналов в шумах имеют двоякое значение: они позволяют, во-первых, получать решение задач синтеза оптимального приемника и, во-вторых, могут быть использованы для сравнения показателей идеальных и реальных приемников.

Статистические теории приема сигналов в шумах получили значительное развитие за последнее десятилетие. Большое значение для развития теории приема имела докторская диссертация академика В. А. Котельникова «Теория потенциальной помехоустойчивости», 1947 г.\*

Целесообразность издания сборника определяется тем, что изучение современного состояния теории обнаружения сигналов в шумах вызывает трудности ввиду необходимости использования различных периодических изданий. Предлагаемые вниманию читателя статьи не равноценны по глубине теоретических исследований и практической значимости.

Статья Ван Флека и Миддлтона «Теоретическое сравнение визуального, слухового и инструментального методов приема импульсных сигналов в присутствии шумов» характерна для раннего периода развития теории, когда собственно статистические методы и, в частности, методы теории потенциальной помехоустойчивости не получили широкого использования. В статье рассматривается влияние характеристик фильтра, детектора, способа селекции и формы сигнала на показатели устройств обнаружения.

Статья Петерсона, Бирдзолла и Фокса «Теория обнаружения сигналов» содержит математическое введение, трак-

---

\* В. А. Котельников, Теория потенциальной помехоустойчивости, Госэнергоиздат, 1956.

тующее процесс обнаружения сигнала в шумах как задачу статистического выбора одной из двух гипотез (сигнал есть, сигнала нет) по данным, получаемым в результате наблюдения. Авторы используют метод коэффициента правдоподобия, с помощью которого рассматривается ряд частных примеров, соответствующих идеализированным системам: прием когерентных сигналов; прием некогерентных сигналов постоянной интенсивности; прием шумоподобных сигналов; прием импульсных пакетов и т. д. Следует заметить, что изучение статьи Петерсона, Бирдзолла и Фокса важно для понимания последующих работ.

В статьях Дреника, Гартенхауза, Несбеда «Обнаружение когерентных и некогерентных сигналов» и Беннера, Дреника «Оптимальное обнаружение импульсных сигналов в шумах» рассмотрены способы построения устройств оптимального приема для многоканальных систем при сложной форме сигнала в условиях, приближающихся к реальным.

Так, в статье Дреника, Гартенхауза и Несбеда выявляется оптимальная структура системы обработки при наличии разрешающей способности в случаях приема когерентного и некогерентного сигнального пакета.

В статье Беннера и Дреника изучается важный случай приема флуктуирующих сигналов, когда решение задачи об обнаружении цели на интервале не связывается с задачей об определении положения цели. В статье показывается, что возникающее при этом «игнорирование разрешающей способности» позволяет увеличить эффективность устройства обнаружения.

В работе Д. Миддлтона «Статистические критерии обнаружения импульсных сигналов в присутствии шумов» рассматриваются различные методы обнаружения сигналов, оптимальные с различных точек зрения, и на основе кривых верности дается сравнительный анализ результатов, получаемых этими методами. В работе рассмотрен только частный случай нефлуктуирующего сигнала.

Статья Д. Миддлтона и Д. Ван Метера «Обнаружение и воспроизведение сигналов, принятых на фоне шумов, с точки зрения теории статистических решений» посвящена задаче обнаружения сигналов на фоне шумов и определению параметров сигналов. Эта работа является обобщающим обзором идей построения оптимальных приемных систем с точки зрения теории статистических решений.

Читатели, склонные к абстрактно-теоретическому мышлению, могут начать ознакомление с кругом вопросов,

освещенных в данном сборнике переводов, именно с этой статьи.

Выпускаемый сборник охватывает лишь небольшой цикл работ, посвященных теории приема сигналов в шумах.

Перевод статей представил известные трудности ввиду своеобразия стиля и отсутствия установившейся терминологии. В отдельных случаях были применены термины, не имеющие широкого распространения.

Так, например, нами использован термин «коэффициент правдоподобия» взамен применяющегося в математической литературе термина «отношение правдоподобия»; примененный термин «согласованный» фильтр иногда называют «сопряженным» или «оптимальным» фильтром и т. п.

При подготовке сборника возникла целесообразность изменения библиографических ссылок. Добавлены ссылки на некоторые работы, выполненные в Советском Союзе, и исключены ссылки на неопубликованные иностранные работы.

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ ВИЗУАЛЬНОГО, СЛУХОВОГО И ИНСТРУМЕНТАЛЬНОГО МЕТОДОВ ПРИЕМА ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В ПРИСУТСТВИИ ШУМОВ

*Дж. Ван Флек и Д. Миддлтон*<sup>1</sup>

## Краткое содержание

Настоящая статья посвящена теоретическому рассмотрению сравнительной чувствительности обнаружения импульсных сигналов в присутствии шумов следующими методами:

а) визуальным — посредством наблюдения сигналов на экране электронно-лучевой трубки;

б) слуховым, когда прослушивается частота повторения импульсов или ее гармоники, и

в) инструментальным — с помощью стрелочного измерительного прибора.

Метод обнаружения сигналов с помощью измерительного прибора может быть либо аperiodическим, когда выпрямленный ток подается непосредственно на измерительный прибор с большой постоянной времени, либо колебательным, когда колебания с частотой повторения импульсов дополнительно выпрямляются и затем подаются на прибор.

В статье детально изучается зависимость чувствительности приемника от параметров приемника и сигнала при различных методах обнаружения сигналов. К этим параметрам относятся: ширина полосы пропускания и форма частотной характеристики усилителя промежуточной частоты, длительность импульса, частота повторения импульсов и, в случае слухового или инструментального методов приема, длительность секторного импульса, ширина полосы пропускания фильтра звуковых частот или постоянная времени измерительного прибора.

В первой части статьи приводится обзор полученных результатов, а во второй части дается их математический анализ. Наиболее важными результатами надо считать следующие:

1. Амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра промежуточной частоты является комплексно сопряженной преобразо-

---

<sup>1</sup> J. H. Van Vleck and David Middleton, Journal of Applied Physics, 1946, vol. 17, № 11.

ванию Фурье для принимаемого импульсного сигнала, причем это верно не только для визуального метода приема, что уже было известно ранее, но также для слухового и инструментального методов приема.

2. При очень слабых сигналах на вход линейного детектора надо подавать приблизительно на 5% больше мощности, чем на вход квадратичного детектора, для достижения одного и того же отношения сигнал/шум на выходе приемника.

3. Аperiodический метод обнаружения сигналов при помощи прибора обладает тем преимуществом, что в этом случае не нужно знать частоту повторения импульсов и можно достичь большей чувствительности, если скомпенсировать флуктуации коэффициента усиления.

4. Методы обнаружения сигналов с помощью измерительного прибора могут быть более чувствительными, чем визуальные, если можно осуществить большие постоянные времени прибора и применить селективирование.

5. Хотя наилучшая характеристика фильтра промежуточной частоты является комплексно сопряженной преобразованию Фурье от импульсного сигнала, наимыгоднейшая длительность импульса при звуковом методе приема отличается от длительности процесса установления в фильтре, так как при измерении с помощью прибора или при детектировании и прослушивании звуковых частот лучшие результаты получаются при работе с длинными импульсами. При визуальном методе приема длительность импульса в первом приближении не существенна.

В статье приводятся графики, показывающие зависимость мощности сигнала, требуемой для достижения данного отношения сигнал/шум, от длительности импульса, ширины полосы пропускания фильтра промежуточной частоты, частоты повторения импульсов, времени стробирования.

В тех случаях, когда импульс и фильтр не согласованы, т. е. когда частотная характеристика фильтра не является комплексно сопряженной преобразованию Фурье для формы импульса, приводится зависимость мощности сигнала от полосы фильтра звуковых частот.

Кроме того, сделана попытка численно оценить чувствительность и помехоустойчивость слухового и инструментального методов обнаружения сигналов и сравнить их с показателями работы при визуальном методе приема.

## *Часть I*

### **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ**

#### **1. Введение и постановка задачи**

Целью настоящей статьи является теоретическое сравнение достоинств визуального и звукового методов обнаружения импульсных сигналов, причем особенное внимание обращается на проектирование согласованных фильтров промежуточной частоты для этих двух методов приема. Заранее не очевидно, что спроектированные фильтры в обоих случаях будут одинаковыми.



Под визуальным методом приема понимается такой метод, при котором последовательность импульсов разворачивается на экране электронно-лучевой трубки.

Под звуковым методом приема понимается такой метод, при котором основную роль играет обнаружение колебаний частоты повторения импульсов или ее низших гармоник, расположенных в области звуковых частот. Уже в начале изложения следует подчеркнуть, что в настоящей статье мы употребляем термин «звуковой метод приема» в смысле, охватывающем любое обнаруживающее устройство, приводимое в действие посредством колебаний отдельной гармоники частоты повторения импульсов, или, иными словами, устройство, которое производит интегрирование во времени, а не использование мгновенного результата от действия всех гармоник частоты повторения, как при визуальном методе приема. Регистрирующим прибором не обязательно должно быть человеческое ухо. Вместо него, например, могут использоваться стрелочный измерительный прибор или самописец. При этом методе может использоваться постоянная составляющая, не содержащая колебаний с периодом повторения импульсов, как это делается в аperiodических схемах обнаружения с помощью измерительного прибора.

В случае визуального метода приема наилучшим фильтром в первом приближении будет такой, который создает максимальное отношение пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению шумового фона. Это положение может быть сформулировано более точно следующим образом. На входе фильтра промежуточной частоты имеются флуктуационное шумовое напряжение и напряжение сигнала  $S(t)$ , которое является регулярной функцией времени. После фильтрации и выпрямления величина видеосигнала не может быть представлена в виде простой суммы чистого сигнала и нормального шума, так как имеет место сложное взаимодействие между сигналом и шумом. Если сигнал периодически повторяется, наступит особый интервал времени, при котором амплитуда на экране электронно-лучевой трубки в среднем будет близка к максимальной. Превышение средней амплитуды в этот период времени над средней амплитудой в отсутствие сигнала мы обозначаем  $S_v$ . Мы говорим об усреднении потому, что иногда шум может взаимодействовать с сигналом, усиливая его, а иногда — ослабляя. Однако следует стремиться сделать величину  $S_v(t)$  по возможности

большей по отношению к эффективному значению отклонения  $n_v$ , вызванного шумовым фоном. Последняя величина может быть вычислена в предположении, что сигнал равен нулю, так как скважность сигнала обычно очень велика, и, следовательно, перекрестная модуляция играет малую роль [см. (16), часть II]. Согласно этой точке зрения наилучшим фильтром следует считать такой фильтр, который создает максимальное отношение  $S_v/n_v$ . На это определение будем ссылаться во всей статье, как на «простой критерий» для визуального метода обнаружения сигналов, и будем им часто пользоваться.

Мы применяем термин «простой», так как действительно при рассмотрении только отношения  $S_v/n_v$  не учитывается целый ряд факторов. При использовании этого отношения не учитывается влияние ширины выбросов, ширины шумовой дорожки на экране индикатора и, что особенно важно, не принимается в расчет эффект повторения импульсов. В действительности при увеличении частоты повторения импульсы, принятые в течение одинакового промежутка времени, легко интегрируются глазом, и обнаружить среднее значение выброса на флуктуирующем фоне проще. Вопрос интегрирования при визуальном методе обнаружения в этой работе не рассматривается, так как он уже рассмотрен в других работах, в частности, Нормом [Л. 1], Уленбеком [Л. 2] и другими авторами. При обсуждении результатов мы упомянем о видоизменениях, вносимых более точным критерием.

При звуковом методе приема основное заключается в получении возможно большего отношения энергии колебания основной частоты повторения импульсов к шуму в малом частотном интервале, окружающем частоту повторения. Звуковой метод приема может быть осуществлен в одном из двух вариантов. В случае, когда частота повторения импульсов известна, можно включить в схему фильтр с шириной полосы пропускания в несколько герц, непосредственно окружающей частоту повторения импульсов и достаточной для того, чтобы существенно уменьшить шумы. Присутствие сигнала тогда можно обнаружить не обязательно ухом, а, например, по накалу лампочки, посредством включения в схему термпары или при помощи дополнительного детектора и измерительного прибора, как будет рассмотрено более подробно в параграфе «Применение измерительного прибора» (стр. 20). Высокая чувствительность прибора обуславливается возможностью исполь-

зовать очень узкополосный фильтр, так как энергия сигнала концентрируется на дискретных частотах, тогда как энергия шума непрерывно распределена по всему спектру частот.

В случае, если частота повторения импульсов неизвестна, то неизвестно, на какую частоту настроить фильтр. Приборы, основанные на световой индикации или на измерении при помощи стрелочного прибора (если схема измерения не аperiodическая), очевидно, становятся тогда совершенно неработоспособными. Имеется, однако, устройство, которое способно создать достаточно узкую полосу пропускания около частоты повторения сигналов при неизвестной заранее величине частоты повторения.

Этим устройством является человеческое ухо, которое имеет замечательное свойство выбирать энергию, сосредоточенную в любой спектральной области, даже если последняя замаскирована энергией шумового фона, распределенной непрерывно по спектру. Способность уха реагировать на чистый музыкальный тон  $f_p$ , который маскируется

только шумовым фоном в частотном интервале от  $f_p - \frac{\Delta f_e}{2}$  до  $f_p + \frac{\Delta f_e}{2}$ , сосредоточенному вокруг  $f_p$ , такова, что ухо действительно ведет себя подобно фильтру с шириной полосы пропускания частот  $\Delta f_e$ . Конечно, фильтрующее действие уха не точно такое, как мы здесь предполагаем, но ошибка при подобной идеализации для наших целей незначительна. Мы не будем пытаться вникнуть в вопросы физиологии слуха, но это свойство уха, вероятно, обязано тому факту, что ухо включает в себе набор нервов, причем каждый из нервов реагирует на очень узкую полосу частот. Это явление определяет способность уха различать состояние, когда один из нервов возбуждается сильнее, чем обычно. Эквивалентная полоса пропускания уха зависит от  $f_p$ , причем эта зависимость показана на рис. 1, взятом из статьи Н. Флетчера [Л.3]. Для значений  $f_p$ , в которых мы заинтересованы, величина  $\Delta f_p$  составляет 50—200 гц. Сигналы, воспринимаемые ухом, кроме основной частоты, содержат много гармоник. Однако, как видно из рис. 1, действующая полоса пропускания фильтра шире для высоких частот, так что высшие гармоники обычно легко маскируются шумовым фоном. Следовательно, гармоники лучше не использовать, и поэтому мы оцениваем слышимость на основной

частоте. Однако важно отметить, что в случае, когда частота повторения импульсов много ниже 1000 гц, предпочтительнее использовать подходящую гармонику основной частоты, так как ухо более чувствительно к звуковым колебаниям, лежащим в диапазоне частот 1—2 кгц.

Согласно вышесказанному, любой фильтр с резонансной частотой  $f_p$  с шириной полосы пропускания больше, чем соответствующая  $\Delta f_e$ , не улучшит отношения сигнал/шум,

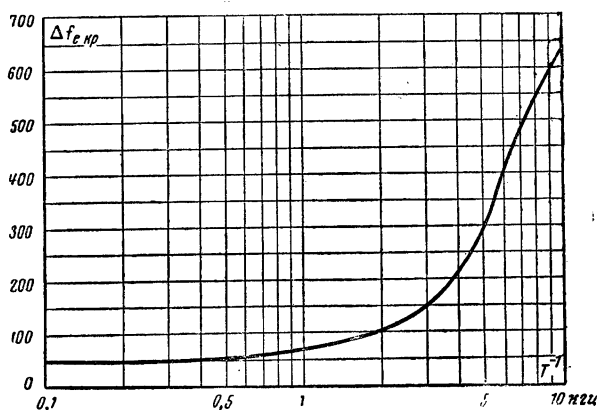


Рис. 1. Зависимость критической полосы частот уха от частоты повторения импульсов.

в то время как любой фильтр с шириной полосы  $\Delta f'_e$ , более узкой, чем  $\Delta f_e$ , уменьшает мощность шума в отношении  $\Delta f'_e/\Delta f_e$ . Основное, что мы хотим подчеркнуть, это то, что математическим критерием возможности приема сигнала на слух служит отношение энергии одной из спектральных компонент сигнала к энергии шума в непосредственной близости от этой компоненты, причем „непосредственная близость“ определяется естественной избирательностью уха или шириной полосы пропускания искусственного фильтра, которая всегда меньше. Пользу от сужения полосы пропускания при помощи фильтра, конечно, можно реализовать только в том случае, когда известна частота повторения импульсов.

Как при звуковом, так и при визуальном методе приема имеется определенный критический пороговый уровень сигнала, который может быть перекрыт шумами прежде, чем

сигнал будет воспринят\*. Однако из вышесказанного мы видим, что характер, а также, вероятно, и величина порога различны в двух случаях приема. А именно, для визуального случая критическое отношение сигнала к шуму определяется величиной отношения средней амплитуды сигнала к средней видеоамплитуде шума  $S_v/n_v$ . С другой стороны, в звуковом методе приема критическое отношение  $S_a/n_a$  зависит от отношения одной из спектральных компонент сигнала к эффективному значению той части шума, которая заключена в спектральной области, воспринимаемой ухом (рис. 1), или в полосе пропускания низкочастотного полосового фильтра, если полоса пропускания фильтра меньше, чем „полоса пропускания“ уха.

Решение вопроса о правильности того или иного из многочисленных числовых значений пороговой величины  $(S/n)_o$  и  $(S/n)_a$ , очевидно, зависит от личных качеств наблюдателя. Пороговое отношение сигнала к шуму при измерениях на экране электронно-лучевой трубки обычно выражается экспериментаторами в амплитудных обозначениях отношения  $S_F/n_F$ , где  $S_F$  и  $n_F$  соответственно средние амплитуды сигнала шума после фильтрации по промежуточной частоте перед детектированием, а не непосредственно в обозначениях  $S_v/n_v$ . Очень искусные наблюдатели могут увидеть сигнал при величине отношения  $S_F/n_F$ ,

равной  $10^{-\frac{1}{2}}$ , т. е. — 10 дБ, тогда как неквалифицированный человек может увидеть сигнал, когда  $S_F/n_F \approx 1$ , что представляет собой, вероятно, более надежную оценку, употребляемую при наличии многих отвлекающих факторов. Указанные цифры основаны на практически неограниченном времени интегрирования, которое для большинства людей достигает одной минуты, а иногда при очень благоприятных условиях доходит до пяти минут, после чего дальнейшее улучшение становится незаметным. В случае звукового метода приема Флетчер [Л. 3] указывает величину порогового отношения  $S_a/n_a$  порядка единицы. Некоторые данные экспериментов, поставленных авторами, указывают на то, что

---

\* Строгое определение порогового сигнала как сигнала минимального уровня, обеспечивающего заданную вероятность обнаружения, дано Д. Миддлтоном в работе «Статистические критерии обнаружения импульсных сигналов в шумах» (см. настоящий сборник, стр. 184). (Прим. ред.).

для восприятия сигнала при величине  $S_a/n_a=1$  наблюдатель должен находиться в идеальных лабораторных условиях, и что при наличии отвлекающих факторов — психологических или каких-либо иных — пороговая величина

$(S/n)_a$  очень близка к  $10^{\frac{1}{2}}$  ( $+10$  дб). Эти две величины ( $0$  дб и  $+10$  дб или соответственно  $-10$  дб и  $0$  дб) в случае визуального метода обнаружения мы будем рассматривать как соответственно „оптимистические“ и „пессимистические“ оценки.

Критерий для различных пороговых сигналов при визуальном и звуковом методах приема можно теперь определить в аналитическом виде. В статье нами не затрагивается вопрос о первом детектировании (или смещении частот), так как преобразование частоты — линейный процесс, результатом которого является перемещение несущей частоты сигнала с  $f_{rf}$  на промежуточную частоту  $f_0$ . После фильтра промежуточной частоты сигнал, смешанный с шумом, направляется к детектору, причем второй детектор принимается либо квадратичным с характеристикой вида  $f(x)=x^2$ , либо линейным без смещения с характеристикой вида  $f(x)=x$  при  $x>0$  и  $f(x)=0$  при  $x<0$ . Колебание, вызванное сигналом, обозначается как  $S_v(t)$ . При визуальном обнаружении пороговое отношение сигнала к шуму — это некоторая величина

$$S_v/n_v,$$

где  $n_v^2$  — полная мощность видеоимпульсов шума, равная:

$$n_v^2 = \int_0^a W_{LF}(f) \frac{d\omega}{2\pi};$$

здесь  $a$  — конечная большая величина, сравнимая с шириной полосы пропускания фильтра, но малая в сравнении с  $2\pi f_0$ ;

$W_{LF}(f)$  — спектральная плотность среднеквадратичной амплитуды шума [см. (18) и (26)].

При звуковом методе обнаружения, с другой стороны, интересуются энергией данной спектральной компоненты, отнесенной к энергии шума в области частот, непосредственно окружающей эту компоненту. Поэтому отношение действующих значений сигнала к шуму можно представить в виде выражения

$$S_a/n_a = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} S_v(t) \exp(ik\omega_p t) dt \right| / [W_{LF}(kf_p) \Delta f_e]^{\frac{1}{2}},$$

где  $k$  — порядковый номер гармонической компоненты, которая используется;

$\omega_p = \frac{2\pi}{T}$  — угловая частота повторения импульсов;

$\Delta f_e$  — ширина полосы пропускания фильтра.

Фильтр считается идеальным, а если это не так, то подразумевается эквивалентная шумовая ширина полосы пропускания фильтра, имеющего прямоугольную амплитудно-частотную характеристику, который пропускает такое же количество энергии шума в единицу времени, как и реальный фильтр. При этом предполагается, что оба фильтра имеют одинаковую величину максимума амплитудно-частотной характеристики.

Во всей статье произведены определенные упрощения в выражении для  $S_a/n_a$ . Во-первых, предполагается, что импульсы сигналов не перекрываются заметно, что справедливо, если ширина полосы пропускания фильтра промежуточной частоты бо́льшая по сравнению с частотой повторения импульсов. В этом случае пределы интегрирования при вычислении одной спектральной компоненты можно принять равными соответственно  $+\infty$  и  $-\infty$ , если под  $S_v(t)$  понимают только колебания, вызванные одним импульсом. Во-вторых, длительность какого-либо импульса предполагается короткой по сравнению с периодом повторения импульсов, так что экспоненциальный множитель  $\exp(ik\omega_p t)$  в области, в которой  $S_v(t)$  заметно отличается от нуля, может считаться приблизительно постоянным. Это правильно до тех пор, пока частота гармонической компоненты не станет высокой в сравнении с величиной, обратной длительности импульса. Так как частота повторения импульсов мала по сравнению с шириной спектра шума, можно предположить, что шумовой фон  $W_{LF}(k\omega_p)$  имеет ту же самую величину, что и в окрестности нулевой частоты, причем вышеприведенное выражение для  $S_a/n_a$  принимает следующий вид:

$$S_a/n_a = \frac{2^{1/2}}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(t) dt / [W_{LF}(0) f_e]^{1/2}.$$

Это выражение не зависит от  $k$  ( $k=1, 2, \dots$ ), так что представляется несущественным, какая именно гармоническая компонента используется<sup>1</sup>. Входная мощность, требуемая для достижения данной критической величины отношения  $(S/n)_v$  или  $(S/n)_d$ , зависит от следующих параметров:

- 1) ширины и формы амплитудно-частотной характеристики фильтра промежуточной частоты;
- 2) длительности и формы импульса;
- 3) частоты повторения импульсов;
- 4) задержки селектирующего импульса;
- 5) вольт-амперной характеристики детектора — линейной или квадратичной;
- 6) способа обнаружения сигнала — визуального, слухового или инструментального;
- 7) ширины полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра или постоянной времени стрелочного измерительного прибора.

Цель настоящей работы — исследовать зависимость необходимой входной мощности сигнала от каждого из указанных параметров, когда остальные шесть параметров остаются постоянными.

## 2. Наивыгоднейшая ширина полосы пропускания фильтра промежуточной частоты

Начнем с изучения вопроса о проектировании оптимального фильтра промежуточной частоты. В этом случае получается очень простой результат: наилучшим фильтром промежуточной частоты является тот, который согласован со спектром радиоимпульса без учета сдвига фаз, линейно зависящего от частоты\*. Если импульс с заполнением промежуточной частотой можно представить в виде выражения  $\sqrt{2}S_I(t) \cos \omega_0 t$  и если преобразование Фурье  $S_I(t)/\sqrt{2}$  обозначим через

$$S_I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_I(t) e^{-i\omega t} dt,$$

<sup>1</sup> Здесь и далее цифрами указаны номера примечаний, список которых приводится в конце статьи.

\* Сдвиг фаз, линейно зависящий от частоты, вызван задержкой сигнала. (Прим. ред.).



так что

$$S_I(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_I(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

то амплитудно-частотная характеристика наилучшего фильтра будет иметь следующий вид:

$$G_{IF}(\omega)_{\text{опт}} = \alpha S_I(\omega)^* \exp(-i\omega t_0),$$

где  $\alpha$  — постоянный множитель, характеризующий коэффициент усиления приемника.

В приведенном выражении частота отсчитывается от несущей, так что максимум амплитудно-частотной характеристики соответствует  $\omega = 0$ . Обычно импульс бывает симметричным относительно своего максимума, и тогда  $G_{IF}$  становится действительной величиной, и различие между  $G_{IF}$  и сопряженным  $G_{IF}^*$  исчезает. Этот результат получен во II части, в параграфе „Доказательство критерия преобразования Фурье“ [см. (53)].

Указанное соотношение между спектром сигнала и амплитудно-частотной характеристикой фильтра представляет собой достаточно общее условие, применимое независимо от того, осуществляется звуковой или визуальный метод приема, и применяется линейный или квадратичный детектор. Существенное значение указанного соотношения для визуального метода приема отметили Норт [Л.1] и др. При слуховом методе приема фаза  $G_{IF}(\omega)_{\text{опт}}$  не существенна, и необходимо только, чтобы выполнялось соотношение  $|G_{IF}(\omega)_{\text{опт}}| \sim |S_I(\omega)|$  [см. (56)].

Постоянная  $t_0$ , характеризующая сдвиг фаз, может быть выбрана произвольно, так как ее величина не влияет на обнаружимость сигналов при слуховом приеме. Изменение величины  $t_0$  просто дает разное время задержки импульса, переданного фильтром. Действительно, любой реальный фильтр будет иметь определенную величину задержки  $t_0$ , как показано в § 3 части II, но знание  $t_0$  не имеет отношения к обсуждению эффективности фильтра.

Особенно интересно, что требование сопряжения фильтра и сигнала применимо даже в том случае, когда прием ведется при помощи звуковых средств. Случай звукового приема действительно ясен. Например, иногда считают, что лучше иметь очень узкополосный фильтр (с шириной поло-

сы пропускания частот меньшей, чем ширина спектра импульса) просто потому, что в звуковом методе приема интересуются исключительно узкой полосой частот. Однако неправильно утверждать, что наилучший фильтр промежуточной частоты должен иметь именно такую полосу  $\Delta f$ , как и для визуального приема (см. § 3 части II, стр. 66, где этот вопрос детально рассмотрен).

Фильтр, характеристика которого удовлетворяет оптимальным условиям, т. е. сопряжена со спектром импульса, мы отнесем к «согласованным» фильтрам. Иногда полагают, что результаты визуального метода приема будут улучшены добавлением видеофильтра, т. е. фильтра, следующего за вторым детектором. Если, однако, фильтр промежуточной частоты уже согласован, включение такого видеофильтра теоретически улучшения не дает\*.

### 3. Сравнение линейного и квадратичного детекторов\*\*

В целом результаты для линейного и квадратичного детектирования как при звуковом, так и при визуальном методах приема очень сходны, в особенности, если имеется чувствительная аппаратура и хорошие наблюдатели, так что отношение сигнала к шуму  $\frac{S_F}{n_F}$  достаточно мало по сравнению с единицей. Тогда свойства линейного и квадратичного детекторов зависят от величин  $S_v/n_v$ , соответствующих данной импульсной системе и фильтру промежуточной частоты с точностью до множителя. Последний

оказывается равным  $0,957 = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}$ , как уже отмечено Нортон [Л. 1]. В случае звукового метода приема эта постоянная величина несколько ближе к единице и в то же время зависит от формы импульса. Для характерного случая импульсов и амплитудно-частотных характеристик фильтров гауссовой формы, рассматриваемого аналитически в § 4 и 6 части II, этот множитель равен 0,973. Результат в случаях визуального приема совпадает с этим ре-

\* Пороговые сигналы, перевод с англ., под ред. А. П. Сиверса, „Советское радио“, 1952.

\*\* Сравнительное рассмотрение характеристик линейного и квадратичного детектирования приведено в монографии В. И. Бунимовича „Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах“, „Советское радио“, 1951.

результатом только при малых  $S_F/n_F$  и при этом не требуется специальная форма характеристики фильтра (например, гауссова) или согласование ширины полосы пропускания фильтра промежуточной частоты с шириной спектра импульса. Математическое обоснование такого упрощения при визуальном приеме сигналов основано на предположении, что для малых величин  $S_F/n_F$  амплитуда сигнала на выходе детектора может быть разложена в ряд по степеням отношения  $S_F/n_F$  в виде

$$0,957 \{ (S_F/n_F)^2 + \dots \}.$$

Если оставить в этом выражении только первый член, то отсюда вытекает квадратичная зависимость амплитуды подобно квадратичному детектору, для которого основной член равен  $-(S_F/n_F)^2$  [см. (46)]. Отсутствие линейного члена  $(S_F/n_F)$  является аналитическим воплощением физического явления которое инженеры называют „подавлением сигнала“, в результате чего передаваемый сигнал становится много меньшим по сравнению с тем, каким он должен быть при прохождении через линейную систему (см. стр. 36).

Рассмотрение только этих основных положений, однако, всегда приводит к переоценке качества линейного детектора. Более точное сопоставление свойств детекторов для не очень больших величин  $S_F/n_F$  требует в случае визу-

ального приема введения коэффициента  $0,957 \left( 1 - 0,1526 \frac{S_F}{n_F} \right)$  для линейного детектора вместо 0,957. Эта интерполяционная формула действительна для величины  $S_F/n_F$ , превышающих  $10^{1/2}$ . Для больших величин  $S_F/n_F$  амплитуда сигнала передается, очевидно, линейно и подавляется скорее шум, чем сигнал. Второй член интерполяционной формулы представляет собой так называемую поправку на изменение рабочей характеристики детектора, характеризующую ее отклонение от линейной. Сопоставление свойств двух типов детекторов в случае визуального приема графически показано на рис. 2 в виде кривой  $a$ , выражающей зависимость  $(S_v/n_v)_{\text{лин}} / (S_v/n_v)_{\text{квадрат}}$  [частное от деления (47) на (46); см также неравенство (82)] от величины  $\sigma$ .

В случае звукового приема, исключая случай малых  $S_F/n_F$ , основное выражение для относительной эффективности линейного и квадратичного детекторов не может быть дано до тех пор, пока формы импульса и амплитуд-

но-частотная характеристика фильтра не будут заданы. Можно, однако, сказать, что когда величина отношения  $S_F/n_F$  становится малой, т. е. когда  $S_F/n_F < 1$ , коэффициент ослабления в линейном детекторе всегда будет меньше  $\sim 1,5$  дБ и отклонение рабочей характеристики от

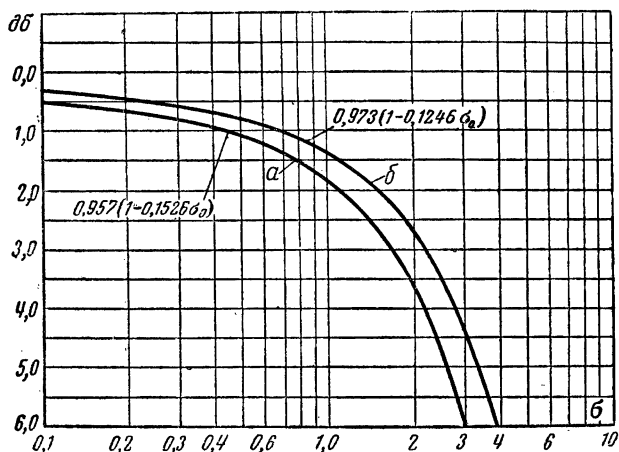


Рис. 2. Сравнение линейного и квадратичного детекторов при звуковом и визуальном методах приема в случае согласования импульса и фильтра. Кривая *а* служит сравнением линейного детектора с квадратичным для визуального приема, в то время как кривая *б* служит сравнением для звукового метода приема, причем импульс предполагается гауссовой формы. Здесь  $\sigma_0$  — отношение квадрата величины импульса сигнала к среднеквадратичному значению шума по промежуточной частоте.

квадратичной по величине будет такого же порядка, как и в случае визуального приема. Этот вопрос более широко обсуждается в § 2 и 4 части II. Кривая *б* на рис. 2 получена из (84) и дает представление о соотношении свойств линейного и квадратичного детекторов при звуковом методе приема, когда приходящий импульс имеет гауссовую форму.

#### 4. Применение измерительного прибора

Отметим, что при звуковом методе приема мощность шумового фона  $n_a^2$  прямо пропорциональна ширине полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра.

Следовательно, в принципе, если можно создать сколь угодно узкополосные фильтры и если сигнал точно периодический, так что компоненты его спектра являются „дельта-функциями“ (т. е. функциями, которые в некоторой точке  $x = x_0$  представляют собой очень узкий бесконечно большой выброс, а при  $x \neq x_0$  равны нулю), то для данной пороговой величины ( $S_a/n_a$ ) можно достигнуть бесконечно высокой чувствительности по отношению  $S_F/n_F$  просто неограниченным сужением полосы пропускания частот низкочастотного полосового фильтра. Однако имеются, конечно, ограничения практического характера при сужении полосы пропускания фильтра, а именно:

- а) чисто конструктивные трудности;
- б) недостаточная стабилизация частоты повторения импульсов и
- в) трудности, возникающие от того, что цели не могут находиться на оси луча антенны радиолокатора бесконечно долгое время, так что мы имеем сигнал, повторяющийся конечное число раз.

Спектр сигнала, следовательно, является уже не дискретным, а «размытым», причем спектральные компоненты занимают конечный интервал частот, не являясь дельта-функциями. Вероятно, положение, приведенное в п. б), является не особенно серьезным затруднением. Положение, данное в п. а), подразумевает, что не легко построить низкочастотные полосовые фильтры даже с такой узкой полосой пропускания, как  $\Delta f = 10$  гц, а для еще более узких полос пропускания обычно требуются усилители с обратными связями, которые являются громоздкими элементами аппаратуры. Эффект, рассмотренный в п. в), всегда имеет место в той или иной степени.

### Апериодические методы обнаружения сигналов с помощью измерительного прибора

Трудно реализовать узкополосный фильтр для области звуковых частот, а очень узкополосный фильтр нижних частот, который пропускает постоянный ток, легко получить путем присоединения конденсатора параллельно измерительному прибору, используемому в качестве регистрирующего устройства. Следовательно, может иметь место обнаружение не основной частоты повторения импульсов, а обнаружение постоянной составляющей, содержащейся в спе-

ктре выпрямленного сигнала. Так как постоянная составляющая не содержит частоты повторения, прибор, действие которого основано на регистрации этой составляющей, можно назвать «апериодическим». Постоянная составляющая сигнала содержит вдвое меньше энергии шумов, чем любая другая компонента<sup>2</sup>. Это уменьшение энергии вдвое является следствием того, что полоса пропускания фильтра нижних частот расположена только по одну сторону от основной частоты, так что проходящий через фильтр непрерывно распределенный шум сокращается наполовину. Следовательно, различные отношения сигнал/шум при слуховом методе обнаружения также применимы к апериодической схеме обнаружения, если подставлять в формулах вместо величины эффективной ширины полосы пропускания полосового фильтра величину, равную двойной ширине полосы пропускания фильтра нижних частот.

Метод обнаружения «нулевой» частоты, также называемый апериодическим, удовлетворителен, поскольку рассматривается соотношение между сигналом и флуктуациями в непрерывном шумовом фоне. Затруднения, возникающие при обнаружении сигнала, обусловлены паразитными изменениями в постоянном токе, обязанными своим происхождением, например, нестабильности усиления. Когда мы говорим «паразитные изменения», мы подразумеваем изменения, вызванные иными причинами (например, влиянием температуры, аппаратурными погрешностями и т. п.), чем статистические флуктуации, подобные дробовому эффекту и т. д. С чисто статистической точки зрения постоянный ток, обусловленный шумом, не меняется во времени и в принципе может быть компенсирован посредством надлежащего смещения. Однако постоянный ток, обусловленный шумом, много больше, чем распределенный по спектру шумовой фон, пропускаемый фильтром, и, следовательно, много больше, чем сигнал, так как количественные выражения последних двух сравнимы. А именно, энергия, содержащаяся в постоянной составляющей тока, точно равна энергии, содержащейся в полном спектре шума на низких частотах, для квадратичного детектора, а для линейного детектора превышает ее в  $3,7 \approx (4/\pi - 1)^{-1}$  раза. Так как ширина низкочастотной части непрерывного спектра шума одного порядка с шириной полосы пропускания фильтра промежуточной частоты, мы видим, что постоянный ток, обусловленный шумом, будет превышать распределенный спектр флуктуационного шума, пропускаемый фильтром, в число раз, при-

близительно равно отношению ширины полосы пропускания фильтра промежуточной частоты к ширине полосы пропускания фильтра нижних частот. Это отношение составляет приблизительно  $10^5$ — $10^6$ . Следовательно, очень малые паразитные изменения в напряжении, вызванном постоянным шумовым током, будут маскировать изменения, обусловленные сигналом. Изготовление подобного прибора не имеет смысла, если он не имеет специального устройства для компенсации паразитных флуктуаций. Если колебания коэффициента усиления происходят очень медленно, их можно уничтожить просто включением развязывающего конденсатора. По своему действию фильтр тогда уже не будет являться фильтром нижних частот, а будет представлять собой фильтр, у которого срезаны очень низкие частоты, так что чисто постоянный ток не проходит. Это остроумное устройство будет работать только в том случае, если постоянная времени паразитных изменений коэффициента усиления больше, чем постоянная времени модуляции сигнала, так что фильтр пропустит последнюю, а не паразитные изменения в усилении. К сожалению, во многих практических случаях эти две постоянные времени сравнимы.

### Резонансные методы обнаружения сигналов при помощи измерительного прибора

Имеется один способ устранения трудностей, связанных с нестабильностью усиления. Этот способ заключается в применении измерительного прибора, соединенного с полосовым низкочастотным фильтром, причем требуется дополнительное детектирование. Переменный ток, содержащий широкий спектр частот, проходит полосовой низкочастотный фильтр с полосой пропускания, расположенной вокруг центральной частоты, равной, например, частоте повторения импульсов. Этот ток детектируется и поступает на электромеханический фильтр нижних частот, который пропускает только постоянный ток и очень низкие частоты, например меньше, чем  $1/10$  или 1 гц, что служит верхним пределом. Для того чтобы обойти конструктивные трудности, низкочастотный полосовой фильтр не должен быть таким узкополосным, как фильтр нижних частот, стоящий перед измерительным прибором. Тогда присутствие сигнала обнаруживается как изменение величины постоянного тока. Может показаться на первый взгляд, что эта схема в точности подобна только что рассмотренной аperiодической схеме, однако это не

так, ибо включение дополнительного детектора создает принципиальную разницу между двумя схемами измерения<sup>3</sup>. Иными словами, указанные схемы действуют следующим образом. Первая схема А — детектор — фильтр нижних частот (включен непосредственно после детектора). Эта схема существенно отличается от второй схемы Б — детектор — полосовой низкочастотный фильтр — детектор — фильтр нижних частот. Очевидно, в схеме Б нужно знать частоту повторения импульсов, тогда как в схеме А этого не требуется. Следовательно, схемы А и Б можно назвать соответственно апериодической и резонансной схемами обнаружения сигналов с помощью измерительного прибора.

В схеме А, как и в схеме Б, после окончательного детектирования энергия постоянного тока, обусловленного шумом, приблизительно равна энергии непрерывного спектра шума на входе этого детектора. Однако спектр шума в схеме А имеет ширину, сравнимую с шириной полосы пропускания фильтра промежуточной частоты, а в схеме Б — с шириной полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра. Следовательно, окончательная ширина спектра шума в схеме Б более узкая, чем в схеме А. В результате этого фильтр нижних частот в схеме Б пропускает очень малую часть энергии полного спектра шума, а в схеме А — заметную долю. Полагая, что пороговый сигнал (независимо от мешающего действия паразитных изменений в постоянном токе) соответствует фильтру нижних частот, пропускающему сигнал, сравнимый с шумовым фоном, мы видим, что по схеме Б сигнал будет сравнимым (скажем, с множителем в пределах 10—100) с постоянным током шума, вместо того, чтобы быть в миллион раз меньше его. Таким образом, паразитные изменения в постоянном токе детектора не будут сильно сказываться при работе схемы Б. При этом подразумевается, что шум в низкочастотном полосовом фильтре, модулированный частотой повторения импульсов и имеющий дискретный спектр, уже ликвидирован каким-либо методом, например таким, как в описываемой ниже схеме Джордана с двойным селективированием. Если это не так, то сигнал может быть ближе к одной тысячной или одной десятитысячной доли от постоянного тока, вызванного шумом, но все же постоянный ток шума не столь подавляюще велик по сравнению с сигналом, как в чисто апериодической схеме. Математическое описание дополнительного детектирования, применяемого при резонансном методе обнаружения сигнала с помощью



измерительного прибора, излагается в разделах 5 и 6 части II. Оно в основном содержит те же положения, как и в описании схемы А детектирования сигнала непосредственно после фильтра промежуточной частоты с последующей фильтрацией по низкой частоте. Фильтр нижних частот в схеме Б играет теперь роль, похожую на ту, которую в схеме А играет фильтр промежуточной частоты. Однако в схеме Б имеется одно упрощение. Сигнал, прошедший через низкочастотный полосовой фильтр, имеет скорее синусоидальную, а не импульсную форму, так что амплитуда его может считаться все время постоянной.

Создается ложное впечатление, что резонансный метод обнаружения не требует специального рассмотрения. Однако для резонансных методов (схема Б) очень узкая полоса пропускания в оконечной цепи, например 0,05—0,5  $\mu$  при наличии узкополосного низкочастотного полосового фильтра (предположим, с шириной полосы пропускания 5—10  $\mu$ ), не позволяет получить той большой чувствительности, которую можно получить с полосовым фильтром, обладающим очень узкой полосой пропускания, например 0,05—0,5  $\mu$ , поставленным прямо в цепь низких частот. Причиной этого служит нелинейность дополнительного детектора. А именно, если на низких частотах отношение сигнала к шуму мало (а в противном случае инструментальный метод обнаружения сигналов был бы вообще не нужен), рабочая характеристика детектора квадратична, даже если он работает как линейный, а не как квадратичный, и имеет место подавление сигнала шумами [см. соотношение (97)].

Кривые, иллюстрирующие явление, рассмотренное в предыдущем параграфе, даны на рис. 3. Они начерчены для линейного детектора в схеме с измерительным прибором (пунктирная линия), но результаты, полученные для линейного детектора, не отличаются существенно от результатов для квадратичного детектирования (сплошная линия), особенно для слабых сигналов. Эти кривые соответствуют различным предполагаемым пороговым отношениям сигнала к шуму для обнаружения сигнала с помощью прибора, причем по оси абсцисс отложено отношение ширины полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра к ширине полосы пропускания фильтра нижних частот, включенного перед измерительным прибором. По оси ординат отложена ширина полосы пропускания совокупности низкочастотного полосового фильтра и фильтра нижних частот, которая мо-

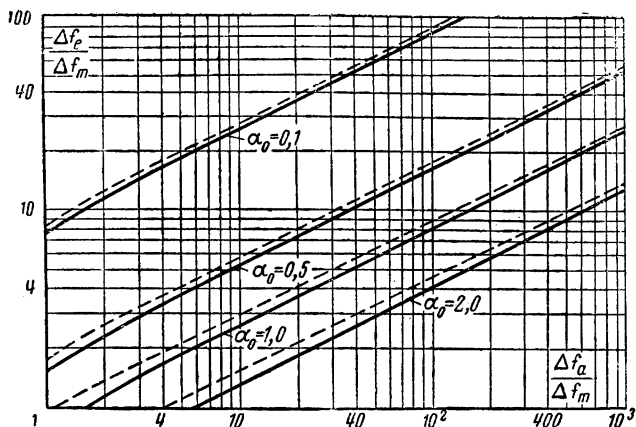


Рис. 3. Зависимость ширины эквивалентной «полосы пропускания»  $\Delta f_e$  наушников, используемых при слуховом обнаружении порогового сигнала, от ширины полосы пропускания  $\Delta f_a$  низкочастотного полосового фильтра, используемого в схеме обнаружения с помощью измерительного прибора, для того же самого отношения сигнала к шуму  $\alpha_0$ . Две сравниваемые ширины полосы пропускания отнесены на рисунке к величине  $\Delta f_m$ , которая представляет собой двойную ширину полосы пропускания оконечного фильтра нижних частот в резонансной схеме обнаружения при помощи прибора. Предполагается, что пороговое отношение сигнала к шуму в оконечной цепи одно и то же в случаях слухового и инструментального обнаружения.  $\alpha_0$  — пороговое отношение сигнал/шум в резонансной схеме измерения.

----- линейный детектор в схеме с измерительным прибором;  
 ————— квадратичный детектор в схеме с измерительным прибором.

жет дать такое же отношение сигнала к шуму без измерительного прибора, какое получается с прибором в оконечной цепи. Иными словами, отношение ординаты к абсциссе позволяет найти множитель, который определяет необходимое уменьшение полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра, позволяющее устранить из рассмотрения фильтр нижних частот и измерительный прибор. Для типичного случая, когда пороговое отношение сигнала к шуму равно единице, а второй детектор линейный, и ширина полосы пропускания фильтра нижних частот равна 1 гц  $\Delta f_m = 2$  гц, и при наличии низкочастотного полосового фильтра с шириной полосы пропускания 10 гц  $\Delta f_a =$

$= 10$  гц, полоса пропускания эквивалентного низкочастотного полосового фильтра равна 4,3 гц. В качестве примера другого типичного случая, предположим, что пороговое отношение сигнала к шуму равно единице, ширина полосы пропускания фильтра нижних частот равна  $1/20$  гц,  $\Delta f_m = = 1/10$  гц, а полоса пропускания низкочастотного полосового фильтра равна 5 гц. Тогда эквивалентный низкочастотный полосовой фильтр имеет ширину полосы пропускания 0,65 гц, а эквивалентный фильтр нижних частот — 0,33 гц. Эти величины основаны на предположениях, что амплитудно-частотные характеристики фильтров имеют гауссову форму, и ширина полосы пропускания определяется по точкам половинной мощности. В случае, если все фильтры имеют приблизительно прямоугольную форму амплитудно-частотной характеристики, формулы применимы, если для расчетов брать  $\Delta f$ , в 1,06 раза большую, чем ширина полосы пропускания реального фильтра.

### Соображения о выборе постоянной времени измерительного прибора

При резонансном или апериодическом методах обнаружения сигналов постоянный ток за счет детектирования шума компенсируют посредством подачи смещения, и среднее показание прибора в отсутствие сигнала может быть, таким образом, сведено к нулю. Если постоянная времени прибора мала, то присутствие сигнала вызовет систематическое отклонение стрелки прибора. Так, для сравнительно широкой полосы пропускания фильтра нижних частот ограничивающим фактором, препятствующим наблюдению, являются беспорядочные флуктуации, обусловленные непрерывным спектром шума<sup>4</sup>.

Вопрос о том, насколько влияет большая постоянная времени цепи прибора, оценивается по разному. Иногда требуют от приемного устройства, содержащего измерительный прибор, необычайно большой чувствительности, в других случаях утверждают, что для практических целей, например при работе на самолете, измерительная цепь, содержащая прибор, бесполезна. Возможно, применение измерительного прибора не принесет очень большого увеличения эффективности системы, если объект не будет наблюдаться на приемном пункте более одной секунды, что, конечно, требует более медленного углового перемещения антенны. Однако если допустима большая постоянная времени порядка 1—8 сек или более, то резонансная или апе-

риодическая схема измерения, а также близкий к ним по свойствам самописец могут иметь предпочтение по сравнению со слуховым методом обнаружения, когда сигнал прослушивается с большим напряжением, чем просматривается на приборе. В настоящее время еще нет точных экспериментальных доказательств того, какими недостатками и преимуществами обладает схема обнаружения с помощью прибора по сравнению с другими системами. Итак, прежде чем дать определенный ответ, мы должны узнать, по крайней мере, каков порядок величины порогового сигнала для обнаружения с помощью прибора \*. Во всяком случае, применение измерительных приборов в качестве обнаруживающих устройств заранее не оправдано.

В настоящее время имеются налицо экспериментальные данные, подтверждающие, что применение измерительных приборов с малыми постоянными времени, т. е. фильтров с шириной полосы пропускания порядка 1—2 гц, не так эффективно, как применение других методов обнаружения, когда время наблюдения объекта мало и условия работы наблюдателя сложны. Однако в тех случаях, когда допустимы большие интервалы времени наблюдения порядка 2—10 сек или больше, что приблизительно соответствует ширине полосы пропускания фильтров  $1/2$ — $1/10$  гц, измерительный прибор может обладать определенными преимуществами перед другими системами наблюдения (см., например, табл. § 6 части I).

Ясно, что пороговое отношение сигнала к шуму при инструментальном методе обнаружения в большой степени зависит от того, в каких условиях ведется обнаружение сигнала, и будет выше в полевых условиях, чем в лабораторных (в таблице мы считали, что отношение  $S_m/n_m$  равно единице).

В целом проблема обнаружения порогового сигнала с помощью измерительного прибора, так же как и в других системах, окончательно определяется «памятью», причем это делается или с участием человека, который запоминает ряд показаний прибора, или механически. В последнем случае осуществление «памяти» достигается посредством записывающего прибора. В обычных условиях отношение сигнала к шуму, равное единице, оказывается приемлемым в случае применения измерительного прибора.

---

\* Следует учитывать, что определение порогового сигнала в данной работе не совпадает с принятым в настоящее время статистическим определением. (Прим. ред.).

Однако в случаях, когда память наблюдателя особенно хороша или когда, скажем, используется запись на ленту, величина отношения  $S_m/n_m$  может быть значительно меньше единицы. Другими словами, высокую чувствительность можно получить посредством наблюдения в течение достаточно долгого промежутка времени, даже большего, чем постоянная времени измерительного прибора, которая может быть недостаточна.

### Применение режима селектирования

Для того чтобы создать очень чувствительную схему, работающую по слуховому методу или с помощью измерительного прибора, нужно иметь не только узкополосный фильтр или большую постоянную времени цепи прибора, но, кроме того, следует применить режим селектирования. Действие селекторного каскада должно уменьшить шумовой фон соответственно скважности селектирования, т. е. доли времени, когда селекторный каскад открыт. Применение селекторного каскада, однако, не уменьшает шума во время приема сигнала. Значит коэффициент селектирования не следует применять в расчете подавления в линейном детекторе сигнала, обусловленного одновременным присутствием шума. Когда селектирующий импульс имеет такой же период повторения, как и сигнал, он создает периодические искажения с периодом, равным периоду сигнала, что может вызвать ложное обнаружение при слуховом приеме или при обнаружении посредством резонансного метода. Однако имеется предложенная Джорданом остроумная идея срабатывания селекторного каскада в два раза чаще, чем повторяется сигнал. Периодическая последовательность импульсов с шумовым заполнением, возникающая от селектирования, имеет тогда основную частоту, равную второй гармонике  $2f_p$  частоты повторения сигнала  $f_p$  и не будет прослушиваться, если работа происходит на частоте повторения импульсов сигнала.

При наличии обычной визуальной индикации селекторный каскад не оказывает заметной помощи, так как в то время, когда появляется сигнал, он не влияет на отношение сигнал/шум. С другой стороны, при звуковом методе обнаружения исследуется одна компонента спектра, а последняя сравнивается с интенсивностью шумового фона, который имеет место в отсутствие сигнала. Введение стробирующего импульса оказывает здесь существенную помощь. Способность получить такую же большую чувстви-

тельность при звуковом методе приема, как и при визуальном методе, обычно обуславливается возможностью использовать весьма узкий селектирующий импульс, соответствующий скважности порядка 100.

### **5. Влияние рассогласования частотной характеристики фильтра и длительности импульса на обнаружение сигналов при визуальном и слуховом методах приема**

Мы упомянули в § 1 о том, что наилучшие результаты достигаются лишь при согласовании фильтра и сигнала, т. е. когда частотная характеристика фильтра является комплексно сопряженной спектру импульса. Однако, когда мы хотим сравнить рабочие характеристики приемника обнаружения при рассогласовании импульсно-частотной характеристики фильтра и спектра импульса с рабочими характеристиками при согласовании последних, следует учесть, что поведение характеристик приемника отчасти зависит от формы импульса или формы характеристики фильтра. Для того чтобы осуществить точные вычисления, в § 1 части I мы повсюду принимаем, что амплитудно-частотная характеристика фильтра и огибающая импульса имеют гауссову форму<sup>5</sup>, такую, что их амплитудно-частотные характеристики, исключая постоянные коэффициенты, содержат  $\exp(-\omega^2/2\omega_b^2)$ , и  $\exp(-\omega^2/2\omega_g^2)$  соответственно, где  $\omega$  — расстройка по отношению к несущей частоте,  $\omega_g$  — ширина спектра частот сигнала;  $\omega_b$  — ширина полосы пропускания частот фильтра. Так как Фурье-сопряженная гауссовой функции также является гауссовой функцией, то огибающая импульса изменяется во времени по гауссовому закону, а именно, как  $\exp(-\omega_g^2 t^2/2)$ . При согласовании импульса и фильтра  $\omega_g = \omega_b$ . Теперь исследуем изменения свойств приемника обнаружения при рассогласовании импульса и фильтра, когда  $\omega_g \neq \omega_b$ .

#### **Изменение ширины полосы пропускания фильтра промежуточной частоты**

Представим себе сначала, что длительность импульса задана, а ширина полосы пропускания фильтра промежуточной частоты изменяется так, что  $\omega_g$  остается фиксированной, а меняется  $\omega_b$ . Мощность необходимая для достижения данного порогового сигнала, легко подсчитывается и может быть выражена просто в виде отношения мощности порогового сигнала при отсутствии согласования

к мощности, требуемой при согласовании. Подробный анализ выполнен независимо Вангом и Уленбеком и поэтому в этой статье не приводится.

Рис. 4 показывает зависимость необходимой мощности порогового сигнала от  $\lambda (\equiv f_b/f_g)$  для случая звукового метода приема. Кривые для линейного детектора отличаются от кривых для квадратичного детектора, а именно, форма кривой в случае линейного детектора является функцией отношения сигнала к шуму  $\sigma_s = (S_F/n_F)$  при согласовании фильтра и импульса, которое в свою очередь пропорционально пороговому сигналу. В линейном детекторе имеет место зависимость от  $\sigma_s$ , потому что величина  $\sigma_s$  определяется степенью подавления сигнала. Однако при очень слабом сигнале рабочая характеристика линейного детектора становится такой же как у квадратичного с точностью до коэффициента, не зависящего от  $\lambda$ . Сравнение кривых на рис. 4 с результатами для случая визуального метода приема показывает, что звуковой метод приема несколько менее чувствителен к рассогласованию фильтра и импульса.

### Изменение длительности импульса

Теперь посмотрим, что происходит, когда остается фиксированной ширина полосы пропускания фильтра, а длительность импульса изменяется. В случае визуального метода приема из расчетов следует, что рабочая характеристика приемника зависит только от произведения  $\Delta f_b \Delta T_g^*$ . Следовательно, в случае визуального приема безразлично, меняется ли ширина полосы пропускания фильтра или длительность импульса<sup>6</sup>. Мощность порогового сигнала всегда возрастает, когда существует рассогласование фильтра и сигнала.

С другой стороны, в случае слухового метода приема кривые, полученные при изменении длительности импульса, значительно отличаются по форме от кривых, полученных при изменении ширины полосы пропускания фильтра. Причиной этого является то, что величины  $\Delta f_b$  и  $\Delta T_g$  здесь входят не только в произведение  $\Delta T_g \Delta f_b$ . Утверждение, что приемник обладает наибольшей эффективностью при согласовании фильтра и сигнала, справедливо только тогда, когда меняется  $\Delta f_b$ , а не  $\Delta T_g$ .

\*  $\Delta f_b$  — ширина полосы пропускания фильтра;  $\Delta T_g = 1/\Delta f_g$  — длительность импульса.

Определим  $\lambda$  как отношение  $\Delta f_g / \Delta f_b$  — ширины спектра импульса к ширине спектра импульса при согласовании фильтра и сигнала или, другими словами, как обратную величину отношения длины импульса к его длине при со-

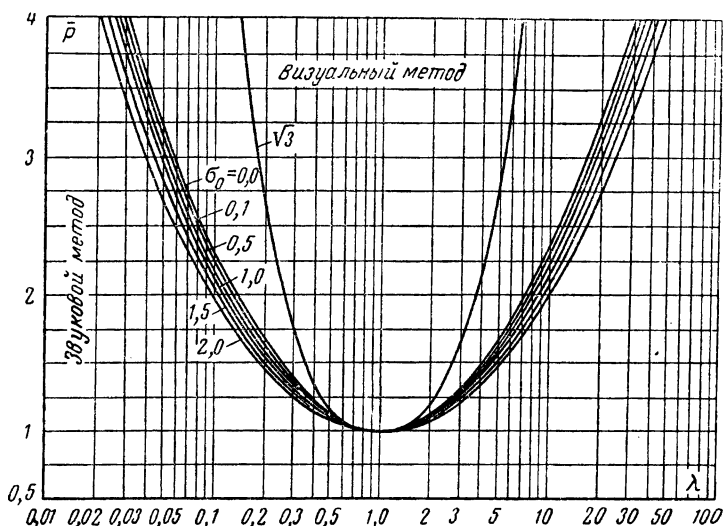


Рис. 4. Зависимость входной мощности на промежуточной частоте от ширины полосы пропускания фильтра промежуточной частоты при неизменной длительности импульса для звукового метода приема порогового сигнала [уравнение (76)], с линейным детектором.

$P$  определяется как отношение входной мощности к входной мощности при согласовании фильтра и импульса. Форма огибающей импульса предполагается гауссовой. Через  $\lambda =$

$\frac{f_b}{f_g}$  обозначено отношение ширины полосы пропускания

фильтра к ширине спектра частот импульса, причем  $f_g = \text{const}$ . Кривая, обозначенная  $\sigma_0 = 0$ , применима также для всех значений  $\sigma_0$  в случае квадратичного детектора [уравнение (776)]. Приведена также кривая для визуального метода приема.

гласовании фильтра и сигнала. На рис. 5 показана зависимость необходимой мощности порогового сигнала при изменении  $\lambda$  для линейного и квадратичного детекторов. Кривые не имеют минимума при  $\lambda = 1$ . Пороговая мощность уменьшается при увеличении длины импульса. Однако для очень длинных импульсов необходимая мощность приближается к асимптотическому значению, как по-



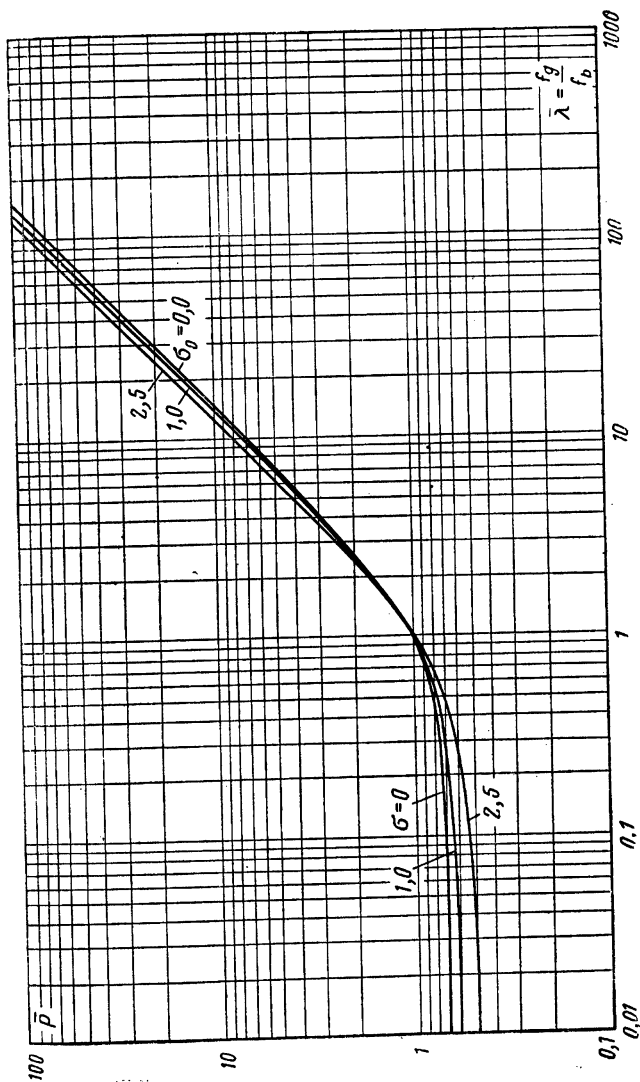


Рис. [5. Зависимость входной мощности сигнала по промежуточной частоте  $P$  от ширины спектра частот импульса  $f_g$  при неизменной ширине полосы пропускания фильтра  $f_b$  для случая слухового приема порогового сигнала [уравнение (78a)] при линейном детекторе и стробированном или не стробированном шуме. Огибающая импульса имеет гауссову форму. Ширина спектра частот импульса  $f_g$  считается здесь обратной величиной его длительности. Кривая  $\sigma_0 = 0$  пригодна для всех величин  $\sigma_0$  в случае квадратичного детектора [см. уравнение (77a)].

казано на рис. 5, и приблизительно достигает его, когда  $\lambda$  становится меньше, чем 0,1. Здесь снова результаты для линейного детектора зависят от отношения сигнала к шуму  $\sigma_0$ ; кривая  $\sigma_0=0$  пригодна также и для квадратичного детектора. Из рассмотрения рис. 5 делаем заключение, что длинные импульсы легче прослушиваются, а также обнаруживаются посредством измерительного прибора, чем короткие импульсы.

Конечно, имеются практические ограничения возможного увеличения длительности импульса. Если длительность импульса слишком велика, то наступит перекрытие следующих один за другим импульсов, и принимаемая информация будет потеряна, не говоря уже о том, что все расчеты верны в предположении, что перекрытие импульсов отсутствует.

Зависимость длительности импульса различна в случаях визуального и слухового методов приема. Это явление объясняется следующим образом. Очевидно, что в любом случае потребление мощности возрастает, если сделать импульс очень коротким, так как при наличии очень коротких импульсов их спектр становится широким, и через фильтр проходит только малая часть энергии, что вызывает потери энергии сигнала.

В случае визуального метода приема не следует использовать слишком длинный импульс в соответствии с нашим «простым критерием». Удлинение импульса сигнала до величины, много большей величины, обратной ширине полосы пропускания фильтра, не увеличит заметно максимального значения импульса, но возрастает энергия, подаваемая на вход из-за увеличения длительности импульса. Следовательно, при наличии визуального метода обнаружения импульс не должен быть ни очень длинным, ни очень коротким. Есть такая невыгоднейшая длительность импульса, при которой входная мощность, требуемая для достижения данного отношения сигнала к шуму, минимальна.

При слуховом обнаружении используется энергия одной из компонент спектра. Общее количество спектральных компонент, имеющих заметную величину, примерно равно отношению периода повторения импульсов к длительности импульса. Следовательно, при увеличении длительности импульса энергия распределяется среди небольшого количества компонент или, иными словами, уменьшаются потери за счет высших гармоник, которые не используются, когда прослушивают основную частоту или низкую гармонику частоты повторения импульсов. Этот эффект противоположен тому, что большей длительности импульса соответствует большая мощность. Поэтому потребляемая мощность приближается асимптотически к предельной величине, когда импульс очень длинный, а не беспредельно возрастает, как в случае визуального приема.

Если длительность импульса поддерживается неизменной и изменяется ширина полосы пропускания фильтра, очевидно, что слишком широкополосный фильтр бесполезен, так как он только увеличивает шум без улучшения передаваемого сигнала. На первый взгляд может показаться, что значительное сужение полосы пропускания фильтра

должно ослабить сигнал и шум в равной степени. Однако, наличие взаимной связи различных спектральных компонент сигнала (до детектора) в отличие от отсутствия связи между отдельными спектральными компонентами шума приводит к тому, что продетектированный сигнал ослабляется больше, чем шумы, при суживании полосы пропускания фильтра (для бесконечно узкополосного фильтра отношение сигнал/шум становится равным нулю), и поэтому на рис. 4 потребляемая мощность стремится к бесконечности, когда  $\lambda$  стремится к нулю.

## **6. Влияние частоты повторения импульсов, селектирования и ширины полосы низкочастотного полосового фильтра на чувствительность приемника обнаружения**

### **Визуальный метод приема**

На зависимость входной мощности от частоты повторения импульсов в визуальном методе приема может влиять ряд факторов. При наличии «простого» критерия единственной величиной, с которой следует считаться в отношении порогового сигнала, является энергия импульса. Поэтому средняя мощность сигнала прямо пропорциональна частоте повторения импульсов, в то время как максимальная мощность не зависит от нее. Этого и следовало ожидать для «простого» критерия в случае визуального метода обнаружения сигналов, когда не учитывается интегрирующее действие глаза и мозга и где важна единственная величина — отношение импульсной энергии передаваемого сигнала к шумовому фону. Следовательно, в этом случае экономичнее использовать импульсы, разделенные очень большими интервалами.

Пренебрежение явлением интегрирования в случае визуального метода приема не влияет на сопоставление свойств линейного и квадратичного детекторов и не приносит значительных погрешностей при рассмотрении вопроса о структуре фильтра. С другой стороны, при рассмотрении зависимости эффективности визуального метода приема от частоты повторения импульсов, конечно, важно учесть влияние интегрирования, которым мы пренебрегали. В работах Уленбека и Норта отмечается, что по крайней мере при определенных частотах повторения импульсов видимость импульса прямо пропорциональна корню квадратному из частоты повторения импульсов. Это подтверждено обширными экспериментальными данными Лаусона. Следовательно, наличие интегрирования позволяет снизить среднюю мощность, необходимую для достижения порогового сигнала, пропорционально корню квадратному из частоты повторения импульсов, а не первой степени ее, и

приводит к зависимости максимальной мощности, обратно пропорциональной квадратному корню из частоты повторения импульсов.

Звуковой метод обнаружения сигналов без применения режима селектирования

В случае звукового метода приема точная формулировка понятия порогового сигнала может быть дана более четко, поскольку выделение отдельной спектральной компоненты уже предполагает интегрирование. Остается невыясненным вопрос о том, какую числовую величину имеет критический порог.

Так как коэффициент селектирования  $G = \tau_G/T$  прямо пропорционален частоте повторения импульсов, следует различать случаи, для которых при звуковом методе обнаружения сигналов применяется или не применяется селектирование.

Сначала предположим, что селектирование отсутствует. В отсутствие селектирования теория показывает [см. (67), (68)], что для квадратичного детектора пороговый сигнал не зависит от частоты повторения импульсов и при согласовании фильтра и импульса является функцией только входной мощности по промежуточной частоте и ширины полосы пропускания фильтра промежуточной частоты. Такая зависимость может быть объяснена следующим образом. Для данной энергии в импульсе и данной ширины полосы пропускания фильтра промежуточной частоты при самом длинном интервале между импульсами на генерирование последних требуется меньшая средняя мощность. Однако мощность в импульсе используется хуже, потому что спектральные компоненты расположены более близко друг к другу, общее число их больше при данной частоте повторения и, следовательно, в любой компоненте содержится меньше энергии. Более точный анализ показывает, что при наличии квадратичного детектора эти два эффекта аннулируются, так что для данной длительности импульса и данной ширины полосы пропускания фильтра промежуточной частоты входная мощность по промежуточной частоте, требуемая для достижения определенной величины порогового отношения сигнала к шуму  $S_a/n_a$ , не зависит от частоты повторения импульсов<sup>7</sup>. Это заключение остается в силе независимо от того, согласован ли фильтр с импульсом и имеет ли импульс гауссову форму. Для линейного детектора независимость величины по-

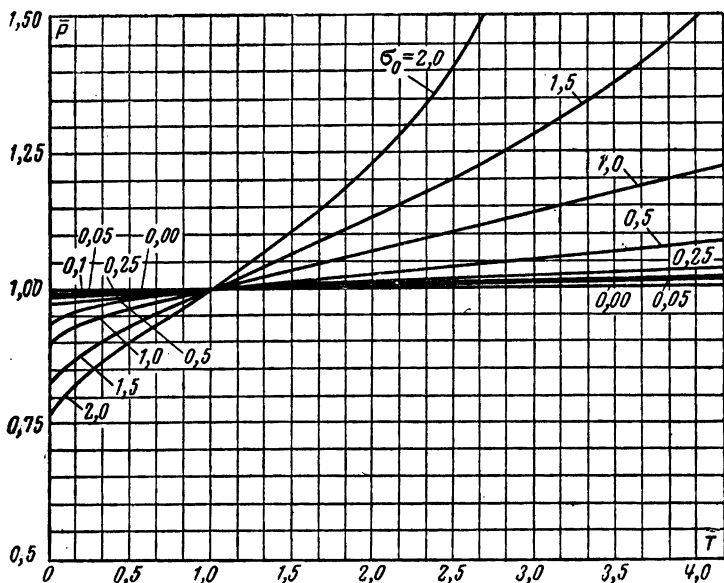


Рис. 6. Зависимость входной мощности  $\bar{P}$  по промежуточной частоте от периода повторения импульсов ( $T = T/T_0$ ) для звукового метода приема порогового сигнала при согласовании фильтра и импульса, при наличии неселектированного шума и линейного детектора [уравнения (77а), (77б)].

Здесь  $T$  — отношение периода повторения импульсов к периоду повторения импульсов при согласовании импульса с фильтром. Прямая, обозначенная 0,00, применима также в случае квадратичного детектора при любых  $\sigma_0$ .

рогового сигнала от частоты повторения импульсов остается в силе только в ограниченном количестве случаев, когда величина  $S_F/n_F$  очень мала. Действительно, для исчезающе малого  $S_F/n_F$  рабочая характеристика при наличии линейного детектора является медленно меняющейся функцией частоты повторения импульсов, причем входной сигнал лучше детектируется, когда частота повторения импульсов возрастает (рис. 6). Кривые, показанные на рис. 6, построены в предположении, что импульс сигнала имеет гауссову форму и фильтр согласован с сигналом. Ход кривых в зависимости от частоты повторения импульсов будет таким же и в других случаях, так как требуемая структура фильтра просто характеризует определенную степень подавления сигнала, и это выражается в основном в абсолютных единицах мощности.

## Применение режима селектирования

Выводы предшествующего параграфа применимы лишь до тех пор, пока коэффициент селектирования поддерживается неизменным\*, а частота повторения импульсов меняется, тогда как селектирующий импульс определяет только абсолютную чувствительность прибора. В действительности, однако, обычно меняют частоту повторения импульсов, поддерживая неизменным длительность селектирующего импульса, а не коэффициент селектирования. Тогда зависимость порогового сигнала от частоты повторения импульсов становится более сложной и нуждается в рассмотрении.

Когда используется селектирующий импульс постоянной длительности, оказывается, что при уменьшении частоты повторения импульсов требуется меньшая входная мощность сигнала. Это происходит из-за уменьшения коэффициента селектирования, что в свою очередь означает, что шумовой фон снижается в соответствии с уменьшением уровня входного сигнала. Таким образом, можно получить большую чувствительность [см. (79)]. Теория показывает [см. (80)], что при наличии квадратичного детектора и при постоянной длительности селектирующего импульса средняя мощность, необходимая для достижения данного отношения сигнал/шум, пропорциональна корню квадратному из частоты повторения импульсов, а импульсная мощность соответственно обратно пропорциональна корню квадратному из частоты повторения. Этот вывод дается в общем виде и не предусматривает какой-либо особой формы импульса или частотной характеристики фильтра, например гауссовой. Кривые<sup>8</sup>, показывающие зависимость входной мощности от частоты повторения импульсов, приведены на рис. 7. Здесь предполагается, что фильтр согласован с сигналом и имеет гауссову форму амплитудно-частотной характеристики, но в других случаях кривые фактически заметно отличаться не будут, а в случае квадратичного детектора в точности совпадают. Вместо того чтобы поддерживать длительность селектирующего импульса постоянной и изменять частоту его повторения, можно заинтересоваться тем, что произойдет, когда частота повторения остается неизменной, а изменяется длительность  $\tau_0$  селектирующего импульса. Изменение не-

---

\* Под коэффициентом селектирования понимается отношение длительности селектирующего импульса к периоду повторения.

обходимой в этих условиях входной мощности сигнала при изменении  $\tau_G$  показано на рис. 8. Очевидно, уменьшение длительности селектирующего импульса приводит к тому же результату, что и при сужении полосы пропускания частот телефонов или измерительного фильтра. В качестве абсциссы на рис. 8, таким образом, могут быть взяты в рав-

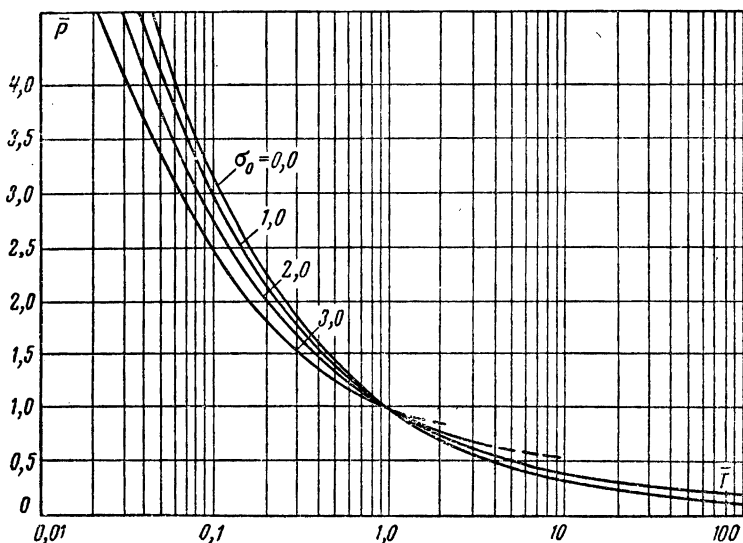


Рис. 7. Зависимость входной мощности  $\bar{P}$  порогового сигнала по промежуточной частоте от периода повторения импульсов  $\bar{T} = T/T_0$  при звуковом методе приема [уравнения (77а), (77б)] в случае согласования импульса и фильтра при наличии стробирования и линейного детектора. Кривая для  $\tau_0 = 0$  применима также при любых  $\sigma_0$  в случае квадратичного детектора (80).

ной степени как длительность селектирующего импульса, так и ширина полосы пропускания телефонов в зависимости от того, что желательно изменять. Два квадратичного детектора, когда не ставится вопрос о подавлении сигнала, мощность порогового сигнала пропорциональна корню квадратному из длительности селектирующего импульса (или ширины полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра). Это свойство квадратичного детектора, которое применимо также к линейному детектору при очень слабых сигналах, не требует каких-нибудь уточнений. Кривые на рис. 8, приведенные для линейных детекторов, при наличии исчезающе малых значений величины  $\sigma_{00}$ , строго говоря, применимы только

для гауссовой формы импульса при согласованном фильтре. Кривые для других фильтров, однако, не будут заметно отличаться друг от друга.

Когда стремятся повысить эффективность схемы посредством уменьшения длительности селектирующего импульса

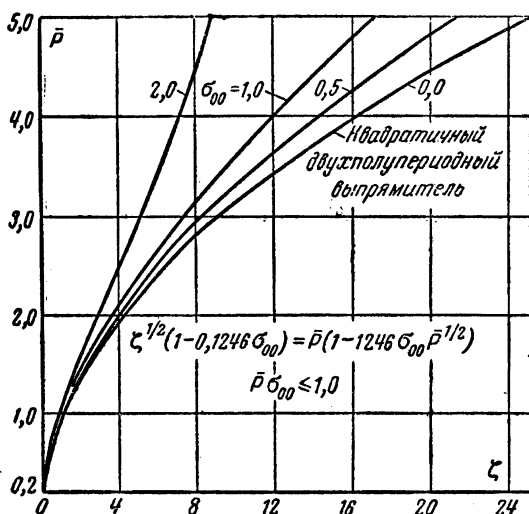


Рис. 8. Зависимость входной мощности по промежуточной частоте  $\bar{P}$  от  $\zeta$  для слухового метода приема или для приема с помощью аperiodической схемы измерения порогового сигнала при согласовании фильтра и импульса и использовании линейного детектора, где  $\zeta$  представляет собой: 1) длительность селектирующего импульса, или 2) ширину полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра, или 3) ширину спектра (или ширину полосы пропускания фильтра промежуточной частоты), причем форма спектра частот импульса и форма амплитудно-частотной характеристики фильтра предполагаются гауссовой. Обозначение  $00$  относится к случаю согласования фильтра промежуточной частоты и импульса.

и когда селекция во времени осуществляется до фильтра промежуточной частоты, существуют ограничения, без учета которых нельзя провести дальнейшие рассуждения. Ибо, если бы пришлось уменьшить коэффициент селектирования для того, чтобы сильно уменьшить относительный промежуток времени селектирования, было бы невозможно



определить цель, которая движется настолько быстро, что проходит отрезок дистанции, эквивалентный селектирующему импульсу, за время между двумя следующими один за другим обзорами, так как отраженные сигналы, возвращающиеся от цели, могут в этом случае попасть в приемник в то время, когда селектирующий импульс отсутствует. Независимо от этих рассуждений селектирование при таких обстоятельствах имело бы результатом искажение формы импульса в виде его укорочения, а этот эффект не принимался во внимание в наших расчетах, так что условие для наилучшего согласования импульса с фильтром изменится. Если селектирующий импульс малой длительности используется полностью, лучше подавать его после фильтра промежуточной частоты и после детектора. Как показал Норт, при этих обстоятельствах возможно использовать селектирующий импульс сколь угодно малой длительности. Погрешность измерения действительного места расположения целей определяется тогда конечной длительностью импульса. Идеальная система должна была бы иметь бесконечно короткий селектирующий импульс, совпадающий по времени с максимумом выпрямленного импульса, но неопределенность положения максимума в некоторых пределах делает это невозможным. Большим преимуществом визуального обнаружения является то, что глаз обладает свойством хорошей селекции на временной развертке. При попытке различить сигнал сравнивают максимум выброса сигнала только с шумовым фоном в его непосредственной окрестности. Предположение Нортона о бесконечно малом по длительности селектирующем импульсе имеет то преимущество, что если в схему вводится селектирующий импульс всегда точно в одно и то же время, т. е. во время максимума импульса, критерий порогового сигнала становится, очевидно, одним и тем же в обоих случаях визуального и звукового обнаружения, в течение этого времени в каждом случае мы интересуемся исключительно отношением энергии сигнала к энергии шума при очень слабом сигнале. Хотя на практике понятие о идеально синхронизованном бесконечно узком селектирующем импульсе по указанным причинам представляет собой слишком грубое упрощение, его использование все же является целесообразным<sup>9</sup> при идеализированном рассмотрении свойств устройства для обнаружения сигналов.

## 7. Относительная и абсолютная чувствительности при визуальном и звуковом обнаружении сигналов и их зависимость от согласования фильтра с сигналом

Как уже много раз упоминалось, принято считать, что фильтр «согласован», если его частотная характеристика является комплексно сопряженной преобразованию Фурье сигнала. Изучение «согласования» является основным вопросом в трех случаях:

а) когда оно является мерой наилучшей достижимой работы устройства;

б) если представляет собой удобный пример, с которым сравниваются результаты, полученные в других случаях;

в) когда оно является простым случаем с математической точки зрения, особенно при визуальном обнаружении.

В дальнейшем при попытках рассчитать абсолютную чувствительность в численном виде будем всегда предполагать, что существует согласование фильтра с сигналом. Когда в данном разделе мы говорим о зависимости порогового сигнала от длительности импульса при согласовании, нельзя путать этот вид зависимости от длительности импульса с той зависимостью, которая рассматривалась в предшествующем разделе, когда ширина полосы пропускания фильтра предполагалась постоянной.

Теперь мы рассматриваем такого рода изменения, когда ширина полосы пропускания фильтра соответственно изменяется при изменении длительности импульса так, чтобы фильтр и сигнал всегда были согласованы. При визуальном методе приема, использующем экран электронно-лучевого индикатора с модуляцией луча отклонением, теория, приведенная в § 3 части II, показывает, что результаты, получаемые при согласовании, совершенно не зависят от формы импульса в предположении, конечно, «простого» критерия. Для квадратичного детектора при согласовании из (67) и (75) получается очень простой результат:

$$(S_v/n_v)_{\text{квадр}} = P_0 T_0 / W_0,$$

где  $W_0$  — входная мощность шума, приходящаяся на 1 гц в полосе пропускания фильтра промежуточной частоты;

$P_0$  — входная мощность сигнала;

$T_0$  — период повторения импульсов.

Для линейного детектора соответствующая формула [полученная из выражений (67) и (75)] имеет вид

$$(S_v/n_v)_{\text{лин}} = 0,957 \frac{P_0 T_0}{W_0} \left( 1 - 0,1526 \left( \frac{P_0 T_0}{W_0} \right)^{1/2} \right);$$

для

$$P_0 T_0 / W_0 \leq 10.$$

Так как  $P_0$  и  $T_0$  встречаются только в виде произведения  $\frac{P_0 T_0}{W_0}$ , то единственной величиной, которая имеет значение, является энергия, содержащаяся в одном импульсе, а именно:  $E_0 = P_0 T_0$  [см. (63)]. Это объясняется тем, что наш „простой“ критерий для визуального метода работы не учитывает интегрирующий эффект глаза, что уже детально обсуждалось в § 3 части I.

Наш вывод о том, что работа приемного устройства, имеющего согласованный фильтр, при визуальном методе обнаружения не зависит от длительности импульса, является, несомненно, слишком грубой идеализацией, так как «простой» критерий не принимает в расчет того, что наблюдаемость выброса, вероятно, отчасти обуславливается длительностью импульса. Однако увеличение или уменьшение длительности импульса и выброса на экране отметчика также будет сопровождаться при согласовании соответствующим изменением шумовой дорожки. Указанное обстоятельство до некоторой степени подтверждает условия простого критерия о независимости обнаруживаемости от формы импульса.

При звуковом методе приема рабочая характеристика устройства, в котором импульс и фильтр согласованы, в ограниченных пределах не зависит от формы импульса и его длительности, но мощность, требуемая для достижения порогового отношения сигнала к шуму, тем меньше, чем длиннее импульс. Зависимость пороговой мощности от длительности импульса оказывается похожей на аналогичную зависимость от длины селекторного импульса, рассмотренную в предыдущем параграфе. До тех пор, пока форма импульса остается постоянной и меняется только задержка во времени, необходимая пороговая мощность будет пропорциональна квадратному корню из длительности импульса, но сигнал слабый. Изменение необходимой мощности сигнала (при произвольном масштабе для длительности импульса) показано на рис. 8 для квадратичного детектора и для линейного детектора с переменным смещением.

Причиной этого различия в характере зависимости мощности порогового сигнала от длины импульса для случаев визуального и звукового методов обнаружения является то, что выражение, которое стремятся сделать максимальным при создании согласованного фильтра, различно в этих двух случаях, и можно показать, что в одном случае максимум имеет величину, равную единице, и совершенно не зависит от формы импульса, тогда как в другом случае максимум зависит от предположений, касающихся структуры и длительности импульса [сравни (52) и (55) и текст после (56)]. Физически причиной того, что возрастание длительности сигнала полезно при звуковом методе приема и не приносит пользы в визуальном методе, является уменьшение доли энергии, теряющейся в используемых при звуковом методе приема высших гармониках частоты повторения. В случае визуального метода приема увеличение длительности импульса расширяет максимум, но не увеличивает его, что в соответствии с нашим «простым» критерием не облегчает обнаружения.

### Количественное определение чувствительности

Зная величины пороговых отношений сигнал/шум для различных видов индикации: при помощи электронно-лучевой трубки, слуховым методом с селективированием во времени или без него и с использованием измерительного прибора, можно подсчитать и сравнить относительные и абсолютные чувствительности этих методов обнаружения сигналов. Для того чтобы сделать это, используем результаты, полученные в части II, и приведем здесь некоторые окончательные формулы. Для визуального метода приема справедливы соотношения

$$(S_v/n_v)_{\text{квдр}} = \sigma_0^2 \quad (a)$$

и

$$(S_v/n_v)_{\text{лин}} = 0,957\sigma_0^2 (1 - 0,1526\sigma_0) \text{ при } \sigma_0 \leq 10^{1/2},$$

которые следуют из (73) и (75) при согласовании фильтра с сигналом. Для слухового метода приема необходимые формулы получаются из (48a), (48б) и (49a) и (49б) для шума при отсутствии селекции

$$(S_a/n_a)_{\text{квдр}} = \frac{0,633\sigma_0^2}{T_0 (\Delta f_e f_b)^{1/2}} \quad (б)$$

и

$$(S_a/n_a)_{\text{лин}} = \frac{0,616\sigma_0^2}{T_0(\Delta f_e f_b)} (1 - 0,1246\sigma_0) \text{ при } \sigma_0 \leq 10^{1/2}.$$

Здесь  $\Delta f_e$  — критическая ширина полосы пропускания уха или низкочастотного полосового фильтра, если он имеет более узкую полосу пропускания частот. Когда шумовой фон строится, соотношение (б) принимает вид

$$(S_a/n_{aG})_{\text{кв.др}} = \frac{0,633\sigma_0^2}{(T_0\tau_G\Delta f_e f_b)^{1/2}} \quad (\text{в})$$

и

$$(S_a/n_{aG})_{\text{лин}} = \frac{0,616\sigma_0^2}{(T_0\tau_G\Delta f_e f_b)^{1/2}} \cdot (1 - 0,1246\sigma_0) \text{ при } \sigma_0 \leq 10^{1/2}.$$

Выражение для резонансного метода измерения получается из уравнения (97) и имеет вид

$$(S_m/n_m) = 1,156 \frac{\left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta f_m}{\Delta f_a}\right)^2\right]^{1/2}}{\left(\frac{\Delta f_m}{\Delta f_n}\right)^{1/2}} \left\{ \left(\frac{S_a}{n_{a(G)}}\right)^2 - \right. \\ \left. - 0,1526 \left(\frac{S_a}{n_{aG}}\right)^3 \right\} \text{ при } \frac{S_a}{n_{aG}} \leq 10^{1/2}, \quad (\text{г})$$

где второй используемый детектор может быть либо линейным, либо квадратичным. Круглые скобки у обозначения  $G$  означают, что соответствующая величина  $S_a/n_a$  имеет вид (б) или (в), смотря потому, применяется или не применяется селектирование.

Величина  $\Delta f_m$ , появившаяся в уравнении (г), — двойная ширина полосы пропускания идеального фильтра, эквивалентного фильтру в измерительной схеме. Причина появления множителя 2 та, что наша общая теория предполагает, что частотная характеристика фильтра расположена симметрично по обе стороны от резонансной частоты, тогда как у фильтра низких частот, включенного в измерительную схему, характеристика несимметрична.

Для того чтобы проиллюстрировать и сравнить абсолютные чувствительности для различных методов приема, составлена таблица для следующих условий работы: во-

# **Пороговые значения отношения сигнал/шум для различных методов приема**

Метод обнаружения	Отношение сигнал/шум на входе, дб	Отношение сигнал/шум на выходе, дб			
	Минимально обнаруживаемый сигнал	Квадратичный двухполупериодный детектор		Линейный двухполупериодный детектор	
		$\Delta f_a = \Delta f_e$ , 50 гц	$\Delta f_e$ , 5 гц	$\Delta f_e$ , 50 гц	$\Delta f_e$ , 5 гц
$S_v/n_v$ Визуальный метод приема	0,0 дб (пессимистические данные) — 5,0 — 10,0 (оптимистические данные)	$\sigma_0 = 0,0$ дб — 2,5 — 5,0		+1,0 дб — 1,7 — 4,4	
$S_a/n_a$ Звуковой метод приема Селектирования нет	+ 10,0 (пессимистические данные) 0,0 (оптимистические данные)	+ 13,5 + 8,5	+ 8,5 + 3,5	> 13,5 > 13,5	+ 11,2 + 4,8
$S_a/n_{ag}$ Звуковой метод приема при селектировании	+ 10,0 (пессимистические данные) 0,0 (оптимистические данные)	+ 2,0 — 3,0	— 3,0 — 8,0	+ 2,9 — 2,5	— 2,5 — 7,8

	$\Delta f_m$ , гц	Постоянная времени $2/\Delta f_m$ , сек				
Колебательная схема измерения Шум селектирован; детектор линейный ( $S_m/n_m$ )=1	2 1/5 1/10	1 10 20	$\sigma_0 = -6,7$ — 9,3 — 10,0	— 9,3 — 12,0 — 12,4	— 6,3 — 9,0 — 9,8	— 9,0 — 11,5 — 12,2
Апериодическая схема измерения ( $S_m/n_m$ )= 1	2 1/5 1/10	1 10 20	— 10 — 15,5 — 16,5	— 9,7 — 15,2 — 16,3		

Эквивалентный прямоугольный импульс при длительности 1,41 мсек.

$$T_0 = 10^{-3} \text{ сек}; \tau_b = 5 \cdot 10^{-6}; f_b = 4 \cdot 10^5 \text{ гц.}$$

первых, предполагается, что импульс имеет огибающую, изменяющуюся по гауссовому закону, причем фильтр согласован с сигналом. Ширина спектра эквивалентного прямоугольного импульса составляет  $7,1 \cdot 10^5$  гц,  $f_b = 4 \cdot 10^5$  гц из уравнения (60) и ширина спектра по половинной мощности равна  $2/3$  Мгц. Далее мы имеем  $\tau_G = 5 \cdot 10^{-6}$  сек — полная длительность двойного селекторного импульса (см. § 3 и 5) и  $T_0 = 10^{-3}$  сек, соответствующее частоте повторения 1 кгц. Два разных низкочастотных полосовых фильтра имеют полосы пропускания  $\Delta f_e = 50$  гц,  $\Delta f_e = 5$  гц. Также применяются три различных фильтра нижних частот, имеющие  $\Delta f_m = 2$ ;  $1/5$  и  $1/10$  гц (действительная ширина полосы пропускания частот равна 1,  $1/10$ ,  $1/20$  гц), причем каждый фильтр нижних частот может работать с одним и тем же полосовым низкочастотным фильтром  $\Delta f_e = 50$  гц или  $\Delta f_e = 5$  гц.

Здесь величина  $\sigma_0$ , равная  $(S_F/n_F)$  при согласовании фильтра с импульсом, дается в децибелах в соответствующей графе таблицы. Из-за отсутствия достаточно полных экспериментальных данных временно предполагается, что  $S_m/n_m = 1$ . Из таблицы видно, что линейный детектор всегда немного уступает квадратичному, хотя для слабых сигналов разница между ними мала. Заметим также, что при вышеуказанных условиях работы слуховой метод приема дает результат приблизительно такой же, как визуальный метод, и лишь в некоторых случаях превосходит его, хотя напрягая слух в случае слухового метода приема, можно улучшить пороговый сигнал еще на 5 дб. Применение измерительного прибора, конечно, имеет преимущество в предположении, что  $S_m/n_m = 1$  является пороговым отношением сигнала к шуму для визуального и слухового методов приема.

Уменьшение ширины полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра в десять раз увеличивает чувствительность на 5 дб. Этон и Вольф в неопубликованном докладе, используя аperiодический метод измерения с постоянными времени порядка 10 сек, получили улучшение порогового сигнала на 20 дб по сравнению с визуальным методом обнаружения в лабораторных условиях с помощью осциллографа с модуляцией луча отклонением при условии  $S_0/n_0 = 1$ . Этот результат относится к рабочей характеристике, на которую указывается в нашей теории.

А именно, если взять ширину полосы пропускания, равную  $\Delta f_m = 1/5$  гц, соответствующую постоянной времени в 10 сек, и работать с одним селекторным импульсом, имеющим длительность  $\sim 1/5$  мксек, так как обычно применяют селекторный импульс, сравнимый с длительностью импульса (а не превышающий длительность импульса; и не двойной селекторный импульс), формулы дадут чувствительность на 18,5 дб больше по сравнению с «пессимистическими» данными, относящимися к визуальному обнаружению сигнала на экране осциллографа. Однако не следует резко подчеркивать, что действенность различных методов приема, основанных на измерении сигнала с помощью прибора, зависит от возможности применять большие постоянные времени, так как реализация этой возможности в свою очередь зависит от тактического назначения радиолокационной установки (см. § 3).

## Часть II

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

#### 1. Влияние фильтра промежуточной частоты на величину отношения сигнал/шум

Колебание несущей частоты, промодулированное импульсами, поступает на каскады высокой частоты. Затем несущая частота преобразовывается в более низкую частоту (промежуточную частоту) при помощи первого детектора (смесителя). Предполагается, что это преобразование, так же как и последующее усиление, является линейным процессом, который не приводит к заметным искажениям формы входного сигнала. Нашей задачей является рассмотрение каскадов промежуточной частоты и следующих за ним каскадов приемника. Шум, поступающий на каскады промежуточной частоты, возникает главным образом в смесителе или, в случае наличия искусственных шумов, проходит, конечно, и через каскады высокой частоты.

Шум и сигнал до подачи на второй детектор фильтруются в каскадах промежуточной частоты. После детектирования сигнал, смешанный с шумом, фильтруют при помощи фильтра видеочастот или низкочастотного полосового фильтра, усиливают и подают на осциллограф, телефоны или измерительный прибор.



Сигнал на входе каскадов промежуточной частоты можно записать в следующем виде:

$$f_1(t) = \sum_j \sqrt{2} S_I(t - t_j) \cos \omega_0(t - t_j), \quad (1)$$

где  $\omega_0 = 2\pi f_0$  и  $f_0$  — промежуточная частота.

Выражение (1) представляет собой входной сигнал в виде последовательности импульсов, причем огибающая любого из импульсов описывается посредством выражения  $\sqrt{2} S_I(t - t_j)$ . Различные значения  $t_j$  отличаются друг от друга на величины, кратные периоду повторения импульсов  $T$ . Отдельный сигнал выражается посредством  $\sqrt{2} S_I(t) \cos \omega_0 t$ , причем для удобства  $t_j$  считается равным нулю. Мы будем также считать, что перекрытие между двумя следующими друг за другом импульсами незначительно, так что в аргументе выражения (1), зависящем от времени, необходимо учитывать только величину  $t$ . Для рассматриваемых случаев это является очень хорошей аппроксимацией. Спектр отдельного импульса выразится как

$$S'_I(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} S_I(t) \exp(-i\omega' t) \cos \omega_0 t dt, \quad \omega' = 2\pi f'. \quad (2)$$

Заметим, что из соотношения (2) следует, что

$$S'_I(\omega') = S_I'^*(-\omega')$$

и

$$S_I'^*(\omega') = S'_I(-\omega'),$$

где звездочка (\*) означает комплексно сопряженную величину. Выражение, соответствующее (2), имеет вид

$$\sqrt{2} S_I(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S'_I(\omega') \exp(i\omega' t) d\omega'. \quad (3)$$

Помимо усиления каскады промежуточной частоты действуют подобно фильтру, амплитудно-частотную характеристику которого обозначаем через  $G_{IF}(\omega')$ .

Чтобы не нарушить общности нашего представления о временном процессе, не будем уточнять  $G'_{IF}(\omega')$ .

Отфильтрованный сигнал, который снимается с выхода каскадов промежуточной частоты, тогда равен:

$$S'_F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S'_I(\omega') G'_{IF}(\omega') \exp(i\omega' t) d\omega', \quad (4)$$

причем должно выполняться  $G'_{IF}(-\omega') = G'^{*}_{IF}(\omega')$ , для того чтобы выражение для выходного напряжения содержало одну только действительную часть при действительном входном напряжении. Необходимость использования штрихов (') следует из принятой системы обозначений для различных характеристик фильтров, когда отсчет частоты ведется от несущей частоты, а не от абсолютного нуля частоты, так что  $\omega = \omega' - \omega_0$  и

$$S'_I(\omega') = S_I(\omega), \quad G'_{IF}(\omega') = G_{IF}(\omega).$$

Тогда с учетом замены переменных  $\omega = \omega' - \omega_0$  можно записать равенство (2) без заметной ошибки как

$$S_I(\omega) = 2^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_I(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (5)$$

так как можно пренебречь той частью выражения, которая стоит под интегралом с быстро осциллирующим множителем  $\exp(-2i\omega_0 t)$ . Влияние этой части выражения (2) пренебрежимо мало из-за ее быстрого изменения. Уравнение (4) можно написать в виде

$$S'_F = 2\text{Re} \left\{ \frac{\exp(i\omega_0 t)}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} S_I(\omega) G_{IF}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right\}. \quad (6)$$

Мы можем выразить колебание на выходе фильтра как

$$S'_F(t) = \sqrt{2} S_F(t) \cos(\omega_0 t - \varepsilon), \quad (7a)$$

где

$$\sqrt{2} S_F(t) = 2 \left[ \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{+\infty} S_I(\omega) G_{IF}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right]. \quad (7b)$$

Фаза  $\varepsilon$  в действительности является функцией  $t$ , но она так медленно изменяется, что для рассматриваемых случаев может считаться постоянной величиной. Следует

заметить, что выражение под интегралом в уравнении (76) имеет один резонансный пик при  $\omega=0$ , тогда как выражение под интегралом в уравнении (4) проявляет резонансные свойства при  $\omega=\pm\omega_0$ . При изменении нижнего предела интегрирования от  $-\omega_0$  до  $-\infty$  в уравнении (76) следует понимать, что  $G_{IF}(\omega)$  должно быть очень малым для  $\omega < -\omega_0$ . Определение  $G_{IF}(\omega)=G'_{IF}(\omega'-\omega_0)$  подразумевает, что  $G_{IF}$  также имеет максимальное значение при  $-\omega_0$ .

Уравнение (76) показывает, что амплитуду сигнала  $S_F(t)$  после фильтрации можно определить, совершенно не принимая во внимание несущую, а применяя спектральное разложение множителя  $S_I(t)$ , характеризующего модуляцию входного колебания. Назовем  $S_I(t)$  множителем, характеризующим модуляцию, а не огибающей, потому, что при оценке (76) обязательно принимать во внимание не только модуль, но и знак  $S_I(t)$ .

Будем полагать, что шумовой фон, проходящий через фильтр промежуточной частоты, имеет в пределах полосы пропускания фильтра постоянную спектральную плотность  $W_0$  (размерность спектральной плотности равна

$\frac{\text{мощность}}{\text{частота}} = \text{энергия}$ ). Это предположение в действительности вполне обосновано, так как изменения спектральной плотности шума в пределах полосы пропускания фильтра промежуточной частоты обычно незначительны. Среднеквадратичное значение мощности шума, переданной усилителем промежуточной частоты, представляется в виде

$$n_F^2 = \frac{1}{2} \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G'_{IF}(\omega')|^2 d\omega' = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{IF}(\omega)|^2 d\omega, \quad (8)$$

где  $n_F$  — среднеквадратичное значение шумового напряжения, поступающего на детектор.

## 2. Квадратичное и линейное детектирование сигнала и шума

Введем в рассмотрение функцию корреляции  $R(t)$  для напряжения шума и сигнала. Функция корреляции  $R(t)$  определяется как средняя величина произведения мгновенных значений шума и сигнала, взятых в моменты

времени, разнесенные на величину  $t$ , причем усреднение производится по всем возможным начальным фазам сигнала. Может быть показано [Л. 4—Л. 6] также, что функция корреляции является преобразованием Фурье спектральной плотности напряжения на выходе прибора и соответственно наоборот. Тогда имеем следующие основные соотношения:

$$W(\omega) = 4 \int_0^{\infty} R(t) \cos \omega t dt; \quad (9)$$

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (10)$$

Для шумового напряжения, снимаемого с выхода фильтра, имеем функцию корреляции  $\Psi(t)$  следующего вида:

$$\Psi(t) = \frac{W_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G'_{IF}(\omega')|^2 \cos \omega' t d\omega'. \quad (11)$$

Из сравнения соотношений (11) и (8) видно, что  $n_F^2 = \Psi(0)$ , так что  $\Psi(0)$  является среднеквадратичным значением напряжения шума, прошедшего через фильтр промежуточной частоты, настроенный на  $f_0$ . Тогда с помощью уравнения (11) мы можем написать с достаточно малой ошибкой

$$\Psi(t) \equiv \Psi_0(t) \cos \omega_0 t \equiv \Psi(0) r(t) \equiv \Psi(0) r_0(t) \cos \omega_0 t. \quad (12)$$

Соотношения (12) определяют нормализованные функции корреляции  $r(t)$  и  $r_0(t)$ , где

$$\Psi_0(t) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{IF}(\omega)|^2 \cos \omega t d\omega, \quad (13)$$

так как интегралом при  $\omega < -\omega_0$  обычно пренебрегают. Заметим, что  $r_0(0) = r(0) = 1$ .

#### Сигнал и шум на выходе квадратичного детектора

Пропустим сигнал с фильтра промежуточной частоты и сопровождающий его шум через детектор с квадратичной вольт-амперной характеристикой. Легко показать, что функ-

ция корреляции  $R(t)$  до усреднения по фазе огибающей сигнала представляется в виде

$$R_N(t_1, t_0, t'_0) = \eta^2 \{ \Psi^2 + b_1^2 b_2^2 \Psi^2 + 2\Psi(t) + \\ + 4b_1 b_2 \Psi \Psi(t) + b_1^2 \Psi^2 + b_2 \Psi^2 \}, \quad (14)$$

где

$$b_1 = \sqrt{2} S_F(t'_0) \cos \omega_0 t_0 / \Psi^{1/2}, \quad (15)$$

$$b_2 = \sqrt{2} S_F(t'_0 + t) \cos \omega_0 (t_0 + t) / \Psi^{1/2}$$

и  $\eta$  — параметр, зависящий от динамической характеристики детектора.

Полагая, что огибающая  $S_F(t'_0)$  и другие аналогичные выражения являются функциями, медленно меняющимися во времени, в расчетах мы можем считать их постоянными величинами и, следовательно, не коррелированными с  $\cos \omega_0 t_0$  в случае, когда усреднение ведется по фазе несущей частоты. Тогда аналитически  $t_0$  и  $t'_0$  независимы. Теперь в окончательном выражении для корреляционной функции члены  $\Psi^2$ ,  $b_1^2 \Psi^2$ ,  $b_2^2 \Psi^2$  определяют постоянный ток. Кроме того, член  $\Psi(t)^2$  с помощью уравнения (12) можно представить как

$$\Psi(t)^2 = \frac{1}{2} \Psi_0^2(t) (1 + \cos 2\omega_0 t),$$

последнее слагаемое которого образует спектральную область, сконцентрированную вокруг частоты  $2f_0$ , которая достаточно отдалена от области, представляющей для нас интерес. Таким образом, функция корреляции на низких частотах, полученная из выражения (14), приобретает окончательную форму<sup>10</sup>

$$R_{LF}(t) = \eta^2 [\Psi_0^2(t) + 2\Psi_0(t) \overline{\{S_F(t'_0) S_F(t'_0 + t)\}} + \\ + \overline{\{S_F(t'_0)^2 S_F(t'_0 + t)^2\}}], \quad (16)$$

где черта означает усреднение по  $t'_0$ .

Первый член выражения (16) определяется действием одного шума, второй член — непрерывным спектром перекрестной модуляции сигнала и шума и третий представляет собой выходное напряжение сигнала. В обоих случаях визуального и звукового приема, как правило, можно

пренебречь вторым членом. Однако после произведенной операции выводы в двух случаях приема сигналов совершенно различные. При звуковой индикации время существования сигнала составляет такую малую долю периода повторения сигналов, что действие члена от перекрестной модуляции пренебрежимо мало в сравнении с действием членов, определяемых в отдельности сигналом и шумом. В случае визуального метода приема все еще правильно считать, что эти члены, определяемые перекрестной модуляцией, присутствуют только в течение малой доли времени, но теперь эта доля времени представляет интерес. Однако рабочая характеристика приемника всегда бывает монотонно возрастающей функцией величины  $S_F/n_F$ , что физически очевидно, так как возрастание сигнала должно всегда приводить к улучшению его наблюдения. Таким образом, наилучшее наблюдение получается при максимальном увеличении  $S_F/n_F$ . Тогда можно взять в качестве определения для отношения сигнала к шуму эффективное значение сигнала (огибающей) в той точке схемы приемника, где мы используем ее, к среднеквадратичному значению напряжения шумового фона, пренебрегая членами, вызванными перекрестной модуляцией. В отсутствие сигнала функция корреляции на низких частотах из (16) представляет собой

$$R_{LF}(t) = \eta^2 \Psi^2(0) r_o(t)^2 = \eta^2 \Psi_0^2(t). \quad (17)$$

Из (10) следует, что когда  $t=0$ , средняя мощность на выходе на низких частотах равна:

$$R_{LF}(0) = \eta^2 \Psi^2(0) \equiv \eta^2 n_v^2 = \eta^2 n_F^4, \quad (18)$$

где  $n_v$  — среднеквадратичное напряжение виде шумов, причем эффективная ширина полосы пропускания по промежуточной частоте меньше, чем ширина полосы пропускания видеокаскадов, так что выходная мощность на низких частотах после детектирования незначительно уменьшается за счет частотных характеристик видеокаскадов. Спектр низкочастотного шума на выходе квадратичного детектора можно получить из (9) при помощи соотношения (17), и он равен <sup>11</sup>

$$W_{LF}(\omega) = 4 \int_0^{\infty} R_{LF}(t) \cos \omega t dt. \quad (19)$$

Ранее было показано, что формула (18) представляет собой выражение для мощности видеозумов. При звуковом методе приема надо выделять отдельную компоненту спектра сигнала из относительно узкой части спектра шума такой же плотности, что и плотность спектра шума около постоянной составляющей  $f=0$ . Из (19) она равна:

$$W_{LF}(0) = 4 \int_0^{\infty} R_{LF}(t) dt. \quad (20)$$

Средний квадрат шума в случае звукового метода приема  $n_a^2$ , строго говоря, равен:

$$n_a^2 = \frac{W_{LF}(\omega)}{2\pi} \int_0^{\infty} |G_a(\omega)|^2 d\omega, \quad (21a)$$

где  $G_a(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика низкочастотного полосового фильтра, но мы можем воспользоваться приближенным выражением

$$n_a^2 = \frac{W_{LF}(0)}{2\pi} \int_0^{\infty} |G_a(\omega)|^2 d\omega. \quad (21b)$$

Удобно выражать ширину полосы пропускания реального фильтра, измеренную по половинной мощности или по другим точкам частотной характеристики, в обозначениях идеального фильтра, коэффициент передачи которого равен максимальному коэффициенту передачи сравниваемого с ним реального фильтра, а ширина полосы такая, что оба фильтра пропускают одинаковую мощность шума, т. е. такая, что площади под квадратами соответствующих амплитудно-частотных характеристик одни и те же. Предполагается, что характеристики фильтров имеют только один максимум, но определение может быть обобщено для более сложных форм частотных характеристик. Если  $G_k$  — частотная характеристика реального фильтра, тогда эффективная ширина полосы  $\Delta f_k$ , равная полосе эквивалентного идеального фильтра, становится равной:

$$\Delta f_k = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_k(f)|^2 df / |G_k(f)|_{\max}^2. \quad (22)$$

Во всех наших определениях мы будем предполагать, что  $|G_k(f)|$  нормирована, так что  $|G_k(f)|_{\max} = 1$ . Тогда

(21б) может быть написано в еще более простом виде, как

$$n_a^2 = W_{LF}(0) \frac{\Delta \omega_e}{2\pi} = W_{LF}(0) \Delta f_e, \quad (23)$$

где параметр  $\Delta f_e$  — ширина полосы пропускания телефонов или ширина полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра, если полоса их очень узкая, или это действующая ширина полосы пропускания уха, если низкочастотный полосовой фильтр имеет широкую полосу пропускания (рис. 1 для кривых  $\Delta f_{e \text{ критич}}$ ).

### Шум на выходе линейного детектора

Можно показать, что для линейного детектора функция корреляции, обусловленная одним шумом, для низких частот (исключая из рассмотрения постоянный ток) имеет вид<sup>12,13</sup>

$$\begin{aligned} R_{LF}(t) &= \frac{\beta^2 \Psi(0)}{2\pi} \left\{ {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; r_0(t)^2\right) - 1 \right\} = \\ &= \frac{\beta^2 \Psi(0)}{8\pi} \{ r_0^2 + r_0^4/16 + r_0^6/64 + 25r_0^8/4096 + \dots \} = \\ &= \frac{\beta^2 \Psi(0)}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} \right\}^2 r_0^{2n+2} = \\ &= \frac{\beta^2 \Psi(0)}{2\pi^2} \{ 4E(r_0) - 2(1 - r_0^2) K(r_0) - \pi \}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  ${}_2F_1$  — гауссова гипергеометрическая функция, а  $E$  и  $K$  — полные эллиптические интегралы от модуля  $r_0$ , причем  $r_0(t)$  определяется уравнением (12). Средний квадрат напряжения виде шумов  $n_v^2$  в отсутствие сигнала получается из (24) с помощью представления

$${}_2F_1(\alpha; \beta; \gamma; 1) = \Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta) / \Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta);$$

$$R(\gamma) > 0; R(\gamma - \alpha - \beta) > 0.$$

Мы имеем

$$n_v^2 = \beta^2 \Psi(0) \left[ \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{2\pi} \right] = 0,0435 \beta^2 \Psi(0). \quad (25)$$

Используемый в (21) непрерывный спектр шума получается непосредственно из (19) и (24):

$$W_{LF}(\omega) = \frac{\beta^2 \Psi}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{[2n]!}{2^{2n} n! (n+1)!} \right\}^2 \int_0^{\infty} r_0(t)^{2n+2} \cos \omega t dt. \quad (26)$$



Сигнал на выходе квадратичного детектора при визуальном и слуховом методах приема

Как можно показать при помощи (16), выходная мощность низкочастотного сигнала после квадратичного детектора не зависит от шумовой модуляции. В случае визуального приема эта мощность равна величине площади под огибающей импульса. На экране осциллографа сигнал появляется как отдельный импульс  $S_v(t'_0 - t_j)$ . Предполагалось, что модуляция осуществляется очень медленно по сравнению с периодом несущей частоты  $f_0$ , и  $S_v(t'_0 - t_j)$  является постоянной величиной во времени  $t$ , когда оно подставляется в  $R_N(t, t_0, t'_0)$ , так как при интегрировании по  $t_0$  имеют дело с временами порядка  $1/f_0$ . Для того чтобы подчеркнуть приблизительное постоянство  $S_v(t'_0 - t_j)$  при этом интегрировании, обозначим аргумент в виде  $t'_0 - t_j$ , а не  $t_0 - t_j$ . Однако полностью игнорировать зависимость от времени выражений  $S_F(t)$  и  $S_v(t)$  незаконно. Позднее будем учитывать изменения сигнала на отрезках времени порядка  $\omega_p^{-1}$ , где  $\omega_p$  — угловая частота повторения импульсов. Из уравнения (16) находим, что среднее значение мощности импульсов равно:

$$R_{LF}(0) = (S_v^2(t'_0))_{A_v} = \eta^2 (S_F^2(t'_0))_{A_v} \quad (27)$$

и для выходного сигнала имеем:

$$S_v(t'_0) = \eta S_F^2(t'_0). \quad (28)$$

В случае однополупериодного выпрямления выражения (27) и (28) следует поделить на 4. В случае, когда устройство выдает ответ в визуальной форме, соотношение (28) превращается в

$$S_v = \eta S_F^2, \quad (29)$$

где  $S_v$  и  $S_F$  — максимальные значения величин  $S_v(t'_0)$  и  $S_F(t'_0)$  соответственно. До сих пор временной аргумент в выражении для величины сигнала обозначался посредством  $t'_0$  и тем самым отличался от аргумента  $t_0$  в выражении для колебаний с несущей частотой, так что при интегрировании по  $t_0$  следует оперировать с  $t'_0$  как с постоянной

величиной. После того как интегрирование уже выполнено,  $t'_0$  можно рассматривать как переменную.

Для того чтобы получить низкочастотные спектральные составляющие, следует выделить спектральные компоненты огибающей. При слуховом методе приема прослушивается отдельная спектральная компонента последовательности импульсов, соответствующая частоте повторения импульсов или ее высшим гармоникам. Заменяя  $t'_0$  на  $t$  в (28) и разлагая  $S_v(t)$  в ряд Фурье, находим:

$$S_v(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \exp(ik\omega_p t);$$

$$\omega_p = 2\pi f_p = \frac{2\pi}{T}, \quad (30)$$

где  $T$  — период повторения импульсов, а амплитуда  $k$ -й гармоники частоты повторения импульсов  $f_p$  дается в виде

$$a_k = \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(t) e^{-i\omega t} dt \right\}_{\omega = k\omega_p}, \quad (31)$$

так как подразумевается, что следующие друг за другом импульсы заметно не перекрываются. Соотношение (30) может быть написано также как

$$S_v(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(k\omega_p t - \varepsilon_{kp}), \quad (32)$$

где  $\varepsilon_{kp}$  — фаза гармоники, не представляющая для нас интереса.

$$B_0 = \left| \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(t) e^{-i\omega t} dt \right|_{\omega=0};$$

$$B_k = \left| \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(t) e^{-i\omega t} dt \right|_{\omega=k\omega_p}. \quad (33)$$

Если  $\omega_k = \omega_p K$  остается малой в сравнении с шириной полосы пропускания фильтра промежуточной частоты, то в выражении (33) можно положить  $\omega = 0$ , поэтому что

тогда множитель, составленный из тригонометрических функций, меняется мало в течение времени действия импульса, и можно взять  $\sqrt{2} B_0$  в качестве эффективного значения  $S_a$   $k$ -й компоненты, которую прослушивают. Используя (28) и (33) получаем:

$$B_k \equiv S_v = \eta \frac{\sqrt{2}}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_F(t)^2 dt. \quad (34)$$

Сигнал на выходе линейного детектора в присутствии шума при визуальном и звуковом методах приема

Выражение для огибающей сигнала, пропускаемого линейным детектором, имеет сложный вид, так как оно различно в зависимости от того, в каких условиях принимается сигнал: в присутствии шума или нет, причем вследствие взаимодействия шума и сигнала возникает явление, которое известно под названием «подавление сигнала». В результате взаимодействия шума и сигнала наступает подавление сигнала или шума в зависимости от того, который из них меньше по сравнению с другим. Детальное математическое рассмотрение показывает, что низкочастотная часть продетектированного сигнала имеет вид <sup>14</sup> [Л.1]

$$S_v(t'_0) = \frac{\beta n_F}{(2\pi)^{1/2}} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -S_F(t'_0)^2/n_F^2\right), \quad (35)$$

где  ${}_1F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция и  $\beta$ , как и раньше, динамическая крутизна характеристики детектора. Вырожденная гипергеометрическая функция определяется рядом

$${}_1F_1(\alpha; \beta; x) = 1 + \frac{\alpha x}{\beta \cdot 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)x^2}{\beta(\beta+1) \cdot 2!} + \dots \quad (36)$$

Кривая, изображающая  $S_v(t'_0)$ , представляет собой усредненную площадь под синусоидальным импульсом в каскадах промежуточной частоты, огибающая которого как функция времени определяется законом модуляции. Сравнивая сигнал с шумом, следует быть осторожным при определении, что имеется в виду под сигналом и под шумом при измерении их одним и тем же способом. Так как при измерении шума измеряется среднеквадратичное значение напряжения шума, то и сигнал нужно измерять по-

добным же образом. Это соображение является доводом в пользу того, что в качестве критерия при определении сигнала следует брать усредненную площадь под синусоидальным импульсом промежуточной частоты, а не его огибающую. Этой точки зрения не всегда придерживались раньше при изучении данного вопроса.

В выражении (35), как уже установлено, учитываются и сигнал, и постоянный ток, вызванный шумом. Для того чтобы вычислить приращение постоянной составляющей тока на выходе детектора, вызванное сигналом, из тока детектора нужно вычесть постоянную составляющую, существующую в отсутствие сигнала, и, принимая во внимание, что  ${}_1F_1(\alpha, \beta, 0) = 1$ , получим:

$$S_v(t'_0) = \frac{\beta n_F}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -S_F^2(t'_0)/n_F^2\right) - 1 \right\}. \quad (37)$$

Например, в случае максимального сигнала, который необходим для визуального обнаружения, имеем согласно равенству  $S_v(t'_0) = S_v$ :

$$S_F(t'_0) = S_F,$$

и соотношение (37) принимает форму

$$S_v = \frac{\beta n_F}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -S_F^2/n_F^2\right) - 1 \right\}, \quad (38)$$

где  $S_F$ , как и в предыдущем, является максимальным значением величины  $S_F(t')$ . Когда сигнал мал по сравнению с шумом, находим, что уравнение (38) превращается в

$$S_v = \frac{\beta}{2(2\pi)^{1/2}} n_F \left( \frac{S_F}{n_F} \right)^2; \quad (S_F/n_F)^2 \ll 1. \quad (39)$$

Эти условия часто встречаются на практике. С другой стороны, когда сигнал достаточно велик по сравнению с шумом, или, что то же самое, для конечной величины сигнала и пренебрежимо малого шума, заменяем  ${}_1F_1$  пределом, к которому асимптотически стремится эта функция, и получаем:

$$S_v = \frac{\beta \sqrt{2}}{\pi} S_F; \quad (S_F/n_F)^2 \gg 1, \quad (40)$$

что, как можно проверить, является огибающей синусоидального импульса промежуточной частоты, умноженной

на  $\frac{1}{\pi}$ . В слуховом методе приема мы прослушиваем отдельную компоненту сигнала, определяемого соотношением (37). С помощью формул (30) — (34) можно написать эффективное значение  $S_a$  этой компоненты:

$$S_a = \frac{\beta n_F}{T \pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2}; 1; -S_F(t)^2/n_F^2 \right) - 1 \right\} dt. \quad (41)$$

Хотя степенной ряд, обозначаемый функцией  ${}_1F_1$ , абсолютно сходится для всех значений  $x$  с точностью, достаточной при вычислениях, он сходится медленно, особенно когда велико  $x$ , например, при  $x > 1,5$ . Эту трудность можно устранить аппроксимацией подынтегральной функции в (41) выражением, содержащим два члена, в форме

$$F(x) = \alpha x - \gamma x^k; \quad (42)$$

здесь  $\alpha$  — производная от  ${}_1F_1$  при  $x=0$ , а  $\gamma$  и  $k$  определяются значением  ${}_1F_1$  и ее первой производной в некоторой точке  $x=x_0$ , в которой величина  $S_F(t)^2/n_F^2$  достигает своего максимального значения. Тогда имеем:

$$\alpha = {}_1F'_1(0) = \frac{1}{2}, \quad (43)$$

где

$$F'(x_0) = \frac{1}{2} {}_1F_1 \left( \frac{1}{2}; 2; -x_0 \right); \quad \gamma = [\alpha x_0 - F(x_0)] x_0^k;$$

$$F(x_0) = {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2}; 1; -x_0 \right) - 1; \quad k = \left( \frac{F'(x_0) - \alpha}{F(x_0) - \alpha x_0} \right) x_0.$$

Необходимая величина гипергеометрической функции может быть найдена в справочнике Янке и Эмде [Л. 7]. При аппроксимации (42) нужно для каждого значения  $x_0$  заново подсчитывать значения  $\gamma$  и  $k$ ; однако на практике ошибка не будет большой, если выделить некоторую величину  $x_0$ , скажем 6, и использовать ее для получения  $\gamma$  и  $k$  для всех  $x_0$ , лежащих в пределах  $0 \leq x_0 \leq 10$ . На рис. 9 такая приближенная кривая сравнивается с кривой, построенной по точно вычисленным точкам. Видно, что разница между двумя кривыми в области  $0 \leq x_0 \leq 10$  очень мала. Таким образом, для последующих расчетов  $x_0$  выбираем равным 6, и с помощью этой величины находим из уравнения (43), что

$$\gamma = 0,0763; \quad k = 1,50; \quad x_0 = 6. \quad (44)$$

Тогда выражение для эффективного значения компоненты (41) после линейного детектирования в присутствии шумов приобретает окончательный вид

$$S_a = \frac{\beta n_F}{2\pi^{1/2}T} \int_{-\infty}^{+\infty} \{S_F(t)^2/n_F^2 - \gamma S_F(t)^{2k}/n_F^{2k}\} dt. \quad (45)$$

Отношение сигнала к шуму при визуальном и звуковом методах приема

Когда прослушивают или видят сигнал с помощью приемного аппарата, действие наблюдателя прямо противоположно действию шумового фона, созданного искусствен-

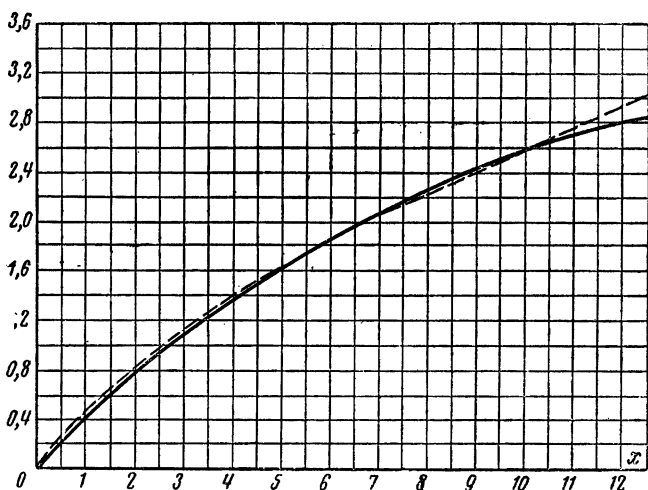


Рис. 9. Аппроксимация функции  ${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -x\right) - 1$

при помощи функции  $\alpha x - \gamma x^k$ , где  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 0,0763$ ,  
 $k = 1,50$ .

----- график функции  ${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -x\right) - 1$ ; ———— график  
 функции  $\alpha x - \gamma x^k$ .

но или возникшего естественно, который затеняет прием. Способность к обнаружению сигнала, очевидно, будет зависеть от величины отношения сигнала в точке приема (т. е. на экране электронно-лучевой трубки, в телефонах или на шкале измерительного стрелочного прибора) к со-

ответствующему шумовому фону. В предыдущих параграфах различные напряжения сигнала и шума, с которыми мы имеем дело в наших задачах, уже определены, осталось теперь сравнить их между собой.

Для визуального метода приема, включающего квадратичное детектирование, из уравнений (18) и (19) имеем:

$$[S_v/n_v]_{\text{кв.др}} = (S_F/n_F)^2. \quad (46)$$

Для линейного детектирования это выражение видоизменяется с помощью уравнений (25), (38) и (42):

$$[S_v/n_v]_{\text{лин}} = \rho_0 [(S_F/n_F)^2 - 2\gamma (S_F/n_F)^{2k}]; \quad (47)$$

$$\rho_0 = \frac{1}{2} (4/\pi - 1)^{-1/2} = 0,957.$$

Когда сигнал мал в сравнении с эффективным значением шума, т. е. когда  $\left(\frac{S_F}{n_F}\right)^2 \ll 1$ , можно пренебречь вторым членом в правой части уравнения (47); тогда оказывается, что линейный детектор ведет себя почти точно так же, как квадратичный. Фактически для большинства практических применений можно положить  $\rho_0$  равным единице, тогда рабочие характеристики обоих типов детектора получаются одинаковыми. Для сильных сигналов при  $\frac{S_F}{n_F} \geq 1$  квадратичный детектор начинает заметно превосходить линейный детектор по выходному напряжению (на 2 дБ), как показывает кривая *a* на рис. 2 и как более полно описано в следующем параграфе.

При звуковом методе приема находим из уравнений (20), (23) и (34)

$$(S_a/n_a)_{\text{кв.др}} = \frac{1}{T(2\xi_0\Delta f_0)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_F(t)^2}{n_F^2} dt; \quad (48a)$$

$$\xi_0 = \int_0^{\infty} r_0(t)^2 dt. \quad (48b)$$

Соответствующее выражение для линейного детектора согласно (23), (26) и (45) приобретает вид

$$(S_a/n_a)_{\text{лин}} = \frac{\rho_0}{T(2\Delta f_0)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{S_F(t)^2/n_F^2 - 2\gamma (S_F(t)/n_F)^{2k}\} dt, \quad (49a)$$

где теперь

$$\rho'_0 = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n} n!(n+1)!} \right)^2 \int_0^{\infty} r_0(t)^{2n+2} dt \right]^{-1/2} \quad (49б)$$

Если отношение сигнала к шуму мало, можно опустить второй член в числителе правой части выражения (49а). Далее не будет серьезной ошибки, если бесконечный ряд в (49б) прервать сразу после первого члена. Тогда получается  $\rho'_0 = \xi_0^{-1/2}$ , причем в результате этого формулы (49а) и (49б) становятся идентичными. В случае подобной аппроксимации ряд, содержащийся в (24) и (25), можно заменить его первыми членами, и тогда коэффициент пропорциональности в (47) становится равным  $\xi_0^{-1/2}$  вместо  $0,957\xi_0^{-1/2}$ , так что полученные результаты приблизительно совпадают с результатами для обоих видов детектора в случае визуального приема.

Когда ряд в выражении (49б) нельзя заменить его первым членом, величина  $\rho'_0$  слегка зависит от характеристик фильтра и заключена в пределах  $0,957\xi_0^{-1/2}$  и  $\xi_0^{-1/2}$ . В случае гауссовой формы импульса и амплитудно-частотной характеристики фильтра величина  $\rho'_0$  равна  $0,973\xi_0^{-1/2}$ . Для практических целей разница в поведении двух детекторов важна только тогда, когда приходится учитывать второй член в подынтегральном выражении в (49а). В результате этого выясняется, что линейный детектор менее эффективен, чем квадратичный детектор для сильных сигналов (см. кривую б на рис. 2). В специальном случае гауссовой формы импульса и гауссовой формы амплитудно-частотной характеристики фильтра следует обратиться к § 4 части II.

### 3. Доказательство критерия преобразования Фурье.

#### Визуальный метод приема

Когда сигнал обнаруживается визуально, наилучший фильтр определяется согласно „простому“ правилу (см. стр. 10), гласящему, что наилучшим фильтром является тот, который дает на выходе наибольшую величину отношения пикового значения сигнала к эффективному значению продетектированного видеосума  $\frac{S_v}{n_v}$ . Это равносильно усло-

вию, что отношение  $\frac{S_F}{n_F}$  максимального значения сигнала к



среднеквадратичному значению шума после фильтрации, но до детектирования, должно быть возможно большим. Под максимальной амплитудой сигнала понимается наибольшая абсолютная величина «коэффициента модуляции»  $S_F(t)$  для сигнала  $\sqrt{2}S_F(t) \cos \omega_0 t$ , который проходит через фильтр. Количественно  $S_v$  и  $n_v$  никоим образом не похожи на  $S_F$  и  $n_F$  соответственно. Например, средняя мощность виде шума  $n_v^2$  является не только малой частицей мощности полного шума  $n_F^2$ , проходящего через фильтр, но также зависит от типа детектора, а не от характеристик фильтра [сравни уравнения (18) и (25)]. Однако предшествующий анализ показал, что  $S_v/n_v$  является монотонно возрастающей функцией отношения  $S_F/n_F$ . А именно, формула (46) показывает, что для квадратичного детектора  $S_v/n_v$  пропорционально  $S_F^2/n_F^2$ , как и следовало предполагать. Для линейного детектора  $S_v/n_v$  пропорционально  $S_F^2/n_F^2$  только, если  $S_F^2/n_F^2 \ll 1$ , так как вырожденная гипергеометрическая функция  ${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -S_F^2/n_F^2\right)$  монотонна во всей области, которой мы интересуемся. Следовательно, увеличение отношения  $S_v/n_v$  до максимума предполагает также увеличение до максимума отношения  $S_F/n_F$ .

В § 1 части II показано, что  $S_v(t)$  может быть определено без учета величины несущей частоты в предположении, что отсчет частоты для фильтра ведется от несущей частоты, а не от нуля абсолютной частоты. Если сигнал на входе фильтра промежуточной частоты имеет вид  $\sqrt{2}S_I(t) \cos \omega_0 t$ , то мгновенное значение  $S_F(t)$  после фильтра из уравнения (76) в любой данный момент времени  $t_0$  равно:

$$S_F(t_0) = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{IF}(\omega) S_I^r(\omega) \exp(i\omega t_0) d\omega \right|. \quad (50)$$

Энергия шума, прошедшего через фильтр, выражается посредством (11), когда  $t$  полагается равным нулю. Энергия в импульсе на входе равна:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} S_I^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_I(\omega)|^2 d\omega, \quad (51)$$

причем второе равенство вытекает из соотношений Парсеваля \* и из формулы (5). Так как уравнение (51) не зависит от характеристик фильтра, то отношение сигнала к шуму, которое хотят сделать максимальным, может считаться равным как  $(S_F/n_F)^2$ , так и  $S_F^2/n_F^2 E$ . При наличии последней формы записи и исключая постоянные, которые действительно не зависят от формы импульса и свойств измерительного прибора, отношение сигнала к шуму становится равным:

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G_{IF}(\omega) S_I(\omega) \exp\{i\omega t_0\} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S_I(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{IF}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (52)$$

Из неравенства Шварца следует, что выражение (52) имеет максимальную величину, равную единице, которая достигается, когда

$$G_{IF}(\omega) = [S_I(\omega) \exp(i\omega t_0)]^* = S_I^*(\omega) \exp(-i\omega t_0). \quad (53)$$

Уравнение (53) показывает, что с точностью до фазовой постоянной характеристика фильтра должна быть комплексно сопряженной преобразованию Фурье импульса, что является условием, на которое уже ссылались много раз. Различие между  $S_I(\omega)$  и  $S_I(\omega)^*$  исчезает для симметричного импульса, так как тогда  $S_I(\omega)$  имеет одну только реальную часть. В противном случае нужно согласовывать характеристику фильтра с производной от преобразования Фурье, а не с самим преобразованием.

Только что приведенная теорема уже давно выведена (сравните с теоремой Норта [Л.1]). Для доказательства этой теоремы используются различные методы, например используют вариационный метод. Возможность использования неравенства Шварца, как мы здесь сделали, содержится в качестве специального случая в более общей теории, развитой Винером. По мнению авторов, не менее важным, чем математическое доказательство, является анализ и обсуждение результатов, приведенных в разделе 1 части II, которые показывают, что увеличение отношения  $S_{\omega}/n_{\omega}$  до максимума предполагает также увеличение до максимума отношения  $S_F/n_F$ .

---

\* И. Снеддон, Преобразования Фурье, перевод с англ. под ред. Ю. Л. Рабиновича, ИЛ, 1955, стр. 37. (Прим. ред.).

Обычные методы доказательства принимают во внимание только крайнее значение величины  $S_F/n_F$ , которое математически не соответствует крайнему значению величины  $S_v/n_v$ , хотя физически допустимо, что это может случиться. Особенно следует подчеркнуть, что максимально достижимая величина отношения (52) совершенно не зависит от формы спектра шума и формы импульса  $S_I(t)$ . Это означает, что при наличии полного согласования амплитудно-частотной характеристики фильтра и формы импульса работа установки с визуальной индикацией не зависит от формы импульса, причем результаты для этого случая уже приведены в части I. Другими словами, при наличии нашего „простого“ критерия единственной величиной, с которой надо считаться при согласованном фильтре, является только энергия входного импульса.

Фазовая постоянная  $\exp(i\omega t_0)$  нуждается в обсуждении. Она определяется моментом времени, при котором сигнал максимален, хотя величина этого максимума не зависит от выбора  $t_0$ . На первый взгляд может показаться, что момент времени, в который сигнал достигает своего максимума, может быть выбран произвольно посредством задания надлежащей величины фазовой постоянной фильтра  $\exp(i\omega t_0)$ . Однако этот довод не может являться правильным, потому что такой фильтр нужно еще построить. Опираясь на очевидные физические представления, нельзя построить фильтр, на выходе которого будет иметь место реакция на сигнал, который еще не попал на вход фильтра. Фильтр, который не обладает подобными абсурдными свойствами, назовем «физически реализуемым». Можно показать, что это требование эквивалентно требованию, чтобы  $G_I(\omega)$  не имело особенностей в нижней части комплексной плоскости. Любой многочлен вида  $P_j(\omega - i\delta_j)$ ,  $\delta_j > 0$  свободно реализуется и соответствует ряду связанных настроенных контуров. Гауссова форма частотных характеристик фильтров, которую мы подробно рассматривали раньше в статье, физически не реализуется, но этот вопрос носит скорее академический характер. А именно, гауссова форма амплитудно-частотной характеристики может считаться пределом, к которому стремится амплитудно-частотная характеристика очень большого количества соединенных последовательно каскадов усилителя на одиночных резонансных контурах. В пределе задержка во времени может быть бесконечно большой, но гауссов закон, поскольку нас интересует частотная зависимость, практи-

чески не отличается от формы характеристики нескольких каскадов с одиночными резонансными контурами с ограниченной задержкой во времени. Невозможно построить строго «гауссову» систему, но можно найти реальную систему, фильтрующее действие которой было бы почти равноценно ее действию, и фильтры, которые строятся при помощи последовательного соединения ряда резонансных контуров, будут иметь почти гауссову форму амплитудно-частотной характеристики.

### Звуковой метод приема

Исследуем теперь, применим ли критерий преобразования Фурье к звуковому методу приема, так же как к визуальному методу. Здесь доказательство не совсем прямое. Сперва будем считать детектор квадратичным. Так как нас интересует только одна низкочастотная компонента, эффективное значение отношения сигнала к шуму, исключая постоянный множитель  $A$ , имеет вид

$$(S_a/n_a)^2 = A \left( \int_{-\infty}^{+\infty} S_F^2(t) dt \right)^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} r_0^2(t) dt, \quad (54)$$

где  $r_0(t)$  дается в (12). Знаменатель соотношения (54) получается непосредственно из (17), а числитель следует сразу из (34). Так как преобразованием Фурье от  $S_F(t)$  служит  $S_I(\omega) G_{IF}(\omega) \sqrt{2}$ , [см. (76) и преобразование Фурье от  $r_0(t)$  пропорционально  $|G_{IF}(\omega)|^2$ , согласно теореме Планшарля (54) можно написать:

$$(S_a/n_a)^2 = B \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{IF}(\omega)|^2 |S_I(\omega)|^2 d\omega \right)^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{IF}(\omega)|^4 d\omega. \quad (55)$$

Если поделить (55) на интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |S_I(\omega)|^4 d\omega$ , который неизменен для любого данного типа импульса, получим отношение, к которому можно применить неравенство Шварца. Из этого результата непосредственно следует, что для максимального отношения сигнала к шуму нужно иметь

$$|S_I(\omega)|^2 = C |G_{IF}(\omega)|^2, \quad (56)$$

где  $C$  — постоянная, величина которой не важна и кото-

рую можно положить равной единице, не нарушая общности выражения.

В связи с соотношением (56) можно сделать два замечания. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением количественной стороны, т. е. только видом амплитудно-частотной характеристики  $|G_{IF}(\omega)|$ , то вопрос о фазовой характеристике фильтра не возникает, и зависимость сдвига по фазе от частоты может быть произвольной. В случае визуального метода приема, с другой стороны, фаза на выходе фильтра должна быть такой же, как фаза сопряженного спектра импульса на входе фильтра, с точностью до члена, линейно зависящего от частоты и определяемого моментом времени, когда сигнал становится максимальным. Это время, очевидно, не играет никакой роли при звуковом обнаружении, так как здесь внимание сосредоточено на одной особой компоненте частотного спектра сигнала, а не на максимумах или минимумах, полученных вследствие сложения всех спектральных компонент.

Другим замечанием является то, что в звуковом методе приема частотная характеристика фильтра при согласовании ее со спектром импульса определяется формой импульса, а не просто его энергией. Если учесть последнее замечание, то выражение (55) следует поделить не на

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S_I(\omega)|^2 d\omega, \text{ а на коэффициент } \int_{-\infty}^{+\infty} |S_I(\omega)|^4 d\omega.$$

Вытекающее отсюда увеличение эффективности рассматриваемого метода приема сигналов при применении длинных импульсов уже обсуждалось в § 4 части I.

Доказательство, что критерий преобразования Фурье дает наилучшие результаты в звуковом методе обнаружения, не может быть приведено для линейного детектора в такой четкой форме как для квадратичного детектора. Если полагать, что сигнал настолько слабый, что можно использовать соотношение (39) и в (26) можно пренебречь всеми членами, кроме  $r_0^2(t)$ , то отношение, которое стремятся увеличить до максимума, получается такое же, как и для квадратичного детектора, и наше предыдущее доказательство будет применимо. Можно заметить, кроме того, что если бы отсутствовало явление подавления сигнала, то ширина полосы пропускания фильтра промежуточной частоты при звуковом обнаружении сигналов не играла бы никакой роли. В действительности правильное соотноше-

ние является, так сказать, компромиссом между выражениями (39) и (40), будучи гораздо ближе к первому выражению, чем ко второму. Так как при выводе соотношений (40) не рассматривается характеристика фильтра и при наличии (39) имеет силу критерий преобразования Фурье, можно ориентировочно считать, что в любом промежуточном случае использование этого критерия, вероятно, приведет к наилучшим результатам. Можно показать исходя из аналогичных соображений, что введение в схему фильтра нижних частот при согласовании фильтра промежуточной частоты с импульсом не дает улучшения отношения сигнала к шуму.

Здесь не приводятся подробности анализа, так как этот вопрос рассмотрен в достаточной мере в работе [Л. 2].

#### 4. Точные вычисления для гауссовой формы огибающей импульса и характеристики фильтра

Общее выражение для отношений сигнала к шуму в случаях звукового и визуального методов уже получено в § 2 части II, но перед тем как получить полные численные ответы на все интересующие нас вопросы, следует точно определить импульс  $S_I(t)$ , подаваемый на вход фильтра промежуточной частоты, и амплитудно-частотную характеристику фильтра  $G_{IF}(\omega)$ . Пусть огибающая импульса, еще не искаженного фильтрацией, будет:

$$\sqrt{2}S_I(t) = S_0 \exp(-\omega_g^2 t^2/2); \quad \omega_g = 2\pi f_g, \quad (57)$$

где  $S_0$  — максимальная амплитуда возмущения и  $\omega_g$  — угловая частота, определяемая шириной импульса. С помощью (5) амплитуду в спектральном разложении приравняем

$$S_I(\omega) = (\pi/2)^{1/2} \omega_g^{-1} S_0 \exp(-\omega^2/2\omega_g^2). \quad (58)$$

Теперь для смещенной амплитудно-частотной характеристики фильтра промежуточной частоты получаем:

$$\begin{aligned} G_{IF}(\omega) &= \exp(-\omega^2/2\omega_b^2); \\ \omega_b &= 2\pi f_b \quad (\omega = \omega' - \omega_0), \end{aligned} \quad (59)$$

где  $\omega_b$  определяется шириной полосы фильтра. В обозначениях для идеального фильтра, который обсуждался в § 2

части II, из (22) находим для импульса и фильтра промежуточной частоты

$$\Delta f_{IF} = (\Delta f_b) = \pi^{1/2} f_b;$$

$$\Delta f_I = (\Delta f_g) = (1/\Delta T_g) = \pi^{1/2} f_g. \quad (60)$$

С помощью (76) определяем из (58) и (59), что на выходе фильтра огибающая импульса становится равной:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} S_F(t) &= (b S_0 / \sqrt{2} \omega_g) \exp(-t^2 b^2 / 4) = \\ &= \sqrt{2} S_F \exp(-t^2 b^2 / 4), \end{aligned} \quad (61a)$$

где

$$b^2 \equiv \sqrt{2} \omega_b \cdot \omega_g / (\omega_g^2 + \omega_b^2)^{1/2}; \quad S_F \equiv b S_0 / \sqrt{2} \omega_g. \quad (61b)$$

Из (51) и (57) видно, что энергия отдельного гауссова импульса на входе фильтра промежуточной частоты равна:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(t)^2 dt = S_0^2 \pi^{1/2} / 2 \omega_g. \quad (62)$$

Так как входная мощность по промежуточной частоте равна энергии в импульсе, умноженной на частоту повторения импульсов, имеем:

$$P_{\text{вх}} = E/T = S_0^2 \pi^{1/2} / 2 \omega_g T, \quad (63)$$

где  $T$  — период повторения импульсов. Согласно (8) и (59) среднеквадратичное значение шума на выходе гауссова фильтра промежуточной частоты имеет вид

$$n_F^2 = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\omega^2 / \omega_b^2) d\omega = W_0 \omega_b / 2\pi^{1/2}, \quad (64)$$

так что из (61a) и (61b) находим, что

$$\begin{aligned} S_F(t)^2 / n_F^2 &= (S_F^2 / n_F^2) \exp(-t^2 p^2 / 2) = \\ &= \frac{\pi^{1/2} b^2 S_0^2}{2 W_0 \omega_b \omega_g^2} \exp(-t^2 b^2 / 2). \end{aligned} \quad (65)$$

Теперь определим величину  $\sigma_0$  посредством

$$\sigma_0 \equiv (S_F / n_F)_{\text{при согласовании}} \quad (66)$$

где  $\sigma_0$  — величина  $S_F/n_F$  до детектирования, которая получается, когда импульс, имеющий гауссову форму и частоту следования, равную  $T_0^{-1}$ , подается на фильтр промежуточной частоты, согласованный со спектром сигнала, т. е.  $\omega_b = \omega_g$ .

Пусть  $P_0$  представляет собой входную мощность по промежуточной частоте в этих условиях. Тогда из (59) и (63) получаем:

$$\tilde{S}_0^2 = \pi^{1/2} S_0^2 / 2W_0 \cdot \omega_b$$

и

$$P_0 = S_0^2 \pi^{1/2} / 2\omega_b T_0 = W_0 \sigma_0^2 / T_0, \quad (67)$$

что, применяя (63), дает окончательно:

$$\begin{aligned} S_F(t)^2 / n_F^2 &= (S_F^2 / n_F^2) \exp(-t^2 b^2 / 2) = \\ &= \left( \frac{2\omega_g \omega_b}{\omega_g^2 + \omega_b^2} \right) \sigma_0^2 \cdot \left( \frac{P_{\text{вх}}}{P_0} \cdot \frac{T}{T_0} \right) \exp(-t^2 b^2 / 2). \end{aligned} \quad (68)$$

Для того чтобы исследовать действие изменения ширины полосы пропускания фильтра на величину порогового отношения сигнала к шуму, следует различать два случая:

1. Ширина полосы пропускания фильтра ( $\sim \omega_b$ ) остается постоянной, в то время как ширина спектра сигнала ( $\sim \omega_g$ ) может иметь различные значения. Пусть  $\lambda \approx \omega_g / \omega_b = \dot{f}_g / \dot{f}_b$ , и, следовательно,

$$b = \sqrt{2} \omega_g (1 + \lambda^2)^{-1/2}. \quad (69)$$

Из (58) следует, что

$$(S_F / n_F)^2 = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \sigma_0^2 \mathbf{P} \mathbf{T}, \quad (70)$$

где  $\mathbf{P} \equiv P_{\text{вх}} / P_0$  и  $\mathbf{T} = T / T_0$ , причем нормализация производится по отношению к величинам, определенным экспериментально, когда импульс и фильтр были согласованы.

2. Ширина спектра импульса ( $\sim \omega_g$ ) поддерживается постоянной, а ширина полосы пропускания фильтра ( $\sim \omega_b$ ) изменяется:

$$\lambda \equiv \omega_b / \omega_g (= \lambda^{-1})$$



и, следовательно,

$$b = \lambda \sqrt{2} \omega_g (1 + \lambda^2)^{-1/2}, \quad (71)$$

и, подобно соотношению (70),

$$(S_F/n_F)^2 = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \sigma_0^2 \text{PT}. \quad (72)$$

Когда (70) и (72) используются в расчетах, учитывающих действие линейного детектора, следует помнить, что  $(S_F/n_F)$  не превышает 9 или 10 в соответствии с аппроксимацией (42) (см. также рис. 9).

Визуальный метод приема при наличии квадратичного или линейного детекторов

Для визуального метода приема можно написать исходя из соотношения (46), (70) и (72), что

$$(S_v/n_v)_{\text{квдр}} = \frac{2\Lambda}{1 + \Lambda^2} \sigma_0^2 \text{PT}, \quad (73)$$

где  $\Lambda = \lambda$  или  $\bar{\lambda}$  в зависимости от того или иного случая. Теперь, когда  $(S_v/n_v)_{\text{квдр}}$  представляет собой пороговое отношение сигнала к шуму  $(S_v/n_v)/(S_v/n_v)_{\text{при согласовании}}$ ,  $\Lambda = 1$  должно быть равным 1, так как минимально воспринимаемый сигнал определяется величиной  $\sigma_0^2$  из уравнения (73). Тогда очевидно, что

$$1 \equiv (S_v/n_v)_{\text{квдр}} / (S_v/n_v)_{\text{при согласовании}}, \Lambda = 1 \frac{2\Lambda}{1 + \Lambda^2} \text{PT} \quad (74)$$

является частным случаем более общего результата, полученного Вангом и Уленбеком.

Для визуального метода приема с линейным детектором аналогично можно написать исходя из (47), (70) и (72):

$$(S_v/n_v)_{\text{лин}} = \rho_0 \left( \frac{2\Lambda}{1 + \Lambda^2} \right) \text{PT} \sigma_0^2 \left\{ 1 - 2\gamma \left( \frac{2\Lambda \sigma_0^2 \text{PT}}{1 + \Lambda^2} \right)^{k-1} \right\},$$

$$\rho_0 = 0,957, \quad \gamma = 0,0763, \quad k = 1,50. \quad (75)$$

По аналогии с (74) имеем:

$$1 \equiv (S_v/n_v)_{\text{лин}} / (S_v/n_v)_{\text{при согласовании}}, \Lambda = 1 =$$

$$= \frac{2\Lambda}{1 + \Lambda^2} \text{PT} \left( \frac{1 - 2\gamma \left\{ 2\Lambda \sigma_0^2 \text{PT} / (1 + \Lambda^2) \right\}^{k-1}}{1 - 2\gamma \sigma_0^{2k-2}} \right). \quad (76)$$

Сразу видно, что если  $(S_F/n_F)^2 \ll 1$ , то можно пренебречь вторыми членами в уравнениях (75) и (76), так что оба эти соотношения становятся идентичны соотношениям (73) и (74), приведенным для квадратичного детектора, не принимая во внимание дополнительного предположения, что  $\rho_0 = 1$ .

### Слуховой метод приема при наличии квадратичного и линейного детекторов

В случае слухового метода приема нужно использовать соотношения (48а), (48б) и (49а), (49б). Нормализованная функция корреляции  $r_0(t)$  получена для гауссовой формы сигнала из (13) и имеет вид  $r_0(t) = \exp(-t^2 \omega_b^2/4)$ , где  $\xi_0$  становится равным  $(\pi/2\omega_b^2)^{1/2}$  [сравни (48б)]. Окончательно, используя соотношения (48а), (48б), (65), (70) и (72) и оперируя с ними, как указано выше, получаем:

$$(S_a/n_a)_{\text{квадр}}/(S_a/n_a)_{\text{согл.}\lambda=1} = [2/(1+\lambda^2)]^{1/2} P - \text{случай 1 (77а)}$$

и для случая 2

$$(S_a/n_a)_{\text{квадр}}/(S_a/n_a)_{\text{согл.}\lambda=1} = [2\lambda/(1+\lambda^2)]^{1/2} P - \text{случай 2. (77б)}$$

Формулы (77а) и (77б) обсуждались в § 5. Таким же образом мы получаем из (49а), (49б), (65), (70), (77) и из § 3 соотношения, соответствующие линейному детектору,

$$\begin{aligned} \frac{(S_a/n_a)_{\text{лин}}}{(S_a/n_a)_{\text{согл}}} &\equiv 1 \equiv \\ &\equiv \frac{[2/(1+\lambda^2)]^{1/2} P (1 - 2\gamma k^{1/2} \{ [2\lambda/(1+\lambda^2)] \sigma_0^2 P T \}^{k-1})}{1 - 2\gamma k^{1/2} \sigma_0^{2k-2}} - \text{случай 1 (78а)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{(S_a/n_a)_{\text{лин}}}{(S_a/n_a)_{\text{согл}}} &\equiv 1 \equiv \\ &\equiv \frac{[2\lambda/(1+\lambda^2)]^{1/2} \cdot P (1 - 2\gamma k^{-1/2} \{ 2\lambda/(1+\lambda^2) \} \sigma_0^2 P T \}^{k-1})}{1 - 2\gamma k^{-1/2} \sigma_0^{2k-2}} - \text{случай 2.} \end{aligned} \quad (78б)$$

Эти уравнения также обсуждались в § 4 и 5 части I и показаны на рис. 4 и 5.

Вышеприведенные соотношения между сигналом и шумом для слухового метода приема справедливы в предположении, что шум перед детектированием не селективируется. Если имеется селектирование, а оно обычно осуществляется до каскадов промежуточной частоты и детектирования, то напряжение шумового фона просто сокращается пропорционально корню квадратному из коэффициента селектирования  $G = \tau_G/T$ , где  $\tau_G$  — длительность селекторного импульса — интервал времени, в течение которого шум может попасть в каскады промежуточной частоты или на детектор. Это простой множитель, который определяется достаточно длительным периодом времени, когда действует селекторный импульс, для того чтобы пропустить в приемник надлежащие сигналы от рассматриваемой цели. Более полное обсуждение действия селектирования дается в § 5 части I. Тогда можно сказать, что для любого типа детектора среднеквадратичное напряжение селектированного шумового фона становится равным:

$$n_{ag} = G^{1/2} n_a = (\tau_G/T)^{1/2} n_a. \quad (79)$$

Когда эффект, учитываемый уравнением (79), принимается во внимание при составлении выражений (77а) и (77б), замечаем, что эти соотношения изменяют свой вид:

$$1 = \left( \frac{2}{1 + \lambda^2} \right)^{1/2} \mathbf{PT}^{1/2} \quad (1) \quad \text{и} \quad 1 = \left( \frac{2}{1 + \lambda^2} \right)^{1/2} \mathbf{PT}^{1/2}. \quad (2) \quad (80)$$

Подобное видоизменение имеет место в (78а) и (78б), правые части которых следует умножить теперь на  $T^{1/2}$ . Кривые (78а) и (78б) в случае селектирования приведены на рис. 4 и 5 при условии согласования фильтра с сигналом.

#### Сравнение свойств линейного и квадратичного детекторов при слуховом и визуальном методах обнаружения сигналов

Исходя из результатов, полученных в предыдущем разделе, можно сравнить характеристики работы двух типов детекторов при визуальном методе обнаружения и произвести такое же сравнение для слухового метода. Исследуем сначала кратко соотношение между свойствами линейного

и квадратичного детекторов при визуальном методе обнаружения сигналов. Из (73) и (75) сразу получаем:

$$(S_v/n_v)_{\text{лин}}/(S_v/n_v)_{\text{квадр}} = \rho_0 \left\{ 1 - 2\gamma \left[ \frac{2\Lambda}{1 + \Lambda^2} \sigma_0^2 \mathbf{PT} \right]^{k-1} \right\}, \quad (81)$$

что остается в силе в равной мере как для случая 1, так и для случая 2. При согласовании импульса и фильтра  $\mathbf{P} = \mathbf{T} = 1$  и  $\Lambda = 1$ , и имеем:

$$\begin{aligned} [(S_v/n_v)_{\text{лин}}/(S_v/n_v)_{\text{квадр}}]_{\text{согласов}} &= 0,957 (1 - 0,1526\sigma_0), \\ \sigma_0 &\leq 10^{-1/2}. \end{aligned} \quad (82)$$

Для слухового метода приема получаем выражения, аналогичные выражениям (81) и (82), тем же самым путем, который применялся при получении (77) — (78), а именно:

$$(S_a/n_a)_{\text{лин}}/(S_a/n_a)_{\text{квадр}} = \rho_0 \left\{ 1 - 2\gamma k^{-1/2} \left\{ \frac{2\Lambda}{1 + \Lambda^2} \sigma_0^2 \mathbf{PT} \right\}^{k-1} \right\}, \quad (83)$$

$$\text{где } \rho_0 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [(2n)!/2^{2n} n! (n+1)!]^2 \frac{1}{(n+1)^{1/2}} \right\}^{1/2} = 0,973$$

и где величина  $f_b$ , или  $f_g$  может оставаться неизменной. Уравнение (83) становится особенно простым при согласовании фильтра с сигналом ( $\Lambda = \mathbf{P} = \mathbf{T} = 1$ ), где  $k = 1,50$ , принимая вид:

$$\begin{aligned} \{(S_a/n_a)_{\text{лин}}/(S_a/n_a)_{\text{квадр}}\}_{\text{соглас}} &= 0,973 (1 - 0,1246\sigma_0), \\ \sigma_0 &\leq 10^{1/2}, \end{aligned} \quad (84)$$

что не сильно отличается от (82).

Можно указать, что соотношение (82) не зависит от формы импульса и формы амплитудно-частотной характеристики фильтра, причем требуется только, чтобы фильтр и сигнал были согласованы. Это верно для (84) с точностью до множителя  $k^{-1/2}$ , присутствующего в (83) вследствие гауссовой формы импульса и амплитудно-частотной характеристики фильтра. Однако для всех практических целей можно считать, что приведенное сравнение для слухового метода приема также не зависит от формы сигнала и фильтра, если они согласованы. Даже когда условия согласования не выполнены, если  $(S_F/n_F)^2 \ll 1$ , т. е.  $2\Lambda\sigma_0^2\mathbf{PT}/(1 + \Lambda)^2 \ll 1$ , что

обычно выполняется, условия работы для двух детекторов одинаковы. Рис. 2 дополняет сказанное и показывает, в какой мере поведение линейного детектора отклоняется от поведения квадратичного детектора. Это различие в обычных условиях работы не превышает 1,5 дб. Заметим, что в случае слухового приема соотношения (85) и (84) пригодны и при селектированном шуме.

## 5. Общая теория приема сигналов при применении измерительного стрелочного прибора

Вместо прослушивания основной частоты повторения импульсов (или ее гармоники) на шумовом фоне, когда нужная спектральная компонента выделяется узкополосным низкочастотным полосовым фильтром, можно детектировать эту спектральную компоненту и окружающий ее шум и подать полученную смесь на измерительный стрелочный прибор, предварительно пропустив ее через очень узкополосный фильтр низких частот, скажем, с шириной полосы пропускания до  $1/10$  или до 1 гц. Вопрос заключается в том, чтобы получить выражение для отношения сигнала к шуму, когда сигнал регистрируется прибором, чтобы определить  $S_m/n_m$  и исследовать, каким образом это отношение зависит от таких факторов, как ширина полосы пропускания полосового низкочастотного фильтра и фильтра нижних частот, отношения сигнал/шум в полосовом низкочастотном фильтре и т. д.

Рассмотрим сначала шум, попадающий на измерительный прибор. Этот шум является результатом детектирования шума, пришедшего через узкополосный низкочастотный полосовой фильтр и сконцентрированного вокруг исследуемой частоты повторения импульсов. Ввиду того, что этот фильтр не очень узкополосный,  $\Delta f = 10 \div 100$  гц, то не всегда можно предположить, как это делалось для случая слухового обнаружения, что непрерывный спектр шумов в области очень низких частот  $W_{LF}(\omega)_a$  имеет однородную спектральную плотность, которая может быть замечена в нашем рассмотрении плотностью  $W_{LF}(0)_a$ . Тогда пишем, руководствуясь соотношением (21а), что средняя мощность шума в измерительном приборе равна:

$$n_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |G_m(\omega)|^2 W_{LF}(\omega)_a d\omega, \quad (85)$$

где  $G_m(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика фильтра нижних частот. Хотя шум на низких частотах после выпрямления вторым детектором уже не имеет гауссова распределения, низкочастотный полосовой фильтр предполагается достаточно узкополосным, так что шум, прошедший через такой фильтр, может считаться нормальным<sup>15</sup>. Тогда, для того чтобы определить низкочастотный спектр после детектирования, нужно только привести выкладки из § 2 части II, исключив из рассмотрения тот факт, что сигнал, который уже прошел через полосовой низкочастотный фильтр, считается теперь периодическим, а не импульсным. Из соотношения (26), примененного для узкой части низкочастотного спектра, вместо промежуточной частоты получаем для линейного детектора в измерительной цепи

$$W_{LF}(\omega)_a = \frac{n_a^2 \beta_0^2}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} \right\}^2 \int_0^{\infty} r_0(t)_a^{2n+2} \cdot \cos \omega t dt, \quad (86)$$

где  $\beta_0$  — крутизна амплитудной характеристики детектора и  $r_0(t)_a$  — нормализованная функция корреляции хаотического шума, прошедшего через низкочастотный полосовой фильтр, которую можно легко получить из (12) и (13) заменой  $G_{IF}(\omega)$  на  $G_a(\omega)$ . Так как полосовой низкочастотный фильтр узкополосный в сравнении с величиной частоты повторения, можно перенести нижний предел интегрирования в  $-\infty$  в выражении  $r_0(t)_a$ , и для средней мощности шума находим из (21б):

$$n_a^2 = \frac{W_{LF}(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_a(\omega)|^2 d\omega. \quad (87)$$

Как было ранее сказано, аргумент  $G_a(\omega)$  представляет собой частоту, отсчитываемую от несущей; теперь ее следует отсчитывать от частоты повторения импульсов или одной из ее гармоник.  $W_{LF}(0)$ , конечно, зависит от типа характеристики второго детектора, поставленного после каскадов промежуточной частоты. Если шум селектирован, в последующей формуле следует заменить  $n_a$  на  $n_{aG}$ , помня, что в (79) приведены две формы  $n_a$ .

В случае квадратичного, а не линейного детектирования можем написать вместо (86) в обозначениях (17) и (19):

$$W_{LF}(\omega)_a = 4\eta_0^2 n_a^4 \int_0^\infty r_0(t)_a^2 \cos \omega t dt, \quad (88)$$

где  $\eta_0$  — константа детектора.

Отношение сигнала к шуму при обнаружении с помощью измерительного прибора получается сразу по аналогии с (38) и (42) для линейного детектора и имеет вид:

$$S_m/n_m = \frac{\beta_0}{2(2\pi)^{1/2}} \left( \frac{n_{a(G)}}{n_m} \right) \{ (S_a/n_{a(G)})^2 - 2\gamma (S_a/n_{a(G)})^{2k} \},$$

$$S_a/n_{a(G)} < 10^{1/2}. \quad (89)$$

Для квадратичного детектора (89) изменяет вид посредством обозначений соотношения (29):

$$S_m/n_m = \eta_0 S_a^2 / n_m. \quad (90)$$

Выражение для  $S_a/n_{a(G)}$  зависит от цепей, предшествующих измерительному прибору. Надлежащий вид этого выражения дан в § 2 части II. При наличии приведенных выше результатов можно перейти к рассмотрению специальных вопросов.

## 6. Уточнение теории для обнаружения сигналов с помощью измерительного стрелочного прибора

Определим  $S_m/n_m$  для измерительного прибора, следующего за линейным детектором. Предполагаем в дальнейшем, что низкочастотный полосовой фильтр и фильтр нижних частот имеют гауссову форму амплитудно-частотной характеристики:

$$G_a(\omega) = \exp(-\omega^2/2\omega_n^2);$$

$$G_m(\omega) = \exp(-\omega^2/2\omega_n^2), \quad (91)$$

где  $\omega_a$  и  $\omega_m$  аналогичны полосе частот  $\omega_b$ ; функция корреляции  $r_0(t)_a$  с помощью (91) выражается как

$$r_0(t)_a = \exp(-t^2\omega_a^2/4). \quad (92)$$

При наличии этих результатов можно написать для низкочастотного спектра после детектирования, исходя из (86),

$$W_{LF}(\omega)_a = \frac{n_a^2 \beta_0^2}{2\omega_a (2\pi)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)! (n+1)^{1/2}} \right\}^2 \times \\ \times \exp[-\omega^2/2\omega_a (n+1)]. \quad (93)$$

Теперь из (85) находим, что средняя мощность шума равна:

$$n_m^2 = \frac{n_a^2 \beta_0^2}{8\pi V^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)! (n+1)^{1/2}} \right\}^2 \times \\ \times \frac{(\omega_m/\omega_a)}{[1 + (\omega_m/\omega_a)^2 \cdot \frac{1}{2} (n+1)^{-1}]^{1/2}}. \quad (94)$$

Применяя полученные результаты для (89), получаем для отношения сигнала к шуму в приборе

$$S_m/n_m = 2^{1/4} (\Sigma_n)^{-1/2} \{ (S_a/n_{a(G)})^2 - 2\gamma (S_a/n_{a(G)})^{2k} \}, \quad (95)$$

где  $\Sigma_n$  представлена рядом, содержащимся в (94).

Результат, полученный в виде выражения (95), можно упростить, если отбросить члены  $(\omega_m/\omega_a)^2 [1/2 (n+1)]$ , при  $n \geq 1$ , которые появляются в  $\Sigma_n$  и которые в нашей задаче очень малы в сравнении с членом для  $n=0$ . Это приближение становится тем более точным, чем меньше отношение  $\omega_m/\omega_a$ . Тогда сумма будет равна:

$$\Sigma_n = \frac{1,059 (\omega_m/\omega_a)}{[1 + 1/2 (\omega_m/\omega_a)^2]^{1/2}} = \frac{1,059 (\Delta f_m/\Delta f_a)}{[1 + 1/2 (\Delta f_m/\Delta f_a)^2]^{1/2}}, \quad (96)$$

где  $\Delta f_m$  и  $\Delta f_a$  — ширина полосы пропускания частот эквивалентных идеальных фильтров [см. (22)]. Для стробированного шума тогда имеем:

$$S_m/n_m = 1,156 \frac{\{1 + 1/2 (\Delta f_m/\Delta f_a)^2\}^{1/4}}{(\Delta f_m/\Delta f_a)^{1/2}} \times \\ \times \left\{ (S_a/n_{a(G)})^2 - 2\gamma \left( \frac{S_a}{n_{a(G)}} \right)^{2k} \right\}; \quad S_a/n_{a(G)} \leq 10^{1/2}. \quad (97)$$

При наличии этих результатов уже можно сразу сравнить для данных условий работы достоинства инструмен-



тального метода обнаружения, обнаружения при помощи „слухового индикатора“ или телефонов и визуального обнаружения на экране электронно-лучевого индикатора типа А. Известные данные в каждом отдельном случае надо дополнить сведениями о минимальных величинах  $S_m/n_m$ ,  $S_a/n_{a(G)}$ ,  $S_v/n_v$ . Поодиночке эти величины известны, так как все они являются функциями одного параметра  $S_F/n_F$  (см. § 6 части I).

Особенно важно определить, какова должна быть ширина полосы пропускания низкочастотного полосового фильтра  $\Delta f_e$  в методе „слуховой индикации“ сигнала в сравнении с шириной полосы пропускания фильтров, используемых в резонансной схеме обнаружения сигналов с помощью измерительного прибора. Будем полагать, что пороговое отношение сигнала к шуму имеет вид в любом случае

$$S_m/n_m = A [S_a/n_{a(G)}]_{\text{тлф}}, \quad (98)$$

где постоянная величина  $A$  определяется экспериментально. Тогда из (98) получается условие, которое необходимо соблюдать при сравнении методов обнаружения,

$$[S_a/n_{a(G)}]_{\text{тлф}} = \alpha_0/A, \quad (99)$$

где теперь  $\alpha_0$  — величина порогового отношения сигнала к шуму, когда используется резонансная схема обнаружения при помощи прибора, для которой уже введено обозначение  $S_a/n_{a(G)} = \alpha$ . Значение  $\alpha$  можно определить при помощи следующего соотношения:

$$[S_a/n_{a(G)}]_{\text{тлф}} \equiv \alpha (\Delta f_a/\Delta f_e)^{1/2} = \left[ \frac{S_a}{n_{a(G)}} \right] \left( \frac{\Delta f_a}{\Delta f_e} \right)^{1/2}, \quad (100)$$

что, очевидно, соответствует тому факту, что мощность шума, проходящего через низкочастотный полосовой фильтр, пропорциональна ширине полосы пропускания фильтра. Используя формулы (97) — (100), находим сначала, что

$$\alpha = \alpha_0 (\Delta f_e/\Delta f_m)^{1/2} / (\Delta f_a/\Delta f_m)^{1/2}. \quad (101)$$

Полагая  $y \equiv \Delta f_e/\Delta f_m$  и  $x \equiv \Delta f_a/\Delta f_m$ , имеем с помощью (97) и (101):

$$\alpha_0 = 1,156 \left( 1 + \frac{1}{2} x^{-2} \right)^{1/4} x^{1/2} \left\{ \left[ \frac{\alpha_0}{A} (y/x)^{1/2} \right]^2 - 2 \gamma \left[ \frac{\alpha_0}{A} (y/x)^{1/2} \right]^3 \right\},$$

$$\gamma = 0,0763, \quad (102)$$

что просто записывается как

$$1 = (y/x)^4 (2x^2 + 1) (\alpha_0/A^2 1,059^{1/2})^4 \{1 - 2(\alpha_0(y/x)^{1/2}/A)\}. \quad (103)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\equiv \alpha_0/A^2 (1,059)^{1/2} = 0,971 \alpha_0/A^2; \\ b_0 &\equiv 2\gamma \alpha_0/A = 0,1526 \alpha_0/A; \quad z \equiv y/x. \end{aligned} \quad (104)$$

Тогда выражение (103) становится равным:

$$(z \alpha_0)^4 (2x^2 + 1) (1 - b_0 z^{1/2})^4 = 1 \quad (105)$$

при условии, что  $z$  всегда выбирается таким, что

$$(1 - b_0 z^{1/2}) z \alpha_0 < 1.$$

Если детектор, поставленный перед измерительным прибором, квадратичный, а не линейный, можно написать соотношение (97) исходя из (85), (88), (90):

$$S_m/n_m = 2^{1/4} \frac{\{1 + 1/2 (\Delta f_m/\Delta f_a)^2\}^{1/4}}{(\Delta f_m/\Delta f_a)^{1/2}} \left[ \frac{S_a}{n_{a(G)}} \right]^2; \quad 2^{1/4} = 1,189, \quad (106)$$

что упрощается до

$$z = \frac{A^2}{\alpha_0} (2x^2 + 1)^{-1/4}$$

или

$$y = A^2 x (2x^2 + 1)^{-1/4} / \alpha_0. \quad (107)$$

Если построить кривую для  $y$  как функции  $x$ , то получится требуемое соотношение между  $\Delta f_e$  и  $\Delta f_a$ . Кривые, отражающие зависимости (105) и (107), показаны на рис. 3 для различных величин порогового сигнала  $\alpha_0$ , при  $A=1$ . Случай  $A=1$  особенно важен, так как он дает возможность сравнить резонансную и аperiодическую измерительные схемы, где теперь  $\Delta f_e = (\Delta f_m)_{\text{резонансн}}$ . Для более подробного обсуждения см. § 3 части 1 и рис. 3 и 8.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Норт в неопубликованном докладе, озаглавленном «Анализ факторов, определяющих различение сигнала на фоне шумов в импульсных системах передачи». (RCA, Princeton, June 1943).

2. См. «Пороговые сигналы», Перевод под ред. А. П. Сиверса, Издательство «Советское радио», 1952.

3. Fletcher H., Bell. Lab. Monograph B-1205, December 1938. «Испытание как средство изучения процесса восприятия звуков» (рис. 17).

4. Wiener, Acta. Math, 1930, v. 55, p. 117; независимо от этой работы, А. Хинчин, Math. Ann., 1934, v. 19, p. 604.

5. Taylor G. I., Lond. Math. Soc. Sec. 2, 20, 196, 1920.; Proc. Roy. Soc., 1938, v. 164, p. 476.

6. Rice S. O., Bell Sys. Tech. J., 1944, v. 23, p. 282; 1945, v. 24, p. 46 (имеется перевод в сборнике „Теория передачи электрических сигналов при наличии помех“ под ред. Н. А. Железнова, Изд. иностранной литературы, 1953; эта статья содержит обширную обработку большого числа вопросов, связанных с рассмотрением шума).

7. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций, перевод с немецкого под ред. Л. Н. Седова и Г. В. Толстой, ОГИЗ, 1948.

### Примечания

<sup>1</sup> Выбор гармоник в данном случае важен не для получения определенной интенсивности сигнала, а с целью обеспечения необходимой громкости, уровень которой зависит от частоты и является мерой действительного восприятия уха. Уровень интенсивности сигнала просто является мерой звуковой энергии, приходящейся на единицу площади у измерителя уровня интенсивности звука, а не мерой субъективной интенсивности, или «громкости», ощущаемого ухом звука.

<sup>2</sup> Хотя постоянная составляющая имеет амплитуду  $\left| \left( \frac{1}{T} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(t) dt \right|$

вместо  $\left| \left( \frac{2}{T} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(t) dt \right|$ , уменьшение интенсивности определяется множителем  $\frac{1}{2}$ , а не  $\left( \frac{1}{2} \right)^2$  ввиду равенства для постоянной составляющей эффективного и пикового значения.

<sup>3</sup> Низкочастотный полосовой фильтр является достаточно узкополосным, чтобы шум, попадающий на вход последнего детектора, мог считаться «чистым» и случайным, ибо если выделяется очень узкая часть спектра, то восстанавливается случайный характер и гауссовы характеристики распределения «чистого» шума.

<sup>4</sup> В связи с этими флуктуациями можно отметить следующее. Флуктуации меняют свой вид в присутствии сигнала, так как перекрестная модуляция между сигналом и шумом изменяет энергию, распределенную по спектру шума, по сравнению с распределением энергии в случае, когда присутствует один шум. Этот эффект не рассматривался в предыдущей части анализа, так как импульсный характер сигналов приводит к тому, что компоненты, обусловленные перекрестной модуляцией сигнала с шумом, не важны ввиду того, что они существуют только в течение коротких отрезков времени. Измерительный прибор, однако, реагирует только на синусоидальный сигнал, так как низкочастотный полосовой фильтр исключает гармоники, которые наряду с основной частотой образуют огибающую импульсов. Авторы не определили, насколько изменяется энергия шума в присутствии сигнала ввиду расчетных трудностей, а также учитывая, что при экспериментах этот эффект сказывается ничтожно. Неясно, облегчается или усложняется обнаружение в присутствии сигнала при возрастании флуктуаций показаний индикатора (в отличие от систематического отклонения стрелки прибора).

<sup>5</sup> Выбор гауссовой кривой вызван тем, что такие характеристики хорошо аппроксимируют реальные характеристики, за исключением области частот, далеко отстоящих от резонанса (см. § 3 части II).

<sup>6</sup> В пределах приближений, принятых в нашем критерии.

<sup>7</sup> Мы говорим здесь и в других местах о средней мощности. Максимальная мощность соответственно обратно пропорциональна частоте повторения импульсов.

<sup>8</sup> Кривые, приведенные на рис. 7, для линейного детектора не распространяются в область, где  $\bar{T}$  меньше определенной величины  $\tau_0 (= S_F/n_F)$  при согласовании фильтра с импульсом. Причина этого кроется не в физике явления, а в том, что приведенные формулы не точны при удалении от указанной точки.

<sup>9</sup> В математическом разделе (часть II) не рассматривается бесконечно узкий селектирующий импульс. Однако для этой цели можно применить анализ, основанный на рассмотрении флуктуаций как импульсов, представляющих собой  $\delta$ -функции, пропускаемые посредством очень узкого селектора. Можно показать, что при подаче селектора в нужный момент времени и наличии второго селектора времени (для исключения дискретной компоненты шума на основной частоте повторения) для данного  $(S/n)_F$  ( $S_a/n_a$ ), беск. узкий селектор превышает отношение  $(S/n)_0$  посредством множителя  $(T\Delta f_e)^{-1/2}$ , где  $(T\Delta f_e)^{-1}$  — отношение частоты повторения импульсов к ширине полосы пропускания низкочастотного (измерительного) фильтра. Даже при наличии идеального селектирования рабочая характеристика улучшается незначительно при уменьшении длительности селектора по сравнению с длительностью импульса. Иными словами, при наличии нашего последнего условия (в), при  $\tau_G \sim 1/\Delta f_b$  величина  $(S/n)_a$  получается такого же порядка, что и величина для узкого селектора.

<sup>10</sup> Соотношения (14) и (16) получены в предположении детектирования слабого сигнала детектором с квадратичным законом динамической характеристики вблизи от рабочей точки. Часто случается, что имеет место выпрямление «сильного» сигнала, где детектор может иметь квадратичную характеристику, причем выпрямление однополупериодное. Однако результаты для корреляции на низких частотах связаны между собой линейным законом, причем зависимость (16) в 4 раза больше соответствующей зависимости для однополупериодного выпрямителя. Это легко увидеть, когда мы наблюдаем, что воспроизводится только огибающая входного сигнала, имеющего узкий спектр, которая возведена в квадрат в выражении для выходной мощности на низких частотах, и исключен постоянный ток. Такая величина коэффициента пропорциональности получается из-за того, что в последнем случае передается лишь половина волны.

<sup>11</sup> После детектирования в интересующей нас области спектра несущей частоты не существует; здесь  $\omega$  означает абсолютную частоту, а не частоту, отсчитываемую от  $\omega_0$ .

<sup>12</sup> Две различные формы  $R_{LF}(t)$  получены независимо Френцем (Zeits. f. Hochfrequenztechnik, 1941, p. 140), Нортон и Уленбеком в неопубликованных работах.

<sup>13</sup> Эти результаты можно получить также из выражения, приведенного Райсом (4,7—6), [Л. 6] для корреляционной функции шумового напряжения на выходе однополупериодного линейного выпрямителя, с помощью уравнения (12) и разложения  $(\cos \omega_0 t)^{2n}$  в ряд.

<sup>14</sup> См. статью Райса [примечание 15, уравнение (4. 2—3)].

<sup>15</sup> См. ч. I § 4 в статье Райса [Л. 6].

## ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ<sup>1</sup>

*У. Петерсон, Т. Бирдзолл, У. Фокс*

### Краткое содержание

Проблема обнаружения сигнала, обсуждаемая в этой статье, состоит в следующем. Предположим, что наблюдателю дано напряжение, изменяющееся в течение определенного временного интервала наблюдения, и требуется решить, является ли источником этого напряжения «шум» или «сигнал плюс шум». Какой метод должен использовать наблюдатель, чтобы принять решение, и какой приемник может служить для реализации этого метода? После обсуждения теоретических аспектов этой проблемы в статье делаются определенные выводы относительно оптимального приемника для некоторого числа практически интересных случаев.

Ответ на второй вопрос состоит в том, что нужно использовать приемника, на выходе которого дается значение коэффициента правдоподобия<sup>2</sup>, соответствующего входному напряжению, изменяющемуся в течение временного интервала наблюдения. Отметим, что это не зависит от того, какие из различных встречающихся в литературе оптимальных методов мы пользуемся, включая методы наблюдателя Неймана — Пирсона, «идеального наблюдателя» Зигерта и наблюдателя Вудворда и Дэвиса. Оптимальный наблюдатель, который должен дать положительный или отрицательный ответ, просто выбирает рабочий уровень и решает, что источником входного напряжения был «сигнал плюс шум» только тогда, когда полученный на выходе коэффициент правдоподобия превысит этот уровень.

С каждым таким рабочим уровнем связаны условная вероятность того, что возникнет ложная тревога и условная вероятность обнаружения. Графики этих величин, называемые рабочими характеристиками приемника (РХП), удобны для оценки параметров приемника. Если условия задачи обнаружения меняются вследствие, например, изменения мощности сигнала, тогда появляется семейство кривых РХП. Из такого семейства легко выделить, например, наилучшие кривые. В каждом частном случае наблюдатель должен выбрать определенный рабочий уровень. Его выбор будет зависеть от таких факторов, как до-

<sup>1</sup> W. W. Peterson, T. G. Birdsall and W. C. Fox, Trans. IRE, PGJT, 1954, № 4.

<sup>2</sup> Коэффициентом правдоподобия в дальнейшем называется отношение функций правдоподобия, вычисленных в предположениях наличия и отсутствия сигнала. В математической литературе это понятие называют «отношением правдоподобия». (Прим. ред.).

пустимый процент ложных тревог, априорные вероятности и относительная значимость ошибок.

Наряду с обсуждением теоретических вопросов, служащим введением к статье, обращается внимание на вывод явных формул для коэффициента правдоподобия и вероятности ложной тревоги для большого числа частных случаев. Предполагается, что задан стационарный, ограниченный по полосе белый гауссов шум. Рассматриваемые ниже семь специальных случаев были выбраны из числа простейших задач об обнаружении сигнала, хорошо описывающих ситуации, встречающиеся на практике.

Два из этих случаев дают основу для того, чтобы наилучшим возможным способом подойти к решению важной проблемы обнаружения сигнала, для которого или время задержки сигнала, или частота сигнала, или и то, и другое неизвестны. Кроме того, в этих двух случаях неопределенность сигнала может изменяться, и для этих двух довольно общих случаев устанавливаются численные соотношения между неопределенностью и способностью к обнаружению сигнала. Различные примеры, представленные здесь, подсказывают методы подхода к другим простым задачам об обнаружении сигнала, а также проливают некоторый свет на проблемы, которые пока что слишком сложны для прямого решения.

## ВВЕДЕНИЕ

Задача обнаружения сигнала, обсуждаемая в этой статье, это задача определения «оптимальной» системы правил, которые нужно дать наблюдателю, имеющему в своем распоряжении напряжение, меняющееся в течение определенного временного интервала наблюдения, и желающему решить, является ли источником этого напряжения «шум» или «сигнал плюс шум». Природа «шума» и «сигнала плюс шум» должна быть до некоторой степени известна наблюдателю.

Устройство, которое используется наблюдателем, чтобы принять такое решение, называется приемником. Поэтому имеющееся в распоряжении наблюдателя напряжение называется «входным напряжением приемника». «Оптимальные» правила состоят главным образом в точном описании приемника, которым должен пользоваться наблюдатель.

В первых трех разделах этой статьи исследуется применение статистических методов к проблеме обнаружения сигнала. Эти разделы должны служить введением в рассматриваемый вопрос для тех, кто имеет минимальную математическую подготовку. Различные определения «оптимальных» правил предлагались другими авторами<sup>1</sup>. Подчеркнем здесь тот факт, что эти различные определения приводят по существу к одному и тому же приемнику.

---

<sup>1</sup> Определение «идеального» (или «оптимального») приемника предложено акад. В. А. Котельниковым в 1946 г. (Прим. ред.).

В последующих параграфах проведено подробное описание «оптимального» приемника, и для некоторых практически интересных случаев численно оценены (17) его параметры.

## 1. АНСАМБЛИ СШ И Ш

Как чистый шум, так и сигнал плюс шум могут быть источниками различных напряжений на входе приемника. Совокупность всех возможных входных напряжений, источником которых служит чистый шум, называется «ансамблем Ш»; аналогично совокупность всех входных напряжений, источником которых служит сигнал плюс шум, называется «ансамблем СШ». Наблюдатель имеет дело с входным напряжением, принадлежащим одному из двух ансамблей, но он не знает, какому именно ансамблю оно принадлежит; на самом деле он может даже не знать вероятность того, что оно принадлежит данному ансамблю. Наблюдатель должен решить, какому ансамблю принадлежит напряжение на входе.

### 1. Система дискретного представления<sup>1</sup>

Система дискретного представления — это система проведения последовательных измерений входного напряжения в течение интервала наблюдения. Эта система должна быть такова, чтобы по результатам измерений можно было восстановить входное напряжение в интервале наблюдения. Математически система дискретного представления есть способ представления функций от времени при помощи последовательностей чисел. Простейший способ разъяснить эту идею — это рассмотреть несколько примеров.

### Ряды Фурье на интервале

Предположим, что момент начала интервала наблюдения есть  $t_0$ , а длительность интервала наблюдения —  $T$  секунд, и что каждую функцию, входящую в ансамбль СШ и Ш, можно разложить в ряд Фурье на интервале наблюдения. Коэффициенты Фурье для каждого отдельного входного напряжения можно получить, произведя измерения на

---

<sup>1</sup> Система дискретного представления конечна, если конечна наибольшая длина всех последовательностей, соответствующих входным напряжениям ансамбля.

входе. Входное напряжение можно восстановить по данным этих измерений с помощью формулы

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}, \quad t_0 < t < t_0 + T. \quad (1)$$

Таким образом, процесс представления каждой функции  $x(t)$  последовательностью коэффициентов Фурье ( $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ ) есть система дискретного представления в описанном выше смысле.

Паре членов ряда Фурье, содержащих косинус и синус, соответствует частота, равная  $nT$  циклов в секунду. Предположим, что для данного ансамбля входных напряжений члены, соответствующие частотам, большим, чем  $n_0/T$ , равны 0. Это означает, что ансамбль ограничен по полосе в смысле ряда Фурье. Для такого ансамбля системой дискретного представления каждого входного напряжения  $x(t)$  является конечная последовательность ( $a_0, a_1, b_1, \dots, a_{n_0}, b_{n_0}$ ).

### Система дискретного представления Шеннона

Предположим, что интервал наблюдения содержит весь бесконечный промежуток времени и что ансамбли ограничены полосой частот от 0 до  $W$  гц (в смысле преобразования Фурье), т. е., что преобразование Фурье каждого входного напряжения равно 0 для частот больших, чем  $W$  гц. Система дискретного представления для этого ансамбля состоит в представлении каждой функции  $x(t)$  с помощью ее амплитуды, измеренной через промежутки времени длительностью  $1/2W$  сек ( $\dots x(t_0 - n/2W), \dots, x(t_0 - 1/2W), x(t_0), x(t_0 + 1/2W), \dots, x(t_0 + n/2W), \dots$ ).

В этом случае формула [Л. 2] для восстановления входного напряжения имеет вид

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(t_0 + \frac{n}{2W}\right) \frac{\sin \pi (2W(t - t_0) - n)}{\pi (2W(t - t_0) - n)}. \quad (2)$$

Моменты времени  $t_0 + n/2W$  называются моментами выбора. Каждое фиксированное значение  $t_0$  между 0 и  $1/2W$  приводит к своей системе дискретного представления. Если интервал наблюдения включает весь бесконечный промежуток времени, но ансамбли ограничены полосой частот от  $f_0 - W/2$



до  $f_0 + W/2$ , не содержащей нулевой частоты, тогда каждое входное напряжение  $x(t)$  можно рассматривать, как модулированное колебание  $x(t) = r(t) \cos(2\pi f_0 t + \Theta(t))$ , где  $r(t)$  есть амплитуда огибающей, а  $\Theta(t)$  — значение фазы колебаний. Системой дискретного представления, использующей эти моменты выбора, является в этом случае представление каждого напряжения на входе при помощи последовательности

$$(\dots r(t_0), \Theta(t_0), \dots, r(t_0 + n/W), \Theta(t_0 + n/W), \dots)$$

значения амплитуды огибающей и фазы колебаний, измеренных в выборочные моменты времени через каждые  $1/W$  сек [Л.1]. Восстановление входного напряжения по этой последовательности проводится по формуле

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r\left(t_0 + \frac{n}{W}\right) \cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\left(t_0 + \frac{n}{W}\right) \frac{\sin \pi(W(t-t_0) - n)}{\pi(W(t-t_0) - n)}\right). \quad (3)$$

Система дискретного представления, использующая моменты выбора из конечного интервала наблюдения

Только те функции, значения которых известны для всех моментов времени, имеют преобразования Фурье, и поэтому предположение о том, что ансамбли ограничены по полосе в смысле преобразования Фурье, применимо только в том случае, когда интервал наблюдения содержит все время. Если интервал наблюдения конечен и если ансамбли ограничены по полосе в смысле ряда Фурье, то существует система дискретного представления, аналогичная системе, описанной в предыдущем пункте для ансамблей, ограниченных по полосе в смысле преобразования Фурье, и бесконечного интервала наблюдения<sup>1</sup>. Предположим, что время измеряется от начала интервала наблюдения, длительность которого  $T$  секунд, и что ансамбли ограничены частотами от 0 до  $W$  гц циклов в секунду в смысле ряда Фурье. Конечную систему дискретного представления для этого случая можно получить в виде последовательности его ампли-

<sup>1</sup> Это представление соответствует теореме, установленной В. А. Котельниковым в 1933 г. (Прим. ред.).

гуд входного напряжения, измеренных через каждые  $1/2W$  сек [Л. 1].

$$\left[ x(t_0), x\left(t_0 + \frac{1}{2W}\right), \dots, x\left(t_0 + T - \frac{1}{2W}\right) \right]; \quad (4)$$

анодное напряжение можно восстановить по этой последовательности с помощью формулы

$$x(t) = \sum_{n=0}^{2WT-1} x\left(t_0 + \frac{n}{2W}\right) \times \\ \times \frac{\sin \pi (2W(t-t_0) - n)}{2WT \sin \left( \frac{2W(t-t_0) - n}{2WT} \pi \right)}, \quad 0 < t < T. \quad (5)$$

И снова каждое фиксированное значение (начального) выборочного момента  $t_0$  между 0 и  $1/2W$  приводит к своей системе представления. Подобным же образом, если интервал наблюдения прежний, а ансамбли на этом интервале ограничены (в смысле ряда Фурье) полосой частот от  $f_0 - W/2$  до  $f_0 + W/2$ , не содержащей нулевой частоты, то каждое входное напряжение можно представить конечной последовательностью  $[r(t_0), \Theta(t_0), r(t_0 + 1/W), \Theta(t_0 + 1/W), \dots, r(t_0 + T - 1/W), \Theta(t_0 + T - 1/W)]$  значений амплитуды огибающей и фазы колебаний, измеренных в моменты выбора через каждые  $1/W$  секунды;  $t_0$  опять обозначает начальный момент выбора; его можно выбрать любым между 0 и  $1/W$ . Восстановление входного напряжения по этой последовательности измерений можно производить по формуле

$$x(t) = \sum_{n=0}^{WT-1} r\left(t_0 + \frac{n}{W}\right) \cos \left( 2\pi f_0 t + \Theta\left(t_0 + \frac{n}{W}\right) \right) \times \\ \times \frac{\sin \pi (W(t-t_0) - n)}{WT \sin \pi \frac{W(t-t_0) - n}{WT}}, \quad 0 < t < T. \quad (6)$$

Из этих примеров видно, что имеются существенные различия между разными системами дискретного представления, такие, как: длительность интервала наблюдения; различие в использованных выборочных моментах; различие в характере измерений. Представления могут использовать однотипные величины, например измерения мгновенных амплитуд, или величины разных типов, например измерения амплитуд огибающей и фаз колебаний. Однако все они

обладают тем общим свойством, что входное напряжение можно восстановить по проведенным измерениям.

Роль систем дискретного представления, которую они играют в теории, развиваемой в этой статье, связана главным образом с доставляемыми их использованием математическими удобствами. Ансамбли Ш и СШ представляются последовательностями с помощью системы представления с целью применить затем статистические методы. Решение задачи об «оптимальном» приемнике с помощью дискретного представления часто может быть интерпретировано в терминах непрерывных входных напряжений. Если для какого-нибудь частного вопроса теории нельзя применить конечную систему представления, то, как показывает недавняя работа Греннандера [Л. 8], искомые параметры «оптимального» приемника можно аппроксимировать, используя конечные системы выбора. По этой причине, а также для того чтобы упростить изложение, развиваемая ниже теория ограничивается случаями, когда можно применить конечную систему дискретного представления.

## **II. ОПТИМАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ ИНТЕРВАЛАХ НАБЛЮДЕНИЯ**

### **1. Плотности вероятностей**

Этот раздел статьи посвящен методу статистического анализа, основанному на рассмотрении конечной последовательности чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , представляющей результат измерений напряжения на входе, проведенных в соответствии с некоторой заданной конечной системой дискретного представления. Эта последовательность часто называется «выборкой» из ансамбля, которому она принадлежит, и обозначается одной буквой; так, если напряжение на входе есть  $x(t)$  и система выбора приводит к последовательности  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то эта последовательность называется выборкой  $X$ . Развитая здесь теория предназначена для того, чтобы дать точное описание оптимального приемника. Изложение будет вестись на языке выборок  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Если  $n$  очень велико, то приемник, который должен производить измерения, необходимые для осуществления системы выбора, очевидно, непрактичен. Однако эту трудность можно обойти, если перевести описание с языка выборок обратно на язык входных напряжений, что возможно, так как по выборкам можно восстановить входное напряжение.

В дальнейшем изложении будет рассматриваться любая конечная система выбора в предположении, что известны свойства соответствующей выборки  $X$ , достаточные для того, чтобы вычислить необходимые вероятности. Точнее, должны быть известны плотности вероятностей  $f_{\text{Ш}}(X)$  и  $f_{\text{СШ}}(X)$  случайной величины  $X$  для случая, когда  $X$  принадлежит ансамблям Ш и СШ соответственно<sup>1</sup>. Основными свойствами плотностей вероятностей являются соотношения

$$f_{\text{Ш}}(X) \geq 0; \int f_{\text{Ш}}(X) dX = 1 \quad (7)$$

и 
$$f_{\text{СШ}}(X) \geq 0; \int f_{\text{СШ}}(X) dX = 1,$$

где символ интеграла означает многократный интеграл, взятый по всей области изменения выборочной переменной  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

## 2. Понятие критерия

Предположим, что наблюдатель имеет в качестве данных наблюдения выборку  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . Цель наблюдателя — решить для каждой выборки, возникла она из ансамбля Ш или СШ. Хотя невозможно точно задать интуитивный критерий, используемый на практике реальным наблюдателем, вполне возможно установить внешние результаты применения этого критерия. Идеализируя, можно сказать, что все, что нужно, — это предоставить в распоряжение наблюдателю все возможные выборки и зарегистрировать его решения. В результате возникнет таблица всех тех выборок, о которых наблюдатель решил, что они принадлежат ансамблю СШ. Если дать эту таблицу некоторому другому наблюдателю и проинструктировать его, чтобы он действовал в соответствии с этой таблицей, то после получения выборки он будет поступать точно так же, как и первый наблюдатель. Таким образом, таблицу этих ответов можно использовать вместо психологических критериев, применяемых наблюдателем. Поэтому такая таблица будет называться также областью принятия решения в принадлежности к ансамблю СШ. Она будет обозначаться буквой  $A$ . Таблица остальных выборок, тех, о которых наблюдатель решил, что они из ансамбля Ш, будет обозначаться через  $B$ . Области  $A$  и  $B$  задают критерий.

<sup>1</sup> Здесь нужно помнить, что событие „выборка принадлежит ансамблю СШ“ соответствует тому, что на входе приемника имеется сигнал и шум. То же — для события „выбран ансамбль СШ“.

### 3. Вероятности, связанные с критерием

Очевидно, что разных критериев так же много, как и наблюдателей. Среди всех возможных критериев необходимо выбрать такие, которые являются наилучшими для различных целей. Для этого с каждым критерием нужно связать некоторые численные величины. Оказывается необходимым знать вероятность того, что выборка, принадлежащая одному из ансамблей, будет отнесена к области  $A$ . В соответствии с обычными определениями, эти вероятности даются формулами

$$P_{\text{СШ}}(A) = \int f_{\text{СШ}}(X) dX \quad (8)$$

и

$$P_{\text{Ш}}(A) = \int f_{\text{Ш}}(X) dX,$$

где многократный интеграл берется по всем выборкам, входящим в область  $A$ .

Например, пусть данная система представления имеет плотность вида  $f_{\text{Ш}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = K \exp - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ . Возможен критерий, задеваемый областью, состоящей из тех выборок  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которые находятся вне сферы радиуса  $l$  с центром в 0. Тогда интеграл нужно будет брать по внешней области этой сферы.

Введенные вероятности имеют особое значение. Так,  $P_{\text{Ш}}(A)$  — это условная вероятность того, что выборка из ансамбля Ш будет отнесена к области  $A$ , т. е. что она будет рассмотрена как выборка из ансамбля СШ. Таким образом,  $P_{\text{Ш}}(A) = F$  — это условная вероятность ложной тревоги. Аналогично,  $P_{\text{СШ}}(A)$  — условная вероятность правильного ответа, соответствующего обнаружению цели (т. е. правильного решения о том, что выборка — из ансамбля СШ). Поэтому условная вероятность ошибочного решения о том, что выборка не из ансамбля СШ, когда на самом деле она принадлежит ансамблю СШ, есть  $1 - P_{\text{СШ}}(A) = M$ , это условная вероятность пропуска. Единственные ошибки, которые могут иметь место, это ложные тревоги и пропуски; их условные вероятности,  $F$  и  $M$  кратко называются вероятностями ошибок.

Читатель, знакомый с формальным содержанием теории вероятностей, заметит, что эти величины совпадают с обычными условными вероятностями; первая — это условная

вероятность при условии, что выборка принадлежит ансамблю СШ; вторая — это условная вероятность при условии, что выборка принадлежит ансамблю Ш. Необходимо отличать эти условные вероятности от априорных вероятностей (например, вероятностей того, что выбран данный ансамбль), которые не предполагаются известными.

#### 4. Коэффициент правдоподобия и критерий коэффициента правдоподобия<sup>1</sup>

Удобно ввести новую функцию  $l(X)$ , называемую коэффициентом правдоподобия и определяемую как отношение  $f_{\text{СШ}}(X)/f_{\text{Ш}}(X)$ , соответствующее выборке  $X = (x_1, \dots, x_n)$ .  $l(x)$  измеряет относительную правдоподобность предположений о том, что выборка  $X$  принадлежит СШ, и о том, что она принадлежит ансамблю Ш. Значит, если  $l(X)$  достаточно велико, то будет разумным заключить, что выборка  $X$  действительно принадлежит ансамблю СШ, т. е. отнести выборку  $X$  к «более подходящей» для этого случая области. Таким образом, каждому числу  $\beta \geq 0$  будет сопоставлен определенный критерий, задаваемый областью  $A(\beta)$ ; к области  $A(\beta)$  относятся все выборки  $X$ , для которых  $l(X) \geq \beta$ . Теперь проблема сводится к разумному выбору  $\beta$ , т. е. к установлению точного смысла слов «достаточно велико». Критерий типа  $A(\beta)$  называется критерием коэффициента правдоподобия.

Предлагались различные определения «оптимального» критерия. Оказывается, что каждый из этих оптимальных критериев может быть выражен через критерий коэффициента правдоподобия, так что во всех этих случаях можно использовать приемник, дающий на выходе коэффициент правдоподобия.

#### 5. Критерий взвешенного среднего

Предположим, что можно задать действительное число  $w$  в качестве весового коэффициента, характеризующего важность ложной тревоги по отношению к обнаружению. Так как  $P_{\text{СШ}}(A)$  — вероятность обнаружения и  $P_{\text{Ш}}(A)$  — вероятность ложной тревоги, то целесообразно найти такую область  $A$ , при котором максимальна разность

$$P_{\text{СШ}}(A) - wP_{\text{Ш}}(A). \quad (9)$$

<sup>1</sup> Как указывалось выше, нормы «коэффициента правдоподобия» эквивалентны понятию «отношение правдоподобия».

Но эту величину можно переписать как

$$\int_A [f_{\text{C III}}(X) - \omega f_{\text{III}}(X)] dX, \quad (10)$$

где интеграл берется по всем выборочным точкам  $X$ , входящим в  $A$ . Чтобы интеграл принял максимальное значение, надо включить в  $A$  все выборки, для которых подынтегральная функция не отрицательна. Решая неравенство относительно  $W$ , получаем, что  $A$  должно состоять из тех выборочных точек, для которых

$$l(X) = \frac{f_{\text{C III}}(X)}{f_{\text{III}}(X)} \geq \omega. \quad (11)$$

Таким образом, искомый критерий, заданный областью  $A$ , есть просто критерий коэффициента правдоподобия.

## 6. Критерий Неймана — Пирсона

Если наиболее важным является требование, чтобы вероятность ложной тревоги  $P_{\text{III}}(A)$  оставалась ниже определенного уровня  $k$ , то из всех критериев, удовлетворяющих этому условию, разумно выбрать такой, при котором вероятность обнаружения цели наибольшая. Поэтому Нейман и Пирсон [Л. 4] предложили в качестве оптимального критерия критерий, задаваемый областью  $A_k$ , такой, что

$$P_{\text{III}}(A_k) \leq k \quad (1)$$

и

$$P_{\text{C III}}(A_k) \quad (2)$$

имеют наибольшее значение среди всех критериев, для которых  $P_{\text{III}}(A) \leq k$ .

Критерии, задаваемые областями  $A_k$ , также можно представить как критерии коэффициента правдоподобия. Это можно показать таким образом. Прежде всего надо учитывать только те критерии, для которых  $P_{\text{III}}(A) = k$ , так как для того чтобы выполнялось условие (2), нужно выбирать  $A$  по возможности большим. Теперь рассмотрим кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$X = X(\beta) = P_{\text{III}}(\beta))$$

и

$$Y = Y(\beta) = P_{\text{СШ}}(A(\beta)). \quad (12)$$

Эту кривую назовем рабочей характеристикой приемника (коротко — РХП), выход которого дает коэффициент правдоподобия и в котором используется критерий коэффициента правдоподобия. Кривая РХП проходит через точки  $(0,0)$  — при  $\beta = \infty$  и  $(1,1)$  — при  $\beta = 0$ . При  $\beta = 0, l(X) \geq \beta = 0$  для всех  $X$ , поэтому в  $A(0)$  входят все возможные выборки. В этом случае наблюдатель будет сообщать обо всех выборках, что они принадлежат СШ, поэтому он будет или вызывать ложную тревогу или обнаруживать цель. (Здесь предполагается, что не все выборки принадлежат одному и тому же ансамблю). Сказанное можно проверить, используя основное свойство плотности, выраженное следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{СШ}}(A(0)) &= \int f_{\text{СШ}}(X) dX = 1 \\ P_{\text{Ш}}(A(0)) &= \int f_{\text{Ш}}(X) dX = 1, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где интеграл берется по всем возможным выборкам  $X$ . Эти соотношения показывают, что  $X(0) = Y(0) = 1$ . Далее,  $X(\infty) = Y(\infty) = 0$  так, как для  $\beta = \infty$  нет таких  $X$ , для которых  $l(X) \geq \infty$ , т. е.  $A(\infty)$  совсем не содержит выборок, и оператор никогда не скажет, что имеет место сигнал. Поэтому оператор не может ни вызвать ложную тревогу, ни обнаружить цель. Таким образом,  $P_{\text{СШ}}[A(\infty)] = 0$  и  $P_{\text{Ш}}[A(\infty)] = 0$ .

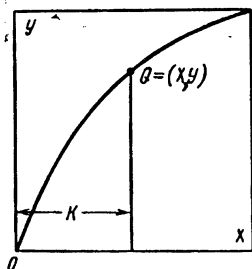


Рис. 1. Типичная форма рабочей характеристики приемника.

$$y = y(\beta) = P_{\text{СШ}}[A(\beta)];$$

$$x = x(\beta) = P_{\text{Ш}}[A(\beta)].$$

Эти соображения наряду с рассмотрениями следующего раздела показывают, что кривая РХП может быть изображена, как показано на рис. 1.

Для того чтобы определить искомое  $A_k$ , напомним, что все значения вероятностей заключены между нулем и единицей, так что и величина  $P_{\text{Ш}}(A_k) = k$  лежит между нулем и единицей. Значит, на кривой есть точка  $Q$ , лежащая на вертикали, проходящей через точки  $(k, 0)$ . Если  $(XY)$  — координаты точки  $Q$ , то  $X = P_{\text{Ш}}(A(\beta))$  и  $Y =$



$=P_{C\text{ш}}(A(\beta))$  для некоторого  $\beta$ , которое будет обозначено через  $\beta_k$ . Далее,  $A(\beta_k)$  удовлетворяет условию (1), потому что  $P_{\text{ш}}(A(\beta_k))=k$ , и поэтому  $A(\beta_k)$  будет искомой областью  $A_k$ , если только  $P_{C+\text{ш}}(A) \leq P_{C+\text{ш}}[A(\beta_k)]$  для любой области со свойством  $P_{\text{ш}}(A)=k$ . Из § 5 ясно, что критерий коэффициента правдоподобия, задаваемый областью  $A(\beta_k)$ , — оптимальный критерий взвешенного среднего с весовым коэффициентом  $w=\beta_k$ . Значит, если  $w=\beta_k$ , то соответствующее критерию, заданному областью  $A(\beta_k)$ , взвешенное среднее будет больше или равно такой же взвешенной комбинации, соответствующей любому другому критерию, заданному областью  $A$ , т. е.

$$P_{C\text{ш}}(A(\beta_k)) - \beta_k P_{\text{ш}}(A(\beta_k)) \geq P_{C\text{ш}}(A) - \beta_k P_{\text{ш}}(A). \quad (14)$$

В этом случае и  $P_{\text{ш}}(A(\beta_k))$ , и  $P_{\text{ш}}(A)$  равны  $k$ . Подставляя это значение в верхнее неравенство, получаем:

$$P_{C\text{ш}}(A(\beta_k)) \geq P_{C\text{ш}}(A). \quad (15)$$

Поэтому искомый критерий Неймана — Пирсона должен совпадать с критерием коэффициента правдоподобия.

## 7. Рабочая характеристика приемника

Мы хотим теперь, несколько отступив от основной линии, изучить более детально функцию РХП. Значение этой функции основано на том факте, что если для применения выбран критерий коэффициента правдоподобия, то РХП дает полное описание системы обнаружения. Из самого определения функции РХП следует, что координата  $X$  — это условная вероятность,  $F$  — ложная тревога, а  $Y$  — условная вероятность правильного обнаружения цели. Аналогично  $(1-X)$  — условная вероятность правильного решения о наличии чистого шума, а  $(1-Y)=M$  — условная вероятность пропуска. Мы покажем, что рабочий уровень  $\beta$  для критерия отношения правдоподобия, заданного областью  $A(\beta)$ , можно также найти по кривой РХП как ее наклон в точке:

$$P_{\text{ш}}(A(\beta)), \quad P_{C\text{ш}}(A(\beta)).$$

Так как многие из предложенных оптимальных критериев могут быть выражены через критерий коэффициента правдоподобия, то функция РХП имеет большое значение.

Чтобы изучить некоторые ее геометрические свойства, предположим, что функции от параметра

$$\text{и } \left. \begin{aligned} X &= X(\beta) = P_{\text{ш}}(A(\beta)) \\ Y &= Y(\beta) = P_{\text{сш}}(A(\beta)) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

дифференцируемы по  $\beta$ . Отношение  $(dY/d\beta)/dX/d\beta$  дает наклон касательной к кривой. Чтобы вычислить наклон в точке  $(X(\beta_0), Y(\beta_0))$ , заметим, что величина  $P_{\text{сш}}(A) = \beta_0 P_{\text{ш}}(A)$  максимальна среди всех критериев при  $A = A(\beta_0)$ . Поэтому, в частности, функция

$$Y(\beta) - \beta_0 X(\beta) = P_{\text{сш}}(A(\beta)) - \beta_0 P_{\text{ш}}(A(\beta)) \quad (17)$$

имеет максимум при  $\beta = \beta_0$ , так что здесь ее производная должна обратиться в нуль. Дифференцируя, получаем, что

$$\frac{dY}{d\beta} - \beta_0 \frac{dX}{d\beta} = 0 \text{ при } \beta = \beta_0. \quad (18)$$

Решая это уравнение для  $\beta_0$ , получаем:

$$\beta_0 = \frac{\left(\frac{dY}{d\beta}\right)_{\beta=\beta_0}}{\left(\frac{dX}{d\beta}\right)_{\beta=\beta_0}} = \text{наклону касательной к кривой РХП в точке } [X(\beta_0), Y(\beta_0)]. \quad (19)$$

Отсюда видно, что наклон кривой РХП задается параметром  $\beta$  и всегда положителен. Следовательно, функция монотонно растет. Кроме того, это означает, что  $Y(\beta)$  — однозначная функция от  $X(\beta)$ ,  $Y=Y(X)$ , монотонно возрастающая от  $Y(0)=0$  до  $Y(1)=1$ . Эти замечания полностью оправдывает график РХП на рис. 1. Следующие два раздела посвящены определению наиболее подходящего значения для весового коэффициента  $\omega$ , когда известны априорные вероятности.

## 8. Критерий «идеального наблюдателя» Зигерта

В этом случае необходимо заранее знать априорные вероятности того, что будут выбраны ансамбли С+Ш и Ш, что является дополнительным предположением. Эти априорные вероятности соответственно обозначаются через  $P(\text{СШ}) + P(\text{Ш})$ . Кроме того,  $P(\text{СШ}) + P(\text{Ш}) = 1$ , так как имеется по крайней мере один из ансамблей. Критерий,

связываемый с идеальным наблюдателем Зигерта, обычно определяется как критерий, для которого минимальна априорная вероятность ошибки (или, что эквивалентно, максимальна априорная вероятность правильного ответа [Л. 5]. Обычно рассматривается случай, когда  $P(C+Ш)$  и  $P(Ш)$  равны, но это ограничение не необходимо.

Если условная вероятность  $F$  ложной тревоги известна, так же как и априорная вероятность события, состоящего в том, что выбран ансамбль  $Ш$ , то вероятность ложной тревоги равна произведению

$$(P(Ш) F. \quad (20)$$

Таким же образом вероятность пропуска равна:

$$P(C Ш) M. \quad (21)$$

Так как ошибка  $E$  может произойти только в этих двух случаях, то вероятность ошибки равна сумме этих величин:

$$P(E) = P(Ш) F + P(C Ш) M. \quad (22)$$

Уже указывалось, что  $F = P_{Ш}(A)$  и  $M = 1 - P_{C Ш}(A)$ .

Подставляя это в выражение для  $P(E)$ , получаем после простых алгебраических преобразований

$$P(E) = P(C Ш) - P(C Ш) \left[ P_{C Ш}(A) - \frac{P(Ш)}{P(C Ш)} P_{Ш}(A) \right]. \quad (23)$$

Желательно минимизировать  $P(E)$ . Вследствие уравнения (23) это эквивалентно максимизации величины

$$P_{C Ш}(A) - \frac{P(Ш)}{P(C Ш)} P_{Ш}(A) \quad (24)$$

и, конечно, приводит к критерию взвешенного среднего  $\omega = P(Ш)/P(C Ш)$ . Этот критерий, как известно, является простым критерием коэффициента правдоподобия, заданном областью  $A(\omega)$ .

## 9. Критерий максимума математического ожидания

Другой способ определения весового коэффициента  $\omega$  основан на задании «математического ожидания» для каждого критерия. Математическое ожидание можно определить, если известны априорные вероятности  $P(C Ш)$  и  $P(Ш)$  и если четырем альтернативам можно поставить

в соответствие числовые величины. Пусть  $V_D$ —величина, характеризующая обнаружение, и  $V_Q$ —величина, характеризующая верное решение о том, что имеется чистый шум. Двум другим альтернативам также сопоставлены величины  $V_M$ —соответствует пропуску и  $V_F$ —ложной тревоге. Теперь можно определить математическое ожидание, связанное с критерием. В этом случае естественно назвать оптимальным тот критерий, при котором математическое ожидание наибольшее. Можно показать, что такой критерий максимизирует величину.

$$P_{\text{сш}}(A) - \left[ \frac{P(\text{Ш})}{P(\text{СШ})} \cdot \frac{V_Q - V_F}{V_D - V_M} \right] P_{\text{ш}}(A). \quad (25)$$

По определению (см. § 5 раздела II) этот критерий является критерием взвешенного среднего с весовым коэффициентом

$$\omega = \frac{P(\text{Ш})}{P(\text{СШ})} \cdot \frac{V_Q - V_F}{V_D - V_M} \quad (26)$$

и, следовательно, является критерием коэффициента правдоподобия. Критерий „идеального наблюдателя“ Зигерта представляет собой тот частный случай, когда  $V_Q - V_F = V_D - V_M$ .

## 10. Апостериорная вероятность и обнаружимость сигнала

До сих пор наблюдатель был ограничен двумя возможными ответами: имеется «сигнал плюс шум», или имеется «только шум». Вместо этого от него можно требовать, насколько это позволяют его знания, определить вероятность того, что имеется сигнал. Этот подход имеет преимущество в отношении получения большей информации от приемного устройства. В самом деле, Вудворд и Дэвис показали, что если наблюдатель наилучшим образом оценивает эту вероятность для каждого возможного переданного сообщения, то он получает всю информацию, которую может дать его устройство [Л. 6]. Хорошее изложение этого подхода можно найти в оригинальных статьях Вудворда и Дэвиса [Л. 6, 7]. Их формула для апостериорной вероятности  $P_X(\text{СШ})$  в обозначениях этой статьи имеет вид

$$P_X(\text{СШ}) = \frac{f_{\text{СШ}}(X) P(\text{СШ})}{f_{\text{СШ}}(X) P(\text{СШ}) + (1 - P(\text{СШ})) f_{\text{ш}}(X)} \quad (27)$$

или

$$P_x(\text{СШ}) = \frac{l(X)P(\text{СШ})}{l(X)P(\text{СШ}) + 1 - P(\text{СШ})}. \quad (28)$$

Если можно построить приемник, вычисляющий коэффициент правдоподобия, и если известна априорная вероятность  $P(\text{СШ})$ , то легко вычислить апостериорную вероятность. Вычисление может быть выполнено при помощи соответствующей калибровки приемника, так как выражение (28) является монотонной функцией  $l(X)$ , чем достигается построение оптимального приемника для нахождения апостериорной вероятности.

### III. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ С МИНИМАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

#### 1. Последовательный анализ

Метод последовательного анализа состоит в следующем: производим одно измерение  $x_1$  на входе приемника; если (число)  $x_1$  достаточно характерно, то решаем, какому ансамблю — СШ или Ш — принадлежит напряжение на входе приемника. Если нет полной ясности, то производим второе измерение  $x_2$  и рассматриваем пару  $(x_1, x_2)$ . Продолжаем измерения до тех пор, пока полученная последовательность измерений не даст достаточно данных для того, чтобы предпочесть тот или другой ансамбль. Очевидно, теоретически не исключена возможность того, что до принятия окончательного решения нужно будет сделать сколь угодно большое количество измерений. Но это не означает, что на практике придется провести бесконечное количество измерений, равно как и не означает, что этот процесс непременно будет продолжаться в течение сколь угодно большого промежутка времени. Если, например, измерения делаются через равные промежутки времени, то общий интервал времени, используемый в такой системе измерения, бесконечен. Однако если рассмотреть другую систему, при которой измерения проводятся в моменты  $t=0, t=1/2, \dots, t=n-1/n, \dots$ , то, так как все эти моменты заключены в интервале времени от нуля до единицы, для такого способа измерений понадобится только единичный интервал времени.

Если измерения доведены до шага, когда уже имеются измерения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то переменная  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

называется  $n$ -й выборкой. Будут рассмотрены только те системы измерений, для которых при каждом  $n$  известны плотности  $f_{СШ}(X_n)$  и  $f_{Ш}(X_n)$  для  $n$ -й выборки  $X_n$ ; первой из этих плотностей надо пользоваться, когда выборка относится к ансамблю СШ, а второй — когда выборка относится к ансамблю Ш. Эти плотности могут быть для различных  $n$  совсем различными, так что на самом деле нужно писать  $f_{Ш}^n(X_n)$  и  $f_{СШ}^n(X_n)$ ; однако индекс  $n$  при аргументе  $X_n$  поясняет положение, и поэтому верхний индекс у плотности можно опустить.

## 2. Система последовательного анализа

Система последовательного анализа состоит из: 1) бесконечной системы измерений с плотностями  $f_{Ш}(X_n)$  и  $f_{СШ}(X_n)$  и 2) заданных для каждого шага процесса измерения трех областей. Эти три области соответствуют трем возможным выводам: а) имеется „сигнал плюс шум“, т. е. выборка принадлежит ансамблю СШ; б) имеется „чистый“ шум, т. е. выборка принадлежит ансамблю Ш; в) следует провести еще одно измерение.

На первом шаге процесса измерения, вообще говоря, можно получить любое (действительное) число. Это значит, что область значений одномерной выборки  $X_1 = (x_1)$  совпадает с множеством всех действительных чисел; эту область значений одномерной выборки будем обозначать через  $S_1$ . Предположим, что для первого шага процесса выборки три области:  $A_1, B_1, C_1$ . Если выборка  $X_1$  отнесена к  $A_1$ , решаем, что имеется сигнал, и прекращаем испытания. Если она принадлежит  $B_1$ , делаем вывод, что имеется чистый шум, и также прекращаем испытания. Если  $X_1$  отнесена к  $C_1$ , то нужно выполнить следующее измерение, и испытания не прекращаются, а переходят во вторую стадию.

Если для первого шага области заданы, то возникает ограничение на совокупность  $S_2$  значений двумерной выборки  $X_2 = (x_1, x_2)$ . Испытание продолжается до второго шага, только если  $X_1 = (x_1)$  отнесено к  $C_1$ . Поэтому  $S_2$  содержит не всевозможные двумерные выборки  $X_2 = (x_1, x_2)$ , а только те, у которых  $(x_1)$  отнесен к  $C_1$ . Три области, соответствующие второй стадии, должны относиться только к выборкам  $X_2$ , принадлежащим  $S_2$ . Их надо определить таким образом, чтобы каждая выборка из  $S_2$  была отнесена к одной области. Эти области имеют тот же смысл, что и об-

ласти, выбранные для первого шага, т. е. если выборка  $X_2$  принадлежит  $A_2$ ,  $B_2$  или  $C_2$ , то делается соответственно один из трех выводов — «имеется сигнал», «нет сигнала», «надо продолжать испытания».

Дальнейшие задания областей надо продолжать аналогичным образом. Если на  $n$ -м шаге выбраны области  $A_n$ ,  $B_n$  и  $C_n$ , то пространство выборок  $S_{n+1}$  для следующего шага состоит из тех выборок  $X_{n+1} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ , для которых  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  отнесено к  $C_n$ . Тогда множество  $S_{n+1}$  дает три области для  $(n+1)$ -го шага —  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$  и  $C_{n+1}$ .

Если выбрана целая последовательность областей:

$$(A_1, B_1, C_1);$$

$$(A_2, B_2, C_2);$$

$$\vdots$$

$$(A_n, B_n, C_n)$$

$$\vdots$$

то определен «критерий последовательного анализа». Это не означает, конечно, что такой критерий обязательно будет очень выгодным. Однако среди возможных способов выбора последовательности областей, а значит и критериев последовательного анализа, можно найти наиболее выгодные.

### 3. Вероятности, связанные с системой последовательного анализа

Если  $Q_n$  — область, соответствующая  $n$ -му шагу испытаний, то величины <sup>1</sup>

$$P_{\text{ш}}(Q_n) = \int_{Q_n} f_{\text{ш}}(X_n) dX_n \quad (29)$$

<sup>1</sup> Обозначение  $\int_{Q_n}$  показывает, что интегрирование проводится по всем точкам из  $Q_n$ .

и

$$P_{C\text{Ш}}(Q_n) = \int_{Q_n} f_{C\text{Ш}}(X_n) dX_n$$

являются условными вероятностями того, что  $n$ -мерная выборка  $X_n$  отнесена к области  $Q_n$ . Особенно важны следующие условные вероятности:

1) Условные вероятности ошибки на  $n$ -м шагу.

Если выбран ансамбль Ш, то вероятность того, что случайная переменная  $X_n$  отнесена к  $A_n$ , равна  $P_{\text{Ш}}(A_n)$ . Это — условная вероятность ложной тревоги.

Если выбран ансамбль С+Ш, то вероятность того, что случайная переменная  $X_n$  отнесена к  $B_n$ , равна  $P_{C+\text{Ш}}(B_n)$ . Это — условная вероятность пропуска.

2) Условные вероятности ошибки во всей системе анализа.

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\text{Ш}}(A_n) \quad (30)$$

— условная вероятность ложной тревоги  
и

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} P_{C+\text{Ш}}(B_n) \quad (31)$$

— условная вероятность пропуска представляют собой просто суммы соответствующих вероятностей ошибок по всем испытаниям.

3) Условные вероятности окончания испытаний на  $n$ -м шагу, равные:

$$T_{\text{Ш}}^n = P_{\text{Ш}}(A_n) + P_{\text{Ш}}(B_n) \quad (32)$$

и

$$T_{C+\text{Ш}}^n = P_{C+\text{Ш}}(A_n) + P_{C+\text{Ш}}(B_n). \quad (33)$$

Эти равенства могут быть оправданы при помощи простых соображений. Испытания могут окончиться на  $n$ -м шаге только в случае, когда выборка величины  $X_n$  отнесена или к  $A_n$ , или к  $B_n$ . Вероятность этого события равна сумме вероятностей составляющих событий, которые взаимно



исключают друг друга, так как  $X_n$  может быть отнесена не более, чем к одному событию из области  $A_n$  или  $B_n$ .

4) Условные вероятности того, что вся система испытаний когда-нибудь закончится, равные:

$$T_{\text{ш}} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\text{ш}}^n \quad (34)$$

и

$$T_{\text{с+ш}} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\text{с+ш}}^n. \quad (35)$$

#### 4. Среднее число испытаний

Введены две новые величины. Особенность последовательного анализа состоит в том, что он позволяет раньше придти к решению, если данные процесса выбора случайно окажутся достаточно характерными. Значит, можно ожидать, что в среднем при удачно выбранной системе последовательного анализа испытания окончатся раньше, чем при любом обычном критерии. Следовательно, является важным получить выражения для среднего значения номера шага окончания испытаний. Аналогично предыдущему вводим две величины: одну — условную относительно ансамбля Ш, другую — условную относительно ансамбля С+Ш. Они определяются как

$$E_{\text{ш}} = \sum_{n=1}^{\infty} n T_{\text{ш}}^n \quad (36)$$

и

$$E_{\text{с ш}} = \sum_{n=1}^{\infty} n T_{\text{с ш}}^n. \quad (37)$$

Буква  $E$  означает „математическое ожидание“. Величины  $E_{\text{ш}}$  и  $E_{\text{с ш}}$  называются средним числом испытаний. Грубо говоря, смысл этих формул такой: каждое значение  $n$ , которое может принять переменная „номер последнего испытания“ берется с весом, равным (условной) вероятности того, что переменная приняла это значение.

Следует особо подчеркнуть, что среднее число испытаний—это именно среднее значение. При реальном примене-

нии последовательного анализа может случиться, что число испытаний иногда будет меньше, чем среднее число выборок, но оно может случайно оказаться и гораздо больше. Любой критерий последовательного анализа, для которого среднее число испытаний бесконечно окажется бесполезным для приложений. Поэтому будем рассматривать только критерии с конечным средним числом испытаний. Предположив это,<sup>1</sup> можно показать, что  $T_{\text{ш}} = T_{\text{сш}} = 1$ , так что испытания наверняка оканчиваются (в вероятном смысле). С другой стороны, из того, что  $T_{\text{ш}} = T_{\text{сш}} = 1$  не всегда следует, что среднее число испытаний конечно. Такая ситуация означает только, что при каждом применении критерия последовательного анализа число испытаний будет наверняка конечно, но среднее число шагов до окончания испытаний может оказаться сколь угодно большим, если повторять применение системы достаточно большое число раз.

## 5. Критерий последовательного анализа, основанный на коэффициенте правдоподобия

Было показано, что среди непоследовательных критериев, использующих конечные выборки, наилучший критерий задается коэффициентом правдоподобия. Поэтому полезно ввести коэффициент правдоподобия для каждого шага бесконечной последовательности испытаний. Коэффициент правдоподобия  $l(X_n)$  для  $n$ -го шага определяется как отношение  $f_{\text{сш}}(X_n)/f_{\text{ш}}(X_n)$ . Оптимальный критерий для конечного числа испытаний состоит в выделении всех тех выборок  $X$ , для которых  $l(X)$  больше или равно некоторому действительному числу. Тем же способом можно определить и последовательный критерий  $(A_n, B_n, C_n)$ , а именно, для каждого шага выбираем два числа  $a_n$  и  $b_n$ ,  $b_n \leq a_n$ . Тогда получаем следующий критерий (определяемый числами  $a_n$  и  $b_n$ ): к  $A_n$  относятся все выборки  $X_n$  из совокупности выборок  $S_n$ , для которых  $l(X_n) \geq a_n$ . К  $B_n$  относятся все выборки  $X_n$  из совокупности  $S_n$ , для которых  $l(X_n) \leq b_n$ . К  $C_n$  относятся все выборки  $X_n$  из совокупности  $S_n$ , для которых  $b_n < l(X_n) < a_n$ .

<sup>1</sup> Напомним, что процесс выбора не приводит обязательно к независимости  $X_i$

Если для построенного таким путем критерия выполняется требование ограниченности среднего числа выборов, то эта система последовательного анализа называется „системой, основанной на коэффициенте правдоподобия“.

## 6. Оптимальные системы последовательного анализа

Обычно [Л.8] определяют оптимальную систему последовательного анализа как систему такую, что средние числа испытаний  $E_{\text{ш}}$  и  $E_{\text{с ш}}$  минимальны по сравнению со всеми другими последовательными критериями с теми же вероятностями ошибок  $F$  и  $M$ .

В дополнение к формулам подраздела 4 имеются другие формулы [Л.9] для среднего числа выборов:

$$E_{\text{ш}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} P_{\text{ш}}(C_i) \quad (38)$$

и

$$E_{\text{с ш}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} P_{\text{с ш}}(C_i). \quad (39)$$

Таким образом, если совокупность последовательно применяемых критериев ( $A_n^*$ ,  $B_n^*$ ,  $C_n^*$ ) образует оптимальный критерий последовательного анализа, то ее оптимальный характер гарантируется выполнением неравенств

$$\sum P_{\text{ш}}(C_i^*) \leq \sum P_{\text{ш}}(C_i) \quad (40)$$

и

$$\sum P_{\text{с ш}}(C_i^*) \leq \sum P_{\text{с ш}}(C_i) \quad (41)$$

для любой другой совокупности последовательно применяемых критериев ( $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ) с такими же вероятностями ошибок, т. е. с

$$\sum P_{\text{ш}}(A_i^*) = \sum P_{\text{ш}}(A_i) \quad (42)$$

и

$$\sum P_{\text{с ш}}(B_i^*) = \sum P_{\text{с ш}}(B_i). \quad (43)$$

Проблема конструирования оптимального последовательного критерия трудна, так как равенства (42) и (43) могут удовлетворяться даже тогда, когда нет почленных соотношений между последовательностями  $\{P_{\text{ш}}(C_i^*)\}$  и  $\{P_{\text{ш}}(C_i)\}$ .

Вальд предлагал в качестве оптимальных критерии, в которых каждая из последовательностей  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  является постоянной, т. е.  $a_1 = a_n$  и  $b_1 = b_n$  для всех  $n$ . Кроме того, и Вальд и Вольфовиц [Л.10] доказали, что эти критерии оптимальны, если плотности для последовательных шагов независимы, что выполняется, например, в случае, когда и „шум“, и „сигнал плюс шум“ являются чисто случайными. Однако эта „случайность“ не имеет места во многих приложениях теории обнаружения сигнала, по крайней мере в том смысле, что не удовлетворяются условия Вальда и Вольфовица.

Рассмотрим критерий для фиксированного числа испытаний, такой, как мы рассматривали в разделе II, с вероятностями ошибок  $F$  и  $M$ . Хотя оптимальная система последовательного анализа с такими же вероятностями ошибок в среднем требует меньше времени, она имеет тот недостаток, что здесь иногда может понадобиться гораздо больше времени, чем при критерии с фиксированным числом испытаний. В беседе с авторами профессор Корнуэльского университета Марк Кац высказал соображение о том, что дисперсия случайного числа испытаний может быть настолько большой, что сделает последовательный анализ непригодным для обнаружения сигнала. Это обстоятельство, несомненно, нужно учесть перед тем, как окончательно решить, имеет ли последовательный анализ преимущества по сравнению с критерием, основанным на фиксированном интервале наблюдения. Однако трудно оценить дисперсию случайного числа испытаний. Поэтому электронный имитатор, строящийся в Мичиганском университете, будет имитировать оба типа критериев и выдавать данные для построения РХП для обоих типов критериев, а также для изучения распределения числа (последовательных) испытаний<sup>1</sup>.

#### IV. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ

##### 1. Введение

Основной вывод, вытекающий из общей теории обнаружения сигнала, изложенной в разделе II настоящей статьи, состоит в том, что приемник, вычисляющий для

<sup>1</sup> Для дальнейшего изучения теории обнаружительных устройств, построенных по методу последовательного анализа, см. работу Миддлтона и Бугганга (Trans. IRE JT, 1955, № 3).

Параграфы раздела IV	Описание ансамбля сигналов	Применение
1	Сигнал известен точно <sup>1</sup>	Когерентный локатор. Цель известной дальности и характера
2	Сигнал известен <sup>1</sup> с точностью до фазы колебаний высокой частоты	Обычный импульсный локатор без интегрирования. Цель известной дальности и характера
3	Сигнал — выборка белого гауссова шума	Обнаружение шумоподобных сигналов; обнаружение звуков речи в гауссовом шуме
4	Напряжение на выходе детектора широкополосного приемника	Обнаружение импульсов при известном времени их начала (таких, как импульсы от радиолокационного маяка) при помощи детекторных приемников или других широкополосных приемников
8	Случай радиолокатора (пакет некогерентных импульсов)	Обычный импульсный локатор с интегрированием. Цель известной дальности и характера
10	Один из $M$ -ортогональных сигналов (сигнал известен)	Когерентный локатор, цель находится в одном из конечного числа (неперекрывающихся) положений
11	Один из $M$ -ортогональных сигналов; сигнал известен с точностью до фазы колебаний высокой частоты	Обычный импульсный локатор без интегрирования. Цель может появиться в одном из конечного числа непрекращающихся положений

<sup>1</sup> Наше изложение этих двух важнейших случаев основывается на работе Вудворда и Девиса, но здесь изложение ведется в терминах коэффициента правдоподобия, и поэтому оно применимо как к приемнику, основанному на рассматриваемом критерии, так и к приемнику, связанному с апостериорными вероятностями. В этих первых двух случаях получены решения для более общей задачи, когда шум гауссов, но имеет произвольный спектр [Л. 11, 12]. Такое решение требует использования бесконечной системы выбора и значительно более сложно, чем соответствующие результаты настоящей статьи.

каждого входного сигнала коэффициент правдоподобия, является оптимальным для обнаружения сигнала в шуме.

Цель раздела IV — рассмотреть несколько различных ансамблей сигналов с ограниченным по полосе белым гауссовым шумом. Для каждого случая обсуждается возможная схема приемника. Однако основное ударение делается на получение вероятности обнаружения и вероятности ложной тревоги и, следовательно, на оценках характеристик оптимального приемника для различных случаев.

Представленные здесь случаи выбраны среди простейших задач обнаружения сигнала, хорошо описывающих практические ситуации. Они перечислены в таблице вместе с примерами технических задач, где они находят себе применение. В последних двух случаях может меняться неопределенность в сигнале; на них частично разъясняется связь между неопределенностью и возможностью обнаружения сигнала. Вариации представленных примеров подсказывают методы решения других относительно простых проблем обнаружения сигнала, а также дают некоторый подход к проблемам, слишком сложным для прямого решения.

Читателю легче будет изучать метод коэффициента правдоподобия, если он будет помнить связь между устройством оптимального приемника и коэффициентом правдоподобия. В случае системы с оптимальным критерием оператор скажет, что имеется сигнал, если коэффициент правдоподобия выше определенного уровня  $\beta$ . Он скажет, что имеется только шум, если коэффициент правдоподобия ниже  $\beta$ . Каждому рабочему уровню  $\beta$  соответствует вероятность ложной тревоги и вероятность правильного обнаружения. Вероятность ложной тревоги — это вероятность того, что коэффициент правдоподобия  $l(X)$  больше, чем  $\beta$ , если сигнал не послан; она задается по определению функцией распределения  $F_{\text{ш}}(\beta)$ . Аналогично распределение  $F_{\text{сш}}(\beta)$  задает вероятность того, что  $l(X)$  больше, чем  $\beta$ , если имеется сигнал плюс шум и, следовательно,  $F_{\text{сш}}(\beta)$  — вероятность правильного обнаружения.

## 2. Гауссов шум

В дальнейшем будем предполагать, что напряжение на входе приемника определено на конечном интервале наблюдения  $0 < t < T$  и что это напряжение ограничено по полосе. Используя систему дискретного представления  $S$  (разделы I—II), любое такое напряжение на входе  $x(t)$  можно восстановить по выборочным значениям этой функции, заданным в точках интервала наблюдения, отстоящих друг от друга на расстоянии  $\frac{1}{2WT}$ , а именно:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2WT} x_k \Psi_k(t), \quad (44)$$

где

$$\Psi_k(t) = \frac{\sin \pi 2WT \left( \frac{t}{T} - \frac{k}{2WT} \right)}{2WT \sin \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{k}{2WT} \right)}$$

и

$$x_k = x \left( \frac{k}{2W} \right). \quad (45)$$

Поэтому напряжение на входе задается выборкой  $(x_1, x_2, \dots, x_{2WT})$ . В разделе IV буква  $x$  будет употребляться и для обозначения функции напряжения на входе  $x(t)$ , и выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_{2WT})$ . Аналогично сигнал  $s(t)$  или просто  $s$  можно задать выборкой  $(s_1, \dots, s_{2WT})$ , где  $s_k = s(k/2W)$ .

Для входного напряжения должно быть определено распределение вероятностей. Распределение для напряжения на входе должно быть задано как для того случая, когда имеется чистый шум, так и для того случая, когда имеется сигнал плюс шум. Распределение вероятностей задается при помощи плотностей вероятностей  $f_{C+\text{ш}}(x)$  и  $f_{\text{ш}}(x)$  для напряжения на входе  $x$ .

Предполагается, что когда имеется чистый шум, то плотность вероятности имеет вид

$$f_{\text{ш}}(x) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp \left[ -\frac{x_i^2}{2N} \right] \right\} \quad (46)$$

или

$$f_{\text{ш}}(x) = \left( \frac{1}{2\pi N} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right],$$

где  $n$  равно  $2WT$  и  $N$  — мощность шума. Легко проверить, что эта плотность вероятностей описывает шум с амплитудой, имеющей в каждый момент времени гауссово распределение. Этот шум стационарен, и каждая его компонента Фурье имеет одну и ту же среднюю мощность. Та-

ким образом, можно его назвать «стационарным ограниченным по полосе белым гауссовым шумом».

Функции  $\Psi_k(t)$  ортогональны и соответствуют энергии, равной  $1/2W$ , поэтому

$$\sum x_i^2 = 2W \int_0^T [x(t)]^2 dt, \quad (47)$$

так что

$$f_{\text{ш}}(x) = \left( \frac{1}{2\pi N} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T x(t)^2 dt \right], \quad (48)$$

где  $N_0 = \frac{N}{W}$  — мощность шума на единицу полосы.

В практических применениях чаще задается информация о сигналах, появляющихся на входе приемника при отсутствии шума, а не плотности вероятности для сигнала плюс шум. В этих случаях  $f_{\text{сш}}(x)$  должно быть вычислено исходя из этой информации и функции плотности вероятностей  $f_{\text{ш}}(x)$  для шума. Предполагается, что шум и сигналы независимы.

Если на входе приемника принята сумма сигнала и шума, то напряжение на входе  $x(t)$  можно разложить на некоторый сигнал  $s(t)$  и шум  $n(t) = x(t) - s(t)$ . Плотность вероятности для напряжения  $x$  в случае сигнал плюс шум, таким образом, равна плотности вероятности совместного осуществления  $s(t)$  и  $x(t) - s(t)$ , усредненной по всем значениям  $s(t)$ . Если распределение для сигнала описывается функцией плотности  $f_{\text{ш}}(s)$ , то

$$f_{\text{с+ш}}(x) = \int f_{\text{ш}}(x-s) f_{\text{с}}(s) ds, \quad (49)$$

где интегрирование производится по области изменения выборочной переменной  $s$ . В более общем виде, используемом, когда вероятность сигнала описывается вероятностной мерой  $P_{\text{с}}$ , получаем формулу

$$f_{\text{с+ш}}(x) = \int f_{\text{ш}}(x-s) dP_{\text{с}}(s). \quad (50)$$

Это интеграл Лебега; он описывает, по существу, «осреднение»  $f_{\text{ш}}(x-s)$  по всем значениям  $s$  с весом задаваемым



мого вероятностями  $P_C$ . Подставляя значение  $f_{\text{ш}}(x)$  из (46), получаем:

$$\begin{aligned} f_{\text{сш}}(x) &= \int f_{\text{ш}}(x-s) dP_C(s) = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^{\frac{n}{2}} \times \\ &\times \int \exp\left[-\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^n (x_i - s_i)^2\right] dP_C(s) = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^{\frac{n}{2}} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^n x_i^2\right] \int \exp\left[-\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^n s_i^2\right] \exp\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i s_i\right] dP_C(s); \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} f_{\text{сш}}(x) &= \int f_{\text{ш}}(x-s) dP_C(s) = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^{\frac{n}{2}} \int \exp\left[-\frac{1}{N_0} \times \right. \\ &\times \int_0^T [x(t) - s(t)]^2 dt \left. \right] dP_C(s) = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2 dt\right] \times \\ &\times \int \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T s^2 dt\right] \exp\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x s dt\right] dP_C(s). \end{aligned} \quad (52)$$

$$\text{Множитель } \exp\left[-(1/N_0) \int_0^T x^2(t) dt\right] = \exp\left[-(1/2N) \sum x_i^2\right]$$

можно вынести за знак интеграла, так как он не зависит от переменной интегрирования  $S$ . Заметим, что интеграл

$$\int_0^T s(t)^2 dt = \frac{1}{2W} \sum s_i^2 = E(s) \quad (53)$$

представляет энергию<sup>1</sup> ожидаемого сигнала, тогда как

$$\int_0^T x(t) s(t) dt = \frac{1}{2W} \sum x_i s_i \quad (54)$$

задает взаимную корреляцию между ожидаемым сигналом и напряжением на входе приемника.

<sup>1</sup> Предполагается, что сопротивление цепи равно 1 ом.

### 3. Коэффициент правдоподобия в случае гауссова шума

Коэффициент правдоподобия определяется как отношение плотностей вероятностей  $f_{\text{сш}}(x)$  и  $f_{\text{ш}}(x)$ . В случае белого гауссова шума оно получается делением равенств (51) и (52) на (46) и (48) соответственно:

$$l(x) = \int \exp \left[ -\frac{E(s)}{N_0} \right] \exp \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i s_i \right] dP_C(s) \quad (55)$$

или

$$l(x) = \int \exp \left[ -\frac{E(s)}{N_0} \right] \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t) dt \right] dP_C(s). \quad (56)$$

Если сигнал точно известен или полностью определен, то вероятность этого сигнала равна 1, и вероятность любой совокупности возможных сигналов, не содержащей  $s$ , равна нулю. Тогда коэффициент правдоподобия равен:

$$l_C(x) = \exp \left[ -\frac{E(s)}{N_0} \right] \exp \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i s_i \right] \quad (57)$$

или

$$l_C(x) = \exp \left[ -\frac{E(s)}{N_0} \right] \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t) dt \right]. \quad (58)$$

Формулы (55) и (56) для коэффициента правдоподобия показывают, что  $l(x)$  есть взвешенное среднее функции  $l_C(x)$  по множеству всех сигналов, т. е.

$$l(x) = \int l_C(x) dP_C(s). \quad (59)$$

Устройство, вычисляющее отношение правдоподобия  $l(x)$  для каждого значения входного напряжения  $x$ , является оптимальным приемником. Уравнение (58) подсказывает один из способов построения такого устройства: во-первых, должно вычисляться индивидуальное отношение правдоподобия  $l_C(x)$  для каждого возможного ожидаемого сигнала  $s$ , затем эти числа усредняются. Так как множество ожидаемых сигналов часто является бесконечным, то этот прямой метод обычно практически бесполезен. В специальных случаях можно получить при помощи математических преобразований уравнения (58) другой

вид для  $l(x)$ , и эти формулы могут быть использованы как схемы для построения практически реализуемых устройств, более простых, чем устройства, задаваемые прямым методом. Это, по существу, и сделано в следующих параграфах.

Если функция распределения  $P_C(s)$  зависит от разных параметров, таких, как фаза высокочастотных колебаний, энергия сигнала или частота, и если распределения этих параметров независимы, то выражение для коэффициента правдоподобия может быть несколько упрощено. Обозначим эти параметры через  $r_1, r_2, \dots, r_n$  и соответствующие плотности вероятностей через  $f_1(r_1), f_2(r_2), \dots, f_n(r_n)$ , тогда

$$dP_C(s) = f_1(r_1) \dots f_n(r_n) dr_1, \dots, dr_n.$$

Отношение правдоподобия принимает вид

$$\begin{aligned} l(x) &= \int \dots \int l_C(x) f_1(r_1) \dots f_n(r_n) dr_1, \dots, dr_n = \\ &= \int \{f_n(r_n) \dots [\int f_1(r_1) l_C(x) dr_1] \dots\} dr_n. \end{aligned} \quad (60)$$

Следовательно, отношение правдоподобия может быть найдено последовательным усреднением  $l_C(x)$  по этим параметрам.

#### 4. Случай точно известного сигнала

Коэффициент правдоподобия для случая точно известного сигнала уже был дан в § 3:

$$l(x) = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] \exp \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i s_i \right]; \quad (61)$$

$$l(x) = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t) dt \right]. \quad (62)$$

В качестве первого шага для отыскания функции распределения для  $l(x)$  удобно сначала найти распределение для  $(1/N) \sum x_i s_i$  в случае, когда имеется чистый шум. Тогда входной сигнал  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  должен быть белым гауссовым шумом. Из равенства (46) можно вывести, что каждое из  $x_i$  имеет нормальное распределение со средним, равным нулю, и дисперсией  $N = WN_0$ , и что  $x_i$  независимы. Так

как  $s_i$  — константы, зависящие от обнаруживаемого сигнала  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , то каждое слагаемое  $(x_i s_i)/N$  имеет нормальное распределение со средним значением, равным  $s_i/N$ , умноженным на среднее значение  $x_i$ , и дисперсией, равной произведению  $(s_i/N)^2$  на дисперсию  $x_i$ , так что среднее и дисперсия этого слагаемого равны соответственно нулю и  $s_i^2/N$ . Так как  $x_i$  независимы, то независимы и слагаемые  $(s_i x_i)/N$ , каждое из этих слагаемых нормально распределено, и поэтому их сумма тоже нормально распределена со средним, равным сумме средних, т. е. нулю, и дисперсией, равной сумме дисперсий,

$$\sum \frac{s_i^2}{N} = \frac{2WE(s)}{N} = \frac{2E}{N_0} = 2 \left[ \frac{\text{энергия сигнала}}{\text{мощность шума на единицу полосы}} \right]. \quad (63)$$

Таким образом, в случае чистого шума распределение для  $(1/N) \sum x_i s_i$  нормально со средним, равным нулю и дисперсией  $2E/N_0$ .

Из (61) получаем, что

$$l(x) = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} + \frac{1}{N} \sum x_i s_i \right]. \quad (64)$$

Определим  $\alpha$  по формуле

$$\beta = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} + \alpha \right], \text{ или } \alpha = \frac{E}{N_0} + \ln \beta. \quad (65)$$

Неравенства  $l(x) \geq \beta$  и  $(1/N) \sum x_i s_i \geq \alpha$  эквивалентны и поэтому, используя распределение для  $\frac{1}{N} \sum x_i s_i$ , получаем:

$$F_{\text{ш}}(\beta) = \sqrt{\frac{N_0}{4\pi E}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{N_0}{2E} y^2 \right] dy. \quad (66)$$

Распределение для случая „сигнал плюс шум“ можно найти, используя соотношение (19), согласно которому

$$\left\{ \frac{dP_{\text{сш}}[A(\beta)]}{dP_{\text{ш}}[A(\beta)]} \right\}_{\text{при } \beta=\beta_0} = \beta_0. \quad (67)$$

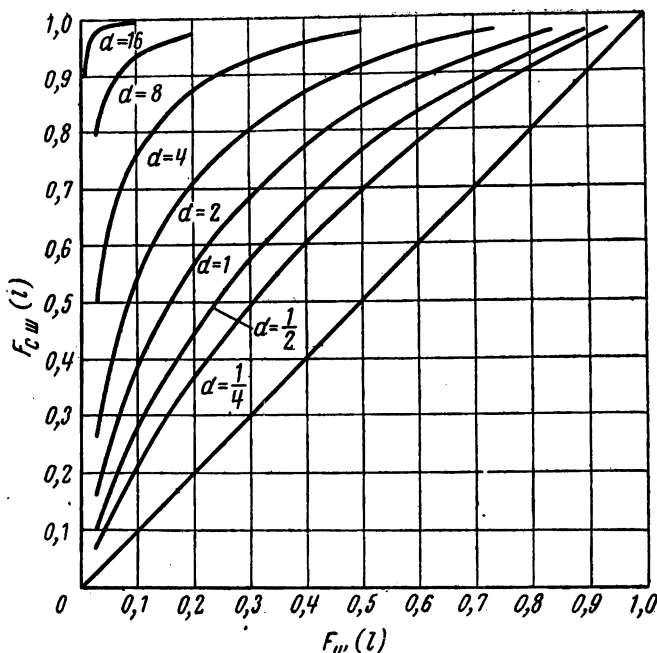


Рис. 2. Рабочие характеристики приемника. Сигнал известен полностью.

ln  $l$  имеет нормальное распределение  $\sigma_{\text{ш}}^2 = \sigma_{\text{сш}}^2$

$$(M_{\text{сш}} - M_{\text{ш}})^2 = d\sigma_{\text{ш}}^2.$$

Так как эти вероятности равны соответствующим функциям распределения коэффициента правдоподобия, это же соотношение можно переписать как

$$dF_{\text{сш}}(\beta) = \beta dF_{\text{ш}}(\beta). \quad (68)$$

Дифференцируя (66):

$$dF_{\text{ш}}(\beta) = -\sqrt{\frac{N_0}{4\pi E}} \exp\left(-\frac{N_0\alpha^2}{4E}\right) d\alpha \quad (69)$$

и комбинируя (65), (68) и (69), получаем:

$$dF_{\text{сш}}(\beta) = -\sqrt{\frac{N_0}{2\pi E}} \exp\left[-\frac{E}{N_0} + \alpha - \frac{N_0\alpha^2}{4E}\right] d\alpha. \quad (70)$$

Следовательно,

$$F_{\text{сш}}(\beta) = \sqrt{\frac{N_0}{4\pi E}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{N_0}{4E}\left(y - \frac{2E}{N_0}\right)^2\right] dy. \quad (71)$$

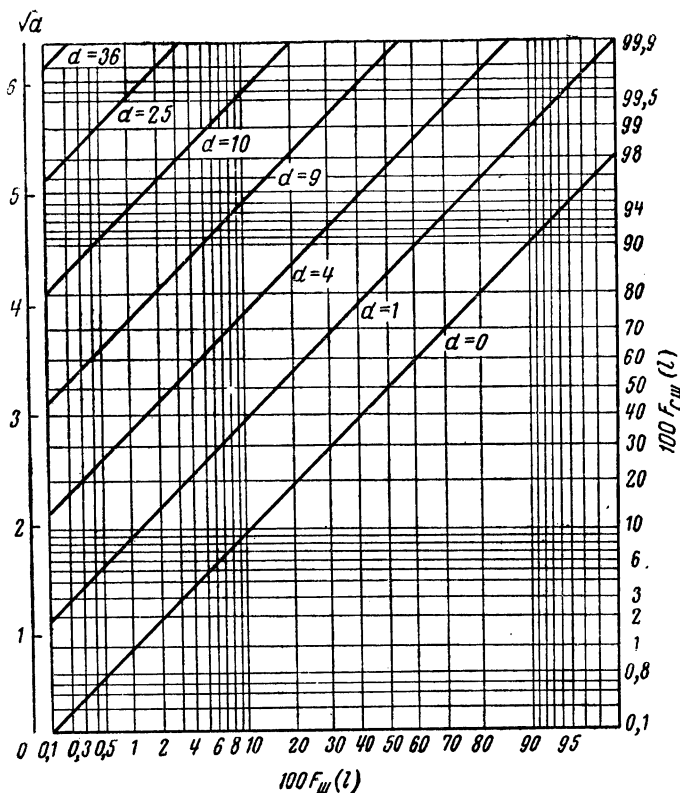


Рис. 3. Рабочие характеристики приемника. Сигнал известен полностью.

$\ln l$  имеет нормальное распределение  $\sigma_{\text{Ш}}^2 = \sigma_{\text{СШ}}^2$

$$(M_{\text{СШ}} - M_{\text{Ш}})^2 = d\sigma_{\text{Ш}}^2.$$

Итак,  $\alpha$ , а поэтому и  $\ln \beta$  имеют нормальные распределения как в случае сигнал плюс шум, так и в случае чистого шума, дисперсия каждого из этих распределений есть  $\frac{2E}{N_0}$ , разность средних значений равна  $\frac{2E}{N_0}$ .

Кривые рабочих характеристик приемника на рис. 2 и 3\*

\* На рис. 3 кривые рабочих характеристик приемника вычерчены на „дважды вероятной“ сетке. На этой бумаге обе оси линейны в масштабе, задаваемом функцией ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt;$$

это делает рабочие характеристики приемника прямыми линиями.

вычерчены для случая, когда  $\ln l$  распределен нормально с одной и той же дисперсией как для чистого шума, так и для сигнала и шума. Параметр  $d$  на этом рисунке равен квадрату разности средних, деленному на дисперсию. Эти рабочие характеристики приемника применяются в случае точно известного сигнала с  $d = \frac{2E}{N_0}$ .

Равенство (62) описывает идеальный приемник для этого случая. Важнейшей операцией в приемнике является получение величины, характеризующей взаимную корреляцию напряжений  $x(t)$  и  $s(t)$ ,  $\int_0^t s(t) x(t) dt$ . Другие опе-

рации — умножение на постоянный коэффициент, прибавление постоянного слагаемого и взятие экспоненциальной функции могут быть выполнены просто путем калибровки выходного напряжения приемника. Электронные способы получения взаимной корреляции были развиты в [Л. 13].

Если сигнал имеет простой вид, то возможен следующий способ получения этой взаимной корреляции [Л. 6], [Л. 7]. Пусть  $h(t)$  — реакция фильтра на импульс. Реакция фильтра  $l_0(t)$  на напряжение  $x(t)$  равна, тогда

$$l_0(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (72)$$

Если импульсная переходная характеристика фильтра удовлетворяет условию

$$h(t) = s(T - t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (73)$$

$h(t) = 0$  в остальных случаях, тогда

$$l_0(T) = \int_0^T x(\tau) s(\tau) d\tau, \quad (74)$$

так что реакция этого фильтра в момент  $T$  есть искомая взаимная корреляция. Итак, идеальный приемник состоит просто из фильтра и усилителей.

Следует заметить, что этот фильтр тот же с точностью до постоянного множителя, как и фильтр, максимизирующий отношение пикового сигнала к средней мощности шума [Л. 14].

## 5. Сигнал известен с точностью до фазы несущей

Рассматриваемый в этом параграфе ансамбль сигналов состоит из всех сигналов, имеющих заданную амплитудную и частотную модуляцию и отличающихся только начальной фазой; предполагается, что все фазы равновероятны:

$$s(t) = f(t) \cos [\omega t + \Phi(t) - \theta]. \quad (75)$$

Так как неизвестный фазовый угол  $\theta$  имеет равномерное распределение, то

$$dP_c(\theta) = \frac{1}{2\pi} d\theta. \quad (76)$$

Коэффициент правдоподобия можно найти, применяя соотношение (56), и так как энергия сигнала  $E(s)$  одинакова для всех значений фазы несущей  $\theta$ , то

$$l(x) = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] \int \exp \left[ \frac{1}{N} \sum x_i s_i \right] dP_c(s). \quad (77)$$

Полезно разложить  $s$  в сумму с коэффициентами  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ :

$$s(t) = f(t) \cos [\omega t + \Phi(t)] \cos \theta + f(t) \sin [\omega t + \Phi(t)] \sin \theta \quad (78)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum x_i s_i &= \cos \theta \frac{1}{N} \sum x_i f(t_i) \cos [\omega t_i + \Phi(t_i)] + \\ &+ \sin \theta \frac{1}{N} \sum x_i f(t_i) \sin [\omega t_i + \Phi(t_i)]^*. \end{aligned} \quad (79)$$

Мы хотим проинтегрировать по  $\theta$ , чтобы найти коэффициент правдоподобия. Для этого проще всего ввести параметры  $(r, \theta_0)$ , такие, что

$$\frac{1}{N} r \cos \theta_0 = \frac{1}{N} \sum x_i f(t_i) \cos [\omega t_i + \Phi(t_i)]; \quad (80)$$

$$\frac{1}{N} r \sin \theta_0 = \frac{1}{N} \sum x_i f(t_i) \sin [\omega t_i + \Phi(t_i)]$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{N} \sum x_i s_i = \frac{r}{N} \cos (\theta - \theta_0). \quad (81)$$

---

\*  $t_i$  означает  $i$ -й выборочный момент, т. е.  $t_i = i/2W$ .



Используя эту формулу, получаем коэффициент правдоподобия

$$l(x) = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{r}{N} \cos(\theta - \theta_0) \right] \frac{d\theta}{2\pi} = \\ = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] I_0 \left( \frac{r}{N} \right), \quad (82)$$

где  $I_0$  — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Функция  $I_0$  является монотонно возрастающей функцией, и поэтому отношение правдоподобия будет больше числа  $\beta$  тогда и только тогда, когда  $r/N$  больше некоторого числа, соответствующего числу  $\beta$ .

В предыдущем параграфе было показано, что сумма  $(1/N) \sum x_i s_i$  имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $2E/N_0$ , если входное напряжение  $x(t)$  представляет собой чистый шум;  $E$  есть энергия точно известного сигнала  $s(t)$ , а  $N_0$  — мощность шума на единицу полосы. Так как  $f(t) \cos[\omega t + \Phi(t)]$  и  $f(t) \sin[\omega t + \Phi(t)]$  — точно известные сигналы, то и  $(r/N) \cos \Phi_0$  и  $(r/N) \sin \Phi_0$  имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $2E/N_0$ . Вероятность того, что в случае чистого шума величина

$$r/N = \sqrt{(r/N \cos \theta_0)^2 + (r/N \sin \theta_0)^2}$$

будет больше некоторого фиксированного значения, дается хорошо известным „хи-квадрат“ распределением с двумя степенями свободы  $K_2(\alpha^2)$ . Нормируем величину  $r/N$ , чтобы она имела нулевое среднее и единичную дисперсию, тогда

$$P_{\text{ш}} \left( \frac{r}{N} \sqrt{\frac{N_0}{2E}} \geq \alpha \right) = K_2(\alpha^2) = \exp \left[ -\frac{\alpha^2}{2} \right]^*. \quad (83)$$

Если  $\alpha$  определено из уравнения

$$\beta = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] I_0 \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \alpha \right), \quad (84)$$

то распределение для  $l(x)$  в случае одного шума имеет простой вид:

$$F_{\text{ш}}(\beta) = \exp \left[ -\frac{\alpha^2}{2} \right]. \quad (85)$$

---

\* Символ  $P(X \geq \alpha)$  обозначает вероятность того, что случайная величина  $X$  не меньше, чем постоянная  $\alpha$ .

Из (85) следует, что

$$dF_{\text{ш}}(\beta) = -\alpha \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2}\right] d\alpha. \quad (86)$$

Если в уравнении (68)

$$\beta dF_{\text{ш}}(\beta) = dF_{\text{сш}}(\beta) \quad (87)$$

заменить  $\beta$  на выражение (84), а  $dF_{\text{ш}}(\beta)$  — на выражение (86), то получим:

$$dF_{\text{сш}}(\beta) = -\exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] \alpha \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2}\right] J_0\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \alpha\right) d\alpha. \quad (88)$$

Интегрируя (88), находим:

$$F_{\text{сш}}(\beta) = \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] \int_{\alpha}^{\infty} \alpha \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2}\right] J_0\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \alpha\right) d\alpha. \quad (89)$$

Уравнения (85) и (89) задают рабочие характеристики приемника в параметрической форме, уравнение (84) дает соответствующие рабочим уровни [Л. 15]. Эти характеристики изображены на рис. 4 для некоторых из тех значений отношения энергии сигнала к мощности шума на единицу полосы, которые были использованы, когда фазовый угол был известен точно (рис. 2 и 3), так что сравнивая рис. 2 и 4, легко видеть эффект использования сведений о начальной фазе.

Если сигнал имеет достаточно простую форму, так что можно синтезировать фильтр, соответствующий ожидаемому сигналу при данной фазе колебаний высокой частоты  $\theta$ , как в случае точно известного сигнала, то нетрудно построить приемник, дающий коэффициент правдоподобия. Для простоты рассмотрим уравнения (75) только для амплитудно-модулированных сигналов ( $\Phi(t) = 0$ ). Положим  $\theta = 0$  (можно выбрать любую фазу). Тогда реакция фильтра на импульс

$$h(t) = f(T-t) \cos[\omega(T-t)] \quad 0 \leq t \leq T \quad (90)$$

$h(t) = 0$  в остальных случаях.

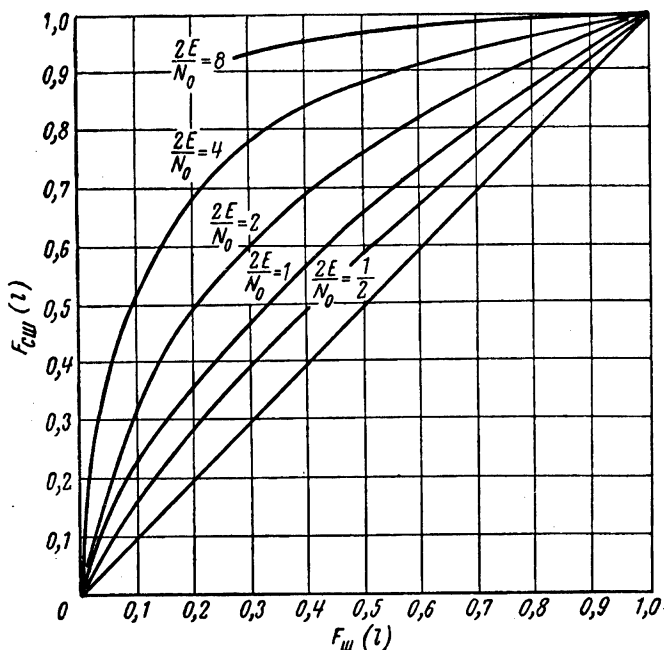


Рис. 4. Рабочие характеристики приемника. Сигнал известен с точностью до фазы колебаний высокой частоты.

Реакция фильтра на напряжение  $x(t)$  равна:

$$\begin{aligned}
 l_0(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \\
 &= \int_{t-T}^t x(\tau) f(\tau + T - t) \cos \omega(\tau + T - t) d\tau = \\
 &= \cos \omega(T - t) \int_{t-T}^t x(\tau) f(\tau + T - t) \cos \omega \tau d\tau - \\
 &\quad - \sin \omega(T - t) \int_{t-T}^t x(\tau) f(\tau + T - t) \sin \omega \tau d\tau. \quad (91)
 \end{aligned}$$

Огибающая на выходе фильтра равна квадратному корню из суммы квадратов интегралов<sup>1</sup>; эта огибающая в момент  $T$  пропорциональна  $r/N$ , так как

$$\left(\frac{r}{2W}\right)^2 = \left[ \int_0^T x(\tau) f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]^2 + \left[ \int_0^T x(\tau) f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]^2; \quad (92)$$

эту величину можно рассматривать как квадрат огибающей  $l_0(t)$  в момент  $T$ . Если входное напряжение  $x(t)$  проходит через фильтр, реакция которого на импульс дается уравнением (90), и далее через линейный детектор, то выходное напряжение будет равно  $(N_0/2) r/N$  в момент  $T$ . Так как коэффициент правдоподобия [уравнение (82)] есть известная монотонная функция от  $r/N$ , то выходное напряжение может быть калибровано так, чтобы оно задавало коэффициент правдоподобия для входного напряжения.

## 6. Сигнал, являющийся выборкой белого гауссова шума

Предположим, что значения напряжения сигнала в выборочных точках являются независимыми гауссовыми случайными величинами с нулевым средним и дисперсией  $S$  (мощность сигнала). Плотность вероятности для величины «сигнал плюс шум» также гауссова, так как «сигнал плюс шум» является суммой двух гауссовых случайных величин

$$f_{\text{сш}}(x) = \left( \frac{1}{2\pi(N+S)} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{N+S} \sum x_i^2 \right], \quad (93)$$

где  $n = 2WT$ .

Коэффициент правдоподобия равен:

$$l(x) = \left( \frac{N}{N+S} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum x_i^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{N+S} \sum x_i^2 \right]. \quad (94)$$

Для нахождения функции распределения величины  $l$  удобно ввести параметр  $\alpha$ , определяемый соотношением

$$\beta = \left( \frac{N}{N+S} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left( \frac{S}{N+S} \frac{\alpha^2}{2} \right). \quad (95)$$

Тогда условия  $l(x) \geq \beta$  и  $(1/N) \sum x_i^2 \geq \alpha^2$  эквивалентны.

<sup>1</sup> Если составляющие спектра для  $S(t)$  равны нулю на «нулевой» частоте и на всех частотах, больших или равных  $2\omega/2\pi$ , то можно показать, что эти интегралы не содержат частот, выше, чем  $\omega/2\pi$ .

В случае чистого шума величины  $x_i/\sqrt{N}$  имеют нулевое среднее и единичную дисперсию и независимы. Следовательно, вероятность того, что сумма квадратов этих величин превысит  $\alpha^2$ , представляется функцией „хи-квадрат“ распределения с  $n$  степенями свободы, т. е.

$$F_{\text{ш}}(\beta) = K_n(\alpha^2). \quad (96)$$

Аналогично в случае „сигнал плюс шум“ случайные величины  $x_i/\sqrt{N+S}$  имеют нулевое среднее и единичную дисперсию. Условия  $(1/N) \sum x_i^2 \geq \alpha^2$  и  $\left(\frac{1}{N+S}\right) \sum x_i^2 \geq \left(\frac{N}{N+S}\right) \alpha^2$  эквивалентны, это опять приводит к распределению „хи-квадрат“:

$$F_{\text{с ш}}(\beta) = K_n\left(\frac{N}{N+S} \alpha^2\right). \quad (97)$$

Для больших значений  $n$  распределение хи-квадрат является на конечном отрезке приблизительно нормальным; точнее [Л. 16] для  $\alpha^2 \gg 0$

$$F_{\text{ш}}(\beta) = K_n(\alpha^2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\alpha^2 - V_{2n-1}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} y^2\right] dy \quad (98)$$

и

$$F_{\text{с ш}}(\beta) = K_n\left(\frac{N}{N+S} \alpha^2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{2N\alpha^2}{N+S} - V_{2n-1}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} y^2\right] dy. \quad (99)$$

Если мощность сигнала мала по сравнению с мощностью шума, то величина  $\sqrt{\frac{N}{N+S}}$  близка к единице, и оба распределения имеют почти одинаковые дисперсии. Тогда и в этом случае можно использовать рис. 2 и 3, где  $d$  задается равенством

$$d = (2n - 1) \left(1 - \sqrt{\frac{N}{N+S}}\right)^2. \quad (100)$$

Для таких малых отношений сигнала к шуму и больших выборок имеется простое соотношение между отношением

сигнала к шуму, объемом выборки и индексом обнаружения  $d$ :

$$1 - \sqrt{\frac{N}{N+S}} \approx \frac{1}{2} \frac{S}{N} \quad \text{для} \quad \frac{S}{N} \ll 1, \quad (101)$$

$$d \approx \frac{nS^2}{2N^2}.$$

Два отношения сигнала к шуму  $(C/\text{Ш})_1$  и  $(C/\text{Ш})_2$  дают приблизительно одинаковые рабочие характеристики, если соответствующие объемы выборок  $n_1$  и  $n_2$  удовлетворяют соотношению

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_1^2}{\left(\frac{S}{N}\right)_2^2}. \quad (102)$$

Согласно уравнению (94) коэффициент правдоподобия есть монотонная функция от  $\sum x_i^2$ . Но на выходе квадратичного детектора

$$l_0(t) = \int_0^T [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2W} \sum x_i^2 \quad (103)$$

пропорционально сумме  $\sum x_i^2$ . Следовательно, выход квадратичного детектора может быть градуирован для получения коэффициента правдоподобия, и, значит, его можно в данном случае использовать в качестве оптимального приемника.

## 7. Видеоусилитель широкополосного приемника

В настоящем подразделе изучается устройство, представленное схематически на рис. 5. Предполагается, что сигналы и шум проходят полосовой фильтр и на выходе фильтра (точка  $A$  схемы) ограничены по спектру полосой ширины  $W$  при центральной частоте  $\omega/2\pi > W/2$ . Шум предполагается гауссовым с равномерным (в пределах полосы) спектром. Далее сигнал и шум проходят через линейный детектор. На выходе детектора возникает огибающая сигналов и шума, имеющихсся в точке  $A$ ; в точке  $B$  нельзя сделать никаких заключений относительно фазы принимаемого сигнала. Сигнал и шум в том виде, в каком они появляются в точке  $B$ , рассматриваются как принимае-

мые напряжения, и теория обнаружения сигнала применяется к напряжениям на входе видеоусилителя с целью установления наилучших параметров видеоусилителя. Математическое описание будет дано для шума и сигналов в том виде, в каком они появляются в точке *A*. Для точки *B* будут изучены огибающие, и для этих огибающих будут найдены отношение правдоподобия и его распределение.

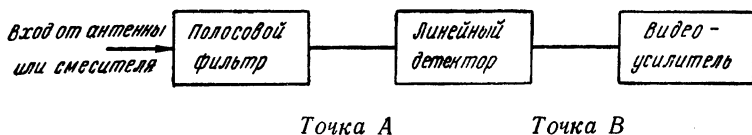


Рис. 5. Блок-схема широкополосного радиоприемника.

Здесь будет рассмотрен только случай, когда амплитуда сигнала в точке *A* является известной функцией времени.

Любая функция в точке *A* ограничена полосой ширины  $W$  при центральной частоте  $\omega/2\pi > W/2$ . Любую такую функцию  $f(t)$  можно разложить на сумму

$$f(t) = x(t) \cos \omega t + y(t) \sin \omega t, \quad (104)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  ограничены по полосе частотами не выше  $W/2$  и, значит, могут быть представлены в соответствии с системой дискретного представления  $C^*$ :

$$f(t) = \sum_i \left[ x\left(\frac{1}{W}\right) \Psi_i(t) \cos \omega t + y\left(\frac{1}{W}\right) \Psi_i(t) \sin \omega t \right]. \quad (105)$$

Амплитуда функции  $f(t)$  равна:

$$r(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}. \quad (106)$$

Таким образом, амплитуда для  $i$ -й выборки равна:

$$r\left(\frac{i}{W}\right) = r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}. \quad (107)$$

Угол

$$\Theta_i = \arctg \frac{y_i}{x_i} = \arccos \frac{x_i}{r_i} \quad (108)$$

\* Так как любая функция  $f(t)$  в точке *A* не имеет частот, больших, чем  $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) + \left(\frac{W}{2}\right)$ , то можно использовать обычную систему дискретного представления.

можно рассматривать как фазу  $f(t)$  для  $i$ -й выборки. Тогда для описания функции  $f(t)$  можно задавать  $r_i$  и  $\theta_i$  вместо  $x_i$  и  $y_i$ .

Обозначим через  $x_i$ ,  $y_i$  или  $r_i$ ,  $\theta_i$  выборочные значения входного напряжения приемника после фильтра (т. е. в точке  $A$  на рис. 5). Через  $a_i$ ,  $b_i$  или  $f_i$ ,  $\Phi_i$  обозначим выборочные значения сигнала в точке  $A$ , если бы шум полностью отсутствовал. Огибающая сигнала, а следовательно, и амплитуды выборочных значений  $f_i$  предполагаются известными. Обозначим через  $F_C(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n/2})$  функцию распределения фаз выборочных значений величин  $\Phi_i$ . Плотность вероятностей для входного напряжения в точке  $A$ , когда имеется белый гауссов шум и нет сигнала, равна при  $N = 2WT$ :

$$f_{\text{ш}}(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^{\frac{n}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2N} \left( \sum_{i=1}^{n/2} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n/2} y_i^2 \right) \right], \quad (109)$$

а в случае сигнал плюс шум равна:

$$f_{\text{сш}}(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^{\frac{n}{2}} \int_R \exp \left[ -\frac{1}{2N} \left( \sum_{i=1}^{n/2} (x_i - a_i)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{n/2} (y_i - b_i)^2 \right) \right] dP_C(a_i, b_i). \quad (110)$$

Если переписать уравнения (110) и (111) в терминах выборочных значений  $(r, \theta)$ , то получим:

$$f_{\text{ш}}(r, \theta) = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n/2} r_i \exp \left[ -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n/2} r_i^2 \right] \quad (111)$$

и

$$f_{\text{сш}}(r, \theta) = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n/2} r_i \int_R \exp \left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n/2} [r_i^2 + f_i^2 - \right. \\ \left. - 2r_i f_i \cos(\theta_i - \Phi_i)] \right\} dF_C(\Phi_1, \dots, \Phi_{n/2}). \quad (112)$$



Коэффициенты  $\prod r_i$  вводятся, так как они равны якобиану преобразования системы координат  $x, y$  в систему координат  $r, \theta$  [Л.16]\*.

Плотность вероятности для одного  $r$ , т. е. плотность для напряжения на выходе детектора, получается интегрированием по  $\theta$  совместной плотности для  $r$  и  $\theta$ :

$$f_{\text{ш}}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_{\text{ш}}(r_i, \theta_i) d\theta_1, d\theta_2, \dots, d\theta_{\frac{n}{2}}, \quad (113)$$

или

$$f_{\text{ш}}(r) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n/2} r_i \exp \left[ -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n/2} r_i^2 \right]$$

и

$$f_{\text{сш}}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_{\text{сш}}(r_i, \theta_i) d\theta_1, d\theta_2, \dots, d\theta_{\frac{n}{2}},$$

или

$$f_{\text{сш}}(r) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n/2} r_i \exp \left[ -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n/2} (r_i^2 + \right. \\ \left. + f_i^2) \right] \prod_{i=1}^{n/2} J_0 \left( \frac{r_i f_i}{N} \right) dF(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n), \quad (114)$$

или

$$f_{\text{сш}}(r) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n/2} r_i J_0 \left( \frac{r_i f_i}{N} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n/2} (r_i^2 + f_i^2) \right].$$

Отметим, что плотность вероятности для  $r$  совершенно не зависит от распределения величин  $\Phi_i$ ; вся информация о фазе сигналов потеряна.

Коэффициент правдоподобия для напряжения на входе видеоусилителя  $r(t)$  равен:

$$l(r) = \frac{f_{\text{сш}}(r)}{f_{\text{ш}}(r)} = \exp \left[ -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n/2} f_i^2 \right] \prod_{i=1}^{n/2} I_0 \left( \frac{r_i f_i}{N} \right); \quad (115)$$

\* Например, в двумерном случае  $f_{\text{ш}}(x, y) dx dy = f_{\text{ш}}(r, \theta) r dr d\theta$ .

здесь снова удобнее иметь дело с логарифмом коэффициента правдоподобия. Итак,

$$\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n/2} f_i^2 = \frac{W}{2N} \int [f(t)]^2 dt = \frac{E}{N_0} \quad (116)$$

и

$$\ln l(r) = -\frac{E}{N_0} + \sum_{i=1}^{n/2} \ln I_0\left(\frac{r_i f_i}{N}\right), \quad (117)$$

что дает приближенно равенство

$$\ln l[r(t)] = -\frac{E}{N_0} + W \int_0^T \ln J_0\left[\frac{r(t)f(t)}{N}\right] dt. \quad (118)$$

Функция  $\ln J_0(x)$  близка к параболе  $x^2/4$  для малых значений  $x$  и к линейной функции для больших значений  $x$ . Таким образом, выражение для отношения правдоподобия можно приближенно записать для малых сигналов в виде

$$\ln l[r(t)] = -\frac{E}{N_0} + \frac{W}{4N^2} \int_0^T [r(t)]^2 [f(t)]^2 dt, \quad (119)$$

а для больших значений сигналов—в виде

$$\ln l[r(t)] = C_1 + C_2 \int_0^T r(t)f(t) dt, \quad (120)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  выбраны так, что они наилучшим образом приближают  $\ln J_0$  в рассматриваемой области изменения аргумента.

Уравнение (120) и (121) можно интерпретировать как операцию вычисления характеристик взаимной корреляции. Таким образом, оптимальный приемник для слабых сигналов представляет собой квадратичный детектор и следующий за ним коррелятор, который находит взаимную корреляцию между напряжением на выходе детектора и квадратом огибающей ожидаемого сигнала. Для случая большого отношения сигнала к шуму оптимальный приемник представляет собой линейный детектор и следующий за ним

коррелятор, который дает значение взаимной корреляции между напряжением на выходе детектора и огибающей ожидаемого сигнала.

В рассматриваемом случае нелегко найти функцию распределения для  $l(r)$ . Полученную здесь аппроксимацию мы применим к приемнику, предназначенному для малых отношений сигнала к шуму, так как этот случай имеет наибольший интерес. Для больших отношений сигнала к шуму аналогичная аппроксимация делается более просто.

Сначала найдем среднее значение и стандартное отклонение для распределения логарифма коэффициента правдоподобия. Как показано выше, для случая малых отношений сигнала к шуму

$$\ln l(r) \approx -\frac{1}{2N} \sum f_i^2 + \frac{1}{4N^2} \sum_{i=1}^{n/2} r_i^2 f_i^2. \quad (121)$$

Плотности вероятностей для каждого из  $r_i$  равны:

$$g_{\text{с ш}}(r_i) = \frac{r_i}{N} \exp \left[ -\frac{r_i^2 + f_i^2}{2N} \right] J_0 \left[ \frac{r_i f_i}{N} \right] \quad (122)$$

и

$$g_{\text{ш}}(r_i) = \frac{r_i}{N} \exp \left[ -\frac{r_i^2}{2N} \right].$$

Здесь используются обозначения  $g_{\text{ш}}(r_i)$  и  $g_{\text{с ш}}(r_i)$  для того, чтобы отличить рассматриваемые функции плотностей от совместных распределений всех  $r_i$ , ранее обозначенных через  $f_{\text{ш}}(r)$  и  $f_{\text{с ш}}(r)$ . Среднее значение каждого члена  $r_i^2 f_i^2 / 4N^2$  суммы (122) равно:

$$\mu_{\text{с ш}} \left( \frac{r_i^2 f_i^2}{4N^2} \right) = \frac{f_i^2}{4N} \int_0^\infty \frac{r_i^2}{N} g_{\text{с ш}}(r_i) dr_i \quad (123)$$

или

$$\mu_{\text{с ш}} \left( \frac{r_i^2 f_i^2}{4N^2} \right) = \frac{f_i^2}{4N} \int_0^\infty \frac{r_i^3}{N^2} \exp \left[ -\frac{(r_i^2 + f_i^2)}{2N} \right] J_0 \left( \frac{r_i f_i}{N} \right) dr_i.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mu_{\text{ш}} \left( \frac{r_i^2 f_i^2}{4N^2} \right) &= \frac{f_i^2}{4N} \int_0^\infty \frac{f_i^2}{N} g_{\text{ш}}(r_i) dr_i = \\ &= \frac{f_i^2}{4N} \int_0^\infty \frac{r_i^3}{N^2} \exp \left[ -\frac{r_i^3}{2N} \right] dr_i. \end{aligned} \quad (124)$$

Второй момент каждого члена  $r_i^2 f_i^2 / 4N^2$  равен:

$$\mu_{\text{с ш}} \left( \frac{r_i^4 f_i^4}{16N^4} \right) = \frac{f_i^4}{16N^2} \int_0^\infty \frac{r_i^4}{N^2} g_{\text{с ш}}(r_i) dr_i$$

или

$$\begin{aligned} \mu_{\text{с ш}} \left( \frac{r_i^4 f_i^4}{16N^4} \right) &= \\ &= \frac{f_i^4}{16N^2} \int_0^\infty \frac{r_i^5}{N^3} \exp \left[ -\frac{(r_i^2 + f_i^2)}{2N} \right] J_0 \left( \frac{r_i f_i}{N} \right) dr_i. \end{aligned} \quad (125)$$

Аналогично

$$\mu_{\text{ш}} \left( \frac{r_i^4 f_i^4}{16N^4} \right) = \frac{f_i^4}{16N^2} \int_0^\infty \frac{r_i^4}{N^2} g_{\text{ш}}(r_i) dr_i$$

или

$$\mu_{\text{ш}} \left( \frac{r_i^4 f_i^4}{16N^4} \right) = \frac{f_i^4}{16N^2} \int_0^\infty \frac{r_i^5}{N^3} \exp \left[ -\frac{r_i^2}{2N} \right] dr_i.$$

В случае чистого шума интегралы легко вычислить:

$$\mu_{\text{ш}} \left( \frac{r_i^2 f_i^2}{4N^2} \right) = \frac{f_i^2}{2N} \quad (126)$$

и

$$\mu_{\text{ш}} \left( \frac{r_i^4 f_i^4}{16N^4} \right) = \frac{f_i^4}{2N^2}.$$

В случае „сигнал плюс шум“ эти интегралы можно выразить через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию, которая для рассматриваемого случая обращается в про-

стой полином. Необходимые формулы собраны в книге „Пороговые сигналы“ [Л.5]. Результаты таковы:

$$\mu_{\text{с ш}} \left( \frac{r_i^2 f_i^2}{4N^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{f_i^2}{N} \left( 1 + \frac{f_i^2}{2N} \right)$$

и

$$\mu_{\text{с ш}} \left( \frac{r_i^4 f_i^4}{16N^4} \right) = \frac{1}{2} \frac{f_i^4}{N^2} \left( 1 + \frac{f_i^2}{N} + \frac{f_i^4}{8N^2} \right). \quad (127)$$

Так как

$$\sigma^2(z) = \mu(z^2) - [\mu(z)]^2, \quad (128)$$

то дисперсии величин  $r_i^2 f_i^2 / 4N^2$  равны:

$$\sigma_{\text{с ш}}^2 \left( \frac{r_i^2 f_i^2}{4N^2} \right) = \frac{1}{4} \frac{f_i^4}{N^2} \left( 1 + \frac{f_i^2}{N} \right) \quad (129)$$

и

$$\sigma_{\text{ш}}^2 \left( \frac{r_i^2 f_i^2}{4N^2} \right) = \frac{f_i^4}{4N^2}.$$

Для суммы независимых случайных величин среднее равно сумме средних слагаемых, а дисперсия равна сумме дисперсий. Поэтому средние величины  $\ln l(r)$  равны:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{с ш}} [\ln l(r)] &= -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n/2} f_i^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{n/2} \left[ \frac{1}{2} \frac{f_i^2}{N} + \frac{1}{4} \frac{f_i^4}{N^2} \right] = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{f_i^4}{4N^2} \end{aligned}$$

и

$$\mu_{\text{ш}} [\ln l(r)] = -\sum_{i=1}^{n/2} \frac{f_i^2}{2N} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{f_i^2}{N} = 0. \quad (130)$$

Дисперсии  $\ln l(r)$  равны:

$$\sigma_{\text{с ш}}^2 [\ln l(r)] = \sum_{i=1}^{n/2} \left( \frac{1}{4} \frac{f_i^4}{N^2} + \frac{1}{4} \frac{f_i^6}{N^3} \right)$$

и

$$\sigma_{\text{ш}}^2 [\ln l(r)] = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{f_i^4}{4N^2}. \quad (131)$$

Если можно предположить, что функции распределения  $\ln l(r)$  нормальны, то достаточно вычислить среднее значение и стандартное отклонение логарифма коэффициента правдоподобия.

Рассмотрим случай, когда входным сигналом является прямоугольный импульс длительностью  $M/W$  сек<sup>1</sup>. При нормированной величине сопротивления цепи 1 ом энергия импульса равна половине его длительности, умноженной на квадрат амплитуды его огибающей.

Из  $WT$  чисел  $f_i$  имеется  $M$  последовательных чисел, не равных нулю, и эти числа задаются как

$$f_i = \sqrt{\frac{2EW}{M}}, \quad (132)$$

где  $E$  — энергия импульса в точке  $A$  на рис. 5 в случае отсутствия шума. Для этого случая уравнение (130) и (131) имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_{\text{с ш}} [\ln l(r)] &= \frac{1}{M} \frac{E}{N_0^2}; \\ \mu_{\text{ш}} [\ln l(r)] &= 0; \\ \sigma_{\text{с ш}}^2 [\ln l(r)] &= \frac{E^2}{MN_0^2} \left( 1 + \frac{2}{M} \frac{E}{N_0} \right) \end{aligned} \quad (133)$$

и

$$\sigma_{\text{ш}}^2 [\ln l(r)] = \frac{E^2}{MN_0^2}.$$

Распределение величины  $\ln l(r)$  приблизительно нормальное, если  $M$  много больше единицы, так как по центральной предельной теореме распределение сумм  $M$  независимых случайных величин с одинаковыми распределениями должно приближаться к нормальному распределению с ростом  $M$ . Для этого случая при условии, что имеется чи-

<sup>1</sup> Задача нахождения распределения суммы  $M$  независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих плотность вероятности  $f(x) = x \exp [-(1/2)(x^2 + a^2)] J_0(ax)$  возникла в неопубликованной работе Маркума (Markum J. J., A statistical theory of target detection by pulsed radar, Mathematical Appendix, Project Rand Report, R-113). Маркум дает точное выражение для этого распределения, полезное только для малых значений  $M$ , и приближение рядами Грама—Шарлье, являющееся более точным, чем приведенное здесь нормальное приближение. Выражения Маркума можно использовать для данного случая, а также для случая, описанного в подразделе 6 данного раздела.

стый шум, можно эффективно вычислить распределение, так как многократную свертку интеграла от  $g_{\text{ш}}(r_i)$  самого с собой можно выразить в явном виде. Распределение величины  $\ln l(r)$  в случае „сигнала плюс шум“ более близко

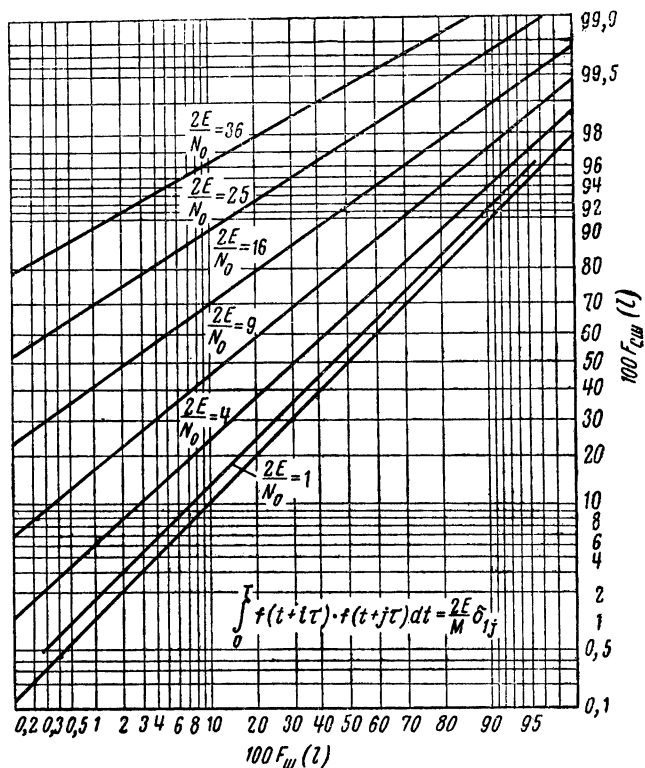


Рис. 6. Рабочие характеристики приемника с оптимальным видеоусилителем,  $M=16$ .

к нормальному, чем в случае чистого шума, так как распределения  $g_{\text{сш}}(r_i)$  ближе к нормальному, чем  $g_{\text{ш}}(r_i)$ .

Рабочая характеристика приемника для случая  $M=16$  изображена на рис. 6, при этом использовано нормальное распределение в качестве приближения к действительному распределению. Во многих случаях оказывается, что

$$\frac{1}{M} \frac{2E}{N_0} \ll 1. \quad (134)$$

В таких случаях оба распределения имеют приблизительно одинаковую дисперсию. Предположение о том, что распределение нормально, приводит к кривым, изображенным на рис. 2 и 3, при

$$d = \frac{1}{4M} \left( \frac{2E}{N_0} \right)^2. \quad (135)$$

## 8. Случай радиолокатора

Данный подраздел посвящен вопросу обнаружения радиолокатором цели заданной дальности, т. е. предполагается, что сигнал, если он имеет место, состоит из серии  $M$  импульсов, причем известны их положение во времени и форма огибающей. Будем предполагать также, что фаза высокочастотных колебаний имеет равномерное распределение для каждого импульса независимо от остальных, т. е. импульсы некогерентны.

Семейство сигналов можно выразить следующим образом:

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} f(t + m\tau) \cos(\omega t + \theta_i), \quad (136)$$

где  $M$  углов  $\theta_i$  независимы и равномерно распределены, а функция  $f$ , задающая огибающую импульсов, обладает тем свойством, что

$$\int_0^T f(t + i\tau) f(t + j\tau) dt = \frac{2E}{M} \delta_{ij}, \quad (137)$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта-функция Кронекера, равная нулю при единице при  $i = j$ . Время между импульсами обозначено через  $\tau$ . Уравнение (137) обозначает, что импульсы настолько далеки друг от друга во времени, что они ортогональны, и полная энергия сигнала равна  $E^*$ . Предполагается также, что функция  $f(t)$  не имеет частотных компонент с частотами, выше, чем  $\omega/2\pi$ .

---

\* Множитель 2 появляется в соотношении (137), так как  $f(t)$  — огибающая импульса; множитель  $M$  появляется, так как полная энергия  $E$  в  $M$  раз больше энергии одного импульса.



Коэффициент правдоподобия получаем из уравнения (56). Тогда

$$l(x) = \int_R \exp \left[ -\frac{E(s)}{N_0} \right] \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t) x(t) dt \right] dP_s(s) \quad (138)$$

или

$$l(x) = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{2}{N} \int_0^T \sum_{m=0}^{M-1} f(t+m\tau) \times \right. \\ \left. \times x(t) \cos(\omega t + \theta_m) dt \right] d\theta_0, \dots, d\theta_{M-1} \quad (139)$$

Интеграл вычисляется так же, как в подразделе 4 раздела V. В результате получаем:

$$l(x) = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] \prod_{m=0}^{M-1} I_0 \left( \frac{r_m}{N} \right), \quad (140)$$

где

$$\left( \frac{r_m}{N} \right)^2 = \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T f(t+m\tau) x(t) \cos \omega t dt \right]^2 + \\ + \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T f(t+m\tau) x(t) \sin \omega t dt \right]^2. \quad (141)$$

Эта величина  $r_m$  почти совпадает с величиной  $r$ , которая использовалась в § 5 раздела IV при изучении случая, когда сигнал известен с точностью до фазы высокочастотных колебаний. В самом деле каждое  $r_m$  можно получить способом, описанным в этом параграфе. Величина  $r_0$  связана с первым импульсом; напряжение  $r_0$  может быть получено на выходе системы, состоящей из идеального фильтра для сигнала,

$$s_0 = f(t) \cos(\omega t + \theta) \quad (142)$$

с любым значением фазового угла  $\theta$  и линейного детектора. Выходное напряжение в некоторый момент времени  $t_0$ , определяемый временем запаздывания фильтра, будет равно  $(N_0/2)r_0/N$ . Другие величины  $r_m$  отличаются только тем, что они связаны с импульсами, приходящими позднее.

Выходное напряжение фильтра в момент  $t_0 + m\tau$  будет равно  $(N_0/2) r_m/N$ .

Удобно иметь приемник, вычисляющий логарифм отношения правдоподобия,

$$\ln l(x) = -\frac{E}{N_0} + \sum_{m=0}^{M-1} \ln J_0\left(\frac{r_m}{N}\right). \quad (143)$$

Таким образом, нужно найти  $\ln J_0(r_m/N)$  для каждого  $r_m$  и просуммировать эти  $M$  величин. Как и в предыдущем параграфе, в случае, когда  $r_m/N$  будет достаточно мало,  $\ln J_0(x)$  можно аппроксимировать выражением  $x^2/4$ . Для нахождения величин  $1/4 (r_m/N)^2$  нужно использовать вместо линейного детектора квадратичный и затем просуммировать выходные напряжения на выходе квадратичного детектора в моменты  $t_0, t_0 + \tau, \dots, t_0 + (M-1)\tau$ . Итак, идеальная система состоит из усилителя промежуточной частоты (УПЧ) с полосой, соответствующей одиночному импульсу<sup>1</sup> квадратичного детектора (в случае слабых сигналов) и интегрирующего устройства.

Мы найдем нормальные аппроксимации для функций распределения логарифма коэффициента правдоподобия. При этом будет использовано приближение

$$\ln I_0\left(\frac{r_m}{N}\right) \approx \frac{r_m^2}{4N^2}, \quad (144)$$

верное для малых значений  $r_m/N^*$ . Подставляя соотношение (144) в (143), получаем:

$$\ln l \approx -\frac{E}{N_0} + \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{4} \left(\frac{r_m}{N}\right)^2. \quad (145)$$

Величины  $r_m$  независимы; это следует из ортогональности импульсных функций  $f(t + m\tau) \cos(\omega t + \theta_m)$  между собой. Распределение каждой из этих величин совпадает с распределением величины  $r$ , изучавшейся в случае, когда сигнал известен, с точностью до фазы; для обоих случаев

<sup>1</sup> Обычно более удобно осуществить идеальный фильтр (или приближение к нему) как часть УПЧ.

\* Смотри примечание к уравнению (131).

можно применить одно и то же рассуждение. Итак, согласно уравнению (83)\*

$$P_{\text{ш}} \left( \frac{r_m}{N} \sqrt{\frac{N_0 M}{2E}} \geq \alpha \right) = \exp \left[ -\frac{\alpha^2}{2} \right];$$

$$P_{\text{ш}} \left( \frac{r_m}{N} \geq a \right) = \exp \left[ -\frac{a^2 N_0 M}{2E} \right] \quad (146)$$

и согласно (89),

$$P_{\text{сш}} \left( \sqrt{\frac{N_0 M}{2E}} \frac{r_m}{N} \geq \alpha \right) = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] \int_{\alpha}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha^2}{2} \right] \alpha \times$$

$$\times I_0 \left( \alpha \sqrt{\frac{2E}{N_0 M}} \right) d\alpha \quad (147)$$

или

$$P_{\text{сш}} \left( \frac{r_m}{N} \geq a \right) = \frac{N_0 M}{2E} \exp \left[ -\frac{E}{N_0 M} \right] \int_a^{\infty} a \times$$

$$\times \exp \left( -\frac{a^2 N_0 M}{4E} I_0(a) \right) da.$$

Дифференцируя (146) и (147), получаем плотности:

$$g_{\text{ш}} \left( \frac{r_m}{N} \right) = \frac{M N_0}{2E} \left( \frac{r_m}{N} \right) \exp \left[ -\left( \frac{r_m}{N} \right)^2 \left( \frac{N_0 M}{4E} \right) \right],$$

$$g_{\text{сш}} \left( \frac{r_m}{N} \right) = \frac{M N_0}{2E} \left( \frac{r_m}{N} \right) \exp \left[ -\left( \frac{r_m}{N} \right)^2 \left( \frac{N_0 M}{4E} \right) \right] J_0 \left( \frac{r_m}{N} \right). \quad (148)$$

Математически здесь такая же ситуация, как и в предыдущем параграфе. Таким же способом можно найти стандартное отклонение и среднее значение для логарифма коэффициента правдоподобия.

Они равны:

$$\mu_{\text{сш}}(\ln l) = \frac{E^2}{M N_0^2};$$

$$\mu_{\text{ш}}(\ln l) = 0;$$

$$\sigma_{\text{сш}}^2(\ln l) = \frac{E^2}{M N_0^2} \left( 1 + \frac{2E}{M N_0} \right) \quad (149)$$

---

\* В следующих далее соотношениях появляется число  $M$ , так как энергия одного импульса равна  $\frac{E}{M}$ , а не  $E$ .

$$\sigma_{\text{ш}}^2 (\ln l) = \frac{E^2}{MN_0^2}.$$

Если можно предположить, что распределения нормальны, то они полностью определяются своими средними и дисперсиями. Эти формулы аналогичны формулам (133). Задача математически та же, и, следовательно, дискуссия и рабочие характеристики приемника, приведенные в конце подраздела 7 раздела IV, применимы в обоих случаях.

### 9. Приближенная оценка оптимального приемника

Чтобы получить приближенные результаты для оставшихся двух случаев, предположим, что в этих случаях рабочая характеристика приемника может быть приближена кривыми на рис. 2 и 3, т. е., что логарифм коэффициента правдоподобия приблизительно нормален. В этом параграфе обсуждаются вопросы аппроксимации рабочей характеристики приемника кривыми, изображенными на рис. 2—3.

Согласно (68),  $F_{\text{сш}}(l)$  можно вычислить, если известно  $F_{\text{ш}}(l)$ . Кроме того, легко видеть, что  $n$ -й момент распределения  $F_{\text{ш}}(l)$  равен  $(n-1)$ -му моменту распределения  $F_{\text{сш}}(l)$ . Отсюда, если среднее значение коэффициента правдоподобия в случае чистого шума равен 1, а дисперсия равна  $\sigma_{\text{ш}}^2$ , второй момент в случае чистого шума, а следовательно, и среднее в случае „сигнал плюс шум“, равны  $1 + \sigma_{\text{ш}}^2$ . Таким образом, разность между средними равна  $\sigma_{\text{ш}}^2$ , т. е. равна дисперсии коэффициента правдоподобия в случае чистого шума. Вероятно, это число характеризует возможность обнаружения сигнала лучше, чем любое другое (одиночное) число.

Предположим, что в случае чистого шума логарифм коэффициента правдоподобия распределен нормально, т. е. что

$$F_{\text{ш}}(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{\ln l}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x-m)^2}{2d} \right] dx, \quad (150)$$

где  $m$  есть среднее, а  $d$  — дисперсия коэффициента правдоподобия. Тогда  $n$ -й момент этого распределения равен:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{ш}}(l^n) &= \int_0^{\infty} l^n dF_{\text{ш}}(l) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[nx] \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2d}\right] dx, \quad (151)\end{aligned}$$

где  $l = \exp x$ . Вычисляем интеграл, превращая для этого выражение в экспоненте в полный квадрат и используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{2d}\right] dx = \sqrt{2\pi d}. \quad (152)$$

Отсюда

$$\mu_{\text{ш}}(l^n) = \exp\left[\frac{n^2 d}{2} + mn\right].$$

В частности, так как среднее значение  $l(x)$  равно единице, то

$$\mu_{\text{ш}}(l) = 1 = \exp\left[\frac{d}{2} + m\right]. \quad (153)$$

Поэтому

$$m = -\frac{d}{2}. \quad (154)$$

Дисперсия  $l(x)$  в случае чистого шума равна  $\sigma_{\text{ш}}^2$ , и поэтому второй момент  $l(x)$  равен:

$$\mu_{\text{ш}}(l^2) = [\mu_{\text{ш}}(l)]^2 + \sigma_{\text{ш}}^2(l) = 1 + \sigma_{\text{ш}}^2(l). \quad (155)$$

Это равенство должно быть согласовано с формулой (152). Следовательно,

$$\mu_{\text{ш}}(l^2) = 1 + \sigma_{\text{ш}}^2 = \exp[2d + 2m] = \exp(d) \quad (156)$$

и поэтому

$$d = \ln(1 + \sigma_{\text{ш}}^2). \quad (157)$$

Распределение коэффициента правдоподобия в случае „сигнал плюс шум“ находим из уравнения (68):

$$dF_{\text{сш}}(l) = l dF_{\text{ш}}(l);$$

$$F_{\text{сш}}(l) = - \int_l^{\infty} l dF_{\text{ш}}(l). \quad (158)$$

Найдем  $dF_{\text{ш}}(l)$  из (150) и заменим  $l$  на  $\exp x$ , тогда

$$F_{\text{сш}}(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{\ln l}^{\infty} \exp[x] \exp\left[-\frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2}{2d}\right] dx$$

или

$$F_{\text{сш}}(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{\ln l}^{\infty} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{2d}\right] dx. \quad (159)$$

Итак, в случае „сигнал плюс шум“ распределение  $\ln l$  также нормально; среднее равно  $d/2$ , а дисперсия равна  $d$ .

В заключение укажем, что, вероятно, дисперсия  $\sigma_{\text{ш}}^2$  коэффициента правдоподобия характеризует способность обнаруживать сигналы лучше, чем любое другое (одиночное) число. Если в случае чистого шума логарифм коэффициента правдоподобия распределен нормально, то его распределение, так же как и распределение в случае „сигнал плюс шум“, полностью определено, если известно значение  $\sigma_{\text{ш}}^2$ . Распределение  $\ln l(x)$  нормально в обоих случаях. Дисперсия в обоих случаях равна  $d$  и совпадает с разностью средних. Рабочие характеристики приемника изображены на рис. 2, где параметр  $d$  связан с  $\sigma_{\text{ш}}^2$  соотношением

$$d = \ln(1 + \sigma_{\text{ш}}^2). \quad (160)$$

В случае точно известного сигнала имеет место именно это распределение. В случаях, изучавшихся в подразделах 6, 7 и 8 этого раздела, это распределение получается как предельное при увеличении числа выборок. Несомненно, что в большинстве случаев общий вид распределений именно таков. Таким образом, кажется, что целесообразно получать приближенные результаты только при помощи вычисления  $\sigma_{\text{ш}}^2$  для данного случая. При этом предпола-

гается, что способность обнаруживать сигналы приблизительно такая же, как в случае нормально распределенного логарифма коэффициента правдоподобия. На основании этого в следующих параграфах вычисляется  $\sigma_{\text{ш}}^2(l)$  для двух случаев, при этом мы считаем, что рабочие характеристики аппроксимируются кривыми, изображенными на рис. 2, где  $d = \ln(1 + \sigma_{\text{ш}}^2)$ .

## 10. Прием $M$ -ортогональных равновероятных сигналов известной формы

Предположим, что совокупность ожидаемых сигналов содержит ровно  $M$  функции  $s_k(t)$ , причем все они имеют одинаковую вероятность, одинаковую энергию  $E$  и ортогональны, т. е.

$$\int_0^T s_k(t) s_q(t) dt = E \delta_{kq}. \quad (161)$$

Тогда коэффициент правдоподобия можно найти из уравнения (56):

$$l(x) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{M} \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] \exp \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i s_{ki} \right]$$

или

$$l(x) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \exp \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i s_{ki} - \frac{E}{N_0} \right], \quad (162)$$

где  $s_{ki}$  — выборочные значения функции  $s_k(t)$ .

В случае чистого шума каждый член вида

$$(1/N) \sum_{i=1}^n x_i s_{ki}$$

имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией, равной

$$\sum_{i=1}^n s_{ki}^2 / N = 2E / N_0. *$$

---

\* Обоснование то же, что и в § 4 раздела IV.

Кроме того,  $M$  величин

$$(1/N) \sum_{i=1}^n x_i s_{ki}$$

независимы между собой, так как функции  $s_k(t)$  ортогональны. Поэтому величины  $\exp(1/N) \sum_{i=1}^n x_i s_{ki} - E/N_0$  независимы.

Так как логарифм каждого члена

$$Z = \exp(1/N) \sum_{i=1}^n x_i s_{ki} - E/N_0$$

распределен нормально со средним  $(-E/N_0)$  и дисперсией  $2E/N_0$ , то моменты этого распределения можно найти из соотношения (152); при этом  $n$ -й момент равен:

$$\mu_{\text{ш}}(Z^n) = \exp \left[ n(n-1) \frac{E}{N_0} \right]. \quad (163)$$

Следовательно, среднее каждого члена равно единице, а дисперсия равна:

$$\sigma_{\text{ш}}^2(Z) = \mu(Z^2) - [\mu(Z)]^2 = \exp \left[ \frac{2E}{N_0} \right] - 1. \quad (164)$$

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых. Поэтому

$$\sigma_{\text{ш}}^2(Ml) = M \left[ \exp \left( \frac{2E}{N_0} \right) - 1 \right]; \quad (165)$$

значит, дисперсия коэффициента правдоподобия равна:

$$\sigma_{\text{ш}}^2(l) = \frac{1}{M} \left[ \exp \left( \frac{2E}{N_0} \right) - 1 \right]. \quad (166)$$

В § 9 раздела IV было показано, что рабочие характеристики приемника приблизительно такие, как на рис. 2 при

$$d = \ln(1 + \sigma_{\text{ш}}^2) = \ln \left[ 1 - \frac{1}{M} + \frac{1}{M} \exp \left( \frac{2E}{N_0} \right) \right]. \quad (167)$$

Разрешаем это уравнение относительно  $2E/N_0$ :

$$\frac{2E}{N_0} = \ln[1 + M(e^d - 1)]. \quad (168)$$



Предположим, что желательно сохранять вероятность ложной тревоги и вероятность правильного обнаружения постоянными. Для этого должно оставаться постоянным число  $d$ . Тогда из (168) видно, что если число возможных сигналов  $M$  возрастает, то энергия сигнала  $E$  также должна возрастать.

# 11. Сигналом является один из $M$ -ортогональных сигналов с неизвестной фазой высокочастотных колебаний

Рассмотрим случай, когда совокупность ожидаемых сигналов содержит ровно  $M$  различных амплитудно-модулированных сигналов, которые известны с точностью до фазы колебаний высокой частоты. Обозначим сигналы через

$$s_k(t) = f_k(t) \cos(\omega t + \theta). \quad (169)$$

В дальнейшем будет предполагаться, что функции  $f_k(t)$  имеют одинаковую энергию  $E$  и ортогональны, т. е.

$$\int_0^T f_k(t) f_q(t) dt = 2E \delta_{kq}. \quad (170)$$

Число 2 введено потому, что функции  $f$  представляют собой амплитуды сигналов, а не действительные сигнальные функции. Предположим также, что  $f_k(t)$  ограничены по полосе. Из этого следует, что любые две сигнальные функции с различными огибающими функциями ортогональны. Предположим также, что распределение фазы  $f_k(t)$  равномерное и что вероятность каждой огибающей сигнальной функции равна  $1/M$ .

При этих предположениях коэффициент правдоподобия можно получить из уравнения (66):

$$l(x) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i s_{ki} - \frac{E}{N_0} \right] d\theta, \quad (171)$$

где  $s_{ki}$  — выборочные значения  $s_k(t)$  и, значит, зависят от фазы  $\theta$ . Интегрируем так же, как в случае „сигнал известен с точностью до фазы“. В результате из уравнения (82) получаем:

$$l(x) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] J_0 \left( \frac{r_k}{N} \right), \quad (172)$$

где

$$r_k = \sqrt{(\sum_i x_i f_k(t_i) \cos \omega t_i)^2 + (\sum_i x_i f_k(t_i) \sin \omega t_i)^2}. \quad (173)$$

Теперь возникает задача нахождения  $\sigma_{\text{ш}}^2(l)$ . Можно найти дисперсию каждого слагаемого в сумме (172), так как функция распределения в случае чистого шума найдена в § 5 раздела 4. Так как  $f_k(t)$  ортогональны, то величины  $r_k$  независимы, и слагаемые в сумме (172) независимы. Тогда дисперсия коэффициента правдоподобия  $\sigma_{\text{ш}}^2(l)$  равна сумме дисперсий слагаемых, деленной на  $M^2$ .

Функция распределения для каждого члена  $\exp(-E/N_0) \times \times I_0(r_k/N)$  дается соотношениями (84) и (85). Определим из уравнения

$$\beta = \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] I_0 \left( \alpha \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right). \quad (174)$$

Тогда в случае шума функция распределения каждого числа равна:

$$F_{\text{ш}}^k(\beta) = \exp \left[ -\frac{\alpha^2}{2} \right]. \quad (175)$$

Среднее каждого члена равно:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{ш}}^k(\beta) &= \int_0^{\infty} \beta dF_{\text{ш}}^k(\beta) = \\ &= \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{E}{N_0} \right] I_0 \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \alpha \right) \alpha \exp \left[ -\frac{\alpha^2}{2} \right] d\alpha. \end{aligned} \quad (176)$$

Этот интеграл можно вычислить так же, как это делается в книге „Пороговые сигналы“ [Л. 5]. В результате получим, что  $\mu^{(k)}(\beta) = 1$ .

Второй момент каждого члена равен:

$$\mu_{\text{ш}}^k(\beta^2) = \int_0^{\infty} \beta^2 dF_{\text{ш}}^{(k)}(\beta) \quad (177)$$

или

$$\mu_{\text{ш}}^{(k)}(\beta^2) = \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{2E}{N_0} \right] \left[ I_0 \left( \alpha \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) \right]^2 \alpha \exp \left[ -\frac{\alpha^2}{2} \right] d\alpha.$$

Интеграл вычислен в (17)\*. В результате получим:

$$\mu_{\text{ш}}^{(k)}(\beta^2) = I_0 \left( \frac{2E}{N_0} \right). \quad (178)$$

Дисперсия каждого члена соотношения (172) равна:

$$[\sigma_{\text{ш}}^{(k)}(\beta)]^2 = \mu_{\text{ш}}^{(k)}(\beta^2) - [\mu_{\text{ш}}^{(k)}(\beta)]^2 = I_0 \left( \frac{2E}{N_0} \right) - 1. \quad (179)$$

Следовательно, дисперсия  $MI$  равна:

$$\sigma_{\text{ш}}^2(MI) = M \left[ I_0 \left( \frac{2E}{N_0} \right) - 1 \right], \quad (180)$$

а поэтому

$$\sigma_{\text{ш}}^2(I) = \frac{1}{M} \left[ I_0 \left( \frac{2E}{N_0} \right) - 1 \right], \quad (181)$$

так как дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий.

Если использовать аппроксимацию, описанную в § 9 раздела IV, то рабочие характеристики приемника приблизительно такие же, как на рис. 2, где

$$d = \ln(1 + \sigma_N^2) = \ln \left[ 1 - \frac{1}{M} + \frac{1}{M} I_0 \left( \frac{2E}{N_0} \right) \right]. \quad (182)$$

## 12. Широкополосный приемник и оптимальный приемник

Некоторые приложения результатов раздела IV представлены в таблице (§ 1 раздела IV). В этом и следующем параграфах даны еще два примера (практических) выводов, получаемых из теории.

Один из общих методов обнаружения импульсных сигналов в полосе частот ширины  $B$  состоит в построении приемника, который охватывает полностью эту полосу частот. Такой приемник в случае, когда известен начальный

---

\* Вычисление интеграла (177) легко выполняется с помощью формулы Вебера

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2 t^2} I_\nu(at) I_\nu(bt) t dt = \frac{1}{2p^2} e^{-\frac{a^2+b^2}{4p^2}} I_\nu \left( \frac{ab}{2p^2} \right)$$

при  $R_I(\nu) > -1$ ,  $|\arg p| < \frac{\pi}{4}$ . См. Ватсон „Теория Бесселевых функций“, Изд иностранной литературы, 1949, стр. 433. (Прим. ред.)

момент импульсных сигналов, изучался в § 7 раздела IV. Это не вполне оптимальный приемник. Представляется интересным сравнить его с оптимальным. Мы не смогли найти распределение коэффициента правдоподобия, когда сигнал представляет собой импульс с неизвестной фазой высокочастотных колебаний и частота равномерно распределена на полосе. Однако если слегка изменить задачу так, что

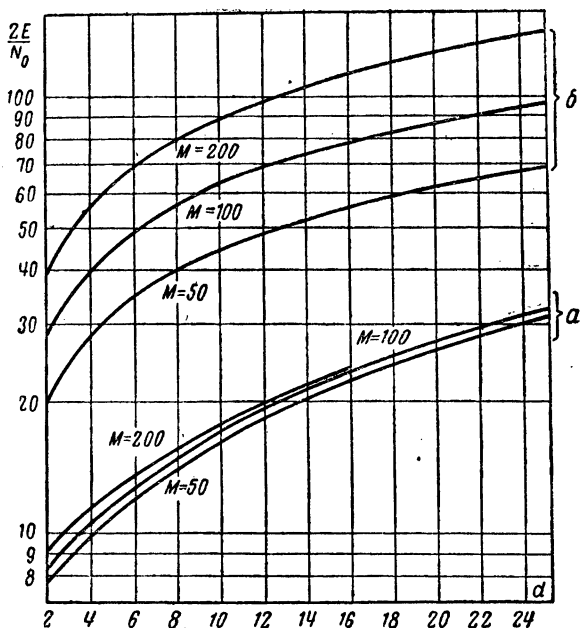


Рис. 7. Сравнение оптимального и широкополосного приемников.

*a* — оптимальный приемник; *b* — широкополосный приемник.

бы возможным частотам соответствовали точки, расположенные приблизительно обратно пропорционально расстоянию между импульсами, то импульсы различных частот будут приблизительно ортогональны. Тогда можно использовать случай сигнала, известного с точностью до фазы и являющегося одним из  $M$ -ортогональных сигналов. Используем уравнение (182) при  $M$ , равном отношению ширины полосы частот  $B$  к ширине полосы импульса. Так как ширина полосы импульса приблизительно обратно пропорциональна его длительности, то такое же значение имеет параметр  $M$ , введенный в § 7 этого раздела. На рис. 7 изо-

бражены кривые, представляющие  $2E/N_0$  как функцию  $d$ , как для приближенно оптимального приемника, так и для широкополосного приемника при нескольких значениях  $M$ . На рисунке значение  $d$  найдено из формул (135) и (182), справедливых для больших значений  $M$ .

### 13. Неопределенность формы сигнала и обнаружение

В двух случаях, когда рассматриваемый сигнал есть один из  $M$ -ортогональных сигналов, неопределенность формы сигнала является функцией от  $M$ . Это дает возможность изучить влияние неопределенности формы сигнала на обнаружение. Кривые на рис. 2 и 3 дают приближенную оценку оптимального приемника с индексом обнаружения  $d$ , равным:

$$d = \ln \left[ 1 - \frac{1}{M} + \frac{1}{M} \exp \left( \frac{2E}{N_0} \right) \right]. \quad (183)$$

Решая это уравнение относительно энергии сигнала, получаем:

$$\frac{2E}{N_0} = \ln [1 - M + Me^d] \approx \ln M + \ln (e^d - 1). \quad (184)$$

Здесь приближение справедливо для больших<sup>1</sup>  $\frac{2E}{N_0}$ . Из этого соотношения видно, что энергия сигнала является приблизительно линейной функцией от  $\ln M$ , когда индекс обнаружения  $d$  и, следовательно, возможность обнаружения сигнала остаются постоянными. Можно ожидать, что  $2E/N_0$  является линейной функцией от энтропии —  $\sum p_i \ln p_i$ , где  $p_i$  — вероятность  $i$ -го ортогонального сигнала. Линейное соотношение справедливо только тогда, когда все  $p_i$  одинаковы. Соотношение, имеющее место в этом наиболее общем случае, имеет вид

$$\frac{2E}{N_0} \approx -\ln [\sum p_i^2] + \ln (e^d - 1). \quad (185)$$

### ЛИТЕРАТУРА

(основная)

1. Гольдман С., Теория информации, перевод с англ. под ред. В. В. Фурдуева, Изд. иностранной литературы, 1957.

2. Shannon C. E., Communication in the presence of noise, Proc. IRE, January 1949, Proc. IRE, v. 37, p. 10—21.

<sup>1</sup> Если  $2E/N_0 > 3$ , то ошибка меньше 10%.

3. Grenander U., Stochastic processes and statistical inferences, Arkiv för Mathematic, 1950 B. I, v. 17, p. 195.
4. Neyman I., Pearson E. S., On the problems of the most efficient tests of statistical hypotheses, Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1933, v. 231, ser. A, p. 289.
5. Пороговые сигналы, перевод с англ. под ред. А. П. Сиверса, Изд. «Советское радио», 1952.
6. Вудворд Ф. и Девис И., Принципы обратной вероятности в теории передачи сигналов, сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех» под ред. Н. А. Железнова, Изд. иностранной литературы, 1953.
7. Davies J. L., On determining the presence of signal in noise, Proc. IEE, March 1952, v. 99, pt III, p. 45—51.
8. Wold A., Sequential analysis, John Willey and Sons, 1947.
9. Fox W. C. Electronic defence group, University of Michigan Technical Report, № 19.
10. Wold A., Wolfowitz J., Optimum character of the sequential probability ratio test, Ann. Math. Stat., 1948, v. 19, p. 326.
11. Reich E., Swerling F., The detection of a sine wave in gaussian noise, Journ. of Appl. Physics, 1953, v. 24, p. 289.
12. Davies R. C., On the detection of sure signals in noise, Journ. of Appl. Physics, 1954, v. 25, p. 76—82.
13. Harrington J. V. Rogers T. F., Signal-to-noise improvement through intergration in a storage tube, Proc. IRE, 1950, v. 38, p. 1197.
14. Harting A. E. Meade J. E., A device for computing correlation functions, Rev. Sci. Inst., 1952, v. 23, p. 347.
15. Lee J. W., Chechham T. R., Wiesner J. B., Applications of correlation analysis to the detection of periodic signals in noise, Proc. IRE, 1950, v. 38, p. 1165.
16. Levin M. J., Reintjes J. F. A five channel electronic analog correlator, Proc. Nat. El. Conf., 1952, v. 8.
17. North D. O., An analysis of the factors which determine signal-noise determination in pulsed carrier systems, RCA Laboratory Rpt., 1943, RTR-6C. См также [5].
18. Графики значений интеграла (89) и приближенные выражения для малых и больших значений можно найти в статье Райса «Теория флуктуационных шумов». (См. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», сборник переводов под ред. И. А. Железнова, Изд. иностранной литературы, 1953).
19. Таблицы этой функции составлены Маркумом в неопубликованном докладе. „Table of Q-functions“, Project Rand Report, RM, 399.
20. Noel P. G., Introduction to mathematical statistics, New York, Wiley, 1947, p. 246.
21. Peterson W. W., Birdsall T. G., The theory of signal detectability. Electr. Defence Group, Univers. of Michigan Technical Report, 1953, № 13.

## ЛИТЕРАТУРА

(дополнительная)

1. Бунимович В. И., Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд. «Советское Радио», 1951.
2. Котельников В. А., Теория потенциальной помехоустойчивости, Госэнергоиздат, 1956.

3. Крамер Г., Математические методы статистики, Изд. иностранной литературы, 1948.

4. Гольдман С., Теория информации, Изд. иностранной литературы, 1957.

5. Левин Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Изд. «Советское радио», 1957.

6. Дунин И. В., Барковский Н. И. и Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике, Гостехиздат, 1955.

7. Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, Перевод с англ. под ред. Ю. В. Линника, Изд. иностранной литературы, 1956.

8. Пороговые сигналы, Перевод с англ. под ред. А. П. Сиверса, Изд. «Советское радио», 1952.

9. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, Сборник переводов под ред. Н. А. Железнова, Изд. иностранной литературы, 1953.

10. Харкевич А. А., Очерки общей теории связи, Гостехиздат, 1955.

11. Вудворд Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с применением к радиолокации, перевод с английского под ред. Г. С. Горелика, изд. «Советское радио», 1955.

12. Филиппов Л. И., Потенциальная помехоустойчивость при приеме импульсных радиосигналов, «Радиотехника», 1954, № 10.

13. Флейшман Б. С., Об оптимальном детекторе с  $\log I_0$  характеристикой для обнаружения слабого сигнала при наличии шума, «Радиотехника и электроника», № 6, 1957.

---

---

---

## ОБНАРУЖЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ И НЕКОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ

*Р. Дренник, С. Гартенхауз, П. Несбеда<sup>1</sup>*

### Краткое содержание

Основная идея статистической теории, связанной с именем Вальда, применяется к обнаружению в шуме сигнала неизвестной частоты, включая случай, когда принятый сигнал имеет доплеровский сдвиг. По статистической терминологии задача не является задачей проверки простой гипотезы, в определениях которой обычно формулировалась проблема обнаружения, а становится задачей проверки сложной гипотезы. Это получается из-за наличия неизвестного параметра — частоты сигнала. Теория функций статистического решения Вальда приводит к правилам принятия решения, которые являются оптимальными в том смысле, что наибольшая средняя потеря, которая может получаться при принятии решения, оказывается минимально возможной (минимаксный способ действия). Рассматриваются два случая сигнала: 1) когерентный, когда фаза сигнала известна и повторяется от развертки к развертке и 2) некогерентный, при котором фаза сигнала принимается совершенно случайной от одной развертки к следующей. Оптимальный (минимаксный) способ обработки сигнала получен для обоих случаев.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время задаче обнаружения сигнала было уделено значительное внимание. Несколькими авторами была исследована возможность применения статистических методов к этой задаче и были получены интересные результаты. Эти исследования привели к выяснению способа обработки сигнала для оптимального обнаружения в каскадах как промежуточной, так и видеочастоты. Ранее использовалась теория Неймана—Пирсона, которая ограничивается проверкой «простой гипотезы». Она была обобщена и развита Миддлтоном [Л. 1, Л. 2]. Примерно в то же

---

<sup>1</sup> Drenick, Gartenhouse, Nesbeda, Detection of coherent and noncoherent signals, Conv. Rec. IRE, 1955, Part 4, p. 114—118.



время Вальдом [Л. 3] была выдвинута и затем развита теория статистического решения, которая является общей теорией и содержит метод Неймана — Пирсона в качестве частного случая. Эта теория приводит к правилам принятия решения, которые (среди других) оптимальны в том смысле, что наибольшая средняя потеря, получающаяся при вынесении решения, оказывается минимально возможной. Такие правила называются минимаксными.

В настоящей статье теория статистического решения применяется к обнаружению синусоидального сигнала на выходе УПЧ радиолокационного приемника. Принимается, что сигналом является синусоида неизвестной частоты. Следовательно, задача содержит в себе также случай доплеровского сдвига частоты. Неизвестность частоты сигнала усложняет задачу, так как теперь есть неизвестный параметр, не имеющий отношения к задаче обнаружения в чистом виде (как таковой). По статистической терминологии теперь требуется найти решение задачи о сложной гипотезе. Ее нельзя решить методом Неймана — Пирсона, а необходимо применить более общую теорию. При анализе рассматриваются два случая:

1. Когерентный сигнал (имеется одна и та же фаза колебаний сигнала от одного повторения к следующему).

2. Некогерентный сигнал, т. е. со случайной от одного повторения к следующему фазой. Для каждого случая получены оптимальные (минимаксные) правила решения и даны в виде иллюстраций возможные схемы обработки входных сигналов.

Процедура оптимальной (минимаксной) схемы обработки для установления наличия когерентного сигнала получается следующей: каждый цуг колебаний с выхода УПЧ подается на линейный прибор, который определяет ее амплитуду. После линейного прибора осуществляется интегрирование от развертки к развертке, а результат подается на нелинейный прибор с экспоненциальной характеристикой. После этого производится суммирование по всем частотам, а выходное напряжение сумматора ограничивается снизу на некотором пороговом уровне. Когда напряжение превышает определенный порог, задаваемый допустимой вероятностью ложной тревоги, объявляется, что сигнал есть.

В случае некогерентного сигнала наилучший способ для установления наличия сигнала заключается в том, чтобы, во-первых, преобразовать каждый цуг колебаний каждой

частоты в видеонапряжения. Последние затем нужно проинтегрировать по всем возможным частотам и пропустить через нелинейный прибор. Напряжение с выхода всех каналов необходимо опять проинтегрировать и подвергнуть ограничению на некотором пороговом уровне. Можно утверждать, что сигнал есть, когда превышает установленный порог.

## 1. Постановка задачи

Предполагается: 1) выходное напряжение УПЧ за время одной развертки может быть представлено в виде суперпозиции конечного числа  $N$  синусоидальных и косинусоидальных колебаний; 2) амплитуды этих колебаний (в отсутствие сигнала) независимы и нормально распределены от одной развертки к следующей; 3) сигнал и шум аддитивны; 4) сигнал на каждой развертке представляет собой синусоидальное колебание одной из  $N$  возможных частот, хотя заранее может и не быть неизвестно, которая из этих частот является частотой сигнала.

При этом выходное напряжение УПЧ можно считать как бы набранным из  $N$  частот, например,  $\omega_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ). Если  $x_{jk}$  и  $y_{jk}$  — амплитуды косинусной и синусной компонент колебания частоты  $\omega_k$  в  $j$ -й развертке (амплитуды выражены в долях эффективного значения шумового напряжения), то мгновенное значение выходного напряжения в момент времени  $t$  при отсутствии сигнала можно записать следующим образом:

$$z_{jk} = x_{jk} \cos \omega_k t + y_{jk} \sin \omega_k t, \quad (1)$$

причем время измеряется от начала каждой развертки. Когда сигнал есть ( $a_k, b_k$  — амплитуды сигнала на частоте  $\omega_k$ ), мгновенное выходное напряжение УПЧ при  $j$ -й развертке и частоте  $\omega_k$  будет равно:

$$z_{jk} = (x_{jk} + a_k) \cos \omega_k t + (y_{jk} + b_k) \sin \omega_k t.$$

В этом случае плотности вероятности для  $z_{jk}$  равны:

$\Phi(z_{jk})$  — когда сигнала нет;

$\Phi(z_{jk} - a_k \cos \omega_k t - b_k \sin \omega_k t)$  — при наличии сигнала.

Здесь  $\Phi$  обозначает нормальное распределение с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Теперь задача заключается в том, чтобы принять решение о наличии или отсутствии сигнала на любой одной из  $N$  частот после наблюдения (рассматривания) напряжения  $z_{jk}$ .

Хотя проблема и заключается в выборе из двух альтернатив, она не может быть решена методом Неймана—Пирсона, так как последний ограничен случаем, когда класс возможных распределений состоит только из двух элементов [Л. 4].

В нашем случае это ограничение можно было бы снять, если бы частота сигнала была известна заранее. Последнее можно видеть из следующего рассуждения: пусть  $P_0 = P_0(z_{11}, \dots, z_{nN})$  — совместная функция плотности вероятности напряжений в случае, когда сигнала нет, а  $P_i = P_i(z_{11}, \dots, z_{nN})$  — соответствующая плотность вероятности, когда сигнал есть, например,  $i$ -й частоты. Следовательно, задача заключается в том, чтобы определить, есть или нет сигнал на любой одной из  $N$  частот, что эквивалентно задаче установления (после наблюдения напряжений  $z_{jk}$ ), является ли совокупность  $z_{jk}$  распределением, соответствующим  $P_0$  или же любому одному из  $P_i$ . Метод Неймана—Пирсона ограничен решением относительно  $P_0$  и только одного из  $P_i$  и, строго говоря, в этом случае неприменим.

## 2. Общее решение задачи

Следуя Вальду, мы прежде всего зададим величины потерь при различных возможных исходах, получающихся после принятия решения, а именно: нулевую потерю, когда сигнал правильно обнаруживается или же правильно устанавливается его отсутствие, и единичную потерю, когда утверждается, что сигнал есть, в то время как на самом деле его нет, или же сигнал пропускается, когда в действительности он есть. Кроме того, введем ряд априорных вероятностей  $\xi_i$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ).  $\xi_0$  соответствует отсутствию сигнала, а  $\xi_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) — присутствию его на частотах  $1, 2, \dots, N$ . Эти события взаимно исключают друг друга (согласно сделанному предположению) и, следовательно:

$$\xi_0 + \sum_{i=1}^N \xi_i = 1.$$

Теперь предположим, что эти вероятности нам известны (от этого предположения мы откажемся позднее). Как показал Вальд, в таком случае следует утверждать, что сигнал есть (после наблюдения напряжений  $z_{ik}$ ), когда

$$\sum_{i=1}^N \xi_i P_i \geq \xi_0 P_0 \quad (2)$$

и что сигнала нет в противном случае [Л. 5]. В этом состоит так называемое решение Байеса. На основании вышеуказанного правила принятия решения вероятность ложной тревоги дается уравнением

$$F = \int P_0 dz, \quad z = (z_{11}, \dots, z_{nN}),$$

а вероятность обнаружения сигнала на  $i$ -й частоте — уравнением

$$P_0^{(i)} = \int P_i dz, \quad z = (z_{11}, \dots, z_{nN}).$$

Оба интеграла берутся по области, определяемой уравнением (2). Средний риск

$$r = \xi_0 F + \sum_{i=1}^N \xi_i (1 - P_0^{(i)})$$

дает нам среднюю потерю, ожидаемую от ложных тревог и от ошибочных обнаружений. Если бы априорные вероятности были известны, тогда, хотя бы в принципе,  $r$  можно было бы рассчитать. Решение Байеса оптимально в том смысле, что оно обращает в минимум средний риск  $r$ .

Однако на практике априорные вероятности обычно неизвестны, и порядок получения решения необходимо построить так, чтобы обойтись без их знания. Покажем, что если все  $\xi_i$  равны, то решение Байеса приводит к минимальному решению проблемы, т. е. к наилучшему решению для наиболее неблагоприятного случая. Подход к решению проблемы обнаружения и в этом смысле не зависит от  $\xi_i$ .

Если  $\xi_i = \xi_1$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ), уравнение (2) запишется так:

$$\sum_{i=1}^N \frac{P_i}{P_0} \geq \lambda > 0; \quad \left( \lambda = \frac{\xi_0}{\xi_1} \right). \quad (3)$$

При этом

$$P_0^{(i)} = P_0^{(1)} = P_0(\lambda), \quad F = F(\lambda).$$

Теперь предположим, что  $\lambda$ , а следовательно,  $\xi_0$  и  $\xi_1$  были заданы так, что  $F(\lambda) = 1 - P_0(\lambda)$ . Тогда средний риск  $r$  равен:

$$r = \xi_0 F + N \xi_1 F = F, \text{ так как } (\xi_0 + N \xi_1) = 1,$$

т. е. он равен сумме риска от каждой по отдельности возможной ошибки. Но это и есть свойство, характеризующее минимаксное решение, как было показано Вальдом [Л. 6].

На самом деле об этом результате можно сказать даже несколько больше. Не существует решения лучше, чем минимаксное, в том смысле, что оно гарантирует меньшие вероятности ложных тревог при одной и той же вероятности обнаружения или наоборот. Однако можно было бы спросить, есть ли другие правила принятия решения, столь же хорошие? Ответ на этот вопрос отрицательный. Это следует из аргументации Вальда, который указывает, что минимаксное решение является также решением Байеса. Таким образом, можно утверждать, что все другие решения хуже, потому что они дают либо большие вероятности ложных тревог, либо худшее обнаружение, либо и то и другое вместе.

Применим теперь общее правило принятия решения (3) к двум конкретным случаям обнаружения когерентного и некогерентного синусоидального колебания в шуме.

### 3. Когерентный сигнал

В этом случае фаза синусоидального колебания предполагается известной и одинаковой для каждой развертки.

Совместная функция плотности вероятности мгновенных значений выходного напряжения  $z_{jk}$  на всех  $N$  частотах и  $n$  развертках равна (в отсутствие сигнала):

$$P_0 = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^N \Phi(z_{jk}). \quad (4)$$

Когда присутствует, например, сигнал  $i$ -й частоты, соответствующая плотность вероятности равна:

$$P_i = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^N \Phi(z_{jk}) \Phi(z_{ji} - a \cos \omega_i t - b \sin \omega_i t) / \Phi(z_{ji}). \quad (5)$$

В данном случае правило (3) дает:

$$\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n \Phi(z_{ji} - a \cos \omega_i t - b \sin \omega_i t) / \Phi(z_{ji}) \geq \lambda, \quad (6)$$

где  $\lambda$  — определенная величина, связанная с пороговым напряжением  $V_T$ .

Выражение (6) можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^N B_i(t) \exp \left[ A_i(t) \sum_{j=1}^n z_{ji} \right] \geq \lambda \quad (7)$$

при

$$\left. \begin{aligned} A_i(t) &= a \cos \omega_i t + b \sin \omega_i t; \\ B_i(t) &= \exp \left[ -\frac{n}{2} A_i^2(t) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Правило принятия решения (7) имеет неудобную форму, так как явным образом зависит от времени  $t$ . В самом деле, величина  $\lambda$ , рассчитываемая на основании заданной величины вероятности ложной тревоги, должна явно изменяться во времени и, следовательно, должна быть функцией фазы сигнала. Такую зависимость от времени можно исключить, если допустить, что обнаружение можно выполнить, детектируя лишь максимум цугов колебаний, представляющих сигнал. При этом условии формулы можно упростить. Если максимальная величина  $A_i$  равна отношению пиковой величины сигнала к шуму, (7) запишется в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^N \exp \left[ a \sum_{j=1}^n z_{ji} \right] > V_T. \quad (9)$$

Порог  $V_T$  можно теперь установить независимо от времени. При малых значениях (6) (малых отношениях сигнал—шум) (9) приводится к следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n z_{ji} > V_T. \quad (10)$$

Формула (9) дает решение нашей задачи. Способ обработки, который указывает уравнение (9) (см. также рис. 1), получается следующим:

1.  $z_{ij}$ , т. е. амплитуды синусоидальных колебаний каж-

дой из возможных частот должны быть получены прежде всего. Это следует сделать с помощью линейной техники (можно применить для этой цели взаимокорреляционные приборы, которые показаны на рис. 1 в виде тройки блоков: фазовращателя, множителя и фильтра нижних частот — одна тройка на каждую из частот).

2. Далее эти амплитуды интегрируются по всем разверткам (интегрирование можно выполнить такими же филь-

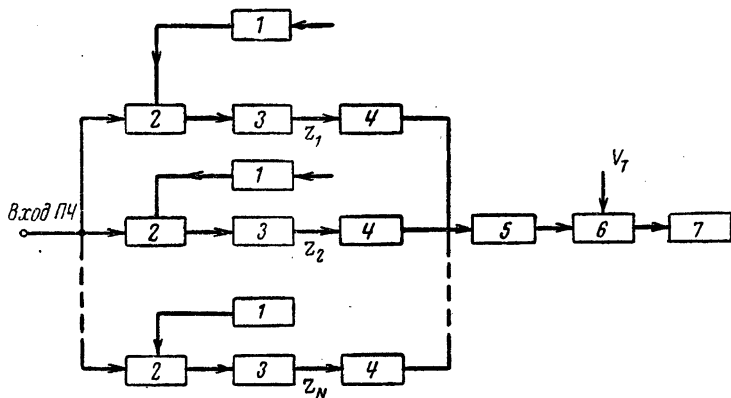


Рис. 1. Блок-схема когерентного обнаружения.

1 — фазовращатель; 2 — перемножитель; 3 — фильтр нижних частот; 4 — экспоненциальный преобразователь; 5 — сумматор (накопитель); 6 — пороговое устройство; 7 — индикатор сигнала.

$$\sum_{i=1}^N \exp \left[ a \sum_{j=1}^n z_{ji} \right] \geq V_T.$$

трами, как и раньше, нужно только увеличить в них время интегрирования).

3. Выходное напряжение каждого фильтра нижних частот необходимо пропустить через нелинейный прибор с экспоненциальной переходной характеристикой (4 на рис. 1).

4. Выходное напряжение нелинейных приборов должно быть проинтегрировано по всем частотам.

5. Применяется пороговое устройство, а индикатор указывает любое напряжение, превосходящее этот порог.

#### 4. Некогерентный сигнал

В этом случае считается, что фаза сигнала от одной развертки к следующей совершенно случайна. Тогда задачу

обнаружения можно сформулировать следующим образом. Если бы фаза сигнала  $\varphi$  была известна для  $j$ -й развертки, то плотность вероятности (напряжение  $z_{ij}$  в момент времени  $t$ ) на  $i$ -й частоте была бы равна:

$$\Phi [z_{ji} - a \cos (\omega_i t - \varphi)]. \quad (11)$$

Однако  $\varphi$  в действительности является случайной величиной, характеризующейся плотностью вероятности,

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} d\varphi. \quad (12)$$

Таким образом, плотность вероятности наблюдения  $z_{ji}$  в определенный момент времени  $t$  на  $j$ -й развертке и  $i$ -й частоте равна:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi [z_{ji} - a \cos (\omega_i t - \varphi)] d\varphi. \quad (13)$$

Совместная плотность вероятности для всех  $N$  частот и  $n$  разверток равна:

$$P_0 = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^N \Phi (z_{jk}) \quad (14)$$

— в случае, когда сигнала нет.

Она равна:

$$P_i = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^N \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi (z_{jk}) d\varphi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi [z_{jk} - a \cos (\omega_i t - \varphi)] d\varphi}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi (z_{ji}) d\varphi}, \quad (15)$$

когда сигнал присутствует на  $i$ -й частоте. Опять необходимо решить, является ли наблюдаемая совокупность  $z_{jk}$  распределенной согласно  $P_0$  или распределенной в соответствии с какой-либо из плотностей вероятностей  $P_i$ . Правило принятия решения, устанавливаемое (3), опять служит критерием обнаружения. Согласно последнему следует утверждать, что сигнал есть всегда, когда:

$$\sum_{i=1}^N \frac{P_i}{P_0} \geq \lambda, \quad (16)$$



где  $\lambda$  связано с пороговым напряжением  $V_T$ . Из (4) и (5) находим:

$$\frac{P_i}{P_0} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[ z_{ji} a \cos(\omega_i t - \varphi) - \frac{a^2}{2} \cos^2(\omega_i t - \varphi) \right] d\varphi. \quad (17)$$

Вычисление интеграла весьма трудоемко. После вычисления получается:

$$\frac{P_i}{P_0} = \prod_{j=1}^n 2 \exp \left( -\frac{a^2}{4} \right) \sum_{r=0}^{\infty} I_{2r}(az_{ji}) I_r \left( \frac{a^2}{4} \right). \quad (18)$$

Поэтому правило принятия решения (16) можно записать так:

$$\sum_{i=1}^N \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \ln \left[ \sum_{r=0}^{\infty} I_{2r}(az_{ji}) I_r \left( \frac{a^2}{4} \right) \right] \right\} \geq V_T. \quad (19)$$

Здесь  $V_T$  опять таки определяется по заданной вероятности ложных тревог.

Формула (19) указывает наилучший способ обработки для установления наличия сигнала (рис. 2):

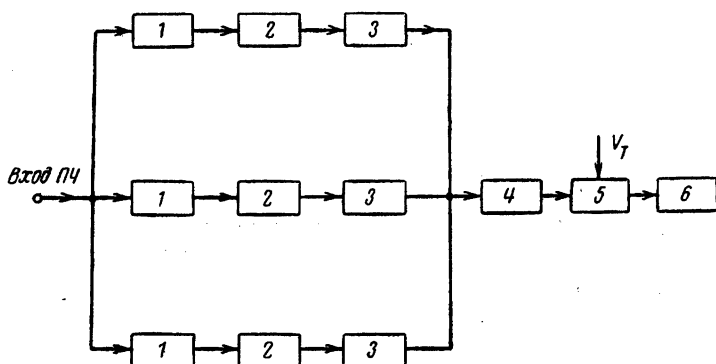


Рис. 2. Блок-схема обнаружения некогерентного сигнала.

1 — логарифмический детектор; 2 — сумматор (по разверткам); 3 — экспоненциальный преобразователь; 4 — сумматор; 5 — пороговое устройство; 6 — индикатор сигнала.

1. Сигнал каждой частоты демодулируется вторым детектором, характеристика которого подчиняется закону

$$\ln \sum_{r=0}^{\infty} I_{2r} (az_{ji}) I_r \left( \frac{a^2}{4} \right). \quad (20)$$

2. Выходные напряжения детекторов интегрируются по всем разверткам.

3. Выходные напряжения интеграторов подаются (каждое в отдельности) на нелинейный прибор экспоненциального типа.

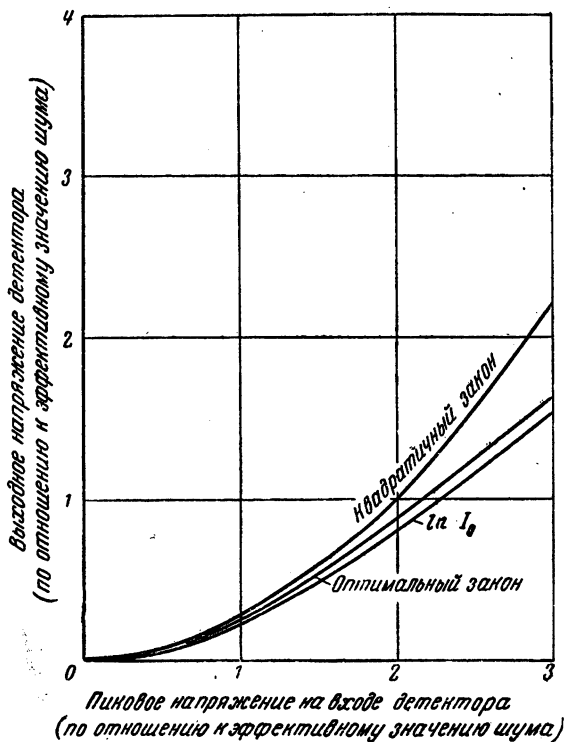


Рис. 3. Оптимальный закон детектирования (при обнаружении сигнал/шум  $\approx 1$ ).

4. Выходные напряжения последних суммируются по всем частотам.

5. Напряжение с сумматора подается на пороговое устройство, а с последнего — на индикатор, который указывает наличие сигнала.

Оптимальный закон детектирования (19), получающийся из этого анализа, на рис. 3 сравнивается с квадратичным и с законом  $\ln I_0$ . Видно, что оптимальный детектор ненамного отличается от двух последних при умеренных отношениях сигнал/шум. Действительно, при весьма малых отношениях сигнал/шум

$$\ln \sum_{r=0}^{\infty} I_{2r}(az_{ji}) I_r \left( \frac{a^2}{4} \right) \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n z_{ji}^2.$$

Отсюда видно, что квадратичный детектор в этом случае является наилучшим.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Middleton D., Statistical criteria for the detection of pulsed carriers in noise, Journ. Appl. Phys., 1953, v. 24, p. 371, (см. стр. 189 настоящего сборника).
2. Van Meter D. and Middleton D., Modern statistical approaches to reception in communication theory, Trans. IRE, Sept. 1954, PGIT-4, p. 119.
3. Wald A., Statistical decision function, New York, 1950.
4. Там же, стр. 126.
5. " " " 124.
6. " " " 18.
7. " " " 101.

# ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В ШУМАХ<sup>1</sup>

*А. Беннер, Р. Дренник*

## Краткое содержание

Предложено рассмотрение проблемы обнаружения сигнала, при котором решается лишь вопрос о наличии или отсутствии импульсного сигнала независимо от его местоположения. Такое «обнаружение на интервале», как его можно назвать, рассматривается как задача статистической теории выбора решения при сложных гипотезах. Выведено оптимальное правило принятия решения и доказано его принципиальное преимущество перед другими. Описаны блок-схемы, иллюстрирующие это правило. Математические выкладки для обоснования оптимального правила принятия решения, показывающие его преимущества, приведены только в некоторых специальных случаях, один из которых рассмотрен в виде примера.

## ВВЕДЕНИЕ

Вопрос об обнаружении импульсных сигналов в шуме был рассмотрен в недавно опубликованной серии статей [Л. 1—3], казалось, исчерпывающим образом. Тем не менее, можно развить интересное видоизменение обычного подхода, дающее новые и по крайней мере в принципе лучшие результаты. Этот вариант возникает при следующем рассуждении. Под «обнаружением импульсного сигнала» обычно понимают статистическое решение, устанавливающее наличие или отсутствие сигнала в данной точке развертки на экране. Это значит, что если решение отрицательно, то наличие сигнала отвергается. Положительное решение определяет не только наличие сигнала, но и его положение на развертке. Статистически такая формулировка задачи вполне законна.

Фактически, однако, вопрос о наличии или отсутствии сигнала часто не связан с вопросом о положении импуль-

---

<sup>1</sup> Benner A., Drenick R., RCA-Rev., 16, № 3, 461—479, September 1955.

са. В сущности, если речь идет лишь об обнаружении, положение импульса безразлично. В этом случае нужно только решить, присутствует или отсутствует импульсный сигнал в данной области обзора. Вопрос о его положении можно рассматривать уже независимо. Интуитивно кажется, что решить вопрос о наличии или отсутствии сигнала независимо от вопроса о его положении легче, чем при обычном процессе обнаружения, а следовательно, такое решение может быть поэтому более эффективно.

Рассматриваемый вариант схемы является оптимальным вариантом, вытекающим из соображений статистической теории, хотя он и может показаться противоречащим представлениям инженеров-связистов. Вероятности обнаружения, которые дает оптимальная схема, лишь немного больше вероятностей, даваемых другими разумно построенными схемами. Фактически ее превосходство может быть легко утеряно из-за технических компромиссов, всегда неизбежных при практическом осуществлении таких схем. Некоторые схемы, близкие к полученной, могут оказаться заслуживающими внимания по причинам, не связанным с вопросом близости к оптимальной схеме, скажем, из-за легкости их реализации.

Мы будем предполагать, что поставлена задача только обнаружить сигнал на линии развертки и что его положение безразлично. Рассматриваемый процесс будем называть «обнаружением на интервале» в отличие от обычного «обнаружения в точке». Будут рассмотрены только процессы принятия решения, связанные с однократным наблюдением, которые следует сравнивать по даваемым ими вероятностям обнаружения сигналов.

В начале работы формулируется задача обнаружения на интервале и получается решение, непосредственно связанное с «минимаксным». Далее рассматривается специальный случай обнаружения импульсного сигнала на фоне шума, проводится сравнение с обычным способом обнаружения в точке и предлагаются блок-схемы приемного устройства. Рассматривается также пример, показывающий теоретическое превосходство способа обнаружения на интервале.

### **Формулировка проблемы обнаружения на интервале**

Так же как и в работах [Л. 1—3], мы предполагаем, что решение относительно наличия или отсутствия сигнала должно быть сделано на основе анализа записи  $n$  последо-

вательных разверток видеонапряжений, в каждой из которых присутствует сигнал, если он имеется. Предполагается также, что каждая линия развертки состоит из  $N$  последовательных значений напряжения  $v_{jk}$  ( $j=1,2,\dots,n$ ;  $k=1,2,\dots,N$ ). Для простоты изложения предположим, кроме того, что расстояние на линии развертки между точками, в которых производятся измерения напряжения, равно ширине импульса. Поэтому сигнал (если он есть) будет зарегистрирован при одном и только одном измерении. Заметим, наконец, что для сохранения сходства с радиолокационной задачей следует предположить одно и то же положение импульсного сигнала во всех  $n$  развертках, если он появляется. Таким образом, если мы в 1-й развертке натолкнулись на сигнал при  $i$ -ом измерении, то же будет при измерениях и во всех последующих развертках.

Совместную плотность вероятности измеряемых напряжений при отсутствии сигнала обозначим:

$$P_0 = P_0(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}).$$

Соответствующая плотность при наличии сигнала в положении  $i$  на каждой из разверток равна:

$$P_i = P_i(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}).$$

Вначале никаких предположений о плотностях вероятности делать не будем и найдем общее решение. Далее задача будет рассмотрена при некоторых дополнительных предположениях.

Будем решать статистическую задачу, принадлежит ли данный ряд измеренных напряжений  $v_{jk}$  к распределению  $P_0$  или (так как положение импульса несущественно) к одному из  $P_i$ .

### Решение статистической задачи

Задача обнаружения на интервале представляет собой на языке статистики задачу выбора гипотез. Однако мы имеем здесь дело со случаем так называемых сложных гипотез, так как гипотеза отсутствия сигнала должна сравниваться с  $N$  альтернативными гипотезами. В этом заключается отличие нашей задачи от обычной задачи обнаружения в точке, где сравниваются только простые гипотезы, и решение которой может быть получено хорошо известным и весьма общим методом, даваемым леммой

Неймана—Пирсона [Л. 4]. Соответствующее решение проблемы сложных гипотез известно менее широко.

В этом разделе мы получим решение методом, совпадающим по существу с тем, которым пользовались Леман и Штейн [Л. 5] и Вальд [Л. 6] в теории функций выбора. Их вывод в терминах интересующей нас задачи общей теории связи выглядит следующим образом.

Предположим сначала, что дан набор априорных вероятностей  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  того, что сигнал в том случае, когда он вообще появляется, окажется в положении  $1, 2, \dots, n$  соответственно. При этом предположении нужно получить решение о наличии или отсутствии сигнала.

Как будет показано, следует установить следующее правило обнаружения: после измерения напряжений  $v_{jk}$  сигнал объявляется присутствующим, если

$$\lambda P_0(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}) \leq \sum_{i=1}^N \xi_i P_i(v_{11}, \dots, v_{12}, \dots, v_{nN}), \quad (1)$$

где  $\lambda$  — постоянная, которая должна быть определена по заданной вероятности ложной тревоги. Это правило обнаружения имеет тот недостаток, что вероятность обнаружения оказывается, вообще говоря, зависящей от положения сигнала  $i$ . Однако оно оптимально в том смысле, что дает максимальное значение для «местной вероятности обнаружения»  $P_{Di}$ , усредненной по всем положениям  $i$ .

На практике, однако, априорные вероятности  $\xi_i$  вопреки сделанному предположению не заданы или же введение их только ради использования уравнения (1) представляется искусственным и неубедительным. В таком случае приведенный выше метод решения не может быть использован, поскольку он основан на априорных данных; более того, сам критерий сравнения теряет смысл из-за того, что нельзя найти усредненную вероятность обнаружения. Тем не менее, выход из положения может быть найден с помощью рассуждения, предложенного Вальдом.

Он рекомендует определять специальный набор априорных вероятностей, обозначаемых ниже через  $\xi_i^*$ , которые дают оптимальное правило выбора. Это правило оптимально в том смысле, что местные вероятности обнаружения, к которым оно ведет, по крайней мере в одной точке больше, чем даваемые любым другим возможным правилом выбора.

Правило выбора, находящееся таким путем, похоже на правило, даваемое неравенством (1), и имеет вид

$$\lambda^* P_0(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}) \leq \sum_{i=1}^N P_i(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}).$$

Решение, даваемое неравенством (1), тесно связано с тем решением, которое по терминологии выбора называют решением Байеса. Второе решение — это так называемое минимаксное решение.

### Доказательство оптимальности

Проведем теперь с достаточной степенью общности доказательство высказанных выше положений. Прежде всего покажем, что при заданном наборе априорных вероятностей  $\xi_i$  правило выбора (1) является действительно оптимальным. Рассмотрим  $(nN)$ -мерное пространство переменных  $v_{jk}$ . В этом пространстве неравенство (1) определяет область, обозначаемую ниже как  $\omega$ . Любое другое конкурирующее правило выбора определило бы некую другую область  $\omega'$ . Обе области характеризуются тем, что сигнал объявляется присутствующим, если точка, соответствующая наблюдаемым значениям  $v_{jk}$ , попадает в область, определяемую правилом выбора.

Для того чтобы конкурирующие правила принятия решения были сравнимыми, следует потребовать, чтобы они давали одинаковые вероятности ложного обнаружения. Это требование выражается уравнением

$$F = \int_{\omega} P_0(v) dv = \int_{\omega'} P_0(v) dv,$$

в котором под  $v$  подразумевается совокупность переменных  $v_{jk}$ . Правило (1) будет лучшим из двух рассматриваемых, если средняя вероятность правильного обнаружения, к которой оно ведет, а именно

$$D = \sum_{i=1}^N \xi_i P_{Di} = \sum_{i=1}^N \xi_i \int P_i(v) dv,$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_i = 1,$$



больше, чем соответствующая вероятность для конкурирующего правила:

$$D = \sum_{i=1}^N \xi_i \int_{\omega'} P_i(v) dv.$$

При помощи рассуждения, применяемого Нейманом и Пирсоном, можно показать в этом смысле, что правило (1) является действительно наилучшим. Обозначим через  $\omega''$  область, если она существует, общую с  $\omega$  и  $\omega'$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\omega - \omega''} P_0(v) dv &= \int_{\omega} P_0(v) dv - \int_{\omega''} P_0(v) dv = \\ &= F - \int_{\omega''} P_0(v) dv = \int_{\omega' - \omega''} P_0(v) dv. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя (1) и (2), аналогичным образом получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \xi_i \int_{\omega - \omega''} P_i(v) dv &\geq \lambda \int_{\omega - \omega''} P_0(v) dv = \\ &= \lambda \int_{\omega' - \omega''} P_0(v) dv > \sum_{i=1}^N \xi_i \int_{\omega' - \omega''} P_i(v) dv. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее неравенство выполняется, поскольку область  $\omega$  лежит полностью вне области  $\omega' - \omega''$ , так что

$$\lambda P_0(v) > \sum_{i=1}^N \xi_i P_i(v) \text{ в области } (\omega' - \omega'').$$

Теперь, добавив  $\sum_{i=1}^N \xi_i \int_{\omega''} P_i(v) dv$  к обеим сторонам неравенства (3), получим:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i \int_{\omega} P_i(v) dv > \sum_{i=1}^N \xi_i \int_{\omega'} P_i(v) dv. \quad (4)$$

Таким образом, показано, что правило (1) является наилучшим из всех возможных в случае, когда даны априорные вероятности  $\xi_i$  или же их существование может быть предположено.

Остается выяснить, как следует действовать, если подобные априорные знания не могут быть предположены.

Как было замечено ранее, некоторые из полученных результатов можно использовать, если удастся найти специальный набор априорных вероятностей  $\xi_i^*$ . Мы введем теперь этот набор  $\xi_i^*$ , определив его с помощью одного его свойства.

Правило выбора (1), а следовательно, и область  $\omega$  в пространстве переменных напряжений  $v_{jk}$  зависят от выбора вероятностей  $\xi_i$ . Это верно и для нашего специального набора  $\xi_i^*$  и соответствующей области  $\omega^*$ . Мы определим  $\xi^*$ , потребовав, чтобы соответствующие местные вероятности, а именно

$$P_{Di}^* = \int_{\omega^*} P_i(v) dv,$$

были независимы от точки  $i$ , т. е. чтобы

$$P_{Di}^* = P_D^*. \quad (5)$$

Мы не будем сейчас рассматривать вопрос о том, как определить вероятности  $\xi_i^*$ . Покажем сначала, что они действительно обладают требуемым свойством, т. е. что любой другой набор  $\xi_i$  даст такие местные вероятности обнаружения  $P_{Di}$ , что по крайней мере одна из них меньше, чем вероятность обнаружения  $P_D^*$ , соответствующая набору  $\xi_i^*$ ,

$$P_D^* \geq \inf_i P_{Di}. \quad (6)$$

Действительно, используя неравенство (4), получим:

$$\begin{aligned} P_D^* - \inf_i P_{Di} &= \left( P_D^* - \inf_i P_{Di} \right) \sum_{i=1}^N \xi_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \xi_i \left[ \int_{\omega^*} P_i(v) dv - \inf_i \int_{\omega} P_i(v) dv \right] \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^N \xi_i \left[ \int_{\omega^*} P_i(v) dv - \int_{\omega} P_i(v) dv \right] > 0, \end{aligned}$$

что и доказывает (6),

Таким образом, можно найти такой набор  $\xi_i^*$ , что соответствующая вероятность обнаружения  $P_D^*$  по крайней мере для одного из положений импульса будет больше, чем вероятность обнаружения, соответствующая любому другому набору  $\xi_i$ . В этом смысле этот набор является оптимальным.

В рассматриваемом случае набор  $\xi_i^*$  можно легко найти, если предположить, что  $P_0(v)$  и  $P_i(v)$  симметричны в переменных  $v_{jk}$ . Если это так, то набор

$$\xi_i^* = \frac{1}{N}, \quad (7)$$

очевидно, удовлетворяет требованию (5).

Действительно, не только равны друг другу местные вероятности обнаружения, как требовалось, но также и их среднее значение, с помощью которого производилось сравнение в случае заданных априори  $\xi_i$ , равно местным вероятностям:

$$D = \sum_{i=1}^N \xi_i^* P_D^* = P_D^*.$$

Мы можем, таким образом, заключить, что при отсутствии априорной информации относительно положения сигнала правило выбора (1) должно быть изменено согласно уравнению (7), т. е. сигнал должен объявляться присутствующим, если

$$\lambda^* P_0(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}) \leq \sum_{i=1}^N P_i(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}),$$

$$\lambda^* = N\lambda. \quad (8)$$

Если принять такое правило обнаружения, то при заданной вероятности ложной тревоги вероятность обнаружения оказывается больше, чем вероятность обнаружения, даваемая любым другим возможным правилом принятия решения, по крайней мере для одного положения сигнала. Этот результат имеет место при весьма общих условиях. В частности, он, вообще говоря, не зависит от природы и интерпретации переменных  $v_{jk}$  и от функций распределения  $P_0$  и  $P_i$ . Это обстоятельство используется в рассматриваемом ниже специальном примере, а также в другой работе [Л. 7].

## Применение к обнаружению импульсных сигналов

Рассмотрение проблемы обнаружения импульсного сигнала на развертке на фоне шума усложняется еще и тем обстоятельством, что до сих пор не найдено замкнутых выражений для  $P_0$  и  $P_i$  [Л. 8]. Поэтому мы рассмотрим математическую модель, сохраняющую основные черты задачи, но существенно упрощенную по сравнению с реальной ситуацией.

Прежде всего предположим, что статистическая зависимость между напряжениями, измеренными в соседних точках развертки, настолько мала, что ею можно пренебречь. Плотность вероятности для индивидуальных видеонапряжений  $v_{jk}$  будет тогда

$$f_0(v_{jk}) = v_{jk} \exp\left(-\frac{v_{jk}^2}{2}\right)$$

— при отсутствии сигнала и

$$f_s(v_{jk}) = v_{jk} \exp\left(-\frac{a^2 + v_{jk}^2}{2}\right) I_0(av_{jk})$$

— при наличии сигнала. Здесь  $I_0$  — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Следовательно, при сохранении употреблявшихся ранее обозначений

$$\begin{aligned} P_0(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}) &= \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^N v_{jk} \exp\left(-\frac{v_{jk}^2}{2}\right); \\ P_i(v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nN}) &= \exp\left(-\frac{na^2}{2}\right) \prod_{j=1}^n I_0(av_{jk}) \times \\ &\times \prod_{k=1}^N v_{jk} \exp\left(-\frac{v_{jk}^2}{2}\right). \end{aligned}$$

В этих уравнениях  $a$  — отношение сигнал/шум на входе, а за единицу измерения напряжений принято среднеквадратичное напряжение шума. Оптимальное правило принятия решения можно записать в форме неравенства

$$\lambda^* \leq \sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^n I_0(av_{jk}) = \sum_{k=1}^N \exp\left[\sum_{j=1}^n \ln I_0(av_{jk})\right]. \quad (9)$$

Правило содержит ожидаемую величину  $a$  отношения сигнал/шум. Это значит, что даваемая этим правилом выбора вероятность обнаружения будет оптимальной только по отношению к одному определенному значению отношения сигнал/шум. В реальных задачах в качестве такового следует, по-видимому, брать наименьшее значение сигнал/шум, которое еще признается интересным. Для больших значений  $a$  правило уже не будет давать оптимальных результатов, но это несущественно, так как при сильном сигнале вопрос не столь критичен.

Полезно сравнить наше правило с правилом, приводимым, например, в работе (2), которое получается при обнаружении в точке

$$\lambda \leq \sum_{j=1}^n \ln I_0(av_{jk}).$$

Сравнение произведем следующим образом: «точный» обнаружитель указывает наличие и положение сигнала, если выражение справа от знака неравенства больше или равно постоянной  $\lambda$ . Для того чтобы сравнение было справедливым, мы должны считать верным указание точечного обнаружителя и в том случае, когда присутствие сигнала констатировано правильно, но положение его указано неверно. Это значит, что мы считаем принятие решения правильным, если сигнал в том месте, где он действительно находился, не замечен, но объявлена ложная тревога в другом месте. Однако точечному обнаружителю приписывается ложная тревога, если он в отсутствие сигнала объявляет ее в какой-либо точке интервала развертки.

Математически это можно выразить следующим образом. Введем функцию  $\delta_k$ , равную нулю, если выход детектора в точке ниже порога, и равную единице, если он выше. Правило точечного обнаружения во всем интервале можно записать так:

$$\sum_{k=1}^N \delta_k \left[ \sum_{j=1}^n \ln I_0(av_{jk}) - \lambda \right] > 0. \quad (10)$$

Такое правило в соответствии с результатами, полученными выше, не является оптимальным.

В принципе это можно показать, вычислив вероятности обнаружения, к которым оно приводит, и сравнив их с вероятностями, даваемыми оптимальным правилом (9). К сожалению, для правил (9) и (10) вычисления очень трудо-

емки. Случаи, в которых необходимые для сравнения вычисления могут быть выполнены, весьма редки; один из найденных немногочисленных примеров приведен ниже. Более того, результаты этих вычислений не оправдывают затрачиваемого на них труда.

Во всех случаях, когда оценки могли быть фактически сделаны, результаты, даваемые оптимальным правилом принятия решения (8) и его различными вариантами, оказались лишь немногим лучше результатов, даваемых дру-

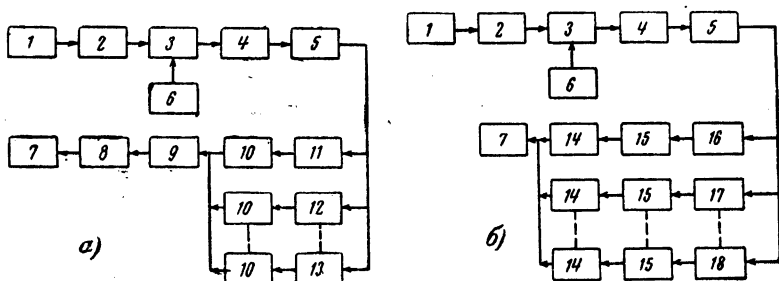


Рис. 1. Схемы обнаружения, иллюстрирующие правила принятия решения (9) и (10).

*a* — блок-схема обнаружения на интервале; *б* — блок-схема обнаружения в точке; 1 — блок промежуточной частоты; 2 — линейный детектор; 3 — усилитель с коэффициентом  $a$ ; 4 — усилитель с логарифмической характеристикой  $\lg I_0$ ; 5 — блок памяти; 6 — регулировка коэффициента усиления; 7 — блок сигнала тревоги; 8 — порог  $\lambda^*$ ; 9 — суммирование  $\Sigma_2$ ; 10 — усилитель с экспоненциальной характеристикой; 11 — суммирование  $\Sigma_{i1}$ ; 12 — суммирование  $\Sigma_{i2}$ ; 13 — суммирование  $\Sigma_{iN}$ ; 14 — реле; 15 — порог  $\lambda$ ; 16 — суммирование  $\Sigma_{i1}$ ; 17 — суммирование  $\Sigma_{i2}$ ; 18 — суммирование  $\Sigma_{iN}$ .

гими, не противоречащими здравому смыслу правилами. Для наиболее тщательно изученного частного случая, когда  $a$  мало, можно показать, что правила (9) и (10) совпадают. Другими словами, наличные данные, хотя и носят косвенный характер, не дают указаний на то, что употребление оптимального правила (9) приведет к существенному выигрышу в вероятностях обнаружения сигналов.

Два правила решения (9) и (10) можно сравнить с помощью блок-схем, реализующих эти правила (рис. 1). До некоторой точки обе блок-схемы (*a* и *б*) совпадают. Так, второй детектор должен быть строго линейным, а за ним должен следовать усилитель с коэффициентом усиления  $a$ , устанавливаемым соответственно отношению сигнал/шум на входе. Далее за ним расположен нелинейный элемент, образующий  $\ln I_0(av)$ . Затем должно находиться устройство, запоминающее напряжения  $v_{jk}$  в  $N$  точках каждой

развертки и суммирующее в каждой точке  $n$  значений, даваемых последовательными развертками  $\Sigma_{ik}$ . До этой точки обнаружитель с точечным обнаружением не отличается от обнаружителя с обнаружением на интервале. Далее, однако, процесс обработки данных становится различным. При обнаружении в интервале результаты этих  $N$  суммирований должны быть поданы через нелинейные усилители с экспоненциальными амплитудными характеристиками на вход другого интегратора  $\Sigma_2$ , который произведет окончательное суммирование. После сравнения с порогом  $\lambda^*$  объявляется решение. Величина порога подбирается так, чтобы вероятность ложной тревоги была равна заданной.

При обнаружении в точке за устройством, суммирующим последовательные развертки, следует сравнение с порогом  $\lambda$  и реле, включающееся в том случае, если сигнал оказывается выше порога. Параллельное соединение контактов реле, соответствующих  $N$  точкам развертки, фактически эквивалентно второму суммированию в (10). Включение любого из реле вызывает тревогу.

### Работа устройства в специальном случае

На первый взгляд трудно согласиться с тем, что устройство, названное выше обнаружителем на интервале, должно работать лучше, чем обычный обнаружитель в точке. При взгляде на схему сразу кажется, что чем шире интервал, тем больше мы вносим шумов, и, следовательно, тем хуже делаемый выбор. Поэтому мы приводим специальный пример, показывающий, что обнаружение на интервале может действительно давать лучшие результаты, чем обнаружение в точке. Пример носит несколько искусственный характер, но это один из немногих случаев, который можно рассмотреть до конца. Более того, в этом примере можно сделать оценки для кажущегося особо сомнительным случаем очень широкого интервала.

Для сравнения мы воспользуемся методом, предложенным в предыдущих разделах. Как обнаружитель в точке, так и обнаружитель на интервале создают ложную тревогу, если они объявляют ее где-либо на интервале при полном отсутствии сигнала. Допустимая вероятность ложной тревоги одинакова для обоих обнаружителей и равна  $F$ , для чего порог обнаружения в каждом устройстве устанавливается соответствующим образом. В случае, когда наличие сигнала констатируется правильно, ошибки обна-

ружителя в точке при определении положения не засчитываются.

Как и в предыдущих разделах, предполагается, что входной сигнал наблюдается в  $N$  дискретных точках развертки и что полученные результаты измерений в этих точках статистически независимы. Плотности вероятности входных напряжений будут, однако, взяты в виде (тип III распределения Пирсона)

$$f_0(v_{jk}) = \frac{\beta_0^\alpha}{\Gamma(\alpha)} v_{jk}^{\alpha-1} \exp(-\beta_0 v_{jk}); (v_{jk} \geq 0)$$

— при отсутствии сигнала и

$$f_s(v_{jk}) = \frac{\beta_s^\alpha}{\Gamma(\alpha)} v_{jk}^{\alpha-1} \exp(-\beta_s v_{jk}); (v_{jk} \geq 0)$$

— при наличии сигнала. Эти распределения, конечно, не являются действительными распределениями видеонапряжений, но при подходящих параметрах  $\alpha$  и  $\beta$  они могут быть подобраны, по крайней мере по форме, весьма сходными с последними (1). В случае, когда можно предположить

$$0 < \beta_s < \beta_0 < \frac{3}{2} \beta_s; (n\alpha > 1),$$

они имеют преимущество удобства в обращении.

Заметим, что правила, описанные Миддлтоном для случая оптимального обнаружения в точке и нами — для случая обнаружения на интервале, не зависят от конкретного вида распределений вероятности. Поэтому из уравнения (8) находим, что для получения оптимальных результатов следует пользоваться правилом

$$\sum_{k=1}^N \delta_k \left[ \sum_{j=1}^n v_{jk} - \lambda \right] > 0 \quad (11)$$

— в случае обнаружения в точке и

$$\sum_{k=1}^N \exp \left[ (\beta_0 - \beta_s) \sum_{j=1}^n v_{jk} \right] \geq \lambda^* \quad (12)$$

— в случае обнаружения на интервале.

Требуемые для выполнения операций (11) и (12) блок-схемы показаны на рис. 2. Они очень похожи на схемы рис. 1 для видеонапряжений.

Задача теперь заключается в вычислении вероятностей обнаружения сигналов, соответствующих этим двум правилам выбора.



Как было замечено выше, это следует делать для случая, когда интервал очень широк, т. е.  $N$  велико. Метод выполнения оценок изложен в приложении. Он интересен тем, что на этом примере можно видеть характер трудностей, возникающих при вычислениях такого рода.

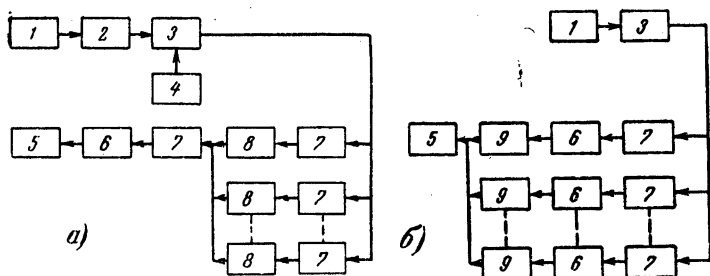


Рис. 2. Схемы обнаружения, иллюстрирующие правила принятия решения (11) и (12).

$a$  — блок-схема для обнаружения на интервале;  $b$  — блок-схема для обнаружения в точке; 1 — усилитель промежуточной частоты; 2 — усилитель с коэффициентом передачи  $\beta_0 - \beta_s$ ; 3 — блок памяти; 4 — регулировка коэффициента усиления; 5 — блок сигнала тревоги; 6 — порог; 7 — суммирование; 8 — усилитель с экспоненциальной характеристикой; 9 — реле.

Результаты мы приводим ниже. Вероятность обнаружения сигнала в точке оказывается для случая больших  $N$  равной [см. уравнение (17)]:

$$D = F - \left[ \frac{(\ln N)^{\gamma}}{N} - \frac{1}{N} \right] (1 - F) \ln(1 - F) + \dots,$$

где

$$\gamma = (n\alpha - 1) \frac{\beta_0 - \beta_s}{\beta_0}.$$

Соответствующее выражение для вероятности обнаружения сигнала на интервале [см. уравнение (20)] имеет вид:

$$D^* = F - \frac{1}{V 2\pi N} \frac{m_0 - m_s}{\sigma_0} \exp \left[ -\frac{(\lambda^* - Nm_0)^2}{\sigma_0^2 N} \right] + \dots,$$

где

$$m_0 = [\beta_0 / \beta_s]^{n\alpha};$$

$$m_s = \beta_s / (2\beta_s - \beta_0)^{n\alpha};$$

$$\sigma_0^2 = m_0 (m_s - m_0).$$

Сравнивая вероятности  $D$  и  $D^*$ , видим, что для  $N = \infty$  они равны и обе сводятся к  $F$ . Для больших  $N$  значение  $D$  стремится к  $F$  как  $(\ln N)\gamma/N$ , т. е. более медленно, чем соответствующий член в  $D^*$ , пропорциональный  $1/N$ . Это имеет место всегда независимо от величины  $\gamma$ . Поэтому при больших  $N$  значение  $D^*$  будет больше, чем  $D$ .

Таким образом, мы приходим к следующему заключению: для случая очень широкого интервала обнаружения (больших  $N$ ), т. е. именно для того случая, который интуитивно кажется наиболее сомнительным, вероятность обнаружения сигнала на интервале оказывается больше вероятности обнаружения сигнала в точке. Это обстоятельство может сделать более правдоподобным полученный выше общий результат. Ценность рассмотренного выше примера, где  $D$  неизбежно оказывается стремящимся к  $F$ , заключается в том, что он легко поддается математическому рассмотрению. Большого практического значения ему придавать не следует.

#### Приложение

### ОЦЕНКА АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОБНАРУЖЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТНОГО ПРИМЕРА

Желательно найти соответствующие вероятности обнаружения для специальных примеров. Предполагается, что плотности вероятности имеют вид

$$f_0(v_{jk}) = \frac{\beta_0^\alpha}{\Gamma(\alpha)} v_{jk}^{\alpha-1} \exp(-\beta_0 v_{jk}); (v_{jk} \geq 0)$$

— при отсутствии сигнала и

$$f_s(v_{jk}) = \frac{\beta_s^\alpha}{\Gamma(\alpha)} v_{jk}^{\alpha-1} \exp(-\beta_s v_{jk}); (v_{jk} \geq 0)$$

— если сигнал присутствует.

Постоянные  $\beta_0$  и  $\beta_s$  удовлетворяют условию

$$0 < \beta_s < \beta_0 < (3/2)\beta_s.$$

Для этого примера получаются следующие правила обнаружения сигнала:

$$\sum_{k=1}^N \delta_k \left| \sum_{j=1}^n v_{jk} - \lambda \right| > 0, \quad (11)$$

если мы пользуемся обнаружением в точке, и

$$\sum_{k=1}^N \exp \left[ (\beta_0 - \beta_s) \sum_{j=1}^n v_{jk} \right] \geq \lambda^*, \quad (12)$$

если мы применяем обнаружение в интервале. В обоих случаях нужно найти вероятности обнаружения для больших  $N$ . Вычисления приведем для каждого случая отдельно, причем сначала рассмотрим обнаружение в точке.

Для рассмотрения обнаружения в точке введем случайную переменную

$$\mu_k = \sum_{j=1}^n v_{jk}.$$

Функция распределения этой величины [Л. 9] будет:

$$F_0(\mu_k) = \frac{\beta_0^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^{\mu_k} x^{n\alpha-1} \exp(-\beta_0 x) dx \quad (13)$$

— при отсутствии сигнала и

$$F_s(\mu_k) = \frac{\beta_s^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^{\mu_k} x^{n\alpha-1} \exp(-\beta_s x) dx \quad (14)$$

— при его наличии.

Согласно условию (11), обнаружение в точке происходит, если неравенство

$$\sum_{j=1}^n v_{jk} \geq \lambda$$

выполняется по крайней мере однажды во всем интервале  $k=1, 2, \dots, N$ . При отсутствии сигнала вероятность такого события (равная заданной вероятности ложной тревоги) равна:

$$F = 1 - [F_0(\lambda)]^N. \quad (15)$$

Если сигнал присутствует в одной из  $N$  точек, аналогичная вероятность, совпадающая в этом случае с вероятностью обнаружения, равна:

$$D = 1 - [F_0(\lambda)]^{N-1} F_s(\lambda) = 1 - (1 - F) \frac{F_s(\lambda)}{F_0(\lambda)}. \quad (16)$$

Теперь следует рассмотреть поведение  $D$  при больших  $N$ . Из (16) видно, что это сводится к определению асимптотического поведения  $F_s(\lambda)/F_0(\lambda)$  при  $N$  в (15), стремящемся к бесконечности. Для того чтобы уравнение (15) выполнялось при больших  $N$ ,  $\lambda$  должно быть тоже велико. Действительно, при больших  $\lambda$

$$F_0(\lambda) \approx 1 - \frac{(\beta_0 \lambda)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \exp(-\beta_0 \lambda);$$

$$F_s(\lambda) \approx 1 - \frac{(\beta_s \lambda)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \exp(-\beta_s \lambda).$$

Поэтому из уравнения (15) следует:

$$\beta_0 \lambda \approx \ln N - \ln [\Gamma(n\alpha) P_{\text{л.тр}}] - (n\alpha - 1) \ln \beta_0 \lambda \approx \ln N.$$

Для больших  $N$  отношение  $F_s/F_0$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{F_s(\lambda)}{F_0(\lambda)} &\approx 1 - \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} [(\beta_s \lambda)^{n\alpha-1} \exp(-\beta_s \lambda) - (\beta_0 \lambda)^{n\alpha-1} \exp(-\beta_0 \lambda)] = \\ &= [1 - (1 - F)^{1/N}] (\beta_0 \lambda)^\gamma + [1 - F]^{1/N}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda = (n\alpha - 1) \frac{\beta_0 - \beta_s}{\beta_s} > 0.$$

Интересующее нас асимптотическое выражение имеет вид

$$\frac{F_s}{F_0} = 1 + \left[ \frac{(\ln N) \gamma}{N} - \frac{1}{N} \right] \ln(1 - F) + \dots$$

Вероятность обнаружения выражается формулой

$$D = F - \left[ \frac{(\ln N) \gamma}{N} - \frac{1}{N} \right] (1 - F) \ln(1 - F) + \dots, \quad (17)$$

из которой видно, что в этом предельном случае  $D$  стремится к  $F$ , причем для больших  $N$  скорость приближения определяется членом, пропорциональным  $(\ln N) \gamma/N$ . Этот член играет решающую роль при сравнении со следующим случаем.

*Обнаружение на интервале.* Правило выбора для обнаружения на интервале определяется неравенством (12).

Введем случайную переменную

$$w = \sum_{k=1}^N \exp \left[ (\beta_0 - \beta_s) \sum_{j=1}^n v_{jk} \right]. \quad (18)$$

Пусть  $F_0^*(w)$  — функция распределения для  $w$  в отсутствие сигнала и  $F_s^*(w)$  — функция распределения в присутствии сигнала, не зависящая от его положения. (Мы употребляем звездочки для обозначения величин, относящихся к обнаружению на интервале, в отличие от соответствующих величин, относящихся к обнаружению в точке.)

Вероятность ложной тревоги равна:

$$F = 1 - F_0^*(\lambda^*).$$

Эта вероятность должна быть численно равна соответствующей вероятности для обнаружения в точке, с тем чтобы оба метода были сравнимы.

Соответственно

$$D^* = 1 - F_s^*(\lambda^*).$$

Далее надо вычислить  $P_0^*$  при условии, что  $F$  задано. Сделаем это опять для случая, когда  $N$  велико. При этом  $w$  в уравнении (18) представляет собой сумму  $N$  независимых слагаемых:

$$Z_k = \exp(\beta_0 - \beta_s) \nu_k,$$

где  $\nu_k$  имеет то же значение, что и раньше, с функциями распределения (13) и (14). Соответствующие функции распределения для  $Z_k$  будут:

$$F_s \left( \frac{Z_k}{\beta_0 - \beta_s} \right) \quad \text{и} \quad F_0 \left( \frac{Z_k}{\beta_0 - \beta_s} \right)$$

в зависимости от того, имеется ли в точке  $k$  импульс сигнала или нет. Средние значения  $m$  и дисперсии  $\sigma^2$  для этих двух функций равны:

$$m_s = \left( \frac{\beta_s}{2\beta_s - \beta_0} \right)^{n\alpha};$$

$$m_0 = \left( \frac{\beta_0}{\beta_s} \right)^{n\alpha};$$

$$\sigma_s^2 = m_s \left[ \left( \frac{2\beta_s - \beta_0}{3\beta_s - 2\beta_0} \right)^{na} - \left( \frac{\beta_s}{2\beta_s - \beta_0} \right)^{na} \right];$$

$$\sigma_0^2 = m_0 \left[ \left( \frac{\beta_s}{2\beta_s - \beta_0} \right)^{na} - \left( \frac{\beta_0}{\beta_s} \right)^{na} \right].$$

Легко видеть, что при условиях, наложенных нами на  $\beta_0$  и  $\beta_s$ ,

$$m_s - m_0 > 0; \quad \sigma_s^2 - \sigma_0^2 > 0. \quad (19)$$

Далее, так как  $\omega$  представляет собой сумму большого числа независимых переменных, то ее распределение близко к нормальному. Если  $\varphi(y)$  — нормированная функция распределения Гаусса, то

$$F = 1 - \varphi \left( \frac{\lambda^* - Nm_0}{\sigma_0 \sqrt{N}} \right);$$

$$D^* = 1 - \varphi \left( \frac{\lambda^* - (N-1)m_0 - m_s}{\sqrt{(N-1)\sigma_0^2 + \sigma_s^2}} \right).$$

(Собственно говоря, выражения для  $F$  и  $D^*$  следовало бы записать в виде рядов Эджворта [Л. 9], но это не повлияло бы на последующие рассуждения.) Разность аргументов этих функций при больших  $N$  мала.

Обозначив для краткости

$$\frac{\lambda^* - Nm_0}{\sigma_0 \sqrt{N}} = \omega_0;$$

$$\frac{\lambda^* - (N-1)m_0 - m_s}{\sqrt{(N-1)\sigma_0^2 + \sigma_s^2}} = \omega_0 + \sigma\omega,$$

получим:

$$\delta\omega = \frac{m_0 - m_s}{\sqrt{N}\sigma_0} + \frac{\omega_0}{2} \frac{\sigma_0^2 - \sigma_s^2}{N\sigma_0^2}.$$

При больших  $N$  эта величина согласно (18) отрицательна.

Отсюда

$$D^* = F - \frac{\delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\omega_0^2}{2} \right) + \dots \quad (20)$$

При возрастающих  $N$  вероятность обнаружения уменьшается, стремясь к вероятности ложной тревоги как  $1/\sqrt{N}$ .

Это выражение и соответствующая ему формула (17) использованы в основном тексте работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Marcum J., A. statistical theory of target detection by pulsed radar, Rand Corp. Rep., December 1947.
  2. Middleton D., J. Appl. Phys., 24, p. 371 — 391, April 1953.
  3. Slattery T., Proc. IRE, 40, p. 1232 — 1236, October 1952.
  4. Neyman J., Pearson E., Roy. Soc. Phil. Trans., A 231, p. 289, 1933.
  5. Lehmann E., Stein C., Ann. Math. Stat., 19, p. 495, 1948.
  6. Wald A., Statistical decision functions, New York, 1950.
  7. Drenick R., Gartenhaus S., Nesbida P., Conv. Rec. IRE, 1955 (см. настоящий сборник, стр. 152).
  8. Hoffman W., J. Appl. Phys., 25, August 1954.
  9. Крамер Г., Математические методы статистики, Изд-во иностранной литературы, 1948.
-

---

---

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В ПРИСУТСТВИИ ШУМОВ<sup>1</sup>

*Д. Миддлтон*

## Краткое содержание

В статье излагается теория обнаружения импульсного радиосигнала постоянного уровня в присутствии узкополосной флуктуационной помехи. В основу теории положено несколько видов оптимальных испытаний статистических гипотез относительно двух возможных исходов: наличие сигнала с шумом или только одного шума. При рассмотрении использованы две кривые верности Зигерта; для случая конечного времени интегрирования минимально обнаружимый сигнал определяется однозначно. Рассмотрены три метода наблюдения сигнала (метод Неймана—Пирсона, метод идеального наблюдателя, последовательный метод) и проанализированы их свойства. Показано, что при каждом из рассмотренных методов оптимальный второй детектор имеет характеристику вида  $\ln I_0$ , которая практически близко совпадает с характеристикой обычного диодного детектора.

На основании полученных результатов построен ряд кривых верности и проведен сравнительный анализ трех рассмотренных методов наблюдения сигнала как для пороговых, так и для сильных сигналов.

## ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение сигналов в присутствии шумов является основной задачей теории связи. Для характеристики работы приемных устройств предложены различные критерии, такие, как отношение сигнала к шуму, выброс напряжения на отметчике (радиолокационных устройств), величина нелинейных искажений и т. д. В той или иной форме все эти критерии связаны со спектральным распределением энергии на входе и выходе приемника. Для вычисления

---

<sup>1</sup> Middleton D., Statistical criteria for the detection of pulsed carriers in noise, I, II, Journ. Appl. Phys., April, 1953, v. 24, № 4, p. 371—391.



этих спектров, учитывая наличие в приемнике таких нелинейных элементов, как второй детектор<sup>1</sup>, необходимо знание двумерной плотности вероятности  $W_2(X_1, X_2; t)$  шума или смеси сигнала с шумом. Здесь  $W_2 dX_1 dX_2$  представляет собой совместную вероятность того, что в начальный момент  $t = t_1 = 0$  амплитуда шумового колебания принимает значение, лежащее в интервале  $(X_1, X_1 + dX_1)$ , а в момент  $t$  она примет значение, лежащее в интервале  $(X_2, X_2 + dX_2)$ . Зная  $W_2$ , можно вычислить функцию автокорреляции и спектральную плотность помехи и сигнала после детектора [Л. 1 и 2].

Для установления связи всех этих теоретических положений с экспериментом, к сожалению, приходится вводить соответствующий каждому конкретному случаю численный множитель  $h'$ , характеризующий свойства наблюдателя, а также включающий в себя довольно неопределенное понятие минимально обнаружимого сигнала.

Строго говоря, численное значение множителя  $h'$  определяется статистическими свойствами наблюдателей, т. е. усредненными результатами, полученными бесконечным количеством отдельных наблюдателей для одного и того же конкретного случая. Более подробное рассмотрение роли множителя  $h'$  в оценке отношения сигнал/шум для наблюдения отклонения луча на экране отметчика, а также понятие минимально обнаружимого сигнала дано в книге «Пороговые сигналы» [Л. 3].

Точное значение множителя  $h'$ , следовательно, не может быть вычислено. Неопределенность значения  $h'$  вызвана тем, что понятие минимально обнаружимого сигнала не имеет единого определения, а математическое описание процесса наблюдения не является исчерпывающим. Второй причиной неполноты упомянутых критериев является то, что они не позволяют выявить оптимальный способ получения требуемой информации. Более того, критерии, основанные на данных, содержащихся в двумерной плотности вероятности рассматриваемого случайного процесса, очевидно, недоиспользуют значительную часть общей имеющейся информации. В течение времени интегрирования, отведенно-

---

<sup>1</sup> При обычных условиях работы приемного устройства, когда амплитуда гетеродина значительно превышает максимальную амплитуду модулированной несущей частоты сигнала, преобразователь, или первый детектор, можно считать линейным. При этом принимаемый сигнал и шум переносятся на промежуточную частоту, не взаимодействуя друг с другом.

го наблюдателю, сведения о сигнале представляют собой непрерывную функцию времени или последовательность дискретных величин, и поэтому для достижения наилучшего результата необходимо использовать не только двумерную плотность распределения  $W_2$ , относящуюся к парам наблюдений, разделенных интервалами времени  $t = t_2 - t_1$  [сек], но также и плотности распределений более высоких порядков  $W_3, W_4, \dots, W_n(X_1; X_2, t_2; \dots, X_n, t_n)$ , относящиеся к группам отдельных наблюдений, сделанных в разные моменты времени. Очевидно, что решения, основанные на информации, содержащейся в распределениях более высокого порядка, достовернее, чем решения, основанные только на двумерной плотности вероятности  $W_2$ , зависящей от функции корреляции или, иначе говоря, от спектра частот смеси сигнала с шумом на выходе второго детектора. Следовательно, необходима более строгая теория процесса обнаружения сигнала, которая:

- 1) количественно характеризует метод наблюдения;
- 2) позволяет дать однозначное определение минимально обнаружимого сигнала и определить пороговую постоянную  $h'$  и, наконец,
- 3) позволяет выявить оптимальный способ использования имеющейся информации.

Такую теорию можно построить при условии, если задачу обнаружения сигнала рассматривать как сугубо статистическую. В соответствии с такой статистической постановкой задачи определение наличия или отсутствия сигнала на фоне шумов эквивалентно, на статистическом языке, проверке гипотезы  $H_0$  о наличии только одного шума и гипотезы  $H_1$  о наличии сигнала и шума.

В решении, принимаемом на основании конечного количества информации, имеющейся в нашем распоряжении, могут быть допущены два вида ошибок<sup>1</sup>. Ошибка первого рода состоит в том, что шум будет назван сигналом, а ошибка второго рода, наоборот, состоит в том, что сигнал будет принят за шум. Соответствующие вероятности ошибок обозначим через  $\alpha$  — вероятность ложной тревоги и  $\beta$  — вероятность пропуска сигнала. Таким образом, в процессе принятия решения наблюдатель фактически совершает отгадывание, которое в пределе, при бесконечно боль-

<sup>1</sup> Если в нашем распоряжении имеется бесконечное количество информации, т. е. если мы располагаем данными, полученными за бесконечный интервал времени интегрирования, то, конечно, при этом можно без ошибки обнаружить сигнал любой интенсивности.

шом числе наблюдений, повторяемых в одинаковых условиях, имеет совершенно определенную вероятность неудачного исхода, т. е. неправильного решения.

Следовательно, процесс наблюдения аналитически полностью характеризуется тем, как наблюдатель использует полученные им данные для принятия решения.

Вероятность принятия правильного решения о наличии сигнала зависит от величины  $a_0$  — отношения среднеквадратичного значения приходящего сигнала к среднеквадратичному значению мешающего шума и заключена в пределах от наименьшего значения, равного априорной вероятности наличия сигнала, до наибольшего значения, равного единице, когда сигнал настолько велик, что принимаемое решение всегда будет правильным.

Зависимость относительного количества правильных решений от величины отношения сигнала к шуму по напряжению  $a_0$ , выраженная графически, называется кривой верности. Кривая верности играет существенную роль в теории обнаружения, ибо с ее помощью можно однозначно дать определение минимального обнаружимого сигнала. Последним является сигнал на выходе приемника, имеющий такую интенсивность, которой соответствует некоторый условно выбранный процент правильных решений. Часто эта условная цифра принимается равной 90 или 50%. Таким образом, кривая верности связывает понятие минимально обнаружимого сигнала с соответствующим значением отношения сигнала к шуму, и таким путем устраняются трудности, связанные с точным определением того, что является сигналом в шумах на выходе детектора, и с выявлением связи последнего с входными сигналом и шумом. Если  $p$  является априорной вероятностью наличия сигнала с шумом, а  $q$  — априорной вероятностью наличия только одного шума, т. е. если они представляют собой вероятности того, что из бесконечно большого числа испытаний часть испытаний  $p$  заведомо происходит при наличии сигнала и шума, а часть испытаний  $q=1-p$  заведомо происходит при наличии только одного шума, то кривая верности,  $W_1(a_0^2; n)$ , очевидно, выразится следующим образом:

$$W_1(a_0^2; n) = p(1 - \beta) + q(1 - \alpha), \quad (1)$$

где  $n$  — является объемом выборки и пропорционально времени интегрирования, а вероятности  $\alpha$  и  $\beta$  в общем случае являются функциями  $a_0^2$  и  $n$ .

Впервые кривая верности была введена Лоусеном и Уленбеком [Л. 3] и применена ими и их сотрудниками для исследования приема радиолокационных сигналов на индикаторах типа А и кругового обзора. Рассчитана же кривая верности была впервые Зигертом [Л. 3] на основе предложенной им теории идеального наблюдателя, о которой в общих чертах сказано в разделе 5 настоящей работы. В этом параграфе сравниваются методы наблюдения, основанные на различных статистических критериях.

При статистическом испытании гипотезы в рассматриваемом нами случае необходимым условием является фиксация дальности, соответствующей принимаемому сигналу. Если это условие не соблюдать, и целью наших наблюдений считать точное (с вероятностью до единицы) определение положения отраженного сигнала и, одновременно с этим, принятие решения о наличии или отсутствии сигнала, то при этом, как показано Вудвортом [Л. 4], происходит потеря информации, так как в подобных случаях имеет смысл лишь вероятностное распределение местоположения сигнала. Попытка определить точное положение сигнала при использовании неполных данных приводит к частичному искажению существующей информации. В настоящей работе данное обстоятельство устраняется тем, что мы фиксируем ту дальность, для которой проводится статистическое испытание.

Теперь перейдем к решению задачи обнаружения импульсного радиолокационного сигнала на фоне гауссова шума при фиксированном положении этого сигнала на шкале дальности. Этой задачи в основном и посвящена данная работа.

Начнем с рассмотрения периодических импульсов с высокочастотным заполнением, имеющих постоянную амплитуду и принимаемых совместно с шумом, имеющим некоторый неизменный уровень. Наблюдателю заведомо известно о возможности появления сигнала только на заданной дальности. От наблюдателя требуется решить, имеется ли в действительности сигнал на этой дальности или нет, причем решение предлагается принять на основании  $n$  наблюдений огибающей узкополосного шума и импульсного сигнала. Подразумевается, что при каждом наблюдении, следующем через одинаковые интервалы времени, равные периоду повторения импульсов, не принимается во внимание форма сигнала на выходе фильтра, а лишь отмечается максимальное значение огибающей, полученной в резуль-

тате фильтрации принятого колебания в УПЧ и видеоканале. Предполагается, что видеоканал не искажает импульсы сигнала, так как в противном случае пришлось бы рассматривать более сложную задачу нахождения распределения огибающей после второго детектора и видеофильтра с ограниченной полосой. Следует отметить, что возможно и более тонкое рассмотрение, учитывающее форму импульса и использующее для этого два, три или  $m$  значений огибающей для каждого наблюдения. Однако для объяснения экспериментальных наблюдений такое рассмотрение более высокого порядка необязательно [Л. 3], и поэтому этот вопрос здесь не исследуется. Кроме того, потеря информации при наблюдении только единичных значений для каждого наблюдения практически незначительна, при условии, что длительность стробирующего импульса равна или меньше длительности импульса сигнала.

Наблюдатель выбирает момент каждого наблюдения так, чтобы он совпадал с моментом максимального выброса огибающей сигнала. Еще раз отметим, что в данной работе рассматривается лишь задача определения наличия или отсутствия сигнала в одной точке дальности, т. е. задача о наличии или отсутствии одного сигнала, когда наблюдатель имеет дело лишь с одним значением дальности или одним узким стробируемым участком. Однако настоящее рассмотрение может быть распространено на случай многих положений сигнала, как это и сделал Зигерт в своей теории идеального наблюдения [Л. 3] и на что также указал Вудворд.

Таким образом, наша задача легко формулируется статистически: мы должны произвести статистическую проверку двух гипотез, а именно: гипотезы  $H_0$  о наличии только шума и гипотезы  $H_1$  — о наличии сигнала и шума.

Оптимальное решение можно получить одним из трех нижеперечисленных способов, которые аналитически описывают процесс наблюдения.

1) Задаются неизменными вероятностью ложной тревоги  $\alpha$  и число наблюдений  $n$  (неизменное время интегрирования), и затем сводится к минимуму вероятность пропуска сигнала  $\beta$ . Это — испытание статистических гипотез  $H_0$  и  $H_1$  по Нейману — Пирсону для заданного значения вероятности ложной тревоги. Показано [Л. 5 и 6], что это испытание является наилучшим из возможных для заданных условий.

Мы будем называть наблюдателя, следующего этому правилу испытаний, наблюдателем Неймана — Пирсона<sup>1</sup>.

Возможен иной вариант, состоящий в фиксации значения  $\beta$  и сведения к минимуму  $\alpha$  при неизменном времени интегрирования. Однако очевидно, что это испытание, по существу, равносильно только что изложенному методу испытания при условии, что  $\beta_{\min}$  — это  $\beta$ , а  $\alpha$  — это  $\alpha_{\min}$  (их численные значения остаются неизменными). Но поскольку фигурирующее в  $H_1$  как параметр отношение сигнала к шуму  $a_0$  обычно неизвестно, то оказывается невозможным определить фиксированное значение  $\beta$ , и поэтому за неизменный параметр принимают  $\alpha$ , так как вероятность ложной тревоги  $\alpha$  определяется распределением, не зависящим от параметра  $a_0$ .

2) Пространство наблюдения делится на  $n$  элементов таким путем, что для заданного числа наблюдений  $n$  вероятность принятия правильного решения становится максимальной для всех возможных значений интенсивности сигнала. В этом случае сводится к минимуму сумма вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала ( $\alpha + \beta$ ), и кривая верности (1) соответствует максимуму для заданного значения отношения сигнала к шуму  $a_0$  на входе. Наблюдатель, следующий такому правилу, введенному впервые Зигертом [Л. 3], носит название идеального наблюдателя.

3) Оставим неизменными вероятности ошибок обоого рода, сделав переменным время интегрирования. Продолжим наблюдение до тех пор, пока не получим первого отклонения результатов наблюдения за пределы того или иного из двух уровней, зависящих от вероятностей  $\alpha$  и  $\beta$ , на основании чего в результате такого последовательного испытания принимаем либо отвергаем гипотезу  $H_1$  о наличии сигнала. Наблюдателя, который следует такому правилу, будем называть последовательным наблюдателем.

В ряде работ, например в [Л. 7], посвященных рассматриваемой задаче, был применен критерий Неймана — Пир-

---

<sup>1</sup> Фактически здесь и в дальнейшем идет речь о различных способах обнаружения радиолокационных сигналов при помощи автоматически действующих устройств. Однако для краткости изложения метод регистрации сигналов, предложенный Нейманом и Пирсоном, будет называться «наблюдателем Неймана — Пирсона», хотя в действительности в данной работе изучаются свойства автоматически действующей аппаратуры, а не особенности работы человека-радиометриста. Аналогично будут именоваться и другие методы аппаратурного обнаружения радиолокационных сигналов на фоне шумов. (Прим. ред.).

сона, однако до настоящего времени в литературе не были исследованы кривые верности и не появилось подсчетов минимального обнаружимого сигнала. Содержащееся в данной работе предварительное обсуждение теории последовательного наблюдателя предполагается оригинальным, однако следует отметить, что анализ, данный Зигертом для идеального наблюдателя, содержит отправные моменты приводимых здесь рассуждений.

## I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЯХ СТАТИСТИКИ

Прежде чем строить теорию оптимального наблюдения, необходимо вкратце коснуться основных понятий статистики.

Начнем с испытания гипотез по методу Неймана—Пирсона.

### 1. Испытание гипотез по Нейману — Пирсону относительно двух альтернативных допущений [Л. 5 и 8]

Допустим, известно, что случайная переменная  $R$  имеет  $n$ -мерную плотность вероятности  $W_n(R_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda)$ , где  $\lambda$  — параметр, характеризующий распределение. При одних условиях  $\lambda$  имеет значение  $\lambda_0$ , а во всех других случаях принимает значение  $\lambda_1$ , так что  $W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda_0)$  и  $W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda_1)$  являются различными функциями. В нашем случае параметр  $\lambda_1$  равен  $\lambda_1 = a_0 = A_0/(2\psi)^2$  и соответствует случаю, когда на входе второго детектора действуют сигнал и шум. Здесь  $A_0$  — амплитуда сигнала, а  $\psi$  — среднеквадратичное значение шумового колебания; причем значения  $A_0$  и  $\psi$  измеряются в одной и той же точке схемы приемного устройства до второго детектора.

Параметр  $\lambda_0$  равен нулю и соответствует случаю, когда на входе второго детектора имеется только один шум.

Числа  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , каждое из которых больше нуля, представляют собой  $n$  последовательных значений огибающей принимаемого колебания, наблюдаемых соответственно в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , отстоящие друг от друга на величину  $T_0$  — период повторения сигналов.

На основании  $n$  наблюдений огибающей  $R_1, \dots, R_n$  мы хотим проверить гипотезу  $H_0$  о том, что параметр  $\lambda$  равен нулю  $\lambda_0 = 0$ , против гипотезы  $H_1^0$  о том, что параметр  $\lambda$  равен  $\lambda_1 = a_0 > 0$ .

Гипотезу  $H_0$  часто называют нулевой гипотезой; последняя обычно относится к наиболее часто встречающимся условиям<sup>1</sup> и является гипотезой, справедливость которой для  $n$  значений выборок необходимо проверить. Очевидно, что утверждение о несправедливости гипотезы  $H_0$  означает признание справедливости гипотезы  $H_1$  и, соответственно наоборот, ввиду того, что мы имеем дело только с двумя альтернативными допущениями.

Наше испытание с целью принять или отвергнуть гипотезу  $H_0$  требует разделения всего пространства наблюдения на две части, одна из которой связана с гипотезой  $H_0$ , а другая — с альтернативной гипотезой  $H_1$ . Следовательно, существуют два рода возможных ошибок:

1) Ошибка первого рода — ложная тревога: гипотеза  $H_0$  об отсутствии сигнала отвергается, в то время как на самом деле она справедлива. Вероятность ложной тревоги  $\alpha$  количественно выражается следующим образом:

$$\alpha = \int \dots \int_{\Gamma''} W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda_0) dR_1, \dots, dR_n. \quad (2)$$

Здесь  $\Gamma''$  — область  $n$ -мерного пространства наблюдения  $R_1, \dots, R_n$ , связанного с альтернативной гипотезой  $H_1$ .

2) Ошибка второго рода — пропуск сигнала: гипотеза  $H_0$  об отсутствии сигнала принимается справедливой, в то время как на самом деле справедлива гипотеза  $H_1$  о наличии сигнала. Вероятность пропуска сигнала  $\beta$  дается выражением:

$$\beta = \int \dots \int_{\Gamma'} W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda_1) dR_1, \dots, dR_n. \quad (3)$$

Пространство наблюдения  $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$  включает в себя все  $n$ -мерное пространство выборок для  $R_1, \dots, R_n$  и деление его на области  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  зависит оттого, каким образом осуществляется испытание.

Здесь  $\Gamma'$  называется областью допустимых значений, а  $\Gamma''$  — критической областью. Величина  $1 - \beta$  известна в теории вероятностей как мощность критерия проверки гипотезы.

Проверка гипотез определяется тем, как мы разобьем пространство наблюдения  $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$  на две области  $\Gamma'$  и

<sup>1</sup> Задача обнаружения сигнала на фоне шумов относится прежде всего к случаю, когда сигнал слабее мешающего шума, поэтому вполне логично в качестве нулевой гипотезы выбрать  $H_0(\lambda = \lambda_0 = 0)$ , а не  $H_1(\lambda = \lambda_1 = a_0)$ .



$\Gamma''$ . Гипотеза  $H_0$  отвергается либо принимается справедливой на основании того, в какую из этих двух областей попадает точка  $(R'_1, \dots, R'_n)$   $n$ -мерного пространства. Хотя это разделение довольно условно, но среди разных способов проверки гипотез одни способы лучше, другие хуже, и поэтому справедливо поставить вопрос: как производить разделение пространства наблюдений  $\Gamma$  на области  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , чтобы получить наилучший способ проверки гипотез.

Обычно при малых вероятностях ложной тревоги  $\alpha$  вероятность пропуска сигнала  $\beta$  велика, и соответственно наоборот. По этой причине, а также в силу того, что распределение, из которого определяется вероятность пропуска сигнала  $\beta$ , обычно неизвестно достоверно, Нейман и Пирсон условно считают вероятность ложной тревоги  $\alpha$  неизменной, а затем подбирают критическую область  $\Gamma''$  так, чтобы свести к минимуму вероятность пропуска сигнала  $\beta$ , т. е. чтобы сделать  $\Gamma'$  областью наибольшей мощности критерия проверки гипотезы. Пользуясь методами вариационного исчисления, получаем, что при этих условиях область допустимых значений и критическая область в  $n$ -мерном пространстве наблюдений разделяются поверхностью:

$$\frac{pW_n(R'_1, t_1; R'_2, t_2; \dots; R'_n t_n / \lambda = \lambda_1 = a_0)}{qW_n(R''_1, t_1; R''_2, t_2; \dots; R''_n t_n / \lambda = \lambda_0 = 0)} = \\ = K = K(\alpha; R''_1, \dots, R''_n; a_0), \quad (4)$$

где величины  $R'_l$  при  $l=1, \dots, n$  являются  $n$  значениями случайной переменной  $R$ , выбранными таким образом, что уравнение (4) справедливо при заданном значении вероятности ложной тревоги  $\alpha$ . Вариационная задача легко решается обычным путем: когда  $p$  и  $q$  не равны друг другу, то очевидно, что необходимо определить экстремум произведения  $p\beta = p \int_{\Gamma'} \times W_n(\Gamma/\lambda_1) d\Gamma$  относительно постоянной  $q\alpha = q \int_{\Gamma''} W_n(\Gamma/\lambda_0) d\Gamma$ , где обозначено  $d\Gamma = dR_1, dR_2, \dots, dR_n$ ,  $\Gamma = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ , и, таким образом, получаем вид функции  $W_n$ . Теперь задача состоит в том, чтобы разделить область  $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$  таким образом, чтобы  $\beta$  было сведено к минимуму. Мы можем приравнять  $p\beta + \Lambda_n \alpha q$  некоторой постоянной величине, причем здесь  $\Lambda_n$  является неизвестным множителем, таким, что

$$\delta(p\beta + \Lambda_n \alpha q) = 0 \quad (5)$$

или, что то же,

$$\delta \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} p W_n(\Gamma/\lambda_1) d\Gamma + \Lambda_n \delta \int_{\Gamma_2}^{\Gamma_3} q W_n(\Gamma/\lambda_0) d\Gamma = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\Gamma_2 = (R_1'', R_2'', \dots, R_n'')$  представляет собой уравнение поверхности, разделяющей области  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , а поверхности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  являются соответственно нижней и верхней границами всего пространства наблюдения:  $\Gamma_1 = (0, 0, \dots, 0)$  и  $\Gamma_3 = (\infty, \dots, \infty)$ .

Осуществляя указанные вариации границы  $\Gamma_2$ , получаем:

$$\int_{\Gamma_2}^{\Gamma_2 + \delta\Gamma} p W_n(\Gamma/\lambda_1) d\Gamma + \Lambda_n \int_{\Gamma_2 + \delta\Gamma}^{\Gamma_2} q W_n(\Gamma/\lambda_0) d\Gamma = 0, \quad (7)$$

или

$$\delta\Gamma \{p W_n(\Gamma/\lambda_1) - \Lambda_n q W_n(\Gamma/\lambda_0)\} = 0 \quad (8)$$

и в конечном счете, так как вариация  $\delta\Gamma$  произвольна,

$$\Lambda_n'' = \frac{p W_n(R_1'', \dots, R_n''/\lambda_1)}{q W_n(R_1'', \dots, R_n''/\lambda_0)} = K. \quad (9)$$

Это и есть искомое условие, соответствующее уравнению (4). Затем, после выбора  $\Gamma'' = (R_1'', \dots, R_n'')$  для выбранного значения  $\alpha, \beta$  сводится к минимуму. [Очевидно, результат, аналогичный уравнениям (7), (8) (9), получится, если  $\beta$  считать постоянной и сводить к минимуму  $\alpha$ ].

Здесь  $\alpha_n$  называется коэффициентом правдоподобия. Таким образом:

$$\Lambda_n = \frac{p W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda_1)}{q W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda_0)}. \quad (10)$$

Следовательно, для ряда наблюдений  $R_1 = R_1', R_2 = R_2', \dots$ , когда коэффициент правдоподобия превышает критическое значение  $K$ , гипотеза  $H_0$  отвергается, а гипотеза  $H_1$  принимается справедливой; если же коэффициент правдоподобия меньше  $K$ , то отвергается гипотеза  $H_1$ , а гипотеза  $H_0$  принимается справедливой. Решения, принимаемые на основании уравнения (4) являются наилучшими возможными, а испытание является наилучшим в смысле Неймана—Пирсона. Вышеизложенное иллюстрирует рис. 1.

Хотя предполагалось, что  $\lambda_1 = a_0$  имеет только одно определенное значение при всех испытаниях гипотез для  $n$  наблюдений, оптимальность рассматриваемого метода проверки иногда сохраняется и при выборе других значений  $a_0$ . Однако это не всегда справедливо для каждого статистического испытания и относится лишь к тем случаям, когда критическая область  $\Gamma''$  остается неизменной при принятии величиной  $\lambda = \lambda_1 = a_0$  всех возможных значений,

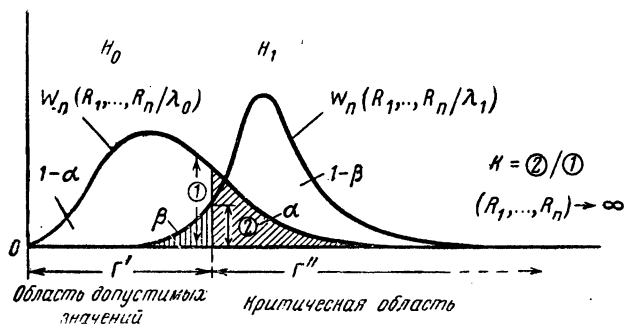


Рис. 1. Схематическое представление плотностей вероятностей при проверке гипотез  $H_0$  и  $H_1$  для критерия Неймана — Пирсона.

что в свою очередь требует, чтобы коэффициент правдоподобия  $\Lambda_n$  мог быть выражен в виде  $G(a_0)H(R_1, \dots, R_n)$  для любых  $a_0$ . Как будет видно ниже из равенства (21) и (22), такое разбиение коэффициента правдоподобия  $\Lambda_n$  на множители невыполнимо при рассматриваемом виде шума, хотя возможна аппроксимация, если  $a_0$  достаточно мало. Однако если  $\Lambda_n$  можно разбить на множители, то критерий Неймана—Пирсона является равномерно наиболее мощным [Л. 8]. Дальнейшим следствием этого, как показали Нейман и Пирсон [Л. 9], является то, что равномерно наиболее мощный критерий проверки гипотез, кроме того, является оптимальным критерием независимо от априорных вероятностей сигнала и шума.

## 2. Последовательное испытание гипотез относительно двух альтернативных допущений

В рассмотренной выше теории Неймана—Пирсона наилучший критерий принятия или отклонения альтернативных гипотез  $H_0$  ( $\lambda = \lambda_0 = 0$ ) и  $H_1$  ( $\lambda = \lambda_1 = a_0$ ) основан на сведении к минимуму вероятности пропуска сигнала  $\beta$

при неизменной вероятности ложной тревоги  $\alpha$  и постоянном объеме выборки. Вместо этого можно задаться вероятностями ошибок обоого рода  $\alpha$  и  $\beta$ . При этом объем выборки нельзя точно определить, поэтому следует поступить следующим образом: в качестве наилучшего критерия по-прежнему использовать критерий Неймана — Пирсона, но на этот раз объем выборки не задавать заранее. Если затем построить максимальную мощность  $(1 - \beta_{\min})$  критерия как функцию объема выборки  $n$  при заданной вероятности ложной тревоги  $\alpha$ , то получим ступенчатую кривую, которая растет монотонно с увеличением объема выборки  $n$ , так как чем больше объем выборки, тем более достоверным будет решение о принятии гипотезы  $H_0$  или  $H_1$ . Следовательно, остается лишь найти по полученной кривой объем выборки  $n$  для осуществления оптимального наблюдения при наперед заданных вероятностях ошибок  $\alpha$  и  $\beta$ . Следует отметить, что критическая область  $\Gamma''$  является функцией  $n$ , т. е. конфигурация области  $\Gamma''$  меняется при изменении объема выборки.

Предположим теперь, что для заданных  $\alpha$  и  $\beta$  и соответствующих им плотностей вероятности  $W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots, R_n, t_n/\lambda_1)$ ,  $W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda_0)$  осуществляется вышеописанная процедура вычислений, в результате чего определяется необходимое число наблюдений  $n$ .

Пусть, например, оказалось, что для проверки альтернативных гипотез  $H_0$  и  $H_1$  достаточно 90 наблюдений. При осуществлении этих 90 наблюдений может случиться, что уже среди первых наблюдений один или несколько результатов окажутся в области допустимых значений  $\Gamma'$ , так что последующее признание справедливости гипотезы  $H_1$  окажется несомненным, а дальнейшие наблюдения, следовательно, излишними. Более вероятно даже, что достаточно первых 20, 30 или 40 наблюдений для того, чтобы решить вопрос о принятии или отклонении гипотезы  $H_0$  с заданными значениями вероятностей ошибок  $\alpha$  и  $\beta$ . Таким образом, оперируя с получаемыми данными последовательно, по мере их поступления, можно более экономно использовать объем выборки, действуя тем же методом, что и для критерия Неймана — Пирсона. Экономия в объеме выборки может быть значительной, доходя иногда до 50—70% (по отношению к заданному) объема выборки, причем эта экономия зависит, конечно, от допустимых вероятностей ошибок  $\alpha$  и  $\beta$ . Очевидно,

что в случае, когда в распоряжении наблюдателя имеется ограниченное время, оказывается выгодным производить последовательное испытание гипотез  $H_0$  и  $H_1$  [Л. 10]. Здесь следует отметить, что такие последовательные испытания никогда не могут быть менее эффективными, чем соответствующее испытание Неймана — Пирсона, т. е. они никогда не потребуют большего объема выборки для получения тех же значений вероятностей ошибок  $\alpha$  и  $\beta$  так как испытание Неймана — Пирсона при объеме выборки  $n$  можно всегда рассматривать как частный случай последовательного испытания, в котором проверка прекращается сразу после  $n = \underline{n}$  выборок.

Последовательное испытание осуществляется следующим образом. Начнем с того, что запишем коэффициент правдоподобия

$$\Lambda_{n \text{ посл}} = \frac{pW_{n \text{ посл}}(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_{n \text{ посл}}, t_{n \text{ посл}}/\lambda_1)}{qW_{n \text{ посл}}(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_{n \text{ посл}}, t_{n \text{ посл}}/\lambda_0)} \quad (11)$$

и выберем два положительных числа  $A_1$  и  $A_2$ , зависящих от  $\alpha$  и  $\beta$ , таких, что  $A_2 > 1$  и  $0 < A_1 < 1$ . По мере осуществления каждого наблюдения получаем коэффициенты правдоподобия  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_n$  и продолжаем наблюдения до тех пор, пока соблюдаются неравенства

$$A_1(\alpha; \beta) < \Lambda_{n \text{ посл}} < A_2(\alpha; \beta). \quad (12)$$

Как только  $\Lambda_{n \text{ посл}}$  станет равным либо превысит  $A_2$ , либо окажется равным или меньше  $A_1$ , мы соответственно отвергаем гипотезу  $H_0$  в пользу гипотезы  $H_1$  или признаем гипотезу  $H_0$  справедливой, заканчивая тем самым испытание. Нетрудно показать [Л. 3], что в случае независимых выборок испытание всегда оканчивается при некотором конечном числе испытаний  $n_{\text{посл}}$ . Это справедливо также для многих практических случаев даже тогда, когда имеется корреляция между последующими наблюдениями. Затем, пользуясь рассуждениями Вальда [Л. 10] и Муда [Л. 16, гл. 15], верхние и нижние границы  $A_2$  и  $A_1$  можно выразить через вероятности  $\alpha$  и  $\beta$  как

$$A_1 = \beta / (1 - \alpha); \quad A_2 = (1 - \beta) / \lambda. \quad (13)$$

Эти равенства справедливы для случая так называемых непрерывных выборок, когда  $n_{\text{посл}} = n(s)$  рассматривается как непрерывная функция  $s$ . Ошибка, получающаяся в слу-

чае применения равенства (13) к дискретным выборкам, невелика, если каждая из вероятностей  $\alpha$  и  $\beta$  не превышает  $\frac{1}{2}$ . Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  определяются выражениями (2) и (3), как и раньше, только неизменное число  $n$  заменяется на  $n(s)$ . Наше испытание гипотез  $H_0$  и  $H_1$  при фиксированных вероятностях ошибок  $\alpha$  и  $\beta$  состоит в том, чтобы производить  $n(s)$ , наблюдений  $R_1=R'_1, R_2=R'_2, \dots, R_{n(s)}=R'_{n(s)}$  до тех пор, пока коэффициент правдоподобия (11) не окажется первый раз вне пределов, заданных неравенствами (12). Следовательно, неравенства (12) определяют число испытаний  $n(s)$ , которое является случайной величиной при рассмотрении ансамбля всех возможных испытаний.

Для сравнения метода последовательных наблюдений с наблюдениями, при которых объем выборки неизменен, требуется знать по крайней мере среднее значение числа наблюдений  $\overline{n(s)}=n$  и дисперсию числа наблюдений

$$\overline{n(s)^2} - n^2 = \sigma_s^2.$$

Знание дисперсии необходимо для того, чтобы оценить разброс плотности распределения  $W_s[n(s)]$ , которую, к сожалению, не представляется возможным получить в общем виде. Пока что величины  $n$  и  $\sigma_s^2$  известны лишь для случая независимых наблюдений, что достаточно для рассматриваемой задачи, так как мы полагаем, что шум некоррелирован от импульса к импульсу. При этом

$$n = Z_{n(s)} Z / Z; \quad n^2 - \overline{n^2} = \{ Z_{n(s)} (Z^2 - \overline{Z^2}) / \overline{Z} - \\ - [\overline{Z_{n(s)}^2} - 2Z n Z_{n(s)} + Z_{n(s)}^2] \} / Z^2. \quad (14)$$

Здесь

$$Z = \ln \left\{ \left( \frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{W_1(R/\lambda_1)}{W_1(R/\lambda_0)} \right\}, \quad \text{а} \quad Z_{n(s)} = \sum_{k=1}^{n(s)} Z_k, \quad (15)$$

где в свою очередь  $W_1(R/\lambda)$  при  $\lambda = \lambda_1$  или  $\lambda = \lambda_0$  является одномерной плотностью вероятности огибающей сигнала и узкополосного шума; а  $n(s)$  представляет собой наименьшее целое число, для которого  $Z_{n(s)}$  не удовлетворяет неравен-

ствам испытания (12). Испытание заключается теперь в проверке следующих неравенств:

$$\ln A_1(\alpha, \beta) < Z_{n(s)} = \sum_{k=1}^{n(s)} \ln \left\{ \left( \frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{W_1(R_k/\lambda_1)}{W_1(R_k/\lambda_0)} \right\} < \ln A_2(\alpha, \beta). \quad (16)$$

Плотность вероятности  $W(Z)$ , определяющая  $Z_k$ , вычисляется по (15) как  $n$ -мерная плотность распределения вероятностей амплитуд  $R$ , которая для пороговых сигналов принимается равной  $W_1(R/\lambda_0=0)$ , а для сильных сигналов в качестве плотности распределения вероятности принимается  $W_1(R/\lambda_1=a_0)$ .

Точный подсчет  $Z_{n(s)}$  связан с определением  $W_s[n(s)]$ , которое в общем в виде не получено. Однако нетрудно осуществить рассмотренную Мудом [Л. 16] простую аппроксимацию для случая пороговых сигналов, когда  $a \approx 0$ , и для плотности распределения  $W_1[Z_{n(s)}]$  приближенно имеем:

$$W'(Z_{n(s)}) \cong \alpha \delta[Z_{n(s)} - \ln A_2] + (1 - \alpha) \delta[Z_{n(s)} - \ln A_1] \quad (17)$$

(пороговый случай:  $\lambda = \lambda_0$ ),

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Для случая сильных сигналов соответственно имеем:

$$W'(Z_{n(s)}) = (1 - \beta) \delta(Z_{n(s)} - \ln A_2) + \beta \delta(Z_{n(s)} - \ln A_1) \quad (\text{сильный сигнал } \lambda = \lambda_1). \quad (18)$$

Таким образом, из (14) получаем для этих двух случаев соответственно:

$$n(s) = (\alpha \ln [(1 - \beta)/\alpha] + (1 - \alpha) \ln [\beta/(1 - \alpha)]) / Z, \quad (\lambda = \lambda_0) \quad (19)$$

и

$$n(s) = (1 - \beta) \ln [(1 - \beta)/\alpha] + \beta \ln [\beta/(1 - \alpha)] / Z, \quad (\lambda = \lambda_0). \quad (20)$$

Плотности вероятности огибающей  $R$  в случае одного шума или сигнала с шумом выражаются [Л. 1 и 2] соответственно, как

$$W_1(R/\lambda_0 = 0) = (R/\psi) e^{-R^2/2\psi} \quad (21)$$

$$W_1(R/\lambda_1 = a_0) = (R/\psi) e^{-a_0^2 - R^2 \psi^2} I_0(a_0 R [2/\psi]^2). \quad (22)$$

где  $\psi$  — среднеквадратичное значение шума на входе второго детектора;

$I_0$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для случая пороговых сигналов ( $a_0 < 1$ ) и равных априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала  $p = q$ , получаем, исходя из (22):

$$Z = -a_0^4/2; \quad \bar{Z}^2 = a_0^4. \quad (23)$$

Для случая же сильного сигнала получаем:

$$Z \approx a_0^2; \quad Z^2 \approx a_0^4. \quad (24)$$

Аналогичным путем можно определить и дисперсию числа испытаний  $\sigma_s^2 = \overline{n(s)^2} - (\overline{n(s)})^2$ .

Эти результаты полезны для сравнения последовательных испытаний независимых наблюдений с оптимальными испытаниями при фиксированном объеме выборки.

## II. ОПТИМАЛЬНЫЙ ТИП ВТОРОГО ДЕТЕКТОРА

Рассмотрим теперь задачу обнаружения сигнала в видеотракте импульсного приемника, когда принятое напряжение представляет собой огибающую последовательности периодических импульсов в присутствии шумов. Предполагается, что процессы, с которыми мы имеем дело, стационарны. Отметим также, что когда мешающий шум имеет нормальное распределение, а спектр его широк по сравнению с полосами пропускания УВЧ и УПЧ приемника, время корреляции<sup>1</sup> шумового колебания на входе второго детектора мало по сравнению с периодом повторения импульсов  $T_0$ . Следовательно, корреляция между составляющими шума, относящимися к разным периодам повторения импульсов, практически отсутствует. Для времени интегрирования

<sup>1</sup> Время корреляции равно интервалу, за который функция корреляции огибающей шума, определяемая в данном случае шириной полосы пропускания УПЧ, спадает до половины своего максимального значения.



$T$ , равного  $n$  периодам повторения импульсов ( $T = nT_0$ ), значения шума и сигнала с шумом в эти  $n$  последовательных моментов времени являются чисто случайными и полностью характеризуются одномерной плотностью вероятности  $W_1/(R/\lambda)$ , где  $\lambda = \lambda_1 = a_0$  или  $\lambda = \lambda_0 = 0$  соответственно. Выражение для  $n$ -мерной плотности вероятности, таким образом, может быть записано как:

$$W_n(R_1, t_1; R_2, t_2; \dots; R_n, t_n/\lambda) = \prod_{l=1}^n W_1(R_l/\lambda), \quad (25)$$

где  $W_1(R_l/\lambda)$  определяется формулами (21), (22).

Рассматриваемые нами оптимальные критерии основаны на определенных способах разделения пространства наблюдения  $R_1, \dots, R_l, \dots, R_n$ . Критическое значение коэффициента правдоподобия  $K$ , по которому принимается решение, получается для наблюдателей Неймана—Пирсона и идеального наблюдателя с помощью соотношений (21), (22), (25) и (10):

$$K = K(R_1'', \dots, R_l'', \dots, R_n''; a_0) = p e^{-na_0^2} \prod_{l=1}^n I_0(a_0 2r_l'')/q^{1/n},$$

где

$$r_l'' = R_l''/(2\psi)^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

Гипотеза о наличии сигнала принимается или отвергается на основании того, какому из неравенств следующего вида удовлетворяет коэффициент правдоподобия для ряда  $r_l'(l = 1, \dots, n)$  последовательных наблюдений:

$$\ln \Lambda_n = \ln \mu - na_0^2 + \sum_{l=1}^n \ln I_0(2a_0 r_l')$$

$$\begin{cases} > \ln K \left\{ \begin{array}{l} \text{гипотеза } H_1 \text{ — принимается справедливой; т. е.} \\ \text{считается, что сигнал присут-} \\ \text{ствует;} \end{array} \right. \\ < \ln K \left\{ \begin{array}{l} \text{гипотеза } H_1 \text{ — отвергается, т. е. считается, что} \\ \text{присутствует только шум.} \end{array} \right. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь  $\mu = p/q$ .

В ином виде эти неравенства можно записать как:

$$\sum_{l=1}^n \ln I_0(2a_0 r'_l) \geq K', \quad (28)$$

где  $K' = \ln K + na_0^2 - \ln \mu$ .

Для случае последовательного наблюдения, как это следует из неравенств (12) и (16), пространство наблюдения разделяется границами  $A_1$  и  $A_2$  на три области. Здесь границы  $A_1$  и  $A_2$  играют роль критического значения коэффициента правдоподобия  $K$ , поэтому для данного случая можно записать условия испытания в виде:

$$\begin{aligned} K'_1 \equiv -\ln \mu + n(s) a_0^2 + \ln A_1(\alpha, \beta) &< \sum_{l=1}^{n(s)} \ln I_0(2a_0 r'_l) < \\ &< -\ln \mu + n(s) a_0^2 + \ln A_2(\alpha, \beta) \equiv K'_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Важной особенностью неравенства (29) является то, что часть выражения, содержащая  $\ln I_0$ , не зависит от априорных вероятностей наличия или отсутствия сигнала  $p$  и  $q$ .

На основании результатов, выраженных соотношениями (4) и (29), можно сразу ответить на вопрос о наилучшем способе, которому должны следовать оптимальные наблюдатели, если используется интегрирование после второго детектора. Мы имеем дело именно с таким случаем, потому что когерентность несущей от импульса к импульсу обычно не имеет места.

Оптимальным детектором является нелинейное устройство с амплитудной характеристикой вида:

$$I(t)_{\text{вых}} = C \ln I_0(A_0 U_m(t)/\psi), \quad (30)$$

где  $A_0$  — амплитуда сигнала в импульсе;

$U_m$  — амплитуда входного напряжения, как показано на рис. 2.

Для  $n$  импульсов мы попросту складываем выходные напряжения детектора, имеющего характеристику  $I = f(U)$  вида (30), и принимаем или отвергаем гипотезу о наличии сигнала согласно неравенствам (27)–(29) для соответствующим образом выбранных критических значений отношения правдоподобия,  $K$ ,  $K'_1$  и  $K'_2$ . На оптимальность детектора с ампли-

тудной характеристикой вида  $\ln I_0$  впервые указали Вудворд и Дэвис в опубликованной ими работе [Л. 12 и 13], а также несколько позднее и независимо от них Ханс и Шварц. Когда сигнал мал по сравнению с шумом, то оптимальным является квадратичный детектор, так как при  $a_0^2 r_{\text{вх}}^2 \ll 1$ .

$$I_{\text{вых}} = C \ln I_0 (A_0 U_{\text{мвх}} / \psi) \approx C A_0^2 U_{\text{мвх}}^2 / 4 \psi^2 = C a_0^2 r_{\text{вх}}^2, \quad (31)$$

в то время как для сильных сигналов оптимальным детектором является линейный детектор (с незначительным смещением, пропорциональным  $\ln 2 a_0 r$ ), так как при  $a_0^2 r_{\text{вх}}^2 \gg 1$

$$I_{\text{вых}} = C \ln I_0 (A_0 U_{\text{мвх}} / \psi) \approx 2 C a_0 r_{\text{вх}} \quad (32)$$

(см. рис. 2). Явление подавления сигнала шумом [Л. 14 и 15], когда слабый сигнал в присутствии шума становится еще слабее на выходе нелинейного устройства, подтверждает то обстоятельство, что в случае порогового приема линейный детектор ведет себя почти точно так же, как квад-

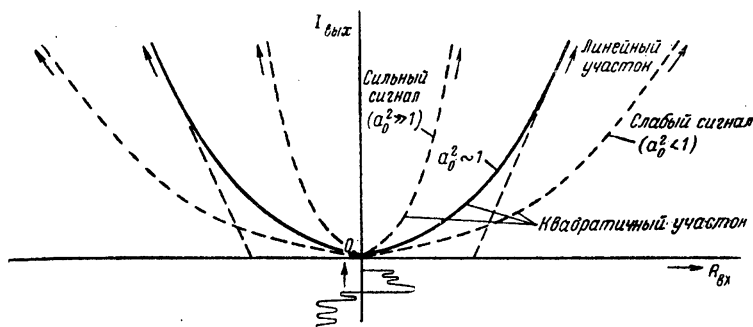


Рис. 2. Оптимальные (амплитудные) характеристики второго детектора, предназначенного для демодуляции импульсных сигналов с высокочастотным заполнением в присутствии нормального случайного шума.

дратичный. Это позволяет нам в случае пороговых отношений сигнала к шуму, имеющих большое практическое значение, применять для характеристики детектора простую квадратичную аппроксимацию (31). С другой стороны, когда напряжение велико, оптимальный детектор с характеристикой вида  $\ln I_0$  с успехом может быть заменен линейным детектором (32), обычно используемым на практике. Послед-

нее показывает, что линейный детектор весьма близок к оптимальному для рассмотренных наблюдателей, независимо от того, каково отношение сигнала к шуму. Таким образом, математические трудности при вычислении кривых распределения верности, связанные с амплитудной характеристикой детектора вида  $\ln I_0$ , можно без ущерба избежать, если для дальнейшего анализа использовать характеристики обычного линейного детектора. Экспериментальное подтверждение этого положения получено Хансом для наблюдения Неймана — Пирсона.

Оптимальные свойства детектора с амплитудной характеристикой вида  $\ln I_0$ , пожалуй, не являются неожиданными, если вспомнить, что принимаемые решения в каждый данный момент времени основаны на коэффициенте правдоподобия  $\Lambda_n$ , который в свою очередь зависит от конкретных статистических свойств сигнала и шума, а последние в данном случае одинаковы для всех трех оптимальных наблюдателей. На самом деле, при заданных статистических характеристиках оптимальный детектор всегда будет иметь амплитудную характеристику вида  $\ln I_0$  для любой оптимальной системы, назначение которой состоит в том, чтобы различить сигнал плюс шум от одного шума, так как в выражении для коэффициента правдоподобия содержатся все известные нам априорные сведения о сигнале и шуме, не зависящие от того, каким путем они впоследствии будут использованы. Пожалуй, наиболее примечательно то, обстоятельство, что используемый с давних пор метод интегрирования, состоящий в сложении следующих друг за другом импульсов на выходе линейного детектора, оказывается весьма близким к оптимальному интегрированию, полученному для рассмотренных наблюдателей. Следует отметить также то, что хотя коэффициент передачи идеального детектора должен зависеть от уровня сигнала ( $\sim a_0$ ), из рассуждений предыдущего раздела ясно, что обычный однополупериодный линейный детектор с постоянным коэффициентом передачи, не зависящим от  $a_0$ , достаточно близок к оптимальному.

На этом мы закончим рассмотрение теории обнаружения импульсного сигнала с высокочастотным заполнением в присутствии нормального случайного шума. Перейдем к вопросу об определении минимально обнаружимого сигнала с учетом всей априорной и апостериорной информации в отличие от большинства более ранних работ, которые были основаны лишь на изучении входных и выходных спек-

тров мощности и которые оставляли открытым вопрос о том, что же в сущности представляет собой минимально обнаружимый сигнал [Л. 14]. Одной из основных особенностей рассматриваемой теории является использование понятия кривой верности [Л. 3], зависящей от способа наблюдения, с помощью которой в свою очередь вводится понятие минимально обнаружимого сигнала.

Прежде всего рассчитаем кривые верности для наблюдателей Неймана—Пирсона, идеального и последовательного, описанных выше, а затем сравнением этих наблюдателей между собой. Начнем с рассмотрения наблюдателя Неймана—Пирсона.

### III. НАБЛЮДАТЕЛЬ НЕЙМАНА — ПИРСОНА

Определим кривую верности для наблюдателя, который оставляет неизменной вероятность ложной тревоги  $\alpha$  и сводит к минимуму верность пропуска сигнала  $\beta$  для заданного времени интегрирования, включающего в себя  $n$  наблюдений. Начнем с рассмотрения большого числа независимых испытаний, при каждом из которых сигнал заданной величины наблюдается на фоне шумов постоянной интенсивности. Этот сигнал по мере бесконечного роста числа испытаний появляется в среднем  $p$ -ю часть общего времени наблюдения, в то время как  $q = (1-p)$ -ю часть времени наблюдения присутствует только шум. Положение сигнала во времени полагается по-прежнему неизменным, а наблюдения производятся только для того, чтобы дать ответ, есть сигнал или нет. Наблюдатель Неймана—Пирсона производит  $n$  наблюдений за напряжением на выходе детектора (см. раздел II) на протяжении одной группы испытания, образуя таким образом ансамбль наблюдений, каждое из которых имеет продолжительность  $nT_0$  сек. Таким образом, если  $p$  является априорной вероятностью наличия сигнала, а  $q$  — априорной вероятностью отсутствия сигнала в заданном положении, то мы сразу можем записать выражение кривой верности после  $n$  наблюдений:

$$W_1(a_0; n)_{\text{НП}} = p(1 - \beta_{\text{мин}}) + q(1 - \alpha) = \quad (33)$$

$$= p_{\Gamma''} (\text{сигнал есть}) \int \dots \int W_1(R_1/a_0) \dots W_1(R_n/a_0) dR_1 \dots dR_n + \\ + q_{\Gamma'} (\text{сигнала нет}) \int \dots \int W_1(R_1/0) \dots W_1(R_n/0) dR_1 \dots dR_n. \quad (34)$$

Пространство наблюдения  $\Gamma$  для огибающих  $R_1, \dots, R_n$  разбивается на две области  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ . На границе об-

ластей коэффициент правдоподобия  $\Lambda_n$  равен своему критическому значению  $K$ . Такой выбор границы областей  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , как мы видели выше (раздел I), сводит к минимуму вероятность пропуска сигнала  $\beta$  при заданной величине отношения сигнал/шум  $a_0$ . Переписывая уравнение (34) в виде

$$W_1(a_0; n)_{\text{НП}} = q \int_0^\infty \dots \int \left\{ \prod_{l=1}^n W_1(R_l/0) dR_l \right\} \times \\ \times \left\{ \left( \frac{p}{q} \right) \prod_{l=1}^n W_1(R_l/a_0) / \prod_{l=1}^n W_1(R_l/0) = \Lambda_n \text{ в } \Gamma'', \right. \\ \left. 1 \text{ в } \Gamma', \right\} \quad (35)$$

получаем:

$$W_1(a_0; n)_{\text{НП}} = p \int_0^\infty \dots \int \Lambda_n \prod_{l=1}^n W_1(R_l/0) dR_l \text{ в области } \Gamma''; \\ = q \int_0^\infty \dots \int \prod_{l=1}^n W_1(R_l/0) dR_l \text{ в области } \Gamma'; \quad (36^*)$$

и видим, что если  $\Lambda_n > K$ , то считается справедливой гипотеза  $H_1$  о присутствии сигнала; если же  $\Lambda_n < K$ , то считается справедливой гипотеза  $H_0$  об отсутствии сигнала.

Далее удобно ввести следующие функции:

$$P_n(x; a_0) = \int_0^\infty \dots \int \left\{ \prod_{l=1}^n W_1(R_l/a_0) dR_l \right\} \delta(x - \ln \Lambda_n) \quad (37)$$

и

$$Q_n(x; a_0) = \int_0^\infty \dots \int \left\{ \prod_{l=1}^n W_1(R_l/0) dR_l \right\} \delta(x - \ln \Lambda_n). \quad (38)$$

При принятой здесь оптимальной амплитудной характеристике второго детектора и нормальной статистике шумов получаем:

$$\ln \Lambda_n = \ln p - n a_0^2 + \sum_{l=1}^n \ln I_0(R_l a_0 [2/\psi]^2); \\ \ln p = \ln(p/q). \quad (39)$$

\* Запись в форме (36) добавлена редактором

Кривая верности (33) и (34) теперь может быть записана как:

$$W_1(a_0; n)_{\text{НП}} = p \int_{\ln K}^{\infty} P_n(x; a_0) dx + q \int_{-\infty}^{\ln K} Q_n(x; a_0) dx. \quad (40)$$

Фиксированная вероятность ложной тревоги  $\alpha$  и вероятность пропуска сигнала  $\beta$ , сведенная к минимуму, теперь могут быть выражены следующим образом:

$$\alpha = 1 - \int_{-\infty}^{\ln K(\alpha; a_0; n)} Q_n(x; a_0) dx = \text{постоянная}, \quad (41)$$

не зависящая от  $a_0$ , и

$$\beta_{\text{мин}} = 1 - \int_{\ln K}^{\infty} P_n(x; a_0) dx. \quad (42)$$

Критическое значение коэффициента правдоподобия  $K$ , для которого пространство наблюдения делится на области „да“ и „нет“, определяется из уравнения (41). Это значение  $K$  затем подставляется в формулу (42), что дает  $\beta_{\text{мин}}$ , и, наконец, получается искомое выражение для кривой верности (40).

Прежде чем подсчитывать окончательно  $W_1(a_1, n)_{\text{НП}}$ , рассмотрим некоторые свойства функций  $P_n$  и  $Q_n$ . Из (37) и (38) очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x; a_0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(x; a_0) dx = 1$$

и

$$P_n(x; 0) = Q_n(x; 0). \quad (43)$$

В предельном случае исчезающе малого сигнала получаем выражение для кривой верности в виде:

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} W_1(a_0; n)_{\text{НП}} = \alpha(p - q) + q = q,$$

т. е.

$$W_1(a_0; n)_{\text{НП}} \approx q, \text{ если } \alpha \ll 1. \quad (44)$$

В другом крайнем случае, соответствующем бесконечно большому сигналу,  $P_n$  существенно отлично от нуля только

при  $x \gg 1$ , в то время как для  $Q_n$ , как видно из (41), интеграл от  $-\infty$  до  $x = \ln K$  всегда равен  $1 - \alpha$ , независимо от  $a_0$ .

В случае бесконечно больших сигналов выражение для кривой верности приобретает вид:

$$W_1(\infty; n)_{\text{нн}} = p + (1 - \alpha)q = 1 - \alpha q = 1. \quad (45)$$

Для расчета кривой верности (40) используем приближение, основанное на том, что нас в основном интересует случай пороговых соотношений сигнала и шума, т. е. случай, когда отношение сигнал/шум на входе и выходе нелинейной системы сравнительно мало. Ввиду того, что

$$I_0(Ra_0 [2/\psi]^{1/2}) \simeq 1 + R^2 a_0^2 / 2\psi \simeq \exp(a_0^2 R^2 / 2\psi) \text{ при } a_0^2 r^2 \ll 1,$$

уравнение (39) можно приближенно записать в виде:

$$x = \ln \Lambda_n = \ln \mu - a_0^2 n + \frac{a_0^2}{2\psi} \sum_{l=1}^n R_l^2, \quad (46)$$

так как сравнение функций  $I_0(2a_0 r)$  и  $\exp(a_0^2 r^2)$  показывает, что они весьма близки друг к другу по величине при  $a_0 r < 1$ , и даже при  $a_0 r = 1$  различие между ними не превышает 15%. Произведя преобразование

$$y = (x - \ln \mu + na_0^2) 2\psi / na_0^2, \quad (47)$$

запишем  $P_n$  и  $Q_n$  в виде:

$$P_n(x; a_0) dx = dy \int_0^\infty \dots \int \left\{ \prod_{l=1}^n (R_l / \psi) \exp(-a_0^2 - R_l^2 / 2\psi) \times \right. \\ \left. \times I_0(a_0 R_l [2/\psi]^{1/2}) dR_l \right\} \delta\left(y - \sum_{l=1}^n R_l^2 / n\right) = P_n(y; a_0) dy; \quad (48)$$

$$Q_n(x; a_0) dx = dy \int_0^\infty \dots \int \left\{ \prod_{l=1}^n (R_l / \psi) \exp(-R_l^2 / 2\psi) dR_l \right\} \times \\ \times \delta\left(y - \sum_{l=1}^n R_l^2 / n\right) = Q_n(y) dy = P_n(y; 0) dy. \quad (49)$$



В этом приближении наблюдатель Неймана—Пирсона основывает свое решение на учете различия плотности распределения среднего значения суммы квадратов  $n$  наблюдений огибающей выходного напряжения УПЧ  $R_1, R_2, \dots, R_n$  при наличии сигнала и в отсутствии его.

Функции  $P_n(y; a_0)$  и  $Q_n(y)$  представляют собой плотности вероятности логарифма коэффициента правдоподобия (в приближении для случая слабого сигнала) для гипотез  $H_1$  и  $H_0$  соответственно. В результате решения уравнений (49) получаем:

$$P_n(y; a_0) = \frac{n}{2\psi} \exp(-na_0^2 - ny/2\psi) \times \\ \times \left( \frac{y}{2\psi a_0^2} \right)^{(n-1)/2} I_{n-1}(2na_0 [y/2\psi]^{\frac{1}{2}}) \quad (50)$$

и

$$Q_n(y) = P_n(y; 0) = \frac{n}{2\psi} \left( \frac{ny}{2\psi} \right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \exp(-ny/2\psi) \quad (51)$$

для любых значений  $y$ .

Полученный результат, как нетрудно видеть, представляет собой  $\chi^2$  распределение с  $n$  степенями свободы. Первый  $y_0$  момент и дисперсия распределения  $y$  оказываются равными:

$$y = 2\psi(1 + a_0^2); \quad y_0 = 2\psi, \quad (a_0 = 0)$$

и

$$\sigma^2 = \overline{(y - y)^2} = 4\psi^2(2a_0^2 + 1)/n; \quad \sigma_0^2 = 4\psi^2/n. \quad (52)$$

Характеристическая функция для  $P_n(y, a_0)$  равна:

$$F_y(\xi; a_0) = (1 - 2i\xi\psi/n)^{-n} \exp[2\psi i\xi a_0^2 / (1 - 2\psi i\xi/n)]. \quad (53)$$

И, наконец, кривая верности для пороговых сигналов запишется как:

$$W_1(a_0; n)_{\text{НП}} = p \int_{y_0}^{\infty} P_n(y; a_0) dy + q \int_0^{y_0} P_n(y; 0) dy,$$

где

$$y_0 = 2\psi \left( 1 + \frac{\ln(K/\mu)}{na_0^2} \right), \quad (54)$$



а критическое значение коэффициента правдоподобия  $K$  получается из (55), которое в свою очередь сводится к выражению:

$$\alpha = (1/2) \left\{ 1 - \Theta \left[ \ln(K/\mu)/a_0^2(2n)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad (57)$$

где  $\Theta$  — табулированный интеграл вероятности

$$\Theta(x) = \left( 2/\pi^{\frac{1}{2}} \right) \int_0^x e^{-y^2} dy.$$

Следует отметить, что

$$\beta_{\min} = (1/2) \left\{ 1 - \Theta \left[ a_0^2 n^{\frac{1}{2}} / 2^{\frac{1}{2}} - \ln(K/\mu)/a_0^2(2n)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}. \quad (58)$$

Для умеренно больших значений  $n$  функции  $P_n$  и  $Q_n$  можно выразить рядом Эджворта. Заметим, что для случая слабых сигналов, когда  $a_0^2 \ll 1$ ,  $(4a_0^2 + 2)^{1/2} \approx \sqrt{2}$ , кривая верности становится универсальной функцией аргумента  $a_0^2 n^{1/2}$ . Эти результаты рассмотрены ниже в § 6.

#### IV. ИДЕАЛЬНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ЗИГЕРТА

В общем случае неравных априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала кривая верности для идеального наблюдателя Зигерта получается также из равенств (35) с той только разницей, что здесь критическая область  $\Gamma''$ , т. е. область наличия сигнала, отделяется от области допустимых значений  $\Gamma'$ , т. е. области отсутствия сигнала, таким образом, чтобы получить максимум кривой верности  $W_1(a_0; n)$ , так как идеальный наблюдатель по определению обеспечивает максимум вероятности правильного решения, сводя к минимуму сумму вероятностей пропуска сигнала и ложной тревоги при заданном количестве наблюдений.

При таких условиях, поскольку  $W_1(R_l/a_0)$  и т. д. положительны, из (35) следует, что  $W_1(a_0; n)$  максимально, если  $\Lambda_n$  превышает единицу в области наличия сигнала  $\Gamma''$ , и меньше единицы в области отсутствия сигнала  $\Gamma'$ . Таким образом, критическое значение коэффициента правдоподобия  $K$  равно единице для всех  $a_0$ .

Уравнение кривой верности (40) для идеального наблюдателя, таким образом, приводится к виду:

$$W_1(a_0; n)_H = p \int_0^{\infty} P_n(x; a_0) dx + q \int_{-\infty}^0 Q_n(x; a_0) dx; (K=1), \quad (59)$$

а сведенные к минимуму вероятности пропуска сигнала и ложной тревоги получаются равными:

$$\alpha_{\min} = 1 - \int_{-\infty}^0 Q_n(x; a_0) dx$$

и

$$\beta_{\min} = 1 - \int_0^{\infty} P_n(x; a_0) dx. \quad (60)$$

Отметим, что в отличие от случая наблюдателя при фиксированном значении вероятности ложной тревоги  $\alpha$  здесь  $\alpha_{\min}$  является переменной величиной, зависящей от  $a_0$ . Как  $\alpha_{\min}$ , так и  $\beta_{\min}$  зависят от  $a_0$  [см. формулы (41) и (42)].

Заметим далее, что  $W_1(0; n)$  равно:

$$W_1(0; n)_H = (p - q) \int_0^{\infty} P_n(x; 0) dx + q = p$$

при любых  $p$  в отличие от  $W_0(0; n)_{HP}$ , равного  $q$  при малых  $\alpha$ . Для бесконечно больших сигналов  $W_1(\infty; n)$  приближается к 1, так как  $(\alpha + \beta)_{\min}$  становится исчезающе малым согласно (45). Следовательно, плотности вероятности  $P_n$  и  $Q_n$  значительно отличаются от 0 только для значений  $x_1$ , равных соответственно  $x \geq 0$  для  $P_n$  и  $x \leq 0$  для  $Q_n$ . Пределы интегрирования можно соответственно расширить от  $-\infty$  до  $+\infty$  без изменения формы записи уравнения (59).

При увеличении  $a_0$  разница между средними значениями  $Q_n$  и  $P_n$  быстро растет, и для того, чтобы обеспечить  $K=1$  согласно требованию идеального наблюдателя, необходимо передвинуть границу, разделяющую области  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ .

Отметим, что критическая область  $\Gamma'''$  изменяется в зависимости от  $a_0$ , и, следовательно, критерий идеального

наблюдателя Зигерта не является равномерно наиболее мощным.

Следовательно, здесь в отличие от критерия Неймана—Пирсона, где граница между областями  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  неизменна, а критическое значение коэффициента правдоподобия  $K$  меняется в зависимости от  $a_0$ , недостаточно, чтобы члены в разложении  $I_0(2a_0r)$  не превышали  $a_0^2$ . Здесь необходимо обеспечить сдвиг границы разделения областей, а для этого в выражение, аппроксимирующее  $x = \ln \Lambda_n$ , необходимо включить члены порядка  $a_0^4$ , и преобразование, соответствующее соотношению (47), принимает вид:

$$y = \left[ x - \ln \mu + na_0^2 + (a_0^4/4) \sum_{l=1}^n (R_l^2/2\psi)^3 \right] 2\psi/na_0^2. \quad (61)$$

Так как в случае пороговых сигналов существенной является только зависимость дополнительного слагающего от  $a_0^2$ , а не точное численное значение множителя при  $a_0^2$ , заменим сумму  $\sum_l R_l^4$  ее средним значением. Это среднее значение определяется с помощью (21), поскольку амплитуда сигнала  $A_0$  полагается малой по сравнению с уровнем шума. Нетрудно определить, что  $\sum_l R_l^4 = 8\psi^2 n$  для  $n$  независимых наблюдений. Плотности вероятностей логарифма коэффициента правдоподобия  $P_n(y; a_0)$  и  $Q_n(y; a_0)$  определяются согласно (48) и (49) так, что кривая верности выражается в виде:

$$W_1(a_0; n)_H = p \int_{y'_0}^{\infty} P_n(y; a_0) dy + q \int_0^{y'_0} Q_n(y) dy,$$

где

$$y'_0 = 2\psi(1 + a_0^2/2) - [2\psi \ln \mu]/na_0^2. \quad (62)$$

Из рис. 4 видно, что необходимо учесть зависимость  $y$  от  $a_0^4$ , так как  $K=1$  при  $(y_0 + y)/2$  для всех  $a_0$  при условии, что  $n$  велико. Тогда при увеличении  $a_0$  точка кривой верности, на которой  $K=1$ , сдвигается в сторону больших значений  $y$ , и минимальные значения  $\alpha$  и  $\beta$  также становятся все более малыми, как и предполагалось.

Хотя первоначальное приближение, представленное

преобразованием (61), теряет силу, когда отношение сигнал/шум  $a_0$  приближается к единице или даже превышает единицу, точное выражение продолжает быть монотонно

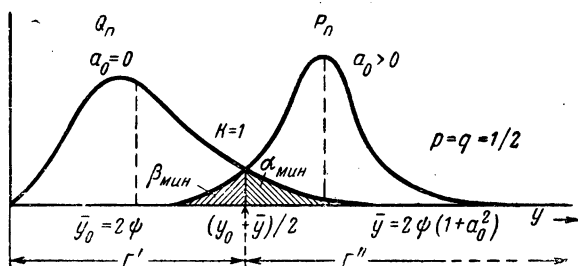


Рис. 4. Плотности вероятности  $P_n$  и  $Q_n$  для идеального наблюдателя при постоянном времени интегрирования.

возрастающим с ростом  $a_0$ , так что существо наших рассуждений не меняется.

Пользуясь тем, что плотности вероятности  $P_n$  и  $Q_n$  распределены по закону Гаусса при больших значениях  $n$  (случай пороговых сигналов), мы сразу же приводим выражение для кривой верности (54), к следующему виду:

$$W_1(a_0; n)_{\text{и}} = (1/2) \left\{ 1 + p \Theta \left[ \frac{(a_0^2 n^2 + (\ln \mu) / a_0^2 n^2) / 2\sqrt{2}}{(2a_0^2 + 1)^{1/2}} \right] + q \Theta \left[ \frac{(a_0^2 n^2 - (\ln \mu) / a_0^2 n^2) / 2\sqrt{2}}{(2a_0^2 + 1)^{1/2}} \right] \right\}; \quad n \gg 1. \quad (63)$$

Обычно для случая любых сигналов содержащийся здесь член  $(2a_0^2 + 1)^{1/2}$  может быть, как и раньше, заменен единицей, и опять получаем, что при данном приближении кривая верности становится универсальной функцией только произведения  $a_0^2 n^2$ . Если априорные вероятности шума и сигнала равны, то приходим к выражению, первоначально полученному Зигертом [Л. 3]:

$$W_1(a_0; n) = (1/2) \left\{ 1 + \Theta \left( \frac{a_0^2 n^2}{2^{3/2}} \right) \right\} \quad \text{при } p = q = \frac{1}{2}. \quad (64)$$

Вероятности ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$  здесь соответственно равны:

$$\alpha_{\text{мин}} = (1/2) \left\{ 1 - \Theta \left( \frac{[a_0^2 n^2 - \ln \mu / a_0^2 n^2] / 2^{3/2}}{1} \right) \right\}$$

$$\beta_{\min} = (1/2) \left\{ 1 - \Theta \left( \left[ a_0^2 n^{\frac{1}{2}} + \ln \nu / a_0^2 n^{\frac{1}{2}} \right] / 2^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \quad (65)$$

Анализ кривой верности и вычисление минимально обнаружимого сигнала даны в разделе VI.

## V. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ

Вместо того, чтобы поддерживать неизменным время интегрирования пропорциональное числу наблюдений  $n$ , варьируя отдельно или вместе вероятности  $\alpha$  и  $\beta$ , как для случаев наблюдателей Неймана—Пирсона и идеального наблюдателя Зигерта, сущность последовательных испытаний (раздел I) состоит в экономии времени интегрирования при той же возможной правильности результата или в обеспечении меньшего значения минимального обнаружимого сигнала при том же времени интегрирования. Таким образом, для рассматриваемой здесь операции выбора альтернативных гипотез последовательный наблюдатель определяется как наблюдатель, который основывает свое решение на коэффициенте правдоподобия  $\Lambda_{n(s)}$ , получаемом в результате последовательности наблюдений  $R_1, \dots, R_{n(s)}$  для каждого испытания поочередно (с учетом всех предыдущих испытаний): если  $\Lambda_{n(s)}$  превышает заранее выбранный предел, то полагается, что сигнал присутствует, а если меньше другого заранее определенного уровня, то выносится решение о наличии только шума. Эти верхняя и нижняя границы определяются согласно формулам (13) лишь величинами  $\alpha$  и  $\beta$ , а последние в свою очередь выбираются заранее согласно требуемым условиям работы. Рассматриваемое для многих испытаний число наблюдений  $n(s)$  является переменной величиной, флуктуирующей от опыта к опыту около среднего значения  $\overline{n(s)} = \bar{n}$ , которое может быть определено из (19) и (20), если выбраны вероятности ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$ .

Кривая верности для последовательного наблюдателя может быть вычислена следующим образом. Из рис. 5 видим, что критическая область и область допустимых значений не соприкасаются друг с другом, как для наблюдателей Неймана—Пирсона и идеального наблюдателя (рис. 3 и 4), а разделены некоторой зоной, которую мы назовем областью испытания. Наблюдения продолжаются до тех пор, пока текущее значение коэффициента правдопо-

бия  $\Lambda_{n(s)}$  не выйдет за пределы области испытаний, и прекращаются сразу, как только  $\Lambda_{n(s)}$  превысит  $K_2$  или окажется меньше  $K_1$  (заметим, что заштрихованные участки на рис. 5 уже не представляют собой вероятности

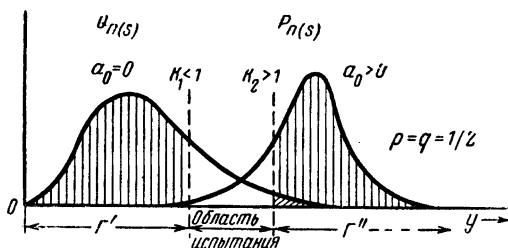


Рис. 5. Плотности вероятности  $P_{n(s)}$ ,  $Q_{n(s)}$  для последовательного наблюдателя. Указаны: область допустимых значений, область испытания и критическая область.

$\alpha$  и  $\beta$ ). Учитывая это, мы далее замечаем, что для всех испытаний, состоящих точно из  $n(s)$  наблюдений, кривая верности еще может быть выражена уравнением (35), с той оговоркой, однако, что теперь  $K_1$  определяет верхнюю границу  $\Gamma'$ , а  $K_2$  — нижнюю границу  $\Gamma''$ . Таким образом, имеем:

$$w_1(a_0; n(s))_{\text{пол.л}} = p \int_{\ln K_2}^{\infty} P_{n(s)}(x; a_0) dx + \\ + q \int_{-\infty}^{\ln K_1} Q_{n(s)}(x; a_0) dx \quad (66)$$

[точно  $n(s)$  наблюдений],

где

$$K_1 = \beta / (1 - \alpha) < 1 \quad \text{и} \quad K_2 = (1 - \beta) / \alpha > 1. \quad (67)$$

Здесь распределения плотностей вероятностей логарифма коэффициента правдоподобия  $P_{n(s)}$  и  $Q_{n(s)}$  задаются уравнениями 37 и (38), а  $p$  и  $q$ , как и раньше, являются априорными вероятностями наличия или отсутствия сигнала. Как и в случае идеального наблюдателя, по мере увеличения отношения сигнал/шум  $a_0$  плотности распределений  $P_{n(s)}$ ,  $Q_{n(s)}$  все более группируются вблизи своих сред-



них значений которые в свою очередь все дальше отстоят друг от друга.

Область испытания также сдвигается в сторону увеличения  $x$ . Таким образом, при аппроксимации коэффициента правдоподобия как  $x = \ln \Lambda_n$  [уравнения (39), (46) и следующие], когда сигнал полагается слабым, можно использовать те же соображения, что и для случая идеального наблюдателя, включая оговорки об  $0(a_0^4)$ . Преобразования здесь также осуществляются согласно выражению (61) с той лишь разницей, что  $n$  заменяется на  $n(s)$ ; последнее же считается определенным для каждого отдельного испытания.

Применяя это преобразование к (67), получаем:

$$\begin{aligned} W_1(a_0; n(s))_{\Pi} = & 1/2 \{ 1 + p\Theta [(a_0^2 n(s))^{1/2} - \\ & - 2 \ln(K_2/\mu)/a_0^2 n(s)^{1/2}]/2^{3/2} (2a_0^2 + 1)^{1/2} \} + \\ & + q\Theta [a_0^2 n(s)^{1/2} + 2 \ln(K_1/\mu)/a_0^2 n(s)^{1/2}/2^{3/2}], \end{aligned} \quad (68)$$

где  $n(s)$  фиксировано.

Для случая больших фиксированных значений  $n(s)$ , т. е. для случая слабых сигналов  $(2a_0^2 + 1) \approx 1$ , опять получаем кривую верности как универсальную функцию произведения  $a_0^2 n(s)^{1/2}$ .

До сих пор мы рассматривали только члены ансамбля повторяющихся испытаний, которые состояли точно из  $n(s)$  наблюдений.

Для вычисления кривых верности необходимо, конечно, усреднить выражения (67) и (68) по всем возможным значениям объема выборки, так как число наблюдений  $n(s)$  является случайной переменной. В результате этого усреднения кривая верности получается в виде:

$$W_1(a_0)_{\text{полсл}} = \int_0^{\infty} W_S(n(s)) w_1(a_0; n(s))_S dn(s), \quad (69)$$

где  $w_1$  задается выражением (67), а  $W_S$  является плотностью вероятности объема выборки. К сожалению,  $W_S$  неизвестно, поэтому аналитическое выражение интеграла (69) не может быть получено. Однако в случае пороговых сигналов, когда  $a_0^2$  мало и, следовательно,  $n(s)$  в среднем

велико, при расчете кривой верности (69) можно использовать следующие приближения для  $W_s$ :

$$\text{первое приближение} — W_s \cong \delta(n(s) - \mathbf{n}); \quad (70)$$

$$\text{второе приближение} — W_s \cong \frac{\exp [-(n(s) - \mathbf{n})^2 / 2\sigma_s^2]}{[2\pi\sigma_s^2]^{1/2}},$$

где

$$\sigma_s^2 = \overline{n^2(s)} - \mathbf{n}^2. \quad (71)$$

В случае первого приближения предполагается, что при больших  $\overline{n(s)}$  число наблюдений  $n(s)$  ограничено значениями, лежащими вблизи его среднего значения  $\mathbf{n}$  с пренебрежимо малыми „скатами“ по бокам от  $\mathbf{n}$ .

Второе приближение более точно [Л. 10], так как оно учитывает конечный разброс значений  $n(s)$ . Заметим, что

$$\lim_{\sigma_s \rightarrow 0} \exp [-(n - \mathbf{n})^2 / 2\sigma_s^2] / (2\pi\sigma_s^2)^{1/2} = \delta(n - \mathbf{n}) \text{ согласно (70)].}$$

В приложении А6 работы [Л. 10] показано, что нормальное распределение (70) можно ожидать, если  $\overline{n} \gg 1$ , т. е. когда статистика числа наблюдений  $n$  предполагается нормальной. Однако в данном случае статистика не является нормальной (21), (22), так что распределения (70) и (71) можно рассматривать лишь как возможные распределения, которые могут соответствовать или не соответствовать действительности.

Как будет показано ниже, расчет кривых верности рис. 8 и 10 и вычисление минимального обнаружимого сигнала с использованием приближенных распределений (70) и (71) дают слишком малые значения сигнала в первом приближении и слишком большие — во втором приближении для распределения числа наблюдений.

Если для вычисления интеграла (69) использовать приближение (70), то сразу получим формулу (68), где  $n(s)$  заменено на  $\mathbf{n}$ . Однако при учете отличной от нуля ширины распределения  $W_s$  (71) получается более сложное выражение.

Можно считать, что величина  $\sigma_s^2 a_0^8$  не зависит от  $a_0$ ; таким образом, видим, что для случая пороговых сигналов,

когда  $(2a_0^2 + 1)^{1/2} = 1$ ,  $a_0^2 \ll 1$ , кривая верности является универсальной функцией произведения  $a_0^2 n^{1/2}$  и имеет вид:

$$W(a_0^2 n^{1/2})_{\text{посл}} = (1/2) \int_0^\infty (2\pi B^2)^{-1/2} \exp[-(x-C)^2/2B^2] \times \\ \times \{1 + p\Theta(x^{1/2} - A_1 x^{-1/2}) + q\Theta(x^{1/2} - A_2 x^{-1/2})\} dx, \quad (72)$$

где

$$A_1 = 2^{-1/2} \ln(K_2/\mu); \quad A_2 = -2^{-1/2} \ln(K_1/\mu); \\ B^2 = \sigma_s^2 a_0^8 / 64; \quad C = (a_0^2 n^{1/2})^2 / 8. \quad (73)$$

Величины  $B$  и  $C$  всегда положительны, в то время как  $A_1$  и  $A_2$  не всегда положительны, если  $\mu$  не очень велико. К сожалению, этот интеграл для практически интересных значений  $\alpha$  и  $\beta$  аналитически вычислить невозможно и приходится прибегать к графическому интегрированию. Отметим также, что при  $a_0 \rightarrow 0$ , кривые верности стремятся к нулю, если  $K_2/\mu > 1$ , или стремятся к  $p$ , если  $\frac{K_2}{\mu} > 1$ , и, кроме того,  $\mu > 1$ ; либо они стремятся к  $q$ , когда  $\mu < 1$  и  $K_1/\mu > 1$ , или к нулю, если  $\frac{K_1}{\mu} < 1$ . Для  $\mu = 1$  предельным значением является 0.

## VI. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Теперь необходимо рассмотреть полученные результаты с точки зрения условий работы радиолокационных станций; будем считать, что сигнал, как правило, мал по сравнению с уровнем шума или в крайнем случае сравним с ним. Начнем с рассмотрения априорных вероятностей.

### 1. Априорные вероятности

В нашем анализе фигурируют два вида априорных плотностей вероятностей — плотности вероятности ожидаемой помехи  $W_1(R_i/a_0)$  и  $W_1(R_i/0)$  в присутствии и в отсутствии сигнала соответственно (21) и (22), которые предполагаются известными еще до того, как от наблюдателя требуется дать ответ о наличии сигнала на основании данных, полученных в результате наблюдений. В наиболее общей форме, конечно, эти величины представляют собой  $n$ -мерные функ-

ции  $W_n(R_1, \dots, R_n/a_0)$  и  $W_n(R_1, \dots, R_n/0)$  [см. § 1 — уравнения (2) — (11)].

Априорными вероятностями, используемыми в анализе, являются соответственно  $p$  и  $q$ , т. е. вероятности того, что любое из испытаний происходит в условиях наличия или отсутствия сигнала. Важным частным случаем является их равенство  $p=q=\frac{1}{2}$ , когда в среднем каждое из испытаний равновероятно будет происходить в присутствии сигнала с шумом или в присутствии только одного шума. Общая теория, рассмотренная в § 3—5, учитывает оба случая, как  $p \neq q$ , так и  $p=q$ . Эти априорные вероятности могут быть использованы, например, в качестве характеристики распределения целей по области сканирования, однако этот вопрос выходит за рамки настоящей работы, целью которой является лишь дать основы статистической теории наблюдений.

## 2. Время ложной тревоги и время ложного бездействия

Ввиду того, что в процессе обнаружения сигнала наблюдатель располагает ограниченным временем для принятия решения, появляется определенная вероятность  $\alpha$  того, что шум будет принят за сигнал, т. е. имеет место определенная вероятность ложной тревоги. Естественно поэтому выяснить, сколько раз в секунду в среднем  $T_{л.тр}^{-1}$  может происходить ложная тревога. Фактически именно этой величиной пользуются на практике и с ее помощью в свою очередь определяется допустимая величина вероятности ложной тревоги  $\alpha$ .

Величину  $T_{л.тр}$  называют временем ложной тревоги или временем ложного использования; оно зависит от вероятности ложной тревоги  $\alpha$  следующим образом:

$$T_{л.тр} = T/\alpha C n \Delta t = 1/\alpha C [\Delta t/T_0], \quad (74)$$

где  $T = nT_0$  — общее время интегрирования (время наблюдения);

$T_0$  — период повторения импульсов;

$\Delta t$  — ширина строба около максимума импульса сигнала;

$C$  — среднее число пересечений в секунду огибающей  $R$  порогового уровня  $R_0 \approx R$ .

Соответственно  $\Delta t/T_0$  является относительным временем «включения» наблюдателя, а  $n\Delta t/T_0$  является общим «рабочим циклом» наблюдателя; обе эти величины пропорциональны ширине строба  $\Delta t$ . Для рассматриваемого случая неизменного положения принимаемого импульса (§ 1)  $\Delta t$  практически весьма мало.

Порог  $R_0$ , относительно которого вычисляется  $C$ , является несколько неопределенной величиной, однако удобно взять для этой цели среднее значение  $R$  огибающей шума на выходе детектора.

В [Л. 17] показано, что для величины порога  $R_0 = R$  при нормальном случайном шуме имеем на выходе линейного детектора

$$C = \rho r \pi^{-1/2} \exp(-(r)^2 - a_0^2) I_0(2a_0 r) = \rho r \pi^{-1/2} \exp(-(r)^2) \\ \text{при } a_0^2 \ll 1,$$

где

$$r = R/(2\psi)^{1/2}, \quad (75)$$

и

$$\rho^2 \equiv \int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 \omega(f) df / \int_0^\infty \omega(f) df = \psi, \\ \omega = 2\pi f; \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \quad (76)$$

где  $\omega(f)$  является спектральной плотностью узкополосного шума на входе второго детектора приемника, а  $f_0$  — средняя частота спектра этого шума.

Если  $\Delta f$  — ширина спектра шума или ширина спектра импульса и если имеется согласование спектра импульса с амплитудно-частотной характеристикой приемника по уровню 0,5 для гауссовой формы амплитудно-частотной характеристики УПЧ, можно получить (см. [Л. 14] и табл. 1 в [Л. 16]), что  $C$  весьма близко по величине к  $\Delta f$ . Величина вероятности ложной тревоги соответственно задается выражением

$$\alpha = T_0/T_{\text{л.тр}} \Delta t \Delta f, \quad (77)$$

а значения вероятности ложной тревоги, лежащие в пределах  $\alpha = 10^{-3} \div 10^{-13}$ , полностью перекрывают обычные практические требования; первое значение  $\alpha = 10^{-3}$  соответствует довольно небольшим интервалам времени ложной тревоги, а второе может соответствовать отрезкам времени порядка суток или более.

Аналогичным путем можно дать определение времени ложного бездействия (спокойствия)  $T_{л.сп}$ , которое представляет собой величину, обратную среднему количеству в секунду неправильных решений об отсутствии сигнала, хотя в действительности он имеется. Аналитически  $T_{л.сп}$  можно получить из формулы (74), заменив  $\alpha$  на  $\beta$ . Значение порога, как и ранее, выбирается равным  $R$ , и аналогично соотношению (77) мы получаем следующую зависимость между  $\beta$  и  $T_{л.сп}$ :

$$\beta = T_0 / T_{л.сп} \Delta f \Delta f. \quad (78)$$

Однако в связи с тем, что  $\alpha$  и  $\beta$  выбираются не независимо, когда объем выборки  $n$  фиксируется заранее (см. раздел I), то  $\alpha$  и  $\beta$ , а следовательно, и  $T_{л.тр}$  и  $T_{л.сп}$  функционально связаны между собой в силу принятого метода наблюдения. Это справедливо для наблюдателей Неймана — Пирсона и идеального наблюдателя, однако для последовательного наблюдателя имеется возможность выбирать  $\alpha$  и  $\beta$  независимо для заданного процента правильных решений, при этом время интегрирования изменяется от опыта к опыту случайно около своего среднего значения.

### 3. Кривые верности

Кривые верности  $W_1$  для трех наблюдателей определены в разделах III—V. Однако удобнее использовать нормированную кривую верности, при построении которой учитываются априорные вероятности  $p$  и  $q$ . Нормирование осуществляется вычитанием из выражения для ненормированной кривой верности величины  $p$  или  $q$ , в зависимости от того, которая из них больше, и делением этой разности на некоторую величину, так, чтобы при  $a_0 \rightarrow \infty$  кривая верности стремилась к единице, как и должно быть для абсолютно правильного решения. Нормированные кривые верности соответственно имеют вид:

для наблюдателя Неймана — Пирсона

$$P_1(a_0^2 n^{1/2})_{Н.П} = [W_1(a_0^2; n)_{Н.П} - (q + \alpha(p - q)) / [1 - q - (\alpha p)]]; \quad (79)$$

для идеального наблюдателя

$$P_1(a_0^2 n^{1/2})_И = [W(a_0^2; n)_И - (p \text{ или } q)] / [1 - (p \text{ или } q)], \quad (80)$$

для последовательного наблюдателя

$$P_1(a_0^2 n^{1/2})_{\text{послед}} = [W(a_0^2; n) - (p \text{ и } q)] / [1 - (p \text{ или } q)]. \quad (81)$$

Эти кривые приведены на рис. 6, 7 и 8 соответственно.

Основной особенностью указанных выше зависимостей является то, что  $P_1$  зависит только от  $a_0^2 n^{1/2}$  ( $n = \mathbf{n}$ ) в случае малых отношений сигнала к шуму и только от  $a_0^2 n$  ( $n = \mathbf{n}$ ) — в случае больших отношений сигнала к шуму. В переходной области, отмеченной на рис. 9, 10 и 11 как

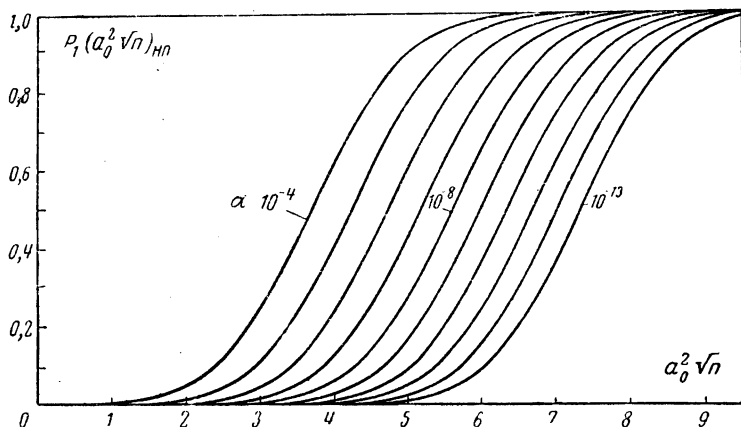


Рис. 6. Нормированные кривые верности  $\left[ \text{зависимость } P_1 \left( a_0^2 (n)^{\frac{1}{2}} \right)_{\text{нп}} \right]$  от  $a_0^2 (n)^{\frac{1}{2}}$  для наблюдателя Неймана — Пирсона при  $\left( p = q = \frac{1}{2} \right)$  и  $\alpha = 10^{-4} \div 10^{-12}$  в случае слабых сигналов.

„приближенная“, статистические свойства одного шума и свойства смеси сигнала с шумом уже настолько различны, что указанная простая зависимость от  $a_0^2 n^{1/2}$  и  $a_0^2 n$  нарушается [(см. (50) (52) и (56)].

Для случая наблюдателей Неймана—Пирсона и последовательного наблюдателя также видим, что чем меньше выбранное значение  $\alpha$ , тем большее значение  $a_0^2 n^{1/2}$  требуется для получения заданной величины  $P_1$ . Это естественно, так как для меньших значений вероятности ложной тревоги требуется большее отношение сигнала к шуму на входе при неизменном значении вероятности правильного обнаружения (рис. 6—8). С другой стороны, кривая вер-

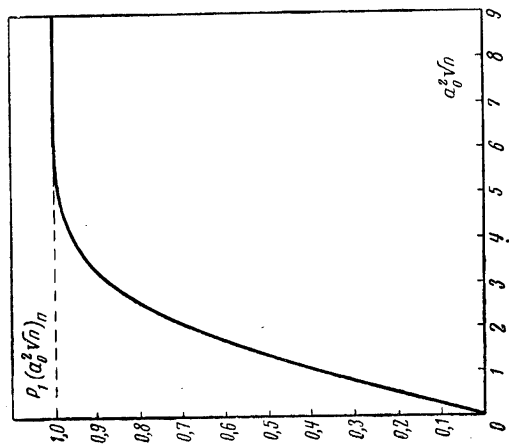


Рис. 7. Нормированная кривая вероятности для идеального наблюдателя (зависимость  $P_1$  от  $a_0^2(n)^{1/2}$ ;  $p=q=\frac{1}{2}$ ).

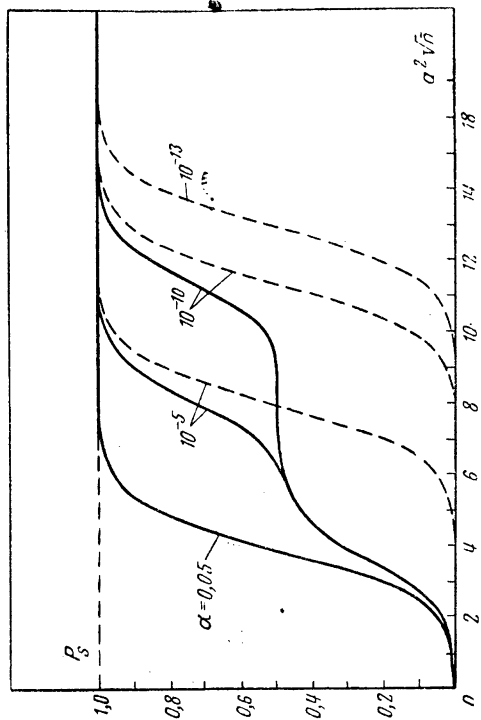


Рис. 8. Ненормированные кривые вероятности  $P'_s$  для последовательного наблюдателя при гауссовом распределении объема выборки ( $n_s$ ) для  $p=q=\frac{1}{2}$ ;  $\beta=0,1$  и  $\beta=2\alpha$ ;  $\alpha=5 \cdot 10^{-2}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-13}$ .



ности для идеального наблюдателя (см. рис. 7) зависит только от одного значения  $\alpha = \alpha_{\min} (= \beta_{\min})$  для любого выбранного значения  $\alpha_0^2 n^{1/2}$ , так как в этом случае  $\alpha_{\min}$  и  $\beta_{\min}$  вместе определяются условием максимума кривой верности (раздел IV).

Для последовательного наблюдателя  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть выбраны независимо и в данном случае выбираются произвольно. При этом для меньших значений  $\alpha$  и  $\beta$  требуется большее время интегрирования, т. е. большее число наблюдений, что тоже естественно (рис. 8). Ненормированные

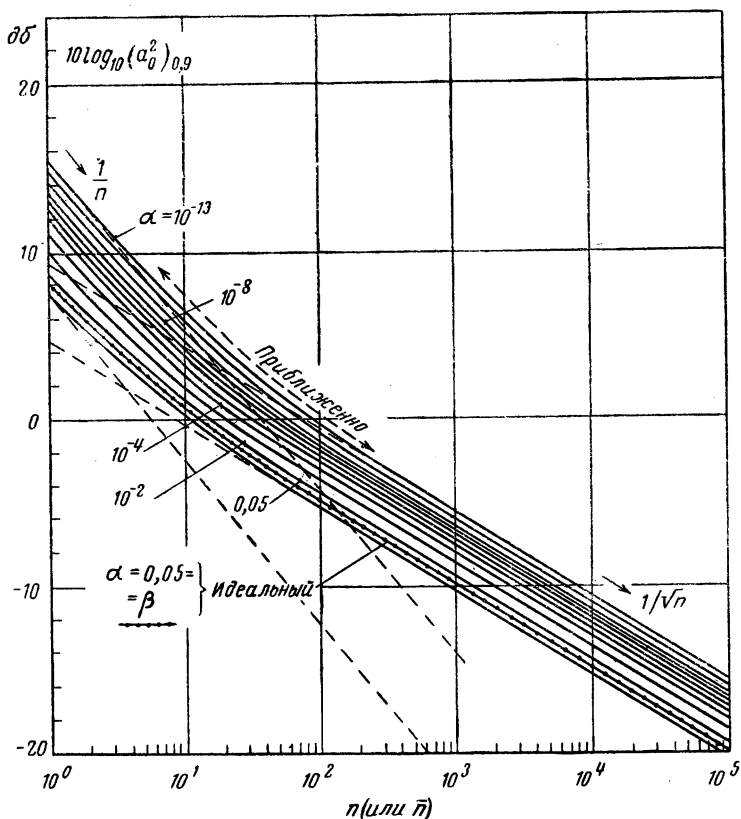


Рис. 9. Минимально обнаружимый сигнал для наблюдателя Неймана — Пирсона  $\frac{1}{2}$  и идеального наблюдателя как функция времени интегрирования ( $n$ ) при вероятности правильных решений 90%;  $\alpha = 0.05 \div 10^{-13}$ ;  $p = q = \frac{1}{2}$ .

кривые верности  $P'_1$  на рис. 6 для последовательного наблюдателя относятся к случаю гауссова распределения объема выборки  $n(s)$  согласно (71). Заметим, что по сравнению с дельта-распределением (70) при гауссовом распре-

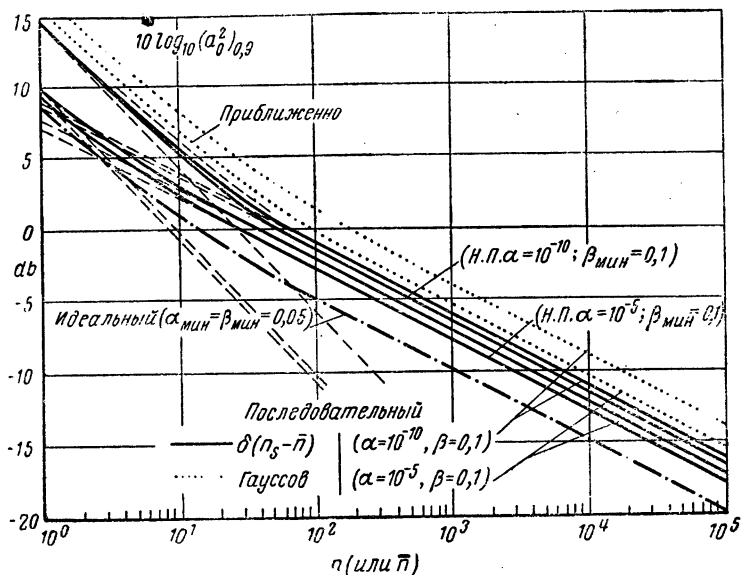


Рис. 10. Минимально обнаружимый сигнал для наблюдателей Неймана — Пирсона, идеального и последовательного;  $\alpha = 10^{-5}, 10^{-10}$ ;  $\beta = 0,1$  для наблюдателей Неймана — Пирсона и последовательного наблюдателя;  $\alpha_{\min} = \beta_{\min} = 0,05$  для идеального наблюдателя. Все кривые построены для вероятности правильных решений 90%.

$$\begin{aligned} \text{Н.—П. } & \alpha = 10^{-10}, \alpha = 10^{-5}, \beta = 0,1; \\ \text{последовательный } & \alpha = 10^{-10}, \alpha = 10^{-5}, \beta = 0,1; \\ \text{идеальный } & \alpha = \beta = 0,05; \\ & p = q = 1/2. \end{aligned}$$

делении получаются кривые верности, сдвинутые в сторону больших значений  $a_0^2 n$ . Это указывает на то, что для выбранного уровня вероятности правильного обнаружения требуется в среднем больший объем выборки, чем в случае дельта-распределения.

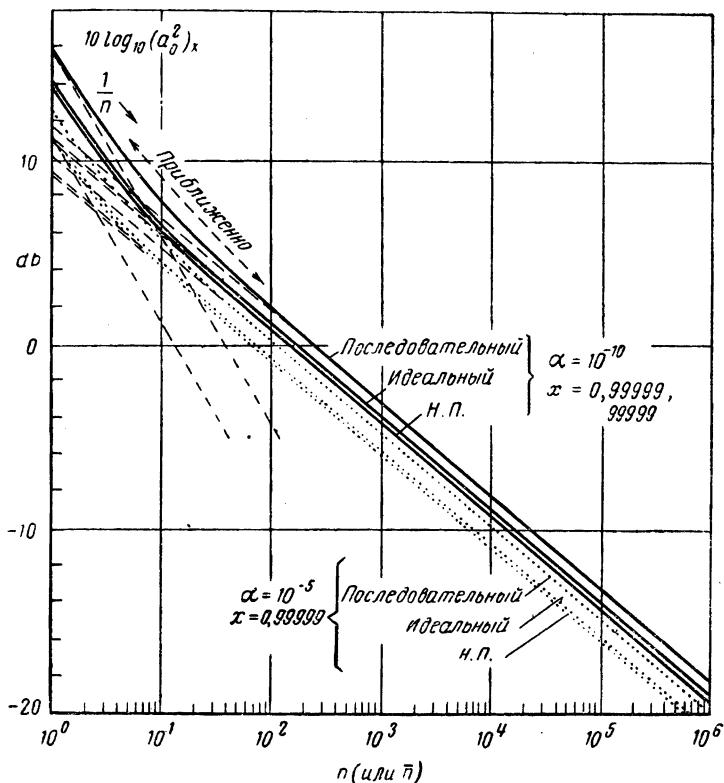


Рис. 11. Минимально обнаружимый сигнал для наблюдателей Неймана — Пирсона, идеального и последовательного при вероятности правильных решений, равной  $x$ ;

$$\beta_{\text{Н.П.}} = \beta_{\text{посл}} = 2\alpha; \beta_{\text{мин. ид}} = \alpha_{\text{ид}} = \alpha.$$

#### 4. Минимально обнаружимый сигнал

Как только получена кривая верности, можно сразу определить минимально обнаружимый сигнал, так как по определению это есть значение  $a_0^2$ , соответствующее некоторому заранее выбранному проценту получающихся в среднем правильных решений, после того как вычтена априорная вероятность  $p$  или  $q$  [уравнения (79), (80)]. Удобной цифрой является  $P_1 = 0,90$ , хотя в ряде применений может оказаться более удобным любое иное значение. Однако слишком большие значения вероятности  $P_1 \approx 1$  при-

водят к очень малой чувствительности приемного устройства, так как в этом случае при заданном времени интегрирования входной сигнал должен быть очень большим по сравнению с уровнем шума, чтобы обеспечить получение правильного ответа с такой большой вероятностью. С другой стороны, слишком заниженное значение  $P_1$  для минимально обнаружимого сигнала приводит к слишком большой ошибке при принятии решения, чтобы такой результат можно было считать удовлетворительным.

Так как  $P_1$  для каждого наблюдателя зависит только от универсальной величины  $a_0^2 n^{\frac{1}{2}}$  или  $a_0^2 n$ , то, выбрав вероятность, соответствующую пороговому сигналу, равной, скажем, 90%, можно записать:

$$(\text{слабый сигнал}) \rightarrow (a_0^2)_{0,9} = \frac{H_1(0,9)}{n^{1/2}} \text{ или } \frac{H_1(0,9)}{(n)^{1/2}}$$

(последовательный наблюдатель), (82)

$$(\text{сильный сигнал}) \rightarrow (a_0^2)_{0,9} = \frac{H'_1(0,9)}{n} \text{ или } \frac{H'_1(0,9)}{n}. \quad (83)$$

Величины  $H$  и  $H'$  называются пороговыми постоянными. Они параметрически зависят от времени интегрирования, величины порогового сигнала, метода наблюдения и в зависимости от типа наблюдателя также от  $\alpha$  и  $\beta$ .

На рис. 9 приведены кривые для минимально обнаружимого сигнала. Они во всех случаях состоят из двух линейных участков: одного — с угловым коэффициентом, равным единице — для случая сильных сигналов, и другого — с угловым коэффициентом, равным одной второй — для случая слабых сигналов, и одного промежуточного нелинейного участка, на котором не выполняются зависимости  $1/n$  и  $1/n^{1/2}$ . Уменьшение вероятности ложной тревоги  $\alpha$  несколько снижает чувствительность системы, однако это снижение составляет всего 2,0 дБ или менее при изменении  $\alpha$  в пределах от  $10^{-4}$  до  $10^{-13}$  для наблюдателя Неймана—Пирсона и идеального наблюдателя. Более подробное сравнение кривых минимально обнаружимого сигнала приведено ниже.

## 5. Работа наблюдателя

Решения, которые принимает рассматриваемый нами наблюдатель, требуют сравнения коэффициента правдоподобия выборки с некоторым критическим значением коэффи-

цисента правдоподобия для случая наблюдателей Неймана—Пирсона и идеального при выбранном  $\alpha$ , а для последовательного наблюдателя требуется сравнение с парой критических значений, после того как выбраны  $\alpha$  и  $\beta$ . Такая процедура характерна для всех процессов наблюдений, которые сводятся к проверке статистических гипотез, согласно изложенному в разделе I. Заметим, что все критические значения отношения правдоподобия содержат отношение сигнал/шум по мощности  $a_0^2$  в качестве параметра. Поэтому необходимо различать два принципиально различных условия наблюдения.

1) Величина отношения сигнал/шум  $a_0$  известна. При этом мы можем ввести заданное значение  $a_0$  в приемную систему, осуществляющую наблюдение. Это позволяет нам сравнить работу различных приемных систем, если работа происходит в одинаковых условиях. При использовании линейного второго детектора (§ 4) все три типа наблюдателей обеспечивают оптимальные испытания при этих условиях для любого  $a_0$ , так как  $a_0$  известно в каждый данный момент времени.

2) Величина отношения сигнал/шум  $a_0$  неизвестна. Это обычный случай, имеющий место на практике, так как при реальной работе отношение сигнала к шуму точно неизвестно. Однако сразу после приема становятся известными  $n$  значений принятой огибающей  $R'_1, \dots, R'_n$ . Кроме этого, необходимо задаться величиной  $a_0$  для того, чтобы определить критическое значение коэффициента правдоподобия, с которым мы будем сравнивать коэффициент правдоподобия  $\Lambda_n(R'_1, \dots, R'_n; a_0)$  для данной выборки. Естественно в качестве  $a_{0 \text{ пороговое}}$  выбрать значение, которое соответствует минимально обнаружимому сигналу для некоторого заданного процента правильных решений на кривой верности  $P_1$ , скажем, 90%. При этом сигнал, меньший, чем это значение  $a_0$ , не будет обнаружен, а более сильный будет отмечен, причем оба эти решения будут справедливы (в 90% случаев). Здесь опять все три типа наблюдателей обеспечивают оптимальное испытание для  $(a_0^2)_{\text{пороговое}}$ , но отнюдь не для любого другого значения отношения сигнал/шум  $a_0^2$  коль скоро  $(a_0^2)_{\text{пороговое}}$  выбрано.

Испытания в вышеупомянутом случае (1) оптимальны в силу того, что  $(a_0^2)_{\text{пороговое}}$  установлено для каждой от-

дельной выборки и представляет собой величину, соответствующую действительному отношению сигнала к шуму на входе.

Для другого значения  $a_0^2$  испытание не является оптимальным потому, что критическая область  $\Gamma''$  зависит от порога, как показано в разделе I, и мы не имеем здесь равномерно наиболее мощных критериев<sup>1</sup>. Иными словами, когда отмечается превышение порога, и решения о наличии сигнала принимаются с ошибкой, меньшей, чем та, которая соответствует выбранному нами значению  $(a_0^2)_{\text{пороговое}}$ , то эти решения принимаются не с минимальной ошибкой, достижимой при данной величине отношения сигнал/шум  $a_0^2$ . Когда мы задаемся целью определить только наличие или отсутствие сигнала, то вышесказанное не имеет значения, мы получаем ответ за неизменное выбранное время интегрирования с ошибкой, по крайней мере не превышающей максимальную  $[10^0/0$ , если выбрано  $(a_0^2)_{0,9}]$ . Однако когда сигнал  $(a_0^2)_{\text{действ}}$  превышает величину  $(a_0^2)_{\text{пороговое}}$ , то можно было бы получить ответ в более короткое время при максимальной ошибке, соответствующей  $(a_0^2)_{\text{пороговое}}$ . Ясно, что при этом мы несколько теряем в эффективности наблюдения в результате того, что испытание уже более не является оптимальным для  $(a_0^2)_{\text{действ}} \neq (a_0^2)_{\text{пороговое}}$  при сильных сигналах. Последовательный наблюдатель преодолевает эту трудность, потому что он меняет объем выборки в зависимости от интенсивности сигнала. Более сильные сигналы соответственно требуют меньшего времени накопления, но при любых условиях некоторое пороговое значение сигнала должно быть введено в систему, осуществляющую последовательное наблюдение, так как величина  $a_0$  заранее неизвестна.

<sup>1</sup> Тот факт, что указанные критерии зависят от порога, определяется, конечно, самим характером априорных плотностей вероятности  $W_n(R_1, \dots, R_n/a_0)$  и  $W_n(R_1, \dots, R_n/0)$  мешающего шума (раздел I). Для некоторых иных статистических свойств помех критерии могут оказаться равномерно наиболее мощными, однако это маловероятно, так как известно очень мало встречающихся на практике случайных процессов, для которых это может иметь место. Для слабых сигналов всегда, исходя из времени ложной тревоги, определяется  $\alpha$ , а не  $\beta$ , в силу того, что  $\alpha$  можно определить по известному распределению  $W_n(R_1, \dots, R_n/0)$ , в то время как для определения  $\beta$  требуется знание точного значения  $a_0$ , вводимого в  $W_n(R_1, \dots, R_n/a_0)$ , а  $a_0$  обычно неизвестно.

## 6. Сравнение наблюдателей Неймана — Пирсона, идеального и последовательного

Установив ряд оптимальных критериев для задачи обнаружения импульсного сигнала в шумах, следует выяснить, какой из критериев является наилучшим с точки зрения разумных требований. Такое сравнение должно быть сделано на основании изучения результатов работы разных наблюдателей, когда они решают одинаковую задачу для одних и тех же целей в одинаковых условиях (бессмысленно, например, сравнивать системы *A* и *B*, когда они предназначены для выполнения различных задач).

В данном случае будем рассматривать лишь задачу наблюдения за одним сигналом, т. е. наблюдения за одним интервалом дальности. Тогда наилучшим будем считать такого наблюдателя, который при заданных времени интегрирования и вероятности ложной тревоги требует наименьшего сигнала для заранее выбранного уровня правильных решений на кривой верности, т. е. наименьшего значения, скажем,  $(a_0^2)_{0,9}$  для заданных  $n = n$  и  $\alpha$ .

Нельзя требовать одновременно для всех случаев, чтобы вероятность  $\beta$  была одинаковой для каждого наблюдателя, так как величина  $\beta$  часто определяется (т. е. сводится к минимуму) самим процессом наблюдения. Например, для случая слабых сигналов установлено, что при равных вероятностях ложной тревоги наблюдатель Неймана—Пирсона при 90% уровне правильных решений обеспечивает на 0,5 дб лучшую чувствительность, чем идеальный наблюдатель (который, однако, обеспечивает меньшую вероятность пропуска сигнала), и на  $\approx 1,5$  дб лучшую чувствительность, чем последовательный наблюдатель при дельта-распределении объема выборки [ $n(s) = n$ ], а его результат в свою очередь почти на 3 дб превосходит среднюю чувствительность, получаемую последовательным наблюдателем при гауссовом распределении объема выборки.

Следует отметить возможную трудность, возникающую при сравнении идеального наблюдателя с наблюдателями Неймана—Пирсона и последовательным наблюдателем. Коль скоро выбрана вероятность правильных решений [здесь она принимается соответствующей точке 90% на нормированных кривых верности (79) — (81) для идеального наблюдателя], вероятность ложной тревоги уже определена в отличие от других наблюдателей, для которых  $\alpha$  может выбираться независимо от вероятности принятия

правильных решений. При  $(a_0^z)_{0,0}$  для идеального наблюдателя  $\alpha_{\text{мин}}$  равно 0,05, однако для практических значений интервалов ложных тревог требуемое  $\alpha$ , определяемое из (77), имеет меньшее значение, обычно порядка  $10^{-4}$  или менее. Такие значения  $\alpha$  в свою очередь обеспечивают более высокий процент правильных решений в случае идеального наблюдателя; например, значение  $\alpha=10^{-5}$  соответствует точке 99,998% на кривой верности. Такая точность ответа обычно слишком велика для практических целей; она соответствует минимально обнаружимому сигналу на 1,5—2,0 дб выше значения, соответствующего точке 90% для любого заданного объема выборки  $n=n$ .

На рис. 11 показана зависимость минимально обнаружимого сигнала от числа интегрируемых импульсов для случая больших вероятностей правильного обнаружения  $x$ . Здесь сохраняется тот же порядок расположения кривых для различных наблюдателей, как и в случае  $x=90\%$ .

Для последовательного наблюдателя<sup>1</sup> при  $\omega_s = \delta(n_s - n)$  требуется наибольшая величина отношения сигнала к шуму на входе; для наблюдателя Неймана—Пирсона величина порогового сигнала наименьшая (приблизительно на 2,5 дб) при заданном  $n=n$ ; для идеального же наблюдателя эта величина несколько больше, чем для наблюдателя Неймана—Пирсона. Различие результатов, полученных для наблюдателей Неймана—Пирсона и последовательного наблюдателя при  $\omega_s = \delta(n_s - n)$ , имеет место в силу аппроксимации (13) для случая дискретного рассмотрения, а также из-за приближений, связанных с вычислением среднего числа наблюдений  $n$  (17) — (20). В случае равенства  $n_s = n = n_{\text{нп}}$ , конечно, должен получиться результат, соответствующий наблюдателю Неймана—Пирсона. Как и ожидалось, для меньших значений вероятностей ложной тревоги требуется большее значение пороговой постоянной, так как это означает требование более точного решения при неизменном времени интегрирования. Мы видим также, что с увеличением вероятности принятия правильных решений  $x$  минимально обнаружимый сигнал менее всего увеличивается для наблюдателя Неймана—Пирсона, в то время как для идеального наблюдателя

<sup>1</sup> Кривые для последовательного наблюдателя для гауссова распределения  $n_s$  здесь не приводятся, однако согласно приближенной оценке они должны проходить на 1,7 — 2,0 дб выше кривых для случая  $\omega_s = \delta(n_s - n)$ .



необходимо наибольшее увеличение порогового сигнала ( $\alpha_0^2$ ), когда вероятность правильного решения  $x$  возрастает, например, от 90 до 99,9%.<sup>0</sup>

Наконец, рассматривая отдельно наблюдателя Неймана—Пирсона и последовательного наблюдателя, можно провести их сравнение при представляющем практический интерес значении  $x=90\%$ , а также при одинаковых  $\alpha$  и  $\beta$ , если  $\beta_{\text{посл}}$  приравнять к  $\beta_{\text{мин}}$  для критерия Неймана—Пирсона. Будем считать, что  $\alpha$  имеет достаточно малое значение, определенное обычным путем исходя из времени ложной тревоги. Из сравнительных характеристик (рис. 8) видим явное преимущество наблюдателя Неймана—Пирсона над последовательным: на 0,5 и 2,5 дб для  $\alpha=10^{-5}$  и приблизительно на такую же величину для  $\alpha=10^{-10}$ .

Из приведенного рассмотрения можно сделать следующие выводы:

1) Наблюдатель Неймана—Пирсона превосходит идеального наблюдателя приблизительно на 0,5 дб по величине порогового сигнала. Он отличается большей стабильностью, т. е. менее чувствителен к изменению порогового значения сигнала. Практически критерий Неймана—Пирсона в случае слабых сигналов не зависит от порога и, таким образом, является равномерно наиболее мощным критерием [теоретически (§ 4) работа наблюдателя Неймана—Пирсона совершенно не зависит от уровня сигнала на входе только при  $\alpha_0=0$ ]. Ввиду этой особенности наряду с малым значением пороговой постоянной данный критерий является особенно подходящим в ряде практических применений.

2) Идеальный наблюдатель является вторым по качеству с точки зрения минимально обнаружимого сигнала при постоянном времени интегрирования. Однако он наименее стабилен из трех рассмотренных наблюдателей и дает наибольшие отклонения от оптимальной работы при выходном сигнале, превышающем пороговый сигнал для вероятности правильных решений 90%, так как последний входит в выражение для коэффициента правдоподобия  $\Lambda_n$ . Этот критерий также несколько более чувствителен к изменениям уровня входного сигнала по сравнению с критерием Неймана—Пирсона. Основным недостатком «идеального» наблюдателя является требование большого значения уровня вероятности правильных решений ( $x$ ) для практически приемлемых значений вероятности ложной

тревоги. Сравнивая, например, кривые рис. 10 и 11 для  $\alpha=10^{-5}$ , видим, что идеальный наблюдатель при  $x=0,99998$  приблизительно на 1,7 дб хуже, чем наблюдатель Неймана—Пирсона при  $x=0,90$ .

3) Для законов распределений выборки, рассмотренных в данной работе, минимально обнаружимый сигнал последовательного наблюдателя несколько больше (на 0,5 дб при  $w_s = \delta(n_s - n)$  и на 3,0 дб при гауссовом распределении  $n_s$ ), чем для критерия Неймана—Пирсона. Однако мы знаем, что последовательный наблюдатель никогда не может быть менее эффективным, чем наблюдатель Неймана—Пирсона, так как последний всегда можно рассматривать как частный случай последовательного наблюдения, при котором испытание оканчивается после взятия точно  $n=n$  выборок. Тот факт, что в разобранным случае последовательный наблюдатель уступает наблюдателю Неймана—Пирсона, происходит из-за принятой нами аппроксимации распределения объема выборки для последовательного наблюдателя; истинные распределения остаются неизвестными.

Таким образом, нижняя граница ошибок в определении минимально обнаружимого сигнала при такой аппроксимации обуславливается тем, насколько последовательный наблюдатель оказывается хуже наблюдателя Неймана—Пирсона при одинаковых вероятностях ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$ .

. Законченную же теорию последовательного наблюдателя еще предстоит разработать.

## 7. Общие замечания по поводу статистической теории процесса наблюдения

Задача наблюдения сигнала на фоне шумов разделяется на две части. Первая состоит в том, чтобы перенести приходящие сигналы и шум из области радиочастот в область видеочастот без потери информации, а также без введения ложных данных в процессе наблюдения. Вторая часть задачи — обработка или интерпретация имеющейся информации. В первом случае мы занимаемся лишь получением исходных данных, не делая никаких предположений. Во втором случае от нас требуется принять решение, основанное на полученных данных; само существо и методика этого процесса обуславливаются целиком или частично тем, насколько полно используются получаемые нами

данные. В статистике первая задача называется задачей оценки параметров, в то время как последняя задача, как уже отмечалось во введении и в разделе I, относится к теории статистической проверки гипотез.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу определения местоположения импульсного сигнала на некотором интервале шкалы дальности, большем, чем ширина импульса, при условии, что априори известно о наличии сигнала заданной формы. Как показано Вудвордом [Л. 4], единственно правильная формулировка этой задачи состоит в том, чтобы найти распределение плотности вероятности положения импульса относительно некоторой характерной точки (обычно максимума амплитуды), а не точного его положения. Как только мы принуждаем себя дать точный ответ, основанный, однако, на недостаточном знании, мы вводим тем самым недостоверные данные и, таким образом, разрушаем часть информации, имеющейся в нашем распоряжении. Этим мы отвергаем статистический характер всего процесса; иными словами, попытка дать точный ответ является своего рода обманом, наказанием за который служит потеря информации. Для правильного решения рассматриваемой задачи Вудворд считает необходимым знать следующие три вида распределений вероятностей.

1) Априорное распределение плотности вероятностей, представляющее собой исходную степень осведомленности наблюдателя. В него входят априорные вероятности наличия или отсутствия сигнала  $p$  и  $q$ , а также форма закона распределения  $(W_n)$   $n$ -мерной плотности вероятности сигнала и шума. Значение же статистического параметра, в данном случае положения импульса, или в разобранной нами задаче обнаружения сигнала — отношение сигнала к шуму — точно неизвестно.

2) Плотность распределения максимального коэффициента правдоподобия, которое определяется лишь полученными данными и не требует знания статистических параметров. Полученные данные вводятся в известное выражение для априорной плотности распределения  $W_n$ , и затем выбирается такое значение статистического параметра, которое обеспечивает максимум коэффициента правдоподобия [Л. 16]. Данные, полученные таким образом, представляют собой дополнение к имеющимся знаниям наблюдателя.

3) Апостериорное распределение плотности вероятностей, которое после соответствующе-

го нормирования отражает окончательные знания наблюдателя. Это распределение является нормированным произведением априорного распределения вероятностей и распределения коэффициента правдоподобия.

Апостериорное распределение вероятностей и является требуемым ответом на наш первоначальный вопрос, основанным на использовании всех полученных нами данных. Это распределение вероятностей простирается по всему допустимому интервалу возможных положений сигнала, всегда положительно и имеет ряд максимумов; один из максимумов относится к предполагаемому сигналу, положение которого требуется оценить. Следует подчеркнуть то, что эта кривая распределения не является копией кривой, воспроизводящей форму огибающей напряжения, полученного на выходе детектора для разных дистанций в видеотракте радиолокационной станции, а является кривой плотности распределения вероятностей. Она также не является кривой, показывающей превышения сигнала над шумом, а отражает собой распределение, на форму которого не влияют никакие догадки. Кроме того, оптимальная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, с помощью которого огибающая высокочастотного колебания преобразуется в видеосигнал, определяется лишь формой априорного вероятностного распределения шума и сигнала. Здесь, как и в разделе II, оптимальным полагается детектор с амплитудной характеристикой вида  $\ln I_0$ .

Заметим, что до сих пор ничего не было сказано относительно использования вышеупомянутых данных для принятия решения; пока что наша задача состоит попросту в оценке статистического параметра, в данном случае положения импульса. Для того чтобы принять решение, необходимо соответствующим образом связать апостериорное распределение с вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала. Это может быть сделано путем проверки гипотез о наличии или отсутствии сигнала по максимуму коэффициента правдоподобия или путем замены операции, указанной в п. 2, действиями наблюдателей, которые были рассмотрены для трех критериев. Как в том, так и в другом случае статистическое испытание обязательно требует применения понятий вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала. Естественное и удобное использование этих понятий реализуется посредством кривой верности, с помощью которой в свою очередь определяется минимально обнаружимый сигнал.

Необходимо подчеркнуть, что при указанных условиях кривая верности не дает никаких дополнительных сведений: ни действительных, ни ложных; она только указывает на связь, имеющуюся между полученной информацией и решениями, которые должны быть сделаны на основании этой информации. Практически, конечно, некоторая часть информации теряется (так называемая топологическая ошибка) в результате замены непрерывных величин дискретными, так как рассмотрение ведется на основании наблюдения в одной точке, в то время как на самом деле необходимо рассматривать бесконечно большое количество точек. Однако этой потерей информации можно пренебречь, если длительность строба равна или меньше длительности импульса сигнала.

Не существует единого пути решения о том, какой из критериев лучше — критерий максимума коэффициента правдоподобия, критерий Неймана — Пирсона или какой-либо иной. Критерии обнаружения сигналов в присутствии шумов следует сравнивать с точки зрения достижимости одинаковых желаемых результатов.

Эти критерии отличаются лишь способом принятия решения; тот или иной способ обработки данных может оказаться в некотором конкретном случае более подходящим, чем другой для достижения определенной цели. Предполагается, что критерий максимального коэффициента правдоподобия эквивалентен по своим результатам критерию Неймана — Пирсона, хотя в данной работе этот вопрос и не рассматривался. Оба эти критерия требуют знания одних и тех же априорных распределений, и тот и другой критерий сравнительно нечувствительны к порогу, пропорциональному  $a_0$ , первый по определению, а второй — по способу построения критерия и благодаря характеру статистики в рассматриваемой задаче; кроме того, оба эти критерия могут быть обращены на случай наблюдения  $m$  положений сигнала, перекрывающих всю просматриваемую дальность. Наконец, оба эти критерия подчиняются одним и тем же ограничениям, а именно, необходимости знания априорного распределения вероятностей. Для практического анализа в большинстве случаев это означает, что следующие друг за другом наблюдаемые колебания должны быть некоррелированы, чтобы можно было использовать обычные статистические испытания, основанные на случайных выборках. В принципе можно аналогичным образом рассматривать и коррелированные сигналы помех, напри-

мер помехи от местных предметов, однако практические трудности в определении, например  $n$ -мерного гауссового распределения огибающей шума, когда  $n > 2$ , оказываются чрезмерными, и при этом необходимо пытаться использовать приближенные методы анализа.

Приложение

### СЛУЧАЙ СИЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Хотя при сильных сигналах задача обнаружения сигнала становится менее критичной, все же представляет интерес построить кривые  $(a_{\text{мин}}^2)$  минимально обнаружимого сигнала (рис. 9-11) для области сравнительно небольших отрезков времени интегрирования  $[1 \leq (n \text{ или } \mathbf{n}) \leq 0(10)]$ , а также выяснить, какова при этом зависимость  $(a_0^2)_{\text{мин}}$  от  $n$  или  $\mathbf{n}$ . В отличие от случая пороговых сигналов, когда сравнительно слабые сигналы подавляются шумами [Л. 13 и 14] и используется квадратичная аппроксимация (46), в данном случае мы имеем дело с обратной картиной: шум подавляется сигналом, и поэтому мы можем записать приближенное выражение для логарифма коэффициента правдоподобия (46) в виде:

$$x = \ln \Lambda_n \cong \ln \mu - na_0^2 + 2a_0 \sum_{l=1}^n R_l / (2\psi)^{\frac{1}{2}}. \quad (84)$$

Здесь наблюдатель складывает величины импульсов, основывая свое решение на среднем значении получающейся суммы, в отличие от критерия для пороговых сигналов, основанном на среднем значении шума и шума с сигналом. Преобразование (47) соответственно принимает вид:

$$y = (x - \ln \mu + na_0^2) \left[ a_0 n (2/\psi)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} = \sum_{l=1}^n R_l / n, \quad (85)$$

а  $P_n$  и  $Q_n$  теперь получаются из выражений:

$$P_n(y; a_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} (d\xi/2\pi) \left\{ \int_0^{\infty} (R/\psi) \exp(-a_0^2 - R^2/2\psi - i\xi R/n) I_0(a_0 R [2/\psi]^{\frac{1}{2}}) dR \right\}^n \quad (86)$$

и

$$Q_n(y) = P_n(y; 0).$$

Приближенные выражения для  $P_n$  и  $Q_n$  для диапазона значений  $[1 \leq n \leq 0(10)]$  ( $a_0^2 > 3$  или  $a_0^2 > 4$ ) имеют вид:

$$P_n(y; a_0) \approx [2\pi\psi/n]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left[ y - a_0 (2\psi)^{\frac{1}{2}} \right] / 2\psi/n \right\} - \\ - \left[ (n/2)^{\frac{1}{2}} (\psi/n)^{-\frac{1}{2}} / 4a_0 \right] \Phi^{(1)}(\lambda) + \\ + \left[ (n-2) / 32a_0^2 (\psi/n)^{\frac{1}{2}} \right] \Phi^{(2)}(\lambda) + O(a_0^{-3}); \\ \lambda = \left[ y - a_0 (2\psi)^{\frac{1}{2}} \right] / (\psi/n)^{\frac{1}{2}}; \quad (87)$$

$$Q_n(y) \approx (2\pi\tau_y^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ - (y - (y_0)^2 / 2\tau_y^2) \right] + \\ + (c_3 / 6\tau_y) \Phi^{(3)}(\lambda') + (c_4 / 24\tau_y) \Phi^{(4)}(\lambda') + \dots \\ \lambda' = (y - y_0) / \tau_y, \quad (88)$$

где

$$c_3 = 0,631/(n)^{1/2} \text{ и } c_4 = 0,246/n,$$

а

$$y_0 = (\pi\psi/2)^{1/2}; \quad \tau_{y^2} = \psi(2 - \pi/2)/n.$$

В первом приближении кривая верности для наблюдателя Неймана — Пирсона является функцией произведения  $a_0(n)^{1/2}$ , если  $a_0$  достаточно велико, а  $n$  достаточно мало. Кривые верности для других наблюдателей, не являясь функциями только от  $a_0(n)^{\frac{1}{2}}$  или  $a_0(\bar{n})^{\frac{1}{2}}$ , могут все же рассматриваться как функции только  $a_0\sqrt{n}$  или  $a_0\sqrt{\bar{n}}$  при данной аппроксимации. Таким образом, мощность минимального обнаружимого сигнала меняется по закону  $n^{-1}$  для случая сильных сигналов и по закону  $n^{-\frac{1}{2}}$  — для пороговых сигналов. Этот результат показан также при помощи других методов [Л. 3], которые, однако, не позволяют получить пороговой постоянной или найти зависимость порогового сигнала от вероятностей ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$ .

Кривые для минимального обнаружимого сигнала, рассчитанные для значений  $n$  от  $n=1$  до  $n \approx 100$ , состоят из двух слабо разграниченных участков — области сильных сигналов, для которой  $a_0^2$  составляет порядка 10 дб и  $n \approx 1 \div 10$ , и области пороговых значений сигнала в пределах которой  $a_0^2$  падает от 10 дб почти до 0 дб и менее, при  $n \approx 10 \div 100$ . Кривые для интервала значений  $n$  от  $n=1$  до  $n \approx 100$  рассчитаны приближенно, так как соотношения, приведенные в § 7, для получения точных результатов требуется представить в более сложной форме. Однако можно получить приемлемые результаты и для  $n=1$  за исключением идеального наблюдателя. Здесь аппроксимация (74) коэффициента правдоподобия  $\Lambda_n$  не годится не только в случае сильных сигналов, но и в случае пороговых сигналов, поэтому необходимы исключительно трудоемкие вычисления с использованием полного выражения для  $\Lambda_n$ , включающего бесселевы функции. Фактически, учтя характер поведения кривых при  $n=1$  и зная, что при  $n > 100$  погрешность, как показано Зигертом [Л. 3], не превышает 10%, а также зная, что тангенсы углов наклона кривых в областях сильных и слабых сигналов соответственно равны 1 и  $1/2$  (по вертикальной и горизонтальной осям отложены соответственно  $a_0$  в децибелах и логарифм  $n$ ), можно оценить требуемое значение минимально обнаружимого сигнала с точностью 0,5 дб, допуская некоторую ошибку только в области очень малых значений  $a_0$ . В случае же последовательного наблюдателя, когда уровень сигнала высок, мы допустили довольно грубое предположение, что объем выборки  $n(s)$  имеет распределение вида дельта-функции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rice S. O., Bell. Syst. Techn. J., 1945, v. 24, p. 46.
2. Middleton D., Quart. Appl. Math., 1948, v. 5, p. 445.
3. Пороговые сигналы, перевод с англ. под ред. А. П. Сиверса, „Советское Радио“, 1952.
4. Woodward P. M., Telecom. Research Establishment J., 1951, o. 32, Januar
5. Neuman J., Pearson E. S., Trans. Roy. Soc., 1931, v. A 231, p. 289.
6. Neuman J., J. Roy. Soc., 1942, v. 105, p. 292.
7. Slattery T. G. Proc. IRE, 1952, v. 40, p. 1232.
8. Крамер Г., Математические методы статистики, Изд. иностранной литературы, 1948.
9. Neuman J., Pearson E. S., Proc. Cambridge Phil. Soc., 1953, v. 29, p. 492.



10. Wald A., Sequential analysis, New-York, John Willey and Sons, 1947.
  11. Wang M. G., Uhlenbeck G. E., Rev. Modern Phys., 1954, v. 17, p. 323.
  12. Woodward P. M. and Davis R. C., Phil. Mag., 1950, v. 41, p. 1001.
  13. Woodward P. M., Proc. IRE, 1951, v. 39, p. 1521.
  14. Van Vleck J. H. and Middleton D., Journ. Appl. Phys., 1946, v. 17, p. 940.
  15. Middleton D., Proc. IRE, 1948, v. 36, p. 1467.
  16. Mood A. M., Introduction to probability, New-York, CcGraw-Hill, 1950.
  17. Middleton D., Journ. Appl. Phys., 1948, v. 19, p. 917.
-

---

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СВОЙСТВАХ СТАТИСТИЧЕСКОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ<sup>1</sup>

*Д. Миддлтон*

В ряде работ [Л. 1 и 2] автор рассмотрел три способа оптимальной статистической обработки, применяемой при некогерентном обнаружении высокочастотных импульсов на фоне нормального случайного шума. Эти способы обработки предусматривают статистическое испытание гипотез, а именно, гипотез «да» или «нет», о наличии или об отсутствии сигнала на фоне шумов. При этом могут иметь место два рода ошибок, являющихся следствием ограниченного времени наблюдения и наличия шума. Ошибка I рода — ложная тревога, имеющая вероятность  $\alpha$ , состоит в принятии шума за сигнал, когда на самом деле присутствует только шум. Ошибка II рода — пропуск сигнала, вероятность которой равна  $\beta$ , состоит в принятии сигнала и шума за чистый шум, хотя в действительности присутствует сигнал.

Различным методам испытания гипотез свойственны свои характерные особенности. Например, наблюдатель Неймана — Пирсона обеспечивает заданную величину вероятности ложной тревоги  $\alpha$ , а вероятность пропуска сигнала  $\beta$  сводит к минимуму. Идеальный наблюдатель Зигерта сводит к минимуму полную вероятность  $q\alpha + \beta r$  неправильного решения. Последовательный наблюдатель принадлежит к несколько более общему классу наблюдателей, для которых вероятности ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$  определяются заранее, а объем выборок или, что то же, «время интегрирования» меняется от случая к случаю.

---

<sup>1</sup> Middleton D, Further remarks on the nature of the statistical observer, J. Appl. Phys. 1954, v. 25, № 27.

Цель настоящей заметки — подчеркнуть по возможности в более сжатой форме, чем это изложено [Л. 1], различие в работе указанных наблюдателей и уточнить некоторые выводы, касающиеся сравнительной оценки «идеального» способа обработки и способа Неймана — Пирсона.

Еще раз отметим, что существуют внешние ограничения (заданные значения вероятностей  $\alpha$  и  $\beta$ , время интегрирования и т. д.), которые сильно влияют на выбор того или иного наблюдателя в качестве оптимального. В радиолокации, например, необходимо иметь очень малые вероятности ложной тревоги, и поэтому следует предпочесть наблюдателя Неймана — Пирсона. С другой стороны, в ряде случаев можно потребовать сведения к минимуму полной ошибки решений, причем для некоторых операций ошибки I и II рода должны быть равны между собой, и можно не придавать особого значения I роду ошибок по отношению к II роду ошибок и соответственно наоборот. В таком случае естественно будет выбрать идеального наблюдателя. Наконец, может быть использован последовательный наблюдатель с любым временем интегрирования, так как можно положить  $\alpha = \alpha_{\text{нп}}$  и  $\beta = \beta_{\text{мин}}$ , как для критерия Неймана — Пирсона, или установить время интегрирования таким, чтобы полная ошибка решения равнялась ошибке идеального наблюдателя для соответствующих операций, поскольку выбор вероятностей  $\alpha$  и  $\beta$  находится в нашем распоряжении. Время интегрирования при последовательном наблюдении, однако, в среднем оказывается меньше, чем время интегрирования для каждого из двух разобранных здесь испытаний с неизменными объемами выборок, в частности при малом объеме выборки.

Сравнение наблюдателей Неймана — Пирсона и идеального наблюдателя, приведенное в [Л. 1], требует некоторого исправления. Во-первых, если  $p$  и  $q$  являются соответственно априорными вероятностями того, что при любом данном опыте имеет место сигнал и шум или один шум, то идеальный наблюдатель по определению сводит к минимуму величину  $\beta p + q\alpha$ , а не  $\beta + \alpha$ , как неверно утверждается в [Л. 1] за исключением случая  $p = q = 1/2$ . Анализ же содержит правильные выражения и не подлежит изменению. Во-вторых, неверно, что наблюдатель Неймана — Пирсона лучше идеального, когда их сопоставление проводится на основе ненормализованной кривой верности для одной и той же полной ошибки решения, так как идеальный наблюдатель по определению приводит к максимуму

вероятность правильного решения. Это можно сразу увидеть, например, из рис. 10, помещенного в [Л. 1]. Однако кривые для случая Неймана — Пирсона при  $\alpha=0,05$  на рис. 9 лежат приблизительно на 0,5 дБ ниже, что является следствием различных нормализаций [см. (7.7) [Л. 1]]. Для более полного сравнения наблюдателей нужно познакомиться с обсуждением их свойств в соответствующих письмах. Отметим, наконец, что рассмотренные вопросы в [Л. 1 и 2] представляют собой лишь частные случаи полной теории процесса обнаружения сигналов на фоне шумов, разработка которой заканчивается автором в настоящее время [Л. 3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Middleton D., J. Appl. Phys., Apr. 1953, Part I and II, v. 24, № 4, pp. 371 and 379.
  2. Middleton D., Statistical methods for the detection of pulsed radar in noise (Труды конференции по теории информации) (Лондон, сентябрь 1952 г.), опубликованные в Applications of Communication Theory Academic Press, Inc., Nev-York, USA.
  3. Сводка некоторых принципиальных результатов содержится в работе: David Middleton, The statistical theory of signal detection Trans., IRE, PGIT-3, March 1954, p. 26.
-

## ОБСУЖДЕНИЕ СТАТЬИ «СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В ПРИСУТСТВИИ ШУМОВ»<sup>1</sup>

*Д. Миддлтон, В. Петерсон и Т. Бэрдсол*

Статья «Статистические критерии обнаружения импульсных сигналов в присутствии шумов» [Л. 2] дает законченное представление о применении некоторых типов статистических испытаний к важной для теории связи проблеме обнаружения сигналов на фоне шумов. Тем не менее, сравнение различных методов испытаний гипотез является несколько ограниченным и необходима более ясная и законченная оценка методов сравнения, предложенных автором.

Сравнение статистических наблюдателей может проводиться различными путями.

Действительно, во многих случаях нет необходимости в сравнении «наблюдателей» Неймана — Пирсона, идеального и последовательного, так как каждый из этих методов наблюдения представляет собой оптимальный способ обнаружения сигнала на фоне шумов для того или иного конкретного случая [Л. 2]. Однако выбор наблюдателей в некоторых случаях может определяться тем, который из наблюдателей является лучшим при данной полной вероятности ошибки решения  $\alpha q + \beta p$ . Повторяем, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются соответственно вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала, т. е. вероятностями ошибок I и II рода и что  $p$  и  $q$  представляют собой априорные вероятности наличия сигнала и шума или только одного шума.

---

<sup>1</sup> Middleton D., Peterson W. W. and Birdsall T. G., Discussion of statistical criteria for the detection of pulsed carriers in noise I, II, J. Appl. Phys., 1954, v. 25, p. 128.

В этих условиях существуют две возможности сравнения наблюдателей:

1) сравнение проводится на основе ненормализованных кривых верности  $W$  и

2) сравнение дается в терминах нормализованных кривых верности<sup>1</sup> при наличии наилучшего наблюдателя, который определяется в каждом конкретном случае как наблюдатель, дающий наибольшее значение кривой верности для данного порогового значения отношения сигнала к шуму  $a_0^2$  и времени наблюдения  $n$  (или, что эквивалентно, то же самое значение кривой верности для самого низкого порогового сигнала).

Во II части статьи [Л. 1] рассматривается только случай 2 и не подчеркивается нормализованный характер сравниваемых кривых верности. Поэтому авторы данной заметки поместили небольшую таблицу, сравнивающую наблюдателей Неймана — Пирсона и иде-

Условия наблюдения	Кривые верности	
	ненормализованные	нормализованные
I. $\alpha p = 0$ $\alpha_{НП} = \alpha_{И}; \beta_{НП} = \beta_{И} \quad \alpha(p - q) = 0$ (Идентичные испытания) другие $\alpha p, \alpha(p - q)$	НП = идеальный	НП = идеальный
II.	НП = идеальный	НП > идеальный
$W_{НП} < W_{И} < \frac{W_{НП} - \alpha_{НП}(2q - p)}{1 - \alpha_{НП}}$ ( $q < p$ ) (Почти идентичные испытания)	НП < идеальный	НП > идеальный
III. $\alpha_{НП} \neq \alpha_{И(мин)}; \beta_{НП} \neq \beta_{И(мин)}$ (в отличие от II) (неидентичные испытания)	НП < идеальный	НП < идеальный

П р и м е ч а н и е. НП — наблюдатель Неймана — Пирсона.

<sup>1</sup> Специфичность нормализации отмечается в [Л. 1] ч. II, при суждении соотношений (7а) — (7в).

ального наблюдателя при одном и том же значении суммы  $\alpha q + \beta r$ . В этой таблице знак равенства означает «равноценный», а знаки неравенств  $\geq$  означают «лучше, чем» или «хуже, чем», причем величины  $p, q, n$  во всех случаях поддерживаются постоянными.

Если испытания идентичны при неизменных  $a_0, n, p, q$ , то  $\alpha_{\text{НП}} = \alpha_{\text{И (мин)}}$ , и, таким образом,  $\beta_{\text{НП (мин)}} = \beta_{\text{И (мин)}}$  и  $K = 1$  [см. (4.5), (4.6) в [Л. 1]]. Если испытания не идентичны, то  $\alpha_{\text{НП}} \neq \alpha_{\text{И (мин)}}$  и т. д. Тогда по определению идеальный наблюдатель лучше в смысле сравнения, основанного на использовании ненормализованных кривых верности, так как он сводит к минимуму полную вероятность ошибки решения, в то время как наблюдатель Неймана — Пирсона обеспечивает постоянную величину вероятности ложной тревоги  $\alpha_{\text{НП}}$  и сводит к минимуму только вероятность пропуска сигнала  $\beta$ .

По нормализованным кривым верности, однако, иногда получается, что наблюдатель Неймана — Пирсона лучше идеального наблюдателя Зигерта. Такой результат является следствием нормализации кривых верности и объясняет, почему наблюдатель Неймана — Пирсона дает меньший минимум обнаруживаемого сигнала, чем идеальный наблюдатель Зигерта при одном и том же значении  $\alpha q + \beta r$ , как показано в [Л. 1] на рис. 9,  $\alpha = 0,05$  и почему на рис. 10 при  $\alpha = 0,05$  наблюдается обратная картина (см. также [Л. 2]). Нормализация является также причиной кажущегося увеличения объема информации, соответствующей операции принятия решения, для наблюдателя Неймана — Пирсона, как это видно из сравнения второй и третьей строк таблицы (см. «Письмо к издателю» [Л. 3]). Отметим, наконец, что при одинаковых значениях  $\alpha, \beta, p, q$  последовательный наблюдатель работает с более низким порогом обнаружения сигнала при том же среднем времени интегрирования или, что эквивалентно, при том же пороговом значении сигнала имеет более короткий средний период наблюдения, чем наблюдатель Неймана — Пирсона или идеальный наблюдатель.

Вычисление кривых верности (6.2) и (6.5) в [Л. 1] для последовательного наблюдателя является приближенным, хотя соотношение (6.1) сохраняется при условии, что  $P_n$  и  $Q_n$  определены надлежащим образом. К сожалению, нельзя найти  $P_n$  и  $Q_n$  для последовательного наблюдателя, так же как это было сделано в испытаниях с неиз-

менными объемами выборок (Нейман — Пирсон и Зигерт), поскольку последовательный наблюдатель на любом этапе наблюдения  $n < n(s)$  имеет дело прежде, чем принято решение, только с теми сигналами, которые предварительно не были приняты или отвергнуты. Оставшиеся сиг-

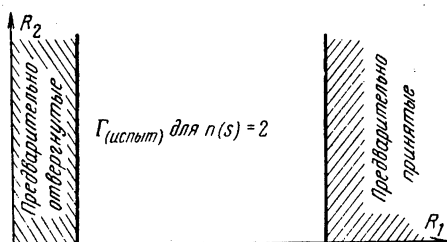


Рис. 1.

налы дают распределение логарифма отношения правдоподобия  $(P_n, Q_n)$ , совершенно отличное от распределения логарифма отношения правдоподобия, полученного на основе всех возможных сигналов, на котором основываются вычисления для наблюдателей Неймана — Пирсона и идеального {формула (4.12) в [Л. 1]}. Так, вместо выражений (4.3) или (4.12) для распределения логарифма  $(x)$  отношения правдоподобия имеем выражение вида:

$$P_{n(s)}(x; a_0) = C_{n(s)} \int_{\Gamma(\text{испыт})} \dots \int W_{n(s)}(R_1, \dots, R_{n(s)} / a_0) dR_1 \dots dR_{n(s)} \delta(x - \ln \Lambda_{n(s)}), \quad (1)$$

$$Q_{n(s)}(x; a_0) = d_{n(s)} \int_{\Gamma(\text{испыт})} \dots \int W_{n(s)}(R_1, \dots, R_{n(s)} / a_0) dR_1 \dots dR_{n(s)} \delta(x - \ln \Lambda_{n(s)}), \quad (2)$$

где  $C_{n(s)}$  и  $d_{n(s)}$  — такие константы, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{n(s)}(x; a_0) dx = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} Q_{n(s)}(x; a_0) dx, \quad (3)$$

и область испытаний  $\Gamma(\text{испыт.})$  включает в себя все огибающие  $(R_1, \dots, R_n, \dots, R_{n(s)})$ , так что

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \leq \Lambda_n(R_1, \dots, R_n) \leq \frac{1-\beta}{\alpha} \text{ для всех } n < n(s). \quad (4)$$



Это обстоятельство очень осложняет точную оценку  $P$  и  $Q$ . Например, даже в простейшем случае, когда величина  $\ln \Lambda_{n(s)}$  пропорциональна сумме квадратов огибающей

$$\ln \Lambda_n = g(n) \sum_1^n R_i^2, \quad (5)$$

при  $n(s)=2$  к области испытаний  $\Gamma_{(\text{испыт})}$  принадлежат все  $(R_1, R_2)$ , которые удовлетворяют условию (4), а именно:

$$\ln \frac{\beta}{1-\alpha} \leq g(1) R_1^2 \leq \ln \frac{(1-\beta)}{\alpha}, \quad (6)$$

как показано графически на рис. 1.

При  $n(s)=3$  к области испытаний принадлежат все значения амплитуд  $R_1, R_2, R_3$ , удовлетворяющие обоим неравенствам (6) и (7):

$$\ln \frac{(1-\alpha)}{\beta} \leq g(2) [R_1^2 + R_2^2] \leq \ln \frac{(1-\beta)}{\alpha}. \quad (7)$$

Это объясняется тем, что на втором этапе наблюдения те амплитуды  $(R_1, R_2)$ , которые принадлежат области испытаний и удовлетворяют неравенству

$$g(2) [R_1^2 + R_2^2] > \ln \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad (8)$$

принимаются, а те значения амплитуды, которые принадлежат области испытаний и удовлетворяют неравенству

$$g(2) [R_1^2 + R_2^2] < \ln \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad (9)$$

отвергаются, приводя к заключению, что присутствовал только шум. Поэтому область испытаний для следующего третьего этапа испытаний включает в себя все те  $(R_1, R_2, R_3)$ , которые удовлетворяют неравенствам (7), но не удовлетворяют ни неравенству (8), ни неравенству (9), и является бесконечным цилиндром, основание которого изображено на рис. 2. Ясно, что на каждом последующем этапе наблюдения конфигурация области испытаний

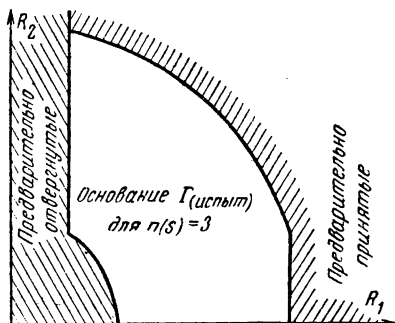


Рис. 2.

становится все более сложной, и, по-видимому, описание области интегрирования и вычисление интегралов (1) и (2) для любых значений  $n(s)$  представляют очень трудную задачу.

Когда интегралы (1) и (2) найдены, то посредством соотношения (6.3) может быть получена усредненная кривая верности, которая представляет собой результат усреднения по всем возможным значениям числа этапов наблюдений  $n(s)$ , для которых испытания завершены. Расхождение в вычислениях для последовательного наблюдателя видно из рис. 10 и 11, помещенных в [Л. 1], причем ожидаемые преимущества последовательного наблюдателя перед другими в одинаковых условиях наблюдения объясняются главным образом изменением конфигурации области испытания на каждом последующем этапе наблюдения. Неизбежная неточность аппроксимации распределения объемов выборок, как это первоначально указывалось в [Л. 1], также влияет на соответствие кривых (рис. 10—12).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Middleton D., J. Appl. Phys., 1953, v. 24, Part I, № 4, p. 371 and Part II, № 5, q. 379. Краткое сообщение по этой работе содержится также в Applications of Communication Theory, Willis Jackson (Academic Press, New-York, 1953).

2. Middleton D., J. Appl. Phys., 1953, v. 24, 127 (L). В этой работе упоминаются также некоторые специфические применения, когда метод наблюдения определяется заранее при постановке задачи.

3. Middleton D., J. Appl. Phys., 1953, v. 24, p. 127 (L).

---

---

# ОБНАРУЖЕНИЕ И ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ СИГНАЛОВ, ПРИНЯТЫХ НА ФОНЕ ШУМОВ, С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ \*

*Д. Миддлтон и Д. Ван-Метер*

## Краткое содержание

Данная статья рассматривает вопросы обнаружения и воспроизведения сигналов, принятых на фоне шумов, с точки зрения теории статистических решений. Дается общая формулировка приема как проблемы статистического решения, кратко рассматривается роль стоимостей критериев; подробно анализируется простая альтернативная система обнаружения, минимизирующая средний риск для фиксированного времени наблюдения, и производится сравнение некоторых реальных систем с некоторыми идеальными. Рассматриваются системы воспроизведения, минимизирующие средний риск, а также интерполяция и экстраполяция сигналов как классы общих методов оценки, включающих случаи как минимаксного метода, так и метода максимума правдоподобия. Излагаются вопросы использования информационного критерия для оптимизации систем обнаружения и воспроизведения; в конце приводится краткое обсуждение рассмотренных методов с точки зрения теории игр.

## ВВЕДЕНИЕ

Прием сигналов на фоне шума является важнейшей задачей теории связи, так как шум всегда в той или иной степени маскирует полезный сигнал. Вследствие того, что время наблюдения, в течение которого сигнал может быть восстановлен, по необходимости ограничено, а также вследствие присущего сигналу и помехам статистического характера информация теряется, и восстановление сигнала оказывается неполным. Конечно, прием сигналов при таких условиях может осуществляться различными способами, но очень немногие из них обладают оптимальными свойствами. Задача приема в общих чертах может формулироваться как задача нахождения наилучшей или оптимальной приемной системы, уменьшающей вредное влияние мешающего шума. Описанный в этой статье подход основывается

---

\* J. Soc. Industr. appl. math. vol. 3., № 4, December, 1955, vol. 4, № 2, June, 1956.

на методах теории статистических решений, развитой в недавние годы, главным образом Вальдом [Л. 1\*] и др. [Л. 2, 7 и 8]. В данной статье рассматривается широкий класс практических ситуаций, в которых требуется принять определенное решение того или иного рода.

Проблема приема возникает в теории связи в тех случаях, когда необходимо вынести определенное суждение или решение о наличии сигнала, основанное на наблюдении сигнала, искаженного шумом. В задаче обнаружения сигнала может быть вынесено суждение о присутствии или отсутствии одного (или более) сигналов: в задаче воспроизведения сигнала суждение представляет собой оценку одного или более параметров сигнала, несущих информацию, например оценку амплитуды, формы сигнала и т. д. Аналогично можно сформулировать другие суждения и создать соответствующие приемные системы, хотя до сих пор это не делалось. В любом случае приемная система (термин, используемый в этой статье) обрабатывает полученные данные в сочетании с имеющейся априорной информацией и дает на выходе некоторую величину, которая является требуемым суждением. Приемные системы такого рода, свойства которых обсуждаются в этой статье, являются решающими системами в отличие от других — нерешающих приемных систем, например описанных в [Л. 3]. Последние не рассчитаны на то, чтобы давать требуемое суждение, а способны давать лишь определенную апостериорную информацию, на базе которой наблюдатель может прийти к решению сам. Следовательно, нерешающая система обнаружения сигналов помогает наблюдателю, но оставляет принятие решения на его усмотрение. Решающие системы обнаружения сигналов вырабатывают заключения типа «да — сигнал имеется», или «нет — наблюдается только шум», а нерешающая приемная система может выдавать только апостериорные вероятности наличия сигнала или его отсутствия, предоставляя выбор определенного решения самому наблюдателю [Л. 3]. Точно так же решающая система в случае воспроизведения сигнала обеспечивает конкретную оценку сигнала или описывающих его параметров на выходе, в то время как нерешающая система может быть сделана просто для увеличения отношения сигнал/шум.

---

\* Список литературы на русском языке составлен редактором сборника, ссылки Миддлтона и Ван-Метера на работы, переводы которых опубликованы советскими издательствами, даны с указанием на эти издания.

Вследствие наличия шумового фона и шумоподобного характера самого сигнала теория связи имеет дело со случайными временными рядами и процессами и строится на статистической основе<sup>1</sup>. В общем случае для приема сигналов характерно то обстоятельство, что приемная система обладает лишь ограниченным знанием входного сигнала (что неизбежно, если передается некоторая заранее неизвестная информация) и не может влиять на сигнал. Другими словами, требуемое суждение о сигнале должно быть статистическим заключением [Л. 9]. Последнее предопределяет применение теории статистических решений, которая дает весьма общие методы для построения оптимальных процедур статистической обработки имеющихся данных и, следовательно, для построения оптимальной приемной системы. Задача построения оптимальной приемной системы является основным вопросом приема, и должно быть очевидным, по крайней мере интуитивно, что теория статистических решений весьма удобна при рассмотрении этого вопроса. Можно ожидать, что она приведет к стройному и достаточно общему обоснованию уже известных решений, а также откроет подход к новым решениям. Мы надеемся, что из данной статьи станет ясным, что это действительно так.

Для того, чтобы решить задачу приема сигналов при помощи теории статистических решений, необходимо заранее располагать некоторыми сведениями: необходимо знать статистические свойства шума и, если возможно, статистические свойства сигнала. Чем меньше имеется данных о статистических свойствах шума и сигнала, тем более трудным будет создание хорошей приемной системы в общем случае. Должно быть указано точное число альтернатив, из которых надо сделать выбор. Кроме того, необходимы и другие данные, а именно, критерий качества, которым могут быть оценены свойства приемной системы и по отношению к которому должна выполняться оптимизация приемной системы. Как только критерий выбран, оптимальная приемная система в принципе может быть определена.

---

<sup>1</sup> Признание и использование этого факта впервые появилось в работе Винера [Л. 4] по экстраполяции, оптимальной фильтрации и общей теории стационарных случайных процессов, а также в работе О. Райса [Л. 5] по изучению свойств шумов. Этот же факт является отличительной особенностью теории информации, развитой Шенноном [Л. 6]. Для тщательного изучения математической теории случайных процессов см., например, [Л. 7], а также [Л. 1].

Важно, однако, понимать как силу, так и ограниченность такого теоретического подхода. На практике указанные данные весьма редко оказываются достаточными для того, чтобы однозначно установить оптимум. Обычно конструктор должен при данной ситуации сам давать определение «наилучшей» приемной системы, удовлетворяющей поставленным условиям, которые достаточно точно определяют единственную систему и в то же время точно отражают необходимые ограничения в конструировании. Ясно, что такая творческая фаза проектирования, когда для успешного решения задачи необходимы интуиция и опыт инженера-конструктора, лежит за пределами какой-либо математической теории. Однако математический анализ будет играть важную роль при создании общих методов оценки приемных систем, при выявлении свойств оптимальной системы и сравнении ее с другими системами, а также для определения степени ухудшения характеристик при упрощении системы. При таком сравнительном изучении конструктору полезно знание ряда оптимальных конструкций и характеристик, что позволяет более точно оценить преимущества и недостатки любого данного критерия при разработке приемной системы. Не меньшую роль играют оценка действительных, неидеальных приемных систем и сравнение их с теоретическим оптимумом для тех же целей по тому же критерию. Таким образом, можно получить более определенные оценки стоимостей и выигрышей от возможных усовершенствований приемной системы. В этой связи теория статистических решений указывает метод, на основе которого могут испытываться и сравниваться конкретные приемные системы [Л. 10].

Оптимальная конструкция приемной системы зависит от природы сигнала и статистических свойств шума. Обычно предполагается наличие некоторых сведений о них. Однако на практике нелегко получить достоверные оценки для распределений вероятностей сигнала и шумов, особенно оценки априорной вероятности сигнала. Следовательно, другим требованием к аналитическому подходу является указание методов, при помощи которых можно определить оптимальные характеристики приемной системы в тех случаях, когда вероятности наличия сигналов неизвестны или известны только частично, и вычислить улучшение характеристик, которого можно ожидать, если бы проектировщик был полностью осведомлен о статических свойствах сигналов. Таким образом, при конструировании приемной систе-

мы могут быть учтены как стоимости получения недостающих данных, так и штрафы за пренебрежение ими.

В течение последнего десятилетия эти идеи быстро развивались, о чем свидетельствует множество статей, посвященных оптимальному обнаружению и воспроизведению сигналов [Л. 12] — [Л. 44]; все они могут быть включены в унифицированную схему теории статистических решений. Настоящая статья является попыткой дать такую унифицированную схему и иллюстрировать ее важнейшие особенности на практически интересных примерах. Естественно, что внимание авторов статьи сконцентрировано вокруг приложений теории связи, представляющих собой существенное дополнение к настоящему исследованию, которое в свою очередь опирается в основном на оригинальные работы авторов [Л. 10] и является отчасти обзором этих работ, а также их модификацией и расширением. Кроме того, здесь изложен добавочный материал, не содержащийся в предыдущих статьях, например задачи, связанные с выборочным методом и некоторыми видами воспроизведения сигналов, а также ряд новых примеров и теорем.

Статья разделена на разделы. В конце приводятся весьма обширная библиография, приложения, посвященные выборочному методу, а также излагаются некоторые теоремы Вальда, на которых основаны эти приложения. Кроме того, дан перечень основных обозначений, которые приняты в настоящей работе.

## **1. ПРИЕМ КАК ЗАДАЧА СТАТИСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ**

В этом разделе мы сформулируем задачу оптимального приема как задачу статистического решения. Сначала рассмотрим две основные задачи приема — задачу обнаружения и задачу воспроизведения сигналов, принятых на фоне шумов. Здесь мы введем терминологию, взятую частично из области статистики, частично из техники связи, и сделаем обзор рассматриваемых вопросов в этой терминологии. Далее, в этом же разделе сформулируем ряд положений, которые надо иметь в виду при изучении поставленной задачи, и обобщим задачу приема, дав ей математическую формулировку, и затем проанализируем ее решение.

### **1. Обнаружение сигналов**

Задача обнаружения сигнала на фоне шумов эквивалентна задаче, которая согласно статистической терминологии называется задачей выбора между гипотезами: на ос-

нове некоторых принятых данных проверяется гипотеза о том, что присутствует один лишь шум, в противоположность гипотезе (или гипотезам) о том, что присутствует сигнал (или один из нескольких возможных сигналов). Задачи обнаружения могут классифицироваться различным образом: по числу возможных сигналов, которые необходимо различить, по смыслу гипотез, по природе данных и способу их обработки и, наконец, по характеристикам сигнала и статистике шумов. Поясним это более детально.

а) *Число сигналов, которые должны различаться.* Это число равно количеству проверяемых гипотез, но не зависит от их смысла. Бинарная система обнаружения рассчитана на принятие одного из двух решений соответственно двум гипотезам, в то время как множественная система обнаружения рассчитана на принятие более двух решений [Л. 11]. В этой статье мы будем иметь дело только с бинарной задачей обнаружения.

б) *Смысл гипотез.* Сигнал, поступающий на вход приемной системы, доступен для наблюдения в течение некоторого интервала времени только в виде смеси сигнала и шума. Будем считать, что шум (стационарный или нестационарный) поступает на вход приемной системы независимо от сигнала и оказывает влияние на результат каждого отдельного наблюдения, так как взаимодействует с сигналом<sup>1</sup>. Класс всех возможных входных сигналов будем называть классом сигналов; его удобно представлять как абстрактное пространство — пространство сигналов, в котором каждая точка соответствует отдельному сигналу.

Гипотеза, утверждающая наличие простого, неслучайного сигнала на входе, будет называться простой гипотезой. Гипотеза о классе, с другой стороны, утверждает наличие сигнала, соответствующего какой-либо точке из определенного подкласса сигналов; другими словами, утверждается, что некоторый сигнал из подкласса  $k$  (несущественно, который именно сигнал) присутствует на входе приемной системы. Такой подкласс сигналов называется классом сигналов, соответствующим  $k$ -й гипотезе. Классы сигналов, соответствующие гипотезам, могут либо перекрываться, либо нет.

Обычно одна из гипотез при обнаружении сигналов предполагает наличие одного лишь шума, т. е. отсутст-

<sup>1</sup> Могут существовать и шумоподобные сигналы, но их не следует смешивать с фоном шумов. Часто удобно говорить об «одном шуме» на входе, и это должно пониматься как отсутствие сигнала какого-либо рода.



вне какого бы то ни было сигнала, и называется нулевой гипотезой. При бинарном обнаружении другая гипотеза называется альтернативной. Если альтернативе соответствует класс сигналов, включающий в себя все ненулевые сигналы, рассматриваемые в данной задаче, то она будет назы-

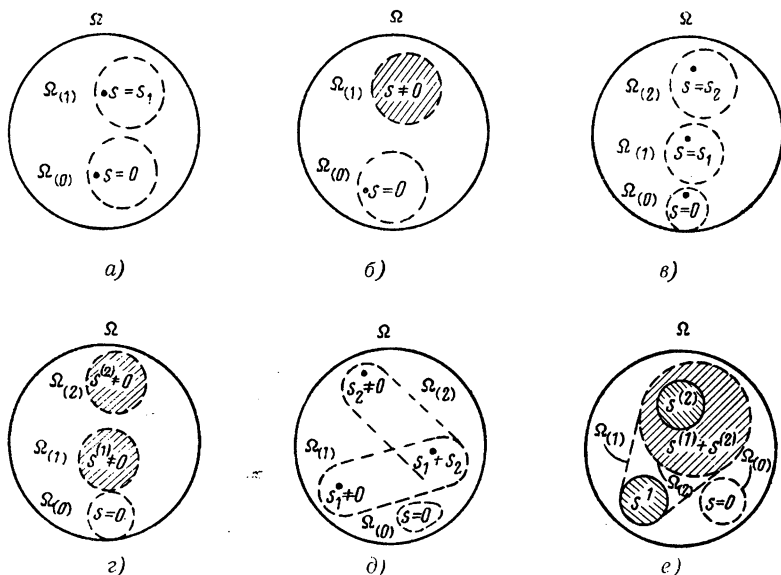


Рис. 1. Сигналы и классы гипотез при обнаружении сигналов:

*a* — бинарное обнаружение; простая альтернатива; *б* — бинарное обнаружение; односторонняя альтернатива; *в* — множественное обнаружение; три простых гипотезы; *г* — множественное обнаружение; неперекрывающиеся классы сигналов, соответствующих гипотезам; *д* — множественное обнаружение; перекрывающиеся классы сигналов, соответствующих гипотезам; *е* — множественное обнаружение; перекрывающиеся классы сигналов, соответствующих гипотезам.

ваться односторонней альтернативой. Альтернатива называется простой, если во всем пространстве сигналов имеется только один ненулевой сигнал, который, следовательно, содержит только неслучайные параметры.

Рис. 1 иллюстрирует некоторые типичные случаи. В каждом случае класс всевозможных входных напряжений приемной системы представлен пространством сигналов  $\Omega$ . Классы сигналов, соответствующие гипотезам, ограничены пунктирными линиями и обозначены  $\Omega_{(k)}$ , где индекс отнесен к гипотезам, т. е.  $k$ -я гипотеза утверждает, что сигнал принадлежит к классу  $\Omega_{(k)}$ , или символически,  $H_k: S \in \Omega_{(k)}$ .

На рис. 1, *а* и *б* показаны два бинарных случая, соответствующие простой альтернативе ( $\Omega_{(1)}$  пространство сигналов состоит из одной точки) и односторонней альтернативе ( $\Omega_{(1)}$  пространство сигналов состоит из всех входных напряжений, не равных 0). Последнее имеет место, например, если все сигналы в задаче бинарного обнаружения были бы во всем одинаковы, за исключением случайной амплитуды, имеющей, например, релеевское распределение. Рис. 1, *в* и *г* показывают случаи множественных гипотез, когда классы сигналов, соответствующие гипотезам, не перекрываются, в то время как рис. 1, *д* и *е* представляют собой случаи, когда происходит перекрытие, в первом случае — простых классов, а во втором — односторонних. В зависимости от имеющих место задач могут быть образованы различные комбинации описанных случаев. В настоящей статье мы будем ограничивать рассмотрение случаями, когда классы сигналов, соответствующие гипотезам, не перекрываются, хотя общность подхода к решению задачи при нашем рассмотрении никак не ограничивается.

*с) Природа данных и их обработка.* Наблюдения, произведенные над смесью сигнала и шума в продолжение периода наблюдения, могут состоять из дискретного ряда значений (дискретная выборка) или могут состоять из значений, принадлежащих непрерывному интервалу (непрерывная выборка), использование того или иного типа выборки зависит от самой постановки задачи. В радиолокации, например, обнаружение основывается (в первом приближении) на дискретном ряде последовательных наблюдений, в то время как в ряде случаев связи непрерывный сигнал дает непрерывные же выборки.

Вместе с тем, данные, необходимые для решения задачи, могут быть получены либо только внутри, либо также и вне данного интервала наблюдения, т. е. интервал времени, в пределах которого приемная система может запастись данные для анализа, является фиксированным или переменным. В последнем случае можно рассматривать последовательное обнаружение, при котором последовательные испытания производятся ступенями, и на каждой из них решается, завершить ли испытание или же продолжить его и повторить испытание с добавочными данными. В приложениях теории статистических решений удобно различать два типа таких испытаний: последовательный и непоследовательный. Теория каждого типа испытаний в определенном смысле завершена, и без отказа от этой теории не мо-

гут быть наложены какие-либо добавочные ограничения на проведение испытаний. Так как класс последовательных испытаний включает непоследовательные испытания как особый подкласс, то большая широта первого класса приводит к более благоприятным возможностям его использования.

д) *Статистика сигнала и шумов.* Ясно, что характер шумов имеет важнейшее значение, так как от него в большей мере зависит как метод, так и результат решения задачи. В общем случае значения отдельных выборок не могут трактоваться как статистически независимые, и должна быть учтена корреляция между выборочными значениями в интервале наблюдения как в непрерывном, так и дискретном случаях.

Сигнал может описываться в самой общей форме, включающей как случайные, так и неслучайные параметры в виде  $S(t) = S(t, \epsilon, a_0, \theta)$ , где  $\epsilon$  является так называемой обобщенной фазой или интервалом времени, измеренным между некоторой избранной точкой в «истории» сигнала  $S$  и началом интервала наблюдения и связывающим начало отсчета времени наблюдателя с началом отсчета времени сигнала;  $a_0^2$  является масштабным множителем, измеряющим относительную интенсивность сигнала (по отношению к шумовому фону), а  $\theta$  обозначает все остальные параметры сигнала, так же, например, как длительность импульса, период повторения и т. д., которые необходимы для того, чтобы описать сигнал. Вид функций  $S$  определяет собой форму колебаний сигнала во времени.

На сигнал не налагается никаких ограничений, за исключением того, что в интервале наблюдения  $(0, T)$  он имеет конечную энергию. Сигнал может быть совершенно случайным, частично случайным (так, например, последовательность прямоугольных импульсов со случайными длительностями) или же полностью детерминированным (как, например, синусоида), или представляет собой более сложное колебание  $S(t)$ , которое тем не менее однозначно определено. Сигналы, для которых обобщенная фаза фиксирована, будут называться когерентными; если же фаза  $\epsilon$  является случайной переменной, то такие сигналы будут называться некогерентными. Когерентные сигналы могут иметь случайные параметры и, следовательно, принадлежать к подклассам  $\Omega$ , содержащим более одного члена. Когерентные сигналы, соответствующие подклассам, содержащим только один член, будут называться полностью коге-

рентными. Из этих замечаний ясно, что некогерентные сигналы не могут принадлежать к элементарным классам.

Описание шума по необходимости является статистическим, и здесь мы проводим различие между шумами, соответствующими стационарному и нестационарному процессам [Л. 7 и 8]. Все примеры в последующих разделах целиком основаны на стационарных и, в более узком смысле, эргодических [Л. 7] процессах. Это обусловлено практическими соображениями и не является ограничением теории. Обобщения понятия шума с целью включения в него частично детерминированных колебаний не составляет существенных трудностей.

## 2. Способы воспроизведения сигналов

В этой статье мы используем термин «воспроизведение» для описания процесса, требующего оценки самого сигнала или одного (или более) его параметров.

Воспроизведение сигнала подобно обнаружению является задачей, которая привлекла значительное внимание статистиков и известна под названием оценки параметров. В этой области стала традиционной определенная терминология, которой мы и будем пользоваться.

Разделим вопросы, связанные с воспроизведением, на три группы: природа оценки, сущность обработки данных и статистика сигнала и шума. Многое из того, что можно сказать об этих трех группах вопросов, уже упоминалось выше, но несколько добавочных комментариев могут оказаться полезными.

Сигнал может быть задан двумя путями: или как обычный случайный во времени процесс, определенный набором многомерных функций распределения [Л. 45], или как известная функция времени, содержащая один или несколько случайных параметров с определенными распределениями. В последнем случае случайные параметры могут не зависеть от времени или, в более общем случае, они могут быть сами случайными процессами, как, например, синусоида, модулированная шумом. Ясно, что в задаче оценки параметров сигнала, как и в задаче обнаружения сигнала, имеется большое разнообразие возможных ситуаций. Их можно классифицировать следующим образом:

а) *По природе оценки.* Точечная оценка является решением того, что сам сигнал или что один или несколько параметров сигнала имеют определенную величину. Интервальная оценка является решением того, что величина сиг-

нала или какого-либо его параметра лежит внутри определенного интервала с данной вероятностью. Среди точечных оценок полезно провести дальнейшее различие между одномерной и многомерной оценками. Иллюстрацией к первой является оценка значения амплитуды сигнала, в то время как оценка всего сигнала на периоде наблюдения дает пример последней.

б) *По сущности обработки данных.* В том случае, когда для некоторого момента времени оценивается величина параметра, меняющегося во времени, приобретает важное значение соотношение между моментом времени  $t_\lambda$ , для которого ищется оценка, и временем, в течение которого собираются данные о сигнале. Если  $t_\lambda$  совпадает с одним из моментов времени, в которых берутся выборочные значения, то процедура оценки называется простой оценкой или простым воспроизведением. Если же  $t_\lambda$  не совпадает ни с одним из таких моментов времени, то в том случае, когда  $t_\lambda$  лежит внутри интервала наблюдения  $(0, T)$ , процедура оценки называется интерполяцией или сглаживанием, а если  $t_\lambda$  лежит вне интервала наблюдения  $(0, T)$  — экстраполяцией или предсказанием. Приемные системы этих типов пригодны для оценки величины самого сигнала некоторых его параметров, меняющихся во времени, или некоторых функционалов сигнала, как, например, его интеграла или его производной.

На оптимальную приемную систему (которая почти всегда бывает нелинейной) часто могут налагаться требования линейности, с тем чтобы соответствующие операции могли быть выполнены в линейной схеме; в других же случаях могут допускаться определенные специфические классы нелинейности приемной системы. Следовательно, важным вопросом является степень ухудшения характеристики приемной системы при таких ограничениях.

с) *По статистике сигнала и шума.* Как и в случае обнаружения сигнала, выборки, на которых основана оценка параметров сигнала, могут быть дискретными или непрерывными, коррелированными или некоррелированными, а случайный процесс — стационарным или нестационарным, эргодическим или неэргодическим. Подобным образом можно говорить о когерентном и некогерентном воспроизведении сигнала соответственно тому, является ли фаза сигнала  $\varepsilon$  точно известной или же случайной переменной. Сам сигнал может быть структурно детерминированным, т. е.

функция  $S$  имеет определенный аналитический вид или может быть структурно-индетерминированной в тех случаях, когда сигнал  $S$  описывается только распределениями вероятностей. Синусоида является простейшим примером детерминированного сигнала, в то время как случайная функция представляет собой пример индетерминированного сигнала. Случай, когда сигнал известен точно, не имеет смысла применительно к задаче воспроизведения.

### 3. Другие задачи приема

Статистическое решение может требовать объединения операций обнаружения и воспроизведения сигнала. Воспроизведение сигнала предполагает присутствие сигнала на входе, что иногда невозможно предположить заранее. В таких случаях нужно выполнять обнаружение и воспроизведение сигнала одновременно и проводить оценку параметров сигнала в соответствии с результатами процедуры обнаружения.

Решая задачу приема, конструктор приемной системы не может управлять входным сигналом; в нашем представлении каждый входной сигнал определен лишь вероятностью своего появления, и конструктор не может влиять на ее величину. Однако конструктору, создающему систему связи для передачи сообщений от одного пункта к другому, через канал с шумами, приходится сталкиваться с самыми различными ситуациями, и поэтому он может контролировать как способ передачи сигналов по каналу, так и способ приема. Процесс кодирования при передаче состоит в поисках такого класса сигналов, который наиболее эффективно противостоит шуму в канале и в представлении сообщений наилучшим образом при помощи кодированных сигналов, что не является непосредственно проблемой приема. Декодирование, однако, является специальным видом приема, при котором природа сигналов и распределение вероятностей сигналов тесно связаны с учетом шумовых характеристик канала связи.

### 4. Процесс приема в общем виде

Рассмотрим теперь основные элементы общей задачи приема. Ранее мы указывали, что задачу приема можно сформулировать как задачу статистического решения и что при этом необходимо располагать определенными сведениями о статистических свойствах сигнала и шума. Мы

указывали также, что необходимы некоторые предположения о природе данных и интервале времени, в течение которого берутся выборочные значения. Наконец, необходимо описать критерий качества, по которому можно выбрать оптимальную приемную систему, и определить тот ряд возможных решений, которые могут быть сделаны.

В нашей окончательной формулировке мы сделаем определенные допущения о всех вышеперечисленных обстоятельствах. Эти допущения для определенности не будут наиболее общими, но они будут достаточно широкими, чтобы показать общность подхода к решению задачи. Позднее мы обсудим те доводы, по которым некоторые из этих ограничений будут сняты.

Предположим, в частности, что статистика как сигнала, так и шума известна априори. Далее будем предполагать, что наблюдаемые данные выбираются дискретно и что интервал времени наблюдения имеет конечную и фиксированную длительность  $T$ , за которую может быть получено  $n$  выборочных данных. Мы не будем делать специального предположения о критерии качества, но будем предполагать ради простоты, что решение принимается при помощи приемной системы, выбирающей одно из конечного числа  $m$  возможных решений. Рис. 2 иллюстрирует постановку вопроса: на основе данных  $\mathbf{V}$  о сигнале  $\mathbf{S}$  должно быть вынесено решение  $\gamma$  в соответствии с правилом принят из решения  $\delta(\gamma/V)$ , как показано на рис. 2,а. Здесь  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ;  $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$ ;  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$  являются векторами, а индексы при составляющих  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{V}$  выбраны так во времени, чтобы  $S_k = S(t_k)$ ;  $V_k = V(t_k)$  и т. д., причем  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq \dots \leq t_n \leq I$ .

Следовательно, составляющие вектора  $\mathbf{V}$  образуют апостериорные данные о выборке, относительно которой принято решение  $\gamma_j$ .

Каждую из величин  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{V}$  и  $\gamma$  можно представить точкой в абстрактном пространстве соответствующей размерности, и появление некоторого определенного значения этих величин для каждого случая задаются соответствующими функциями плотности вероятности. Плотности вероятностей являются многомерными функциями, которые должны рассматриваться как дискретные или непрерывные в зависимости от природы пространства (дискретной или непрерывной). Введем  $\sigma(\mathbf{S})$ ,  $W(\mathbf{N})$  и  $F(\mathbf{V}/\mathbf{S})$ , означающие соответственно плотности вероятностей сигнала, шума и

принятых данных  $V$  при условии наличия сигнала  $S$ . Следует обратить внимание на то, что правило принятия решения представлено вероятностью, хотя это может показаться удивительным. Приемная система, работающая в соответствии с таким правилом принятия решений, работает не как обыкновенный приемник, который дает определенный выход  $\gamma$  как реакцию на данный ряд входных данных  $V$ . Такая приемная система должна содержать

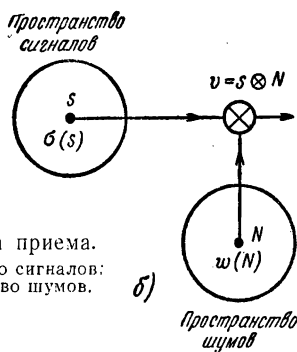
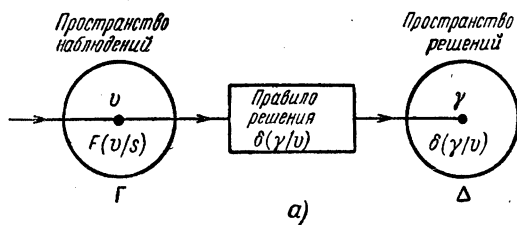


Рис. 2. Схема приема.  
а — пространство сигналов;  
б — пространство шумов.

в себе набор случайно действующих устройств. Заданный набор входных данных должен действовать на соответствующее устройство, которое в свою очередь вырабатывает одну из  $m$  возможных выходных величин  $\gamma$  с определенными вероятностями, причем у каждого устройства в общем случае имеются свои различные вероятности — дать тот или иной выход  $\gamma$ .

Схемы, подобные этим, вероятно, покажутся совершенно искусственными, но можно показать, что они, по крайней мере в принципе при определенных условиях, имеют преимущества перед обычными схемами.



Соответственно правило принятия решения  $\delta(\gamma/V)$  является условной вероятностью принятия решения  $\gamma$  при данном  $V$ . Иными словами, так как здесь предполагается, что пространство решений  $\Delta$  содержит конечное число решений  $\gamma$ , то правило принятия решения  $\delta(\gamma/V)$  придает каждому решению  $\gamma_j$ ;  $j=1, \dots, m$  вероятность, лежащую между 0 и 1, причем распределение вероятностей зависит от  $V$ . В большинстве практически интересных случаев  $\delta$  равно 1 или 0 для каждого  $V$  и  $\gamma$  и называется неслучайным правилом решения. Из нашей общей формулировки, однако, не исключается и противоположный случай — случайное правило принятия решения.

Как отмечалось ранее, все возможные сигналы  $S$  могут быть представлены как точки в пространстве сигналов  $\Omega$ , в котором определено априорное распределение сигналов  $\sigma(S)$ . Информация о сигнале и его распределении может иметься в двух видах. Она может представлять собой либо задание сигнала  $S$  в виде случайного процесса, т. е. задание распределения  $\sigma(S)$  и некоторых данных о нем (стационарность, гауссов характер распределения и т. д.), либо сигнал  $S$  является известной функцией одного или более случайных параметров  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_j)$  и задано распределение  $p(\theta)$  этих параметров, а не само распределение сигнала  $\sigma(S)$ . Действительно, задача приема может требовать решения о параметрах сигнала, а не о самом сигнале.

Может возникнуть вопрос, что делать, если в противоположность сделанным допущениям распределение  $\sigma(S)$  заранее неизвестно или известно лишь частично. Подобное положение на практике может встретиться в тех случаях, когда рискованно или нелогично предполагать, что можно иметь исчерпывающие знания о распределении  $\sigma(S)$ . Этот вопрос является трудным, и значительная часть теории статистических решений служит для того, чтобы убедительно ответить на него. Позднее (раздел II, § 4) мы обсудим этот вопрос и покажем что даже и в этом случае формулировка задачи приема, приведенная выше, в основных чертах сохраняется.

Можно еще более усложнить задачу, потребовав ответа на вопрос: что делать, если априори неизвестно ни распределение сигнала  $\sigma(S)$ , ни распределение шумов  $W(N)$  частично или полностью. В этом случае определение сигнала  $S$  недостаточно для того, чтобы найти априорную условную плотность вероятности  $F(V/S)$ . В соответствии

со статистической терминологией в этом случае говорят, что  $F(V/S)$  принадлежит к непараметрическому семейству, и приемную систему невозможно оценивать в прежних терминах, так как вероятности ошибок, связанные с возможными неправильными решениями, не поддаются вычислению и, таким образом, вопрос оптимизации приемной системы остается открытым. Непараметрические случаи изучались различными исследователями с точки зрения теории статистических решений [Л. 46, 47 и 48] и в этой работе рассматриваться не будут.

Дискуссия, которая до сих пор касалась пространства сигналов, статистики сигналов и шумов, может быть расширена с тем, чтобы охватить методы получения данных о принимаемом сигнале. Среди доводов, которые приводили к вышеупомянутой формулировке проблемы приема, мы предполагали для удобства, что данные наблюдений выбирались дискретно и что интервал наблюдения фиксирован и конечен. Ни одно из этих ограничений не является безусловно необходимым. Процесс получения выборочных значений может быть непрерывным во времени; ниже мы действительно будем обсуждать такой случай на нескольких примерах (раздел II, § 8).

Длительность интервала наблюдения не обязательно должна быть заранее фиксированной. В самом деле, идея переменного интервала наблюдения приводит к понятию последовательного статистического решения. Система приема, которая основывается на принципе последовательно производимых шагов, позволяет решить после фиксации каждой выборки, прийти ли к окончательному решению либо продлить интервал наблюдения, дополнив выборку. Класс систем с последовательным анализом принимаемых данных  $V$  широк и содержит непоследовательный тип приема, обсуждавшийся до этих пор как его подкласс. Настоящая работа, однако, не содержит анализа систем с последовательным приемом, за исключением краткого обзора (раздел II, § 11).

В дополнение к верностям  $\sigma(S)$  и  $W(N)$  необходимо указать критерии качества работы приемной системы для того, чтобы внести полную определенность в задачу статистического решения. Под этим можно подразумевать следующее: решение, которое надо принять при помощи приемной системы, должно основываться на имеющихся данных  $V$ , которые вследствие содержащегося в них шума, дают всего лишь остатки сведений об имевшемся сигнале  $S$ .

Следовательно, каково бы то ни было используемое правило принятия решения  $\delta(\gamma/V)$ , результат, к которому оно приводит, не всегда может быть правильным.

Для того чтобы определить задачу статистического решения, каждой комбинации решения  $\gamma$  и сигнала  $S$  (последний задается некоторой функцией распределения) соотносятся «потери»  $F(S, \gamma)$  в соответствии с некоторыми заранее выдвинутыми суждениями об относительной важности различных правильных и неправильных решений. Тогда каждое правило принятия решения может быть оценено на основе выбора критерия для оценки свойств приемной системы (например, математического ожидания потерь), который учитывает вероятности правильных и неправильных решений, а также связанных с ними потерь. Конечно, может быть много способов определить потери и, следовательно, много различных функций риска. Одним из примеров, который является весьма общим для статистики и теории связи, служит случай измерения потерь среднеквадратичной ошибкой. Этот способ измерения потерь используется в вопросах воспроизведения сигналов в тех случаях, когда решение, которое необходимо вынести, является оценкой сигнала, искаженного шумом. В этом случае потери измеряются величиной, пропорциональной квадрату ошибки в этой оценке. Далее в работе рассматриваются также другие способы измерения потерь.

Теперь мы можем дать общую формулировку задачи приема в следующем виде.

„Для данного семейства функций распределения  $F(V/S)$  данного априорного распределения вероятностей сигнала  $\pi(S)$  данного класса возможных решений и функций потерь  $F$  [и их стоимостей  $C(F)$ ] задача приема состоит в определении наилучшего правила  $\delta(\gamma/V)$  использования априорных и апостериорных данных при вынесении решения  $\gamma$ “.

Давая такую формулировку, мы ввели некоторые ограничительные допущения. Теперь проведем краткую и не вполне строгую дискуссию о том, как можно избавиться от них. Сначала отметим, что вышеприведенная формулировка задачи приема действительно является более общей, чем аргументы, приведшие к ней. Последнее высказывание требует некоторых комментариев. Уже беглый обзор указанных аргументов показывает, что ограничение множества возможных решений  $\gamma$  конечным числом  $m$  альтернатив  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$  было неосновательным и что с равным успехом может использоваться бесконечное число аль-

тернативных решений. Действительно, переход к континууму возможных альтернативных решений является лишь делом иной интерпретации. Правило принятия решения  $\delta(\gamma/V)$ , которое было введено как дискретное распределение вероятностей, должно в этом случае интерпретироваться как плотность вероятности, т. е. величина  $\delta(\gamma/V) d\gamma$  должна являться вероятностью того, что решение  $\gamma$  лежит между  $\gamma$  и  $\gamma + d\gamma$  при данном  $V$ . Для того чтобы получить неслучайное правило принятия решения, в этом случае мы интерпретируем  $\delta(\gamma/V)$  как  $\delta$ -функцию Дирака [см., например, соотношение (12)]. Обычно семейство функций распределения не задано и его надо найти для данного распределения шума  $W(N)$  и для данного вида комбинации сигнала с шумом.

## 5. Правило принятия решения

Отличительной особенностью принятия статистического решения является то, что правило  $\delta(\gamma/V)$  служит правилом для принятия решения  $\gamma$  только по апостериорным данным  $V$ , не зная действительного сигнала  $S$ , который привел к данным  $V$ . Априорное знание классов возможных сигналов и их распределения, конечно, входит в правило оптимального принятия решения, но вероятность решения  $\gamma$  при данном  $V$  не зависит от имеющегося сигнала  $S$ , т. е. решение  $\gamma$  функционально не зависит от  $S$ , хотя является статистически зависимым от него же. Этот факт можно записать как

$$\delta(\gamma/V) = \delta(\gamma/V, S), \quad (1)$$

следовательно, вероятность (плотность вероятности) принятия решения  $\gamma$  при данном  $V$  и при данных  $V$  и  $S$  является одной и той же, и правило решения  $\delta(\gamma/V)$  является математическим выражением свойств физической системы, используемой для обработки принятых данных и для вынесения решения.

В эту формулировку входят как непоследовательные, так и последовательные процедуры проведения испытаний и в обоих случаях мы имеем дело с принятием окончательного решения. Отметим также, что теория последовательных испытаний Вальда допускает большую свободу в выборе статистических решений по сравнению с непоследовательным случаем за счет введения второй функции стоимости—«стоимости эксперимента». В общей теории мы освободимся от ограничений, связанных с указанными двумя типами испытаний, не ограничивая этим общность теории.

## 6. Сходство процессов обнаружения и воспроизведения сигналов

Рис. 2 указывает на то, что правила статистических решений, по существу, являются преобразованиями, которые трансформируют пространство наблюдений в пространство решений. В обнаружении, например, каждая точка  $V$  пространства наблюдений  $\Gamma$  преобразуется в ту или другую из двух точек, образующих пространство окончательных решений  $\Delta$ . Например, при бинарном обнаружении предыдущая операция есть не что иное, как разбиение пространства наблюдений  $\Gamma$  на две области, из которых одна соответствует решению «сигнала нет», а другая — решению «есть сигнал и шум». Выполнение операций принятия решения происходит в одной ступени, так как это — простая альтернатива. Бинарная задача обнаружения сигнала является задачей разбиения пространства наблюдения наилучшим образом. Аналогично в случае воспроизведения сигнала каждая точка пространства наблюдений  $\Gamma$  преобразуется в точку пространства окончательных решений  $\Delta$ , которое в этом случае имеет ту же структуру, что и пространство сигналов  $\Omega$ . Если размерность пространства решений  $\Delta$  меньше, чем размерность пространства наблюдений  $\Gamma$ , что обычно имеет место в случае оценки параметров сигнала, то преобразование является необратимым, т. е. большое количество точек пространства наблюдений  $\Gamma$  переходит в одну точку пространства решений  $\Delta$ . Таким образом, воспроизведение сигнала можно представить как разбиение пространства наблюдения  $\Gamma$  на области, и в этом отношении обнаружение и воспроизведение имеют общую объединяющую их особенность и, следовательно, являются сходными операциями. Можно сказать, что, сгруппировав точки пространства решений  $\Delta$  в один подкласс и назвав его «сигнал + шум», мы преобразуем устройство воспроизведения сигнала в устройство для обнаружения сигнала. Наоборот, система обнаружения может рассматриваться как устройство воспроизведения с порогом для различения сигналов, например сигнал  $S=0$  от сигнала  $S \neq 0$ . Однако система, оптимальная для выполнения одной функции, может не быть оптимальной для другой, поэтому при анализе мы будем рассматривать обнаружение и воспроизведение сигналов как различные задачи.

## 7. Функции оценки приемной системы

Как отмечалось выше, в параграфах 2 и 4, функция  $F(S, \gamma)$  является обобщенной функцией потерь, введенной для выполнения процедуры оптимизации приемных систем. Эта функция соотносит потерю или стоимость каждой комбинации входных напряжений приемной системы и выходных решений системы и, вообще говоря, может зависеть или не зависеть от операций, происходящих в приемной системе. Теперь можно дать оценку характеристик приемной системы упомянутым выше способом, если выбрать некоторую функцию оценки  $C(F)$ . Последняя должна учитывать все возможные виды поведения приемных систем и назначать общую оценку потерь для каждой системы и каждого правила принятия решения. Очевидно, что такой функцией может быть математическое ожидание или средняя величина потерь  $F$ , что является приемлемым, хотя и произвольным выбором, на котором основана настоящая теория. Однако возможны и другие линейные или нелинейные операции для определения  $C$ , что не должно упускаться из виду при будущих обобщениях.

Для приемной системы удобно определить две различные оценки потерь, одна из которых оценивает характеристики системы при условии, что входной сигнал фиксирован, другая учитывает априорные вероятности сигнала. Для данного сигнала  $S$  условная оценка потерь<sup>1</sup>  $L(S, \delta)$  при принятии решения  $\delta$  определяется как условное ожидание потерь:

$$L(S, \delta) = E_{V/S} F(S, \gamma(V)) = \int_{\Gamma} dV \int_{\Delta} F(S, \gamma) F(V/S) \delta(\gamma/V) d\gamma, \quad (2)$$

Это обозначение имеет смысл как для дискретного, так и для непрерывного пространства решений  $\Delta$ ; для первого случая интеграл по пространству решений  $\Delta$  должен пониматься как сумма, а правило принятия решения  $\delta(\gamma/V)$  — как вероятность, а не плотность вероятности (см. замечание в конце § 4 в разделе I). Действительно, как будет показано ниже в разд. 2 — 10, условная оценка потерь возможна только в случае, когда неизвестна априорная плотность вероятности  $\sigma(S)$ . Однако, когда  $\sigma(S)$  априорная

<sup>1</sup> По терминологии Вальда эта величина называется априорным риском [Л. 1].

плотность вероятности сигнала известна, мы используем эту информацию для оценки системы, усредняя потери как по выборке, так и по распределениям сигнала.

Средняя оценка потерь  $L(\sigma, S)$  при принятии решения  $\delta$  определяется как условное ожидание потерь, если распределение вероятностей сигнала равно  $\sigma(S)$ :

$$L(\sigma, \delta) = E_{V/S} F(S, \gamma) = \int_{\Omega} dS \int_{\Gamma} dV \int_{\Delta} F(S, \gamma) \sigma(S) F(V/S) \delta(\gamma/V) d\gamma. \quad (3)$$

Сделаем некоторые замечания о функции потерь  $F$ . В статистике  $F$  является функцией, которая назначает каждой комбинации сигнала и решения определенные потери или стоимости, которые не зависят от правила принятия решения  $\delta$ :

$$F_1 = C(S, \gamma). \quad (4)$$

В этой работе ограничим наши рассмотрения в основном системами, характеристики которых оцениваются в соответствии с простой функцией потерь такого рода. Теория, разработанная для этого случая, позволяет делать некоторые весьма общие утверждения относительно оптимальной приемной системы при указанных ограничениях (см. теоремы Вальда о полноте [Л. 1], а также см. раздел 9).

Заметим, что можно построить более общий тип функции потерь. Действительно, некоторые наводящие предпосылки в этом направлении можно получить из теории информации. Так, если положить:

$$F = -\ln P(S/\gamma), \quad (5)$$

где  $P(S, \gamma)$  является апостериорной вероятностью сигнала  $S$  при данном решении  $\gamma$ , то средний риск (3) становится хорошо известной „неопределенностью“ теории информации [Л. 6 и 50]. Такая функция потерь может рассматриваться как мера неопределенности или неожиданности для сигнала  $S$ , когда решение  $\gamma$  известно [Л. 49 и 50]. Последнее является более общим понятием, чем простая функция потерь (4). В отличие от стоимости  $C(S, \gamma)$ , которая зависит лишь от  $S$  и  $\gamma$ , функция потерь  $F = -\ln P(S/\gamma)$  зависит также от используемого правила принятия решения и не может считаться независимой от правила принятия решения  $\delta$ .

Функция потерь вида (5) более трудна в использовании, и некоторые из общих утверждений, которые можно сделать на основе (4), явно не верны для (5). В § 4 мы покажем существование тесной связи между результатами, полученными на основе этих двух функций потерь. Нам кажется, что эти предварительные шаги могут привести к плодотворным исследованиям в будущем.

Условную и среднюю оценки потерь при использовании правила решения  $\delta$  можно записать с учетом (2) — (5), так: условный риск

$$r(\mathbf{S}, \delta) = \int_{\Gamma} d\mathbf{V} \int_{\Delta} C(\mathbf{S}, \gamma) F(\mathbf{V}/\mathbf{S}) \delta(\gamma/\mathbf{V}) d\gamma; \quad (6)$$

средний риск

$$R(\tau, \delta) = \int_{\Omega} r(\mathbf{S}, \delta) \sigma(\mathbf{S}) d\mathbf{S}; \quad (7)$$

условная потеря информации

$$h(\mathbf{S}, \delta) = - \int_{\Gamma} d\mathbf{V} \int_{\Delta} \ln P(\mathbf{S}, \gamma) \delta(\gamma/\mathbf{V}) F(\mathbf{V}/\mathbf{S}) d\gamma; \quad (8)$$

средняя потеря информации

$$H(\tau, \delta) = \int_{\Omega} h(\mathbf{S}, \delta) \sigma(\mathbf{S}) d\mathbf{S}. \quad (9)$$

Последнее выражение является хорошо известной „неопределенностью“ теории информации [Л. 6 и 49].

## 8. Сравнение приемных систем и вероятности ошибок при принятии решения

Выражения для оценок потерь (2) и (3) могут быть приведены к более прозрачному виду, вскрывающему роль вероятностей ошибок, связанной с различными возможными решениями. Пусть  $p(\gamma/\mathbf{S})$  является вероятностью (плотностью вероятности) того, что приемная система в данном случае принимает решение  $\gamma$  при наличии сигнала  $\mathbf{S}$ , и выбрано правило принятия решения  $\delta(\gamma/\mathbf{V})$ . Тогда

$$p(\gamma/\mathbf{S}) = \int_{\Gamma} F(\mathbf{V}/\mathbf{S}) \delta(\gamma/\mathbf{V}) d\mathbf{V}. \quad (10)$$



Сравнение с условным риском (6) показывает, что последнее выражение, которое можно записать, как

$$r(S, \delta) = \int_{\Delta} p(\gamma, S) C(S/\gamma) d\gamma \quad (11)$$

является просто суммой стоимостей, связанных со всеми возможными решениями для данного сигнала  $S$ , взвешенных в соответствии с вероятностями их появления.

Так как мы в дальнейшем будем касаться почти исключительно неслучайных правил решения, в особенности в приложениях, то правило принятия решения  $\delta$  можно записать в виде:

$$\delta(\gamma/V) = \delta(\gamma - \gamma_{\sigma}(V)), \quad (12)$$

где  $\delta$  в правой части выражения является  $\delta$ -функцией Дирака. Здесь важно различие между решением  $\gamma$  и функциональной операцией  $\gamma_{\sigma}(V)$ , выполняемой над поступившими данными  $V$ ; индекс  $\sigma$  указывает, что эта операция в общем случае зависит от статистики сигнала. С учетом (12) плотность вероятности ошибки решения (10) можно переписать следующим образом:

$$p(\gamma/S) = \int_{\Gamma} F(V/S) \delta(\gamma - \gamma_{\sigma}(V)) dV. \quad (13)$$

Это выражение в явном виде содержит операцию, производимую приемной системой, а также указывает путь вычисления  $p(\gamma/S)$  для любой приемной системы, если ее функциональное поведение  $\gamma_{\sigma}(V)$  известно.

Отсюда также следует простое правило сравнения приемных систем. Например, сравнение можно сделать, если определить ту из приемных систем, которая имеет наименьшую среднюю оценку потерь  $L(\sigma, \delta)$ . Последняя содержит в себе в терминах среднего риска (7) сравнение  $R(\sigma, \delta_1)$  и  $R(\sigma, \delta_2)$  для двух систем, имеющих функции  $\gamma_{\sigma}(V)_1$  и  $\gamma_{\sigma}(V)_2$  [см. (12)]. Подобным образом можно сравнить средние потери информации  $H(\sigma, \delta_1)$  и  $H(\sigma, \delta_2)$  для различных приемных систем [см. (9)]. Отметим, что таким же образом могут исследоваться не только оптимальные приемные системы, но и близкие к оптимальным, если только функция  $\gamma_{\sigma}(V)$  определена. Таким образом, для практических ситуаций имеется количественный метод выбора между „хорошим“, „плохим“, „неплохим“, „наилучшим“ решениями за-

дачи и т. д., на основе одного общего критерия. Примеры как оптимальных, так и неоптимальных приемных систем приводятся в § 2, 6, 9 раздела II.

## 9. Приемная система Байеса

В § 7 мы видели, каким образом для любой приемной системы могут определяться средняя и условная оценки потерь при условии, что выбраны оценки и функции стоимости. Теперь определим, что подразумевается под оптимальной системой принятия решения. Дадим определение для случая, в котором предполагается полное знание априорных вероятностей сигнала  $\sigma(S)$ . Как это следует из вышесказанного, в этом случае наиболее приемлема оценка с точки зрения средних потерь  $R(\sigma, \delta)$ . Будем считать, что одна приемная система лучше другой, если ее оценка потерь меньше при одних и тех же условиях работы и при одном и том же критерии оценки системы и что наилучшей или оптимальной системой является та, которая имеет наименьшую оценку потерь для данного априорного распределения сигнала  $\sigma$ . Мы назовем такую оптимальную приемную систему системой Байеса.

Приемная система Байеса подчиняется правилу решений Байеса  $\delta^*$ , в котором  $\delta^*$  является правилом принятия решения с наименьшей средней оценкой потерь  $L$  для данного априорного распределения  $\sigma$ .

Для критерия риска и информационного критерия (7) и (9) это означает:

$$R^* = \min_{\delta} R(\sigma, \delta) = R(\sigma, \delta^*) \quad (\text{риск Байеса}) \quad (14a)$$

$$H^* = \min_{\delta} H(\sigma, \delta) = H(\sigma, \delta^*) \quad (\text{неопределенность Байеса}). \quad (14b)$$

Первое из этих выражений минимизирует средний риск или стоимость, в то время как второе минимизирует неопределенность. Правила решения Байеса для данного  $F$  образует класс Байеса, каждый член которого соответствует своему априорному распределению сигнала  $\sigma(S)$ .

<sup>1</sup> Различные априорные распределения сигнала  $\sigma(S)$  могут привести к идентичным правилам принятия решений, но, отвлекаясь от этой возможной многозначности, мы видим, что критерий Байеса полностью задан, когда  $\sigma(S)$  известно, так что он полностью использует всю информацию, имеющуюся в нашем распоряжении.

## 10. Минимаксная приемная система

Когда априорные вероятности сигнала неизвестны или заданы неполностью, вопрос определения оптимальной приемной системы остается открытым. В таких случаях возможным критерием для оптимизации системы служит минимаксное правило принятия решения  $\delta_M^*$  или правило, связанное с условным риском  $r(S, \delta)$ . Как отмечалось ранее, каждому возможному сигналу  $S$  можно поставить в соответствие некоторый условный риск. Вообще говоря, этот риск будет различным для различных сигналов, и среди них будет иметься некоторый максимум  $r(S, \delta)_{\text{макс}}$ . Минимаксное правило, грубо говоря, является правилом решения, которое понижает этот максимум настолько, насколько это возможно. Точнее говоря, минимаксное правило принятия решения  $\delta_M^*$  является правилом, для которого максимальная оценка потерь  $L(S, \delta)_{\text{макс}}$  не превосходит максимальную условную оценку потерь для любого другого правила решения  $\delta$ , причем сигнал  $S$  принимает всевозможные значения.

Следовательно, используя риск  $r$  или условную потерю информации  $h$ , мы можем написать выражения:

$$\text{Max}_S r(S, \delta_M^*) = \text{Max}_S \text{Min}_\delta r(S, \delta) \leq \text{Max}_S (S, \delta)$$

и

$$\text{Max}_S h(S, \delta_M^*) = \text{Max}_S \text{Min}_\delta h(S, \delta) \leq \text{Max}_S h(S, \delta), \quad (15)$$

из которых очевидно значение термина „минимакс“<sup>1</sup>.

Минимаксное правило решения явилось предметом многих исследований и дискуссий. Высказывались соображения о том, что это правило зачастую слишком осторожно, чтобы быть полезным. Эта точка зрения правильна. Но, с другой стороны, имеются такие ситуации, в которых минимаксное правило, безусловно, обеспечивает наилучшее решение.

---

<sup>1</sup> Вальд показал (см. прилож. II), что  $\text{Max}_S \text{Min}_\delta r(S, \delta) = \text{Min}_\delta \text{Max}_S r(S, \delta)$  для риска. Неизвестно, соблюдается ли это соотношение для потери информации.

Рис. 3а иллюстрирует эти замечания<sup>1</sup>. Имеются случаи, в которых максимум условной оценки потерь для всех других правил решения ( $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta$ ) превышает максимум для минимаксного правила  $\delta_M^*$ , и вместе с тем минимальная оценка потерь также значительно больше, чем соответствующий минимум для правила  $\delta_M^*$ . Однако иногда может встретиться положение, показанное на рис. 3б, когда минимаксное правило принятия решения  $\delta_M^*$  приводит к чрезмерно большим потерям, за исключением сравнительно узкого диапазона значений сигнала  $S$ . В последнем случае, возможно, что правило  $\delta_M^*$  слишком осторожно, и следует искать более подходящее правило принятия решения. Во всяком случае, минимаксная процедура имеет преимущество перед другими правилами принятия решения, предохраняя от наихудшего случая. но она вместе с тем приводит к слишком большой осторожности в оценке более вероятных состояний на входе приемной системы. Если стоимости назначены и фиксированы, то излишней осторожности минимаксной процедуры принятия решения нельзя избежать. Однако во многих случаях, когда действительные значения назначенных стоимостей не вполне ясны, можно более разумно назначать стоимости, основываясь на апостериорных требованиях, с тем чтобы изменить правило принятия решения  $\delta_M^*$  в тех местах рис. 3а, где „хвосты“

<sup>1</sup> Кривая минимаксного риска (рис. 3а) имеет один явно выраженный максимум. Поэтому в этом случае наиболее благоприятное априорное распределение сигнала  $\sigma_0$  должно концентрировать всю вероятность около значения сигнала, соответствующего максимальному условному риску (распределение  $\delta$  — функции для непрерывного пространства сигналов), так как по определению  $\sigma_0$  должно максимизировать средний риск Байеса. Здесь существование такого распределения обеспечивается нашими допущениями (А) — (Г) (приложение II), которые соответствуют допущениям Вальда 3.1—3.7 [Л. 1]. Грубо говоря, минимаксный условный риск должен равняться своей максимальной величине для всех сигналов, которым приписывается наиболее благоприятное априорное распределение вероятностей, не равное нулю (см. теоремы Вальда 3.10, 3.11 [Л. 1]). Следовательно, минимаксная кривая риска с двумя различающимися и равными максимумами имеет соответствующее распределение  $\sigma_0$  с вероятностью, сконцентрированной или в двух максимумах, или распределенной между ними. Если бы один максимум был больше другого, то вероятность должна была бы сконцентрироваться около большего максимума и т. д. Иными словами, если бы распределение  $\sigma_0$  было не равно нулю на конечном интервале, то соответствующий минимаксный условный риск был бы постоянен в этом интервале, но мог бы иметь другие, меньшие значения вне этого интервала.

$\max_S r(S, \delta_M^*)$  сравнимы с „хвостами“  $r(S, \delta)$ , и, следовательно, исключить, по крайней мере частично, чрезмерную осторожность минимаксной процедуры<sup>1</sup>.

Правило решения Байеса дает наиболее полное использование априорных вероятностей, когда они известны, и в

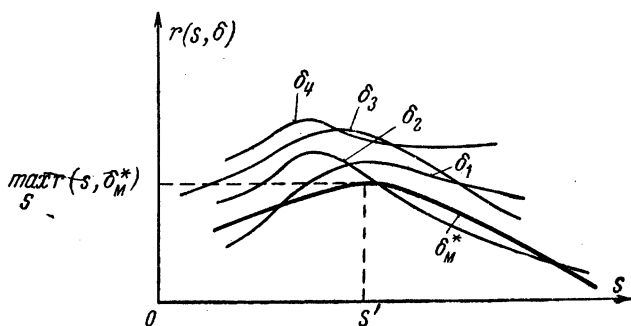


Рис. 3а. Минимаксный случай.

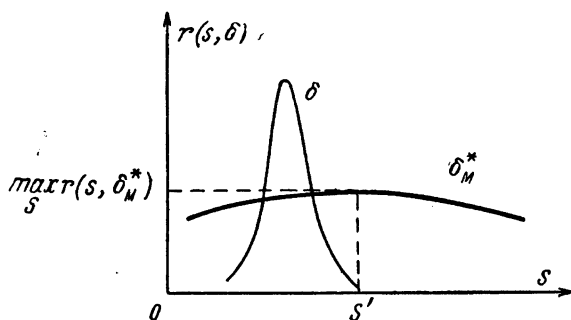


Рис. 3б. Минимаксный случай, когда правило принятия решения является слишком осторожным.

этом смысле предполагает наилучшую работу приемной системы. С другой стороны, минимаксное правило решения не использует все априорные вероятности (только потому, что они неизвестны наблюдателю) и в этом смысле предполагает наихудший случай (см. приложение II [Л.5]). На практике получение минимаксного правила решения  $\delta_M$  является важной задачей. В общем случае эта задача не решена, хотя байесовское правило решения  $\delta^*$  всегда формулируется

<sup>1</sup> Ходжес и Леман [Л. 51] обсуждали некоторые промежуточные положения, когда  $\sigma(S)$  частично известно на основе предыдущего опыта (см. также приложение II).

ется в терминах риска. Вместе с тем, основываясь на определениях  $\delta^*$  и  $\delta_M^*$ , можно показать, что правило решения Байеса, для которого условная оценка потерь постоянна для всех сигналов, является минимаксным правилом. Следовательно, если мы можем найти правило  $\delta^*$ , для которого соблюдается это условие, то мы определим также и наименее благоприятное априорное распределение сигнала  $\sigma_M^*(S)$  для  $\delta^* = \delta_M^*$ , которое следует из вышесказанного, т. е.

$$r(S, \delta^*) \text{ [или } h(S, \delta^*)] = \text{const} \quad (16)$$

для всех  $S$ .

Отметим, что небайесово правило, для которого условная оценка потерь постоянна для всех сигналов  $S$ , может не быть минимаксным правилом. Выполнение соотношения (16) может служить полезным методом для отыскания  $\sigma_M^*$  и  $\delta_M^*$ , как будет показано в § 5 раздела III.

## 11. Некоторые общие свойства оптимальных правил принятия решения

Практическая ценность оптимальной процедуры принятия решения в значительной степени обусловлена ее единственностью: нет других систем приема с теми же оптимальными свойствами. Для единственного оптимума задача выбора самого простого варианта (или наименее дорогого), с точки зрения конструирования, решается автоматически. По этим соображениям и главным образом вследствие важности самой оптимизации необходимо знать свойства оптимальных правил решения, а также их осуществимость в физически реализуемых приемных системах. Теперь мы установим два основных результата, на которых базируются дальнейшие практические приложения теории.

*Приемлемость правил решения.* Отметим, во-первых, что условная оценка потерь, свойственных тому или иному правилу принятия решения, зависит, конечно, от свойств конкретного сигнала, имеющегося на входе приемной системы. Правило принятия решения может иметь меньшую оценку потерь, чем другие правила для одних сигналов, и большую — для других. Если условная оценка потерь для правила  $\delta_1$  никогда не превышает той же оценки для правила  $\delta_2$  при любых значениях сигналов  $S$  и является мень-

шей, чем для правила  $\delta_2$ , по крайней мере для одного из сигналов  $S$ , то говорят, что правило принятия решений  $\delta_2$  равномерно лучше, чем правило  $\delta_1$ . Это приводит к определению понятия приемлемости.

Правило решения приемлемо, если не существует другого, равномерно лучшего правила принятия решения. Заметим, что при таком определении приемлемое правило решения не обязательно является равномерно лучшим; другие правила могут иметь меньшие и большие оценки потерь для частных видов сигналов  $S$  (см. рис. 3). Однако они могут не быть лучшими для всех сигналов.

Отсюда следует, что если правило Байеса или минимакса единственно, то оно приемлемо. Обратное утверждение неверно, так как приемлемое правило не обязательно является правилом Байеса или минимакса. Соответственно, нет приемной системы, которая не минимизирует средний риск (оценку потерь) и которая может быть равномерно лучше, чем система Байеса для тех же самых распределений сигнала  $\sigma(S)$ . Точно так же не существует приемной системы, которая не минимизирует максимальный условный риск (оценку потерь) и может быть равномерно лучше, чем минимаксная система. Приемлемость является важным свойством единственных байесовских и минимаксных оптимальных систем обнаружения сигналов.

*Теорема о полноте класса.* Это — фундаментальная теорема Вальда [Л. 1] (теорема 3.20), доказывающая полноту класса правил решения. Класс правил решений  $D$  является полным, если для любого правила  $\delta$ , не принадлежащего к классу  $D$ , мы можем найти такое правило  $\delta^*$ , относящееся к классу  $D$ , что правило  $\delta^*$  оказывается равномерно лучше, чем  $\delta$ . Если класс  $D$  не содержит подклассов, являющихся полными, то такой класс правил решения  $D$  является минимальным полным классом. Вальд показал, что для простых функций потерь классы всех приемлемых байесовых правил принятия решения являются минимальными полными классами при выполнении ряда условий, которые, конечно, удовлетворяются для большинства, если не для всех физически мыслимых ситуаций. В приложении II дан краткий обзор некоторых из этих теорем и условий, при которых они имеют силу. Для тех же условий можно показать, что любое минимаксное правило решения будет байесовским правилом по отношению к определенному наименее благоприятному априорному распределению сигнала  $\sigma^*(S)$ , а также доказать существование распределения  $\sigma^*(S)$ .

а также байесовых и минимаксных правил принятия решения. Следовательно, теорема о полноте класса подтверждает оптимальные свойства байесовского класса решений в целом. Отметим, что не существует теоремы о полноте класса решений, имеющих оценку потери информации (8) и (9), и нет общих условий существования байесовских и минимаксных правил при таком способе измерения потерь. Однако некоторые результаты, характеризующие байесовские решения при таких условиях, с точки зрения задачи обнаружения сигналов даны в разделе VI.

### Отдельные замечания

Из приведенной дискуссии ясно, что априорные вероятности играют важнейшую роль развития и применения теории статистических решений. Если априорные вероятности не существуют, то теория не имеет смысла. Однако когда априорные вероятности существуют или могут считаться существующими, теория может использовать различные методы для отыскания необходимых решений, в том числе и минимаксный, даже в том случае, когда априорные вероятности неизвестны или недоступны наблюдателю. В этом смысле поиски априорного распределения часто являются главной проблемой, которая появляется в практических приложениях теории статистических решений.

Роль априорной информации ни в коем случае не должна игнорироваться или умаляться. Проблема назначения стоимостей должна также тщательно исследоваться, так как она обеспечивает связь теоретико-вероятностной задачи с действительной ситуацией и важностью тех или иных событий. Связь между созданием оптимальной или почти оптимальной приемной системы и рабочими аспектами первоначальной теоретико-вероятностной задачи дается теорией стоимостей, которая ищет общие доводы для назначения стоимостей в каждом конкретном случае. Подобные замечания относятся также к другим функциям потерь, и задачей будущего исследования является поиск адекватных критериев (кроме  $F_1$  и  $F_2$ ) и оценка, если это возможно, их оптимальных свойств, например приемлемости, теорем о полноте класса и др.

Теперь перейдем к следующей теме данной работы, а именно: к приложениям теории статистических решений к проблемам связи, вопросам обнаружения и воспроизведения сигналов на фоне шумов.



## II. СИСТЕМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ, МИНИМИЗИРУЮЩИЕ СРЕДНИЙ РИСК

### 1. Постановка задачи

Применим теорию статистических решений к некоторым задачам обнаружения сигналов (простым альтернативам), в которых интервал наблюдения фиксирован. Так как в задаче обнаружения сигнала имеются только два возможных решения, то мы будем называть ее бинарной задачей обнаружения.

Задача бинарного обнаружения усиленно изучалась в недавнем прошлом [Л. 9 ÷ 30] с различных точек зрения. Основной целью последующего изложения является показ того, что все эти точки зрения легко могут быть объединены и обобщены в рамках теории статистических решений.

Сначала мы изучим оптимальную байесову приемную систему и покажем, что некоторые другие системы обнаружения, рассматриваемые ранее, являются особыми случаями этой системы. Более подробно изучается оптимальная система обнаружения для особенно важного случая приема слабых сигналов на фоне шумов. Можно показать, например, что ряд известных явлений (например, подавление модуляции) являются основными и неизбежными при обнаружении слабых сигналов.

Прежде всего используем соотношение (4), функцию потери  $F_1$  и определим оптимальные системы байесова класса [см. соотношение (14)], которые, как мы видели, обеспечивают получение минимального среднего риска  $R(\sigma, \delta)$ . Напомним, что при бинарном обнаружении мы проверяли гипотезу  $H_0$  о наличии одного лишь шума в противоположность гипотезе  $H_1$  (имеется сигнал + шум) и, таким образом, в пространстве решений  $\Delta$  имели всего лишь две точки  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$  — два решения о возможном наличии сигнала „да“  $\gamma_1$  и „нет“  $\gamma_0$ . Допускается теперь, что правило решения может быть рандомизировано, положим, что  $\delta(\gamma_0/V)$  и  $\delta(\gamma_1/V)$  являются вероятностями принятия решений  $\gamma_0$  или  $\gamma_1$  об отсутствии или наличии сигнала соответственно при данном входном напряжении  $V$ . Так как теория требует обязательного принятия определенного окончательного решения, то всегда будет вынесено некоторое решение, и, следовательно:

$$\delta(\gamma_0/V) + \delta(\gamma_1/V) = 1. \quad (17)$$

Обозначая через  $S$  входной сигнал, который может наблюдаться в продолжение интервала наблюдения, мы можем записать наши гипотезы в сокращенном виде, как  $H_0: S \in \Omega_0$  и  $H_1: S \in \Omega_1$ , где  $\Omega_1$  и  $\Omega_0$  являются соответственно неперекрывающимися классами гипотез согласно определению, данному в подразделе 12 раздела II. При бинарном обнаружении нулевой класс  $\Omega_0$  обычно содержит только один член, соответствующий отсутствию сигнала<sup>1</sup>. Сигнал класса  $\Omega_1$  может состоять из одного или более сигналов, не равных нулю. Оказывается удобным описать появление сигналов в неперекрывающихся классах  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  плотностями вероятности  $w_0(S)$ ,  $w_1(S)$ , нормированными по соответствующим пространствам, т. е.

$$\int_{\Omega_0} w_0(S) dS = 1 \quad \text{и} \quad \int_{\Omega_1} w_1(S) dS = 1. \quad (18)$$

Если  $q$  и  $p = 1 - q$  соответственно являются априорными вероятностями наблюдения какого-либо одного сигнала из классов  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ , то априорное распределение  $\sigma(S)$  по всему пространству сигналов  $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$  имеет вид:

$$\sigma(S) = qw_0(S) + pw_1(S) = q\delta(S - 0) + pw(S). \quad (19)$$

Последнее имеет место в том случае, когда пространство класса сигналов  $\Omega_0$  содержит только один (нулевой) сигнал. Соотношение (19) представляет одностороннюю альтернативу, упоминавшуюся в разделе II (стр. 257). Если бы в классе содержался только один сигнал, то соотношение (19) имело бы вид:

$$\sigma(S) = q\delta(S - 0) + p\delta(S - S_1); \quad S_1 \neq 0.$$

В этом случае мы получаем пример простой альтернативы. В обоих случаях  $\int \sigma(S) dS = 1$  вследствие выбора вида вероятностей  $p$ ,  $q$  и  $w$ .

Следующий шаг в применении теории риска состоит в назначении ряда стоимостей  $C(S, \gamma) = F_1$  [см. (4)] для каждой возможной комбинации входного сигнала и решения. Мы будем иллюстрировать это случаем односторонней

<sup>1</sup> Другая важная задача бинарного обнаружения возникает в тех случаях, когда класс сигналов  $\Omega_0$  содержит один из сигналов  $S_0$  и шум, а класс  $\Omega_1$  содержит другой сигнал и шум  $S_1 + N$ ;  $S_1 \neq 0$ , в этом случае обработка будет такая же, как и в случае обычной задачи, обсужденной здесь, за исключением очевидных изменений в распределениях сигнала и шума.

альтернативы и простых стоимостей, хотя метод анализа, основанный на применении теории риска, не ограничен таким выбором. Согласно вышесказанному имеем:

$$\begin{aligned} C(S=0; \gamma_0) &= C_{1-\alpha}; \quad C(S \in \Omega_1; \gamma_0) = C_\beta; \\ C(S=0; \gamma_1) &= C_\alpha; \quad C(S \in \Omega_1; \gamma_1) = C_{1-\beta}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $C_{1-\alpha}$ ,  $C_{1-\beta}$  являются стоимостями, назначенными для правильных решений или „успехов“, а  $C_\alpha$ ,  $C_\beta$  — стоимостями, назначенными для возможных неправильных решений или „неудач“. Кажется естественным из определения понятий „успеха“ и „неудачи“ требовать, чтобы выполнялись условия  $C_\alpha > C_{1-\alpha}$  и  $C_\beta > C_{1-\beta}$ . Кроме того, мы постулируем также, что  $C_{1-\alpha} \geq 0$ ;  $C_{1-\beta} \geq 0$ , т. е. при принятии правильного решения чистый выигрыш или „выгода“ отсутствуют. В этом случае лучшее, что мы можем ожидать, если мы свободны в выборе стоимостей, — это нулевой стоимости „успеха“:  $C_{1-\alpha} = C_{1-\beta} = 0$ . Отметим, что стоимости всегда назначаются классу сигналов в целом, а не отдельному его члену.

Предположим, что функция  $F(V/S)$  непрерывна по параметру  $S$ , и рассмотрим испытания только с фиксированным временем наблюдения. Предположим также, что допущения, необходимые для обоснования теории риска (см. приложение II) удовлетворяются; тогда мы можем написать непосредственно из (7) и (20), что средний риск равен:

$$\begin{aligned} R(\sigma, \delta) &= \int_{\Gamma} \{ \delta(\gamma_0/V) [qC_{1-\alpha}F(V/0) + pC_\beta \overline{F(V/S)}_{\Omega_1}] + \\ &+ \delta(\gamma_1/V) [pC_{1-\beta} \overline{F(V/S)}_{\Omega_1} + qC_\alpha F(V/0)] \} dV, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $p + q = 1$ , и из (19) следует, что

$$p \overline{F(V/S)}_{\Omega_1} = \int_{\Omega_1} \sigma(S) F(V/S) dS = p \int_S w_1(S) F(V/S) dS \quad (22a)$$

и

$$q F(V/0) = \int_{\Omega_0} \sigma(S) F(V/S) dS = q \int_S w_0(S) F(V/S) dS. \quad (22b)$$

Здесь имеются два рода возможных ошибок: ошибка I рода — ложная тревога, вызываемая решением о наличии сигнала и шума в случае, когда имеет место один шум, и

ошибка II рода — пропуск сигнала, вызываемая решением о наличии одного шума в случае, когда имеют место сигнал и шум. Условные вероятности этих двух типов ошибок (полученных усреднением по соответствующим классам гипотез) определяются выражениями:

вероятность ложной тревоги

$$\alpha \equiv \int_{\Gamma} F(\mathbf{V}/0) \delta(\gamma_1/\mathbf{V}) d\mathbf{V}$$

и вероятность пропуска сигнала

$$\beta_1 \equiv \int_{\Gamma} \overline{F(\mathbf{V}/\mathbf{S})}_{\Omega_1} \delta(\gamma_0/\mathbf{V}) d\mathbf{V}. \quad (23)$$

С помощью (17), (22) и (23) мы можем записать средний риск (21) более компактно:

$$R = qC_{1-\alpha} + pC_{1-\beta} + q\alpha(C_\alpha - C_{1-\alpha}) + p\beta(C_\beta - C_{1-\beta}). \quad (24)$$

Из (6) подобным же образом получаем условный риск:

$$r(\mathbf{S}) = \begin{cases} (1 - \alpha')C_{1-\alpha} + \alpha'C_\alpha & \text{при } \mathbf{S} = 0; \\ [1 - \beta'(\mathbf{S})]C_{1-\beta} + \beta'(\mathbf{S})C_\beta & \text{при } \mathbf{S} \neq 0, \end{cases} \quad (25)$$

где условные вероятности  $\alpha'$  и  $\beta'$  отличаются от вышеуказанных вероятностей ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$  (23), имея вид:

$$\alpha' = \int_{\Gamma} F(\mathbf{V}/0) \delta(\gamma_1/\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \alpha$$

и

$$\beta'(\mathbf{S}) = \int_{\Gamma} F(\mathbf{V}/\mathbf{S}) \delta(\gamma_0/\mathbf{V}) d\mathbf{V}, \quad (\neq \beta). \quad (26)$$

## 2. Оптимальное обнаружение

В нашем случае правило решения Байеса  $\delta^*$  (см. раздел II, § 9) можно вывести из соотношения (21). Сначала перепишем (21) так, чтобы оно включало условие (17); тогда мы получим:

$$R(\sigma, \delta) = qC_{1-\alpha} + pC_{1-\beta} + \int_{\Gamma} \delta(\gamma_0/\mathbf{V}) [p(C_\beta - C_{1-\beta}) \times \\ \times \overline{F(\mathbf{V}/\mathbf{S})}_{\Omega_1} - q(C_\alpha - C_{1-\alpha})F(\mathbf{V}/0)] d\mathbf{V}. \quad (27)$$

Нашей задачей является выбор правила принятия решения  $\delta(\gamma_0/\mathbf{V})$  и, следовательно, правила  $\delta(\gamma_1/\mathbf{V})$  таким образом, чтобы минимизировать средний риск. Так как оба значения  $\delta$  должны быть неотрицательными и не превосходить 1, то ясно, что интеграл в (27) минимален, если для каждого  $\mathbf{V} \in \Gamma$  мы выберем правило  $\delta$  следующим образом: когда  $p(C_\beta - C_{1-\beta}) \overline{F(\mathbf{V}/\mathbf{S})}_{\Omega_1} > q(C_\alpha - C_{1-\alpha}) F(\mathbf{V}/0)$ , выбираем

$$\delta^*(\gamma_1/\mathbf{V}) = 1$$

и

$$\delta^*(\gamma_0/\mathbf{V}) = 0 \quad (\text{решение — сигнал } + \text{ шум}); \quad (28a)$$

когда  $p(C_\beta - C_{1-\beta}) \overline{F(\mathbf{V}/\mathbf{S})}_{\Omega_1} < q(C_\alpha - C_{1-\alpha}) F(\mathbf{V}/0)$ , выбираем

$$\delta^*(\gamma_1/\mathbf{V}) = 0$$

и

$$\delta^*(\gamma_0/\mathbf{V}) = 1 \quad (\text{решение — только шум}). \quad (28б)$$

Отметим, что правило решения Байеса оказывается не-рандомизированным (раздел II, § 4), несмотря на то, что соотношение (27) и последующие допускают возможность рандомизации оптимального правила принятия решений.

Здесь удобно внести коэффициент правдоподобия<sup>1</sup>, причем величина  $K$  называется порогом или критическим значением коэффициента правдоподобия и зависит только от назначенных стоимостей (индекс  $n$  указывает на то, что  $\Lambda_n$  и  $F = F_n$  являются функциями интервала времени наблюдения):

$$\Lambda_n = \frac{p \overline{F(\mathbf{V}/\mathbf{S})}_{\Omega_1}}{q F(\mathbf{V}/0)} \quad (\geq 0), \quad (29)$$

с помощью которого правило решения Байеса (для неперекрывающихся классов гипотез) для бинарного случая

<sup>1</sup> Отметим, что коэффициент правдоподобия  $\Lambda_n$  является несколько более общим понятием, чем то, которое обычно называется отношением правдоподобия. В самом деле, классическое отношение правдоподобия является отношением плотностей условных вероятностей  $\mathbf{V}$  при наличии сигнала  $\mathbf{S}$ , и при отсутствии сигнала  $\mathbf{S}$ , т. е.  $F(\mathbf{V}/\mathbf{S})/F(\mathbf{V}/0)$ . Обобщенный коэффициент правдоподобия (29) сводится к последнему, когда априорные вероятности  $p$  и  $q$  равны, а пространство сигналов содержит только одну точку, соответствующую случайному сигналу.

(28,а, б) может быть сформулировано более компактно в виде:

принимается решение  $\gamma_1$ , когда  $\Lambda_n \geq K$   $\left( K = \frac{C_\alpha - C_{1-\alpha}}{C_\beta - C_{1-\beta}} > 0 \right)$   
 принимается решение  $\gamma_0$ , когда  $\Lambda_n < K$  (30)

Таким образом, правило Байеса, по существу, равносильно разбиению пространства наблюдений  $\Gamma$  на две области, граница между которыми определяется уравнением

$$\Lambda_n(V) = K, \quad (31)$$

как это показано на рис. 4. Область решения  $\Gamma'$  содержит все наблюдения  $V$ , для которых  $\Lambda_n = K$ . После получения данных  $V$  система Байеса решает, принадлежат ли эти данные к области  $\Gamma'$  или к области  $\Gamma''$ . Решение принимается на основе вычисления обобщенного коэффициента правдоподобия (29) для данного  $V$ , полученного для фиксированного интервала времени наблюдения,

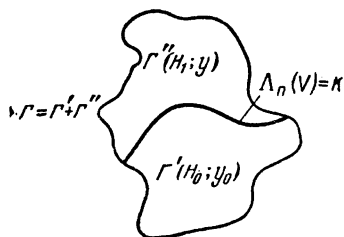


Рис. 4. Области решения при бинарном обнаружении. Интервал времени наблюдения постоянный.

и сравнения  $\Lambda_n(V)$  с фиксированным порогом  $K$ , определяемым назначенными стоимостями. Для того чтобы вычислить коэффициент правдоподобия  $\Lambda_n$ , приемная система должна „знать“ как априорные вероятности  $p, q, w_1(S)$ , так и распределение  $F(V/S)$ , т. е. конструктор должен ввести их в вычислительное

устройство, которое составляет часть оптимальной приемной системы. Таким образом, в процессе статистического решения, когда выносится определенное решение „да“ (имеется сигнал + шум) или „нет“ (имеется только шум), используется вся априорная информация. Как только принято решение  $\gamma_1$  или  $\gamma_0$  о наличии или отсутствии сигнала, неизбежно теряется некоторая информация вследствие влияния шума и ограниченности интервала времени наблюдения. Количественно величина этих потерь для некоторых примеров будет вычислена ниже.

В общем случае оптимальная приемная система является вычислительным устройством, которое подвергает принятые данные  $V$  нелинейной обработке, зависящей как от ста-

статистических свойств шума и структуры сигнала, так и от априорных вероятностей наличия шума и сигнала. В определенных случаях, главным образом при нормальной статистике шумов, над принятыми данными  $V$  необходимо совершать только линейные операции.

Смысл обобщенного коэффициента правдоподобия (29) можно интерпретировать несколько иным образом. Заметим, что

$$F(V/S) = p(V) p(S/V) / \sigma(S),$$

где  $p(V)$  является безусловной вероятностью (плотностью вероятности) появления  $V$ , а  $p(S/V)$  является условной апостериорной вероятностью наличия сигнала  $S$  при данном  $V$ . Для  $\delta(\gamma_0/V)$  и  $\delta(\gamma_1/V)$  в (21) можно написать:

$$A_0(V, \sigma) = p(V) \left[ \int_{\Omega_0} C_{1-\alpha} p(S/V) dS + \int_{\Omega_1} C_{\beta} p(S/V) dS \right] \quad (32a)$$

и

$$A_1(V, \sigma) = p(V) \left[ \int_{\Omega_0} C_{\alpha} p(S/V) dS + \int_{\Omega_1} C_{1-\beta} p(S/V) dS \right]. \quad (32b)$$

Для данного  $V$  интегралы в (32) являются условными математическими ожиданиями стоимостей решений  $\gamma_0, \gamma_1$ , т. е. являются апостериорным риском, связанным с решениями  $\gamma_0, \gamma_1$ . Таким образом, правило решения Байеса (28) или (30) может быть сформулировано другим образом: «следует вынести решение, для которого апостериорный риск минимален».

Вторая интерпретация, очевидно, представляет специальный интерес вследствие своей связи с теорией передачи сообщений. Отметим, что логарифм коэффициента правдоподобия (29) пропорционален мере Шеннона [Л. 6] для разности между неопределенностями гипотез  $H_0$  и  $H_1$ , когда  $V$  известно, т. е.

$$\ln A_n(V) = [-\ln q F(V)/0] - [-\ln p \overline{F(V/S)}_R]. \quad (33)$$

Отсюда видно, что правило принятия решения (30) эквивалентно решению о принятии гипотезы  $H_1$ , если неопределенность гипотезы  $H_1$  меньше неопределенности гипотезы  $H_0$  на величину  $\ln K$ . Наконец, отметим, что теорема о полноте класса (разделы I—II) и определение риска убеждают нас в том, что испытания коэффициента правдоподобия являются оптимальными, и далее, что все оптимальные испы-

гания, основанные на коэффициенте правдоподобия (29), являются испытаниями Байеса (см. приложение II). Риск Байеса  $R^*$  и средний риск  $R$  (29) для любых (необязательно оптимальных) приемных систем равны:

$$R^* = K_0 + p [C_\beta - C_{1-\beta}] \left( \frac{K}{\mu} \alpha^* + \beta^* \right)$$

и

$$R = K_0 + p [C_\beta - C_{1-\beta}] \left( \frac{K}{\mu} \alpha + \beta \right),$$

где  $\mu = \frac{p}{q}$  и где  $K$  дано соотношением (30); во всех случаях  $K$  равно  $K_0 = qC_\alpha + pC_{1-\beta}$ . Порог  $K'$  для неидеального случая может быть и не равным  $K$ , но определенный порог всегда имеется в тех случаях, когда при бинарном обнаружении требуется принять определенное решение.

### 3. Наблюдатель Неймана — Пирсона и идеальный наблюдатель [Л. 1—16]

Проблема обнаружения сигналов на фоне шума может рассматриваться и рассматривалась ранее при помощи статистических методов, отличных от теории статистических решений. Два из этих методов также приводят к проверкам гипотез, использующим коэффициент правдоподобия. Поэтому они могут интерпретироваться как специальные случаи испытания Байеса, приведенного выше, и несомненно, являются оптимальными при определенных специфических условиях назначения стоимостей.

Первым из этих методов является классическая проверка двух альтернативных гипотез по методу Неймана—Пирсона. Однако обычно в рассуждениях, которые приводят к этой процедуре, избегают прямого использования понятия стоимостей и априорных вероятностей, а вводят вероятности ошибочных решений. Сначала вводят две нерандомизированные функции решения  $\delta(\gamma_0/\mathbf{V})$  и  $\delta(\gamma_1/\mathbf{V})$ . Затем определяются вероятности ошибок  $\alpha$  и  $\beta'(\mathbf{S})$  в соответствии с (26) как

$$\alpha = \int_{\mathbf{V}} F(\mathbf{V}/0) \delta(\gamma_1/\mathbf{V}) d\mathbf{V} — \text{вероятность ложной тревоги и}$$



$\beta'(S) = \int_{\Gamma} F(V/S) \delta(\gamma_0/V) dV$  — вероятность пропуска сигнала.

Процедура Неймана — Пирсона сводится к задаче минимизации  $\beta'$  при фиксированной вероятности ложной тревоги  $\alpha$  и данном сигнале  $S$ . Оказывается, что процедура, которая оптимальна в этом смысле, состоит в сравнении коэффициента правдоподобия с порогом  $K$ , зависящим от допустимого значения вероятности ложной тревоги  $\alpha$ . Следовательно, фиксирование  $\alpha$  и минимизация  $\beta'$  эквивалентны принятию определенного соотношения между стоимостями, зависящими от  $\alpha$ .

Процедура Неймана — Пирсона в наиболее широко применяемой форме пригодна только для случая простой альтернативы. В применении к задаче обнаружения она может использоваться только в том случае, когда класс сигналов  $\Omega_1$  состоит из одного элемента, т. е. возможен только один отличный от нуля сигнал  $S = S_1$  и  $w_1(S) = \delta(S - S_1)$ . Однако в [Л.23] проведено обобщение этой классической процедуры, с тем чтобы последняя включала априорные вероятности и более общие ситуации (более чем один сигнал в классе  $\Omega_1$ ), встречающиеся в задачах обнаружения.

Другой путь проверки односторонней альтернативы при фиксированном интервале времени наблюдения состоит в требовании минимизации общей вероятности ошибки  $q\alpha + p\beta$ . Наблюдатель, принимающий решение указанным образом, называется «идеальным наблюдателем» [Л. 16 и 23]. Как и в случае наблюдателя Неймана — Пирсона, в этом случае решается вариационная задача, причем оказывается, что она приводит к сравнению коэффициента правдоподобия с порогом  $K=1$ . Следовательно, мы получили специальный случай испытания Байеса с соотношением стоимостей, приводящих к значению порога  $K$ , равному 1, и соотношения (30), (33) могут использоваться при соответствующем их преобразовании. Тот факт, что как наблюдатель Неймана — Пирсона, так и идеальный наблюдатель приводят к проверке коэффициента правдоподобия типа (30), следует из требуемых ими оптимальных характеристик приемной системы. Так как эти методы наблюдения являются проверкой коэффициента правдоподобия, то они принадлежат к классу испытаний Байеса и, следовательно, имеют общие оптимальные свойства, принадлежащие этому классу.

#### 4. Минимаксное правило обнаружения

Имеется и другое решение задачи обнаружения, которое подобно двум обсуждавшимся выше является оптимальным в определенном смысле и также приводит к проверке коэффициента правдоподобия — минимаксное правило обнаружения.

Если априорные вероятности сигнала  $\sigma(S)$  неизвестны, то минимаксный критерий, обсуждавшийся в § 10 раздела II, обеспечивает возможность определения оптимальных характеристик системы. Минимаксная система бинарного обнаружения (и класс взаимно исключающих друг друга гипотез, рассматриваемый в настоящей работе), как мы уже видели, может рассматриваться как приемная система с проверкой коэффициента правдоподобия для некоторого наименее благоприятного априорного распределения вероятностей сигнала  $\sigma = \sigma_M^*$ . Как только это распределение сигнала найдено, система Байеса полностью определена. Для того чтобы найти это распределение, можно использовать то благоприятное обстоятельство, что приемная система с проверкой коэффициента правдоподобия при одинаковом условном риске для всех сигналов является минимаксной в соответствии с определениями минимаксной и байесовской приемных систем. Последовательность рассуждений кратко приводится ниже.

Во-первых, потребуем, чтобы условные вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала  $\alpha'$  и  $\beta' = \beta(S)$  [см. (26)] были результатом правила решения Байеса, которое в данном случае означает проверку коэффициента правдоподобия, при которой априорное распределение  $\sigma$  не определено. Тогда при задании различных априорных распределений сигнала  $\sigma$  различные вероятности ошибок  $\alpha'$ ,  $\beta'$  (для одного и того же порога  $K$ , который зависит только от назначенных стоимостей) и условные риски (25) для  $S=0$  и  $S \neq 0$  будут изменяться. Если один условный риск возрастет, то другой должен уменьшиться, что является следствием приемлемости и единственности данного правила Байеса, соответствующего нашему выбору распределения  $\sigma$ . Далее, если существует априорное распределение сигнала  $\sigma$ , для которого условные риски (25) одинаковы<sup>1</sup> для всех  $S$ , то мы получим требуемое минимаксное правило принятия ре-

---

<sup>1</sup> Не существует систем, для которых оба условных риска совместно могут быть меньше данного, так как это — байесовское испытание.

шения  $\delta_M^*$  и соответствующее ему наименее благоприятное априорное распределение сигнала  $\sigma_M^*$ . Напомним, однако, что если равенство условных рисков не имеет места, то это не значит, что не существует ни минимаксного правила, ни наименее благоприятного распределения, но для их отыскания необходимо найти другие методы.

В качестве примера разберем задачу обнаружения с простой альтернативой, когда  $p$  и  $q$  неизвестны, а  $w_1(S) = \delta(S - S_1)$ . Из (29) для испытания Байеса имеем:

$$\Lambda_n = \frac{pF(V/S_1)}{qF(V/0)} \geq K, \quad (35)$$

где  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = \beta$  — соответствующие вероятности ошибок (26).

Вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала  $\alpha$ ,  $\beta$  являются функциями априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала  $p$  и  $q$ , так как правило решения  $\delta = \delta_M^*$  зависит от  $p$  и  $q$  через  $\Lambda$ . Следовательно, при изменении  $p$  и  $q$  изменяются также  $\alpha$ ,  $\beta$  и граница критической области. Приравнивая условные риски (25) для того, чтобы определить наихудшие априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала  $p = p_M^*$ ,  $q = q_M^* = 1 - p_M^*$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} [1 - \alpha(p_M^*, q_M^*)] C_{1-\alpha} + \alpha(p_M^*, q_M^*) C_\alpha = \\ = [1 - \beta(p_M^*, q_M^*)] C_{1-\beta} + \beta(p_M^*, q_M^*) C_\beta, \end{aligned} \quad (36)$$

обеспечивающее отыскание решения.

С другой стороны, наименее благоприятное априорное распределение  $\sigma_M^*$  и, следовательно, минимаксное правило решения можно в принципе найти из основных соотношений (см приложение II). Таким образом, распределение сигнала  $\sigma_M^*$  является априорным распределением, которое максимизирует риск Байеса. Так как каждое правило решения Байеса связано с определенным априорным распределением сигнала, то это правило изменяется при изменении распределения сигнала для максимизирования риска. В результате применения указанного метода отыскание экстремума может оказаться весьма затруднительным. Однако минимаксный метод применим в тех случаях, когда

метод, основанный на постоянстве условного риска, непригоден.

В случае односторонней альтернативы, когда  $w_1(\mathbf{S})$  известно, а  $p$  и  $q$  — нет, можно применить эту же последовательность рассуждений, причем вместо соотношения (35) используется соотношение (29). Наконец, если  $w_1(\mathbf{S})$  не определено или если не даны ни  $p, q$ , ни  $w_1(\mathbf{S})$  (т. е. априорное распределение плотности вероятности сигнала  $\sigma(\mathbf{S})$  совершенно неизвестно наблюдателю), то соотношения (36) и (29) по-прежнему применимы в случае существования решения, хотя задача нахождения распределения вероятностей  $\sigma_M^*$  может оказаться чрезвычайно трудной. В любом случае точная оценка вероятностей ошибок  $(\alpha')_M^*$  и  $(\beta')_M^*$  по (26), если  $\delta = \delta_M^*$ , должна выполняться методами, описанными в § 5 раздела III и иллюстрированными рядом применений в последующих разделах. Вероятности ошибок  $(\alpha')_M^*$ ,  $(\beta')_M^*$  являются фиксированными величинами, не зависящими от действительных априорных вероятностей  $p, q$  и  $w(\mathbf{S})$ , заданных природой сигнала. Средний минимаксный риск  $R_M^*$  можно получить заменой  $R^*$  на  $R_M^*$  в (33) и заменой  $p, q$  и  $\alpha^*, \beta^*$  на  $p_M^*, q_M^* \dots$  и  $\alpha_M^*, \beta_M^*$ . Разность  $R_M^* - R^* \geq 0$  между Байесовским риском ( $\sigma$  известна) и минимаксным риском ( $\sigma$  — неизвестна) является, следовательно, некоторой мерой стоимости, которую мы должны платить за наше незнание природы сигнала.

## 5. Вероятности ошибок

Наша следующая задача состоит в отыскании способа определения различных вероятностей ошибок  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \alpha^*, \dots$  и т. д., которые имеют место для байесовых, не байесовых и минимаксных приемных систем. Начнем с рассмотрения класса Байеса и правил решения  $\delta^*(\gamma_0/\mathbf{V})$ ,  $\delta^*(\gamma_1/\mathbf{V})$ , определяемых в соответствии с (28). Для условных вероятностей ошибок I и II родов имеем:

вероятность ложной тревоги

$$\alpha^* = \int_{\ln K}^{\infty} dx \int_{\Gamma} F(\mathbf{V}/0) \delta(x - \ln \Lambda_n(\mathbf{V})) d\mathbf{V} = \int_{\ln K}^{\infty} Q_n(x) dx; \quad (37a)$$

вероятность пропуска сигнала

$$\beta^* = \int_{-\infty}^{\ln K} dx \overline{F(V/S)}_S \delta(x - \ln \Lambda_n(V)) dV = \int_{-\infty}^{\ln K} P_n(x) dx, \quad (376)$$

где второе соотношение делает ясным определение  $Q_n$  и  $P_n$ , а коэффициент правдоподобия  $\Lambda_n$  определен равенством (29). Преобразование  $\Lambda_n$  в  $x$  при помощи подстановки  $x = \ln \Lambda_n$  совершенно произвольно и при этом возможно

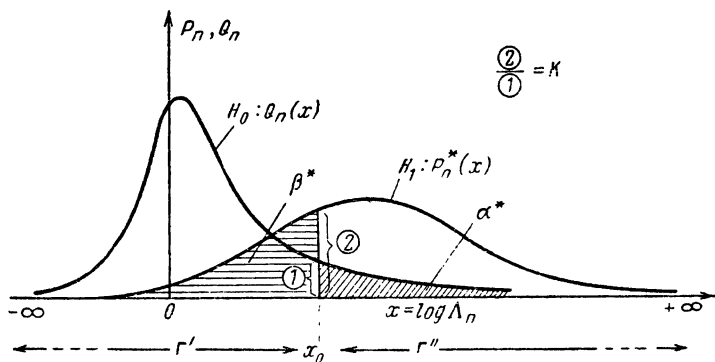


Рис. 5. Плотность распределения вероятности случайной величины.

использование любой монотонной функции  $x = f(\Lambda_n(V))$ . Натуральный логарифм, однако, представляется удобным в тех случаях, когда необходимо точное вычисление  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  (или  $\alpha$ ,  $\alpha'$ , ... и т. д.), а также и по другим соображениям [см. (33)]. Мы видим, что правило принятия решения  $\delta$  выбирает те области  $\Gamma$  из пространства наблюдения  $V$ , для которых  $\delta(\gamma/V) = 1$  в случае  $\alpha^*$ , при соответствующей интерпретации для  $\beta^*$ , когда  $\delta(\gamma_0/V) = 1$ .

Рис. 5 указывает две области  $x$  — пространства, когда  $x$  является случайной переменной  $x = \ln \Lambda_n$ , а  $P_n$  и  $Q_n$  являются плотностями вероятности для  $x$ , имеющими место соответственно при  $H_1$  и  $H_0$ . На рисунке обозначения 2 и 1 (в кружках) относятся к ординатам кривых распределения. Отметим, что выражения для вероятностей ошибок  $(\alpha')^*$  и  $(\beta')^*$  [см. (25) при испытании Байеса] следует из равенств (37a) и (376), если мы опустим знак усреднения по  $\Omega$ .

Указанный подход не ограничен в своем применении только оптимальными системами. Например, в случае реальной, не идеальной приемной системы с порогом  $K'$ , определяемым как наименьшее отношение стоимостей, и вычислительного устройства, представленного обычно функцией  $G_n(V) \neq \Lambda_n(V)$ , вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала становятся равными:

$$\alpha = \int_{\ln K'}^{\infty} dx \int_{\Gamma} F(V/0) \delta(x - \ln G_n(V)) dV = \int_{\ln K'}^{\infty} q_n(x) dx; \quad (38a)$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{\ln K'} dx \int_{\Gamma} \overline{F(V/0)}_S \delta(x - \ln G_n(V)) dV = \int_{-\infty}^{\ln K'} p_n(x) dx, \quad (38б)$$

где  $\beta'$  находится путем исключения среднего по  $\Omega$ , а  $p_n(x)$  и  $q_n(x)$  являются плотностями вероятности величины  $x = \ln G_n(V)$ .

## 6. Кривые обнаружения и сравнение приемных систем

Соотношения (37) при риске Байеса  $R^*$  (34) и (38) при среднем риске  $R$  позволяют сравнить свойства реальной и оптимальной приемной системы при одинаковых условиях работы, т. е. при одинаковых входных сигналах и статистических свойствах шума. Сначала отметим, что вероятности ошибок  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и  $\alpha$ ,  $\beta$ , которые входят в  $R^*$  и  $R$ , являются функциями  $a_0$  — отношения входного сигнала к шуму, определяемого как

$$a_0 = \{\bar{S}^2 / \bar{V}_N^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Назовем кривые среднего риска как функции от  $a_0$  (или любого другого подходящего параметра сигнала) кривыми обнаружения, и в терминах этих кривых будем проводить сравнение конкретных приемных систем. Рис. 6 показывает типичную ситуацию для идеальной и реальной системы обнаружения одинакового назначения. Сначала выберем некоторый порог  $K = K'$  и назначим некоторые стоимости (20) каждому возможному решению. Тогда, очевидно, средний риск  $R$  для всех  $a_0$  будет превышать соответствующий риск Байеса  $R^*$ .

Затем определим минимально обнаруживаемый сигнал [Л. 10] как наименьшее отношение сигнал — шум на входе

$(a_0)_{\min}$ , обеспечивающее средний риск  $R^*$ , который является некоторой определенной долей максимального среднего риска, т. е. определим пороговый сигнал как  $a_0$ , для которого  $R_0^* = \lambda R_{\max}$  ( $0 < \lambda < 1$ ) ( $R_{\max}$  в реальных условиях имеет место по крайней мере при  $a_0 = 0$ ). Теперь

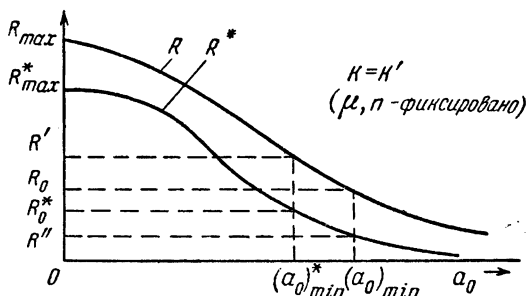


Рис. 6. Типичный средний и Байесов риск, показывающий минимально обнаруживаемый сигнал.

сравнение приемных систем может быть выполнено различными способами, примерами которых являются (см. рис. 6).

1.  $(a_0^*)_{\min \lambda}$  как функции  $(a_0)_{\min \lambda}$  (в общем случае  $R_0 \neq R_0^*$  для одних и тех же  $\lambda$ ).

2.  $(a_0^*)_{\min \lambda_1}$  как функции  $(a_0)_{\min \lambda_2}$  (для  $R_0^* = R_0$ , которое определяет  $\lambda_1, \lambda_2$ ).

3.  $R_0^*$  как функции  $R'$  (для одних и тех же  $(a_0^*)_{\min \lambda}$ ).

Другими кривыми обнаружения, также полезными для сравнения приемных систем, являются кривые риска, первоначально введенные Зигертом [Л. 16], которые связывают между собой вероятность принятия правильного решения  $W_1(a_0; R)$  и отношение сигнал — шум на входе  $a_0$  (26), или

$$W_1(a_0; R) = 1 - (\alpha q + \beta p). \quad (39)$$

Для оптимальных систем, таких, как наблюдатель Неймана—Пирсона или идеальный наблюдатель, мы можем заменить вероятности ложной тревоги  $\alpha$  и вероятность пропуска сигнала  $\beta$  соответствующими  $\alpha^*$  и  $\beta^*$  [соотношения (37)], так как эти приемные системы являются байесовским при определенных допущениях об отношении стоимостей, что было показано в § 3 раздела III. Условные вероятности  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть вычислены так же, как и ранее [см. (37) и (38)], и могут использоваться точно таким же

способом для сравнения приемных систем, причем минимальный обнаруживаемый сигнал в этом случае определяется как входной сигнал, приводящий к данному проценту правильных решений на выходе. Минимальный обнаруживаемый сигнал и в этом случае находится по кривым верности (39). Каждая точка этих кривых верности, рассматриваемая как функция  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствует точке на кривой риска, которая также является их функцией  $\alpha$  и  $\beta$ . Следовательно, сравнение в терминах «успеха» эквивалентно сравнению на основе риска (за исключением шкалы, устанавливающей абсолютные стоимости).

Добавочное описание и сравнение характеристик приемных систем, часто представляющее значительный интерес, дается поведением минимально обнаруживаемого сигнала как функции времени наблюдения или интегрирования  $T$ , пропорционального объему выборки  $n$ . Это соотношение находится из семейства кривых среднего риска (29) (см. рис. 6) или кривых верности (39), так как предполагается, что  $n$  имеет все возможные значения. Примеры, рассматриваемые в разделе III, представляют собой некоторую иллюстрацию к сказанному. В итоге отмечаем, что нормализованные кривые обнаружения можно использовать для определения минимально обнаруживаемых сигналов и проведения сравнения различных приемных систем [Л. 9, 10 и 23]. Однако общих унифицированных способов, охватывающих все аспекты такого сравнения, не существует, так как процесс нормализации сам по себе произволен.

Мы отмечаем окончательно, что при разработке оценки процедур бинарного обнаружения мы предполагали, что параметры сигнала или их средние величины, если они являются случайными, известны или могут быть получены по кривой обнаружения и что они введены в коэффициент правдоподобия  $\Lambda_n$  (29) так, чтобы масштаб  $\Lambda_n$  мог быть фиксированным и сравнения (30) могли проводиться при одинаковых величинах параметров. Однако может случиться, что эти «истинные» параметры, т. е. величины, действительно имеющиеся во время наличия сигнала, не известны заранее. В этом случае сравнение (30) еще может выполняться, но мы не способны однозначно определить вероятности ошибок  $\alpha$ ,  $\beta$  и, следовательно, не можем однозначно определить байесовский или средний риск. В этом случае вероятности  $\alpha$  и  $\beta$  можно вычислить, как и ранее, с помощью (37) или (38), но понятие веса  $\overline{F(V/S)}_\beta$ , входящее в выражение для вероятности пропуска сигнала  $\beta$ ,



содержит неизвестные параметры сигнала. В результате получается параметрическое выражение для  $\beta$  и  $R^*$ ,  $R$  и т. д. через эти неизвестные параметры. Для наших примеров и последующего обсуждения мы всегда будем предполагать, что истинные параметры сигнала известны и используются.

## 7. Структура оптимального бинарного устройства обнаружения

Дискретный случай получения выборок

В предыдущем разделе мы обсудили некоторые способы обнаружения сигнала, являющиеся при определенных обстоятельствах оптимальными, и показали, что все они в основном являются вариантами правила решения Байеса и, следовательно, основаны на сравнении коэффициентов правдоподобия. Следовательно, физические приемные системы, реализующие эти процессы, должны являться вычислительными устройствами, выполняющими сравнение коэффициента правдоподобия. Ранее мы упоминали, что вычислительные операции, необходимые для этого, в общем случае будут нелинейными. В этом разделе мы будем исследовать некоторые общие свойства этих вычислений для случаев обнаружения сигнала, имеющих значительную практическую важность и привлекающих соответствующее внимание. Такими случаями являются те, в которых сигнал и шум аддитивны. В этом смысле дискуссия, содержащаяся в следующих двух разделах, является более частной, чем это имело место в предыдущих разделах.

Дальнейшие рассуждения аналогичны изложенным ранее [Л. 9]. Ограничим наш анализ аддитивным и независимым шумом, поэтому

$$V = S + N; F(V/0) = \omega_n(V) \text{ и } F(V/S) = \omega_n(V - S),$$

где  $\omega_n$  — распределение (плотность вероятности) шума.

Как мы видели из (29) и раздела V, оптимальное бинарное устройство для обнаружения сигналов является вычислительным устройством, имеющим в нашем случае структуру, определяемую выражением:

$$\ln \Lambda_n = \ln \mu + \ln \overline{\omega_n(V - S)}_{s_1} - \ln \omega_n(V), \quad (40)$$

где  $\mu = \frac{P}{q}$ .

Так как обычно практически наиболее важные вопросы обнаружения возникают в связи с пороговыми или слабы-

ми сигналами, при которых интенсивность шума сравнима или даже значительно больше сигнала, когда он присутствует, то мы исследуем более детально ту обработку, которой подвергаются принятые данные наблюдения  $\mathbf{V}$  в этом случае. Начнем с разложения  $w_n(\mathbf{V})$  в степенной ряд в точке  $\mathbf{V} = 0$  [Л. 9, 31 и 48]:

$$w_n(\mathbf{V}) = A^{(0)} \left\{ 1 + \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{a}^{(1)} + (\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{a}^{(2)})^2 + (\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{a}^{(3)})^3 + \dots \right\}, \quad (41)$$

где  $\mathbf{a}^m$  является вертикальным столбцом, состоящим из элементов  $a_j^m$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), которые при развернутой записи образуют симметричную  $m$ -индексную величину:

$$\underbrace{a_j^{(m)} \cdot a_k^{(m)} \dots}_m = \frac{[A^{(0)}]^{-1}}{m!} \left\{ \frac{\partial}{\partial V_j} \cdot \frac{\partial}{\partial V_k} \dots \right\}_m w_n(\mathbf{V}) \big|_{\mathbf{V}=0} (A^{(0)} = w_n(0)). \quad (42)$$

Учитывая равенство (40), удобно записать ряд (41) в виде:

$$w_n(\mathbf{V}) = [\exp B^{(0)}] \exp \left\{ \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{b}^{(1)} + (\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{b}^{(2)})^2 + (\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{b}^{(3)})^3 + \dots \right\} \quad (43a)$$

где  $B^{(0)} = \ln A^{(0)}$  и  $b_j^{(1)} = a_j^{(1)}$ ;

$$b_j^{(2)} b_k^{(2)} = a_j^{(2)} a_k^{(2)} - \frac{1}{2} a_j^{(1)} a_k^{(1)};$$

$$b_j^{(3)} b_k^{(3)} b_l^{(3)} = a_j^{(3)} a_k^{(3)} a_l^{(3)} - a_j^{(2)} a_k^{(2)} a_l^{(2)} + \frac{1}{3} a_j^{(1)} a_k^{(1)} a_l^{(1)}. \quad (43б)$$

Последнее получается из сравнения рядов (41) и (43). Для аддитивного сигнала и шума в вышеприведенных выражениях можно заменить  $\mathbf{V}$  на  $\mathbf{V} - \mathbf{S}$ . Проведя группировку, получаем выражения, содержащие только  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}^2 \dots$  и т. д. Логарифмируя, находим согласно (40) и (43), что уточненная структура оптимальной приемной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_n = \ln \mu + [ & -\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}^{(1)} - 2(\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{b}^{(2)}) \overline{\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}^2} - 0(\mathbf{S}; \mathbf{V}^2, \mathbf{V}^3 \dots)] + \\ & + [ \overline{(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}^{(2)})^2} + \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{S}\mathbf{b}^{(1)})^2} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}^{(1)2}} + \\ & + 2(\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{b}^{(2)})^2 \overline{(\mathbf{S}\mathbf{b}^{(2)})^2} - 2(\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{b}^{(2)})^2 \overline{\mathbf{S}\mathbf{b}^{(2)2}} + 2(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}^{(1)})(\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{b}^{(1)})(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}^{(2)}) - \\ & - 2\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}^{(1)}(\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{b}^{(2)})\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}^{(2)} + 0(\mathbf{S}^2; \mathbf{V}; \mathbf{V}^2; \mathbf{V}^3)] + 0(\mathbf{S}^3), \quad (44) \end{aligned}$$

где исключены все члены, содержащие  $\mathbf{b}^{(3)}$ ,  $\mathbf{b}^{(4)}$  и т. д. Здесь  $0(\mathbf{S}^2; \mathbf{V}; \mathbf{V}^2; \mathbf{V}^3 \dots)$  означает, что следующий член содержит  $\mathbf{S}$  во второй степени и  $\mathbf{V}$  в первой, второй, третьей степени и т. д. Отметим, что как первые, так и вторые (и высшие) степени  $\mathbf{S}$  в общем случае содержат все  $\mathbf{b}^{(m)}$ .

В качестве количественной характеристики статистических свойств шума в большинстве физических случаев [Л. 5, 52 и 53] можно прятать нормальный закон распределения плотности вероятности:

$$\omega_n(\mathbf{V}) = 2\pi^{-\frac{n}{2}} \cdot (\det \mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) (\tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}_N) \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{V} - \bar{\mathbf{V}}_N) \right], \quad (45)$$

где  $\mathbf{K}$  является матрицей вторых моментов  $\| \bar{V}_i, \bar{V}_j - \bar{V}_{N_i} \bar{V}_{N_j} \|$ ;  $\bar{\mathbf{V}}_N = \bar{\mathbf{V}}$  и  $\tilde{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{V} \mathbf{V}}$  являются среднеквадратичной интенсивностью шума. Сравнение с (43) дает:

$$\left. \begin{aligned} B^{(0)} &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{V}}_N \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_N - \frac{1}{2} \ln [(2\pi)^n \det \mathbf{K}]; \\ \mathbf{b}^{(1)} &= \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_N; \\ \mathbf{b}^{(2)} \mathbf{b}^{(2)} &= \left( -\frac{1}{2} \right) \mathbf{K}^{-1}; \\ \mathbf{b}^{(m)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Структура оптимальной приемной системы (4) имеет вид:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_n &= \ln \mu + [\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{S}} - \tilde{\mathbf{V}}_N \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{S}}] + \\ &+ \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) \overline{\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}} + \frac{1}{2} \overline{(\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_N)^2} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_N^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \overline{(\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_N) (\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S})} - \frac{1}{2} \overline{(\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_N) \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}} + \frac{1}{2} \overline{(\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S})^2} - \\ &\left. - \frac{1}{2} \overline{(\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S})^2} \right] + 0(\mathbf{S}^3) \end{aligned} \quad (47)$$

с точностью до  $0(\mathbf{S}^2)$ .

Другим случаем, имеющим практический интерес, является  $n$ -мерное распределение Рэлея с независимыми выходными значениями  $\mathbf{V}$  [Л. 5 и 26], полученное из нор-

мального распределения для аддитивного и независимого шума. В этом случае имеем:

$$\omega_n(V)_N = \prod_{l=1}^n \psi^{-1} V_l e^{-V_l^2/2\psi};$$

$$\overline{\omega_n(V)}_{S+N} = \prod_{l=1}^n \psi^{-1} V_l e^{-V_l^2/2\psi - S_l^2/2\psi} I_0(S_l V_l / \psi) (V_l \geq 0). \quad (48)$$

Структура оптимальной приемной системы находится точно таким же способом:

$$\ln \Lambda_n = \ln \mu + \left[ -\frac{1}{2\psi} \overline{\tilde{S} S} \right] + \left[ \frac{1}{4\psi^2} \overline{(\tilde{S} S^2)} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{S} S}^2 \right] + 0(S^6) +$$

$$+ \text{след} \frac{\overline{(\tilde{S} V)^2}}{4\psi^2} + \frac{\text{след} (\tilde{S} V)^2 \text{ след} (S V)^2}{16\psi^4} - \frac{1}{4\psi^3} \text{след} (\tilde{S} V)^2 \tilde{S} S -$$

$$- \frac{1}{32\psi^4} \text{след} (\tilde{S} V)^2 \text{след} (\tilde{S} V)^2 + \frac{1}{8\psi^3} \text{след} (\tilde{S} V)^2 \tilde{S} S +$$

$$+ 0(S^6, V^2, V^4 \dots). \quad (49)$$

В общем случае преобразующее устройство для обнаружения сигналов, как можно видеть из формулы (44), обычно требует как нелинейных, так и линейных операций над входными данными  $V$ . При введении нормировки суть этих операций может быть оценена более просто. Нормируя шум, измеряем в величинах, кратных его

среднеквадратичному значению  $\psi^{\frac{1}{2}}$ . Для сигнала мы поступим следующим образом. Определим среднюю амплитуду

сигнала  $A_0$  на интервале наблюдения  $T$  как  $\frac{A_0^2}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt$

и нормируем сигнал  $S$ , полагая  $a_0 s = S/\psi^{\frac{1}{2}}$ . Здесь  $a_0 = A_0/(2\psi)^{\frac{1}{2}}$  является отношением  $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$  по напряжению на выходе приемной системы. Точно так же можно нормировать наблюдаемые данные  $V$ , полагая  $v = V/\psi^{\frac{1}{2}}$ . Если

это обозначение ввести в (44), то можно расположить различные члены по возрастающим степеням  $a_0$ . Проведем это, получаем:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_n = & \ln \mu + a_0 [-\overline{A_n^{(1)}(s)} + \overline{2A_n^{(2)}(v, s)} + 0(s, v, v^2, \dots)] + \\ & + a_0^2 [\overline{A_n^{(2)}(s, s)} + \frac{1}{2} \overline{[A_n^{(1)}(s)]^2} - \frac{1}{2} \overline{(A_n^{(1)}(S))^2} + \\ & + \overline{2A_n^{(1)}(s)A_n^{(2)}(v, s)} - \overline{2A_n^{(1)}(s)A_n^2(v, s)} + \overline{2[A_n^{(1)}(v, s)]^2} - \\ & - \overline{2A_n^{(2)}(v, s)^2} + 0(s^2, v, v^2, \dots)] + 0(a_0^3), \end{aligned} \quad (50)$$

где положено

$$\begin{aligned} A_n^{(1)}(s) &= \tilde{\mathbf{s}}\mathbf{b}^{(1)}; \\ A_n^{(2)}(v, s) &= (\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{b}^{(2)}) (\tilde{\mathbf{s}}\mathbf{b}^{(2)}); \\ A_n^{(2)}(s, s) &= (\tilde{\mathbf{s}}\mathbf{b}^{(2)})^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Выражение  $A_n^{(2)}(v, s)$  можно интерпретировать как обобщенную взаимную корреляцию сигнала с наблюдаемыми данными, а  $A_n^2(s, s)$  — как соответствующую обобщенную автокорреляцию самого сигнала. Если выполнять далее точное вычисление (49), то должны будут появиться взаимная корреляция и автокорреляция „высших порядков“ типа  $A_n^{(3)}(v^2, s)$ ,  $A_n^4(v^3, s)$  и т. д.

Выражение для  $\ln \Lambda_n$  в виде (50) имеет следующее преимущество: на практике обнаружение сигнала обычно вызывает затруднение лишь при слабых сигналах, т. е. когда  $a_0$  мало. Последний случай в теории связи назван случаем «порогового сигнала», когда поправками за счет членов порядка  $a_0^3$  или выше обычно можно пренебречь, однако в определенных случаях члены высших порядков необходимо учитывать для получения оптимальных характеристик [см. (33)].

Из соотношения (44) в его нормированном виде можно вывести достаточно общие и практические полезные заключения. Последние связаны с двумя типами сигнала, уже упоминавшимися ранее в § 2 раздела II, а именно, когерентным и некогерентным сигналами. В первом случае, т. е. при когерентном обнаружении, сигнал является функцией

времени  $s(t)$ , которая известна и определена по всему интервалу наблюдений  $(0, T)$ . Для такого сигнала среднее значение  $S$ , вообще говоря, не равно нулю (см. [Л. 9 и 31] и раздел 4), следовательно, содержит обычно член, пропорциональный  $a_0$ . Отсюда мы получаем важный результат: оптимальное когерентное (бинарное) пороговое обнаружение слабого сигнала в аддитивном шуме существенно зависит от первой степени входного отношения  $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$  по напряжению  $a_0$ , и

устройство оптимального обнаружения должно осуществлять получение обобщенных взаимных корреляций принятых данных с сигналом, т. е.  $(VA^{(1)}S)$ ,  $(V^2A^{(2)}S)$  и т. д.

Обобщенные взаимные корреляции  $A^{(2)}(v, s)$ ,  $A^{(3)}(v^2, s)$  являются операциями, которые должны выполняться идеальным вычислительным устройством обнаружения. Членами высших порядков типа  $A^{(3)}(v^2, s)$ ,  $A^{(4)}(v^3, s)$  и т. д. часто можно пренебречь, и вычисление простой взвешенной взаимной корреляции  $A^{(2)}(v, s)$  является хорошим приближением к операции, требуемой от вычислительного устройства обнаружения. Постоянные члены  $\ln \mu$ ,  $A^{(1)}(s)$  и др. в (50) являются „смещениями“, которые должны быть введены в вычисления при пороговом сравнении [см. (30)].

В ряде случаев может оказаться желательным оставить некоторые члены высшего порядка, что часто оказывается адекватным замене их на средние значения, соответствующие нулевой гипотезе  $S = 0$ .

Вторым типом сигнала, часто встречающимся на практике, является так называемый некогерентный сигнал. И в этом случае сигнал предполагается известной функцией времени  $s(t - \varepsilon)$ , но со случайной фазой  $\varepsilon$ . Предполагается обычно, что фаза  $\varepsilon$  равномерно распределена по некоторому данному интервалу  $T_0$  с плотностью  $\frac{1}{T_0}$ . Этот

тип сигнала может показаться весьма искусственным, но в действительности это совсем не так. Во многих случаях, таких, например, как радиолокация, получение когерентности между последовательными выборочными данными весьма затруднительно по аппаратным причинам, и на практике некогерентность сигналов встречается более часто, чем когерентность. В этом случае разность  $\ln \Lambda_n - \ln \mu$  в основном пропорциональна  $a_0^2$ . Мы можем, таким образом, сказать, что оптимальное некогерентное (бинарное)

пороговое обнаружение сигнала в аддитивном шуме зависит от отношения сигнал—шум по мощности  $\alpha_0^2$ , и устройство оптимального обнаружения осуществляет получение обобщенных автокорреляций принятых данных.

Далее имеет место зависимость от членов вида  $(vB^{(1)}(v))$   $(v^2B^{(2)}v)$  и т. д., где величины  $B^{(1)}$ ,  $B^{(2)}$  зависят только от шума и различных автокорреляционных функций сигнала. Как и ранее, членами, содержащими высшие степени, обычно пренебрегают, или заменяют их соответствующими средними значениями, и тогда оптимальное устройство обнаружения вычисляет простую, взвешенную автокорреляцию  $(vB^{(1)}(v))$ . Некогерентность, например, имеет место, если „тонкая структура“ или фаза несущей в модулированном колебании неизвестны, или если фаза  $\epsilon$  в случае широкой полосы имеет равномерное распределение и т. д. В других случаях фаза  $\epsilon$  может быть распределена неравномерно или  $T_s$  невелико по сравнению с  $T$ ; такие случаи мы назовем частично когерентными, и здесь в пороговую ситуацию должны включаться члены как с  $\alpha_0$ , так и с  $\alpha_0^2$ .

Может оказаться полезным иллюстрировать эти общие результаты их приложением к случаю гауссова шума с нулевым средним значением. В этом случае удобно следовать установившейся практике в обозначениях и использовать символ  $\Phi_n$  вместо  $A_n^{(3)}$ . Положим, для определенности в соотношениях (46) и (51):

$$-2A_n^{(2)}(v, s) = \Phi_n(v, s) = \tilde{S}K^{-1}S$$

и

$$-2A_n^{(2)}(s, s) = \Phi(s, s) = \tilde{S}K^{-1}S, \quad (52)$$

где  $k = \psi^{-1}K$  является нормированной матрицей вторых моментов распределения нормального шума.

Оптимальное устройство обнаружения (33а) имеет структуру

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_n = \ln \mu + \alpha_0 \overline{\Phi_n(v, s)} + \frac{\alpha_0^2}{2} \{ \overline{\Phi(v, s)^2} - \\ - \overline{\Phi_n(v, s)^2} - \overline{\Phi_n(s, s)} \} + 0(\alpha^3). \end{aligned} \quad (53)$$

Отсюда следует конкретное строение приемной системы, если задана матрица вторых моментов  $k^{-1}$ . Можно, напри-

мер, потребовать, чтобы шум был „белым“. Тогда  $k^{-1} = \|\delta_{ij}\|$  и  $\Phi_n(v, s) = \tilde{v}s$ ,  $\Phi_n(s, s) = \tilde{s}s$ .

Другим типом шума, который часто используется в анализе линий связи, является так называемый *RC*-шум, т. е. шум с нормированной функцией автокорреляции вида  $\rho = \exp(-\alpha_0 |\tau|)$ ,  $\tau = T/n$ . В этом случае можно точно найти  $k^{-1}$  [Л. 22] и получить:

$$\Phi_n(s, s) = s_1^2 + (1 - \rho^2)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} (\rho s_k - s_{k+1})^2. \quad (54)$$

Другие результаты можно найти в указанных выше работах.

Результат (51) является общей формулировкой закона, который в теории связи часто называется законом подавления модуляции, согласно которому при некогерентном приеме слабый сигнал на входе приемника (в аддитивном шуме) становится еще слабее на выходе; сигнал на входе пропорционален  $a_0$ , а на выходе пропорционален  $a_0^2$ . В этом случае обнаружение в основном зависит от величины энергии сигнала по отношению к энергии шума, принимаемого в продолжение периода наблюдения, в то время как для когерентного обнаружения, когда вход и выход пропорциональны  $\sim a_0$ , обнаружение определяется формой сигнала.

В случае некогерентного приема «тонкая структура» сигнала (фазовая информация) неизвестна, а известна только функция автокорреляции сигнала или интенсивность спектра сигнала по мощности в то время как в случае когерентного приема используются все детали временной структуры сигнала, т. е. амплитудный спектр сигнала вместе с имеющейся фазовой информацией (фазовый спектр сигнала). Примеры подавления модуляции, приводимые ранее [Л. 9, 12, 53 и 55], основывались на вычислении выходного отношения сигнал — шум и были разобраны для определенных приемников АМ и ЧМ и гауссового шума, соотношение (51) является более общим, так как здесь заранее не постулируется определенной системы приема, вся имеющаяся информация используется оптимальным образом, сигнал взят в общем виде, а шум произволен.



## 8. Структура оптимального бинарного устройства обнаружения; непрерывная выборка

В тех случаях, когда вместо дискретных выборок используется обработка непрерывных данных, общие методы построения оптимальной приемной системы остаются неизменными. Однако в этом случае мы должны совершить предельный переход  $n \rightarrow \infty$  в  $\Lambda_n$ ,  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и т. д., причем период наблюдения  $T$  сохраняется фиксированным. Как мы видели ранее, при пороговом обнаружении характеристики оптимального устройства обнаружения удовлетворительно представляются некоторым числом квадратичных форм (44) вида

$Q_n = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}$ , где  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  являются вектор-столбцами, а  $\mathbf{M}$  (следовательно, и  $\mathbf{M}^{-1}$ ) — симметричной несингулярной  $(n \times n)$  — матрицей. Искомый предел [ $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , ( $n\delta = T$ )] для непрерывной выработки может быть найден как обычно (см. приложение I).

Отправляясь от  $\tilde{\mathbf{z}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}$ , сначала запишем  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}$ ; тогда  $Q_n = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{z}$ . Предположим, что  $y(t)$  и конечное число ( $> 0$ ) его производных являются ограниченными и непрерывными функциями  $t$  и, что  $z(t)$  — ограниченная непрерывная функция  $t$  (добавочное требование: производные  $\dot{z}$ ,  $\ddot{z}$  и т. д. существуют при  $t = 0, T$ ). Полагая максимальный интервал  $(t_l < t < t_l + \delta)$  стремящимся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и  $\delta \rightarrow 0$  и находя  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} (l\delta = t_l) \rightarrow t$  для  $t$  в интервале  $0, T$ , формально полагаем, что

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left\{ \frac{x(t_l + \delta) - x(t_l)}{\delta} \right\} = \frac{dx(t)}{dt} = X(t); \quad (55)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \equiv Q = \int_{0-}^{T+} z(t) X(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) X_T(t) dt, \quad (56a)$$

где  $X_T = 0$  вне интервала  $(0 - < t < T +)$ , а  $X_T$  является решением интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(t, u) X_T(u) du = y(t), \quad (0 - < t < T +), \quad (56b)$$

где  $M(t, u)$  — предельная форма общего вида элемента

матрицы  $M_{kl}$  при условии, что такой предел существует и  $(t, u)$  пробегает континуум значений.

Мы подчеркиваем, что соотношения (5) и (56) являются совокупностью чисто формальных операций, которые удовлетворяются в рассматриваемых частных случаях. Принципиальная трудность состоит в доказательстве того, что  $y = Mx$  переходит в интегральное уравнение (56б), имеющее единственное и конечное решение [исключая  $\delta$ -функции и их производные в конечном числе точек в интервале  $(0 - < t < T +)$ ]. Такие решения требуют достаточно быстрого приближения общего вида элемента матрицы к определенной предельной величине таким образом, чтобы суммы могли быть заменены сходящимися интегралами. Можно показать [Л.29], что для матрицы вида  $M_{ij} = e^{-\alpha \delta |i-j|}$  прямая оценка  $x = M^{-1}y$  с переходом к  $y_{k+1}$  от  $y_k$  и  $\delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  дает значение  $Q$ , совпадающее с полученным другим способом из (55б). В нашей задаче природа ядра  $M(t, u)$ , по-видимому, такова, что она допускает определение единственного решения при переходе от дискретного к непрерывному получению выборок, хотя в настоящее время неизвестны условия, при которых такой переход был бы возможен в общем случае.

Применяя соотношения (55) и (56) к (49) и используя нормировку  $a_0 s = S/\psi^2$ ,  $v = V/\psi^2$ , получим окончательно соотношение, подобное (49а):

$$\begin{aligned} \ln \Lambda = \ln u + a_0 [ & - \overline{A^{(1)}(s)} + \overline{2A^{(2)}(v, s)} + 0(s; v, v^2, \dots)] + \\ & + a_0^2 [\overline{A^{(2)}(s, s)} + \left(\frac{1}{2}\right) \overline{A^{(1)}(s)^2} - \left(\frac{1}{2}\right) \overline{(A^{(1)}(s))^2} + \\ & + \overline{2A^{(1)}(s) A^{(2)}(v, s)} - \overline{2A^{(1)}(s) A^{(2)}(v, s)} + \\ & + \overline{2A^{(2)}(v, s)^2} - \overline{2(A^{(2)}(v, s))^2} + 0(s^2; v, v^2, \dots)] + 0(a_0^3), \end{aligned} \quad (57)$$

где по определению из (49б) и (52)

$$\left. \begin{aligned} A^{(1)}(s) &= \psi^{\frac{1}{2}} \int_{0-}^{T+} \dot{s}(t - \epsilon) b^{(1)}(t) dt; \\ A^{(2)}(v, s) &= \psi \int_{0-}^{T+} v(t) X(t, \epsilon) dt; \\ A^{(2)}(s, s) &= \psi \int_{0-}^{T+} s(t - \epsilon) X(t, \epsilon) dt; \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$X(t, \epsilon)$  является решением (56в),  $b^{(1)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{(1)}$  и  $M(t, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} [b^{(2)} b^{(2)}]^{-1}$ , а  $y(t) = s(t - \epsilon)$  — нормированный сигнал.

Для гауссового распределения шумов с нулевым средним значением справедливо равенство  $M(t, u) = -\left(\frac{1}{2}\right)K(t, u)$ , где  $K$  — функция вторых моментов. Основное интегральное уравнение (56б) принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t, u) X_T(u) du = s(t - \epsilon), \quad (0 - < t < T +), \quad (59)$$

где опущен множитель  $\left(-\frac{1}{2} A\right)$ . Видим, что оптимальная приемная система для обнаружения сигнала задается соотношением (53), причем  $\Phi(s, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(s, s)$  и т. д., как и в (52), имеем:

$$\left. \begin{aligned} A^{(2)}(s, s) &= -\left(\frac{1}{2}\right)\Phi(s, s); \\ A^{(1)}(s) &= 0; \\ A^{(2)}(v, s) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\Phi(v, s). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Для некогерентного приема, для которого  $\overline{s(t - \epsilon)} = 0$ , равенство  $A^{(2)} = 0$  и явление подавления модуляции снова становятся очевидными.

Величина  $X_T$  является обобщенной весовой функцией приемной системы, которая в простейшем случае может быть линейной пассивной цепью [Л. 31]. Ниже мы перечислим несколько точных решений интегрального уравнения (59), соответствующих случаям: 1) Белый шум интенсивности  $w_0$ ; 2) RC-шум и 3) шум, спектр которого сформирован резонансным LRC-контуром с высокой добротностью  $Q$  (см. приложение I). В этих случаях предполагается эргодичность, поэтому функция вторых моментов  $K(t, u)$  может быть заменена с вероятностью единица функцией автокорреляции  $K(t - u)$ . Итак, имеем:

1) Белый шум [Л. 31]

$$\left. \begin{aligned} K(t - u) &= \frac{W_0}{2} \delta(t - u) \\ (0 - < t < T +); \\ X_T(t, \epsilon) &= (2/W_0) s(t - \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (61a)$$

2) RC-шум [Л.25]

$$\left. \begin{aligned} K(t-u) &= \psi e^{-\alpha_0 |t-u|}; \\ \alpha_0 &= (RC)^{-1}; \end{aligned} \right\} \quad (616)$$

$$X_T(t, \varepsilon) = \left( \frac{1}{2} \psi \alpha_0 \right)^{-1} \{ [\alpha_0^2 s(t-\varepsilon) - \ddot{s}(t-\varepsilon)] + (-\dot{s} + \alpha_0 s)_{t-\varepsilon} \times \\ \times \delta(t-0) + (\ddot{s} + \alpha_0 s)_{t-\varepsilon} \delta(t-T) \}.$$

3) LRC-шум при добротности контура  $Q$  [Л. 31]

$$K(\tau) = \psi e^{-\omega_F |\tau|} \left[ \cos \omega_1 \tau + \frac{\omega_F}{\omega_1} \sin \omega_1 |\tau| \right];$$

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \omega_F^2), \quad \psi = W_0 \omega_0^2 / 8 \omega_F;$$

$$\omega_0^2 = (LC)^{-1}, \quad \omega_F = R/2L;$$

$$RC = 2\omega_F/\omega_0^2, \quad Q = \omega_0/2\omega_F \gg 1;$$

$$X_T(t, \varepsilon) = 2(W_0^{-1} \omega_0^{-4}) \{ [\omega_0^4 s + 2\omega_0^2 \ddot{s} + \\ + s^{(14)}]_{t-\varepsilon} + \delta(t-T) [-\ddot{s} - \omega_0^2 \dot{s}]_{T-\varepsilon} + \\ + \delta'(t-T) [-\ddot{s} - \omega_0^2 \dot{s}]_{T-\varepsilon} + \\ + \delta(t-0) [\ddot{s} + \omega_0^2 \dot{s}]_{-\varepsilon} + \delta'(t-0) [\ddot{s} + \\ + \omega_0^2 \dot{s}]_{-\varepsilon} \} \\ (\omega_F = 0).$$

Когда время интегрирования  $T$  велико по сравнению со средним временем флуктуации шума и сигнала,  $X_T$  в интегральном уравнении (59) можно аппроксимировать как  $X_\infty$ , а интервал наблюдения  $(0, T)$  — интервалом  $(-\infty, \infty)$ , и в этом случае могут быть осуществлены преобразования Фурье. Это означает, что „концевые эффекты“, представляемые  $\delta$ -функциями, в (61), исключаются.

Результаты большинства работ, выполненных ранее по обнаружению непрерывных сигналов, могут быть получены, если справедливы указанные допущения; их можно также оценить, опираясь на приведенные результаты. Чтобы сделать это, предположим, что исходный белый шум с ин-

тенсивностью  $W_0$  „окрашен“ фильтром, имеющим коэффициент передачи  $Y_k(j\omega)$ . Тогда преобразование Фурье  $Y_\infty(j\omega)$  для  $h(t) = \psi X_\infty(-t - \varepsilon)$  примет вид:

$$Y_\infty(j\omega) = 2\psi S_s^*(f)/w_0 |Y_k(j\omega)|^2,$$

где  $S_s(f)$  является сигналом, преобразованным по Фурье. Можно считать функции  $h_\infty$  и  $Y_\infty$  весовой функцией приемной системы и комплексной амплитудно-частотной и соответственно характеристикой оптимального фильтра. Частные виды оптимальных амплитудно-частотных характеристик  $Y_\infty$  были получены ранее различными авторами. В частности, для белого шума  $Y_\infty(j\omega) = 2\psi S_s^*(f)/w_0$ , что первоначально получено Норсом [Л. 12], а также Ван-Влеком и Миддлтоном [Л. 13], в то время как для „окрашенного“ шума, упоминавшегося выше,  $Y_\infty$  эквивалентно результатам Дворка [Л. 15] и Георга [Л. 18]. Решения (59) принадлежат к типу Винера—Хопфа для случая, когда интервал наблюдения принимается полубесконечным ( $0 < t < \infty$ ).

Конечно, для сильных сигналов не имеют места общие выражения, обсуждавшиеся в § 7 раздела III; результаты § 8 более общи. В случае сильных сигналов необходимо иметь дело с определенной шумовой статистикой и законами комбинации шума с сигналом. Однако так как случаи слабых сигналов являются более важными, последнее не является серьезным ограничением. Двумя основными техническими задачами, стоящими перед нами, являются: точная оценка характеристики приемной системы (см. выше) и подсчеты с помощью (44) вероятностей ошибок  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и т. д., которые позволят оценить приемную систему (см. раздел III, § 6).

Проиллюстрируем идеи предыдущего раздела несколькими примерами.

## 9. Примеры

### а) Простая радиолокационная задача

В качестве первого примера обнаружения сигналов рассмотрим некогерентное обнаружение сигнала с амплитудой  $A_0$  на фоне гауссова шума, когда последовательные наблюдения статистически независимы, так как их значения во времени берутся на расстояниях, обратно пропорциональных ширине спектра частот шума. В интервале  $(0, T)$

производится  $n$  наблюдений с периодом повторения, равным периоду повторения импульсов. Для малого отношения сигнал — шум  $a_0 = A_0 / (2\psi)^{1/2}$  и большого  $n$  соотношения (376), данные в [Л. 10], после усреднения по фазе  $\psi$  принимают вид:

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{matrix} \right\} = \left( \frac{1}{2} \right) \left\{ 1 - \Theta \left[ \frac{a_0^2 \sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \frac{\ln(K/\mu)}{a_0^2 (2n)^{1/2}} \right] \right\} (\mu = p/q), \quad (62)$$

где

$$\Theta(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-x^2} dx$$

является обычным интегралом вероятностей.

Как видно из (62), вероятности ошибок и минимальный средний риск  $R^*$  суть функции  $a_0^2 \sqrt{n}$ , что является характерной особенностью некогерентной системы. Рис. 6 дает значения  $R^* - K_0$  в единицах  $p(C_\beta - C_{1-\beta})$  как функции  $a_0^2 \sqrt{n}$  [см. (34)]. Заметим, что наиболее благоприятное значение  $R^*$  имеет место при  $K = \mu$ , а наименее благоприятное — при  $K = 1$ .

Задание стоимостей, конечно, точно определяет вид оптимальной приемной системы. Для определенных ситуаций эти стоимости могут быть фиксированы заранее, безотносительно к предполагаемому виду приемной системы, так что имеет место только один порог для оптимальной системы и не имеет смысла сравнивать его с другими приемными системами, имеющими иные пороги. С другой стороны, ряд ситуаций может допускать некоторый произвол в выборе стоимостей, и это имеет значение для сравнения результирующих характеристик, выбирая частные стоимости, что приводит к различным минимальным средним рискам и наименьшим значениям  $(a_0^*)_{\min}$ . Рис. 7 указывает, что при этих обстоятельствах порог  $K$  близок к величине  $\mu = p/q$  настолько, насколько возможно. Если  $\mu \neq 1$ , то для некогерентного сигнала и гауссова шума можно использовать наблюдателя Неймана — Пирсона (см. раздел III), хотя, строго говоря, в этом случае критерием является минимум среднего риска. Если  $\mu = 1$ , то можно использовать идеального наблюдателя (см. § 3 раздела III). Однако если критерием является минимум вероятности неправильного

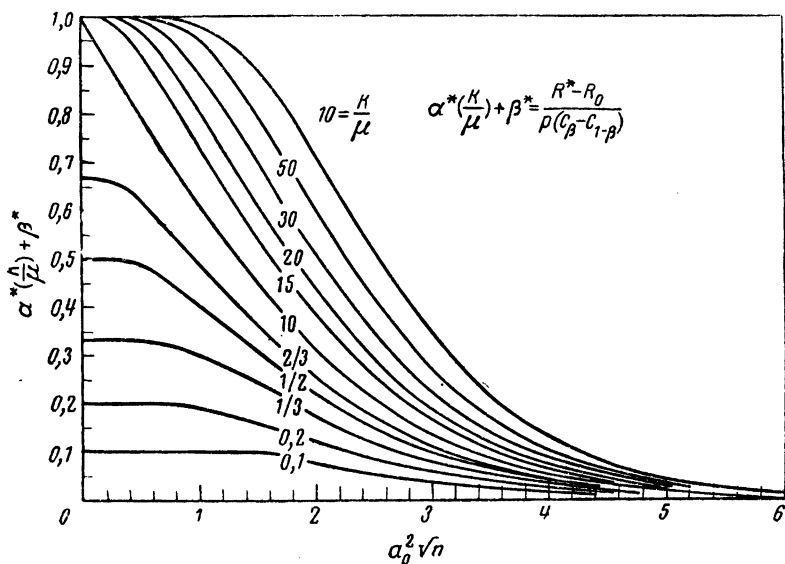


Рис. 7. Байесов риск для некогерентного обнаружения сигнала в гауссовом шуме.

решения, то идеальный наблюдатель является лучшим. (Рассуждения подобного рода могут повлиять на выбор самого критерия.)

#### б) Простая радиолокационная задача. Минимаксная система

Рассмотрим предыдущий пример, когда априорные вероятности  $p$  и  $q$  неизвестны, однако предполагается, что они существуют. Следуя процедуре в § 4 и используя (62) и (36), а также полагая  $(\alpha')^*_M = \alpha^*_M$ ,  $(\beta')^*_M = \beta^*_M$ , находим  $p^*_M$  и  $q^*_M$ .

На рис. 8 показаны результаты для типичного случая и дано сравнение их с байесовским риском для заданных  $p$  и  $q$ . Отсюда можно найти цену игнорирования априорных статистик или в терминах риска, или в терминах минимально обнаруживаемого сигнала  $\alpha_{0M}^1$  и  $\alpha_0^*$ . Цена увеличивается вместе с увеличением отклонения  $\mu_M^*$  от неизвестного нам истинного значения  $\mu$ .

<sup>1</sup> См. также рис. 4 в [Л. 10] и другие примеры.

# с) Дискретная некоррелированная выборка. Сравнение систем

Для иллюстрации сравнения между оптимальной и неоптимальной приемными системами подраздела 6 раздела III, рассмотрим простую радиолокационную схему обнаружения сигналов, приведенную Капланом и Мак-Фелем [Л. 27], когда даны  $n$  независимых наблюдений над огибающей импульсного высокочастотного сигнала, имеющего постоянную амплитуду в гауссовом шуме, причем сигнал считается имеющим место, если хотя бы одна из  $n$  амплитуд превзойдет некоторый порог  $K_c$ , а «чистый шум» — в противном случае. Такую систему мы назовем детектором с порогом для огибающей. Теперь для релейских статистик шума (48), соответствующих этому случаю, можно видеть <sup>+</sup>, что вероятности ошибок  $\alpha$  и  $\beta$  (48) равны:

$$\text{вероятность ложной тревоги} \quad \alpha = 1 - I(0, K_c)^n \quad (63a)$$

$$\text{и вероятность пропуска сигнала} \quad \beta = I(a_0, K_c)^n,$$

где положено

$$I(a_0, K_c) = \int_0^{K_c} R e^{-a_0 - R^2/2\psi} I_0(a_0 R / (\psi/2)^{1/2}) dR / \psi. \quad (63b)$$

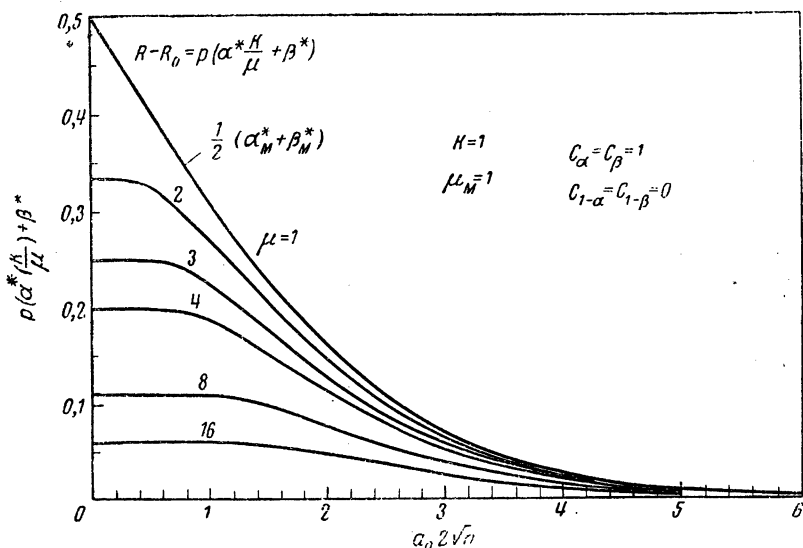


Рис. 8. Минимаксный и Байесов риск для некогерентного обнаружения сигнала в гауссовом шуме.



Зависимость вероятности пропуска сигнала  $\beta$  от отношения сигнал—шум по мощности  $\alpha_0^2$  изображена графически на рис. 9 для  $n = 10; 10^2; 10^3$  и  $\alpha = 10^{-6}$  (и определенных  $K_c$ ) и сопоставлена с помощью (34) с аналогичными зави-

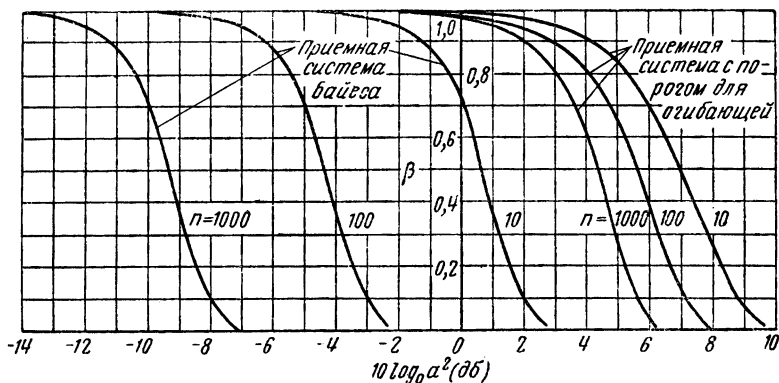


Рис. 9. Вероятность пропуска сигнала; сравнение приемной системы Байеса и приемной системы с порогом для огибающей.

симостями байесовской приемной системы и системы максимального коэффициента правдоподобия для одних и тех же вероятностей ложных тревог  $\alpha^* = \alpha$ . Для сравнения на основе риска предположим, что  $C_{1-\alpha} = C_{1-\beta} = 0$  и  $p = q = 1/2$ . Средний риск для какой-либо приемной системы из (34) имеет вид:

$$R^* = C_\beta [\alpha^* K + \beta^*] \quad (64)$$

и порог  $K = K_c$ , где положено  $\alpha = \alpha^* = 10^{-4}$ .

Для наших частных значений  $\alpha$  величиной  $\alpha^* K$  в (64) можно пренебречь для детектора с порогом по огибающей, что обуславливает лишь небольшой сдвиг кривых на рис. 9 в случае детектора, соответствующего коэффициенту правдоподобия. Исходя из этих соображений, мы будем трактовать ординаты как почти равные ненормированному среднему риску в единицах  $C_\beta$ , когда стоимости, соответствующие ошибкам первого и второго рода, связаны между собой так, что вероятность ложной тревоги равна  $\alpha^* = 10^{-4}$  для байесовской системы. Если, например, взять  $(\alpha_0)_{\min}$ , для которого средний риск не превосходит 10%, то увидим, что оптимальная приемная система дает выигрыш

в 6,8; 10,2 и 13,6 дб по сравнению с детектором с порогом для огибающей соответственно для  $n=10, 10^2, 10^3$ . Абсолютный уровень минимально обнаруживаемого сигнала увеличивается на 5 дб при увеличении  $n$  на каждые 10 дб, т. е.  $(a_0^2)_{\min}^* \sim n^{-1/2}$  для оптимальной системы, в то время как для системы с порогом для огибающей имеем приближенно  $(a_0^2)_{\min} \sim n^{-1/7}$ , что указывает на превосходство оптимальной приемной системы над последней.

#### д) Непрерывная, коррелированная выборка. Когерентные наблюдения

Как и в предыдущих примерах, рассмотрим оптимального наблюдателя с порогом ( $K \neq 1$ ), обнаруживающего полностью когерентный сигнал общего вида на фоне гауссова шума, т. е. сигнал класса  $\Omega_1$ , который содержит лишь одну компоненту с точно известной фазой  $\varepsilon$ . На основании (53) структура оптимальной приемной системы в этом случае задается для всех  $a_0 \geq 0$  как

$$\ln \Lambda_n = \ln \mu + \alpha_0 \Phi_n(v, s) - (a_0^2/2) \Phi_n(s, s). \quad (65)$$

Подставляя (65) в (37а) и (37б), найдем с помощью замены:

$$\delta(x - \ln \Lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x - \ln \Lambda_n)} d\xi / 2\pi, \quad (66)$$

что вероятности ошибок

$$\alpha^* = \int_{\ln(K/\mu) + a_0\Phi/2}^{\infty} Q_n(y) dy, \quad \beta^* = \int_{\ln(K/\mu) + a_0\Phi/2}^{\infty} P_n(y) dy, \quad (67)$$

где плотности вероятности  $\ln \Lambda_n$  имеют вид:

$$Q_n(y) = \frac{e^{-y^2/2a_0^2\Phi}}{(2\pi a_0^2\Phi)^{1/2}}, \quad P_n(y) = \frac{e^{-(y - a_0^2\Phi)^2/2a_0^2\Phi}}{(2\pi a_0^2\Phi)^{1/2}} \quad (68)$$

и  $\Phi \equiv \Phi_n(s, s)$  для дискретной выборки или согласно (58) и (59) для непрерывной выборки имеют вид:

$$\Phi = \psi \int_{0-}^{T+} s(t - s_0) X_T(t, s_0) dt, \quad (69)$$

где  $X_T$  является решением интегрального уравнения (59) [см. например (61а), (61б), (61в)]. Вероятности ошибок  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  задаются формулами (62) с заменой  $a_0^2 \sqrt{n}$  на  $a_0 \Phi^{1/2}$ , а минимальный средний риск  $R^*$  вычисляется по формуле (34). Заметим, что для когерентного обнаружения  $(a_0^2)_{\min} \sim \sim T^{-1} \sim \frac{1}{n}$ , так как  $\Phi \sim T \sim n$  этот результат можно сравнить с  $(a_0^2)_{\min} \sim n^{-1/2}$  в примере (1), приведенном выше.

Вычислительная операция здесь является линейной относительно  $\mathbf{v}$ :  $\Phi_n(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{s}$  [см. (52) или (69) и (59)].

Пусть теперь рассматривается простая, неидеальная приемная система с преобразованием данных согласно  $\Phi'_n(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{s}$ , т. е. приемная система, в которой принятое колебание можно рассматривать как чисто случайный процесс. Подставим  $\Phi'_n$  на место  $\Phi_n$  в (65) и проведем те же преобразования, что и для вычисления  $\alpha^*$  и  $\beta^*$ . Тогда получим окончательно для вероятностей ошибок:

$$\left\{ \frac{\alpha}{\beta} \right\} = (1/2) \left\{ 1 - \Theta \left[ \frac{a_0 \Phi_0}{2 \sqrt{2 \Phi_k^{1/2}}} \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \frac{\ln K/\mu}{\sqrt{2 a_0 \Phi^{1/2}}} \right] \right\}, \quad (70)$$

где  $\Phi_0 = \tilde{\mathbf{s}} \mathbf{s}$ ,  $\Phi_k = \tilde{\mathbf{s}} \mathbf{k} \mathbf{s}$  для дискретной выборки.

Для непрерывной выборки отношение  $\Phi_0/\Phi_k^{1/2}$  имеет вид:

$$\Phi_0/\Phi_k^{1/2} = \int_0^T s(t)^2 dt / \left\{ \int_0^T \int_0^T s(t) k(t, u) s(u) dt du \right\}^{1/2}, \quad (71)$$

причем  $\Phi_k \sim n = 2BT \gg 1$ , где  $B$  — эффективная ширина спектра частот шума. Средний риск  $R$  здесь вычисляется по формуле (34).

Сравнение этой приемной системы с оптимальной можно теперь провести на основе равенства рисков или порогов, т. е. ( $R = R^*$ ) или  $\alpha = \alpha^*$ ,  $\beta = \beta^*$ ,  $K' = K$  (см. § 6 раздела III).

Если  $K/\mu = 1$ , то минимально обнаруживаемые сигналы в этих двух случаях связаны соотношением:

$$\begin{aligned} (a_0)_{\min} &= (a_0^*)_{\min} \frac{(\Phi_n \Phi_k)^{1/2}}{\Phi_0} = (a_0^*)_{\min} \frac{(\tilde{\mathbf{s}} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{s})(\mathbf{s} \mathbf{k} \mathbf{s})^{1/2}}{\tilde{\mathbf{s}} \mathbf{s}} = \\ &= (a_0^*)_{\min} \cdot \gamma^{(0)}, \end{aligned} \quad (72)$$

где, основываясь на обобщенном неравенстве Шварца, можно показать, что  $(\tilde{s}k^{-1}s)(\tilde{s}ks) \geq (\tilde{s}s)^2$ , так что, как и следовало ожидать, для неидеальной приемной системы

$$(a_0)_{\min} \geq (a_0^*)_{\min}.$$

Для непрерывной выборки находим, что

$$\gamma^{(0)} \equiv \frac{\sqrt{\Phi \Phi_k}}{\Phi_0} = \frac{\left\{ \int_0^T s(t - \varepsilon_0) X(t, \varepsilon_0) \int_0^T s(t - \varepsilon_0) k(t, u) s(u - \varepsilon_0) dt du \right\}^{1/2}}{\int_0^T s(t - \varepsilon_0)^2 dt}. \quad (73)$$

Для  $RC$ -шума, синусоидального сигнала  $s(t) = \sqrt{2} \cos \omega_0 t$  и фазы  $\varepsilon_0 = 0$  отношение (57) переходит в (61). При большом времени интегрирования набор решений  $\gamma^{(0)} \rightarrow 1$ , как и следовало ожидать, так как при этом влиянием корреляции между выборочными значениями можно пренебречь. Выборочные значения принятых данных делаются независимыми.

С другой стороны, при конечном  $T a_0$  (или  $T \omega_0$ ,  $\omega_0 \approx a_0$ ), [ср. с (61)] корреляция существенна и  $\gamma^{(0)} > 1$ . Оптимальная система принимает это в расчет, в то время как неидеальная приемная система платит штраф за пренебрежение априорной информацией.

Подобным образом можно исследовать много других примеров, включающих важные случаи некогерентных пороговых детекторов, но ограниченность места не дает возможности детального рассмотрения этого вопроса<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Например, оптимальное когерентное обнаружение синусоиды в гауссовом шуме наблюдателем Неймана — Пирсона с точными и приближенными выражениями для  $(a_0)_{\min}^*$  иллюстрировано на рис. 8 в [Л. 9] и обсуждено в § 3 там же). К сожалению,  $\sigma_n^2$  в (48) помножено на 2, так что кривые минимально обнаруживаемого сигнала на рис. 3 меньше на 3 дБ, и кривые для «случайной выборки», вычисленные для «белого» шумового фона вместо  $RC$ -шума для других кривых.

Некоторые другие примеры содержатся в [Л. 23 и 30].

## 10. Потери информации при бинарном обнаружении

Так как в этом случае требуется принять определенное решение, то всегда теряется некоторая информация, когда принимается решение. Если  $S$  является входным сигналом, не искаженным шумами, и если  $\tilde{V}$  — принятое колебание, искаженное шумами, то неопределенность  $H(S/V)$  в  $S$  при данном  $V$  согласно [Л. 3 и 7] имеет вид:

$$H(S/V) = p(1-\beta) \ln \frac{(1-\beta)}{p(1-\beta)+q\alpha} + p\beta \ln \frac{\beta}{p\beta+q(1-\alpha)} + \\ + q\alpha \ln \frac{\alpha}{p(1-\beta)+q\alpha} + q(1-\alpha) \ln \frac{(1-\alpha)}{p\beta+q(1-\alpha)}, \quad (74)$$

где вероятность пропуска сигнала  $\beta$  равна:

$$\beta = \int w_1(S) \beta(S) dS.$$

Соответствующие  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  [см. (37)] могут использоваться вместо вероятностей  $\alpha$  и  $\beta$  для оптимальной системы. Если класс сигналов состоит из одного члена вероятности,  $\alpha$  и  $\beta$  и заменяются на  $\alpha'$ ,  $\beta'$ . Соотношение (26) и рис. 6 [Л. 10] указывает, что неопределенность уменьшается с ростом  $\alpha$ ,  $\sqrt{n}$  (см. § 9), когда  $p=q=1/2$ . Заметим, что системы, для которых байесовский риск минимизируется, не обязательно имеют минимальную неопределенность, хотя в примере, обсуждавшемся в § 6 раздела III, минимизируются одновременно оба средних риска и неопределенность. Этот результат является свойством структуры сигнала и статистики шума и не зависит от выбранного критерия.

## 11. Замечания о последовательном обнаружении

Как показано выше, использование теории статистических решений для обнаружения сигналов предусматривает фиксированный период наблюдения. Однако часто удобен, а при некоторых обстоятельствах даже приносит пользу в смысле уменьшения насколько возможно объема выборки или среднего риска отказ от требования фиксировать объем выборки и возможность последовательно выносить решение от наблюдения к наблюдению. Процедура обнаружения при этом изменяется с учетом случайной природы объема выборки (или периода наблюдения); теория последовательных испытаний развита впервые Вальдом [Л. 57] и

развивается дальше в последнее десятилетие [Л. 5]; доказательство оптимальной природы некоторого класса таких испытаний было впоследствии найдено Вальдом и Вольфовицем [Л. 58]. Большое число приложений последовательного метода наблюдения к задачам связи изучено в [Л. 6, 23 и 30].

#### IV. СИСТЕМЫ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ СИГНАЛОВ, МИНИМИЗИРУЮЩИЕ СРЕДНИЙ РИСК

Как было указано в § 2 раздела II, задача воспроизведения сигналов в теории приема сигналов соответствует оценке параметров в статистике. В этом случае сигнал  $S$  является параметром плотности распределения  $F(V/S)$ , определяющим появление принимаемых данных  $V$ , причем рассматривается оценка в точке или прямая оценка каждой компоненты сигнала  $S$ , а не оценка по доверительным интервалам.

Как и ранее (см. § 4 раздела II), мы обозначаем через  $\gamma$  решение, которое нужно составить относительно сигнала  $S$ , и замечаем, что если решение  $\gamma$  является оценкой сигнала  $S$ , то пространство сигнала  $\Omega$  и пространство  $\Delta$  (рис. 2) имеют одинаковую структуру. Мы принимаем, что каждое пространство содержит континуум точек и представляет собой конечную замкнутую область, которую, однако, можно взять настолько большой, что практически ее можно будет считать бесконечной. Функция стоимости  $F_1 = C(S, \gamma)$  (4), которую следует применять при исследовании риска, задается, как и раньше, в соответствии с условиями задачи и определяет конкретную структуру системы. Теорема Ходжеса и Лемана [Л. 46] гласит:

Если пространство решений  $\Delta$  есть действительная прямая и  $C(S, \gamma)$  есть выпуклая функция<sup>1</sup> от  $\gamma$  при всяком  $S$ , то для любого правила решения  $\delta$  можно найти нерандомизированное правило принятия решения, у которого риск не больше, чем риск правила решений  $\delta$  при любых сигналах  $S$ , принадлежащих пространству  $\Omega$ .

Эта теорема относится лишь к одномерным сигналам  $S$  и наборам решений  $\gamma$ , но ее можно распространить и на многомерные векторы [Л. 1 и 2].

<sup>1</sup> Действительная функция  $g(x)$  является выпуклой в интервале  $(a, b)$ , если при любом  $x$  и  $y$  в интервале  $(a, b)$  и любом числе  $\rho, 0 < \rho < 1$  имеет место неравенство

$$\rho g(x) + (1 - \rho) g(y) \geq g(\rho x + (1 - \rho) y).$$

Если правило решения нерандомизированное, то из (12) имеем:

$$\delta(\gamma/V) = \delta(\gamma - \gamma_*(V)),$$

где  $\gamma_*(V)$  представляет собой функциональную операцию, производимую приемной системой над принимаемыми данными  $V$ , а  $\gamma$  представляет собой оценку параметра сигнала, даваемую системой. Таким образом,  $\gamma_*(V)$  есть величина, которую следует выбрать оптимальным образом, в данном случае так, чтобы обеспечить минимум среднего риска. Обозначаем через  $S$  оцениваемую величину; во многих случаях нужна не оценка полной сигнальной функции, а оценка лишь одного из параметров сигнала (причем остальные параметры сигнала известны) или значения сигнала в данный момент времени.

Напишем для оцениваемого значения сигнала выражение  $S_\lambda = S(t_\lambda)$ , где  $\lambda$  может принимать дискретное (или непрерывное) множество значений. Мы различаем три основных класса процесса воспроизведения сигналов в зависимости от соотношения во времени между  $\lambda$  и моментами выборки принимаемых данных  $V$ :

а) Сглаживание или интерполяция сигнала [Л. 1 и 4]

В этом случае  $t_\lambda$  при всех  $\lambda$  находится в интервале наблюдения  $(0, T)$ , но не совпадает ни с одним из моментов,  $t_k$ , ( $k=1, \dots, n$ ) наблюдения принимаемых данных  $(V_1, \dots, V_k, \dots, V_n)$  и элементов сигнала  $(S_1, \dots, S_k, \dots, S_n)$ , на которых основана оценка сигнала  $S$ . Здесь  $\lambda$  может принимать одно значение или целый ряд значений в интервале наблюдения  $(0, T)$ ; однако обычно нужно определить лишь одно значение  $S_\lambda$  на основании  $V$  и  $S$ .

б) Простая или одновременная оценка.

В этом случае момент времени  $t_\lambda$  есть один (или несколько) из моментов  $t_k$  получения данных, для которых известна априорная информация относительно  $S$ . Таким образом,  $t_\lambda$ , как и в первом случае, находится в интервале наблюдения  $(0, T)$ , и воспроизведение сигнала состоит в получении надлежащих оценок сигнала  $S = (S_1, \dots, S_k, \dots, S_n)$ , основанных на

$$V = (V_1, \dots, V_k, \dots, V_n).$$

в) Предсказание или экстраполяция сигнала [Л. 4].

В этом случае  $t_\lambda$  находится вне интервала наблюдения  $(0, T)$ , вне которого выборка принятых данных не произво-

дится и нам нужно составить оценку сигнала  $S$  на основании  $S$  и  $V$ , имеющих место в интервале наблюдения  $(0, T)$ .

Исходя из (7) и (12), мы имеем поэтому для среднего риска:

$$R(\sigma, \delta) = \int_{\mathcal{S}} dS_{\lambda} \int_{\mathcal{V}} dV C(S, S_{\lambda}; \gamma_{\sigma}) \sigma(S, S_{\lambda}) F(V/S), \quad (75)$$

где  $F(V/S)$  не содержит  $S_{\lambda}$ , если  $t_{\lambda} \neq t_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) или если  $t_{\lambda} < 0$ , или  $t_{\lambda} > T$ , как это имеет место при предсказании сигнала. (Если  $t_{\lambda} = t_k$ , то  $S_{\lambda}$  входит в  $S$ .)

Рассмотрим некоторые примеры.

### 1. Байесовское воспроизведение сигнала при простой функции стоимости (простая оценка)

Определим теперь оптимальную процедуру воспроизведения сигнала, обеспечивающую минимум среднего риска (75), если выбрана простая функция стоимости (стоимости правильных оценок полагаем равными  $-\infty^*$ , а все стоимости неправильных оценок имеют одно и то же значение  $C_0 > 0$ , независимо от того, как велика ошибка). Применим простую оценку ( $t_{\lambda} = t_k$ ) и тогда получим

$$C(S, S_{\lambda}; \gamma) = C(S; \gamma) = C_0 \{A_n - \delta(\gamma - S)\}. \quad (76)$$

---

\* Заметим, что для дискретных пространств сигналов дельта-функция в (76) заменяется выражением  $A_n \delta_n S$ , где  $\delta_n S$  — дельта-функции Кронекера, и тогда стоимость правильных оценок равна нулю, а стоимость неправильных оценок равна  $A_n C_0$ . Произвольная постоянная  $A_n$  безразмерна и для удобства берется равной единице. Для непрерывных пространств сигнала, рассматриваемых здесь,  $A_n$  имеет размерность дельта-функции в (76), т. е.  $[S]^{-n}$ . Функция стоимости (76) вводится нами лишь эвристически (т. е. путем догадки), но эта формула может быть обоснована соответствующим переходом от дискретного к непрерывному пространству сигналов. Обычно для непрерывного пространства  $A_n$  выбирают так, что средний риск равен нулю или положителен; на основании (78б) это значит, что

$$A_n \geq \int_{\mathcal{V}} \sigma(\hat{S}) F(V/\hat{S}) dV,$$

где  $S = \hat{S}(V)$ . Заметим, что при соответствующем выборе единиц измерения  $C_0$  средний риск  $R$  можно сделать безразмерным.



Подставляя функцию стоимости (76) в выражение (7) для среднего риска, получим:

$$R(\sigma, \delta) = C_0 \{A_n - \int_{\Gamma} D(V; \sigma, \delta) dV\} \quad (77a)$$

при

$$D(V; \sigma, \delta) = \int_{\Delta} \sigma(\gamma) F(V/\gamma) \delta(\gamma - S) d\gamma. \quad (77b)$$

Очевидно, средний риск  $R$  минимален, когда  $D$  является наибольшим, поэтому мы выбираем правило решения  $\delta(\gamma/V)$  так, чтобы получить максимум  $D$ . Мы замечаем, что оптимальное правило решения  $\delta$  получается, если мы выберем правило  $\delta(\gamma/V) = \delta/\gamma - \hat{S}(V)$ , где в правой части равенства стоит дельта-функция Дирака, а  $\hat{S}$  — оценка сигнала по максимальному правдоподобию, определяемая условием:

$$\sigma(\hat{S}) F(V/\hat{S}) \geq \sigma(S) F(V/S). \quad (78a)$$

Байесовский минимальный средний риск в этом случае равен:

$$R^* = C_0 \{A_n - \int_{\Gamma} \sigma(\hat{S}) F(V/\hat{S}) dV\}. \quad (78b)$$

Другими словами, байесовская оценка сигнала  $S$  для простой функции стоимости есть максимальная (безусловная) оценка по максимальному правдоподобию сигнала  $S$  или значение сигнала, дающее максимум совместной плотности вероятности  $S$  и  $V$ , рассматриваемой как функция сигнала  $S$  при фиксированном  $V$ . Эта оценка зависит от  $V$ . Если все сигналы априори равновероятны, то оценка является обычной оценкой условного правдоподобия. Во всех случаях эта оценка соответствует максимальному значению апостериорной вероятности сигнала для данного  $V$ . Заметим, что при воспроизведении сигнала, как и при обнаружении сигнала (см. раздел III), байесовская приемная система критична по отношению к апостериорной статистике сигнала.

Воспроизведение сигнала по максимальному правдоподобию рассматривается более подробно ниже в § 3 раздела IV.

## 2. Байесовское воспроизведение сигнала при квадратичной функции стоимости (простая оценка)

Рассмотрим опять случай  $t_\lambda = t_k$ , когда все  $t_k$  при  $k = 1, \dots, n$  принадлежат интервалу наблюдения  $(0, T)$  и когда функция стоимости принимается равной:

$$C(S, S_\lambda; \gamma) = C(S, \gamma) = (S - \gamma)(S - \gamma). \quad (79)$$

Здесь  $C$  — выпуклая функция, так что можно избежать неудобства, связанного с рассмотрением как рандомизированных, так и нерандомизированных правил решения. Эта функция стоимости есть квадрат «расстояния» между истинным значением сигнала и оценкой сигнала. Главные достоинства этой функции стоимости, выраженной через среднеквадратичную ошибку (называемую сокращенно «квадратичной» функцией стоимости), при исследовании процесса воспроизведения сигналов следующие: во-первых, она удобна математически и, во-вторых, она в достаточной мере учитывает, что большие ошибки обычно имеют большее значение, чем малые. Кроме того, как мы сейчас увидим, она приводит в некоторых случаях к ранее известным способам воспроизведения сигналов [Л. 4 и 32], основанным на критерии наименьшей среднеквадратичной ошибки для линейных систем (см. § 4 раздела IV), которые мы хотим рассмотреть теперь с точки зрения теории статистических решений.

Операция байесовского воспроизведения сводит к минимуму средний риск  $R$ . Условный риск (6) при функции стоимости (79) и для правила решения  $\delta = \delta(\gamma - \gamma_\sigma(V))$  равен:

$$r(S, \gamma_\sigma) = \int_{\Gamma} \|S - \gamma_\sigma(V)\|^2 F(V/S) dV, \quad (80)$$

где, как и раньше, нужно различать оценочную функцию  $\gamma_\sigma(V)$  от оценки  $\gamma$ . Средний риск находится сразу из (7):

$$R(\sigma, \delta) = \int_{\Gamma} dV p(V) \int_{\Sigma} \|S - \gamma_\sigma(V)\|^2 p(S) dS, \quad (81a)$$

где плотности вероятности выражены как

$$p(V) = \int_{\Sigma} \sigma(S) F(V/S) dS; \quad p(S/V) = \sigma(S) F(V/S) / p(V). \quad (81b)$$

Поскольку  $p(V)$  всегда положительна, байесовская оценка  $\gamma_0^*(V)$  получается при сведении к минимуму второго

интеграла в (81a) посредством выбора величины  $\gamma_\sigma$ . Мы получаем:

$$\gamma_\sigma^*(V) = \int_{\Omega} S p(S/V) dS = \frac{\int_{\Omega} S \sigma(S) F(V/S) dS}{\int_{\Omega} \sigma(S) F(V/S) dS}. \quad (82)$$

Байесовская оценочная функция при стоимости, равной среднеквадратичной ошибке, представляет собой условное математическое ожидание сигнала  $S$  при данном  $V$  (75).

Поскольку обе части уравнения (82) суть векторы, уравнение (82) распадается на  $n$  скалярных уравнений между  $n$  компонентами величин  $\gamma_\sigma^*$  и  $S$ . Так, например,  $k$ -я компонента оценочной функции (82) равна:

$$\gamma_\sigma^*(V_1, \dots, V_n)_k = \int \dots \int S_k p \times \\ \times (S_1, \dots, S_n/V_1, \dots, V_n) dS_1 \dots dS_n \quad (k=1, \dots, n). \quad (83)$$

Тот же результат, конечно, получится, если вместо (79) для каждой компоненты брать  $C = (S_k - \gamma_k)^2$ , т. е. если требуется байесовская оценка одной компоненты сигнала  $S$ , а не общая векторная оценка. Равенство  $C = (S_k - \gamma_k)^2$  является следствием квадратичности заданной функции стоимости и в общем случае, очевидно, не будет справедливо. Из (81a) и (82) находим байесовский риск для этого случая

$$R^* = \int_{\Omega} dS \int_{\Gamma} dV \|S - \gamma_\sigma^*(V)\|^2 \sigma(S) F(V/S). \quad (84)$$

Можно легко показать некоторые другие свойства байесовской оценочной функции. Например, если на вход подается фиксированный сигнал  $S_1$ , так что  $\sigma(S) = \delta(S - S_1)$ , то байесовская оценочная функция запишется как  $\gamma_\sigma^*(V) = S_1$ ; она будет, следовательно, условно несмещенной, т. е.

$$\int_{\Gamma} \gamma_\sigma^*(V) F(U/S) dV = S_1. \quad (85)$$

Условный риск (80) для любой несмещенной оценочной функции  $\gamma_\sigma(V)$  равен в данном случае условной дисперсии  $\gamma_\sigma(V)$ .

Для среднего риска (81a) можно написать:

$$R(\sigma, \gamma_\sigma) = \int_{\mathcal{S}} \text{Var } \gamma_\sigma(\mathbf{V}) \sigma(\mathbf{S}) d\mathbf{S}. \quad (86)$$

Поскольку средний риск  $R(\sigma, \gamma_\sigma)$  является наименьшим для байесовской оценочной функции, из (86) следует, что байесовская оценочная функция при квадратичной функции стоимости имеет наименьшую среднюю дисперсию из всех несмещенных оценок.

В тех случаях, когда сигнал и шум представляют собой эргодические процессы, так что статические средние можно заменить соответствующими средними во времени (за исключением множества функций нулевой меры), средний риск (81a) может быть записан как:

$$R(\sigma, \delta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [S(t) - \gamma_S(V(t))]^2 dt. \quad (87)$$

Обычно при исследовании воспроизведения сигналов минимальное значение среднего риска принималось за критерий оптимума, так же как в теории риска, когда функция стоимости выражается через квадратичную ошибку (79).

Иногда на функцию оценки  $\gamma(\mathbf{V})$  налагается дополнительное требование линейности, так что оценка  $\gamma$  должна представлять собой выходное напряжение линейного, обычно физически реализуемого фильтра, на вход которого подается напряжение  $\mathbf{V}(t)$ . Тогда в общем случае устройства оптимального воспроизведения сигналов при этом условии не являются байесовскими, так как из (82) следует, что байесовская приемная система обычно производит нелинейную операцию над принимаемым напряжением  $\mathbf{V}(t)$ , даже при простом условии стоимостей, указанном в разделе (75). В действительности, как можно видеть из вышеизложенного, для того чтобы устройство оптимального воспроизведения сигналов было одновременно линейным и байесовским, функция  $F(\mathbf{V}/\mathbf{S})$  должна иметь совершенно особые свойства. Однако некоторые понятия теории риска полезны для таких ограниченных классов правил принятия решения, хотя основные теоремы неприменимы. Таким образом, если мы условимся рассматривать только класс линейных функций оценки, можно говорить о функции оценки с наименьшим средним риском, о функции

оценки с наименьшим максимальным условным риском, о функции оценки, для которой нет другой равномерно лучшей функции оценки в классе, и т. д., решая вопросы о существовании и единственности в конкретных ситуациях путем построения соответствующих функций.

Наконец, можно сравнивать, как и при обнаружении сигналов, неидеальные или реальные системы воспроизведения сигналов с соответствующими оптимальными устройствами, вводя действительную функцию оценки  $\gamma_a(V)$  в выражение для среднего риска. Тогда можно оценивать различные устройства воспроизведения сигналов  $\gamma_a(V)$  по отношению к оптимальному и количественно оценивать те или иные изменения, вносимые в реальную приемную систему.

### 3. Воспроизведение сигнала по максимальному правдоподобию (простая оценка)

Как упомянуто выше в § 1 раздела IV, пользование методом максимального коэффициента правдоподобия является очень полезным для получения оценок. Как известно из классической статистики, если достаточная статистика существует, то функция оценки по максимальному правдоподобию зависит только от нее, и, кроме того, оценка по максимальному правдоподобию  $\hat{a}$  параметра  $a$ , основанная на  $N$  независимых наблюдениях случайной величины, состоятельна (т. е.  $\hat{a}_N \rightarrow a$ , когда  $N \rightarrow \infty$  (см. [Л. 3]) и асимптотически приближается к достаточной и эффективной (т. е. к оценке с минимальной дисперсией) при  $N \rightarrow \infty$  (см. [Л. 59]).

В теории связи, где коррелированные выборки являются правилом, а не исключением, этому соответствует оценка, основанная на  $N$  независимых реализациях процесса или функциях, являющихся компонентами ансамбля, наблюдаемого в течение конечного интервала времени  $(0, T)$ . Как показал Гренандер [Л. 60], оценка, полученная путем максимизации совместной функции правдоподобия  $N$  реализаций, имеет вышеуказанные свойства. Кроме того, Гренандер показал, что оценка максимального правдоподобия, основанная только на одной реализации в интервале наблюдения  $(0, T)$ , имеет также полезные асимптотические свойства при  $T \rightarrow \infty$ , если процесс эргодический и имеет некоторые свойства обобщенных цепей Маркова.

Значение оценки максимального правдоподобия становится еще более понятным из рассмотрения равенства (10), которое при  $\gamma = S$  переходит в следующее:

$$p(\gamma/S) = p(\gamma = S/S) = \int_{\Gamma} F(V/S) \delta(S - \gamma_s(V)) dV. \quad (88)$$

Это есть вероятность правильного решения, если имеет место сигнал  $S$ . Очевидно, она будет наибольшей, если для каждого  $V$  мы выберем оценку  $\gamma_s(V)$ , равную оценке по максимальному условному правдоподобию  $\hat{S}$ , определяемой выражением (78а), когда  $\sigma(S)$  опущено в обеих частях неравенства. Другими словами, функция оценки по максимальному условному правдоподобию дает максимум вероятности правильного решения безотносительно к неправильным решениям или их стоимостям.

Беря среднее от обеих частей равенства (80) по априорному распределению сигнала  $\sigma(S)$ , получим среднюю вероятность правильного решения

$$\int_{\Omega} p(S/S) \sigma(S) dS = \int_{\Gamma} \int_{\Omega} \sigma(S) F(V/S) \delta[S - \gamma_s(V)] dS dV, \quad (89)$$

где  $p(S/S)$  представляет собой равенства (88)  $p(\gamma = S/S)$ . При помощи таких же рассуждений, как и для (88), убеждаемся, что величина (89) является наибольшей, если для каждого  $V$  функция оценки  $\gamma_s(V)$  выбрана как частное значение сигнала  $S$ , которое дает максимум функции безусловного правдоподобия, т. е. дает максимум апостериорной вероятности  $S$  при данном  $V$ . Итак, функция оценки по максимальному безусловному правдоподобию  $S$  дает максимум средней вероятности правильного решения с учетом всех возможных сигналов безотносительно к неправильным решениям и их стоимостям.

Так как стоимость правильного решения по определению всегда меньше, чем стоимость всякого другого решения, то можно ожидать, что функция оценки по максимальному правдоподобию, поскольку она назначает наибольшие вероятности решениям с наименьшими стоимостями, т. е. наиболее вероятное (наиболее близкие оценки), дает минимум среднего риска не только для простой функции стоимости, указанной в § 1 раздела IV, при условии, что совместная плотность вероятностей  $V$  и  $S$  и сама функция стоимости обладают некоторыми свойствами симметрии, но и для других функций стоимости. В частности, при

функции стоимости, равной среднеквадратичной ошибке, оказывается, что если совместное распределение величин  $V$  и  $S$  симметрично относительно оценки безусловного максимального правдоподобия  $\hat{S}$  при всяком  $V$  (заметим, что  $\hat{S}$  зависит от  $V$ ), то  $S$  представляет собой байесовское решение по отношению к этой функции стоимости). Вальд [Л. 61] применяет аналогичный подход для того, чтобы показать, что оценка  $\hat{S}$  по максимальному условному правдоподобию (в нашем обозначении) является минимаксной, если функция стоимости зависит только от ошибки, а сигнал и шум аддитивные и сигнал одномерный (на ограниченном интервале).

Приемную систему, дающую на выходе апостериорную вероятность  $p(S/V)$  в виде функции от  $S$ , можно также применять как решающую систему, если за решение или оценку принять максимальное значение выходного сигнала. Из вышеизложенного видим, что такая приемная система дает максимум вероятности правильного решения при любом сигнале  $S$ , а также максимум средней вероятности [ср. (89)] правильного решения при случайном появлении различных сигналов  $S$ . Ограниченность приемной системы состоит в том, что она не учитывает относительного значения различных ошибок системы, т. е. расхождений между оценкой сигнала  $\gamma$  и истинным значением  $S$ . Иначе говоря, приемник представляет собой байесовское устройство воспроизведения сигналов с простой функцией стоимости, рассмотренное в § 1 раздела IV. С другой стороны, как мы только что видели, при некоторых условиях симметрии байесовское устройство воспроизведения сигналов для функции стоимости, равной среднеквадратичной ошибке, представляет собой также оператор максимального правдоподобия  $\hat{S}$ , так что с этой точки зрения приемник максимального правдоподобия можно рассматривать как такой приемник, который штрафует за неправильные решения согласно функции стоимости  $C = \|S - \gamma\|^2$  и одновременно дает максимум средней вероятности правильного решения. Поэтому, очевидно, при некоторых условиях система воспроизведения сигналов может обеспечивать минимум среднего риска не только для одной единственной функции стоимости, так же как и при обнаружении сигналов (см. § 3 раздела III), когда приемная система может быть оптимальной для многих функций стоимости, если порог  $K$  поддерживается постоянным.

Для пояснения приведем три примера:

# 1) Когерентное обнаружение сигнала в аддитивном шуме

Мы примем, что сигнал полностью известен, за исключением его относительной амплитуды  $a_0$  (см. § 6 раздела III), и априорное распределение амплитуд является равномерным<sup>1</sup>. Мы ищем оценку максимального правдоподобия  $\hat{a}_0$  для неизвестной амплитуды сигнала.

Нормируя  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{S} = a_0 \mathbf{s} \psi^{1/2}$ , как и прежде (см. § 7 раздела III):  $\psi$  — среднеквадратичное значение шума), разлагаем  $W_n(\mathbf{V} - \mathbf{S})$  по степеням  $a_0$ , как и при обнаружении сигналов, и получаем для слабых сигналов:

$$\begin{aligned} \ln L \equiv \ln \{p(a_0) W_n(\mathbf{V} - \mathbf{S}/a_0)\} &= B^{(0)} + \{V \bar{\psi} \tilde{\mathbf{v}} B^{(1)} + \\ &+ \tilde{\mathbf{v}} B^{(2)} + \dots\} - a_0 \{V \bar{\psi} \tilde{\mathbf{s}} B^{(1)} + 2\psi \tilde{\mathbf{v}} B^{(2)} \mathbf{s} + O(v^2)\} + \\ &+ a_0^2 \{\tilde{\mathbf{s}} B^{(2)} \mathbf{s} + O(v)\} + O(a_0^3) + \ln p(a_0), \end{aligned} \quad (90)$$

где в обозначениях выражения (46)  $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)}$ ,  $\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{b}^{(2)} \mathbf{b}^{(2)}$  и т. д. Оценка максимального безусловного правдоподобия легко может быть найдена из условия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_0} = 0, \quad (91)$$

т. е. при принятых допущениях

$$\hat{a}_0 \approx (V \bar{\psi} \tilde{\mathbf{s}} B^{(1)} + 2\psi \tilde{\mathbf{v}} B^{(2)} \mathbf{s}) / 2\psi \tilde{\mathbf{s}} B^{(2)} \mathbf{s}.$$

<sup>1</sup> Когда мы говорим, что распределение распространяется на бесконечную область, это нужно понимать лишь приблизительно. В действительности, строго говоря, все области считаются конечными, как этого требует теорема приложения II, на которой основана теорема о полном классе. При неравномерном распределении мы стремимся брать достаточно большую область, чтобы можно было пренебречь «хвостами» распределения. Для вышеуказанного равномерного распределения сигнала, которое особенно важно при рассмотрении минимаксных систем с аддитивными сигналом и шумом (см. § 6 раздела IV), мы считаем распределение постоянным в большой конечной области и равным нулю вне этой области, так что имеется небольшая, но конечная вероятность наличия каждого сигнала внутри области и конечная, хотя и большая, дисперсия сигнала.



Далее, подставляя это выражение в (90), получим:

$$W_n(\mathbf{V} - \mathbf{S}/\hat{a}_0) \approx \exp(-2\psi\hat{a}_0 a_0 \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{B}^{(2)} \mathbf{s} + \\ + \psi a_0^2 \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{B}^{(2)} \mathbf{s}) \exp\{B^{(0)} + \sqrt{\psi} \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{B}^{(1)} + \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{B}^{(2)} \mathbf{v}\}. \quad (92)$$

Поскольку плотность вероятности можно разложить на множитель, включающий статистику  $\hat{a}_0$  и параметр  $a_0$ , и другой множитель, не зависящий от параметра, то функция оценки<sup>1</sup>  $\hat{a}_0$  является достаточной статистикой (ср. [Л.1]) для пороговых сигналов, если можно уверенно пренебречь членами  $O(v, v^2, \dots)$ . Заметим также из равенств (88) и последующих, что для принятой здесь равномерной плотности распределения величины  $a_0$  условная функция оценки  $\hat{a}_0^*$  равна безусловной функции оценки  $\hat{a}_0$ .

## 2) Воспроизведение когерентного сигнала в аддитивном нормально распределенном шуме

В этом случае о сигнале все известно, за исключением его „масштаба“  $a_0$ , имеющего равномерное распределение  $p(a_0)$ , причем сигнал появляется на фоне гауссова шума. Из (45), (46) и (52) легко находим для  $\bar{V}_N = 0$ , т. е. при отсутствии постоянной составляющей шума:

$$\ln L = -\frac{1}{2} \ln \{(2\pi)^n (\det \mathbf{K})\} - \Phi_n(v, v) + a_0 \Phi_n(v, s) - \\ - \frac{1}{2} a_0^2 \Phi_n(s, s) + \ln p(a_0), \quad (93)$$

где  $\Phi_n(x, y) \equiv \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{k}^{-1}\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{k}^{-1} = \mathbf{K}^{-1}\psi$ , как и прежде, и (93) относится теперь ко всем  $a_0 \geq 0$ . Из (91) находим, что для этого случая функция оценки  $\hat{a}_0$  равна:

$$\hat{a}_0 = \frac{\Phi_n(v, s)}{\Phi_n(s, s)} = \hat{a}_0^*. \quad (94)$$

<sup>1</sup> Напомним, что функция оценки  $\hat{a}_0$ , рассматриваемая как функция общего множества значений  $\mathbf{v}$ , представляет собой оценку величины  $a_0$ , тогда как для частного значения  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$  функция оценки  $\hat{a}_0$  будет оценкой величины  $a_0$ , основанной на этих частных значениях принимаемых данных  $\mathbf{v}'$ .

При непрерывной выборке (см. § 8 раздела III) мы применяем соотношения (59) — (61) для нахождения предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(v, s) = \Phi(v, s)$  и т. д. и вместо обратной корреляционной матрицы  $k^{-1}$  имеем основное интегральное уравнение (59). Заметим, что хотя в данном случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} B^{(0)} \rightarrow \infty$  [ср. (93) и (46)], мы по-прежнему получаем определенное значение функции оценки  $\hat{a}_0$ , так как максимальное правдоподобие, по существу, зависит от относительных частот появления сигнала, имеющего частное значение  $a_0$ , поскольку одной из возможных оценок, вероятно, окажется  $\hat{a}_0$ . Как мы видели, аналогичное положение имеет место при обнаружении сигналов и по той же причине.

Фактически в обоих случаях с самого начала можно исключить нормирование коэффициента разложения  $B^{(0)}$ .

### 3) Воспроизведение некогерентного гауссова сигнала в гауссовом шуме

Когда сигнал и шум являются аддитивными, статистически независимыми ( $\tilde{V}_N = \tilde{V}_s = 0$ ) и имеют соответственно корреляционные матрицы  $K_s$  и  $K_N$ , логарифм функции безусловного правдоподобия будет равен:

$$\ln L' = -\frac{1}{2}(\tilde{V} - \tilde{S})K_N^{-1}(V - S) - \frac{1}{2}\tilde{S}K_s^{-1}S, \quad (95)$$

где опущены несущественные нормировки. Для отыскания оценки сигнала  $\hat{S}$  по безусловному максимуму коэффициента правдоподобия дифференцируем (95) по каждой компоненте сигнала  $S$  по очереди и приравняем производные нулю, получая  $n$  скалярных уравнений для  $n$  компонент сигнала  $\hat{S}$ , которые можно записать следующим образом:

$$\hat{S} = K_s K_N^{-1} V - K_s K_N^{-1} \hat{S}. \quad (96)$$

Для решения этого уравнения относительно  $\hat{S}$  мы вводим новую матрицу  $Q$ , связанную с корреляционной матрицей соотношением

$$K_s = Q(K_s + K_N) \text{ или } Q = K_s(K_s + K_N)^{-1}. \quad (97)$$

Учитывая, что уравнение (96) может быть написано следующим образом:

$$\hat{S} = [(K_s K_N^{-1})^{-1} (I + K_s - K_N^{-1})]^{-1} V, \quad (98)$$

находим путем простого преобразования, что оценка максимального правдоподобия будет:

$$\hat{S} = QV, \quad (99)$$

где  $Q$  определяется из (97).

Соответствующие результаты для непрерывной выборки, когда интервал наблюдения  $(0, T)$  фиксирован и число точек выборки увеличивается беспредельно (см. § 8 раздела 8), получаются путем преобразования матричных уравнений (97) и (99) в интегральные уравнения (см. § 8 раздела III).

$$\hat{S}(t) = \int_0^T V(\tau) dQ(t, \tau) = \int_0^T q(t, \tau) V(\tau) d\tau; \quad (100)$$

$$\dot{Q}(t, \tau) = \frac{dQ}{d\tau} \equiv q(t, \tau);$$

$$K_s(t, t_1) = \int_0^T q(t, \tau) [K_s(\tau, t_1) + K_N(\tau, t_1)] d\tau. \quad (101)$$

Этот вывод был получен Престоном [Л.39] с применением интегральных уравнений на протяжении всей выкладки. Интегральное уравнение (101) можно решить относительно  $q(t, \tau)$  способами, рассмотренными, например, в [Л.32], если известны корреляционные функции  $K_s$  и  $K_N$  [подобно  $X_T$  в (59)  $q$  можно рассматривать как весовую функцию при вычислении максимального правдоподобия]. Заметим, что для гауссовых статистик шума и сигнала оценка  $\hat{S}(t)$  получается путем линейной операции над принимаемыми данными  $V(t)$ , причем весовая функция определяется лишь функциями корреляции сигнала и шума и продолжительностью интервала наблюдения. Поскольку мы рассматриваем гауссовы выборки, полностью заданные матрицами  $K_s$  и  $K_N$ , оптимальная приемная система  $q$  использует все имеющиеся априорные данные [формулы (100) и (101)]

будут использованы в последующих примерах § 4 и 5 раздела IV].

Наконец, мы замечаем, что при этом способе воспроизведения сигнала функция стоимости не задается (см. замечание к предыдущему примеру), и мы не получаем здесь соответствующего условного или среднего риска в отличие от задачи, рассмотренной в § 4 раздела IV.

#### 4. Воспроизведение сигнала по критерию наименьшей среднеквадратичной ошибки при аддитивных сигналах и шуме (простая оценка)

Байесовская функция оценки имеет некоторые интересные свойства при квадратичной функции стоимости, когда, как и в (79),  $t_\lambda = t_k$  (для всех  $k = 1, \dots, n$ ) и когда наблюдаются независимые результаты аддитивного воздействия сигнала и шума.

Первое свойство состоит в так называемой транслятивности (79) и (80), появляющейся при равномерном априорном распределении сигнала. Байесовская функция оценки определяется в этом случае выражением (82), где  $F(V/S)$  заменяется на  $W_n(V - S/a_0)$ . При равномерном распределении сигнала  $\sigma(S)$  (см. примечание в разделе IV § 1) функция оценки равна:

$$\gamma_s^*(V) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int S W_n(V - S) dS / \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int W_n(V - S) dS. \quad (102)$$

Обозначая через  $\lambda$  произвольный фиксированный вектор и вводя новую переменную  $U$  такую, что  $U = S + \lambda$ , мы получаем сразу из (102)

$$\gamma_s^*(V \pm \lambda) = \gamma_s^*(V) \pm \lambda. \quad (103)$$

Например, если подать фиксированный сигнал  $S = V - N$  на вход приемной системы, рассчитанной на то, чтобы давать байесовскую оценку по отношению к равномерному априорному распределению сигнала  $\sigma(S)$ , то при изменении входного сигнала на  $\lambda$  выходной сигнал изменится на такую же величину.

Второе свойство состоит в том, что система оценки параметров является минимаксной. Как мы видели в § 10 раздела II и в § 4 раздела II, если у байесовской прием-

ной системы, рассчитанной на некоторое распределение сигнала  $\sigma(\mathbf{S})$ , условный риск не зависит от  $\mathbf{S}$ , то она является минимаксной системой, а  $\sigma_0(\mathbf{S})$  называется наименее благоприятным распределением. В вышеуказанной байесовской приемной системе условный риск равен:

$$r(\mathbf{S}, \gamma^*) = \int_{\mathbf{V}} \|\mathbf{S} - \gamma_s^*(\mathbf{V})\|^2 W_n(\mathbf{V} - \mathbf{S}) d\mathbf{V}. \quad (104)$$

Полагая область изменения каждой компоненты бесконечной и вводя новые переменные  $\mathbf{X} = \mathbf{V} - \mathbf{S}$ , мы получим из (104):

$$r(\mathbf{S}, \gamma^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \|\mathbf{S} - \gamma_s^*(\mathbf{S} + \mathbf{X})\|^2 W_n(\mathbf{X}) d\mathbf{X}. \quad (105)$$

Но поскольку байесовская приемная система в этом случае обладает транслятивностью [ср. (103)], мы получим  $\gamma_s^*(\mathbf{S} + \mathbf{X}) = \gamma_s^*(\mathbf{X}) + \mathbf{S}$ .

При подстановке этого выражения в (105) условный риск будет независимым от сигнала  $\mathbf{S}$ ; это показывает, что если сигнал и шум аддитивны и независимы, то наименее благоприятное распределение сигнала  $\sigma_0(\mathbf{S})$  является равномерным, а байесовская приемная система  $\gamma_\sigma^*$  для этого распределения является минимаксной ( $\gamma_\sigma^* = \gamma_m^*$ ).

Приведем два примера для иллюстрации принципа действия устройств байесовского минимаксного воспроизведения сигналов.

# 1) Воспроизведение когерентного сигнала при гауссовом шуме

Исследуем сначала оценку амплитудного множителя сигнала с нормальным распределением амплитуд, когда все другие параметры принимаемого сигнала полностью известны:

$$\sigma(\mathbf{S}) = \sigma(a_0) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp [-(a_0 - \bar{a}_0)^2 / 2\sigma^2], \quad (106)$$

где  $\sigma^2 = \overline{a_0^2} - \bar{a}_0^2$ .

Мы опять принимаем, что сигнал и шум аддитивны и нормированы:

$$\mathbf{S} = a_0 \psi^{1/2} \mathbf{s}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{S} + \mathbf{N} = \psi^{1/2} \mathbf{v}.$$

Квадратичная функция стоимости в данном случае равна  $(\gamma - a_0)^2$ , где  $\gamma$  — оценка, так что из (82) или (97) следует что байесовская оценка  $a^*$  равна:

$$a^*(\mathbf{V}) = \int_{-\infty}^{\infty} a_0 p(\mathbf{V}, a_0) da_0 / \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{V}, a_0) da_0, \quad (107)$$

причем совместная плотность вероятности  $p(\mathbf{V}, a_0)$  пропорциональна

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} \{ (\tilde{\mathbf{v}} - a_0 \tilde{\mathbf{s}}) \mathbf{K}_N^{-1} (\mathbf{v} - a_0 \mathbf{s}) + (a_0 - \bar{a}_0)^2 / \sigma^2 \} \right] (\bar{\mathbf{N}} = 0) \quad (108)$$

и, как и раньше,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_N$  — корреляционная матрица шума [ср. (79)] при размере выборки  $n$ . Учитывая тождество

$$a^* = \int_{-\infty}^{\infty} a_0 e^{-A(a_0 - a^*)^2 + B(\mathbf{v})} da_0 / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(a_0 - a^*)^2 + B(\mathbf{v})} da_0, \quad (109)$$

мы можем вычислить интеграл (107), дополнив выражение в (108) до полного квадрата, и получим:

$$a^* = \frac{\Phi_n(v, s) + \bar{a}/\sigma^2}{\Phi_n(s, s) + 1/\sigma^2}$$

и

$$\Phi_n(v, s) = \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{K}_N^{-1} \psi s = \mathbf{v} \mathbf{k}_N^{-1} \mathbf{s} = \Phi_n. \quad (110)$$

Мы замечаем прежде всего, что когда  $\sigma^2 \rightarrow 0$ , т. е. когда априорная плотность вероятности сигнала при  $a_0 = \bar{a}_0$  переходит в дельта-функцию, байесовская оценка сводится к  $\hat{a}_0^* = \bar{a}_0 = a_0$ , как и следовало ожидать. Когда  $\sigma^2 \rightarrow \infty$ , априорная плотность распределения становится равномерной [см. примечание после примера (1) в § 3 раздела IV], байесовская оценка становится равной  $\hat{a}_0^* = \hat{a}_0^*$  [уравнение (94)] в согласии с оценками максимального правдоподобия (условной и безусловной), как и следовало ожидать,  $\bar{\mathbf{N}} = 0$ . Оценка величины  $a_0$  при непрерывной выборке дает  $\Phi_n(v, s) \rightarrow \Phi(v, s)$  и т. д., как и прежде, а определяющим интегральным уравнением является уравнение (50) (см. переход к пределу в § 8 раздела III).

Байесовский риск для этого примера можно найти непосредственно из (84) и (110) при условии (108):

$$R^* = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{k})^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(a_0) da_0 \int_{-\infty}^{\infty} [a_0 - a_0^*(\mathbf{v})]^2 \exp \left[ -\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{v}} - a_0 \tilde{\mathbf{s}}) \mathbf{k}_N^{-1} (\mathbf{v} - a_0 \mathbf{s}) \right] d\mathbf{v}. \quad (111)$$

Производя замену переменных  $\mathbf{v} - a_0 \mathbf{s} = \mathbf{y}$  и учитывая, что

$$\overline{\tilde{\mathbf{s}}_N^{-1}} \mathbf{y} = 0, \quad \overline{(\tilde{\mathbf{s}}_N^{-1} \mathbf{y})^2} = \tilde{\mathbf{s}}_N^{-1} \mathbf{s} = \Phi_n(s, s),$$

получаем окончательно:

$$R^* = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(a_0) da_0 \{ [a_0 (1 - A \Phi_n) - B]^2 + A^2 \Phi_n \},$$

$$\begin{cases} A \equiv (\Phi_n + \sigma^{-2})^{-1}; \\ B \equiv (\bar{a}_0) \sigma^2 / (\Phi_n + \sigma^{-2}). \end{cases} \quad (112)$$

Выполняя интегрирование и учитывая выражение (106), на основании которого выше было определено  $a^*(\mathbf{v})$ , находим:

$$R^* = \{ \Phi_n(s, s) + 1/\sigma^2 \}^{-1}. \quad (113)$$

Как и следовало ожидать, при  $\sigma^2 \rightarrow 0$  средний риск становится равным нулю, так как оценка в среднем является точной:  $a^* = \bar{a}_0 = a_0$ , тогда как при  $\sigma^2 \rightarrow \infty$  всегда имеется конечная средняя стоимость  $\Phi_n(s, s)^{-1}$ . Байесовский риск, конечно, зависит от структуры сигнала и спектра шума.

Этот пример соответствует практическому случаю приема сигналов, подверженных замиранию, когда  $\mathbf{a}_0$  велико и  $\sigma^2$  достаточно мало, так что  $a_0$ , по существу, всегда больше нуля. В этом случае шум возникает в основном в приемнике и, следовательно, не зависит от процесса распределения сигналов, вызывающего замирание. Заметим, кроме того, что  $a^*$  (94) или (110) при  $\sigma^2 \rightarrow \infty$  также представляет собой минимаксную оценку, как можно видеть из транслятивности (103), которая в данном случае выражается равенством  $a^*(v + b\mathbf{s}) = a^*(\mathbf{v}) + b$ , где  $b$  — скаляр. Тогда с помощью рассуждений, аналогичных приве-

денным выше [равенство (104) и следующие], можно показать что условный риск не зависит от  $a_0$ . Минимаксный риск при дискретной выборке равен:

$$R_M^* = \Phi_n(s, s)^{-1}. \quad (114)$$

Для непрерывной выборки байесовский и минимаксный риск (113), (114) находятся обычно способом (ср. § 8 раздела III).

Поучительно сравнение неидеальных приемных систем с оптимальными (110). Как и для задачи обнаружения сигналов, рассмотренной в следующем параграфе [пример (3)], мы берем устройство воспроизведения сигнала, построенное для случая отсутствия корреляции. Тогда функция оценки для гауссова шума будет:

$$a' = \frac{\tilde{v}s + \bar{a}_0/\sigma^2}{\tilde{s}s + 1/\sigma^2} \quad (115)$$

вместо (113). Соответствующий средний риск находим, как описано выше, из (84) и получаем окончательно:

$$R' = \frac{\Phi_k + 1/\sigma^2}{\Phi_0 + 1/\sigma^2}, \quad (116)$$

где

$$\Phi_k = \tilde{s}k\tilde{s}, \quad \Phi_0 = \tilde{s}s.$$

Так как риск  $R'$  — монотонная функция относительно  $1/\sigma^2$  и  $R' = 1$  при  $\sigma = 0$ ,  $R' = \Phi_k/\Phi_0$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ , причем если обе эти величины при указанных условиях больше, чем  $R^* = \Phi_n^{-1}$ , то средний риск  $R'$  также всегда равен или больше линии минимального среднего риска  $R^*$  при любом  $\sigma^2 > 0$ , как и следовало ожидать, поскольку функция оценки  $a^*$  определяет оптимальную приемную систему. Кроме того, если в выражении для  $a'$  (115) мы учтем корреляцию, т. е. если  $\tilde{s}s \rightarrow \tilde{s}k\tilde{s} = \Phi_n$ , то мы получим видоизмененное неидеальное устройство для воспроизведения  $a''$ , для которого средний риск равен:

$$R'' = \frac{\Phi_k + 1/\sigma^2}{\Phi_n + 1/\sigma^2} \geq R^*. \quad (117)$$

При непрерывной выборке средний риск имеет порядок  $R', R'' = O(n)$  при  $n \rightarrow \infty$ , и мы получаем бесконечно большую среднюю стоимость (ср. раздел III) из-за того, что мы не учитываем корреляцию. Это обстоятельство указы-



вает на необходимость надлежащего учета корреляции в таких неидеальных приемных системах, чтобы получить по крайней мере конечную стоимость воспроизведения сигнала.

## 2) Воспроизведение некогерентного гауссова сигнала при гауссовом шуме

Если сигнал структурно неопределенный<sup>1</sup>, то для определения байесовской функции оценки можно также применить способ, указанный выше в примере (1). Рассмотрим опять гауссов сигнал и аддитивный гауссов шум с корреляционными матрицами соответственно  $K_s$  и  $K_N$ . Совместная плотность вероятности пропорциональна  $L'$  [ср. (95)]. Мы используем тождество, аналогичное формуле (109):

$$S^* = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int SE^{-A(\tilde{S} - \tilde{S})^T M (S - S^*) - B(V)} \times \\ \times dS / \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{-A(\tilde{S} - \tilde{S})^T M (S - S^*) - B(V)} dS, \quad (118)$$

которое легко проверить, если внести новые переменные  $Z = S - S^*$  и  $Y = KZ$ , где  $R$  представляет собой преобразование матрицы  $M$  к диагональной форме, т. е.  $\tilde{R}MR = \Lambda$ . Из (95) следует, что распределение можно привести к желаемому виду при помощи следующих подстановок:

$$M = K_N^{-1} + K_s^{-1}, \quad S^* = QV, \quad (119)$$

где, как и в примере 3 § 3 раздела IV  $Q$  определяется формулой (97) и изображает байесовский оператор воспроизведения, а  $\hat{S}^* = \hat{S}$  [равенство (99)]. Здесь мы имеем пример эквивалентности операторов максимального правдоподобия и Байеса при квадратичной функции стоимости и гауссовых статистиках, обладающих соответствующей симметричностью.

<sup>1</sup> «Структурно неопределенным» или, короче, «неопределенным» называется сигнал  $S$ , о структуре которого ничего неизвестно, кроме распределения вероятностей  $\sigma/S$ . Структурно определенный сигнал есть такой сигнал, для которого известна функциональная зависимость от одного или нескольких случайных параметров  $\Theta$ , а также распределение вероятностей  $\sigma(\Theta)$ .

Байесовский риск в случае воспроизведения некогерентных сигналов (115) легко найти. Подставляя (119) в (84), получим сразу:

$$R^* = (2\pi)^{-n} (\det \mathbf{K}_S \cdot \det \mathbf{K}_N)^{-1/2} \int_{\Gamma} e^{-1/2 \tilde{\mathbf{V}}^{\text{AV}} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{V})} d\mathbf{V}, \quad (120)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{K}_N^{-1} - \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{M}\mathbf{Q}$ , и

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}) = \int_{\Omega} \|\mathbf{S} - \mathbf{Q}\mathbf{V}\|^2 e^{-1/2 (\tilde{\mathbf{S}} - \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{V}})^{\text{M}} (\tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{Q}\mathbf{V})} d\mathbf{S}. \quad (121)$$

При бесконечном пространстве сигналов  $\Omega$  (см. примечание после примера 1, раздела IV) последняя величина не зависит от  $\mathbf{V}$ . Вычисляя ее, получим:

$$G = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{M})^{-1/2} \Sigma_{j,k} r_{jkl}^2 / \lambda_{jj}, \quad (122)$$

где  $r_{jk}$  и  $\lambda_{jj}$  — элементы матриц  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{A}$ , определенных так, что  $\mathbf{RMR} = \mathbf{A}$  является диагональной матрицей. Учитывая, что  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{KA}^{-1}\mathbf{R}$ , мы видим, что сумма в (122) равна следу матрицы  $\mathbf{M}^{-1}$ . Используя (97), находим также, что след  $\mathbf{M}^{-1} = \text{след } \mathbf{QK}_N$ . Наконец, интеграл по пространству наблюдений  $\Gamma$  в (120) дает:

$$(2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2} = 2\pi^{n/2} (\det \mathbf{K}_N^{-1} \cdot \det \mathbf{K}_S^{-1})^{-1/2} (\det \mathbf{M})^{-1},$$

так что в сочетании с вышеуказанным выражением в (120), получаем окончательно байесовский минимальный средний риск

$$R^* = \text{след } \mathbf{QK}_N. \quad (123)$$

При непрерывной выборке за время наблюдения  $(0, T)$  минимальный средний риск (123) принимает следующий вид:

$$R^* = \int_0^T \int q(t_1, t_2) K_N(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (124)$$

где  $q(t_1, t_2)$  — производная по  $t$  решения интегрального уравнения (101), т. е.

$$q(t_1, t_2) = \frac{d^2}{dt d\tau} Q(t, \tau) / t_1, t_2.$$

Поскольку минимаксная система является байесовской для равномерного априорного распределения сигнала, уст-

роительство минимаксного воспроизведения сигналов получается при  $K_S^{-1} \rightarrow 0$ , т. е. при нулевой матрице. В этом случае  $Q \rightarrow Q_M = I$  (единичная матрица) и  $R^* = R_M^* = \text{след } K_N$ , т. е. при непрерывной выборке получим:

$$R_M^* = \int_0^T K_N(t_1, t_1) dt_1 = T\psi_N, \quad q(t_1, t_2) = \delta(t_2 - t_1), \quad (125)$$

так как корреляционная функция шума есть  $K_N(t_1, t_1) = \psi_N \rho(t_1 - t_1)$ , где  $\rho$  — нормированная функция автокорреляции ( $\rho(0) = 1$ ).

В заключение в качестве примера простого устройства неидеального воспроизведения сигналов рассмотрим случай, когда корреляция отсутствует. В этом случае из (97) следует, что устройство воспроизведения сигналов должно производить операцию

$$Q' = \left\| \frac{a_0^2}{1 + a_0^2} \delta_{ij} \right\|,$$

где

$$a_0 = \psi_S / \psi_N, \quad (126a)$$

или

$$q(t_1, t_2) = \frac{a_0^2}{1 + a_0^2} \delta(t_2 - t_1). \quad (126b)$$

Средний риск в этой системе равен при дискретной и непрерывной выборке соответственно:

$$R' = \frac{n\psi_N a_0^2}{1 + a_0^2}, \quad R' = \frac{a_0^2 T \psi_N}{1 + a_0^2}. \quad (127)$$

Мы замечаем, что  $R_M^* = T\psi_N \geq R'$ , за исключением случая  $a_0 \rightarrow \infty$ , а для слабых сигналов  $R' \sim a_0^2$ . Вообще  $R^* \leq R'$ , причем равенство имеет место только в пределе при „белом“ шуме, т. е. шуме, имеющем одинаковую спектральную интенсивность в пределах полосы пропускания приемной системы.

## 5. Сглаживание и предсказание структурно неопределенных сигналов

Исследуем теперь случай (ср. начало раздела IV), когда оценку сигнала нужно произвести в момент времени, не совпадающий с моментами выборки данных, проведен-

ной во время существования сигнала  $S$ . Средний риск определяется формулой (75). При квадратичной функции стоимости (79) байесовский оператор  $S_\lambda^*$  находится, как и раньше, из условия минимума среднего риска при принятии решения  $\gamma$ :

$$S_\lambda^*(V) = \int S_\lambda \sigma(S, S_\lambda) F(V/S) dS dS_\lambda / \int \sigma(S, S_\lambda) F(V/S) dS. \quad (128)$$

Мы замечаем сразу, что если значения сигналов  $S$  и  $S_\lambda$  независимы, так что  $\sigma(S, S_\lambda) = \sigma_1(S) \sigma_2(S_\lambda)$  то это выражение приводится к  $S_\lambda^* = S_\lambda$ , т. е. оптимальная оценка не зависит от величины входного напряжения.  $V$  в интервале наблюдения  $(0, T)$ , если только сигнал не коррелирован. Эта оценка непосредственно связана с минимаксной.

Легко убедиться, что при равномерном априорном распределении сигнала  $\sigma(S, S_\lambda)$  байесовский оператор (128) обладает транслятивностью:  $S_\lambda^*(V + u) = S_\lambda^*(V) + u_\lambda$ , и дает условный риск, не зависящий от  $S_\lambda$ . Таким образом, для равномерного распределения байесовский оператор (128) будет минимаксным оператором. Отсюда мы делаем вывод, что для составления минимаксного оператора для структурно неопределенного сигнала нужно отбросить единственную информацию, на которой может быть основана оценка сигнала, а именно автокорреляцию сигнала. Поэтому в этих случаях минимаксная оценка сигналов не дает преимуществ по сравнению с оценкой, основанной лишь на априорной вероятности сигнала  $S_\lambda$ .

Рассмотрим теперь частный случай сигнала и шума из примера 2 § 4 раздела IV, когда сигнал и шум являются гауссовыми, независимыми и аддитивными. Составим байесовский оператор (128). Прежде всего мы замечаем, что

$$\sigma(S, S_\lambda) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\tilde{S} K_S^{-1} S + 2 S_\lambda \tilde{k}_\lambda S + S_\lambda^2 k_{\lambda\lambda}] \right\}, \quad (129)$$

где вектор-столбец  $\mathbf{k}_\lambda$  имеет компоненты  $k_{\lambda_j} = K_S^{-1}(t_\lambda, t)$ , т. е.  $k_\lambda$  представляют собой некоторые элементы обратной корреляционной матрицы сигнала, почти тождественной с матрицей  $K_S^{-1}$  порядка  $n \times n$  [ср. (129)], за исключением того, что она имеет дополнительную строку и дополнительный столбец, соответствующие моменту времени  $t_\lambda$ , для

которого надо дать оценку сигнала. Совместное распределение величин  $\mathbf{VS}$  и  $S_\lambda$ ,  $\sigma(S, S_\lambda) W_n(\mathbf{V} - \mathbf{S})$ , необходимое для записи соотношения (128), пропорционально величине

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} \{ \tilde{\mathbf{S}} (\mathbf{K}_N^{-1} + \mathbf{K}_S^{-1}) \mathbf{S} - 2 \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{K}_N^{-1} (\mathbf{V} - \mathbf{K}_N \mathbf{k}_\lambda S_\lambda) + S_\lambda^2 K_{\lambda\lambda} \} \right], \quad (130)$$

где члены, состоящие из одного  $\mathbf{V}$ , не включены, так как они сокращаются в знаменателе и числителе выражения (128). Интегрирование по  $\mathbf{S}$  выполняется точно так же, как раньше (ср. пример 2 в § 4 раздела IV), с помощью подстановки  $\mathbf{K}_N^{-1} (\mathbf{K}_N^{-1} + \mathbf{K}_S^{-1})$  [ср. (98) и след.].

Полученное выражение можно также написать в следующем виде:  $\mathbf{K}_S = \mathbf{Q} (\mathbf{K}_S + \mathbf{k}_N)$  [ср. (97)]. Этот интеграл не зависит от  $S_\lambda$ , и соответствующие величины в числителе и знаменателе сокращаются. В результате получаем:

$$S_\lambda^*(\mathbf{V}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\lambda e^{-1/2 \{ C_1 S_\lambda^2 + 2 \tilde{\mathbf{K}}_\lambda \mathbf{D} \mathbf{V} S_\lambda \}} dS_\lambda / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2 \{ C_1 S_\lambda^2 + 2 \tilde{\mathbf{K}}_\lambda \mathbf{D} \mathbf{V} S_\lambda \}} dS_\lambda, \quad (131)$$

где

$$C_1 = k_{\lambda\lambda}^2 - \tilde{\mathbf{k}}_\lambda \mathbf{Q} \mathbf{K}_N \mathbf{k}_\lambda, \quad \mathbf{D} = \mathbf{K}_N \tilde{\mathbf{Q}} (\mathbf{K}_S^{-1} + \mathbf{K}_N^{-1}) \mathbf{Q} = \mathbf{Q}. \quad (132)$$

Интеграл (131) легко вычислить, и мы получим искомый байесовский оператор:

$$S_\lambda^*(\mathbf{V}) = -\tilde{\mathbf{k}}_\lambda \mathbf{Q} \mathbf{V} / C_1, \quad (133)$$

где  $C_1$  — масштабный множитель, зависящий от корреляционных матриц сигнала и шума.

Основное свойство байесовского оператора выражается линейным оператором  $\tilde{\mathbf{k}}_\lambda \mathbf{Q}$ , который определяет оптимальную систему для обработки принимаемых данных  $\mathbf{V}$ . В качестве оператора оптимальной приемной системы удобно ввести  $\mathbf{Q}_\lambda \equiv -\tilde{\mathbf{k}}_\lambda^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_\lambda \mathbf{Q}$ ; тогда из (97) следует, что оптимальная приемная система определяется следующим соотношением:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_\lambda (\mathbf{K}_S + \mathbf{K}_N) = -\tilde{\mathbf{k}}_\lambda^{-1} \mathbf{k}_\lambda \mathbf{K}_S \quad (134)$$

Учитывая, что компоненты вектора  $\mathbf{k}_\lambda$  представляют собой элементы матрицы вида  $\mathbf{K}_S^{-1}$  с дополнительными строкой и столбцом, получаем окончательно:

$$(\tilde{\mathbf{k}}_\lambda \mathbf{K}_S)_j = -k_{\lambda\lambda} K_S(t_\lambda, t_j). \quad (135)$$

В силу равенства (135) равенство (134) переходит в следующее:

$$K_S(t_\lambda, t_j) = \sum_{l=1}^n Q_\lambda(t_l) [K_S(t_j, t_l) + K_N(t_j, t_l)], \quad (136)$$

откуда находится оптимальный оператор  $Q_\lambda$ .

Соответствующее интегральное уравнение для непрерывной выборки в интервале наблюдения  $(0, T)$ , и для случая, когда сигнал и шум стационарны, будет иметь следующий вид:

$$K_S(t - t_\lambda) = \int_{0-}^{T+} q_\lambda(\tau) [K_S(t - \tau) + K_N(t - \tau)] d\tau, \quad (137)$$

для  $0 \leq t \leq T$ ,

где  $q_\lambda(t)$  определяется из равенства

$$Q_\lambda(t_l) = \int_{t_l}^{t_{l+1}} q_\lambda(\tau) d\tau.$$

Байесовская оценка сигнала (133) принимает следующий вид:

$$S^*(t_\lambda) = \nu \int_{0-}^{T+} q_\lambda(\tau) V(\tau) d\tau, \quad \text{где } \nu = K_{\lambda\lambda}/C_1. \quad (138)$$

Переход от матричных уравнений (136) и (133) к интегральным уравнениям (137) и (134) является естественным; справедливость такого перехода можно показать на частных примерах (см. замечания в § 8 раздела III). Эти уравнения справедливы и для сглаживания и для предсказания сигналов, т. е. когда момент времени  $t_\lambda$ , для которого надо дать оценку сигнала, лежит внутри или вне интервала наблюдений  $(0, T)$ . Мы замечаем, что формулы (137) и (138) в точности совпадают с обобщенными формулами теории предсказания и сглаживания Винера [Л. 1

и 4], которые получены Заде и Рагазини<sup>1</sup>. Но в теории Винера отсутствует предположение о гауссовых статистиках, а на оператор налагается требование, чтобы он был линейным по V. Приведенное выше байесовское решение не ограничено требованием линейности, потому что оно имеет гауссовы статистики, и поэтому при гауссовых статистиках наилучшим линейным оператором для сглаживания и для предсказания сигнала является оператор с наименьшей среднеквадратичной ошибкой. В общем случае оператор (128) применим к любым статистикам и имеет то преимущество, что он справедлив как для стационарных, так и для нестационарных процессов; различие трактовки проявляется лишь в интерпретации результатов, полученных из (128), а не в их выводе, например, при стационарном шуме в (136)  $K_N(t_j, t_l) = K_N(t_j - t_l)$  и т. д.

## 6. Минимаксное сглаживание и предсказание структурно определенных сигналов

Допустим теперь, что сигнал является структурно определенным (см. примечание в примере 2 подраздела 4 раздела IV) и представляет собой функцию  $(q+1)$  параметров  $\theta = \theta_0, \dots, \theta_q$  появление которых определяется плотностью вероятности  $\sigma(\theta)$   $(q+1)$ -го порядка. Мы примем далее, что сигнал является линейной функцией этих параметров, т. е. если  $S = (S_1, \dots, S_n)$ ,  $S_j = S(t_j)$  и т. д., то

$$S = T_S \theta, \quad (139)$$

где  $T_S$  есть матрица коэффициентов порядка  $n \cdot (q+1)$ . Наша цель — рассмотреть те случаи предсказания сигнала, когда сигнал является многочленом порядка  $q$  с временным аргументом, например:

$$S(t) = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \dots + \theta_q t^q, \quad (140)$$

как, например, принято в исследованиях Заде и Рагазини [Л. 1 и 32], а также Дреника [Л. 1 и 42]. В этом случае типичный элемент матрицы  $T_S$  будет выражаться следующим образом:

$$(T_S)_{jk} = t_j^k \quad (j = 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, q). \quad (141)$$

<sup>1</sup> См. также [Л. 20 и 23]. (Прим. ред.).

Пусть требуется построить другую линейную функцию от  $\theta$ , например  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$ ,  $d_j = d(t_j)$  и т. д.

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}_d \theta, \quad (142)$$

где  $\mathbf{T}_d$  — матрица коэффициентов порядка  $m \cdot (q + 1)$ . В частности, если  $m > n$  и  $d_k = S(t_k)$ , то нашей задачей будет являться сглаживание сигнала при  $k < n$  и предсказание сигнала при  $k > n$ .

Обозначим какую-нибудь оценку величины  $d$  через  $\mathbf{A}(\mathbf{V})$ , где  $\mathbf{A}$  —  $m$ -мерный вектор-столбец, каждая компонента которого является функцией от  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ ,  $V_j = V(t_j)$  и т. д. При функции стоимости, равной квадратичной ошибке, условный риск оценки  $\mathbf{A}$  равен:

$$r(\theta, \mathbf{A}) = \int_{\Gamma} \|\mathbf{d}(\theta) - \mathbf{A}(\mathbf{V})\|^2 W_n(\mathbf{V} - \mathbf{T}_S \theta) d\mathbf{V}, \quad (143)$$

если сигнал и шум аддитивные и независимые. Средний риск получается, как обычно, путем усреднения выражения (143) по априорному распределению параметров сигнала  $\sigma(\theta)$ :

$$R(\sigma, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} \int_{\Gamma} \|\mathbf{T}_d(\theta) - \mathbf{A}(\mathbf{V})\|^2 \sigma(\theta) W_n(\mathbf{V} - \mathbf{T}_S \theta) d\mathbf{V} d\theta. \quad (144)$$

Байесовский оператор величины  $\mathbf{d}$ , обозначаемый  $\mathbf{d}^*(\mathbf{V})$ , находится, как и раньше, из условия минимума среднего риска (144) при изменении оператора  $\mathbf{A}(\mathbf{V})$ :

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{V}) = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{T}_d \theta \sigma(\theta) W_n(\mathbf{V} - \mathbf{T}_S \theta) d\theta}{\int_{\Omega} \sigma(\theta) W_n(\mathbf{V} - \mathbf{T}_S \theta) d\theta}. \quad (145)$$

В (144) и (145)  $\Omega$  означает теперь пространство параметров сигнала  $\theta$ .

Мы замечаем сразу, что если распределение параметра сигнала  $\sigma(\theta)$  равномерно, то байесовский оператор имеет следующее свойство транслятивности:

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{V} + \mathbf{T}_S \theta') = \mathbf{d}^*(\mathbf{V}) + \mathbf{T}_d \theta'. \quad (146)$$



При подстановке этого выражения в (143) условный риск будет постоянным для всех параметров  $\theta$ . Таким образом, минимаксный оператор (ср. § 4 раздела IV) равен:

$$d_M^*(V) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T_d \theta W_n(V - T_S \theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n(V - T_S \theta) d\theta}. \quad (147)$$

В случае гауссова шума интегрирование можно произвести следующим образом. Определим симметричную матрицу  $D$  порядка  $(q+1) \cdot (q+1)$

$$D = \tilde{T}_S K_N^{-1} T_S, \quad (148)$$

так что плотность вероятности  $W_n$  может быть выражена как

$$W_n(V - T_S \theta) \sim \exp \left\{ - \left( \frac{1}{2} \right) (\theta - D^{-1} \tilde{T}_S K_N^{-1} V) D (\theta - D^{-1} \tilde{T}_S K_N^{-1} V) \right\}, \quad (149)$$

где члены, не включающие  $\theta$ , были опущены, так как они сокращаются с соответствующими членами в знаменателе.

Тогда подстановка  $RV = \theta - D^{-1} \tilde{T}_S K_N^{-1} V$ , где  $R$  — преобразование, приводящее матрицу  $D$  к диагональной форме, т. е.  $\tilde{R}DR = \Lambda$ , дает:

$$d^*(V) = LV, \quad (150)$$

где

$$T_d D^{-1} \tilde{T}_S = L K_N. \quad (151)$$

Уравнение (151) определяет минимаксную предсказывающую систему  $L$  через корреляционную матрицу гауссова шума  $K_N$  и матрицы  $T_S$  и  $T_d$ , входящие в выражения (139) и (142) для сигнала и оцениваемого параметра. Заметим, что оператор (150) обладает транслятивностью (146), как и должно быть.

Для отыскания способа сглаживания или предсказания сигнала  $S(t)$  при непрерывной выборке в интервале наблюдения  $(0, T)$  мы определяем  $T_S$  и  $T_d$  по формуле (141).

Обозначив через  $t_\lambda$  момент, в который требуется получить оценку параметров сигнала, находящегося внутри интервала наблюдения  $(0, T)$  (сглаживание) или вне  $(0, T)$  (предсказание), из (150) получаем для непрерывной выборки в интервале  $(0, T)$ :

$$S^*(t_\lambda) = \int_0^T L_\lambda(\tau) V(\tau) d\tau \quad \left( L_\lambda(\tau) = \frac{dL(\tau)}{d\tau} \right) \quad (152)$$

(см. замечание в § 8 раздела III о переходе к пределу). Для соответствующего представления равенства (151) мы вводим новую матрицу  $\mathbf{X}$  порядка  $(q+1) \cdot n$ , такую, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{T}_S \text{ или } \mathbf{T}_S \mathbf{X} = \mathbf{K}_N. \quad (153)$$

При этом для непрерывной выборки в случае гауссова шума формула (151) переходит в следующую:

$$\sum_{k=0}^q t_\lambda^k X_k(t_0) = \int_0^T L_\lambda(\tau) K_N(\tau - t_0) d\tau; \quad (0 \leq t_0 \leq T), \quad (154)$$

где коэффициенты  $X_k(t)$  определяются из формулы (153), написанной для непрерывной выборки:

$$\sum_{k=0}^q t^k X_k(t_0) = K_N(t - t_0). \quad (155)$$

Здесь  $t_0$  — произвольный момент времени в интервале  $(0, T)$ , удобный для наблюдения.

При  $t_0 = t_\lambda$  формулы (152) и (154), выведенные без наложения условия линейности на приемную систему, формально сходны с теми, которые дали Заде и Рагадзини [Л. 32]\*. Однако уравнение (155), по-видимому, указывает, что решение Заде и Рагадзини является минимаксным только в том случае, если корреляционная функция шума может быть представлена многочленом  $q$ -го порядка от времени.

Конечно, операторы (150) и (151) являются минимаксными лишь для гауссова шума. При других статистиках минимаксный оператор в общем случае не будет линейным. Поэтому интересно определить, насколько линейная минимаксная приемная система, предназначенная для экстра-

\* См. также [Л. 21, 24 и 26]. (Прим. ред.).

поляции сигналов, отклоняется от оптимального нелинейного экстраполятора. Некоторые стороны этой задачи рассматривались в статье Дренника [Л. 42].

Дренник в своем исследовании, основанном на расширении теоремы Гиршика и Сэвиджа [Л. 63], выражает минимаксный экстраполятор любого порядка  $q$  [порядка многочлена уравнения (140)] в виде линейного экстраполятора порядка  $q$  с поправочным членом. Поправочный член зависит от линейных экстраполяторов низшего порядка, каждый из которых должен обладать транслятивностью, выраженной формулой (146). Настоящая трактовка и трактовка Дренника сходны по общему результату, но отличаются формой и методикой вывода. Дренник иллюстрировал применение теории на примере определения величины поправочного члена для шума, незначительно отличающегося от негауссова. Как мы неоднократно упоминали выше, важно знать такие примеры ухудшения эксплуатационных качеств приемной системы, близкой к оптимальной, по сравнению со строго оптимальной приемной системой.

## 7. Потеря информации при воспроизведении параметров сигнала

Потеря информации может служить критерием для оценки качества приемной системы, предназначенной для воспроизведения сигналов, аналогично системам обнаружения сигналов, как это сделано в § 10 раздела III. «Информация» о сигнале  $S$ , содержащаяся в наблюдении  $V$ , или неопределенность на входе устройства воспроизведения сигналов равна:

$$H_v = - \int_{\Omega} \int_{\Gamma} p(V, S) \ln p(S/V) dS dV. \quad (156)$$

Неопределенность на выходе устройства воспроизведения сигнала, дающего оценку сигнала согласно правилу  $\gamma(V)$  [уравнение (9)], для нерандомизированного правила принятия решения равна:

$$H(\sigma, \rho) = - \int_{\Omega} \int_{\Gamma} p(V, S) \ln p[S/\gamma(V)] dS dV. \quad (157)$$

Разность между этими величинами равна средней потере информации о сигнале  $S$  при производимом приемной системой преобразовании от наблюдений  $V$  к оценкам  $\gamma$ .

Если оператор  $\gamma(V)$  определяет взаимно однозначное точечное преобразование от наблюдения  $V$  к оценке  $\gamma$ , как,

например, в случае байесовской оценки гауссова сигнала и шума (см. § 4 раздела IV), то в системе не происходит потери информации. Это значит, что при этих условиях знание принятого решения  $\gamma$  дает в среднем столько же сведений о сигнале на входе, как и знание самого результата наблюдения  $V$ .

В том, что потеря информации равна нулю, мы убеждаемся из (156) и (157). Действительно, поскольку

$$p(S/\gamma) = p(S) \frac{p(\gamma/S)}{p(\gamma)} \quad (158)$$

и

$$p(\gamma/S) = p(V/S)/I(\gamma/V), \quad (159)$$

то

$$p(\gamma) = p(V)/I(\gamma/V), \quad (160)$$

где  $I(\gamma/V)$  — абсолютное значение якобиана

$$|\partial(\gamma_1, \dots, \gamma_n)/\partial(V_1, \dots, V_n)|.$$

Таким образом,

$$p(S/\gamma) = p(S) \frac{p(V/S)}{p(V)} = p(S/V), \quad (161)$$

так что неопределенности на входе и выходе устройства воспроизведения (156) и (157) одинаковы.

Заметим, что в устройстве воспроизведения происходит потеря энтропии, равная:

$$-\int_{\Gamma} p(V) \ln \frac{p(V)}{p(\gamma)} dV = -\int_{\Gamma} p(V) \ln J(\gamma/V) dV.$$

При линейном преобразовании  $\gamma = QV$ , упомянутом выше, в § 3 раздела IV, это выражение равно минус логарифму определителя  $Q$ , но не равно потере информации в употребляемом здесь смысле. Уравнения (156) и (157) выражают потерю информации о сигнале  $S$  при данном  $V$ , тогда как указанная выше потеря энтропии есть мера потери информации в самих апостериорных данных  $V$ , вызванная изменением метрики [Л. 6]. Это показывает, как важно точно указывать, о какой величине мы хотим получить информацию.

Если устройство воспроизведения сигнала осуществляет необратимое преобразование  $\gamma(V)$  от  $V$  к  $\gamma$  (т. е. если из знания оценки  $\gamma$  не вытекает полного знания о входном напряжении  $V$ ), то информация теряется, если только  $\gamma(V)$

не оказывается достаточной статистикой (см. § 5 раздела II), в [Л. 10]. Например, байесовское устройство воспроизведения амплитуды когерентного сигнала в гауссовом шуме (§ 4 раздела IV) преобразует  $n$ -мерные принимаемые данные  $V$  в одномерные оценки  $a^* V$ , но поскольку эта оценка является достаточной статистикой, в этом частном случае информация не теряется.

## V. МЕРЫ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПРИЕМЕ

Как показано в § 7 раздела II, общая формулировка задач приема сигналов с точки зрения потери информации одинакова с формулировкой этой задачи с точки зрения риска, с той разницей, что функция стоимости  $C(S/\gamma)$  теории риска заменяется недостоверностью:  $-\ln p(S/\gamma)$ . Одно из наиболее важных применений теории информации при приеме сигналов состоит в оценке приемных систем, не являющихся оптимальными с точки зрения потери информации, но которые могут быть оптимальными с других точек зрения. В этом разделе мы покажем, как можно применять понятие ненадежности (эквивалент среднего риска) для оценки качества систем бинарного обнаружения сигналов (оптимальных и неоптимальных), а в следующем разделе мы выясним, какой тип приемной системы является оптимальным с точки зрения критерия минимальной ненадежности.

Для уточнения выражения (9) при бинарном обнаружении сигналов принимаем, что не рандомизированное правило принятия решения разбивает пространство наблюдения  $\Gamma$  на две области, обозначаемые  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , и решение  $\gamma_0$  (есть один шум) принимается, когда  $V \in \Gamma_0$ , а решение  $\gamma_1$  (есть сигнал и шум) — когда  $V \in \Gamma_1$ . Итак, мы пишем:

$$\delta(\gamma_i/V \in \Gamma_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1), \quad (162)$$

где  $\delta_{ij}$  равно 0 ( $i \neq j$ ) или 1 ( $i = j$ ). При этом (9) переходит в

$$H(\sigma, \delta) = - \int_{\Omega} \sigma(S) \{ p(\gamma_0/S) \ln p(S/\gamma_0) + p(\gamma_1/S) \ln p(S/\gamma_1) \} dS. \quad (163)$$

Из (163) можно вычислить ненадежность для данной системы бинарного обнаружения сигналов и по величине ненадежности судить о качестве системы {см. пример на рис. 6 [Л. 10] и рассуждения, приведенные там же после уравнения (5,4)}

## 1. Системы обнаружения, дающие минимум ненадежности

Выше мы видели, как можно применять понятие ненадежности для оценки произвольных систем обнаружения сигналов. Теперь обратимся к задаче описания системы обнаружения сигналов, наилучшей с точки зрения потери информации, т. е. системы, обеспечивающей минимум ненадежности. Поскольку значение  $p(S/\gamma)$  при использовании критерия потери информации зависит от применяемого правила принятия решения, а значение стоимости  $C(S, \gamma)$  от него не зависит, то правило принятия решения, дающее минимум потери информации, несколько труднее найти, чем правило, дающее минимум риска.

Обратимся к общему выражению для надежности (163) и будем искать его минимум путем выбора границы между областями  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , не делая специальных допущений об априорном распределении сигнала  $\sigma(S)$ . Вероятностные функции  $p(S_i/\gamma_i)$  и  $p(\gamma_i/S_i)$  могут быть записаны как:

$$p(S_i/\gamma_i) = \int_{\Gamma_i} p(S/V) p(V/\gamma_i) dV \quad (164)$$

и

$$p(\gamma_i/S) = \int_{\Gamma_i} F(V/S) dV. \quad (165)$$

Здесь  $p(V/\gamma_i)$  есть вероятность того, что  $V$  — наблюдаемое значение при решении  $\gamma_i$ . Поскольку правило принятия решения нерандомизировано, всякое наблюдение  $V$ , принадлежащее области  $\Gamma_i$ , приводит к решению  $\gamma_i$  с вероятностью 1, а величины  $V$ , лежащие вне области  $\Gamma_i$ , вообще не могут привести к решению  $\gamma_i$ . Таким образом, вероятность  $p(V/\gamma_i)$  постоянна в  $\Gamma_i$  и равна обратной величине объема области  $\Gamma_i$ , поскольку она должна быть соответственно нормирована. Итак:

$$p(V/\gamma_i) = 1/\Gamma_i, \quad (166)$$

$$p(S/\gamma_i) = (1/\Gamma_i) \int_{\Gamma_i} p(S/V) dV, \quad (167)$$

где мы обозначили через  $\Gamma_i$  объем области, а также область значения величин  $V$ , входящую в этот объем. Обозначая через  $V'$  точку на границе между областями  $\Gamma_0$  и

$\Gamma_1$  и полагая, что область  $\Gamma_0$  увеличится до  $\Gamma_0 + d\Gamma_0$  при изменении  $\mathbf{V}'$  от  $\mathbf{V}'$  до  $\mathbf{V}' + d\mathbf{V}'$ , находим для производных:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}'} p(\gamma_0/S) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}'} p(\gamma_1/S) = F(\mathbf{V}'/S), \quad (168)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}'} \ln p(S/\gamma_0) = \frac{p(S\mathbf{V})}{\Gamma_0 p(S/\gamma_0)} - \frac{1}{\Gamma_0} \quad (169)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}'} \ln p(S/\gamma_1) = \frac{-p(S/\mathbf{V}')}{\Gamma_1 p(S/\gamma_1)} + \frac{1}{\Gamma_1}. \quad (170)$$

Здесь производные имеют следующие значения:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f(\mathbf{V}) = \lim_{\Delta \mathbf{V} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) - f(\mathbf{V})}{\Delta \mathbf{V}}; \quad (171)$$

причем предполагается, что для всех  $\Delta \mathbf{V}$  существует единственный предел. Тогда производная выражения, стоящего в скобках под интегралом в (163), будет равна:

$$\frac{p(S/\mathbf{V})}{\sigma(S)} \left\{ \frac{p(\gamma_0)}{\Gamma_0} - \frac{p(\gamma_1)}{\Gamma_1} \right\} + \frac{p(\gamma_1/S)}{\Gamma_1} - \frac{p(\gamma_0/S)}{\Gamma_0} + F(\mathbf{V}'/S) \ln \frac{p(S/\gamma_0)}{p(S/\gamma_1)}. \quad (172)$$

Здесь мы использовали соотношение

$$p(S/\gamma_i) = \frac{\sigma(S)}{p(\gamma_i)} p(\gamma_i/S), \quad (173)$$

где  $p(\gamma_i)$  — полная вероятность принять решение  $\gamma_i$ , равная:

$$p(\gamma_i) = \int_{\Omega} p(\gamma_i/S) \sigma(S) dS. \quad (174)$$

При интегрировании по пространству сигналов  $\Omega$ , указанному в (163), первые четыре члена в (172) пропадают, и мы получаем окончательно:

$$\frac{\partial H(\sigma, \gamma)}{\partial \mathbf{V}'} = - \int_{\Omega} \sigma(S) F(\mathbf{V}'/S) \ln \frac{p(S/\gamma_0)}{p(S/\gamma_1)} dS = 0. \quad (175)$$

Это есть условие минимальной (или максимальной) ненадежности; следовательно, граница между областями  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  должна быть такой, чтобы это соотношение выполнялось.

Формулы для испытаний при односторонней и простой альтернативе получаются из (175) при соответствующем уточнении распределения сигнала  $\sigma(S)$ . Для односторонней альтернативы мы принимаем, как и раньше,  $\sigma(S) =$

$= q\sigma(S-0) + p w_1(S)$ . Это дает, при замене  $F(V'/S)$  в случае аддитивного шума  $W_n(V'-S)$ :

$$\frac{\overline{p W_n(V'-S)}_{S/\gamma}}{q W_n(V')} = -\ln \frac{p(S=0/\gamma_0)}{p(S=0/\gamma_1)}, \quad (176)$$

где

$$\overline{W_n(V'-S)}_{S/\gamma} = \int_{\Omega} W_n(V'-S) W_1(S) \ln \frac{p(S/\gamma_0)}{p(S/\gamma_1)} dS. \quad (177)$$

Уравнения (176) и (177) показывают, что оптимальное (или экстремальное) разбиение пространства наблюдений достигается в этом случае посредством испытания на обобщенный коэффициент правдоподобия, в котором  $W_n(V'-S)$  усредняется по распределению  $w_1(S) \ln p(S/\gamma_0)/p(S/\gamma_1)$ , которое в свою очередь зависит от оптимального (или экстремального) разбиения пространства наблюдений.

Для простой альтернативы мы имеем  $\sigma(S) = q\delta(S-0) + p\delta(S-S_1)$ , так что из (175) получаем:

$$\frac{p W_n(V'-S_1)}{q W_n(V')} = K_H. \quad (178)$$

где

$$K_H = \frac{\ln Z_0}{\ln Z_1} \quad (179)$$

и

$$z_0 = \frac{p(S=0/\gamma_0)}{p(S=0/\gamma_1)}; \quad (180)$$

$$z_1 = \frac{p(S_1/\gamma_0)}{p(S_1/\gamma_1)}. \quad (181)$$

Значения наблюдений  $V'$ , удовлетворяющие уравнению (178), определяют экстремальную границу между областями  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , т. е. если принимается решение «есть один шум», когда наблюдение  $V$  попадает в область  $\Gamma_0$ , а решение «есть сигнал и шум», — когда наблюдение  $V$  попадает в область  $\Gamma_1$ , то при таком разбиении пространства наблюдений потеря информации является максимальной или минимальной.

Заметим, что уравнение (178) определяет испытание коэффициента правдоподобия такого же типа, как байесовское испытание для соответствующей задачи в теории риска. Итак, испытания, обеспечивающие минимум потери информации (если они существуют), принадлежат к байе-



совскому классу и эквивалентны испытаниям на минимальный средний риск со специальными функциями стоимости. Следовательно, приемная система может быть оптимальной одновременно с точки зрения риска и с точки зрения потери информации.

Чтобы показать, что существуют решения уравнения (178), обеспечивающие минимум потери информации, мы можем использовать уравнение (167) из [Л. 10], с тем чтобы выразить  $z_0$  и  $z_1$  из (180) и (181) через вероятности  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . При  $\mu = p/q$  мы получим:

$$z_0 = \mu \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left( \frac{1 + \alpha/\mu - \beta}{1 - \alpha + \beta\mu} \right) \quad (182)$$

и

$$z_1 = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) \left( \frac{1 - \alpha + \beta\mu}{1 + \alpha/\mu - \beta} \right). \quad (183)$$

Можно легко показать, что при  $\alpha + \beta < 1$  (обычно это условие представляет наибольший интерес) как  $z_0$ , так и  $z_1$  больше 1, так что пороговое значение коэффициента правдоподобия  $K_n$  всегда положительно. Заметим, что при перемене местами  $\alpha$  с  $\beta$  с  $p$  с  $q$  меняются местами  $z_0$  и  $z_1$ , так что величина  $K_n$  становится обратной. Эту симметрию можно видеть на универсальной кривой рис. 7 в [Л. 10], изображающей соотношение между  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $K_n$  при  $\mu = 1$ .

Итак, хотя испытания, дающие минимум потери информации, представляют собой испытания коэффициента правдоподобия и, следовательно, составляют подкласс байесовских испытаний, они возможны при значительно менее общих условиях, чем испытания, дающие минимум риска. Иначе говоря, испытания, дающие наименьшую потерю информации, возможны при любом отношении стоимостей и любом  $\mu$ , тогда как испытания коэффициента правдоподобия возможны только при некоторых отношениях стоимостей и значениях  $\mu$  в зависимости от статистических свойств шума и сигнала. Определение общих условий, при которых экстремум потери информации возможен и, кроме того, является минимумом, ждет дальнейшего исследования.

## 2. Критерий потери информации при воспроизведении сигналов

Для уточнения уравнения (9) в случае воспроизведения сигналов будем считать, что правило принятия решения яв-

ляется нерандомизированным, и используем соотношение (12):

$$H(\alpha, \rho) = - \int_{\Gamma} dV p(V) \int_{\Sigma} p(S/V) \ln p(S/\gamma(V)) dS. \quad (184)$$

Это выражение можно свести к минимуму путем выбора такого правила принятия решения  $\gamma$ , которое дает минимум второго интеграла в (184) при произвольном фиксированном  $V$ . Как и раньше, априорную вероятность наличия сигнала  $p(S/\gamma)$  можно выразить как:

$$p(S/\gamma) = \int_{\Gamma_{\gamma}} p(S/V) p(V/\gamma) dV, \quad (185)$$

где  $\Gamma_{\gamma}$  означает область всех принимаемых данных  $V$ , приводящих к решению  $\gamma$ . На основании приведенных выше рассуждений [ср. (166)] вероятность  $p(V/\gamma)$  постоянна по области  $\Gamma_{\gamma}$  пространства наблюдений  $\Gamma$  и равна нулю вне этой области, так что

$$p(V/\gamma) = \frac{1}{N(\gamma)}; \quad (N(\gamma) = \int_{\Gamma_{\gamma}} dV). \quad (186)$$

Поэтому из (185) получим:

$$p(S/\gamma) = \frac{M_S(\gamma)}{N(\gamma)}; \quad (M_S(\gamma) = \int_{\Gamma_{\gamma}} p(S/V) dV). \quad (187)$$

Дифференцируя (184) по  $\gamma$ , мы получим следующее условие для экстремума потери информации:

$$\int_{\Sigma} p(S/V) \left[ \frac{M'_S(\gamma)}{M_S(\gamma)} - \frac{N'(\gamma)}{N(\gamma)} \right] dS = 0, \quad (188)$$

где штрихи означают производные по  $\gamma$ . Ввиду определений (186) и (187) это равенство устанавливает требования, которым должна удовлетворять область  $\Gamma_{\gamma}$ . Оптимальное (или экстремальное) правило принятия решений  $\gamma$  на основе наблюдений  $V$  должно быть таким, чтобы оно образовало области  $\Gamma_{\gamma}$  в пространстве наблюдений  $\Gamma$ , обладающие свойствами, задаваемыми выражением (187).

Мы замечаем сразу, что условие (187) выполняется, если решение  $\gamma$  является достаточной статистикой, т. е. если  $p(S/V) = p(S/\gamma)$ ,  $V \in \Gamma_\gamma$ , ибо в этом случае мы имеем:

$$M_S(\gamma) = p(S/\gamma) N(\gamma), \quad (189)$$

и выражение в скобках в (188) переходит в выражение

$$\frac{1}{p(S/V)} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} p(S/\gamma), \quad (190)$$

при котором равенство (188) переходит в тождество.

Условие достаточности получается при минимуме выражения (184) относительно неограниченного изменения плотности вероятности  $p(S/\gamma)$  (см. § 5 раздела I). Если же распределение  $F(V/S)$  не допускает достаточной статистики, то равенство (188) все-таки дает условие экстремума.

Уравнения (186) и (187) можно написать в более удобной форме:

$$N(\gamma) = \int_{\Gamma} \delta[\gamma - \gamma_s(V)] dV \quad (191)$$

и

$$M_S(\gamma) = \int_{\Gamma} p(S/V) \delta[\gamma - \gamma_s(V)] dV. \quad (192)$$

При аддитивных сигнале и шуме и равномерном априорном распределении сигнала (см. примечание после примера 1 в § 3 раздела IV) апостериорная вероятность  $p(S/V)$  равна:

$$p(S/V) = \frac{W_n(V - S)}{\int_{-\infty}^{\infty} W_n(V - S) dS}, \quad (193)$$

откуда

$$p(S/U + \lambda) = p(S - \lambda/U) \quad (194)$$

при произвольном  $\lambda$ .

Из § 4 раздела IV следует, что оптимальная приемная система при этих условиях является минимаксной с точки зрения риска и обладает свойством транслятивности  $\gamma_s(V + \lambda) = \gamma_s(V) + \lambda$ . Если в (191)  $\gamma$  заменить на  $\gamma + \lambda$  и произвести замену переменной  $U = V - \lambda$ , то на основании свойства транслятивности  $N(\gamma)$  является постоянным, или

$$N'(\gamma) = 0. \quad (195)$$

При этом предполагается, что пространство наблюдений  $\Gamma$  бесконечно. Проведя такие же операции над (192) и используя (194), мы получим  $M_S(\gamma + \lambda) = M_{S-\lambda}(\gamma)$  при произвольном  $\lambda$ . Отсюда

$$M_S(\gamma) = - \frac{\partial M_S(\gamma)}{\partial S}, \quad (196)$$

так что (188) переходит в

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p(S/V) \frac{1}{M_S(\gamma)} \cdot \frac{\partial M_S(\gamma)}{\partial S} dS = 0 \quad (197)$$

Для выполнения этого равенства на  $p(S/V)$  должно быть наложено дополнительное условие симметрии. Например, если распределение шума при фиксированных результатах наблюдений  $V$  симметрично по  $S$  относительно наиболее правдоподобного значения  $S(V)$ , т. е. если

$$W_n(V - (\hat{S} + \lambda)) = W_n(V - (\hat{S} - \lambda)) \quad (198)$$

при произвольном  $\lambda$ , то из (193) следует, что

$$p(\hat{S} + \lambda/V) = p(\hat{S} - \lambda/V), \quad (199)$$

а из (192) следует:

$$M_{S+\lambda}(\gamma) = M_{S-\lambda}(\gamma). \quad (200)$$

Если подставить  $S = \hat{S} + \lambda$  в (199) и разделить интервалы интегрирования на два интервала  $-(\infty, 0)$  и  $(0, \infty)$ , то при выполнении соотношений (199) и (200) равенство (197) превращается в тождество.

Следовательно, если сигнал и шум аддитивны и распределение  $W_0(V-S)$  симметричное, как требует равенство (198), а априорное распределение сигнала равномерное, то устройство воспроизведения сигналов с минимальным риском (при функции стоимости, равной квадратичной ошибке) дает также минимум потери информации. Кроме того, из § 3 раздела IV следует, что при условии симметрии (198) минимаксный способ оценки параметров сигнала и оценка параметров по методу максимального правдоподобия совпадают. Следовательно, оценка параметров сигнала по методу максимального правдоподобия сводит к минимуму потерю информации, если:

- 1) сигнал и шум являются аддитивными;
- 2) априорное распределение сигнала равномерное и

3) распределение  $W_n(V-S)$  симметрично относительно оценки максимального правдоподобия, как в (198).

В частности, если шум является гауссовым, то функция оценки максимального правдоподобия является достаточной статистикой [уравнение (92) и след.], которая действительно обеспечивает минимум потери информации, как мы знаем из рассуждений, предшествующих уравнениям (182) или (183).

Таким образом, мы установили еще ряд свойств воспроизведения сигналов по максимальному правдоподобию, кроме описанных в разделе IV. Устройство воспроизведения сигналов по максимальному правдоподобию оптимально в следующих отношениях:

1) обеспечивает минимум среднего риска для простой функции стоимости (см. § 1 раздела IV);

2) обеспечивает минимум среднего риска при функции стоимости, равной среднеквадратичной ошибке, когда совместное распределение принимаемых данных  $V$  и сигналов  $S$  симметрично относительно  $\hat{S}$  при всяком  $V$  (см. § 3 раздела IV);

3) обеспечивает минимум ненадежности, когда априорное распределение сигнала равномерно, сигнал и шум аддитивны и распределение  $W_n(V-\hat{S})$  симметрично относительно  $\hat{S}$  при всяком  $V$ .

Приемные системы, удовлетворяющие условиям экстремума потери информации (188), требуют еще дополнительного исследования.

## VI. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы заканчиваем наш разбор некоторыми общими замечаниями о связи изложенного подхода к задаче приема сигналов с теорией информации и теорией игр и о соотношении между этими теориями и теорией статистических решений.

### 1. Связи с теорией игр

Идеи, лежащие в основе изложенного взгляда на прием сигналов, тесно связаны с идеями теории игр, развитой Нейманом [Л. 63] и др. [Л. 64]. Действительно, Вальд пришел к своему фундаментальному выводу, выражающемуся в теореме о полном классе, рассматривая задачу принятия решения как игру с нулевой суммой между двумя лицами, в данном случае между природой и наблюдателем [Л. 1]. Поэтому для понимания изложенного здесь обобщенного

подхода к задаче приема сигналов и применения его к новым проблемам полезно несколько ознакомиться с терминологией, применяемой при теоретико-вероятностном анализе таких игр.

Игра двух лиц с нулевой суммой в своей простейшей форме включает двух игроков, каждый из которых имеет множество возможных „ходов“ или действий, обозначаемых соответственно  $(a_i)$  и  $(b_j)$ , и платежную функцию  $A(a_i, b_j) \geq 0$ . Игроки 1 и 2 выбирают свои ходы  $a_i$  и  $b_j$ , причем ни один из них не знает, какой ход выбрал другой игрок, и получают платежи соответственно  $A(a_i, b_j)$  и  $-A(a_i, b_j)$ , т. е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Игрок 1, очевидно, хочет максимизировать платеж  $A$ , а игрок 2 стремится минимизировать платеж  $-A$ . Теория игр занимается отысканием оптимальных способов проведения таких игр.

В качестве примера предположим, что у каждого игрока есть два возможных хода —  $a_1, a_2$  для игрока 1 и  $b_1, b_2$  — для игрока 2, а схема платежей изображается следующей платежной матрицей:

$$\begin{bmatrix} A(a_1, b_1) & A(a_1, b_2) \\ A(a_2, b_1) & A(a_2, b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (201)$$

Мы можем считать, что ход игрока 1 состоит в выборе строки, а ход игрока 2 — в выборе столбца, а окончательный платеж указывается элементом матрицы, находящимся на пересечении выбранных строки и столбца. Очевидно, игрок 1 при правильном выборе (строка 1) может выиграть по меньшей мере 5, независимо от того, как поступает игрок 2, а игрок 2 может добиться того, что его проигрыш будет не больше 5 (при выборе столбца 2), независимо от того, как поступает игрок 1. Выборы строки 1 игроком 1 и столбца 2 игроком 2 называются минимаксными стратегиями, так как, очевидно, они основаны на том, что игрок 1 играет так, чтобы обеспечить максимум своего минимального выигрыша, а игрок 2 играет так, чтобы обеспечить минимум своего максимального проигрыша.

В этом примере мы имеем:

$$\text{Max } a_1 \text{ Min } a_2 A(a_1, a_2) = \text{Min } a_2 \text{ Max } a_1 A(a_1, a_2) = v \quad (202)$$

при  $v = 5$ .

Когда имеет место уравнение (202), игра является строго определенной и имеет цену  $v$ . При этом условии и когда

оба игрока применяют свои минимаксные стратегии, ни один игрок не сможет поступить лучше, даже если стратегия его противника становится ему известна. Поэтому такие стратегии можно определить как оптимальные для обоих игроков, находящихся в полном неведении относительно очередного хода своего противника.

Предположим теперь, что платежная матрица есть

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (203)$$

Минимаксными стратегиями игроков 1 и 2 в этом случае будут соответственно выборы строки 2 и столбца 1. Однако игра не является строго определенной, потому что уравнение (202) не выполняется. Вследствие этого, если игрок 2 обнаруживает, что игрок 1 применяет минимаксную стратегию, то он может улучшить свое положение, отказавшись от минимаксного выбора (столбца 1), и вместо того выбрать столбец 2. Тогда игроку 1 нужно сделать свой выбор таким способом, который не может быть точно предвиден игроком 2. Он может сделать это с помощью вероятностного механизма, который будет выбирать строку 1 с вероятностью  $P_1$  и строку 2 с вероятностью  $P_2$ . Выбор вероятностей  $P = (P_1, P_2)$  называется смешанной стратегией в отличие от неслучайных выборов, рассмотренных выше. Конечно, игрок 1 должен предполагать, что игрок 2 будет также применять смешанную стратегию  $Q = (Q_1, Q_2)$ , и соответственно минимаксная (смешанная) стратегия игрока 1 в данном случае будет состоять в том, чтобы посредством выбора  $P$  обеспечить максимум минимального среднего выигрыша с учетом возможных для игрока 2 выборов стратегии  $Q$ . То же самое относится к минимаксной стратегии игрока 2. Условие строгой определенности при допустимости смешанных стратегий будет следующим:

$$\text{Max } P \text{ Min } Q \bar{A}(P, Q) = \text{Min } Q \text{ Max } P \bar{A}(P, Q) = v, \quad (204)$$

где

$$\bar{A}(P, Q) = \sum_i \sum_j P_i A(a_i, b_j) Q_j \quad (205)$$

называется функцией исходов игры. И в этом случае, если игра подчиняется условию (204) и оба игрока применяют оптимальные (минимаксные) стратегии, ни один игрок не может улучшить своего ожидаемого выигрыша или проигрыша посредством обнаружения стратегии своего противника. Кроме того, как пояснено выше, хотя игра не всегда

строго определена, когда у игроков имеются лишь неслучайные выборы, Нейман показал [Л. 63], что такие игры являются всегда строго определенными, если допущены смешанные стратегии, при условии, что число альтернатив конечно. Можно проверить, например, что оптимальные стратегии для игры с платежной матрицей (203) будут  $P = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$  и  $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  при  $v = 3\frac{1}{2}$ .

В теории решений при приеме сигналов два «игрока» — это природа, дающая шум и возможно сигнал, и наблюдатель или приемная система, составляющие надлежащее конечное решение. Платежной функцией является условный риск  $r(S, \delta)$ , а функцией исходов является средний риск  $R(\sigma, \delta)$ . Неслучайными «выборами» природы и наблюдателя являются выборы сигнала  $S$  и правила принятия решения  $\delta$  соответственно, а смешанные стратегии состоят в «выборе» природой априорного распределения сигнала  $\sigma(S)$  по классу  $\Omega$  возможных входных величин сигнала и в выборе наблюдателем распределения по классу  $D$  возможных правил решения. В связи с этим отметим, что поскольку правило принятия решения  $\delta$  само является распределением вероятности, выбор распределения по всем  $\delta$  равносильен простому выбору правила принятия решения  $\delta$ . Этот способ формулировки игры оказывается удобным для того, чтобы показать, что при некоторых условиях (см. [Л. 1]) условие строгой определенности, аналогичное уравнению (204), а именно:

$$\text{Min } \delta \text{ Max } \pi R(\pi, \delta) = \text{Max } \pi \text{ Min } \delta R(\pi, \delta) \quad (206)$$

при

$$R(\pi, \delta) = \int_{\Omega} r(S, \delta) dS, \quad (207)$$

имеет место не только тогда, когда пространства неслучайных выборов  $\Omega$  и  $D$  конечны, но и тогда, когда они содержат счетное или даже несчетное множество элементов. Таким образом, когда смешанная «стратегия» природы  $\sigma(S)$  неизвестна наблюдателю, для него при этих условиях возможна оптимальная стратегия, требующая по существу, чтобы он поступал так, как если бы природа применяла наименее благоприятную для него стратегию. Если же наблюдатель знает «стратегию» природы, т. е. знает распределение  $\sigma(S)$ , то обычно для него не возникает вопроса о выборе оптимальной стратегии, поскольку байесовские пра-



вила обычно оказываются единственными, как видно на примерах специальных байесовских устройств обнаружения и воспроизведения, рассмотренных в § 4 раздела III.

## 2. Зависимость потерь информации от величины ошибки при обнаружении

Как указано выше в разделах I и V, потеря информации и риск дают два способа оценки приемной системы, которые могут привести к совершенно различным и даже противоположным суждениям об одной и той же системе. Это происходит потому, что они подчеркивают разные стороны работы приемной системы: средний риск уменьшается при понижении вероятности ошибок решения (при фиксированных стоимостях различных ошибок), а по критерию потери информации выше всего оценивается система, в которой апостериорные вероятности до и после выполнения операций системой примерно одинаковы.

В качестве другого простого примера, поясняющего различную природу этих двух критериев, рассмотрим систему двоичного обнаружения, работающую с фиксированным порогом или разбиением пространства наблюдений  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$  и дающую на выходе визуальное указание, которое может быть либо зеленым (событие  $E_0$ ), либо красным (событие  $E_1$ ) в зависимости от того, попадает ли наблюдаемая входная величина в область  $\Gamma_0$  или в область  $\Gamma_1$ . Мы добавим к этой системе другую подсистему, которая привязывает два решения:  $\gamma_1$  — «есть сигнал и шум» — и  $\gamma_0$  — «есть один шум» — к двум указаниям  $E_1$  и  $E_0$ . Если исключить рандомизированные операции, то для этой подсистемы имеются четыре возможных построения, а именно:

$$\begin{aligned} \delta_I: \begin{cases} E_0 \rightarrow \gamma_0 \\ E_1 \rightarrow \gamma_1 \end{cases}; \quad \delta_{II}: \begin{cases} E_0 \rightarrow \gamma_1 \\ E_1 \rightarrow \gamma_0 \end{cases}; \\ \delta_{III}: \begin{cases} E_0 \rightarrow \gamma_1 \\ E_1 \rightarrow \gamma_1 \end{cases}; \quad \delta_{IV}: \begin{cases} E_0 \rightarrow \gamma_0 \\ E_1 \rightarrow \gamma_0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (208)$$

Мы хотим определить величину ошибок и потерю информации для этих комбинаций (см. [Л. 49]).

Общая вероятность ошибки решения или величина ошибки приемной системы равна  $P_e = p(S_0, \gamma_1) + p(S_1, \gamma_0)$ , где  $S_0$  и  $S_1$  — два возможных состояния сигнала. Потеря информации  $H_1$  при преобразовании  $E \rightarrow \gamma$  равна нулю для правил применения решений  $\delta_I$  и  $\delta_{III}$ , потому что они обра-

тимы и является полной для правил принятия решений  $\delta_{III}$  и  $\delta_{IV}$ , потому что они допускают лишь одно решение. Конечно, есть еще потеря информации при преобразовании  $V \rightarrow E$ , но в данном случае мы ею не интересуемся. Таким образом, если, например, совместные вероятности  $p(S_i, E_j)$  определяются матрицей

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad (209)$$

то величины ошибок и потери информации определяются следующим образом:

$$\left. \begin{array}{cc} P_e & H_L \\ \delta_I & 0,3 \quad 0 \\ \delta_{II} & 0,7 \quad 0 \\ \delta_{III} & 0,2 \quad \text{Вся информация потеряна} \\ \delta_{IV} & 0,8 \quad \text{Вся информация потеряна} \end{array} \right\} \quad (210)$$

Если теперь  $p(S_i, E_j)$  определяется матрицей

$$p(S_i, E_j) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad (211)$$

то мы получим:

$$\left. \begin{array}{cc} \delta_I & 0,4 \quad 0 \\ \delta_{II} & 0,6 \quad 0 \\ \delta_{III} & 0,5 \quad \text{Вся информация потеряна} \\ \delta_{IV} & 0,5 \quad \text{Вся информация потеряна} \end{array} \right\} \quad (212)$$

Таким образом, в первом случае правило принятия решения  $\delta_{III}$  обеспечивает только наименьшую величину ошибки, а во втором случае правило  $\delta_I$  обеспечивает как наименьшую величину ошибки, так и наименьшую потерю информации. Дело в том, что малая величина ошибки не обязательно сопровождается малой потерей информации, хотя это возможно при некоторых условиях (см. раздел V).

Это положение и предыдущие рассуждения (§ 5 раздела II) снова напоминают нам о важности выбора такого критерия для оценки качества приемной системы, который по возможности соответствовал бы результатам, какие

мы хотим получить от работы приемной системы. В некоторых случаях лучше применять критерий риска, тогда как в других случаях более пригодным может быть критерий минимума потери информации. В обоих случаях задач теории связи остаются надлежащий выбор и построение приемной системы. Теория статистических решений ясно во всех деталях показывает, какими должны быть свойства приемной системы, а попытка практического осуществления приемной системы, в которой над принимаемыми данными осуществляются операции, указанные теорией, выдвигает задачи технического порядка.

## Приложение 1

### МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕПРЕРЫВНЫХ ВЫБОРОК

Для того, чтобы найти структуру оптимальной приемной системы и оценить риск, когда сигнал  $S(t)$  и смесь его с шумом  $V(t) = S(t) + N(t)$  непрерывны, необходимо иметь дело с плотностью вероятности непрерывных значений отрезка кривой  $V(t)$ , содержащихся в интервале наблюдений  $(0, T)$ .

Здесь мы обсудим некоторые аналитические подробности и результаты, связанные с этой задачей, когда сигнал и шум аддитивны.

#### 1. Выборочное представление ограниченных по частоте данных, когда период наблюдения велик

Хорошо известная теорема академика В. А. Котельникова (см., например, [Л. 1 и 6]) устанавливает, что любое колебание, ограниченное по частоте интервалом  $(0, B)$ , может быть тождественно представлено для всех моментов времени интерполяционной формулой

$$V(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} V(n/2B) \frac{\sin n\pi (2Bt - n)}{\pi (2Bt - n)}, \quad (213)$$

где  $V(n/2B) = V_n$  — ординаты функции  $V(t)$ , отстоящие друг от друга на  $\Delta = 1/2B$  сек. Плотность вероятности для принимаемых данных  $V(t)$  можно рассматривать как совместное распределение совокупности бесконечно большого числа переменных  $\{V_n\} (\infty < n < \infty)$ .

Если процесс  $V(t)$  имеет равномерную спектральную мощность в диапазоне частот  $(0, B)$ , то соответствующая

функция корреляции равна нулю при  $t = n/2B$ , и  $V_n$  являются некоррелированными (но не обязательно независимыми) случайными переменными. Здесь предполагается для простоты, что  $\overline{V(t)} = 0$ .

Если к тому же принимаемые данные  $V(t)$  являются гауссовым процессом, то  $V_n$  статистически независимы, и их совместное распределение вероятностей распадается в бесконечное произведение одномерных гауссовых распределений (см. приложение [Л. 22]).

При приближенном представлении  $V(t)$  на конечном интервале наблюдения  $0, T$  происходит усечение суммирования в (213) и остается лишь конечное число  $(2BT)$  ординат  $V_n$  в интервале  $(0, T)$ :

$$V(t) = \sum_{n=0}^{2BT} V(n/2B) \frac{\sin \pi(2Bt - n)}{\pi(2Bt - n)}. \quad (214)$$

Конечно, исключение слагаемых из (213), не содержащихся в (214), приводит к ошибкам для представления принимаемых данных внутри интервала наблюдения  $0, T$ , тем большим, чем ближе мы подходим к концам интервала. Чтобы получить некоторое представление о природе и величине этих ошибок, мы видим из (214), что хотя приближенное представление правильно для каждой выборочной точки, но ошибки становятся наибольшими в середине выборочных интервалов.

Рассмотрим точку, отстоящую от каждой из крайних точек интервала  $\frac{\Delta}{2}$  сек и находящуюся внутри интервала  $(0, T)$ . Если бы  $V(t)$  было постоянно и равно единице вне интервала  $(0, T)$  а  $T$  — столь велико, что не имели бы значение члены, отброшенные с одной стороны интервала наблюдения (при  $t < 0$  или  $t > T$ ), то ошибка в точке  $\frac{\Delta}{2}$  равнялась бы

приблизительно  $2(\pi) \sum_1^{\infty} (-1)^n (2n+1) = 1/2 - 1/\pi$ . Средне-

квадратичную ошибку, имеющую место в этой точке, приближенно найдем исходя из предположения, что величины  $V_n$  вне интервала  $(0, T)$  являются гауссовыми переменными с нулевым средним значением и дисперсиями, равными  $\phi$ .

Средний квадрат ошибки в точке  $\frac{\Delta}{2}$  соответственно равен:

$$(4/\pi^2) \sum_1^{\infty} (2n+1)^{-2} = \psi(1/2 - 4\pi^2) = 0,095\psi.$$

Аналогично, дисперсия ошибки в точке, отстоящей на  $3 \frac{\Delta}{2}$  от обоих концевых точек, равна  $(4/\pi^2) \sum_2^{\infty} (2n+1)^{-2} = 0,050\psi$  и т. д., так что дисперсия ошибки в точке, отстоящей от конца интервала наблюдения на  $5 \frac{\Delta}{2}$ , равна  $0,020\psi$  и в точке удаленной на  $10 \frac{\Delta}{2}$ , равна  $0,010\psi$ . Отметим, что возрастание интервала наблюдения  $T$  не влияет на эти ошибки до тех пор, пока  $T$  больше  $\approx 20\Delta$ . Ошибки всегда имеются на концах интервала наблюдения независимо от того, как велик конечный интервал наблюдения, так как ширина спектра  $B$  фиксирована. Конечно, для больших  $T$  относительное значение „концевых эффектов“ мало, поскольку речь идет об адекватности представления колебания  $V(t)$  на конечном интервале  $(0, T)$ . Итак, если функция  $V(t)$  ограничена полосой частот  $(0, B)$  и  $T \gg (2B)^{-1}$ , то распределение  $V(t)$  в пределах интервала времени в  $(0, T)$  можно считать совместной плотностью вероятности  $2BT$  (обычно коррелированных) случайных переменных  $X_n$ , заключенных в интервале  $(0, T)$ , допуская при этом лишь небольшую ошибку.

Если сигнал и шум аддитивны, то основным распределением вероятностей, с которым приходится иметь дело, является  $W_n(V - S)$ , где  $W_n$  является  $(n$ -мерной) совместной плотностью вероятности шума. Как показано в § 7 раздела III, если сигнал мал по сравнению с шумом, то точное представление об этом основном распределении вероятностей можно получить разложением его в ряд в окрестности  $S=0$  и использованием небольшого числа первых членов, которые (при нормальном шуме) содержат квадратичные формы вида:

$$\Phi_n(v, s) = \tilde{v} \psi K^{-1} \varepsilon, \quad \Phi_n(v, v) = \tilde{v} K^{-1} \psi v, \quad (215)$$

где  $K$  является  $(n \times n)$ -матрицей вторых моментов нормального шума. Мы будем интересоваться случаем  $T \gg (2B)^{-1}$

для которого  $n=2BT \gg 1$ . Если спектральная плотность шума не равномерна в диапазоне частот  $(0, B)$ , то матрица  $K$ , как известно, не диагональна, и задача отыскания обратной ей матрицы для использования в (215) усложняется. Миддлтон, однако, предложил использовать следующий прием для отыскания обратной матрицы.

Найдем новую матрицу  $A$ , приводящую известную матрицу  $K$  к диагональному виду:

$$AKA = \tilde{I}$$

введем новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} V' &= AV, \\ s' &= As, \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

и тогда обратная матрица примет вид:

$$K^{-1} = \tilde{A}A \quad (218)$$

а квадратичные формы (215) приводятся к

$$\Phi_n(s, v) = V's' = \sum_{i=1}^n v'_i s'_i$$

и

$$\Phi_n(v, v) = \tilde{V}'V = \sum_{i=1}^n v_i^2. \quad (219)$$

Линейное преобразование  $A$  можно интерпретировать как операцию фильтрации, замечая, что, если  $h(t)$  является весовой функцией линейного фильтра с параметрами, неизменными во времени, то реакция этого фильтра  $V'(t)$  на входное напряжение  $V(t)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} V'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) V(\tau) d\tau = \\ &= (2B)^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(t-t_j) V(t_j) \end{aligned} \quad (220)$$

или

$$V'(t) = (2B)^{-1} \sum_{j=1}^{2Bt} h(t_i - t_j) V(t_j), \quad (221)$$

где  $t_k = k/2B$   $k$ -й выборочный момент времени.

Второе равенство в (220) является следствием теории Парсеваля и Планшарля для случая двух функций  $h(t - \tau)$  и  $V(\tau)$  с ограниченным спектром частот  $(0, B)$  [Л. 31]. Сравнивая (221) с (217), видим, что матрица  $A$  может быть представлена в виде:

$$\|(A)_{ij}\| = (2B)^{-1} \|h(t_i - t_j)\|. \quad (222)$$

Фильтр с весовой функцией, определяемой (222), имеет то характерное свойство, что если на его вход подан шум с ограниченным спектром  $(0, B)$  и имеющий функцию корреляции  $K(t)$ , то спектральная плотность шума на выходе фильтра равномерна в пределах полосы частот  $0, B$  и равна нулю вне его. Этот фильтр называется «обеляющим» фильтром. Корреляционная функция выходного напряжения фильтра имеет нули при  $t = n(2B)$ , так что выборки из выходного напряжения фильтра, взятые в эти моменты времени, некоррелированы.

Подводя итоги, видим, что квадратичная форма (215), входящая в выражение основной функции распределения  $W_n(V-S)$ , может быть приведена по крайней мере приближенно к диагональной форме с помощью линейного преобразования эквивалентного пропусканию колебаний  $V$  и  $S$  через «обеляющий» фильтр.

## 2. Непрерывная выборка как предел дискретной выборки

Если интервал наблюдения невелик по сравнению с  $(2B)^{-1}$ , то приведенные выше рассуждения неверны. В этом случае следует рассматривать непрерывную выборку как предел дискретной выборки, когда  $n \rightarrow \infty$  при фиксированной длительности интервала наблюдения  $T$  (см. замечания в § 8 раздела III). Соответствующими выражениями для  $\Phi_n$  в (215) в случае непрерывной выборки являются:

$$\Phi_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n [(0, T) \text{ фиксирован}], \quad (223)$$

в которые включена корреляционная матрица.

Найдем явное выражение для  $\Phi_T(v, s)$ . Сначала введем новый вектор  $\mathbf{x} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{s}$  так, чтобы

$$\mathbf{s} = \mathbf{K}\mathbf{x} \text{ и } \Phi_n(v, s) = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{x}. \quad (224)$$

В пределе, когда  $n \rightarrow \infty$  (см. § 8 раздела III), эти соотношения приводят к интегральным уравнениям:

$$s(t) = \int_0^{T+} K(t - \tau) X(\tau) d\tau \quad (225)$$

и

$$\Phi_T(v, s) = \int_0^{T+} v(\tau) X(\tau) d\tau, \quad (226)$$

где  $X(t) = \frac{dx}{dt}$ .

Чтобы найти  $\Phi_T(v, s)$ , надо предварительно решить относительно  $X(t)$  интегральное уравнение (225). Примеры таких решений см. в [Л. 25 и 31] и § 8 раздела III.

Рассмотрим шум с ограниченным спектром частот и постоянной спектральной плотностью в пределах этого спектра частот

$$K(t - \tau) = \frac{\psi \delta(t - \tau)}{2B}, \quad (227)$$

так что для диспектной выборки имеем:

$$\Phi_n(v, s) = \sum_{i=1}^n v_i s_i. \quad (228)$$

Из (225) для этого случая следует  $s(t) = (\psi)^{-1} X(t)$  и для  $\Phi_T(v, s)$  соответственно имеем:

$$\Phi_T(v, s) \approx 2B \int_0^{T+} v(\tau) s(\tau) d\tau. \quad (229)$$

### 3. Независимые координаты случайного процесса

Другой метод анализа распределений непрерывных выборочных значений по Карунену [Л. 1] составляет сущность обобщения выборочных теорем, обсуждавшихся выше в § 1. Этот метод дает точное представление случайного процесса на конечном интервале времени с помощью



некоррелированных «координат», которые в общем случае являются функционалами реализаций случайного процесса в интервале времени  $(0, T)$ , а не отдельными ординатами случайного процесса.

Итак, если случайный процесс  $V(t)$  имеет непрерывную спектральную плотность и стационарен, то собственные функции интегрального уравнения

$$\Phi_n(t) = \lambda_n \int_0^{T+} K(t, \tau) \Phi_n(\tau) d\tau \quad (230)$$

составляют полную систему [Л. 45]. Здесь  $K(t, \tau)$  является функцией взаимной корреляции случайного процесса  $V(t)$ .

Коэффициенты Фурье случайного процесса  $V(t)$  имеют вид:

$$v_n = \int_0^{T+} V(t) \Phi_n(t) dt \quad (231)$$

и являются некоррелированными случайными переменными или независимыми координатами  $V(t)$  в интервале  $(0, T)$ .

Тогда этот случайный процесс допускает представление

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{\Phi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Заметим, что если  $V(t)$  — гауссов процесс, то случайные коэффициенты Фурье  $v_n$  также распределены по закону Гаусса (А.2) и статистически независимы, так что функцию распределения реализации случайного процесса  $V(t)$ , имевшей место в интервале времени  $0, T$ , можно выразить в виде произведения одномерных нормальных распределений. Когда  $V(t)$  не гауссов процесс, то трудности отыскания явного выражения для распределения  $v_n$  очень велики (А.2) и до сих пор не преодолены.

Гренандер [Л. 60] использовал сходные с указанными выше приемы, чтобы показать, как можно применить классическую концепцию статистических решений к случайному процессу, параметры которого непрерывно изменяются во времени. В частности, основные идеи и методы теории Неймана—Пирсона, теории несмещенных оценок с минимальной дисперсией и метод максимума коэффициента правдоподобия применимы в этом случае.

Собственные функции (230) для белого шума с ограниченным спектром частот и произвольного  $T$  были найде-

ны Слепяном [Л. 44]. Дополнительное обсуждение и приложения этого метода содержатся у Девиса [Л. 28] (А.3) и Джулия [Л. 41].

## Приложение II

### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ РИСКА ВАЛЬДА

В этом приложении дается краткое изложение теории решающих функций Вальда, которая явилась основой для исследования задачи приема сигналов. Предполагается, что решение  $\gamma$  относительно сигнала должно быть сделано на основе наблюдения  $V$ , результат которого зависит от условной плотности вероятности  $F(V/S)$ .

Правило решения принятия  $\delta(\gamma/V)$  есть вероятность (плотность вероятности) того, что решение  $\gamma$  принимается, когда наблюдается величина  $V$ , вне зависимости от  $S$ .

#### 1. Определения

Теория риска основана на следующих определениях:

1) Предполагается, что стоимость  $C(S, \gamma)$  определена для всех возможных комбинаций сигнала  $S$  и решений  $\gamma$ .

2) Условный риск  $r(S, \delta)$  при использовании правила принятия решения  $\delta$  является ожидаемым значением стоимости, если имеет место сигнал

$$r(S, \delta) = \int_{\Gamma} \int_{\Delta} C(S, \gamma) \delta(\gamma/V) F(V/S) dV d\gamma.$$

3) Средний диск  $R(\delta, \delta)$  при использовании правила решения  $\delta$  является ожидаемым значением условного риска  $r(S, \delta)$  при априорном распределении плотности вероятности сигнала  $\sigma(S)$ :

$$R(\sigma, \delta) = \int_{\Omega} r(S, \delta) \sigma(S) dS.$$

4) Минимаксное правило решения  $\delta_0^*$  является таким, при котором максимальный условный риск не больше, чем максимальный условный риск при любом другом правиле принятия решения  $\delta$ :

$$\max_S r(S, \delta_0) \leq \max_S r(S, \delta) \text{ (для всех } \delta \text{)}.$$

5) Байесово правило решения  $\delta$  является таким, при котором средний риск становится наименьшим при заданном априорном распределении вероятности сигнала  $\sigma(S)$ :

$$R(\sigma, \delta^*) = \text{Min } R(\sigma, \delta) \text{ (для всех } \delta \text{)}.$$

6) Правило решения  $\delta_1$  является равномерно лучшим по сравнению с правилом решения  $\delta_2$ , если условный риск при  $\delta_1$  не превышает условного риска при  $\delta_2$  для всех сигналов  $S$  и заведомо меньше, чем при  $\delta_2$  для некоторых частных сигналов  $S$ .

7) Правило решения является приемлемым, если не существует равномерно лучшего правила решения. Приемлемое правило не обязательно является равномерно лучшим по сравнению с другими, так как другие правила принятия решения могут иметь меньшие риски для частных значений сигнала  $S$ . Таким образом, может и не быть лучшего правила принятия решения для любых значений сигнала  $S$ .

Приемлемое правило не обязано быть минимаксным. Ясно, что правило  $\delta_0$  может иметь больший риск, чем  $\delta_A$  для некоторых значений сигнала  $S$ , а также меньший максимальный риск.

8) Класс правил решения  $D$  является полным, если для любого правила принятия решения  $\delta$  не из класса  $D$  можно найти правило  $\delta^*$  из класса  $D$ , такое что  $\delta^*$  является равномерно лучшим, чем  $\delta$ , и если класс решений  $D$  не содержит подкласс, который является полным, то класс  $D$  является минимально полным классом.

## 2. Основные теоремы

Мы будем считать, что всегда выполняются следующие условия:

а) распределение условной вероятности  $F(V/S)$  непрерывно по  $S$ ;

б) стоимость  $C(S/\gamma)$  ограничена по  $S$  и  $\gamma$ ;

в) рассматриваемый класс правил принятия решения ограничивается либо правилами, основанными на непосредственных наблюдениях, либо правилами, основанными на последовательных наблюдениях;

г) ограничимся сигналами  $S$  и  $\gamma$  решениями из конечных замкнутых пространств.

Эти условия более жестки в некоторых случаях, чем те, которые накладывал Вальд, однако они достаточны для наших целей. В частности, предположения Вальда (3.1), (3.2), (3.3) см. [Л. 1] перекрываются условиями а) и б), приведенными выше, а предположения (3.5) и (3.6) — условием в) из (3.4) и (3.7) — условием г).

Из этих предположений вытекают следующие теоремы:

1) Задача статистического решения, рассматриваемая как нуль-суммарная двухперсонная игра, является строго детерминированной:

$$\max_{\sigma} \cdot \min_{\delta} R(\sigma, \delta) = \min_{\delta} \cdot \max_{\sigma} R(\sigma, \delta).$$

(теор. 3.4 [Л. 1])

2) Для любого априорного распределения  $\sigma(S)$  существует байесово правило принятия решения  $\delta^*$  относительно  $\sigma(S)$ , (теор. (3.5) [Л. 1]).

3) Минимаксное правило принятия решения существует (1.1) (теор. (3.7) [Л. 1]).

4) Существует наименее благоприятное априорное распределение  $\sigma_0(S)$

$$\min_{\delta} R(\sigma_0, \delta) = \max_{\sigma} \cdot \min_{\delta} R(\sigma, \delta) \quad (1.1)$$

(теор. (3.14) [Л. 1]).

5) Любое минимаксное правило принятия решения является байесовского относительно наименее благоприятного априорного распределения (1.1) (теор. (3.9) [Л. 1]).

6) Класс байесовских правил решения является полным относительно класса всех правил решения, для которых условный риск является ограниченной функцией  $S$  (теор. (1.1) [Л. 1]).

Дж. Кифер [Л. 4] показал, что ограничение совокупности правил решения лишь теми, для которых условный риск является ограниченной функцией  $S$ , не обязательно. Он также показал, что класс всех приемлемых решающих функций является минимальным полным классом (см. также замечания Вальда, следующие за (теор. (3.20) [Л. 1])).

Следующие факты следуют из определений § 1.

7) Байесовское правило принятия решения  $\delta_0^*$  с постоянным условным риском является минимаксным правилом решения.

Этот факт следует из определений 4), 5) и 7) в предположении, что правило принятия решений и  $\delta_0^*$  не является минимаксным. Тогда существует правило  $\delta'$  с меньшим максимальным риском и меньшим средним риском относительно распределения  $\sigma_0(\mathbf{S})$ , что противоречит определению  $\delta_0^*$ .

8) Если байесовское правило решения является единственным, то оно является приемлемым.

Предположим, что байесовское правило принятия решений  $\delta^*$ , соответствующее распределению  $\sigma(\mathbf{S})$ , неприемлемо. Тогда существует равномерно лучшее правило  $\delta'$ , т. е.  $r(\mathbf{S}, \delta') \leq r(\mathbf{S}, \delta^*)$  для всех сигналов  $\mathbf{S}$  с неравенством для некоторых сигналов  $\mathbf{S}$ . Но отсюда следует, что средний риск  $\delta'$ , соответствующий распределению  $\sigma(\mathbf{S})$ , меньше, чем средний риск  $\delta^*$ , соответствующий распределению  $\sigma(\mathbf{S})$ .

Последнее противоречит определению правила  $\delta^*$ .

9) Минимаксное правило принятия решения имеет наименьший максимальный средний риск по сравнению с любыми другими правилами принятия решения.

Это следует из того факта, что средний риск не может быть больше максимума условного риска. Конечно, для некоторого частного распределения  $\sigma(\mathbf{S})$  иногда можно иметь меньший средний риск, чем минимаксный риск для того же распределения  $\sigma(\mathbf{S})$ .

Отметим в заключение, что на практике важно иметь возможность исключать рандомизированные правила принятия решения. Мы ссылаемся при этом на теорему Ходжеса и Лемана [Л. 46] по этому поводу. Аналогичные результаты можно найти у А. Дворецкого, А. Вальда и Дж. Вольфовица (А.5).

---

### СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $\Omega$  — пространство сигналов;  
 $\Omega_k$  — подкласс сигналов, соответствующих  $k$ -й гипотезе;  
 $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$  — вектор сигнала в  $n$ -мерном пространстве;  
 $S$  — общее обозначение сигнала;  
 $S(t)$  — сигнал как функция времени;  
 $A_0$  — амплитуда сигнала;  
 $\varepsilon$  — обобщенная фаза — момент появления сигнала, отсчитанный от некоторого условного момента времени;  
 $\theta$  — набор параметров сигнала;  
 $\psi = V_N^2$  — среднеквадратичное значение напряжения шума;  
 $a_0 = A_0/(2\psi)^{1/2}$  — отношение сигнал/шум по напряжению;  
 $a_{0 \text{ мин}}^*$  — отношение сигнал/шум для порогового сигнала;  
 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  — набор решений;  
 $\Delta$  — пространство решений;  
 $\delta(\gamma/V)$  — правило принятия решения;  
 $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_n)$  — вектор шума в  $n$ -мерном пространстве;  
 $V(t)$  — принятые данные (входное напряжение);  
 $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$  — вектор принятых данных;  
 $\Gamma$  — пространство принятых данных (пространство наблюдений);  
 $F(V/S)$  — априорная условная плотность вероятности  $V$  при наличии сигнала  $S$ ;  
 $F(V/0) = W_n(N)$  — априорная плотность вероятности шума  $N$ ;  
 $\sigma(S)$  — априорная плотность вероятности сигнала;  
 $F$  — потери или функция потерь;  
 $C$  — функция оценки;

- $L$  — оценка потери (условная или средняя);
- $C(S, \gamma)$  — функция стоимости;
- $r(S, \delta)$  — условный риск;
- $R(\sigma, \delta)$  — средний риск или средняя стоимость;
- $h(S, \delta)$  — условная потеря информации;
- $H(\sigma, \delta)$  — средняя потеря информации;
- $R^*$  — минимальный средний риск;
- $R_m^*$  — минимаксный средний риск;
- $R, R', R''$  — различные значения среднего риска;
- $\delta^*$  — байесовское правило принятия решения;
- $\delta_m^*$  — минимаксное правило принятия решения;
- $\sigma_m^*(S)$  — наименее благоприятное априорное распределение (плотность вероятности) сигнала;
- $\gamma_0$  — решение „только шум“ в бинарном обнаружении;
- $\gamma_1$  — решение „сигнал и шум“ в бинарном обнаружении;
- $w_0(S)$  — априорная плотность вероятности сигнала или параметров сигнала при нулевой гипотезе;
- $w_1(S)$  — априорная плотность вероятности сигнала или параметров сигнала при гипотезе о наличии сигнала;
- $p, q$  — априорные вероятности наличия или отсутствия сигнала;
- $\mu = p/q$
- $\alpha$  — вероятность ложной тревоги — условная вероятность принять решение о наличии сигнала шума, когда на самом деле имеется один шум (так называемая ошибка первого рода);
- $\beta$  — вероятность пропуска сигнала — условная вероятность принятия решения о наличии одного шума, когда на самом деле имеется сигнал и шум (так называемая ошибка второго рода);
- $\alpha^*$  — вероятность ложной тревоги для минимального среднего риска;
- $\beta^*$  — вероятность пропуска сигнала для минимального среднего риска;

- $K$  — порог (критическое значение коэффициента правдоподобия);  
 $\Lambda_n(V)$  — обобщенный коэффициент правдоподобия, которому должна соответствовать структура оптимальной системы обнаружения сигналов;  
 $G_n(V)$  — структура используемой приемной системы;  
 $a^{(1)}, a^{(2)}, b^{(1)}, b^{(2)}$  — векторные и тензорные коэффициенты в разложении  $\ln \Lambda_n$ ;  
 $K$  — матрица вторых моментов нормального шума;  
 $K(t, u)$  — функция автокорреляции нормального шума;  
 $k(t, u)$  — нормированная функция автокорреляции нормального шума;  
 $\Phi_n(v, s), \Phi_n(s, s)$  — структурные коэффициенты оптимальной приемной системы;  
 $\Phi_T(V, s)$  — структурная функция оптимальной приемной системы при непрерывных выборках приемной системы;  
 $X(t)$  — весовая функция в случае нормального шума;  
 $T_S$  — длительность сигнала;  
 $W_0$  — спектральная плотность белого шума;  
 $\alpha_0 = (RC)^{-1}$ ;  
 $B$  — ширина полосы частот;  
 $Y_\infty(i\omega)$  — передаточная функция оптимального (физически нереализуемого) фильтра до полосового детектора;  
 $h(t)$  — весовая функция полосового фильтра;  
 $\Theta(x)$  — интеграл вероятности;  
 $\alpha_M^*, \beta_M^*$  — минимаксные условные вероятности ошибок;  
 $p_M^*, q_M$  — минимаксные априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала;  
 $C_\alpha, C_\beta$  — стоимости, соотнесенные ложным тревогам и пропускам сигнала при бинарном обнаружении;  
 $C_{1-\alpha}, C_{1-\beta}$  — стоимости, соотнесенные правильным решениям, при бинарном обнаружении;  
 $\gamma_s(V)$  — приемная система для оценки сигнала на основе принятых данных  $V$ ;



- $\gamma_{\sigma}$  — приемная система, в которой используется байесовская оценка  $S$  при простовоспроизведении сигнала;  
 $t_{\lambda}$  — момент времени, для которого надо оценить параметр сигнала;  
 $S$  — значение сигнала, полученное на основе оценки по средней стоимости;  
 $\check{S}^*$  — значение сигнала, полученное на основе метода максимального правдоподобия;  
 $\check{a}_0^*$  — оценка параметра  $a_1$ , полученная на основе метода максимального правдоподобия;  
 $K_S$  — матрица вторых моментов сигнала;  
 $K_N$  — матрица вторых моментов шума;  
 $L, l$  — коэффициенты правдоподобия;  
 $K_N(t_1, t_2)$  — функция автокорреляции шума;  
 $S_{\lambda}^*, V$  — приемное устройство, в котором используется байесовская оценка для предсказания (экстраполяции) и сглаживания (интерполяции) сигнала;  
 $L$  — приемное устройство для минимаксной экстраполяции сигнала;  
 $A$  — матрица стоимостей;  
 $E_0, E_1$  — события;  
 $T$  — длительность интервала времени наблюдения.
-

## ЛИТЕРАТУРА

(основная)

1. Wald. A., Statistical decision functions, Wiley, New York, 1950.
2. Black well D. and Girshick M. A., Theory of games and statistical decisions, Wiley, New York, 1954.
3. Вудворд Ф. и Дэвис И., Принцип «обратной вероятности» в теории передачи сигналов, Сб. статей под ред. Н. А. Железнова «Теория передачи сигналов при наличии помех», ИИЛ, 1953.
4. Wiener N., The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, John Wiley & Sons, New York, 1949.
5. Райс С. Теория флуктуационных шумов, Сб. статей под ред. Н. А. Железнова «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», ИИЛ, 1953.
6. Шэннон К., Статистическая теория передачи электрических сигналов, Сб. статей «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», ИИЛ, 1953.
7. Дуб Дж., Вероятностные процессы, ИИЛ, 1956.
8. Blang-Lapierre A. and Fortet R., Theorie des fonctions aléatoires, Masson et Cie., Paris, 1953.
9. Миддлтон Д., Статистическая теория обнаружения сигналов, Сб. «Прием сигналов при наличии шума», под ред. докт. техн. наук Л. С. Гуткина, ИИЛ, 1959.
10. Ван-Метер Д. и Миддлтон Д., Современные статистические методы в теории приема сигналов, Сб. «Прием сигналов при наличии шума», под ред. докт. техн. наук Л. С. Гуткина, ИИЛ, 1959.
11. Миддлтон Д. и Ван-Метер Д., Об оптимальном многоальтернативном обнаружении сигналов в шуме, Сб. «Прием сигналов при наличии шума», под ред. докт. техн. наук Л. С. Гуткина, ИИЛ, 1959.
12. North D. O., Analysis of the factors which determine signal-to-noise discrimination in radar, RCA, Techn. Dept. RTR-6C, June 1943.
13. Ван-Флек Дж. и Миддлтон Д., Теоретическое сравнение визуального, слухового и инструментального методов приема импульсных сигналов в присутствии шумов, Сб. статей, Госэнергоиздат, 1959.
14. Den Hartog H. and Muller F. A., Optimum instrument response for discrimination against spontaneous fluctuations, Physica, 1947, v. 13, p. 571.
15. Дворк Б., Обнаружение импульсов, положенных на флуктуационные шумы «Вопросы радиолокационной техники», вып. 2, 1952.

16. Пороговые сигналы, Перевод с англ. под ред. А. П. Сиверса, Изд. «Советское радио», 1952.

17. Drukey D. L., Optimization techniques for detecting pulse signals in noise, Proc. IRE, 1952, v. 40, p. 217.

18. Джордж Т., Флуктуации сигналов самолетной радиолокационной станции, отраженных от земли, «Вопросы радиолокационной техники», вып. 5 (17), 1953.

19. Zadeh L. A. and Ragazzini J. R., Optimum filters for the detection of signals in noise, Proc. IRE, 1952, v. 40, p. 1223.

20. Davies I. L., On determining the presence of signals in noise, Proc. Inst. Elect. Engrs., 1952, pt III, v. 99, p. 45.

21. Slattery T. G., The detection of a sine wave in the presence of noise by the use of a non-linear filter, Proc. IRE, 1952, v. 40, p. 1232.

22. Reich E. and Swerling P., Jr., Detection of a sine wave in gaussian noise, J. Appl. Phys., 1953, v. 24, p. 289.

23. Миддлтон Д., Статистические критерии обнаружения импульсных сигналов в присутствии шумов (см. настоящий сборник).

24. Urkowitz H., Filter for detection of small radar signals in clutter, J. Appl. Phys., 1953, v. 24, p. 1024.

25. Zadeh L. A., Optimum non-linear filters for the extraction and detection of signals, Convention Record of the IRE, 1953, pt 8, p. 57.

26. Zadeh L. A., Optimum non-linear filters, J. Appl. Phys., 1953, v. 24, p. 396.

27. Каплан С. и Минфолл Р., Статистические свойства шумов и их влияние на дальность обнаружения, «Вопросы радиолокационной техники», вып. 2 (7), 1952.

28. Davis R. C., On the detection of sure signals in noise, J. Appl. Phys., 1953, v. 25, p. 76—82.

29. Stone W. M., On the statistical theory of detection of a randomly modulated carrier, J. Appl. Phys., 1953, v. 24, p. 935.

30. Питерсон У. и Бирдзолл Т., Теория обнаружения сигналов (см. настоящий сборник).

31. Tanner W. P., Jr. and Swets J. A., The human use of information, I; Tanner W. P., Jr. and Norman R. Z., The human use of information, II, Trans. Prof. Group Information Theory, IRE, 1954, № 4, p. 213 and 222.

32. Zadeh L. A. and Ragazzini I. R., An extension of Wiener's theory of prediction, J. Appl. Phys., 1950, v. 21, p. 645.

33. White W. D., N-n-linear sampling filters, Proc. IRE, 1951, v. 39, p. 303 (abstract).

34. Boonton R. C., Jr., An optimization theory for time-varying linear systems with non-stationary statistical inputs, Proc. IRE, 1952, v. 40, p. 977.

35. Berkowitz R. S., Optimum linear shaping and filtering networks, Proc. IRE, 1952, v. 40, p. 219.

36. Davis R. C., On the theory of prediction of non-stationary stochastic processes, J. Appl. Phys., 1952, v. 23, p. 1047.

37. Dolph C. L. and Woodbury M. A., On the relation between Green's function and covariances of certain stochastic processes and its application to unbiased linear prediction, Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v. 72, p. 519.

38. Slattey T. G., Non-linear filter design on maximum likelihood basis, Proc. IRE. 1952, v. 40, p. 219 (abstract).
39. Preston G. W., The equivalence of optimum transducers and sufficient and most efficient statistics, J. Appl. Phys., 1953, v. 22, p. 841.
40. Slepian D., Estimation of signal parameters in the presence of noise, Trans. Prof. Group Information Theory, IRE, 1954, v. 3, p. 68.
41. Youla D. C., The use of the method of maximum likelihood in estimating continuous-modulated intelligence which has been corrupted by noise, Trans. Prof. Group Information Theory, IRE, 1954, № 3, p. 90.
42. Drenick R. F., Non-linear prediction theory, Trans. Prof. Group Information Theory, IRE, 1954, No. 4, p. 146.
43. Wang M. C. and Uhlenbeck G. E., On the theory of the brownian motion II, Rev. Modern Physics, 1945, v. 17, p. 323.
44. Hodges J. L. and Lehmann E. L., Some problems in minimax point estimation, Ann. Math. Statistics, 1950, v. 21, p. 182.
45. Hoeffding W., Optimum non-parameter tests, Proc., Berkeley Symposium on Math. Statistics, Univ. of California Press, 1950, p. 83.
46. Lehmann E. L. and Stein C., On the theory of some non-parametric hypotheses, Ann. Math. Statistics, 1949, v. 20, p. 28.
47. Вудворд Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с применением к радиолокации, Перевод с англ. под ред. Г. С. Горелика, Изд. „Советское радио“, 1955.
48. Samson E. W., Fundamental natural concepts of information theory, AFCRC Report № E. 5079, October 1951, Section 14.
49. Hodges J. L. and Lehmann E. L., The use of previous experience in reaching statistical decisions, Ann. math. Statistics, 1952, v. 23, p. 396.
50. Middleton D., On the theory of random noise, Phenomenon-logical models I, II, J. Appl. Phys., 1951, v. 22, p. 1143, 1153.
51. Lee Y. W., Cheatham T. P. and Wiesner J. B., Application of correlation analysis to the detection of periodic signals in noise, Proc. IRE, 1950, v. 38, p. 1165.
52. Middleton D., Rectification of a sinusoidally modulated carrier in the presence of noise, Proc. IRE, 1948, v. 36, p. 1467.
53. Middleton D., Quart. Appl. Math., 1949, v. 7, p. 129; *ibid*, 1950, v. 8, p. 39; J. Appl. Phys., 1949, v. 20, p. 334.
54. Middleton D., Information loss attending the decision operation in detection, J. Appl. Phys., 1954, v. 25, p. 127.
55. Wald A., Sequential analysis, Wiley, New York, 1947.
56. Wald A. and Wolfowitz J., Optimum character of the sequential probability ratio test, Ann. Math. Statistics, 1948, v. 326, p. 19.
57. Крамер Г., Математические методы статистики, ИИЛ, 1948.
58. Grenander U., Stochastic processes and statistical inaearence, Ark. Mat., 1950, p. 193.
59. Wald A., Contributions to the theory of statistical estimation and testing hypothesis, Ann. Math. Statistics, 1950, v. 21, p. 182.
60. Pitman E. J., The estimation of location and scale parameters of a continuous population of any given form, Biometrika, 1939, v. 30, p. 391.
61. Girshick M. A. and Savage L. J., Bayes and minimax estimation for quadratic loss functions, Proc. Second Berkely Symposium on Math. Statistics and Probability, Univ. of California Press, 1951, p. 53.

62. Von Neumann J. and Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1947.

63. McKinsey I. C. C., Introduction to the theory of games, McGraw-Hill, New York, 1952.

64. Karhunen K., Zur Spektraltheorie Stochastischer Prozesse, Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1946, Al. 34, Helsinki.

65. Siegert A. J. F., Passage of stationary processes through linear and non-linear devices, Trans Inst. radio Eng., 1954, PGIT-3, № 4.

66. Daves R. C., On the theory of prediction of non-stationary stochastic processes, J. App. Phys., 1952, v. 23, p. 1047.

67. Kifer J., Ann. Math. Stat., 1953, v. 24, p. 71.

68. Dvoretzky A. Wald A., Wolfowitz J., Ann. Math. Stat., 1951, v. 22.

## ЛИТЕРАТУРА

(дополнительная)

1. Котельников В. И., Теория потенциальной помехоустойчивости, Госэнергоиздат, 1957.

2. Филиппов Л. И., Потенциальная помехоустойчивость при приеме импульсных радиосигналов, «Радиотехника», 1954, № 10.

3. Петров А. А., Проверка статистических гипотез о типе распределения по малым выборкам и Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. I, вып. 2.

4. Флейшман Б. С., Об оптимальном детекторе с  $\log I_0$ -характеристикой для обнаружения слабого сигнала при наличии шума, «Радиотехника и электроника», 1957, т. II, вып. 6.

5. Колмогоров А. Н. и Прохоров Ю. В., О суммах случайного числа случайных слагаемых, «Успехи математических наук», вып. 4, 1949.

6. Башаринов А. Е. и Флейшман Б. С., Об эффективности последовательных анализаторов в устройствах обнаружения слабых сигналов, «Радиотехника и электроника», 1958, т. III, вып. 4.

7. Михалевич В. С., Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного контроля. «Теория вероятностей и ее применения», 1956, т. I, вып. 4.

8. Дивеев Р. X., Применение теории решающих функций к экономической оценке способов приемочной инспекции, Труды Ин-та математики и механики АН УзССР, 1956, вып. 17.

9. Бунимович В. И., Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, «Советское Радио», 1951.

10. Крамер Г., Математические методы статистики, Издательство иностранной литературы, 1948.

11. Гольдман С., Теория информации, Издательство иностранной литературы, 1957.

12. Левин Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, «Советское Радио», 1957.

13. Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике, Гостехиздат, 1955.

14. Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями. Перевод с англ. под ред. Ю. В. Линника, Изд. иностранной литературы, 1956.

15. Пороговые сигналы, Перевод с англ. под ред. А. П. Сиверса, «Советское Радио», 1952.

16. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, сборник переводов под ред. Н. А. Железнова, Изд. иностранной литературы, 1953.

17. Харкевич А. А., Очерки общей теории связи, Гостехиздат, 1955.

18. Вудворд Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с применением к радиолокации. Пер. с англ. под ред. Г. С. Горелика, «Советское Радио», 1955.

19. Коронкевич А. И., Некоторые замечания об оценке точности линейной экстраполяции и фильтрации, «Теория вероятностей и ее применения», 1957, т. II, вып. 1.

20. Яглом А. М., Введение в теорию стационарных случайных функций, «Успехи математических наук», 1952, т. 7, вып. 5 (51).

21. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, 1952.

22. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, 1957.

23. Пугачев В. С., Общее условие минимума средней квадратичной ошибки динамической системы, «Автоматика и телемеханика», 1956, т. XVII, № 4.

24. Андреев Н. И., Определение оптимальной линейной динамической системы по критерию экстремума некоторого функционала. «Автоматика и телемеханика», 1957, т. XVIII, № 7.

25. Батков А. М. и Солодовников В. В., Метод определения оптимальных характеристик одного класса самонастраивающихся систем, «Автоматика и телемеханика», 1957, т. XVIII, № 5.

26. Куракин К. Н., Синтез линейных следящих систем на основе критерия минимума практически предельной ошибки воспроизведения, «Автоматика и телемеханика», 1957, т. XVIII, № 5.

---

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
1. Дж. Ван Флек и Д. Миддлтон, Теоретическое сравнение визуального, слухового и инструментального методов приема импульсных сигналов в присутствии шумов . . . . .	7
2. У. Петерсон, Т. Бирдзолл, У. Фокс, Теория обнаружения сигналов . . . . .	85
3. Р. Дренник, С. Гартенхауз, П. Несбеда, Обнаружение когерентных и некогерентных сигналов . . . . .	152
4. А. Беннер, Р. Дренник, Оптимальное обнаружение импульсных сигналов в шумах . . . . .	164
5. Д. Миддлтон, Статистические критерии обнаружения импульсных сигналов в присутствии шумов . . . . .	184
6. Д. Миддлтон, Дополнительные замечания о свойствах статистического наблюдателя . . . . .	242
7. Д. Миддлтон, В. Петерсон, Т. Бирдсолл, Обсуждение статьи „Статистические критерии обнаружения импульсных сигналов в присутствии шумов“ . . . . .	245
8. Д. Миддлтон, Р. Ван-Метер, Обнаружение и воспроизведение сигналов, принятых на фоне шумов, с точки зрения теории статистических решений . . . . .	251

---

ПРИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В ПРИСУТСТВИИ ШУМОВ  
Сборник переводных статей

Техн. редактор *К. П. Воронин*

---

Сдано в пр-во 20/X 1959 г.

Подп. к печати 11/V 1960 г.

Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.

19,7 печ. л.

Уч.-изд. л. 22.

Т 02/19

Тираж 7 000 экз.

Цена 16 р. 40 к.

Заказ 565

---

Типография Госэнергоиздата. Москва, Шлюзовая наб., 10.