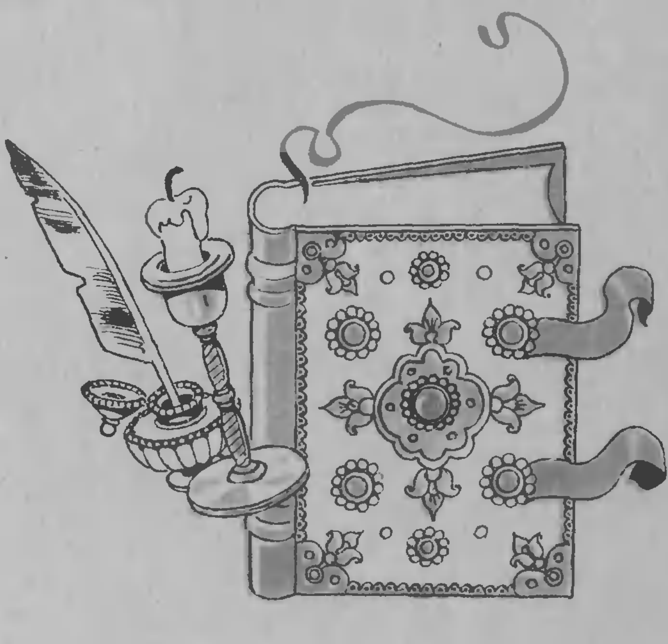
И. И. Баврин Е. А. Фрибус

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ

Книга для учащихся



МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1994

ББК 22.1
Б13

Рецензент: *А. М. Гольдман*, учитель-методист школы № 315 Москвы

Баврин И. И., Фрибус Е. А.

Б13 Старинные задачи: Кн. для учащихся.— М.: Просвещение, 1994.— 128 с.: ил.— ISBN 5-09-005128-3.

Богатая коллекция старинных задач предоставляет читателю замечательную возможность проследить за развитием математической мысли с древнейших времен. Эпиграфы из текстов древних ученых, чудесные поэтические задачи, живые и занимательные исторические комментарии служат прекрасным дополнением к тексту старинных задач.

Выборочное чтение книги и решение задач доступно учащимся начиная с 5 класса. Наряду с этим тематика многих задач выходит за рамки школьной программы, поэтому в книге помещен справочный материал об элементах комбинаторики, основных понятиях теории вероятностей. Авторами составлена таблица с номерами задач, доступных учащимся определенных параллелей (с 5 по 11 класс). В конце приводятся ответы, указания и решения.

Книга будет интересна и полезна учащимся и доставит истинное наслаждение всем любителям истории математики.

Б $\frac{4306020000-563}{103(03)-94}$ без объявл. **ББК 22.1**

Учебное издание

Баврин Иван Иванович
Фрибус Евгений Александрович

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *М. Г. Циновская*. Младший редактор *Н. Е. Терехина*. Художник *В. В. Викторов*. Художественный редактор *Е. Р. Дашук*. Технический редактор *И. С. Басс*. Корректор *О. В. Ивашкина*.

ИБ № 15262

Сдано в набор 05.04.94. Лицензия ЛР № 010001 от 10.10.91. Подписано к печати 15.11.94. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бум. офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8. Усл. кр.-отт. 16,75. Уч.-изд. л. 7,42. Тираж 30 000 экз. Заказ 999

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-09-005128-3

Глава I

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ ЧЕРЕЗ ВЕКА и СТРАНЫ

О, сколько нам открытий чудных...

А.С. Пушкин

ЗАДАЧИ ДРЕВНЕГО ЕГИПТА

Наставление, как достигнуть знания всех темных (трудных) вещей... всех тайн, которые скрывают в себе вещи... писец Ахмес написал это со старых рукописей...

Сохранившаяся часть заглавия папируса Ахмеса

Наиболее древние письменные математические тексты датируются примерно началом II тыс. до н. э. Математические документы сохранились только в Египте, Вавилоне, Китае и Индии.

Около пяти тысяч лет назад при фараоне Джосере был признан богом мудрости великий врачеватель, государственный деятель и первый известный нам по имени математик Имхотеп.

Математические правила, нужные для земледелия, астрономии и строительных работ, древние египтяне записывали на стенах храмов или на папирусах. Еще 4 тыс. лет назад они решали практические задачи по арифметике, алгебре и геометрии, причем в арифметике пользовались не только целыми числами, но и дробями. Высшим достижением египетской математики является точное вычисление объема усеченной пирамиды с квадратным основанием.

Задачи из папируса Ахмеса

Фрагмент папируса Ахмеса (основная часть папируса хранится в Британском музее)

Самый большой, сохраннвшийся до наших дней, древнеегипетский математический текст — это так называемый папирус писца XVIII — XVII вв. до н. э. Ахмеса. Папирус имеет размер 5,25 м $\times$ 33 см и содержит 84 задачи. Папирус был приобретен в 1858 г. Г. Райндом и изучен впервые профессором А. Эйзенлором в 1877 г.

Другой папирус (5,44 м $\times$ 8 см) включает 25 задач. Он был приобретен русским востоковедом В. С. Голенищевым в 1893 г. и в настоящее время принадлежит Московскому музею изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Московский папирус исследовали ученые — академики Б. А. Тураев и В. В. Струве.

1 У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?

2 Наставление, как определять разности. Тебе сказано: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между количеством хлеба у каждого человека и ему предшествующего составляет $\frac{1}{8}$ меры.

3 Найти приближенное значение для числа π, приняв площадь круга равной площади квадрата со стороной $\frac{8}{9}$ диаметра круга.

Краткая справка об истории числа π. Если число, выражающее длину окружности, разделить на число, выражающее диаметр этой окружности, то получим $\pi = 3,14159265358979\ldots$

Вавилоняне во II тыс. до н. э. удовлетворялись значением $\pi = 3$.

Древнегреческий ученый Архимед (ок. 287—212 до н. э.), рассматривая отношения периметров вписанных и описанных многоугольников с числом сторон 6, 12, 24, 48, 96 к диаметру, нашел

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

В V в. китайский математик и астроном Цзу Чун-чжи (ок. 430— ок. 501) нашел

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929\ldots .$$

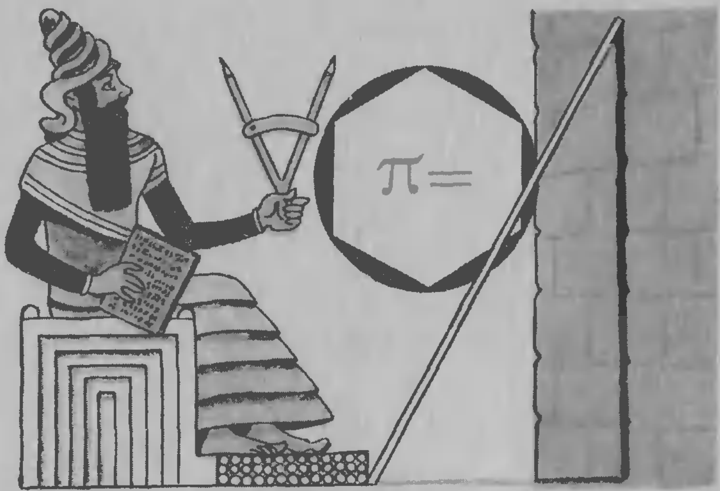
Нидерландский математик Лудольф ван Цейлен (1540—1610) вычислил 35 десятичных знаков после запятой у числа π.

В течение 20 лет (с 1853 по 1873) английский математик У. Шенкс вычислил 707 десятичных знаков числа π, допустив ошибку на 528-м знаке. По просьбе Шенкса эти цифры были изображены на его надгробии.

В 1766 г. немецкий математик, астроном, физик и философ И. Г. Ламберт доказал иррациональность числа π. В 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман доказал трансцендентность числа π.

В наше время вычисление большого числа цифровых знаков числа π служит для проверки эффективности современных суперкомпьютеров и их программного обеспечения. Например, в 1989 г. японский ученый Я. Канэда, используя суперкомпьютер фирмы «Хитачи» лишь около шести часов, получил для числа π 201 326 000 цифровых знаков после запятой.

Много интересных данных о числе π можно найти в книге [36].

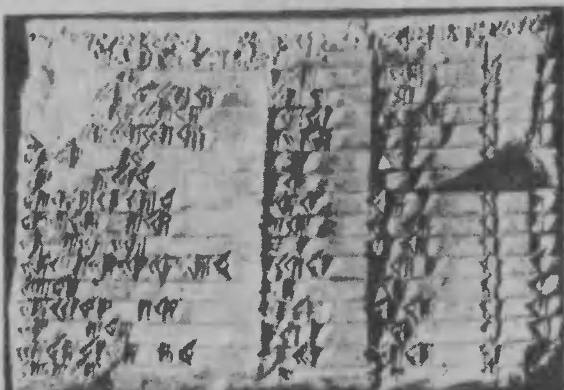


ЗАДАЧИ ВАВИЛОНА

Я совершаю запутаннейшие деления и умножения...

Ашшурбанипал

В Древнем Вавилоне математика зародилась задолго до нашей эры. Вавилонские памятники в виде глиняных плиток (всего около 500 000, причем из них примерно лишь 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами) с клинописными надписями хранятся в различных музеях мира. Расшиф-



Клинописная числовая таблица (Нью-Йорк. Колумбийская библиотека)

ровкой и анализом клинописных текстов много занимались историки-математики О. Нейгебауэр (р. 1899) и Ф. Тюро-Данжен (1872—1944).

В этих текстах мы находим достаточно удобные способы решения ряда практических задач, связанных с земледелием, строительством и торговлей. Вавилоняне были основоположниками астрономии, создали шестидесятеричную систему счисления, решали уравнения второй степени и некоторые виды уравнений третьей степени при помощи специальных таблиц. Документальным свидетельством высокой вычислительной культуры служит и высказывание ассирийского царя Ашшурбанипала (VII в. до н. э.): «Я совершаю запутаннейшие деления и умножения...»

Задача на глиняной табличке (ок. 1950 до н. э.)

4 Площадь A, состоящая из суммы площадей двух квадратов, составляет 1000. Сторона одного из квадратов составляет уменьшенные на 10 две трети стороны другого квадрата. Каковы стороны квадратов?

Задача о вычислении числа π

5 За длину окружности вавилоняне принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π, которым пользовались вавилоняне.

Задача о шесте

6 Найти длину шеста, сначала вертикально прислоненного к стене, затем смещенного так, что его верхний конец опустился на 3 локтя, причем нижний конец отступил от стены на 9 локтей.

Задача о делении прямого угла

7 Разделить прямой угол на три равные части.

ЗАДАЧИ ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

Если ты это найдешь чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться
Что в этой мудрости ты все до конца превзошел

Заключительные строки задачи Архимеда о быках Солнца

Если от математики Древнего Востока до нас дошли отдельные задачи с решениями и таблицы, то в Древней Греции рождается наука математика, основанная на строгих доказательствах. Этот важнейший скачок в истории науки относится к VI—V вв. до н. э.

Задача «Суд Париса»

Один из древнейших мифов содержит сказание о суде троянского царевича Париса...

Однажды на свадьбе богиня раздора Эрида подбросила собравшимся гостям яблоко с надписью «прекраснейшей». Из-за этого яблока возник спор между богиней мудрости и справедливой войны Афиной, богиней любви и красоты Афродитой и сестрой и супругой Зевса Герой. Они обратились к царю и отцу богов и людей Зевсу, чтобы он решил, кому должно достаться яблоко. Зевс отправил богинь на гору к Парису, который пас там свои стада. Парис должен был решить, какая из богинь самая прекрасная. Каждая из богинь старалась склонить юношу на свою сторону: Афина предлагала ему мудрость и военную славу, Афродита — красивейшую женщину на земле в жены. Гера — власть и богатство.

Как Парис определил прекраснейшую из богинь, можно узнать, решив старинную задачу.

8 Богини Гера, Афродита и Афина пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения.

Афродита. Я самая прекрасная. (1)
Афина. Афродита не самая прекрасная. (2)
Гера. Я самая прекрасная. (3)
Афродита. Гера не самая прекрасная. (4)
Афина. Я самая прекрасная. (5)

Парис, прилегший отдохнуть на обочине дороги, не счел нужным даже снять платок, которым прикрыл глаза от яркого солнца. Но богини были настойчивы, и ему нужно было решить, кто из них самая прекрасная. Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух остальных богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто прекраснее из богинь? [37]

Задача Дидоны

В древнем мифе рассказывается, что тирский царь Пигмалион убил Сихея, мужа своей сестры Дидоны, чтобы овладеть его богатством. Дидона, покинув Финикию, после многих приключений оказалась в Северной Африке. Король нумидийцев Ярб обещал подарить Дидоне участок земли на берегу моря «не больше, чем можно окружить воловьей шкурой». Хитрая Дидона разрезала воловью шкуру на тонкие полоски, связала из них очень длинную веревку и отмерила большой участок земли, на котором основала город Карфаген.

9 Участок земли какой формы окружила Дидона веревкой данной длины, чтобы получить наибольшую площадь?

Задача Фалеса

Начало греческой науки положила ионийская школа натурфилософии. Ее основателем был отец греческой науки Фалес Милетский (ок. 625—547 до н. э.) — купец, политический деятель, философ, астроном и математик. Первоосновой всего сущего Фалес считал воду («Вода есть начало всего; все из нее происходит и в нее превращается»). В математике Фалес доказал несколько важных теорем, предложил способы вычисления высоты фигуры по длине ее тени и определения расстояния до корабля на море.

10 Определить расстояние от берега до корабля на море.

Задача о школе Пифагора

Пифагор

Первое построение геометрии как дедуктивной науки принадлежит Пифагору Самосскому (ок. 570— ок. 500 до н. э.) — древнегреческому математику и философу. В молодости Пифагор путешествовал по Египту и Вавилону, изучая мудрость жрецов. Около 530 г. до н. э. он переехал в Кротон (Южная Италия), где основал знаменитый пифагорейский союз (школу). Деятельность союза была окружена тайной. В школе Пифагора процветала числовая мистика. Пифагор учил, что «число есть сущность всех вещей». Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел). В их школе возникло представление о шарообразности Земли.

11 Тиран острова Самос Поликрат однажды спросил на пиру у Пифагора, сколько у того учеников. «Охотно скажу тебе, о Поликрат,— отвечал Пифагор.— Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь еще к ним трех юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Столько учеников веду я к рождению вечной истины». Сколько учеников было у Пифагора? [3]

Задачи Пифагора

12 Всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов.

13 Найти сумму n первых нечетных натуральных чисел:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

14 Решить уравнение $x^2+y^2=z^2$ в натуральных числах.

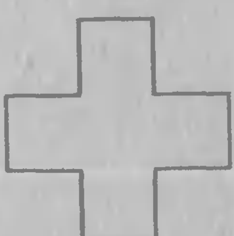


Рис. 1

Задача о кресте

Древние греки на хлебах чертили крест, считая его символом жизни (рис. 1).

15 Разрезать крест на четыре части и сложить из получившихся частей квадрат.

Задача о статуе Минервы

Сохранилась «Греческая антология» в форме сборника задач, составленных в стихах, главным образом гекза́метром, которым, как известно, написаны знаменитые поэмы Гомера (IX—VIII вв. до н. э.) «Илиада» и «Одиссея». «Греческая антология» была написана в VI в. н. э. грамматиком Метродором. В «Греческой антологии» содержится задача о статуе богини мудрости, покровительнице наук, искусств и ремесел Минерве.

16 Я — изваянье из злата. Поэты то злато
В дар принесли: Харизий принес половину всей жертвы,
Феспия часть восьмую дала; десятую — Солон.
Часть двадцатая — жертва певца Фемисона, а девять
Всё завершивших талантов — обет, Аристоником данный.
Сколько же злата поэты все вместе в дар принесли?

Задача о музах

По представлениям древних греков науками и искусствами ведали мифические женские существа — музы:

Евтерпа — богиня-покровительница музыки;
Клио — истории;
Талия — комедии;
Мельпомена — трагедии;
Терпсихора — танцев и хорового пения;
Эрато — поэзии;
Полимния — лирической поэзии;
Урания — астрономии;
Каллиопа — эпоса и красноречия.

Местопребыванием муз и Аполлона служила гора Геликон. Учреждения, где протекала деятельность ученых, назывались музеумами (музеями) — жилищами муз. В поэтической задаче о музах бог любви Эрот жалуется богине красоты и любви Киприде на муз.

17 Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает:
«Что так тебя огорчило, ответствуй немедля!»
«Яблок я нес с Геликона немало,— Эрот отвечает,—
Музы, отколь ни возьмись, напали на сладкую ношу.
Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа, а Клио
Пятую долю взяла. Талия — долю восьмую.
С частью двадцатой ушла Мельпомена. Четверть взяла
Терпсихора.

С частью седьмою Эрато от меня убежала.
Тридцать плодов утащила Полимния. Сотня и двадцать
Взяты Уранией; триста плодов унесла Каллиопа.
Я возвращаюсь домой почти что с пустыми руками.
Только полсотни плодов мне оставили музы на долю.

Сколько яблок нес Эрот до встречи с музами?

Задача о грациях

Красивая идея равенства проводится в задаче о трех грациях.

18 Три грации имели по одинаковому числу плодов и встретили девять муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из муз и каждой из граций стало по одинаковому числу плодов. Сколько плодов было у каждой из граций до встречи с музами?

Задача Гиппократа Хиосского

Однажды незадачливый купец Гиппократ Хиосский (2-я пол. V в. до н. э.) был ограблен пиратами. В поисках управы на них он отправился в Афины и встретил там мудрецов, которые с увлечением занимались решением геометрических задач. Управы на грабителей Гиппократу найти не удалось, и он утешился решением геометрических задач, превзойдя искусных мудрецов. Гиппократ был автором первого систематического сочинения по геометрии, которое до нас не дошло. [9]

19 Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность, на его катетах как на диаметрах построены вне этого треугольника две полуокружности. Доказать, что сумма площадей двух образовавшихся луночек равна площади треугольника ABC (рис. 2).

Задачи Евклида

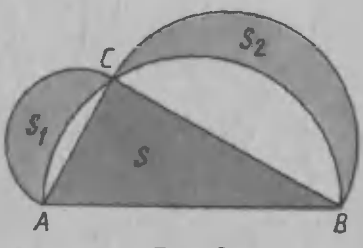


Рис. 2

В III в. до н. э. древнегреческая геометрия достигла своего апогея в работах знаменитого математика Евклида, написавшего 13 книг, объединенных общим названием «Начала». В трудах Евклида логическая сторона геометрии была доведена до очень высокого уровня. Рассказывают, что однажды, когда царь Птолемей I Сотер (ум. 283 до н. э.) спросил Евклида: «Нет ли в геометрии более короткого пути, чем штудирование

Евклид представляет царю Птолемею свои «Начала»

«Начал»?», Евклид с гордостью ответил: «В геометрии нет царского пути». Ответ Евклида имел двойной смысл, так как в Египте были две системы дорог: первая для царя и его курьеров, вторая для всего населения. В другой раз один из начинающих учеников Евклида, выучив первое предложение, спросил: «А что я могу заработать, выучив все «Начала»?» Евклид позвал своего раба и сказал: «Дай ему три обола, так как бедняжка хочет заработать деньги своим учением» (обол — мелкая серебряная монета в Древней Греции).

20 Мул и осел под вьюком по дороге с мешками шагали.
Жалобно охал осел, непосильною ношей придавлен.
Это подметивший мул обратился к сопутчику с речью:
«Что ж, старина, ты заныл и рыдаешь, будто девчонка?
Нес бы вдвойне я, чем ты, если б отдал одну ты мне меру,
Если ж бы ты у меня лишь одну взял, то мы бы сравнялись».
Сколько нес каждый из них, о геометр, поведай нам это.

21 На данном отрезке AB построить равносторонний треугольник.

22 Разделить произвольный угол на две равные части.

23 Нет наибольшего простого числа.

24 Доказать: $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

Задачи Архимеда

Древнегреческий ученый Архимед (ок. 287—212 до н. э.) принадлежит к числу тех немногих гениев, творчество которых определило на долгие века судьбу науки, а тем самым и судьбу человечества. Родиной Архимеда был богатый торговый город Сиракузы в Сицилии. Отец Архимеда Фидий был астрономом и рано привил сыну любовь к математике, механике и астрономии. После поездки в Александрию, культурный и научный центр того времени, Архимед возвратился в Сиракузы и до конца жизни переписывался с александрийскими учеными.

Жизнь Архимеда овеяна легендами. Согласно одной из них он в течение двух лет был душой обороны Сиракуз от римских полчищ, блокировавших город с суши и моря. Архимед изобрел

Архимед

знаменитый «архимедов винт» и «архимедов рычаг», открыл закон гидростатики (закон Архимеда).

Математические работы Архимеда подкупают читателя ясностью мысли, изяществом доведенной до совершенства техникой вычислений. Известный греческий историк Плутарх (ок. 46—126 н. э.) пишет: «Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед». Архимеду принадлежит целый ряд классических сочинений по математике, в которых он предвосхитил методы высшей математики XVII в. [1]. С именем Архимеда связаны знаменитые задачи. Например, задача о быках Солнца, приводящая к решению в больших целых числах неопределенного уравнения $x^2-4\,729\,494y^2=1$.

25 Доказать, что площадь круга, описанного около квадрата, вдвое больше площади вписанного в квадрат круга.

26 Найти сумму квадратов n первых чисел натурального ряда:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2.$$

27 Доказать, что площадь фигуры, ограниченной тремя полуокружностями (эту фигуру называли арбелоном или «сапожным ножом»), равна площади круга с диаметром $BD\perp AC$ (рис. 3).

28 Доказать, что для всякого шара цилиндр, имеющий основанием большой круг этого шара, а высотой диаметр шара, будет иметь объем в полтора раза больше объема этого шара и площадь поверхности тоже в полтора раза больше площади поверхности этого шара.

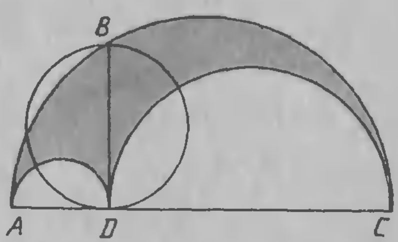


Рис. 3

Это открытие Архимед считал своим самым большим достижением в математике, и, видимо, потому на его могиле были изображены шар и цилиндр.

29 Справедливо ли неравенство $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$?

30 Стомахион Архимеда — классическая игра-головоломка на составление различных фигур из частей особым образом разрезанного исходного квадрата (рис. 4).

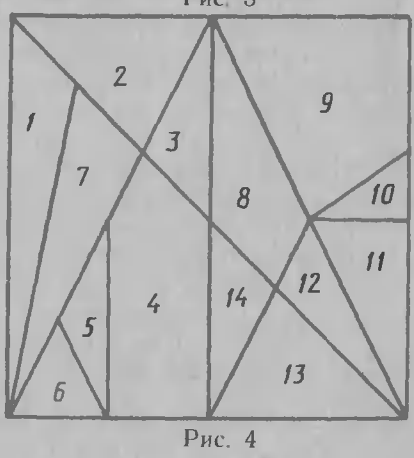


Рис. 4

Эта игра была распространена в позднюю эпоху Римской империи (IV—VI вв.). Описание стомахиона сохранилось в двух отрывках из сочинения Архимеда. Начальный греческий текст был найден известным датским историком математики И. Гейбергом в 1906 г. в знаменитом Константинопольском палимпсесте, т. е. пергаменте, с которого был смыт первоначальный текст. Несколько ранее, в 1899 г., швейцарский историк математики Г. Зутер обнаружил в книгохранилищах Берлина и Кембриджа арабскую рукопись с фрагментами сочинения, озаглавленного «Книга Архимеда о разбиении фигуры стомахиона на 14 частей, находящихся к ней в рациональных отношениях».

Овладев секретом «стомахионной мозаики» (составление фигурок может быть совершенно точным или же допускается некоторое приближение), можно составить различные фигурки, например корабля, меча, шлема, кинжала, колонны, деревца, петуха, курицы, цапли и т. п. Можно показать, что площади всех 14 частей стомахиона Архимеда находятся в рациональных отношениях. Иногда вместо квадрата берут прямоугольник (например, с соотношением сторон 1:2) и даже произвольный параллелограмм. При составлении фигур части исходной фигуры можно переворачивать «лицевой» стороной вниз. Необходимо лишь соблюдать условие, чтобы составленная фигура содержала все его 14 частей. Потомки стомахиона — игры танграм, яйцо Колумба, сфинкс и др. [27]

Задача Гипсикла Александрийского

Древнегреческий геометр Гипсикл Александрийский (II в. до н. э.) — автор XIV книги «Начал» о правильных многоугольниках, которая долгое время приписывалась Евклиду.

31 Найти формулу для m-го n-угольного числа (P_n^m).

Задачи Герона Александрийского

Работы древнегреческого математика и механика Герона Александрийского (I в. н. э.) являются энциклопедией античной прикладной математики. С именем Герона связаны формулы для определения площади треугольника по трем сторонам, правила численного решения квадратных уравнений и приближенного извлечения квадратных и кубических корней и пр.

32 Из-под земли бьют четыре источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй — за 2 дня, третий — за 3 дня и четвертый — за 4 дня. За сколько времени наполнят бассейн все 4 источника вместе?

33 Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l. Найти на l такую точку C, чтобы сумма расстояний от A до C и от B до C была наименьшей.

Задачи Никомаха из Герасы

Широкой известностью в Древней Греции пользовался труд «Введение в арифметику» математика и философа Никомаха из Герасы (I—II вв. н. э.). В этом сочинеиии содержится обзор начал теории чисел.

34 Проверить справедливость правила для последовательного суммирования одного, двух, трех, ... следующих друг за другом нечетных чисел:

$$1=1^3,$$
$$3+5=2^3,$$
$$7+9+11=3^3,$$
$$\dots\dots\dots$$

35 Доказать: $P_n^m = P_{n-1}^m + P_3^{m-1}$.

(Формула m-го n-угольного числа: $P_n^m = m + (n-2)\cdot\frac{m(m-1)}{2}$ (см. задачу 31).)

36 Найти формулу для n-го пирамидального числа

$$n_n = 1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Древнеримская задача (II в.)

37 Некто, умирая, завещал: «Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано $\frac{2}{3}$ имения, а жене — остальная часть. Если же родится дочь, то ей $\frac{1}{3}$, а жене $\frac{2}{3}$». Родилась двойня — сын и дочь. Как же разделить имение?

Задача о Диофанте из Палатинской антологии

Диофант Александрийский (II—III вв. н. э.) был последним великим математиком античности. До нас дошли два его сочинения — «Арифметика» (из тринадцати книг сохранилось шесть) и «О многоугольных числах» (в отрывках). Творчество Диофанта оказало большое влияние на развитие алгебры, математического анализа и теории чисел.

О жизни Диофанта известно очень мало. В Палатинской антологии сохранилась эпитафия, из которой «мудрым искусством» мы узнаем отдельные факты из жизни ученого и ее продолжительность.

38 Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей — и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил,
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Задачи Диофанта Александрийского

39 Найти такие три числа, чтобы квадрат суммы всех трех, вычтенный из каждого числа, давал квадрат.

40 Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представляется двумя способами суммой двух квадратов:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(bc\mp ad)^2.$$

ЗАДАЧИ ДРЕВНЕГО КИТАЯ

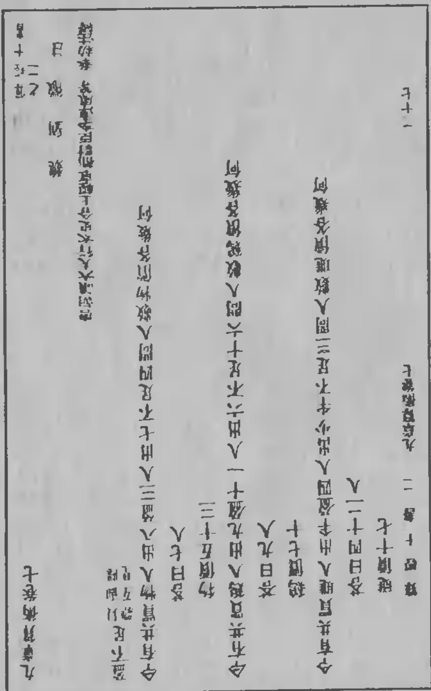
Три пути ведут к знанию:
Путь размышления — самый благородный,
Путь подражания — самый легкий
И путь опыта — это путь самый горький...

Конфуций

Возникновение китайской цивилизации на берегах реки Хуанхэ относится к началу II тыс. до н. э. Сохранились обозначения цифр на гадательных костях животных XIV в. до н. э. На обломках посуды XIII—XII вв. до н. э. имеются изображения геометрических орнаментов с правильными 5-, 7-, 8-. 9-угольниками.

К эпохе, когда «расцвели сто цветов, соперничали сто школ ученых», относится деятельность Конфуция (551—479 до н. э.), выработавшего основы учения о «добродетельном поведении». В это время появились первые книги по математике, которые составили основы «Математики в девяти книгах» (III в. до н. э.). Для забвения прежних традиций император Цинь Шихуанди в 221 г. до н. э. приказал сжечь все книги. Но уже вскоре, во II в. до н. э., была изобретена бумага и началось восстановление древних книг.

В VIII в. в Китае распространяется буддизм. Развивается китайская иероглифическая письменность (в настоящее время из 49 000 иероглифов в основном используется лишь примерно 5000). В XVIII в. была создана китайская энциклопедия «Пол-



Первая страница книги VII «Математики в девяти книгах»

ное собрание книг, карт, чертежей и рисунков с древности до нынешнего времени» в 5163 томах.

Среди важнейших достижений китайской математики отметим: правило двух ложных положений, введение отрицательных чисел, десятичных дробей, методов решения систем линейных уравнений, алгебраических уравнений высших степеней и извлечения корней любой степени [10].

Задача Ло-шу

К глубокой древности относится возникновение магических квадратов, т. е. квадратных таблиц натуральных чисел ($n \times n$), имеющих одну и ту же сумму чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям. Наиболее ранние сведения о магических квадратах содержатся, по-видимому, в древних китайских книгах IV—V вв. до н. э. Самым «старым» из дошедших до нас древних магических квадратов является таблица Ло-шу (2200 г. до н. э.). Название «магические» (волшебные, таинственные) квадраты получили от арабов. Люди верили, что магические квадраты обладают чудесными свойствами, и использовали их как талисманы [25].

41 Заполнить натуральными числами от 1 до 9 квадратную таблицу размером 3×3 так, чтобы суммы чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям были равны одному и тому же числу 15.

Задача из «Математики в девяти книгах»

42 Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу (доу — мера объема) зерна. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу зерна. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу зерна. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая.

Задача Сунь-цзы

Китайский математик Сунь-цзы (III—IV вв.) дал правило действий на счетной доске и изложил способ решений неопределенных уравнений первой степени в целых числах. С его именем связана следующая теоретико-числовая задача:

43 Имеются вещи, число их неизвестно. Если считать их тройками, то остаток 2; если считать их пятерками, то остаток 3; если считать их семерками, то остаток 2. Спрашивается, сколько вещей.

Задача Чжан Цюцзяня

Китайский математик Чжан Цюцзянь (V в.) — автор второго по размеру трактата в текстах «Десятикнижья» после «Математики в девяти книгах». В трех книгах своего трактата Чжан Цюцзянь развивал методы предшественников (Сунь-цзы и др.), уделял внимание таким вопросам, как ряды, уравнения высших степеней, теоретико-числовые проблемы и пр. Ниже предлагается задача из третьей книги трактата Чжан Цюцзяня.

44 1 петух стоит 5 цяней (цянь — денежная единица), 1 курица стоит 3 цяня, 3 цыпленка стоят 1 цянь. Всего на 100 цяней купили 100 птиц. Спрашивается, сколько было в отдельности петухов, кур, цыплят.

Задача Цзу Чун-чжи

Цзу Чун-чжи

Математик и астроном Цзу Чун-чжи (429—500) является, пожалуй, самым знаменитым в истории науки среди китайских ученых. Его изображение помещено среди выдающихся деятелей мировой науки в фойе актового зала Московского университета. Календарь «Даминли» Цзу Чун-чжи весьма известен в истории китайской астрономии. В историях династий указывается, что Цзу Чун-чжи и его сын Цзу Хэн были авторами утерянной книги «Цзиши» (из пяти или шести свитков), в которой рассматривались уравнения третьей степени и способ оценки числа π.

45 Найти наилучшую обыкновенную дробь к числу π, если

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

ЗАДАЧИ ДРЕВНЕЙ ИНДИИ

Подобно тому как солнце затмевает своим блеском звезды, так мудрец затмевает славу других людей, предлагая и особенно решая на народных собраниях математические задачи.

Брахмагупта

В долине реки Инда еще в III тыс. до н. э. существовала развитая цивилизация, одним из центров которой был Мохенджо-Даро. В I тыс. до н. э. возникли рабовладельческие государства. Борьба за власть в этих государствах велась между воинами-кшатриями и священниками-брахманами. В это же время появляются священные книги брахманов «Веды» (в переводе с санскритского языка «Знания»). Первые индийские письменные памятники относятся к VII—V вв. до н. э. В V в. до н. э. возникает в Индии новая религия — буддизм. В легенде о Будде рассказывается, что он мог пересчитать по названиям все десятичные разряды чисел от 1 до 10^{54}.

В IV в. до н. э. большая часть Северной Индии была завоевана Александром Македонским (356—323 до н. э.). Примерно в это же время были созданы астрономо-математические труды сиддханты (учения). Одна из важнейших сиддхант была написана Брахмагуптой (ок. 598—660) около 628 г., состояла из 20 книг и называлась «Брахма-спухта-сиддханта» («Усовершенствованное учение Брахмы»). Бхаскара II в XII в. написал трактат «Сиддханта-широмани» («Венец учения») в четырех частях, из которых стихотворная «Лилавати» («Прекрасная») посвящена арифметике, а «Биджагонита» — алгебре. В XIII в. этот трактат был переписан на полоски пальмовых листьев.

Творчество индийских математиков оказало огромное влияние на развитие арифметики (индийская десятичная позиционная нумерация), алгебры (метод рассеивания для решения неопределенных уравнений первой и второй степени с двумя неизвестными) и тригонометрии (бесконечные ряды для синуса, косинуса и арктангенса). Наиболее ранние сведения о математике в Древней Индии относятся к эпохе составления священных религиозно-философских книг «Веды».

Задача Апастамбы

Древнеиндийскому математику Апастамбе (IV в. до н. э.) принадлежит одна из редакций «Сульвасутра» («Правила веревки»), содержащая геометрические построения и связанные с ними вычисления.

46 Найти сумму кубов первых n натуральных чисел:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3.$$

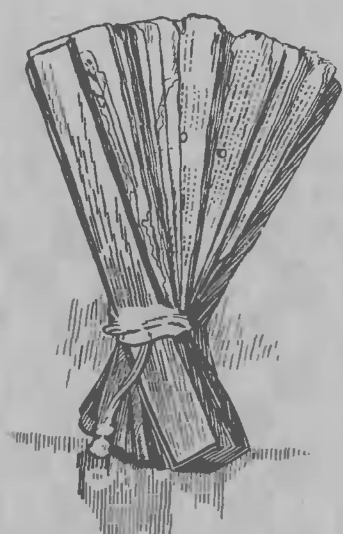
Задача о сочетаниях (II в. до н. э.)

47 Доказать: $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$.

Задача-легенда (начало н. э.)

Происхождение шахмат иногда связывают с магическими квадратами. В эпической поэме величайшего персидского поэта Фирдоуси «Шах Намэ» («Книга царей») (1010) описывается легенда, согласно которой шахматную игру изобрели мудрецы, желая с ее помощью рассказать матери царевича Талханда о том, как он, не будучи побежденным в сражении, пал в разгаре боя с войсками своего брата-близнеца Гава.

В поэме английского писателя У. Джонса (1746—1794) рассказывается, что бог войны Марс пленился красотой дриады Каиссы и склонил ее к взаимности изобретением шахмат. Однако наибольшую известность имеет другая версия.



Рукопись «Лилавати», написанная на пальмовых листьях (из коллекции Д. Ю. Смита)

48 В старинной легенде о происхождении шахмат рассказывается, что изобретатель шахмат, которому было предложено запросить любую награду, попросил положить ему в награду на первую клетку шахматной доски одно зерно, на вторую — 2 зерна, на третью — 4 зерна и т. д. Сколько зерен запросил мудрец?

Задача о разрезании шахматной доски.

В старинной легенде о четырех алмазах рассказывается о восточном властелине. Он был искусным игроком в шахматы и за всю жизнь проиграл лишь четыре раза. В честь мудрецов-победителей властелин приказал инкрустировать алмазами четыре поля доски, на которых был заматован его король (рис. 5). Но сын после смерти властелина решил отомстить мудрецам за их победы и потребовал разделить шахматную доску с алмазами на четыре одинаковые части с одним алмазом в каждой. Мудрецы выполнили требование, разрезав доску только по границам между вертикалями и горизонталями доски. Однако жестокий деспот, как гласит легенда, все равно казнил каждого мудреца, используя его часть доски с алмазом.

49 Как мудрецы разделили шахматную доску с алмазами на четыре одинаковые части с одним алмазом в каждой?

Задача Ариабхаты

Индийский астроном и математик Ариабхата (476— ок. 550) — автор своеобразной энциклопедии «Ариабхатиам». В этом сочинении собрано все наиболее важное и ценное в индийской математике и астрономии. Первый индийский искусственный спутник Земли был запущен с советского космодрома 19 апреля 1975 г. и назван именем великого ученого древности Ариабхаты [13].

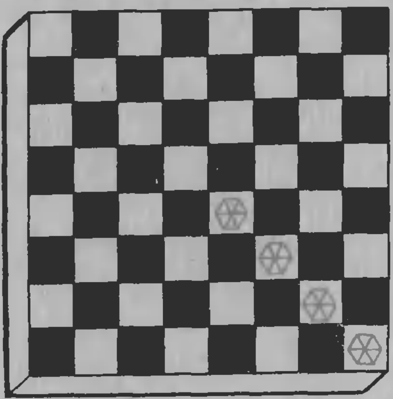


Рис. 5

50 Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

Задача Бхаскары I

Учеником Ариабхаты был Бхаскара I (VI в.). Неопубликованная рукопись по математике Бхаскары I относится к 522 г. Он придал слоговому обозначению чисел позиционность, ввел слог для обозначения пустого разряда. Один и тот же слог мог служить в данном числе для обозначения 7, 70, 700 и т. д.

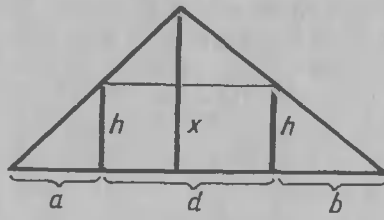


Рис. 6

51 Найти натуральные числа, дающие при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 остаток 1 и, кроме того, делящиеся на 7.

Задача Брахмагупты

Индийский математик и астроном Брахмагупта (ок. 598—660) — автор сочинения «Усовершенствованное учение Брахмы». В этом сочинении Брахмагупта изложил учение об арифметической прогрессии, решение квадратных уравнений с действительными корнями и др.

52 Найти высоту свечи, зная длины теней, отбрасываемых вертикальным шестом в двух различных положениях, и расстояние между ними (рис. 6).

Задачи Магавиры

В IX в. в Индии жил математик и астроном Магавира. В своем «Кратком курсе математики» он установил двузначность квадратного корня, ставил вопрос об извлечении корня из отрицательного числа, решал задачи, приводящие к системам линейных уравнений с несколькими неизвестными, суммировал ряды квадратов и кубов членов арифметической прогрессии.

53 Найти число павлинов в стае, $\frac{1}{16}$ которой, умноженная на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат $\frac{1}{9}$ остатка вместе с 14 другими павлинами — на дереве тамала.

54 О друг, назови число различных ожерелий, которые можно получить из бриллиантов, сапфиров, изумрудов, кораллов и жемчугов.

Задача Шридхары

Индийский математик и астроном Шридхара (IX—X вв.) в сочинении «Патиганита» («Искусство вычисления на доске») излагает методы возведения в квадрат и куб, операций с дробями, занимается решением неопределенных уравнений второй степени с двумя неизвестными и др. Сочинение Шридхары «Тришатик» содержало 300 стихов.

55 Повар готовит различные блюда с шестью вкусовыми оттенками: острым, горьким, вяжущим, кислым, соленым, сладким. Друг, скажи, каково число всех разновидностей?

Задачи Бхаскары II

Крупнейший индийскнй математик и астроном Бхаскара II (род. 1114 — ум. позднее 1178) — автор сочинеиия «Венец учеиия», в котором содержались решения алгебраических и теоретико-числовых задач. Вершиной достижений Бхаскары II является циклический метод решения в целых положительных числах неопределенного уравнения второй степени с двумя неизвестными.

56 Прекрасная дева с блестящими очами, ты, которая знаешь, как правильно применять метод инверсии, скажи мне величину такого числа, которое, будучи умножено на 3, затем увеличено на $\frac{3}{4}$ этого произведения, разделено на 7, уменьшено на $\frac{1}{3}$ частного, умножено само на себя, уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, дает число 2. *(Метод инверсии предполагает выполнение действий с конца задачи.)*

57 Решить уравнение $x^4-2x^2-400x=9999$.

58 Решить уравнение в целых числах $100x+90=63y$.

ЗАДАЧИ СТРАН ИСЛАМА

Знание — самое превосходное из владений. Все стремятся к нему, само же оно не приходит.

Абу-р-Райхан ал-Бируни

В X в. образовался арабский халифат, простиравшийся от Испании до Индии. Главным научным центром арабского халифата был Багдад. Крупнейшие ученые средневековья — Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми, Сабит ибн Корра ал-Харани, Абу Али Ибн Сина (Авиценна), Абу-р-Райхан ал-Бируни, Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям, Насирэддин ат-Туси, Джемшид Гияс ад-Дин ал-Каши — писали свои математические сочинения в основном на арабском языке.

Многие достижения арабской математики связаны с исследованиями в астрономии. В частности, были разработаны вычислительно-алгоритмические проблемы и методы. Значительных успехов достигли арифметика и геометрия. Алгебра и тригонометрия впервые сформировались в самостоятельные науки. А употребляемые нами такие термины, как «арабские цифры», «корень», «алгебра», «алгоритм», «синус», напоминают о влиянии науки стран ислама. Большинство названий звезд и астрономические термины имеют также арабское происхождение [50]; [52]; [53].

Задача из легенды «История Морадбальса»

59 Одна женщина отправилась в сад собрать яблоки. Чтобы выйти из сада, ей нужно было пройти через 4 двери, у каждой из которых стоял стражник. Стражнику у первых дверей женщина отдала половину собранных ею яблок. Дойдя до второго стражника, женщина отдала ему половину оставшихся яблок. Так же она поступила и с третьим стражником; а когда она поделилась яблоками со стражником у четвертых дверей, то у нее осталось лишь 10 яблок. Сколько яблок она собрала в саду?

Задача из сказки «1001 ночь» (ночь 458-я)

60 Стая голубей подлетела к высокому дереву. Часть голубей села на ветвях, а другая расположилась под деревом. Сидевшие на ветвях голуби говорят расположившимся внизу: «Если бы один из вас взлетел к нам, то вас стало бы втрое меньше, чем нас всех вместе, а если бы один из нас слетел к вам, то нас с вами стало бы поровну». Сколько голубей сидело на ветвях и сколько под деревом?

Задача Сабита ибн Корры

Знаменитый физик, математик и астроном средневекового Востока Сабит ибн Корра ал-Харани (836—901) был автором около 100 работ. Он дал комментарий к собственному переводу «Начал» Евклида, познакомил арабских математиков с сочинениями Архимеда о правильном семиугольнике.

61 Найти сумму квадратов n первых нечетных чисел:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2.$$

Задачи Абу Камила

Египетский математик Абу Камил Шуджа ибн Аслам ал-Мисри (ок. 850—930) был автором трактатов: «Книга об алгебре и алмукабале», «Книга о редкостях искусства арифметики» и «О пятиугольнике и десятиугольнике». Ниже приводится по одной задаче из названных трактатов Абу Камила.

62 Разделить 10 на две части x и $10-x$ так, что

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}.$$

63 Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+u+v=100, \\ 2x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{u}{4}+v=100. \end{cases}$$

64 Вычислить стороны вписанного и описанного правильных пятиугольников для окружности радиуса R.

Задача Абу-л-Вафы

Крупнейший математик и астроном средневекового Востока Абу-л-Вафа (940—998) написал оригинальные сочинения «Книга о том, что нужно знать писцам, дельцам и другим в науке арифметики», «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений» и др. Абу-л-Вафа комментировал сочинения Евклида, Диофанта, Птолемея и ал-Хорезми. Его многочисленные труды по арифметике, геометрии, алгебре, тригонометрии и астрономии сыграли огромную роль в истории науки.

65 Два из трех равновеликих квадратов разрезать на 8 частей так, чтобы из них и из третьего равновеликого квадрата можно было составить квадрат.

Задача ал-Караджи

Иранский математик Абу Бакр Мухаммед ибн ал-Хасан ал-Караджи (г. рожд. неизв.— ок. 1030) в трактате «Аль-Фахри» изложил все известные его предшественникам алгебраические знания с собственными добавлениями и решением более 250 алгебраических задач.

66 Доказать $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

Задача Ибн ал-Хайсама

Выдающийся математик, астроном и физик Востока Абу Али Хасан ибн ал-Хайсам ал-Басри (965—1039) в Европе был известен как Альгазен. Он написал знаменитую «Книгу оптики», трактаты «О параболическом вогнутом зеркале», «Квадратура круга», комментарии к «Началам» Евклида и др.

67 Найти сумму четвертых степеней n первых натуральных чисел:

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4.$$

Задача Ибн Сины

Великий среднеазиатский ученый-энциклопедист Абу Али Ибн Сина (Авиценна) (980—1037) был одним из наиболее выдающихся мыслителей средневековья. Творческое наследие Ибн Сины оставило неизгладимый след в истории философии, медицины, химии и других наук. Его «Канон врачебной науки» долгое время служил основным руководством по медицине. Большие разделы энциклопедий «Книга исцелений», «Книга спасения» и «Книга знания» посвящены физико-математическим наукам. Около 20 сочинений Ибн Сины посвящено астрономии.

68 Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1.

Задача Насирэддина ат-Туси

Ученый-энциклопедист Насирэддин ат-Туси (1201—1274) чрезвычайно разносторонний ученый, был автором сочинений по математике, астрономии, философии, географии, музыке, оптике, медицине и минералогии. Руководил обсерваторией в Мараге, здесь были составлены «Эльханские» астрономические таблицы. Среди математических трудов ат-Туси особенно значительны его работы по плоской и сферической тригонометрии и прежде всего «Трактат о полном четырехстороннике». Ему принадлежат трактаты по арифметике, алгебре, теории чисел и в том числе «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли» [55].

69 Доказать: $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Задача ал-Каши

Крупнейший математик и астроном Джемшид Гияс ад-Дин ал-Каши (г. рожд. неизв.— ок. 1436—1437) был одним из руководителей Самаркандской обсерватории Улугбека. Ал-Каши — автор многих сочинений по астрономии, в том числе «Хаканские астрономические таблицы», «Лестница небес», «Прогулка по садам». Математике ал-Каши посвятил замечательные произведения: «Ключ арифметики», «Трактат об окружности», «О хорде и синусе». Он впервые изложил и мастерски применил теорию десятичных дробей.

70 Плата работнику за месяц, то есть за тридцать дней,— десять динаров и платье. Он работал три дня и заработал платье. Какова стоимость платья?

ЗАДАЧИ НАРОДОВ ЕВРОПЫ

Ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и в то же время полезной задачи.

Иоганн I Бернулли

В середине I тыс. в Европе феодализм пришел на смену рабовладельческому строю. Возникают и укрепляются монархии. Христианство превращается в государственную религию. Центрами распространения знаний и просвещения сначала были монастыри, а позднее университеты. Общим языком ученых становится латынь. Постепенный прогресс культуры и науки в средние века связан с развитием ремесла, производства, торговли. Творения романской и готической архитектуры украсили развивающиеся города. Духовный мир эпохи нашел яркое выражение в поэме «Божественная комедия» Данте Алигьери (1265—1321).

В эпоху Возрождения (XV—XVI вв.) в Европе появляется компас, порох, часы, бумага, книгопечатание. Были созданы художественные шедевры эпохи Возрождения. Рост торговли и мореплавания привели к великим географическим открытиям. Повысилась роль математики. Если в начале средних веков математики в основном занимались астрологией и преследовались как колдуны и чернокнижники, то теперь они становятся в центре внимания. На смену математики постоянных величин пришел период переменных величин. Понятие функции стало главным предметом исследования. На первом этапе математической революции XVII в. была создана аналитическая геометрия. Особенно интенсивно развивался анализ бесконечно малых. Появление проективной геометрии и теории вероятностей предвещало большое будущее в их развитии. В XVIII столетии дифференциальное и интегральное исчисление продвинулось далеко вперед, усилия ученых направлялись на создание новых отделов математического анализа и его приложений в механике. Научная деятельность крупнейших математиков сосредоточилась в прославленных академиях в Париже, Петербурге и Берлине. Дальнейшее расширение и углубление предмета математики привело в начале XIX в. к современному периоду ее развития [55]; [58].

Чешская задача

71 По преданию, основательница чешского государства принцесса Либуша обещала отдать свою руку тому из трех женихов, кто сумеет решить задачу: «Если бы я дала первому жениху половину слив из этой корзины и еще одну сливу, второму жениху половину оставшихся слив и еще одну сливу, а оставшиеся сливы поделила пополам и половину их и еще три сливы дала бы третьему жениху, то корзина опустела бы». Сколько слив в корзине?

Задача Алкуина

Однажды на привале после удачной охоты ирландский ученый монах Алкуин (735—604) в шутку предложил королю Карлу Великому задачу. Ответ короля показал, что он был не только искусный охотник, но и знал толк в арифметике.

72 За сколько прыжков гончая настигнет зайца, если первоначально их разделяет расстояние 150 футов, заяц с каждым прыжком удаляется от собаки на 7 футов, а собака бежит быстрее зайца и с каждым прыжком приближается к нему на 9 футов? (*Фут — мера длины, приблизительно равная длине ступни человека. Фут в разных странах имеет различную величину.*)

Задача о волке, козе и капусте

Эту знаменитую задачу Алкуин поместнл в своем сочнненин «Задачи для оттачивания ума юнощей».

73 Через реку надо перевезти троих: волка, козу и кочан капусты; на лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трех. Как перевезти их, чтобы коза не могла съесть капусту, а волк не мог съесть козу?

Задача Иоанна Палермского

На одном из математических турниров в 1225 г. в Пизе в присутствии римского императора Фридриха II магистром Иоанном Палермским была предложена итальянскому математику Леонардо Пизанскому задача:

74 Найти рациональное квадратное число, которое, будучи увеличено или уменьшено на 5, дает рациональные квадратные числа.

Задачи Леонардо Пизанского

Леонардо Пизанский (1180—1240) имел прозвище Фибоначчи, т. е. «сын Боначчо» (Боначчо — добродушный). Основные достижения Леонардо Пизанского изложены в его сочинениях «Книга абака» и «Практика геометрии».

75 30 птиц стоят 30 монет, куропатки стоят по 3 монеты, голуби — по 2 и пара воробьев — по монете; спрашивается, сколько птиц каждого вида.

76 Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года. Причем природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождаются кролики со второго месяца.

77 Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько у каждого?

78 Выбрать 5 гирь так, чтобы с их помощью можно было взвесить любой груз от 1 до 30 целых весовых единиц. Все гири при взвешивании разрешается ставить только на одну и ту же чашку весов.

79 Найти рациональные числа x, y, z, такие, чтобы каждая из сумм

$$x+y+z+x^2$$
$$x+y+z+x^2+y^2$$
$$x+y+z+x^2+y^2+z^2$$

была квадратом.

Задача Иоганна Региомонтана

Немецкий астроном и математик Региомонтан (псевдоним Иоганна Мюллера) (1436—1476) занимался усовершенствоваиием календаря и систематизацией тригонометрии [6].

80 Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентре).

Задача Леонардо да Винчи

Великий художник и ученый эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519) считал искусство и науку средством объективного познания реальиого мира. Сохранилось богатейшее наследие Леонардо да Винчи в виде рукописей и рисунков (около семи тысяч страниц), содержащих его мысли об искусстве, иауке и технике. Из рукописных фрагментов позднее был составлен и издан «Трактат о живописи». Среди математических записей наиболее значительное место занимают вопросы преобразования равновеликих фигур и тел, исследование луночек, геометрические построения циркулем и линейкой и др. [32].

81 Если две равные окружности пересекаются друг с другом, то прямая, проходящая через точки их пересечения, будет в любой части длины находиться на одинаковых расстояниях от того и другого центра.

Задача Адама Ризе

В XVI в. немецкие алгебраисты назывались коссистами, так как алгебру они именовали coss — от итальянского слова cosa — вещь (неизвестная). Одним из знаменитых коссистов был Адам Ризе (1489—1559). В 1524 г. он написал учебник по алгебре. Ризе свел 90 правил для решения квадратных уравнений с одним неизвестным к 24. Кристоф Рудольф (1500 — сер. XVI в.) 24 правила привел к 8, и, наконец, крупнейший коссист Михаэль Штифель (1486—1567) вместо восьми правил установил одно, употребляемое и в настоящее время.

82 Трое торгуют лощадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по одной трети ваших денег, и я приобрету лошадь». Наконец, третий говорит первым двум: «Дайте мне только по четвертой ваших денег, и лошадь будет моя». Теперь спрашивается, сколько денег было у каждого.

Задача Альбрехта Дюрера

Великий художник и ученый эпохи Реформации в Германии Альбрехт Дюрер (1471—1528) специально для художников написал трактаты: «Наставление об измерении с помощью циркуля и линейки» и «О человеческой пропорции». Дюрер много занимался геометрическими построениями, заложил основы ортогонального проектирования, дал правила перспективных построений, составлял магические квадраты [38].

83 Построить магический квадрат 4×4 для натуральных чисел от 1 до 16, чтобы два числа в нижних средних клетках указы-

вали на год создания талисмана (1514), а сумма чисел угловых клеток квадрата и сумма чисел четырех центральных клеток образовывали магическую сумму (34).

Задачи Михаэля Штифеля

Существенный вклад в развитие алгебры внес крупнейший немецкий коссист Михаэль Штифель (1486—1567). Он одним из первых в Европе стал оперировать с отрицательными числами, ввел дробный и нулевой показатель степени, дал правило деления на дробь и др. Штифель много занимался разработкой способов построения магических квадратов четного и нечетного порядков.

84 Построить магический квадрат 9×9.

85 Проверить равенство: $\sqrt{16}+\sqrt[3]{8}=\sqrt{\sqrt[3]{4096}}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

86 Упростить: $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$.

Задача Никколо Тартальи

Никколо Тарталья (ок. 1499—1557) был одним из крупнейших математиков эпохи Возрождения. Настоящее имя ученого Никколо Фонтана. В шесть лет Никколо получил увечье от безжалостного удара французского солдата и после этого до конца жизни носил прозвище Тарталья (картавый). Никколо рос в бедности и знания добывал самообразованием. 12 февраля 1535 г. Тарталья одержал убедительную победу на математическом турнире над молодым итальянским математиком Антонио Марио Фиори. Основные труды Тартальи посвящены математике, механике, баллистике, геодезии, фортификации. «Общий трактат о числе и мере» в двух томах Тартальи содержит разнообразный материал по арифметике, алгебре и геометрии. Имя Тартальи связано с разработкой способа решения кубических уравнений в радикалах.

87 На данном отрезке AB при помощи данного раствора циркуля (не равного AB) и линейки построить равносторонний треугольник.

Задача Джироламо Кардано

Джироламо Кардано (1501—1576) — математик, врач, естествоиспытатель и изобретатель — был одним из выдающихся и разносторонних ученых эпохи Возрождения. Основной труд Кардано — «Великое искусство». Имя Кардано наряду с именем Тартальи связано с разработкой способа решения кубических уравнений в радикалах. В наше время в технике широко применяется карданов вал и карданова подвеска [26].

88 Построить общую касательную к двум данным окружностям.

Задачи Франсуа Виета

Франсуа Виет

Замечательный математик французского Ренессанса Франсуа Виет (1540—1603) ввел коренные улучшения в алгебраическую символику. Среди многих своих открытий сам он особенно высоко ценил установление зависимости между корнями и коэффициентами уравнений. Виет много занимался алгебраическими уравнениями, соответствующими делению угла на три, пять и семь равных частей. Он нашел разложение $\cos nx$ и $\sin nx$ по степеням $\cos x$ и $\sin x$. Это позволило ему сразу решить в октябре 1594 г. уравнение 45-й степени с числовыми коэффициентами, предложенное как вызов всем математикам мира голландским ученым Андрианом ван Роуменом (1561—1615). Виет разработал оригинальное исчисление прямоугольных треугольников и впервые рассмотрел бесконечные произведеиия.

Доказать:

89 $\sin nx = 2\sin x\cos(n-1)x + \sin(n-2)x$.

90 $\sin nx = 2\cos x\sin(n-1)x - \sin(n-2)x$.

91 $\cos nx = -2\sin x\sin(n-1)x + \cos(n-2)x$.

92 $\cos nx = 2\cos x\cos(n-1)x - \cos(n-2)x$.

Задача Иоганна Кеплера

Немецкий астроном, математик и физик Иоганн Кеплер (1571—1630) открыл законы движения планет. В книге «Новая стереометрия винных бочек» Кеплер развил оригинальные методы, сыгравшие важную роль в становлении идей интегрального исчисления, дал подробную теорию использования логарифмов для вычислений [5].

93 Расстояние от середины образующей прямого цилиндра до наиболее далекой точки цилиндра равно d. Найти максимум объема этого цилиндра.

Задача Иоганна Фаульхабера

Немецкий математик и инженер Иоганн Фаульхабер (1580—1635) в сочинении «Школа алгебры» вычислил суммы степеней натуральных чисел вплоть до $1^{17}+2^{17}+3^{17}+...+n^{17}$.

94 Доказать:

$$1^5+2^5+3^5+...+n^5=\frac{1}{12}(2n^6+6n^5+5n^4-n^2).$$

Задачи К. Г. Баше де Мезириака

Французский любитель математики, поэт и писатель Клод Гаспар Баше де Мезириак (1587—1638) — автор оригинальных сборников математических развлечений: «Занимательные и приятные математические задачи» (1612) и «Задачи забавные и сладостные, кои совершаются в числах» (1624).

95 Двое называют поочередно числа от единицы до десяти, и выигрывает тот, кто первый доведет до ста сумму чисел, названных обоими игроками.

96 Разделить 8 мер жидкости поровну, имея посуды емкостью 3 и 5 мер.

Рене Декарт

Задача Рене Декарта

Французский философ и математик Рене Декарт (1596—1650) заложил основы аналитической геометрии и ввел многие современные алгебраические обозначення. В «Геометрии» (1637) Декарта широкое применение получило понятие переменной величины. Основным достижением Декарта в аналитической геометрии явился метод координат (декартовы координаты) [39].

97 Дан единичный отрезок. Разделить с помощью циркуля и линейки отрезок a на отрезок b.

Задачи Бонавентуры Кавальери

Итальянскнй математик Боиавентура Кавальери (1598—1647) в своей «Геометрии неделимых» развил метод неделимых для определения площадей и объемов. Творчество Кавальери сыграло большую роль в формированин исчисления бесконечно малых.

98 Доказать: $\log(a+b)=\log a+\log 2+2\log\sin\frac{90^\circ+\varphi}{2}$, где $\sin\varphi=\frac{b}{a}$ $(a>b\geqslant 0)$.

99 Доказать: $\log(a-b)=\log a+\log\cos 2\varphi$, где $a>b\geqslant 0$ и $\sin\varphi=\sqrt{\frac{b}{2a}}$.

Французская задача XVII в.

100 Трое имеют по некоторой сумме денег каждый. Первый дает из своих денег двум другим столько, сколько есть у каждого. После него второй дает двум другим столько, сколько каждый из них имеет. Накоиец, и третий дает двум другим столько, сколько есть у каждого. После этого у всех троих оказывается по 8 экю (монет). Спрашивается, сколько денег было у каждого вначале.

Задачи Пьера Ферма

Выдающийся французский математнк Пьер Ферма (1601—1665) был по профессии юрист. В теории чисел с его имеием связаны знаменитые теоремы: великая теорема Ферма и малая теорема Ферма (задача 102). В геометрии Ферма явился непосредственным предшествеиииком Декарта. Важную роль сыграл Ферма в зарождении теории вероятиостей. В трудах Ферма получили систематическое развитие операции диффереицироваиия и интегрирования. С именем Ферма связано установление вариациоиного принципа геометрической оптики [48].

101 Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $q_1, q_2, q_3, \ldots$, то

$$\frac{S}{S-q_1}=\frac{q_1}{q_2}.$$

102 Доказать, что если p — простое число и a — любое натуральное, то

$$a^p-a$$

делится на p.

Задача Франца ван-Скаутена

Голландский математик Франц ван-Скаутен (1615—1660) — автор сочинения «Математические этюды», где рассматривалась предлагаемая задача:

103 Найти число делителей ($\tau(m)$) числа $m=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа.

Задача Джона Валлиса

Основной труд английского математика Джона Валлиса (1616—1703) «Арифметика бесконечного» сыграл важную роль в предыстории интегрального исчисления. Валлис нашел выражение для числа π в виде бесконечного произведения и ввел общепринятый знак для бесконечности.

104 Найти сумму всех делителей ($S(m)$) числа $m=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа.

Задача Блеза Паскаля

Французский философ, писатель, математик и физик Блез Паскаль (1623—1662) рано проявил свои выдающиеся математические способности. Круг математических интересов Паскаля был весьма разнообразен. Паскаль доказал одну из основных теорем проективной геометрии (теорема Паскаля), сконструировал суммирующую машину (арифмометр Паскаля), дал способ вычисления биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля), впервые точно определил и применил для доказательства метод математической индукции, сделал существенный шаг в развитии анализа бесконечно малых, сыграл важную роль в зарождении теории вероятностей. В гидростатике Паскаль установил ее основной закон (закон Паскаля). «Письма к провинциалу» Паскаля явились шедевром французской классической прозы [33]; [45].

105 Найти общий признак делимости на натуральное число.

Задача Жака Озанама

Французский математик Жак Озанам (1640—1717) — автор занимательной книги «Математические и физические развлечения», которая выдержала много изданий, начиная с 1696 г. Предлагаем задачу из «Курса математики» Озанама.

106 Трое хотят купить дом за 2400 ливров. Они условились, что первый даст половину, второй — одну треть, а третий — оставшуюся часть. Сколько даст каждый?

Задачи Исаака Ньютона

Исаак Ньютон

Исаак Ньютон (1643—1727) — величайший английский физик и математик — создал теоретические основы механики и астрономии, открыл закон всемирного тяготения, разработал (независимо от Г. В. Лейбница) дифференциальное и интегральное исчисление, изобрел зеркальный телескоп, автор важнейших экспериментальных работ по оптике. С именем Ньютона связаны задачи, в частности, по элементарной математике [11].

107 Даны 3 последовательных члена геометрической прогрессии. Их сумма равна 19, а сумма их квадратов 133. Определить эти члены.

108 Даны 4 последовательных члена геометрической прогрессии. Сумма двух крайних членов равна 13, двух средних 4. Определить эти члены.

109 На трех лугах площадью $3\frac{1}{3}$, 10 и 24 га трава растет одинаково, т. е. с одинаковой густотой и с одним и тем же приростом. После того как на первом лугу 12 коров паслись 4 недели, а на втором лугу 21 корова паслась 9 недель, трава оказалась съеденной настолько, что оба пастбища на время пришлось забросить. Сколько коров можно пасти на третьем лугу в течение 18 недель?

110 Два почтальона A и B, которых разделяет расстояние в 59 миль, выезжают утром навстречу друг другу. A проезжает за 2 часа 7 миль, а B — за 3 часа 8 миль, при этом B отправляется в путь часом позже A. Найти, сколько миль проедет A до встречи с B.

Задачи Г. В. Лейбница

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. В математике наряду с И. Ньютоном разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Важный вклад Лейбниц внес в комбинаторику. С его именем, в частности, связаны теоретико-числовые задачи [46].

111 Показать, что если n — целое, то n^5-n делится на 5.
112 Показать, что если n — целое число, то n^7-n делится на 7.

Задача Абрахама де Муавра

Английский математик Абрахам де Муавр (1667—1754) был выходцем из Франции. С именем Муавра связаны правила возведения в n-ю степень н извлечения корня n-й степени для комплексных чисел. Муавр много занимался исследованием рядов и доказал частный случай предельной теоремы в теории вероятностей.

113 Доказать, что для любого натурального n:

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Задача Христиана Вольфа

Немецкий философ, математик и фнзик Христиан Вольф (1679—1754) — автор «Математнческого лекснкона». Вольф впервые ввел ряд математнческих терминов, в том числе «квадратное уравненне». В Марбурге среди слушателей Вольфа был М. В. Ломоносов.

114 Доказать, что $\log(a+b)=\log a-2\log\sin\varphi$, если $a>b>0$ и $\log\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}(\log a-\log b)$.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Задача Р. А. Ф. Реомюра

Французскнй фнзик н естествоиспытатель Р. А. Ф. Реомюр нзвестен как изобретатель термометра с постоянной нулевой точкой. В 1732 г. Реомюр предложнл швейцарскому математику И. С. Кёнигу задачу о пчелнных сотах.

115 При каких пропорциях ромбовидные наугольники шестигранных пчелиных восковых ячеек для одного и того же объема дают наименьшую поверхность?

Задача Этьенна Безу

Французскнй математик Этьенн Безу (1730—1783) занимался исследованием свойств систем алгебраических уравнений высших степеней и установил теорему о деленин многочлена на линейный двучлен (теорема Безу).

116 По контракту работникам причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с них взыскивается по 12 франков. Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали в течение этих 30 дней?

Задача Джона Вильсона

Английский математнк Эдуард Варинг (1734—1798) в 1770 г. опубликовал в «Алгебранческих размышлениях» наиболее известный критерий простого числа и припнсал его сэру Джону Внльсону (1741—1793).

117 Доказать, что натуральное число $n > 1$ тогда и только тогда является простым, когда $(n-1)! + 1$ делится на n.

Задача Софи Жермен

С детства увлекалась математикой француженка Софи Жермен (1776—1831). Из-за запретов родителей Софи занималась математнкой тайком. Однажды Жермен написала письмо от мужского нмени королю математиков К. Ф. Гауссу (1777—1855) с просьбой разъяснить некоторые вопросы. Гаусс по достоинству оценнл своего талантливого инкогннто. Завязалась перепнска. В 1807 г. Софн проснла французского генерала, командовавшего оккупационными войсками, пощаднть жизнь Гаусса. Глубоко тронутый происшедшнм Гаусс до конца жизни сохранил глубокое уважение и дружбу к Софи Жермен. В 1816 г. Софи Жермен была прнсуждена премня Парнжской академии наук. Математическне работы Жермен относятся к геометрнн и теорнн чисел.

Заметим, что у Софи Жермен были замечательные предшественницы женщины-математики: Теано (VI в. до н. э.), Аскотея и Ластения (IV в. до н. э.), Гипатия Александрийская (370—415), Эмнлия дю Шатле (1706—1749), Мария Лаланд (XVIII в.), Гортензия Лепот (1723—1788), Марня Гаэтано Аньези (1718—1799). Большнх успехов в развитии математнки позднее достигли: Мэри Соммервиль (1780—1872), Ада Августа Байрон (1815—1852), Софья Васильевна Ковалевская (1850—1891), Эмми Нётер (1882—1935) и многие другие [31].

118 Доказать, что каждое число вида $n^4 + 4$ есть составное при $n > 1$.

Задача С. Д. Пуассона

Основные труды французского механика, физика и математика Симеона Дени Пуассона (1781—1840) относятся к теоретической и небесной механике, математической физике, интегральному исчислению, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей. Пуассону принадлежат слова: «Жизнь прекрасна тем, что ее можно посвятить изучению математики и ее преподаванию» [18].

119 Некто имеет 12 пинт (пинта — мера жидкости) и хочет отлить половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. Зато имеется два сосуда емкостью 5 и 8 пинт. Спрашивается, каким образом можно налить 6 пинт в сосуд в 8 пинт.

Задача о восьми ферзях

120 Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу? *(Шахматный ферзь ходит по вертикалям, горизонталям и диагоналям.)*

Задача Якоба Штейнера

Швейцарский математик Якоб Штейнер (1796—1863) много занимался проективной геометрией и построениями, которые выполняются только с помощью прямой линии и неподвижного круга.

121 Разделить правильный пятиугольник на две равновеликие части прямой, параллельной одной из его сторон.

Задачи Э. Ш. Каталана

Основные труды бельгийского математика Эжена Шарля Каталана (1814—1894) относятся к геометрии, теории чисел и алгебре.

122 Из точки M, взятой вне окружности, провести секущую так, чтобы она разделялась окружностью пополам.

123 В цепочке из n букв, расположенных в заданном порядке, расставить $n-1$ пару скобок таким образом, чтобы внутри каждой пары стояло ровно два «выражения». Этими спаренными выражениями могут быть либо две соседние буквы, либо буква и соседнее выражение в скобках, либо два соседних выражения. Сколькими способами могут быть расставлены скобки?

НЕСТАРЕЮЩИЕ ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Арифметика или числительница есть художество честное, независимое и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохваленнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретенное и изложенное.

Л. Ф. Магницкий

Первые сведения о развитии математики на Руси относятся к IX—XII вв. (древнерусская нумерация, метрология, первые системы дробей и др.). В Древней Руси времени Ярослава Мудрого (978—1054) уже существовали общеобразовательные школы. Ценные сведения о математических знаниях содержатся в памятнике древнерусского права «Русская Правда» и в памятниках духовного содержания: «Книга святых тайн Еноха», «Шестоднев», «Толковая палея» и др.

Феодальная раздробленность и иноземное нашествие сыграли роковую роль в исторической судьбе, и надолго задержали культурное и научное развитие Киевской и Новгородской Руси. Поэтому вновь математика начинает развиваться на Руси только в XVI в. после освобождения от татарского ига. В первых рукописях создается самобытная русская математическая терминология. Сохранилась рукопись XVI в. «Книга сошному письму», содержащая «статью», посвященную вычислению налога с земельной площади в «сохах». Для расчетов «сошного письма» применялись русские счеты. Арифметические рукописи XVI в. переписывались и в XVII в. и имели традиционное название «Книга рекома по-гречески арифметика, а по-немецки — алгоризма, а по-русски цифирная счетная мудрость». Первые русские рукописные книги по математике XVI—XVII вв. были вытеснены замечательной книгой Л. Ф. Магницкого «Арифметика» (1703).

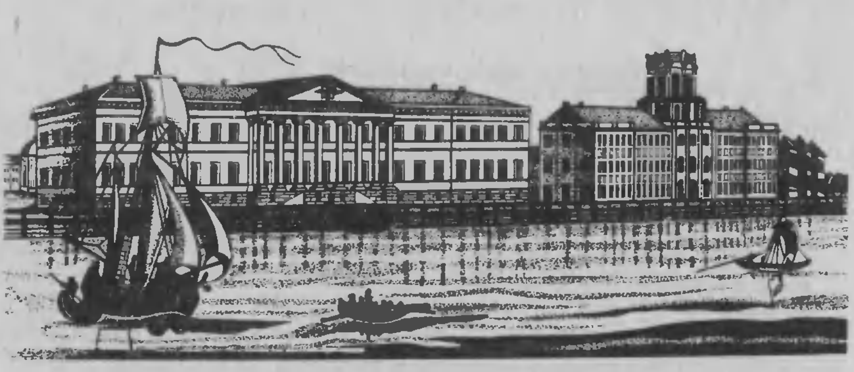
Основание Петербургской академии наук пришлось на время бурного расцвета математики и механики. Творчество великого Леонардо Эйлера (1707—1783), много лет проработавшего в России, охватило практически все области физико-математических знаний. Именно в XVIII в. было положено начало формирования русской математической школы. В XIX в. славу нашей Академии принесли блестящие открытия в теории чисел, теории вероятностей и математическом анализе крупнейшего отечественного ученого П. Л. Чебышева (1821—1894) [51].

Старинная народная задача

124 Шли 7 старцев.
У каждого старца по 7 костылей,
На каждом костыле по 7 сучков,
На каждом сучке по 7 кошелей,
В каждом кошеле по 7 пирогов,
В каждом пироге по 7 воробьев.
Сколько всего?

Задача Кирика Новгородца

Первый русский математик, диакон Новгородского Антониева монастыря, известный нам по имени Кирик Новгородец, написал в 1136 г. сочинение «Учение



Петербургская Академия наук (XVIII в.)

им же ведати человеку числа всех лет», посвященное вопросам хронологии и календаря.

125 Сколько месяцев, недель, дней и часов прожил человек, которому в 1136 г. исполнилось 26 лет?

Задача из книг новгородских писцов

126 В книгах новгородских писцов XV в. упоминаются такие меры жидкостей: бочка, насадка и ведро. Из этих же книг стало известно, что 1 бочка и 20 ведер кваса уравниваются с тремя бочками кваса, а 19 бочек, 1 насадка и 15,5 ведра уравниваются с 20 бочками и 8 ведрами. Можно ли на основании этих данных определить, сколько насадок содержится в бочке?

Задача из «Счетной мудрости»

127 Идет корабль по морю, на нем мужеска полу и женска 120 человек. Найму дали 120 гривен, мущины дали по 4 алтына, а женщины дали по 3 алтына с человека. Сколько мужеска полу было и женска порознь? (*Гривна, гривенник — десять копеек, алтын равнялся трем копейкам.*)

Задача из рукописи XVI в.

128 Летела стая гусей, навстречу им один гусь и рече: «Бог в помочь лететти сту гусям». И гуси ему сказали: «Не сто нас гусей всей стаей летит: нас летит стая и как бы и нам еще столько, да полстолько, да четверть столько, да ты, гусь, и то было б сто гусей».

Задача из рукописи XVII в.

129 Четыре плотника у некого гостя нанялись двора ставити. И говорит первый плотник так: «Только б де мне одному тот двор ставити, я бы де его поставил един годом». А другой молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в два года». А третий молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в три года». А четвертый так рёк: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в четыре года». Ино все те четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Ино сколь долго они ставили, сочти мне.

Задачи из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого

Русский математик и педагог Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) в 1703 г. опубликовал в Москве свою знаменитую книгу «Арифметика, сиречь наука числительная». Эта книга была до середины XVIII в. основным учебником по математике в России. «Арифметика» Магницкого поистине была энциклопедией математических знаний и сыграла большую роль в распространении математических знаний в России. М. В. Ломоносов называл «Арифметику» Магницкого «вратами учености» наряду со «Славянской грамматикой» (1643) Мелетия Смотрицкого [28]; [43].

Аріѳметіка практіка

или дѣятелная.

Что есть аріѳметіка;

Аріѳметіка или числителница, есть художество честное, независтное, и всѣмъ удобопонятное, многополезнѣйшее, и многохвалнѣйшее, от древнѣйшихъ же и новѣйшихъ, въ разная времена явлшихся изряднѣйшихъ аріѳметіковъ, изобрѣтенное, и изложенное.

Колико сугуба есть аріѳметіка практіка;

Есть сугуба.

1 Аріѳметіка политіка, или гражданская

2 Аріѳметіка логістика, не ко гражданству токмо, но и к движенію небесныхъ круговъ принадлежащая.

Первая страница книги Л. Ф. Магницкого «Арифметика»

130 Спросил некто учителя: «Скажи, сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына». Учитель ответил: «Если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня учеников 100». Спрашивается, сколько было у учителя учеников.

131 Найти число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4.

132 Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, со женою выпьет тое же кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его особо выпьет тое же кадь.

Задача Христиана Гольдбаха

Выдающийся математик XVIII в. Христиан Гольдбах (1690—1764) был членом Петербургской академии наук и основную часть жизни прожил в Москве. В переписке со своим другом Эйлером высказал гипотезу, известную под названием проблемы Гольдбаха: каждое целое число, большее чем 2, есть сумма трех чисел, которые либо простые, либо 1 [60].

133 Доказать, что при натуральных числах a и b сумма всех дробей вида $\frac{1}{(a+1)^{b+1}}$ имеет пределом единицу.

Задачи Леонарда Эйлера

Леонард Эйлер

Именем Леонарда Эйлера (1707—1783) в современной математике названы: критерий, метод, многочлены, подстановки, постоянная, преобразование, произведение, ряд, теоремы, тождества, уравнения, формулы, функции, характеристика, интегралы, углы, числа и т. п. Гений XVIII в.— Леонард Эйлер — обрел в России вторую родину и проработал в Петербургской академии наук более 30 лет. Французский математик П. С. Лаплас советовал: «Читайте, читайте Эйлера — он учитель всех нас» [62].

134 Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и быков купил чиновник?

135 Доказать, что число $2^{2^5}+1$ делится на 641.

136 На реке Преголя, где стоит город Калининград (б. Кёнигсберг), имеется семь мостов (рис. 7). Возможно ли пройти по всем мостам, не вступая ни на один из них дважды?

137 Показать, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма четырех квадратов, является также суммой четырех квадратов:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(m^2+n^2+p^2+q^2)=$$
$$=(an+bm+cq+dp)^2+(am-bn+cp-dq)^2+$$
$$+(-ap-bq+cm+dn)^2+(aq-bp-cn+dm)^2.$$

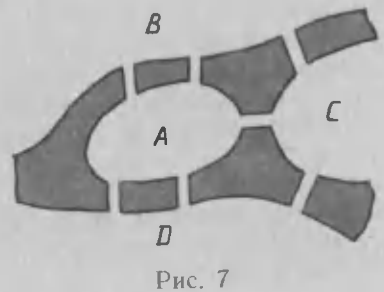


Рис. 7

138 Доказать, что основания высот, основания медиан и точки, расположенные на серединах от ортоцентра до вершин треугольника, лежат на одной окружности.

139 Доказать, что во всяком треугольнике точка пересечения медиан и ортоцентр лежат на одной прямой с центром описанной окружности.

140 Определить рациональные значения x и y в уравнении $x^y = y^x$.

141 Разложить число e в цепную дробь.

Краткая справка о числе е. Число Непера

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots$$

служит основанием натуральных логарифмов и обозначено буквой e в честь Эйлера. Немецкий математик И. Г. Ламберт доказал в 1766 г. иррациональность числа e. В 1873 г. французский математик Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e. Натуральные логарифмы широко используются для выражения математических зависимостей разнообразных физических, химических и других процессов. В 1964 г. с помощью ЭВМ было вычислено более миллиона цифровых знаков числа e [34].

142 Среди 36 офицеров поровну уланов, драгунов, гусаров, кирасиров, кавалергардов и гренадеров и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков и подпоручиков, причем полк каждого из родов войск представлен офицерами всех шести рангов. Можно ли выстроить этих офицеров в каре 6×6 так, чтобы в любой колонне и любой шеренге встречались офицеры всех полков и всех рангов?

143 Сколькими способами можно расставить n не угрожающих друг другу шахматных ладей на доске $n \times n$ клеток так, чтобы ни одна из них не стояла на главной диагонали? *(Шахматная ладья ходит по вертикалям и горизонталям. Главной диагональю считается диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний.)*

144 Обойти конем все клетки шахматной доски, побывав в каждой клетке ровно по одному разу. *(Шахматный конь ходит буквой «Г».)*

145 Сколькими способами выпуклый n-угольник можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри n-угольника?

Задача Л. Н. Толстого

Среди любимых наук великого русского писателя Л. Н. Толстого (1828—1910) одно из самых первых мест занимала математика. Он постоянно интересовался решением различных задач. Л. Н. Толстой горячо ратовал за развитие мыслительной деятельности детей, за индивидуальный подход в обучении, особенно арифметике. Педагогическая деятельность Л. Н. Толстого в области математики была связана с организацией на свои средства школы в Ясной Поляне и изданием в 1872 г. «Арифметики» в составе «Азбуки».

146 Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

Задача, предложенная Ивану Петрову

Иван Петров — сын крестьянина, родом из деревни Рогозино Кологривского уезда Костромской губернии. Математически одаренный мальчик не умел ни читать, ни писать, но любил производить в уме всякого рода арифметические подсчеты. В мае 1834 г. одиннадцатилетний Ваня успешно выдержал устный экзамен по математике в Костромской гимназии. Ване было предложено двенадцать задач, и на все он дал правильные ответы, затратив на решение около часа.

147 Сосчитать в уме, сколькими способами можно уплатить 78 рублей, имея билеты трех- и пятирублевого достоинства.

Задача С. А. Рачинского

Выражение, которое и составляет «задачу Рачинского», запечатлено на картине художника Н. П. Богданова-Бельского «Устный счет», хранящейся в Третьяковской галерее. На картине изображен урок устного решения задачи в школе села Татево Смоленской губернии. Эту школу основал и в ней преподавал бывший профессор Московского университета Сергей Александрович Рачинский (1833—1902). Художник Н. П. Богданов-Бельский был учеником этой школы.

148 Путем устных вычислений найти быстро результат выражения

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

Глава II

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ НАУКИ О СЛУЧАЙНОМ

...И случай, бог-изобретатель...

А. С. Пушкин

Еще в глубокой древности появились различные игры. В Древней Греции и Риме широкое распространение получили игры в астрагалы (т. е. бросание костей из конечностей животных) и игральные кости (кубики с нанесенными на гранях точками). В настоящее время игральные кости иногда изготовляют в виде додекаэдров и икосаэдров. В одной из азартных (слово «азартный» происходит от арабского «азар» — трудный, т. е. редко выпадавшие комбинации костей) игр бросались одновременно четыре астрагала и фиксировался результат. Худший бросок, при котором выпадает более одной единицы, назывался «собакой». Лучшим исходом считали бросок «Венера», когда на четырех астрагалах выпадали различные грани. Позднее азартные игры распространились в средневековой Европе. В частности, в XIV в. появились игральные карты. В XVII в. азартные игры способствовали зарождению и становлению комбинаторики и науки о случайном. Ученые XV—XVII вв. много внимания уделили решению задач о дележе ставки, об игре в кости, лотереях и т. п. [23].

ЗАДАЧИ О ДЕЛЕЖЕ СТАВКИ

...Истина одна: и в Тулузе, и в Париже.

Б. Паскаль

Задачи о дележе ставки в занимательных формулировках встречались уже в рукописных арифметических учебниках XIII в. и сводились к справедливому разделению ставки между двумя игроками, если игра прервана по каким-либо причинам.

Задачи Луки Пачоли

В энциклопедическом труде итальянского математика Луки Пачоли (1445 — ок. 1514) «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», изданном в Венеции в 1494 г., в главе «Необычайные задачи» помещено несколько задач на справедливый раздел ставки.

149 Компания играет в мяч до 60 очков и делает ставку в 22 дуката (дукат — золотая монета, которая чеканилась в Венеции). В связи с некоторыми обстоятельствами игра не может быть закончена, причем одна сторона в этот момент имеет 50, другая 30 очков. Спрашивается, какую часть общей ставки должна получить каждая сторона.

150 Необходимо разделить ставку между игроками в том случае, когда один имеет пять выигранных партий, а другой — две, договорились же играть до шести выигрышных партий.

151 Два игрока поставили по 105 ливров (ливр — серебряная монета) с условием, что общий выигрыш достанется тому, кто первый выиграет три партии. После того как первый игрок выиграл две партии, а второй — одну, игра прервалась. Спрашивается, как распределить ставки.

152 Трое соревнуются в стрельбе из арбалета (арбалет — самострел, усовершенствованный лук). Кто первым достигнет 6 лучших попаданий, тот выигрывает. Ставки 10 дукатов. Когда первый получил 4 лучших попадания, второй 3, а третий 2, они не хотят продолжать и решают разделить приз справедливо. Спрашивается, какой должна быть доля каждого.

Лука Пачоли с молодым герцогом Урбиио

Никколо Тарталья

Задачи Никколо Тартальи

Итальянский математик Никколо Тарталья (ок. 1499—1557) в своей работе «Общий трактат о числе и мере» (1560) правильно указал на недостатки в решениях Пачоли. Далее Тарталья предлагает несколько своих задач на справедливое разделение ставки.

153 Играя до 60 очков, одна сторона набрала 10 очков, а другая — нуль. Как разделить ставку, если каждая сторона ставит по 22 дуката?

154 При тех же условиях (что и в задаче 153) одна сторона набрала 50 очков, а другая 30.

155 Двое играют до шести выигрышных партий. Один игрок имеет уже пять партий, а другой только три. Как разделить ставку, если игра прервана?

Задача Г. Ф. Певероне

В статье итальянского математика Г. Ф. Певероне «Два коротких и легких трактата. . .» (1553) также рассматривались задачи о разделении ставки.

156 *A* и *B* играют до десяти партий. *A* выиграл семь, а *B* — девять партий. Как разделить ставку?

Блез Паскаль

Задачи Блеза Паскаля

До середины XVII в. не было правильных методов решения задач о справедливом дележе ставки. В 1654 г. между французскими математиками Блезом Паскалем и Пьером Ферма возникла переписка по поводу ряда задач. Из переписки Паскаля и Ферма сохранилось лишь три письма Паскаля и четыре письма Ферма. Эти письма впервые были опубликованы в 1679 г. в Тулузе [49]. В этой переписке оба ученых, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Совпадение результатов великих ученых при решении задачи о дележе ставки послужило для Паскаля поводом шутливо заметить в первом письме к Ферма от 29 июля 1654 г.: «Как я вижу, истина одна: и в Тулузе, и в Париже». Ферма со своей стороны нашел решение и для более сложного случая, когда игра происходит между произвольным числом игроков.

157 Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если один игрок выиграл две партии, а другой — одну и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

158 Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если один игрок выиграл две партии, а другой — ни одной и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

159 Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если первый игрок выиграл одну партию, а второй — ни одной и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

Задачи Пьера Ферма

160 Пусть до выигрыша всей встречи игроку *А* недостает двух партий, а игроку *В* — трех партий. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?

161 Пусть до выигрыша всей встречи игроку *А* недостает одного очка, а двум другим (*В* и *С*) недостает по два очка. Как справедливо разделить ставку?

Пьер Ферма

Задача де Мерэ

Рыцарь де Мерэ (1607—1648) был заметной фигурой при дворе Людовика XIV, увлекался философией и литературой, был знаком и состоял в переписке с некоторыми крупными математиками своего времени и одновременно был страстным игроком.

162 Два игрока условились, что выигрыш получит тот, кто выиграет определенное число партий. Игра была прервана, когда первому игроку осталось до выигрыша m, а второму n партий. Как разделить ставку, если вероятность выигрыша партии для каждого равна 0,5.

Христиан Гюйгенс

Задачи Христиана Гюйгенса

В 1655 г. в Париж приехал голландский механик, физик и математик Христиан Гюйгенс (1629—1695). Он узнал о задаче справедливого разделения ставки. В XVII в. решением подобных задач занимались многие математики.

Вскоре после возвращения в Голландию Гюйгенс самостоятельно занялся поиском метода решения таких задач. И уже в 1657 г. Гюйгенс опубликовал первую печатную работу под названием «О расчете в азартных играх» В предисловии Гюйгенс пишет: «Во всяком случае, я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории». Из 14 предложений своей книги Гюйгенс в предложениях 4—9 правильно решает различные задачи о справедливом распределении ставки, в том числе и между тремя игроками.

163 A играет с B с условием, что тот, кто первым выиграет трижды, получит всю ставку. И вот A выиграл уже два раза, а B еще только один раз, и я хочу знать, как должна быть справедливо разделена ставка в случае, если оба на этом игру прекращают.

164 Игроку A недостает одной партии, а игроку B — трех партий. Как разделить справедливо ставку?

165 Игроку A недостает одной партии, а игроку B — четырех партий. Как разделить справедливо ставку?

166 Игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Как разделить справедливо ставку?

167 Игроку A недостает двух партий, а игроку B — четырех. Как разделить справедливо ставку?

168 Игрокам A и B недостает по одной партии, а игроку C — двух партий. Как разделить справедливо ставку?

ЗАДАЧИ ОБ ИГРЕ В КОСТИ

Когда кончается игра в три кости,
То проигравший снова их берет
И мечет их один в унылой злости;
Другого провожает весь народ...

Данте Алигьери

Задачи Ричарда де Форниваль

Поэма на латинском языке канцлера кафедрального собора в Амьене Ричарда де Форниваль (1200—1250) содержала главу о спорте и играх, в частности, с игральными костями.

169 Подсчитать число возможных исходов при бросании трех игральных костей.

170 Найти число способов получения данной суммы очков на трех костях.

Задача из средневековой поэмы (до XV в.)

171 Подсчитать число различных возможных исходов при бросании трех игральных костей.

Задача о жулике

Однажды в Неаполе преподобный Галиани увидел человека из Базиликаты, который, встряхивая три игральные кости в чашке, держал пари, что выбросит три шестерки; и действительно он немедленно получил три шестерки. Вы скажете: такая удача возможна. Однако человеку из Базиликаты удалось это и во второй раз, пари повторилось. Он клал кости назад в чашку 3, 4, 5 раз и каждый раз выбрасывал три шестерки. «Черт возьми! — вскричал преподобный Галиани.— Кости налиты свинцом». Так оно и было.

172 Какова вероятность выпадения трех шестерок?

Задачи Джироламо Кардано

Простейшими задачами об игре в кости занимался Кардано. В рукописи «Книга об игре в кости» (1526), опубликованной лишь в 1663 г., рассматривались многие задачи, связанные с бросанием двух и трех игральных костей и выпадением на верхних гранях определенного числа очков. Кардано указывает, что азартные игры были изобретены во время десятилетней осады Трои [47].

173 При одновременном бросании двух игральных костей указать число возможных случаев появления определенного числа очков хотя бы на одной кости.

174 Указать количество случаев при бросании двух игральных костей, в которых единица или двойка появится хотя бы один раз.

175 Составить таблицу совпадения шансов при метании двух костей.

176 Решить ту же задачу для трех костей.

Джироламо Кардано

Задача Никколо Тартальи

Тарталья в работе «Общий трактат о числе и мере» дает общее правило выпадения различного числа очков на верхних гранях для одной (6), двух (21), трех (56) и т. д. игральных костей. Для получения чисел 6, 21, 56, . . . Тарталья составляет соответственно суммы:

1) $1+1+1+1+1+1=6$;

2) $1+2+3+4+5+6=21$;

3) $1+3+6+10+15+21=56$;

. . . .

177 Найти количество различных выпадений очков на верхних гранях при одновременном бросании: 1) четырех костей; 2) n костей.

Первая игра де Мерэ

Страстный игрок в кости рыцарь де Мерэ хотел разбогатеть при помощи игры в кости, и для этого он придумывал различные усложненные правила игры. Легенда о де Мерэ подробно изложена в статье А. Я. Хинчина и А. М. Яглома «Наука о случайном».

178 Игральная кость бросается четыре раза. Рыцарь бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадет шесть очков. Какова вероятность выигрыша для рыцаря?

Вторая игра де Мерэ

179 Две игральные кости бросаются 24 раза. Рыцарь бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадут две шестерки. Какова вероятность проигрыша для рыцаря?

Задачи Галилео Галилея

Рассказывают, что однажды к итальянскому физику, механику, астроному и математику Галилео Галилею (1564—1642) явился солдат и попросил помочь ему в решении вопроса, который длительное время не давал ему покоя: что выпадает чаще при игре в кости — сумма в 9 очков или сумма в 10 очков? Может показаться, что вероятность одинакова, так как каждая сумма из 9 и 10 очков может быть представлена одним из шести способов:

$$9=1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3;$$

$$10=1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4.$$

Однако с учетом перестановок для суммы 9 очков получится 25 различных способов $(6+6+3+3+6+1)$, а для суммы 10 очков — 27 различных способов $(6+6+3+6+3+3)$. Как видно, вероятности этих случайных событий довольно близки между собой и равны соответственно $\frac{25}{216}$ и $\frac{27}{216}$, что и вызывало затруднения у солдата.

В работе «О выходе очков при игре в кости», опубликованной впервые в 1718 г., Галилей дал исчерпывающее решение задачи о числе всех возможных исходов при одновременном бросании трех игральных костей [59]

180 Сколькими способами можно получить ту или иную сумму очков при одновременном бросании двух игральных костей?
181 При каких выходах трех костей могут получаться все числа?

Якоб Бернулли

Задача Христиана Гюйгенса

182 При одновременном бросании трех игральных костей какая сумма, выпавших на них очков, должна появляться чаще — 11 или 12?

Задачи Якоба Бернулли

Новый этап в истории науки о случайном начался с Якоба Бернулли (1654—1705). В 1713 г. вышла посмертно в свет книга Я. Бернулли «Ars conjectandi» («Искусство предположений»). Сам Я. Бернулли еще в 1692 г. дал своей неопубликованной рукописи, хранящейся в библиотеке Базельского университета, название «De arte combinatoria» («О комбинаторном искусстве»), следуя античной традиции в использовании латинского слова ars в заглавии. (Например, Кардано опубликовал «Artis magnae» («Великое искусство», 1545), Виет — «Isagoge in artem analyticam» («Введение в аналитическое искусство», 1591), Лейбниц — «Dissertatio de arte combinatoria» («Исследование о комбинаторном искусстве», 1666).) «Искусство предположений» состоит из четырех частей. Первая часть содержит упоминавшееся сочинение Гюйгенса с развернутыми комментариями Я. Бернулли. Вторая часть книги посвящена разработке комбинаторики. В третьей части решаются разнообразные задачи науки о случайном. Четвертая часть посвящена общим соображениям о природе случайных событий и исследованию закономерностей массовых случайных явлений [42].


JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar. Gal. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè fcripta
DE LUDO PILÆ RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
clↃ Iↄcc xiii.

Титульный лист «Искусства предположений» Я. Бернулли (Базель, 1713)

183 Сколькими способами можно получить 12 очков при одновременном бросании четырех игральных костей?

184 Некто желает при шести бросаниях кости получить все шесть граней в таком порядке: при первом бросании одно очко, при втором — два и т. д. Как велико его ожидание?

Задача Самуэля Пепайса

Расчетами в азартных играх занимались многие ученые и в том числе великий Исаак Ньютон. Однажды ему прислал в письме задачу Самуэль Пепайс. Последнего интересовал вопрос о предпочтительности пари при игре в кости. Ньютон дал исчерпывающее решение задачи, опираясь на формулу Я. Бернулли $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ (см. приложение II).

185 Какое из событий более вероятно:
1) появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании шести костей;
2) появление хотя бы двух шестерок при подбрасывании 12 костей;
3) появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей?

Задачи Г. В. Лейбница

Важную роль в развитии комбинаторики и в появлении самого термина «комбинаторика» сыграл трактат Г. В. Лейбница «Исследование о комбинаторном искусстве». Среди комбинаторных задач Лейбница мы находим подсчет числа сочетаний, размещений с повторениями и различных исходов при одновременном бросании игральных костей.

186 Подсчитать при одновременном бросании n игральных костей количество исходов, в которых определенная грань встречается m раз.

187 Найти количество исходов (без повторений) при одновременном бросании n игральных костей, если $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6.

Задача П. Р. де Монмора

Французский математик П. Р. де Монмор (1678—1719) в своей главной работе «Анализ азартных игр» (1707) наряду с комбинаторикой много внимания уделил рассмотрению игры в карты, игры в кости и решению различных других задач.

188 Определить число способов, которыми можно получить при бросании n костей a единиц, b двоек, c троек и т. д.

ЗАДАЧИ О ГАДАНИЯХ, ЛОТЕРЕЯХ, УРНАХ...

Каждый раз, когда служитель объявлял следующий номер билета, толпа отвечала громкими возгласами... По мере того как приближалась минута осуществления мечты, лихорадка, охватившая неаполитанцев, все усиливалась... больше всего досталось лотерее... где все так и устроено...

М. Серао

Задача о гаданиях

По преданию, когда-то в сельских местностях России среди девушек существовало гадание. Одна из подруг зажимала в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу, а другая связывала эти травинки попарно между собой сверху и снизу. Если при этом все шесть травинок оказывались связанными в одно кольцо, то это должно было означать, что девушка в текущем году выйдет замуж.

189 Какова вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо?

Задача о Генуэзской лотерее

В XVII в. в Генуе возникла знаменитая лотерея. Генуэзская лотерея в XVIII столетии разыгрывалась во Франции, Германии и других странах. Красочно описала генуэзскую лотерею итальянская писательница Матильда Серао (1856—1927) в новелле «Розыгрыш лотереи».

190 Разыгрывается 90 номеров, из которых выигрывают пять. По условию можно ставить ту или иную сумму на любой из 90 номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров. Если участник лотереи ставил на один номер, то он получал при выигрыше в 15 раз больше ставки; если на два номера (амбо), то в 270 раз больше; если на три номера (терн), то в 5500 раз больше; если на четыре номера (катерн) — в 75 000 раз больше; если на пять номеров (квин) — в 1 000 000 раз больше, чем ставка. Какова вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев?

Задачи Якоба Бернулли

191 Некто положил в урну два шара, белый и черный, и предложил трем игрокам премию при условии, что ее получит тот, кто первый вытянет белый шар. Первым извлекает шар A и кладет его обратно, затем вторым испытывает счастье B и в конце, третьим — C. Какие шансы имеют эти три игрока?

192 A держит пари с B, что он вытянет из 40 игральных карт, среди которых по десять карт разной масти, четыре разномастные карты. Как относятся шансы обоих друг к другу?

Задача Абрахама де Муавра

Абрахам де Муавр был автором работ «О мере случая», «Доктрина шансов», «Аналитические этюды» и др.

193 Вероятность наступления случайного события при отдельном испытании равна p. Определить вероятность того, что в n испытаниях событие наступит подряд k раз.

Задача П. Р. де Монмора

194 Два игрока, имеющие по n одинаковых занумерованных билетов, извлекают одновременно билеты один за другим до тех пор, пока не извлекут одинаковый билет, тогда один из игроков выигрывает. А если такое совпадение не произойдет вовсе, то выигрывает другой игрок. Найти вероятность выигрыша каждого из этих двух игроков.

Задача Томаса Симпсона

Английский математик Томас Симпсон (1710—1761) был ткачом шелковых тканей. Математикой занимался самостоятельно. Основные труды Симпсона относятся к геометрии, тригонометрии, математическому анализу и основам теории ошибок.

195 Имеется данное число вещей различного сорта: n_1 вещей первого сорта, n_2 — второго и т. д. Наудачу берутся m вещей. Найти вероятность того, что при этом будет взято m_1 вещей первого сорта, m_2 вещей второго сорта и т. д.

Задача Леонарда Эйлера

196 В генуэзской лотерее выпадение номеров 49, 50, 51, 72, 73 дает секвенцию трех и двух последовательных чисел и обозначается 1 (3) и 1 (2); выпадение 13, 49, 50, 51, 72 дает секвенцию трех последовательных чисел и отдельно два изолированных числа или 1 (3) и 2 (1) и т. п.
Найти вероятности k секвенций, т. е. появления в данном тираже k последовательных выигрышных чисел.

Задачи Ж. Л. Д'Аламбера

Крестьянин Аламбер по совету полицейского комиссара назвал подкидыша Жаном Лероном в память Круглой церкви, где был найден ребенок. Позднее Жан Лерон к своему имени добавил фамилию Д'Аламбер. С именем французского математика, механика и философа Жана Лерона Д'Аламбера (1717—1783) в науке связаны принцип Д'Аламбера, признак Д'Аламбера и др. С 1751 г. Д'Аламбер работал вместе с философом Дени Дидро над созданием «Энциклопедии наук, искусств и ремесел» (28 томов). Д'Аламбер для энциклопедии написал, в частности, статьи «Герб и решетка», «Лотерея», «Кость» и др. С именем Д'Аламбера связан забавный случай. Рассказывают, что, обучая математике очень тупого, но очень знатного ученика и не добившись понимания доказательства, Д'Аламбер в отчаянии воскликнул: «Ну, честное слово, сударь, эта теорема верна!» На что ученик отвечал: «Сударь, почему Вы мне сразу так не сказали? Вы — дворянин, и я — дворянин; Вашего слова для меня вполне достаточно» [29].

Жан Лерон Д'Аламбер

197 Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

198 Монета подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что герб выпадет по крайней мере один раз?

Задача Ж. Л. Д'Аламбера — П. С. Лапласа

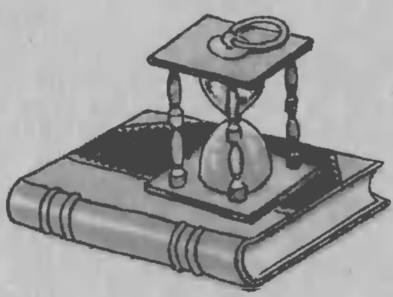
Французский астроном, математик и физнк Пьер Снмон Лаплас (1749—1827) активно участвовал в реорганизации высшего образования во Франции, руководил введением метрической системы мер. Научное наследие Лапласа связано с небесной механикой, алгеброй, математнческнм анализом, теорией вероятностей, математической фнзнкой [16].

199 Слово «Константинополь» составлено из букв А, И, К, Л, Н, Н, Н, О, О, О, П, С, Т, Т, Ь. Какова вероятность случайного составления этого слова из перечисленных букв?

Задача М. В. Остроградского

Основные труды русского математика Михаила Васильевича Остроградского (1801—1861) относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике. Остроградский также успешно занимался теорией чисел, алгеброй и теорией вероятностей [24].

200 В урне имеется a белых и b черных шаров. Какова вероятность того, что из n извлеченных шаров будет c белых и d черных?



Глава III

ОТВЕТЫ • УКАЗАНИЯ • РЕШЕНИЯ

...И опыт, сын ошибок трудных...

А. С. Пушкин

Глава I

Конечно, будем учиться доказывать,
но будем также учиться догадываться.

Д. Пойа

1. 7; 49; 343; 2 401; 16 807; 19 607. Эта задача-путешественница из древнего египетского папируса трансформировалась на Руси в старинную народную задачу и встречалась в различных формулировках (см. задачу 124).

2. 10 мер хлеба автор разлагает на 10 членов арифметической прогрессии с разностью $\frac{1}{8}$ и получает, что 10-й член прогрессии равен

$$1+9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=1\frac{9}{16}.$$

3. По условию задачи $\left(\frac{8}{9}d\right)^2=\frac{\pi d^2}{4}$. Тогда

$$\pi=\frac{8^2\cdot d^2\cdot 4}{9^2\cdot d^2}=\frac{256}{81}=3{,}1605,$$

что дает довольно точное приближение с ошибкой 0,6%.

4. 30 и 10.

5. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу, следовательно, $2\pi R=6R$, откуда $\pi=3$.

6. 15.

7. Пусть требуется разделить прямой угол ABC (рис. 8) на три равные части. Для этого древние вавилоняне на отрезке BD стороны BA строили равносторон-

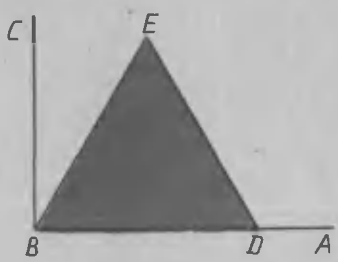


Рис. 8

ний треугольник BED. Тогда угол CBE будет составлять одну треть данного прямого угла. Остается только разделить пополам угол DBE, и задача будет решена.

8. Пусть Парис предположил, что Афина изрекла истину. Тогда она прекраснейшая из богинь, и по предположению утверждение (4) ложно. Мы приходим к противоречию, так как Гера не может быть прекраснейшей из богинь, коль скоро прекраснейшая из богинь Афина. Таким образом, исходное предположение ложно.

Если Парис предположит, что истину изрекла Гера, то она прекраснейшая из богинь, и по предположению утверждение (2) ложно. Мы снова приходим к противоречию, так как Афродита не может быть прекраснейшей из богинь, коль скоро прекраснейшая из богинь Гера. И это исходное предположение ложно.

Если Парис, наконец, предположит, что Афродита изрекла истину, то Афродита — прекраснейшая из богинь. Отрицания утверждений (2), (3) и (5) истинны и показывают, что Афродита — прекраснейшая из богинь.

Итак, по «суду Париса» прекраснейшей из богинь является Афродита.

9. Решение задачи Дидоны легко и красиво следует из изопериметрического свойства круга: среди всех плоских фигур данного периметра максимальную площадь имеет круг. Это замечательное свойство круга было известно в Древней Греции. Поэтому Дидона окружила имевшейся веревкой участок земли в форме полукруга с центром на берегу моря.

10. Для определения расстояния от точки A на берегу (рис. 9) до недоступной точки B (местонахождение корабля на море) строился треугольник ABC с доступной точкой C на берегу, после чего отрезки AC и BC продолжались по другую сторону точки C и строился треугольник CDE, такой, что $CD=AC$, $\angle ACB = \angle DCE$ и $\angle CDE = \angle CAB$. Тогда по теореме о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла, получаем $AB=DE$.

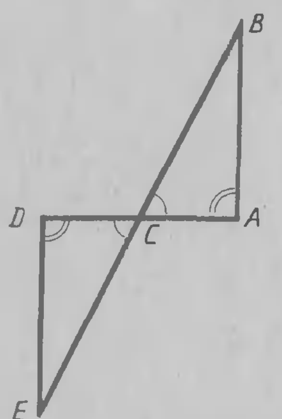


Рис. 9

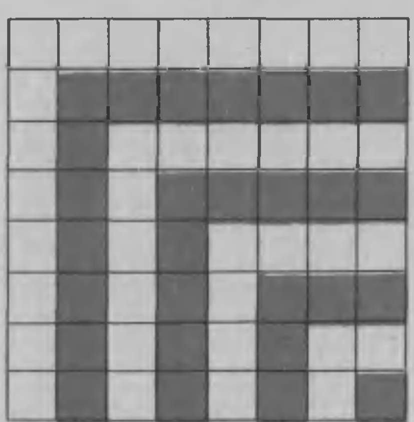


Рис. 10

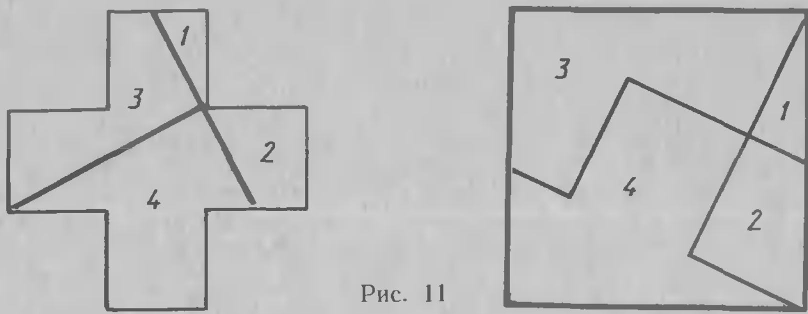


Рис. 11

11. Среди 28 учеников школы Пифагора математикой заннмались 14, музыкой — 7, пребывали в молчании — 4 и было еще 3 женщины.

12. В школе Пифагора эта задача решалась геометрически. Действительно, если от квадрата отнять гномон, представляющий нечетное число (на рис. 10 гномоны выделены цветом), то в остатке получится квадрат, т. е. тогда

$$2n+1=(n+1)^2-n^2.$$

13. В тождестве $k^2-(k-1)^2=2k-1$ (задача 12) подставить значения $k=1, 2, 3, \ldots, n$ и просуммировать почленно n полученных равенств. В итоге найдем:

$$1+3+5+\ldots+2n-1=n^2.$$

Вычнсление сумм — один нз интереснейших н важнейших вопросов математики. С различными специальными методами суммирования можно познакомиться по статьям [34].

14. $x=(n^2-m^2)k$, $y=2nmk$, $z=(n^2+m^2)k$, где $n>m$, k — натуральные числа, m и n — взаимно простые числа разной четности. Подробнее см. [15].

15. См. рис. 11.

16. 40.

17. 3360.

18. Пусть у каждой из граций было по x плодов и они отдали каждой из муз по y плодов. Тогда по условию задачи должно быть

$$x-9y=3y \text{ или } x=12y,$$

т. е. у каждой из граций до встречн с музами число плодов было кратно 12.

19. Пусть a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$. Сумма площадей луночек равна

$$S_1+S_2=\frac{\pi}{8}a^2+\frac{\pi}{8}b^2+\frac{ab}{2}-\frac{\pi}{8}c^2=\frac{\pi}{8}(a^2+b^2-c^2)+\frac{ab}{2}=\frac{ab}{2},$$

так как $a^2+b^2-c^2=0$.

Следовательно, $S_1+S_2=\dfrac{ab}{2}=S$, что и требовалось доказать.

20. Если x — груз мула, то $(x-1)$ — груз осла, увеличенный на единицу, а следовательно, первоначальный груз осла был $(x-2)$. С другой стороны, $x+1$ в два раза больше, чем груз осла, уменьшенный на 1, т. е. $x-3$. Таким образом, $x+1=2(x-3)$. Отсюда груз мула $x=7$ и груз осла $x-2=5$.

23. Другими словами, Евклид утверждает, что множество простых чисел бес конечно. Этот результат Евклида помещен в IX книге его «Начал» в качестве 20-й теоремы. Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что множество простых чисел конечно и состоит из чисел 2, 3, 5, ..., p, где p — самое большое простое число. Рассмотрим натуральное число $N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot p+1$. Очевидно, при делении N на все простые числа 2, 3, 5, ..., p получается остаток, равный 1. Значит, $N>1$ должно делиться на простое число, отличное от 2, 3, 5, ..., p. Предположение, что множество простых чисел конечно, привело нас к противоречию, т. е. нет наибольшего простого числа.

24. В справедливости равенства можно убедиться, возведя обе части в квадрат.

26. Из тождества $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ при $n=1, 2, 3, \ldots, n$ сложением находим последовательно:

$$n^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)-3(1+2+\ldots+n)+n;$$

$$3(1^2+2^2+\ldots+n^2)=n^3-n+\frac{3(n+1)n}{2};$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

27. Искомая площадь равна (см. рис. 3):

$$S=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}(AC^2-AD^2-DC^2)=$$
$$=\frac{\pi}{8}[(AD+DC)^2-AD^2-DC^2]=\frac{\pi}{8}\cdot 2AD\cdot DC=\frac{\pi}{4}BD^2=\pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

29. Чтобы убедиться в справедливости неравенства Архимеда, разложим $\sqrt{3}$ в бесконечную периодическую цепную дробь $[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$ и найдем соответствующие подходящие дроби:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ \frac{265}{153},\ \frac{362}{209},\ \frac{989}{571},\ \frac{1351}{780}.$$

Как видно, Архимед заключил число $\sqrt{3}$ между девятой и двенадцатой подходящими дробями.

Заметим, что первые описания получения бесконечных цепных дробей да́ли итальянские математики Р. Бомбелли (ок. 1526—1573) и П. А. Катальди (1548—1626) и немецкий математик Л. Швентер (1585—1636). Широкое применение цепные дроби получили, начиная лишь с работ голландского механика, физика и математика Х. Гюйгенса. Подробнее о цепных дробях см. [41].

31. Многоугольные или n-угольные — числа связаны определенным образом с плоским многоугольником. Отсюда еще одно их название — фигурные числа. Простейшими из многоугольных чисел являются треугольные:

$$1,$$
$$1+2=3,$$
$$1+2+3=6,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

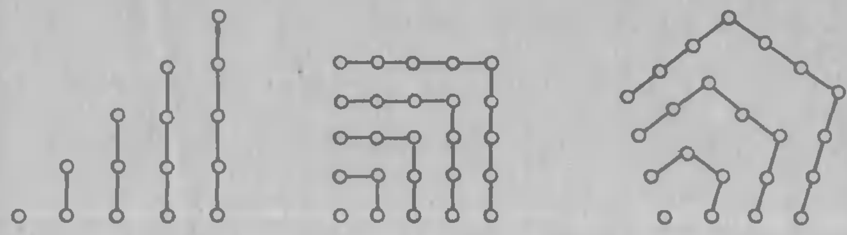


Рис. 12

$$1+2+3+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2},$$

. . . .

которые, начиная со второго, геометрически получаются из треугольника. Аналогичным образом получаются квадратные, пятиугольные н т. д. числа (рис. 12).

Таким образом m-е n-угольиое число есть сумма m первых членов арифметической прогрессни с первым членом, равным 1, и разностью $n-2$:

$$P_n^m=m+(n-2)\frac{m(m-1)}{2}.$$

Частные случаи этого общего правила для нахождения треугольных, квадратных, пятиугольных и т. д. чисел были известны пифагорейцам еще раньше:

$$P_3^m=1+2+3+\ldots+m=\frac{1+m}{2}\cdot m=m+1\cdot\frac{m(m-1)}{2};$$

$$P_4^m=1+3+5+\ldots+(2m-1)=\frac{1+(2m-1)}{2}\cdot m=m+2\cdot\frac{m(m-1)}{2};$$

$$P_5^m=1+4+7+\ldots+(3m-2)=\frac{1+(3m-2)}{2}\cdot m=\frac{m(3m-1)}{2}=m+3\cdot\frac{m(m-1)}{2}$$

и т. д. Более подробио с фигурными числами можно познакомиться по статье [8].

32. $\frac{12}{25}$.

33. Пусть B' — точка, симметричная B относнтельно прямой l (рис. 13). Тогда точка C пересечения AB' с прямой l будет искомой, так как для любой точки C', отличной от C, будет

$$AC'+C'B=AC'+C'B'>AB'=AC+CB.$$

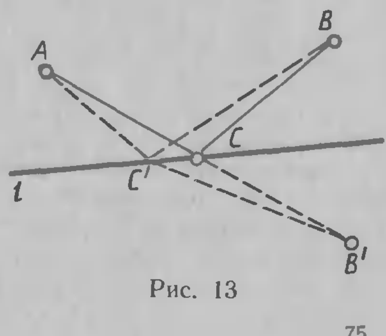


Рис. 13

Интересиые задачи на максимум и минимум можно найти в [56].

34. $[n(n-1)+1]+[n(n-1)+3]+\ldots+[n(n-1)+(2n-1)]=n^3$.

36. $$n_n=1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2}+\frac{3\cdot4}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}[(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\ldots+(n^2+n)]=$$

$$=\frac{1}{2}[(1+2+3+\ldots+n)+(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{n(n+1)}{4}\left(1+\frac{2n+1}{3}\right)=$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}\cdot\frac{2n+4}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

37. Имение следует разделить между сыном, женой и дочерью пропорционально числам 4:2:1.

38. 84 года.

39. Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} X-(X+Y+Z)^2=\alpha^2, \\ Y-(X+Y+Z)^2=\beta^2, \\ Z-(X+Y+Z)^2=\gamma^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Диофант использовал подстановки:

$$X+Y+Z=x, \quad X=2x^2, \quad Y=5x^2, \quad Z=10x^2.$$

Система (1) преобразуется в систему

$$\begin{cases} x^2=\alpha^2, \\ 4x^2=\beta^2, \\ 9x^2=\gamma^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Из соотношения $X+Y+Z=x$ он получал $2x^2+5x^2+10x^2=x$, откуда $x=\frac{1}{17}$. Искомыми числами, в частности, будут $X=\frac{2}{289}$, $Y=\frac{5}{289}$, $Z=\frac{10}{289}$. Обобщая мысль Диофанта, можно положить $X=ax^2$, $Y=bx^2$, $Z=cx^2$. Тогда $x=\frac{1}{a+b+c}$ и решение системы (1) имело бы вид

$$X=\frac{a}{(a+b+c)^2}, \quad Y=\frac{b}{(a+b+c)^2}, \quad Z=\frac{c}{(a+b+c)^2}.$$

41. Искомый магический квадрат показан на рис. 14.

В древнекитайской рукописи «Же-ким» («Книга перестановок») описывается предание, согласно которому император Ию увидел однажды на берегу реки священную черепаху с узором на панцире из белых и черных кружков (рис. 15). Этот рисунок на панцире черепахи считали магическим символом и употребляли при заклинаниях. Заменяя фигуры рисунка соответствующими числами, получим магический квадрат, изображенный на рис. 14.

42. Если через x_1, x_2, x_3 обозначить соответственно хороший, средний и плохой урожай 1 снопа, то задача сводится к решению системы

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 14

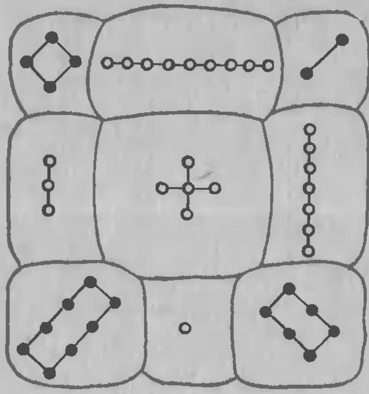


Рис. 15

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=39, \\ 2x_1+3x_2+x_3=34, \\ x_1+2x_2+3x_3=26. \end{cases}$$

Отсюда $x_1=9\frac{1}{4}$ доу, $x_2=4\frac{1}{4}$ доу и $x_3=2\frac{3}{4}$ доу.

43. $23+105t$, где t — целое неотрицательное число.

44. Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 5x+3y+\frac{z}{3}=100, \\ x+y+z=100. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_1=0, \quad y_1=25, \quad z_1=75; \quad x_2=4, \quad y_2=18, \quad z_2=78;$$
$$x_3=8, \ y_3=11, \ z_3=81; \ x_4=12, \ y_4=4, \ z_4=84.$$

45. Цзу Чун-чжи показал, что подходящей дробью к числу π является обыкновенная дробь в неравенстве

$$3{,}1415926<\frac{355}{113}<3{,}1415927.$$

Искомое наилучшее приближение можно получить, найдя несколько первых знаков разложения числа π в цепную дробь [3; 7, 15, 1, 292, ...], а затем вычислить соответствующие подходящие дроби:

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \ldots.$$

Рациональное приближение для числа $\pi=\frac{355}{113}$ вновь нашел голландский математик В. Ото (ок. 1550—1605).

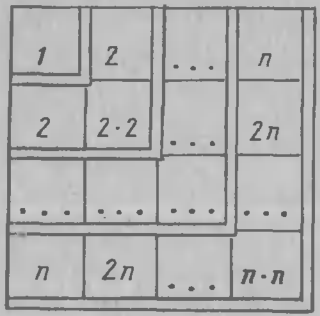


Рис. 16

46. Рассмотрим квадратную числовую таблицу (рис. 16). С одной стороны, сумма чисел в каждом гномоне (наугольнике) дает полный куб:

$$1=1^3,$$
$$2+4+2=2^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n+2n+\ldots+n\cdot n+(n-1)\,n+\ldots+2n+n=n^3.$$

С другой стороны, складывая числа по строкам таблицы, получим:

$$(1+2+\ldots+n)+2(1+2+\ldots+n)+\ldots+$$
$$+n(1+2+\ldots+n)=(1+2+\ldots+n)^2.$$

Следовательно,

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

47. $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n.$

48. $1+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$

49. Решение задачи показано на рис. 17.

50. Задача сводится к решению уравнения

$$ax+b=cx+d, \text{ откуда } x=\frac{d-b}{a-c},$$

где у первого лица будет a вещей и b монет, а у второго лица — c вещей и d монет.

51. Искомые числа x должны удовлетворять соотношениям $x=60n+1$, $x=7a$, где n и a — некоторые натуральные числа. Из $60n+1=7a$ нмеем:

$$a=\frac{60n+1}{7}=8n+\frac{4n+1}{7}.$$

Для натуральных a получаем $n_1=5$, $x_1=301$; $n_2=12$, $x_2=721$; ... .

52. Из рис. 6 имеем:

$$\frac{1}{2}(a+b+d)\,x=\frac{1}{2}\,ah+dh+\frac{1}{2}\,d\,(x-h)+\frac{1}{2}\,bh,$$

откуда $x=h\left(1+\dfrac{d}{a+b}\right)$.

53. Задача сводится к решению уравнения

$$\left(\frac{1}{16^2}+\frac{15^2}{9^2\cdot 16^2}\right)x^2+14=x,$$

где x — число павлннов в стае. Отсюда $x_1=48$, а $x_2=\dfrac{336}{17}$ не подходнт.

54. $C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=(1+1)^5-C_5^0=31.$

55. 63.

56. Применив метод инверсии (правило обращения), получим:
1) $2\cdot 10=20$; 2) $20-8=12$; 3) $12^2=144$; 4) $144+52=196$;
5) $\sqrt{196}=14$; 6) $14\cdot\frac{3}{2}=21$; 7) $21\cdot 7=147$; 8) $147\cdot\frac{4}{7}=84$;
9) $84:3=28$ или короче $x=\sqrt{(2\cdot 10-8)^2+52}\cdot\frac{3}{2}\cdot 7\cdot\frac{4}{7}:3=28$.

57. Прибавив к обеим частям уравнения по $4x^2+400x+1$, получим:

$$x^4+2x^2+1=4x^2+400x+10\,000.$$

Извлекая квадратные корни из обеих частей, имеем: $x^2+1=2x+100$.

Отсюда $x_1=11$, а $x_2=-9$ как отрицательный не учитывался.

58. По методу «рассеивания» индийских математиков всевозможные решения в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными

$$ax+b=cy$$

находятся по формулам $x=(-1)^n bQ_{n-1}+Q_n t$, $y=(-1)^n bP_{n-1}+P_n t$,

где a и c взаимно просты, $a>c$, t — целое число, n — порядок последней подходящей дроби, P_{n-1}, P_n, Q_{n-1}, Q_n — числители и знаменатели предпоследней и последней подходящих дробей (см. [41]). Имеем:

$$\frac{a}{c}=\frac{P_n}{Q_n}=\frac{100}{63}=[1;1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3],\quad \frac{P_6}{Q_6}=[1;\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1]=\frac{27}{17},$$

$$x=90\cdot 17+63t=1530+63t,\quad y=90\cdot 27+100t=2430+100t.$$

При $t=-24$ получаем наименьшие целые положительные решения $x=18$ и $y=30$.

59. $10\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=160$.

60. Если x и y — число голубей на дереве и под деревом, то по условию имеем:

$$\begin{cases} y-1=\dfrac{x+1}{3}, \\ x-1=y+1. \end{cases}$$

Отсюда $x=5$ и $y=3$.

61. $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=$
$=[1^2+2^2+\ldots+(2n)^2]-$
$-[2^2+4^2+\ldots+(2n)^2]=$
$=\dfrac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-$
$-4\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$
$=\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.

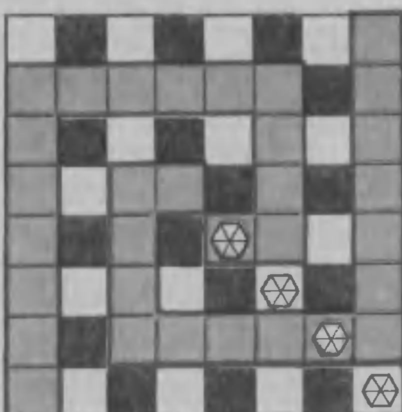


Рис. 17

Как видно, здесь дважды использовался результат задачи Архимеда (задача 26).

62. Обозначив $\frac{10-x}{x}=y$, получим $y^2+1=\sqrt{5}\,y$ и $y=\frac{\sqrt{5}}{2}\pm\frac{1}{2}$. Из уравнения $\frac{10-x}{x}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$ последовательно имеем:

$$10-\frac{3}{2}x=\frac{\sqrt{5}}{2}x \text{ и } x=5(3-\sqrt{5}).$$

Аналогичным образом из уравнения $\frac{10-x}{x}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$ получим $x=5(\sqrt{5}-1)$.

63. Например, $x_1=16$, $y_1=8$, $z_1=9$, $u_1=8$, $v_1=59$; $x_2=34$, $y_2=14$, $z_2=18$, $u_2=20$, $v_2=14$; . . . Абу Камил в «Книге редкостей в арифметике» нашел всего 2676 целых решений системы

64. Сторону правильного вписанного пятиугольника ($x=a_5$) удобно вычислить через сторону правильного вписанного десятиугольника ($y=a_{10}$). Пусть окружность имеет радиус R (рис. 18), $AB=a_5$ и $AC=a_{10}$. Тогда угол AOC равен 36°. Разделив угол OAC пополам прямой AD, получим равнобедренные треугольники DAC и ADO, у которых $AC=AD=OD$. По свойству биссектрисы угла треугольника получим: $AO:AC=OD:DC$ или

$$R:y=y:(R-y). \qquad (1)$$

Откуда $y^2+Ry-R^2=0$ и положительное решение этого уравнения можно представить в виде

$$y=a_{10}=\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2+R^2}-\frac{R}{2} \qquad (2)$$

или

$$y=a_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R=0{,}618\ldots R.$$

Пропорция (1) выражает собой деление радиуса окружности в среднем и крайнем отношении (золотое сечение). Выражение (2) подсказывает способ геометрического построения искомого $y=a_{10}$. В самом деле, отрезок, выражаемый формулой $\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2+R^2}$, представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами, равными R и $\frac{R}{2}$. Чтобы получить отрезок $y=a_{10}$, достаточно из гипотенузы построенного треугольника вычесть $\frac{R}{2}$. Подробнее изложение золотого сечения можно найти в статье [7].

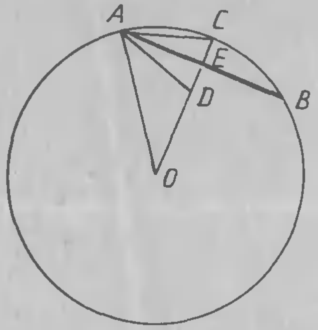


Рис. 18

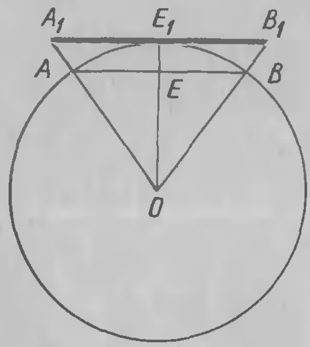


Рис. 19

Сторона правильного вписанного пятиугольника

$$x=a_5=\overset{\bullet}{A}B=2AE=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\ R$$

найдется из соотношения

$$AE^2=AC^2-CE^2=AO^2-OE^2=R^2-(R-CE)^2,$$

отсюда $CE=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}R$ и, значит, $OE=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}R$.

И наконец, сторона описанного правильного пятиугольника A_1B_1 (рис. 19) найдется из подобия треугольников AEO и A_1E_1O.

Имеем $\dfrac{A_1E_1}{AE}=\dfrac{OE_1}{OE}$ и $A_1B_1=2A_1E_1=\dfrac{2AE\cdot OE_1}{OE}=\dfrac{a_5R}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}R}=\dfrac{4R}{\sqrt{5}+1}\times$

$$\times\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}=2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\ R.$$

65. Решение задачи можно усмотреть из рис. 20.

66. Пусть $1+2+\ldots+n$ — сторона квадрата $ABCD$ (рис. 21). Разобьем площадь квадрата $ABCD$ на площади гномонов $(BB_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}DC,$

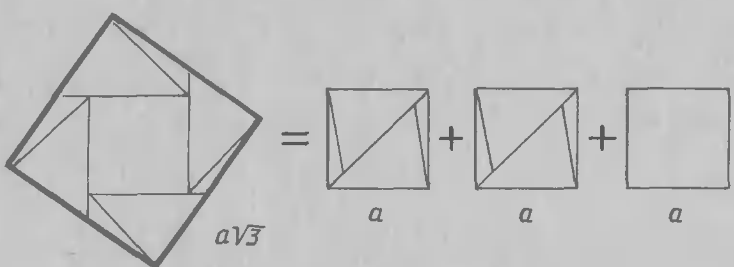


Рис. 20

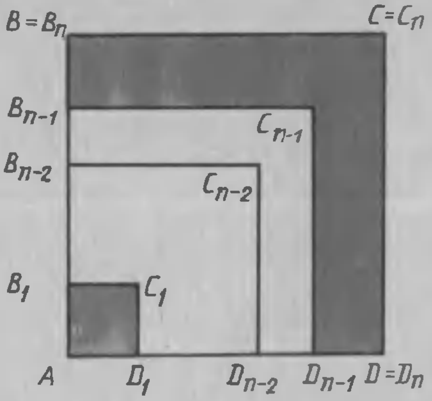


Рис. 21

$B_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}D_{n-2}C_{n-2}, \ldots$) и квадрата $B_1AD_1C_1$, где $DD_{n-1}=$ $=BB_{n-1}=n$, $D_{n-2}D_{n-1}=B_{n-2}B_{n-1}=$ $=n-1$, $\ldots$, $D_1A=B_1A=1$. Площадь гномона $BB_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}DC$ равна

$$2n(1+2+\ldots+n)-n^2= =2n\frac{n(n+1)}{2}-n^2=n^3.$$

Площадь гномона $B_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}D_{n-2}C_{n-2}$ равна

$$(n-1)^3.$$

Таким образом,

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2.$$

67. $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)=$

$$=\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n-\frac{1}{3}\right].$$

Для решения задачи можно использовать тождество

$$n^5-(n-1)^5=5n^4-10n^3+10n^2-5n+1$$

или применить метод математической индукции [54].

68. Пусть $m=9n_1+1$, $m^2=81n_1^2+18n_1+1=9n+1$. Аналогично $m=9k_1+$ $+8$, $m^2=81k_1^2+144k_1+64=9k+1$.

69. В справедливости тождества можно убедиться, используя формулу

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

70. $1\frac{1}{9}$ динара.

71. Пусть первоначально в корзине было x слив. Первый жених получил бы $\frac{x}{2}+1$ слив, второй $\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ слив, третий $\frac{x}{8}+\frac{9}{4}$ слив. Так как $\left(\frac{x}{2}+1\right)+\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{x}{8}+\frac{9}{4}\right)=x$, то у Либуши первоначально было 30 слив.

72. За 75 прыжков.

74. Задача приводит к решению системы

$$\begin{cases} x^2+5=y^2, \\ x^2-5=z^2 \end{cases} \qquad (1)$$

в рациональных числах, которая разрешима в целых числах при условии, что

$$5=4mn(m+n)(m-n), \qquad (2)$$

так как имеют место тождества:

$$(m^2+n^2)^2 \pm 4mn\,(m^2-n^2)=(m^2-n^2 \pm 2mn)^2, \tag{3}$$

где m и n — целые числа.

Для решения системы (1) в целых числах наименьшим числом, удовлетворяющим требованию (2), будет $720=4\cdot 5\cdot 4\,(5+4)(5-4)=5\cdot 12^2$. Так что при $m=5$, $n=4$ из тождества (3) получаем: $41^2+5\cdot 12^2=49^2$, $41^2-5\cdot 12^2=31^2$

или

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2,$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2.$$

Систему (1) можно решить и другим способом. Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим:

$$y^2-z^2=10 \text{ или } (y+z)(y-z)=\frac{80\cdot 18}{12^2}.$$

Полагая $y+z=\frac{80}{12}$, $y-z=\frac{18}{12}$, находим

$$y=\frac{49}{12} \text{ и } z=\frac{31}{12}, \text{ откуда } x^2=\left(\frac{41}{12}\right)^2.$$

Таким образом, рациональным квадратным числом, которое, будучи увеличено или уменьшено на 5, дает рациональное квадратное число, будет $\left(\frac{41}{12}\right)^2$. Решение Леонардо опиралось на формулы суммирования последовательных четных и нечетных чисел.

75. 3 куропатки, 5 голубей, 22 воробья.

76. От одной пары кроликов в год родится

$$1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144=376.$$

Эта задача приводит к ряду Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots,$$

каждый член которого, начиная с третьего, есть сумма двух ему предшествующих. С числами Фибоначчи связаны увлекательнейшие главы элементарной математики и довольно трудные теоретико-числовые проблемы. До сих пор, например, не решен вопрос о конечности множества простых чисел Фибоначчи. Подробнее см. [61].

77. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x+7=5\,(y-7), \\ y+5=7\,(x-5) \end{cases}$$

получим, что первый имел $x=7\frac{2}{17}$ динария, а второй $y=9\frac{14}{17}$ динария.

78. Если m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 — массы гирь, то массу $m \leqslant 30$ весовых единиц любого груза необходимо представить в виде

$$m = a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + a_4 m_4 + a_5 m_5,$$

где коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 равны либо 0, либо 1. Массы гирь m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 достаточно выбрать равными 1, 2, 4, 8, 16 весовым единицам, так как сумма масс равна 31, что больше 30. Любое число $m \leqslant 30$ можно представить в виде

$$m = a_5 2^4 + a_4 2^3 + a_3 2^2 + a_2 2^1 + a_1 2^0,$$

где коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 равны либо 0, либо 1.

79. Из условия задачи получаем систему:

$$\begin{cases} x+y+z+x^2=u^2, \\ x+y+z+x^2+y^2=v^2, \\ x+y+z+x^2+y^2+z^2=w^2 \end{cases} \qquad (1)$$

или ей равносильную

$$\begin{cases} x+y+z+x^2=u^2, \\ u^2+y^2=v^2, \\ v^2+z^2=w^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Положим $x=kx_1$, $y=ky_1$, $z=kz_1$. Тогда решениями в рациональных числах второго и третьего уравнения системы (2) будут соответственно пифагорейские тройки: $u=3k$, $y=4k$, $v=5k$ и $v=5k$, $z=12k$, $w=13k$. Тогда $y_1=4$ и $z_1=12$. Из первого уравнения наших систем получим:

$$kx_1+4k+12k+(kx_1)^2=9k^2$$

или

$$x_1+16=k(9-x_1^2). \qquad (3)$$

Одним из возможных решений в рациональных числах уравнения (3) будет: $x_1=\frac{4}{3}$ и $k=\frac{12}{5}$. Теперь находим искомые числа: $x=kx_1=\frac{12}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{5}$; $y=ky_1=\frac{12}{5}\cdot 4=\frac{48}{5}$; $z=kz_1=\frac{12}{5}\cdot 12=\frac{144}{5}$. Именно эти ответы приводит Леонардо Пизанский.

80. Пусть ABC данный треугольник (рис. 22). Проведем через его вершины прямые, параллельные противоположным сторонам, получим $\triangle A_1B_1C_1$, у которого точки A, B, C будут серединами соответствующих сторон. Высоты данного треугольника будут перпендикулярны к сторонам полученного треугольника, восстановлены в их серединах и, значит, пересекаются в одной точке (используется свойство серединных перпендикуляров). Следовательно, высоты данного треугольника пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

81. Решение легко усматривается из рисунка 23, если доказать, что треугольник O_1O_2A равнобедренный при произвольном выборе точки A на прямой BC.

82. Пусть x, y, z — количество флоринов соответственно у первого, второго и третьего покупателей. Решение системы уравнений

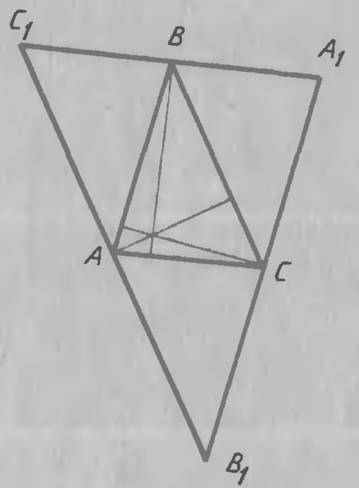


Рис. 22

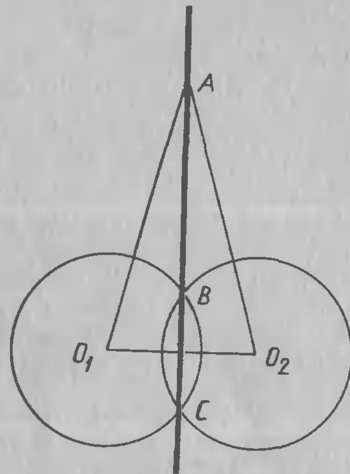


Рис. 23

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}(y+z)=12, \\ y+\dfrac{1}{3}(x+z)=12, \\ z+\dfrac{1}{4}(x+y)=12 \end{cases}$$

дает $x=3\dfrac{9}{17}$, $y=7\dfrac{13}{17}$, $z=9\dfrac{3}{17}$ флоринов.

83. Дюрер поместил свой магический квадрат (рис. 24) на знамеиитой гравюре «Мелаихолия». Числа 15 и 14, стоящие в нижней строке квадрата, указывают иа год создания гравюры. Гравюра «Мелаихолия» напоминает философский трактат и полна сложной символики. Само поиятие «меланхолия» заимствовано из созданиого еще античными философами учения о четырех темпераметах. Люди с мелаихолическим темпераметом склоиы к иаукам, размышлеиию, искусству. В эпоху Возрождения меланхолический темперамент связывали с представле-

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 24

Альбрехт Дюрер. Меланхолия

нием о гениальности. В своей интерпретации меланхолии Дюрер опирается на учение гуманистов XV в. Его меланхолия, несомненно, находится под знаком Сатурна. Об этом свидетельствует изображенный на стене здания магический квадрат, который должен, видимо, играть роль талисмана, предохраняющего от дурного влияния несчастливой планеты, и усилить воздействие планеты Юпитер. Заметим, наконец, что многие исследователи видят в «Меланхолии» духовный автопортрет самого художника.

Позднее было доказано, что для $n=4$ существует 880 магических квадратов. А для $n \geqslant 5$ пока неизвестно общее число магических квадратов.

84. На примере магического квадрата 9×9 (рис. 25). Штифель показывает способ их построения для нечетного порядка с помощью окаймлений из $4(n-1)$, $4(n-3)$, $4(n-5)$, ..., 1 клеток, где n — размер магического квадрата. Так как сумма чисел натурального ряда от 1 до n^2 $S_{n^2} = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, то сумма одного ряда чисел магического квадрата (магическая сумма) равна

$$\frac{S_{n^2}}{n} = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Тогда сумма чисел, составляющих первое окаймление:

$$S_{4(n-1)} = 4(n-1)\frac{n^2+1}{2} = 2(n-1)(n^2+1).$$

Сумма чисел второго обхода:

$$S_{4(n-3)} = 4(n-3)\frac{n^2+1}{2} = 2(n-3)(n^2+1).$$

Аналогично находим $S_{4(n-5)} = 2(n-5)(n^2+1)$.

Наконец, последний обход (центральная клеточка) содержит число

$$S_1 = \frac{n^2+1}{2}.$$

16	81	79	77	75	11	13	15	2
78	28	65	63	61	25	27	18	4
76	62	36	53	51	35	30	20	6
74	60	50	40	45	38	32	22	8
9	23	33	39	41	43	49	59	73
10	24	34	44	37	42	48	58	72
12	26	52	29	31	47	46	56	70
14	64	17	19	21	57	55	54	68
80	1	3	5	7	71	69	67	66

Рис. 25

При этом все разности между отдельными суммами обходов равны $4(n^2+1)$. Сумма первого обхода $2(n-1)(n^2+1)$ равна сумме чисел натурального ряда от 1 до $2(n-1)$ и сумме дополняющих чисел от $[n^2-2(n-1)+1]$ до n^2. Сумма чисел второго обхода $2(n-3)(n^2+1)$ равна сумме чисел от $(2n-1)$ до $4(n-1)$ и сумме дополняющих чисел от $[n^2-4(n-2)+1]$ до $[n^2-2(n-1)]$ и т. д. Для облегчения рассуждений будем каждой клетке квадрата приписывать координаты в виде (x, y), где x — номер горизонтального ряда, y — вертикального. Таким образом, x и y могут принимать только натуральные значения от 1 до n. Для первого обхода Штифель расставляет числа от 1 до $2(n-1)$ и от $[n^2-2(n-1)+1]$ до n^2 следующим образом. На клетки $(1, 2), (1, 3), \ldots, \left(1, \frac{n+1}{2}\right)$ он ставит последовательно нечетные числа, начиная с единицы до $(n-2)$ включительно. На клетку $\left(\frac{n+1}{2}, 1\right)$ ставится число n. Следующие нечетные числа от $(n+2)$ до $(2n-3)$ заполняют клетки $\left(n, \frac{n+3}{2}\right)$, $\left(n, \frac{n+5}{2}\right)$, $\ldots$, $(n, n-1)$. Четными числами 2, 4, $\ldots$ $(n-1)$ заполняются клетки (n, n), $(n-1, n)$, $\ldots$, $\left(\frac{n+3}{2}, n\right)$. На клетки $\left(\frac{n-1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{n-3}{2}, 1\right)$, $\ldots$, $(2, 1)$ ставятся числа $(n+1)$, $(n+3)$, $\ldots$, $2n-2$. Наконец, замыкает половину первого обхода число $2(n-1)$, помещаемое в клетку $(n, 1)$. Теперь на взаимно противоположных сторонах клетки заполняются числами, дополняющими до (n^2+1). Суммы чисел каждой строки и столбца первого окаймления образуют магическую сумму. Например, для первой строки имеем:

$$(n^2-1)+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1+(n-2)}{2}+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n^2-n-1)+(n^2-2n+4)}{2}+n^2-2n+3=$$
$$=2(n-1)+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n^2+(n^2-n+3)}{2}+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n+2)+(2n-3)}{2}+2=2(n-1)+$$
$$+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n^2-3)+(n^2-n+2)}{2}+n+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n+1)+2(n-2)}{2}+(n^2-1)=\frac{n-1}{2}\times$$
$$\times\frac{2+(n-1)}{2}+(n^2-n+1)+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n^2-n)+(n^2-2n+5)}{2}+(n^2-2n+3)=\frac{n^3+n}{2}=$$
$$=\frac{S_{n^2}}{n}.$$

Точно так же распределяются числа от $(2n-1)$ до $4(n-2)$ и числа от $[n^2-4(n-2)+1]$ до $[n^2-2(n-1)]$, дополняющие друг друга до (n^2+1), при втором обходе. После второго обхода вновь будем иметь восемь равных между собой сумм $\frac{n^3+n}{2}$. Продолжая дальше, аналогичным путем найдем последующие равные между собой суммы (их всего будет $2(n+1)$) и число для центральной клеточки, равное $\frac{n^2+1}{2}$.

Заметим, что в истории математики известны различные методы построения магических квадратов нечетного порядка. Среди них наиболее известными являются: индийскнй метод (опирается иа построение своеобразиой «лесенки»), метод византийского математика XIII—XIV вв. Мосхопулоса (использует «ход коня»), метод альфила (осиован на правиле движения стариниой шахматной фигуры альфила — предка современного слоиа), метод Баше (метод террас). Все эти изящные методы являются частиыми случаями общего, так иазываемого линейного метода построения магических квадратов нечетного порядка. Одним из лучших и наиболее общим является квазилинейный метод фраицузского математика и механика Ф. де Лагира (1640—1718) [25].

86. $3+\sqrt{2}$.

87. Из точки A данным радиусом на прямой AB делаем засечку D (рис. 26). Далее из точки B тем же радиусом и на той же прямой AB делаем другую засечку E. Затем на отрезках BE и AD строим равносторонние треугольники EFB и AGD. Точка пересечения прямых BF и AG — точка C — дает третью вершину искомого равностороннего треугольника ABC.

88. В задаче предполагается построение двух внешних (A_1B_1 и A_2B_2 на рис. 27) и двух внутренних ($A'B'$ и $A''B''$ на рис. 28) общих касательных к двум окружностям.

Построение внешией касательной A_1B_1 (см. рис. 27) можно выполнить следующим образом: описываем окружность с центром в точке O_2 радиусом, равиым разности данных радиусов; из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C_1; через точку касания C_1 проводим радиус O_2C_1 и продолжаем его до пересечения с данной окружностью в точке B_1. Накоиец, из B_1 проводим A_1B_1 параллельно O_1C_1.

Аналогично можно построить другую внешиюю касательную A_2B_2.

Для построения внутренней касательной $A'B'$ (см. рис. 28) описываем окружность с центром в точке O'' радиусом, равиым сумме данных радиусов; из O' проводнм к этой окружности касательную $O'C'$; точку касания C' соедиияем с O''; наконец, через точку B', в которой $O''C'$ пересекается с данной окружностью, проводим $A'B' \parallel O'C'$.

Аналогично можно построить другую внутреннюю касательную $A''B''$.

89. $\sin nx = \sin[(n-1)x+x] = \sin(n-1)x\cos x + \cos(n-1)x\sin x =$
$$= \sin x\cos(n-1)x + \sin(n-2)x + \sin x\cos(n-1)x =$$
$$= 2\sin x\cos(n-1)x + \sin(n-2)x.$$

90-92. Решаются аналогично 89.

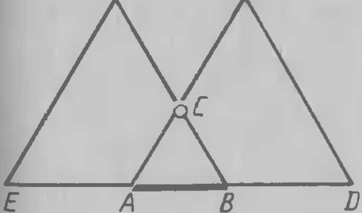


Рис. 26

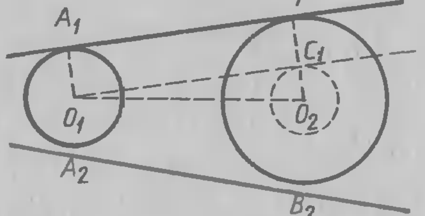


Рис. 27

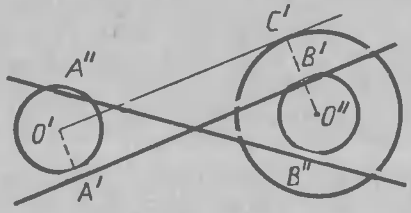


Рис. 28

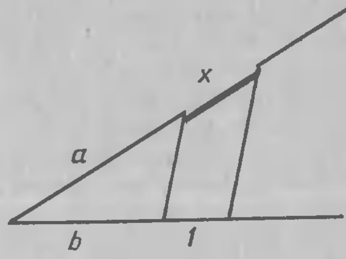


Рис. 29

93. Пусть R, H и V обозначают соответственно радиус, высоту и объем цилиндра. Так как

$$d^2=(2R)^2+\left(\frac{H}{2}\right)^2=2\left(R^2+R^2+\frac{H^2}{8}\right),$$

то

$$V^2=\pi^2R^4H^2=8\pi^2\cdot R^2\cdot R^2\cdot\frac{H^2}{8}\leqslant 8\pi^2\left(\frac{R^2+R^2+\frac{H^2}{8}}{3}\right)^3=8\pi^2\left(\frac{d^2}{6}\right)^3.$$

Отсюда $V_{max}=\frac{\pi d^3}{3\sqrt{3}}$, когда $R^2=\frac{H^2}{8}=\frac{d^2}{6}$.

94. Доказательство можно провести методом математической индукции.

95. Выигрышная стратегия для первого игрока обеспечивается выбором чисел, при котором суммы всех названиых чисел таковы: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.

96. Два способа решения задачи удобно представить последовательными тройками чисел:

1) (8, 0, 0); (3, 5, 0); (3, 2, 3); (6, 2, 0); (6, 0, 2); (1, 5, 2); (1, 4, 3); (4, 4, 0);
2) (8, 0, 0); (5, 0, 3); (5, 3, 0); (2, 3, 3); (2, 5, 1); (7, 0, 1); (7, 1, 0); (4, 1, 3); (4, 4, 0).

97. На рисунке 29 видно, как можно построить искомый отрезок $x=\frac{a}{b}$, используя пропорцию $\frac{x}{1}=\frac{a}{b}$.

98. $\log a+\log 2+2\log\sin\frac{90^\circ+\varphi}{2}=\log a+\log 2\sin^2\frac{90^\circ+\varphi}{2}=$
$=\log a+\log[1-\cos(90^\circ+\varphi)]=\log a+\log(1+\sin\varphi)=\log a+\log\left(1+\frac{b}{a}\right)=$
$=\log a+\log\frac{a+b}{a}=\log(a+b).$

99. $\log a+\log\cos 2\varphi=\log a+\log(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=\log a+$
$+\log\left(1-\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}\right)=\log a+\log\left(1-\frac{b}{a}\right)=\log a+\log\frac{a-b}{a}=\log(a-b).$

100. Рассуждения удобно начать с конца и решение можно представить в виде следующей таблицы:

I	8	$\frac{8}{2}=4$	$\frac{4}{2}=2$	$2+\frac{14}{2}+\frac{8}{2}=13$
II	8	$\frac{8}{2}=4$	$4+\frac{4}{2}+\frac{16}{2}=14$	$\frac{14}{2}=7$
III	8	$8+\frac{8}{2}+\frac{8}{2}=16$	$\frac{16}{2}=8$	$\frac{8}{2}=4$

Значит, сначала у каждого было соответственно 13, 7, 4 экю.

101. Имеем:

$$S=\frac{q_1}{1-q}, \tag{1}$$

где q — знаменатель прогрессии,

$$S-q_1=\frac{q_1}{1-q}-q_1=\frac{q_1 q}{1-q}=\frac{q_2}{1-q}. \tag{2}$$

Искомый результат получим почленным делением (1) на (2).

103. $\tau(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$.

104. $S(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$.

105. Пусть при делении 10 на число n получается остаток r_1, при делении $10r_1$ на n — остаток r_2, при делении $10r_2$ на n — остаток r_3 и т. д. Если данное число, например трехзначное, будет иметь вид $\overline{abc}$, где a, b, c — цифры сотен, десятков и единиц, то общий признак делимости этого числа на n следующий.

Если $c+br_1+ar_2$ делится на n (кратно n), то на n делится и число $\overline{abc}$. В самом деле, пусть

$$10=nq_1+r_1,$$
$$10r_1=nq_2+r_2.$$

Тогда

$$c+br_1+ar_2=c+b(10-nq_1)+a(10r_1-nq_2)=$$
$$=c+10b+100a-n(bq_1+10aq_1+anq_2).$$

Значит, $c+10b+100a$ — кратно n.

106. Первый даст 1200, второй 800, третий 400 ливров.

107. Пусть $\frac{m}{q}$, m, mq — три члена геометрической прогрессии. По условию

$$\begin{cases}\frac{m}{q}+m+mq=19,\\ \frac{m^2}{q^2}+m^2+m^2q^2=133.\end{cases}$$

Положив $x=q+\frac{1}{q}$, получим:

$$\begin{cases} m(x+1)=19, \\ m^2(x^2-1)=133. \end{cases}$$

Отсюда $x=\frac{19}{m}-1$ и $x^2=\frac{133}{m^2}+1$.

Далее имеем: $\left(\frac{19}{m}-1\right)^2=\frac{133}{m^2}+1$. Поэтому $m=6$, $x=2\frac{1}{6}$. Наконец, $q_1=\frac{2}{3}$ и $q_2=\frac{3}{2}$.

Условиям задачи удовлетворяют две тройки чисел: 9, 6, 4 и 4, 6, 9.

108. По условию имеем:

$$\begin{cases} a+aq^3=13, \\ aq+aq^2=4. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим два ответа:

$$\frac{1}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{16}{5},\ \frac{64}{5} \text{ и } \frac{64}{5},\ \frac{16}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}.$$

109. Обозначим прирост травы с 1 га за 1 неделю через y. Тогда прирост травы на первом лугу за 4 недели составит $13\frac{1}{3}y$, что будет равносильно увеличению первоначальной площади первого луга до $\left(3\frac{1}{3}+13\frac{1}{3}y\right)$ га. 1 корова за 1 неделю съест $\frac{1}{48}$ всей травы на первом лугу, т. е. столько травы, сколько ее росло на лугу площадью

$$\frac{1}{48}\left(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y\right)=\frac{10+40y}{144} \text{ га.}$$

Аналогичный подсчет для второго луга даст, что 1 корова за 1 неделю съест травы с луга площадью $\frac{10+90y}{189}$ га.

Исходя из предположения, что все коровы в день съедают одно и то же количество травы, мы получим уравнение

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}.$$

Отсюда $y=\frac{1}{12}$. Найдем площадь пастбища, способного прокормить 1 корову в течение 1 недели:

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{5}{54} \text{ га.}$$

Наконец, для третьего луга получим:

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54},$$

где x — число коров, которых можно пасти на третьем лугу в течение 18 недель. Отсюда $x=36$.

110. 35 миль.

111. $n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$. Если n не делится на 5, то возможные формы этого числа $5k\pm 1$ и $5k\pm 2$; n^2 дает $25k^2\pm 10k+1$ и $25k^2\pm 20k+4$, т. е. n^2-1 кратно 5 или n^2+1 кратно 5, следовательно, либо n^2-1, либо n^2+1 делится на 5.

112. Решается аналогично задаче 111.

114. Из условия $\log\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}(\log a-\log b)$ имеем последовательно:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\sqrt{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}=\frac{a}{b}\quad\text{и}\quad \sin^2\varphi=\frac{a}{a+b}.$$

С другой стороны,

$$\log a-2\log\sin\varphi=\log a-\log\sin^2\varphi=\log a-\log\frac{a}{a+b}=\log(a+b).$$

115. Построим правильную шестигранную призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и дополнительно «донышко» в форме трехгранного наугольника $LGAHCJE$, грани которого — ромбы (рис. 30). Пусть $AB=a$, $AA_1=b$. Найдем величину $x=LO$, при которой площадь поверхности ячейки будет наименьшей. Площадь поверхности многогранника $LGAHCJEE_1F_1A_1B_1C_1D_1$, не считая площади нижнего основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, будет равна

$$\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2+12x^2}+3a(2b-x)=$$
$$=3a\left(\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x\right)$$

Отсюда при $x=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ минимальная площадь равняется $6ab+\frac{3a^2}{\sqrt{2}}$.

С другой стороны, из треугольника GFK следует:

$$FG:FK:KG=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}.$$

Углу FKG, равному $35°15'12''$, соответствует угол ромба $109°28'$, который пчелы избрали для постройки донышек ячеек, получив наименьшую площадь наугольника. Разность между площадью поверхности шестиугольной призмы без

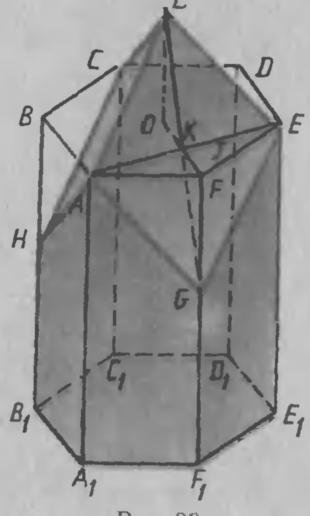


Рис. 30

нижнего основания и минимальной площадью поверхности ячейки составляет $\frac{3}{2}a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ и дает пчелам-«математикам» около 2% экономии воска.

Заметим, что И. С. Кёниг методом дифференциального исчисления нашел значения углов ромба донышек пчелиных сот (109°26′ и 70°34′ вместо 109°28′ и 70°32′). На ошибку И. С. Кёнига указал в 1736 г. шотландский математик К. Маклорен.

116. Если x — число дней, отработанных работником, то

$$48x-12(30-x)=0, \; x=6.$$

117. Если в тождественном сравнении

$$(x-1)(x-2)\ldots[x-(n-1)]=x^{n-1}-1 \pmod n$$

положить $x=0$, тогда $(n-1)!+1$ делится на n. Если же n составное, то оно содержит простой множитель $q<n$. Тогда q является делителем $(n-1)!$ но $(n-1)!+1$ не делится на q, а значит, и на n [44, с. 99—102].

118. $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n)$, где $n^2+2+2n=(n+1)^2+1\neq 1$ и $n^2+2-2n=(n-1)^2+1\neq 1$.

Таким образом, n^4+4 имеет два различных делителя, отличных от него самого и единицы. Следовательно, это число составное.

119. Два способа решения задачи можно представить в виде:

1) (12, 0, 0); (4, 8, 0); (4, 3, 5); (9, 3, 0); (9, 0, 3); (1, 8, 3); (1, 6, 5); (6, 6, 0).

2) (12, 0, 0); (7, 0, 5); (0, 7, 5); (0, 8, 4); (8, 0, 4); (8, 4, 0); (3, 4, 5); (3, 8, 1); (11, 0, 1); (11, 1, 0); (6, 1, 5); (6, 6, 0).

120. Впервые задачу о восьми ферзях сформулировал в 1848 г. немецкий шахматист М. Беццель. Разумные алгоритмы поиска искомых расположений ферзей предложили Пермантье, Ла-Ное, Гюнтер, Лакьер и др. [19].

Задача о ферзях привлекла внимание К. Гаусса. Полный набор решений, состоящий из 92 позиций, получил проф. Ф. Наук (слепой от рождения) в 1850 г. Наконец, в 1874 г. английский математик Дж. У. Л. Глэшер с помощью теории определителей доказал, что 92 решения исчерпывают все возможности. Приведем основные расстановки восьми ферзей:

*a*4, *b*1, *c*5, *d*8, *e*2, *f*7, *g*3, *h*6;
*a*4, *b*1, *c*5, *d*8, *e*6, *f*3, *g*7, *h*2;
*a*4, *b*2, *c*5, *d*8, *e*6, *f*1, *g*3, *h*7;
*a*4, *b*2, *c*7, *d*3, *e*6, *f*8, *g*1, *h*5;
*a*4, *b*2, *c*7, *d*3, *e*6, *f*8, *g*5, *h*1;
*a*4, *b*2, *c*7, *d*5, *e*1, *f*8, *g*6, *h*3;
*a*4, *b*2, *c*8, *d*5, *e*7, *f*1, *g*3, *h*6;
*a*4, *b*2, *c*8, *d*6, *e*1, *f*3, *g*5, *h*7;
*a*4, *b*6, *c*1, *d*5, *e*2, *f*8, *g*3, *h*7;
*a*4, *b*7, *c*5, *d*2, *e*6, *f*1, *g*3, *h*8;
*a*4, *b*8, *c*1, *d*5, *e*7, *f*2, *g*6, *h*3;
*a*4, *b*6, *c*8, *d*2, *e*7, *f*1, *g*3, *h*5.

Заметим, что последняя расстановка является симметричной. Поэтому все возможные расстановки восьми ферзей на шахматной доске, не угрожающих друг другу, получаются из 12 основных поворотами (вращениями) на 90°, 180°, 270° и зеркальными отражениями. Всего $11\cdot8+1\cdot4=92$ расстановки.

121. В пятиугольнике $ABCDE$ (рис. 31) проведем $CF\perp AE$, $FG\parallel CE$ и обозначим $FG=a$ и $CE=b$. Имеем $S_{\triangle CFG}:S_{\triangle CEF}=a:b$. Как видно, исходная задача свелась к делению трапеции $CEFG$ прямой (на рис. 31— HK), параллельной основаниям, на две части, площади которых относятся между собой как $a:b$.

Обозначим отрезок $HK=c$, расстояние от HK до GF через x, расстояние от HK до CE через y. Имеем:

$$S_{HFGK}:S_{EHKC}=a:b \text{ или } \frac{a+c}{2}\,x:\frac{b+c}{2}\,y=a:b\,.$$

Отсюда $(a+c)\,bx-(b+c)\,ay=0$.

С другой стороны, применяя к трапеции теорему о пучке прямых, пересекающих параллельные прямые, получим:

$$x:y=(c-a):(b-c),$$

или

$$(b-c)\,x-(c-a)\,y=0.$$

Чтобы система двух линейных однородных уравнений

$$\begin{cases}(a+c)\,bx-(b+c)\,ay=0,\\(b-c)\,x-(c-a)\,y=0\end{cases}$$

имела отличные от нуля решения, должно выполняться условие

$$(a+c)\,b:(b-c)=(b+c)\,a:(c-a).$$

Из последнего получаем $(c^2-a^2)\,b=(b^2-c^2)\,a$ или $c=\sqrt{ab}$.

Наконец, длина c отрезка HK, делящего площадь трапеции $CEFG$ в отношении $a:b$, найдется как среднее геометрическое длин a и b оснований трапеций (рис. 32).

122. Из точки M раствором циркуля, равным длине диаметра данной окружности, проведем окружность, которая пересечет данную в точках C и C' (рис. 33).

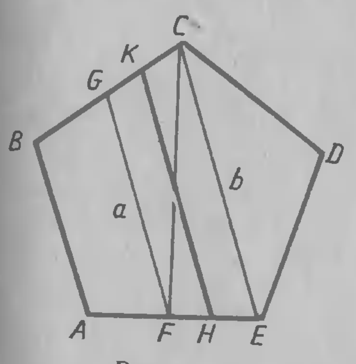


Рис. 31

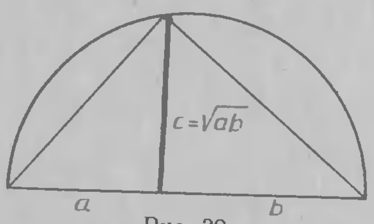


Рис. 32

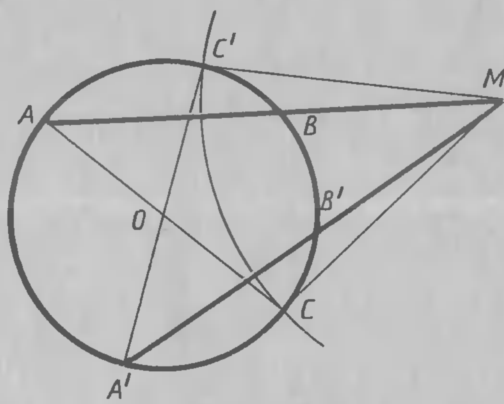


Рис. 33

Соединив эти точки с точкой O и продолжив полученные отрезки CO и $C'O$ до пересечения с окружностью соответственно в точках A и A', получим секущие AM и $A'M$, которые и будут искомыми.

123. Для двухбуквенного слова a_1a_2 имеется только одна возможность: (a_1a_2). Для трехбуквенного слова $a_1a_2a_3$ имеются две возможности: $((a_1a_2)\,a_3)$ и $(a_1\,(a_2a_3))$. Для четырехбуквенного слова искомых расстановок скобок будет пять: $(a_1\,(a_2\,(a_3a_4)))$, $(a_1\,((a_2a_3)\,a_4))$, $((a_1a_2)\,(a_3a_4))$, $(((a_1a_2)\,a_3)\,a_4)$ и $((a_1\,(a_2a_3))\,a_4)$. Можно убедиться, что для $n=5$ будет 14 возможных расстановок скобок. Как видно, число расстановок скобок в n-буквенных словах при $n=2$, 3, 4, 5 равно: 1, 2, 5, 14, т. е. получаются начальные числа Каталана (см. задачу 145). Сопоставив каждую букву n-буквенного слова $a_1a_2\ldots a_n$ со сторонами выпуклого n-угольника, получим, что задача Каталана о расстановке скобок сводится к задаче Эйлера о «скобочной» триангуляции многоугольника и наоборот [17].

124. 137 256.

125. 312 месяцев; 1356 недель; 9497 дней; 227 928 часов.

126. Пусть емкости бочки, насадки и ведра равны соответственно x, y, z. Тогда имеем:

$$\begin{cases} x+20z=3x, \\ 19x+y+15{,}5z=20x+8z. \end{cases}$$

Отсюда $x=4y$, т. е. в одной бочке содержится 4 насадки.

127. В авторском решении все суммы переводятся в копейки и определяется число мужчин $40=(1200-120\cdot 9):(12-9)$ и женщин $80=120-40$. Проверка решения задачи $12\cdot 40+9\cdot 80=1200$ заканчивается одним словом: «Правда».

128. 36.

129. Составитель рукописи решает задачу так: за 12 лет первый плотник построит 12 дворов, второй — 6; третий — 4 и четвертый — 3. Следовательно, за 12 лет вместе они построят 25 дворов. Таким образом, четыре плотника вместе один двор построят за $\dfrac{365\cdot 12}{25}=175\dfrac{1}{5}$ дня.

130. Магницкий решает эту задачу по правилу двух ложных положений. Это правило в применении к линейному уравнению с одним неизвестным $(ax=b)$ заключается в том, что неизвестному приписываются два отличных от истинного значения x_1 и x_2, порождающие при подстановке в левую часть ошибки d_1 и d_2:

$$ax_1=b+d_1,\ ax_2=b+d_2.$$

Отсюда легко получить пропорцию $\dfrac{x_1-x}{x_2-x}=\dfrac{d_1}{d_2}$ и значение x:

$$x=\frac{x_1d_2-x_2d_1}{d_2-d_1}. \qquad (1)$$

Во-первых, предположим, что учеников было 24 ($x_1=24$). Тогда согласно условию задачи у учителя будет всего

$$24+24+12+6+1=67 \text{ (учеников)}.$$

По условию же задачи учеников должно быть 100, следовательно, их недостает 33 (первая погрешность d_1). Во-вторых, предположим, что учеников было 32 ($x_2=$ $=32$). Тогда в итоге получим:

$$32+32+16+8+1=89 \text{ учеников},$$

а недостаток будет 11 (вторая погрешность d_2). Далее по формуле (1) получим:

$$x=\frac{24\cdot 11-32\cdot 33}{11-33}=36 \text{ (учеников)}.$$

131. Пусть x — искомое число, тогда по условию задачи

$$\begin{aligned} x&=2q_1+1, & \quad & & x+1&=2(q_1+1),\\ x&=3q_2+2, & & \text{или} & x+1&=3(q_2+1),\\ x&=4q_3+3, & & & x+1&=4(q_3+1),\\ x&=5q_4+4 & & & x+1&=5(q_4+1). \end{aligned}$$

Из последних четырех соотношений видно, что $(x+1)$ делится без остатка на 2, 3, 4, 5. Следовательно, наименьшее значение $x+1$ равняется наименьшему общему кратному чисел 2, 3, 4, 5, т. е. 60. Поэтому наименьшее искомое число $x=59$.

132. Человек выпивает в день $\dfrac{1}{14}$ кади, а вместе с женою $\dfrac{1}{10}$ кади. Следовательно, жена выпивает в день $\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{14}=\dfrac{1}{35}$ кади. Таким образом, всю кадь жена выпьет за 35 дней.

133. Имеем:

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(a+1)^n}+\ldots=\frac{1}{(a+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}=\frac{1}{a(a+1)}$$

Искомая сумма — это сумма ряда $\sum\limits_{a=1}^{\infty}\dfrac{1}{a(a+1)}$. Так как

$$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1},$$

то

$$S_a = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)=1-\frac{1}{a+1}.$$

Отсюда $\lim\limits_{a\to\infty} S_a=1$.

134. Если x — число лошадей, y — число быков, то

$$31x+21y=1770,$$

откуда

$$y=84-x-\frac{10x-6}{21}.$$

Из последнего равенства следует, что $(5x-3)$ делится на 21. Обозначив $5x-3=$ $=21z$, получим $y=84-x-2z$ и $x=4z+\frac{z+3}{5}$. Следовательно, $(z+3)$ делится на 5, т. е. $z=5t-3$, $x=21t-12$ и $y=102-31t$. Так как $y>0$ и $z=5t-3\neq 0$, то при $t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=3$ соответственно $x_1=9$, $y_1=71$; $x_2=30$, $y_2=40$; $x_3=51$, $y_3=9$.

135. П. Ферма высказал предположение, что все числа вида

$$F(n)=2^{2^n}+1$$

являются простыми. При $n=0, 1, 2, 3, 4$ числа Ферма $F(0)=3$, $F(1)=5$, $F(2)=$ $=17$, $F(3)=257$ и $F(4)=65\,537$ действительно простые. Но уже Л. Эйлер разложил на простые множители число

$$F(5)=2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\cdot 6\,700\,417.$$

К. Гаусс доказал, что правильный n-угольник с нечетным числом вершин может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число n является простым числом Ферма или произведением нескольких различных простых чисел Ферма. В своих «Арифметических исследованиях» (1801) Гаусс указал метод построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника. Рело и Гермес разработали соответственно метод построения циркулем и линейкой правильных 257-и и 65 537-угольников.

Позднее, в основном с помощью ЭВМ, среди чисел Ферма для $n>5$ были обнаружены другие составные числа. До сих пор неизвестно, существует ли конечное число простых чисел Ферма или их бесконечно много. Подробнее см. [44].

136. Если острова как бы сжать в точки, а мосты вытянуть в линии, то получим фигуру в виде геометрической сети (рис. 34). Решение задачи сводится к вы-

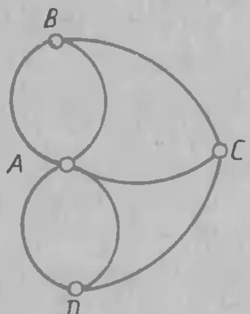


Рис. 34

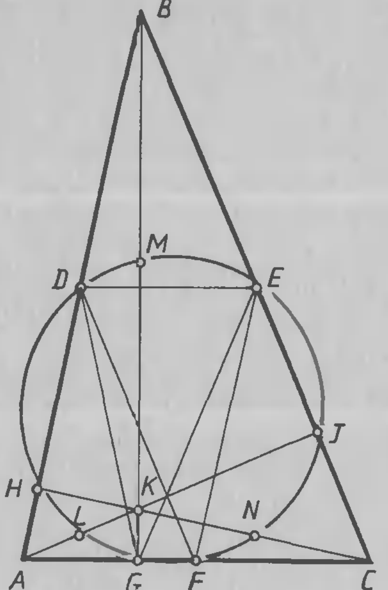


Рис. 35

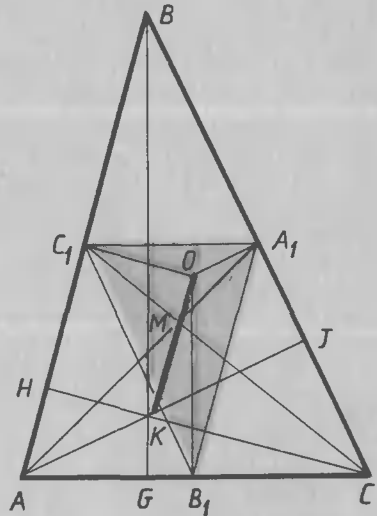


Рис. 36

черчиванию одним росчерком линии, состоящей из семи дуг, что невозможно, так как в каждой из четырех вершин A, B, C, D сходится число дуг, равное 3 или 5.

137. В справедливости тождества можно убедиться раскрытием скобок в обеих частях.

138. Пусть точки D, E, F — основания медиан треугольника ABC, G, H и J — основания высот, K — ортоцентр, L, M, N — середины отрезков AK, BK, CK (рис. 35). Через точки D, E и F проведем окружность. Так как отрезок EG — медиана прямоугольного треугольника BGC, то $EG=\frac{1}{2}\ BC$ следовательно, $EG=DF$. Трапеция $GDEF$ равнобедренная, поэтому окружность, проходящая через три ее вершины D, E и F, пройдет и через четвертую вершину G. Отрезки $NE \parallel BG$, $DE \parallel AC$, $FN \parallel AJ$ и $DF \parallel BC$ (как средние линии соответствующих треугольников). Отсюда $\angle NFD=90°$, $\angle NFD+\angle NED=180°$. Таким образом, около четырехугольника $FDEN$ можно описать окружность, т. е. N принадлежит той же окружности, что и D, E, F.

Аналогичным образом можно доказать, что эта окружность пройдет через точки H, M, J и L.

139. Пусть (рис. 36) A_1, B_1, C_1 — основания медиан треугольника ABC, M — точка пересечения медиан, K — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности. Так как медианы треугольника делятся в точке их пересечения в одном и том же отношении, то точка M есть центр гомотетии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Эта гомотетия преобразует высоты треугольника ABC соответственно в высоты треугольника $A_1B_1C_1$, так как перпендикулярность прямых сохраняется при гомотетии. Но высоты треугольника $A_1B_1C_1$ — это отрезки A_1O, B_1O и C_1O.

Они пересекаются в центре описанной около треугольника ABC окружности. Следовательно, при гомотетии точка K преобразуется в точку O. А соответственные в гомотетии точки лежат на одной прямой с центром гомотетии.

140. Положим $y=kx$. Тогда последовательно имеем:

$$(kx)^x=x^{kx},\quad kx=x^k,\quad k=x^{k-1},\quad x=k^{\frac{1}{k-1}},\quad y=k^{\frac{k}{k-1}}.$$

Пусть $\frac{1}{k-1}=n$. Отсюда $k=\frac{n+1}{n}$, и, следовательно,

$$x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,\quad y=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

141. $e=[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$. Разложение числа e в цепную дробь Эйлером было получено в 1737 г., но до сих пор еще иеизвестен общий вид элемеитов разложения π в цепиую дробь.

142. Требуемое каре невозможно выстроить. В этом можно убедиться скрупулезным перебором всех возможных вариантов построения каре. Подробнее см. [4].

Задача Эйлера о 36 офицерах положила иачало изучению так называемых латинских квадратов. Латинским квадратом называется квадрат $n\times n$ клеток, в которых написаны латинские буквы, притом так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются все эти буквы по одному разу. На рис. 37 изображены два таких латииских квадрата 5×5.

A	*B*	*C*	*D*	*E*		*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
D	*E*	*A*	*B*	*C*		*b*	*c*	*d*	*e*	*a*
B	*C*	*D*	*E*	*A*		*c*	*d*	*e*	*a*	*b*
E	*A*	*B*	*C*	*D*		*d*	*e*	*a*	*b*	*c*
C	*D*	*E*	*A*	*B*		*e*	*a*	*b*	*c*	*d*

Рис. 37

Aa	***Bb***	***Cc***	***Dd***	***Ee***
Db	***Ec***	***Ad***	***Be***	***Ca***
Bc	***Cd***	***De***	***Ea***	***Ab***
Ed	***Ae***	***Ba***	***Cb***	***Dc***
Ce	***Da***	***Eb***	***Ac***	***Bd***

Рис. 38

Если эти квадраты наложить друг на друга, то все получившиеся пары букв оказываются различными (рис. 38). Такие пары латинских квадратов называются ортогональными.

Эйлер доказал, что ортогоиальные пары латииских квадратов существуют для всех нечетных значений n и для таких четных зиачений n, которые делятся на 4. Недавно было показаио, что для любого n, кроме $n=6$, существуют ортогональные квадраты размером $n\times n$. Теория латинских квадратов иашла многочисленные применения в математике и ее приложениях.

143. Число расстановок n ладей иа доске размером $n\times n$ клеток без запрета расстаиовок их на главной диагонали равно числу перестановок, т. е. $P_n=n!$

В частиости для обычной шахматной доски $P_8=8!=40\,320$. Сложнее дело обстоит с расстановкой ладей на доске, когда ни одиа из них не может стоять на главной диагонали. Обозначим через Q_n, $n\geqslant2$, количество расстановок n ладей на шахматной доске размером $n\times n$ клеток с условием, что каждые две ладьи не угрожают друг другу и ни одна ладья не стоит на главной диагонали. Тогда $Q_2=1$, $Q_3=2$. Для $n\geqslant 4$ Эйлер доказал рекуррентное соотношение

$$Q_n=(n-1)(Q_{n-1}+Q_{n-2}). \tag{1}$$

Приведем классическое рассуждение Эйлера. В первом столбце шахматной доски $n\times n$ клеток ладья может занимать только $n-1$ позицию, так как самая нижняя клетка столбца принадлежит главной диагонали и ставить на нее ладью запрещено по условию. Пусть ладья занимает k-ю клетку в первом столбце. Относительно главной диагонали рассмотрим клетку, симметричную k-й клетке первого столбца. Если рассматриваемая клетка не занята ладьей, то расстановку ладей отнесем к первой группе, если занята — ко второй. При $n=4$ и $k=2$ к первой группе относится расстановка $a2$, $b3$, $c4$, $d1$, а ко второй группе — $a2$, $b1$, $c4$, $d3$. Если удалить из доски k-ю строку, заменив ее первой, и отбросить первый столбец, то получится доска размером $(n-1)\times(n-1)$ клеток. Каждая расстановка ладей из первой группы дает после этих преобразований некоторую расстановку ладей на новой доске, удовлетворяющую условию задачи, и наоборот. Следовательно, первая группа расстановок ладей содержит в точности Q_{n-1} расстановок. Для подсчета количества расстановок ладей во второй группе удалим из доски первые и k-е столбцы и строки, а оставшиеся сдвинем, не меняя их порядка; получим доску размером $(n-2)\times(n-2)$ клетки. Каждая расстановка ладей из второй группы даст при этом некоторую расстановку ладей на новой доске, удовлетворяющую условию задачи, и наоборот. Поэтому вторая группа будет содержать Q_{n-2} расстановок ладей.

Итак, имеется $Q_{n-1}+Q_{n-2}$ расстановок ладей на доске размером $n\times n$, которые отвечают условиям задачи и у которых ладья стоит на пересечении первого столбца и k-й строки. Наконец, так как k принимает $n-1$ значение (2, 3, ..., n), то получаем рекуррентное соотношение (1).

Для обычной шахматной доски имеем последовательно:

$$\begin{aligned}
&Q_2=1,\\
&Q_3=2,\\
&Q_4=(4-1)(Q_3+Q_2)=3(2+1)=9,\\
&Q_5=(5-1)(Q_4+Q_3)=4(9+2)=44,\\
&Q_6=(6-1)(Q_5+Q_4)=5(44+9)=265,\\
&Q_7=(7-1)(Q_6+Q_5)=6(265+44)=1854,\\
&Q_8=(8-1)(Q_7+Q_6)=7(1854+265)=14\,833.
\end{aligned}$$

Формула для расстановки n ладей, кроме главной диагонали, не угрожающих друг другу, была найдена в XIX в. и имеет вид:

$$Q_n=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]. \tag{2}$$

В частности,

$$Q_8=8!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)=14\,833.$$

Заметим, наконец, что формулу (2) можно доказать методом математической индукции, опираясь на рекуррентное соотношение Эйлера (1).

144. Возможен, например, такой маршрут шахматного коня: $a8-c7-e8-g7-h5-g3-h1-f2-d1-b2-a4-b6-c8-e7-g8-h6-g4-h2-f1-d2-b1-a3-b5-a7-c6-d8-e6-f8-h7-g5-h3-g1-e2-c1-a2-b4-a6-b8-d7-e5-f7-h8-g6-h4-f3-d4-f5-d6-c4-a5-b7-c5-b3-a1-c2-e3-g2-e1-d3-f4-d5-f6-e4-c3$.

Однако до сих пор не удалось определить точное число маршрутов шахматного коня. Доказано лишь, что их число не менее 31 054 144 и не больше чем C_{168}^{63}.

145. Обозначим через K_n число способов разбиения n-угольника на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри его. Рассмотрим $(n+1)$-угольник и зафиксируем какую-либо его сторону, например A_1A_2. Возможны три случая разбиения $(n+1)$-угольника на треугольники:

1) Если в разбиение входит $\triangle A_1A_2A_3$, то имеется K_n способов разбиения $(n+1)$-угольника на треугольники (рис. 39).

2) Если в разбиение входит $\triangle A_1A_2A_{k+1}$, где $k=3, \ldots n-1$ (рис. 40), то диагональ A_2A_{k+1} отсекает от $(n+1)$-угольника k-угольник $A_2A_3\ldots A_{k+1}$, а диагональ A_1A_{k+1} — $(n-k+2)$-угольник $A_{k+1}A_{k+2}\ldots A_{n+1}A_1$. Так как при разбиении $(n+1)$-угольника можно комбинировать произвольное разбиение k-угольника с произвольным разбиением $(n-k+2)$-угольника, то общее число разбиений с треугольником $A_1A_2A_{k+1}$ будет равно K_kK_{n-k+2}.

3) Если в разбиение входит $\triangle A_1A_2A_{n+1}$, то имеется, как и в первом случае, K_n способов разбиения $(n+1)$-угольника на треугольники. Таким образом, общее число способов разбиения $(n+1)$-угольника на треугольники равно:

$$K_{n+1}=2K_n+K_3K_{n-1}+K_4K_{n-2}+\ldots+K_{n-1}K_3. \qquad (1)$$

Подсчитаем число m диагоналей, участвующих в разбиении n-угольника. Число сторон получаемых треугольников равно $3(n-2)$. Так как каждая диагональ n-угольника является стороной двух треугольников и каждая сторона n-угольника является стороной одного треугольника, то

$$3(n-2)=2m+n.$$

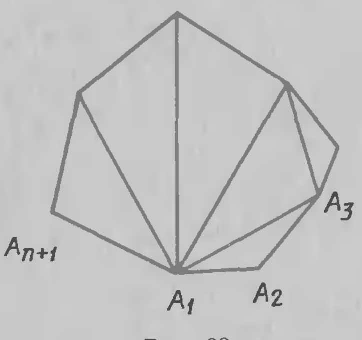


Рис. 39

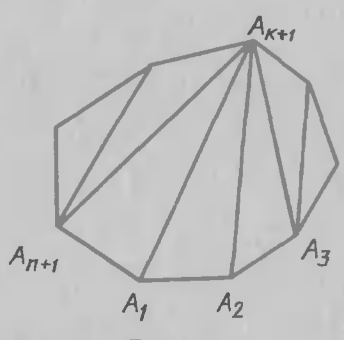


Рис. 40

Поэтому число диагоналей $m=n-3$ не зависит от способа разбиения. Суммируя теперь число разбиений

$$(K_3K_{n-1}+K_4K_{n-2}+\ldots+K_{n-1}K_3),$$

в которых участвует данная диагональ, по всем диагоналям и учитывая, что каждое разбиение будет сосчитано столько раз, сколько диагоналей участвует в этом разбиении, мы получим:

$$\frac{n}{2}\,(K_3K_{n-1}+K_4K_{n-2}+\ldots+K_{n-1}K_3)=(n-3)\,K_n. \tag{2}$$

Из (1) и (2) имеем $\frac{n}{2}(K_{n+1}-2K_n)=(n-3)\,K_n$ или $K_{n+1}=\frac{2(2n-3)}{n}\,K_n=$

$$=\frac{2(2n-3)\cdot 2(2n-5)}{n(n-1)}\,K_{n-1}=\frac{2(2n-3)\,2(2n-5)\,2(2n-7)}{n(n-1)(n-2)}\,K_{n-2}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{2(2n-3)\,2(2n-5)\,2(2n-7)\ldots 2[2n-3-2(n-3)]}{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-3)]}\,K_3=$$

$$=2^{n-2}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot n}\cdot 1=2^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}.$$

Итак, число способов разбиения n-угольника на треугольники, не пересекающиеся внутри диагоналями, равно:

$$K_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{(n-1)!}\cdot 2^{n-2}. \tag{3}$$

Члены последовательности: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ..., которые определяются формулой (3), называются числами Каталана (см. задачу 123). Формулу (3) можно записать и по-другому. Например:

$$K_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-6)(2n-5)}{(n-1)!\,2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-6)}\,2^{n-2}=$$

$$=\frac{(2n-5)!\,2^{n-2}}{(n-1)!\,2^{n-3}\cdot(n-3)!}=\frac{2}{n-1}\cdot\frac{(2n-5)!}{(n-2)!\,(n-3)!}=$$

$$=\frac{2}{n-1}\,C_{2n-5}^{n-3}=\frac{2}{n-1}\,C_{2n-5}^{n-2}; \tag{4}$$

$$K_n=\frac{(2n-5)!\,2}{(n-1)!\,(n-3)!}=\frac{(2n-4)!}{(n-2)(n-1)!\,(n-3)!}=\frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-2)!}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\,\frac{(2n-4)!}{[(n-2)!]^2}=\frac{1}{n-1}\,C_{2n-4}^{n-2}=\frac{1}{n-2}\,\frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-3)!}=$$

$$=\frac{1}{n-2}\,C_{2n-4}^{n-3}=\frac{1}{n-2}\,C_{2n-4}^{n-1}; \tag{5}$$

$$K_n=\frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-2)!}=\frac{1}{2n-3}\cdot\frac{(2n-3)!}{(n-1)!\,(n-2)!}=$$

$$=\frac{1}{2n-3}\,C_{2n-3}^{n-2}=\frac{1}{2n-3}\,C_{2n-3}^{n-1}. \tag{6}$$

Заметим, наконец, что при больших значениях n подсчет числа K_n по формулам (3), (4), (5), (6) требует больших затрат труда. С помощью формулы шотландского математика Джеймса Стирлинга (1692—1770)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

можно получить приближенную формулу для K_n при больших n:

$$K_n = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(2n-4)!}{[(n-2)!]^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2(n-2)}\, [2(n-2)]^{2(n-2)} e^{-2(n-2)}}{(n-1)\left[\sqrt{2\pi(n-2)}\, (n-2)^{n-2} e^{-(n-2)}\right]^2} =$$

$$= \frac{2^{2(n-2)}}{(n-1)\sqrt{\pi(n-2)}}.$$

146. Пусть x — число косцов артели, y — размер участка, скашиваемого одним косцом за один день. Площадь большого луга равняется

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4},$$

площадь малого луга

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy+4y}{4}.$$

По условию имеем: $\frac{3xy}{4} : \frac{xy+4y}{4} = 2$,

откуда $x=8$.

147. Иван Петров решил эту задачу всеми шестью способами:

1) $3 \cdot 26$; 2) $3 \cdot 21 + 5 \cdot 3$; 3) $3 \cdot 16 + 5 \cdot 6$; 4) $3 \cdot 11 + 5 \cdot 9$; 5) $3 \cdot 6 + 5 \cdot 12$; 6) $3 \cdot 1 + 5 \cdot 15$.

148. Устное решение примера основано на свойстве

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365.$$

Поэтому $\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365} = 2$.

Глава II

Ошибка не есть еще лженаука.
Лженаука — это непризнание ошибок.

П. Капица

149—151. В этих задачах Пачоли делит ставку пропорционально набранным очкам (или партиям). Если два игрока к моменту прекращения игры выиграли соответственно m и n партий, то ставка делилась в отношении $m:n$ независимо от того, сколько партий им оставалось сыграть. Как видно, Пачоли лишь молчаливо предполагал равновероятность выигрыша любой партии (очка) каждым из участников игры. Такие решения ошибочно считались правильными, хотя при этом ставки делились не в соответствии с вероятностями выиграть всю ставку при продолжении игры.

В 1539 г. Джироламо Кардано (1501—1576) в работе «Практика общей арифметики», изданной в Милане, правильно указывал, что Пачоли, деля ставку пропорционально числу уже выигранных партий, никак не принимает в расчет то число партий, которое еще необходимо выиграть каждому из игроков. Кардано ошибочно предлагал делить ставку в отношении сумм членов двух арифметических прогрессий с разностями, равными единице, которые начинаются с единицы и продолжаются до числа недостающих партий до выигрыша, т. е. в отношении $[1+2+3+\ldots+(k-n)]:[1+2+3+\ldots+(k-m)]$, где k — количество партий, до которого должна продолжаться игра по условию, а m и n — количество партий, выигранных партнерами.

152. Пачоли ошибочно делил ставку в отношении 4:3:2.

153—155. Тарталья ошибочно считал, что отклонение от половины ставки должно быть пропорционально разности выигранных партий. Как видно, Тарталья решал задачи на разделение ставки арифметическим методом, не опираясь на вероятностные рассуждения.

156. Пeвeрoнe ошибочно считает, что ставка должна быть разделена в отношении 1:6, что близко к правильному ответу 1:7. Он дал правильное решение в двух случаях, а именно когда игроки A и B выиграли по 9 партий и когда игрок A выиграл 8 партий, а игрок B 9 партий.

157. Свое решение задачи Паскаль наиболее полно изложил в письме к Ферма от 29 июля 1654 г.: «Вот примерно, что я делаю для определения стоимости каждой партии, когда два игрока играют, например, на три партии и каждым вложено в игру по 32 пистоля.

Предположим, что один выиграл две партии, а другой — одну. Они играют еще одну партию, если ее выигрывает первый, то он получает всю сумму в 64 пистоля . . ; если же эту партию выигрывает второй, то каждый игрок будет иметь 2 выигранные партии, и, следовательно, если они намерены произвести раздел, каждый должен получить обратно свой вклад в 32 пистоля.

Примите же во внимание, монсеньер, что если первый выиграет, то ему причитается 64; если он проиграет, то ему причитается 32. Если же игроки не намерены рисковать. . . и хотят произвести раздел, то первый должен сказать: «Я имею 32 пистоля верных, ибо в случае проигрыша я их также получил бы, но остальные 32 пистоля могут быть получены либо мной, либо Вами. Случайности равны. Разделим же эти 32 пистоля пополам, и дайте мне, кроме того, бесспорную сумму в 32 пистоля». Как видно из рассуждений Паскаля, первый игрок должен получить 48 пистолей, а второй — 16.

158. Ответы, предложенные Паскалем, таковы: первый игрок должен получить 56 пистолей, а второй 8 пистолей. Рассуждение при решении подобны тем, которые были проведены при решении предыдущей задачи: если бы первый игрок выиграл еще одну партию, то ему причиталось бы 64 пистоля, если бы проиграл — 48 пистолей, а остаток 16 делится поровну.

159. Пусть игроки сыграют еще одну партию. Если ее выигрывает первый, то он будет иметь, как и в предыдущем случае, 56 пистолей. Если он ее проигрывает, то у обоих окажется по одной выигранной партии и первому следует получить 32 пистоля. Первый игрок может сказать: «Если вы не хотите играть эту партию, дайте мне мой бесспорный выигрыш в 32 пистоля, а остаток от 56 разделим поровну. . . т. е. возьмем каждый по 12, что с 32 составит 44». Значит, первый игрок должен получить 44 пистоля, а второй — 20.

Для случая, когда первый игрок выиграл одну партию, а второй — ни одной, Паскаль приводит формулу

$$W = A + A\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n},$$

где A — ставка каждого игрока, а W — ожидание выигрыша первого игрока.

Как видно, во всех случаях Паскаль делит ставку пропорционально вероятности выигрыша при продолжении игры. Оригинальный метод Паскаля трудно применить к более сложным случаям.

160. Письмо Ферма, в котором он излагает свой метод решения, не сохранилось, но его можно восстановить из ответного письма Паскаля от 24 августа 1654 г. Рассуждение Ферма сводится к следующему. Игра может быть продолжена максимум еще четыре партии. Для перебора всех возможных случаев Ферма составляет таблицу, где выигрыши партий игроками A и B обозначены соответственно буквами a и b:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a	*a*	*a*	*a*	*b*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*a*	*b*
a	*a*	*a*	*b*	*a*	*a*	*b*	*b*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*a*	*b*	*b*
a	*a*	*b*	*a*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*b*	*b*
a	*b*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*a*	*b*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*

Из 16 возможных исходов первые 11 благоприятны для выигрыша игроком *A* всей встречи, а остальные пять исходов благоприятны для игрока *B*. Следовательно, $\frac{11}{16}$ ставки должен получить игрок *A*, а игрок *B* — $\frac{5}{16}$. Как видно, Ферма предлагает разделить ставку пропорционально вероятностям выигрыша всей встречи.

Паскаль решает эту задачу на основе изучения свойств арифметического треугольника, приведенного в его «Трактате об арифметическом треугольиике», опубликоваииом посмертно в Париже в 1665 г. Он складывает количество партий, иедостающих игрокам *A*(2) и *B*(3), и берет ту строку треугольника (рис. 41), в которой количество членов равно иайденной сумме, т. е. пятую. Тогда доля игрока *A* будет равна сумме членов иайдеииой строки, иачиная от единицы, причем количество слагаемых равно числу партий, недостающих игроку *B* (3), а доля игрока *B* равна такой же сумме, но с количеством слагаемых, равным числу партий, иедостающих игроку *A* (2). Выписываем строку, в которой находится пять чисел. Это будут 1, 4, 6, 4, 1. Следовательно, ставку нужио разделить в отношении 11 : 5. При таком решении ставка делится пропорциональио вероятиостям выиграть всю ставку для игроков *A* и *B*.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Рис. 41

Таким образом, правило Паскаля состоиг в следующем: пусть игроку *A* до выигрыша всей игры не хватает *m* партий, а игроку *B* — *n* партий, тогда ставка должна делиться между игроками в отношеиии

$$\sum_{i=0}^{n-1} C^{i}_{m+n-1} : \sum_{i=0}^{m-1} C^{i}_{m+n-1}.$$

161. Перебор всех возможных случаев можно представить таблицей:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*b*	*c*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*b*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*c*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*b*	*c*	*c*	*c*	*b*	*c*
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*a*	*b*	*a*	*c*	*b*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*c*
a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*

При рассмотрении такой таблицы Паскаль допустил неточность в рассуждениях, считая, что из 27 возможных исходов бесспорно благоприятствуют игроку A лишь 13, а исходы 5, 11, 19-го столбцов благоприятствуют сразу и игроку A и игроку B (аналогичные исходы 9, 15, 24-го столбцов благоприятствуют игроку A и игроку C). Поэтому доли игроков в этих случаях следует брать с половинным весом. В результате Паскаль ошибочно предлагал делить ставку в отношении $16:\frac{11}{2}:\frac{11}{2}$ вместо 17:5:5.

162. Ставку нужно разделить пропорционально отношению вероятностей выигрыша для первого и второго игроков $p_1:p_2$, где

$$p_1=\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2}C_m^1+\frac{1}{2^2}C_{m+1}^2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}C_{m+n-2}^{n-1}\right)$$

и

$$p_2=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{2^2}C_{n+1}^2+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}C_{n+m-2}^{m-1}\right).$$

Поясним вычисление вероятности p_1 (см. приложение II). При продолжении игры первый игрок может обеспечить себе выигрыш лишь в следующих случаях:

1) выигрывает m партий подряд;

2) из m партий проиграет одну и выиграет $(m+1)$-ю партию;

3) из $m+1$ партий проиграет две и выиграет $(m+2)$-ю партию;

. . . .

n) из $m+n-2$ партий проиграет $n-1$ и выиграет $(m+n-1)$-ю партию.

Тогда

$$p_1=\frac{1}{2^m}+C_m^1\frac{1}{2^{m+1}}+C_{m+1}^2\frac{1}{2^{m+2}}+\ldots+C_{m+n-2}^{m-1}\frac{1}{2^{m+n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2}C_m^1+\frac{1}{2^2}C_{m+1}^2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}C_{m+n-2}^{m-1}\right).$$

Аналогично находится вероятность p_2.

163. Гюйгенс предлагает в своем решении учитывать только количество недостающих партий и разделить сумму ставки (a) в отношении $\frac{3a}{4}:\frac{a}{4}$.

164. $\frac{7a}{8}:\frac{a}{8}$. **165.** $\frac{15a}{16}:\frac{a}{16}$. **166.** $\frac{11a}{16}:\frac{5a}{16}$. **167.** $\frac{13a}{16}:\frac{3a}{16}$. **168.** $\frac{4a}{9}:\frac{4a}{9}:\frac{a}{9}$.

169. Ричард де Форниваль подсчитал общее число всех возможных исходов при бросании трех игральных костей как $6\cdot1+30\cdot3+20\cdot6=216$, а не как $6\cdot6\cdot6=216$.

170. Все возможные различные суммы, получающиеся при одновременном бросании трех игральных костей, без учета перестановок можно представить в виде:

$3=1+1+1$

$4=1+1+2$

$5=1+1+3=1+2+2$

$6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$

$7=1+1+5=1+2+4=1+3+3=2+2+3$

$8=1+1+6=1+2+5=1+3+4=2+2+4=2+3+3$

$9=1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3$

$10=1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+4+3$

$11=1+4+6=1+5+5=2+3+6=2+4+5=3+3+5=3+4+4$

$12=1+5+6=2+4+6=2+5+5=3+3+6=3+4+5=4+4+4$

$13=1+6+6=2+5+6=3+4+6=3+5+5=4+4+5$

$14=2+6+6=3+5+6=4+4+6=4+5+5$

$15=3+6+6=4+5+6=5+5+5$

$16=4+6+6=5+5+6$

$17=5+6+6$

$18=6+6+6$

С учетом перестановок получим следующую таблицу:

Сумма очков	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Число способов	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

171. Все возможные различные суммы числа очков на верхних гранях трех игральных костей без учета порядка можно представить в виде следующих табличек перебора:

$1+1+1$

$1+1+2 \quad 1+2+2$

$1+1+3 \quad 1+2+3 \quad 1+3+3$

$1+1+4 \quad 1+2+4 \quad 1+3+4 \quad 1+4+4$

$1+1+5 \quad 1+2+5 \quad 1+3+5 \quad 1+4+5 \quad 1+5+5$

$1+1+6 \quad 1+2+6 \quad 1+3+6 \quad 1+4+6 \quad 1+5+6 \quad 1+6+6$

$2+2+2$

$2+2+3 \quad 2+3+3$

$2+2+4 \quad 2+3+4 \quad 2+4+4$

$2+2+5 \quad 2+3+5 \quad 2+4+5 \quad 2+5+5$

$2+2+6 \quad 2+3+6 \quad 2+4+6 \quad 2+5+6 \quad 2+6+6$

$3+3+3$

$3+3+4 \quad 3+4+4$

$3+3+5 \quad 3+4+5 \quad 3+5+5$

$3+3+6 \quad 3+4+6 \quad 3+5+6 \quad 3+6+6$

4+4+4

4+4+5 4+5+5 5+5+5

4+4+6 4+5+6 4+6+6 5+5+6 5+6+6 6+6+6

Отсюда видно, что число различных исходов различного числа очков без учета порядка равно: $1+3+6+10+15+21=56$.

Заметим, что число различных исходов при одновременном бросании трех игральных костей без учета порядка (56) было определено еще в 960 г. епископом Виболдом из города Камбрэ. Бросанию трех костей придавался религиозный смысл, а именно появление каждого набора трех чисел связывалось с одной из 56 добродетелей. Правильные подсчеты различных исходов при бросании трех костей были описаны в XI в. летописцем Балдерикусом и появились в печати лишь в 1615 г. В средневековых поэмах на латинском языке каждому из 56 различных возможных исходов при бросании трех игральных костей соответствовал определенный стих.

В 1477 г. Бенвенуто д'Имола в Венеции издал «Божественную комедию» Данте Алигьери (1265—1321), снабдив ее комментариями. Начало VI книги «Чистилище» гласит:

Когда кончается игра в три кости,
То проигравший снова их берет
И мечет их один в унылой злости;
Другого провожает весь народ;
Кто спереди зайдет, кто сзади тронет,
Кто сбоку за себя словцо ввернет.
А тот идет и только ухо клонит;
Подаст кому,— идти уже вольней.
И так он понемногу всех разгониг.
Таков был я в густой толпе теней,
Чье множество казалось превелико,
И, обещая, управлялся с ней.

В комментариях д'Имола допустил ошибку, не различая выпадения костей с повторениями, например, сумма 4 может появиться тремя способами: $1+1+2$; $1+2+1$ и $2+1+1$, а не одним, как он считал.

172. Преподобный Галиани был, конечно, прав, решив, что человек из Базиликаты — жулик, так как вероятности выпадения трех шестерок при каждом следующем броске быстро убывают и равны соответственно $\frac{1}{6^3}, \frac{1}{6^6}, \frac{1}{6^9}, \frac{1}{6^{12}}, \frac{1}{6^{15}}$.

173. 11.

174. 20.

175.

Сумма очков	2 или 12	3 или 11	4 или 10	5 или 9	6 или 8	7
Число способов	1	2	3	4	5	6

176.

Сумма очков	3 или 18	4 или 17	5 или 16	6 или 15	7 или 14	8 или 13	9 или 12	10 или 11
Число способов	1	3	6	10	15	21	25	27

177. 1) 126.

2)

Число костей	1	2	3	4	...	n
Число различных исходов	6	21	56	126	...	$\sum\limits_{i=-1}^{4} C_{r+i}^{i+1}$

178. Так как при каждом бросании игральной кости имеется 6 различных возможностей, то при четырех бросаниях кости число различных равновозможных случаев будет 1296 (6·6·6·6). Но среди этих 1296 случаев будет 625 (5·5·5·5) таких, где шестерка не появилась ни разу, а в 1296 — 625 = 671 случае хотя бы один раз из четырех выпадает шестерка. Следовательно, вероятность выпадения хотя бы одной шестерки при четырех бросаниях кости равна $\frac{671}{1296}$, т. е. больше $\frac{1}{2}$. Это значит, что, чем больше рыцарь играл, тем больше он выигрывал. Оказываясь постоянно в проигрыше, противники рыцаря перестали играть по этим правилам с де Мерэ. Тогда он придумал новую игру (задача 179).

179. При одновременном бросании двух игральных костей вероятность выпадения двух шестерок равна $\frac{1}{36}$, а вероятность того, что не выпадут две шестерки, равна $\frac{35}{36}$. Тогда вероятность того, что при 24-кратном бросании двух костей ни разу не выпадут две шестерки, будет равна $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}509$. Следовательно, вероятность проигрыша для рыцаря была больше $\frac{1}{2}$. Это значит, что, чем больше рыцарь будет играть, тем больше он будет проигрывать. Когда так и случилось, рыцарь разорился и обратился к Паскалю за разъяснениями. Паскаль успешно раскрыл математические тайны правил двух игр рыцаря де Мерэ.

180. Все возможные суммы, получающиеся при одновременном бросании двух игральных костей, можно представить в виде:

$$2=1+1$$
$$3=1+2=2+1$$
$$4=1+3=3+1=2+2$$
$$5=1+4=4+1=2+3=3+2$$

$$6=1+5=5+1=2+4=4+2=3+3$$
$$7=1+6=6+1=2+5=5+2=3+4=4+3$$
$$8=2+6=6+2=3+5=5+3=4+4$$
$$9=3+6=6+3=4+5=5+4$$
$$10=4+6=6+4=5+5$$
$$11=5+6=6+5$$
$$12=6+6$$

В итоге получаем таблицу:

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число способов	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

181. См. задачу 170.

182. С этим вопросом обратился к Гюйгенсу ландскнехт (наемный солдат). Многолетний опыт игрока показывал, что 11 очков появляется несколько чаще, чем 12 очков, хотя ландскнехт заметил одинаковую возможность представить 11 и 12 очков шестью различными способами:

$$11=1+4+6=1+5+5=2+3+6=2+4+5=3+3+5=3+4+4;$$
$$12=1+5+6=2+4+6=2+5+5=3+3+6=3+4+5=4+4+4.$$

С учетом возможных перестановок он получил бы для 11 очков 27 различных случаев $(6+3+6+6+3+3)$, а для 12 очков — 25 $(6+6+3+3+6+1)$. В своем трактате «О расчете в азартных играх» Гюйгенс указал, в частности, сколькими способами при бросании двух костей можно получить ту или иную сумму очков. Для одновременного бросания трех костей Гюйгенс составил таблицу для числа очков различных возможных случаев.

183. Излагая правила перебора различных исходов при одновременном бросании четырех игральных костей, Я. Бернулли приходит к следующей таблице:

Способы получения 12 очков	Число бросков с учетом перестановок
6+4+1+1	12
5+5+1+1	6
6+3+2+1	24
5+4+2+1	24
5+3+3+1	12
4+4+3+1	12
6+2+2+2	4
5+3+2+2	12
4+4+2+2	6
4+3+3+2	12
3+3+3+3	1
Всего	125

Кроме этого, Я. Бернулли указывает общее правило для нахождения числа способов, которыми может быть получено m очков при одновременном бросании n игральных костей; оно равно коэффициенту x^m в разложении

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n,$$

где x — произвольный параметр. В частности, для $n=2$ имеем:

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+$$
$$+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}.$$

Показатели параметра x в правой части тождества указывают на возможные суммы очков при одновременном бросании двух игральных костей от 2 до 12, а коэффициенты — соответственно на число способов получения этих сумм очков.

Аналогичные рассуждения для $n=4$ приводят к следующей таблице:

Сумма очков	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Число способов	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140

Сумма очков	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Число способов	125	104	80	56	35	20	10	4	1

184. $\frac{1}{6^6}$.

185. Вероятность появления не менее i ($i=1, 2, 3$) шестерок соответственно при подбрасывании $6i$ ($i=1, 2, 3$) костей равна:

$$P_{6i}(i\leqslant k\leqslant 6i)=\sum_{k=i}^{6i} P_{6i}(k)=\sum_{k=i}^{6i} C_{6i}^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{6i-k}=$$
$$=1-\sum_{k=0}^{i-1} C_{6i}^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{6i-k}.$$

Результаты подсчетов дают:

1) $P_6(1\leqslant k\leqslant 6)\approx 0{,}665$;

2) $P_{12}(2\leqslant k\leqslant 12)\approx 0{,}619$;

3) $P_{18}(3\leqslant k\leqslant 18)\approx 0{,}597$.

Как видно, предпочтительнее поставить пари на появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании 6 костей. См. также [40].

186. $5^{n-m}C_n^m$.

187. Количество исходов (без повторений) для n костей будет равно C_{n+5}^n, где $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$. Искомые результаты можно свести в таблицу:

Число костей n	1	2	3	4	5	6
Количество исходов (без повторений) C_{n+5}^n	6	21	56	126	252	462

188. Аналогично решению задачи 186

189. $\frac{8}{15}$.

190. $p_i=\frac{C_5^i}{C_{90}^i}$, где $i=1, 2, 3, 4, 5$.

В частности, получим:

$$p_1=\frac{5}{90}=\frac{1}{18};$$
$$p_2=\frac{5\cdot 4}{90\cdot 89}=\frac{2}{801};$$
$$p_3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{90\cdot 89\cdot 88}=\frac{1}{11\,748};$$
$$p_4=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}=\frac{1}{511\,038};$$
$$p_5=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{43\,949\,268}.$$

191. 4 : 2 : 1, так как игроку A благоприятствуют случаи б, б, б; б, б, ч; б, ч, б; б, ч, ч; B — ч, б, б; ч, б, ч; C — ч, ч, б.

192. Шансы первого игрока равны $\frac{(C_{10}^1)^4}{C_{40}^4}=\frac{1000}{9139}$, а значит, шансы игроков A и B относятся как 1000 : 8139.

193. $(n-k+1)\,p^k q^{n-k}$, где $q=1-p$. Сравните ваш результат с формулой Я. Бернулли.

194. Пусть у A и B по одному билету. Тогда вероятность выигрыша A равна 1. При $n=2$ B может вытянуть их в порядке 1,2 и 2,1, но так как эти исходы равновозможны, то каждый игрок может претендовать на половину взноса. Если $n=3$ и A тянет их в порядке 1, 2, 3, то для B найдется шесть различных способов извлечения:

A	B					
	1	2	3	4	5	6
1 2 3	1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 2 1	3 1 2

Из них четыре являются благоприятными для A и два — для B, а поэтому надежды на выигрыш относятся как $2:1$. Для четырех билетов таблица будет иметь вид:

A	B																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2	2	2	3	3	4	4	3	3	4	4	1	1	4	4	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3
3	3	4	4	2	2	3	4	1	1	3	4	3	1	2	2	4	1	4	2	3	3	1	1	2
4	4	3	2	4	3	2	1	4	3	1	3	4	2	1	4	2	4	1	3	2	1	3	2	1

Шансы на выигрыш у A и B относятся как $5:3$. Эйлер в мемуаре «Вычисление вероятности в игре «встреча» (1751) показал, что при $n \to \infty$ вероятность выигрыша игрока A равна $1-\frac{1}{e}$, а B $\frac{1}{e}$. В самом деле, число перестановок из n билетов равно $n!$. Пусть A_k означает, что k-й билет совпадает. Это событие содержит $(n-1)!$ исходов, а его вероятность равна $P(A_k)=\frac{(n-1)!}{n!}$. Событие A_kA_l означает, что k-й и l-й билеты совпали, поэтому

$$P(A_kA_l)=\frac{(n-2)!}{n!},\ \ldots,\ P(A_1\ldots A_n)=\frac{[n-(n-1)]!}{n!}=\frac{1}{n!}.$$

Событие $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ состоит в том, что хотя бы один билет совпал. Таким образом, мы получим:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\ldots A_n)=$$

$$=C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=1-\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right].$$

Выражение в квадратных скобках знакомо тем, кто усвоил в школе начала анализа. В самом деле, выражение

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

напоминает степенной ряд для e^x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.$$

Отсюда, в частности. $$e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots.$$

Если $n\to\infty$, то $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right)\to 1-\frac{1}{e}$.

Заметим, наконец, что этой задаче в настоящее время придаются различные формулировки [12].

195. $\dfrac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_k}^{m_k}}{C_{n_1+n_2+\ldots+m_k}^{m}}$.

196.

Секвенции	1 (5)	1 (4) и 1 (1)	1 (3) и 1 (2)	1 (3) н 2 (1)	2 (2) и 1 (1)	1 (2) и 3 (1)	5 (1)
Вероятности	$\frac{1}{511038}$	$\frac{85}{511038}$	$\frac{85}{511038}$	$\frac{3570}{511038}$	$\frac{3570}{511038}$	$\frac{98770}{511038}$	$\frac{404957}{511038}$

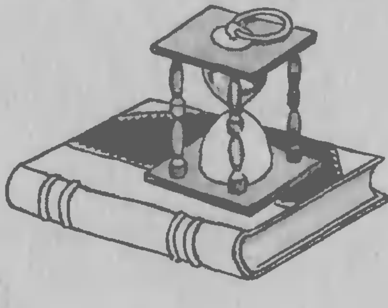
197. Д'Аламбер ошибочно считал, что возможны три несовместимых и единственно возможных случая: два герба, две решетки или герб с решеткой. Исходя из равновозможности этих случаев, он искомую вероятность принимал равной $\frac{2}{3}$ вместо $\frac{3}{4}$. Однако допущение Д'Аламбера о равновозможности трех названных случаев противоречит допущению равновозможности выпадения герба и выпадения решетки при бросании одной монеты и допущению независимости выпадения герба на двух брошенных монетах.

198. Для трех бросаний монеты Д'Аламбер учитывал только четыре случая: 1) герб; 2) решетка, герб; 3) решетка, решетка, герб; 4) решетка, решетка, решетка — и ошибочно получил вероятность появлеиия герба равной $\frac{3}{4}$ вместо $\frac{7}{8}$.

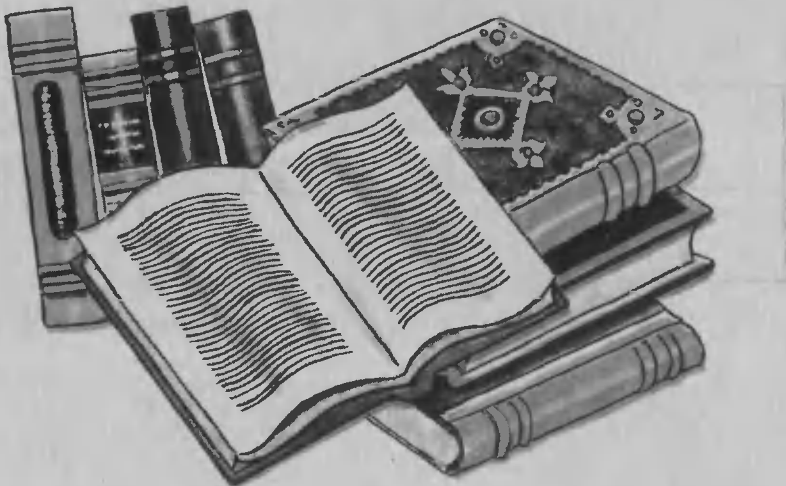
199. $\frac{1}{15}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{2^3\cdot 3^2}{15!}$

Д'Аламбер, выражавший сомнения в основах теории вероятностей, заявил, что все размещения букв равновероятны только математически, на самом же деле нет. Лаплас сделал иной вывод. Так как слово «Константинополь» имеет определенный смысл, его случайное составление маловероятно.

200. $\dfrac{C_a^c C_b^d}{C_{a+b}^n}$.



ПРИЛОЖЕНИЯ



I. Элементы комбинаторики

Ни один математик не мыслит формулами.

А. Эйнштейн

Комбинаторика — раздел дискретной математики, играющий важную роль в теории чисел, теории вероятностей, математической логике, вычислительной технике, кибернетике.

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Большой вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г. В. Лейбниц, Я. Бернулли и Л. Эйлер. В наше время интерес к комбинаторному анализу возродился в связи с бурным развитием вычислительной математики. Комбинаторные задачи стали успешно решаться на ЭВМ.

В комбинаторике изучают вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов). Различают три вида соединений: размещения, перестановки и сочетания без повторяющихся элементов. В качестве первого вида соединений рассмотрим размещения без повторяющихся элементов.

Определение 1. ***Размещениями*** **из n различных элементов по m элементов ($m \leqslant n$) называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по m элементов и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.**

Например. из трех элементов a, b, c можно составить следующие размещения по два элемента: ab, ac, bc, ba, ca, cb.

Число всех размещений из n элементов по m элементов обозначается через A_n^m, где $n=1, 2, \ldots$ и $m=1, 2, \ldots, n$.

Обозначение A произведено от начальной буквы французского слова arrangement, что значит «размещение».

Определим число A_n^m размещений из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по m. Пусть a_{i_1}, $a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$ ($1 \leqslant i_k \leqslant n$; $k=1, 2, \ldots, m$) — возможные размещения, содержащие m элементов. Будем эти размещения строить последовательно. Сначала определим a_{i_1} — первый элемент размещения. Из данной совокупности n элементов его можно выбрать n различными способами. После выбора первого элемента a_{i_1} для второго элемента a_{i_2} остается $n-1$ способов выбора и т. д. Так как каждый такой выбор дает новое размещение, то все эти выборы можно свободно комбинировать между собой. Поэтому имеем:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

Пример 1. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Искомое число трехполосных флагов: $A_5^3=5\cdot 4\cdot 3=60$.

Определение 2. *Перестановками* из n различных элементов называются размещения из этих n элементов по n.

Как видно, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m=n$. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n (от начальной буквы французского слова permutation, что значит «перестановка», «перемещение»). Следовательно, число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=n!$$

Пример 2. Сколькими способами можно расставить восемь ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Искомое число расстановки восьми ладей:

$$P_8=8!=40\,320.$$

Определение 3. *Сочетаниями* из n различных элементов по m элементов называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по m элементов и отличаются хотя бы одним элементом.

Как видно, в сочетаниях в отличие от размещений не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из n элементов по m элементов в каждом обозначается C_n^m (от начальной буквы французского слова combinaison, что значит «сочетание»).

Рассмотрим все допустимые сочетания элементов: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$. Делая в каждом из них $m!$ возможных перестановок их элементов, получим все размещения из n элементов по m. Таким образом,

$$C_n^m\cdot m! = A_n^m.$$

Отсюда $C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$

Последнюю формулу можно представить также в виде

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Символ C_n^m обладает очевидным свойством

$$C_n^m=C_n^{n-m},$$

которое будет верно также и при $m=0$, если принять $C_n^0=1$.

Этой особенностью удобно пользоваться, когда $m>\frac{n}{2}$.

Числа C_n^m являются коэффициентами в формуле бинома Ньютона $(a+b)^n=$ $=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+b^n$ и поэтому часто называются биномиальными коэффициентами.

П р и м е р 3. Сколькими способами можно в игре «Спортлото» выбрать пять номеров из 36?

Искомое число способов: $C_{36}^5=\frac{36!}{5!\,31!}=\frac{36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=376\,992.$

II. Элементы теории вероятностей

В истории науки много примеров, когда неправильные теории приводили к полезным результатам... Мир менее прост, чем нам хотелось бы.

М. Голдстейн, И. Голдстейн

Первое знакомство с основными понятиями науки о случайном

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются *испытаниями*. Примерами испытаний являются: бросание монеты, извлечение шара из урны, бросание игральной кости. Результат, исход испытания называются *событием*. Событиями являются: выпадение герба или цифры, взятие белого или черного шара, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости. Для обозначения событий используются заглавные буквы латинского алфавита A, B, C и т. д.

О п р е д е л е н и е 1. Два события называются *совместимыми*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

П р и м е р 1. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление четырех очков. Событие B — появление четного числа очков. События A и B совместимые.

О п р е д е л е н и е 2. Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

П р и м е р 2. Испытание: однократное бросание игральной кости. Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 — соответственно выпадение одного очка, двух, трех, четырех, пяти, шести. Эти события являются несовместимыми.

О п р е д е л е н и е 3. Двв события A и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

П р и м е р 3. Испытание: бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие $\overline{A}$ — выпадение решетки.

О п р е д е л е н и е 4. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

П р и м е р 4. Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

О п р е д е л е н и е 5. Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

П р и м е р 5. Событие A_6 — выпадение шести очков при бросании игральиой кости — случайное. Оно может и не наступить в данном испытании.

О п р е д е л е н и е 6. *Суммой событий A и B* называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B.

П р и м е р 6. Испытание: стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу). Событие A — попадает в мишень первый стрелок, событие B — попадает в мишень второй стрелок. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$ — попадает в мишень по крайней мере один стрелок.

Аналогично *суммой конечного числа событий* A_1, A_2, ..., A_k называется событие $A = A_1 + A_2 + ... + A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i $(i = 1, 2, ..., k)$.

Из определения 1 непосредственно следует, что $A + B = B + A$. Справедливо также и сочетательное свойство. Однако $A + A = A$ (а не $2A$, как в алгебре).

О п р е д е л е н и е 7. *Произведением событий A и B* называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.

Аналогично *произведением конечного числа событий* A_1, A_2, ..., A_k называется событие $A = A_1 A_2 \cdot ... \cdot A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В примере 6 произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двумя стрелками.

Из определения 2 непосредственно следует, что $AB = BA$

Справедливы также сочетательный и дистрибутивный законы. Однако $AA = A$ (а не A^2).

Всякое испытаиие влечет за собой некоторую совокупность исходов — результатов испытання, т. е. событий.

Определение 8. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Пример 7. Полными группами событий являются: выпадение герба и выпадение решетки при одном бросании монеты; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков при одном бросании игральной кости; попадание в цель и промах при одном выстреле.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий $U_1, U_2, ..., U_n$, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий U_i $(i=1, 2, ..., n)$ равновозможно, т. е. условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед другими возможными.

Определение 9. События $U_1, U_2, ..., U_n$, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть *элементарными событиями.*

Пример 8. Пусть U_i — событие, состоящее в том, что при одном бросании кости выпадает грань с цифрой i. Тогда события $U_1, U_2, ..., U_6$ образуют полную группу попарно несовместимых событий. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то события $U_1, U_2, ..., U_6$ являются и равновозможными, т. е. элементарными.

Определение 10. Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Пример 9. Пусть при бросании игральной кости события U_2, U_4 и U_6 — появление соответственно двух, четырех и шести очков и A — событие, состоящее в появлении четного очка; события U_2, U_4 и U_6 благоприятствуют событию A.

Определение 11 (классическое определение вероятности). *Вероятностью $P(A)$ события A* называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т. е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Пример 10. Вычислим вероятность выпадения герба при одном бросании монеты. Очевидно, событие A — выпадение герба и событие B — выпадение решетки образуют полную группу несовместимых и равновозможных событий для данного испытания. Событию A благоприятствует лишь одно событие — само A. Поэтому $P(A)=\frac{1}{2}$.

Пример 11. Найдем вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков (событие А). Число элементарных событий здесь 6. Число благоприятствующих элементарных событий 3 (выпадение 2, 4 и 6). Поэтому $P(A)=\frac{3}{6}=0{,}5$.

Из классического определения вероятности следует:

1) вероятность достоверного события равна единице;

2) вероятность невозможного события равна нулю;

3) вероятность случайного события есть положительное рациональное число, заключенное между нулем и единицей, т. е. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

4) элементарные события являются равновероятными, т. е. обладают одной и той же вероятностью.

Первое знакомство с основными понятиями науки о случайном предлагаем завершить разбором более сложной задачи о кубике Э. Рубика:

З а д а ч а. Какова вероятность сложить кубик Рубика [30] после произвольного числа случайных вращений?

Р е ш е н и е. По классическому определению искомая вероятность равна отношению $m=1$ (почему?) к

$$n=\frac{8!12!}{2}\cdot\frac{3^8}{3}\cdot\frac{2^{12}}{2}=43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

(почему?), т. е.

$$P(A)=2{,}3\cdot 10^{-21}.$$

Свойства случайных событий

Одним из основополагающих предложений теории вероятностей является теорема сложения вероятностей несовместимых случайных событий.

Т е о р е м а 1. *Вероятность суммы двух несовместимых событий* **A** *и* **B** *равна сумме вероятностей этих событий:*

$$\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B).} \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n; событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию $B-l$ элементарных событий. Так как A и B — несовместимые события, то ни одно из элементарных событий $U_1, U_2, ..., U_n$ не может одновременно благоприятствовать и событию A и событию B. Следовательно, событию $A+B$ будет благоприятствовать $k+l$ элементарных событий. По классическому определению вероятности имеем:

$$P(A)=\frac{k}{n};\ P(B)=\frac{l}{n};\ P(A+B)=\frac{k+l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Совершенно так же теорема формулируется и доказывается для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

С л е д с т в и е. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице:

$$\boldsymbol{P(A)+P(\bar{A})=1.} \qquad (2)$$

Так как события A и $\bar{A}$ несовместимы, то по доказанной теореме имеем:

$$P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A}).$$

Событие $A+\bar{A}$ есть достоверное событие (ибо одно из событий A или $\bar{A}$ произойдет). Поэтому $P(A+\bar{A})=1$, что и приводит к искомому соотношению (2).

П р и м е р 1. При стрельбе в мишень вероятность выбить десять очков равна 0,2, а вероятность выбить девять очков равна 0,5. Чему равна вероятность выбить не менее девяти очков?

Пусть случайное событие A означает «выбить десять очков», B — «выбить девять очков» и $A+B$ — «выбить не менее девяти очков». Так как случайные события A и B несовместимы, то по доказанной выше теореме

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}2+0{,}5=0{,}7.$$

О п р е д е л е н и е 1. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события A и B называют *зависимыми*.

П р и м е р 2. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Если событие A — вынут белый шар, то $P(A)=\frac{1}{2}$. После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие B — во втором испытании вынут белый шар — также имеет вероятность $P(B)=\frac{1}{2}$, т. е. события A и B независимые.

Предположим, что вынутый в первом испытании шар не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие A, т. е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается $\left(P(B)=\frac{1}{3}\right)$; если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события B увеличивается $\left(P(B)=\frac{2}{3}\right)$. Итак, вероятность события B существенно зависит от того, произошло или не произошло событие A; в таких случаях события A и B зависимые.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть A и B — зависимые события. *Условной вероятностью $P_A(B)$* события B называется вероятность события B, найденная в предположении, что событие A уже наступило.

Так, в примере 2 $P_A(B)=\frac{1}{3}$.

Заметим, что если события A и B независимы, то $P_A(B)=P(B)$.

Т е о р е м а 2. *Вероятность произведения двух зависимых событий* **A** *и* **B** *равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило.*

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)\,P_A(B)} \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а значит, и событию AB. Тогда

$$P(AB)=\frac{l}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{l}{k}=P(A)\,P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (3).

З а м е ч а н и е. Аналогичным образом получим $P(BA)=P(B)P_B(A)$. Так как $AB=BA$, то

$$P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A). \qquad (4)$$

П р и м е р 3. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Р е ш е н и е. Обозначим: C — появление двух белых шаров. Случайное событие C представляет собой произведение двух событий: $C=AB$, где A — появление белого шара при первом вынимании, B — появление белого шара при втором вынимании. По теореме умножения вероятностей зависимых случайных событий получим:

$$P(C)=P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}.$$

Т е о р е м а 3. *Вероятность произведения двух независимых событий* ***A*** *и* ***B*** *равна произведению вероятностей этих событий:*

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)P(B).} \qquad (5)$$

Действительно, если A и B — независимые события, то формула (3) превращается в формулу (5).

П р и м е р 4. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают два шара, но после первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Р е ш е н и е. Обозначим: C — появление двух белых шаров. Случайное событие C представляет собой произведение двух событий: $C=AB$, где A — появление белого шара при первом вынимании, B — появление белого шара при втором вынимании. По теореме умножения вероятностей для независимых случайных событий получаем: $P(C)=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$.

Т е о р е м а 4. *Вероятность суммы двух совместимых событий* ***A*** *и* ***B*** *равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:*

$$\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).} \qquad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l — событию B и m — одновременно событиям A и B. Отсюда событию $A+B$ благоприятствуют $k+l-m$ элементарных событий. Тогда $P(A+B)=\frac{k+l-m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n}-\frac{m}{n}=P(A)+P(B)-P(AB)$.

З а м е ч а н и е 1. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB — невозможное событие и, следовательно, $P(AB)=0$ и

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

П р и м е р 5. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $P(A)=0{,}9$ и $P(B)=0{,}7$. Найти вероятность попадания при залпе из обоих орудий хотя бы одним из орудий.

Очевидно, события A и B совместимы и независимы. Поэтому $P(A+B)=$ $=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}9+0{,}7-0{,}9\cdot 0{,}7=0{,}97$.

Замечание 2. Формулу (6) методом индукции можно обобщить иа сумму любого конечного числа событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаиий, причем вероятность появления события A в каждом испытании равна p, тогда вероятность иенаступления A равна $q=1-p$.

Найдем вероятиость того, что при n испытаниях событие A наступит m раз ($m \leqslant n$).

Пусть событие A наступило в первых m испытаниях m раз и не наступило во всех последующих испытаниях. Это сложное событие можно записать в виде произведения:

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m \text{ раз}}.$$

Общее число сложных событий, в которых A наступает m раз, равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. При этом вероятность каждого сложного события: $p^m q^{n-m}$. Так как эти сложные события являются несовместимыми, то вероятность суммы равна сумме их вероятностей.

Итак, если $P_n(m)$ есть вероятность появления события A m раз в n испытаниях, то

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

или

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m q^{n-m}.$$

Эта формула называется формулой Бернулли.

Пример. Пусть всхожесть семян некоторого растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеяниых семян взойдут: а) три; б) ие менее трех.

а) В данном случае $p=0{,}9$; $q=1-p=0{,}1$; $n=4$; $m=3$. Применяя формулу Бернулли, получим

$$P_4(3)=4\cdot(0{,}9)^3\cdot 0{,}1=0{,}2916.$$

б) Искомое событие состоит в том, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. По теореме сложеиия вероятностей: $P(A)=P_4(3)+P_4(4)$.

Но $P_4(4)=(0{,}9)^4=0{,}6561$.

Поэтому $P(A)=0{,}2916+0{,}6561=0{,}9477$.

Дальнейшее знакомство с наукой о случайном можно продолжить, например, по книге [2].

К читателю

В обеих частях книги старинные задачи расположены в хронологической последовательности. Читать книгу, то есть решать старинные задачи, можно практически с любого номера. Сориентироваться, достаточно ли у вас знаний для решения той или иной задачи, вам поможет расположение задач по классам:

V класс: 30, 41, 73, 106, 124;

VI класс: 1, 3, 8, 11, 15, 17, 21, 22, 32, 49, 71, 74, 75, 116, 119, 125, 127, 128, 131, 132, 148;

VII класс: 7, 10, 16, 20, 24, 37, 38, 51, 59—61, 72, 76, 96, 100, 129, 130, 136, 137, 147, 169—176, 181, 182, 184, 189, 191, 197, 198;

VIII класс: 12, 18, 23, 26, 29, 33, 40, 42, 46, 50, 52, 65, 77, 78, 82, 83, 118, 120, 142, 144;

IX класс: 2, 4—6, 13, 19, 25, 27, 31, 34, 36, 39, 43—45, 48, 53, 56, 57, 62, 64, 66—68, 70, 80, 81, 87, 88, 95, 97, 101, 107—112, 121, 122, 134, 135, 138—140, 146;

X класс: 14, 47, 54, 55, 69, 79, 84, 89—92, 102, 105, 117, 133, 141, 149—168, 177—180, 183, 185—188, 190, 192—196, 199, 200;

XI класс: 9, 28, 35, 58, 63, 85, 86, 93, 94, 98, 99, 103, 104, 113—115, 123, 126, 143, 145.

Подробное изложение решения некоторых задач, а также сведения по истории математики можно найти в [20], [21], [22].

Литература

Обобщение — это, вероятно, самый легкий и самый очевидный путь расширения математических знаний.

У. Сойер

1 *Архимед.* Сочинения / Пер., вступительная статья и коммент. И. Н. Веселовского. Пер. арабских текстов Б. А. Розенфельд.— М.: Физматгиз, 1962.

2 *Баврин И. И., Матросов В. Л.* Краткий курс теории вероятностей и математической статистики.— М.: Прометей, 1989.

3 *Башмакова И. Г., Лапин А. И.* Пифагор // Квант, 1986.— № 1.— С. 7—12.

4 *Беве Л.* Мини-геометрия // Квант, 1976.— № 6.— С. 2—12.

5 *Белый Ю. А.* Иоганн Кеплер.— М.: Наука, 1971.

6 *Белый Ю. А.* Иоганн Мюллер (Региомонтан).— М.: Наука, 1985.

7 *Бендукидзе А. Д.* Золотое сечение // Квант, 1973.— № 8.— С. 22—27, 34, 53.

8 *Бендукидзе А. Д.* Фигурные числа // Квант, 1974.— № 6.— С. 53—56.

9 *Березин В. Н.* Луночки Гиппократа // Квант, 1971.— № 5.— С. 17—21, 61.

10 *Березкина Э. И.* Математика Древнего Китая.— М.: Наука, 1980.

11 *Вавилов С. И.* Исаак Ньютон. 1643—1727.— 4-е изд., доп.— М.: Наука, 1989.

12 *Виленкин Н. Я.* В таинственном мире бесконечных рядов // Квант, 1989.— № 10.— С. 21—27.

13 *Володарский А. И.* Ариабхата.— М.: Наука, 1977.

14 *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи.— М.: Наука, 1978.
15 *Воронин С. М., Кулагин А. Г.* О задаче Пифагора // Квант, 1987.— № 1.— С. 11—14, 28.
16 *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас.— М.: Наука, 1985.
17 *Гарднер М.* Числа Каталана // Квант, 1979.— № 7.— С. 20—26.
18 *Геллер Б., Брук Ю.* Симеон Дени Пуассон // Квант, 1982.— № 2.— С. 14—20.
19 *Гик Е. Я.* Шахматы и математика.— М.: Наука, 1983.
20 *Глейзер Г. И.* История математики в школе. Пособие для учителей: IV—VI кл.— М.: Просвещение, 1981.
21 *Глейзер Г. И.* История математики в школе. Пособие для учителей: VII—VIII кл.— М.: Просвещение, 1982.
22 *Глейзер Г. И.* История математики в школе. Пособие для учителей: IX—X кл.— М.: Просвещение, 1983.
23 *Гнеденко Б. В.* Из истории науки о случайном (Из истории математических идей).— М.: Знание, 1981.
24 *Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б.* Михаил Васильевич Остроградский. 1801—1862. Жизнь и работа. Научное и педагогическое наследие.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
25 *Гуревич Е. Я.* Тайна древнего талисмана.— М.: Наука, 1969.
26 *Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.* Джироламо Кардано.— М.: Знание, 1980.
27 *Данилов Ю.* Стомахион // Квант, 1978.— № 8.— С. 50—53.
28 *Денисов А. П.* Леонтий Филиппович Магницкий. 1669—1739.— М.: Просвещение, 1967.
29 *Добровольский В. А.* Даламбер.— М.: Знание, 1968.
30 *Евграфов М.* Механика волшебного кубика // Квант, 1982.— № 3.— С. 20—25.
31 *Зенкевич И. Г.* Судьба таланта (Очерки о женщинах-математиках).— Брянск, 1968.
32 *Зубов В. П.* Леонардо да Винчи.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962.
33 *Кляус Е. М. и др.* Паскаль. 1623—1662.— М.: Наука, 1971.
34 *Кузьмин Е., Ширшов А.* О числе *e* // Квант, 1979.— № 8.— С. 3—8.
35 *Курляндчик Л., Лисицкий А.* Суммы и произведения // Квант, 1978.— № 10.— С. 31—37, 94.
36 *Кымпан Ф.* История числа π.— М.: Наука, 1971.
37 *Леман И.* Увлекательная математика / Пер. с нем.— М.: Знание, 1985.
38 *Матвиевская Г. П.* Альбрехт Дюрер — ученый.— М.: Наука, 1987.
39 *Матвиевская Г. П.* Рене Декарт.— М.: Просвещение, 1987.
40 *Мостеллер Ф.* Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Пер. с англ.; Под ред. Ю. В. Линника.— 3-е изд.— М.: Наука, 1985.
41 *Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М.* Очерк о цепных дробях // Квант, 1983.— № 5.— С. 16—20; № 6.— С. 26—30.
42 *Никифоровский В. А.* Великие математики Бернулли.— М.: Наука, 1984.
43 *Олехник С. Н. и др.* Старинные занимательные задачи.— М.: Наука, 1985.
44 *Оре О.* Приглашение в теорию чисел.— М.: Наука, 1980.
45 *Паскаль Б.* Мысли Ф. де Ларошфуко. Максимы.— М.: Художественная литература, 1974.
46 *Погребысский И. Б.* Готфрид Вильгельм Лейбниц. 1646—1716.— М.: Наука, 1971.

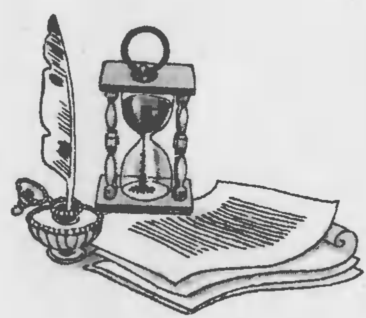
47 *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения / Пер. с англ.— 2-е изд., испр.— М.: Наука, 1975.
48 *Постников М. М.* Теорема Ферма.— М.: Наука, 1978.
49 *Реньи А.* Письма о вероятности / Пер. с венгер.; Под ред. Б. В. Гнеденко.— М.: Мир, 1970.
50 *Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П.* Омар Хайям.— М.: Наука, 1965.
51 *Симонов Р. А.* Математическая мысль Древней Руси.— М.: Наука, 1977.
52 *Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П.* Абу Райхан Беруни и его математические труды.— М.: Просвещение, 1978.
53 *Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П.* Ал-Хорезми — выдающийся математик и астроном средневековья.— М.: Просвещение, 1983.
54 *Соминский И. С.* Метод математической индукции. Изд. 7.— М.: Наука, 1965.
55 *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. и доп. И. Б. Погребысского — 5-е изд.— М.: Наука, 1990.
56 *Тихомиров В. М.* Рассказы о максимумах и минимумах.— М.: Наука, 1986.
57 Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Просвещение, 1977.— С. 205—217.
58 *Чистяков В. Д.* Старинные задачи по элементарной математике.— Минск: Вышейшая школа, 1978.
59 *Шмутцер Э., Шютц В.* Галилео Галилей / Пер. с нем. Н. В. Мицкевича; Под ред. Г. М. Идлиса.— М.: Мир, 1987.
60 *Юшкевич А. П., Копелевич Ю. Х.* Христиан Гольдбах. 1690—1764.— М.: Наука, 1983.
61 *Яглом И. М.* Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики // Квант, 1984.— № 7.— С. 15—17.
62 *Яковлев А. Я.* Леонард Эйлер.— М.: Просвещение, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Глава II

Глава III



И. И. Баврин, Е. А. Фрибус

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ