Р. БЕЛЛМАН

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. БЕЛЛМАН

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Перевод с английского
А. Д. МЫШКИСА

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1954

STABILITY THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

RICHARD BELLMAN

New York Toronto London
1953

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Всякому, кто имел дело с теорией или с применением обыкновенных дифференциальных уравнений, хорошо известно, как важно уметь выяснять асимптотические свойства решений. Сюда относится изучение вопросов о том, будут ли решения колеблющимися, будут ли они ограниченными, устойчивыми в том или ином смысле, вопросов приближенной оценки решений для больших значений аргумента и многих других вопросов. Между тем получить решение в явном виде и затем исследовать его непосредственно удается лишь в редких, исключительных случаях, даже если привлекать специальные функции. Поэтому со всей остротой встает задача качественного исследования свойств решений данного дифференциального уравнения или системы без использования явного вида этих решений.

Задача эта в общем виде чрезвычайно сложна. Даже одно из наиболее простых уравнений (и притом весьма важное для приложений) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, как образно говорит автор настоящей книги, „представляет собой постоянный вызов искусству аналитика: надо получать всевозможные свойства решений этого уравнения, не пользуясь такой роскошью, как представление этих решений через коэффициенты“.

Для многих важных классов дифференциальных уравнений существует большое количество подчас остроумных и сильных методов такого исследования. К сожалению, обширная литература по этим вопросам в подавляющем большинстве состоит из разрозненных журнальных статей. Книга Р. Беллмана — одна из немногих книг по качественной теории дифференциальных уравнений. Отобрав из богатейшего материала ряд узловых моментов, автор сжато и убедительно показывает силу применяемых здесь методов. При этом он подробно обосновывает каждый метод, показывая сферу его действия и его преимущества. Овладев этими методами, читатель сможет успешно применять их для решения проблем, аналогичных разобранным в книге.

Значительный интерес представляют упражнения, которыми автор сопровождает изложение. Некоторые из них содержат материал, используемый в основном тексте книги. Ряд более трудных упражнений можно рекомендовать для студенческих курсовых и дипломных работ.

Особо следует отметить характерную для книги живость изложения, облегчающую чтение и помогающую усвоению материала.

Не все в книге изложено на одинаковом уровне. Многие важные вопросы, непосредственно относящиеся к тематике книги, освещены бегло и поверхностно. В особенности это касается теории устойчивости по Ляпунову. Книга не дает настоящего представления о современном состоянии этой важной теории, в частности потому, что в ней не приводятся многие основные результаты русских авторов. Для восполнения указанного пробела читателю придется обратиться к дополнительной литературе, списки которой приложены к гл. II и IV. Большой список дополнительной литературы прилагается также к гл. VI, посвященной линейным уравнениям второго порядка.

Кроме того, необходимо отметить, что книга Р. Беллмана написана с непривычной для нашего читателя небрежностью. Она содержит ряд неточных формулировок, некоторые доказательства недостаточны, применяемые обозначения порой неудачны (например, в одном и том же месте одинаковыми буквами обозначаются совершенно разные величины) и т. п. Число различных мелких погрешностей и опечаток в формулах в этой небольшой книге превышает сотню.

При переводе я стремился устранить эти недостатки. Мелкие исправления редакционного характера внесены в текст без специальных оговорок, чтобы не затруднять читателя. Небольшие примечания даны внизу страниц, а более серьезные пояснения вынесены в конец книги.

Несмотря на указанные недостатки, книга Р. Беллмана представляет несомненный интерес для широкого круга советских математиков, как специалистов в области теории дифференциальных уравнений, так и изучающих эту теорию. Она будет полезна также для физиков, инженеров, работающих в области теории регулирования и автоматики, и вообще для всех тех, кто в своей практической деятельности сталкивается с применением дифференциальных уравнений.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Основная задача теории дифференциальных уравнений заключается в том, чтобы вывести свойства решений данного дифференциального уравнения из аналитической формы уравнения. Хотя в некоторых случаях это можно сделать очень просто, выразив решение через элементарные функции, но, вообще говоря, уравнения, появляющиеся в теоретических исследованиях как в математике, так и в физике, не интегрируются в конечном виде. Они скорее служат основным источником новых трансцендентных функций, свойства которых можно установить только при систематическом и детальном анализе широких классов уравнений.

Мы будем рассматривать в этой книге вещественные решения вещественных уравнений и изучать поведение этих решений при неограниченном возрастании независимой переменной. В задачах, имеющих физическое содержание, этой переменной чаще всего является время. Наибольший интерес для нас будут представлять ограниченность, асимптотическое поведение, колебания и устойчивость решений.

Книга не претендует на энциклопедичность и не представляет собой каталога всех результатов, которые примыкают к сфере рассматриваемых в ней вопросов. Это и не выполнимо и не желательно во вводном курсе. Мы скорее пытались, насколько это возможно, добиться единства при изложении теории, сосредоточивая внимание на небольшом числе мощных методов доказательства. По этой причине в некоторых случаях мы без колебания доказывали теоремы по нескольку раз, используя различные подходы к ним.

Выводы на протяжении всего изложения элементарны и опираются только на основные понятия анализа. Поэтому значительная часть работы оказалась довольно трудной, так как многие из результатов надо было путем скучных и утомительных вычислений вывести шаг за шагом из элементарных понятий, причем каждый новый результат требовал новой конструкции.

Чтобы сохранить элементарный характер работы, мы опустили исследование периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, таких, например, как известное уравнение ван дер Поля, так как это исследование потребовало бы применения сложных аналитических и топологических методов.

План книги следующий. В гл. I мы изучаем основные свойства линейных систем и получаем результаты, существенные для дальнейшего

более глубокого исследования линейных и нелинейных систем. Для этой цели мы вводим векторно-матричные обозначения и изучаем простые преобразования матриц, которые оказываются очень полезными в теории асимптотического поведения решений. Целесообразно было бы иметь независимое краткое изложение основных результатов теории матриц. К сожалению, нет единого источника, к которому мы могли бы отослать читателя для более глубокого изучения необходимых разделов этой теории[1]).

В гл. II мы обращаемся к интересному и важному вопросу, который начали изучать еще Дини и Пуанкаре,— об асимптотическом поведении решений уравнений с коэффициентами, близкими к постоянным. После изложения нескольких результатов, в которых дается оценка первого порядка, мы рассматриваем задачу получения приближения произвольно высокого порядка. Это, естественно, приводит к понятию асимптотического разложения, введенному Пуанкаре. Так как литература по этому вопросу обширна и значительная часть материала достаточно сложна, то мы, в соответствии с нашей общей установкой, показываем только один из наиболее важных результатов, чтобы дать возможность читателю отведать вкус общей теории.

В гл. II в связи с исследованием асимптотического поведения решений мы останавливаемся также на понятии устойчивости — этого сильно перегруженного термина с неустановившимся определением.

Теоремы о существовании и единственности решений для нелинейных систем составляют содержание гл. III. Они приводятся не столько из-за их самостоятельного значения, сколько потому, что дают возможность продемонстрировать два сильных метода — метод последовательных приближений, уже рассмотренный в более простом случае в гл. I, и метод приближения дифференциальных уравнений разностными уравнениями.

Далее, в гл. IV, мы излагаем основные результаты Пуанкаре и Ляпунова об устойчивости решений нелинейных систем. Чтобы проиллюстрировать многообразие применяемых при этом важных методов, мы проводим некоторые доказательства при различных ограничивающих предположениях.

Гл. V посвящена изучению вещественных решений полиномиального уравнения $P(t, u, du/dt) = 0$. Введя важное понятие собственного решения как решения, остающегося конечным при $t \geqslant t_0$ (это именно тот тип решений, который требуется в большинстве физических исследований), мы излагаем затем замечательные результаты Бореля и Харди об асимптотическом поведении вещественных собственных решений.

В гл. VI излагаются результаты, которые получаются сочетанием изобретательности и специальных приемов. Подобно тому как эле-

[1]) Значительное количество важных результатов из общей теории матриц и ее приложений к дифференциальным уравнениям читатель может найти в монографии Гантмахера Ф. Р.: Теория матриц, М., 1953.— *Прим. перев.*

ментарная геометрия на плоскости упорно отказывается довольствоваться только следствиями теорем, справедливых для общих алгебраических кривых, и беспрестанно доставляет новые теоремы, о которых не приходится и мечтать в более широкой области, так и изучение уравнения $u'' + a(t)u = 0$ в изобилии доставляет изящные и неожиданные результаты, которые не могут быть получены из общей теории линейных систем n-го порядка.

Мы старались изложить достаточное количество специальных приемов решения (помня о том, что прием становится методом, если он применяется по крайней мере дважды), чтобы дать возможность читателю, добросовестно проработавшему главу, получать новые результаты и читать научные статьи.

Гл. VII посвящена нелинейному уравнению частного вида $u'' \pm t^3 u^n = 0$. Это уравнение впервые обратило на себя внимание в связи с астрофизическими исследованиями Эмдена. Некоторые результаты, полученные Эмденом в основном полуинтуитивно, с большой изобретательностью, свойственной физику, были затем уточнены Фаулером. Это побудило Фаулера и других продолжить изыскания и дать полное исследование собственных решений указанного уравнения для всех значений параметров. Это уравнение, а также тесно связанное с ним уравнение $u'' \pm e^{\lambda t} u^n = 0$ в настоящее время получают все более возрастающее значение в ядерной физике в связи с работами Ферми и Томаса.

Цель гл. V и VII заключается не только в том, чтобы сохранить от забвения целый ряд крайне интересных результатов и методов в теории дифференциальных уравнений, но также и в том, чтобы проиллюстрировать тот факт, что нелинейные дифференциальные уравнения вовсе не являются теми „непреклонными существами“, которыми они представляются первому испуганному взгляду. Так как современная физика все более и более приводит к необходимости нелинейного объяснения основных явлений, то мы надеемся, что содержание этих глав сможет послужить хоть некоторым слабым утешением в утрате изящного принципа суперпозиции.

Ричард Беллман.

Глава I

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Введение. В этой вводной главе мы будем рассматривать основные свойства решений системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Будем считать, что независимая переменная t меняется в интервале $[0, \infty)$, и предположим, что коэффициенты $a_{ij}(t)$ являются кусочно непрерывными функциями в каждом конечном подинтервале. При этом предположении мы можем рассматривать все интегралы, с которыми будем встречаться в дальнейшем, как римановы интегралы. Для наших целей привлечение интеграла Лебега имеет очень мало преимуществ, и потому мы предпочитаем вести изложение на возможно более элементарном уровне[1]).

Мы потребуем, кроме того, чтобы коэффициенты были вещественными. Иногда, в частности при рассмотрении линейных систем с постоянными или с близкими к постоянным коэффициентами, мы будем вводить комплексные решения. Например, в качестве фундаментальной системы решений уравнения $d^2u/dt^2 + u = 0$ удобнее пользоваться системой (e^{it}, e^{-it}), чем $(\cos t, \sin t)$. Однако это только вопрос удобства, и в первую очередь мы будем интересоваться вещественными решениями вещественных систем.

Единственный удобный путь систематического изучения свойств линейных алгебраических или дифференциальных уравнений состоит

---

[1]) Обычно автор не оговаривает подробно предположений о рассматриваемых функциях. В связи с этим читателю надо иметь в виду, что в каждой формулировке от любой рассматриваемой функции требуется кусочная непрерывность (на каждом конечном интервале), а если в этой формулировке присутствует и производная от данной функции, то от функции требуется кусочная гладкость (т. е. непрерывность функции и кусочная непрерывность производной). Там, где производная решения терпит разрыв, в уравнении надо рассматривать правую и левую производные. Интересующийся читатель сам проверит, какие формулировки остаются справедливыми, если вместо кусочной непрерывности и кусочной гладкости от функций требовать соответственно суммируемости и абсолютной непрерывности (на каждом конечном интервале).— *Прим. перев.*

в применении понятий вектора и матрицы. В этой главе мы напомним основные определения и докажем некоторые утверждения, необходимые для теории дифференциальных уравнений.

Упражнение

Показать, что линейное уравнение n-го порядка

$$u^{(n)} + a_1(t)\,u^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,u = 0$$

может быть преобразовано в линейную систему указанного выше типа (1) при помощи подстановки $u = u_1$, $u' = u_2, \ldots, u^{(n-1)} = u_n$.

2. Векторно-матричные обозначения. Столбец из n величин

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix},$$

где y_i вещественны или комплексны, мы будем называть n-мерным *столбцевым вектором*, а символ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — n-мерным *строчным вектором*. Если y_i являются функциями t, то y будет называться векторной функцией t; если они постоянны — постоянным вектором. Величину y_i будем называть i-й компонентой y. Мы будем обычно употреблять столбцевые векторы.

Буквы x, y, z, u, v и w будут систематически применяться для обозначения векторных функций, а буквы a, b, c и d — для постоянных векторов. Насколько это возможно, мы сохраним буквы u и v для обозначения одномерных векторов, которые будем называть *скалярами*; буквы c_1, c_2, ... будут использоваться для обозначения скалярных постоянных.

Рассмотрим теперь различные действия, которые можно производить над векторами. Простейшим является сложение. Сумма двух векторов x и y (в записи: $x+y$) определяется как вектор, i-й компонентой которого служит $x_i + y_i$. Из нашего определения следует, что сложение векторов коммутативно и ассоциативно. Произведением скаляра c_1 и вектора y называется вектор $c_1 y$ с i-й компонентой $c_1 y_i$. Пользуясь предельным переходом, мы определим интеграл от $y = y(t)$ (обозначение: $\int y\,dt$) как вектор, i-й компонентой которого служит $\int y_i\,dt$.

Для измерения „величины“ (или длины) вектора y мы введем скаляр

$$\|y\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|,$$

который будем называть *нормой* y. Легко убедиться в том, что имеют место соотношения

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \text{(неравенство треугольника)},$$

$$\|c_1 y\| = |c_1| \|y\|,$$

$$\left\| \int_a^b y\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|y\|\,dt$$

и что $\|y\| = 0$ тогда и только тогда, когда каждая компонента y равна нулю. Преимущество этой нормы перед эвклидовой нормой $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$ заключается в ее простоте.

Определив векторы, мы введем понятие квадратной матрицы — единственный тип матриц, которым мы будем пользоваться. Квадратную таблицу из чисел, вещественных или комплексных,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

мы будем называть *матрицей порядка n*. Величина a_{ij} называется ij-м элементом матрицы A. Матрицу A мы будем называть матричной функцией, если ее элементы являются функциями t, и постоянной матрицей, если все ее элементы — постоянные величины. Матрица будет называться непрерывной на интервале (a, b), если все ее элементы непрерывны на этом интервале.

Сумма двух матриц A и B определяется равенством

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

а произведение — равенством

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right). \tag{2}$$

Ясно, что сложение коммутативно и ассоциативно, но умножение, всегда ассоциативное, вообще говоря, *не* коммутативно.

Упражнение

1. Показать, что $A(B+C)=AB+AC$ и $(B+C)A=BA+CA$.

Особое значение имеет единичная матрица

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для всех A имеем $AI=IA=A$.

Произведением скаляра c_1 и матрицы A по определению является матрица $c_1A=Ac_1$, равная (c_1a_{ij}). Произведение матрицы A на столбцевой вектор y записывается в виде Ay (отметим порядок сомножителей!) и определяется как столбцевой вектор, i-й компонентой которого служит $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$. Легко видеть, что всегда $(AB)y=A(By)$; для краткости мы будем записывать этот вектор в виде ABy.

Определение сложения и умножения, на первый взгляд искусственное, становится обоснованным и естественным, если мы допустим, что матрица A определяет в n-мерном пространстве линейное преобразование

$$x_i'=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i=1, 2, \dots, n.$$

Если вслед за преобразованием, определяемым матрицей B, произвести преобразование, определяемое матрицей A, то мы придем к преобразованию, определяемому матрицей C, которую мы и положим равной произведению AB. Легко видеть, что это новое определение произведения AB совпадает с тем, которое дается соотношением (2). Теперь из геометрических соображений ясно, почему, вообще говоря, $AB\neq BA$.

Для измерения „величины“ матрицы A введем скаляр

$$\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

который будем называть *нормой* A. Легко видеть, что

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|,$$
$$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|,$$
$$\|c_1A\|=|c_1|\,\|A\|,$$
$$\|Ax\|\leqslant\|A\|\,\|x\|.$$

Аналогично предыдущему, интеграл $\int A\,dt$ определяется как матрица, ij-м элементом которой служит $\int a_{ij}\,dt$.

Упражнение

2. Показать, что $\left\| \int_a^b A\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|A\|\,dt \qquad (a < b)$.

Определив таким способом интегрирование векторов и матриц, мы подобным же образом можем определить обратную операцию — дифференцирование:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

В новых обозначениях наша основная линейная система (1) принимает следующую простую и изящную форму:

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{3}$$

Порядок матрицы A называется порядком системы (3).

Если мы зададим начальное значение y, то получим запись начальной задачи

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \qquad y(0) = c. \tag{4}$$

В следующем пункте мы займемся выяснением того, имеет ли задача (4) решение. Прежде чем перейти к этому вопросу, мы приведем еще несколько элементарных сведений о матрицах. С каждой матрицей связана скалярная величина $|A|$ — определитель матрицы A. Если $|A| = 0$, то мы будем говорить, что матрица A — вырожденная, в противном случае мы будем называть матрицу A невырожденной.

Упражнение

3. Показать, что $|AB| = |A|\,|B|$.

Важность этого нового понятия заключается в том, что невырожденная матрица A имеет единственную обратную матрицу, которую мы будем обозначать A^{-1}. Обратная матрица удовлетворяет следующим соотношениям:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Упражнения

4. Показать, что $A^{-1}=(\alpha_{ij}/|A|)$, где α_{ij} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ji}. Показать, что $(A^{-1})^{-1}=A$ и что $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

5. Показать, что

$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(Ay)=\frac{dA}{dt}y+A\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}A^{-1}=-A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}\qquad(|A|\neq 0).$$

Нам понадобится также понятие бесконечных рядов векторов или матриц. Введем следующие определения:

$$\sum_{m=1}^{\infty}A^{(m)}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{ij}^{(m)}\right),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}y^{(m)}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=1}^{\infty}y_1^{(m)}\\ \vdots\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}y_n^{(m)}\end{pmatrix},$$

предполагая, конечно, что ряды, стоящие в правых частях, сходятся.

Упражнение

6. Показать, что достаточным условием сходимости рядов $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A^{(m)}$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty}y^{(m)}$ является сходимость рядов $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\|A^{(m)}\|$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\|y^{(m)}\|$ соответственно.

3. Существование решений векторно-матричного уравнения $dy/dt=A(t)y$. Прежде всего мы докажем теорему о существовании и единственности решения. Эта теорема является частным случаем более общего результата, относящегося к нелинейным системам, причем метод доказательства в этом случае в точности тот же, который будет применен в более общем случае. Тем не менее мы проведем доказательство во всех деталях, так как оно представляет собой прекрасное, свободное от посторонних трудностей введение в методику подобного рода рассуждений, которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 1. *Пусть $A(t)$ непрерывна на отрезке $[0, t_0]$. Тогда на этом отрезке существует единственное решение задачи*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y, \qquad y(0) = c. \tag{4}$$

Доказательство существования. Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся методом последовательных приближений, принадлежащим Пикару. Этот метод мы часто будем применять в дальнейшем.

Рассмотрим последовательность (векторных) функций, определяемых по индукции следующим образом [1]):

$$\begin{aligned} &y_0 = c, \\ &\frac{dy_1}{dt} = A(t)\,y_0, \qquad y_1(0) = c, \\ &\vdots \\ &\frac{dy_{m+1}}{dt} = A(t)\,y_m, \qquad y_{m+1}(0) = c, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Эти соотношения эквивалентны следующим:

$$\left.\begin{aligned} &y_0 = c, \\ &y_{m+1} = c + \int_0^t A(t_1)\,y_m\,dt_1, \qquad m = 0, 1, 2 \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Мы докажем, что последовательность функций, определенных равенствами (5), сходится равномерно к некоторой функции $y(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Тогда в равенствах (5) мы сможем перейти под знаком интеграла к пределу при $m \to \infty$ и получим

$$y = c + \int_0^t A(t_1)\,y(t_1)\,dt_1. \tag{6}$$

Дифференцирование дает уравнение $dy/dt = A(t)\,y$; из уравнения (6) видно, кроме того, что $y(0) = c$.

Чтобы доказать сходимость последовательности $\{y_m\}$, рассмотрим ряд

$$s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (y_{m+1} - y_m). \tag{7}$$

---

[1]) Мы намеренно, чтобы не иметь дела с верхними индексами, нарушаем здесь наше прежнее соглашение о том, что через y_i обозначаются компоненты y. В данном случае нет опасности смешения.

Его M-я частная сумма $s_M = \sum_{m=0}^{M} (y_{m+1} - y_m)$ имеет простой вид

$$s_M = y_{M+1} - y_0.$$

Таким образом, последовательность $\{y_m\}$ будет сходиться равномерно только в том случае, если ряд (7) сходится равномерно. Но ряд (7) сходится равномерно, если скалярный ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \|y_{m+1} - y_m\|$ сходится равномерно. Из рекуррентного соотношения (5) мы получаем

$$y_{m+1} - y_m = \int_0^t A(t_1)(y_m - y_{m-1})\,dt_1, \qquad m \geqslant 1,$$

и потому

$$\|y_{m+1} - y_m\| \leqslant \int_0^t \|A(t_1)\|\,\|y_m - y_{m-1}\|\,dt_1, \qquad m \geqslant 1. \tag{8}$$

Пусть $c_1 = \max \|A(t)\|$ для $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Тогда из неравенства (8) следует неравенство

$$\|y_{m+1} - y_m\| \leqslant c_1 \int_0^t \|y_m - y_{m-1}\|\,dt_1.$$

Так как

$$\|y_1 - y_0\| \leqslant \int_0^t \|A(t_1)\|\,\|y_0\|\,dt_1 \leqslant c_1 \|c\|\,t,$$

то мы получаем по индукции

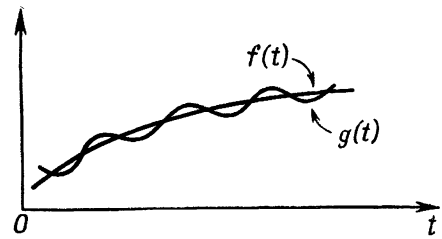
$$\|y_{m+1} - y_m\| \leqslant \|c\| \frac{(c_1 t)^{m+1}}{(m+1)!}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Равномерная сходимость ряда для показательной функции на каждом конечном интервале обеспечивает равномерную сходимость ряда $\sum \|y_{m+1} - y_m\|$, а потому и равномерную сходимость последовательности $\{y_m\}$.

Заметим, что мы не пытались доказать сходимость последовательности $\{dy_m/dt\}$ к dy/dt, а обошли эту трудность, применив интегральное уравнение (6). Это уравнение показывает, что предельная функция дифференцируема (это непосредственно не очевидно) и что ее производная удовлетворяет уравнению (3).

Использование интегральных уравнений для доказательства теорем существования представляет собой обычный прием в теории диффе-

ренциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. Его эффективность связана с тем, что интегрирование, в противоположность дифференцированию, обладает сглаживающим свойством. Это свойство хорошо видно на фиг. 1: если две функции близки друг к другу, то их интегралы также должны мало отличаться один от другого, в то время как их производные могут значительно различаться и даже могут не существовать.



Фиг. 1.

На протяжении дальнейших глав мы каждый раз будем пытаться, если только это возможно, переходить от рассматриваемых дифференциальных уравнений к интегральным. Очень часто и путь к построению решения лежит в переходе к соответствующему интегральному уравнению.

Доказательство единственности. Очень важно доказать единственность решения, так как легко построить уравнения, для которых аналогичная задача имеет несколько решений [1]). Конечно, в этом случае матрица $A(t)$ не может быть непрерывной.

Пусть z — другое решение задачи (4), так что

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\,z, \qquad z(0) = c$$

при $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Интегрирование дает

$$z = c + \int_0^t A(t_1)\,z\,dt_1.$$

Комбинируя это уравнение с уравнением (5), получаем

$$z - y_{m+1} = \int_0^t A(t_1)\,(z - y_m)\,dt_1,$$

и потому

$$\|z - y_{m+1}\| \leqslant \int_0^t \|A(t_1)\|\,\|z - y_m\|\,dt_1.$$

---

[1]) Например, уравнение $dy/dt = y/t$ при начальном условии $y(0) = 0$ имеет бесконечное множество решений вида $y = ct$. Отметим, что это же уравнение при начальном услозии $y(0) = y_0 \neq 0$ не имеет ни одного решения. — *Прим. перев.*

Так как $\|z-y_0\| \leqslant \|z\| + \|y_0\| \leqslant c_2 + \|c\|$, где $c_2 = \max\|z\|$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$, то путем итерирования находим

$$\|z-y_1\| \leqslant (c_2+\|c\|)\, c_1 t,$$

$$\vdots$$

$$\|z-y_{m+1}\| \leqslant (c_2+\|c\|)\frac{(c_1 t)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Устремляя здесь m к ∞, получаем $\|z-y\| \leqslant 0$, откуда $z \equiv y$.

Упражнения

1. Показать, что условие непрерывности матрицы $A(t)$ может быть заменено условием интегрируемости этой матрицы по Риману (при соответствующем обобщении понятия решения).

2. Что будет, если матрица $A(t)$ интегрируема по Риману в несобственном смысле? Существует ли решение? Единственно ли оно? Рассмотрите пример $du/dt = u/2\sqrt{t}$, $u(0)=0$.

3. Показать непосредственно, что последовательность $\{dy_m/dt\}$ равномерно сходится и что ее пределом является производная dy/dt.

4. Матричное уравнение $dY/dt = A(t)\,Y$. Применяя те же методы, что и выше, можно доказать, что начальная задача для матричного уравнения

$$\frac{dZ}{dt} = A(t)\,Z, \qquad Z(0) = C$$

имеет единственное решение на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Подробное проведение доказательства мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

В дальнейшем Y будет обозначать решение задачи

$$\frac{dY}{dt} = A(t)\,Y, \qquad Y(0) = I, \tag{9}$$

где I — единичная матрица.

Упражнение

1. Доказать, что только что введенные матрицы Z, Y и C связаны соотношением $Z = YC$.

Мы будем иногда применять следующий результат:

Теорема 2. *Матрица $Y(t)$ не вырождена на интервале $[0, t_0]$. Более точно, ее определитель*

$$|Y| = \exp\left\{\int_0^t \left[\sum_{i=1}^n a_{ii}(t_1)\right] dt_1\right\}^{1)}. \tag{10}$$

---

[1]) Символом $\exp a$ обозначается степень e^a. — *Прим. перев.*

Величина $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ часто встречается в теории матриц и потому носит специальное наименование — *след* [обозначение: $\operatorname{tr}(A)$].

Доказательство опирается на следующие два факта:

(а) определитель $d|Y|/dt$ равен сумме определителей, каждый из которых получается из определителя $|Y|$ заменой всех элементов одной из строк на их производные;

(б) столбцы Y являются решениями векторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y.$$

Упрощая определители, о которых говорится в (а), при помощи (б), получаем

$$\frac{d}{dt}|Y| = \left(\sum_{i=1} a_{ii}(t)\right)|Y|.$$

Так как $|Y(0)| = 1$, то из последнего равенства следует равенство (10).

Невырожденность матрицы Y будет играть важную роль при решении неоднородного уравнения $dy/dt = A(t)\,y + w$.

Упражнения

2. Доказать, что решением задачи $dy/dt = A(t)\,y$, $y(0) = c$ служит $y = Yc$, где Y — решение задачи (9).

3. Другое доказательство невырожденности матрицы Y. Пусть y_i означает i-й столбец матрицы Y. Если $|Y| = 0$ при $t = t_1$, то существуют скалярные постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не все равные нулю, для которых $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0$ (нулевой вектор) при $t = t_1$. Применяя теорему единственности, покажите, что отсюда следует равенство $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0$ для $0 \leqslant t \leqslant t_0$, что приводит к противоречию при $t = 0$.

4. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — совокупность n решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка $u^{(n)} + a_1(t)\,u^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,u = 0$. Показать, что определитель Вронского

$$w(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

равен $w(0)\exp\left[-\int_0^t a_1(t_1)\,dt_1\right]$.

5. Доказать, что если коэффициенты линейного дифференциального уравнения предыдущего упражнения непрерывны на отрезке $[0, t_0]$, то это уравнение имеет n решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$ с определителем Вронского, не

обращающимся в нуль на этом отрезке. Вывести отсюда, что равенство $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n = 0$ на отрезке $[0, t_0]$ возможно лишь при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ (коэффициенты c_i постоянны), и что любое другое решение на этом отрезке может быть представлено в виде $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$, где c_i — некоторые постоянные.

6. Доказать, что Y^{-1} удовлетворяет уравнению $dZ/dt = -ZA(t)$, называемому *уравнением, сопряженным* с уравнением $dZ/dt = A(t)Z$.

5. Линейное неоднородное уравнение $dy/dt = A(t)y + w$. Рассмотрим теперь начальную задачу для неоднородного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + w(t), \qquad z(0) = c. \tag{11}$$

Пусть y обозначает решение соответствующей однородной задачи

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad y(0) = c,$$

а Y, как и ранее, — решение матричного уравнения

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \qquad Y(0) = I.$$

Чтобы решить задачу (11), применим метод вариации произвольных постоянных Лагранжа. Положим $z = Yu$. Подставив это выражение в уравнение (11), мы получим

$$\frac{dz}{dt} = Y(t)\frac{du}{dt} + \frac{dY}{dt}u = Y(t)\frac{du}{dt} + A(t)Y(t)u = A(t)Y(t)u + w(t).$$

Отсюда

$$Y(t)\frac{du}{dt} = w,$$

т. е.

$$u = c + \int_0^t Y^{-1}(t_1)w(t_1)\,dt_1$$

(так как $c = z(0) = Y(0)u(0) = u(0)$). Это приводит к следующему выражению для z:

$$z = Y(t)c + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(t_1)w(t_1)\,dt_1 = y + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(t_1)w(t_1)\,dt_1.$$

Этот результат достаточно важен для того, чтобы сформулировать его в виде теоремы.

Теорема 3. *Решение задачи* (11) *определяется формулой*

$$z = y + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(t_1)w(t_1)\,dt_1, \tag{12}$$

где y — решение задачи (4), *а Y — решение задачи* (9).

Упражнения

1. Объяснить, почему из нашего доказательства теоремы 3 автоматически следует единственность решения задачи (11).

2. Применить метод вариации произвольных постоянных Лагранжа для решения неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$u^{(n)} + a_1(t)\, u^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, u = f(t):$$

(а) при помощи перехода к неоднородной системе;

(б) непосредственно, положив $u = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, u_k(t)$, где $\{u_k(t)\}$ является семейством решений однородного уравнения с отличным от нуля определителем Вронского, а функции $a_k(t)$ неизвестны.

3. Доказать непосредственно, что вектор z, данный формулой (12), является решением задачи (11).

6. Уравнение с постоянными коэффициентами. Обратимся теперь к особо важному случаю, когда A представляет собой постоянную матрицу; тогда задача (4) записывается в виде

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \qquad y(0) = c. \tag{13}$$

Мы покажем, что это уравнение может быть решено явно, с помощью показательных функций и многочленов. Для этого найдем сначала некоторые общие свойства решения задачи

$$\frac{dY}{dt} = AY, \qquad Y(0) = I. \tag{14}$$

Так как через Y выражается решение задачи (13): $y = Yc$, то Y играет важную роль в нашей теории. Это представление очень ясно показывает зависимость решения от начального условия.

По аналогии со скалярным уравнением $u' = au$ хотелось бы получить решение уравнения (14) в виде $Y = e^{At}$. Чтобы придать смысл этой формуле, введем матричный ряд

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m t^m}{m!},$$

где $A^0 = I$; этот ряд определяет матричную функцию Y. Так как $\|A^m\| \leqslant \|A\|^m$, $m = 1, 2, \ldots$, то каждый из n^2 рядов (n — порядок A), получающихся в правой части, мажорируется сходящимся рядом $\sum_{m=0}^{\infty} \|A\|^m t^m / m!$. Следовательно, эти ряды сходятся равномерно на каждом конечном интервале и сумма является непрерывной функцией t для всех конечных t. Так как ряд, получающийся в результате дифференцирования, сходится равномерно, то

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m t^{m-1}}{(m-1)!} = Ae^{At}.$$

Ясно, что $e^{At}=I$ при $t=0$. На основании теоремы единственности заключаем, что $Y(t)\equiv e^{At}$. Точно так же, как из ряда для e^t мы выводим скалярное функциональное уравнение $e^{s+t}=e^s e^t$, так из ряда, представляющего e^{At}, мы получаем

$$e^{At}e^{As}=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m t^m}{m!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m s^m}{m!}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}A^m\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{t^k s^{m-k}}{k!\,(m-k)!}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}A^m\frac{(s+t)^m}{m!}=e^{A(s+t)}.$$

Здесь перестановка порядка слагаемых основана на абсолютной сходимости кратных рядов [1]).

Приводимый ниже вывод полученного функционального уравнения для e^{At}, опирающийся на теорему единственности, значительно прозрачнее. Рассмотрим две матрицы $Y(t)\,Y(s)$ и $Y(s+t)$, где s фиксировано, а t меняется. Обе они являются решениями задачи

$$\frac{dZ}{dt}=AZ,\qquad Z(0)=Y(s),$$

так как A есть постоянная матрица. Из теоремы единственности сразу получаем требуемое функциональное уравнение

$$Y(t+s)=Y(t)\,Y(s). \tag{15}$$

Упражнения

1. Доказать, что если $Y(t+s)=Y(t)\,Y(s)$ для всех s и t и притом $Y(t)$ непрерывна на некотором интервале, то $dY/dt=AY$, где A — постоянная матрица (Полиа).

2. Доказать, что $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$ для всех t тогда и только тогда, если $AB=BA$.

3. Доказать, что $|e^{At}|=e^{t\,\mathrm{tr}(A)}$, и потому матрица e^{At} не может вырождаться.

4. Доказать, что $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$.

5. Доказать, что если $A=T^{-1}BT$, то $e^A=T^{-1}e^B T$.

Функциональное уравнение (15) позволяет упростить формулу (12) следующим образом:

Теорема 4. *Если матрица A постоянна, то решение задачи*

$$\frac{dz}{dt}=Az+w,\qquad z(0)=c$$

---

[1]) Легко проверить, что основные теоремы о рядах (об умножении, дифференцировании рядов и т. д.) автоматически переносятся на векторные и матричные ряды. — *Прим. перев.*

дается формулой

$$z = y + \int_0^t Y(t - t_1)\, w(t_1)\, dt_1,$$

где y — *решение задачи* $dy/dt = Ay$, $y(0) = c$, *а* Y — *решение задачи* $dY/dt = AY$, $Y(0) = I$.

7. Поведение решений уравнения $dy/dt = Ay$ при $t \to \infty$. Установив общие свойства матрицы $Y(t)$, мы перейдем теперь к исследованию отдельных ее элементов, чтобы определить поведение $Y(t)$ при $t \to \infty$. Заметим раз навсегда, что запись $t \to \infty$ означает $t \to +\infty$.

Подражая методу, применяемому для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка, положим $y = e^{\lambda t}c$, где λ — скалярная постоянная, а c — постоянный вектор, который мы будем считать нетривиальным, т. е. неравным 0 (нулевому вектору). Подставив это выражение для y в уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

получим

$$\lambda e^{\lambda t} c = A e^{\lambda t} c,$$

или

$$\lambda c = Ac.$$

Это векторное уравнение равносильно системе из n линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=}^{n} a_{ij} c_j = \lambda c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Для того чтобы эта система уравнений имела нетривиальное решение $\{c_i\}$, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось уравнение

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое можно проще записать в виде

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* матрицы A, а его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, вообще говоря, комплексные, называются *характеристическими числами* матрицы A.

Упражнения

1. Доказать, что матрицы A и $T^{-1}AT$ имеют одно и то же характеристическое уравнение.

2. Доказать, что след $\operatorname{tr}(A)$ равен сумме характеристических чисел матрицы A.

В ближайших нескольких пунктах мы будем предполагать для простоты, что характеристические числа матрицы A различны. Это предположение позволяет установить главные результаты очень просто и изящно. Впоследствии мы покажем, как можно в большинстве приложений ограничиться рассмотрением только этого простого случая. В дальнейших пунктах мы скажем несколько слов о результатах, соответствующих кратным характеристическим числам.

Чтобы найти компоненты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вектора c, отвечающего данному характеристическому числу λ_i, возьмем алгебраические дополнения элементов какой-либо из строк определителя $|A-\lambda_i I|$. Взяв, например, алгебраические дополнения элементов первой строки, мы получим возможные значения для $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_i & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_i & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda_i \end{vmatrix},$$

$$c_2 = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda_i & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda_i \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = \pm\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda_i & \cdots & a_{2,\,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,\,n-1} \end{vmatrix}.$$

Если окажется, что все эти алгебраические дополнения равны нулю, то надо испытать алгебраические дополнения другой строки. При этом в конце концов мы достигнем цели, так как алгебраическое дополнение по крайней мере одного элемента $a_{jj}-\lambda_i$, стоящего на главной диагонали, должно быть отличным от нуля. Это легко следует из правила дифференцирования определителя.

Действительно,

$$f'(\lambda) = -[\text{алг. доп. } (a_{11} - \lambda)] - [\text{алг. доп. } (a_{22} - \lambda)] - \\ - \ldots - [\text{алг. доп. } (a_{nn} - \lambda)].$$

Если бы все эти алгебраические дополнения обратились в нуль для некоторого λ_i, то λ_i было бы корнем уравнения $f'(\lambda) = 0$, т. е. кратным корнем уравнения $f(\lambda) = 0$, вопреки сделанному выше упрощающему предположению.

Заметим для дальнейшего, что компоненты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вектора c, который мы будем называть *собственным вектором* матрицы A, всегда можно выбрать в виде многочленов от характеристических чисел, как указано выше.

Пусть $c^{(i)}$ — собственный вектор, отвечающий характеристическому числу λ_i. Мы докажем вскоре, что этот вектор, с точностью до скалярного сомножителя, определяется однозначно. Каждому характеристическому числу λ_i соответствует по крайней мере одно решение $y_i = e^{\lambda_i t} c^{(i)}$ нашего дифференциального уравнения $dy/dt = Ay$. Докажем теперь, что эти n решений, соответствующие n различным значениям λ_i, линейно независимы на любом интервале. Для этого допустим, что имеет место соотношение

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0, \tag{17}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — скалярные постоянные, а 0 — нулевой вектор. Дифференцируя k раз, получаем

$$a_1 \lambda_1^k e^{\lambda_1 t} c^{(1)} + \ldots + a_n \lambda_n^k e^{\lambda_n t} c^{(n)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Рассматривая только первые компоненты $c^{(i)}$, мы получаем n уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k e^{\lambda_i t} c_1^{(i)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Чтобы не все из n величин $a_i c_1^{(i)}$ равнялись нулю, необходимо, чтобы был равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}.$$

Это, однако, невозможно, так как указанный определитель равен $[\exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) t]\, v(\lambda)$, где $v(\lambda)$ есть определитель Вандермонда для $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, отличный от нуля по нашему предположению о различии λ_i. Отсюда получаем, что $a_i c_1^{(i)} = 0$ для каждого i. Если

$a_i \neq 0$, то $c_1^{(i)} = 0$. Рассматривая подобным образом другие компоненты $c^{(i)}$, мы приходим к заключению, что если $a_i \neq 0$, то $c^{(i)}$ должен быть нулевым вектором. Но этого не может быть, так как собственный вектор $c^{(i)}$ по построению нетривиален; значит, все $a_i = 0$, что и означает линейную независимость решений y_i.

Решение матричного уравнения $dZ/dt = AZ$ можно теперь получить, образуя матрицу Z со столбцами, представляющими собой векторы y_i. То, что матрица Z невырожденная, следует из доказанной выше линейной независимости. Это не видно непосредственно, но получается из следующих соображений, уже применявшихся ранее. Если $|Z| = 0$ при $t = t_1$, то при $t = t_1$ должно иметь место соотношение вида $a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n = 0$, где 0 есть опять нулевой вектор, а скалярные величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не все равны нулю. Так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть решения векторного уравнения $dy/dt = Ay$, то и линейная комбинация $a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n$ этих решений также является решением. Но она равна 0 при $t = t_1$ и потому, в силу теоремы единственности, должна быть тождественно равной 0. Согласно предыдущему, мы получаем, что все a_i равны нулю, а это противоречит сказанному выше. Итак, $|Z| \neq 0$.

Так как $Z(t)Z^{-1}(0)$ является решением задачи $dY/dt = AY$, $Y(0) = I$, то $Y(t) = Z(t)Z^{-1}(0)$. Отметим, насколько полезной оказалась теорема единственности для вывода тождеств, связывающих решения.

Последнее соотношение очень ясно показывает структуру матрицы $Y(t)$ и тем самым структуру каждого решения уравнения $dy/dt = Ay$ в предположении различия характеристических чисел. Если матрица A имеет кратные характеристические числа, то структура общего решения может быть более сложной, коэффициентами здесь будут многочлены от t.

Упражнения

3. В предположении различия характеристических чисел матрицы A вывести необходимое и достаточное условие того, чтобы все решения уравнения $dy/dt = Ay$ стремились к нулю при $t \to \infty$.

4. Решить уравнение $t\,dy/dt = Ay$, где матрица A постоянна.

8. Другой метод. В предыдущем пункте мы показали, что решения y_i линейно независимы. Покажем сейчас, что собственные векторы $c^{(i)}$ линейно независимы. Это является непосредственным следствием предыдущего результата о независимости решений y_i, так как соотношение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c^{(i)} = 0 \tag{18}$$

эквивалентно равенству $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$ при $t = 0$. Этот факт можно также доказать, умножая повторно равенство (18) на A и пользуясь тем, что

$Ac^{(i)} = \lambda_i c^{(i)}$. Таким образом мы получим соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k c^{(i)} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и дальнейшие рассуждения проводятся, как ранее.

Упражнения

1. Показать, что каждое решение уравнения $dy/dt = Ay$ является линейной комбинацией n решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

2. Применяя полученный результат, показать, что при нашем предположении различия характеристических чисел каждому λ_i соответствует, с точностью до постоянного множителя, только один собственный вектор. Вывести это же утверждение из того, что ранг матрицы $A - \lambda_i I$ равен $n - 1$.

Рассмотрим матрицу T, столбцами которой служат векторы $c^{(i)}$. Линейная независимость векторов $c^{(i)}$ эквивалентна тому, что $|T| \neq 0$. Так как $Ac^{(i)} = \lambda_i c^{(i)}$, то

$$AT = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрица такого типа, как в правой части, называется *диагональной*. Последний результат достаточно важен, чтобы сформулировать его в качестве теоремы:

Теорема 5. *Если характеристические числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* A *различны, то существует матрица* T *такая, что*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

При этом элементы матрицы T *можно выбрать в виде многочленов от* λ_i.

Вот непосредственное приложение этого результата. В задаче

$$\frac{dY}{dt} = AY, \qquad Y(0) = I$$

положим $Y = TZ$, где T — матрица, введенная выше. Тогда

$$\frac{dZ}{dt} = T^{-1}ATZ, \quad Z(0) = T^{-1},$$

или

$$\frac{dZ}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Z, \; Z(0) = T^{-1}.$$

Решением этого уравнения будет, очевидно, матрица

$$Z = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1},$$

так что матрица Y выразится в виде

$$Y = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{19}$$

Упражнение

3. Вывести равенство (19) при помощи соотношения $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n t^n / n!$

9. Жорданова каноническая форма для матриц с кратными характеристическими числами. В предыдущих пунктах мы показали, как можно привести к диагональной форме матрицу с различными характеристическими числами. Если матрица имеет кратные характеристические числа, то такое приведение, вообще говоря, невозможно. Например, легко показать, что не существует матрицы T такой, что

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако имеется изящная каноническая форма, полученная Жорданом для произвольной матрицы, имеющей или не имеющей кратных

характеристических чисел. Положим

$$L_k(\lambda)=\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}}_{k}.$$

Если $k=1$, мы будем называть эту матрицу простой клеткой.

Результат Жордана состоит в том, что существует матрица T, для которой

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} L_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $k_1+k_2+\dots+k_r=n$, а λ_i не обязательно различны. Например, три возможных типа матриц третьего порядка с характеристическим числом кратности 3 таковы:

$$A_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Мы не будем доказывать этот классический результат, так как, согласно сказанному выше, в наших задачах мы сможем ограничиться случаем, когда A имеет различные характеристические числа.

Упражнения

1. Определить вид матрицы e^{At} для произвольной матрицы A. На основании этого показать, что если матрица A имеет характеристические числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, то для матрицы e^A этими числами служат e^{λ_1}, e^{λ_2}, ..., e^{λ_n}.

2. Применить этот результат для получения необходимого и достаточного условия того, чтобы $e^{At}\to 0$ при $t\to\infty$. Доказать, что если $e^{At}\to 0$ при $t\to\infty$, то существуют числа $a>0$ и $c>0$, для которых $\|e^{At}\|\leqslant ce^{-at}$ при $0\leqslant t<\infty$.

3. Рассматривая решение уравнения $dy/dt=Ay$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, доказать, что матрица A не может быть приведена к диагональному виду.

4. Таким же образом доказать, что матрицы A_1, A_2 и A_3 различны в том смысле, что не существует матрицы T, для которой $T^{-1}A_iT=A_j$ при каких-либо $i\neq j$.

5. Доказать, что матрица $L_k(\lambda)-\lambda I$, возведенная в k-ю степень, дает нулевую матрицу (здесь I — единичная матрица k-го порядка).

6. Если матрица A имеет различные характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то мы можем написать n решений уравнения $dy/dt = Ay$ в виде $y = c(\lambda)\, e^{\lambda t}$, где $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Если λ и μ—два различных характеристических числа A, то

$$\frac{c(\lambda)\, e^{\lambda t} - c(\mu)\, e^{\mu t}}{\lambda - \mu} = z$$

также является решением уравнения $dy/dt = Ay$. Верно ли, что если λ — кратное характеристическое число, то $\lim\limits_{\mu \to \lambda} z = \partial (c(\lambda)\, e^{\lambda t})/\partial \lambda = c'(\lambda)\, e^{\lambda t} + c(\lambda)\, t e^{\lambda t}$ также является решением уравнения $dy/dt = Ay$? Обобщить эту теорему.

10. Другая общая теорема о диагонализации. В предыдущем пункте мы говорили о жордановой канонической форме матрицы и о приложении этой формы к представлению общего решения линейного дифференциального уравнения $dy/dt = Ay$. Мы видели, что матрица с кратными характеристическими числами может иметь сложную каноническую форму. Установим сейчас справедливость одного полезного утверждения, которое сравнительно просто доказывается и которое вносит некоторый порядок в этот хаос.

Теорема 6. *Существует матрица T, для которой*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

У матрицы в правой части этой формулы все элементы ниже главной диагонали равны нулю. Матрицу такого вида мы будем называть треугольной [1]).

Доказательство проводится по индукции. Рассмотрим сначала матрицы 2-го порядка. Пусть λ_1 — характеристическое число матрицы A и $c^{(1)}$ — соответствующий собственный вектор. Пусть T — матрица с первым столбцом $c^{(1)}$, второй столбец которой выбран так, чтобы она была невырожденной. Тогда

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix},$$

что легче всего получить из равенства $T^{-1}AT = T^{-1}(AT)$. Далее, элемент b_{22} должен равняться λ_2, так как матрица $T^{-1}AT$ имеет те же характеристические числа, что и A.

---

[1]) Отметим, что если матрица A вещественная и имеет вещественные характеристические числа, то, как видно из доказательства, и матрицу T можно считать вещественной. То же замечание, используемое в дальнейшем, относится к приведению матрицы к диагональному и нормальному жорданову виду. — *Прим. перев.*

Покажем теперь, что, пользуясь нашим утверждением для матриц n-го порядка, можно установить его для матриц порядка $n+1$. Пусть $c^{(1)}$ — собственный вектор, соответствующий λ_1, и пусть n других векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}$ выбраны так, что матрица T_1 со столбцами $c^{(1)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}$ — невырожденная. Тогда на основе равенства $T^{-1}AT = T^{-1}(AT)$ получим

$$T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b'_{12} & \ldots & b'_{1,\,n+1} \\ 0 & b'_{22} & \ldots & b'_{2,\,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b'_{n+1,\,2} & \ldots & b'_{n+1,\,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b'_{12} & \ldots & b'_{1,\,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где B_n — матрица n-го порядка.

Так как характеристическое уравнение правой части имеет вид

$$(\lambda_1 - \lambda)\,|B_n - \lambda I| = 0,$$

то характеристическими числами матрицы B_n будут $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n+1}$ — остальные n характеристических чисел матрицы A. По индуктивному предположению мы знаем, что существует невырожденная матрица T_n, для которой

$$T_n^{-1}B_nT_n = \begin{pmatrix} \lambda_2 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть T_{n+1} — матрица $(n+1)$-го порядка, образованная следующим образом:

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Она, очевидно, невырожденная. При этом

$$T_{n+1}^{-1}(T_1^{-1}AT_1)\,T_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1,\,n+1} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & b_{2,\,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Так как $C^{-1}(B^{-1}AB)\,C = (BC)^{-1}A\,(BC)$, то $T = T_1T_{n+1}$ является искомой матрицей $(n+1)$-го порядка. Этим доказательство заканчи-

вается. Заметим опять, что элементы матрицы T могут быть выбраны в виде многочленов от характеристических чисел [1]).

Упражнения

1. Если матрица A имеет k простых корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то существует матрица T, для которой

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & b_{1,\,k+1} & \ldots & b_{1,\,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & b_{2,\,k+1} & \ldots & b_{2,\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & b_{k,\,k+1} & \ldots & b_{k,\,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{k+1} & \ldots & b_{k+1,\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2. Определяется ли матрица T в теореме 6 однозначно?

11. Замечание к предыдущему пункту. Мы будем далее пользоваться таким замечанием к теореме 6:

Замечание. *Матрицу T можно выбрать так, чтобы сумма $\sum_{i,j} |b_{ij}|$ была меньше любой наперед заданной положительной постоянной δ.*

На первый взгляд, это кажется противоречащим тому, что не каждая матрица с кратными характеристическими числами может быть преобразована к диагональному виду. Однако дело в том, что матрица T зависит от δ. Если мы попробуем выбирать последовательность T, для которой δ стремится к нулю, то полученная последовательность либо будет приближаться к вырожденной матрице, либо не будет иметь предела.

Пусть T_1 — матрица, которая приводит матрицу A к треугольному виду, о котором говорится в теореме 6. Замена переменных $y = T_1 z$ переводит уравнение $dy/dt = Ay$ в систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + b_{12} z_2 + \ldots + b_{1n} z_n, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \qquad\quad \lambda_2 z_2 + \ldots + b_{2n} z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_n}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n z_n. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

---

[1]) См. примечание 1 в конце книги. — *Прим. перев.*

Теперь легко видеть, как нужно выбрать T, чтобы удовлетворить условию нашего замечания. Положим $z_n = \varepsilon^n z'_n$, $z_{n-1} = \varepsilon^{n-1} z'_{n-1}$, ..., $z_1 = \varepsilon z'_1$ ($\varepsilon > 0$). Новая система будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{dz'_1}{dt} &= \lambda_1 z'_1 + \varepsilon b_{12} z'_2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} b_{1n} z'_n, \\
\frac{dz'_2}{dt} &= \qquad\qquad \lambda_2 z'_2 + \ldots + \varepsilon^{n-2} b_{2n} z'_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dz'_n}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n z'_n.
\end{aligned}$$

Выбирая ε, мы можем сделать сумму абсолютных величин наддиагональных коэффициентов произвольно малой. Но последнее преобразование эквивалентно $z = Ez'$, где матрица E невырожденная. Поэтому матрица $T = T_1 E$ является искомой [1]).

12. Приложение полученного результата. Последний результат можно применить для получения общего решения уравнения $dy/dt = Ay$, что было сделано ранее на основе недоказанной теоремы о возможности приведения матриц к жордановой канонической форме. Пусть T — матрица, приводящая A к треугольному виду; положим $y = Tz$. Тогда для z получится уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} z.$$

Для компонент вектора z получается система (22) предыдущего пункта. Из нее можно найти все z_i по одному, начиная с z_n; мы видим, что если все λ_i различны, то каждая компонента z_i является линейной комбинацией показательных функций. Если же имеются кратные корни, то при показательных функциях могут стоять в качестве коэффициентов многочлены от t. Например, в случае, когда λ_{n-1} равно λ_n, решение системы

$$\frac{dz_{n-1}}{dt} = \lambda_{n-1} z_{n-1} + b_{n-1,n} z_n, \qquad \frac{dz_n}{dt} = \lambda_n z_n$$

---

[1]) Этот результат можно получить без применения дифференциальных уравнений, прямо полагая $T = T_1 E$, где E — диагональная матрица с элементами на диагонали $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ ($\varepsilon > 0$, ε достаточно малое), так как если $B = (b_{ik})$, то $E^{-1}BE = (\varepsilon^{k-i} b_{ik})$. Заметим также, что аналогичный результат имеет место также для варианта теоремы 6, приведенного в примечании 1 в конце книги. — *Прим. перев.*

дает выражения вида $z_n = c_1 e^{\lambda_n t}$, $z_{n-1} = (c_2 + c_3 t) e^{\lambda_n t}$, если $b_{n-1,n} \neq 0$. Вообще, характеристическое число кратности k порождает в решении слагаемые вида $P_{k-1}(t) e^{\lambda_i t}$, где $P_{k-1}(t)$ — многочлен не выше $(k-1)$-й степени.

Отсюда следует важный результат:

Теорема 7. *Для того чтобы все решения уравнения*

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

стремились к нулю при $t \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех характеристических чисел матрицы A были отрицательными.

Упражнения

1. Показать, что условие неположительности вещественных частей характеристических чисел недостаточно для того, чтобы гарантировать, что все решения уравнения $dy/dt = Ay$ ограничены при $t \to \infty$. Какое нужно дополнительное условие?

2. Доказать, что если все решения уравнения $dy/dt = Ay$ стремятся к 0 при $t \to \infty$, то существует такое постоянное $a > 0$, что для любого решения y при некотором $c > 0$ будет $\|y(t)\| \leqslant ce^{-at}$, $0 \leqslant t < \infty$. При этом в качестве a можно принять любое число, меньшее $\min |\operatorname{Re} \lambda_i|$[1]).

13. Теорема об аппроксимации. Следующая теорема иногда дает возможность обойти случай матриц с кратными характеристическими числами:

Теорема 8. *Если дана матрица A, то для любого положительного ε можно найти матрицу B с различными характеристическими корнями, для которой $\|A - B\| \leqslant \varepsilon$.*

При этом если матрица A вещественная, то и матрицу B можно считать вещественной.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A + E$, где $E = (e_{ij})$, а e_{ij} — независимые вещественные переменные. Если $A + E$ имеет кратное характеристическое число, то функции $f(\lambda) = |A + E - \lambda I|$ и $f'(\lambda)$ имеют общий корень. Но тогда результант $R(E)$ этих двух многочленов должен равняться нулю. Докажем, что можно найти произвольно малые значения e_{ij}, для которых $R(E) \neq 0$. Действительно, если это не так, то $R(E)$, как многочлен от e_{ij}, должен тождественно равняться нулю. Но это невозможно, так как для значений $e_{ij} = -a_{ij}$, $i \neq j$, и $e_{ii} = i - a_{ii}$ матрица $A + E$ не имеет кратных характеристических чисел. Поэтому $R(E) \not\equiv 0$.

Следовательно, мы можем найти такие элементы e_{ij}, для которых сумма $\sum_{i,j} |e_{ij}|$ произвольно мала, причем матрица $A + E = B$ имеет различные характеристические числа.

---

[1]) Это упражнение добавлено при переводе. — *Прим. перев.*

Упражнения

1. Применяя последний результат и теорему о диагонализации, найти все непрерывные решения функционального уравнения $f(AB) = f(A) f(B)$, где f — скалярная функция матрицы A.

2. Доказать теорему 8 при помощи замечания п. 11.

14. Диагонализация переменных матриц. В гл. II, посвященной асимптотическому поведению решений линейных уравнений вида

$$\frac{dy}{dt} = (A + B(t))\, y,$$

где A — постоянная матрица, а $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$, нам придется приводить к диагональному виду матрицу $A + B(t)$. Если характеристические числа матрицы A различны, то представляется правдоподобным, что для достаточно больших значений t характеристические числа матрицы $A + B(t)$ также различны.

Для того чтобы доказать это, равно как и некоторые другие необходимые утверждения о зависимости характеристических чисел матрицы $A + B(t)$ от t, мы воспользуемся некоторыми результатами теории функций комплексной переменной. Конечно, наши утверждения можно доказать, не используя этот специальный аналитический аппарат. Однако приводимые ниже рассуждения представляются одновременно настолько естественными, изящными и поучительными, что было бы чистым ханжеством уклоняться от них.

Пусть $f(\lambda, t)$ — характеристический многочлен матрицы $A + B(t)$:

$$f(\lambda, t) = |A + B(t) - \lambda I|,$$

а $f(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A, $f(\lambda) = f(\lambda, \infty)$. Если характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны, то мы можем построить в комплексной плоскости λ такие окружности c_j с центрами λ_j, которые попарно не имеют общих внутренних точек. Как известно из теории функций комплексного переменного, число корней уравнения $f(\lambda, t) = 0$ внутри каждой окружности c_j определяется формулой

$$N_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \frac{\partial f(\lambda, t)/\partial\lambda}{f(\lambda, t)}\, d\lambda$$

(принцип аргумента). Но у нас $f(\lambda, t) = f(\lambda) + g(\lambda, t)$, где при $t \to \infty$ $g(\lambda, t) \to 0$ равномерно на каждой окружности c_j. Поэтому для $t \geqslant t_0$ функция $f(\lambda, t)$ не имеет корней на c_j. Но так как

$$f_\lambda(\lambda, t) = f'(\lambda) + g_\lambda,$$

то

$$N_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \left[\frac{f'(\lambda) + g_\lambda}{f(\lambda) + g}\right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \frac{f(\lambda) g_\lambda - f'(\lambda) g}{f(\lambda) f(\lambda, t)} d\lambda.$$

Так как величина $|f(\lambda) f(\lambda, t)|$ равномерно ограничена снизу на окружности c_j положительной постоянной и так как g и g_λ стремятся к нулю при $t \to \infty$, то для $t \geqslant t_0$

$$N_j(t) = 1 + o(1)\,^{1)}.$$

Так как $N_j(t)$ есть целое число, то из этого равенства следует, что $N_j(t) = 1$ для $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$. Это доказывает различие характеристических чисел матрицы $A + B(t)$ для больших значений t.

Установим теперь некоторые дальнейшие свойства характеристических чисел $\lambda_j(t)$ матрицы $A + B(t)$. Для $t \geqslant t_1$ имеем

$$\lambda_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \frac{\lambda\,[\partial f(\lambda, t)/\partial\lambda]}{f(\lambda, t)} d\lambda.$$

Из этого представления чисел λ_j мы видим, что если матрица $B(t)$ непрерывна для $t \geqslant t_1$, то и функции $\lambda_j(t)$ непрерывны при $t \geqslant t_1$ и $\lambda_j(t) \to \lambda_j$ при $t \to \infty$. Если же матрица $B(t)$ непрерывно дифференцируемая или кусочно гладкая, то этим же свойством обладают и $\lambda_i(t)$, причем дифференцирование по t можно производить под знаком интеграла.

Наконец, если попрежнему $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, кроме того, $\int^{\infty} \|dB/dt\|\, dt < \infty$, то

$$\int^{\infty} \left|\frac{d\lambda_i(t)}{dt}\right| dt < \infty.$$

Это легко следует из того, что коэффициентами при различных степенях λ в многочлене $f(\lambda, t)$ служат многочлены от элементов матрицы $B(t)$.

Для дальнейших ссылок мы сформулируем последние результаты в виде следующей теоремы:

---

[1]) Напомним, что для переменной (или постоянной) в некотором процессе величины x под $o(x)$ (соответственно $O(x)$) понимается любая величина вида yx, где y стремится к нулю (соответственно ограничена) в этом процессе. — *Прим. перев.*

Теорема 9. *Если $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и если характеристические числа матрицы A различны, то для $t \geqslant t_1$ характеристические числа $\lambda_i(t)$ матрицы $A + B(t)$ также различны и стремятся к характеристическим числам матрицы A при $t \to \infty$. Если, кроме того, $\int^{\infty} \|dB/dt\| dt < \infty$, то и $\int^{\infty} |d\lambda_i(t)/dt| dt < \infty$.*

Заметим еще, что, как видно из доказательства, если $B(t)$ является аналитической функцией от $1/t$, то и все $\lambda_i(t)$ являются аналитическими функциями от $1/t$.

При помощи теоремы 9 можно вывести следующую важную теорему:

Теорема 10. *Пусть*

(а) *характеристические числа матрицы A различны;*

(б) $B(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$;

(в) $\int^{\infty} \|dB/dt\| dt < \infty$.

Тогда существует матрица $T(t)$ такая, что замена переменного $y = Tz$ переводит уравнение

$$\frac{dy}{dt} = (A + B(t))\, y \tag{23}$$

в уравнение

$$\frac{dz}{dt} = (L(t) + C(t))\, z,$$

где

$$L(t) = T^{-1}(t)\,[A + B(t)]\,T(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(t) \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\int^{\infty} \|C(t)\| dt < \infty,$$

а матрица $T(t)$ обладает свойствами: $T(t) \to T_0$ при $t \to \infty$, $|T_0| \neq 0$ и

$$\int^{\infty} \left\| \frac{dT}{dt} \right\| dt < \infty.$$

Доказательство. Так как матрица A имеет различные характеристические числа, то, как указано выше, этим же свойством обладает и матрица $A + B(t)$ при $t \geqslant t_1$. Это дает возможность найти матрицу $T(t)$, приводящую $A + B(t)$ к диагональному виду для достаточно больших значений t. Далее, мы знаем, что в качестве элементов матрицы $T(t)$ можно выбрать многочлены от $\lambda_i(t)$. Так

как $\lambda_i(t) \to \lambda_i$ при $t \to \infty$, то матрицу $T(t)$ можно выбрать так, чтобы она стремилась к невырожденной матрице T. Наши предположения о $B(t)$ показывают, что для каждого элемента t_{ij} матрицы $T(t)$ будет выполняться неравенство $\int^{\infty} |dt_{ij}/dt|\, dt < \infty$ [1]). Подстановка $y = Tz$ переводит уравнение (23) в уравнение

$$\frac{dz}{dt} = T^{-1}(t)\,[A + B(t)]\,T(t)\,z - T^{-1}(t)\frac{dT(t)}{dt}\,z.$$

Так как матрица $T^{-1}(t)$ равномерно ограничена для $t \geqslant t_1$, то

$$\int^{\infty} \left\| T^{-1}(t)\frac{dT(t)}{dt} \right\| dt \leqslant c_1 \int^{\infty} \left\| \frac{dT(t)}{dt} \right\| dt < \infty.$$

Этим доказательство теоремы завершается.

15. Линейные системы с периодическими коэффициентами. В этом пункте мы будем рассматривать уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = P(t)\,y,$$

где $P(t)$ — периодическая матрица, т. е. $P(t+\tau) = P(t)$, причем τ — отличная от нуля вещественная постоянная.

Хотя это уравнение нельзя решить явно, как для случая постоянной матрицы P, однако для общего решения можно найти представление, которое иногда оказывается полезным.

Теорема 11. *Решение матричного уравнения*

$$\frac{dY}{dt} = P(t)\,Y, \quad Y(0) = I,$$

где матрица $P(t)$ периодична с периодом τ и непрерывна для всех t, можно представить в виде

$$Y = Q(t)\,e^{Bt},$$

где B — постоянная матрица, а $Q(t)$ имеет период τ.

Доказательство. Если Y имеет указанный вид, то

$$Y(t+\tau) = Q(t)\,e^{Bt}e^{B\tau} = Y(t)\,e^{B\tau};$$

в силу теоремы 2 матрица $Y(t)$ не вырождена, и можно написать $Y^{-1}(t)\,Y(t+\tau) = e^{B\tau}$. Так как $Y(t+\tau)$, как одно из решений уравнения $dY/dt = P(t)\,Y$, равно $Y(t)\,C$, где C — постоянная матрица, то

---

[1]) Здесь используется тот простой факт, что если $\int^{\infty} |du/dt|\, dt < \infty$ и $\int^{\infty} |dv/dt|\, dt < \infty$, то и $\int^{\infty} |d(uv)/dt|\, dt < \infty$. — *Прим. перев.*

имеем равенство $C = e^{B\tau}$. Для того чтобы существовала матрица B, удовлетворяющая этому равенству, необходимо, чтобы матрица C была невырожденной. Это условие выполняется, так как $C = Y^{-1}(t) \times \times Y(t+\tau)$. Мы сейчас покажем, что это условие является и достаточным.

Лемма. *Если матрица C невырожденная, то существует матрица B такая, что $e^B = C$.*

Доказательство. Если мы воспользуемся жордановой нормальной формой, то доказательство оказывается совсем простым. Если C имеет жорданову форму

$$C = T \begin{pmatrix} L_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} T^{-1},$$

то достаточно показать, что каждая матрица $L_k(\lambda)$ имеет логарифм, так как если B_i есть логарифм матрицы $L_{k_i}(\lambda_i)$, то

$$B = T \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix} T^{-1}$$

является логарифмом C.

Мы применим указанное в упражнении 5 п. 9 свойство, заключающееся в том, что

$$(L_k(\lambda) - \lambda I)^k = 0, \tag{24}$$

т. е. что $(L_k(\lambda) - \lambda I)^k$ есть нулевая матрица. Из этого следует, что формальный логарифм

$$B = \ln L_k(\lambda) = \ln(\lambda I + L_k(\lambda) - \lambda I) =$$
$$= I \ln \lambda + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\lambda^m} (L_k(\lambda) - \lambda I)^m =$$
$$= I \ln \lambda + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(-1)^{m+1}}{m\lambda^m} (L_k(\lambda) - \lambda I)^m$$

существует и, как можно убедиться непосредственно, пользуясь полученной формулой и применяя равенство (24), действительно является логарифмом.

Когда матрица B определена так, что $Y^{-1}(t)\,Y(t+\tau) = C = e^{B\tau}$, то Q определяется соотношением $Q = Y(t)\,e^{-Bt}$. Легко видеть, что Q — периодическая матрица с периодом τ.

Ввиду того что мы не доказывали возможности приведения к жордановой нормальной форме, так как это длинно и утомительно, то приведем независимое доказательство нашей леммы.

Мы применим доказанный выше результат, состоящий в том, что любую квадратную матрицу A можно привести к треугольному виду; другими словами, что существует матрица T, для которой

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots \\ & \lambda_2 & \cdots \\ & & \cdot \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T$$

(элементы, стоящие под главной диагональю, равны нулю). Если кратных характеристических чисел нет, то эту треугольную матрицу можно считать диагональной, а ясно, что любая невырожденная диагональная матрица имеет логарифм. Следовательно, только наличие кратных характеристических чисел вызывает затруднение. Впредь мы будем считать, что матрица A треугольная.

Мы проведем доказательство, пользуясь методом математической индукции. Лемма, очевидно, верна для матриц первого порядка. Предположим, что она справедлива для матриц n-го порядка при $n = 1, 2, \ldots, N$, и покажем, что она верна и для матриц $(N+1)$-го порядка. Запишем матрицу A_{N+1} в виде

$$A_{N+1} = \begin{pmatrix} A_N & a_N \\ 0 & \lambda_{N+1} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где

$$A_N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots \\ & \lambda_2 & \cdots \\ & & \cdot \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

В формуле (25) a_N обозначает N-мерный столбцевой вектор, а 0—N-мерный строчной вектор с нулевыми элементами.

Пусть B_N — логарифм A_N (существование B_N следует из предположения индукции); положим

$$B_{N+1} = \begin{pmatrix} B_N & x \\ 0 & l \end{pmatrix},$$

где 0 имеет тот же смысл, что и выше, $l = \ln \lambda_{N+1}$, а x — неизвестный N-мерный столбцевой вектор.

Осталось показать, что x можно выбрать так, что $e^{B_{N+1}} = A_{N+1}$. Применяя метод индукции, нетрудно убедиться в том, что

$$B_{N+1}^k = \begin{pmatrix} B_N^k & (B_N^{k-1} + lB_N^{k-2} + \ldots + l^{k-1}I)\,x \\ 0 & l^k \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда

$$e^{B_{N+1}} = \begin{pmatrix} e^{B_N} & \sum\limits_{k=0}^{\infty} (B_N^{k-1} + lB_N^{k-2} + \ldots + l^{k-1}I)\,x/k! \\ 0 & \lambda_{N+1} \end{pmatrix}.$$

При этом первые два члена полученной суммы равны 0 и x. Если l не является характеристическим числом матрицы B_N, то

$$C(l) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_N^{k-1} + lB_N^{k-2} + \ldots + l^{k-1}I}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B_N^k - l^kI)(B_N - lI)^{-1}}{k!} = (e^{B_N} - e^lI)(B_N - lI)^{-1}.$$

Отсюда

$$|C(l)| = \frac{|e^{B_N} - e^lI|}{|B_N - lI|} = \prod_{k=1}^{N} \frac{e^{r_k} - e^l}{r_k - l}, \tag{26}$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_N$ — характеристические числа матрицы B_N. Из определения матрицы $C(l)$ мы видим, что $C(l)$, а потому и $|C(l)|$ являются непрерывными функциями l. Но правая часть равенства (26) также непрерывна, если мы доопределим $(e^{r_k} - e^l)/(r_k - l)$ естественным образом при $l = r_k$. Следовательно, равенство (26), доказанное в предположении $l \neq r_k$, справедливо для всех l. Отсюда следует, что матрица $C(l)$ невырожденная. Значит, мы можем определить x так, чтобы $C(l)\,x = a_N$; для этого надо положить $x = C(l)^{-1}\,a_N$.

В заключение заметим, что если характеристические корни A_N положительны, то матрица B_N вещественна [1]).

Упражнение

Найти представление решения уравнения $u'' + p(t)\,u = 0$, где $p(t + 2\pi) = p(t)$.

---

[1]) Ср. примечание на стр. 30. — *Прим. перев.*

ЛИТЕРАТУРА[1])

Общая теория матриц изложена, например, в книгах:

1. Wedderburn J. H. M., Lectures on matrices, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, v. 17 (1934).

2*. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., 1953.

По поводу приложений теории матриц к дифференциальным уравнениям см.

3. Bellman R., A survey of the theory of the boundedness, stability, and asymptotic behavior of solutions of linear and non-linear differential and difference equations, Washington, 1949.

4. Lefschetz S., Lectures on differential equations, Princeton, 1946.

Содержание п. 14 взято из статьи

5. Cesari L., Un nuovo criterio di stabilita per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari, Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 2, **9** (1940), 163—186.

См. также

6*. Diliberto S. P., On systems of ordinary differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., **54**, No 7 (1948), 664—665.

---

[1]) Звездочкой отмечены источники, добавленные при переводе. — *Прим. перев.*

Глава II

УСТОЙЧИВОСТЬ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Введение. В этой главе мы рассмотрим поведение решений дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dt} = (A + B(t))\, z, \tag{1}$$

где A — постоянная матрица, а матрица $B(t)$ в том или ином смысле мала при $t \to \infty$. Двумя важными частными случаями этого последнего условия являются случаи, когда $\|B(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ или $\int^{\infty} \|B(t)\|\, dt < \infty$. К уравнению типа (1) можно свести линейные уравнения n-го порядка вида

$$\frac{d^n u}{dt^n} + (a_1 + p_1(t)) \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + (a_n + p_n(t))\, u = 0, \tag{2}$$

где $p_j(t)$ малы при $t \to \infty$, и, в частности, уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (a + p(t))\, u = 0. \tag{3}$$

Для решений уравнения (3) благодаря его специальному виду может быть получено значительно больше утверждений, чем для решения уравнений (2) или (1). Поэтому далее, в гл. VI, мы проведем более полное исследование уравнения (3), а в этой главе рассмотрим только свойства, общие для систем всех порядков.

Интуитивно представляется естественным ожидать, что решения уравнения (1) имеют много общих свойств с решениями уравнения

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{4}$$

поскольку рассматривается поведение решений при $t \to \infty$. Это предположение в значительной степени подтверждается многими из результатов, которые будут получены ниже. Однако мы покажем также на соответствующих примерах, что поведение решений уравнения (1) является значительно более сложным, чем это кажется сначала.

Возникает вопрос о том, в каком смысле можно считать матрицу $B(t)$ „малой“ при $t \to \infty$. Первым и простейшим определением является такое: матрица $B(t)$ мала, если $\|B(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Это условие влечет за собой много интересных следствий. Однако иногда мы будем вводить другие условия, а именно:

$$\int^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$$

или

$$\int^{\infty} \left\| \frac{dB(t)}{dt} \right\| dt < \infty.$$

Мы видим, что в основном наш вопрос сводится к введению подходящей метрики в пространство переменных матриц. Если мы примем такую точку зрения, то станет ясным, что такое же различение целесообразно и при исследовании поведения решений уравнения (1) при $t \to \infty$. Мы будем рассматривать в разных случаях функционалы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|z\|,$$

или

$$\lim_{t\to\infty} \|z\|,$$

или, если эти пределы бесконечны,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln\|z\|}{t},$$

или, наконец, иногда

$$\int^{\infty} \|z\|^2 dt.$$

Каждый из этих функционалов играет важную роль в изучении свойств решений уравнения (1) для больших значений t.

Смысл сказанного выше состоит в том, что при сравнении решений уравнения (1) с решением уравнения (4) мы должны условиться о допустимом классе возмущающих матриц $B(t)$ и об интересующем нас свойстве решения. Можно предполагать, и так будет на самом деле, что некоторые свойства решений сохраняются для одного класса возмущений и не сохраняются для другого.

Эти предварительные замечания приводят к строгому определению понятия устойчивости для линейных уравнений.

Определение. Пусть все решения уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{5}$$

обладают некоторым свойством P. Будем говорить, что имеет место *устойчивость* по отношению к этому свойству при возмущениях B определенного вида, если этим свойством обладают также все решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = (A(t) + B(t))z. \tag{6}$$

В противном случае будем говорить, что имеет место неустойчивость относительно этого свойства P и вида возмущений B.

Чтобы проиллюстрировать это понятие, рассмотрим два простых дифференциальных уравнения:

$$\frac{du}{dt} = -au, \qquad \frac{dv}{dt} = (-a + b(t))\,v,$$

где $a > 0$ и $b(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Нетривиальные решения обоих уравнений обладают следующими свойствами:

(а) u и v ограничены,

(б) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln u}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln v}{t} = -a.$

Если же $a = 0$, а $b(t) = 1/t$, то свойство (б) сохраняется, а свойство (а) не имеет места. Следовательно, здесь мы будем иметь устойчивость относительно свойства (б) и неустойчивость относительно свойства ограниченности. Если мы заменим $1/t$ на интегрируемую в интервале (t_0, ∞) функцию, то ограниченность будет сохраняться.

Свойство ограниченности представляет собой, вероятно, наиболее важное свойство решений. Если решение ограничено, то для нас важно знать, стремится ли оно к нулю при $t \to \infty$ и, вообще, какие значения оно принимает при $t \to \infty$. Если решение не ограничено, то можно исследовать отношение $(\ln\|y\|)/t$ или другую меру неограниченности.

2. Почти постоянные коэффициенты. Назовем матрицу коэффициентов $A(t)$ дифференциального уравнения $dz/dt = A(t)\,z$ *почти постоянной*, если

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = A,$$

где A есть постоянная матрица. Наши первые результаты будут связаны с ограниченностью решений уравнений этого типа.

Теорема 1. *Если все решения уравнения*

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{4}$$

где A — постоянная матрица, ограничены, то этим же свойством обладают решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = (A + B(t))\,z, \tag{1}$$

если $\int^{\infty} \|B(t)\|\,dt < \infty.$

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dz}{dt} = Az + B(t)\,z. \tag{7}$$

Принимая $B(t)z$ за неоднородный член, мы видим, применяя теорему 4 гл. I, что каждое решение уравнения (7) удовлетворяет линейному интегральному уравнению[1])

$$z = y + \int_0^t Y(t-t_1)B(t_1)z(t_1)\,dt_1, \tag{8}$$

где y — решение уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию $y(0)=z(0)$, а Y — решение начальной задачи $Y(0)=I$ для матричного уравнения $dY/dt = AY$. Заметим, что $y = Yy(0) = Yz(0)$. Пусть $c_1 = \max(\sup_{t\geqslant 0}\|y\|,\ \sup_{t\geqslant 0}\|Y\|)$. Тогда из уравнения (8) получим

$$\|z\| \leqslant \|y\| + \int_0^t \|Y(t-t_1)\|\,\|B(t_1)\|\,\|z(t_1)\|\,dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_1 + c_1 \int_0^t \|B(t_1)\|\,\|z(t_1)\|\,dt_1. \tag{9}$$

Сейчас мы применим следующую лемму, имеющую настолько важное значение в этой книге, что мы назовем ее *основной леммой*.

Лемма 1. *Если $u(t)$, $v(t) \geqslant 0$, а c_1 — положительная постоянная и если для $t \geqslant 0$*

$$u \leqslant c_1 + \int_0^t uv\,dt_1, \tag{10}$$

то для $t \geqslant 0$

$$u \leqslant c_1 \exp\left(\int_0^t v\,dt_1\right). \tag{11}$$

Доказательство. Из неравенства (10) получаем

$$\frac{uv}{c_1 + \int_0^t uv\,dt_1} \leqslant v.$$

Проинтегрировав обе части этого неравенства от 0 до t, мы получим неравенство

$$\ln\left(c_1 + \int_0^t uv\,dt_1\right) - \ln c_1 \leqslant \int_0^t v\,dt_1$$

---

[1]) Если $B(t)$ определена только при $t \geqslant t_0 > 0$, то для применения формулы (8) надо сначала произвести замену аргумента $t' = t - t_0$. В дальнейшем мы не будем делать подобных оговорок. — *Прим. перев.*

или неравенство

$$u \leqslant c_1 + \int_0^t uv\,dt_1 \leqslant c_1 \exp\left(\int_0^t v\,dt_1\right).$$

Лемма справедлива и при $c_1 = 0$, что легко показать при помощи предельного перехода $c_1 \to 0$.

Упражнение

1. Показать, что оценка (11) как следствие неравенства (10) в общем случае не может быть улучшена.

Применяя лемму 1 к неравенству (9), получаем

$$\|z\| \leqslant c_1 \exp\left(c_1 \int_0^t \|B\|\,dt_1\right) \leqslant c_1 \exp\left(c_1 \int_0^\infty \|B\|\,dt_1\right).$$

Так как, по предположению, $\int^\infty \|B\|\,dt_1 < \infty$, то мы видим, что норма $\|z\|$ ограничена.

Тем же методом может быть доказана

Теорема 2. *Если все решения уравнения* (4) *стремятся к нулю при* $t \to \infty$, *то этим же свойством обладают и решения уравнения* (1), *если* $\|B(t)\| \leqslant c_1$ *для* $t \geqslant 0$, *где постоянная* c_1 *зависит только от* A.

Доказательство. Как и раньше, имеем

$$z = y + \int_0^t Y(t - t_1)\,B(t_1)\,z(t_1)\,dt_1. \tag{8}$$

Из явного представления решений уравнения $dy/dt = Ay$ следует, что если $\|Y\| \to 0$ при $t \to \infty$, то существует положительная постоянная a, для которой $\|y\| \leqslant c_2 e^{-at}$ и $\|Y(t)\| \leqslant c_3 e^{-at}$ при $t \geqslant 0$ [1]). Отсюда

$$\|z\| \leqslant c_2 e^{-at} + c_3 \int_0^t e^{-a(t-t_1)} \|B(t_1)\|\,\|z(t_1)\|\,dt_1$$

или

$$\|z\| e^{at} \leqslant c_2 + c_1 c_3 \int_0^t e^{at_1} \|z(t_1)\|\,dt_1.$$

Применяя основную лемму, имеем

$$\|z\| e^{at} \leqslant c_2 e^{c_1 c_3 t}.$$

---

[1]) См. упражнение 2 к п. 12 гл. I. — *Прим. перев.*

Если $c_1c_3 < a$, то отсюда следует, что $\|z\| \to 0$ при $t \to \infty$. Так как постоянные c_3 и a зависят только от A, то ясно, что и c_1 зависит только от A.

Упражнения

2. Рассмотреть неоднородное уравнение $dz/dt = Az + w$, где A — постоянная матрица, а $w = w(t) \to w_0$ (w_0 — постоянный вектор) при $t \to \infty$. Исследовать ограниченность решений при различных предположениях:

(а) все решения уравнения $dy/dt = Ay$ стремятся к нулю при $t \to \infty$;

(б) все решения уравнения $dy/dt = Ay$ не ограничены;

(в) матрица A имеет k характеристических чисел с отрицательной вещественной частью.

3. Какое условие на $w(t)$ гарантирует ограниченность всех решений уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = w(t)$$

при $t \to \infty$? Достаточно ли, чтобы $w(t) \to w_0$ при $t \to \infty$?

3. Почти постоянные коэффициенты (продолжение). Мы можем улучшить теорему 1 следующим образом:

Теорема 3. *Рассмотрим уравнение*

$$\frac{dz}{dt} = (A + B(t) + C(t))\,z, \tag{12}$$

где

(а) *A — постоянная матрица, все характеристические числа которой имеют неположительную вещественную часть, причем характеристические числа с нулевой вещественной частью простые;*

(б) $B(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, $\int^{\infty} \|dB/dt\|\,dt < \infty$;

(в) $\int^{\infty} \|C(t)\|\,dt < \infty$;

(г) *характеристические числа матрицы $A + B(t)$ имеют неположительную вещественную часть для $t \geqslant t_0$.*

При всех этих условиях все решения уравнения (12) *ограничены при $t \to \infty$* [1].

Доказательство. Обозначим простые характеристические числа матрицы A с нулевой вещественной частью через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Тогда, как было указано в упражнении 1 п. 10 гл. I, существует матрица T, для которой

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & d_{k,k+1} & \ldots & d_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \lambda_k & d_{k,k+1} & \ldots & d_{kn} \\ & & & \lambda_{k+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{13}$$

[1]) См. примечание 2 в конце книги. — *Прим. перев.*

Это обозначение указывает на то, что матрица k-го порядка, стоящая в левом верхнем углу, диагональная и что все элементы под главной диагональю равны нулю. Как обычно, элементы матрицы T выбираются в виде многочленов от элементов и характеристических чисел матрицы A.

Обратим теперь внимание на матрицу $A+B(t)$, характеристические числа которой мы обозначим $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$. Пусть $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t), \ldots, \lambda_k(t)$ — характеристические числа матрицы $A+B(t)$, стремящиеся к $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и являющиеся, как мы знаем, простыми для достаточно большого t. Вещественные части остальных характеристических чисел $\lambda_{k+1}(t), \ldots, \lambda_n(t)$ для достаточно больших t не превосходят отрицательной постоянной.

Пусть $T(t)$ — матрица, соответствующая построенной выше матрице T и образованная так, что матрица $T^{-1}(t)[A+B(t)]T(t)$ имеет вид, аналогичный (13), причем $\lambda_i(t) \to \lambda_i$. Тогда $T(t) \to T$ при $t \to \infty$, и потому матрица $T^{-1}(t)$ наверное равномерно ограничена при $t \to \infty$. Далее, предположение $\int^{\infty} \|dB/dt\| dt < \infty$ влечет за собой неравенство $\int^{\infty} \|dT/dt\| dt < \infty$. Оба эти факта важны для дальнейшего.

Если теперь в уравнении (12) сделаем подстановку $z = T(t)w$, то получим

$$\frac{dw}{dt} = T^{-1}(A+B(t))Tw + \left(T^{-1}CT - T^{-1}\frac{dT}{dt}\right)w. \tag{14}$$

Из предположения о матрице C и из сформулированных выше свойств матрицы T следует, что матрица $T^{-1}CT - T^{-1}dT/dt$, которую мы обозначим через R, абсолютно интегрируема:

$$\int^{\infty} \|R\| dt = \int^{\infty} \|T^{-1}CT - T^{-1}dT/dt\| dt < \infty.$$

Записав уравнение (14) в компонентах, получим

$$\frac{dw_i}{dt} = \lambda_i(t)w_i + \sum_{j=k+1}^{n} d_{ij}(t)w_j + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t)w_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{15}$$

$$\frac{dw_i}{dt} = \lambda_i(t)w_i + \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij}(t)w_j + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t)w_j, \quad i = k+1, \ldots, n, \tag{16}$$

где $d_{ij}(t) \to d_{ij}$ (d_{ij} — постоянное) при $t \to \infty$ и $\int^{\infty} |r_{ij}(t)| dt < \infty$.

Заметим, что различие между уравнениями (15) и (16) состоит только в нижних пределах сумм $\sum d_{ij}w_j$; это различие определяется видом матрицы (13).

Исследуем теперь решение уравнений (16). Обратившись сначала к случаю $i=n$, мы найдем, что для некоторого c_n

$$w_n = c_n \exp\left[\int_0^t \lambda_n(t_1)\,dt_1\right] + \\ + \int_0^t \exp\left[\int_{t_1}^t \lambda_n(s)\,ds\right]\left(\sum_{j=1}^n r_{nj}(t_1)\,w_j(t_1)\right)dt_1.$$

Так как вещественные части величин $\lambda_i(t)$ при $i=k+1, \ldots, n$ равномерно отрицательны для достаточно больших значений t, то для некоторых положительных постоянных a, b_1, b_2, при $t \geqslant 0$, мы будем иметь неравенство

$$|w_n| \leqslant b_1 e^{-at} + b_2 \int_0^t e^{-a(t-t_1)} \|R\|\,\|w\|\,dt_1. \tag{17}$$

Рассматривая случай $i=n-1$, получаем интегральное уравнение

$$w_{n-1} = c_{n-1} \exp\left[\int_0^t \lambda_{n-1}(t_1)\,dt_1\right] + \\ + \int_0^t \exp\left[\int_{t_1}^t \lambda_{n-1}(s)\,ds\right] d_{n-1,\,n}(t_1)\,w_n(t_1)\,dt_1 + \\ + \int_0^t \exp\left[\int_{t_1}^t \lambda_{n-1}(s)\,ds\right]\left(\sum_{j=1}^n r_{n-1,\,j}(t_1)\,w_j(t_1)\right)dt_1.$$

Оно приводит к неравенству

$$|w_{n-1}| \leqslant b_3 e^{-at} + b_4 \int_0^t e^{-a(t-t_1)} |d_{n-1,\,n}(t_1)|\,|w_n(t_1)|\,dt_1 + \\ + b_4 \int_0^t e^{-a(t-t_1)} \|R\|\,\|w\|\,dt_1.$$

Применяя неравенство (17), получаем

$$|w_{n-1}| \leqslant b_3 e^{-at} + b_4 \int_0^t e^{-a(t-t_1)} \|R\|\,\|w\|\,dt_1 + \\ + c_{n+1} b_4 \int_0^t e^{-a(t-t_1)} \left[b_1 e^{-at_1} + b_2 \int_0^{t_1} e^{-a(t_1-t_2)} \|R\|\,\|w\|\,dt_2\right] dt_1;$$

при этом мы использовали то, что $|d_{n-1,\,n}(t_1)| \leqslant c_{n+1}$. Первый член во втором интеграле равен $c_{n+1}b_4b_1te^{-at}$. Второй член равен

$$c_{n+1}b_4b_2\int_0^t e^{-a(t-t_1)}\left(\int_0^{t_1} e^{-a(t_1-t_2)}\|R\|\,\|w\|\,dt_2\right)dt_1 =$$

$$= c_{n+1}b_4b_2e^{-at}\int_0^t\left(\int_0^{t_1} e^{at_2}\|R\|\,\|w\|\,dt_2\right)dt_1.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$c_{n+1}b_4b_2\int_0^t (t-t_1)\,e^{-a(t-t_1)}\|R\|\,\|w\|\,dt_1.$$

Так как $te^{-at} \leqslant b_5e^{-a_1t}$ для $t \geqslant 0$, если $0 < a_1 < a$, а b_5 подобрано соответственным образом, то

$$|w_{n-1}| \leqslant b_6e^{-a_1t} + b_7\int_0^t e^{-a_1(t-t_1)}\|R\|\,\|w\|\,dt_1.$$

Так как $a_1 < a$, то этому же неравенству удовлетворяет и $|w_n|$, если в случае необходимости увеличить постоянные b_6 и b_7.

Продолжая таким же образом шаг за шагом, мы найдем, что существуют положительные постоянные b_8, b_9 и a_2, для которых

$$|w_i| \leqslant b_8e^{-a_2t} + b_9\int_0^t e^{-a_2(t-t_1)}\|R\|\,\|w\|\,dt_1 \tag{18}$$

при $k+1 \leqslant i \leqslant n$.

Переходя к уравнениям (15), мы получим при $1 \leqslant i \leqslant k$

$$w_i = c_i\exp\left[\int_0^t \lambda_i(t_1)\,dt_1\right] +$$

$$+\int_0^t \exp\left[\int_{t_1}^t \lambda_i(s)\,ds\right]\left(\sum_{j=k+1}^n d_{ij}(t_1)\,w_j\right)dt_1 +$$

$$+\int_0^t \exp\left[\int_{t_1}^t \lambda_i(s)\,ds\right]\left(\sum_{j=1}^n r_{ij}(t_1)\,w_j\right)dt_1.$$

Так как вещественные части величин $\lambda_i(t)$ не положительны, то для $i = 1, 2, \ldots, k$ имеем

$$|w_i| \leqslant |c_i| + c_1'\int_0^t\left(\sum_{j=k+1}^n |w_j|\right)dt_1 + \int_0^t \|R\|\,\|w\|\,dt_1. \tag{19}$$

Из неравенства (18) получим

$$\sum_{j=k+1}^{n} |w_j| \leqslant c_2' e^{-a_2 t} + c_3' \int_0^t e^{-a_2(t-t_1)} \|R\| \, \|w\| \, dt_1.$$

Меняя порядок интегрирования, а затем обозначение переменной интегрирования, находим

$$\int_0^t \left(\int_0^{t_1} e^{-a_2(t_1-t_2)} \|R\| \|w\| \, dt_2 \right) dt_1 =$$

$$= -\frac{1}{a_2} \int_0^t e^{-a_2(t-t_1)} \|R\| \, \|w\| \, dt_1 + \frac{1}{a_2} \int_0^t \|R\| \, \|w\| \, dt_1,$$

откуда и из неравенства (19) следует окончательно

$$|w_i| \leqslant c_4' + c_5' \int_0^t \|R\| \, \|w\| \, dt_1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Комбинируя это неравенство с неравенством (18), получаем

$$\|w\| \leqslant c_6' + c_7' \int_0^t \|R\| \, \|w\| \, dt_1.$$

Так как в силу предположений $\int^{\infty} \|R\| \, dt < \infty$, то отсюда с помощью основной леммы вытекает, что $\|w\|$ ограничена.

Упражнения

1. Применяя жорданову нормальную форму, показать, что предположение о простоте характеристических чисел с равной нулю вещественной частью может быть заменено на предположение о том, что этим числам соответствуют простые клетки.

2. Для каких значений c_1, c_2 и c_3 все решения уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{c_1}{t}\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{c_2}{t} + \frac{c_3}{t^2}\right) u = 0$$

ограничены?

4. Уравнения с периодическими коэффициентами. Рассмотрим теперь уравнения вида

$$\frac{dz}{dt} = (A(t) + B(t))\, z, \tag{6}$$

где матрица $A(t)$ периодическая, а матрица $B(t)$ мала при $t \to \infty$. То, что свойства устойчивости, выведенные для случая постоянной

матрицы A, переносятся и на этот случай, является следствием канонического представления решений невозмущенного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y, \tag{5}$$

о котором говорит теорема 11 гл. I; из этой теоремы следует, что матричное решение задачи

$$\frac{dY}{dt} = A(t)\,Y, \qquad Y(0) = I$$

имеет вид

$$Y(t) = P(t)\,e^{Ct},$$

где $P(t)$ имеет тот же период, что и $A(t)$, а C — постоянная матрица.

С помощью этого представления может быть легко доказана

Теорема 4. *Если все решения уравнения* (5) *ограничены, то в предположениях, что*

(а) *матрица* $A(t)$ *периодическая,*

(б) $\int^{\infty} \|B\|\,dt < \infty$,

все решения уравнения (6) *также ограничены.*

Если в тех же предположениях все решения уравнения (5) *стремятся к нулю при* $t \to \infty$, *то это же имеет место и для всех решений уравнения* (6).

Доказательство. Если все решения уравнения (5) ограничены, то и норма $\|e^{Ct}\|$ ограничена при $t \to \infty$; если же все решения этого уравнения стремятся к нулю, то и $\|e^{Ct}\|$ стремится к нулю и притом со скоростью показательной функции, т. е. $\|e^{Ct}\| \leqslant c_1 e^{-at}$, где $a > 0$. Это вытекает из того, что $|Y(t)| \neq 0$; отсюда $|P(t)| \neq 0$ и, следовательно, $e^{Ct} = P^{-1}(t)\,Y(t)$. Так как

$$z = y + \int_0^t Y(t)\,Y^{-1}(t_1)\,B(t_1)\,z(t_1)\,dt_1 =$$

$$= y + \int_0^t P(t)\,e^{C(t-t_1)}P^{-1}(t_1)B(t_1)\,z(t_1)\,dt_1,$$

то имеем

$$\|z\| \leqslant \|y\| + \int_0^t \|P(t)\|\,\|e^{C(t-t_1)}\|\,\|P^{-1}(t_1)\|\,\|B(t_1)\|\,\|z(t_1)\|\,dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_2 + c_3 \int_0^t \|B(t_1)\|\,\|z(t_1)\|\,dt_1, \tag{20}$$

откуда, как и ранее, следует ограниченность. Вторая часть утверждения также выводится аналогично предыдущему [1]).

5. Уравнения с переменными коэффициентами общего вида. Мы уже знаем, что ограниченность решений уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y \tag{5}$$

вместе с условием $\|B(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ недостаточна для того чтобы гарантировать ограниченность всех решений уравнения

$$\frac{dz}{dt} = (A(t) + B(t))\,z \tag{6}$$

(ср. пример п. 1). На основании изложенного выше мы могли бы ожидать, что ограниченность будет иметь место, если заменить условие $\|B(t)\| \to 0$ на условие $\int^{\infty} \|B(t)\|\,dt < \infty$. Покажем, однако, на примере, что такая общая теорема несправедлива.

Теорема 5. *Существует уравнение вида* (5), *все решения которого стремятся к нулю при* $t \to \infty$, *и матрица* $B(t)$, *удовлетворяющая условиям* $\|B(t)\| \to 0$ *и* $\int^{\infty} \|B(t)\|\,dt < \infty$, *такие, что уравнение* (6) *обладает неограниченными решениями.*

Доказательство. Рассмотрим при $0 < t_0 \leqslant t < \infty$ систему уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (\sin \ln t + \cos \ln t - 2a)\,y_2,$$

общее решение которой имеет вид

$$y_1 = c_1 e^{-at},$$

$$y_2 = c_2 e^{t \sin \ln t - 2at}.$$

---

[1]) Так как $\|e^{Ct}\| \leqslant c_1 e^{-at}$, то и $\|y\| \leqslant c_4 e^{-at}$; неравенство (20) заменяется неравенством

$$\|z\| \leqslant c_4 e^{-at} + c_5 \int_0^t e^{-a(t-t_1)} \|B(t_1)\|\,\|z(t_1)\|\,dt_1,$$

откуда

$$\|z\|\,e^{at} \leqslant c_4 + c_5 \int_0^t \|B(t_1)\|\,\|z(t_1)\|\,e^{at_1}\,dt_1 \qquad (t \geqslant 0),$$

и наше утверждение следует из основной леммы. — *Прим. перев.*

Если $a > 1/2$, то все решения стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если в качестве возмущающей матрицы выбрать матрицу

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-at} & 0 \end{pmatrix},$$

то возмущенная система уравнений будет иметь вид

$$\frac{dz_1}{dt} = -az_1,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = (\sin \ln t + \cos \ln t - 2a)\, z_2 + z_1 e^{-at}. \tag{21}$$

Решение этой системы таково:

$$z_1 = c_1 e^{-at},$$

$$z_2 = e^{t \sin \ln t - 2at}\left(c_2 + c_1 \int_0^t e^{-t_1 \sin \ln t_1}\, dt_1\right).$$

Положим $t = e^{(2n+1/2)\pi}$. Так как

$$\int_0^t e^{-t_1 \sin \ln t_1}\, dt_1 > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-2\pi/3}} e^{-t_1 \sin \ln t_1}\, dt_1 > t\,(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}) \exp\left(\frac{e^{-\pi} t}{2}\right),$$

то мы видим, что если

$$1 < 2a < 1 + e^{-\pi}/2,$$

то решения системы (21) ограничены только в том случае, если $c_1 = 0$. Это условие выполняется только для тех решений, для которых $z_1(t_0) = 0$.

Постараемся теперь спасти положение дел, дополняя условия теоремы. Оказывается, справедлива

Теорема 6. *Если все решения уравнения* (5) *ограничены, то и все решения уравнения* (6) *ограничены, если имеют место условия*

$$\text{(а)} \qquad \int^{\infty} \|B(t)\|\, dt < \infty;$$

$$\text{(б)} \qquad \varliminf_{t \to \infty} \int^t \operatorname{tr}(A)\, dt_1 > -\infty;$$

условие (б), *в частности, выполняется, если*

$$\text{(б}'\text{)} \qquad \operatorname{tr}(A) = 0.$$

Условие (б′) применимо к важному уравнению

$$u'' + a(t)u = 0$$

— оно эквивалентно двумерной системе, удовлетворяющей этому условию.

Доказательство. Выражая z через y, имеем

$$z = y + \int_0^t Y(t) Y^{-1}(t_1) B(t_1) z(t_1) dt_1,$$

откуда

$$\|z\| \leqslant \|y\| + \int_0^t \|Y(t)\| \|Y^{-1}(t_1)\| \|B(t_1)\| \|z(t_1)\| dt_1. \qquad (22)$$

Так как в силу теоремы 2 гл. I

$$\det Y = \exp\left[\int_0^t \operatorname{tr}(A) dt_1\right],$$

то, если условие (б) выполнено, матрица $\|Y^{-1}(t)\|$ ограничена при $t \to \infty$. Поэтому из неравенства (22) получаем

$$\|z\| \leqslant c_1 + c_2 \int_0^t \|B(t_1)\| \|z(t_1)\| dt_1$$

и ограниченность решений уравнения (6) следует из основной леммы.

6. Почти постоянные коэффициенты: асимптотическое поведение. Возвратимся теперь к уравнению вида

$$\frac{dz}{dt} = (A + B(t))z, \qquad (1)$$

где $\|B(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, и исследуем поведение $\|z\|$ при $t \to \infty$. Простейшим и, вероятно, наиболее интересным случаем является тот, когда матрица A имеет простые характеристические числа. Случаю кратных характеристических чисел соответствуют результаты, более сложно формулируемые и доказываемые. Поэтому мы удовлетворимся следующим предложением:

Теорема 7. *Если уравнение* (1) *удовлетворяет условиям*:

(а) A — *постоянная матрица с простыми характеристическими числами*;

(б) $\|B\| \to 0$ *при* $t \to \infty$,

то каждому характеристическому числу λ_k соответствует решение $z^{(k)}$, удовлетворяющее неравенствам

$$c_2 \exp\left[\operatorname{Re}(\lambda_k)\, t - d_2 \int_{t_0}^{t} \|B\|\, dt\right] \leqslant \|z^{(k)}\| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \exp\left[\operatorname{Re}(\lambda_k)\, t + d_1 \int_{t_0}^{t} \|B\|\, dt\right] \qquad (23)$$

для $t \geqslant t_0$, где c_1, c_2, d_1 и d_2 — положительные постоянные. При этом система решений $z^{(k)}$ линейно независима.

В частности,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|z^{(k)}\|}{t} = \operatorname{Re}(\lambda_k). \qquad (24)$$

Доказательство. Пусть C — постоянная матрица, приводящая матрицу A к диагональному виду, т. е. пусть $C^{-1}AC = L$, где матрица L диагональная. Подстановка $z \to Cz$ преобразует уравнение (1) в уравнение того же вида, но в котором матрица A будет уже диагональной, а новая матрица $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому мы будем считать это преобразование уже выполненным, так как ясно, что если новое уравнение обладает решениями, имеющими нужные свойства, то и исходное уравнение обладает решениями указанного типа.

Некоторое осложнение возникает из-за того, что хотя числа λ_k различны, но их вещественные части могут совпадать. Пусть λ_k — характеристическое число, для которого $\ldots \operatorname{Re}(\lambda_{k-1}) \leqslant \operatorname{Re}(\lambda_k) < \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) \leqslant \operatorname{Re}(\lambda_{k+2}) \ldots$, а y_k — столбцевой вектор с компонентами $0, 0, \ldots, e^{\lambda_k t}, 0, \ldots, 0$, где $e^{\lambda_k t}$ стоит на k-м месте. Каждое решение уравнения (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$z = y + \int_{t_0}^{t} Y(t - t_1)\, B(t_1)\, z(t_1)\, dt_1, \qquad (25)$$

где, как обычно, $Y(t) = \exp At$ (t_0 будет выбрано ниже), и обратно, каждое решение уравнения (25) является решением дифференциального уравнения (1). Чтобы получить решение уравнения (25), удовлетворяющее соотношению (24), мы должны как-то исключить члены, содержащие $e^{\lambda_l t}$ при $l > k$ (этого, конечно, не требуется при $k = n$). Это мы сделаем следующим образом. Разложим матрицу Y

на сумму $Y = Y_1 + Y_2$, где

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e^{\lambda_k t} & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & 0 & \\ & & & e^{\lambda_{k+1} t} & & & \\ & & & & e^{\lambda_{k+2} t} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

При таком разложении уравнение (25) приобретает вид

$$z = y + \int_{t_0}^{t} Y_1(t - t_1) B(t_1) z(t_1)\, dt_1 + \int_{t_0}^{t} Y_2(t - t_1) B(t_1) z(t_1)\, dt_1. \quad (26)$$

Здесь нежелательные члены объединены во втором интеграле. Чтобы их исключить, мы воспользуемся тем, что для каждого фиксированного t_1 вектор $Y_2(t - t_1) B(t_1) z(t_1)$ является решением уравнения $dy/dt = Ay$, а потому и интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} Y_2(t - t_1) B(t_1) z(t_1)\, dt_1 \quad (27)$$

в случае его сходимости [1]) является решением этого уравнения. Отсюда, изменяя выбор решений y уравнения $dy/dt = Ay$, мы можем переписать уравнение (26) в виде

$$z = y + \int_{t_0}^{t} Y_1(t - t_1) B(t_1) z(t_1)\, dt_1 - \int_{t}^{\infty} Y_2(t - t_1) B(t_1) z(t_1)\, dt_1. \quad (28)$$

---

[1]) Конечно, речь идет о равномерной сходимости указанного интеграла на каждом конечном интервале изменения $t \geqslant t_0$. Тогда и интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{d}{dt} Y_2(t - t_1) B(t_1) z(t_1)\, dt_1$$

Конечно, существование решения уравнения (28) не очевидно. Чтобы получить это решение, мы обратимся к помощи метода последовательных приближений. Мы покажем, что при подходящем выборе y существует решение уравнения (28), удовлетворяющее второму из неравенств (23), причем для этого решения интеграл (27) сходится, т. е. уравнение (26), а с ним и уравнение (1) удовлетворяется. Чтобы удовлетворить первому неравенству, потребуются иные соображения.

Примем y равным вектору y_k, определенному выше, и положим

$$z_0 = y_k,$$

$$z_{m+1} = y_k + \int_{t_0}^{t} Y_1(t-t_1) B(t_1) z_m(t_1)\, dt_1 - \int_{t}^{\infty} Y_2(t-t_1) B(t_1) z_m(t_1)\, dt_1. \tag{29}$$

Покажем сначала по индукции, что при $t \geqslant t_0$

$$\|z_m\| \leqslant c_1 \exp\left[\operatorname{Re}(\lambda_k)\, t + d_1 \int_{t_0}^{t} \|B\|\, dt\right] \tag{30}$$

для соответственно выбранных постоянных $c_1 \geqslant 1$, $d_1 > 0$ и t_0.

Это ясно при $m = 0$. Предположим, что неравенство (30) имеет место для некоторого m, и выведем отсюда его справедливость для $m+1$. Имеем

$$\|z_{m+1}\| \leqslant \|y_k\| + \int_{t_0}^{t} \|Y_1(t-t_1)\|\, \|B(t_1)\|\, \|z_m\|\, dt_1 +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} \|Y_2(t-t_1)\|\, \|B(t_1)\|\, \|z_m\|\, dt_1. \tag{31}$$

сходится равномерно, так как он равен

$$\int_{t_0}^{\infty} AY_2(t-t_1)\, Bz\, dt_1 = A \int_{t_0}^{\infty} Y_2(t-t_1)\, Bz\, dt_1.$$

Значит, по известной теореме анализа, справедливой и для векторных функций, дифференцирование под знаком интеграла (27) возможно и уравнение $dy/dt = Ay$ удовлетворяется. — *Прим. перев.*

Первый интеграл в правой части этого неравенства не превосходит величины

$$c_1 \int_{t_0}^{t} \| Y_1(t-t_1)\| \, \|B(t_1)\| \exp\left(d_1 \int_{t_0}^{t_1} \|B(t_2)\| dt_{t_2}\right) e^{\mathrm{Re}(\lambda_k) t_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant kc_1 \int_{t_0}^{t} e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)(t-t_1)} e^{\mathrm{Re}(\lambda_k) t_1} \|B(t_1)\| \exp\left[d_1 \int_{t_0}^{t_1} \|B(t_2)\| dt_2\right] dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{kc_1}{d_1} e^{\mathrm{Re}(\lambda_k) t} \exp\left[d_1 \int_{t_0}^{t} \|B(t_1)\| dt_1\right].$$

Рассмотрим теперь второй интеграл. Он не превосходит величины

$$c_1 (n-k) \int_{t}^{\infty} e^{\mathrm{Re}(\lambda_{k+1})(t-t_1)} \|B(t_1)\| \exp\left[\mathrm{Re}(\lambda_k) t_1 + d_1 \int_{t_0}^{t_1} \|B\| dt_2\right] dt_1. \quad (32)$$

Чтобы получить дальнейшую оценку, применим следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть постоянные a, b и функция $\varphi(t)$ положительны и удовлетворяют условию*

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leqslant b < a.$$

Тогда

$$\int_{t}^{\infty} e^{-at} \varphi(t) dt \leqslant \frac{e^{-at}\varphi(t)}{a-b}.$$

Доказательство. Имеем

$$ae^{-at}\varphi(t) - e^{-at}\varphi'(t) = ae^{-at}\varphi(t)(1 - \varphi'/a\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant a\left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{-at} \varphi(t).$$

Таким образом, пользуясь тем, что

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at} \varphi(t) = \exp \lim_{t\to\infty} \left[\int_{t_0}^{t} \left(-a + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right) dt - at_0 + \ln \varphi(t_0)\right] = 0,$$

получаем

$$e^{-at}\varphi(t) = \int_{t}^{\infty} [ae^{-at}\varphi(t) - e^{-at}\varphi'(t)] dt \geqslant (a-b) \int_{t}^{\infty} e^{-at}\varphi(t) dt.$$

Чтобы привести выражение (32) к виду, пригодному для применения леммы, мы произведем интегрирование по частям; получим

$$\frac{c_1(n-k)}{d_1} e^{\operatorname{Re}(\lambda_{k+1})t} \int_t^\infty [\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)]\, e^{-\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)t_1} \times$$

$$\times \exp\left[d_1 \int_{t_0}^{t_1} \|B(t)\|\, dt\right] dt_1 + \frac{c_1(n-k)}{d_1} e^{\operatorname{Re}(\lambda_{k+1})t} \times$$

$$\times \left[\exp\left(-\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)t_1 + d_1 \int_{t_0}^{t_1} \|B(t)\|\, dt\right)\right]_t^\infty. \quad (33)$$

Для применения леммы 2 положим $a = \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) > 0$ и

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = d_1 \|B(t)\|.$$

Так как $\|B\| \to 0$ при $t \to \infty$, то для $t \geqslant t_0$, где t_0 достаточно велико, будем иметь $d_1 \sup \|B\| \leqslant {}^1/_2\, a = b$. Отсюда, применяя лемму, мы видим, что первый интеграл в выражении (33) не больше чем

$$2e^{-\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)t} \exp\left[d_1 \int_{t_1}^{t} \|B(t_1)\|\, dt_1\right].$$

Объединяя слагаемые, мы получаем, что второй интеграл в правой части неравенства (31) не превосходит выражения [1])

$$\frac{2c_1(n-k)}{d_1} \exp\left[\operatorname{Re}(\lambda_k)t + d_1 \int_{t_0}^{t} \|B\|\, dt\right].$$

Принимая во внимание оценку для первого интеграла, мы видим, что если положить $c_1 = 2$, а d_1 выбрать настолько большим, что

$$1 + \frac{2k}{d_1} + \frac{4(n-k)}{d_1} \leqslant 2,$$

то будет иметь место неравенство (30). После выбора d_1 надо так выбрать t_0, чтобы было $d_1 \sup\limits_{t \geqslant t_0} \|B\| \leqslant b$. Это завершает индукцию [2]).

---

[1]) Отметим простое часто применяемое утверждение: если $a > 0$ и $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, \varphi(t) < a$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\left[-at + \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, dt\right] = -\infty$. В силу этого второе слагаемое в равенстве (33) отрицательно. — *Прим. перев.*

[2]) Только теперь построение последовательных приближений полностью обосновано, так как из оценки (30) следует равномерная сходимость второго интеграла в формуле (29) и тем самым доказано существование и непрерывность всех функций $z_m(t)$. — *Прим. перев.*

Чтобы показать сходимость z_m, мы рассмотрим, как обычно, ряд $\sum_{m=0}^{\infty}(z_{m+1}-z_m)$. Нетрудно по индукции показать, что для любого ε, $0<\varepsilon<\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$,

$$\|z_{m+1}-z_m\| \leqslant (c_2 \sup_{t\geqslant t_0}\|B\|)^{m+1} e^{(\operatorname{Re}(\lambda_k)+\varepsilon)t}, \tag{34}$$

где $c_2=c_2(\varepsilon)$; достаточно положить $c_2=k/\varepsilon+(n-k)/\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}-\lambda_k-\varepsilon)$. Следовательно, для достаточно большого t_0 ряд сходится равномерно на любом конечном интервале значений t и предельная функция непрерывна. Переходя в соотношении (29) к пределу (что возможно на основании оценки (30)), получаем уравнение (28). Значит, предельная функция является решением уравнения (1), удовлетворяющим второму из неравенств (23).

Пусть $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$ — решения, соответствующие различным характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. При этом если два числа λ_k и λ_{k+1} имеют одинаковые вещественные части, то мы не будем менять Y_1 и Y_2, а лишь заменим y_k на y_{k+1}.

Покажем, что эти n решений линейно независимы. Действительно, пусть имеет место равенство вида

$$0=\sum_{k=1}^{n}\mu_k z^{(k)}=\sum_{k=1}^{n}\mu_k y_k+\int_{t_0}^{t}\Big[\sum_{k=1}^{n}\mu_k Y_{1k}(t-t_1)B(t_1)z^{(k)}\Big]dt_1-$$
$$-\int_{t}^{\infty}\Big[\sum_{k=1}^{n}\mu_k Y_{2k}(t-t_1)B(t_1)z^{(k)}\Big]dt_1.$$

После замены Y_{1k} на $Y-Y_{2k}$ получится

$$0=\sum_{k}\mu_k y_k-\int_{t_0}^{\infty}\Big[\sum_{k=1}^{n}\mu_k Y_{2k}(t-t_1)B(t_1)z^{(k)}\Big]dt_1. \tag{35}$$

Все матрицы Y_{2k} имеют первую строку нулевой. Значит, и вектор, стоящий под знаком интеграла в (35), имеет первую компоненту, равную нулю. Приравнивая первые компоненты обеих частей формулы (35), получаем $0=\mu_1 e^{\lambda_1 t}$, откуда $\mu_1=0$. Затем рассматриваем вторую строку матриц Y_{2k} $(k\geqslant 2)$, проводим аналогичное рассуждение со вторыми компонентами векторов и т. д. Таким образом, получаем, что все $\mu_k=0$ и линейная независимость доказана.

Перейдем теперь к доказательству первого из неравенств (23). Пусть Z — матрица со столбцами $z^{(k)}$. Она не вырождена и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), а потому ее обратная матрица $W=Z^{-1}$ удовлетворяет сопряженному матричному уравнению

$$\frac{dW}{dt}=-W(A+B).$$

Рассмотрим соответствующее векторное уравнение для строк матрицы W:

$$\frac{dw}{dt} = -w(A+B). \tag{36}$$

Тот же метод, который был применен для исходного уравнения, показывает, что для каждого характеристического числа $-\lambda_k$ матрицы $-A$ существует решение $w^{(k)}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|w^{(k)}\| \leqslant c_2^* \exp\left[-\operatorname{Re}(\lambda_k)t + d_2\int_{t_0}^{t}\|B\|dt_1\right].$$

При этом значение t_0 можно считать тем же, что и ранее.

Пусть V — матрица со строками $w^{(k)}$. Она не вырождена и из теоремы единственности следует, что $V = DW$, где D — постоянная матрица, $D = (d_{ij})$. Тогда $VZ = DWZ = D$. Определим скалярное произведение строчного вектора y на столбцевой вектор z по формуле $y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n$, обозначая это произведение через $y \cdot z$. Если y и z — векторные функции, то $y \cdot z$, вообще говоря, будет скалярной функцией, однако для любых решений w и z, соответственно уравнений (36) и (1), скалярное произведение $w \cdot z$ постоянно (это легко проверяется на основании самих уравнений). В частности,

$$w^{(k)} \cdot z^{(k)} = d_{kk}.$$

Если $d_{kk} \neq 0$, то из неравенства $|d_{kk}| \leqslant \|w^{(k)}\|\,\|z^{(k)}\|$ получим неравенство

$$\|z^{(k)}\| \geqslant \left|\frac{d_{kk}}{c_2^*}\right| \exp\left[\operatorname{Re}(\lambda_k)t - d_2\int_{t_1}^{t}\|B(t_1)\|dt_1\right].$$

Если же $d_{kk} = 0$, то мы поступим следующим образом. Вместо вектора $z^{(k)}$ рассмотрим вектор

$$\bar{z}^{(k)} = z^{(k)} + \sum_{l=1}^{k-1}\alpha_l z^{(l)}.$$

Изменяя, если нужно, постоянные, можно для $\bar{z}^{(k)}$ получить оценку типа (30). Матрица $\bar{Z}$ со столбцами $\bar{z}^{(k)}$ имеет тот же определитель, что и Z, и потому не вырождена. Аналогично, вместо $w^{(k)}$ можно рассмотреть $\bar{w}^{(k)} = w^{(k)} + \sum_{l=k+1}^{n}\beta_l w^{(l)}$. Рассмотрим линейное многообразие M_1, состоящее из решений сопряженного уравнения (36), для которых скалярное произведение

$$w \cdot \left(z^{(k)} + \sum_{l=1}^{k-1}\alpha_l z^{(l)}\right) = 0$$

при всех α_l. Это равенство эквивалентно k независимым условиям

$$w \cdot z^{(1)} = w \cdot z^{(2)} = \ldots = w \cdot z^{(k)} = 0.$$

Так как линейное многообразие M всех решений уравнения (36) n-мерно, то M_1 является $(n-k)$-мерным многообразием.

Из линейной независимости $w^{(k)}$ следует, что вектор $w^{(k)} + \sum_{l=k+1}^{n} \beta_l w^{(l)}$ не может принадлежать $(n-k)$-мерному многообразию при любом выборе β_l. Следовательно, для любого выбранного k величина $\overline{w^{(k)} z^{(k)}}$ не может равняться нулю при любом выборе α_l и β_l, а потому для каждого k существует решение требуемого вида.

7. Асимптотические свойства. Мы докажем теперь более точный результат об асимптотическом поведении решений.

Теорема 8. *Пусть*

$$\frac{dz}{dt} = (A + \varphi(t) + B(t))\, z, \tag{37}$$

где

(а) *A — постоянная матрица с простыми характеристическими числами;*

(б) *$\varphi \to 0$ при $t \to \infty$, а $\int^{\infty} \|d\varphi/dt\|\, dt < \infty$;*

(в) *$\int^{\infty} \|B(t)\|\, dt < \infty$;*

(г) *характеристические числа $\lambda_i(t)$ матрицы $A + \varphi(t)$ имеют различные вещественные части.*

Тогда существует n независимых решений $z^{(k)}(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ уравнения (37) таких, что при $t \to \infty$

$$z^{(k)}(t) = \left(\exp \int_{t_1}^{t} \lambda_k(t_1)\, dt_1\right)(c_k + o(1)),$$

где c_k — постоянный не нулевой вектор.

Условие (г) *можно заменить следующим, более общим:*

(г′) *имеет место по крайней мере одно из двух неравенств*

$$\int_{t_1}^{t} \operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))\, dt > -c \quad \text{при} \quad t > t_1 \geqslant t_0, \tag{38}$$

$$\int_{t_1}^{t} \operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))\, dt < c \quad \text{при} \quad t > t_1 \geqslant t_0, \tag{39}$$

где c — постоянная, не зависящая от t и t_1.

Доказательство. На основании теоремы 10 гл. I мы знаем, что существует матрица $S(t)$, для которой

$$S(A+\varphi)S^{-1}=\Lambda,$$

где Λ — диагональная матрица с диагональными элементами, равными характеристическим числам матрицы $A+\varphi(t)$. При этом

(а) $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=T$ $(\det T\neq 0)$;

(б) $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_i(t)=\mu_i$ (μ_i — характеристические числа матрицы A);

(в) $\int^{\infty} \|dS/dt\|\,dt<\infty$.

Выполнив замену переменных $y=Sz$, получим

$$\frac{dy}{dt}=\Lambda y+\left(SBS^{-1}+\frac{dS}{dt}S^{-1}\right)y. \tag{40}$$

Так как S стремится к постоянной невырожденной матрице, то

$$\int^{\infty}\left\|SBS^{-1}+\frac{dS}{dt}S^{-1}\right\|dt\leqslant c_1\int^{\infty}\left(\|B\|+\left\|\frac{dS}{dt}\right\|\right)dt<\infty.$$

Введем новую матрицу $R=SBS^{-1}+(dS/dt)S^{-1}$ и запишем уравнение (40) в компонентах:

$$\frac{dy_i}{dt}-\lambda_i(t)y_i=\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t)y_j,\qquad R(t)=(r_{ij}(t)). \tag{41}$$

Рассмотрим разность $\operatorname{Re}(\lambda_i(t)-\lambda_k(t))$ для фиксированного k и переменного i в предположении, что выполняется условие (г′). Обозначим через I множество целых чисел $i\,(1\leqslant i\leqslant n)$, для которых эта разность удовлетворяет неравенству (38). Множество остальных чисел i обозначим через II; для этих i удовлетворяется неравенство (39). Отметим, что фиксированное выше число $k\in$ I. Формально легко убедиться в том, что уравнения (41) для всех i можно перевести в интегральные уравнения, которые будут иметь различный вид в зависимости от того, принадлежит ли i множеству I или множеству II. Именно, для $i\in$ I мы получим

$$y_i(t)=\delta_{ik}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_k(t_1)\,dt_1\right)-$$
$$-\int_{t}^{\infty}\exp\left(\int_{t_1}^{t}\lambda_i(s)\,ds\right)\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t_1)y_j(t_1)\,dt_1 \tag{42}$$

(δ_{ik} означает символ Кронекера: δ_{ik} равно 1, если $i=k$, и равно 0 в противном случае). Если же $i \in$ II, то будем иметь

$$y_i(t)=\int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_1}^{t} \lambda_i(s)\,ds\right) \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t_1)\,y_j(t_1)\,dt_1. \tag{43}$$

Дальнейшее доказательство аналогично тому, которое было применено выше, в теореме 7, когда мы задавались целью указать решения, имеющие определенный характер роста при $t \to \infty$. Чтобы доказать существование решений и получить для них оценки, применим метод последовательных приближений, полагая

$$\begin{aligned}
&y_i^{(0)}(t)=\delta_{ik} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(t_1)\,dt_1\right), \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\\
&y_i^{(m+1)}(t)=\delta_{ik} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(t_1)\,dt_1\right)-\\
&\qquad -\int_{t}^{\infty} \exp\left(\int_{t_1}^{t} \lambda_i(s)\,ds\right) \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j^{(m)}\,dt_1, \qquad m \geqslant 0,\ i \in \mathrm{I},\\
&y_i^{(m+1)}(t)=\int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_1}^{t} \lambda_i(s)\,ds\right) \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j^{(m)}\,dt_1, \qquad m \geqslant 0,\ i \in \mathrm{II}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Так как доказательство принципиально просто, но громоздко, то мы советуем читателю сначала провести его для систем из двух уравнений, когда технические затруднения минимальны.

Для упрощения записи положим

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_i(s)\,ds\right)=H_i(t),\\
&\Delta y_i^{(0)}(t)=|y_i^{(0)}(t)|,\\
&\Delta y_i^{(m+1)}(t)=|y_i^{(m+1)}(t)-y_i^{(m)}(t)|, \qquad m \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Из уравнений (44) получаем для $m \geqslant 1$ и $t \geqslant t_0$

$$\Delta y_i^{(m)}(t) \leqslant \int_{t}^{\infty} e^{H_i(t)-H_i(t_1)}\,\|R(t_1)\| \sum_{j} \Delta y_j^{(m-1)}(t_1)\,dt_1 \ (i \in \mathrm{I}), \tag{45}$$

$$\Delta y_i^{(m)}(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} e^{H_i(t)-H_i(t_1)}\,\|R(t_1)\| \sum_{j} \Delta y_j^{(m-1)}(t_1)\,dt_1 \ (i \in \mathrm{II}),$$

в то время как

$$\Delta y_i^{(0)}(t) \leqslant e^{H_k(t)}.$$

Покажем по индукции, что число t_0 можно выбрать настолько большим, что

$$\Delta y_i^{(m)}(t) \leqslant 2^{-m} e^{H_k(t)}. \tag{46}$$

Утверждение, очевидно, верно при $m = 0$. Из неравенства (45) получаем по предположению индукции для $i \in \mathrm{I}$

$$\Delta y_i^{(m+1)}(t) \leqslant n 2^{-m} e^{H_k(t)} \int_t^\infty e^{H_i(t) - H_k(t) + H_k(t_1) - H_i(t_1)} \|R(t_1)\| \, dt_1,$$

а для $i \in \mathrm{II}$

$$\Delta y_i^{(m+1)}(t) \leqslant n 2^{-m} e^{H_k(t)} \int_{t_0}^t e^{H_i(t) - H_k(t) + H_k(t_1) - H_i(t_1)} \|R(t_1)\| \, dt_1.$$

Из определения множества I следует, что при $i \in \mathrm{I}$

$$\exp\left\{-\int_t^{t_1} \operatorname{Re}[\lambda_i(s) - \lambda_k(s)]\, ds\right\} < c', \qquad t_1 \geqslant t \geqslant t_0,$$

для некоторой фиксированной постоянной $c' = e^c$. Отсюда при $i \in \mathrm{I}$

$$\Delta y_i^{(m+1)}(t) \leqslant c' n 2^{-m} e^{H_k(t)} \int_t^\infty \|R(t_1)\| \, dt_1. \tag{47}$$

Аналогично, так как при $i \in \mathrm{II}$ имеем

$$\exp\left\{\int_{t_1}^t \operatorname{Re}[\lambda_i(s) - \lambda_k(s)]\, ds\right\} < c', \qquad t \geqslant t_1 \geqslant t_0,$$

где постоянную c' мы можем считать такой же, как в неравенстве (47), получаем

$$\Delta y_i^{(m+1)}(t) \leqslant c' n 2^{-m} e^{H_k(t)} \int_{t_0}^t \|R(t_1)\| \, dt_1.$$

Если t_0 выбрать так, чтобы было

$$c' n \int_{t_0}^\infty \|R(t_1)\| \, dt_1 \leqslant \frac{1}{2},$$

то неравенство (46), в котором m заменено на $m+1$, будет удовлетворяться [1]).

Следовательно, ряд $\sum_{m=0}^{\infty}(y_i^{(m+1)}-y_i^{(m)})$ для каждого i равномерно сходится на каждом конечном интервале значений t, а потому $y_i^{(m)}\to y_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$, причем функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют решение системы (42)—(43) [2]). Кроме того, для каждого i имеем

$$|y_i(t)|\leqslant 2e^{H_k(t)}.$$

Возвращаясь к равенству (42), мы видим, что для $i\in \mathrm{I}$

$$\left|\int_t^{\infty}\exp\left(\int_{t_1}^{t}\lambda_i(s)\,ds\right)\sum_j r_{ij}(t_1)\,y_j(t_1)\,dt_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2c_1e^{H_k(t)}\int_t^{\infty}\|R(t_1)\|\,dt_1=o\left(e^{H_k(t)}\right)$$

при $t\to\infty$. Отсюда для $i\in \mathrm{I}$

$$y_i(t)=(\delta_{ik}+0(1))\exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_k(t_1)\,dt_1\right).$$

Если $i\in \mathrm{II}$, то

$$\left|\int_{t_0}^{t}\exp\left(\int_{t_1}^{t}\lambda_i(s)\,ds\right)\sum_j r_{ij}(t_1)\,y_j(t_1)\,dt_1\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t^*}\right|+\left|\int_{t^*}^{t}\right|$$

при $t_0\leqslant t^*\leqslant t$; как надо выбрать t^*, мы укажем ниже.

---

[1]) Одновременно в силу доказанной в формуле (47) конечности величины $\Delta y_i^{(m+1)}$ обосновано применение несобственных интегралов в формуле (44) для индуктивного определения $y_i^{(m+1)}(t)$. Кроме того, в формуле

$$y_i^{(m+1)}(t)-y_i^{(m)}(t)=$$

$$=-e^{\overline{H}_k(t)}\int_t^{\infty}e^{\overline{H}_i(t)-\overline{H}_k(t)-\overline{H}_i(t_1)}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(t_1)\,[y_j^{(m)}(t_1)-y_j^{(m-1)}(t_1)]\,dt_1$$

$$(m\geqslant 0,\ y_j^{(-1)}\equiv 0,\ i\in \mathrm{I},\ \overline{H}_i(t)=\int_{t_0}^{t}\lambda_i(s)\,ds)$$

в силу оценки (46) интеграл сходится равномерно, и потому по индукции получаем, что все $y_i^{(m)}(t)$ непрерывны при $t_0\leqslant t<\infty$. — *Прим. перев.*

[2]) См. примечание 3 в конце книги. — *Прим. перев.*

Второй интеграл ограничен величиной

$$2c_1 e^{H_k(t)} \int_{t^*}^{t} \|R(t_1)\|\, dt_1.$$

Так как по предположению $i \in \mathrm{II}$, то, как легко доказать от противного,

$$\int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}[\lambda_i(s) - \lambda_k(s)]\, ds \to -\infty$$

при $t \to \infty$. Поэтому мы можем определить $t^* = t^*(t)$ так, что $t^* \to \infty$ при $t \to \infty$ и

$$\int_{t^*}^{t} \operatorname{Re}[\lambda_i(s) - \lambda_k(s)]\, ds \to -\infty.$$

Например, если обозначить

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}[\lambda_i(s) - \lambda_k(s)]\, ds,$$

то мы выберем t^* так, чтобы выполнялось соотношение $F(t^*) = F(t)/2$. При таком выборе t^* второй интеграл, очевидно, равен $o(e^{H_k(t)})$. Первый же интеграл не превосходит величины

$$2\int_{t_0}^{t^*} e^{H_i(t) - H_i(t_1) + H_k(t_1)} \|R(t_1)\|\, dt_1 =$$

$$= 2e^{H_k(t)} \int_{t_0}^{t^*} \exp\left\{\int_{t_1}^{t^*} \operatorname{Re}[\lambda_i(s) - \lambda_k(s)]\, ds\right\} \exp\left\{\int_{t^*}^{t} \operatorname{Re}[\lambda_i(s) - \lambda_k(s)]\, ds\right\} \times$$

$$\times \|R(t_1)\|\, dt_1 \leqslant 2c_1 e^{H_k(t)} \int_{t_0}^{t^*} \exp\left\{\int_{t^*}^{t} \operatorname{Re}[\lambda_i(s) - \lambda_k(s)]\, ds\right\} \|R(t_1)\|\, dt_1,$$

т. е. тоже равен $o(e^{H_k(t)})$.

Таким образом, для каждого k мы построили решение $y^{(k)}(t)$, компоненты которого удовлетворяют асимптотическим соотношениям

$$y_i^{(k)}(t) = (\delta_{ik} + o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)\, ds\right).$$

Отсюда, рассматривая определитель Вронского, замечаем, что $y^{(k)}$ составляют линейно независимую систему решений. Так как $z = S^{-1}y$ и так как S стремится к постоянной невырожденной матрице, то мы получаем систему векторных решений, о которых говорилось в теореме.

8. Асимптотические ряды. Обычно о матрице коэффициентов известно значительно больше, чем то немногое, что требовалось в формулировках предшествующих теорем. Естественно поэтому ожидать, что в этих случаях мы можем больше узнать и о свойствах решений.

Мы будем отправляться от важного подкласса уравнений, матрицы коэффициентов которых имеют в качестве элементов рациональные функции. Пусть каждый из элементов матрицы стремится к постоянной при $t \to \infty$. Тогда для достаточно больших значений t каждый элемент можно разложить в сходящийся степенной ряд вида

$$a_{ij}(t) = c_0 + \frac{c_1}{t} + \ldots + \frac{c_k}{t^k} + \ldots \qquad (c_k \equiv c_k(i, j)). \tag{48}$$

Значит, мы можем записать матрицу A при $t \geqslant t_0$ в виде

$$A(t) = A_0 + \frac{A_1}{t} + \ldots + \frac{A_k}{t^k} + \ldots, \tag{49}$$

где A_k — постоянные матрицы.

Делая еще один шаг, рассмотрим класс уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

где матрица $A(t)$ для достаточно больших значений t обладает разложением указанного выше вида. Если разложение (49) имеет место, то

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} A(t) = A_0,\\
&\lim_{t\to\infty} t(A(t) - A_0) = A_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lim_{t\to\infty} t^{n+1}\left(A(t) - A_0 - \frac{A_1}{t} - \ldots - \frac{A_n}{t^n}\right) = A_{n+1}.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Заметим, что соотношения (50) никоим образом не предполагают сходимости ряда (49) — очень легко привести пример функции, удовлетворяющей равенствам (50), для которой ряд в правой части (48) расходится для всех значений t. В самом деле, рассмотрим скалярную функцию

$$g(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+t}\,dx.$$

Легко убедиться в том, что

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0.\\ \lim\limits_{t\to\infty} t\,g(t)=1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lim\limits_{t\to\infty} t^{n+1}\left[g(t)-\frac{1}{t}+\ldots-(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{t^n}\right]=(-1)^n n!,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\quad(51)$$

в то время как ряд

$$S(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}+\ldots$$

расходится для всех значений t. Заметим, что этот ряд получится, если написать формально

$$g(t)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{t\,[1+(x/t)]}=$$

$$=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{t}\left[1-\frac{x}{t}+\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{t^n}+\ldots\right]dx$$

и произвести почленное интегрирование, что, конечно, совершенно незаконно.

Несмотря на то, что ряд $S(t)$ расходится для всех значений t, из формул (51) следует, что для $t\geqslant t_0(\varepsilon)$ имеем

$$\left|g(t)-\frac{1}{t}+\ldots-(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{t^n}\right|\leqslant\frac{n!\,(1+\varepsilon)}{t^{n+1}}.$$

Так как $n!\,(1+\varepsilon)/t^{n+1}\to 0$ при $t\to\infty$, то мы имеем здесь удивительный факт: ряд $S(t)$ расходится, но его последовательные частные суммы дают превосходные приближения функции $g(t)$ при $t\to\infty$. Если, например, $t=10$, то мы получаем наилучшее приближение, взяв $n=10$. Из формулы Стирлинга имеет

$$10!\approx 10^{10}e^{-10}\sqrt{20\pi},$$

откуда видно, что погрешность нашего приближения $\approx e^{-10}\sqrt{\pi/5}$.

Такие ряды, которые дают хорошее приближение к данной функции, если их оборвать на соответствующем месте, даже если они расходятся, называются *асимптотическими рядами*. Дадим теперь точное определение.

Определение. Если бесконечная последовательность $\{a_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ определена так, что

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = a_0,$$
$$\lim_{t\to\infty} t(f(t)-a_0) = a_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lim_{t\to\infty} t^{n+1}\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}-\ldots-\frac{a_n}{t^n}\right)=a_{n+1},$$

то говорят, что функция $f(t)$ обладает *асимптотическим разложением* при $t\to\infty$, и записывают это в виде

$$f(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{t^n}. \tag{52}$$

Ряд в правой части (52) не предполагается сходящимся, он может сходиться или расходиться.

Исследуем теперь алгебраические соотношения, которым удовлетворяет только что введенное соответствие между функциями и формальными степенными рядами. Имеет место следующая

Теорема 9. *Пусть*

$$f(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{-n},\qquad g(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^{-n},$$

тогда для любых постоянных c_1 и c_2 имеем

$$c_1f+c_2g\sim\sum_{n=0}^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)\,t^{-n}.$$

Далее,

$$fg\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{-n},$$

где

$$c_n=\sum_{k+l=n}a_kb_l.$$

Кроме того, если $a_0\neq 0$, то

$$\frac{1}{f(t)}\sim c_0+\frac{c_1}{t}+\ldots+\frac{c_n}{t^n}+\ldots,$$

где

$$a_0c_0=1,\quad a_0c_1+a_1c_0=0,\ \ldots,\ \sum_{k+l=n}a_kc_l=0\qquad(n>0).$$

Наконец, если

$$f'(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^{-n},$$

то $d_0 = d_1 = 0$ *и* $d_n = -(n-1)\,a_{n-1}$ *при* $n \geqslant 2$. *Если* $a_0 = a_1 = 0$, *то*

$$\int_t^{\infty} f(t)\,dt \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n t^{-(n-1)}}{n-1};$$

если же по крайней мере один из коэффициентов a_0 *и* a_1 *отличен от нуля, то* $\left|\int_t^{\infty} f(t)\,dt\right| = \infty$.

Доказательство следует непосредственно из определения, и мы предоставляем читателю провести его в качестве упражнения. При этом проще всего пользоваться полезным и для дальнейшего замечанием: для того чтобы имело место асимптотическое разложение

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t^n},$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого целого $N \geqslant 0$ было

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{t^n} + O\left(\frac{1}{t^{N+1}}\right).$$

Из сказанного выше видно, что с асимптотическими рядами, пока рассматриваются их алгебраические свойства, можно обращаться как с обычными степенными рядами. То же относится к действиям дифференцирования и интегрирования, если только функции, получающиеся при дифференцировании, обладают асимптотическим разложением. Отсюда следует, что если все функции $f, f', \ldots, f^{(n)}$ и коэффициенты некоторого многочлена $P(f, f', \ldots, f^{(n)})$ обладают асимптотическим разложением, то и этот многочлен обладает асимптотическим разложением, которое можно подсчитать формально.

Чтобы показать, что производная f' может не иметь асимптотического разложения, хотя его имеет функция f, рассмотрим функцию

$$f = \frac{1}{t} + e^{-t} \sin e^{2t}.$$

Согласно нашему определению, $f \sim 1/t$. Однако функция

$$f' = -\frac{1}{t^2} - e^{-t} \sin e^{2t} + 2e^{t} \cos e^{2t}$$

не имеет асимптотического разложения, ибо уже $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t)$ не существует.

Этот пример показывает также, что хотя каждая функция может обладать лишь единственным асимптотическим разложением, но различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение.

Обратимся к применению изложенных идей в теории дифференциальных уравнений. Взяв простое уравнение

$$u'' - \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) u = 0, \tag{53}$$

мы видим, согласно теореме 8, что решения его являются линейными комбинациями функций порядка e^t и e^{-t} при $t \to \infty$. Будем искать решение в виде

$$u = e^t \left(1 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \ldots + \frac{c_n}{t^n} + \ldots\right). \tag{54}$$

Подставляя в уравнение (53) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях t, получим

$$c_1 = -1/2, \qquad c_n = \frac{n^2 - n - 1}{2n} c_{n-1} \qquad (n \geqslant 2).$$

Мы видим, что ряд (54) расходится для всех значений t. Однако мы покажем ниже, что этот формально найденный нами ряд на самом деле является асимптотическим разложением для решения уравнения (53). Принимая во внимание разложение вида (54), полезно несколько расширить наше определение асимптотического разложения и писать

$$f(t) \sim \varphi(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n}, \tag{55}$$

если

$$\left| f(t) - \varphi(t) \sum_{n=0}^{N} a_n t^{-n} \right| = |\varphi(t)|\, O(t^{-N-1}), \quad N = 0, 1, 2, \ldots \text{ при } t \to \infty.$$

Если $\varphi(t) \neq 0$ для $t \geqslant t_0$, то из (55) следует

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n},$$

и наоборот.

Заметим, что если мы знаем, что решение уравнения (53) обладает асимптотическим разложением, то коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ легко подсчитать последовательно при помощи сравнения коэффициентов. В связи с применением асимптотических рядов к дифференциальным уравнениям основная проблема состоит в следующем:

Пусть дан бесконечный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n}$, *расходящийся при всех значениях* t *и формально удовлетворяющий дифференциаль-*

ному уравнению $P(u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0$; *при каком условии этот ряд является асимптотическим разложением решения этого уравнения?*

Мы дадим частичное решение этой проблемы для случая, когда P является линейной однородной формой относительно переменных $u, u', u'', \ldots, u^{(n)}$, т. е. когда $P = 0$ представляет собой линейное дифференциальное уравнение

$$u^{(n)} + a_1(t)\, u^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, u = 0.$$

Как мы знаем, теория уравнений такого вида может рассматриваться как часть теории линейных систем

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y, \tag{5}$$

и именно для уравнений такого вида мы будем проводить исследование.

9. Асимптотическое поведение решения уравнения $dy/dt = A(t)y$. Полностью решена задача об определении асимптотического поведения решений уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y, \tag{5}$$

где элементы матрицы $A(t)$ являются рациональными функциями t или, в более общем случае, обладают асимптотическими разложениями вида

$$a_{ij}(t) - p(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} c_m t^{-m}, \qquad p \equiv p_{ij}, \quad c_m = c_m(i, j),$$

где $p(t)$ — многочлен относительно t. Однако решение, принципиально простое, оказывается довольно сложным в частностях, и поэтому мы рассмотрим только простой случай, когда матрица $A(t)$ имеет асимптотическое разложение вида

$$A(t) \sim A_0 + A_1 t^{-1} + \ldots + A_m t^{-m} + \ldots \tag{56}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что характеристические числа матрицы A_0 различны. Легко привести примеры, иллюстрирующие сложную структуру решений в том случае, когда матрица A_0 имеет кратные характеристические числа. Например, пользуясь теоремой 10, легко показать, что имеются два решения $u(t)$ уравнения

$$u'' - \frac{u}{t} = 0,$$

для которых $u(t^2)$ обладают асимптотическими разложениями вида

$$u(t^2) \sim e^{\pm 2t}\, t^{c_0} (1 + c_1 t^{-1} + \ldots + c_m t^{-m} + \ldots).$$

Упражнение

1. Определить c_0 при помощи приравнивания коэффициентов.

Имеется много частных методов, которые в особенности применимы к уравнениям второго порядка; полное исследование структуры решений для частных видов уравнения n-го порядка, к которым применимы эти методы, оказывается значительно проще, чем для общего уравнения n-го порядка.

Основной результат таков.

Теорема 10. *Пусть дано уравнение* (5), *для которого*

(а) $$A(t) \sim A_0 + A_1 t^{-1} + \ldots + A_m t^{-m} + \ldots; \tag{56}$$

(б) *характеристические числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* A_0 *просты.*

Тогда каждому характеристическому числу λ_k *соответствует решение* y_k *уравнения* (5), *обладающее асимптотическим разложением*

$$y_k \sim e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} \left(c_0 + \frac{c_1}{t} + \ldots + \frac{c_m}{t^m} + \ldots\right), \tag{57}$$

где c_0 — *ненулевой вектор.*

Для доказательства этой теоремы мы приведем сначала следующую лемму:

Лемма 3. *Если каждый коэффициент алгебраического уравнения*

$$f(z) = z^n + a_1(t) z^{n-1} + \ldots + a_n(t) = 0 \tag{58}$$

обладает асимптотическим разложением

$$a_j(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(j)} t^{-m}$$

и если уравнение

$$g(z) = z^n + c_0^{(1)} z^{n-1} + \ldots + c_0^{(n)} = 0 \tag{59}$$

имеет простые корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$, *то каждый корень уравнения* (58) *обладает асимптотическим разложением*

$$r_j(t) \sim r_j + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^{(j)} t^{-m}.$$

Доказательство. Доказательство, как и ранее, удобно провести при помощи методов теории функций комплексного переменного. Так как уравнение (59) имеет простые корни, то это же верно и для уравнения (58) при достаточно больших значениях t. Следовательно, для $t \geqslant t_0$ мы можем провести в плоскости комплексного переменного небольшие непересекающиеся окружности C_j с центрами

в точках r_j, содержащие соответствующие корни $r_j(t)$. Применяя теорему Коши, получаем

$$r_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_j} \frac{zf'(z)}{f(z)}\, dz, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

При $z \in C_j$ имеем для $t \to \infty$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{e_1(z)}{t} + \ldots + \frac{e_N(z)}{t^N} + O(t^{-(N+1)}).$$

Интегрируя почленно и замечая, что оценка $O(t^{-(N+1)})$ выполняется на каждой окружности C_j равномерно по z, мы и получаем искомое асимптотическое разложение для $r_j(t)$.

Доказательство теоремы 10. Система имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \left(A_0 + \frac{A_1}{t} + A_2(t)\right) z,$$

где $\|A_2(t)\| \leqslant c_1 t^{-2}$ при $t \to \infty$. Так как характеристические числа матрицы A_0 различны и $\int^{\infty} \|A_2(t)\| dt < \infty$, то наша система удовлетворяет условиям теоремы 8 [1]). Следовательно, как мы знаем, существуют n решений $z_1, z_2, \ldots, z_n$ асимптотического вида

$$z_k = e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} [c_k + o(1)], \tag{60}$$

где c_k — постоянный ненулевой вектор. Воспользовавшись заменой переменных $z = e^{\sigma t}\bar{z}$, мы можем всегда предполагать, что все λ_k отличны от нуля. Это несущественно, но упрощает некоторые детали доказательства.

---

[1]) Применяя теорему 8, надо положить $A = A_0$, $\varphi(t) = A_1 t^{-1}$, $B(t) = A_2(t)$. При этом, как было указано в связи с теоремой 9 гл. I, характеристические числа $\lambda_i(t)$ матрицы $A + \varphi(t)$ являются аналитическими функциями от t^{-1} (отметим, что поэтому приведенная автором лемма 3 оказывается излишней). Значит, $\operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) = \alpha_0 + \alpha_1 t^{-1} + \alpha_2 t^{-2} + \ldots$ Нетрудно проверить, что если $\alpha_0 > 0$ или $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$, то выполняется неравенство (38); в противном же случае имеет место неравенство (39). Так мы проверяем выполнение условий теоремы 8.

Теорема 8 дает решение в несколько ином виде, чем (60). Однако этот последний вид легко получить на основании того, что

$$\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_k(t_1)\, dt_1\right) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} (\lambda_k + \mu_k t_1^{-1} + \nu_k t_1^{-2} + \ldots) dt_1\right) =$$
$$= \exp(\lambda_k t + \mu_k \ln t) \exp(-\lambda_k t_0 - \mu_k \ln t_0) \exp(\rho_k + O(1)) =$$
$$= e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} (\sigma_k + O(1)),$$

где $\sigma_k > 0$. — *Прим. перев.*

Доказательство проводится по индукции, причем надо отправляться от доказанного выше результата (60) и применять те же интегральные уравнения, что и ранее. Предполагая уже доказанным, что

$$z_k = e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} [c_k + c_k^{(1)} t^{-1} + \ldots + c_k^{(n)} t^{-n} + O(t^{-(n+1)})]$$

для $n = 0, 1, \ldots, m$ и для всех k, при помощи интегрального уравнения можно показать, что эти же формулы справедливы для $m+1$.

Это упражнение в повторном интегрировании по частям мы предоставляем читателю. При этом до проведения общего доказательства мы советуем проделать упражнения, помещенные ниже [1]).

Упражнения

2. Получить асимптотическое разложение решения уравнения

$$u'' \pm (1 + g(t))\, u = 0, \tag{61}$$

где

$$g(t) \sim \frac{g_1}{t} + \frac{g_2}{t^2} + \ldots \tag{62}$$

3. Применяя асимптотическое разложение, полученное выше, найти асимптотические разложения для нулей решений уравнения $u'' + (1 + g(t))\, u = 0$.

Различные упражнения

1. Все решения уравнения $d^2z/dt^2 = (A + B(t) + C(t))\, z$ ограничены, если одновременно выполняются условия:

(а) A — постоянная отрицательно определенная матрица;

(б) матрица $B(t)$ симметрична;

(в) $(1 + c_1) \left| \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t)\, x_i x_j \right| \leqslant \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right|$ при $t \geqslant t_0$ для некоторого $c_1 > 0$;

(г) $\int^{\infty} \|dB/dt\|\, dt < \infty$, $\int^{\infty} \|C(t)\|\, dt < \infty$.

2. Если $dy/dt = A(t)\, y$, $y(0) = y_0$, то $\|y\| \leqslant \|y_0\| \exp\left[\int_0^t \|A(t_1)\|\, dt_1\right]$.

3. Если $\int^{\infty} \|A(t)\|\, dt < \infty$, то $\lim_{t \to \infty} y$ существует (Тржитзинский).

4. Если $\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{\infty} |a_{ij} + a_{ji}|\, dt < \infty$, то все решения уравнения $dy/dt = A(t)\, y$ ограничены при $t \to \infty$.

5. Существует ортогональная матрица $B(t)$, для которой замена $y = B(t)\, z$ преобразует уравнение $dy/dt = A(t)\, y$ в уравнение $dz/dt = A^*(t)\, z$, где $A^*(t)$ — треугольная матрица (Дилиберто).

6. Существует ограниченная невырожденная матрица $B(t)$, для которой матрица $A^*(t)$ диагональна (Дилиберто).

---

[1]) См. примечание 4 в конце книги. — *Прим. перев.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R., The stability of solutions of linear differential equations, Duke Math. Journ., **10** (1943), 643—647.
2. Caligo O., Un criterio sufficiente di stabilita per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni, Rend. R. Acc. d'Italia (7), **1** (1940), 497—506.
3. Cesari L., Sulla stabilita delle soluzione delle equazioni differenziali lineari, Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 2, **8** (1939), 131—148.
4. Dini U., Studi sulla equazioni differenziali lineari, Annali di Mat., ser. 3, **3** (1900), 125—183.
5. Hukuhara M., Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires: domaine réel, Journ. Fac. of Sci. Hokkaido Imp. Univ., ser. 1, **2** (1934), 13—88.
6. Levinson N., The asymptotic behavior of a system of linear differential equations, Amer. Journ. Math., **68** (1946), 1—6.
7. Späth H., Ueber das asymptotische Verhalten des Lösungen nichthomogener linearer Differentialgleichungen, Math. Zeit., **30** (1929), 487—513.
8. Weyl H., Comment on the preceding paper, Amer. Journ. Math., **68** (1946), 7—12.

По поводу основной леммы см. также

9. Gronwall T. H., Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, Ann. of Math., **20** (1918), 292—296.
10. Guliano L., Generalizzazione di un lemma di Gronwall..., Rend. Accad. Lincei (1946), 1264—1271.

П. 3. См. указанную выше статью Чезари [3].

П. 5. По поводу теоремы 7 см.

11. Perron O., Math. Ann., **143** (1913), 25—50.

По поводу доказательства теоремы 8 см. Беллман [1] и Калиго [2], а также

12. Wintner A., Amer. Journ. Math., **68** (1946), 185—213.

П. 6.

13. Bellman R., The boundedness of solutions of linear differential equations, Duke Math. Journ., **14** (1947), 83—97.

По поводу асимптотического поведения решений см.

14. Dunkel O., Regular singular points of a system of homogeneous linear differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad. Arts Sci., **38** (1912—1913), 341—370.

П. 7.

15. Levinson N., The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations, Duke Math. Journ., **15** (1948), 111—126.

П. 8. Классической статьей по приложению асимптотических рядов к теории дифференциальных уравнений является статья

16. Borel E., Mémoire sur les séries divergentes, Ann. École Norm., **16** (1899), 9—136.

См. также книгу

17. Borel E., Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901.

П. 9. При помощи другого метода этот результат был получен Хукухара [5]. Обзор результатов к 1938 г. см.

18. Trjitzinsky W. J., Singular points problems in the theory of linear differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 209—233.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

От переводчика. Укажем еще некоторые работы, имеющие непосредственное отношение к рассматриваемым в гл. II вопросам.

1. Faedo S., Proprietà asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei, Ann. di Math., ser. 4, **26**, No 1—2 (1947), 207—215.
2. Wintner A., Cn linear asymptotic equilibria, Amer. Journ. of Math. **71**, No 4 (1949), 853—858.
3. Демидович Б. П., Об одном критическом случае устойчивости в смысле Ляпунова, ДАН СССР, **72**, № 6 (1950), 1005—1008.
4. Ascoli G., Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. I, Atti Acc. Naz. Lincei, ser. 8, **9**, No 3—4 (1950), 129—134.
5. Levi E., Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. I, Atti Acc. Naz. Lincei, ser. 8, **8**, № 5 (1950), 465—470.
6. Басов В. П., Необходимые и достаточные условия устойчивости решения некоторого класса систем линейных дифференциальных уравнений в одном сомнительном случае, ДАН СССР, **81**, № 1 (1951), 5—8.
7. Демидович Б. П., Об устойчивости в смысле Ляпунова линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. сборник, нов. сер. **28** (**70**), № 3 (1951), 659—684.
8. Antosiewicz H. A., A note on asymptotic stability, Quart. Appl. Math., **9**, No 3 (1951), 317—319.
9. Conti R., Criteri sufficienti di stabilità per i sistemi di equazioni integrali lineari, Atti. Acc. Naz. Lincei, ser. 8, **11**, No 3—4 (1951), 164—167.
10. Conti R., Un criterio sufficiente di stabilità per i sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee, Bull. Un. Mat. Ital. (3), **6**, No 4 (1951), 288—293.
11. Гаврилов Н. И., Об устойчивости по Ляпунову системы линейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **84**, № 3 (1952), 425—428.
12. Sternberg R. L., Variational methods and non-oscillation theorems for systems of differential equations, Duke Math. Journ., **19**, No 2 (1952), 311—322.
13. Бурдина В И., Критерий ограниченности решений системы дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, **90**, № 3 (1953), 329—332.
14. Бурдина В. И., Об ограниченности решений системы дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **93**, № 4, 603—606.
15. Донская Л. И., О структуре решений системы трех линейных однородных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой, Вестник ЛГУ, № 5 (1953), 15—64.

Глава III

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Введение. В предыдущих главах мы исследовали свойства линейных систем вида $dz/dt = Az$. Мы переходим теперь к предварительному исследованию нелинейных задач вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n, t), \\ z_i(0) &= c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Вводя новую зависимую переменную $z_{n+1} = t$, мы можем записать задачу (1) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \frac{dz_{n+1}}{dt} &= 1, \\ z_i(0) &= c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ z_{n+1}(0) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем теперь правые части уравнений уже не зависят явно от t. Задачу (2), и даже несколько более общую задачу, можно записать в компактном виде

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \qquad z(0) = c, \tag{3}$$

где $f(z)$ означает вектор с i-й компонентой $f_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$. В дальнейшем порядок систем мы будем обозначать через n, а не через $n+1$.

Мы выведем теперь некоторые простые условия, гарантирующие существование и единственность решения задачи (3). Однако более важно то, что при этом мы будем иметь подходящий случай показать два основных метода: один, имеющий крайне важное теоретическое значение, и другой, имеющий столь же важное практическое значение в связи с численным решением дифференциальных уравнений, обыкновенных или с частными производными. Первый метод

представляет собой встречавшийся нам ранее метод последовательных приближений, второй — метод конечных разностей. Этот последний состоит в замене уравнения (3) разностным уравнением

$$z(t+h)-z(t)=hf(z), \qquad z(0)=c,$$

в котором t принимает только значения 0, h, $2h$ и т. д.

Третий мощный метод доказательства теорем существования — метод неподвижных точек в функциональных пространствах — не будет рассматриваться в этой книге, так как он связан с неэлементарными понятиями.

Так как вопросы существования и единственности в малом не представляют для нас главного интереса, то мы ограничимся формулировкой и доказательством лишь основных результатов.

2. Метод последовательных приближений. Естественным обобщением метода, примененного нами для линейных систем, является следующее индуктивное определение последовательности $\{z_m\}$:

$$z_0=c,$$

$$\frac{dz_{m+1}}{dt}=f(z_m), \qquad z_{m+1}(0)=c, \qquad m=0,\ 1,\ \ldots.$$

Это определение эквивалентно следующему:

$$\left.\begin{aligned} z_0&=c,\\ z_{m+1}&=c+\int_0^t f(z_m)\,dt_1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Предположим, что $f(z)$ является непрерывной функцией z в некоторой окрестности c, например в замкнутой области R, определенной неравенством $\|z-c\|\leqslant c_1$. Определение, выраженное формулами (4), является индуктивным и потому дает повод к вопросу, действительно ли определены функции $z_m(t)$ при $m\geqslant 2$? В самом деле, может случиться так, что функция $f(z_m)$ окажется не определенной для некоторых значений t. Покажем, что, ограничивая изменение переменной t соответственно выбранным интервалом, мы можем гарантировать существование всех z_m. Из соотношения (4) получаем

$$\|z_{m+1}-c\|\leqslant\int_0^t\|f(z_m)\|\,dt_1\leqslant c_2t,$$

где $c_2=\max\|f(z)\|$ при $z\in R$. Поэтому если $c_2t\leqslant c_1$, то z_{m+1} также будет находиться в области R. Впредь мы будем считать, что t находится в интервале $0\leqslant t\leqslant c_1/c_2$.

Теперь мы должны рассмотреть вопрос о сходимости последовательности $\{z_m\}$. Как и раньше, этот вопрос эквивалентен вопросу о сходимости ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(z_{m+1}-z_m)$. Вместо этого ряда мы рассмотрим мажорирующий ряд $\sum\|z_{m+1}-z_m\|$. Из соотношения (4) получаем для $m\geqslant 1$ неравенство

$$\|z_{m+1}-z_m\|\leqslant\int\limits_0^t\|f(z_m)-f(z_{m-1})\|\,dt. \tag{5}$$

Чтобы продолжить доказательство по схеме п. 3 гл. I, мы потребуем выполнения некоторого соотношения между величинами $\|f(z_m)-f(z_{m-1})\|$ и $\|z_m-z_{m-1}\|$. Предположим, что для любых векторов $x\in R$ и $y\in R$ имеет место неравенство

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant c_3\|x-y\|, \tag{6}$$

где c_3 — постоянная, не зависящая от векторов x и y. Условие такого вида называется *условием Липшица*. Из него автоматически следует непрерывность функции $f(x)$.

Возвращаясь к неравенству (5) и применяя условие (6), получаем

$$\|z_{m+1}-z_m\|\leqslant c_3\int\limits_0^t\|z_m-z_{m-1}\|\,dt_1,\qquad m\geqslant 1. \tag{7}$$

Так как $\|z_1-z_0\|=\int\limits_0^t\|f(z_0)\|\,dt_1=\|f(c)\|\,t=c_4t$, то, выполняя итерирование по формуле (7), мы приходим к неравенству

$$\|z_{m+1}-z_m\|\leqslant\frac{c_4c_3^mt^{m+1}}{(m+1)!},$$

откуда заключаем, что ряд $\sum\|z_{m+1}-z_m\|$ при $0\leqslant t\leqslant c_1/c_2$ сходится равномерно. Отсюда следует, что последовательность $\{z_m\}$ равномерно сходится к функции $z(t)$, удовлетворяющей интегральному уравнению

$$z=c+\int\limits_0^t f(z)\,dt,$$

а следовательно, и начальной задаче (3).

Прежде чем перейти к исследованию единственности, упомянем о простом условии, которое достаточно наложить на функцию $f(z)$ чтобы для нее выполнялось условие Липшица. Теорема о среднем значении показывает, что если функция $f(z)$ имеет ограниченные частные производные по переменным z_i в области R, то эта функция заведомо удовлетворяет в R условию Липшица.

3. Единственность. Покажем теперь, что решение, найденное методом последовательных приближений, при сделанных предположениях является единственным решением задачи

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \qquad z(0) = c \tag{3}$$

на отрезке $0 \leqslant t \leqslant c_1/c_2$. Допустим, что существует другое решение y этой задачи. Так как y непрерывно и его значение при $t = 0$ содержится в R, то $y \in R$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где t_1 положительно. Пусть $t_2 = \min [c_1/c_2, t_1]$. Для $0 \leqslant t \leqslant t_2$, комбинируя равенство

$$y = c + \int_0^t f(y)\,dy$$

с формулой (4) предыдущего пункта, мы получаем неравенство

$$\|z_{m+1} - y\| \leqslant \int_0^t \|f(z_m) - f(y)\|\,dt_1$$

и отсюда

$$\|z_{m+1} - y\| \leqslant c_3 \int_0^t \|z_m - y\|\,dt_1.$$

Принимая во внимание, что $\|z_0 - y\| \leqslant \int_0^t \|f(y)\|\,dt_1 \leqslant c_2 t$, получаем при помощи итераций

$$\|z_m - y\| \leqslant \frac{c_2 c_3^m t^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Устремляя здесь m к ∞, мы видим, что $\|z - y\| \leqslant 0$, откуда $z \equiv y$ на интервале $[0, t_2]$. Если $t_2 = c_1/c_2$, то наше доказательство закончено. Если же это не так, то мы можем начать от значения $t = t_2$ и получить бóльший интервал, на котором $y \equiv z$. Однако если поступать таким образом, то нельзя быть уверенным в том, что когда-либо мы исчерпаем весь интервал $[0, t_0]$. Поэтому мы продолжим рассуждения следующим образом. Мы знаем, что можно найти ненулевой интервал $[0, \tau]$, на котором $z \equiv y$. Пусть $[0, \tau]$ — наибольший из таких интервалов. Так как y и z непрерывны, то этот интервал должен быть замкнут. Если $\tau < c_1/c_2$, то мы можем, применяя указанный выше метод, еще увеличить этот интервал. Значит, $\tau = c_1/c_2$.

Итак, мы закончили доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Если для любых двух точек x и y области R, определенной неравенством $\|z - c\| \leqslant c_1$, имеет место неравенство*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant c_3 \|x - y\|, \tag{6}$$

где c_3 — *постоянная, то при* $0 \leqslant t \leqslant c_1/c_2$, *где* $c_2 = \max\limits_R \|f(z)\|$, *существует единственное решение задачи*

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \qquad z(0) = c. \tag{3}$$

Упражнения

1. Рассмотрим последовательность функций, определенную равенствами

$$z_0 = w(t),$$

$$z_{n+1} = c + \int_0^t f(z_n)\,dt_1, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

где $w(0) = c$. Будет ли эта последовательность при соответствующих предположениях относительно $w(t)$ сходиться к решению дифференциального уравнения, если $f(z)$ удовлетворяет указанным выше условиям?

2. Существуют ли функции $f(z)$, отличные от линейных и удовлетворяющие условию Липшица для всех вещественных z?

3. Необходимо ли для существования и единственности решения, чтобы функция $f(z)$ была непрерывной? Рассмотрите, например, задачу для скалярного уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u), \qquad u(0) = \frac{1}{4},$$

где

$$f(u) = 0 \quad \left(-\infty < u < \frac{1}{2}\right), \qquad f(u) = 1 \quad \left(u \geqslant \frac{1}{2}\right).$$

Какое обобщение теоремы 1 здесь имеет место?

4. **Пример, иллюстрирующий отсутствие единственности.** Мы видели, что условие Липшица влечет за собой существование и единственность решения задачи

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \qquad y(0) = c. \tag{8}$$

Предположим теперь, что функция $f(y)$ только непрерывна. Как мы увидим ниже, это условие достаточно для того, чтобы гарантировать существование по крайней мере одного решения задачи (8). Однако при этом предположении мы не можем утверждать единственности решения, так как ее, вообще говоря, не будет.

Рассмотрим простой пример. Скалярное уравнение

$$\frac{du}{dt} = \sqrt[3]{u}, \qquad u(0) = 0$$

имеет два решения:

$$u = 0,$$

$$u = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2}$$

при $t \geqslant 0$. Конечно, функция $\sqrt[3]{u}$ не удовлетворяет условию Липшица в окрестности значения $u = 0$.

Упражнения

1. Показать, что задача $du/dt = u^a$, $u = 0$ при $t = 0$, имеет по крайней мере два решения для $0 < a < 1$ и одно для $a = 1$.

2. Рассмотреть задачу $du/dt = u(\ln u)^a$, $u = 0$ при $t = 0$. Для каких значений a она имеет единственное решение?

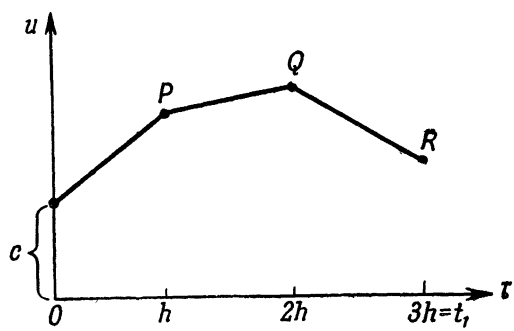
3. Рассмотреть задачу $du/dt = f(u)$, $u = 0$ при $t = 0$, причем $\int\limits_0 du/|f(u)| = \infty$. Будет ли решение в этом предположении единственным?

5. Метод конечных разностей. Заменим дифференциальное уравнение, которое мы рассматривали выше, разностным уравнением

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(y(t)), \qquad t = 0,\ h,\ 2h,\ \ldots. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) можно продолжить до точки $t = ph$, если значения $y(kh)$ при $k = 0, 1, \ldots, p-1$ лежат в R. Как и ранее, это справедливо для $(p-1)h \leqslant c_1/c_2$, где c_1 и c_2 имеют указанный выше смысл.

Геометрический смысл этого приближения может быть очень просто выяснен для случая скалярного уравнения. Предположим, что u является решением задачи $du/dt = f(u)$, $u(0) = c$, и мы хотим найти



Фиг. 2.

значение u в точке t_1. Положим $t_1 = 3h$ и разделим интервал $[0, t_1]$ на три равные части длины h, как это показано на фиг. 2. Допустив, что на интервале $[0, h]$ графиком решения служит прямая линия, мы найдем, что ее уравнение будет иметь вид

$$u = c + tf(0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant h,$$

так как ее наклон определяется при помощи дифференциального уравнения. При $t = h$ будет $u = c + hf(c)$. Предположим, что между точками P и Q график решения есть также прямая линия, наклон

которой определяется при помощи дифференциального уравнения. Уравнение прямой PQ будет иметь вид

$$u = u(h) + f(u(h))(t - h), \qquad h \leqslant t \leqslant 2h,$$

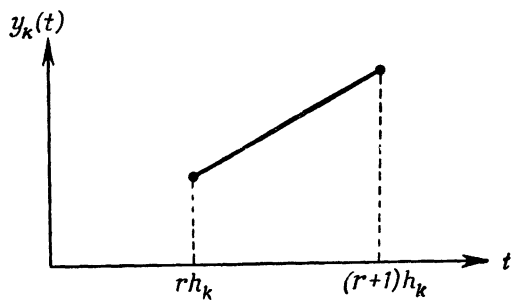
где $u(h) = c + hf(c)$. Продолжая таким образом, мы определим прямую QR, а следовательно, и значение $u(3h)$. Если мы хотим достичь лучшего приближения, то повторяем процесс, взяв шесть интервалов вместо трех, затем двенадцать интервалов и т. д.

Покажем, что при единственном предположении о непрерывности функции $f(u)$ можно получить последовательность решений разностного уравнения для различных значений $h \to 0$, которая стремится к решению дифференциального уравнения. Это доказательство будет только доказательством существования, не конструктивным, в том смысле, что таким путем мы не можем с уверенностью действительно подсчитать решение. Если мы хотим получить численные решения, то мы должны привлечь наше предыдущее условие—условие Липшица. Исследование вопроса о сходимости при этом условии мы предоставляем читателю в качестве упражнения и рассмотрим детально только тот случай, когда предполагается одна непрерывность.

Для простоты положим $h_1 = h$, $h_{m+1} = h_m/2 = h/2^m$. Для каждого h_k мы имеем свое разностное (векторное) уравнение

$$\frac{y(t + h_k) - y(t)}{h_k} = f(y(t)), \qquad t = 0,\ h_k,\ 2h_k,\ \ldots.$$

При помощи разностного уравнения для каждого h_k можно подсчитать совокупность значений $y(0)$, $y(h_k)$, ..., $y(nh_k)$, где n — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $(n-1)h_k \leqslant c_1/c_2$.



Фиг. 3.

Ясно, что для каждого k мы будем иметь свое n. Построим теперь функцию, принимающую значения $y(0)$, $y(h_k)$, ... соответственно при $t = 0$, h_k, ... и линейную между этими значениями. Эта функция схематически показана на фиг. 3.

Докажем, что последовательность $\{y_k(t)\}$ равномерно по k удовлетворяет условию Липшица

$$|y_k(t)-y_k(s)|\leqslant c_2|t-s|,\quad 0\leqslant t,\ s\leqslant\frac{c_1}{c_2},$$

где $c_2=\max\limits_{y\in R}\|f(y)\|$, очевидно, не зависит от k.

В этом мы убедимся следующим образом. Если s и t находятся на одном и том же отрезке $[rh_k,\ (r+1)h_k]$, то

$$y_k(t)-y_k(s)=(t-s)f(y_k(rh_k)),$$

так как на каждом интервале $[rh_k,\ (r+1)h_k]$ имеем

$$y_k(t)=y_k(rh_k)+(t-rh_k)f(y_k(rh_k)).$$

Если s и t находятся на соседних интервалах, $s<rh_k<t$, то пишем

$$y_k(t)-y_k(s)=y_k(t)-y_k(rh_k)+y_k(rh_k)-y_k(s),$$

откуда

$$\|y_k(t)-y_k(s)\|\leqslant\|y_k(t)-y_k(rh_k)\|+\|y_k(rh_k)-y_k(s)\|\leqslant$$
$$\leqslant c_2[(t-rh_k)+(rh_k-s)]=c_2(t-s).$$

Вообще, если s и t — любые две точки отрезка $[0,\ c_1/c_2]$, то, написав

$$y_k(t)-y_k(s)=[y_k(t)-y_k(rh_k)]+$$
$$+[y_k(rh_k)-y_k((r-1)h_k)]+\ldots+[y_k(ph_k)-y_k(s)],$$

мы выведем общее неравенство

$$\|y_k(t)-y_k(s)\|\leqslant c_2|t-s|.$$

Из этого неравенства следует, что на отрезке $[0,\ c_1/c_2]$ при $|t-s|\leqslant\delta$ для всех k будет $\|y_k(t)-y_k(s)\|\leqslant\varepsilon$, причем $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ и не зависит от k. Последовательность $\{y_k(t)\}$, удовлетворяющая этому условию, называется *равностепенно непрерывной*.

Докажем теперь следующий общий результат:

Лемма о выборе (Арцела). *Пусть $\{y_m(t)\}$ — бесконечная последовательность равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций на конечном отрезке $[a,\ b]$. Тогда существует подпоследовательность, сходящаяся на $[a,\ b]$ равномерно.*

Доказательство. Пусть $t_1,\ t_2,\ \ldots$ — рациональные точки отрезка $[a,\ b]$, занумерованные в каком-либо порядке. Последовательность $\{y_m(t_1)\}$ равномерно ограничена и потому содержит сходящуюся подпоследовательность $\{y_{m,1}(t_1)\}$. Рассмотрим теперь последовательность $\{y_{m,1}(t_2)\}$. Так как она равномерно ограничена, то она, в свою очередь, содержит сходящуюся подпоследовательность $\{y_{m,2}(t_2)\}$. Продолжая

таким образом, мы для каждого k получаем последовательность $\{y_{m,k}(t)\}$, сходящуюся при $t=t_1, t_2, \ldots, t_k$. Рассмотрим теперь последовательность $\{y_{k,k}(t)\}$. В силу нашего построения эта последовательность сходится в каждой из точек $t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots$. Пусть $y(t)$ — предельная функция, определенная пока только при $t=t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots$. Так как исходная последовательность $\{y_n(t)\}$ была равностепенно непрерывной, то $\|y_{k,k}(t_i)-y_{k,k}(t_j)\| \leqslant \varepsilon$ для $|t_i-t_j| \leqslant \delta(\varepsilon)$, причем δ не зависит от k. Следовательно, этим свойством обладает и предельная функция $y(t)$, т. е. $\|y(t_i)-y(t_j)\| \leqslant \varepsilon$ при $|t_i-t_j| < \delta(\varepsilon)$, что означает непрерывность $y(t)$ на множестве $\{t_i\}$. Определим теперь функцию $y(t)$ для всех t на отрезке $[a, b]$ при помощи соотношения $y(t)=\lim y(t_i)$, когда $t_i \to t$ по последовательности рациональных чисел.

Остается показать, что $y_{k,k}(t) \to y(t)$ равномерно для $t \in [a, b]$. Разделим $[a, b]$ на N равных частей, где число N будет вскоре определено, и пусть точками деления будут $a=s_0, s_1, \ldots, s_N=b$. Пусть p_r — какая-либо рациональная точка отрезка $[s_r, s_{r+1}]$. Если $s_r \leqslant t \leqslant s_{r+1}$, то

$$y_{k,k}(t)-y(t)=(y_{k,k}(t)-y_{k,k}(p_r))+(y_{k,k}(p_r)-y(p_r))+(y(p_r)-y(t)).$$

Выберем N так, что $\|y_{k,k}(t)-y_{k,k}(p_r)\| \leqslant \varepsilon$ при $s_r \leqslant t \leqslant s_{r+1}$ для всех k. Это можно сделать в силу равностепенной непрерывности. Отсюда следует, что и $\|y(p_r)-y(t)\| \leqslant \varepsilon$.

Пусть теперь при $k \geqslant k_0$, где k_0 зависит от N; для $l=0, 1, 2, \ldots, N$ будет $\|y_{k,k}(p_l)-y(p_l)\| \leqslant \varepsilon$. Тогда при $k \geqslant k_0$, где k_0 зависит только от ε, будет $\|y_{k,k}(t)-y(t)\| \leqslant 3\varepsilon$, откуда и следует равномерная сходимость.

Упражнение

1. Показать при помощи противоречащих примеров, что последняя теорема перестает быть справедливой, если в ее формулировке опустить любое из трех условий: равномерной ограниченности, равностепенной непрерывности и конечности отрезка $[a, b]$.

Установив этот результат, применим его к последовательности $\{y_k(t)\}$, полученной из разностных уравнений. Надо показать, что предельная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению. Это можно сделать непосредственно, однако легче, как обычно, показать, что y удовлетворяет интегральному уравнению. Для любых l и k имеем

$$y_k[(l+1)h_k]=y_k(lh_k)+h_k f[y_k(lh_k)].$$

Просуммировав эти равенства для $l=0, 1, 2, \ldots, L$, получим

$$y_k[(L+1)h_k]=c+\sum_{l=0}^{L} h_k f[y_k(lh_k)], \tag{10}$$

так как $y_k(0)=c$ при каждом k. Пусть L выбрано так, что $Lh_k \to t$ при $k \to \infty$ и $h_k \to 0$; например $L=[t/h_k]$. Тогда $y_k[(L+1)h_k] \to y(t)$. Так как сумма, стоящая в правой части равенства (10), внешне напоминает интегральную сумму для интеграла Римана, то можно ожидать, что она стремится к $\int\limits_0^t f(y)\,dt$ при $k \to \infty$, что нам и требуется. Имеем

$$\sum_{l=0}^{L} h_k f[y_k(lh_k)] = \sum_{l=0}^{L} h_k f[y(lh_k)] + \sum_{l=0}^{L} h_k \{f[y_k(lh_k)] - f[y(lh_k)]\},$$

где L — целая часть числа t/h_k. Первая сумма стремится к $\int\limits_0^t f(y)\,dt$, так как она отличается от интегральной суммы на выражение $(h_k(L+1)-t)f[y(lh_k)]$, очевидно, стремящееся к нулю. Так как последовательность $\{y_k(t)\}$ равномерно сходится и функция $f(y)$ непрерывна, то $\|f[y_k(lh_k)]-f[y(lh_k)]\| \leqslant \varepsilon$ для всех l при $k \geqslant k_0$. Отсюда следует неравенство

$$\Big\|\sum_{l=0}^{L} h_k \{f[y_k(lh_k)] - f[y(lh_k)]\}\Big\| \leqslant \varepsilon h_k(L+1) \leqslant 2+\varepsilon t,$$

которое и завершает доказательство.

Упражнения

2. Доказать непосредственно, что функция $y(t)$ дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=f(y)$.

3. В предположениях теоремы 1 показать, что z является непрерывной функцией начального вектора c в некоторой окрестности вектора c. При этом предполагается, что $0 \leqslant t \leqslant t_0 < c_1/c_2$.

4. Пусть $z(t, c)$ — решение задачи $dz/dt=f(z)$, $z(0)=c$, где f удовлетворяет условиям упражнения 3. Показать, что для достаточно малых s и t будет $z(s+t, c)=z(s, z(t, c))$.

5. Рассмотреть скалярное уравнение $du/dt=au+u^\alpha$ (уравнение Бернулли). Его можно решить в элементарных функциях, положив $v=1/u^{\alpha-1}$. Показать непосредственно, что функциональное уравнение упражнения 4 для него удовлетворяется.

6. На фиксированном отрезке $[0, a]$ найти выражение для разности между решениями двух векторных задач

$$y'=f(y), \quad y(0)=c_1,$$
$$z'=g(z), \quad z(0)=c_2.$$

7. (Обобщение метода Ньютона.) Сравнить скорость сходимости последовательных приближений, определяемых формулами

$$y'_{n+1}=f(y_n), \quad y_{n+1}(0)=c,$$

и приближений, определяемых формулами

$$y'_{n+1}=f(y_n)+(y_{n+1}-y_n)f'(y_n), \quad y_{n+1}(0)=c.$$

8. Рассмотрим систему $dy_i/dt = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $|f_i(y, t) - f_i(z, t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} l_k |y_k - z_k|$ для всех y_k и z_k. Пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — два каких-либо различных ее решения, для которых $y_k(t_k) = z_k(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где t_k — некоторые n точек интервала $[a, b]$. Тогда $b - a > 1/\sum_{k=1}^{n} l_k$. Поэтому если

$$f_i(0, t) = 0,$$

то решение системы, не равное тождественно нулю, может иметь компоненты, обращающиеся в нуль в некоторых точках интервала длины $b - a$, только в том случае, если $b - a$ удовлетворяет указанному неравенству (Файт).

9. Применяя нелинейное интегральное уравнение

$$u = \exp\left[-\int_0^t (t - t_1)^2 u(t_1)\, dt_1\right], \qquad u = w'',$$

установить для $0 \leqslant t < \infty$ существование решения уравнения $w'' + 2ww'' = 0$ при условии $w(0) = w'(0)$, $w''(0) = 1$ (Вейль).

ЛИТЕРАТУРА

По поводу новых результатов о существовании и единственности решений систем первого порядка см.

1. La Salle J. P., Uniqueness theorems and successive approximations, Ann. of Math., **50** (1949), 722—730.

Здесь можно найти также ссылки на предшествующие работы.

Читателю будет полезно также обратиться к следующим книгам:

2*. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М. — Л., 1952.
3. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.
4. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1950.
5. Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, М., 1953; т. II, М., 1954.

Глава IV

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение. В этой главе мы начинаем изучение устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений. Мы будем рассматривать только системы вида

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, z_j + f_i(z,\ t), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

где $f_i(z,\ t)$ — нелинейные функции z_j. Наиболее важным случаем является тот, когда f_i не зависят от t и представляют собой суммы степенных рядов от компонент вектора z без свободного члена и членов первой степени; этим случаем мы и будем заниматься. Применяя векторно-матричную символику, мы можем записать систему (1) в виде

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z + f(z). \tag{2}$$

Мы будем пользоваться следующим *условием нелинейности*:

$$\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|z\| \to 0. \tag{3}$$

Если мы хотим получить сколько-нибудь глубокие результаты, то нужно ограничить общность и потребовать, чтобы матрица A удовлетворяла, например, одному из следующих условий:

(а) $A(t)$ постоянна,

(б) $A(t)$ — периодическая матрица,

(в) $A(t)$ асимптотически приближается к постоянной или периодической матрице.

Сюда не включен важный класс почти периодических матриц. Несмотря на очевидную важность уравнений этого класса и внимание, которое они привлекли, результаты здесь еще не полны. Поэтому мы не будем приводить ни одного из известных результатов в этой области.

Из свойства нелинейности $f(z)$, выраженного условием (3), мы видим, что $z = 0$ является решением уравнения (2). Мы назовем это решение *нулевым* или *тривиальным* и будем интересоваться решениями, остающимися близкими к $z = 0$. Интуитивно ясное понятие близости будет уточнено ниже.

Наше изложение теории нелинейных уравнений будет существенно неполным из-за отсутствия упоминаний о периодических решениях. Несмотря на кажущуюся простоту понятия периодичности, теория периодических решений является одной из наиболее трудных современных аналитических теорий и опирается на ряд глубоких и сложных теорем топологии. Поэтому нам кажется, что изложение этого материала было бы неуместным в книге вводного характера.

2. Устойчивость. Начнем с определения того, в каком смысле мы будем применять столь часто употребляемое слово „устойчивость".

Определение. Решение $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ уравнения (2) п. 1 называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого другого решения $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ этого уравнения, для которого $\|z-y\|\leqslant\delta$ при $t=t_0$, имеет место неравенство $\|z-y\|\leqslant\varepsilon$ для $t\geqslant t_0$.

Геометрически такое решение z можно представить как кривую в n-мерном пространстве, окруженную трубкой, обладающей тем свойством, что каждое решение, попавшее однажды внутрь этой трубки, в дальнейшем должно оставаться внутри несколько более широкой трубки [1]).

Покажем теперь, как вопрос об устойчивости любого решения можно свести к вопросу об устойчивости нулевого решения $w=0$ соответственно выбранного уравнения. Пусть уравнение $dz/dt=f(z)$ обладает решением z, устойчивость которого надо исследовать. Положим $y=z+w$, где w — другое решение того же уравнения. Тогда

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dt}+\frac{dw}{dt}=f(z+w)=f(z)+J(f, z)w+\ldots,$$

где $J(f, z)$ — матрица Якоби функции f по вектору z. Уравнением для w будет

$$\frac{dw}{dt}=J(f, z)w+\ldots \tag{4}$$

— уравнение вида (2) [2]).

---

[1]) Эта иллюстрация не совсем удачна. Устойчивость имеет описанный геометрический смысл, если решение рассматривать как кривую в $n+1$-мерном пространстве $y_1, \ldots, y_n, t$. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь автор допускает неточность: в уравнении (4) вместо z нужно подставлять исследуемое решение $z=z(t)$, и поэтому, вообще говоря, получится уравнение вида (1), а не (2), хотя исходное уравнение и имеет вид (2). В этом легко убедиться на простом примере: пусть $dz/dt=z^3$ и исследуется решение $z=\varphi(t)$ этого уравнения; подстановка $z=\varphi(t)+w$ дает $dw/dt=3\varphi^2(t)w+3\varphi(t)w^2+w^3$. Таким образом, дальнейшие результаты этой главы, строго говоря, относятся лишь к устойчивости нулевого решения. Однако эти результаты можно легко распространить и на системы уравнений вида (1). — *Прим. перев.*

Естественно ожидать, что устойчивость нулевого решения уравнения (4) тесно связана с устойчивостью нулевого решения линейного приближения для этого уравнения

$$\frac{dw}{dt} = J(f, z)\, w. \tag{5}$$

Мы докажем, что при некоторых дополнительных предположениях о линейном уравнении эта связь представляет собой почти полную эквивалентность в случаях, когда J — постоянная или периодическая матрица. А затем при помощи противоречащего примера мы покажем, что естественное предположение о том, что устойчивость решения $w = 0$ линейного уравнения (5) всегда влечет за собой то же свойство для уравнения (4), несправедливо.

Во многих интересных случаях уравнение общего типа при помощи замены переменных можно преобразовать к одному из специальных типов, с которыми можно оперировать при помощи одного из предлагаемых здесь методов. В следующих главах мы дадим примеры этого при изучении уравнений

$$\frac{d^2u}{dt^2} - a(t)\, u = 0$$

и

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)\frac{du}{dt}\right) + l(t)\, u^n = 0.$$

3. Предварительный результат. Дальнейшей основой изучения устойчивости тривиальных решений является следующий результат:

Лемма 1. *Рассмотрим систему*

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

где каждая функция f_i не зависит от t и непрерывна по совокупности переменных z_i при $-\infty < z_i < \infty$. Если $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — решение системы (6), *стремящееся к постоянному вектору $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ при $t \to \infty$, то*

$$f_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Доказательство. Из системы (6) видно, что $dz_i/dt \to f_i(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ при $t \to \infty$. Если бы было $f_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) = a \neq 0$, то, например, при $a > 0$ для достаточно больших t мы имели бы $dz_i/dt > a/2$ и z_i не могла бы стремиться к конечному пределу c_i при $t \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Замена переменных $z_i = c_i + w_i$ переводит (6) в уравнение, имеющее решением нулевой вектор $w = 0$.

Предположим теперь, что нам дана некоторая механическая система s, определяемая n параметрами $z_1, z_2, \ldots, z_n$, зависимость которых от времени выражается системой уравнений вида (6). Если

мы заметим, что положение равновесия существует, когда все z_i являются не зависящими от времени постоянными, то из уравнения (7) найдем все возможные такие состояния. Возникает вопрос о том, что случится с системой, если мы подвергнем ее небольшому возмущению, т. е. если перейдем от значений параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$ к близким значениям $c_1', c_2', \ldots, c_n'$.

Имеются следующие возможности:

1. При $t \to \infty$ решение уравнения (6), определяемое начальным условием $z_i(0) = c_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$, стремится к стационарному решению $z_i = c_i$, т. е. к исходному положению равновесия [1]).

2. При $t \to \infty$ решение приближается к другому положению равновесия.

3. При $t \to \infty$ решение не приближается к положению равновесия в указанном выше смысле. Оно может приближаться к периодическому решению или иметь более сложное поведение.

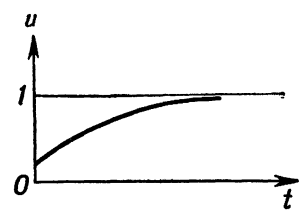
Приведем простые примеры к сказанному выше. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt} + u = 0.$$

Стационарным его решением служит $u = 0$. Если это решение возмутить, перейдя к другому решению с начальным условием $u(t_0) = c_1 \neq 0$ в некоторый момент t_0, то при $t \to \infty$ это новое решение стремится к стационарному. В таком случае мы скажем, что система имеет устойчивое равновесие.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt} = u - u^2.$$



Фиг. 4.

Здесь имеются два положения равновесия, $u = 0$ и $u = 1$ (фиг. 4). Если $u(0) > 0$, то $\lim u = 1$ при $t \to \infty$. Если же $u(0) < 0$, то $u \to -\infty$ при $t \to \infty$. Состояние $u = 0$ является неустойчивым, а состояние $u = 1$ — устойчивым относительно малых возмущений.

Наконец, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0.$$

Его решение $u = 0$ является стационарным. В одном смысле оно устойчиво, в другом же смысле неустойчиво. В самом деле, если мы рассмотрим решение

$$u = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

отвечающее начальному условию $u(0) = c_1$, $u'(0) = c_2$, то u не будет стремиться к нулю при $t \to \infty$. Однако u остается как угодно близким

[1]) См. примечание 5 в конце книги. — *Прим. перев.*

к стационарному решению, если взять $|c_1|+|c_2|$ достаточно малым. Согласно нашему определению устойчивости, данному в п. 2 (оно естественно распространяется на уравнения высших порядков), стационарное решение устойчиво.

4. Основная теорема об устойчивости, первое доказательство. В этом пункте мы излагаем основной результат, связывающий устойчивость нулевого решения нелинейного уравнения с поведением решений линейного уравнения.

Мы запишем наше уравнение в виде

$$\frac{dz}{dt}=Az+f(z), \qquad z(0)=c, \tag{8}$$

где A — постоянная матрица, а $f(z)$ удовлетворяет условию нелинейности $\|f(z)\|/\|z\|\to 0$ при $\|z\|\to 0$.

Можно привести следующие эвристические соображения. Если $\|z(0)\|$ мало, то в силу условия нелинейности $Az+f(z)$ очень близко к Az. Если все решения уравнения $dy/dt=Ay$ стремятся к нулю при $t\to\infty$, то z не имеет возможности стать большим. Поэтому для всех t решение z должно вести себя подобно решению уравнения $dy/dt=Ay$.

Это „доказательство" можно сделать корректным, если A — постоянная матрица. Но в общем случае, когда матрица коэффициентов переменна, это неверно, как мы увидим на особом примере.

Имеет место

Теорема 1. *Если*

(а) *каждое решение уравнения* $dy/dt=Ay$ *стремится к нулю при* $t\to\infty$;

(б) *функция* $f(z)$ *непрерывна в некоторой окрестности* $z=0$;

(в) $\|f(z)\|/\|z\|\to 0$ *при* $\|z\|\to 0$,

то $z=0$ *является устойчивым решением уравнения* (8).

Кроме того, каждое решение этого уравнения, для которого $\|z(0)\|$ *достаточно мало, стремится к нулю при* $t\to\infty$.

В этой главе будет дано три доказательства этой основной теоремы. Каждое доказательство имеет свой специальный интерес и свою область обобщений.

Заметим, что о единственности решения в теореме ничего не говорится. Вообще говоря, мы можем допускать неединственность, и интересным моментом является утверждение теоремы о том, что ни одно непрерывное продолжение решения не может уклониться слишком далеко от тривиального решения, если начальное условие достаточно близко к началу координат [1]).

---

[1]) По поводу связи единственности решения с понятием устойчивости надо заметить еще следующее. Прежде всего, из устойчивости решения сразу следует его единственность (если решение, как обычно, задается при помощи начальных условий). Далее, если правые части системы непрерывны

Первое доказательство. Из нашей основной теоремы о существовании следует, что уравнение (8) обладает решением в некоторой окрестности точки $t=0$, скажем при $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Мы хотим показать, что каждое такое решение можно продолжить на интервал всех положительных значений t. Для этого достаточно показать, что $\|z\|$ равномерно ограничена при $t \geqslant 0$ и что z лежит в области непрерывности функции $f(z)$.

Первое из наших предположений говорит, что решение задачи

$$\frac{dY}{dt} = AY, \qquad Y(0) = I$$

стремится к нулю при $t \to \infty$, откуда, в свою очередь, следует неравенство [1])

$$\int^{\infty} \|Y(t)\| dt < \infty.$$

Так как решение задачи

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \qquad y(0) = c$$

дается формулой $y = Yc$, то мы видим, что $\|y\| \leqslant \|Y\| \|c\| \leqslant a_1 \|c\|$ где $a_1 = \max \|Y(t)\| \geqslant 1$.

Применяя теорему 4 гл. I, заключаем, что нелинейное дифференциальное уравнение (8) можно преобразовать к нелинейному интегральному уравнению

$$z(t) = y(t) + \int_0^t Y(t-t_1) f(z(t_1))\, dt_1. \tag{9}$$

Выведем теперь равномерную оценку для любого решения уравнения (9), именно, оценку $\|z\| < 2a_1 \|c\|$ ($\|c\| \neq 0$), в предположении достаточной малости $\|c\|$. Этим и будет доказана устойчивость. Предположим противное, и пусть t_2 — первая точка интервала $[0, t_0]$, в которой $\|z\| = 2a_1 \|c\|$. Из условия $z(0) = y(0)$ следует, что $t_2 > 0$. В точке t_2 имеем

$$2a_1 \|c\| = \|z\| \leqslant \|y\| + \int_0^{t_2} \|Y(t_2 - t_1)\| \|f(z(t_1))\| dt_1.$$

и удовлетворяют условию Липшица или какому-либо другому условию, обеспечивающему единственность решения, то из теоремы о непрерывной зависимости решения от начального условия следует, что наличие устойчивости или неустойчивости данного решения не зависит от того, при каком значении t задается начальное условие. Если же эта единственность не гарантирована, то начальное значение t, вообще говоря, существенно для систем вида (1), но несущественно, если t не входит в правые части (например, для уравнения (8)). — *Прим. перев.*

[1]) См. упражнение 2 к п. 12 гл. I. — *Прим. перев.*

Если $\|c\|$ достаточно мало, то из нашего предположения (в) следует, что $\|f(z(t))\| \leqslant \varepsilon_1 \|z(t)\|$ при $0 \leqslant t \leqslant t_2$, где ε_1 можно сделать произвольно малым за счет выбора $\|c\|$. Тогда будем иметь

$$2a_1\|c\| \leqslant a_1\|c\| + \varepsilon_1(2a_1\|c\|)\int_0^{t_2}\|Y(t_2-t_1)\|dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant a_1\|c\| + \varepsilon_1(2a_1\|c\|)\int_0^{\infty}\|Y(t_1)\|dt_1 < 2a_1\|c\|,$$

если $\|c\|$, а значит, и ε_1 достаточно мало. Следовательно, точка t_2, введенная выше, не может существовать. Поэтому решение можно продолжить интервал за интервалом на всю положительную полуось t, сохраняя равномерную оценку.

Если $c=0$, то аналогично докажем, что для любого $\alpha > 0$ будет $\|z(t)\| < \alpha$ при $t \geqslant 0$, откуда $z(t) \equiv 0$.

Чтобы показать, что $\|z\| \to 0$ при $t \to \infty$, если $\|z(0)\|$ достаточно мало, сделаем замену переменных $z = xe^{\lambda t}$, где λ — постоянная величина, меньшая нуля и большая вещественной части любого характеристического числа матрицы A. Новая переменная x удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} = (A - \lambda I)x + e^{-\lambda t} f(xe^{\lambda t}).$$

Хотя вид нелинейного члена этого уравнения несколько иной, чем тот, который мы изучали выше, но на основе условия (в) легко провести те же рассуждения. Так как x равномерно ограничена, то $\|z\| \to 0$.

Упражнение

Показать, что требование непрерывности $f(z)$ в доказанной теореме можно существенно ослабить.

5. Основная теорема об устойчивости, второе доказательство. Важнейшим аппаратом, который мы будем еще применять впоследствии, является теорема о преобразовании матриц п. 10 гл. I. Согласно этой теореме, можно найти такую постоянную матрицу T, что

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где элементы, стоящие на главной диагонали, являются характеристическими числами матрицы A, а $|b_{ij}| \leqslant \varepsilon$, причем ε — любая наперед заданная положительная величина.

Подстановка $z = Tx$ дает

$$\frac{dx}{dt} = T^{-1}ATx + T^{-1}f(Tx).$$

Положим $f_1(x) = T^{-1}f(Tx)$. Легко видеть, что функция $f_1(x)$ удовлетворяет тому же условию, что и $f(x)$. Переходя к отдельным компонентам x, получаем

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 + \sum_{j>1} b_{1j}x_j + f_{11}(x),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 + \sum_{j>2} b_{2j}x_j + f_{12}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + f_{1n}(x).$$

Рассмотрим сумму $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$. Так как

$$\frac{d}{dt}|x_k|^2 = \bar{x}_k \frac{dx_k}{dt} + x_k \frac{d\bar{x}_k}{dt} =$$

$$= \lambda_k |x_k|^2 + \sum_{j>k} b_{kj}x_j\bar{x}_k + \bar{x}_k f_{1k}(x) +$$

$$+ \bar{\lambda}_k |x_k|^2 + \sum_{j>k} \bar{b}_{kj}\bar{x}_j x_k + x_k \overline{f_{1k}(x)},$$

где под $\bar{x}_k$ понимается величина, комплексно сопряженная с x_k, то получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right) \leqslant \operatorname{Re}(\lambda)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right) + \varepsilon\|x\|^2 + \|x\|\,\|f_1(x)\|,$$

где λ — характеристическое число с наименьшей по абсолютной величине вещественной частью.

Так как $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, то при $t = 0$ имеем, если $\|x(0)\|$ достаточно мало, неравенство

$$\operatorname{Re}(\lambda)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right) + \varepsilon\|x\|^2 + \|x\|\,\|f_1(x)\| < 0.$$

Значит, $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ убывает в непосредственной близости $t=0$, и повторяя предыдущие рассуждения, получаем следующее неравенство для всех значений t:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k(0)|^2\right) e^{-at}$$

при некотором $a > 0$.

Упражнение

Необходима ли в этом доказательстве непрерывность функции $f(z)$?

6. Основная теорема об устойчивости, третье доказательство. Дадим теперь третье доказательство, основанное на методе последовательных приближений. Так как предположения и утверждения будут теперь несколько иными, чем выше, то мы сформулируем результаты подробнее.

Теорема 1′. *Если выполняются условия*

(а) *каждое решение уравнения* $dy/dt = Ay$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$;

(б) $f(0) = 0$;

(в) $\|f(z_1) - f(z_2)\| \leqslant c_1 \|z_1 - z_2\|$ *для* $\|z_1\|$ *и* $\|z_2\|$, *меньших* c_2, *где* $c_1 \to 0$ *при* $c_2 \to 0$,

то $z = 0$ *является устойчивым решением уравнения* $dz/dt = Az + f(z)$.

Каждое решение z, *для которого* $\|z(0)\|$ *достаточно мало, может быть получено при помощи следующего метода последовательных приближений*:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_0}{dt} = Az_0, \qquad z_0(0) = c, \\ &\frac{dz_{n+1}}{dt} = Az_{n+1} + f(z_n), \qquad z_{n+1}(0) = c, \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и стремится к нулю при $t \to \infty$.

Доказательство. Мы будем исходить из интегрального уравнения

$$z(t) = y(t) + \int_0^t Y(t - t_1) f(z(t_1))\, dt_1 \tag{9}$$

и применим метод последовательных приближений, определяемый формулами (10). Сходимость процесса последовательных приближений, как мы покажем, равномерна по t на бесконечном интервале $0 \leqslant t < \infty$. Доказательство сходимости мы проведем в два шага; первый состоит в доказательстве равномерной ограниченности последовательности $\|z_n\|$

при $0 \leqslant t < \infty$, как всегда в предположении, что $\|z(0)\|$ достаточно мало. На втором шаге надо установить равномерную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (z_{n+1} - z_n)$.

Имеем $\|z_0\| = \|y\| = \|Yc\| \leqslant \|Y\| \, \|c\| \leqslant a_1 \|c\| \leqslant 2a_1 \|c\|$, где $c = z(0) = y(0)$. Покажем теперь, что из неравенства $\|z_n\| \leqslant 2a_1 \|c\|$ следует неравенство $\|z_{n+1}\| \leqslant 2a_1 \|c\|$. На основании формулы (10) имеем

$$\|z_{n+1}\| \leqslant \|y\| + \int_0^t \|Y(t-t_1)\| \, \|f(z_n)\| dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant a_1 \|c\| + \varepsilon_1 \int_0^t \|Y(t-t_1)\| \, \|z_n\| dt_1,$$

если только $\|c\|$ достаточно мало. Отсюда

$$\|z_{n+1}\| \leqslant a_1 \|c\| + \varepsilon_1 (2a_1 \|c\|) \int_0^t \|Y(t-t_1)\| \, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant a_1 \|c\| + \varepsilon_1 (2a_1 \|c\|) \int_0^\infty \|Y(t_1)\| dt_1 \leqslant 2a_1 \|c\|,$$

если $\|c\|$ и, следовательно, ε_1 достаточно малы. Так как требуемое неравенство имеет место для $n = 0$, то оно имеет место для всех $n > 0$.

Докажем теперь сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (z_{n+1} - z_n)$. Имеем

$$z_{n+1} - z_n = \int_0^t Y(t-t_1) [f(z_n) - f(z_{n-1})] \, dt_1,$$

откуда, применяя условие (в), найдем

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leqslant \int_0^t \|Y(t-t_1)\| \, \|f(z_n) - f(z_{n-1})\| dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_0^t \|Y(t-t_1)\| \, \|z_n - z_{n-1}\|. \tag{11}$$

Постоянную c_1 можно сделать произвольно малой, если взять норму $\|c\|$, от которой зависит норма всех z_n, достаточно малой. Из неравенства (11) получаем

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leqslant c_1 \left(\max_{[0,t]} \|z_n - z_{n-1}\| \right) \int_0^t \|Y(t-t_1)\| dt_1,$$

и потому

$$\max_{[0,t]} \|z_{n+1} - z_n\| \leqslant \left(c_1 \int_0^\infty \|Y(t_1)\| dt_1 \right) \max_{[0,t]} \|z_n - z_{n-1}\|.$$

Так как $c_1 \int_0^\infty \|Y(t_1)\| dt_1 = c_3$ меньше единицы для достаточно малого c_2, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{[0,t]} \|z_{n+1} - z_n\|$$

сходится. Эта сходимость равномерна на вещественной положительной полуоси. Значит, последовательность z_n на этом интервале равномерно сходится к предельной функции z, которая в силу (10) удовлетворяет уравнению

$$z = y + \int_0^t Y(t-t_1) f(z)\, dt_1$$

и потому удовлетворяет нашему исходному дифференциальному уравнению.

Так как $\|f(z)\| \leqslant \varepsilon_1 \|z\|$, то получаем неравенство

$$\|z\| \leqslant \|y\| + \varepsilon_1 \int_0^t \|Y(t-t_1)\| \|z\| dt_1 \leqslant c_4 e^{-at} + \varepsilon_1 c_5 \int_0^t e^{-a(t-t_1)} \|z\| dt_1$$

для некоторых положительных постоянных c_4, c_5 и $a > 0$. Отсюда следует неравенство

$$\|z\| e^{at} \leqslant c_4 + \varepsilon_1 c_5 \int_0^t e^{at_1} \|z\| dt_1,$$

и основная лемма п. 2 гл. II показывает, что $\|z\| e^{at} \leqslant c_4 e^{\varepsilon_1 c_5 t}$. Если ε_1 достаточно мало, то мы видим, что $\|z\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Упражнения

1. Показать, что указанный выше результат справедлив для уравнения

$$\frac{dz}{dt} = (A + B(t))\, z + f(z),$$

если $\| B(t) \|$ достаточно мала или если $\int^{\infty} \| B \|\, dt < \infty$. Показать, как можно применить этот результат, чтобы привести уравнение этого типа к случаю, когда матрица A имеет различные характеристические числа.

2. Показать, что указанный выше результат справедлив для уравнения

$$\frac{dz}{dt} = Az + f\left(z, \frac{dz}{dt}\right),$$

если $f(z, dz/dt)$ удовлетворяет соответствующим условиям.

3. Если величина $|u(0)|$ достаточно мала, то решение u уравнения $du/dt = -2u + e^t u^2$ ограничено. Обобщить этот результат.

4. Верно ли, что если $u' + u = u'^3$, а $|u(0)|$ достаточно мало и $u'(0)$ выбрано соответствующим образом, то существует решение u, стремящееся к нулю при $t \to \infty$?

5. Рассмотрим нелинейную систему

$$\frac{dy_i}{dt} + y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \sum_{j,\, k=1}^{n} b_{ijk} y_j y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $b_{ijk} > 0$, в предположении, что имеет место соотношение вида $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = c_1$. Показать, что каждое решение, для которого $y_i(0) \geqslant 0$, можно продолжить на интервал $0 \leqslant t < \infty$, причем эти решения остаются неотрицательными и равномерно ограниченными (Карлеман).

7. Асимптотическое поведение решений. Мы знаем, что решения задачи

$$\frac{dz}{dt} = Az + f(z), \qquad z(0) = c \tag{8}$$

при достаточно малой $\|c\|$ в предположениях теоремы 1 или 1′ стремятся к нулю и даже мажорируются показательными функциями вида e^{-at}, где $a > 0$. При этом возникает вопрос о точном асимптотическом поведении решений.

Рассмотрим наиболее важный частный случай выполнения указанных предположений, когда компоненты $f(z)$ представляют собой степенные ряды по компонентам z, причем в этих рядах отсутствуют свободные члены и члены первой степени.

Уравнение задачи (8) можно тогда записать в виде

$$\frac{dz}{dt} = (A + G(z))\, z, \tag{12}$$

где $G(z)$ означает матрицу, элементы которой являются степенными рядами по компонентам z без свободных членов. Так как $\|z(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то после подстановки $z(t)$ в выражение $G(z)$ из уравнения (12) получим, что это решение $z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz}{dt} = (A + B(t))\, z, \tag{13}$$

где $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и даже $\|B(t)\| \leqslant c_1 e^{-at}$, $a > 0$ при $t \geqslant 0$, причем аналогичная оценка имеет место и для производной.

Если матрица A имеет простые характеристические числа, то асимптотическое поведение решений уравнения (13) можно немедленно вывести из теорем 7, 8 и 10 гл. II. Если же A имеет кратные характеристические числа, то асимптотическое поведение легко получается при помощи аналогичных способов доказательства, если использовать оценки для $B(t)$ и $B'(t)$. Мы предоставим читателю в качестве упражнения получить точные результаты.

8. Периодические коэффициенты. В п. 4 гл. II мы видели, что теоремы, аналогичные теоремам об ограниченности, устойчивости и асимптотическом поведении решений для линейных дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами, легко вытекают из теоремы о представлении решений линейных уравнений с периодическими коэффициентами; применяя то же средство, мы покажем здесь, что теорема, аналогичная теореме 1, имеет место в случае периодической матрицы $A(t)$.

Теорема 2. *Рассмотрим уравнение*

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z + f(z), \tag{2}$$

где $A(t)$ — периодическая матрица с периодом τ.

Тривиальное решение $z = 0$ устойчиво, если

(а) *каждое решение уравнения $dy/dt = A(t)y$ стремится к нулю при $t \to \infty$;*

(б) *функция $f(z)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $z = 0$;*

(в) $\|f(z)\| / \|z\| \to 0$ *при* $\|z\| \to 0$.

Доказательство. Пусть Y — решение задачи

$$\frac{dY}{dt} = A(t)\, Y, \qquad Y(0) = I,$$

а y — решение задачи

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y, \qquad y(0) = z(0),$$

Тогда z по теореме 3 гл. I удовлетворяет интегральному уравнению

$$z = y + \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(t_1)\, f(z)\, dt_1. \tag{14}$$

Согласно теореме о представлении (теорема 11 гл. I) имеем $Y = P(t)\, e^{Bt}$; поэтому (14) приобретает вид

$$z = y + \int_0^t P(t)\, e^{B(t-t_1)} P^{-1}(t_1)\, f(z)\, dt_1. \tag{15}$$

Из неравенства $\|e^{Bt}\| \leqslant \|Y(t)\|\, \|P^{-1}(t)\|$ и предположения (а) следует что $\|e^{Bt}\| \to 0$ при $t \to \infty$, и потому

$$\int^{\infty} \|e^{Bt_1}\|\, dt_1 < \infty.$$

Из формулы (15) выводим

$$\|z\| \leqslant \|y\| + c_1 \int_0^t \|e^{B(t-t_1)}\|\, \|f(z)\|\, dt_1,$$

и доказательство далее продолжается, как в п. 4.

Соображения, примененные в п. 4, приводят к заключению, что $z \to 0$ при $t \to \infty$ [1]).

Упражнение

Проведите доказательство, применяя метод п. 5.

9. Противоречащий пример к преполагаемой общей теореме об устойчивости. На основе предыдущих результатов можно было бы ожидать, что для устойчивости тривиального решения $z = 0$ системы нелинейных уравнений достаточно, чтобы все решения уравнения линейного приближения стремились к нулю при $t \to \infty$. Мы покажем на примере, что такой общий результат несправедлив.

Решение системы

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1, \qquad y_1(1) = c_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (\sin \ln t + \cos \ln t - 2a)\, y_2, \quad y_2(1) = c_2$$

---

[1]) При этом решение задачи $dY_1/dt = (A(t) + aI)\, Y_1$, $Y_1(0) = I$, получающейся после подстановки $z = e^{-at} z_1$ $(a > 0)$, удобно представить в виде $Y_1(t) = e^{at} Y(t) = P(t)\, e^{(B+aI)t}$. — *Прим. перев.*

имеет вид

$$y_1 = c_1 e^{-at+a},$$
$$y_2 = c_2 e^{t \sin \ln t - 2at + 2a},$$

оно стремится к нулю при $t \to \infty$, если $a > 1/2$.

С другой стороны, решение нелинейной системы

$$\frac{dz_1}{dt} = -az_1, \qquad z_1(1) = c_1,$$
$$\frac{dz_2}{dt} = (\sin \ln t + \cos \ln t - 2a) z_2 + z_1^2, \qquad z_2(1) = c_2$$

имеет вид

$$z_1 = c_1 e^{-at+a},$$
$$z_2 = e^{t \sin \ln t - 2at + 2a} \left(c_2 + c_1^2 \int_1^t e^{-t_1 \sin \ln t_1} dt_1 \right)$$

и, как мы покажем, стремится к нулю при $t \to \infty$ только для $c_1 = 0$, если $1 + e^{-\pi}/2 > 2a > 1$. Поэтому выбор нормы $\|z(1)\|$ достаточно малой не гарантирует стремления к нулю решений нелинейного уравнения. Более того, мы покажем, что решения даже не ограничены при $t \to \infty$. Для $t = e^{(2n+1/2)\pi}$ имеем

$$\int_1^t e^{-t_1 \sin \ln t_1} dt_1 > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-2\pi/3}} e^{-t_1 \sin \ln t_1} dt_1 > \exp(te^{-\pi}/2) \int_{te^{-\pi}}^{te^{-2\pi/3}} dt_1 =$$
$$= t(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}) \exp(te^{-\pi}/2).$$

Поэтому в этих точках

$$e^{t \sin \ln t - 2at} \int_1^t e^{-t_1 \sin \ln t_1} dt_1 > c_3 t \exp[(1 + e^{-\pi}/2 - 2a) t].$$

Следовательно, $z_2 \to 0$ при $t \to \infty$ только в том случае, если $c_1 = 0$.

10. Неустойчивость. В предыдущих пунктах мы видели, что $z = 0$ является устойчивым решением уравнения

$$\frac{dz}{dt} = Az + f(z),$$

если на A и $f(z)$ наложены соответствующие условия.

Покажем на простом примере, что для гарантии ограниченности решения необходимо ограничить величину $\|z(0)\|$, даже если характеристические числа A имеют отрицательные вещественные части, а нелинейные члены удовлетворяют обычным условиям. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt} = -u + u^2, \qquad u(0) = a > 1,$$

решением которого служит

$$u = \frac{a}{a-(a-1)e^t}.$$

Очевидно, что при $t \to \ln(a/(a-1))$ функция u неограниченно возрастает.

Обратно, положительные характеристические числа не делают решения обязательно неограниченными. Например, если

$$\frac{du}{dt} = u - u^2, \qquad 0 < u(0) < \infty,$$

то $u \to 1$ при $t \to \infty$.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 3. *Если*

(а) *матрица A имеет по крайней мере одно характеристическое число с положительной вещественной частью*;

(б) $\|f(z)\|/\|z\| \to 0$ *при* $\|z\| \to 0$,

то решение $z = 0$ неустойчиво.

Доказательство. Мы применим метод п. 5. В дальнейшем мы будем считать, что вещественные части всех характеристических чисел матрицы A отличны от нуля. К этому случаю всегда можно прийти, совершая, если нужно, подстановку $z = e^{\alpha t}\tilde{z}$, где $\alpha > 0$ достаточно мало. Пусть T — преобразование такое, что

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

причем $|b_{ij}| \leqslant \varepsilon$, где ε — положительная величина, которая в дальнейшем будет задана. Пусть $z = Tx$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + g_1(x), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \qquad\qquad \lambda_2 x_2 + \dots + b_{2n}x_n + g_2(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n x_n + g_n(x). \end{aligned}$$

Так как порядок, в котором берутся характеристические числа, не существенен, то положим, что $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0, \dots, \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$, где $k \geqslant 1$.

Умножая i-е уравнение на $\bar{x}_i$, если вещественная часть λ_i положительна, и на $-\bar{x}_i$, если она отрицательна, и применяя условие

$$\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} \to 0$$

при $\|z\| \to 0$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_n|^2) =$$
$$= \operatorname{Re}(\lambda_1)|x_1|^2 + \operatorname{Re}(\lambda_2)|x_2|^2 + \ldots + \operatorname{Re}(\lambda_k)|x_k|^2 -$$
$$- \operatorname{Re}(\lambda_{k+1})|x_{k+1}|^2 - \ldots - \operatorname{Re}(\lambda_n)|x_n|^2 + \ldots, \quad (16)$$

где дополнительные слагаемые не превосходят $\varepsilon \sum |x_i|^2$, причем $\varepsilon > 0$ как угодно мало, если все $|x_i|$ и $|b_i|$ достаточно малы.

Проведем доказательство от противного. Если тривиальное решение устойчиво, то, после выбора величины $\|x(0)\|$ достаточно малой, при $t \geqslant 0$ будет выполняться неравенство $\|x\| \leqslant \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$. Из уравнения (16) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}(|x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_n|^2) \geqslant$$
$$\geqslant c_1(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_k|^2) \geqslant$$
$$\geqslant c_1(|x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_n|^2),$$

где $c_1 > 0$, и потому

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_n|^2 \geqslant \quad (17)$$
$$\geqslant (|x_1(0)|^2 + \ldots + |x_k(0)|^2 - |x_{k+1}(0)|^2 - \ldots - |x_n(0)|^2)\, e^{c_1 t}.$$

Если теперь выбрать величины $x_i(0)$ как угодно малыми, но так чтобы было

$$|x_1(0)|^2 + \ldots + |x_k(0)|^2 - |x_{k+1}(0)|^2 - \ldots - |x_n(0)|^2 > 0, \quad (18)$$

то неравенство (17) для достаточно больших t будет противоречить неравенству $\|x\| \leqslant \varepsilon_1$[1]).

11. Условная устойчивость. Несмотря на отрицательный характер результата предыдущего пункта, мы покажем, что если матрица A имеет по крайней мере одно характеристическое число с отрицательной вещественной частью, то решение $z = 0$ обладает свойством некоторой условной устойчивости. Именно, имеет место

Теорема 4. *Если*

(а) *k характеристических чисел* ($1 \leqslant k \leqslant n$) *матрицы A имеют отрицательную вещественную часть*;

---

[1]) См. примечание 6 в конце книги.— *Прим. перев.*

(б) $f(0)=0$;

(в) $\|f(z_1)-f(z_2)\| \leqslant c_1\|z_1-z_2\|$ *для* $\|z_1\|$ *и* $\|z_2\| \leqslant c_2$, *где* $c_1 \to 0$ *при* $c_2 \to 0$,

то существует k-параметрическое[1]) *семейство решений уравнения*

$$\frac{dz}{dt}=Az+f(z), \tag{19}$$

стремящихся к нулю при $t \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$z=y+\int_0^t Y(t-t_1)f(z)\,dt_1, \tag{9}$$

где y и Y означают то же, что и раньше.

Чтобы получить решения уравнения (9), приближающиеся к нулю при $t \to \infty$, надо как-то удалить элементы $Y(t)$, не стремящиеся к нулю при $t \to \infty$. Для этого рассмотрим следующее разложение[2]):

$$Y=Y_1+Y_2, \tag{20}$$

где $Y_1=(u_{ij})$ и $Y_2=(v_{ij})$, а $y_{ij}=u_{ij}+v_{ij}$, где u_{ij} — часть y_{ij}, стремящаяся к нулю при $t \to \infty$, а v_{ij} — остающаяся часть, отвечающая характеристическим числам матрицы A с нулевой или положительной вещественной частью. Легко видеть, что

$$\frac{dY_1}{dt}=AY_1, \qquad \frac{dY_2}{dt}=AY_2.$$

Применяя разложение (20), уравнение (9) можно переписать в виде

$$z=y+\int_0^t Y_1(t-t_1)f(z)\,dt_1+\int_0^t Y_2(t-t_1)f(z)\,dt_1=$$

$$=y+\int_0^t Y_1(t-t_1)f(z)\,dt_1-\int_t^\infty Y_2(t-t_1)f(z)\,dt_1+$$

$$+\int_0^\infty Y_2(t-t_1)f(z)\,dt_1.$$

Эти преобразования пока являются чисто формальными, так как мы не знаем, существуют ли интегралы от t до ∞ и от 0 до ∞. Однако если последний интеграл существует[3]), то он является решением уравнения $dy/dt=Ay$. Тогда мы можем объединить его с

---

[1]) Смысл этого термина выясняется при доказательстве.— *Прим. перев.*

[2]) Подробнее об этом см. в примечании 7 в конце книги.— *Прим. перев.*

[3]) Ср. примечание на стр. 58. — *Прим. перев.*

первым членом и, перейдя к новому решению y, рассмотреть интегральное уравнение

$$z = y + \int_0^t Y_1(t-t_1) f(z)\, dt_1 - \int_t^\infty Y_2(t-t_1) f(z)\, dt_1. \qquad (21)$$

Чтобы получить решение уравнения (21), мы применим метод последовательных приближений. Обращая приведенные преобразования, мы видим, что каждое решение уравнения (21) является решением интегрального уравнения (9) с другой функцией y и потому — решением уравнения (19).

Пусть y в уравнении (21) является любым элементом из k-параметрического семейства решений уравнения $dy/dt = Ay$, стремящихся к нулю при $t \to \infty$, и пусть величина $\|y(0)\|$ достаточно мала, причем точная оценка будет указана в дальнейшем. Так как $y \to 0$ при $t \to \infty$, то $\|y\| \leqslant c_3 e^{-at}$ для $t \geqslant 0$ и для некоторого $a > 0$, причем c_3 можно сделать как угодно малым за счет уменьшения $\|y(0)\|$. Кроме того, существует число $a_1 > a$, для которого $\|Y_1(t)\| \leqslant c_4 e^{-a_1 t}$; наконец, $\|Y_2(t)\| \leqslant c_5 e^{bt}$ для некоторого постоянного $b \geqslant 0$. Мы продолжим оценку по индукции. Пусть

$$z_0 = y,$$

$$z_{m+1} = y + \int_0^t Y_1(t-t_1) f(z_m)\, dt_1 - \int_t^\infty Y_2(t-t_1) f(z_m)\, dt_1. \qquad (22)$$

Из неравенства для y следует, что $\|z_0\| \leqslant c_3 e^{-at}$. Покажем, что $z_m\| \leqslant 2c_3 e^{-at}$ при $m \geqslant 0$. Из формулы (22) вытекает неравенство

$$\|z_{m+1}\| \leqslant c_3 e^{-at} + 2c_3 c_4 \varepsilon \int_0^t e^{-a_1(t-t_1)} e^{-at_1}\, dt_1 + 2c_3 c_5 \varepsilon \int_t^\infty e^{b(t-t_1)} e^{-at_1}\, dt_1;$$

при этом мы применили условие (в). Если ε достаточно мало, то получаем $\|z_{m+1}\| \leqslant 2c_3 e^{-at}$.

Равномерная сходимость ряда $\sum_{m=0}^{\infty} \|z_{m+1} - z_m\|$ теперь выводится, как в п. 6. Аналогично завершается и все доказательство, причем стремление $z(t)$ к нулю при $t \to \infty$ получается еще проще из того, что сумма равномерно сходящегося ряда функций, стремящихся к нулю при $t \to \infty$, сама стремится к нулю при $t \to \infty$.

12. Частный случай нулевых характеристических корней. Изучение случая, когда A имеет характеристические числа с нулевой вещественной частью, особенно трудно, и поэтому мы не будем им

здесь заниматься[1]). Однако имеется несколько специальных случаев, когда поведение решений при $t \to \infty$ можно выяснить. Один из них следующий:

Теорема 5. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dz}{dt} = Az + f(z, t),$$

для которого выполняются следующие условия:

(а) *все решения уравнения* $dy/dt = Ay$ *ограничены*;

(б) $\|f(z, t)\| \leqslant g(t)\|z\|$ *для* $\|z\| \leqslant c$, $c > 0$, *где* $\int^{\infty} g(t)\,dt < \infty$.

При этих условиях решение $z = 0$ *данного уравнения устойчиво.*

Мы предоставляем читателю провести доказательство этого утверждения в качестве упражнения.

13. Разностные уравнения. Многие из результатов этой и предыдущих глав можно распространить на разностные уравнения вида

$$z(t+h) = Az(t) + f(z(t)), \quad t = 0, h, 2h, \ldots. \tag{23}$$

При этом доказательства проходят по той же схеме, как для дифференциальных уравнений. Поэтому мы предоставляем читателю провести такое распространение в качестве упражнения.

Упражнения

1. Каково необходимое и достаточное условие для того, чтобы все решения уравнения $y(t+h) = Ay(t)$ стремились к нулю при $t \to \infty$?

2. Найти формулу, выражающую решения уравнения $z(t+h) = Az(t) + w(t)$ через решение уравнения $y(t+h) = Ay(t)$, аналогичную той, которая приведена в теореме 3 гл. I.

3. Найти нелинейное уравнение для сумм, эквивалентное уравнению (23). Применить это уравнение для доказательства разностного аналога теоремы 1.

4. Применить этот результат для доказательства теоремы 1 при помощи предельного перехода.

5. Показать, что если $\sum_{m=1}^{\infty} \|B(mh)\| < \infty$ и если все решения уравнения

$$y(t+h) = Ay(t)$$

ограничены, то все решения уравнения $z(t+h) = (A + B(t))z(t)$ ограничены.

Замечание. В предыдущих упражнениях t принимает только значения $t = 0, h, 2h, \ldots$

---

[1]) См., например, Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, М. — Л., 1952. — *Прим. перев.*

ЛИТЕРАТУРА

Приведем некоторые из ранее вышедших важных книг, в которых содержатся другие математические аспекты теории линейных и нелинейных колебаний и физические приложения этой теории:

1. Андронов А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, М.—Л., 1937.
2. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Киев, 1937.
3*. Булгаков Б. В., Колебания, т. 1, М. — Л., 1949; т. 2, 1954.
4*. Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, М. — Л., 1949.
5*. Теодорчик К. Ф., Автоколебания, М. — Л., 1953.
6. Lefschetz S., Lectures on differential equations, Princeton, 1946.
7. Lefschetz S., Contributions to the theory of non-linear equations, v. 1, Princeton, 1950, v. 2, 1953.
8. Minorsky N., Introduction to non-linear mechanics, Ann Arbor, 1947.
9. Rocard I., Dynamique générale des vibrations, Paris, 1949.
10. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, М., 1953.

П. 4. Теорема этого пункта является фундаментальным результатом работ Ляпунова и Пуанкаре. Первоначальные формулировки и доказательства можно найти в книгах:

11. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, докторская дисертация, 1892; см. также изд. М. — Л.,1950.
12. Poincaré H., Les methodes nouvelles de la mechanique céleste, v. 1, 3, Paris, 1892.

По теории устойчивости имеется обширная литература. Укажем лишь некоторые основные источники:

13*. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, М. — Л., 1946.
14*. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, М. — Л., 1952.
15*. Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, М., 1952.
16*. Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М. — Л., 1949.

Первое из приведенных доказательств принадлежит Н. Левинсону, который сообщил его автору. Второе доказательство принадлежит О. Перрону, см.

17. Perron O., Math. Zeit., **29** (1929), 129—160.

Идея третьего доказательства принадлежит Э. Коттону, см.

18. Cotton E., Ann. École Norm., ser. 3, **28** (1911), 473—521.

См. также книгу:

19. Cotton E., Approximations successives et les équations differentielles, Mém. Sci. Fasc., **28**, Paris, 1928.

По поводу общего исследования и иных методов доказательства см.

20. Bellman R., On the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations, Trans. Amer. Math. Soc., **46** (1948), 354—388.
21*. Малкин И. Г., Теорема об устойчивости по первому приближению, ДАН СССР, **76**, № 6 (1951), 783—784.

Пп. 9 и 11. См. статью Перрона [17].

Пп. 12 и 13. См. статью Беллмана [20].

Глава V

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Введение. В этой главе мы рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении решений полиномиального уравнения вида

$$P(t, u, u') = \sum a_{lmn} t^l u^m (u')^n = 0, \tag{1}$$

где $l, m, n \geqslant 0$ и $l+m+n \leqslant N$, причем особое внимание будет уделено важному частному случаю

$$u' = \frac{P(u, t)}{Q(u, t)}, \tag{2}$$

где P и Q — многочлены.

В заключение мы укажем некоторые из аналогичных результатов для уравнения

$$u'' = \frac{P(u, t)}{Q(u, t)}.$$

Так как результаты и методы доказательства для этого второго случая весьма схожи с теми, которые приводятся для уравнения (2), но значительно более громоздки, то мы ограничимся формулировкой результатов и опустим доказательства.

Общая задача о существовании, продолжении и аналитическом характере решений уравнений (1) и (2) является задачей, к которой с некоторым успехом была применена теория функций комплексного переменного. Тем не менее в настоящее время не существует общей теории вещественных решений вещественных дифференциальных уравнений и изучение таких решений продолжает представлять значительные трудности. Чтобы избежать этих трудностей, мы сделаем упрощающие ограничения, которые дадут нам возможность исследовать много интересных и важных случаев. Мы будем изучать только такие решения уравнения (1), которые существуют для всех достаточно больших значений t. В результате такого сужения нашего поля зрения мы сможем полнее осветить рассматриваемые вопросы.

2. Оценки сверху решений уравнения $P(t, u, u') = 0$. Мы будем называть решение уравнения (1) *правильным решением*, если оно существует и имеет непрерывную производную для $t \geqslant t_0$.

Будем говорить, что правильное решение обладает некоторым свойством (положительность, монотонность и т. п.), если это свойство

имеет место для всех достаточно больших значений t. Впредь мы ограничимся изучением правильных решений и потому для простоты будем иногда опускать это прилагательное.

Мы начнем с вопроса об оценках решений сверху. Имеет место

Теорема 1. *Если $u(t)$ — правильное решение уравнения $P(t, u, u') = 0$, то существует постоянная k, для которой*

$$|u| < \exp \frac{t^{k+1}}{k+1}, \qquad t \geqslant t_1 \geqslant t_0.$$

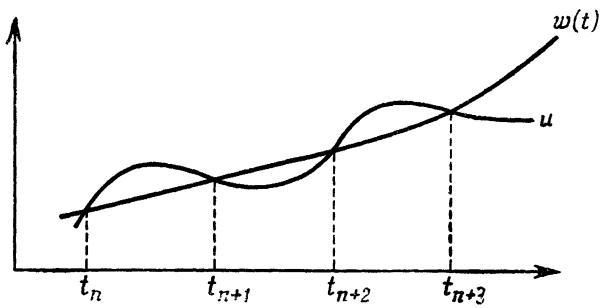
Если m — наивысший показатель степени t, содержащийся в многочлене $P(t, u, u')$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно положить $k = m + \varepsilon$[1]).

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Если утверждение теоремы неверно, то имеет место один из следующих случаев:

(а) уравнение $|u| = \exp(t^{k+1}/(k+1))$ имеет как угодно большие корни;

(б) $|u| > \exp(t^{k+1}/(k+1))$ при $t \geqslant t_1$ для некоторого $t_1 \geqslant t_0$.

Покажем сначала, что случай (а) приводит к противоречию. Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots, t_n \to \infty$ — корни уравнения $u(t) = w(t)$, где положено $w(t) \equiv \exp(t^{k+1}/(k+1))$. Достаточно рассмотреть только



Фиг. 5.

этот случай, так как случай, когда уравнение $-u(t) = w$ имеет бесконечно много корней, можно преобразовать к первому при помощи замены u на $-u$.

Предположим сначала, что для достаточно больших t при $u(t) = w(t)$ будет $u'(t) \neq w'(t)$, т. е. пересечение графиков $u(t)$ и $w(t)$

---

[1]) Из доказательства теоремы видно, что в качестве k можно выбрать любое неотрицательное число, большее $(a_1 - a)/(c - c_1)$, где $Lt^a u^b u'^c$ — главный член многочлена P (определение см. на стр. 115), а $L_1 t^{a_1} u^{b_1} u'^{c_1}$ — любой другой член этого многочлена, для которого $L_1 \neq 0$, $b_1 + c_1 = b + c$, $c_1 < c$. — *Прим. перев.*

происходит так, как это показано на фиг. 5. При $t=t_n$ имеем $u'>w'=$ $=t^k w=t^k u$, в то время как при $t=t_{n+1}$ будет $u'<t^k u$. Отсюда следует, что существует точка s_n, $t_n<s_n<t_{n+1}$, в которой $u'=t^k u$.

Определим *главный член* $T=Lt^a u^b (u')^c$ многочлена $P(t, u, u')$ при помощи неравенств

(а) $b+c\geqslant b_1+c_1$;

(б) если $b+c=b_1+c_1$, то $c\geqslant c_1$;

(в) если $b+c=b_1+c_1$ и $c=c_1$, то $a>a_1$.

При этом, конечно, предполагается, что подобные члены многочлена приведены, а сравнение происходит только с фактически присутствующими членами $L_1 t^{a_1} u^{b_1} u'^{c_1}$ $(L_1\neq 0)$. Ясно, что существует только один главный член.

Рассмотрим теперь отношение $R(t)$ любого другого члена многочлена $P(t, u, u')$ к главному члену в точке s_n. Имеем

$$|R|=Mt^{a_1-a}u^{b_1-b}(u')^{c_1-c}=Mt^{a_1-a}u^{b_1-b}(t^k u)^{c_1-c}=$$
$$=Mt^{a_1-a+k(c_1-c)}u^{b_1+c_1-(b+c)}, \tag{3}$$

так как $u'=t^k u$. Если $b+c>b_1+c_1$, то величина $|R|\to 0$, когда $t\to\infty$, пробегая последовательность s_n, так как в этих точках $u>\exp(t^{k+1}/(k+1))$. Если $b+c=b_1+c_1$ и $c>c_1$, то $c-c_1\geqslant 1$, и на основании нашего выбора k мы снова видим, что $\lim\limits_{n\to\infty} R(s_n)=0$. Наконец, если $b=b_1$ и $c=c_1$, то $a>a_1$, и вновь мы получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} R(s_n)=0$. Итак, во всех случаях имеем $\lim\limits_{n\to\infty} R(s_n)=0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} P(s_n, u(s_n), u'(s_n))/T(s_n)=1$, а это противоречит тому, что $u(t)$ удовлетворяет уравнению $P=0$.

Если пересечение происходит не так, как это показано на фиг. 5, то должны существовать как угодно большие двойные корни уравнения $u(t)-w(t)=0$, для которых $u'=w'=t^k u$, и мы получаем такое же противоречие.

Случай (а) разобран; переходим к случаю (б). Опять достаточно считать, что $u>w(t)$. При $t\geqslant t_1\geqslant t_0$ должно иметь место одно из двух неравенств $u'-(w'u/w)>0$ или $u'-(w'u/w)<0$, так как если при как угодно больших t имеет место равенство

$$u'=\frac{w'u}{w},$$

то мы приходим к тому же противоречию, что и ранее.

Если $u'-(w'u/w)<0$ при $t\geqslant t_1$, то мы положим $\rho(t)=u'-$ $-(w'u/w)$ и после интегрирования получим

$$u(t)=w(t)\left[c_1+\int_{t_1}^{t}\frac{\rho(t_1)\,dt_1}{w(t_1)}\right]. \tag{4}$$

По предположению $\rho(t)$ отрицательно при $t \geqslant t_1$. Поскольку $u > w > 0$, интеграл $\int\limits_{t_1}^{\infty} [\rho(t_1)/w(t_1)]\, dt_1$ сходится, так как из формулы (4) видно, что в противном случае функция u должна была бы стать отрицательной, начиная с некоторого значения t. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют как угодно большие значения t, для которых $|\rho(t)/w(t)| \leqslant \varepsilon$. В этих точках

$$|u' - t^k u| \leqslant \varepsilon w < \varepsilon u. \tag{5}$$

Рассмотрим выражение для $|R|$, данное формулой (3). Если $c_1 \geqslant c$, то в точках, где выполняется (5), мы применяем соотношение $u' < uw'/w = t^k u$ и получаем

$$|R| \leqslant M t^{a_1 - a + k(c_1 - c)} u^{b_1 + c_1 - (b + c)}.$$

Как и ранее, отсюда следует, что $\lim\limits_{t \to \infty} |R| = 0$. Если же $c_1 < c$, то мы применяем неравенство (5), по которому $u' - t^k u > -\varepsilon u$, или $u' > (t^k - \varepsilon) u$ для как угодно больших значений t. Для этих значений

$$|R| < M t^{a_1 - a} (t^k - \varepsilon)^{c_1 - c} u^{b_1 + c_1 - (b + c)},$$

и доказательство продолжается так же, как раньше.

Остается случай, когда $u > w$, $u' > t^k u$ при $t \geqslant t_1$. Вновь рассмотрим отношение

$$|R| = M t^{a_1 - a} u^{b_1 - b} (u')^{c_1 - c}.$$

Если $c \geqslant c_1$, то $|R| \leqslant M t^{a_1 - a} u^{b_1 - b} (t^k u)^{c_1 - c}$. Рассматривая различные случаи: $b + c > b_1 + c_1$; $b + c = b_1 + c_1$, $c > c_1$; $b = b_1$, $c = c_1$, $a > a_1$, мы видим, что $|R| \to 0$ при $t \to \infty$.

Чтобы исследовать случай $c < c_1$, нам понадобится следующая

Лемма 1. *Если $u > 0$, u' непрерывна и неотрицательна при $t \geqslant t_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $u' \leqslant u^{1+\varepsilon}$ при всех значениях $t \geqslant t_0$, кроме, быть может, множества интервалов общей конечной длины, зависящей от ε.*

Доказательство. Пусть (t_n, τ_n) — n-й интервал, в котором $u' > u^{1+\varepsilon}$ (эти интервалы нумеруются в произвольном порядке). Тогда

$$\int\limits_{t_n}^{\tau_n} \frac{u'\, dt}{u^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{u(t_n)^{\varepsilon}} - \frac{1}{u(\tau_n)^{\varepsilon}} \right] \geqslant \tau_n - t_n,$$

откуда следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\tau_n - t_n) < [\varepsilon u(t_0)^{\varepsilon}]^{-1} < \infty$.

Пусть теперь t не принадлежит этим интервалам. Тогда, так как $c < c_1$, то

$$|R| \leqslant M t^{a_1 - a} u^{b_1 - b} u^{(c_1 - c)(1+\varepsilon)} = M t^{a_1 - a} u^{b_1 + c_1 - (b + c) + \varepsilon (c_1 - c)}.$$

Так как $b_1+c_1<b+c$, то $|R|\to 0$ при $t\to\infty$, если только ε выбрано достаточно малым.

Это завершает доказательство теоремы 1. После подробного изучения уравнения $u'=P(u, t)/Q(u, t)$ мы возвратимся к общему полиномиальному уравнению $P(t, u, u')=0$ и получим значительно более точный результат, применяя методы, развитые при исследовании уравнения этого частного вида.

3. Противоречащий пример. Хочется ожидать, что методы, примененные в доказательстве теоремы 1, можно использовать для получения соответствующих оценок решений уравнений вида $P(t, u, u', u'')=0$ и т. д. Однако мы покажем на простом примере, что для полиномиальных уравнений второго порядка такой общей оценки не может быть.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(t)\geqslant 1$ — произвольная монотонно возрастающая функция от t, стремящаяся к бесконечности при $t\to\infty$. Тогда существует иррациональное число α, для которого вещественная и непрерывная для всех значений $t>0$ функция*

$$u(t)=\frac{1}{2-\cos t-\cos \alpha t},$$

удовлетворяющая уравнению вида $P(t, u, u', u'')=0$, удовлетворяет также неравенству $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, u(t)/\varphi(t)\geqslant 1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $\varphi(t)>1$ при $t\geqslant 2\pi$. Выберем α следующим образом. Пусть (d_n) — последовательность целых чисел, для которой

$$d_r>4\pi\varphi(2\pi q_{r-1}),\quad r=1, 2, \ldots;\quad q_r=d_1d_2\ldots d_r,\ r\geqslant 1;\quad q_0=1;$$

мы положим

$$\alpha=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{q_r}.$$

Очевидно,

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{q_r}=\frac{p_n}{q_n},$$

где p_n — целое число. Кроме того,

$$q_{n+1}>4\pi q_n\varphi(2\pi q_n),$$

$$q_{n+2}>4\pi q_{n+1}\varphi(2\pi q_{n+1})>4\pi q_{n+1}>(4\pi)^2 q_n\varphi(2\pi q_n),$$

вообще, $q_{n+r}>(4\pi)^r q_n\varphi(2\pi q_n)$. Значит,

$$0<\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{q_r}<\frac{1}{2\pi q_n\varphi(2\pi q_n)}. \tag{6}$$

Если бы число α было рациональным и равнялось a/b, где a и b — натуральные числа, то мы имели бы

$$0 < \frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{aq_n - bp_n}{bq_n} < \frac{1}{2\pi q_n \varphi(2\pi q_n)},$$

или

$$1 \leqslant aq_n - bp_n < \frac{b}{2\pi\varphi(2\pi q_n)}.$$

Но этого не может быть, так как $\varphi(2\pi q_n) \to \infty$ при $n \to \infty$; следовательно, α — число иррациональное. Отсюда следует, что $2 - \cos t - \cos \alpha t$ не обращается в нуль, и потому функция $u(t)$ непрерывна при всех значениях $t > 0$.

По нашему выбору α имеем

$$\cos 2\pi\alpha q_n = \cos\left[2\pi q_n\left(\frac{p_n}{q_n} + \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{q_r}\right)\right] = \cos\left(2\pi q_n \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{q_r}\right)$$

и, применяя неравенство (6), получаем неравенство

$$1 - \cos 2\pi\alpha q_n < 1 - \cos\frac{1}{\varphi(2\pi q_n)} < \frac{1}{\varphi(2\pi q_n)}.$$

Значит,

$$u(2\pi q_n) = \frac{1}{2 - \cos 2\pi q_n - \cos 2\pi\alpha q_n} = \frac{1}{1 - \cos 2\pi\alpha q_n} > \varphi(2\pi q_n).$$

Чтобы показать, что функция u удовлетворяет полиномиальному уравнению второго порядка, рассмотрим три равенства:

$$\begin{aligned} v &= 2 - \cos t - \cos \alpha t, \\ v' &= \sin t + \alpha \sin \alpha t, \\ v'' &= \cos t + \alpha^2 \cos \alpha t. \end{aligned}$$

Исключая $\cos t$, $\cos \alpha t$, $\sin t$ и $\sin \alpha t$ из этих равенств и двух тождеств $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos^2 \alpha t + \sin^2 \alpha t = 1$, получаем полиномиальное уравнение, связывающее v, v' и v''. Подстановка $v = 1/u$ дает искомое уравнение для u.

4. Решения уравнения $u' = P(u, t)/Q(u, t)$. В этом пункте мы будем исследовать некоторые свойства решений уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} = \frac{P(u, t)}{Q(u, t)}, \tag{2}$$

где P и Q — многочлены, причем дробь P/Q считается несократимой и подразумевается, что для рассматриваемых решений $Q \neq 0$.

Лемма 2. *Каждое решение уравнения* (2), *непрерывное и непостоянное при $t \geqslant t_0$, является строго монотонным при достаточно больших значениях t.*

Доказательство. Достаточно доказать, что производная u' не может равняться нулю для последовательности значений t, стремящейся к бесконечности. Предположим противное: пусть $u'=0$ в точках последовательности $\{t_i\}$, $t_i \to \infty$. Тогда при этих значениях t график функции $u(t)$ и кривая, определенная уравнением $P(u, t)=0$, пересекаются. Так как P — многочлен от u и t, то алгебраическая кривая, определенная уравнением $P=0$, обладает лишь конечным числом ветвей, и потому график функции u должен пересекаться с одной из этих ветвей при как угодно больших значениях t [1]).

Так как мы, естественно, предполагаем, что P и Q не имеют общих множителей, то уравнения $P=0$ и $Q=0$ обладают лишь конечным числом общих корней. Следовательно, для $t \geqslant t_1$ функция $Q(u, t)$ сохраняет знак на каждой ветви кривой $P(u, t)=0$.

Ветви кривой $P(u, t)=0$, простирающиеся в бесконечность при $t \to \infty$, состоят из линий вида

(а) $u=c$ или

(б) $u=\varphi(t)$,

причем $\varphi'(t) \neq 0$ для достаточно больших значений t.

Рассмотрим сначала линию вида (б) и покажем, что график решения $u(t)$ уравнения (2) не может пересекать ее при как угодно больших значениях t. Для таких t точки пересечения должны быть стационарными точками графика решения — это легко видеть из геометрических соображений, рассматривая графики монотонной функции $\varphi(t)$ и решения $u(t)$. Но очевидно, что если график решения u и рассматриваемая ветвь кривой $P(u, t)=0$ пересекаются в двух последовательных стационарных точках кривой u, то они должны пересекаться также в некоторой точке между этими двумя. В этой точке производная решения отлична от нуля, что противоречит дифференциальному уравнению. (Мы не хотим излагать здесь все подробности, так как ниже при помощи более мощных и систематических методов мы докажем более сильное утверждение.)

Если же рассматривается ветвь $u=c$ кривой $P=0$, то для нее $P(c, t) \equiv 0$, следовательно, функция $u=c$ при $t>t_0$ удовлетворяет уравнению (2). Значит, если график исследуемого решения пересекается с ветвью $u=c$, то по теореме единственности это решение тождественно равно c при $t>t_0$. Этим завершается доказательство леммы.

При помощи менее элементарного метода мы докажем сейчас более точный результат [2]).

Лемма 3. *Если функция u является решением уравнения* (2), *то любая рациональная функция* $H(u, t)=K(u, t)/L(u, t)$ *от*

---

[1]) См. примечание 8 в конце книги. — *Прим. перев.*

[2]) В примечании 9 в конце книги приводится лемма, которая полезна в излагаемой здесь теории; в частности, при ее помощи легко доказывается лемма 3. — *Прим. перев.*

переменных u и t строго монотонна, за исключением случаев, когда рассматриваемое решение удовлетворяет уравнению $L=0$ или когда функция H постоянна вдоль этого решения.

Доказательство. Имеем

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial u}\frac{P(u,t)}{Q(u,t)}=\frac{T(u,t)}{T_1(u,t)}.$$

Если производная dH/dt не сохраняет постоянный знак при $t\to\infty$, то она обращается либо в нуль, либо в бесконечность при как угодно больших значениях t, когда точка u пробегает график $u=u(t)$ решения (2). Рассмотрим сначала случай обращения в нуль, когда, следовательно, одна ветвь кривой $T(u,t)=0$ пересекается с графиком $u(t)$ при как угодно больших значениях t. При $t\geqslant t_1$ эта ветвь имеет уравнение вида

$$u=a_0t^{c_0}+a_1t^{c_1}+\ldots,\quad c_0>c_1>\ldots,\quad a_0\neq 0. \tag{7}$$

Если в точках пересечения с графиком решения заменить функцию u рядом (7), то получится разложение

$$\frac{du}{dt}=R=\frac{P(u,t)}{Q(u,t)}=b_0t^{d_0}+b_1t^{d_1}+\ldots,\quad d_0>d_1>\ldots.$$

В то же время вдоль ветви кривой $T=0$, задаваемой уравнением (7), имеем разложение

$$\frac{du}{dt}=S=a_0c_0t^{c_0-1}+a_1c_1t^{c_1-1}+\ldots.$$

Из вида разложений R и S ясно, что при достаточно больших значениях t имеются три возможности: $R>S$, $R<S$ или $R=S$. Легко видеть из геометрических соображений, что ни одно из этих двух неравенств не может иметь места, так как выражения R и S представляют собой коэффициенты наклона кривых в их точках пересечения. Если же $R=S$ для как угодно больших t, то должно быть $b_0=a_0c_0$, $b_1=a_1c_1$, ..., $d_0=c_0-1$, $d_1=c_1-1$ и т. д., так что $R\equiv S$ для всех как угодно больших значений t. Отсюда следует, что $T(u,t)\equiv 0\,(t\geqslant t_1)$ вдоль графика решения $u(t)$ уравнения (2). Значит, $dH/dt=0$ вдоль этого графика и функция H постоянна вдоль него.

В случае, когда dH/dt обращается в бесконечность для как угодно больших значений t, для этих t при $u=u(t)$ имеет место равенство $L(u,t)=0$, так как

$$\frac{dH}{dt}=\frac{L\,dK/dt-K\,dL/dt}{L^2}.$$

Отсюда, как и выше, мы получим, что $L\equiv 0$ вдоль $u=u(t)$.

Из леммы 3 следует, что любая рациональная функция от t, u, u', ... становится в конце концов строго монотонной, не считая указанных выше тривиальных исключений. В частности, производная любого порядка правильного решения уравнения (2) либо постоянна, либо строго монотонна.

5. Асимптотическое поведение решений уравнения $u = P(u, t)/Q(u, t)$. Теперь мы в состоянии доказать следующий замечательный результат, принадлежащий Харди:

Теорема 3. *Каждое ненулевое решение уравнения*

$$\frac{du}{dt} = \frac{P(u, t)}{Q(u, t)}, \tag{2}$$

непрерывное для $t \geqslant t_0$ в конце концов становится, как и его производные всех порядков, монотонным и удовлетворяет одному из соотношений

$$u \sim at^b e^{P(t)}, \qquad u \sim at^b (\ln t)^{1/c}, \tag{8}$$

где $P(t)$ — многочлен относительно t, а c — целое число.

Доказательство. Рассмотрим равенство $Q(u, t)u' - P(u, t) = 0$, члены которого имеют вид $a_1 t^m u^n$ или $a_1 t^m u^n u'$. Так как все рациональные функции от переменных u, u' и t становятся в конце концов монотонными, то отношение любых двух таких членов стремится к пределу при $t \to \infty$. Этот предел может равняться $\pm\infty$, 0 или постоянной, отличной от нуля, причем по крайней мере одно такое отношение, стремящееся к отличной от нуля постоянной, должно существовать.

Если только один из двух членов содержит u', то получаем

$$u' u^n t^m \sim c_1, \tag{9}$$

в противном же случае имеем

$$u \sim c_2 t^{p/q},$$

где p/q — рациональная дробь, т. е. u имеет вид (8).

Первый случай приводит к различным результатам в зависимости от следующих возможностей:

(а) $n \neq -1$, $m \neq +1$,

(б) $n = -1$, $m \neq +1$,

(в) $n = -1$, $m = +1$,

(г) $n \neq -1$, $m = +1$.

В соответствии с этими возможностями имеем следующие асимптотические формулы [1]):

(а) $\frac{u^{n+1}}{n+1} \sim c_1 \frac{t^{1-m}}{1-m} + d_1$,

(б) $\ln|u| \sim c_1 \frac{t^{1-m}}{1-m} + d_1$,

(в) $\ln|u| \sim c_1 \ln t$,

(г) $\frac{u^{n+1}}{n+1} \sim c_1 \ln t$.

Формулы (а) и (г) имеют вид, указанный в теореме; в случаях (б) и (в) требуется дальнейшее исследование. Мы воспользуемся методом, который мы применяли ранее для уточнения результатов и который состоит в подстановке грубого результата в дифференциальное уравнение и повторном применении этого уравнения. Рассмотрим сначала случай (б).

Запишем уравнение в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{P_0 u^r + P_1 u^{r-1} + \ldots + P_r}{Q_0 u^s + Q_1 u^{s-1} + \ldots + Q_s}, \tag{10}$$

где P_k и Q_l — многочлены относительно t. Мы можем считать разность $1-m$ положительной, так как если она отрицательна, то $u \sim e^{d_1}$.

Если $1-m>0$ и $c_1>0$, то на основании (9) и (10) получаем, что в формуле (10) $r=s+1$. Поэтому, деля числитель и знаменатель (10) на u^s, имеем для некоторого a

$$\frac{du}{dt} = \frac{P_0}{Q_0} u + R_1(t) + O\left(\frac{t^a}{u}\right),$$

или

$$\frac{du/dt}{u} = \frac{P_0}{Q_0} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

---

[1]) Для доказательства надо ввести новые переменные:

$$y = \begin{cases} u^{n+1}/(n+1), & n \neq -1 \\ \ln|u|, & n = -1 \end{cases}; \quad x = \begin{cases} c_1 t^{1-m}/(1-m), & m \neq 1 \\ c_1 \ln t, & m = 1 \end{cases};$$

тогда соотношение (9) перейдет в $dy/dx \sim 1$. Пусть $m \leqslant 1$; тогда $x \to \infty$ при $t \to \infty$, откуда $y \sim x$, что и утверждается. Действительно, при любом $\varepsilon > 0$ для некоторого x_0 будет $|dy/dx - 1| < \varepsilon$ $(x \geqslant x_0)$, откуда $y_0 + (1-\varepsilon) \times (x - x_0) < y < y_0 + (1+\varepsilon)(x - x_0)$ $(x > x_0)$ и $1 - \varepsilon \leqslant \underline{\lim}\, y/x \leqslant \overline{\lim}\, y/x \leqslant 1 + \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем $\lim y/x = 1$.

Пусть теперь $m > 1$. Тогда при $t \to \infty$ будет $x \to 0$ и $dy/dx \to 1$. Если $\lim\limits_{x \to 0} y = d_1$, то $y \sim d_1$ при $d_1 \neq 0$, если же $d_1 = 0$, то из теоремы о конечных приращениях сразу следует, что $y \sim x$. Во всех этих случаях получаем требуемое асимптотическое выражение для u. — *Прим. перев.*

для больших значений t. Интегрируя, получаем

$$\ln|u| = P(t) + c_3 \ln t + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Случай $c_1 < 0$ сводится к только что разобранному при помощи замены u на $1/u$ в соотношении (9).

Перейдем теперь к последнему оставшемуся случаю (в), который требует рассмотрения большого количества возможностей. Здесь имеются два члена одинакового порядка, $kt^m u^n u'$ и $lt^{m-1}u^{n+1}$, кроме того, мы можем считать, что других членов того же порядка нет, так как в противном случае мы немедленно приходим к соотношению $u \sim c_4 t^{c_5}$. Если T — любой другой член, то отношение

$$\frac{kt^m u^n u' - lt^{m-1}u^{n+1}}{T}$$

стремится к пределу при $t \to \infty$. Могут встретиться две возможности:

(α) имеется член, порядок которого равен порядку разности между обоими данными членами;

(β) такого члена нет.

Рассмотрим первую возможность. В этом случае имеет место либо соотношение вида

$$kt^m u^n u' - lt^{m-1}u^{n+1} \sim et^f u^g, \tag{11}$$

либо соотношение вида

$$kt^m u^n u' - lt^{m-1}u^{n+1} \sim et^f u^g u'. \tag{12}$$

Займемся сначала случаем (11). Из (в) получаем грубый результат $u = \pm t^{c_1+\varepsilon}$, где $\varepsilon = \varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $c_1 = l/k$. Полагая $u = t^{l/k}v$ и подставляя это в соотношение (11), получим

$$v^{n-g}v' \sim \frac{e}{k}\, t^{f+\frac{lg}{k}-\frac{l(n+1)}{k}-m}. \tag{13}$$

Заметив, что условие $\ln|u| \sim (l \ln t)/k$ влечет за собой соотношение $\ln|v| = o(\ln t)$ при $t \to \infty$, легко показать после разбора всех возможных случаев, что выражение для u имеет один из видов (8).

Случай (12), а также исследование возможности (β) мы представляем читателю в качестве упражнения [1]).

6. Уточнение теоремы 1. Теперь мы можем получить результат, значительно более точный, чем теорема 1, именно:

Теорема 4. *Пусть u — любое решение полиномиального уравнения*

$$P(t, u, u') = 0, \tag{1}$$

[1]) См. примечание 10 в конце книги. — *Прим. перев.*

непрерывное при $t \geqslant t_0$. *Тогда либо*

$$u = o(t^b)$$

для некоторого постоянного b, *либо*

$$u = \pm \exp[at^b(1 + \varepsilon(t))].$$

где a *и* b — *постоянные, а* $\varepsilon(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Все решения последнего класса монотонны, равно как и их производные всех порядков.

Доказательство. Допустим, что не существует постоянного b, для которого $u = o(t^b)$. Тогда для как угодно большого b можно найти значение t, для которого $u > t^b$, либо $u < -t^b$; для определенности будем рассматривать первый случай. Выберем возрастающую последовательность $b_\nu \to \infty$ и такую последовательность t_ν, $0 < t_1 < t_2 < \ldots$, $t_\nu \to \infty$, что

$$u(t_\nu) > t_\nu^{b_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Построим теперь кривую с уравнением $u = t^{b(t)} = e^{b(t)\ln t} = e^{\varphi(t)}$, проходящую через точки $(t_\nu, t_\nu^{b_\nu})$ и обладающую следующими свойствами:

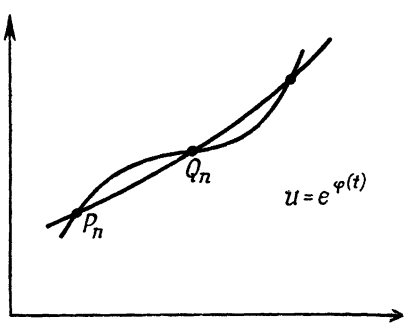
(а) функция $b'(t)$ положительна и непрерывна;

(б) $b(t)/t^c \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $c > 0$;

(в) $b'(t)\,t^{1-c} \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $c > 0$.

Это всегда можно сделать, если положить $b_\nu = \nu$ и выбрать точки t_ν отстоящими друг от друга достаточно далеко. Переходя к функции $\varphi(t)$, из равенства $t\varphi' = b't\ln t + b$ получаем для любого $c > 0$, что

$$t\varphi' \to \infty, \qquad t^{1-c}\varphi' \to 0. \quad (14)$$



Фиг. 6.

Покажем теперь, что если для решения уравнения $P(t, u, u') = 0$ неравенство $u(t) > e^{\varphi(t)}$ справедливо при как угодно больших значениях t, то это неравенство имеет место и для всех значений t. Доказательство проведем от противного. Если утверждение несправедливо, то кривые $u = u(t)$ и $u = e^{\varphi(t)}$ пересекаются при как угодно больших значениях t, как это показано на фиг. 6. Если при как угодно больших t рассматриваемые кривые имеют точки соприкосновения, то рассуждения только упрощаются.

Как в п. 2, показываем, что между точками P_n и Q_n имеется точка S_n, в которой

$$u' = \varphi' u, \qquad u \geqslant e^{\varphi}, \tag{15}$$

где u обозначает решение. Применяя введенное ранее понятие главного члена [1]) многочлена $P(t, u, u')$ и комбинируя соотношения (14) и (15), легко приходим к противоречию. Значит, для всех достаточно больших значений t имеет место неравенство $u > e^{\varphi(t)}$.

В этом случае любое выражение вида $H = t^a u^b (u')^c$, где $c \neq 0$, при достаточно больших t монотонно. Чтобы это показать, исключим u' из равенств $t^a u^b (u')^c = H$ и $P(t, u, u') = 0$.

Получится соотношение вида $F(t, u, H) = 0$. Из него при помощи дифференцирования выведем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial u} u' + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{dH}{dt} = 0.$$

Если $dH/dt = 0$, то должно быть $\partial F/\partial t + (\partial F/\partial u) u' = 0$. Подставляя это значение для u' в $P(t, u, u') = 0$, получаем полиномиальное соотношение между u, t и H. Исключая H из этого соотношения и уравнения $F(t, u, H) = 0$, получаем полиномиальное уравнение между u и t. Однако это противоречит неравенству $u > e^{\varphi(t)}$, справедливому для $t \geqslant t_0$ [2]).

Выберем теперь в выражении $P(t, u, u')$ два члена равного порядка при $t \to \infty$:

$$T_1 = k_1 t^{a_1} u^{b_1} (u')^{c_1} \quad \text{и} \quad T_2 = k_2 t^{a_2} u^{b_2} (u')^{c_2}.$$

Так как $u > e^{\varphi(t)}$, то c_1 не может равняться c_2; в противном случае соотношение $T_1/T_2 \sim d$ при $t \to \infty$ повлекло бы за собой соотношение $u \sim c_3 t^{c_4}$, которое противоречит неравенству $u > e^{\varphi(t)}$. Значит, соотношение $T_1/T_2 \sim d$ имеет вид

$$u' u^{\alpha} \sim c_4 t^{\beta}, \qquad c_4 \neq 0,$$

---

[1]) Определение главного члена (см. стр. 115) здесь приходится изменить следующим образом: требуется, чтобы $b + c \geqslant b_1 + c_1$; кроме того, если $b + c = b_1 + c_1$, то $a - c \geqslant a_1 - c_1$; если же $b + c = b_1 + c_1$ и $a - c = a_1 - c_1$, то $c > c_1$. Тогда в точке s_n (s_n — абсцисса точки S_n) отношение R любого другого члена многочлена $P(t, u, u')$ к главному члену можно оценить так:

$$\begin{aligned} |R| &= M t^{a_1 - a} u^{b_1 - b} (u')^{c_1 - c} = M t^{a_1 - a} (\varphi')^{c_1 - c} u^{(b_1 + c_1) - (b + c)} \leqslant \\ &\leqslant M t^{a_1 - a} (\varphi')^{c_1 - c} e^{[(b_1 + c_1) - (b + c)]\varphi} = \\ &= M t^{-[(b + c) - (b_1 + c_1)]\, b(t)} t^{-[(a - c) - (a_1 - c_1)]} (t\varphi'(t))^{-(c - c_1)}. \end{aligned}$$

Разбор всех трех возможностей в определении главного члена показывает, что $R(s_n) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда получаем противоречие такое же, как в п. 2. — *Прим. перев.*

[2]) См. примечание 11 в конце книги. — *Прим. перев.*

и, учитывая неравенство $u > e^{\varphi(t)}$, получаем, что необходимо $\alpha = -1$, $\beta \neq -1$ (ср. случаи (а)—(г) на стр. 121). Отсюда интегрированием находим выражение

$$u = \exp[at^b(1 + \varepsilon(t))],$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Более точные асимптотические выражения для u можно теперь получить, рассуждая аналогично п. 5.

7. Некоторые результаты для уравнения $u'' = P(u, t)/Q(u, t)$. Противоречащий пример из п. 3 показывает, что любая общая теория асимптотического поведения правильных решений полиномиальных уравнений вида

$$P(t, u, u', u'') = 0$$

должна быть весьма сложной. Однако если ограничиться важным классом уравнений вида

$$u'' = \frac{P(u, t)}{Q(u, t)}, \tag{16}$$

где P и Q — многочлены, то можно получить некоторые интересные утверждения. Доказательства этих утверждений основаны на тех же соображениях, что и выше, и поэтому мы предложим их в качестве упражнения.

Упражнения

1. Если u — правильное решение уравнения (16), то либо существует постоянная k такая, что $u = O(t^k)$, либо существуют две постоянные a и b такие, что $u = \exp at^{b+\varepsilon}$, где $\varepsilon = \varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

2. Если u — правильное решение уравнения $u'' = P(u, t)$, где P — многочлен, содержащий по крайней мере один член вида $at^\alpha u^\beta$ ($\beta > 1$), то $u = O(t^k)$ для некоторого k.

3. Если u — правильное решение уравнения (16), причем степень многочлена P по переменному u не превышает на единицу степень Q по u, то $u = O(t^k)$.

4. Если u — решение уравнения (16), причем каждая рациональная функция от u', u и t становится для достаточно больших значений t монотонной, то выражение для u при $t \to \infty$ имеет один из следующих видов:

(а) $\exp[(a + \varepsilon)t^b e^{p(t)}]$;

(б) $\exp[(a + \varepsilon)t^b]$;

(в) $a(\ln\ln t)^{1/p}$;

(г) $a(\ln t)^b$;

(д) $\exp[(a + \varepsilon)(t^q \ln t)^{1/p}]$;

(е) $\exp[(a + \varepsilon)(\ln t)^{(p+1)/p}]$;

(ж) $a(\ln t)^p(\ln\ln t)^{1/q}$;

(з) $\exp[(a + \varepsilon)(\ln t)^{(p-1)/p}]$;

здесь под ε понимается функция от t, стремящаяся к нулю при $t \to \infty$, p, q — целые и a, b — вещественные числа, а $p(t)$ в выражении (а) представляет собой многочлен.

ЛИТЕРАТУРА

П. 1. По поводу приложений теории функций комплексного переменного к изучению структуры решений дифференциальных уравнений первого порядка см.

1. Boutroux P., Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, Paris, 1908.

П. 2.

2. Borel E., Mémoire sur les séries divergents, Ann. École Norm., **16** (1899), 9—136.
3. Lindelof E., Sur la croissance des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre, Bull. Soc. Math. France, **27** (1899), 205—215.

П. 3.

4. Vijayaraghavan T., Basu N. M., Bose S. N., A simple example for a theorem Vijayaraghavan, Journ. London Math. Soc., **12** (1937), 250—252.

Пп. 4, 5 и 6.

5. Hardy G. H., Some results concerning the behavior at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equations of the first order, Proc. London Math. Soc., ser. 2, **10** (1912), 451—468.

П. 7.

6. Fowler R. H., Some results on the form near infinity of real continuous solutions of a certain type of second order differential equation, Proc. London Math. Soc., ser. 2, **13** (1914), 341—371.

Глава VI

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Введение. Перейдем теперь к изучению линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)\frac{du}{dt}\right)+l(t)u=0\,^{1)}. \tag{1}$$

Так как совершенно невозможно дать полный обзор всего известного о свойствах решений этого уравнения, то мы попытаемся показать различные теоремы и методы, с тем чтобы облегчить читателю изучение оригинальных статей и получение новых результатов.

Хотя некоторые из результатов, приводимых ниже, являются частными случаями общих теорем, справедливых для линейных уравнений любого порядка, все же большинство результатов тесно связано с простым частным видом (1). Даже если такое обобщение возможно, мы без колебаний будем излагать доказательство только для уравнения (1), если это доказательство иллюстрирует важный и полезный метод.

Значение уравнений указанного вида в физике трудно переоценить; этим объясняется большое количество исследований, связанных с уравнением (1). С математической точки зрения оно представляет собой постоянный вызов искусству аналитика: надо получать всевозможные свойства решений этого уравнения, не пользуясь такой роскошью, как явное представление этих решений через коэффициенты k и l.

Мы начнем изложение с некоторых предварительных лемм, необходимых для дальнейшего. После этого мы перейдем к вопросам ограниченности, колебания и асимптотического поведения решений.

2. Некоторые леммы. В этом пункте мы соберем вместе некоторые результаты, к которым будем неоднократно возвращаться ниже. Лемма 1 уже сформулирована и доказана в гл. II, а лемму 2 можно проверить непосредственно.

---

[1]) В этой главе все рассматриваемые функции считаются вещественными, хотя некоторые результаты обобщаются и на случай функций, принимающих комплексные значения. Функции $k(t)$ и du/dt надо считать кусочно гладкими. Во всех случаях предполагается, что $k(t)>0$. — *Прим. перев.*

Лемма 1. *Пусть* $u(t)v(t) \geqslant 0$, $c_1 \geqslant 0$ *и удовлетворяется неравенство*

$$u \leqslant c_1 + \int_0^t uv\,dt, \qquad t \geqslant 0.$$

Тогда

$$u \leqslant c_1 \exp\left(\int_0^t v\,dt\right), \qquad t \geqslant 0.$$

Лемма 2. *Пусть* u_1 *и* u_2 — *два линейно независимых решения уравнения*

$$u'' + a(t)u = 0, \tag{2}$$

для которых определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = 1$$

для всех t. *Тогда общее решение неоднородного уравнения*

$$u'' + a(t)u = w(t)$$

дается формулой

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \int_0^t [u_1(t_1)\,u_2(t) - u_1(t)\,u_2(t_1)]\,w(t_1)\,dt_1,$$

где c_1 *и* c_2 — *постоянные, определяемые начальными условиями.*

Лемма 3. *Если* u_1 — *решение уравнения* (2), *причем* $u_1(t_0) \neq 0$, *то функция*

$$u_2 = u_1 \int_{t_0}^t \frac{dt}{u_1^2} \tag{3}$$

представляет собой другое, линейно независимое решение этого уравнения.

Доказательство. Этот результат можно получить при помощи стандартного метода вариации произвольных постоянных после подстановки $u_2 = u_1 \int_{t_0}^t v\,dt$ или на основании того, что для любых двух решений u_1 и u_2 уравнения (2) имеет место соотношение

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = c_1$$

(ср. теорему 2 гл. I). Это соотношение является уравнением первого порядка относительно функции u_2, которое можно легко решить, и тогда получается соотношение (3).

3. Некоторые полезные преобразования. В этом пункте мы рассмотрим некоторые виды замены аргумента и функции, которые значительно облегчают получение свойств решений, а также уменьшают число различных типов уравнений.

Начнем с того, что покажем два метода, при помощи которых уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)\frac{du}{dt}\right)+l(t)u=0 \tag{1}$$

можно привести к более простому виду

$$\frac{d^2u}{dt^2}+a(t)u=0. \tag{2}$$

Первый метод связан с заменой аргумента и предполагает, что функция $k(t)$ положительна и что

$$\int^{\infty}\frac{dt}{k(t)}=\infty.$$

В этом случае мы положим $s=\int^{t} dt/k(t)$, тогда уравнение (1) перейдет в уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2}+k(t)\,l(t)\,u=0,$$

где произведение $k(t)\,l(t)$ надо рассматривать как функцию от s. При этом $s\to\infty$ для $t\to\infty$.

Второй метод связан с заменой искомой функции. Запишем уравнение (1) в более подробном виде

$$u''+\frac{k'(t)}{k(t)}u'+\frac{l(t)}{k(t)}u=0. \tag{4}$$

Мы хотим преобразовать (4) в уравнение без среднего члена. То, что это всегда можно выполнить, утверждает следующая

Лемма 4. *Подстановка*

$$u=v\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t p\,dt\right)$$

преобразует уравнение

$$u''+p(t)u'+q(t)u=0 \tag{5}$$

в уравнение

$$v''+\left(q-\frac{1}{2}p'-\frac{p^2}{4}\right)v=0.$$

Важная особенность этого преобразования состоит в том, что нули функции v совпадают с нулями u, поскольку интеграл $\int_0^t p\,dt$ конечен для конечных значений t.

Применяя лемму 4 к уравнению (4), получаем, что функция $v = u\sqrt{k(t)}$ удовлетворяет уравнению

$$v'' + \left[\frac{l(t)}{k(t)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{k'}{k}\right) - \frac{(k'/k)^2}{4}\right]v = 0,$$

имеющему вид (2).

Мы хотим привести уравнение (2) к виду, который во многих случаях поддается более легкому исследованию.

Лемма 5 (преобразование Лиувилля). *Замена аргумента*

$$s = \int_0^t a(t)\,dt$$

преобразует уравнение

$$u'' \pm a^2(t)\,u = 0, \qquad a(t) > 0,$$

в уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{a'(t)}{a^2(t)}\frac{du}{ds} \pm u = 0.$$

Применяя лемму 4 *и полагая*

$$v = u\sqrt{a(t)}\left[= u\exp\left(\frac{1}{2}\int\frac{a'(t)\,ds}{a^2(t)}\right)\right],$$

получаем окончательное уравнение для v:

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left[\pm 1 - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{a'(t)}{a^2(t)}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{a'(t)}{a^2(t)}\right)^2\right]v = 0.$$

Во многих случаях уравнения первого порядка исследовать легче, чем уравнения второго порядка. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка всегда можно привести к нелинейному дифференциальному уравнению $n-1$-го порядка при помощи преобразования $u'/u = v$. В случае $n = 2$ результат особенно прост:

Лемма 6. *Подстановка*

$$u = \exp\int^t v\,dt$$

преобразует уравнение (2) *в уравнение*

$$v' + v^2 + a(t) = 0. \tag{6}$$

Уравнения вида (6) называются *уравнениями Риккати.*

Надо отметить, что во всех указанных случаях применения замены переменных надо заботиться о том, чтобы преобразование было взаимно однозначным.

Заметим, наконец, что любое уравнение второго порядка

$$u'' + p(t)\,u' + q(t)\,u = 0 \tag{5}$$

эквивалентно некоторой системе второго порядка, именно, системе

$$u' = v,$$
$$v' = -p(t)\,v - q(t)\,u.$$

Иногда удобно вводить полярные координаты вместо декартовых. Для системы второго порядка общего вида

$$\begin{aligned} u' &= a_{11}(t)\,u + a_{12}(t)\,v, \\ v' &= a_{21}(t)\,u + a_{22}(t)\,v \end{aligned} \tag{7}$$

это делается на основании следующей леммы:

Лемма 7. *Замена переменных*

$$u = \rho\cos\vartheta,$$
$$v = \rho\sin\vartheta, \qquad \rho > 0$$

преобразует систему (7) *в систему*

$$\vartheta' = \frac{a_{21} - a_{12}}{2} + \frac{1}{2}\,r(t)\cos(2\vartheta + \psi),$$
$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{1}{2}\,r(t)\sin(2\vartheta + \psi);$$

где

$$r = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2},$$
$$\cos\psi = \frac{a_{21} + a_{12}}{r},$$
$$\sin\psi = \frac{a_{11} - a_{22}}{r}.$$

4. Теоремы об ограниченности. Применяя эти предварительные замечания, перейдем теперь к задаче об определении того, при каких условиях все решения данного уравнения будут ограниченными при $t \to \infty$. Мы начнем с рассмотрения уравнения

$$u'' + (a^2 + \varphi(t))\,u = 0, \qquad a \neq 0, \tag{8}$$

где $\varphi(t)$ в некотором смысле мало при $t \to \infty$. Без ограничения общности можно предполагать, что $a = 1$.

Возникает естественный вопрос о связи между решениями уравнения (8) и решениями простого уравнения

$$u'' + u = 0.$$

Мы покажем, что в наиболее распространенных случаях эта связь довольно тесная, однако простого стремления функции $\varphi(t)$ к 0 при $t \to \infty$ ни в коей мере не достаточно для того, чтобы гарантировать ограниченность всех решений уравнения (8).

Нашим первым результатом будет

Теорема 1. *Все решения уравнения*

$$u'' + (1 + \varphi(t) + \psi(t))\, u = 0$$

ограничены, если выполняются условия:

(а) $\int^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$,

(б) $\int^{\infty} |\psi'(t)|\, dt < \infty, \quad \psi(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Покажем сначала, что все решения уравнения

$$u'' + (1 + \psi(t))\, u = 0 \tag{9}$$

ограничены, если выполнено условие (б). Умножая обе части (9) на u' и интегрируя от некоторого t_0 до t, получаем

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \int_{t_0}^{t} \psi(t_1)\, uu'\, dt_1 = c_1.$$

Отсюда при помощи интегрирования по частям находим

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \psi(t)\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \psi'(t_1)\, u^2\, dt_1 = c_2. \tag{10}$$

Возьмем t_0 настолько большим, чтобы при $t \geqslant t_0$ выполнялось неравенство $1 + \psi(t) \geqslant 1/2$. Тогда для $t \geqslant t_0$ будем иметь

$$u^2 \leqslant 4\,|c_2| + 2\int_{t_0}^{t} |\psi'(t_1)|\, u^2\, dt_1 = c_3 + 2\int_{t_0}^{t} |\psi'(t_1)|\, u^2\, dt_1.$$

Применяя лемму 1, получим, что для $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство

$$u^2 \leqslant c_3 \exp\left(2\int_{t_0}^{t} |\psi'(t_1)|\, dt_1\right) \leqslant c_3 \exp\left(2\int_{t_0}^{\infty} |\psi'(t_1)|\, dt_1\right).$$

Значит, функция u ограничена. Из формулы (10) теперь видно, что и производная u' также ограничена. Чтобы закончить доказательство, нам нужна следующая

Теорема 2. *Если все решения уравнения*

$$u'' + a(t)\, u = 0 \tag{2}$$

ограничены вместе со своими производными первого порядка, то и все решения уравнения

$$u'' + (a(t) + b(t))\, u = 0 \tag{11}$$

также ограничены вместе с их первыми производными, если только

$$\int^{\infty} |b(t)|\,dt < \infty.$$

Однако это утверждение является частным случаем теоремы 6 гл. II, что видно после перехода от уравнения (11) к системе уравнений.

Упражнение

Применив лемму 7, показать, что все решения дифференциального уравнения $u'' + (1 + f(t))u = 0$ ограничены, если $\int^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$.

5. Противоречащий пример. Теперь мы покажем на примере, насколько близка теорема 1 к наилучшему (в некотором смысле) возможному результату.

Теорема 3. *Если при* $t \to \infty$

$$g(t) \to 0, \qquad g'(t) \to 0,$$

то функция

$$u = \left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\cos s\,ds\right)\right]\cos t$$

представляет собой решение уравнения

$$u'' + (1 + \varphi(t))\,u = 0,$$

где

$$\varphi(t) = 3g(t)\sin t - g'(t)\cos t - g^2(t)\cos^2 t$$

стремится к нулю при $t \to \infty$.

Если положить $g(t) = (\cos t)/t$, то решение получается неограниченным, хотя как $\varphi(t)$, так и $\varphi'(t)$ имеют вид $O(1/t)$ при $t \to \infty$.

6. Случай $u'' + a(t)\,u = 0$, $a(t) \to \infty$. В предыдущих пунктах мы исследовали случай, когда $a(t) \to a^2 \neq 0$ при $t \to \infty$. Здесь мы рассмотрим случай $a(t) \to \infty$.

Теорема 4. *Если функция* $a(t)$ *кусочно гладкая и монотонно стремится к* ∞, *то все решения уравнения*

$$u'' + a(t)\,u = 0$$

ограничены при $t \to \infty$.

Доказательство. Имеем

$$u'u'' + a(t)\,uu' = 0,$$

Интегрируя это уравнение от нуля до t, а затем интегрируя по частям, получаем

$$\frac{u'^2}{2}+a(t)\frac{u^2}{2}-\int_0^t \frac{u^2}{2}a'(t)\,dt=c_1, \tag{12}$$

откуда, считая без ограничения общности, что $a(t)>0$, выводим

$$a(t)\frac{u^2}{2}\leqslant|c_1|+\int_0^t \frac{u^2}{2}a'(t)\,dt=$$

$$=|c_1|+\int_0^t \frac{u^2\alpha(t)}{2}\frac{a'(t)}{a(t)}\,dt.$$

Применяем лемму 1:

$$\frac{a(t)u^2}{2}\leqslant|c_1|\exp\left(\int_0^t \frac{a'(t)}{a(t)}\,dt\right)=c_2a(t).$$

Следовательно, $u^2\leqslant 2c_2$.

7. Случай $u''+a(t)u=0$, $a(t)\to 0$. Мы рассмотрели случаи, когда $a(t)\to a^2\neq 0$ и когда $a(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Перейдем теперь к случаю, когда $a(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Рассмотрение уравнения

$$u''+\frac{u}{t^2}=0,$$

которое имеет два линейно независимых решения вида t^{α_1} и t^{α_2}, где α_1 и α_2 — корни уравнения $\alpha^2-\alpha+1=0$, показывает, что решения уравнений этого типа могут быть неограниченными. Естественно ожидать, что если при $t\to\infty$ функция $a(t)\to 0$ достаточно быстро, то решения уравнения $u''+a(t)u=0$ стремятся к решениям уравнения $u''=0$.

Теорема 5. *Рассмотрим уравнение*

$$u''+a(t)u=0, \tag{2}$$

где

$$\int^{\infty} t\,|a(t)|\,dt<\infty.$$

Тогда для любого его нетривиального решения u существует $\lim\limits_{t\to\infty} u'$ и $u\sim d_0+d_1t$ при $t\to\infty$, где d_0 и d_1 не могут одновременно равняться нулю.

Доказательство. Запишем уравнение (2) в виде $u'' = -a(t)u$. Дважды интегрируя от некоторого $t_0 \geqslant 1$ до t, получаем

$$u = c_1 + c_2 t - \int_{t_0}^{t} (t - t_1)\, a(t_1)\, u(t_1)\, dt_1. \tag{13}$$

Отсюда для $t \geqslant t_0$ получаем неравенство

$$|u| \leqslant (|c_1| + |c_2|)\, t + t \int_{t_0}^{t} |a(t_1)|\, |u(t_1)|\, dt_1,$$

или

$$\frac{|u|}{t} \leqslant |c_1| + |c_2| + \int_{t_0}^{t} t_1 |a(t_1)| \frac{|u(t_1)|}{t_1}\, dt_1.$$

Применяя нашу основную лемму, выводим для $t \geqslant t_0$

$$\frac{|u|}{t} \leqslant (|c_1| + |c_2|) \exp \int_{t_0}^{t} t_1 |a(t_1)|\, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant (|c_1| + |c_2|) \exp \int_{t_0}^{\infty} t_1 |a(t_1)|\, dt_1 = c_3.$$

Но из формулы (13) дифференцированием находим

$$u' = c_2 - \int_{t_0}^{t} a(t_1)\, u(t_1)\, dt_1.$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t} |a(t_1)|\, |u(t_1)|\, dt_1 \leqslant c_3 \int_{t_0}^{t} t_1 |a(t_1)|\, dt_1,$$

то интеграл $\int_{t_0}^{\infty} a(t_1)\, u(t_1)\, dt_1$, распространенный на бесконечный промежуток, сходится и u' имеет предел при $t \to \infty$.

Если этот предел отличен от нуля, то мы видим, что $u \sim d_1 t$, где $d_1 \neq 0$ при $t \to \infty$ [1]). Теперь заметим, что в силу леммы 3 функ-

---

[1]) См. примечание на стр. 122. — *Прим. перев.*

ция $v = u \int\limits_t^\infty dt/u^2$ представляет собой другое решение нашего уравнения, причем для него $v \sim d_1^{-1}$ при $t \to \infty$ [1]), и все доказано.

Чтобы убедиться в том, что указанный предел может быть отличным от нуля, выберем $c_2 = u'(t_0) = 1$ и $c_1 = u(t_0) - c_2 t_0 = 0$ и будем считать t_0 таким, что

$$1 - c_3 \int\limits_{t_0}^\infty t_1 \,|\, a(t_1) \,|\, dt_1 = 1 - \int\limits_{t_0}^\infty t_1 \,|\, a(t_1) \,|\, dt_1 \exp \int\limits_{t_0}^\infty t_1 \,|\, a(t_1) \,|\, dt_1 > 0.$$

Эта теорема завершает наше предварительное исследование ограниченности решений уравнения $u'' + a(t)u = 0$. В последующих пунктах мы получим более точные результаты.

Упражнения

1. Как для уравнения $d^n u/dt^n + a(t)u = 0$ формулируется результат, аналогичный теореме 5?

2. Справедлива ли аналогичная теорема для векторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y?$$

3. Показать, что если $d^n u/d^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k}(t)\, d^k u/dt^k = 0$ и при этом

$$\int^\infty |\, a_k(t) \,|\, t^{k-1}\, dt < \infty,$$

то предел $\lim\limits_{t \to \infty} d^{n-1}u/d^{n-1}$ существует.

8. Ограниченность в пространстве L^2. В предыдущих пунктах мы занимались ограниченностью решений уравнения $u'' + a(t)u = 0$ в смысле нормы $\|u\| = \overline{\lim\limits_{t \to \infty}} \,|u|$. В этом пункте мы рассмотрим другую норму, представляющую интерес в связи с различными задачами математической физики, именно,

$$\|u\| = \left(\int\limits_0^\infty |\, u^2(t) \,|\, dt \right)^{1/2}.$$

---

[1]) В самом деле, если $|\, u/(d_1 t) - 1 \,| \leqslant \varepsilon \; (0 < \varepsilon < 1)$ при $t \geqslant t_1$, то для $d_1 > 0$ имеем $d_1(1-\varepsilon)t \leqslant u \leqslant (1+\varepsilon)t$, откуда при $t \geqslant t_1$

$$\frac{1-\varepsilon}{d_1(1+\varepsilon)^2} \leqslant u \int\limits_t^\infty \frac{dt}{u^2} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{d_1(1-\varepsilon)^2}.$$

— *Прим. перев.*

Если эта норма конечна, то мы говорим, что функция u принадлежит пространству $L^2(0, \infty)$, и пишем $u \in L^2(0, \infty)$.

Теорема 6. *Если все решения уравнения $u'' + a(t)u = 0$ принадлежат пространству $L^2(0, \infty)$, то и все решения уравнения*

$$u'' + (a(t) + b(t))u = 0 \tag{11}$$

также принадлежат этому пространству, если $|b(t)| \leqslant c_1$, $t \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два линейно независимых решения уравнения

$$u'' + a(t)u = 0,$$

для которых

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = 1$$

при всех t. В силу леммы 2 каждое решение уравнения (11) удовлетворяет интегральному уравнению вида

$$u = c_2u_1 + c_3u_2 - \int_0^t [u_1(t_1)u_2(t) - u_1(t)u_2(t_1)]\, b(t_1)\, u(t_1)\, dt_1. \tag{14}$$

Отсюда получаем неравенство

$$|u| \leqslant |c_2|\,|u_1| + |c_3|\,|u_2| + \\ + \int_0^t \Big[|u_1(t_1)u_2(t)| + |u_1(t)u_2(t_1)| \Big] |b(t_1)\, u(t_1)|\, dt_1. \tag{15}$$

Теперь нам потребуется следующая лемма (неравенство Коши — Буняковского):

Лемма 8. *Имеем*

$$\int_a^b |fg|\, dx \leqslant \Big(\int_a^b |f|^2 dt\Big)^{1/2} \Big(\int_a^b |g|^2 dt\Big)^{1/2} \tag{16}$$

для всех функций f и g, для которых правая часть неравенства существует.

Доказательство. Так как $(u - v)^2 \geqslant 0$, то

$$2uv \leqslant u^2 + v^2.$$

Здесь надо положить $u = |f| \Big/ \Big(\int_a^b |f|^2 dt\Big)^{1/2}$, $v = |g| \Big/ \Big(\int_a^b |g|^2 dt\Big)^{1/2}$, проинтегрировать обе части неравенства от a до b и упростить результат,

Возвращаясь к неравенству (15) и пользуясь тем, что $(u+v)^2 \leqslant 2(u^2+v^2)$, получаем

$$u^2 \leqslant 4\left\{c_2^2u_1^2+c_3^2u_2^2+\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^t (|u_1(t_1)u_2(t)|+|u_1(t)u_2(t_1)|)\,|b(t_1)u(t_1)|\,dt_1\right]^2\right\}.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство (16) и затем неравенство $(u+v)^2 \leqslant 2(u^2+v^2)$, получаем

$$u^2 \leqslant 8\left\{c_2^2u_1^2+c_3^2u_2^2+\left[u_2^2(t)\int_0^t u_1^2(t_1)\,dt_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+u_1^2(t)\int_0^t u_2^2(t_1)\,dt_1\right]\left[\int_0^t b^2(t_1)u^2(t_1)\,dt_1\right]\right\},$$

откуда, согласно предположениям теоремы,

$$u^2 \leqslant 8\left[c_2^2u_1^2+c_3^2u_2^2+c_4(u_1^2+u_2^2)\int_0^t u^2(t_1)\,dt_1\right].$$

Интегрируя обе части этого неравенства от 0 до t, выводим:

$$\int_0^t u^2\,dt_1 \leqslant 8c_2^2\int_0^t u_1^2\,dt_1+8c_3^2\int_0^t u_2^2\,dt_1+$$
$$+8c_4\int_0^t (u_1^2+u_2^2)\left(\int_0^{t_2} u^2(t_1)\,dt_1\right)dt_2 \leqslant$$
$$\leqslant c_5+8c_4\int_0^t\left[(u_1^2+u_2^2)\left(\int_0^{t_2} u^2(t_1)\,dt_1\right)\right]dt_2.$$

На основании леммы 1 это влечет за собой неравенство

$$\int_0^t u^2\,dt_1 \leqslant c_5\exp\left[8c_4\int_0^t (u_1^2+u_2^2)\,dt\right],$$

откуда следует, что $u \in L^2(0, \infty)$.

Упражнения

1. Показать посредством сравнения площадей справедливость неравенства

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p}+\frac{v^{p'}}{p'}$$

при $u, v \geqslant 0$, если $p>1$ и $p'=p/(p-1)$.

2. (Неравенство Гельдера.) Применяя предыдущее неравенство, показать, что

$$\int_a^b uv\,dt \leqslant \left(\int_a^b u^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b v^{p'}\,dt\right)^{1/p'}$$

при $u,\ v \geqslant 0$, где числа p и p' такие, как указано в **1**.

3. Говорят, что $u \in L^p(0, \infty)$, если $\int_0^\infty |u|^p\,dt < \infty$. Показать, что если все решения уравнения (2) принадлежат пространствам $L^p(0, \infty)$ и $L^{p'}(0, \infty)$, то тем же свойством обладают решения уравнения (11), если $|b(t)| \leqslant c_1$ для $t \geqslant t_0$.

4. Могут ли все решения уравнения (2) принадлежать пространству $L^2(0, \infty)$ и быть ограниченными?

5. Показать, что если все решения уравнения (2) принадлежат пространству $L^1(0, \infty)$ и ограничены, то тем же свойством обладают решения уравнения (11), если $|b(t)| \leqslant c_1$ для всех $t \geqslant 0$.

9. Соотношения между величинами $\|u\|$, $\|u'\|$ и $\|u''\|$. Рассмотрим теперь, каким неравенствам удовлетворяют нормы производных различного порядка, причем ограничимся лишь наиболее распространенными нормами:

(а) $\|u\| = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,|u|$,

(б) $\|u\| = \left(\int_0^\infty u^2\,dt\right)^{1/2}$.

Исследованию таких неравенств посвящено много работ, и возможно, что приводимый ниже метод не является наиболее эффективным. Однако он достаточно интересен и применим ко многим различным типам норм.

Теорема 7. *Для каждой из приведенных выше норм из конечности $\|u\|$ и $\|u''\|$ следует конечность $\|u'\|$.*

Доказательство. Пусть $\|u\|$ и $\|u''\|$ конечны и пусть функция $f(t)$ определяется уравнением

$$u'' - u = f(t).$$

По нашему предположению норма $\|f(t)\|$ конечна. Рассматривая функцию u как решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, получим для нее выражение

$$u = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}\int_0^t \left(e^{t-t_1} - e^{-(t-t_1)}\right) f(t_1)\,dt_1 =$$

$$= e^t\left(c_1 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-t_1}f(t_1)\,dt_1\right) + e^{-t}\left(c_2 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{t_1}f(t_1)\,dt_1\right).$$

В каждой из указанных норм интеграл $\int_0^\infty e^{-t_1} f(t_1)\,dt_1$ сходится, если норма $\|f\|$ конечна. Далее, легко убедиться в том, что если $\|f\|$ конечна, то функция $e^{-t}\int_0^t e^{t_1} f(t_1)\,dt_1$ также имеет конечную норму.

Отсюда, если u имеет конечную норму, то необходимо выполняется соотношение

$$c_1 + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t_1} f(t_1)\,dt_1 = 0.$$

Применяя это соотношение, можем написать

$$u = -\frac{e^t}{2}\int_t^\infty e^{-t_1} f(t_1)\,dt_1 + c_2 e^{-t} - \frac{e^{-t}}{2}\int_0^t e^{t_1} f(t_1)\,dt_1,$$

откуда

$$u' = -\frac{e^t}{2}\int_t^\infty e^{-t_1} f(t_1)\,dt_1 - c_2 e^{-t} + \frac{e^{-t}}{2}\int_0^t e^{t_1} f(t_1)\,dt_1. \qquad (17)$$

До сих пор рассуждения были справедливыми для обеих норм. Будем пользоваться теперь нормой (а). Тогда получим неравенство

$$\|u'\| \leqslant \frac{1}{2}\|f\| + \frac{1}{2}\|f\| = \|f\| \leqslant \|u''\| + \|u\|.$$

Отсюда ясно, что если $\|u\|$ и $\|u''\|$ конечны, то и $\|u'\|$ конечна. Кроме того, из соотношения (17) следует также, что если $|u|$ и $|u''| \to 0$ при $t \to \infty$, то так же ведет себя и $|u'|$.

Аналогичный результат можно получить для нормы (б) [1]). Это требует несколько большего количества преобразований и оставляется в качестве упражнения. Более аккуратный подсчет приводит для обеих норм к неравенству

$$\|u'\|^2 \leqslant 4\|u\|\,\|u''\|.$$

Упражнение

Вывести неравенства, связывающие нормы производных $u^{(k)}$, $u^{(l)}$ и функции u при $k > l > 1$.

10. Уравнения с колеблющимися решениями. В этом пункте мы рассмотрим вопрос об определении условий, при которых все решения уравнения

$$u'' + \varphi(t)\,u = 0 \qquad (18)$$

---

[1]) См. примечание 12 в конце книги. — *Прим. перев.*

имеют бесконечное число нулей в интервале $[0, \infty)$. Такие уравнения мы назовем *уравнениями с колеблющимися решениями*, а решения также назовем *колеблющимися*.

Отметим, кстати, что, как это следует из теоремы единственности, нетривиальное решение любого линейного однородного дифференциального уравнения на любом конечном отрезке может иметь только конечное число нулей.

Свойства решений уравнения

$$u'' + m^2 u = 0 \tag{19}$$

наводят на мысль о справедливости следующего утверждения:

Теорема 8. *Если все решения уравнения*

$$u'' + \varphi(t) u = 0 \tag{18}$$

колеблющиеся и если

$$\psi(t) \geqslant \varphi(t),$$

то и все решения уравнения

$$v'' + \psi(t) v = 0 \tag{20}$$

колеблющиеся.

Иными словами: если $\psi(t) \geqslant \varphi(t)$ *и некоторые решения уравнения* (20) *неколеблющиеся, то и некоторые решения* (18) *неколеблющиеся.*

Доказательство. Имеем

$$uv'' - vu'' + (\psi(t) - \varphi(t)) uv = 0.$$

Пусть t_1 и t_2 два последовательных нуля решения u; предположим, что $u \geqslant 0$ между t_1 и t_2. Интегрируя по отрезку $[t_1, t_2]$ и учитывая, что $uv'' - vu''$ представляет собой точную производную, получаем

$$(uv' - vu')\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\psi(t) - \varphi(t)) uv\, dt = 0$$

и потому

$$u'(t_1) v(t_1) - u'(t_2) v(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} (\psi(t) - \varphi(t)) uv\, dt = 0,$$

причем $u'(t_1) > 0$ и $u'(t_2) < 0$. Следовательно, никакое решение уравнения (20) не может быть положительным на отрезке $[t_1, t_2]$. Мы получили даже более сильный результат, чем сформулированный в теореме.

Чтобы перенести этот результат на уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(k_1(t) \frac{du}{dt}\right) + \varphi_1(t) u = 0, \tag{21}$$

надо воспользоваться более сложным тождеством, принадлежащим Пиконе, именно, тождеством

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u}{v}(k_1u'v-k_2uv')\right]=(\varphi_2-\varphi_1)u^2+(k_1-k_2)u'^2+k_2\left(u'-\frac{uv'}{v}\right)^2,$$

где v — решение уравнения такого же вида, как (21), с заменой k_1 и φ_1 на k_2 и φ_2. Отсюда легко получается

Теорема 9. *Если все решения уравнения*

$$\frac{d}{dt}\left(k_1(t)\frac{du}{dt}\right)+\varphi_1(t)u=0$$

колеблющиеся и если

$$\varphi_2\geqslant\varphi_1,$$
$$k_1\geqslant k_2>0,$$

то и все решения уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(k_2(t)\frac{du}{dt}\right)+\varphi_2(t)u=0$$

колеблющиеся.

Основываясь на этой теореме, весьма полезной в теории Штурма — Лиувилля, мы сейчас укажем некоторые простые классы уравнений с колеблющимися решениями. Сравнением с простейшим уравнением (19) получаем, что если

$$\varphi(t)\geqslant m^2>0, \tag{22}$$

то все решения уравнения (18) колеблющиеся. Ниже мы дадим другое доказательство, основанное на методе, применимом в более общем случае.

При помощи повторной замены переменных из уравнения (19) можно получить некоторые нетривиальные уравнения для сравнения. Имеет место

Теорема 10. *Если*

$$\varphi(t)\geqslant(1+\varepsilon)\frac{1}{4t^2}$$

или, в более общем случае, если

$$\varphi(t)\geqslant\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{4t^2\ln^2 t}+\ldots+(1+\varepsilon)\frac{1}{4t^2\ln 2t\ldots\ln_r^2 t}$$

при $t\geqslant t_0$ *и* $\varepsilon>0$, *где* r — *некоторое натуральное число, то все решения уравнения* (18) *колеблющиеся.*

Здесь

$$\ln_1(t)=\ln t,$$
$$\ln_2(t)=\ln(\ln t),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\ln_r(t)=\ln(\ln_{r-1}t).$$

Доказательство. Доказательство получается при помощи подстановок

$$t_1 = e^t, \quad t_2 = e^{t_1}, \ \ldots, \ t_n = e^{t_{n-1}},$$

примененных к уравнению (19). Мы знаем, что все решения этого уравнения колеблющиеся, если $m^2 > 0$. Полагая $t_1 = e^t$, получим

$$t_1^2 \frac{d^2u}{dt_1^2} + t_1 \frac{du}{dt_1} + m^2 u = 0.$$

Исключая член с du/dt при помощи подстановки

$$u = \frac{v}{\sqrt{t_1}},$$

получим

$$\frac{d^2v}{dt_1^2} + \frac{m^2 + 1/4}{t_1^2} v = 0.$$

Значит, если $m^2 > 0$, то все решения этого уравнения колеблющиеся.

Совершим теперь подстановку $t_2 = e^{t_1}$. Получится уравнение

$$t_2^2 \frac{d^2v}{dt_2^2} + t_2 \frac{dv}{dt_2} + \frac{m^2 + 1/4}{\ln^2 t_2} v = 0.$$

Исключая, как выше, член с dv/dt, получим уравнение

$$\frac{d^2w}{dt_2^2} + \left(\frac{1}{4t_2^2} + \frac{m^2 + 1/4}{t_2^2 \ln^2 t_2}\right) w = 0,$$

все решения которого колеблющиеся. Продолжая таким же образом, мы докажем сформулированную теорему.

Этот результат является в некотором смысле наилучшим, так как каждое из уравнений

$$u'' + \frac{1}{4t^2} u = 0,$$

$$u'' + \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4t^2 \ln^2 t}\right) u = 0$$

и т. д. не обладает колеблющимися решениями. Именно, как видно из наших преобразований уравнения (19), в котором положено $m^2 = 0$, все решения этих уравнений для достаточно больших значений t монотонны, ибо они имеют вид $(a \ln t + b)\sqrt{t}$, $(a \ln_2 t + b)\sqrt{t \ln t}$, $(a \ln_3 t + b)\sqrt{t \ln t \ln_2 t}$ и т. д.

Если

$$\int^{\infty} |g(t)| \frac{dt}{t} < \infty,$$

то, как мы знаем из теоремы 5, все решения уравнения

$$u'' + \frac{g(t)}{t^2} u = 0$$

не колеблющиеся. Значит, мы снова видим, что теорема 10 близка к наилучшему возможному результату.

Дадим теперь другое доказательство важного и полезного, хотя и простого, утверждения о достаточности условия (22) для колебания решений. Предположим, что для $t \geqslant t_0$ существует решение $u > 0$. Тогда мы имеем

$$u'' = -\varphi(t)\, u < 0,$$

и, значит, u' монотонно убывает. Имеется две возможности: $u' > 0$ для всех $t \geqslant t_0$ или $u' < 0$ для $t \geqslant t_1$. Рассмотрим первую возможность. Если $u' > 0$, то u монотонно возрастает и $u \geqslant c_1$ при $t \geqslant t_0$. Отсюда

$$u'' = -\varphi(t)\, u \leqslant -m^2 c_1, \tag{23}$$

и, интегрируя, получаем $u' \leqslant -m^2 c_1 t + c_2 \to -\infty$ при $t \to \infty$, что противоречит неравенству $u' > 0$. Исследуем теперь вторую возможность: $u' < 0$ при $t \geqslant t_1$. Так как u' убывает и отрицательна для $t \geqslant t_1$, то $u' \leqslant -c_3$ при $t \geqslant t_1$; отсюда $u \leqslant -c_3 t + c_4$, и при $t \to \infty$ мы приходим к противоречию.

Возвращаясь к соотношению (23), мы видим, что (22) можно заменить более слабым условием:

$$\varphi(t) \geqslant 0, \qquad \int^{\infty} \varphi(t)\, dt = \infty.$$

Теоремы о колебании можно вывести также при помощи уравнения Риккати. Как в лемме 6, полагая $u'/u = v$, получим

$$v' + v^2 + \varphi(t) = 0.$$

Это уравнение имеет место на каждом интервале, где $u \neq 0$. Если $\varphi(t) \geqslant 0$, то мы видим, что функция u'/u монотонно не возрастает в каждом интервале, где она непрерывна. Положим $w = -v$, так что

$$w' = w^2 + \varphi(t).$$

Если $\varphi(t) \geqslant m^2 > 0$, то мы имеем

$$w' \geqslant w^2 + m^2,$$

откуда при сравнении с уравнением $w' = w^2 + m^2$ видно, что $w \to \infty$ при t, стремящемся к некоторому конечному значению, и, кроме того, что каждое решение уравнения (18) имеет нуль на каждом отрезке, концами которого служат нули решения уравнения $u'' + m^2 u = 0$, другими словами, на каждом отрезке длины π/m.

11. Уравнение $u'' + \varphi(t)\, u = 0$, где $\varphi(t)$ — периодическая функция. Перейдем теперь к важному и трудному вопросу об условиях ограниченности решений уравнения

$$u'' + \varphi(t)\, u = 0, \tag{18}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная периодическая функция периода π.

Наиболее важным примером уравнения такого типа является уравнение Матье

$$u'' + (a + b\cos 2t)\,u = 0, \tag{24}$$

которое встречается в некоторых важных исследованиях математической физики. Тесно связанное с ним уравнение

$$u'' + \Big[\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\Big]\,u = 0$$

встретилось в работах Хилла по движению Луны. Мы не будем пытаться рассматривать эти уравнения здесь, так как уравнение (24) вполне заслуживает отдельной книги[1]). Проблема в целом представляет большую трудность, и мы ограничимся доказательством одного важного общего результата, принадлежащего А. М. Ляпунову.

Хотя из общей теоремы о представлении (гл. I, п. 15, теорема 11) мы знаем, что каждое решение уравнения (18) имеет вид

$$u = e^{\rho t}p_1(t) + e^{\sigma t}p_2(t) \quad \text{или} \quad e^{\rho t}\,[p_1(t) + tp_2(t)],$$

где функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ периодичны с периодом π, но не существует простых методов, позволяющих по данной функции $\varphi(t)$ получить явно постоянные ρ и σ.

Однако имеется простой критерий ограниченности:

Теорема 11. *Если функция $\varphi(t)$ непрерывна и имеет период π и если выполняются условия*

(а) $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t)\,dt \geqslant 0, \qquad \varphi(t) \not\equiv 0,$

(б) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi(t)|\,dt \leqslant 4/\pi,$

то все решения уравнения (18) *ограничены при* $t \to \pm\infty$.

Доказательство. Пусть функции u_1 и u_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (18), причем $u_1(0) = 1$, $u_1'(0) = 0$, $u_2(0) = 0$, $u_2'(0) = 1$. Так как функции $u_1(t+\pi)$ и $u_2(t+\pi)$ также являются решениями уравнения (18), то должно быть

$$\left.\begin{aligned} u_1(t+\pi) &= u_1(\pi)\,u_1(t) + u_1'(\pi)\,u_2(t), \\ u_2(t+\pi) &= u_2(\pi)\,u_1(t) + u_2'(\pi)\,u_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$(-\infty < t < \infty)$. Пусть λ_1 и λ_2 — характеристические числа матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u_1(\pi) & u_1'(\pi) \\ u_2(\pi) & u_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

---

[1]) См., например, Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, М., 1953. — *Прим. перев.*

Применяя формулу (25) повторно, мы видим, что

$$\begin{pmatrix} u_1(t+n\pi) \\ u_2(t+n\pi) \end{pmatrix} = U^n \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Заметим далее, что определитель матрицы U равен значению определителя Вронского функций u_1 и u_2 при $t=\pi$. Так как определитель Вронского для этого уравнения постоянен и равен 1 для $t=0$, он равен 1 и для прочих значений t. По теореме Вьета $\lambda_1\lambda_2 = |U|$ и, следовательно, $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

Отсюда следует, что если уравнение (18) имеет неограниченные решения, то матрица U должна иметь либо различные вещественные характеристические числа, либо кратные характеристические числа 1, 1 или —1, —1. Если U имеет мнимые характеристические числа, по необходимости различные и равные 1 по абсолютной величине, то матрицы U^n равномерно ограничены при $n \to \pm\infty$, откуда следует ограниченность решений уравнения (18). Отсюда видно, что если существуют неограниченные решения, то должно быть

$$U = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T, \quad \text{либо} \quad U = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} T,$$

где λ_1, λ_2 вещественны, а во второй формуле $\lambda_1 = \pm 1$. Таким образом, равенства (25) можно записать в виде

$$T\begin{pmatrix} u_1(t+\pi) \\ u_2(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

или

$$T\begin{pmatrix} u_1(t+\pi) \\ u_2(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

и, следовательно, существует вещественное нетривиальное решение, удовлетворяющее условию

$$u_3(t+\pi) = \lambda_1 u_3(t). \tag{26}$$

Покажем, что это условие приводит к противоречию. Из тождества (26) следует, что функция $u_3(t)$ либо не имеет корней, либо имеет их бесконечно много. Допустим, что $u_3(t)$ не обращается в нуль. Тогда из уравнения (18) находим

$$\int_0^\pi \frac{u_3''}{u_3}\,dt + \int_0^\pi \varphi(t)\,dt = 0$$

и, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{u_3'}{u_3}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{(u_3')^2}{u_3^2}\,dt + \int_0^\pi \varphi(t)\,dt = 0.$$

Так как $u_3'(\pi)/u_3(\pi) = u_3'(0)/u_3(0)$, то этот результат противоречит условию (а).

Рассмотрим теперь случай, когда функция u_3 имеет корни. Из формулы (26) следует, что расстояние между соседними корнями этой функции непременно меньше либо равно π. Сейчас мы выведем общее неравенство, из которого получим противоречие с условием (б).

Лемма 9. *Пусть $u(a) = u(b) = 0$, где $0 < b - a \leqslant \pi$ и $u(t) > 0$ на интервале (a, b). Тогда имеет место неравенство*

$$\int_a^b \left|\frac{u''}{u}\right| dt > \frac{4}{b-a}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_a^b \left|\frac{u''}{u}\right| dt > (u_{\max})^{-1} \int_a^b |u''|\, dt \geqslant (u_{\max})^{-1} \max_{a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b} |u'(t_2) - u'(t_1)|\,^{1)}. \quad (27)$$

Пусть $u_{\max} = u(a + l_1) = u(b - l_2)$, $l_1 + l_2 = b - a$. Тогда по теореме Лагранжа получаем

$$u'(t_1) = l_1^{-1} u_{\max}, \quad -u'(t_2) = l_2^{-1} u_{\max},$$

где t_1 и t_2 — некоторые точки, $a < t_1 < a + l_1 = b - l_2 < t_2 < b$. Отсюда и из неравенства (27) вытекает неравенство

$$\int_a^b \left|\frac{u''}{u}\right| dt > l_1^{-1} + l_2^{-1} = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \geqslant \frac{4}{b-a},$$

поскольку $l_1 l_2 \leqslant (l_1 + l_2)^2/4$.

Теперь, так как функция u_3 удовлетворяет уравнению (18), причем $0 < b - a \leqslant \pi$, то в силу условия (б) теоремы имеем

$$\frac{4}{\pi} < \int_a^b \left|\frac{u_3''}{u_3}\right| dt = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt \leqslant \frac{4}{\pi},$$

и мы получаем противоречие.

12. Асимптотическое поведение решений уравнения $u'' - (1 + \varphi(t))\, u = 0$. Сводка результатов. Начнем с уравнения

$$u'' - (1 + \varphi(t))\, u = 0, \quad (28)$$

---

1) Первое неравенство строгое, так как если бы было $|u''/u| \equiv (u_{\max})^{-1} |u''|$ и $t = c$ — первая точка, в которой $u(t)$ принимает наибольшее на $[a, b]$ значение $u_{\max}$, то при $a \leqslant t < c$ было бы $u < u_{\max}$, т. е. $u'' = 0$ и $u' = \text{const} > 0$; отсюда в силу непрерывности $u'(t)$ мы имели бы $u'(c) > 0$, что невозможно.— *Прим. перев.*

теория которого проще и потому полнее, чем теория уравнения $u''+(1+\varphi(t))u=0$. В п. 13 будет доказано, что если $\varphi(t)\to 0$ при $t\to\infty$, то существуют два решения u_1 и u_2, для которых

$$\frac{u_1'}{u_1}\to 1, \qquad \frac{u_2'}{u_2}\to -1. \tag{29}$$

Согласно теореме 7 гл. II[1]), существуют два решения u_1 и u_2, для которых при достаточно больших t

$$\left.\begin{aligned} \exp\left[t-c_1\int_0^t|\varphi(t)|\,dt\right]\leqslant u_1\leqslant \exp\left[t+c_1\int_0^t|\varphi(t)|\,dt\right],\\ \exp\left[-t-c_1\int_0^t|\varphi(t)|\,dt\right]\leqslant u_2\leqslant \exp\left[-t+c_1\int_0^t|\varphi(t)|\,dt\right]\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Упражнение

Будут ли решения, удовлетворяющие неравенствам (30), автоматически удовлетворять соотношениям (29)?

Если сверх того предположить, что $\int^\infty|\varphi(t)|\,dt<\infty$, то, как это следует из теоремы 8 гл. II, можно утверждать существование решений u_1 и u_2, для которых

$$\begin{aligned} u_1&\sim e^t,\\ u_2&\sim e^{-t}.\end{aligned} \tag{31}$$

Результат (31) можно существенно уточнить, если соответственно сделать больше предположений о функции $\varphi(t)$. Так, если $\varphi(t)$ обладает асимптотическим разложением

$$\varphi(t)\sim\frac{c_2}{t^2}+\frac{c_3}{t^3}+\ldots+\frac{c_n}{t^n}+\ldots,$$

то по теореме 10 гл. II существуют два решения u_1 и u_2, для которых

$$u_1\sim e^t\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^{-k} \qquad (a_0=1),$$

$$u_2\sim e^{-t}\sum_{k=}^{\infty}b_kt^{-k} \qquad (b_0=1)$$

при $t\to\infty$.

---

[1]) См. примечание 13 в конце книги.— *Прим. перев.*

Из общего результата теоремы 8 гл. II следует, что если

$$\int^{\infty} |\varphi'(t)|\,dt < \infty,$$

то имеются два решения u_1 и u_2, для которых

$$u_1 \sim \exp \int_0^t \sqrt{1+\varphi(t)}\,dt,$$

$$u_2 \sim \exp\left[-\int_0^t \sqrt{1+\varphi(t)}\,dt\right]$$

при $t \to \infty$.

Отсюда, применяя формулу Тэйлора $\sqrt{1+\varphi} = 1 + \varphi/2 - \varphi^2/(8\sqrt{(1+\theta\varphi)^3})$, $0 < \theta < 1$, мы можем заключить, что при дополнительном предположении

$$\int^{\infty} \varphi^2(t)\,dt < \infty$$

существуют такие два решения u_1 и u_2, что

$$u_1 \sim \exp\left[t + 1/2 \int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1\right],$$

$$u_2 \sim \exp\left[-t - 1/2 \int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1\right].$$

Все приведенные теоремы являются частными случаями теорем более общих, справедливых для систем дифференциальных уравнений. Перейдем теперь к некоторым методам, применимым именно к уравнениям второго порядка.

13. Уравнение $u'' - (1+\varphi(t))\,u = 0$, где $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В предыдущем пункте мы заметили, что если $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то существуют два решения u_1 и u_2, для которых

$$\frac{u_1'}{u_1} \to 1, \quad \frac{u_2'}{u_2} \to -1. \tag{29}$$

Мы хотим дать доказательство этого результата, основанное на применении очень полезного и интересного метода. Покажем сначала, что существует решение, для которого $u_1'/u_1 \to 1$, а затем применим лемму 3 и получим другое решение того же уравнения, удовлетворяющее второму условию (29).

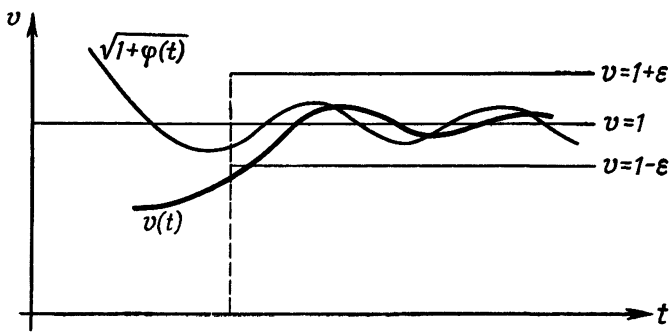
Выберем значение t_0 настолько большим, чтобы при $t \geqslant t_0$ удовлетворялось неравенство $1+\varphi(t)>0$. Пусть u — решение уравнения

$$u''-(1+\varphi(t))\,u=0, \tag{28}$$

для которого $u'(t_0)=k>0$ и $u(t_0)=1$; положим $v=u'/u$, так что функция v удовлетворяет уравнению Риккати

$$v'+v^2-(1+\varphi(t))=0, \qquad v(t_0)=k. \tag{32}$$

Из этого уравнения ясно, что $v'>0$ при $0<v<\sqrt{1+\varphi(t)}$ и $v'<0$ при $\sqrt{1+\varphi(t)}<v<\infty$ (фиг. 7) и потому построенное решение существует и положительно на всем интервале $t_0 \leqslant t<\infty$.



Фиг. 7.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<1$) и пусть $|\varphi(t)| \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant T_\varepsilon \geqslant t_0$. Тогда при $v \geqslant 1+\varepsilon$ будет $v' \leqslant -(1+\varepsilon)^2+1+\varphi(t) \leqslant -\varepsilon-\varepsilon^2$, а при $0<v \leqslant 1-\varepsilon$ будет $v' \geqslant -(1-\varepsilon)^2+1+\varphi(t) \geqslant \varepsilon-\varepsilon^2$, откуда для достаточно большого t график решения попадет в полосу $t \geqslant T_\varepsilon$, $1-\varepsilon \leqslant v \leqslant 1+\varepsilon$ и будет там оставаться с ростом t. В силу произвольности ε и получаем, что $v(t) \to 1$ при $t \to \infty$.

Так как у нас $v=u'/u$, то мы доказали существование решения u, для которого $u'/u \to 1$. Получим теперь при помощи этого решения другое решение, для которого $u'/u \to -1$. Так как $u \geqslant e^{(1-\varepsilon)t}$ для достаточно больших t, то функция

$$w=u\int_t^\infty \frac{dt}{u^2}$$

существует и, согласно лемме 3, представляет собой искомое другое решение уравнения (29).

Отсюда

$$\frac{w'}{w}=\frac{u'\left(\int\limits_t^\infty dt/u^2\right)-(1/u)}{u\int\limits_t^\infty (dt/u^2)}=\frac{u'}{u}-\frac{1/u^2}{\int\limits_t^\infty (dt/u^2)},$$

и, учитывая, что у нас $u'/u\to 1$, а также пользуясь правилом Лопиталя, получаем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{w'}{w}=1-\lim_{t\to\infty}\frac{-2u'/u^3}{-1/u^2}=-1.$$

Упражнение

Показать, что $v=1$ является устойчивым пределом решений уравнения (32), а $v=-1$ — неустойчивым пределом.

14. Преобразование Лиувилля. Ранее, в лемме 5 п. 3, мы показали, как можно применить преобразование Лиувилля, чтобы привести уравнение

$$u''\pm\varphi^2(t)\,u=0$$

к виду

$$u''\pm(1+\varphi_1(t))\,u=0, \tag{33}$$

где функция $\varphi_1(t)$, вообще говоря, стремится к нулю при $t\to\infty$, если $\varphi(t)\to\infty$.

Мы теперь хотим отметить, что повторение этого преобразования в ряде случаев переводит (33) в уравнение такого вида, к которому применимы результаты п. 12. Замена переменных

$$s=\int\limits_0^t\sqrt{1+\varphi(t)}\,dt$$

(мы полагаем $\varphi_1\equiv\varphi$) преобразует (33) в уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{\varphi'(t)}{2(1+\varphi)^{3/2}}\frac{du}{ds}\pm u=0.$$

Последующая замена переменных

$$u=v\exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^s a(s)\,ds\right],$$

где

$$a(s)=\frac{\varphi'(t)}{2(1+\varphi)^{3/2}},$$

приводит к уравнению

$$v''(s)+\left[\pm 1-\frac{1}{2}\frac{da(s)}{ds}-\frac{a^2(s)}{4}\right]v=0,$$

имеющему тот же вид, что и уравнение (33).

Этот метод применим, в частности, если $\varphi(t)$ равна $1/t^a$, $1/\ln t$ и вообще рациональной функции от t, e^t, $\ln t$ и т. д. Иногда требуется несколько последовательных преобразований, чтобы прийти к условиям п. 12.

Упражнения

1. Найти асимптотический вид решений уравнений $u''-e^t u=0$, $u''-t^n u=0$, $u''-(\ln\ln t)\,u=0$.

2. Сформулировать условие, которому должны удовлетворять функции φ, φ' и φ'', так чтобы при выполнении этого условия можно было определить асимптотическое поведение решений уравнения

$$u''=\varphi^2(t)\,u.$$

Привести примеры уравнений, не удовлетворяющих этому условию.

15. Уравнение $u''-(1+\varphi(t))\,u=0$, где $\varphi(t)\to 0$, $\int^{\infty}\varphi^2(t)\,dt<\infty$.

Имеется обширный класс уравнений вида (33) п. 14, не поддающихся приведенному выше анализу. Простым примером этого служит уравнение

$$u''-\left(1+\frac{\sin t}{t^a}\right)u=0,\qquad \frac{1}{2}<a\leqslant 1.$$

Здесь

$$\int^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t^a}\right|dt=\infty,\qquad \int^{\infty}\left|\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t^a}\right|dt=\infty.$$

Сейчас мы изложим метод, основанный на связи между уравнением

$$u''-(1+\varphi(t))\,u=0 \tag{28}$$

и уравнением Риккати

$$v'+v^2-(1+\varphi(t))=0\qquad\left(v=\frac{u'}{u}\right).$$

Полагая $v=1+w$, получим для функции w уравнение

$$w'=-2w-w^2+\varphi(t).$$

Мы знаем, что это уравнение имеет решение, стремящееся к нулю при $t\to\infty$. Оценим это решение через функцию $\varphi(t)$. Имеем

$$w=\int_0^t e^{-2(t-t_1)}\varphi(t_1)\,dt_1-\int_0^t e^{-2(t-t_1)}w^2(t_1)\,dt_1, \tag{34}$$

где для упрощения записи мы положим нижний предел равным нулю. Без ограничения общности можно считать, что $|\varphi(t)| \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant 0$. Применяя метод последовательных приближений, положим

$$w_0 = \int_0^t e^{-2(t-t_1)} \varphi(t_1)\, dt_1,$$

$$w_{n+1} = \int_0^t e^{-2(t-t_1)} \varphi(t_1)\, dt_1 - \int_0^t e^{-2(t-t_1)} w_n^2(t_1)\, dt_1. \qquad (35)$$

Используя оценку для функции $\varphi(t)$, получаем, что $|w_0| < \varepsilon/2$. Отсюда следует, что если $|w_n| < \varepsilon$, то и

$$|w_{n+1}| \leqslant \int_0^t e^{-2(t-t_1)} |\varphi(t_1)|\, dt_1 + \varepsilon^2 \int_0^t e^{-2(t-t_1)} dt_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \leqslant \varepsilon,$$

если $\varepsilon \leqslant 1$. Значит, неравенство $|w_n| < \varepsilon$ имеет место для всех n.

Из (35) получаем

$$|w_{n+1}| \leqslant \int_0^t e^{-2(t-t_1)} |\varphi(t_1)|\, dt_1 + \varepsilon \int_0^t e^{-2(t-t_1)} |w_n|\, dt_1. \qquad (36)$$

Покажем по индукции, что $|w_n| \leqslant 2 \int_0^t e^{-(t-t_1)} |\varphi(t_1)|\, dt_1$, если ε достаточно мало. Неравенство, очевидно, верно при $n = 0$.

Оценка (36) дает

$$|w_{n+1}| \leqslant \int_0^t e^{-(t-t_1)} |\varphi(t_1)|\, dt_1 + 2\varepsilon \int_0^t e^{-2(t-t_1)} \left(\int_0^{t_1} e^{-(t_1-t_2)} |\varphi(t_2)|\, dt_2 \right) dt_1 =$$

$$= \int_0^t e^{-(t-t_1)} |\varphi(t_1)|\, dt_1 + 2\varepsilon \int_0^t e^{-2t} \left(\int_0^{t_1} e^{t_1+t_2} |\varphi(t_2)|\, dt_2 \right) dt_1.$$

Оценим второе слагаемое полученной суммы:

$$2\varepsilon e^{-2t} \int_0^t \left[\int_0^{t_1} e^{t_1+t_2} |\varphi(t_2)|\, dt_2 \right] dt_1 = 2\varepsilon e^{-2t} \int_0^t e^{t_2} (e^t - e^{t_2}) |\varphi(t_2)|\, dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \int_0^t e^{-(t-t_2)} |\varphi(t_2)|\, dt_2.$$

Пользуясь этой оценкой, находим, что

$$|w_{n+1}| \leqslant \int_0^t e^{-(t-t_1)} |\varphi(t_1)|\, dt_1 + 2\varepsilon \int_0^t e^{-(t-t_2)} |\varphi(t_2)|\, dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_0^t e^{-(t-t_1)} |\varphi(t_1)|\, dt_1,$$

если $\varepsilon \leqslant 1/2$.

Применяя развитый ранее метод, легко показать [1]), что приближения w_n сходятся к решению w интегрального уравнения (34), удовлетворяющему неравенству

$$|w| \leqslant 2 \int_0^t e^{-(t-t_1)} |\varphi(t_1)|\, dt_1. \tag{37}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$w^2 \leqslant 4\left(\int_0^t e^{-(t-t_1)}\, dt_1\right)\left(\int_0^t e^{-(t-t_1)} \varphi^2(t_1)\, dt_1\right) \leqslant 4 \int_0^t e^{-(t-t_1)} \varphi^2(t_1)\, dt_1.$$

Возвращаясь к уравнению (34), получаем

$$w = \int_0^t e^{-2(t-t_1)} \varphi(t_1)\, dt_1 + O\left(\int_0^t e^{-2(t-t_1)} \left[\int_0^{t_1} e^{-(t_1-t_2)} \varphi^2(t_2)\, dt_2\right] dt_1\right) =$$

$$= \int_0^t e^{-2(t-t_1)} \varphi(t_1)\, dt_1 + O\left(\int_0^t e^{-(t-t_1)} \varphi^2(t_1)\, dt_1\right). \tag{38}$$

Так как $u'/u = 1 + w$, то поведение интеграла $\int_0^t w\, dt$ определяет асимптотическое поведение u. Применяя формулу (38),

---

[1]) Так как $|w_{n+1} - w_n| \leqslant \int_0^t e^{-2(t-t_1)} |w_n^2(t_1) - w_{n-1}^2(t_1)|\, dt_1 \leqslant$ $\leqslant 2\varepsilon \int_0^t e^{-2(t-t_1)} |w_n(t_1) - w_{n-1}(t_1)|\, dt_1$, то $\sup |w_{n+1} - w_n| \leqslant \varepsilon \sup |w_n - w_{n-1}|$ и ряд $\sum (w_{n+1} - w_n)$ сходится равномерно при $0 \leqslant t < \infty$. Отметим для дальнейшего, что для доказательства существования решения уравнения (34) и для получения оценки (37) мы пользовались только тем, что $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. — *Прим. перев.*

получаем

$$\int_0^t w\,dt_1 = \int_0^t \left[\int_0^{t_1} e^{-2(t_1-t_2)}\varphi(t_2)\,dt_2\right]dt_1 +$$

$$+ O\left(\int_0^t \left[\int_0^{t_1} e^{-(t_1-t_2)}\varphi^2(t_2)\,dt_2\right]dt_1\right).$$

Меняем порядок интегрирования в обоих интегралах:

$$\int_0^t w\,dt_1 = \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(t_2)\,dt_2 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2(t-t_2)}\varphi(t_2)\,dt_2 + O\left(\int_0^t \varphi^2(t_2)\,dt_2\right).$$

Так как $\varphi(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $\int_0^\infty \varphi^2(t)\,dt < \infty$, то мы видим, что

$$u = \exp\left(t + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1 + c_1 + o(1)\right)$$

при $t\to\infty$ [1]).

Асимптотическое поведение второго решения, линейно независимого с решением u, можно определить как обычно, применяя в качестве этого второго решения $u_2 = u\int_t^\infty dt/u^2$. Иначе, можно рассмо-

---

[1]) Последний переход не совсем точен, так как величина $O(1)$ не обязана иметь вид $c + o(1)$. Однако в данном случае под $O\left(\int_0^t \varphi^2(t_2)\,dt_2\right)$ понимается $-\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} e^{-2(t_1-t_2)}w^2(t_2)\,dt_2$ и из ограниченности этого интеграла следует стремление его к пределу при $t\to\infty$. Интеграл же $\int_0^t e^{-2(t-t_2)}\varphi(t_2)\,dt_2$ стремится к нулю, так как

$$\left|\int_0^t\right| \leqslant \left|\int_0^{t_0}\right| + \left|\int_{t_0}^t\right| \leqslant e^{-2t}\int_0^{t_0} e^{2t_2}|\varphi(t_2)|\,dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sup_{[0,\infty)}|\varphi(t)|\,(1 - e^{-2(t-t_0)}) \leqslant e^{-2t}\int_0^{t_0} e^{2t_2}|\varphi(t_2)|\,dt_2 + \frac{1}{2}\sup_{[0,\infty)}|\varphi(t)|$$

и т. д.

— *Прим. перев.*

треть уравнение, полученное из уравнения Риккати в результате подстановки $v = -1 + w$

$$w' = 2w - w^2 + \varphi(t).$$

Соответствующее интегральное уравнение для решений, стремящихся к нулю, будет

$$w = -\int_t^\infty e^{2(t-t_1)}\varphi(t_1)\,dt_1 + \int_t^\infty e^{2(t-t_1)}w^2(t_1)\,dt_1. \tag{39}$$

При этом все выкладки аналогичны проведенным выше. Отметим только, что вместо (38) надо пользоваться выражением

$$w = -\int_t^\infty e^{2(t-t_1)}\varphi(t_1)\,dt_1 + O\left(\int_t^\infty e^{t-t_1}\varphi^2(t_1)\,dt_1\right).$$

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 12. *Если функция φ удовлетворяет условиям:*

(а) $\varphi(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$,

(б) $\int^\infty \varphi^2(t)\,dt < \infty$,

то уравнение $u'' - (1 + \varphi(t))u = 0$ обладает двумя решениями, имеющими соответственно асимптотический вид:

$$u_1 = \exp\left(t + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(t)\,dt + o(1)\right),$$

$$u_2 = \exp\left(-t - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(t)\,dt + o(1)\right)$$

при $t \to \infty$.

Упражнение

Применить уравнение (39) для вывода асимптотической формулы для u_2.

16. Уравнение $u'' - (1 + \varphi(t))u = 0$, где $\int^\infty |\varphi(t)|^n dt < \infty$. Метод, использованный в предыдущем пункте, применим для любого уравнения вида

$$u'' - (1 + \varphi(t))u = 0,$$

где $\varphi \to 0$ при $t \to \infty$ и $\int^\infty |\varphi|^n dt < \infty$ для некоторого $n > 0$. Однако при этом чрезвычайно возрастают алгебраические затруднения.

Мы ограничимся формулировкой результата при $n=3$ и предоставим доказательство читателю в качестве упражнения [1]).

Теорема 13. *Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям*

(а) $\varphi(t)\to 0$ *при* $t\to\infty$;

(б) $\int^{\infty} |\varphi(t)|^3\,dt<\infty$,

то существуют два решения уравнения

$$u''-(1+\varphi(t))\,u=0,$$

имеющие соответственно асимптотический вид:

$$u_1=\exp\Big(t+\frac{1}{2}\int_0^t\varphi(t_1)\,dt_1-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^t\varphi(t_1)\int_0^{t_1}\varphi(t_2)\,e^{-2t_1+2t_2}\,dt_2\,dt_1+o(1)\Big)$$

$$u_2=\exp\Big(-t-\frac{1}{2}\int_0^t\varphi(t_1)\,dt_1+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^t\varphi(t_1)\int_0^{t_1}\varphi(t_2)\,e^{-2t_1+2t_2}\,dt_2\,dt_1+o(1)\Big).$$

Представляется невозможным преобразовать двойной интеграл к какому-либо простому выражению, содержащему однократные интегралы. Можно было бы ожидать, что этот двойной интеграл ведет себя подобно интегралу $\frac{1}{8}\int_0^t\varphi^2(t_1)\,dt_1$, по аналогии с разложением

$$\int_0^t\sqrt{1+\varphi(t_1)}\;dt_1=t+\frac{1}{2}\int_0^t\varphi(t_1)\,dt_1-1/8\int_0^t\varphi^2(t_1)\,dt_1+\ldots.$$

В некоторых частных случаях, например для $\varphi=(\sin t)/\sqrt{t}$, применимо простое интегрирование по частям.

17. Распространение на уравнения высшего порядка. Сущность приведенного выше метода состоит в том, что подстановка

$$v=\frac{u'}{u}$$

---

[1]) См. примечание 14 в конце книги. — *Прим. перев.*

преобразует линейное уравнение

$$u^{(n)} + a_1(t)\,u^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,u = 0$$

в нелинейное уравнение $n-1$-го порядка типа Пуанкаре — Ляпунова.

Для иллюстрации дальнейших применений метода рассмотрим уравнение

$$u''' + a_1(t)\,u'' + a_2(t)\,u' + a_3(t)\,u = 0,$$

где $a_i(t) \to a_i$ при $t \to \infty$. Полагая $v = u'/u$, получим следующее уравнение для v:

$$v'' + 3vv' + v^3 + a_1(t)(v' + v^2) + a_2(t)\,v + a_3(t) = 0.$$

Пусть r_1 — корень алгебраического уравнения

$$r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0;$$

положим $v = r_1 + w$. Тогда уравнением для w будет

$$w'' + 3(w + r_1)\,w' + r_1^3 + 3r_1^2 w + a_1(t)(w' + r_1^2 + 2r_1 w + w^2) + \\ + 3r_1 w^2 + w^3 + a_2(t)\,r_1 + a_2(t)\,w + a_3(t) = 0. \quad (40)$$

Аппроксимирующим линейным уравнением служит

$$w'' + 3rw' + 3r_1^2 w + a_1(t)\,w' + 2r_1 a_1(t)\,w + a_2(t)\,w + r_1^3 + \\ + a_1(t)\,r_1^2 + a_2(t)\,r_1 + a_3(t) = 0.$$

Асимптотическое поведение его решений определяется алгебраической природой корней уравнения

$$\alpha^2 + (3r_1 + a_1)\,\alpha + (3r_1^2 + 2r_1 a_1 + a_2) = 0.$$

Если эти корни различны и имеют отличную от нуля вещественную часть, то для получения решений уравнения (40) и выяснения их асимптотического поведения можно применить обычный метод последовательных приближений, предполагая выполненными те или иные условия интегрируемости, например

$$\int^{\infty} |a_i - a_i(t)|^k\,dt < \infty$$

для некоторого $k \geqslant 1$. Если имеются корни с нулевой вещественной частью, то надо прибегнуть к помощи условий типа теоремы 8 гл. II.

18. Уравнение $u'' + (1 + \varphi(t))\,u = 0$. Сводка результатов. Рассмотрим теперь уравнение

$$u'' + (1 + \varphi(t))\,u = 0, \qquad \varphi(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \quad (41)$$

теория которого значительно сложнее из-за колеблющегося характера решений. Здесь нет аналогий с теоремами, связанными с асимптотическим поведением u'/u. Однако если $\int^{\infty} |\varphi(t)|\,dt < \infty$, то из теоремы 8 гл. II следует, что имеются два решения уравнения (41), для которых

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \sin t + o(1), \\ u_2 &= \cos t + o(1) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

при $t \to \infty$ [1]).

Если сделать дальнейшее предположение о том, что функция $\varphi(t)$ обладает асимптотическим разложением

$$\varphi(t) \sim \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_3}{t^3} + \ldots + \frac{c_n}{t^n} + \ldots,$$

то существуют два решения u_1 и u_2 уравнения (41), имеющие при $t \to \infty$ соответственно вид [2])

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin t\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^{-k}\Big) + \cos t \sum_{k=1}^{n} b_k t^{-k} + O(t^{-n-1}), \\ u_2 &= \cos t\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} c_k t^{-k}\Big) + \sin t \sum_{k=1}^{n} d_k t^{-k} + O(t^{-n-1}). \end{aligned} \tag{43}$$

Из теоремы 8 гл. II следует, что если

$$\int^{\infty} |\varphi'(t)|\,dt < \infty,$$

---

[1]) Из теоремы 8 гл. II следует существование решения $u(t)$, для которого $u(t) = (\cos t + i \sin t)(a + bi + o(1))$, $u'(t) = (\cos t + i \sin t)(c + di + o(1))$, причем a, b, c и d вещественны и не все равны нулю. Отсюда легко получить (от противного), что $a^2 + b^2 > 0$. Отделяя вещественную часть от мнимой, получим вещественные решения $\tilde{u}_1(t) = a \cos t - b \sin t + o(1)$, $\tilde{u}_2(t) = b \cos t + a \sin t + o(1)$. Беря линейные комбинации этих решений, получаем решения (42). Аналогичное замечание относится к формулам (44). — *Прим. перев.*

[2]) Из теоремы 10 гл. II следует, что (41) имеет решение

$$u(t) = (\cos t + i \sin t)\, t^{\mu}\left(a_0 + b_0 i + \frac{a_1 + b_1 i}{t} + \ldots + \frac{a_n + b_n i}{t^n} + O(t^{-n-1})\right),$$

где $a_0^2 + b_0^2 > 0$. Сравнивая это с предыдущим результатом, находим, что $\mu = 0$. Отделяя вещественную часть от мнимой и переходя к линейным комбинациям, получаем решения (43). — *Прим. перев.*

то имеются два (комплексных) решения, для которых соответственно

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \left[\exp\left(i\int_0^t \sqrt{1+\varphi(t_1)}\,dt_1\right)\right](1+o(1)), \\ u_2 &= \left[\exp\left(-i\int_0^t \sqrt{1+\varphi(t_1)}\,dt_1\right)\right](1+o(1)) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

при $t\to\infty$. Следовательно, если дополнительно предположить, что

$$\int^{\infty} \varphi^2(t)\,dt < \infty,$$

то можно произвести такое уточнение:

$$u_1 = \left[\exp\left(it + \frac{i}{2}\int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1\right)\right](1+o(1)),$$

$$u_2 = \left[\exp\left(-it - \frac{i}{2}\int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1\right)\right](1+o(1)).$$

Если оба интеграла $\int^{\infty} |\varphi(t)|\,dt$ и $\int^{\infty} |\varphi'(t)|\,dt$ бесконечны, то вопрос требует более тщательного изучения. В следующих пунктах мы рассмотрим задачи этого типа.

19. Уравнение $u''+(1+\varphi(t))\,u=0$ (продолжение). В предыдущих пунктах мы изучали асимптотическое поведение решений уравнения $u''+(1+\varphi(t))\,u=0$ в предположении, что либо $\int^{\infty} |\varphi(t)|\,dt<\infty$, либо $\int^{\infty} |\varphi'(t)|\,dt<\infty$. Теорема 8 гл. II применима в том случае, когда φ является суммой функций, удовлетворяющих этому условию. Если же мы рассмотрим уравнение

$$u'' + \left(1 + \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\right)u = 0, \qquad 0<\alpha<1,$$

то оба указанных интеграла расходятся и должны быть применены более тонкие рассуждения.

Чтобы расширить сферу действия изложенных методов, будем поступать следующим образом. Как и раньше, дифференциальное

уравнение $u''+(1+\varphi(t))u=0$ преобразуется в интегральное уравнение

$$u=v-\int_0^t \sin(t-t_1)\varphi(t_1)u(t_1)\,dt_1, \tag{45}$$

где $v=c_1\cos t+c_2\sin t$. Заменяя $u(t_1)$ под знаком интеграла его выражением (45), будем иметь

$$u=v-\int_0^t \sin(t-t_1)\varphi(t_1)\left[v(t_1)-\int_0^{t_1}\sin(t_1-t_2)\varphi(t_2)u(t_2)\,dt_2\right]dt_1=$$

$$=v-\int_0^t \sin(t-t_1)\varphi(t_1)v(t_1)\,dt_1+$$

$$+\int_0^t\left[\sin(t-t_1)\varphi(t_1)\int_0^{t_1}\sin(t_1-t_2)\varphi(t_2)u(t_2)\,dt_2\right]dt_1.$$

Переставляя во втором интеграле порядок интегрирования, получим

$$u=v-\int_0^t \sin(t-t_1)\varphi(t_1)v(t_1)\,dt_1+$$

$$+\int_0^t \varphi(t_1)\left[\int_{t_1}^t \sin(t-t_2)\sin(t_2-t_1)\varphi(t_2)\,dt_2\right]u(t_1)\,dt_1.$$

Теперь мы предоставим читателю в качестве упражнения доказательство следующей теоремы:

Теорема 14. *Для того чтобы все решения уравнения* $u''+(1+\varphi(t))u=0$ *были ограниченными, достаточно, чтобы для некоторого* t_0 *одновременно*

(а) *интегралы* $\int_{t_0}^t \varphi(t_1)\,dt_1$, $\int_{t_0}^t \varphi(t_1)\sin 2t_1\,dt_1$ *и* $\int_{t_0}^t \varphi(t_1)\cos 2t_1\,dt_1$ *были ограниченными при* $t_0\leqslant t<\infty$;

(б) *при всех* $t\geqslant t_0$ *выполнялось неравенство*

$$\int_{t_0}^t\left|\varphi(t_1)\int_{t_1}^t \sin(t-t_2)\sin(t_2-t_1)\varphi(t_2)\,dt_2\right|dt_1<k<1.$$

Упражнения

1. Доказать, что все решения уравнения $u''+(1+\sin at/t^b)u=0$ ограничены при $t\to\infty$, если $a\neq 2$ и $b>1/2$.

2. Доказать, что уравнение $u''+(1+\sin 2t/t)u=0$ имеет неограниченные решения, и выяснить асимптотическое поведение последних.

3. Доказать, что все решения уравнения $u'' + (1 + \sin t^{2a}) u = 0$ ограничены, если $a > 1$.

4. Доказать аналог теоремы 14 для общего уравнения (11) и для векторно-матричного уравнения $z'' = (A + B(t)) z$.

20. Уравнения $\varepsilon(t) u'' + u' + u = 0$ и $u'' + a(t) u' + u = 0$. Обратимся к уравнениям

$$\varepsilon(t) u'' + u' + u = 0 \tag{46}$$

и

$$u'' + a(t) u' + u = 0, \tag{47}$$

где функция $\varepsilon(t)$ положительна и стремится к нулю при $t \to \infty$ и $a(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Сравнивая (47) с соответствующим уравнением, где $a(t)$ — положительная постоянная, интуитивно можно ожидать, что каждое решение (47) должно стремиться к нулю при $t \to \infty$. Можно также ожидать, что найдется решение уравнения (46), убывающее как e^{-t} при $t \to \infty$, если $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Интересно заметить, что обе задачи эквивалентны, так как подстановка $u = ve^{-t}$ преобразует (46) в уравнение

$$v'' + \left(\frac{1}{\varepsilon(t)} - 2\right) v' + v = 0.$$

Следовательно, если каждое решение уравнения (47) стремится к нулю при $t \to \infty$ всякий раз, когда $a(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то не существует решений $u \sim e^{-t}$ уравнения (46); обратно, если уравнение (46) всегда имеет решение $u \sim e^{-t}$ при $t \to \infty$ для любого $\varepsilon(t)$, стремящегося к нулю при $t \to \infty$, то не может быть, чтобы все решения уравнения (47) стремились к нулю при $t \to \infty$. Интересное противоречие с интуицией!

Конечно, возможен и другой интуитивный подход: можно предполагать, что уравнение (47) для большого $a(t)$ должно иметь решения, соответствующие решениям двух аппроксимирующих уравнений

$$u'' + a(t) u' = 0,$$

$$a(t) u' + u = 0.$$

Отсюда видно, что если $a(t) \to \infty$ настолько быстро, что $\int^{\infty} dt/a(t) < \infty$, то можно ожидать появления ограниченного решения, не стремящегося к нулю.

Читателю будет интересно применить методы предыдущих пунктов, в частности преобразование Лиувилля, к уравнениям (46) и (47), чтобы получить условия, в которых имеют место те или иные утверждения.

Упражнения

1. Доказать, что если $a(t)>0$ для всех $t\geqslant 0$, то каждое решение уравнения (2) удовлетворяет неравенству

$$u^2<\frac{c_1}{a(t)}\exp\int_0^t\frac{|a'(t)|}{a(t)}\,dt$$

при $t\geqslant 0$.

2. Если $\int^{\infty}|a(t)|\,dt<\infty$, то не может быть, чтобы все решения уравнения (2) были ограниченными.

3. Все решения уравнения (1) ограничены, если $k(t)>0$, $l(t)>0$, $d(k(t)\,l(t))/dt>0$ при $t>t_0$ (Бутлевский).

4. Все решения уравнения $d(\varphi(t)\,du/dt)/dt+\sum_{i=0}^{m}a_i(t)\,u^{2i+1}=0$ ограничены, если $\varphi(t)>0$, $a_i(t)>0$, $d(a_i\varphi)/dt>0$ при $t>t_0$ (Бутлевский).

5. Уравнение (18) не может иметь нетривиальных ограниченных при $-\infty<t<\infty$ решений, если $\varphi(t)<-\alpha<0$ для $-\infty<t<\infty$ (Маррей).

6. Если $0<b^2<\varphi(t)<a^2$ при $-\infty<t<\infty$ и если $|\psi(t)|<c_1$ при $-\infty<t<\infty$, то имеется одно и только одно решение уравнения $u''-\varphi(t)\,u=\psi(t)$, ограниченное для $-\infty<t<\infty$ (Маррей).

7. Рассмотрим уравнение (8). Пусть $a(t)$ — любая монотонно возрастающая функция, для которой $a'(t)=O(1)$ при $t\to\infty$. Тогда существует такая функция $\varphi(t)$, что $\int_0^t\varphi(t)\,dt<a(t)$ для больших t и $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,(\ln|u|/a(t))\geqslant 1/\pi$ (Левинсон).

8. Если в уравнении (2) $|a(t)|<c_1$ при $t>0$, то не может быть, чтобы все решения этого уравнения принадлежали $L^2(0,\infty)$.

9. Если в уравнении (2) $|a(t)|<c_1$ для $t>0$ и если решение u этого уравнения принадлежит $L^2(0,\infty)$, то du/dt также принадлежит $L^2(0,\infty)$. Этот результат имеет место и в том случае, если потребовать только выполнения неравенства $a(t)<c_1$ (Винтнер).

10. Рассмотрим уравнение $u''=f(u,t)$, где $f(u,t)$ имеет тот же знак что и u, непрерывна для всех u при $t\geqslant t_0$, причем решение определяется значениями u и u' в любой точке интервала $t_0<t<\infty$. Тогда если $u\not\equiv 0$, то только одна из функций u и u' может обращаться в нуль при $t>t_0$, причем только один раз. Если решение существует при $t_0<t<\infty$, то при $t\to\infty$ возможны два случая:

(а) $u\to\pm\infty$ монотонно;

(б) u и $u'\to 0$, обе монотонно, причем одна возрастая, а другая убывая (Кнезер).

11. Если $0<c_1<f(t)<c_2$, то существует одно и только одно решение уравнения $u''=f(t)\,u$, остающееся ограниченным при $t\to\infty$, причем это решение стремится к нулю при $t\to\infty$ (Осгуд).

12. Если $f(u,t)$ монотонно возрастает по u для $u\geqslant 0$, причем $f(0,t)=0$, $f_u(u,t)$ убывает с ростом u для $u\geqslant 0$ и $-f(-u,t)$ имеет те же свойства, что и $f(u,t)$, то каждое решение уравнения $u''+f(u,t)=0$ является колеблющимся (Пикар).

13. Рассмотрим уравнение $u'' + d(t) f(u) = 0$, где $d(t)$ положительна, непрерывна, монотонно возрастает и ограничена для $t \geqslant t_0$, а $f(u)$ нечетна и монотонно возрастает, причем $|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant c_1 |u_1 - u_2|$ для $-a < u_1$, $u_2 < a$, где $a > 0$. Тогда частное решение u, для которого $u = u_1$ и $du/dt = 0$ при $t = t_1$, где $|u_1| < a$ и $f(u_1) \neq 0$, является колеблющимся и его амплитуда монотонно убывает, но не стремится к нулю (Милн).

14. Если $\varphi'(t) > 0$ для $t > t_0$, причем $\varphi'(t)$ не возрастает и $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$, то каждое решение $u \not\equiv 0$ уравнения (18) стремится к нулю при $t \to \infty$, но $\overline{\lim\limits_{t \to \infty}} |u(t) \sqrt{\varphi(t)}|$ положителен (Армеллини).

15. Достаточно ли условие монотонного стремления $\varphi(t)$ к ∞, чтобы гарантировать, что все решения уравнения (18) стремятся к нулю при $t \to \infty$?

16. Рассмотрим уравнение (18), где $\varphi(t) \leqslant 0$ при $a < t < b$. Пусть u — решение, удовлетворяющее условиям $u'(t_0) = 0$ и $u(t_0) = 1$, где $a < t_0 < b$. Тогда u можно записать в виде

$$u = \frac{e^T + e^{-T}}{2},$$

где $T = (t - t_0) \sqrt{-\varphi(s)}$ и s — функция t, причем $t_0 \leqslant s \leqslant t$ (Петрович).

17. Если $\varphi(t) > 0$, то решение уравнения (18) в интервале между соседними нулями t_1 и t_2 имеет вид $u = \cos[(t - t_0) \sqrt{\varphi(s)}]$, $t_1 \leqslant s \leqslant t_2$. Здесь $t_1 = t_0 - \pi/2 \sqrt{\varphi(s)}$, $t_2 = t_0 + \pi/2 \sqrt{\varphi(s)}$ (Петрович).

18. Если $\varphi(t) < 0$ при $t \geqslant t_0$, то общее решение уравнения (18) имеет вид

$$u = c_1 \left[\exp \int_{t_0}^{t} \lambda_1(t_1)\, dt_1\right] + c_2 \left[\exp \int_{t_0}^{t} \lambda_2(t_1)\, dt_1\right],$$

где λ_1 и $-\lambda_2$ не отрицательны и ограничены, если $\varphi(t)$ ограничена (Осгуд).

19. Если $\varphi(t) > 0$ и монотонна, то амплитуды решений уравнения (18) меняются монотонно, возрастая, если $\varphi(t)$ убывает, и убывая в противном случае. Кроме того, если $\varphi(t)$ остается ограниченной при $t \to \infty$, то амплитуды заключены между некоторыми границами, зависящими от начального условия (Маррей).

20. Если $\varphi(t)$ монотонна и стремится к a^2 при $t \to \infty$, то для решения уравнения (18) будет

$$\lim_{t \to \infty} \max_{0 \leqslant s \leqslant t} |u| = c_1,$$

$$\lim_{t \to \infty} \max_{0 \leqslant s \leqslant t} |u'| = c_2,$$

причем $c_2 = ac_1$ (Асколи).

21. Если $\varphi(t)$ не убывает, то для любого решения уравнения (18) $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} |u|$ стремится к конечному пределу при $t \to \infty$, но $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} |u'|$ может стремиться к ∞ при $t \to \infty$. Если $\varphi(t)$ не возрастает, то этот результат имеет место, если переставить u и u' (Асколи).

22. Если $\varphi'(t) > 0$ и не убывает при $t \geqslant t_0$ и если $\varphi(t + 1/\sqrt{\varphi(t)})/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$, то каждое решение уравнения (18) стремится к нулю при $t \to \infty$ (Бьернацкий).

23. Показать, что подстановка $u = r\cos\vartheta$, где $\vartheta = c\int dt/r^2$, преобразует уравнение (18) к виду $d^2r/dt^2 - c^2/r^3 + r\varphi(t) = 0$.

24. Если $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t + c/\sqrt{\varphi(t)})/\varphi(t) = 1$, $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то, обозначая через $\Delta(t)$ интервал между двумя последовательными корнями решения уравнения (18), будем иметь $\lim\limits_{t\to\infty} \Delta(t)\sqrt{\varphi(t)} = \pi$ (Вимен).

25. В предположениях предыдущего упражнения каждое решение уравнения $u'' - \varphi(t)u = 0$ удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{t\to\infty} u'/u\sqrt{\varphi(t)} = +1$ или -1 (Вимен).

26. Рассмотрим два соотношения:

$$\text{(а)}\quad \frac{d^2u}{dt^2} - p_1(t)\frac{du}{dt} - p_2(t)u - q(t) = 0,\ t \geqslant t_0;$$

$$\text{(б)}\quad \frac{d^2v}{dt^2} - p_1(t)\frac{dv}{dt} - p_2(t)v - q(t) > 0,$$

где $u(t_0) = u_0 = v(t_0)$ и $u'(t_0) = u'_0 = v'(t_0)$. Если существует решение u уравнения (а), не имеющее корней при $t_0 < t < t_1$, то $v > u$ при $t_0 < t < t_1$ (Вилкинс)[1].

27. Пусть уравнение $u'' + p_1(t)u' + p_2(t)u = 0$ обладает тем свойством, что при $a < t < b$ существуют решения u_1 и u_2, для которых $u_1 > 0$ и

$$\begin{vmatrix} u_1 & u'_1 \\ u_2 & u'_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Тогда если функция v имеет три корня в (a, b), то существует промежуточная точка s такая, что $v''(s) + p_1(s)v'(s) + p_2(s)v(s) = 0$; обобщить этот результат (Полиа).

ЛИТЕРАТУРА

Более полную сводку известных результатов, связанных с уравнением (1) можно найти в гл. III ранее упомянутого обзора автора (см. [3] к гл. I).

П. 4.

1. Ascoli G., Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali del 2° ordine, Rend. Accad. Lincei, ser. 6, **22** (1935), 234—243.
2. Bellman R., The boundedness of solutions of linear differential equations, Duke Math. Journ., **14** (1947), 83—97.
3. Caccioppoli R., Sopra un criterio di stabilita, Rend. Accad. Lincei, ser. 6 (1930), 251—254.
4. Wiman A., Ueber eine Stabilitätsfrage in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Acta Math., **66** (1936), 121—145.

П. 5. Первый противоречащий пример был дан Перроном:

5. Perron O., Ueber ein vermeintliches Stabilitätskriterium, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.—physik. Kl., Fachgruppe I (1930), 28—29.

---

[1]) Это предложение является детализацией значительно более общей теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, применимой к уравнениям любого порядка. — *Прим. перев.*

Рассуждения, которым мы следовали, принадлежат Винтнеру:

6. Wintner A., The adiabatic linear oscillator, Amer. Journ. of Math., **68**, (1946), 385—397.

См. также

7. Ascoli G., Osservazioni sopra alcune questioni di stabilita, Rend. Accad. Lincei, ser. 8, **9** (1950), 210—213.

П. 6.

8. Biernacki M., Sur l'equation $x'' + A(t)x = 0$, Prace Mat. Fiz., **40** (1933), 163—171.

П. 7. Результат, приведенный в тексте, является частным случаем теоремы Хаупта; см.

9. Haupt O., Ueber das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialg'eichungen, Math. Zeit., **48** (1943), 289—292.

Подробное исследование случая второго порядка см. в статье

10. Hille E., Non-oscillation theorems., Trans. Amer. Math. Soc., **64**, № 2 (1948), 234—252.

П. 8.

11. Bellman R., A stability property of solutions of linearer differential equations, Duke Math. Journ., **11** (1944), 513—516.

П. 9.

12. Харди Г. Х., Литтлвуд Д. Е. и Полиа Г., Неравенства, М., 1948.
13. Halperin I., Ann. of Math., **38** (1937), 889—919 (см. лемму 2.1).
14. Landau E., Math. Ann., **102** (1929), 177—178. Упрощены некоторые оригинальные результаты Эскландона.

П. 10. По поводу приложений приведенных тождеств к теории дифференциальных уравнений Штурма — Лиувилля см.

15. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939, гл. X.

Изучение соответствующих свойств для общего линейного дифференциального уравнения второго порядка было начато Кнезером; см.

16. Fowler R. G., The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of second order, Quart. Journ. Math. Oxford, Ser., **45** (1914), 289—350.
17. Kneser A., Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen, Math. Ann., **42** (1893), 409—435.

П. 11. Результат принадлежит Ляпунову:

18. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М. — Л., 1950.

Данное доказательство принадлежит Боргу; см.

19. Borg G., Ueber die Stabilität gewissen Klassen von linearen Differentialgleichungen, Ark. Math. Astr. Fys., ser. 31A, No 1 (1944), 460—482.

П. 12. По поводу более детальных результатов см.

20. Hartmann P., Unrestricted solution fields of almost-separable differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948).

П. 14. По поводу некоторых физических приложений преобразования Лиувилля см.

21. Schelkounoff S. A., Solutions of linear and slightly non-linear differential equations, Quart. Appl. Math., **3** (1945), 349—355.

См. также

22. Brillouin L., Quart. Appl. Math., **6** (1948), 169; **7** (1949), 363.

П. 15. См. указанную выше статью Хартмана и статью

23. Bellman R., On the asymptotic behavior of solutions of $u'' - (1+f(t))u = 0$, Annali di Matematica, ser. 4, **31** (1950), 83—91.

П. 18.

24. Kneser A., Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reelen Werten der Arguments, Journ. für die reine und angew. Math., **116** (1896), 178—212; **117** (1897), 72—103; **120** (1899), 272—275.
25. Wintner A., Asymptotic integration of the adiabatic oscillator, Amer. Journ. Math., **69** (1947), 251—272.

П. 19.

26. Prodi G., Nouvi criteri di stabilita per l'equazione $y'' + A(x)y = 0$, Rend. Accad. Lincei, **10** (1951), 447—451.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

От переводчика. Имеется значительная литература, посвященная свойствам решений уравнения (1) и смежным вопросам. Укажем еще некоторые работы, посвященные вопросам, непосредственно связанным с теми, которые рассматриваются в этой главе:

1. Dini U., Studi sulle equazioni differenziali lineari, Ann. di Mat. pura et appl., ser. 3, **2** (1899), 297—324; **3** (1899), 125—183.
2. Wiman A., Ueber die reellen Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Arkiv för Matem., Astr. och Fysik, **12**, No 14 (1917).
3. Matell M., Asymtotische Eigenschaften gewisser linearen Differentialgleichungen, Dissertation, Uppsala, 1924.
4. Gambier B., L'équation différentielle linéaire du second ordre $x'' + xA(t) = 0$, Nouv. Ann. de Math., ser. 6, **2** (1927), 2—23.
5. Mambriani A., Su un teorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, ser. 6, **9** (1929), 620—622.
6. Caccioppoli R., Una questione di stabilità, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, ser. 6, **11** (1930), 251—254.
7. Hukuhara M., Nagumo M., On a condition of stability for a differential equation, Proc. of the Imp. Acad. of Japan, **6** (1930), 131—132.
8. Milloux H., Sur l'équation differentielle $x'' + A(t)x = 0$, Prace Mat. Fizy., **41** (1934), 39—54.
9. Armellini G., Sopra un'equazione differenziale della Dinamica, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, ser. 6, **21** (1935), 111—116.
10 Шепелев В. М., К вопросу об устойчивости движения, Прикл. матем. и мех., стар. серия III, вып. 1 (1936), 144—148.
11. Butlewski E., Sur les intégrales d'une équation différentielle du second ordre, Mathematica (Cluj), **12** (1936), 36—48.
12. Sansone G., Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia, 1936, 385—403.
13. Tonelli L., Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia, 1936, 404—405.
14. Fubini G., Studi asintotici per alcune equazioni differenziali, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, ser. 6, **26** (1937), 253—259.
15. Wintner A., (L^2)-connections between the potential and kinetic energies of linear systems, Am. Journ. of Math., **69**, No 1 (1947), 5—13.

16. Юровский А. В., О некоторых критериях устойчивости интегралов системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, **62**, № 5 (1948), 595—598.
17. Hartman P., On the linear logarithmico-exponential differential of the second order, Amer. Journ. of Math., **70**, No 4 (1948), 764—779.
18. Hartman P., Wintner A., Criteria of non-degeneracy for the wave equation, Amer. Journ. of Math., **70**, No 2 (1948), 295—308.
19. Hartman P., Wintner A., On non-conserwative linear oscillators of low frequency, Amer. Journ. of Math., **70**, No 3 (1948), 529—539.
20. Hartman P., Wintner A., The asymptotic arcus variation of solutions of real linear differential equations of second order, Amer. Journ. of Math., **70**, No 1 (1948), 1—10.
21. Wintner A., A norm criterion for non-oscillatory differential equations, Quart. Appl. Math., **6**, No 2 (1948), 183—185.
22. Wintner A., Asymptotic integration of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range, Duke Math. Journ., **15**, No 1 (1948), 55—67.
23. Гусаров Л. А., Об ограниченности решений линейного уравнения второго порядка. ДАН СССР, **68**, № 2 (1949), 217—220.
24. Гусаров Л. А., Об ограниченности и стремлении к нулю решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, Канд. дисс. МГУ, 1947.
25. Соболь И. М., Об уравнениях Рикатти и приводимых к ним линейных уравнениях второго порядка, ДАН СССР, **65**, № 3 (1949), 275—278.
26. Borg G., On a Liapounoff criterion of stability, Amer. Journ. of Math., **71**, No 1 (1949), 67—70.
27. Hartman P., Wintner A., A criterion for the non-degeneracy of the wave equation, Amer. Journ. of Math., **71**, No 1 (1949).
28. Leighton W., Bounds for the solutions of a second-order linear differential equation, Proc. N.A.S. USA, **35**, No 4 (1949), 190—191.
29. Leighton W., On self-adjoint differential equations of second order, Proc. N. A. S. USA, **35**, No 11 (1949), 656—657.
30. Levinson N., Criteria for the limit-point case for second order linear differential operations, Časop. pest. mat. fys., **74**, No 1 (1949), 17—20.
31. Putnam C. R., An oscillation criterion involving a minimum principle, Duke Math. Journ., **16**, No 4 (1949), 633—636.
32. Sears D. B., On the solutions of a linear second order differential equation which are of integrable square, Journ. Lond. Math. Soc., **24**, No 3 (95) (1949), 207—215.
33. Wintner A., A criterion of oscillatory stability, Quart. Appl. Math., **7**, No 1 (1949), 115—117.
34. Wintner A., A priori Laplace transformations of linear differential equations, Amer. Journ. of Math., **80**, No 3 (1949), 587—594.
35. Wintner A., On almost free linear motions, Amer. Journ. of Math., **80**, No 3 (1949), 595—602.
36. Гусаров Л. А., О стремлении к нулю решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, **71**, № 1 (1950), 9—12.
37. Гусарова Р. С., Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, Прикл. матем. и мех., **14**, № 3 (1950), 313—314.
38. Якубович В. А., Об ограниченности решений уравнений $y''+p(t)y=0$, $p(t+w)=p(t)$, ДАН СССР, **74**, № 5 (1950), 901—903.
39. Bielecki A., Sur une équation différentielle binome du II-me ordre, Ann. Univ. M. Curie-Sklod. (A), **4** (1950), 13—17.
40. Hartman P., Wintner A., On the derivatives of the solutions of one-dimensional wave equations, Amer. Journ. of Math., **72**, No 1 (1950), 148—156.

41. Leighton W., The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation, Duke Math. Journ., **17**, No 1 (1950), 57—62.
42. Prodi G., Un' osservazione sugl'integrali dell'equazione $\ddot{y}+A(x)y=0$ nel caso $A(x)\to\infty$ per $x\to\infty$, Atti Ac. Naz. Lincei, ser. 8, **8**, No 5 (1950), 462—464.
43. Zlámal M., Oscillation criterions, Časopis pro pest. mat. fys., **75**, No 4 (1950), 213—218.
44. Гольдин А. М., Об одном критерии Ляпунова, Прикл. матем. и мех., **15**, № 3 (1951), 379—381.
45. Камынин Л. И., Об ограниченности решений дифференциального уравнения $y''+F(x)y=0$, Вестник МГУ № 5, физ.-матем. сер. № 3 (1951), 3—12.
46. Соболь И. М., Исследование асимптотического поведения решений линейного дифференциального уравнения второго порядка при помощи полярных координат, Матем. сб., нов. сер. **28** (**70**), № 3 (1951), 707—714.
47. Hartman P., On linear second order differential equations with small coefficients, Amer. Journ. of Math., **73**, No 4 (1951), 955—962.
48. Hartman P., The number of L^2-solutions of $x''+q(t)x=0$, Amer. Journ. of Math., **73**, No 3 (1951), 635—645.
49. Hartman P., Wintner A., On an oscillation criterion of Liapounoff, Amer. Journ. of Math., **73**, No 4 (1951), 885—890.
50. Wintner A., On the non-existence of conjugate points, Amer. Journ. of Math., **73**, No 2 (1951), 368—380.
51. Соболь И. М., Граничное решение уравнения Риккати и его применение к исследованию решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, Уч. Зап. МГУ, **155**, матем. сер. **5** (1953), 195—205.
52 Barbuti U., Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione $x''+B(t)x=0$, Atti Accad. Nac. Lincei, ser. 8, **12**, No 2 (1952), 170—175.
53. Leighton W., On self-adjoint differential equations of second order, Journ. Lond. Math. Soc., **27**, No 1 (105) (1952), 37—47.
54. Makai E., On a monotonic property of certain Sturm-Liouville functions, Acta Math. Hung., **3**, No 1—2 (1952), 165—172.
55. Ubaldo Richard, Sulla rappresentazione asintotica degle estremi delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine, Atti Acc. N. Linc. Rend., ser. 8, **12**, No 4 (1952), 382—387.
56. Choy-tak Taam, Non-oscillatory differential equations, Duke Math. Journ., **19**, No 3 (1952), 493—497.
57. Семенов Н. З., Три достаточных условия ограниченности решений линейного уравнения второго порядка, Уч. Зап. Белорус. гос. ун-та, сер. физ.-матем. № 15 (1953), 38—40.
58. Старжинский В. М., Об устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы, Прикл. матем. и мех., **17**, № 1 (1953), 117—122.
59. Ascoli G., Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''=(1+f(t))y$ in un caso notevole, Riv. mat. Univ. Parma, **4**, No 1—2 (1953), 11—29.
60. Hartman P., On the derivatives of solutions of linear, second order, ordinary differential equations, Amer. Journ. of Math., **75**, No 1 (1953), 173—177.
61. Lind Potter R., On self-adjoint differential equations of second order, Pacif. Journ. Math., **3**, No 2 (1953), 467—491.
62. Schäfke F. W, Einige Stabilitätskriterien, Z. angew. Math. und Mech., **33**, No 8—9 (1953), 283—285.
63. Choy-tak Taam, Linear differential equations with small perturbations, Duke Math. Journ., **20**, No 1 (1953), 13—25.

Глава VII

УРАВНЕНИЕ ЭМДЕНА—ФАУЛЕРА

1. Введение. В этой главе мы будем изучать важное нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\rho}\frac{du}{dt}\right)\pm t^{\sigma}u^{n}=0. \tag{1}$$

Это уравнение имеет ряд интересных физических приложений, появляясь в астрофизике в виде уравнения Эмдена и в атомной физике в виде уравнения Ферми — Томаса. Не приходится сомневаться в том, что нелинейные уравнения такого типа еще чаще встречались бы в математической физике, если бы было известно больше способов исследования свойств его решений, имеющих физический смысл.

С математической точки зрения уравнение также интересно: оно представляет собой нетривиальное нелинейное дифференциальное уравнение с широким классом решений, поведение которых можно определить с удивительной точностью, несмотря на то, что эти решения, вообще говоря, нельзя получить в явном виде.

Чтобы выделить этот широкий класс поддающихся изучению решений, мы будем пользоваться понятием *правильного решения*, которое встречалось ранее, в гл. V. Мы назовем правильным решением такое, которое вещественно и непрерывно для значений t, больших некоторого значения t_0.

Впредь мы ограничимся рассмотрением только правильных решений. Чтобы читатель не забывал об этом, мы будем всегда включать это предположение в условия теорем. Это предположение является естественным при рассмотрении многих физических приложений.

2. Некоторые предварительные преобразования. Сейчас мы рассмотрим некоторые способы замены переменных, которые приводят уравнение (1) к более простому виду. При этом будем считать, что $n\neq 1$.

Если $\rho>1$, положим

$$s=(\rho-1)^{-1}t^{\rho-1},\quad u=(\rho-1)^{(3\rho-\sigma-4)/[(\rho-1)(n-1)]}\frac{v}{s}.$$

Уравнение для v имеет вид

$$\frac{d^2v}{ds^2}\pm s^{\sigma_1}v^{n}=0,$$

где

$$\sigma_1 = \frac{\sigma + \rho}{\rho - 1} - (n + 3).$$

Если $\rho < 1$, положим

$$s = (1 - \rho)^{-1} t^{1-\rho}, \quad u = (1 - \rho)^{-(\sigma+\rho)/[(n-1)(1-\rho)]} v.$$

Тогда получим

$$\frac{d^2 v}{ds^2} \pm s^{\sigma_2} v^n = 0,$$

где

$$\sigma_2 = \frac{\sigma + \rho}{1 - \rho}.$$

Если $\rho = 1$, положим $s = \ln t$, получится уравнение

$$\frac{d^2 u}{ds^2} \pm e^{(\sigma+1)s} u^n = 0.$$

Мы начнем с изучения уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} \pm t^\sigma u^n = 0. \tag{2}$$

Для некоторых значений σ и n это уравнение можно привести к нелинейному уравнению, не содержащему t явно, и тем самым открыть путь применению для его изучения теории Пуанкаре—Ляпунова.

Попробуем найти решение уравнения (2) в виде $u = ct^w$, где c и w — постоянные. Подставляя, видим, что решение такого вида получится, если

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{-(\sigma + 2)}{n - 1}, \\ c &= \left[\mp \frac{(\sigma + 2)(\sigma + n + 1)}{(n - 1)^2}\right]^{1/(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Эти формулы теряют смысл при $n = 1$, когда уравнение (2) линейное и поддается исследованию методами гл. VI. Впредь мы предположим, что наше уравнение является нелинейным, именно, что $n > 1$.

Основываясь на значении c, данном формулой (3), мы видим, что, вообще говоря, вещественные решения рассматриваемого вида для уравнения $u'' - t^\sigma u^n = 0$ существуют только в том случае, если $(\sigma + 2)(\sigma + n + 1) > 0$. Мы увидим, что когда эти частные решения существуют, то они интересны не только сами по себе, но и дают возможность выяснить структуру множества всех собственных решений.

Так как мы рассматриваем только вещественные непрерывные решения, то арифметическая природа числа n значительно влияет на возможные типы правильных решений. Ясно, что, вообще говоря,

из-за наличия члена u^n правильные решения должны быть положительными. Однако для некоторых значений n, именно для чисел вида $n = p/q$, где q — нечетное, функция u может принимать отрицательные значения. Таким образом, мы видим, что для уравнений, где допускаются отрицательные значения u, либо $(-u)^n \equiv u^n$, либо $(-u)^n \equiv -u^n$. Это простое замечание объясняет наше внимание к положительным правильным решениям.

Мы скажем, что число n — „*нечетное*", если $n = p/q$, где p и q оба нечетные, и что n — „*четное*", если $n = p/q$ и p — четное.

Исследование уравнения (2) нам придется вести различными методами в зависимости от знака и величины σ и n. Эти методы будут вводиться один за другим до некоторого момента, после которого все они будут применяться одновременно. Можно надеяться, что после изучения изложенного здесь материала читатель сможет применять имеющиеся немногочисленные методы для исследования любых уравнений аналогичного вида, которые могут ему встретиться в теории или на практике.

3. Уравнение $u'' - t^\sigma u^n = 0$, $\sigma + n + 1 < 0$, положительные правильные решения. Нашим первым результатом служит

Теорема 1. *Если $\sigma + n + 1 < 0$, то любое положительное правильное решение уравнения*[1])

$$u'' - t^\sigma u^n = 0 \tag{4}$$

имеет одно из следующих асимптотических представлений:

$$u \sim \left[\frac{(\sigma+2)(\sigma+n+1)}{(n-1)^2}\right]^{1/(n-1)} t^{-(\sigma+2)/(n-1)}, \tag{5}$$

$$u = a_1 t + a_2 + [1 + o(1)] \frac{a_1^n t^{\sigma+n+2}}{(\sigma+n+1)(\sigma+n+2)} (a_1 > 0) \tag{6}$$

$$(= a_1 t - [1 + o(1)] a_1^n \ln t \quad \text{при} \quad \sigma + n + 1 = -1)$$

или

$$u = a_2 + [1 + o(1)] \frac{a_2^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}, \quad (a_2 > 0), \tag{7}$$

где a_1 и a_2 — постоянные.

Доказательство. Прежде всего ясно, что функция u монотонна при достаточно больших значениях t. Действительно, если $u' = 0$ при $t = t_0$, то u в точке t_0 может иметь только минимум, так как $u'' = t^\sigma u^n > 0$. Значит, при достаточно больших t функция u монотонно возрастает или монотонно убывает. Кроме того, u' монотонно возрастает, так как $u'' > 0$.

---

[1]) При доказательстве автор пользуется теоремой Харди, что законно только для *рациональных* n. Это относится также к теоремам 3—5.— *Прим перев.*

Таким образом, при $t \to \infty$ могут представиться три случая:

(а) $u' \to 0$;

(б) $u' \to a_1 > 0$;

(в) $u' \to \infty$.

Случай (а). Если $u' \to 0$, причем u' возрастает, то $u' < 0$ и u убывает. Значит, u имеет конечный предел при $t \to \infty$, так как $u > 0$. Кроме того, этот предел отличен от нуля. Действительно, если $u'(\infty) = u(\infty) = 0$, то мы получаем из уравнения (4)

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= -\int_t^\infty u''\,dt = -\int_t^\infty t^\sigma u^n\,dt, \\ u(t) &= -\int_t^\infty u'\,dt = \int_t^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma u^n\,dt_1\right) dt. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Пусть $u(t_0) = \delta$ мало. Тогда в силу монотонного убывания функции u имеем

$$\delta = u(t_0) = \int_{t_0}^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma u^n\,dt_1\right) dt \leqslant \delta^n \int_{t_0}^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma\,dt_1\right) dt. \tag{9}$$

Так как $n > 1$ и $\sigma + n + 1 < 0$, то последний интеграл сходится и мы получаем противоречие с достаточной малостью δ.

Значит, $u(\infty) = a_2 > 0$, $u(t) = a_2 + o(1)$ при $t \to \infty$. Из формулы (8) получаем [1])

$$u'(t) = -a_2^n \int_t^\infty t^\sigma\,dt + o(1) \int_t^\infty t^\sigma\,dt = a_2^n \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1} + o(1)\,t^{\sigma+1},$$

и потому

$$u(t) = a_2 - \frac{a_2^n}{\sigma+1} \int_t^\infty t^{\sigma+1}\,dt\,(1 + o(1)) = a_2 + \frac{a_2^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1 + o(1))\ ^{2)}.$$

---

[1]) См. примечание 15 в конце книги. — *Прим. перев.*

[2]) Повторяя этот прием, можно получить более точное выражение

$$u(t) = a_2 + \frac{a_2^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)} + \frac{n a_2^{2n-1} t^{2(\sigma+2)}}{(\sigma+1)(\sigma+2)(2\sigma+3)(2\sigma+4)}[1 + o(1)]$$

и т. д. Аналогично можно поступать и в других подобных случаях. — *Прим. перев.*

Упражнение

1. Применяя метод последовательных приближений, показать, что решение такого типа при $t \geqslant t_0$ существует, если a_2 выбрано соответствующим образом.

Случай (б). Если $u' \to a_1 > 0$, то $u \sim a_1 t$ при $t \to \infty$. Интегрируя так же, как в формуле (8), получаем представление (7).

Упражнение

2. При каких условиях решение такого типа существует?

Случай (в). Согласно равенствам (3), мы видим, что если $\sigma + n + 1 < 0$, $n > 1$, то c вещественно для любого n, так что имеется частное решение $u = ct^w$ уравнения (4), где c и w определены по формулам (3). Мы хотим показать, что это решение асимптотически равно всем тем, для которых $u' \to \infty$. Для этого сделаем подстановку

$$u = ct^w v$$

и получим для v следующее уравнение:

$$t^2 v'' + 2wtv' + w(w-1)(v - v^n) = 0. \tag{10}$$

Теперь совершим еще одну замену переменных, $t = e^s$; получится уравнение

$$\frac{d^2v}{ds^2} + (2w-1)\frac{dv}{ds} + w(w-1)(v - v^n) = 0. \tag{11}$$

Это уравнение будет играть ниже очень важную роль.

Так как $u > 0$ и $c > 0$, то $v > 0$. Покажем теперь, что все положительные правильные решения уравнения (10), кроме тех, для которых $v \to 1$, лежат в полосе $0 < v < 1$. Как только график решения v пересечет прямую $v = 1$ снизу вверх (он не может касаться этой прямой, если v не равно тождественно 1), то функция v должна продолжать монотонно возрастать, так как если $v' = 0$ при $v > 1$, то $v'' = -w(w-1)(v - v^n)t^{-2} > 0$, что может быть только при минимуме. Кроме того, такое решение v не может стремиться к конечному пределу, так как мы увидим сейчас, что если $v \to a$ при $s \to \infty$, то $a - a^n = 0$, а этому противоречит то, что v больше 1 и монотонно возрастает.

Сформулированное утверждение мы докажем следующим образом. Допустим, что $v \to a$, причем $a - a^n \neq 0$. Тогда из уравнения (11) имеем при $s \to \infty$

$$\frac{d^2v}{ds^2} + (2w-1)\frac{dv}{ds} \sim c_1 \neq 0.$$

Интегрируя, получаем при $s \to \infty$

$$\frac{dv}{ds} + (2w - 1)\, v \sim c_1 s.$$

Так как $v \to a$, то отсюда следует, что $dv/ds \sim c_1 s$, откуда $v \sim c_1 s^2/2$, что противоречит ограниченности v.

Покажем, что правильное решение v не может стремиться к ∞. Совершая подстановку $dv/ds = p$, получаем из (11)

$$p\frac{dp}{dv} + ap + b(v - v^n) = 0, \tag{12}$$

где $a = 2w - 1$ и $b = w(w - 1)$ (переход к аргументу v законен, так как $dv/ds > 0$).

Применяя теорему 3 гл. V (Харди)[1]), мы видим, что если $v \to \infty$, то либо

$$p \sim \alpha v^k e^{P(v)}, \tag{13}$$

где P многочлен относительно v, либо

$$p \sim \alpha v^l (\ln v)^m. \tag{14}$$

Если $P(v) \to -\infty$ при $v \to \infty$, то $p \to 0$ и $dp/dv \to 0$ (существование предела dp/dv следует хотя бы из замечания в конце п. 4 гл. V). На основании уравнения (12) мы видим, что этот результат приводит к противоречию. Если $P(v) \to \infty$ при $v \to \infty$, то $p \geqslant v^2$ при $v \to \infty$, чего не может быть для правильного решения v на основании леммы 1 гл. V. Если же $P(v)$ тождественно равен постоянной, то в силу той же леммы $k \leqslant 1$ и из уравнения (12) вытекает, что $dp/dv \sim bv^n/p \sim bv^{n-k}/\alpha$, откуда, интегрируя, получаем $p \sim bv^{n-k+1}/\beta(n - k + 1)$. Но по (13) $p \sim \beta v^k$, и мы приходим к противоречию. Аналогично рассуждаем в случае асимптотического представления (14).

Значит, остается исследовать решения, лежащие целиком в полосе $0 < v < 1$. Эти решения также должны быть монотонными для достаточно больших значений t, так как каждый экстремум должен быть максимумом. Следовательно, при $s \to \infty$ имеем $v \to 0$ или $v \to 1$.

Случай $v \to 1$ дает нам остающийся тип решения уравнения (4), выраженный формулой (5), решений же, для которых $v \to 0$, в случае (в) не может существовать[2]). Между прочим, имеется другой способ доказательства того, что u не может стремиться к 0 при

---

[1]) Здесь требуется рациональность n. В самом деле, теорема Харди доказана для полиномиальных уравнений, и чтобы провести (12) к этому виду, требуется подстановка $v = v_1^q$ (пусть $n = p/q$). Поэтому в формуле (13) вместо $P(v)$, должно быть $P(v_1) = P(\sqrt[q]{v})$, но это не меняет доказательства. — *Прим. перев.*

[2]) См. примечание 16 в конце книги. — *Прим. перев.*

$t \to \infty$, основанный на том, что скорость убывания решений нелинейного уравнения (10) не может быть слишком большой.

Отметим, наконец, что мы не пользовались видом числа n.

Упражнение

3. При каких условиях существуют решения уравнения (11) указанного типа?

4. Уравнение $u'' - t^\sigma u^n = 0$, $\sigma + 2 < 0 < \sigma + n + 1$. В этом случае мы докажем, что справедлива

Теорема 2. *Если $\sigma + 2 < 0 < \sigma + n + 1$, то каждое положительное правильное решение уравнения*

$$u'' - t^\sigma u^n = 0 \tag{4}$$

имеет асимптотический вид

$$u = a_2 + \frac{a_2^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}[1 + o(1)]. \tag{7}$$

Доказательство. Мы опять имеем те же три случая:

(а) $u' \to 0$;

(б) $u' \to a > 0$;

(в) $u' \to \infty$

при $t \to \infty$.

Покажем сначала, что случай (б) невозможен. Если $u' \to a$, то и $u \sim at$ и из уравнения (4) находим

$$u'' > a_1^n t^{\sigma+n} \tag{15}$$

для $a > a_1 > 0$, $t \geqslant t_0$, откуда посредством интегрирования получим

$$u' > \frac{a_1^n t^{\sigma+n+1}}{\sigma+n+1} - c_1 \to \infty, \tag{16}$$

что противоречит принятому предположению. Аналогично показываем, что случай (в) невозможен. В самом деле, из условия $u' \to \infty$ следует, что $u' \geqslant a$ для больших t при некотором a, а потому $u \geqslant at$. Возвращаясь к уравнению (4), получаем, что $u'' \geqslant a^n t^{\sigma+n}$, $u' \geqslant a_1^n/(\sigma+n+1)\, t^{\sigma+n+1} - c_1 \geqslant t^b$ для некоторого $b > 0$ и потому $u \geqslant t^{b+1}$ для некоторого $b > 0$ при $t \to \infty$. Продолжая таким же образом [1]), получаем, что $u \geqslant t^N$ для каждого N при $t \to \infty$. Отсюда

---

[1]) Для этого проще всего заметить, что из неравенства $u > t^k$ ($k \geqslant 1$, $t \geqslant t_0$) аналогичным образом следует, например, что $u > t^{k+\frac{1}{2}(\sigma+n+1)}$ ($t \geqslant t_1$) — *Прим. перев.*

и из уравнения (4) для больших t получаем, что

$$u'' > t^{\sigma}u^{n} > u^{1+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0 \tag{17}$$

при $t \to \infty$. Так как в нашем случае u' положительна, то из неравенства (17) получаем неравенство

$$u'u'' > u^{1+\varepsilon}u',$$

что после интегрирования дает $u'^2 > c_2 u^{2+\varepsilon}$ или $u' > \sqrt{c_2}u^{1+\varepsilon/2}$ при $t \to \infty$. Но мы знаем, что для правильного решения этого не может быть (см. лемму 1 гл. V).

Следовательно, остается случай (а), когда $u' \to 0$. В этом случае u' должна быть отрицательной для больших значений t, так как из положительности u следует в силу дифференциального уравнения, что $u'' > 0$ и потому u' возрастает. Установив, что $u' < 0$, получаем, что u стремится к пределу при $t \to \infty$. Доказательство, приведенное в п. 3 (формула (9) и ниже), показывает, что этот предел не равен нулю.

Установив это, для получения асимптотического выражения решения можно применить тот же процесс итерации, что и в п. 3.

Упражнение

При каких условиях существует решение указанного типа?

5. Уравнение $u'' - t^{\sigma}u^{n} = 0$, $\sigma + 2 < 0$, $\sigma + n + 1 = 0$. Вновь мы имеем те же три случая при $t \to \infty$:

(а) $u' \to 0$;

(б) $u' \to a \neq 0$;

(в) $u' \to \infty$.

Как и в п. 4, получаем, что случай (б) невозможен; при этом неравенство (16) предыдущего пункта надо заменить неравенством

$$u' > a_1^n \ln t - c_1 \to \infty. \tag{18}$$

Чтобы исключить случай $u' \to \infty$ (случай (в)), рассмотрим уравнение, получаемое в результате подстановки $u = vt$ и затем подстановки $t = e^s$:

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{dv}{ds} - v^n = 0. \tag{19}$$

Так как $v > 0$, то все решения монотонны для достаточно больших значений t. Применяя теорему Харди, как и в п. 3, исключаем случай $v \to \infty$. Отсюда можно заключить, что v имеет конечный предел, который, как видно из уравнения (19), может равняться только нулю. Если (ср. аналогичные рассуждения в п. 3) $v \to 0$, то v имеет асимптотический вид $v \sim c_1 e^{-s}$, причем $c_1 \neq 0$; отсюда $u = vt \sim c_1$ при $t \to \infty$. То, что константа c_1 отлична от нуля, можно вывести

из уравнения (19), как мы только что сделали, или можно показать на основе условия, что $\sigma+2<0$, как мы это делали в предыдущих пунктах[1]).

Важно помнить, что к задаче об определении поведения решений нужно иметь различные подходы, так как в более сложных случаях некоторые из этих подходов могут быть неприменимыми.

Резюмируем полученный результат:

Теорема 3. *Если* $\sigma+2<0=\sigma+n+1$, *то каждое положительное правильное решение уравнения*

$$u''-t^{\sigma}u^{n}=0 \tag{4}$$

имеет асимптотический вид

$$u=a_2+\frac{a_2^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1+o(1)) \tag{7}$$

при $t\to\infty$.

6. Уравнение $u''-t^{\sigma}u^{n}=0$, $\sigma+2=0$. Докажем следующую теорему:

Теорема 4. *Каждое положительное правильное решение уравнения*

$$t^2u''-u^n=0 \tag{4}$$

имеет асимптотический вид

$$u\sim[(n-1)\ln t]^{-1/(n-1)} \tag{20}$$

при $t\to\infty$.

Доказательство. Положив $t=e^s$, получим

$$\frac{d^2u}{ds^2}-\frac{du}{ds}-u^n=0.$$

Так как $u>0$, то каждое решение этого уравнения монотонно для достаточно больших t; значит, u стремится к бесконечности или к конечному пределу. Конечный предел, к которому она может стремиться, необходимо равен нулю. Применяя после подстановки $du/ds=p$ теорему Харди, как и выше, мы исключаем случай $u\to\infty$, и потому остается случай $u\to 0$. Чтобы получить асимптотический вид, полагаем $u=1/v$ и затем $dv/ds=p$; будем иметь

$$p\frac{dp}{dv}-\frac{2}{v}p^2-p+v^{2-n}=0.$$

Исследование различных возможностей дает формулу (20). Детали этого исследования мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Упражнение

При каких условиях существует решение указанного типа?

---

[1]) См. примечание 17 в конце книги. — *Прим. перев.*

7. Уравнение $u'' - t^\sigma u^n = 0$, $\sigma + 2 > 0$. Справедлива

Теорема 5. *Если $\sigma + 2 > 0$, то каждое положительное правильное решение уравнения*

$$u'' - t^\sigma u^n = 0 \tag{4}$$

имеет асимптотический вид

$$u \sim ct^{-(\sigma+2)/(n-1)}, \tag{21}$$

где c определяется по формуле (3).

Доказательство. Как и выше, все решения монотонны. Положим $u = ct^w v$, где c и w даются формулами (3). Уравнением для v будет

$$v'' + (2w - 1)v' + w(w-1)(v - v^n) = 0. \tag{11}$$

Для рассматриваемых σ и n имеем

$$2w - 1 < 0 < w(w-1).$$

Рассмотрим теперь возможные случаи для v. Во всяком случае, имеем $v > 0$. Если график v пересекает прямую $v = 1$ снизу вверх, то v должна продолжать монотонно возрастать, так как при $v > 1$ каждая ее экстремальная точка должна быть точкой минимума. Функция v не может стремиться к конечному пределу, большему 1, так как любой конечный предел должен быть корнем уравнения $v - v^n = 0$. Значит, $v \to \infty$. Мы исследуем эту возможность при помощи теоремы Харди. Полагая $p = v'$, получим

$$p\frac{dp}{dv} - ap + b(v - v^n) = 0.$$

При $v \to \infty$ должно быть либо

$$p \sim \alpha e^{P(v)} v^{a_1},$$

где P многочлен, либо

$$p \sim \alpha v^{a_2} (\ln v)^{a_3},$$

и, рассуждая так же, как в п. 3, мы приходим к противоречию.

Поэтому, если $v > 1$, то $v \to 1$ при $t \to \infty$, откуда следует, что v имеет асимптотический вид (21).

Рассмотрим теперь решения, содержащиеся в области $0 < v < 1$. Из монотонности решений для достаточно больших t следует, что при $t \to \infty$ либо $v \to 0$, либо $v \to 1$. Можно легко исключить возможность $v \to 0$. Действительно, характеристические числа матрицы, соответствующей линейной части уравнения (11), равны $\lambda = -w$, $-(w-1)$. Так как оба они положительны, то решение $v = 0$ ока-

зывается вполне неустойчивым[1]) и поэтому ни одно другое решение уравнения (10) не может к нему стремиться при $t \to \infty$. Значит, мы вновь получаем единственную возможность $v \to 1$, откуда следует (21).

Это завершает исследование положительных правильных решений уравнения $u'' - t^\sigma u^n = 0$. Так как все нетривиальные правильные решения монотонны, то эти решения для достаточно больших t положительны или отрицательны. Если u отрицательно, то возникает вопрос о смысле u^n. Либо значение n исключает отрицательные значения u, либо $(-u)^n = \pm u^n$, и тогда мы приходим к исследованию уже разобранного случая или к уравнению $u'' + t^\sigma u^n = 0$, которое мы будем рассматривать в пп. 8—13. *При этом мы всюду в пп. 8—13 будем предполагать, что n — „нечетное“.*

Упражнение

При каких условиях существует решение указанного типа?

8. Уравнение $u'' + t^\sigma u^n = 0$, $\sigma + n + 1 < 0$. Имеет место

Теорема 6. *Правильные решения уравнения*

$$u'' + t^\sigma u^n = 0 \tag{22}$$

имеют один из следующих асимптотических видов:

$$u = a - \frac{a^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1 + o(1)), \tag{23}$$

$$u \sim ct$$

при $t \to \infty$, если $\sigma + n + 1 < 0$.

Доказательство. В этом месте мы применим новый прием. Имеем

$$u'u'' + t^\sigma u^n u' = 0,$$

откуда

$$\frac{u'^2}{2} + \int_{t_0}^{t} t^\sigma u^n u'\, dt = c_1.$$

Интегрирование по частям дает

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{t^\sigma u^{n+1}}{n+1} - \sigma \int_{t_0}^{t} t^{\sigma-1} \frac{u^{n+1}}{n+1}\, dt = c_2. \tag{24}$$

Так как $\sigma < 0$, а $n + 1$ — „четное“ и, значит, $u^{n+1} \geqslant 0$, то из (24) получим $t^\sigma u^{n+1} \leqslant c_3$. Следовательно,

$$|u| = O(t^{-\sigma/(n+1)}).$$

---

[1]) Относительно этого термина см. примечание 6 в конце книги. Впрочем, можно обойтись без его применения, если заметить, что при $v \to +0$ в силу монотонности v v'' будет меньше 0, т. е. v' убывает, а это приводит к противоречию. — *Прим. перев.*

Возвращаясь к исходному уравнению, получаем

$$u' + \int_{t_0}^{t} t^{\sigma} u^n \, dt = c_4. \tag{25}$$

Так как интеграл

$$\int_{t_0}^{t} t^{\sigma} \, |u|^n \, dt = O\left(\int_{t_0}^{t} t^{\sigma} t^{-n\sigma/(n+1)} \, dt\right) = O\left(\int_{t_0}^{t} t^{\sigma/(n+1)} \, dt\right)$$

и так как $\sigma/(n+1) < -1$, то интеграл $\int_{t_0}^{\infty} t^{\sigma} u^n \, dt$ сходится. Значит, $u' \to c$ при $t \to \infty$. Если $c \neq 0$, то $u \sim ct$. Если же $c = 0$, т. е. если $u' \to 0$ при $t \to \infty$, то вместо (25) получаем

$$u' = \int_{t}^{\infty} t^{\sigma} u^n \, dt.$$

Так как $u = O(t^{-\sigma/(n+1)})$, то имеем

$$u' = O\left(\int_{t}^{\infty} t^{\sigma} t^{-n\sigma/(n+1)} \, dt\right) = O\left(\int_{t}^{\infty} t^{\sigma/(n+1)} \, dt\right) =$$
$$= O\left(t^{(\sigma+n+1)/(n+1)}\right).$$

Если $\sigma + n + 1 < -(n+1)$, то отсюда можно заключить, что $u \to a$ при $t \to \infty$. Если же $\sigma + n + 1 \geqslant -(n+1)$, то $u = O(t^{1-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$, откуда, повторяя рассуждения, получим

$$u' = \int_{t}^{\infty} t^{\sigma} u^n \, dt = O\left(\int_{t}^{\infty} t^{\sigma+n-n\varepsilon} \, dt\right) =$$
$$= O\left(t^{\sigma+n+1-n\varepsilon}\right) = O\left(t^{-n\varepsilon}\right)$$

и т. д., пока показатель не станет меньше -1. Значит, $u \to a$ при $t \to \infty$. Если $u \not\equiv 0$, то a отлично от нуля, что следует из рассуждений, проведенных в случае (а) п. 3, если там в качестве t_0 брать точки, для которых $|u(t_0)| = \max\limits_{t_0 \leqslant t < \infty} |u(t)|$. Более точный результат (23) можно теперь получить при помощи интегрирования.

Упражнение

При каких условиях решения указанного типа существуют?

9. Уравнение $u'' + t^{\sigma} u^n = 0$, $\sigma + 2 \geqslant 0$. Сейчас мы докажем следующий важный результат:

Теорема 7. *Если* $\sigma+2\geqslant 0$, *то не существует нетривиальных монотонных решений уравнения*

$$u''+t^{\sigma}u^{n}=0. \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\sigma+2=0$. Допустим для определенности, что имеется монотонно неубывающее решение u. Полагая $t=e^{s}$, получим

$$\frac{d^2u}{ds^2}-\frac{du}{ds}+u^{n}=0.$$

Мы видим, что конечным пределом u может служить только $u=0$. Чтобы показать невозможность случая, когда $u\to\infty$, мы, как и выше, применяем теорему Харди.

Остается случай $u\to 0$. Тогда, если $u\not\equiv 0$, то $u<0$. Полагая $u=-1/v$, $p=dv/ds$, имеем

$$p\frac{dp}{dv}-\frac{2p^2}{v}-p-v^{2-n}=0. \tag{26}$$

Затем применяем теорему Харди, чтобы получить возможные виды решения при $v\to\infty$. Таким образом можно показать, что не существует монотонных решений [1]).

Впоследствии мы будем исследовать колебательные свойства решений.

Рассмотрим теперь случай $\sigma+2>0$. Пусть сначала функция u монотонно не убывает. Предел ее может быть бесконечным или нулем, что следует из рассмотрения уравнения для $v=u(e^{t})$:

$$v''-v'+e^{(\sigma+2)t}v^{n}=0.$$

Рассмотрим сначала случай $u\to\infty$. При $t\geqslant t_0$ из (22) получаем неравенство

$$u''<-t^{\sigma} \tag{27}$$

или, интегрируя,

$$u'<c_1-\frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1}\qquad\left(<c_1-\ln t,\quad \text{если } \sigma+1=0\right).$$

Если $\sigma+1\geqslant 0$, то это противоречит тому, что $u'>0$ при $t>0$. Если же $\sigma+1<0$, то, интегрируя неравенство (27) от t до ∞, получим

$$u'(t)>u'(\infty)-\frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1}$$

($u'(\infty)$ существует, так как $u''(t)<0$ и $u\to\infty$). Интегрируя от t_0 до t, имеем

$$u(t)\geqslant u'(\infty)\,t-\frac{t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}+c_2\geqslant t^{\varepsilon},\qquad \varepsilon>0.$$

---

[1]) При этом удобно воспользоваться тем, что в силу уравнения (26) $pdp/dv>2p^2/v$ (а $p>0$, хотя бы в силу теоремы Харди). Отсюда сразу приходим к противоречию. — *Прим. перев.*

Возвращаясь к исходному уравнению, получаем

$$u'' \leqslant -t^{\sigma+n\varepsilon},$$

мы повторяем этот процесс, пока не придем к неравенству $u \geqslant t^{\lambda}$, где $1+\sigma+n\lambda \geqslant 0$, отсюда следует, что $u' < 0$ для больших t, что противоречит условию, наложенному на u. Аналогичное рассуждение показывает, что не может быть $u \to c_3 > 0$, впрочем, мы это уже знаем.

Теперь рассмотрим случай, когда u монотонно не возрастает, причем $u > 0$. Тогда $u \to 0$ при $t \to \infty$; но из уравнения (22) видно, что $u'' < 0$, откуда легко прийти к противоречию. Так как n «нечетно», то случай $u < 0$ эквивалентен случаю $u > 0$.

10. Уравнение $u'' + t^{\sigma}u^n = 0$, $\sigma + 2 < 0 < \sigma + n + 1$, $2\sigma + n + 3 < 0$. Рассуждения, применяемые в этом и в следующем пунктах, более сложны и требуют бóльших подробностей, чем приведенные ранее. Это представляется неизбежным, так как множество решений действительно является более разнообразным.

Нашим первым результатом будет

Теорема 8. *Если* $\sigma + 2 < 0 < \sigma + n + 1$ *и* $2\sigma + n + 3 < 0$, *то все правильные решения уравнения*

$$u'' + t^{\sigma}u^n = 0 \tag{22}$$

имеют асимптотический вид

$$u \sim \pm ct^{w}, \tag{28}$$

где c и w определены формулой (3), *или*

$$u = a - \frac{a^n t^{\sigma+2}(1+o(1))}{(\sigma+1)(\sigma+2)}. \tag{23}$$

Доказательство. Совершим замену переменных

$$u = ct^{w}v,$$

где c и w определены тем условием, что ct^{w} является решением уравнения (22). Уравнение для v тогда имеет вид

$$\frac{d^2v}{ds^2} + (2w-1)\frac{dv}{ds} + w(w-1)(v - v^n) = 0, \tag{11}$$

где $s = \ln t$ и $2w - 1 > 0$, $w(w-1) < 0$. Следовательно, мы можем записать это уравнение в виде

$$\frac{d^2v}{ds^2} + a_1\frac{dv}{ds} - a_2(v - v^n) = 0, \qquad a_1 > 0,\ a_2 > 0. \tag{29}$$

Здесь существенным образом использовано условие $2\sigma + n + 3 < 0$.

Умножая на $v' = dv/ds$ и интегрируя, получаем

$$\frac{v'^2}{2} + a_1 \int_0^s v'^2 ds + a_2\left(\frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^2}{2}\right) = c_1. \tag{30}$$

Значит, $|v|$ ограничено. Отсюда следует, что

$$\sup v'^2 < \infty, \int_0^\infty v'^2 ds < \infty.$$

Из уравнения (29) можно также заключить, что $|v''|$ ограничено.

Покажем теперь, что из этих утверждений следует, что $v' \to 0$ при $s \to \infty$. Действительно, если $|v''| \leqslant k$, $k > 0$, то при $\sigma \geqslant s$ по формуле конечных приращений будем иметь $|v'(\sigma)| \geqslant |v'(s)| - k(\sigma - s)$. Отсюда

$$\int_s^{s+\frac{1}{k}|v'(s)|} |v'(\sigma)|^2 d\sigma \geqslant \int_s^{s+\frac{1}{k}|v'(s)|} [|v'(s)| - k(\sigma - s)]^2 d\sigma = \frac{1}{3k}|v'(s)|^3,$$

или

$$|v'(s)| \leqslant \left(3k \int_s^{s+\frac{1}{k}|v'(s)|} |v'(\sigma)|^2 d\sigma\right)^{1/3} \leqslant \left(3k \int_s^\infty |v'(\sigma)|^2 d\sigma\right)^{1/3}.$$

Таким образом, $v'(s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Возвращаясь к соотношению (30) и пользуясь тем, что $\int_0^\infty v'^2 ds < \infty$, получаем

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^2}{2}\right) = c_2.$$

Значит, $v \to r$ при $s \to \infty$, где $r^{n+1}/(n+1) - r^2/2 - c_2 = 0$. Но из (29) следует, что r должно быть корнем уравнения $r^n - r = 0$ и, следовательно, $r = 0$ или ± 1.

Если $r = \pm 1$, мы получаем требуемое решение вида (28).

Рассмотрим далее случай $r = 0$, когда $v \to 0$ и $v' \to 0$ при $s \to \infty$. Матрица, соответствующая линейной части $v'' + a_1 v' - a_2 v = 0$ уравнения (29), имеет характеристические числа $-w$ и $-w+1$, первое из которых отрицательно, а второе положительно. Значит, если $v \to 0$

и $v' \to 0$, то $v \sim c_3 e^{-wt}$ при $t \to \infty$. Это приводит к решению, указанному формулой (23) [1]).

Упражнение

При каких условиях существуют решения упомянутых типов?

11. Уравнение $u'' + t^\sigma u^n = 0$, $2\sigma + n + 3 > 0$, $\sigma + 2 < 0 < \sigma + n + 1$. Повторяя предварительные преобразования предыдущего пункта, получаем уравнение

$$v'' - av' + b(v^n - v) = 0, \qquad a > 0, \ b > 0, \tag{31}$$

где $a = -(2w - 1)$ и $b = -w(w - 1)$.

Мы начнем с доказательства некоторых отправных результатов, связанных с поведением решений этого уравнения.

Лемма 1. *Кроме $v(t) = \pm 1$, не существует правильных решений уравнения* (31), *для которых либо $v(t) \geqslant 1$ при $t \geqslant t_0$, либо $v(t) \leqslant -1$ при $t \geqslant t_0$. Кроме того, не существует решений, для которых $v(t)$ стремится к 1 или к -1.*

Доказательство. Прежде всего, если $v \geqslant 1$, то из уравнения (31) видно, что v — монотонная функция и, следовательно, существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{s \to \infty} v$. Применяя предыдущие методы, мы легко исключаем возможности $v \to \infty$ и $v \to c > 1$. Следовательно, остается случай, когда $v \to 1$ при $s \to \infty$, если мы рассматриваем случай $v > 0$. Полагая $v = 1 + v_1$, получим уравнение для v_1:

$$v_1'' - av_1' + b\,[(n - 1)\,v_1 + O(v_1^2)] = 0.$$

Характеристические числа матрицы соответствующего линейного уравнения либо оба положительны, либо имеют положительную вещественную часть. Значит, $v_1 = 0$, т. е. $v = 1$, представляет собой вполне неустойчивое решение. Это также исключает возможность для v стремиться к 1 при $s \to \infty$, если $v \not\equiv 1$ [2]). Рассуждения для $v < 0$ аналогичны.

---

[1]) Очевидно, что автор подразумевает здесь применение известных результатов о возможной скорости стремления к нулю решений нелинейных уравнений. Эти результаты в книге не излагаются. Однако в данном случае нужное утверждение можно получить при помощи теоремы Харди так, как это указано в примечании 16 в конце книги. — *Прим. перев.*

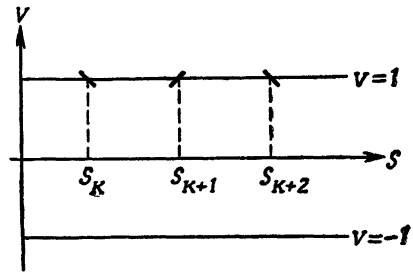
[2]) См. конец примечания 6 в конце книги. При этом надо перейти к системе уравнений и воспользоваться тем, что если $v_1 \to 0$, то и $v_1' \to 0$. Последнее доказывается так: имеем $v_1'' - av_1' = o(1)$, т. е. $(v_1' e^{-as})' = o(e^{-as})$, откуда $v_1' e^{-as} = c + o(e^{-as})$ и $v_1 = ce^{as} + o(1)$; если бы было $c \neq 0$, то $v_1 \to \infty$; противоречие показывает, что $c = 0$, т. е. $v_1' = o(1)$. — *Прим. перев.*

Лемма 2. *Если* $-1 \leqslant v \leqslant 1$, *причем* $v \not\equiv \pm 1$, *то при* $t \to \infty$

$$v = c_1 e^{-ws}[1 + o(1)],$$

где $w = -\dfrac{\sigma + 2}{n - 1}$.

Доказательство. Как видно из рассмотрения знака $v - v^n$, при $-1 \leqslant v \leqslant 1$ решения монотонны. Так как функция v не может стремиться к числу l, отличному от 0 и ± 1, и не может стремиться к ± 1, то она необходимо должна стремиться к нулю при $s \to \infty$. Поэтому мы можем выяснить поведение v при помощи теории Пуанкаре — Ляпунова или теоремы Харди.



Фиг. 8.

Наконец, справедлива

Лемма 3. *Если* $v(s)$ *не имеет вида, указанного в предыдущей лемме, и* $v(s) \not\equiv \pm 1$, *то при* $s \to \infty$ $\overline{\lim}\, v = \infty$, $\underline{\lim}\, v = -\infty$.

Доказательство. Допустим без ограничения общности, что график v пересекает прямую $v = 1$ бесконечно много раз. Пусть $\{s_k\}$ — последовательность точек пересечения (фиг. 8).

Умножая уравнение (31) на v' и интегрируя, получаем

$$\frac{v'^2}{2}\Bigg|_{s_k}^{s_{k+1}} - a\int_{s_k}^{s_{k+1}} v'^2\, ds = 0. \tag{32}$$

Следовательно,

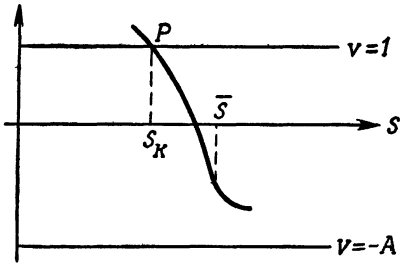
$$\sum_{k=1}^{\infty} [v'^2(s_{k+1}) - v'^2(s_k)] = 2a\int_{s_1}^{\infty} v'^2 ds.$$

Покажем, что $\int_0^{\infty} v'^2\, ds = \infty$, откуда будет следовать, что $v'^2(s_k) \to \infty$. Допустим на время, что этот интеграл конечен. Тогда имеем, умножая (31) на v' и интегрируя,

$$\frac{v'^2}{2} - a\int_0^s v'^2 ds + b\left(\frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^2}{2}\right) = c_1.$$

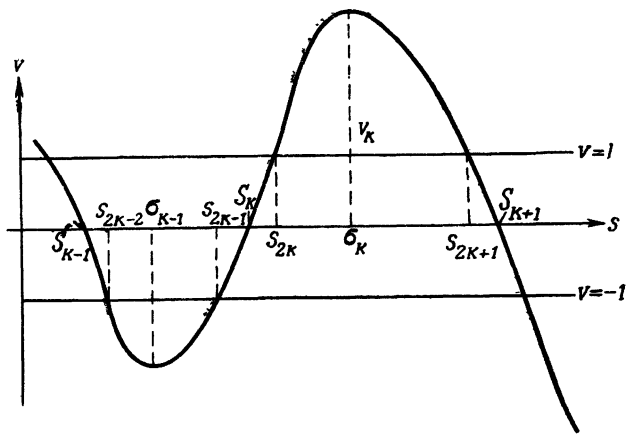
Это вместе с неравенством $\int_0^{\infty} v'^2\, ds < \infty$ влечет за собой ограниченность $|v|$ и $|v'|$. Из дифференциального уравнения получаем, что и $|v''|$ ограничена. Но, как мы показали в п. 10, эти факты влекут

за собой, что $v' \to 0$ при $s \to \infty$. Этому, однако, противоречит равенство (32), из которого следует, что $v'(s_{k+1})^2 > v'(s_k)^2$. Итак, мы доказали, что $|v'(s_k)| \to \infty$ при $k \to \infty$. Покажем теперь, что для любого $A > 0$ и достаточно больших s график решения v обладает следующим свойством: всякий раз, когда он пересекает прямую $v = 1$, идя сверху вниз, он продолжает идти вниз и непременно пересекает прямую $v = -A$ и только после этого может повернуть вверх. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим фиг. 9. В точке P значение $v'(s_k)$ отрицательно и очень велико, если k достаточно велико.



Фиг. 9.

Так как $v''(s_k) = av'(s_k)$, то v' убывает в точке s_k, откуда на основании уравнения (31) заключаем, что v'' не может обращаться в 0 при $s \geqslant s_k$, пока v остается между 1 и $-A$ (ибо в первой точке $\bar{s} > s_k$, где $v''(\bar{s}) = 0$, величина $|v'(\bar{s})|$ должна быть еще больше,



Фиг. 10.

чем $|v'(s_k)|$). Поэтому при $s \geqslant s_k$, пока v остается между 1 и $-A$, будет $v'(s) \leqslant v'(s_k) < 0$ и график непременно достигает прямой $v = -A$.

Аналогично показываем, что каково бы ни было $A > 1$, график решения для достаточно больших s всякий раз, пересекая прямую $v = 1$ снизу вверх, продолжает идти вверх и непременно пересекает прямую $v = A$.

Это рассуждение завершает доказательство леммы.

Получив эти предварительные сведения, постараемся теперь определить вид графика решения более точно. Мы уже доказали, что $|v'(S_k)|$ и $|v(\sigma_k)|$ стремятся к ∞ при $k \to \infty$. Кроме того, на основании уравнения (31) легко убедиться в том, что между точками σ_{k-1} и σ_k производная $v'(s)$ сохраняет свой знак (фиг. 10).

В дальнейшем центральное место занимает

Лемма 4. *Разность* $S_{k+1} - S_k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Доказательство разбивается на две части. Сначала мы покажем, что $s_{2k} - S_k \to 0$, а затем, что $\sigma_k - s_{2k} \to 0$ при $k \to \infty$. Первое немедленно следует из соотношения $|v'(S_k)| \to \infty$ и из монотонного возрастания функции $|v'|$ на отрезках $[S_k, s_{2k}]$ для больших значений k. Как мы уже говорили, последнее вытекает из уравнения (31), если заметить, что $0 \leqslant |v| \leqslant 1$ на отрезке $[S_k, s_{2k}]$.

Перейдем теперь к доказательству того, что $\sigma_k - s_{2k} \to 0$. Уравнение (31) можно переписать в виде

$$-\frac{d}{ds}(e^{-as}v')^2 = 2be^{-2as}(v^n - v)v'.$$

Если $S_k \leqslant s \leqslant \sigma_k$, то $e^{-2a\sigma_k} \leqslant e^{-2as}$. Интегрируя последнее уравнение по отрезку $[s, \sigma_k]$, получаем

$$2be^{-2a\sigma_k}\left(\frac{v_k^{n+1}}{n+1} - \frac{v_k^2}{2} - \frac{v^{n+1}}{n+1} + \frac{v^2}{2}\right) \leqslant e^{-2as}v'^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2be^{-2as}\left(\frac{v_k^{n+1}}{n+1} - \frac{v_k^2}{2} - \frac{v^{n+1}}{n+1} + \frac{v^2}{2}\right)$$

(здесь $v_k = |v(\sigma_k)|$). Это влечет за собой неравенство

$$\sqrt{2b}\, e^{a(s-\sigma_k)} \leqslant |v'|\left(\frac{v_k^{n+1}}{n+1} - \frac{v_k^2}{2} - \frac{v^{n+1}}{n+1} + \frac{v^2}{2}\right)^{-1/2} \leqslant \sqrt{2b}.$$

Интегрируя от s_{2k} до σ_k, получаем

$$\frac{\sqrt{2b}}{a}(1 - e^{-a(\sigma_k - s_{2k})}) \leqslant \int_1^{v_k}\left(\frac{v_k^{n+1}}{n+1} - \frac{v_k^2}{2} - \frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^2}{2}\right)^{-1/2} dv.$$

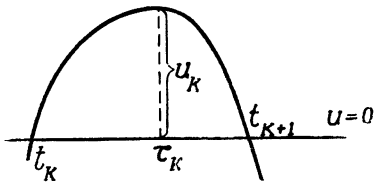
Нижний предел здесь можно взять равным 0, откуда, применяя подстановку $v = v_k p$, приходим к результату

$$\frac{\sqrt{2b}}{a}(1 - e^{-a(\sigma_k - s_{2k})}) \leqslant v_k^{-(n-1)/2}\int_0^1\left(\frac{1-p^{n+1}}{n+1} - \frac{1-p^2}{2v_k^{n-1}}\right)^{-1/2} dp.$$

Как легко доказать, полученные интегралы сходятся и равномерно ограничены для всех достаточно больших k.

Так как $v_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то мы видим, что $\sigma_k - s_{2k} \to 0$ при $k \to \infty$. Разность $S_{k+1} - \sigma_k$ оценивается аналогично и этим доказательство леммы заканчивается.

Возвращаясь к плоскости u, t и вспоминая, что координата t в плоскости u, t связана с координатой s в плоскости v, s соотношением $t = e^s$, мы видим, что для двух последовательных нулей t_k и t_{k+1} решения u (см. фиг. 11) имеем $t_{k+1}/t_k \to 1$ при $k \to \infty$.



Фиг. 11.

Прежде чем продолжать вывод асимптотических формул для решений, мы обратимся к другим значениям σ, при которых существуют колеблющиеся решения, и покажем, что в этих случаях также $t_{k+1}/t_k \to 1$ в соответствующей плоскости. После получения этого результата простое рассуждение позволит нам выяснить асимптотическое поведение решений во всех случаях.

12. Уравнение $u'' + t^\sigma u^n = 0$, $\sigma + 2 > 0$. Отметим прежде всего, что в силу теоремы 7 и уравнения (22) все нетривиальные правильные решения являются колеблющимися, причем между последовательными положительными максимумами и отрицательными минимумами производная решения сохраняет знак. Мы хотим показать, что при обозначениях фиг. 11 имеет место

Лемма 5. *Отношение $t_{k+1}/t_k \to 1$ при $k \to \infty$.*

Достаточно доказать соотношение $\tau_k/t_k \to 1$, где τ_k обозначает точку, в которой $|u|$ достигает наибольшего значения u_k, так как аналогичное рассуждение показывает, что $t_{k+1}/\tau_k \to 1$, откуда и следует лемма 5. Мы начнем с доказательства того, что если $\sigma \geqslant 0$, то

$$\tau_k^\sigma u_k^{n+1} \geqslant \tau_{k-1}^\sigma u_{k-1}^{n+1} \geqslant c_1 > 0. \tag{33}$$

Из дифференциального уравнения выводим

$$u'^2(t_k) = -\int_{t_k}^{\tau_k} \frac{du'^2}{dt}\,dt = 2\int_{t_k}^{\tau_k} t^\sigma u^n u'\,dt \leqslant \frac{2\tau_k^\sigma u_k^{n+1}}{n+1}. \tag{34}$$

Аналогично, рассматривая отрезок $[\tau_{k-1}, t_k]$, имеем

$$u'^2(t_k) \geqslant \frac{2}{n+1}\tau_{k-1}^\sigma u_{k-1}^{n+1},$$

откуда, привлекая неравенство (34), получаем требуемое неравенство (33). Отправляясь далее от уравнения

$$u'u'' + t^\sigma u^n u' = 0$$

и интегрируя его от t до τ_k, где $t_k \leqslant t \leqslant \tau_k$, получаем

$$\frac{2t^\sigma}{n+1}(u_k^{n+1} - u^{n+1}) \leqslant u'^2(t) \leqslant \frac{2\tau_k^\sigma}{n+1}(u_k^{n+1} - u^{n+1}). \tag{35}$$

Отсюда, интегрируя от t_k до τ_k, находим

$$\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\frac{\tau_k^{(\sigma/2)+1} - t_k^{(\sigma/2)+1}}{(\sigma/2)+1} \leqslant \int_0^{u_k} \frac{du}{\sqrt{u_k^{n+1} - u^{n+1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\tau_k^{\sigma/2}(\tau_k - t_k) \tag{36}$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\frac{1-(t_k/\tau_k)^{(\sigma/2)+1}}{(\sigma/2)+1} \leqslant \frac{1}{\tau_k^{(\sigma/2)+1}\,u_k^{(n-1)/2}} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^{n+1}}}. \tag{37}$$

Так как

$$\tau_k^{\sigma+2} u_k^{n-1} = \left[\tau_k^{\frac{(\sigma+2)(n+1)}{n-1}} u_k^{n+1}\right]^{\frac{n-1}{n+1}} \geqslant c_1^{\frac{n-1}{n+1}} \tau_k^{\frac{2n+2\sigma+2}{n+1}}$$

и $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то правая часть неравенства (37) стремится к нулю при $k \to \infty$, а потому и $t_k/\tau_k \to 1$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим теперь случай $\sigma < 0$, $\sigma + 2 > 0$. Рассуждение, аналогичное проведенному выше, вместо неравенств (33) приводит к неравенствам

$$u_k \geqslant u_{k-1} \geqslant c_1 > 0.$$

Так как $(\sigma/2) + 1 > 0$, а $\tau_k \to \infty$, то из полученных выше результатов (35)—(37), соответственно измененных, чтобы охватить случай $\sigma < 0$, легко заключаем снова, что $t_k/\tau_k \to 1$.

13. Асимптотическое поведение колеблющихся решений уравнения $u'' + t^\sigma u^n = 0$. Посмотрим теперь, как можно применить предварительный результат $t_k/\tau_k \to 1$ для того, чтобы найти асимптотический вид u_k и $t_{k+1} - t_k$. Рассуждение одинаково во всех случаях, и мы проведем его подробно при $\sigma > 0$.

Из неравенств (36) мы видим в силу соотношения $t_k/\tau_k \to 1$, что

$$\sqrt{\frac{2}{n+1}}(\tau_k - t_k) \sim \frac{\int_0^1 dv/\sqrt{1-v^{n+1}}}{\tau_k^{\sigma/2}\,u_k^{(n-1)/2}}. \tag{38}$$

Вместо этой оценки длины всего интервала $\tau_k - t_k$, которую мы применим ниже, мы хотим сначала оценить $t - t_k$, где $t_k \leqslant t \leqslant \tau_k$. Так как из неравенств (35) имеем

$$\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\tau_k^{\sigma/2} \sim \frac{|u'|}{\sqrt{u_k^{n+1} - u^{n+1}}},$$

то интегрирование от t_k до $t=t_k+h$ дает равномерно по h при $0<h\leqslant\tau_k-t_k$

$$h\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\tau_k^{\sigma/2}\sim\int\limits_0^{|u|}\frac{du}{\sqrt{u_k^{n+1}-u^{n+1}}}. \tag{39}$$

Возвращаясь к уравнению $-d(u'^2)/dt=2t^\sigma u^n u'$, полагая $t=t_k+h$ и разлагая t^σ по формуле Тэйлора в окрестности точки t_k, получим

$$-\frac{d}{dt}(u'^2)=2[t_k^\sigma+h\sigma t_k^{\sigma-1}(1+\varepsilon)]\,u^n u',$$

где $\varepsilon=\varepsilon(t)\to 0$ равномерно по h при $t\to\infty$. Интегрируя теперь от t_k до τ_k, получим

$$u'(t_k)^2=\frac{2t_k^\sigma u_k^{n+1}}{n+1}+2\sigma t_k^{\sigma-1}(1+\varepsilon)\int\limits_{t_k}^{\tau_k}hu^n u'\,dt.$$

Применяя оценку (39) для величины h, выведем соотношение

$$u'(t_k)^2=\frac{2t_k^\sigma u_k^{n+1}}{n+1}+\frac{2\sigma t_k^{\sigma-1}(1+\varepsilon)}{\sqrt{2/(n+1)}\,\tau_k^{\sigma/2}}\int\limits_{t_k}^{\tau_k}u^n u'\left(\int\limits_0^{|u|}\frac{dw}{\sqrt{u_k^{n+1}-w^{n+1}}}\right)dt=$$

$$=\frac{2t_k^\sigma u_k^{n+1}}{n+1}+\frac{2\sigma t_k^{\sigma-1}(1+\varepsilon)}{\sqrt{2/(n+1)}\,\tau_k^{\sigma/2}}\,\frac{u_k^{(n+3)/2}}{n+1}K_1, \tag{40}$$

где

$$K_1=\int\limits_0^1\sqrt{1-v^{n+1}}\,dv=\frac{1}{n+1}\,\frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma[1/(n+1)]}{\Gamma[3/2+1/(n+1)]}.$$

Подсчет интеграла в (40) получается при помощи перехода от независимой переменной t к u с дальнейшей перестановкой порядка интегрирования и заменой $w=u_k v$.

Теперь имеем равенство

$$u'(t_k)^2=\frac{2t_k^\sigma u_k^{n+1}}{n+1}\left[1+\frac{\sigma(1+\varepsilon)K_1}{\sqrt{2/(n+1)}\,t_k\tau_k^{\sigma/2}u_k^{(n-1)/2}}\right]. \tag{41}$$

Аналогично, из рассмотрения второй половины предыдущей волны решения получаем

$$u'(t_k)^2=\frac{2}{n+1}t_k^\sigma u_{k-1}^{n+1}\left[1-\frac{\sigma(1+\varepsilon)K_1}{\sqrt{2/(n+1)}\,t_k\tau_{k-1}^{\sigma/2}u_{k-1}^{(n-1)/2}}\right]. \tag{42}$$

Возвращаясь к оценке (38) для $\tau_k - t_k$ и к аналогичной оценке для $t_k - \tau_{k-1}$, мы можем упростить выражения (41) и (42) следующим образом:

$$u'(t_k)^2 = \frac{2}{n+1} t_k^\sigma u_k^{n+1} \left[1 + \frac{\sigma(1+\varepsilon) K_1}{t_k K_2}(\tau_k - t_k)\right] =$$
$$= \frac{2}{n+1} t_k^\sigma u_{k-1}^{n-1} \left[1 - \frac{\sigma(1+\varepsilon) K_1}{t_k K_2}(t_k - \tau_{k-1})\right], \qquad (43)$$

где $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_k \to 0$ при $k \to \infty$, а

$$K_2 = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - v^{n+1}}} = \frac{1}{n+1} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma[1/(n+1)]}{\Gamma[1/2 + 1/(n+1)]} = \frac{n+3}{n+1} K_1.$$

Так как отношение $(\tau_k - t_k)/\tau_k$, как и $(t_k - \tau_{k-1})/t_k$ мало, то мы можем записать соотношения (43) в виде

$$u'(t_k)^2 = \frac{2t_k^\sigma u_k^{n+1}}{n+1}\left(1 + \frac{\tau_k - t_k}{t_k}\right)^{\sigma K_1(1+\varepsilon)/K_2} = \frac{2t_k^\sigma u_k^{n+1}}{n+1}\left(\frac{\tau_k}{t_k}\right)^{\sigma K_1(1+\varepsilon)/K_2}\ ^{1)}.$$

Аналогично,

$$u'(t_k)^2 = \frac{2t_k^\sigma u_{k-1}^{n+1}}{n+1}\left(\frac{\tau_{k-1}}{t_k}\right)^{\sigma K_1(1+\bar{\varepsilon})/K_2}.$$

Отсюда

$$1 = \left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)^{n+1}\left(\frac{\tau_k}{\tau_{k-1}}\right)^{\sigma K_1(1+\varepsilon_k)/K_2}\ ^{2)}.$$

Умножая последовательно эти соотношения друг на друга, получаем

$$u_k = u_1\, \tau_1^{\sigma K_2/[K_2(n+1)]}\, \tau_k^{-\sigma K_1/[K_2(n+1)]} \prod_{j=2}^{k}\left(\frac{\tau_{j-1}}{\tau_j}\right)^{\sigma K_1 \varepsilon_j/K_2(n+1)} =$$
$$= \tau_k^{-\sigma K_1/[K_2(n+1)]+\varepsilon},$$

---

[1]) В этой формуле

$$\varepsilon = \tilde{\tilde{\varepsilon}}_k = K_2 \ln\left[1 + \frac{\sigma(1+\tilde{\varepsilon}_k) K_1}{t_k K_2}(\tau_k - t_k)\right]\left[\sigma K_1 \ln\left(1 + \frac{\tau_k - t_k}{t_k}\right)\right]^{-1} - 1$$

и поэтому, как легко проверить, $\varepsilon \to 0$ при $k \to \infty$. — *Прим. перев.*

[2]) В этой формуле

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon \ln \tau_k - \bar{\varepsilon} \ln \tau_{k-1} + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \ln t_k}{\ln \tau_k - \ln \tau_{k-1}} =$$
$$= \left[\varepsilon \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{\tau_{k-1}}(1 + o(1)) + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\frac{t_k - \tau_{k-1}}{\tau_{k-1}}(1 + o(1))\right]\left[\frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{\tau_{k-1}}(1 + o(1))\right]^{-1}$$

стремится к нулю при $k \to \infty$. — *Прим. перев.*

где $\varepsilon \to 0$ при $k \to \infty$, в чем легко убедиться, выражая ε через $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$. Заменяя K_2 на его выражение через K_1, будем иметь

$$u_k = \tau_k^{-\sigma/(n+3)+\varepsilon}.$$

Отсюда получаем, вновь прибегая к выражению (38) и аналогичному выражению для $t_{k+1} - \tau_k$,

$$t_{k+1} - t_k = t_k^{-2\sigma/(n+3)+\varepsilon'}.$$

Дальнейшее применение описанных методов приводит к более точным результатам:

$$u_k \sim c_1 \tau_k^{-\sigma/(n+3)},$$

$$t_{k+1} - t_k \sim \frac{1}{c_1^{(n-1)/2}} \sqrt{\frac{2}{n+1} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma[1/(n+1)]}{\Gamma[(1/2)+1/(n+1)]}}\, \tau_k^{-2\sigma(n+3)},$$

где $c_1 > 0$ — постоянная.

Аналогичные результаты имеют место и для других интервалов изменения σ; мы предоставляем вывод их читателю в качестве упражнения.

14. Уравнение $u'' \pm e^{\lambda t} u^n = 0$. Так как методы, примененные нами в предыдущих пунктах, применимы также к уравнениям $u'' \pm e^{\lambda t} u^n = 0$, то мы сформулируем результаты и предложим провести доказательства в качестве упражнения.

Упражнения

Рассмотрим сначала уравнение $u'' + e^{\lambda t} u^n = 0$ и положим

$$w = -\frac{\lambda}{n-1}, \quad c = w^{2/(n-1)}.$$

1. Если $\lambda > 0$ и $n = p/q$, где p и q — оба нечетные, то все правильные решения являются колеблющимися.

2. Если $\lambda > 0$ и $n = p/q$, где p — четное, а q — нечетное, то правильные решения образуют одномерное многообразие и все они асимптотически равны $-ce^{wt}$.

3. Если n — иррациональное число или рациональное число с четным знаменателем, то правильных решений не существует.

4. Если $\lambda < 0$ и n — рациональное число, $n = p/q$, где p — нечетное, то правильные решения образуют двумерное многообразие с параметрами $a_1 = \lim\limits_{t\to\infty} u'$, $a_0 = \lim\limits_{t\to\infty} (u - a_1 t)$.

5. Показать, что в условиях упражнения 4

$$u = a_1 t + a_0 + \left(\int_t^\infty (t-s)\, e^{\lambda s} (a_1 s)^n\, ds\right)(1 + o(1)).$$

6. Какие ограничения надо наложить на параметры a_0 и a_1, чтобы решение существовало при $0 < t < \infty$?

7. Доказать, что если $\lambda < 0$ и $n = p/q$, где p — четное, а q — нечетное, то кроме описанных выше решений имеется одномерное многообразие правильных решений, асимптотически равных $-ce^{wt}$.

В следующих двух упражнениях рассматривается уравнение $u'' - e^{\lambda t} u^n = 0$.

8. Показать, что если $\lambda > 0$, то правильные решения образуют одномерное многообразие и асимптотически равны ce^{wt}.

9. Показать, что если $\lambda < 0$, то кроме указанного одномерного многообразия существует двумерное многообразие решений с параметрами a_0 и a_1, указанными выше. Если $a_1 \neq 0$, то имеем

$$u = a_1 t + a_0 + \left(\int_t^\infty (t - s) e^{\lambda s} (a_1 s)^n \, ds \right) (1 + o(1)).$$

Какие условия надо наложить на a_0 и a_1, чтобы решение существовало для всех $t > 0$?

ЛИТЕРАТУРА

По поводу того, как возникло уравнение Эмдена — Фаулера, см.

1. Emden R., Gaskugeln, Anwendungen der mechanischen Warmentheorie auf Kosmologie und meteorologische Probleme, Leipzig, 1907, Kap. XII.
2*. Eddington A. S., The internal constitution of the stars, Cambridge, 1926.

Данная глава представляет собой несколько упрощенное и объединенное изложение содержания статей:

3. Fowler R. H., The form near infinity of real, continuous solutions of certain differential equation of the second order, Quart. Journ. Math., **45** (1914), 289—350.
4. Fowler R. H., The solution of Emden's and similar differential equations Monthly Notices of the Royal Astr. Soc., **91** (1930), 63—91.
5. Fowler R. H., Further studies of Emden's and similar differential equations, Quart. Journ. Math., **2** (1931), 259—288.

По поводу геометрического исследования некоторых из указанных случаев см.

6. Hopf E., On Emden's differential equation, Monthly Notices of the Royal Astr. Soc., **91** (1931), 653—663.

Более поздняя статья по уравнению Эмдена:

7. Sansone G., Sulle soluzioni di Emden della equazione di Fowler, Rend. Sem. Mat. di Roma, ser. 5, **1** (1940), 163—176.

См. также статьи:

8*. Fairclouch N., Numerical integration of Emden's polytropic equation of index three, Monthly Not. of the Royal Astr. Soc., **91** (1930), 55—63.
9*. Milne E. A., Note on steady-state distributions which are given by solutions of Emden's differential equations, Monthly Not. of the Royal Astr. Soc., **91** (1931), 751—756.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

1. К стр. 32. Это утверждение, неоднократно подчеркиваемое и применяемое автором, является несколько более сложным, чем это кажется на первый взгляд. Если коэффициенты a_{ik} фиксированы, то и элементы матрицы T фиксированы, т. е. утверждение тривиально, так как постоянные величины всегда можно считать частным случаем многочленов. Стало быть, имеется в виду случай, когда коэффициенты a_{ik}, а с ними и характеристические числа λ_i — переменные. Но тогда упомянутому утверждению уже не так просто придать смысл, чтобы оно было верным, так как собственные векторы, находимые из системы уравнений (16), определяются различным образом в зависимости от того, где расположен отличный от нуля минор наивысшего порядка матрицы $A - \lambda_i I$.

Фактически в дальнейшем применяется следующее утверждение.

Пусть матрица A^0 имеет элементы a^0_{ik} и характеристические числа λ^0_i, причем ранг матриц $A^0 - \lambda^0_i I$ $(i = 1, \ldots, n)$ равен $n - 1$ [1]*. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$ и такая система n^2 многочленов $c_{ik}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ относительно всех своих $n^2 + n$ аргументов, что если дана матрица A с элементами a_{ik} и характеристическими числами λ_i, причем все $|a_{ik} - a^0_{ik}| < \varepsilon$ и $|\lambda_i - \lambda^0_i| < \varepsilon$, то матрица T с элементами c_{ik} приводит матрицу A к треугольному виду.*

Эта формулировка имеет уже точный смысл.

Докажем наше утверждение по индукции; при $n = 1$ оно очевидно. Пусть теперь у матрицы $n + 1$-го порядка $A^0 - \lambda^0_1 I$ минор, соответствующий ik-му элементу, отличен от нуля. Выберем в качестве компонентов вектора $c^{(1)}$ миноры матрицы $A - \lambda_1 I$, соответствующие i-й строке и взятые с чередующимися знаками, а в качестве компонентов векторов $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ — любые постоянные числа (например, равные 0 и 1) такие, чтобы при $a_{ik} = a^0_{ik}$, $\lambda_1 = \lambda^0_1$ матрица T_1 со столбцами $c^{(1)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ была невырожденной. Тогда определитель $|T_1|$ матрицы T_1 представляет собой многочлен относительно всех a_{ik} и λ_1, отличный от нуля при $a_{ik} = a^0_{ik}$, $\lambda_1 = \lambda^0_1$. Значит, элементы матрицы $T_1^{-1} A T_1$ представляют собой частные от деления некоторых многочленов относительно a_{ik} и λ_1 на $|T_1|$; стало быть, эти элементы определены, во всяком случае, при $|a_{ik} - a^0_{ik}| < \varepsilon_1$, $|\lambda_1 - \lambda^0_1| < \varepsilon_1$, если $\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало. Согласно построению, при любых таких a_{ik} и λ_1 (если

---

[1]) Так как ранг матрицы не меняется при умножении ее на невырожденную матрицу, то это условие можно сформулировать так: каждому характеристическому числу матрицы A^0 соответствует лишь один элементарный делитель; это условие, во всяком случае, выполнено, если все характеристические числа λ^0_i различны.

только λ_1 является корнем уравнения $|A-\lambda I|=0$) матрица $T_1^{-1}AT_1$ имеет вид (21), где все элементы b'_{ik} представляют собой упомянутые частные. При $a_{ik}=a_{ik}^0$, $\lambda_1=\lambda_1^0$ матрицы $T_1^{-1}AT_1-\lambda_i^0 I=T_1^{-1}(A-\lambda_i^0 I)T_1 (i=2, \ldots, n+1)$ имеют ранг n. Значит, при этих же значениях a_{ik} и λ_1 ранг матриц $B_n-\lambda_i^0 I$ $(i=2, \ldots, n+1)$ равен $n-1$. По предположению индукции существует $\varepsilon_2>0$ и матрица T_n, элементами которой служат многочлены относительно $b'_{22}, b'_{23}, \ldots, b'_{n+1,\, n+1}, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, такая, что если дана матрица B с элементами $b'_{22}, b'_{23}, \ldots, b'_{n+1,\, n+1}$ и характеристическими числами $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, причем все $|b'_{ik}-b'^0_{ik}|<\varepsilon_2$, $|\lambda_i-\lambda_i^0|<\varepsilon_2$, то матрица T_n приводит B к треугольному виду. Но если $\varepsilon>0$ $(\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \varepsilon\leqslant\varepsilon_2)$ достаточно мало и все $|a_{ik}-a_{ik}^0|<\varepsilon$, $|\lambda_i-\lambda_i^0|<\varepsilon$, то будут также выполнены неравенства $|b'_{ik}-b'^0_{ik}|<\varepsilon_2$, а матрица B_n будет иметь характеристические числа $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ (так как матрица A, а потому и $T_1^{-1}AT_1$ имеет характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$). Поэтому матрица T_1T_{n+1} приводит A к треугольному виду. Так как все b'_{ij} представляют собой указанные выше частные, то и элементы матрицы T_1T_{n+1} являются частными от деления некоторых многочленов относительно a_{ik} и λ_i на некоторую натуральную степень $|T_1|$. Но при умножении матрицы на отличный от нуля скаляр она не теряет свойства приводить матрицу A к треугольному виду. Значит, для достаточно большого натурального r матрица $|T_1|^r T_1T_{n+1}$ и будет искомой.

Если при некоторых i ранг матрицы $A^0-\lambda_i^0 I$ меньше $n-1$, то приведенное утверждение, вообще говоря, становится неверным. Так, возьмем $A^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\lambda_1^0=\lambda_2^0=1$. Пусть

$$A(t)=\begin{pmatrix} e^{1/t}\cos^2 t+\sin^2 t, & \cos t\sin t\,(1-e^{1/t}) \\ \cos t\sin t\,(1-e^{1/t}), & e^{1/t}\sin^2 t+\cos^2 t \end{pmatrix} (t>0).$$

Тогда $A(t)\to A^0$ при $t\to\infty$. Если бы упомянутая матрица T с элементами $c_{ik}(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \lambda_1, \lambda_2)$ существовала, то при $t\to\infty$ эта матрица имела бы определенный предел T^0, причем $|T^0|\neq 0$. Однако c_{11} и c_{21} при любом $t>0$ удовлетворяют системе уравнений

$$c_{11}(e^{1/t}\cos^2 t+\sin^2 t-\lambda_1)+c_{21}\cos t\sin t\,(1-e^{1/t})=0,$$
$$c_{11}\cos t\sin t\,(1-e^{1/t})+c_{21}(e^{1/t}\sin^2 t+\cos^2 t-\lambda_1)=0,$$

где число λ_1, найденное из характеристического уравнения, равно 1 или $e^{1/t}$. Поэтому может быть либо $c_{11}=\alpha\sin t$, $c_{21}=\alpha\cos t$, либо $c_{11}=-\alpha\cos t$, $c_{21}=-\alpha\sin t$, где α $(\alpha\neq 0)$ может зависеть от t. Но тогда c_{11}/c_{21} равно или $\operatorname{tg} t$, или $-\operatorname{ctg} t$ (при $t\neq k\pi/2$), и, следовательно, для того чтобы c_{11} и c_{21} имели пределы при $t\to\infty$, необходимо выполнение соотношений $c_{11}\to 0$ и $c_{21}\to 0$, т. е. $\alpha\to 0$ при $t\to\infty$. Но тогда матрица T^0 должна иметь первый столбец нулевым, что невозможно, так как $|T^0|\neq 0$.

Поэтому в общем случае изменение элементов a_{ik} должно быть не произвольным, а подчинено некоторым условиям. Такие условия в связи с приведением систем дифференциальных уравнений с частными производными к каноническому виду рассмотрены, например, в книге И. Г. Петровского „Лекции об уравнениях с частными производными“ (изд. 2, М., 1953, § 7, в особенности стр. 76—78). Забвение этих условий может привести к ошибкам, которые, как будет указано ниже, имеются и в данной книге. Вообще

же зависимость „приводящей“ матрицы T от „приводимой“ матрицы A изучена в настоящее время недостаточно.

Это замечание относится и к приведенному на стр. 32 упражнению 1 — и здесь элементы матрицы T можно выбрать в виде многочленов от элементов и характеристических чисел матрицы A лишь при дополнительном предположении, что ранг матрицы $A^0 - \lambda_i^0 I$ $(i = k+1, \ldots, n)$ равен $n-1$.

Необходимо отметить далее, что часто оказывается полезным следующий вариант теоремы 6:

Если матрица A вещественная, то существует вещественная невырожденная матрица T, для которой

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ & & & \mu_1 & \nu_1 & & & \\ & & & -\nu_1 & \mu_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & 0 & & & \mu_l & \nu_l \\ & & & & & & -\nu_l & \mu_l \end{pmatrix},$$

причем все элементы, стоящие ниже выписанных, равны нулю. Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все вещественные характеристические числа матрицы A, а $\mu_1 \pm i\nu_1, \ldots, \mu_l \pm i\nu_l$ — все пары мнимых сопряженных характеристических чисел этой матрицы.

Доказательство можно провести так же, как для теоремы 6, по индукции. Для этого надо заметить, что если λ_1 вещественно, то матрицу T_1 можно считать вещественной и индукция проходит сразу. Если же $\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1$ ($\nu_1 \neq 0$, μ_1 и ν_1 вещественные) и λ_1 отвечает собственный вектор $c^{(1)} = d^{(1)} + ie^{(1)}$ (векторы $d^{(1)}$ и $e^{(1)}$ — вещественные), то, отделяя в равенстве $Ac^{(1)} = \lambda_1 c^{(1)}$ вещественную часть от мнимой, получаем, что $Ad^{(1)} = \mu_1 d^{(1)} - \nu_1 e^{(1)}$, $Ae^{(1)} = \nu_1 d^{(1)} + \mu_1 e^{(1)}$. Векторы $d^{(1)}$ и $e^{(1)}$ линейно независимы, так как из равенства $\alpha d^{(1)} + \beta e^{(1)} = 0$ следовало бы, что $(\alpha\mu_1 + \beta\nu_1) d^{(1)} + (-\alpha\nu_1 + \beta\mu_1) e^{(1)} = 0$; но так как $d^{(1)}$ и $e^{(1)}$ не равны нулю одновременно, то из последних двух равенств вытекает, что

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha\mu_1 + \beta\nu_1 & -\alpha\nu_1 + \beta\mu_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, $(\alpha^2 + \beta^2)\nu_1 = 0$, откуда видно, что поскольку $\nu_1 \neq 0$, то $\alpha = \beta = 0$. Пусть $n-1$ (вещественных) векторов $a^{(1)}, \ldots, a^{(n-1)}$ выбраны так, что матрица T_1 со столбцами $d^{(1)}, e^{(1)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(n-1)}$ — невырожденная. Тогда

$$T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 & b'_{1,3} & \cdots & b'_{1,n+1} \\ -\nu_1 & \mu_1 & b'_{2,3} & \cdots & b'_{2,n+1} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B_{n-1} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

и далее индукция проходит аналогично тому, как при доказательстве теоремы 6, причем после построения T_{n-1} надо положить

$$T_{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & T_{n-1} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

2. К стр. 48. Теорему 3 можно считать доказанной только в дополнительном предположении, что ранг каждой из матриц $A-\lambda_i I$ ($i=1,\dots,n$; λ_i — характеристические числа матрицы A) равен $n-1$ и, кроме того, что при достаточно больших t характеристические числа матрицы $A+B(t)$ можно занумеровать так, чтобы каждое из этих чисел $\lambda_i(t)$ ($i=1,\dots,n$) было кусочно гладкой функцией t, причем $\int^{\infty}|d\lambda_i/dt|\,dt<\infty$. Оба эти условия, во всяком случае, выполнены, если все характеристические числа матрицы A различны. Оба условия неявно применяются уже в самом начале доказательства теоремы: первое — когда говорится о структуре элементов матрицы T, а второе — когда утверждается конечность интеграла $\int^{\infty}\|dT/dt\|\,dt$.

Чтобы избавиться от этих ограничений, необходимо привлечение новых идей, которые не излагаются в книге. Это относится и к упражнению 1 (стр. 52).

3. К стр. 68. Так как в формулах (44) присутствуют несобственные интегралы, то на законности предельного перехода при $m\to\infty$ надо остановиться несколько более подробно. Учитывая оценку $|y_i-y_i^{(m)}|\leqslant 2^{-m}e^{H_k(t)}$, при $i\in I$ имеем

$$\Big|\int_t^{\infty}\exp\Big(\int_{t_1}^{t}\lambda_i(s)\,ds\Big)\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(t_1)\,y_j(t_1)\,dt_1-$$

$$-\int_t^{\infty}\exp\Big(\int_{t_1}^{t}\lambda_i(s)\,ds\Big)\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(t_1)\,y_j^{(m)}(t_1)\,dt_1\Big|\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-m}e^{H_k(t)}\int_t^{\infty}e^{H_i(t)-H_k(t)+H_k(t_1)-H_i(t_1)}\,\|R(t_1)\|\,dt_1.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $m\to\infty$, следовательно, наш предельный переход законен.

Далее, надо отметить, что все функции y_j непрерывны и

$$\int_t^{\infty}\exp\Big(\int_{t_1}^{t}\lambda_i(s)\,ds\Big)\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(t_1)\,y_j(t_1)\,dt_1=$$

$$=\exp\Big(\int_{t_0}^{t}\lambda_i(s)\,ds\Big)\cdot\int_t^{\infty}\exp\Big(\int_{t_1}^{t_0}\lambda_i(s)\,ds\Big)\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(t_1)\,y_j(t_1)\,dt_1;$$

поэтому формальное дифференцирование обеих частей равенства (42) законно (для равенства (43) это видно непосредственно). Отсюда получаем, что функции $y_1, \ldots, y_n$ образуют решение системы (41).

4. К стр. 78. Мы проведем вывод формулы (57) в одном важном частном случае, который, между прочим, охватывает все случаи применения теоремы 10 в данной книге. При этом нам понадобятся следующие два асимптотических разложения.

1) Если a и b комплексные числа, причем $\operatorname{Re} a > 0$ или одновременно $\operatorname{Re} a = 0$, $a \neq 0$ и $\operatorname{Re} b > 0$, то

$$\int_t^\infty e^{-a(t_1-t)}\left(\frac{t_1}{t}\right)^{-b} dt_1 \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{b(b+1)\ldots(b+m-1)}{a^{m+1}} t^{-m}. \qquad \text{(A)}$$

Действительно, интегрируя по частям, получаем, что интеграл в левой части этой формулы равен

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{at}\int_t^\infty e^{-a(t_1-t)}\left(\frac{t_1}{t}\right)^{-(b+1)} dt_1 = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2 t} +$$

$$+\frac{b(b+1)}{a^2 t^2}\int_t^\infty e^{-a(t_1-t)}\left(\frac{t_1}{t}\right)^{-(b+2)} dt_1 = \ldots = \sum_{m=0}^{p} (-1)^m \frac{b(b+1)\ldots(b+m-1)}{a^{m+1} t^m} +$$

$$+(-1)^{p+1}\frac{b(b+1)\ldots(b+p)}{a^{p+1} t^{p+1}}\int_t^\infty e^{-a(t_1-t)}\left(\frac{t_1}{t}\right)^{-(b+p+1)} dt_1.$$

Однако при $p > -\operatorname{Re} b$ имеем

$$\left|\int_t^\infty e^{-a(t_1-t)}\left(\frac{t_1}{t}\right)^{-(b+p+1)} dt_1\right| \leqslant \int_t^\infty \left(\frac{t_1}{t}\right)^{-(\operatorname{Re} b+p+1)} dt_1 = \frac{}{\operatorname{Re} b + p}.$$

Значит, если для любого целого $M \geqslant 0$ взять $p > -\operatorname{Re} b$, $p > M$, то получим

$$\int_t^\infty e^{-a(t_1-t)}\left(\frac{t_1}{t}\right)^{-b} dt_1 = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{b(b+1)\ldots(b+m-1)}{a^{m+1}} t^{-m} + O(t^{-M-1})$$

(что и доказывает справедливость разложения (A)).

2) Если a и b — комплексные числа, причем $\operatorname{Re} a < 0$, и если $t_0 > 0$, то

$$\int_{t_0}^{t} e^{a(t-t_1)}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{b} dt_1 \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{b(b+1)\ldots(b+m-1)}{a^{m+1}} t^{-m}. \qquad \text{(Б)}$$

Действительно, данный интеграл равен

$$\sum_{m=0}^{p} (-1)^{m+1} \frac{b(b+1)\ldots(b+m-1)}{a^{m+1} t^m}\left[1 - e^{a(t-t_0)}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{b+m}\right] +$$

$$+(-1)^{p+1}\frac{b(b+1)\ldots(b+p)}{a^{p+1} t^{p+1}}\int^{t} e^{a(t-t_1)}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{b+p+1} dt_1.$$

Однако при $p > -\operatorname{Re} b$ имеем

$$\int_{t_0}^{t} \left| e^{a(t-t_1)} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{b+p+1} \right| dt_1 = \int_{t_0}^{t/2} + \int_{t/2}^{t} \leqslant \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\operatorname{Re} b+p+1} \int_{t_0}^{t/2} e^{\operatorname{Re} a(t-t_1)} dt_1 +$$

$$+ \int_{t/2}^{t} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\operatorname{Re} b+p+1} dt_1 = o(1) + O(t) = O(t),$$

откуда уже нетрудно получить разложение (Б).

Возвращаясь к выводу формулы (57), предположим, что для любого $i \neq k$ либо $\operatorname{Re} \lambda_i \neq \operatorname{Re} \lambda_k$, либо же одновременно $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_k$ и $\lim\limits_{t \to \infty} t [\operatorname{Re} (\lambda_i(t) - \lambda_k(t))] \geqslant 0$, где $\lambda_i(t)$ — характеристическое число матрицы $A_0 + A_1 t^{-1}$, стремящееся к λ_i при $t \to \infty$.

Вспомнив вывод уравнений (42—43), отметим прежде всего, что все функции $\lambda_i(t)$, а следовательно, все элементы матрицы $S(t)$ (являющиеся многочленами от функций $\lambda_i(t)$), а с ними и все элементы матриц $S^{-1}(t)$ и dS/dt представляют собой аналитические функции от $1/t$. Отсюда по определению матрицы $R(t)$ заключаем, что все функции $r_{ij}(t)$ обладают асимптотическими разложениями, причем поскольку $\int^{\infty} |r_{ij}(t)| dt < \infty$, то в этих разложениях отсутствует свободный член и член с t^{-1}. В частности, отсюда следует, что $\|R(t)\| \leqslant M_1/t^2$ при $t \geqslant t_0 > 0$.

Совершим в системе уравнений (42—43) замену переменных

$$y_i = v_i \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_k(t_1)\, dt_1.$$

Так как функция

$$e^{-\lambda_k t} t^{-\mu_k} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(t_1)\, dt_1 \right)$$

(ср. прим. перев. на стр. 78) разлагается в ряд по степеням t^{-1} с отличным от нуля свободным членом, то достаточно проверить, что все v_i обладают асимптотическим разложением, причем по крайней мере в одном из этих разложений присутствует свободный член. Тогда аналогичным разложением обладают функции $e^{-\lambda_k t} t^{-\mu_k} y_i$. Но $e^{-\lambda_k t} t^{-\mu_k} z = S^{-1}(t) e^{-\lambda_k t} t^{-\mu_k} y$, и потому асимптотическое разложение для z по формуле (57) вытекает из разложения матрицы $S^{-1}(t)$ по степеням t^{-1}, причем $|S^{-1}(t)| \to |T^{-1}| \neq 0$.

Исходя из системы (42)—(43), проверяем, что функции v_i удовлетворяют системе уравнений

$$v_i(t) = \delta_{ik} - \int_{t}^{\infty} \exp\left(\int_{t_1}^{t} (\lambda_i(s) - \lambda_k(s))\, ds \right) \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t_1)\, v_j(t_1)\, dt_1 \equiv$$

$$\equiv \delta_{ik} + L_i(v) \qquad (i \in \mathrm{I}),$$

$$v_i(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_1}^{t} (\lambda_i(s) - \lambda_k(s))\, ds \right) \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t_1)\, v_j(t_1)\, dt_1 \equiv$$

$$\equiv L_i(v) \qquad (i \in \mathrm{II}).$$

Здесь $L_i(u)$ — оператор, определенный во всяком случае для непрерывных ограниченных векторных функций $u(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$ (это следует из неравенств (38)—(39) и оценки $\|R(t)\|$). Значения этого оператора являются скалярными функциями, непрерывными и ограниченными на участке $t_0 \leqslant t < \infty$. Отметим, что в силу теоремы 8 функция $v(t)$ ограничена (и, конечно, непрерывна) на участке (t_0, ∞).

Докажем теперь, что если функция $u(t)$ обладает асимптотическим разложением

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m t^{-m},$$

причем $u_0 = u_1 = \ldots = u_{q-1} = 0$ $(q \geqslant 0)$, то и функции $L_i(u)$ обладают асимптотическими разложениями

$$L_i(u) \sim \sum_{m=0}^{\infty} l_{i,m} t^{-m}, \tag{В}$$

причем $l_{i,0} = l_{i,1} = \ldots = l_{i,q} = 0$. Действительно, из разложимости функций $r_{ij}(t)$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t)\, u_j(t) \sim \sum_{m=q+2}^{\infty} \alpha_{i,m} t^{-m}.$$

Отсюда получаем разложение

$$\exp\left(\int_{t_1}^{t} (\lambda_i(s) - \lambda_k(s))\, ds\right) \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(t_1)\, u_j(t_1) \sim$$

$$\sim P_i\left(\frac{1}{t}\right) e^{-(\lambda_i - \lambda_k)(t_1 - t)} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{-(\mu_i - \mu_k)} \sum_{m=q+2}^{\infty} \beta_{i,m} t_1^{-m},$$

где $P_i(1/t)$ — аналитическая функция от $1/t$.

Пусть $i \in \mathrm{I}$. Тогда для любого $p \geqslant q+2$ получаем разложение

$$L_i(u) = P_i\left(\frac{1}{t}\right)\Bigg[\sum_{m=q+2}^{p} \frac{\beta_{i,m}}{t^m} \int_t^{\infty} e^{-(\lambda_i - \lambda_k)(t_1 - t)} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{-[(\mu_i - \mu_k) + m]} dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{t^{p+1}} O\left(\int_t^{\infty} \left| e^{-(\lambda_i - \lambda_k)(t_1 - t)} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{-(\mu_i - \mu_k) - (p+1)} \right| dt_1\right)\Bigg]. \tag{Г}$$

При этом, так как $i \in \mathrm{I}$, то либо $\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_k) > 0$, либо одновременно $\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ и $\operatorname{Re}(\mu_i - \mu_k) \geqslant 0$. В силу полученного выше асимптотического разложения (А) интегралы, стоящие под знаком суммы, при $i \neq k$ обладают асимптотическим разложением; если же $i = k$, то указанный интеграл равен просто $t/(m-1)$. Оценим теперь интеграл, стоящий под знаком O. Имеем

$$\int_t^{\infty} \left| e^{-(\lambda_i - \lambda_k)(t_1 - t)} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{-(\mu_i - \mu_k) - (p+1)} \right| dt_1 \leqslant \int_t^{\infty} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{-\operatorname{Re}(\mu_i - \mu_k) - (p+1)} dt_1 =$$

$$= \frac{t}{\operatorname{Re}(\mu_i - \mu_k) + p}.$$

Значит, если для любого $M \geqslant q+2$ выбрать $p > M$, то при $i \neq k$ выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (Г), можно записать в виде

$$\sum_{m=q+2}^{M}\left(\sum_{j=0}^{m-q-2}\beta_{i,m-j}(-1)^j\frac{(\mu_i-\mu_k+m-j)\ldots(\mu_i-\mu_k+m-1)}{(\lambda_i-\lambda_k)^{j+1}}\right)t^{-m}+$$
$$+O(t^{-M-1}).$$

Если же $i=k$, то эта квадратная скобка приобретает вид

$$\sum_{m=q+1}^{M}\frac{\beta_{i,m+1}}{m}t^{-m}+O(t^{-M-1}).$$

Отсюда и следует разложимость $L_i(u)$ в асимптотический ряд вида (В), если $i \in \mathrm{I}$.

Если же $i \in \mathrm{II}$, то аналогично получаем

$$L_i(u)=P_i\left(\frac{1}{t}\right)\left[\sum_{m=q+2}^{p}\frac{\beta_{i,m}}{t^m}\int_{t_0}^{t}e^{(\lambda_i-\lambda_k)(t-t_1)}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\mu_i-\mu_k+m}dt_1+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{t^{p+1}}O\left(\int_{t_0}^{t}\left|e^{(\lambda_i-\lambda_k)(t-t_1)}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\mu_i-\mu_k+p+1}\right|dt_1\right)\right]. \qquad (\text{Д})$$

При этом, согласно условию, $\operatorname{Re}(\lambda_i-\lambda_k)=-\alpha<0$ (ср. прим. перев. на стр. 77). Далее, обозначив $\operatorname{Re}(\mu_i-\mu_k)+p+1=\beta$ ($\beta>0$ при достаточно большом p), имеем

$$\int_{t_0}^{t}\left|e^{(\lambda_i-\lambda_k)(t-t_1)}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\mu_i-\mu_k+p+1}\right|dt_1=\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-t_1)}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\beta}dt_1=$$
$$=\int_{t_0}^{t-\sqrt{t}}+\int_{t-\sqrt{t}}^{t}\leqslant\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\beta}\frac{e^{-\alpha\sqrt{t}}-e^{-\alpha(t-t_0)}}{\alpha}+\left(\frac{t}{t-\sqrt{t}}\right)^{\beta}\sqrt{t}=O(\sqrt{t}),$$

откуда уже нетрудно получить разложение (В).

Обозначим теперь

$$v_i^{(0)}=\delta_{ik},\quad v^{(0)}=\begin{pmatrix}v_1^{(0)}\\ \vdots\\ v_n^{(0)}\end{pmatrix},\quad L(v)=\begin{pmatrix}L_1(v)\\ \vdots\\ L_n(v)\end{pmatrix},\quad L^{(0)}(u)=u,$$
$$L^{(m+1)}(u)=L(L^{(m)}(u))\quad(m=0,1,\ldots).$$

Тогда систему интегральных уравнений для функций $v_i(t)$ можно записать в виде $v=v^{(0)}+L(v)$, откуда для любого целого $p \geqslant 0$ имеем

$$v=\sum_{m=0}^{p}L^{(m)}(v^{(0)})+L^{(p+1)}(v). \qquad (\text{Е})$$

Согласно только что доказанному, каждая векторная функция $L^{(m)}(v^{(0)})$ обладает асимптотическим разложением, начинающимся с члена, содержа-

щего t^{-m}. Далее, нетрудно проверить, что если $\| u(t) \| \leqslant Kt^{-\alpha}$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$, то при $i \in \mathrm{I}$ имеет место оценка

$$|L_i(u)| \leqslant \int_t^\infty \left| \exp\left(\int_{t_1}^t (\lambda_i(s) - \lambda_k(s))\, ds \right) \right| \| R(t_1) \| \, \| u(t_1) \| \, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^\infty e^c \frac{M_1}{t_1^2} \frac{K}{t_1^\alpha} \, dt_1 = \frac{M_1 K e^c}{\alpha + 1} t^{-(\alpha+1)}$$

[см. формулу (38)]; если же $i \in \mathrm{II}$, то, учитывая, что $\operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) \leqslant -2\gamma < 0$ при $t \geqslant \bar{t}$ и достаточно большом $\bar{t}$, получаем для достаточно больших t оценку

$$|L_i(u)| \leqslant M_1 K \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_1}^t \operatorname{Re}(\lambda_i(s) - \lambda_k(s))\, ds \right) t_1^{-(\alpha+2)} \, dt_1 =$$

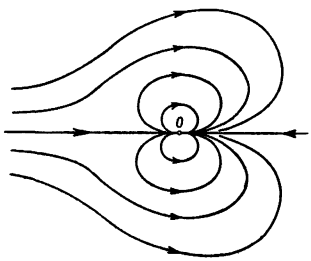
$$= M_1 K \left[\int_{t_0}^{t/2} \exp\left(\int_{t_1}^{\max(t_1, \bar{t})} + \int_{\max(t_1, \bar{t})}^t \right) + \int_{t/2}^t \right] \leqslant M_1 K \left[\int_{t_0}^{t/2} \exp\left(\int_{t_0}^{\bar{t}} |\operatorname{Re}(\lambda_i(s) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \lambda_k(s))| \, ds \right) e^{-\gamma t} t_0^{-(\alpha+2)} \, dt_1 + \int_{t/2}^t e^c t_1^{-(\alpha+2)} \, dt_1 \right] = O(t^{-\alpha-1}).$$

Отсюда для некоторого $\bar{K}$ при $t_0 \leqslant t < \infty$ получаем неравенство $\| L(u) \| \leqslant \bar{K} t^{-(\alpha+1)}$.

Так как $\| v \| \leqslant K_0$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$, то по доказанному $\| L^{(p+1)}(v) \| \leqslant K_p t^{-(p+1)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Отсюда и из равенства (E) вытекает существование асимптотического разложения для функции v, и формулу (57) можно считать доказанной.

Этим, в частности, доказана теорема 10 в предположении, что все $\operatorname{Re} \lambda_i$ различны; при этом можно допустить, что $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_k$ при некоторых $i \neq k$, но в таком случае дополнительно предполагаем, что $\lim\limits_{t \to \infty} t \operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) = 0$.



В заключение отметим, что эту теорему можно применить к уравнению (61) из упражнения 2, если коэффициент g_1 в формуле (62) вещественен.

5. К стр. 95. Интересно отметить, что *из стремления всех решений к стационарному решению вовсе еще не следует устойчивость этого последнего в указанном выше смысле, если* $n \geqslant 2$. Действительно, будем изображать решения $(z_1(t), z_2(t))$ в виде линий на плоскости z_1, z_2 (так называемой *фазовой плоскости*). Тогда совокупность этих линий может иметь вид, указанный на фигуре (через O здесь обозначено начало координат). Для этого примера стационарное решение $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ неустойчиво, однако все решения задачи к нему стремятся.

6. К стр. 108. Доказательство теоремы 3 неполно, так как надо еще проверить, что вещественное значение $z(0)$ можно выбрать так, чтобы имело

место неравенство (18). Эту трудность можно обойти, если воспользоваться вещественным преобразованием матрицы A, о котором говорится в примечании 1. После этого преобразования надо воспользоваться тем, что если переменной x_i отвечает вещественное характеристическое число λ_i, то $dx_i^2/dt = 2\lambda_i x_i^2 + \ldots$, а если переменным x_j и x_{j+1} отвечает квадратик $\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$, то $d(x_j^2 + x_{j+1}^2)/dt = 2\mu(x_j^2 + x_{j+1}^2) + \ldots$, причем невыписанные члены не превосходят $\varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Дальнейшие рассуждения проходят совершенно так же, как в приведенном доказательстве теоремы 3.

Отметим для дальнейшего (гл. VII) факт, который также вытекает из этого доказательства. Мы будем говорить, что имеет место *полная неустойчивость*, если вещественные части всех характеристических чисел положительны. Тогда:

В условиях теоремы 3 *в случае полной неустойчивости существует такое число* $h > 0$, *что при* $0 < \| z(0) \| < h$ *неравенство* $\| z(t) \| < h$ *не может удовлетворяться для всех* $t > 0$.

7. К стр. 109. Чтобы получить это разложение, надо более подробно рассмотреть решение уравнения $dy/dt = Ay$. Для этого приведем матрицу A к виду, указанному в конце примечания 1, после чего, перейдя от векторно-матричного уравнения $dx/dt = T^{-1}ATx$ к системе уравнений, мы легко проинтегрируем уравнения этой системы последовательно, начиная с последнего; при этом пары уравнений, отвечающие одному квадратику $\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$, надо интегрировать совместно. Частные решения неоднородных уравнений и пар уравнений можно искать хотя бы при помощи известного метода неопределенных коэффициентов. Полагая затем все произвольные постоянные, кроме одной, равными нулю, мы получим систему из n векторных решений уравнения $dx/dt = T^{-1}ATx$ (очевидно, линейно независимую, так как из этих решений образуется общее решение). Перейдя по формуле $y = Tx$ к решениям уравнения $dy/dt = Ay$, получим n линейно независимых решений этого уравнения. Отсюда видим, что каждому вещественному характеристическому числу λ_j кратности k матрицы A отвечает k частных решений уравнения $dy/dt = Ay$ вида $c_{j,p}(t)e^{\lambda_j t}$ $(p = 1, \ldots, k)$, где $c_{j,p}(t)$ — вектор, элементами которого служат многочлены относительно t степени не выше $k-1$. Каждой же паре комплексных характеристических чисел $\mu_j + i\nu_j$ кратности k отвечает $2k$ частных решений вида $[c_{j,p}(t)\cos\nu_j t + d_{j,p}(t)\sin\nu_j t]e^{\mu_j t}$ $(p = 1, \ldots, k)$, где элементами векторов $c_{j,p}(t)$ и $d_{j,p}(t)$ также служат многочлены степени не выше $k-1$. Полученные n векторных решений линейно независимы и могут быть приняты за столбцы матрицы Y. После этого разложение Y на $Y_1 + Y_2$ очевидно.

8. К стр. 119. Напомним необходимые факты из теории вещественных алгебраических кривых[1]). Пусть многочлен $P(u, t) \not\equiv 0$ таков, что на кривой $P = 0$ имеются точки с как угодно большими значениями t. Тогда для некоторого t_P совокупность точек $P = 0$, $t \geqslant t_P$ представляет собой конечное число попарно непересекающихся кривых („ветвей"), уравнения которых задаются при помощи алгебраических функций $u = \varphi_{P,i}(t)$ $(t_P \leqslant t < \infty;$ $i = 1, \ldots, k)$. Если для какого-либо многочлена $Q(u, t) \not\equiv 0$ одна из функций

[1]) См., например, Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948.

$\varphi_{Q,\,j}(t)$ совпадает с какой-либо из функций $\varphi_{P,\,i}(t)$ при как угодно больших значениях t, то для общего наибольшего множителя $R(u, t)$ многочленов P и Q будет тождественно $\varphi_{P,\,i}(t) \equiv \varphi_{Q,\,j}(t) \equiv \varphi_{R,\,l}(t)$ для некоторого l и всех достаточно больших t. Отсюда легко установить, что любая ветвь алгебраической функции $u = \varphi(t)$ $(t \geqslant t_0)$ удовлетворяет уравнению $\Phi(u, t) = 0$ $(t \geqslant t_1)$, где $\Phi \not\equiv 0$ — многочлен наименьшей возможной степени (по u), причем если многочлен $P(\varphi(t), t) \equiv 0$ при $t \geqslant t_2$, то P делится на Φ. Если $\Phi(u, t)$ не имеет вида $u + c$, то $\varphi'(t) \neq 0$ $(t \geqslant t_3)$, так как в противном случае многочлен Φ'_t должен делиться на Φ, что возможно только если $\partial\Phi/\partial t \equiv 0$, откуда $\varphi(t) = \mathrm{const}$. Далее, из сказанного ясно, что *для двух различных ветвей* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *каких-либо алгебраических функций* (а ветви не различаются, если $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ для всех достаточно больших t) *всегда* $\varphi(t) \neq \psi(t)$ *при всех достаточно больших* t.

Отметим, наконец, что для достаточно больших значений t и для некоторого натурального числа p и некоторого целого числа m ветвь $\varphi(t) \not\equiv 0$ представима в виде суммы так называемого ряда Пюизо

$$\varphi(t) = t^{-\frac{m}{p}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{-\frac{j}{p}} \quad (t \geqslant t_0,\ a_0 \neq 0).$$

Ясно, что над этим рядом можно производить обычные действия, допускаемые в теории степенных рядов.

9. К стр. 119. Отметим следующий простой, но замечательный факт:

Лемма 3′. *Если решение* $u(t)$ *уравнения* (2) *совпадает с ветвью* $\varphi(t)$ *алгебраической функции при как угодно больших* t, *то* $u(t) \equiv \varphi(t)$ *при всех достаточно больших* t.

Доказательство. Проверим, что $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (2); тогда наше утверждение будет следовать из теоремы единственности решения. Для этого подставим в обе части уравнения (2) вместо u разложение $\varphi(t)$ по степеням $t^{-1/p}$ (см. примечание 8), предварительно заменив в правой части (2) t на $(t^{-1/p})^{-p}$. Тогда в обеих частях получатся суммы рядов вида $s^{m_i} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,i} s^j$ $(i = 1, 2;\ s = t^{-1/p})$. Если эти ряды не совпадают полностью, то для достаточно больших значений t одна из сумм будет больше другой (это сразу следует из того факта, что сумма ряда при $t \to \infty$ асимптотически равна первому отличному от нуля члену). Пусть, для определенности, $\varphi'(t) > P(\varphi, t)/Q(\varphi, t)$ $(t \geqslant t_1)$. Тогда если $u(t) = \varphi(t)$ при некотором $t \geqslant t_1$, то

$$\varphi'(t) > \frac{P(\varphi, t)}{Q(\varphi, t)} = \frac{P(u, t)}{Q(u, t)} = u'(t),$$

откуда при $t \geqslant t_1$ совпадение $u(t)$ с $\varphi(t)$ может происходить не более одного раза, что противоречит условию леммы. Итак, лемма 3′ доказана.

Лемму 3′ можно выразить еще и так: *если решение* $u(t)$ *уравнения* (2) *обращает в нуль многочлен* $P(u, t)$ *при как угодно больших* t, *то* $P(u(t), t) \equiv 0$ *для всех достаточно больших* t.

Надо отметить существенность того обстоятельства, что речь идет о решениях уравнения (2), разрешенного относительно производной, а не общего уравнения (1). В этом можно убедиться хотя бы на примере функции $u = \sin t$, которая является решением уравнения $u'^2 + u^2 - 1 = 0$ и обращается в нуль при как угодно больших значениях t.

Покажем теперь, как при помощи леммы 3′ вывести лемму 3. Пусть выполнены условия этой последней леммы и решение $u(t)$ не удовлетворяет

уравнению $L(u, t) \equiv 0$. Тогда в силу леммы 3′ имеем $L(u(t), t) \neq 0$ $(t \geqslant t_0)$. Кроме того, по определению решения, $Q(u(t), t) \neq 0$. Следовательно, $H(u(t), t)$ при $t \geqslant t_0$ существует, причем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{P(u, t)}{Q(u, t)} = \frac{T(u, t)}{S(u, t)};$$

здесь T и S многочлены и $S = QL^2$, т. е. $S(u(t), t) \neq 0$ при $t \geqslant t_0$. Если уравнение $T(u(t), t) = 0$ имеет как угодно большие корни, то по лемме 3′ получаем, что $T(u(t), t) \equiv 0$, т. е. $H(u(t), t) = \text{const}$ при $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$. В противном же случае $dH/dt \neq 0$ $(t \geqslant t_1 \geqslant t_0)$, откуда и следует лемма 3.

10. К стр. 123. Теорема Харди имеет большое значение для дальнейшего (гл. VII), поэтому мы докажем ее до конца. Прежде всего рассмотрим случай асимптотического соотношения (11) и заметим, что из выражения (13) к нужному выводу можно придти следующим образом. Мы имеем те же случаи (а) — (г), что и на стр. 122, где вместо u надо положить v, а c_1 заменить на e/k. Однако из того, что $\ln|v| = o(\ln t)$, следует, что годятся только случаи $v^{n+1}/(n+1) \sim d_1 \neq 0$, $\ln|v| \sim d_1 \neq 0$ и $v^{n+1}/(n+1) \sim (e/k) \ln t$.

Та же подстановка $u = t^{l/k}v$, которая применялась в случае (11), приводит в условиях (12) к соотношению

$$kt^{m+(l/k)(n+1)}v^n v' \sim (le/k)\, t^{f-1+(l/k)(g+1)}v^{g+1} + et^{f+(l/k)(g+1)}v^g v'. \qquad \text{(A)}$$

В силу леммы 3′ достаточно ограничиться случаем, когда левая часть (12), а потому и производная v' отличны от нуля при достаточно больших t (в противном случае $u \equiv at^{l/k}$). В соотношении (А) отношение крайних членов равно

$$\frac{k}{e}\, t^{m-f+(l/k)(n-g)}v^{n-g} = \frac{k}{e}\, t^{m-f}u^{n-g},$$

а потому имеет конечный или бесконечный предел при $t \to \infty$. Если этот предел конечен и отличен от нуля, то $n \neq g$ (ибо в противном случае и $m = f$, т. е. члены $kt^m u^n u'$ и $et^f u^g u'$ — подобные) и на основании соотношения $\ln|v| = O(\ln t)$ мы заключаем, что $v \to \text{const} \neq 0$ при $t \to \infty$. Если же этот предел равен нулю или бесконечности, то из (А) заключаем, что отношение среднего члена к одному из крайних стремится к 1 при $t \to \infty$. Отсюда приходим к нужному выводу так же, как в первом абзаце этого примечания.

Теперь остановимся на возможности (ξ) и рассмотрим члены, порядок которых отличен от порядка разности $kt^m u^n u' - t^{m-1}u^{n+1}$. Если имеется более одного такого члена одного и того же порядка (при $t \to \infty$) или если имеются два члена одинакового порядка, приводящие к соотношению (9) при n и m, относящихся к случаям (а), (б) или (г), а также если оба эти члена одновременно содержат или не содержат u', то мы приходим к уже разобранным случаям. Таким образом, достаточно ограничиться случаем, когда в многочлене $R = Qu' - P$ нет более двух членов одного и того же порядка, причем любая такая пара членов имеет вид $mu^k t^l (u't - cu)$ $(k \geqslant 0, l \geqslant 0, m \neq 0, c \neq 0)$. При этом $u't - cu \neq 0$ для достаточно больших t, так как в противном случае из леммы 3′ сразу получаем, что $u = \text{const} \cdot t^c$.

Начнем с членов R наивысшего порядка. Их должно быть два, причем их сумма $T_1 = m_1 u^{k_1} t^{l_1} (u't - c_1 u)$ должна иметь порядок низший, чем порядок каждого из слагаемых; отсюда, в частности, получаем, что $u = t^{c_1 + \varepsilon_1(t)}$, где $\varepsilon_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Если член R следующего по величине порядка имеет тот же порядок, что и T_1, то мы приходим к возможности (α). Значит, такой член должен иметь порядок высший, чем T_1, а потому должен найтись еще один член того же порядка. Сумма этих членов имеет вид $T_2 = m_2 u^{k_2} t^{l_2} \times$

$\times (u't - c_2 u)$ и опять-таки должна иметь порядок низший, чем порядок слагаемых. Отсюда $u = t^{c_2 + \varepsilon_2(t)}$, т. е. $c_2 = c_1$. Если бы T_2 и T_1 имели одинаковый порядок, то мы сразу пришли бы к соотношению вида (8). Если же T_2 и T_1 имеют разный порядок, то переходим к членам R следующего по величине порядка. О пять заключаем, что если не имеет места возможность (α), то их порядок выше, чем порядок и T_1 и T_2, что этих членов два и что их сумма $T_3 = m_3 u^{k_3} t^{l_3} (u't - c_3 u)$ имеет порядок низший чем порядок слагаемых, откуда $c_3 = c_1$. Случай, когда порядок T_3 совпадает с порядком T_1 или T_2, немедленно приводит к соотношению (8). Далее рассматриваем случай, когда порядки всех членов T_3, T_2 и T_1 различны и т. д. Продолжая таким образом, мы видим, что если бы возможность (α) не встретилась и порядки всех выражений T_1, T_2, ... были различными, то в конце концов мы представили бы многочлен R в виде суммы конечного числа слагаемых $T_1, \ldots, T_s$ попарно различного порядка, что невозможно. Этим доказательство теоремы Харди и заканчивается.

11. К стр. 125. На доказательстве монотонности H следует остановиться несколько подробнее, так как приведенное автором доказательство не может считаться полным. Прежде всего отметим, что мы будем считать $c = 1$, монотонность же будем понимать в нестрогом смысле. Отсюда следует монотонность и общих выражений $H = t^a u\ u'^c$, так как при $c \neq 0$ имеем $H = (t^{a/c} u^{b/c} u')^c$, а из монотонности u' и неравенства $u > e^{\varphi(t)}$ следует, что $u' \underset{t \to \infty}{\to} \infty$. Если же $c = 0$, то $dH/dt = t^{a-1} u^b (a + b t u'/u)$ и наше утверждение следует из монотонности tu'/u. Отметим, что в отличие от решений уравнения (2) решения уравнения (1), имеющие вид $O(t^b)$, не обязаны быть строго монотонными: в этом нас снова убеждает пример $u = \sin t$ из примечания 9.

Далее, в обосновании нуждается утверждение о существовании производной dH/dt. Здесь надо напомнить некоторые факты из теории исключения. Пусть даны два многочлена относительно t, u и z вида $P(t, u, z) = P_0(t, u) z^n + P_1(t, u) z^{n-1} + \ldots + P_n(t, u)$, $Q(t, u, z) = Q_0(t, u) z^m + \ldots + Q_m(t, u)$, где все $P_i(t, u)$ и $Q_i(t, u)$ — многочлены, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $P_0(t, u) \not\equiv 0$, $Q_0(t, u) \not\equiv 0$. Тогда результант $R(t, u)$ этих многочленов есть многочлен относительно t и u, обладающий тем свойством, что для некоторых $t = \bar{t}$, $u = \bar{u}$ равенство $R(\bar{t}, \bar{u}) = 0$ имеет место в том и только в том случае, когда либо $P_0(\bar{t}, \bar{u}) = Q_0(\bar{t}, \bar{u}) = 0$, либо уравнения $P(\bar{t}, \bar{u}, z) = 0$ и $Q(\bar{t}, \bar{u}, z) = 0$ имеют по крайней мере один (вещественный или комплексный) корень. Тождественное обращение $R(t, u)$ в нуль необходимо и достаточно для того, чтобы многочлены P и Q имели общий множитель, т. е. чтобы можно было написать $P = P_1 S$, $Q = Q_1 S$, где P_1, Q_1 и S — многочлены относительно t, u, z, причем $S(t, u, z) = S_0(t, u) z^k + \ldots + S_k(t, u)$ ($S_0 \not\equiv 0$, $k \geqslant 1$).

Изучая поведение решений $u(t)$ уравнения (1), мы без ограничения общности можем предполагать, что $P(t, u, u')$ — многочлен, степень которого n относительно u' наименьшая возможная для всех многочленов таких, что уравнение $P = 0$ имеет решение $u = u(t)$. Из неравенства $u(t) > e^{\varphi(t)}$ и конца примечания 8 следует тогда, что $n \geqslant 1$, так как для любого многочлена $A(t, u) \not\equiv 0$ при всех достаточно больших t будет $A(t, u(t)) \neq 0$. Отсюда же следует, что коэффициенты $P_i(t, u)$ многочлена P можно считать не содержащими общего множителя (отметим, что постоянные множители здесь не принимаются во внимание). Теперь легко проверить, что многочлен P неприводим, т. е. неразложим на произведение многочленов. Действительно, если такое разложение

$$P(t, u, u') = P_1(t, u, u') \cdot P_2(t, u, u') = [P_{1,0}(t, u) u'^{n_1} + \ldots + P_{1, n_1}(t, u)] \times$$
$$\times [P_{2,0}(t, u) u'^{n_2} + \ldots + P_{2, n_2}(t, u)] \quad (P_{1,0} \not\equiv 0,\ P_{2,0} \not\equiv 0)$$

существует, причем P_1 и P_2 не имеют общего множителя, то из сказанного выше следует, что $n_1 > 0$ и $n_2 > 0$. Так как $n_1 < n$, $n_2 < n$, то ни одно из уравнений $P_1(t, u, u') = 0$ и $P_2(t, u, u') = 0$ не может удовлетворяться функцией $u(t)$ для всех достаточно больших t; следовательно, функция $u(t)$ при $t \to \infty$ удовлетворяет то одному из этих уравнений, то другому. При смене уравнений удовлетворяются они оба, а потому (так как $P_{1,0}(t, u(t)) \neq 0$ и $P_2(t, u(t)) \neq 0$ при достаточно больших t) обращается в нуль и результант $R(t, u)$ многочленов $P_1(t, u, z)$ и $P_2(t, u, z)$. Так как $R \not\equiv 0$, то мы приходим к противоречию.

Сейчас уже легко проверить, что $P'_{u'}(t, u(t), u'(t)) \neq 0$ при достаточно больших t. Действительно, если $n = 1$, то это ясно сразу, а если $n > 1$, то из неприводимости многочлена P следует, что результант многочленов P и $P'_{u'}$ не может тождественно равняться нулю, а потому при достаточно больших t отличен от нуля, откуда и вытекает наше утверждение.

Значит, по теореме о неявных функциях уравнение $P(t, u, u') = 0$ можно разрешить относительно u', откуда получаем, что для достаточно больших t функция $u(t)$ имеет непрерывные производные всех порядков (и даже аналитична).

Отметим, что во всех этих рассуждениях мы существенно пользовались неравенством $u > e^{\varphi(t)}$. Для решений вида $u = o(t^b)$ наши утверждения несправедливы, во всяком случае, если определить понятие правильного решения так, как это было сделано выше. Например, уравнение $(u^2 + u^2u'^2 - 1) \times (u'^2 - 1) = 0$ имеет одним из своих решений функцию $u = u(t)$, периодическую с периодом $4\sqrt{2}$, для которой $u(-t) \equiv u(t)$, $u(\sqrt{2} + t) \equiv -u(\sqrt{2} - t)$,

$$u(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - t^2} & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}/2, \\ \sqrt{2} - t & \text{для} \quad \sqrt{2}/2 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}. \end{cases}$$

Для этого решения многочлен $P(t, u, u')$ (который в данном случае не зависит от t) приводим и не может быть заменен каким-либо из своих сомножителей; $u''(t)$ при $t = \sqrt{2}/2 + n\sqrt{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ не существует.

Чтобы показать теперь монотонность функции $H = t^a u^b u'$, продифференцируем соотношение $P(t, u, Ht^{-a}u^{-b}) = 0$ по t. Получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial u}\frac{H}{t^a u^b} + \frac{\partial P}{\partial u'}\frac{H}{t^a u^b}\left(\frac{H'}{H} - \frac{a}{t} - \frac{b}{u}\frac{H}{t^a u^b}\right) = 0. \tag{A}$$

Если $H' = 0$ при некотором t, то и

$$Q(t, u, u') \equiv tu\frac{\partial P}{\partial t} + tuu'\frac{\partial P}{\partial u} - u'(au + btu')\frac{\partial P}{\partial u'} = 0.$$

Если Q не зависит от u', то $Q \equiv 0$, так как в противном случае мы вступили бы в противоречие с неравенством $u > e^{\varphi(t)}$. Если же Q зависит от u', то там, где $H' = 0$, должен равняться нулю и результант $R(t, u)$ многочленов P и Q. Отсюда и из неравенства $u > e^{\varphi(t)}$ получаем, что $R(t, u) \equiv 0$, т. е. что многочлены P и Q имеют общий сомножитель. Так как P мы считаем неприводимым, то Q делится на P, т. е. опять-таки $Q \equiv 0$. Отсюда и из (A) получаем, что $H'\,\partial P/\partial u' \equiv 0$, и так как $\partial P/\partial u' \neq 0$, то $H' \equiv 0$ при всех достаточно больших t, что и требовалось доказать.

Из доказанного ясно, что отношение любых двух членов многочлена $P(t, u, u')$ имеет при $t \to \infty$ конечный или бесконечный предел.

12. К стр. 141. При доказательстве теоремы 7 для нормы (б) можно воспользоваться переходом к тройному интегралу. Именно, пользуясь этим приемом, докажем сначала конечность нормы функции $e^{-t}\int\limits_0^t e^{t_1}f(t_1)\,dt_1$:

$$\int\limits_0^\infty\left[e^{-t}\int\limits_0^t e^{t_1}f(t_1)\,dt_1\right]^2dt=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^t dt_2e^{-2t+t_1+t_2}f(t_1)f(t_2)=$$

$$=\int\limits_0^\infty dt_1\int\limits_0^{t_1}dt_2\int\limits_{t_1}^\infty dt\ldots+\int\limits_0^\infty dt_1\int\limits_{t_1}^\infty dt_2\int\limits_{t_2}^\infty dt\ldots=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dt_1\int\limits_0^{t_1}dt_2e^{t_2-t_1}f(t_1)f(t_2)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dt_1\int\limits_{t_1}^\infty dt_2e^{t_1-t_2}f(t_1)f(t_2)=\int\limits_0^\infty dt_1\int\limits_0^{t_1}dt_2e^{t_2-t_1}f(t_1)f(t_2)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dt_1\int\limits_0^{t_1}dt_2e^{t_2-t_1}[f^2(t_1)+f^2(t_2)]=\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^\infty dt_1e^{-t_1}f^2(t_1)(e^{t_1}-1)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty dt_2e^{t_2}f^2(t_2)\,e^{-t_2}\right]\leqslant\int\limits_0^\infty f^2(t)\,dt.$$

Точно так же получаем

$$\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_t^\infty e^{t-t_1}f(t_1)\,dt_1\right]^2dt=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_t^\infty dt_1\int\limits_t^\infty dt_2e^{2t-t_1-t_2}f(t_1)f(t_2)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_t^\infty dt_1\int\limits_t^\infty dt_2e^{2t-t_1-t_2}[f^2(t_1)+f^2(t_2)]=$$

$$=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_t^\infty dt_1\int\limits_t^\infty dt_2e^{2t-t_1-t_2}f^2(t_1)=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_t^\infty dt_1e^{t-t_1}f^2(t_1)=$$

$$=\int\limits_0^\infty dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\,e^{t-t_1}f^2(t_1)\leqslant\int\limits_0^\infty f^2(t_1)\,dt_1.$$

Теперь утверждение теоремы следует непосредственно из соотношения (17).

13. К стр. 149. Это место нуждается в пояснении, так как для применения теоремы 7 гл. II надо от уравнения (28) перейти к системе уравнений первого порядка, в результате чего мы получим оценку не u, а суммы $|u|+|u'|$; кроме того, и сама оценка (30) по форме несколько отличается от той, которая гарантируется теоремой 7.

Отметим прежде всего, что оценку (23) гл. II, гарантируемую теоремой 7, можно заменить такой оценкой: для некоторого $c>0$ и всех достаточно больших t имеет место неравенство

$$\exp\left[\operatorname{Re}\lambda_k t - c\int_0^t \|B\|\,dt\right] \leqslant \|z^{(k)}\| \leqslant \exp\left[\operatorname{Re}\lambda_k t + c\int_0^t \|B\|\,dt\right]. \qquad \text{(A)}$$

Действительно, при $B\equiv 0$ это очевидно. Если же $B\not\equiv 0$ при $0<t<t_1$, где $t_1\geqslant t_0$, то для того, чтобы неравенства (A) следовали из неравенств (24) при $t\geqslant t_1$, достаточно выбрать постоянную c столь большой, что

$$c\geqslant d_1,\ c\geqslant d_2,\ c\int_0^{t_1}\|B\|\,dt\geqslant d_1\int_{t_0}^{t_1}\|B\|\,dt+\ln c_1,\ c\int_0^{t_1}\|B\|\,dt\geqslant d_2\int_{t_0}^{t_1}\|B\|\,dt-\ln c_2.$$

Чтобы перейти теперь к оценкам (30) гл. VI, обозначим решения, фигурирующие в соотношениях (29), через $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$; без ограничения общности их можно считать положительными для достаточно больших t, так как уравнение (28) не имеет колеблющихся решений. Сравнивая эти решения с решениями уравнения $u'=\pm(1\pm\varepsilon)u$, получаем, что $\bar{u}_1\to\infty$, $\bar{u}_2\to 0$ при $t\to\infty$. Отсюда для любого решения $u=a\bar{u}_1+b\bar{u}_2$ будет $|u|\to\infty$, $u'/u\to 1$, если $a\neq 0$ и $u\to 0$, $u'/u\to -1$, если $a=0$, $b\neq 0$.

Пусть теперь решение u_1 таково, что

$$\exp\left[t-c\int_0^t|\varphi(t)|\,dt\right]\leqslant|u_1|+|u_1'|\leqslant\exp\left[t+c\int_0^t|\varphi(t)|\,dt\right].$$

Тогда ясно, что в разложении $u_1=a\bar{u}_1+b\bar{u}_2$ будет $a\neq 0$; без ограничения общности мы будем считать, что $a>0$. Тогда при $t\geqslant t_1\geqslant 0$ будет $u_1>0$, $|u_1'/u_1-1|\leqslant 1/2$. Отсюда следует, что $2(|u_1|+|u_1'|)/5\leqslant u_1\leqslant|u_1|+|u_1'|$ $(t\geqslant t_1)$ и неравенство (30) в случае $\varphi\not\equiv 0$ $(0\leqslant t\leqslant t_1)$ получается, если взять $c_1>c$ достаточно большим; если же $\varphi\equiv 0$ при $0\leqslant t\leqslant t_1$ и $\varphi\not\equiv 0$ при $t>t_1$, то надо увеличить значение t_1. Оценка u_2 проводится аналогичным образом.

Подобное замечание относится и к соотношениям (31). Из теоремы 8 гл. II следует, что $u_1=(k+o(1))e^t$, $u_1'=(l+o(1))e^t$, где $|k|+|l|\neq 0$. Но в силу сказанного выше $u_1'/u_1\to 1$, откуда $k\neq 0$, т. е. $u_1/k\sim e^t$. Аналогично изучается решение u_2.

Это замечание надо иметь в виду и далее в п. 12.

14. К стр. 158. Поясним ход доказательства теоремы 13. Как было указано в прим. перев. на стр. 155, мы сначала можем доказать существование решения уравнения (34) и справедливость оценки (37). При дальнейшем исследовании мы вместо неравенства Коши — Буняковского систематически применяем неравенство Гельдера (см. упражнение 2 п. 8). Прежде всего аналогично примечанию на стр. 156 из условия $\varphi\to 0$ мы выводим, что и $w\to 0$ при $t\to\infty$. Кроме того, из оценки (37) получаем неравенство

$$|w|\leqslant 2\left(\int_0^t|\varphi(t_1)|^3 e^{-(t-t_1)}dt_1\right)^{1/3},$$

из которого видно, что $\int_0^\infty |w|^3\,dt < \infty$. Далее имеем

$$\int_0^t w\,dt_1 = \frac{1}{2}\int_0^t [1 - e^{-2(t-t_1)}]\,[\varphi(t_1) - w^2(t_1)]\,dt_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1 - \frac{1}{2}\int_0^t w^2(t_1)\,dt_1 + o(1).$$

Однако

$$-\frac{1}{2}\int_0^t w^2(t_1)\,dt_1 = -\frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} e^{-2(t_1-t_2)}\varphi(t_2)\,dt_2 \int_0^{t_1} e^{-2(t_1-t_3)}\varphi(t_3)\,dt_3 +$$

$$+ \int_0^t dt \int_0^{t_1} e^{-2(t_1-t_2)}\varphi(t_2)\,dt_2 \int_0^{t_1} e^{-2(t_1-t_3)} w^2(t_3)\,dt_3 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} e^{-2(t_1-t_2)} w^2(t_2)\,dt_2 \int_0^{t_1} e^{-2(t_1-t_3)} w^2(t_3)\,dt_3 =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \varphi(t_1)\varphi(t_2)\,e^{-2(t_1-t_2)}dt_2 + \frac{1}{4}\left(\int_0^t \varphi(t_1)\,e^{-2(t-t_1)}\,dt_1\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [\varphi(t_1)w^2(t_2) + \varphi(t_2)\,w^2(t_1)]\,e^{-2(t_1-t_2)}\,dt_2 - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(t_1)\,e^{-2(t-t_1)}dt_1 \times$$

$$\times \int_0^t w^2(t_1)\,e^{-2(t-t_1)}\,dt_1 - \frac{1}{4}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} w^2(t_1)\,w^2(t_2)\,e^{-2(t_1-t_2)}\,dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\int_0^t w^2(t_1)\,e^{-2(t-t_1)}\,dt_1\right)^2 = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{IV}.$$

Как мы уже видели ранее, $\mathrm{II} \to 0$, $\mathrm{IV} \to 0$ и $\mathrm{VI} \to 0$ при $t \to \infty$. Пользуясь очевидным неравенством $|ab^2| \leqslant |a|^3 + |b|^3$, легко доказать, что при $t \to \infty$ III остается ограниченным и имеет предел. Наконец, при помощи этого же приема (предварительно воспользовавшись неравенством $w^2(t_1)\,w^2(t_2) \leqslant \leqslant \varepsilon\, w^2(t_1)\,|w(t_2)|$) получаем, что и V имеет конечный предел при $t \to \infty$. Уравнение (39) изучается аналогично.

15. К стр. 174. Здесь и далее неоднократно применяются следующие простые правила интегрирования асимптотических формул, частные случаи

которых нам уже встречались. Допустим, что дана неотрицательная функция $f(t)$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$, причем $\int^{\infty} f(t)\,dt = \infty$. Тогда

$$\int_{t_1}^{t} o(f(t))\,dt = o\left(\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt\right); \quad \int_{t_1}^{t} f(t)\,[1 + o(1)]\,dt = [1 + o(1)] \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt;$$

$$\int_{t}^{\infty} f(t)\,[1 + o(1)]\,dt = \infty.$$

Если же $f(t) \geqslant 0$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$ и $\int^{\infty} f(t)\,dt < \infty$, то

$$\int_{t_0}^{t} o(f(t))\,dt = c - o\left(\int_{t}^{\infty} f(t)\,dt\right); \quad \int_{t}^{\infty} o(f(t))\,dt = o\left(\int_{t}^{\infty} f(t)\,dt\right),$$

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\,[1 + o(1)]\,dt = c - [1 + o(1)] \int_{t}^{\infty} f(t)\,dt; \quad \int_{t}^{\infty} f(t)\,[1 + o(1)]\,dt =$$

$$= [1 + o(1)] \int_{t}^{\infty} f(t)\,dt.$$

Подобные формулы, конечно, имеют место и при $f(t) \leqslant 0$.

Отсюда вытекают следующие правила интегрирования асимптотически равных друг другу функций. Пусть $\varphi(t) \sim f(t)$, где функция $f(t)$ не обращается в нуль и сохраняет знак. Тогда, если $\int^{\infty} |f(t)|\,dt = \infty$, то

$$\int_{t_1}^{t} \varphi(t)\,dt \sim \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt.$$

Если же $\int^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$, то

$$\int_{t}^{\infty} \varphi(t)\,dt \sim \int_{t}^{\infty} f(t)\,dt,$$

а

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt \quad \text{либо} \quad \sim c \neq 0, \quad \text{либо} \quad \sim -\int_{t}^{\infty} f(t)\,dt.$$

16. К стр. 176. Мы приведем доказательство сформулированного предложения, причем это доказательство в значительной своей части будет пригодно в различных случаях, как для уравнения (4), так и для уравнения $u'' + t^{\sigma} u^{n} = 0$. Именно, мы рассмотрим положительные стремящиеся к нулю решения уравнения (11), причем величину постоянной w уточним позже. Прежде всего из уравнения (11) получаем, что $v \to 0$ монотонно, причем

$dv/ds < 0$. Совершим замену переменных $x = 1/v$, $y = dx/ds$. Тогда мы придем к уравнению

$$y\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y^2 + (2w-1)y - w(w-1)(x - x^{2-n}) = 0, \qquad \text{(A)}$$

причем нам необходимо исследовать свойства решений этого уравнения, остающихся положительными при $x \to \infty$. По теореме Харди для некоторого $\alpha > 0$ будет

$$y \sim \alpha x^k e^{P(\frac{q}{\sqrt{x}})} \qquad \text{либо } y \sim \alpha x^l (\ln x)^m.$$

Если $P(x) \to -\infty$ при $x \to \infty$, то $y \to 0$, откуда и $dy/dx \to 0$ при $x \to \infty$; отсюда видно, что в уравнении (A) последнее слагаемое не компенсируется, и мы приходим к противоречию. Если $P(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то мы приходим к противоречию на основании леммы 1 гл. V.

Итак, $y \sim \alpha x^l (\ln x)^m$ $(\alpha > 0)$; на основании леммы 1 гл. V получаем теперь, что $l \leqslant 1$. Если $l < 1$, то, принимая, что $w(w-1) \neq 0$, получаем соотношение $y\,dy/dx \sim w(w-1)x$, откуда $y^2 \sim w(w-1)x^2$, и мы приходим к противоречию. Значит, $l = 1$, т. е. $y \sim \alpha x (\ln x)^m$.

Случай $m < 0$ исключается так же, как в предыдущем абзаце. Если же $m > 0$, то из уравнения (A) получаем, что $dy/dx \sim 2y/x$, откуда $y = x^{2+o(1)}$, и мы опять приходим к противоречию. Значит, $m = 0$, т. е. $y \sim \alpha x$ $(\alpha > 0)$.

Теперь из уравнения (A) получаем, что

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha - (2w-1) + \frac{w(w-1)}{\alpha} + o(1).$$

Отсюда, интегрируя, выводим соотношение

$$\alpha = 2\alpha - (2w-1) + \frac{w(w-1)}{\alpha},$$

откуда $\alpha = w$ или $\alpha = w - 1$.

Возвращаясь к старым переменным, получаем, что $dx/ds = x[\alpha + o(1)]$, откуда $x = e^{s[\alpha+o(1)]} = t^{\alpha+o(1)}$, т. е. $v = t^{-\alpha+o(1)}$ и $u = t^{w-\alpha+o(1)}$, и следовательно, $u = t^{o(1)}$ или $u = t^{1+o(1)}$.

До сих пор рассматривался общий случай; для дальнейшего надо уточнить вид уравнения (2). Если мы изучаем случай (в) п. 3, то $u' \to \infty$ и, значит, годится только вид $u = t^{1+o(1)}$. Но тогда из уравнения (4) получаем соотношение $u'' = t^{\sigma+n+o(1)}$, откуда (так как у нас $\sigma + n < -1$) заключаем, что u' ограничена, и мы приходим к противоречию.

Если же рассматриваем случай, когда $\sigma + 2 < 0 < \sigma + n + 1$, откуда $w - 1 < 0 < w$, то (так как у нас $\alpha > 0$) годится только вид $u = t^{o(1)}$. На основании уравнения (2) получаем, что u' имеет конечный предел при $t \to \infty$, который по необходимости равен нулю. Отсюда (так как $\sigma < -2$) получаем, что и $u(t)$ имеет конечный предел при $t \to \infty$; рассуждая аналогично п. 3, получаем, что этот предел a отличен от нуля. Теперь из (2) получаем последовательно

$$u' = \mp\frac{a^n t^{\sigma+1}}{\sigma+1}[1 + o(1)], \qquad u = a \mp \frac{a^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}[1 + o(1)].$$

Этот результат будет далее применяться.

17. К стр. 179. Это заключение об асимптотическом виде функции u нуждается в более подробном обосновании. Если $v \to 0$, причем $v > 0$ и $dv/ds < 0$, то можно вновь сделать замену $x = 1/v$, $y = dx/ds$. Тогда мы приходим к уравнению

$$y\frac{dy}{dx} - \frac{2y^2}{x} + y + x^{2-n} = 0 \tag{A}$$

и рассуждая аналогично примечанию 16, получаем, что $y \sim \alpha x^l (\ln x)^m$ ($\alpha > 0$, $l \leqslant 1$).

Докажем, что здесь $m = 0$. Действительно, в противном случае все члены $-2y^2/x$, y и x^{2-n} имеют попарно различный порядок при $x \to \infty$, и поэтому, приравнивая $y\,dy/dx$ по очереди каждому из этих членов, получаем во всех случаях противоречие с соотношением $y \sim \alpha x^l (\ln x)^m$. Итак, $m = 0$, т. е. $y \sim \alpha x^l$.

Убедимся теперь в том, что $l = 1$. Действительно, если $l < 1$, то из уравнения (А) получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\alpha^2}{x^{1-l}}[1 + o(1)] - 1 - \alpha x^{2-n-l}[1 + o(1)],$$

т. е. $dy/dx < -1/2$ при достаточно больших x. Отсюда $y \to -\infty$, и мы приходим к противоречию. Итак, $y \sim \alpha x$. Рассуждая, как в примечании 16, мы приходим к уравнению

$$\alpha = 2\alpha - 1,$$

откуда $\alpha = 1$. Итак, $y \sim x$, т. е. $dx/ds \sim x$ и $x = e^{s[1+o(1)]} = t^{1+o(1)}$. Значит, $v = t^{-1+o(1)}$ и $u = t^{o(1)}$. Далее рассуждаем, как в конце примечания 16.

Скажем здесь же о том случае, когда вместо (19) мы отправляемся от аналогичного уравнения

$$\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds} - u^n = 0$$

(это применяется в п. 6). В этом случае исследование совершенно аналогично проведенному, и после замены $x = 1/u$, $y = dx/ds$ мы приходим к уравнению

$$y\frac{dy}{dx} - \frac{2y^2}{x} - y + x^{2-n} = 0, \tag{Б}$$

из которого, как и ранее, выводим, что $y \sim \alpha x^l$ ($\alpha > 0$, $l \leqslant 1$). Однако в этом случае отсутствие положительного решения уравнения

$$\alpha = 2\alpha + 1$$

влечет за собой неравенство $l < 1$. Из (Б) получаем

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{\alpha}x^{2-n-l}[1 + o(1)] + \frac{2\alpha}{x^{1-l}}[1 + o(1)],$$

откуда от противного легко вывести, что $2 - n - l = 0$, $\alpha = 1$. Значит, $y \sim x^{2-n}$. Отсюда, возвращаясь к старым переменным, получаем, что $x^{n-1}/(n-1) \sim s$, т. е. $u^{-(n-1)} \sim (n-1)s = (n-1)\ln t$, откуда и вытекает асимптотическая формула (20).

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика 3
Из предисловия автора 5
Глава I. Свойства линейных систем 9
Литература 42
Глава II. Устойчивость, ограниченность и асимптотическое поведение решений линейных систем 43
Литература 79
Дополнительная литература 80
Глава III. Существование и единственность решений нелинейных систем 81
Литература 91
Глава IV. Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений 92
Литература 112
Глава V. Асимптотическое поведение решений некоторых нелинейных уравнений первого порядка 113
Литература 127
Глава VI. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка 128
Литература 166
Дополнительная литература 168
Глава VII. Уравнение Эмдена — Фаулера 171
Литература 195
Примечания переводчика 196

Р. Беллман
ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *А. В. ГЕРМОГЕНОВ*
Технический редактор *В. И. Шаповалов.* Корректор *О. П. Горшкова*
Переплет художника *М. Г. Ровенского*

Сдано в производство 19/VIII 1954 г. Подписано к печати 10/XI 1954 г. А-07653. Бумага $60 \times 92^1/_{16} = 6{,}7$ бум. л. 13,5 печ. л. Уч.-изд. л. 13,3. Изд. № 1/2437. Цена 10 р. 85 к. Заказ № 1629.
Издательство иностранной литературы. Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой. Ленинград, Измайловский пр., 29.