Б. М. Берковский
В. К. Полевиков

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В КОНВЕКЦИИ

МИНСК
«УНИВЕРСИТЕТСКОЕ»
1988

УДК 5363.5:519.6

Б 48

Берковский Б. М., Полевиков В. К. Вычислительный эксперимент в конвекции. — Мн.: Университетское, 1988.—167 с.— ISBN 5-7855-0077-9.

Монография посвящена методическим и практическим аспектам численного исследования конвективных процессов. Охватывает все стадии вычислительного эксперимента: от описания математической модели до обсуждения численных результатов. Рассматриваются математические модели гравитационной и термомагнитиой конвекции, различные варианты граничных условий. Значительное внимание уделяется построению и обоснованию разностных схем с улучшенными свойствами устойчивости и аппроксимации. Предлагаются простые алгоритмы стабилизации вычислительного процесса при больших числах Рэлея и корректировки сетки. Широко представлены испытания методов на тестовых задачах. Приводится машинная программа расчета плоских стационарных задач конвекции в прямоугольных полостях.

Для специалистов в области гидродинамики, теплообмена, вычислительной математики. Может быть использована преподавателями, аспирантами и студентами соответствующих специальностей.

Ил. 20. Табл. 4. Библиогр.: 72 назв.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор ***В. С. Купцова;***
кандидат физико-математических наук ***А. К. Синицын***

1702070000—081
Б——— 42—88
М 317(03)—88

ISBN 5-7855-0077-9

© Издательство «Университетское», 1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. Математическая модель естественной конвекции в несжимаемой жидкости 7

§ 1.1. Уравнения гравитационной конвекции 7
1.1.1 Приближение Буссинеска—Обербека 8
1.1.2 Завихренность и функция тока 9
1.1.3. Двумерные уравнения в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 10
1.1.4. Консервативная форма конвективных уравнений 12
1.1.5. Безразмерные переменные и критерии подобия 13
§ 1.2. Уравнения термомагнитной конвекции 15
§ 1.3 Условия на границе 20
1.3.1 Твердая стенка 21
1 3.2 Свободная граница 22
1.3.3. Линия симметрии 23
1.3 4. Особые точки 24
1.3.5. Условия для магнитного поля 26

Глава 2. Основные понятия метода сеток 28

§ 2.1. Сетка 29
§ 2.2. Погрешность аппроксимации 32
§ 2.3. Устойчивость 37
2.3.1. Понятие устойчивости 37
2.3.2. Принцип максимума 39
2 3.3. Примеры 41

Глава 3. Разностные схемы для стационарных уравнений конвекции 46

§ 3.1. Простейшие монотонные схемы 47
3.1.1. Схема 1-го порядка аппроксимации 49
3 1.2. Схемы Самарского и Джакупова 51
§ 3.2. Консервативные схемы 53
3.2.1. Интегро-интерполяционный метод построения консервативных схем 53
3.2 2. Схема с центральными разностями 60
3.2.3. Монотонная схема 1-го порядка аппроксимации 61
3.2.4 Монотонная схема 2-го порядка аппроксимации 63
3.2.5. Аппроксимация на неравномерной сетке 64
3.2.6. Аппроксимация в случае полярных координат 67
§ 3.3. Монотонная схема повышенной точности 69
3.3.1. Построение схемы 70
3.3.2. Погрешность аппроксимации 73
3.3.3. Исследование монотонности 74
3.3.4. Пример 76

Глава 4. Организация вычислительного процесса 80
§ 4.1. Приближенные граничные условия 80
4.1.1. Твердая стенка 80
4.1.2. Угловая точка 83
4.1.3. Криволинейная граница 84
4.1.4. Линия раздела жидкостей 85
4.1.5. Повышение точности на минимальном шаблоне 87
§ 4.2. Нестационарные задачи 91
4.2.1. Явные схемы 91
4.2.2. Неявные схемы 94
4.2.3. Решение уравнения для функции тока 97
4.2.4. О граничных условиях 103
§ 4.3. Стационарные задачи 105
4.3.1. О методе установления 105
4.3.2. Релаксационный метод 106
4.3.3. Критерий сходимости итераций 109
§ 4.4. Расчет чисел Нуссельта 110
§ 4.5. Алгоритм корректировки сетки при счете 114

Глава 5. Численные эксперименты и приложения 117
§ 5.1. Испытания на тестовых задачах 117
5.1.1. Тестовые задачи 117
5.1.2. Сравнение разностных схем 119
5.1.3. Влияние сетки при больших числах Рэлея 123
5 1.4. Сравнение формул расчета чисел Нуссельта 126
§ 5.2. Оптимизация параметров релаксации 128
5.2.1. Методика численного эксперимента 129
5.2.2. Основные результаты 132
5 2.3. Алгоритм стабилизации итерационного процесса при больших числах Рэлея 134
5.2.4. Общие выводы 137
§ 5.3. Примеры исследования конвекции в замкнутых областях 142
5.3.1. Гравитационная конвекция в прямоугольной полости при нагреве сбоку 142
5.3.2. Конвективная устойчивость магнитной жидкости в кольцевом слое 145

Глава 6. Программа решения плоских стационарных задач конвекции в прямоугольных полостях 152
§ 6.1. Описание программы 152
6.1.1. Назначение и основные характеристики 152
6.1.2. Входная информация и порядок организации расчетов 154
6.1.3. Выходная информация 156
§ 6.2. Тестовый пример 157
§ 6.3. Текст программы 161

Литература 165

ПРЕДИСЛОВИЕ

Создание алгоритмических языков существенно упростило процесс программирования и открыло доступ к ЭВМ представителям разных профессий В современной науке и технике широкое внедрение находит вычислительный эксперимент, оказавшийся мощным инструментом теоретического исследования сложных физических явлений Его эффективность зависит от достоверности и конструктивных особенностей математической модели, экономичности и аппроксимационных свойств вычислительного алгоритма, производительности ЭВМ

Велика роль вычислительного эксперимента и в науке о конвективном теплообмене Наиболее разработанным и универсальным методом решения дифференциальных задач конвекции является метод конечных разностей Накоплен значительный опыт по его применению Имеется немало модификаций этого метода, учитывающих особенности конкретных физических постановок Различные аспекты численного моделирования конвективных процессов рассмотрены в книгах [1—3] Однако до сих пор ощущается потребность в пособии, которое бы позволило начинающему исследователю проследить все стадии вычислительного эксперимента — от построения адекватной математической модели и ее дискретного аналога до составления машинной программы, получения и анализа численных результатов Попытаться восполнить этот пробел — одна из целей данной монографии

В книге подробно обсуждаются конвективные уравнения и граничные условия, рассматриваются вопросы, связанные с выбором сетки, конструированием конечно разностной схемы, решением разностной задачи Широко представлены тестовые испытания алгоритмов на задачах естественной конвекции Приводится апробированная программа для решения плоских стационарных задач конвекции в прямоугольных полостях при граничных условиях 1, 2 и 3 города для температуры

Заметный акцент в монографии сделан на монотонные разностные схемы как наиболее работоспособные, на консервативные схемы, удовлетворяющие на сетке физическим законам сохранения, и схемы повышенного порядка аппроксимации Получена и записана в форме, удобной для практического применения, консервативная монотонная схема 2-го порядка аппроксимации Построена и исследована схема 4 го порядка аппроксимации

Большое внимание уделено практически важным вопросам

организации вычислительного процесса и ускорения сходимости итераций, в частности изложен оригинальный алгоритм релаксации для решения стационарных задач конвекции. Приводится эффективный способ стабилизации итераций при больших числах Рэлея. Пропагандируется подход, связанный с использованием стационарных уравнений при решении задач стационарного типа. Показано, что он может быть намного продуктивнее метода установления.

При больших числах Рэлея остро встает проблема обеспечения точности без увеличения потребляемых ресурсов машины. Весьма перспективный выход из этой ситуации — применение неравномерных сеток. Вопросу построения неравномерных сеток при решении задач конвекции данная работа отводит заметное место. Предлагается способ корректировки сетки при счете в зависимости от структуры итерационного решения. Наглядно демонстрируются преимущества неравномерных сеток в условиях высокоинтенсивной конвекции.

В монографии содержится много новой информации как по части методики численного моделирования, так и физического характера. Авторам представлялось важным обратить внимание читателей на сравнительно мало исследованный раздел конвекции в магнитном поле. Приводятся пионерские работы, обсуждаются наиболее интересные результаты. Получены полезные инженерные формулы по теплообмену в горизонтальных прямоугольных каналах для большого диапазона режимных и геометрических параметров, построенные интерполяцией данных численного эксперимента.

При подготовке книги использован опыт преподавания курса лекций по численным методам в гидромеханике для студентов факультета прикладной математики Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина. Глава 1 написана Б. М. Берковским, § 5.3 — авторами совместно, остальной материал подготовлен В. К. Полевиковым.

По содержанию, уровню и форме изложения монография рассчитана на широкий круг специалистов в области гидродинамики и теплообмена, прикладной математики. Она представит интерес для специалистов-теплоэнергетиков и химиков-технологов, будет полезна аспирантам и студентам старших курсов физико-технических и механико-математических специальностей университетов и вузов.

Авторы выражают благодарность рецензентам доктору технических наук В. С. Купцовой и кандидату физико-математических наук А. К. Синицыну за полезные советы и рекомендации и надеются, что, несмотря на отдельные недостатки, книга сможет послужить введением в область вычислительного эксперимента в конвективном теплообмене.

Б. М. Берковский
В. К. Полевиков

ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. Уравнения гравитационной конвекции
1.2. Уравнения термомагнитной конвекции
1.3. Условия на границе

Естественной конвекцией (ЕК) называют движение, возникающее в неравномерно нагретой жидкости в поле массовых сил, например гравитационных или магнитных. Явление гравитационной конвекции обусловлено зависимостью плотности от температуры: чем выше температура жидкости, тем меньше ее плотность, поэтому нагретые частицы жидкости стремятся всплыть, холодные — оседают. Если жидкость обладает магнитными свойствами, конвективное движение может вызываться также зависимостью намагниченности от температуры. Структура и интенсивность ЕК определяются физическими свойствами среды, тепловыми условиями на границе, формой полости, которую жидкость заполняет, напряженностью внешнего силового поля. Это течение вносит значительный вклад в процесс распространения тепла в жидких средах.

1.1. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

удем считать жидкость несжимаемой, т. е. пренебрежем зменением плотности из-за неоднородности давления, пусть внутренние источники тепла в ней отсутствуют, магнитный момент равен нулю. Математическую модель роцесса *гравитационной конвекции* в такой жидкости бычно составляют из уравнения Навье—Стокса (закона охранения импульса)

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\eta\nabla^2\mathbf{v}+$$

$$+\frac{1}{3}\,\eta\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+\rho\mathbf{g}, \qquad (1.1)$$

уравнения неразрывности (закона сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.2}$$

и уравнения переноса тепла (закона сохранения энергии)

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \lambda \nabla^2 T. \tag{1.3}$$

Неизвестными функциями здесь являются вектор скорости $\mathbf{v}$, давление p и абсолютная температура жидкости T. Кроме них в уравнениях присутствуют плотность ρ, динамическая вязкость η, теплопроводность λ, удельная теплоемкость c — физические параметры жидкости; время t, вектор $\mathbf{g}$ — напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения). Уравнения (1.1) и (1.3) справедливы при условии, что коэффициенты η и λ задаются константами, т. е. считаются не зависящими от изменения температуры во всем объеме однородной жидкости; в противном случае следует пользоваться более общими уравнениями [4]. Допущение о постоянстве коэффициентов η, λ и c применимо, если имеющиеся в жидкости разности температур достаточно малы. Что же касается плотности ρ, то ее зависимостью от неоднородности температуры пренебрегать нельзя, так как именно она отвечает за возникновение конвективного движения в гравитационном поле. Поэтому к уравнениям (1.1)—(1.3) добавляется уравнение состояния $\rho = \rho(T)$.

1.1.1. Приближение Буссинеска—Обербека. Несмотря на принятые допущения, система (1.1)—(1.3) весьма сложна даже для численного анализа. С целью дальнейшего упрощения на практике часто прибегают к приближению, которое в литературе связывают с именами Обербека и Буссинеска [4—6]. Суть его в следующем.

Пусть T_0 — некоторое значение из интервала изменения температуры в жидкости, при котором плотность имеет величину $\rho = \rho_0 = \rho(T_0)$. Предположим, что температура T в жидкости мало отклоняется от T_0. Тогда уравнение состояния можно линеаризовать, оставляя лишь член 1-го порядка малости в разложении функции $\rho(T)$ в ряд Тейлора в окрестности значения T_0:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)], \tag{1.4}$$

где $\beta = -\frac{1}{\rho_0}\,\partial\rho(T_0)/\partial T$ — коэффициент теплового объемного расширения жидкости при $T = T_0$. Главная идея приближения Буссинеска—Обербека заключается в том, что зависимость плотности от температуры (1.4) учитывается лишь в члене с объемной силой тяжести $\rho\mathbf{g}$, а в остальных случаях полагают $\rho = \rho_0$. При таких допущениях система (1.1)—(1.3) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\,\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + [1-\beta(T-T_0)]\,\mathbf{g}, \tag{1.5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = a\nabla^2 T, \tag{1.7}$$

где $\nu = \eta/\rho_0$ и $a = \lambda/c\rho_0$ — постоянные коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, значения которых соответствуют табличным для $T = T_0$.

О правомерности приближения Буссинеска—Обербека при условии $\beta|T-T_0| \ll 1$ свидетельствуют многочисленные работы, как теоретические, так и экспериментальные. В настоящее время не вызывает сомнения, что система (1.5)—(1.7) дает почти адекватное представление о процессах, происходящих при ламинарной ЕК. Есть основания считать, что она достаточно хорошо описывает важнейшие эффекты конвективного теплообмена и на начальных стадиях турбулентного режима.

1.1.2. Завихренность и функция тока. Систему уравнений ЕК можно составить из уравнений (1.5)—(1.7), где неизвестными являются $\mathbf{v}$, p и T. Однако в большинстве случаев, особенно при решении двумерных задач, удобнее вместо скорости $\mathbf{v}$ и давления p ввести другие переменные: функцию тока ψ и завихренность (вихрь) ω, которые связаны со скоростью векторными отношениями

$$\mathbf{v} = \nabla\times(\xi\psi), \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \xi\nabla\times\mathbf{v} = \xi\nabla\times(\nabla\times(\xi\psi)), \tag{1.9}$$

где $\xi \neq 0$ — заданная скалярная функция от пространственных координат. При этом нужно иметь в виду, что уравнение неразрывности (1.6) удовлетворяется автоматически, так как $\nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot(\nabla\times(\xi\psi)) \equiv 0$, и что функция

тока ψ определяется неоднозначно, т. е. допускается некоторый произвол в ее выборе.

Чтобы исключить давление p, применим к уравнению (1.5) оператор ротора $\nabla\times$ и, принимая во внимание (1.8) и (1.9), получим

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}-\nabla\times\left[(\nabla\times(\xi\boldsymbol{\psi}))\times\left(\frac{1}{\xi}\boldsymbol{\omega}\right)\right]=$$
$$=-\nu\nabla\times\left(\nabla\times\left(\frac{1}{\xi}\boldsymbol{\omega}\right)\right)-\beta\nabla\times(T\mathbf{g}). \qquad (1.10)$$

Итак, вместо (1.5) и (1.6) в системе уравнений ЕК теперь можно рассматривать уравнение (1.9) для функции тока и уравнение (1.10) для завихренности.

1.1.3. Двумерные уравнения в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Пусть в некоторой системе координат x_1, x_2, x_3 течение является двумерным, т. е. функции T и $\mathbf{v}$ зависят только от двух пространственных переменных x_1 и x_2 и не зависят от x_3, причем вектор скорости содержит лишь две компоненты: $\mathbf{v}=(v_1, v_2, 0)$, $v_1=v_1(x_1, x_2, t)$, $v_2=v_2(x_1, x_2, t)$. Тогда в силу (1.9) вектор завихренности будет касательным к координатной линии x_3: $\boldsymbol{\omega}=(0, 0, \omega)$, $\omega=\omega(x_1, x_2, t)$. Удобно и вектор функции тока направить по касательной к ней: $\boldsymbol{\psi}=(0, 0, \psi)$, $\psi=\psi(x_1, x_2, t)$. Теперь из (1.9) и (1.10) легко получить уравнения для скалярных функций ψ и ω.

Введем правую декартову прямоугольную систему координат x, y, z, направив ось ординат Oy противоположно вектору $\mathbf{g}$, т. е. вертикально вверх. В этих координатах $\mathbf{g}=(0, -g, 0)$, где g — величина ускорения свободного падения. Если игнорировать зависимость решения от переменной z и положить, например, $\xi\equiv 1$, из уравнений переноса тепла (1.7), завихренности (1.10) и функции тока (1.9) будем соответственно иметь:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right),$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)+ \qquad (1.11)$$
$$+\beta g\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\omega=0. \tag{1.11}$$

Эти уравнения, где $\partial\psi/\partial y=v_1=v_x$, $\partial\psi/\partial x=-v_2=-v_y$, образуют полную систему уравнений плоской гравитационной конвекции с неизвестными скалярными функциями $T=T(x, y, t)$, $\omega=\omega(x, y. t)$, $\psi=\psi(x, y, t)$.

Прибегая в (1.7)—(1.10) к различным представлениям дифференциального оператора ∇, запишем в терминах T, ω, ψ двумерные уравнения гравитационной ЕК в других употребительных системах координат:

в *полярных координатах* r, φ (при $\xi\equiv 1$)

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)=a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\right],$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\right. \tag{1.12}$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}\right]+\beta g\left(\frac{\partial T}{\partial r}\cos\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\sin\varphi\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\omega=0,$$

$$v_1=v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\quad v_2=v_\varphi=-\frac{\partial\psi}{\partial r};$$

в *цилиндрических координатах* r, z (при $\xi=1/r$)

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=\nu\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right]+\beta g\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\omega=0,$$

$$v_1 = v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_2 = v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r};$$

в *сферических координатах* r, θ (при $\xi = 1/r \sin\theta$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) =$$

$$= a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\right],$$

$$\cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \frac{\nu}{r^2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin^3\theta\frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right)\right] -$$

$$- \beta g\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right), \qquad (1.14)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^4 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \omega = 0,$$

$$v_1 = v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_2 = v_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Порядок отсчета полярного угла φ и широты θ принят традиционный. Скажем, направление, противоположное вектору $\mathbf{g}$, полярный радиус r занимает при $\varphi = \pi/2$ и $\theta = 0$. В том же направлении ориентирована и ось z цилиндрической системы координат.

Заметим, что системы, записанные через функцию тока и завихренность, состоят из трех скалярных уравнений, в то время как исходная система (1.5)—(1.7) в двумерной постановке содержит на одно уравнение больше. С точки зрения численного анализа удобно, что уравнения (T, ω, ψ)-системы близки по типу: каждое из них является эллиптическим по пространству; уравнения переноса тепла и завихренности — параболические по времени, а уравнение для функции тока есть уравнение Пуассона.

1.1.4. Консервативная форма конвективных уравнений. Говорят, что уравнения ЕК записаны в *консервативной* (*дивергентной*) форме, если они имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} L_\alpha u + f,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} L_\alpha u + f = 0,$$

где u — неизвестная функция; x_1 и x_2 — пространственные координаты; L_1 и L_2 — дифференциальные операторы известного вида; f — функция свободного члена.

В консервативной форме можно представить любое из уравнений (1.11)—(1.14). В качестве примера запишем в консервативной форме систему (1.13):

$$\frac{\partial (rT)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(ar\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} T\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(ar\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} T\right),$$

$$\frac{\partial (r\omega)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\nu r\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial (\psi - 2\nu z)}{\partial z}\omega\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu r\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r}\omega\right) + \beta g\frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \omega r = 0.$$

Представление уравнений в консервативной форме позволяет строить вычислительные алгоритмы, обладающие замечательным свойством: отражать физические законы сохранения.

1.1.5. Безразмерные переменные и критерии подобия. Решение T, ω и ψ зависит от набора физических констант — входных данных задачи. Кроме коэффициентов a, ν, βg, входящих в уравнения переноса тепла и завихренности, имеется ряд параметров, описывающих геометрию расчетной области, а также тепловой и гидродинамический режимы на границах и в начальный момент времени. Чтобы обобщить решение задачи и уменьшить число параметров, вводят безразмерные переменные.

Предположим, что размеры области характеризуются длиной l, а температурные условия на границе — градиентом температуры γ. Имея в виду систему (1.11), безразмерные переменные (обозначим их штрихами) можно образовать, например, так:

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad t' = \frac{t}{l^2/\nu},$$

$$T' = \frac{T}{\gamma l}, \quad v' = \frac{v}{\nu/l}, \quad \psi' = \frac{\psi}{\nu}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\nu/l^2}.$$

Учитывая эти соотношения в (1.11), получаем для моделирования плоских задач гравитационной ЕК систему безразмерных уравнений относительно $T'(x', y', t')$, $\omega'(x' y', t')$ и $\psi'(x', y', t')$:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + \frac{\partial \psi'}{\partial y'}\frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'}\frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}\right),$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} + \frac{\partial \psi'}{\partial y'}\frac{\partial \omega'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'}\frac{\partial \omega'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial y'^2} + \mathrm{Gr}\frac{\partial T'}{\partial x'}, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} + \omega' = 0,$$

$$v_1' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'}, \quad v_2' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'}.$$

Здесь $\mathrm{Pr} = \nu/a$ и $\mathrm{Cr} = \beta g l^4 \gamma/\nu^2$ — *числа Прандтля и Грасгофа*. Они являются безразмерными комплексами и служат критериями подобия процесса ЕК. Конвективный теплообмен часто характеризуют также *числом Рэлея* $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr}$.

Аналогичным образом и с теми же критериями подобия можно записать безразмерные уравнения ЕК в других системах координат. Выбор характерных масштабов для построения новых переменных определяется спецификой решаемой задачи. Так, если для температуры приняты краевые условия 1-го рода, в качестве характерного градиента выбирают $\gamma = \Delta T/l$, где $\Delta T = T_1 - T_0$; T_0 и T_1 — минимальное и максимальное значения температуры в жидкости, включая границу. Если при этом положить $T' = (T - T_0)/\Delta T$, то безразмерная температура $T'(x', y', t')$ станет изменяться в постоянном диапазоне [0, 1] и уменьшится количество параметров в безразмерных краевых условиях.

Многие технические задачи сводятся к определению количества тепла, которое передается от жидкости твердому телу или от твердого тела жидкости. Интенсивность теплообмена между жидкостью и твердым телом принято характеризовать *числом Нуссельта*

$$\mathrm{Nu}_0 = -\left.\frac{\partial T'}{\partial n}\right|_{\Gamma},$$

где n — безразмерная нормаль к поверхности тела; Γ — безразмерная граница раздела. Если тепло поступает

в жидкость на участке границы Γ^+, а отводится из жидкости на участке Γ^-, то на Γ^+ будем иметь $\mathrm{Nu}_0 > 0$, а на $\Gamma^- - \mathrm{Nu}_0 < 0$. Функция Nu_0 описывает распределение безразмерных локальных тепловых потоков на стенке. Полный поток тепла от стенки к жидкости и от жидкости к стенке можно оценить с помощью интегралов

$$\widetilde{\mathrm{Nu}}^+ = \int\limits_{\Gamma^+} \mathrm{Nu}_0 \, d\Gamma, \quad \widetilde{\mathrm{Nu}}^- = \int\limits_{\Gamma^-} \mathrm{Nu}_0 d\Gamma.$$

Чтобы выяснить, насколько велик вклад в теплоотдачу механизма ЕК по сравнению с механизмом теплопроводности, вычисляют так называемые *конвективные числа Нуссельта:*

$$\mathrm{Nu}^+ = \widetilde{\mathrm{Nu}}^+ / \widetilde{\mathrm{Nu}}_T^+ \geqslant 1, \quad \mathrm{Nu}^- = \widetilde{\mathrm{Nu}}^- / |\widetilde{\mathrm{Nu}}_T^-| \leqslant -1,$$

где $\widetilde{\mathrm{Nu}}_T^+$ и $\widetilde{\mathrm{Nu}}_T^-$ — значения интегральных чисел $\widetilde{\mathrm{Nu}}^+$ и $\widetilde{\mathrm{Nu}}^-$ в режиме теплопроводности ($\mathrm{Gr} \to 0$).

Из простого баланса энергии ясно, что в условиях внутренней задачи и при отсутствии посторонних источников тепла $\widetilde{\mathrm{Nu}}^+ = |\widetilde{\mathrm{Nu}}^-|$ и $\mathrm{Nu}^+ = |\mathrm{Nu}^-|$.

§ 1.2. УРАВНЕНИЯ ТЕРМОМАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ

Усилия широкого круга исследователей направлены на изучение магнитных жидкостей — искусственной среды, созданной сравнительно недавно. Магнитная жидкость (МЖ) — это коллоидная суспензия взвешенных частиц твердого ферромагнетика в жидкости-носителе (вода, керосин, трансформаторное масло и др.). В зависимости от используемого ферромагнетика средний диаметр частиц колеблется от $0{,}3 \cdot 10^{-8}$ до 10^{-8} м. Уникальная способность МЖ взаимодействовать с внешним магнитным полем открывает перспективы для создания принципиально новых технологий и устройств во многих отраслях народного хозяйства. В случае неоднородного распределения температуры имеющийся значительный собственный магнитный момент обеспечивает сильное пондеромоторное взаимодействие МЖ с градиентным магнитным полем. Иными словами, в неизотермической МЖ, находящейся в гравитационном и неоднородном магнитном полях, существует два механизма возбужде-

ния конвекции: гравитационный и магнитный. Первый, как известно, обусловлен зависимостью плотности от температуры, второй — зависимостью намагниченности от температуры: холодные слои, имеющие бóльшую намагниченность, перемещаются в области с бóльшей напряженностью магнитного поля, вытесняя из них более нагретые слои. Наличие магнитного механизма открывает реальные возможности в управлении структурой и интенсивностью конвективного процесса с помощью наложенного магнитного поля. Это особенно важно в условиях, близких к невесомости ($g \to 0$), при которой гравитационный механизм вообще отсутствует.

Почти все известные математические модели МЖ строятся на рассмотрении ее как сплошной однородной среды. Наиболее распространенной и исследованной является модель неэлектропроводной несжимаемой МЖ без источников тепла в уравнении температуры и с линейными уравнениями состояния [7—9]. Применяя приближение Буссинеска — Обербека, получаем соответствующую ей систему уравнений в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\,\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{\rho(T)}{\rho_0}\,\mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho_0}\,M(T,\,H)\,\nabla H, \tag{1.16}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = a\nabla^2 T, \tag{1.18}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = 0, \quad \nabla\cdot\left(\left(1 + \frac{M(T,\,H)}{H}\right)\mathbf{H}\right) = 0, \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0\,[1 - \beta\,(T - T_0)], \\ M &= M_0 - K(T - T_0) + \chi\,(H - H_0). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Здесь μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; M — намагниченность жидкости; H — напряженность магнитного поля; $M_0 = M(T_0,\,H_0)$; $K = \partial M\,(T_0,\,H_0)/\partial T$ — пиромагнитный коэффициент; $\chi = \partial M\,(T_0,\,H_0)/\partial H$ — магнитная восприимчивость жидкости; $\rho_0 = \rho(T_0)$. Модель справедлива для небольших интервалов изменения температуры T и напряженности H около равновесных значений T_0 и H_0, при которых измерены физические константы M_0, ρ_0,

K, χ, a, ν, β. Член $M\nabla H$, появившийся в уравнении движения, обусловлен магнитными свойствами жидкости и характеризует ее взаимодействие с градиентным магнитным полем. В случае $M=0$ или $\nabla H=0$ система (1.16) — (1.18) совпадает с моделью гравитационной конвекции (1.5)—(1.7). Уравнения для магнитного поля (1.19) являются уравнениями Максвелла.

Применяя к (1.16) операцию ротора и вводя функцию тока и завихренность по формулам (1.8), (1.9), получаем операторное уравнение для завихренности:

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla\times\left((\nabla\times(\xi\boldsymbol{\psi}))\times\left(\frac{1}{\xi}\,\boldsymbol{\omega}\right)\right) = -\nu\nabla\times$$

$$\times\left(\nabla\times\left(\frac{1}{\xi}\,\boldsymbol{\omega}\right)\right) - \beta\nabla\times(T\mathbf{g}) - K\frac{\mu_0}{\rho_0}\,\nabla T\times\nabla H. \quad (1.21)$$

Как и в § 1.1, уравнением для функции тока считаем (1.9), а скорость с ней связана соотношением (1.8). На основании (1.8) условие неразрывности (1.17) выполняется тождественно.

Вместо напряженности H удобно ввести потенциал магнитного поля Φ:

$$\mathbf{H} = \nabla\Phi. \quad (1.22)$$

При этом Φ определяется, подобно функции тока ψ, с точностью до постоянной. В результате того, что $\nabla\times\nabla\Phi\equiv 0$, первое из уравнений Максвелла (1.19) удовлетворяется автоматически, а второе примет вид

$$\nabla\cdot((1+M/H)\,\nabla\Phi) = 0. \quad (1.23)$$

Таким образом, для описания конвективного движения магнитной жидкости можно рассматривать систему операторных уравнений (1.9), (1.18), (1.21), (1.23), в которой следует учесть соотношения (1.8), (1.20) и (1.22). Чтобы решать конкретные задачи термомагнитной конвекции, эти уравнения необходимо расписать покомпонентно и привести к безразмерному виду.

В качестве примера возьмем цилиндрическую систему координат r, φ, z и выберем масштабными единицами: измерения расстояния — длину l, времени — l^2/ν, скорости — ν/l, температуры — $\gamma\cdot l$, напряженности магнитного поля — $G\cdot l$, потенциала магнитного поля — $G\cdot l^2$; здесь γ и G — характерные градиенты температуры и напряженности магнитного поля. Если функции T, ω, ψ и Φ не

зависят от переменной z, из (1.18), (1.21) и (1.9) при $\xi \equiv 1$ получим систему безразмерных уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right],$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \mathrm{Gr}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\sin\varphi\right) + \mathrm{Gr}_m \frac{1}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right), \tag{1.24}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \omega = 0,$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

а из (1.23) — безразмерное уравнение для потенциала Φ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rQ(T, H)\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}Q(T, H)\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) = 0, \tag{1.25}$$

где

$$H = (H_r^2 + H_\varphi^2)^{1/2}; \quad H_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad H_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi};$$

$$Q = 1 + \frac{A_1 - A_2 T}{H}.$$

Тот факт, что штрихи при безразмерных величинах опущены, не должен вызывать недоразумений.

В случае осесимметричной задачи, т. е. когда нет зависимости от угловой координаты φ, для T, ω и ψ при $\xi = 1/r$ аналогично будем иметь безразмерные уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Pr}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right],$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \tag{1.26}$$

$$= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \mathrm{Gr} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} +$$

$$+ \mathrm{Gr}_m \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial z} \right),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \omega = 0,$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

а уравнение для потенциала магнитного поля получим в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rQ(T, H) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(Q(T, H) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0, \tag{1.27}$$

где

$$H = (H_r^2 + H_z^2)^{1/2}; \quad H_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad H_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

$$Q = 1 + \frac{A_1 - A_2 T}{H}.$$

При заданных граничных и начальных условиях, геометрии области все решения систем (1.24), (1.25) и (1.26), (1.27) определяются пятью критериями подобия: числом Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/a$; числом Грасгофа $\mathrm{Gr} = \beta g l^4 \gamma / \nu^2$, ответственным за гравитационный механизм возбуждения ЕК; магнитным числом Грасгофа $\mathrm{Gr}_m = \mu_0 K l^4 \gamma G / \rho_0 \nu^2$, обусловленным магнитным механизмом ЕК; параметрами $A_1 = (M_0 - \chi H_0)/Gl(1+\chi)$ и $A_2 = K\gamma/G(1+\chi)$, характеризующими магнитостатическое и температурное воздействие МЖ на структуру внешнего магнитного поля. Наряду с числами Грасгофа Gr и Gr_m конвективный теплообмен в МЖ описывают с помощью числа Рэлея $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr} \cdot \mathrm{Pr}$ и его аналога—магнитного числа Рэлея $\mathrm{Ra}_m = \mathrm{Gr}_m \cdot \mathrm{Pr}$.

Для упрощения решения обычно прибегают к так называемому *безындукционному* приближению, пренебре-

гая частично или полностью влиянием жидкости на магнитное поле. Основным критерием его применимости является условие $A_2 \ll 1$ ($K\gamma \ll G$). При выполнении этого требования правомерно положить $A_2=0$, добиваясь отщепления уравнений Максвелла от системы уравнений термомеханики МЖ и решая их отдельно. Если к тому же жидкость обладает слабой магнитной восприимчивостью ($\chi \ll 1$), искажениями внешнего магнитного поля можно вовсе пренебречь, так как поле в МЖ распределится практически по тому же закону, что и в немагнитной среде, удовлетворив классическим уравнениям Максвелла $\nabla \times \mathbf{H}=0$, $\nabla \cdot \mathbf{H}=0$, которые приведут к уравнению Лапласа для потенциала $\nabla^2\Phi=0$. Чтобы отпала необходимость решать эти уравнения, напряженность H задают в виде какого-либо уже известного их решения. В подобном случае конвективное движение МЖ полностью описывается уравнениями переноса тепла (1.18), завихренности (1.21), функции тока (1.9). Соответствующая полная система двумерных безразмерных уравнений термомагнитной ЕК в полярных координатах r, φ примет вид (1.24), а в цилиндрических координатах r, z — вид (1.26), с тремя определяющими параметрами: Pr, Gr и Gr_m. Пригодность безындукционного приближения для широкого класса задач термомагнитной конвекции показана в [7, 9].

§ 1.3. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ

При решении конкретных задач уравнения ЕК дополняются начальными и граничными условиями для температуры и скорости, на основании которых выводятся соответствующие соотношения для функции тока и завихренности. Поскольку задание искомых функций в начальный момент времени (в нестационарных задачах) обычно принципиальных затруднений не вызывает, остановимся на проблеме постановки условий на границе объема жидкости.

Пусть Γ — регулярная линия границы в плоскости определения двумерной задачи; $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к ней; s — длина дуги на линии Γ, положительное направление которой оставляет жидкость слева; v_s и v_n — касательная и нормальная составляющие вектора ско-

рости на Г. Вводя функцию тока, как в п. 1.1.2, можно показать [10], что на границе Г

$$v_s = \xi \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad v_n = -\xi \frac{\partial \psi}{\partial s}. \tag{1.28}$$

Соотношениями (1.28) будем пользоваться при выводе граничных условий для функции тока и завихренности. В тех случаях, когда для этого потребуется привлечение приближенных методов, см. § 4.1.

Рассмотрим несколько типичных ситуаций.

1.3.1. Твердая стенка. Предположим, что жидкость примыкает к твердому телу, имеющему регулярную поверхность. В зависимости от типа задачи температура на Г может быть задана либо в явном виде, как известная непрерывная функция пространства и времени (граничные условия 1-го рода), либо величиной теплового потока (граничные условия 2-го рода), либо некоторым соотношением, связывающим значения температуры с величиной теплового потока (граничные условия 3-го рода). В последнем случае тепловой поток обычно считают пропорциональным разности между температурой T_Γ границы и известной температурой T_∞ твердого тела на достаточно большом удалении от границы (на «бесконечности»):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_\Gamma = \alpha (T_\Gamma - T_\infty), \tag{1.29}$$

где λ — коэффициент теплопроводности жидкости; α — коэффициент теплоотдачи. Все три типа условий описываются общей формулой

$$a \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_\Gamma - bT_\Gamma + D_\Gamma = 0. \tag{1.30}$$

При $a=0$, $b\neq 0$ имеем условие 1-го рода (условие Дирихле); при $a\neq 0$, $b=0$ — условие 2-го рода (условие Неймана); при $a\neq 0$, $b\neq 0$ — условие 3-го рода.

В более полной постановке задачу о теплообмене решают в области, состоящей из обеих соприкасающихся сред. При этом на линии раздела Г поддерживаются условия сопряжения (граничные условия 4-го рода). Если на Г отсутствуют посторонние источники или стоки тепла, условия сопряжения имеют вид

$$T_\Gamma^{(1)} = T_\Gamma^{(2)}, \quad \lambda^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n}\bigg|_\Gamma = \lambda^{(2)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n}\bigg|_\Gamma, \tag{1.31}$$

где один из верхних индексов соответствует жидкости, а другой — среде, контактирующей с ней (в данном случае — твердому телу).

На твердой поверхности, ограничивающей движущуюся вязкую жидкость, для скорости ставятся так называемые *условия прилипания:*

$$v_n^{(1)}|_\Gamma = v_n^{(2)}|_\Gamma = v_n, \quad v_s^{(1)}|_\Gamma = v_s^{(2)}|_\Gamma = v_s. \qquad (1.32)$$

Ввиду (1.28) и (1.32) на неподвижной стенке имеем

$$v_n = 0, \quad v_s = 0, \quad \psi_\Gamma = \text{const}, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_\Gamma = 0,$$

причем константу допустимо выбирать любой, например равной нулю. Так что условия прилипания в этом случае запишутся в виде

$$\psi_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_\Gamma = 0. \qquad (1.33)$$

Первое из них применяют в качестве граничного условия для функции тока, второе же служит для вычисления на Γ значений завихренности. При этом удается строить лишь приближенные формулы.

1.3.2. Свободная граница. Если жидкость, для которой ставится задача конвекции, контактирует, не смешиваясь, с другой жидкостью (или газом), температуру на границе контакта обычно задают условиями 3-го рода (1.29). Строгая формулировка такой задачи должна, безусловно, учитывать совместный процесс конвективного теплообмена в соприкасающихся средах, в каждой из которых следует рассматривать свою систему конвективных уравнений, удовлетворяя на линии раздела Γ условиям сопряжения (1.31).

На поверхности раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей (жидкости и плотного газа) естественны условия прилипания (1.32). Кроме того, скорость должна удовлетворять кинематическому и динамическому условиям [4, 11]. Применим их, когда линия раздела есть прямая, положение которой не изменяется во времени. Из кинематического условия в этом случае на Γ имеем

$$v_n = 0, \qquad (1.34)$$

а из динамического — баланс касательных напряжений:

$$\eta^{(1)} \frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial n} = \eta^{(2)} \frac{\partial v_s^{(2)}}{\partial n}, \qquad (1.35)$$

где $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ — коэффициенты динамической вязкости контактирующих сред. В силу формул (1.28), (1.32), (1.34), (1.35) на прямой Γ можно получить следующие условия для функции тока и завихренности:

$$\psi_\Gamma = \text{const} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial n}, \qquad (1.36)$$

$$\eta^{(1)} \omega_\Gamma^{(1)} = \eta^{(2)} \omega_\Gamma^{(2)}. \qquad (1.37)$$

С помощью соотношений (1.36) строят приближенные соотношения, которые позволяют с учетом зависимости (1.37) выразить $\omega_\Gamma^{(1)}$ и $\omega_\Gamma^{(2)}$ в явном виде.

Если жидкость граничит с газом, плотность которого мала, то здесь имеем *свободную поверхность*. Пусть свободная поверхность плоская и стационарная. Тогда для составляющих скорости жидкости на линии Γ этой границы из кинематического и динамического условий $v_n = 0$, $\partial v_s/\partial n = 0$, откуда находим

$$\psi_\Gamma = 0, \quad \omega_\Gamma = 0. \qquad (1.38)$$

1.3.3. Линия симметрии. Пусть Γ — прямая, являющаяся линией симметрии конвективного движения. Условия симметрии задаются в виде

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad v_n|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial v_s}{\partial n}\right|_\Gamma = 0.$$

Отсюда в силу (1.28) получаем

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad \psi_\Gamma = \text{const} = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right)\right|_\Gamma = 0. \qquad (1.39)$$

В случае осесимметричного течения в цилиндрических координатах r, z линией симметрии является вертикальная ось $r=0$. На основании (1.39), уравнений функции тока и завихренности (1.13) на ней должно выполняться

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \psi = 0, \quad \omega = 0.$$

В сферических координатах r, θ ось симметрии образуется лучами $\theta=0$ и $\theta=\pi$, которые направлены вертикально. Из (1.39) и (1.14) при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0, \quad \psi=0, \quad \omega=0.$$

При постановке плоских задач ЕК конфигурация границы и температурные условия на ней нередко выбираются симметрично относительно средней вертикальной линии Г. Это позволяет решать задачу только на половине ее области определения, считая Г частью границы. На основании (1.39) и соответствующих уравнений для функции тока в (1.11), (1.12) на линии симметрии Г правомерны условия:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0, \quad \psi=0, \quad \omega=0$$

— в случае декартовых координат x, y;

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0, \quad \psi=0, \quad \omega=0$$

— в случае полярных координат r, φ, если Г проходит через полюс.

1.3.4. Особые точки. Если в неподвижный массив жидкости с постоянной температурой T_∞ поместить более нагретое твердое тело, в жидкости возникнет конвективное движение. Интенсивность этого движения сравнительно велика лишь вблизи нагревателя, но быстро падает по мере удаления от него. На бесконечности естественно ожидать $v=0$ с вытекающими отсюда условиями для функции тока и завихренности:

$$\psi=0, \quad \omega=0. \tag{1.40}$$

Вызванные ЕК возмущения температуры следуют той же тенденции, т. е. на бесконечности они затухают, поэтому температура здесь считается неизменной:

$$T=T_\infty. \tag{1.41}$$

При численном решении таких задач расчетная область обычно задается ограниченной, а условия (1.40), (1.41) ставятся на внешней границе этой области, которую выбирают на конечном, хотя и достаточно большом, расстоянии от твердой стенки.

На практике форма границы нередко описывается ломаной линией, состоящей из регулярных кусков, и тогда может возникнуть потребность в дополнительных соотношениях, определяющих T, ω и ψ в угловых точках границы.

Рассмотрим угол, образованный двумя регулярными участками границы (стенка — стенка, свободная поверхность — стенка), и пусть на них выполняются условия вида (1.30), (1.33) или (1.38). Следует помнить, что температура в угловой точке должна оставаться непрерывной, удовлетворяя условиям, которые приняты на смежных участках границы. Угловое значение функции тока выбирается таким же, как и на остальной части границы: $\psi=0$.

Обсудим проблему вычисления завихренности в угловой точке. Величину угла γ условимся измерять в сторону жидкости, так что $0°<\gamma<180°$ соответствует вогнутым углам, а $180°<\gamma<360°$ — выпуклым. Если угол вогнутый и прямой ($\gamma=90°$), из уравнения для функции тока и с помощью (1.33), (1.38) в его вершине легко получить $\omega=0$.

Переходя к косоугольным координатам, можно показать, что это условие справедливо при любых $0°<\gamma<180°$. Существует предположение, что в вершине выпуклого угла завихренность терпит разрыв и определяется неоднозначно [1]. Поэтому при $180°<\gamma<360°$ рекомендуется пользоваться теми же приближенными формулами, что и на регулярных участках стенок, образующих выпуклый угол. Эти формулы дадут два различных угловых значения ω. В алгоритме используется как одно, так и другое в зависимости от того, с какой стороны выступа ведется счет.

В заключение укажем еще на один тип особенности, с которым приходится сталкиваться при переходе к полярной системе координат. Для каждого из уравнений (1.12) особой точкой является полюс $r=0$. Уравнения, описывающие ЕК при $r=0$, можно получить из уравнений (1.12), применяя к ним правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида 0/0. Для численного моделирования более предпочтителен способ, описанный в п. 3.2.6, когда вместо дифференциальных уравнений рассматриваются интегральные, являющиеся законами сохранения для малого круга с центром в точке полюса. При этом удается избежать процедуры раскрытия не-

определенностей и ослабить требования к гладкости функций.

1.3.5. Условия для магнитного поля. Математическое моделирование конвективных процессов в МЖ требует в общем случае расчета магнитного поля. Пусть $H^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ — напряженность и потенциал магнитного поля в неэлектропроводной МЖ, обладающей намагниченностью $M^{(1)}$; $H^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ — напряженность и потенциал поля в окружающей неэлектропроводной среде с намагниченностью $M^{(2)}$ (твердое тело, жидкость, газ), причем

$$\mathbf{H}^{(i)} = \nabla\Phi^{(i)}, \quad M^{(i)} = M^{(i)}(T^{(i)}, H^{(i)}), \quad i = 1, 2.$$

Согласно (1.23) потенциал магнитного поля в первой среде описывается уравнением $\nabla\cdot((1+M^{(1)}/H^{(1)})\nabla\Phi^{(1)}) = 0$, а во второй среде — уравнением $\nabla\cdot((1+M^{(2)}/H^{(2)})\nabla\Phi^{(2)}) = 0$.

Переход через границу раздела этих сред Γ обеспечивается двумя условиями сопряжения для напряженности магнитного поля. Во-первых, скачок нормальной компоненты напряженности на Γ приравнивается к разности нормальных компонент намагниченности контактирующих сред. Это условие можно записать следующим образом:

$$\left(1 + \frac{M^{(1)}}{H^{(1)}}\right) H_n^{(1)} = \left(1 + \frac{M^{(2)}}{H^{(2)}}\right) H_n^{(2)}.$$

Во-вторых, считают, что на границе раздела касательные составляющие напряженности не терпят разрыва:

$$H_s^{(1)} = H_s^{(2)}.$$

С введением потенциала эти условия принимают вид

$$\left(1 + \frac{M^{(1)}}{H^{(1)}}\right) \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial n} = \left(1 + \frac{M^{(2)}}{H^{(2)}}\right) \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial n}, \quad \Phi^{(1)} = \Phi^{(2)},$$

где в двумерном случае

$$H^{(i)} = \left[\left(\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial s}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Процедура обезразмеривания для них аналогична той, которая применялась в § 1.2 для уравнений потенциала.

В случае, когда МЖ граничит с другой, не смешивающейся с ней жидкостью или газом, форма границы

раздела определяется магнитным скачком давления на ней [7]:

$$p^{(1)} - p^{(2)} - \sigma(k_1 + k_2) + \frac{1}{2}\mu_0\left[\left(\frac{M^{(1)}}{H^{(1)}} H_n^{(1)}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{M^{(2)}}{H^{(2)}} H_n^{(2)}\right)^2\right] = 2\left(\eta^{(1)} \frac{\partial v_n^{(1)}}{\partial n} - \eta^{(2)} \frac{\partial v_n^{(2)}}{\partial n}\right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; μ_0 — магнитная постоянная; p — давление; k_1 и k_2 — кривизны главных нормальных сечений поверхности раздела, знак которых выбирается отрицательным, если соответствующее нормальное сечение выпукло в сторону МЖ. Форма границы раздела, как правило, заранее неизвестна и ищется в ходе решения конвективной задачи, что существенно усложняет алгоритм решения.

На достаточно большом удалении от намагниченной среды магнитное поле предполагается невозмущенным и заданным; при этом для потенциала получаются условия 1-го рода.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА СЕТОК

§ 2.1. Сетка

§ 2.2. Погрешность аппроксимации

§ 2.3. Устойчивость

Метод сеток, или метод конечных разностей, является эффективным инструментом теоретического изучения конвективных процессов. Основная идея метода такова. В области определения дифференциальной задачи выбирается конечное множество точек (узлов), называемое сеткой. Функции и производные в каждом узле приближенно заменяются (аппроксимируются) некоторыми линейными комбинациями значений соответствующих функций, входящих в уравнения и краевые условия, в узлах сетки. В результате этих замен нелинейная дифференциальная задача ЕК сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций в узлах. Такую систему принято называть разностной задачей, или разностной схемой. Несмотря на нелинейность и большое, как правило, число неизвестных, разностная задача более предпочтительна для решения, чем исходная дифференциальная, так как допускает применение вычислительной техники. Найденное на ЭВМ решение разностной задачи (разностное решение) принимается за приближенное решение исходной задачи в узлах сетки. Оно имеет вид числовой таблицы, размер которой пропорционален количеству узлов.

Таким образом, процедура численного решения задач ЕК состоит из трех основных этапов. Сначала на выбранной сетке производится аппроксимация дифференциальных уравнений и краевых условий, в результате которой строится разностная схема — дискретный аналог исходной задачи. Затем выбирается метод решения полученной нелинейной разностной задачи и конструирование вычислительного алгоритма завершается. Заключительный этап — программная реализация этого алгоритма на ЭВМ.

Цель данной главы — познакомить читателя в том объеме, который необходим для понимания дальнейшего содержания книги, с такими ключевыми понятиями теории разностных схем, как сетка, аппроксимация, устойчивость. Обозначения и терминология соответствуют принятым в известной монографии Самарского [12], которая может послужить источником для более глубокого изучения этих вопросов.

§ 2.1. СЕТКА

При построении сетки следует учитывать конфигурацию расчетной области, особенности выбранной системы координат, структуру конвективного движения. Число узлов в сеточной области определяется требованиями к точности решения в соответствии с техническими возможностями имеющейся вычислительной машины. Обозначим $\bar{G} = G \cup \Gamma$ область определения двумерной задачи, где Γ — граница области, и рассмотрим простейшие примеры сеток.

Пусть $\bar{G}$ является прямоугольником с длиной основания a и высотой b. Конвективные процессы в полостях с прямоугольной геометрией естественно рассматривать в прямоугольных декартовых координатах. Предположим, что основание прямоугольника лежит на оси x, а одна из боковых сторон — на оси z, так что

$$\bar{G} = \{(x,\ z) |\ 0 \leqslant x \leqslant a,\quad 0 \leqslant z \leqslant b\}.$$

Разобьем отрезки $[0,\ a]$ оси x и $[0,\ b]$ оси z на I и K частей соответственно. Пусть точки деления, находящиеся на оси x, имеют координаты x_i, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ I$, $x_0 = 0$, $x_I = a$, а точки, находящиеся на оси z,— координаты z_k, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ K$, $z_0 = 0$, $z_k = b$, причем

$$0 = x_0 < x_1 < \ \ldots\ < x_{I-1} < x_I = a,$$

$$0 = z_0 < z_1 < \ \ldots\ < z_{K-1} < z_K = b.$$

Через точки деления проведем два семейства прямых:

$$x = x_i,\quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ I,$$

$$z = z_k,\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ K,$$

параллельных соответствующим осям. В качестве узлов сетки возьмем точки пересечения этих прямых (x_i, z_k). Общее число узлов, следовательно, равно $(I+1)(K+1)$, и все они принадлежат прямоугольнику $\bar{G}$. Расстояния $x_i - x_{i-1} = h_{1,i} > 0$, $z_k - z_{k-1} = h_{2,k} > 0$ между прямыми называют *шагами сетки*.

Распределение узлов в области $\bar{G}$ характеризуется век-

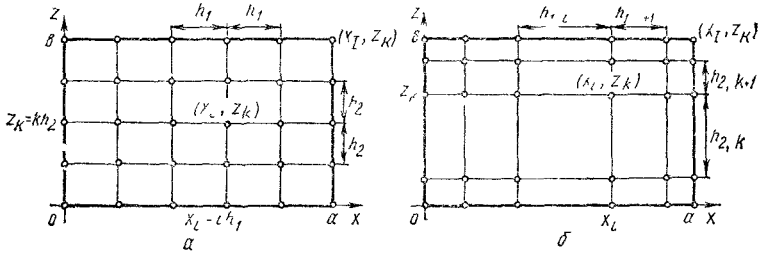


Рис. 2.1. Равномерная (*а*) и неравномерная (*б*) сетки

торным параметром $h = (h_{1,1}, \ldots, h_{1,I}, h_{2,1}, \ldots, h_{2,K})$, составленным из шагов. Если шаги сетки как по направлению x, так и по направлению z равны между собой, т. е.

$$h_{1,1} = h_{1,2} = \ldots = h_{1,I} = a/I = h_1,$$

$$h_{2,1} = h_{2,2} = \ldots = h_{2,K} = b/K = h_2,$$

то такая сетка называется *равномерной* (рис. 2.1, *а*). В противном случае, т. е. если шаги $\{h_{1,i}\}$ или $\{h_{2,k}\}$ не все одинаковы, сетка называется *неравномерной* (рис. 2.1, *б*). Равномерную сетку будем обозначать $\bar{G}_h$, а неравномерную — $\hat{\bar{G}}_h$, соответственно множества их внутренних (т. е. не принадлежащих границе Γ) узлов обозначим G_h и $\hat{G}_h$, а множества граничных узлов — Γ_h и $\hat{\Gamma}_h$, так что $\bar{G}_h = G_h \cup \Gamma_h \subset \bar{G}$, $\hat{\bar{G}}_h = \hat{G}_h \cup \hat{\Gamma}_h \subset \bar{G}$. В нашем случае, например,

$$G_h = \{(x_i, z_k) \in \bar{G} \mid x_i = ih_1, \quad z_k = kh_2,$$

$$h_1 = a/I, \quad h_2 = b/K,$$

$$i = 1, 2, \ldots, I-1, \quad k = 1, 2, \ldots, K-1\},$$

$$\hat{G}_h = \{(x_i, z_k) \in \bar{G} \mid x_i = x_{i-1} + h_{1,i}, \; z_k = z_{k-1} + h_{2,k},$$

$$i = 1, 2, \ldots, I-1, \quad k = 1, 2, \ldots, K-1, \quad x_0 = 0,$$

$$z_0 = 0\}.$$

Неравномерные сетки бывают эффективны в условиях развитой конвекции, характеризующейся сильной неоднородностью скорости и температуры. Узлы сетки сгущают в зоне наиболее интенсивного движения (как правило, у стенок) за счет уменьшения их плотности на других участках. Важно, что при этом удается улучшить точность решения без увеличения числа узлов.

Приведем пример сетки в случае криволинейных координат. Пусть область $\bar{G}$ имеет вид круга радиусом R. Плоскую задачу о конвективном движении в такой области удобно формулировать в полярных координатах r, φ, поместив полюс в центр круга. Тогда

Рис. 2 2. Равномерная сетка в полярных координатах

$$\bar{G} = \{(r, \varphi) | \, 0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

Выберем на отрезке $[0, R]$ полярной оси точки $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{I-1} < r_I = R$, а на развороте $[0, 2\pi]$ полярного угла—значения $0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{K-1} < \varphi_K = 2\pi$. Проведем два семейства эквидистантных кривых:

$$r = r_i, \; i = 1, 2, \ldots, I,$$

$$\varphi = \varphi_k, \; k = 0, 1, \ldots, K-1.$$

Кривые $r = r_i$ являются концентрическими окружностями а линии $\varphi = \varphi_k$ имеют вид лучей, исходящих от центра круга. Узлами сетки примем точки пересечения этих кривых (r_i, φ_k), где $i = 0, 1, \ldots, I$; $k = 0, 1, \ldots, K-1$. Заметим, что узлы с полярным радиусом $r = r_0 = 0$ сливаются в одну точку, т. е. полученная сетка состоит из $I \cdot K + 1$ узлов. Шаги неравномерной сетки $\hat{\bar{G}}_h$ здесь $h_{1,\,i} = r_i - r_{i-1}$, $h_{2,\,k} = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, поэтому $r_i = r_{i-1} + h_{1,\,i}$, $\varphi_k = \varphi_{k-1} + h_{2,\,k}$. Равномерная сетка $\bar{G}_h$ (рис. 2.2) имеет шаги $h_1 = R/I$, $h_2 = 2\pi/K$ и координаты узлов $r_i = ih_1$, $\varphi_k = kh_2$.

Аналогично можно задавать сетку, когда решение задачи зависит от трех переменных, например от двух пространственных координат и времени. Узлы такой сетки образуются в точках пересечения трех семейств эквидистантных поверхностей, построенных в трехмерной области $\bar{G}$.

§ 2.2. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ

При построении разностной схемы важно знать, насколько хорошо она аппроксимирует исходную дифференциальную задачу. Сформулируем исходную задачу в общем виде. Пусть $\bar{G}=G\cup\Gamma$ — заданная область точек X пространства (или пространства и времени). Требуется найти решение $u=u(X)$ системы дифференциальных уравнений

$$Lu = -f(X),\ X\in G, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее на границе Γ условиям

$$lu = -g(X),\ X\in\Gamma, \tag{2.2}$$

где L и l — заданные дифференциальные операторы; $f(X)$ и $g(X)$ — заданные вектор-функции; в стационарном случае $X=x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного пространства; условия (2.2) — граничные; в нестационарном случае $X=(x, t)=(x_1, \ldots, x_p, t)$; при $t=0$ условия (2.2) — начальные, при $t>0$ — граничные.

Введем в области $\bar{G}$ сетку $\bar{G}_h=G_h\cup\Gamma_h$, где $G_h\subset G$ — множество внутренних узлов; $\Gamma_h\subset\Gamma$ — множество граничных узлов. Плотность расположения узлов характеризуется векторным параметром h, компонентами которого являются шаги сетки $\bar{G}_h$. Заменим на сетке $\bar{G}_h$ функции непрерывного аргумента $f(X)$ и $g(X)$ сеточными функциями $\varphi_h(X)$ и $\chi_h(X)$, определенными соответственно в узлах $X\in G_h$ и $X\in\Gamma_h$, а дифференциальные операторы L и l — некоторыми (разностными) операторами Λ_h и λ_h, действующими на сеточные функции, заданные на $\bar{G}_h$. Получим разностную схему

$$\Lambda_h y_h = -\varphi_h(X),\ X\in G_h, \tag{2.3}$$

$$\lambda_h y_h = -\chi_h(X),\ X\in\Gamma_h, \tag{2.4}$$

где сеточная вектор-функция $y_h=y_h(X)$, определяемая в узлах сетки $\bar{G}_h$, есть решение задачи (2.3), (2.4).

При замене дифференциальной задачи (2.1), (2.2) разностной (2.3), (2.4) допускается ошибка — *погрешность аппроксимации.* Она характеризуется величиной невязок

$$\delta_h(X) = \Lambda_h u(X) + \varphi_h(X),\ X \in G_h,$$

$$\nu_h(X) = \lambda_h u(X) + \chi_h(X),\ X \in \Gamma_h,$$

которые вычисляются путем подстановки точного решения исходной задачи $u(X)$ в узлах сетки $\bar{G}_h$ в разностную схему. Сеточные вектор-функции $\delta_h(X)$ и $\nu_h(X)$ называют соответственно *погрешностью аппроксимации дифференциальных уравнений* (2.1) *разностными уравнениями* (2.3) и *погрешностью аппроксимации граничных* (граничных и начальных) *условий* (2.2) *разностными условиями* (2.4).

Для оценки погрешности аппроксимации вводят метрику в пространстве сеточных функций. Укажем наиболее простую норму сеточной вектор-функции $f(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X))$, заданной на некотором множестве узлов Ω:

$$\|f\|_\Omega = \max_{X \in \Omega} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |f_k(X)|. \tag{2.5}$$

Если $f(X)$ — скалярная функция, то, очевидно,

$$\|f\|_\Omega = \max_{X \in \Omega} |f(X)|.$$

Для обеспечения близости решений разностной и дифференциальной задач необходимо, чтобы при стремлении шагов сетки к нулю разностная задача в пределе совпадала с дифференциальной. Если это требование выполняется, то говорят, что *разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу.* В дальнейшем будем говорить, что:

1) *разностная схема (2.3), (2.4) аппроксимирует дифференциальную задачу (2.1), (2.2) с r-м порядком (обладает r-м порядком аппроксимации),* если $\|\delta_h\|_{G_h} + \|\nu_h\|_{\Gamma_h} = O(|h|^r)$, $r > 0$, где $|h|$—норма вектора шагов h, т. е. максимальный шаг сетки $\bar{G}_h$;

2) *разностное уравнение (2.3) обладает r-м порядком аппроксимации,* если $\|\delta_h\|_{G_h} = O(|h|^r)$, $r > 0$;

3) *разностные условия (2.4) обладают r-м порядком аппроксимации,* если $\|\nu_h\|_{\Gamma_h} = O(|h|^r)$, $r > 0$.

Если исходная задача нестационарна, то обычно различают порядки аппроксимации по времени и пространственным переменным. Принято говорить, что *схема (2.3), (2.4) аппроксимирует задачу (2.1), (2.2) с порядком $r>0$ по времени t и с порядком $s>0$ по пространству,* если $\|\delta_h\|_{G_h} + \|\nu_h\|_{\overline{G}_h} = O(|\tau|^r + |h|^s)$, где $|\tau|$ — максимальный шаг сетки $\overline{G}_h$ по направлению t; $|h|$—максимальный шаг сетки $\overline{G}_h$ по остальным, т. е. пространственным, переменным.

Проверка аппроксимации сравнительно несложна и проводится единообразно во всех случаях на основе разложений в ряд Тейлора в пространстве достаточно гладких функций. В качестве примера рассмотрим одномерную стационарную задачу теплопроводности

$$Lu = u''(x) = -f(x),\ 0<x<1,$$
$$u(0) = g = \text{const},\ u(1) = \tilde{g} = \text{const}. \tag{2.6}$$

На отрезке $[0, 1]$ выберем произвольную неравномерную сетку

$$\hat{\overline{G}}_h = \{x_i \mid i=0,\ 1,\ \ldots,\ I,\ \ x_0=0,\ x_I=1\}$$

с шагами $h_i = x_i - x_{i-1} > 0$, $i=1, 2, \ldots, I$. Во внутренних узлах $x_i \in \hat{G}_h$ аппроксимируем оператор $Lu=u''$ разностным оператором

$$\Lambda_h u = \Lambda_h u_i = \frac{1}{\hbar_i}\left(u_{\overline{x},\ i+1} - u_{\overline{x},\ i}\right) = \left(u_{\overline{x}}\right)_{\hat{x},\ i} = u_{\overline{x}\hat{x},\ i} = u_{\overline{x}\hat{x}},$$

приняв обозначения

$$u_i = u(x_i),\ u_{i\pm1} = u(x_{i\pm1}),\ \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}),$$

$$u_{\overline{x}} = u_{\overline{x},\ i} = \frac{1}{h_i}(u_i - u_{i-1}),\ u_{\overline{x},\ i+1} = u_{x,\ i} = u_x =$$

$$= \frac{1}{h_{i+1}}(u_{i+1} - u_i),\ u_{\hat{x}} = u_{\hat{x},\ i} = \frac{1}{\hbar_i}(u_{i+1} - u_i).$$

Рассмотрим разностную схему

$$\Lambda_h y_i = y_{\overline{x}\hat{x},\ i} = -\varphi_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ I-1,$$
$$y_0 = g,\ y_I = \tilde{g}, \tag{2.7}$$

где $y = y_h$ — разностное решение; $\varphi = \varphi_h$ — правая часть разностного уравнения.

Сначала определим погрешность аппроксимации граничных условий задачи (2.6):

$$v(0) = u(0) - g = 0, \quad v(1) = u(1) - \tilde{g} = 0.$$

Следовательно, $\|v\|_{\hat{\Gamma}_h} = \max(|v(0)|, |v(1)|) = 0$, т. е. граничные условия аппроксимируются точно.

Известно [12], что если в правой части разностного уравнения задавать $\varphi_i = f_i = f(x_i)$, то в норме (2.5) схема (2.7) обладает лишь 1-м порядком аппроксимации на сетке $\hat{\bar{G}}_h$. Рассмотрим этот вопрос с более общих позиций. Возьмем на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ произвольную точку x и запишем разложения в ряд Тейлора для достаточно гладкой функции $v(x)$:

$$v_i = v(x_i) = v(x + (x_i - x)) = v + (x_i - x)\, v' + \frac{1}{2}(x_i - x)^2 v'' + \frac{1}{6}(x_i - x)^3 v''' + O((x_i - x)^4),$$

$$v_{i\pm1} = v(x + (x_{i\pm1} - x)) = v + (x_{i\pm1} - x)\, v' + \frac{1}{2}(x_{i\pm1} - x)^2 v'' + \frac{1}{6}(x_{i\pm1} - x)^3 v''' + O((x_{i\pm1} - x)^4), \tag{2.8}$$

где $v = v(x)$. Легко видеть, что $x_i - x = O(\hbar_i)$, $x_{i\pm1} - x = O(\hbar_i)$, поэтому $O((x_i - x)^4) = O(\hbar_i^4)$, $O((x_{i\pm1} - x)^4) = O(\hbar_i^4)$.

Назовем *погрешностью аппроксимации оператора Lu разностным оператором $\Lambda_h u_i$ в точке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$* величину

$$\psi_h(x) = \Lambda_h u(x_i) - Lu(x)$$

и оценим ее, пользуясь разложениями (2.8):

$$\psi_h(x) = u_{\bar{x}\hat{x},\,i} - u''(x) = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}\right) - u'' =$$

$$= \left(\frac{(x_{i+1} - x) - (x_i - x)}{\hbar_i h_{i+1}} - \frac{(x_i - x) - (x_{i-1} - x)}{\hbar_i h_i}\right) u' +$$

$$+ \left(\frac{(x_{i+1} - x)^2 - (x_i - x)^2}{2\hbar_i h_{i+1}} - \frac{(x_i - x)^2 - (x_{i-1} - x)^2}{2\hbar_i h_i} - 1\right) u'' +$$

$$+\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3-(x_i-x)^3}{6\hbar_i\hbar_{i+1}}-\frac{(x_i-x)^3-(x_{i-1}-x)^3}{6\hbar\hbar_i}\right)u'''+$$

$$+O(\hbar_i^2).$$

После несложных преобразований получим

$$\psi_h(x)=\left(\frac{x_{i-1}+x_i+x_{i+1}}{3}-x\right)u'''+O(\hbar_i^2).$$

Как видим, существует точка $x=\bar{x}_i=\frac{1}{3}(x_{i-1}+x_i+x_{i+1})\in[x_{i-1},\ x_{i+1}]$, в которой $\psi_h(\bar{x}_i)=O(\hbar_i^2)$. В других точках отрезка $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$ оператор $u_{\bar{x}\hat{x}}$ аппроксимирует вторую производную $u''(x)$ с погрешностью $\psi_h(x)=O(\hbar_i)$. При $x=x_i$, например, $\psi_h(x_i)=\frac{1}{3}(h_{i+1}-h_i)u_i'''+O(\hbar_i^2)=O(\hbar_i)$, если $h_i\neq h_{i+1}$.

Определим порядок аппроксимации схемы (2.7) при

$$\varphi_i=f(\bar{x}_i),\ \bar{x}_i=\frac{1}{3}(x_{i-1}+x_i+x_{i+1}). \qquad (2.9)$$

Для этого оценим невязку разностного уравнения:

$$\delta(x_i)=u_{\bar{x}\hat{x}}+f(\bar{x}_i)-[u''(\bar{x}_i)+f(\bar{x}_i)]=$$

$$=u_{\bar{x}\hat{x}}-u''(\bar{x}_i)=\psi_h(\bar{x}_i)=O(\hbar_i^2),\ 0<i<I,$$

$$\|\delta\|_{\hat{G}_h}+\|\nu\|_{\hat{\Gamma}_h}=\|\delta\|_{\hat{G}_h}=\max_{0<i<I}|\delta(x_i)|=O(|h|^2),$$

т. е. схема (2.7), (2.9) обладает на неравномерной сетке 2-м порядком аппроксимации в норме (2.5). Если вместо (2.9) положить $\varphi_i=(f_{i-1}+f_i+f_{i+1})/3$, то 2-й порядок аппроксимации сохранится, потому что в силу разложений (2.8) $(f_{i-1}+f_i+f_{i+1})/3=f(\bar{x}_i)+O(\hbar_i^2)$.

Из примера видно, что погрешность аппроксимации определяется не только шагами сетки, но и величиной производных от точного решения исходной задачи, которые, конечно, не известны. А так как структура этой погрешности у различных схем, как правило, неодинакова, то на заданной сетке схема с высоким порядком аппроксимации может в принципе дать менее точное разностное решение, чем схема низкого порядка аппроксимации. Поэтому при априорном сравнении аппрокси-

мационных свойств разностных схем для уравнений ЕК кроме порядка аппроксимации оценивают так называемую *схемную*, или *аппроксимационную, вязкость* — коэффициенты при диффузионных членах в главной части погрешности аппроксимации. В лучшем случае схемная вязкость равна нулю. Легко убедиться, что как раз в схеме (2.7) она отсутствует, так как аппроксимационные погрешности $\delta(x_i)$ не содержат производных u''.

Множество сеточных узлов $Ш(X)$, используемых при написании разностной схемы в узле X, называется *шаблоном* этой схемы в узле X. Шаблон $Ш(X)$ состоит из *центрального* узла X и *периферийных* узлов. Совокупность периферийных точек шаблона $Ш(X)$ называют *окрестностью узла* X и обозначают $Ш'(X)$. Шаблон $Ш(X)$ будем называть *минимальным*, если координаты периферийных узлов отличаются от координат центрального узла X не более чем на шаг сетки по соответствующей переменной. Шаблон $Ш(x_i)$ схемы (2.7) при $i=1, 2, ..., I-1$ образуют три узла: x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, где x_i — центральный узел шаблона; x_{i-1} и x_{i+1} — периферийные узлы, т. е. $Ш(x_i)=\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$, $Ш'(x_i)=\{x_{i-1}, x_{i+1}\}$. Этот шаблон является минимальным, так как $x_{i+1}-x_i=h_{i+1}$, $x_i-x_{i-1}=h_i$.

§ 2.3. УСТОЙЧИВОСТЬ

2.3.1. Понятие устойчивости. Другой источник ошибок, вносимых в численное решение, связан с погрешностью округления, возникающей непосредственно при решении разностной задачи на ЭВМ. Ошибки округления неизбежны, так как любая вычислительная машина может оперировать лишь с конечным числом значащих цифр. Хотя в момент возникновения они невелики, однако при расчете больших рекуррентных формул, какими являются алгоритмы метода сеток, первоначальная величина этих ошибок может вырасти настолько, что полностью исказит смысл окончательного результата. Если это происходит, то говорят, что численный метод (алгоритм) *неустойчив*. При достаточно длительном счете неустойчивость метода приводит к авосту — переполнению арифметического устройства машины. Если же в процессе счета ошибки округления затухают или хотя бы не возрастают, такой вычислительный алгоритм называют

устойчивым. Для решения практических задач используются только устойчивые алгоритмы.

Более строго устойчивость трактуется как свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных, согласно которому всякое малое изменение входных данных (например, вследствие округления) приводит к малому изменению решения. Под *входными данными* обычно понимают правые части разностных уравнений, граничных и начальных условий. Предположим, что решение задачи (2.3), (2.4) существует при любых правых частях φ_h, χ_h из некоторого допустимого класса сеточных функций. Схема (2.3), (2.4) называется *устойчивой,* если разностное решение y_h непрерывно зависит от входных данных φ_h, χ_h и эта зависимость равномерна относительно шагов сетки $\bar{G}_h$. Иными словами, схема (2.3), (2.4) устойчива, если можно указать такие положительные константы M_1, M_2, не зависящие от шагов сетки, что при любых допустимых наборах $\varphi_h^{(1)}$, $\chi_h^{(1)}$ и $\varphi_h^{(2)}$, $\chi_h^{(2)}$ входных данных выполняется оценка

$$\|y_h^{(1)} - y_h^{(2)}\|_{\bar{G}_h} \leqslant M_1 \|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\|_{G_h} + M_2 \|\chi_h^{(1)} - \chi_h^{(2)}\|_{\Gamma_h}, \quad (2.10)$$

где $y_h^{(1)}$ и $y_h^{(2)}$ — решения задачи (2.3), (2.4) с правыми частями $\varphi_h^{(1)}$, $\chi_h^{(1)}$ и $\varphi_h^{(2)}$, $\chi_h^{(2)}$ соответственно. В случае линейных разностных операторов Λ_h, λ_h условие (2.10) можно записать в виде

$$\|y_h\|_{\bar{G}_h} \leqslant M_1 \|\varphi_h\|_{G_h} + M_2 \|\chi_h\|_{\Gamma_h}, \quad (2.11)$$

где $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ — константы, не зависящие от векторного параметра h.

Если нахождение порядка аппроксимации разностных схем не вызывает принципиальных затруднений, то исследовать их устойчивость, как правило, чрезвычайно трудно: необходима не только фундаментальная математическая подготовка, но и большая изобретательность.

Пока не существует удовлетворительной теории устойчивости нелинейных схем. В связи с этим устойчивость разностных задач конвекции обычно проверяется в два этапа. Сначала методами линейной теории строятся оценки устойчивости (в виде условий на шаги) для линеаризованных разностных уравнений температуры, завихренности и функции тока. Эти оценки позволяют

вынести предварительное суждение о применимости и достоинствах предпринятого способа аппроксимации. Найденные теоретические оценки затем испытываются на численном эксперименте для тестовых задач конвекции. При этом большое значение имеет способ реализации разностной схемы.

Однако даже в линейном случае решить вопрос устойчивости в полной мере удается далеко не всегда. Часто ограничиваются установлением непрерывной зависимости решения от входных данных какого-либо одного типа, например от правой части разностных уравнений. Говорят, что схема (2.3), (2.4) *устойчива по правой части,* если она устойчива при $\chi_h \equiv 0$. Стационарная схема называется *устойчивой по граничным условиям,* если она устойчива при $\varphi_h \equiv 0$. Нестационарную схему называют: а) *устойчивой по начальным данным,* если при $\varphi_h \equiv 0$ и однородных граничных условиях ($\chi_h = 0$ при $t > 0$) она устойчива; б) *устойчивой по граничным условиям,* если в случае $\varphi_h \equiv 0$ и однородных начальных условиях ($\chi_h = 0$ при $t = 0$) она устойчива.

2.3.2. Принцип максимума. Существует немало различных способов исследования устойчивости линейных разностных схем [12—15]. Рассмотрим один из них — *принцип максимума.*

Обозначим $Ш(X)$ шаблон схемы (2.3), (2.4) в узле $X \in \bar{G}_h$, а $Ш'(X) = Ш(X) \setminus \{X\}$ — окрестность узла X. Пусть каждое уравнение схемы (2.3), (2.4) может быть представлено в виде

$$A(X)\, y(X) = \sum_{Q \in Ш'(X)} B(X, Q)\, y(Q) + F(X), \qquad \forall X \in \bar{G}_h, \tag{2.12}$$

где $y(X) \equiv y_h(X)$ — искомая сеточная функция; $F(X) = \varphi_h(X)$ при $X \in G_h$; $F(X) = \chi_h(X)$ при $X \in \Gamma_h$. Говорят, что схема (2.12) *удовлетворяет принципу максимума,* если во всех узлах $X \in \bar{G}_h$ коэффициенты A и B подчиняются условиям

$$D(X) \equiv A(X) - \sum_{Q \in Ш'(X)} |B(X, Q)| \geqslant 0, \quad A(X) > 0, \quad \forall X \in \bar{G}_h, \tag{2.13}$$

$$B(X, Q) \geqslant 0, \quad \sum_{Q \in Ш'(X)} B(X, Q) \neq 0, \quad \forall X \in G_h, \quad \forall Q \in Ш'(X).$$

Схемы, удовлетворяющие принципу максимума при любых шагах h, называются *монотонными* [12].

С помощью принципа максимума удается доказать ряд полезных признаков устойчивости схемы (2.12), аппроксимирующей уравнения конвекции.

Первый признак. Если при всех $X \in \bar{G}_h$ выполняется условие $D(X) \geqslant d = \text{const} > 0$, то схема (2.12) устойчива, т. е. для ее решения имеет место оценка (2.11) [16].

Второй признак. Схема (2.12) устойчива по граничным условиям, если она удовлетворяет принципу максимума (2.13) и при всех $X \in \Gamma_h$ выполнено $D(X) \geqslant d > 0$ (см. теорему 4 принципа максимума и замечание к ней в книге [12]).

Пусть схема (2.12) — *нестационарная* и *двухслойная*. Это означает, что в узлах $X = X^n = (x, t_n) \in \bar{G}_h$ при $n > 0$ шаблон $\text{Ш}(X) = \text{Ш}(X^n)$ схемы состоит из узлов, принадлежащих двум временным слоям: $t = t_n$ и $t = t_{n-1}$. Обозначим $\text{Ш}_\text{в}(X^n)$ ту часть шаблона, которая лежит на верхнем, n-м слое $(t = t_n)$, а $\text{Ш}_\text{н}(X^n)$ — часть шаблона, находящуюся на нижнем, $(n-1)$-м слое $(t = t_{n-1})$.

Таким образом,

$$\text{Ш}(X^n) = \text{Ш}_\text{в}(X^n) \cup \text{Ш}_\text{н}(X^n),$$

$$\text{Ш}'(X^n) = \text{Ш}_\text{н}(X^n) \cup \text{Ш}'_\text{в}(X^n),$$

$$\text{Ш}'_\text{в}(X^n) = \text{Ш}_\text{в}(X^n) \setminus \{X^n\}.$$

Полагая $\text{Ш}_\text{н}(X) \neq \varnothing$ при $X \in G_h$, запишем двухслойную схему в следующем виде:

$$A(X)\, y(X) = \sum_{Q \in \text{Ш}'_\text{в}(X)} B(X, Q)\, y(Q) + \sum_{Q \in \text{Ш}_\text{н}(X)} B(X, Q)\, y(Q) + F(X), \quad \forall X \in G_h \cup \Gamma_h^1, \tag{2.14}$$

$$y(X) = \chi^0(x), \quad \forall X \in \Gamma_h^0,$$

где Γ_h^0 — множество узлов из Γ_h (назовем их *начальными*), в которых заданы начальные условия; $X = X^0 = (x, 0)$ при $X \in \Gamma_h^0$, $\chi^0(x) \equiv \chi_h(X^0)$; Γ_h^1 — множество узлов из Γ_h (назовем их *граничными*), в которых заданы граничные условия, т. е. $\Gamma_h = \Gamma_h^0 \cup \Gamma_h^1$.

Третий признак. Схема (2.14), удовлетворяющая принципу максимума (2.13), устойчива по начальным данным [12].

Четвертый признак. Если найдется такая константа $\varkappa>0$, что при всех $X\in G_h$ выполнится неравенство

$$\tilde{D}(X)\equiv A(X)-\sum_{Q\in \text{Ш}'_{\text{в}}(X)}|B(X,\ Q)|\geqslant \varkappa/\tau, \qquad (2.15)$$

где τ — шаг сетки $\bar{G}_h$ по времени, то схема (2.14), удовлетворяющая принципу максимума (2.13), будет устойчивой и по правой части, и по начальным данным, и по граничным условиям [15].

Как метод априорного обоснования разностных алгоритмов для задач конвекции принцип максимума обладает рядом достоинств. Он относится к тем немногим методам, которые применимы к схемам с переменными коэффициентами, позволяя устанавливать их устойчивость в сильной норме (2.5). Условия принципа максимума проверяются легко и единообразно, способствуя овладению методом сеток на инженерно-физическом уровне. Несмотря на то что принцип максимума дает достаточные условия устойчивости линейных схем, которые бывают весьма жесткими, из-за дестабилизирующего влияния нелинейности в случае задач ЕК они, как правило, соответствует действительности в не меньшей степени, чем оценки, полученные более тонкими методами линейной теории устойчивости.

2.3.3. Примеры. Для иллюстрации рассмотрим несколько примеров исследования устойчивости с помощью принципа максимума.

1. Исследуем устойчивость стационарной схемы (2.7). Для этого представим ее в виде (2.12):

$$A(x_i)\,y_i=B(x_i,\ x_{i-1})\,y_{i-1}+B(x_i,\ x_{i+1})\,y_{i+1}+\varphi_i,\ 0<i<I,$$

$$y_0=g,\ y_I=\tilde{g},$$

где

$$A(x_i)=\frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)>0;\ B(x_i,\ x_{i-1})=\frac{1}{\hbar_i h_i}>0;$$

$$B(x_i,\ x_{i+1})=\frac{1}{\hbar_i h_{i+1}}>0.$$

Находим

$$D(x_i) = A(x_i) - [B(x_i,\ x_{i-1}) + B(x_i,\ x_{i+1})] = 0,\ \ 0 < i < I,$$

$$D(x_0) = A(x_0) = D(x_I) = A(x_I) = 1.$$

Следовательно, при любых шагах $h = (h_1, \ldots, h_I)$ схема (2.7) удовлетворяет принципу максимума (2.13), т. е. она монотонна, причем в обоих граничных узлах $D = 1$. Согласно второму признаку устойчивости это означает, что схема (2.7) устойчива по граничным условиям при любом h. Разностное решение y_i может быть найдено методом прогонки [12].

2. Для стационарной задачи

$$Lu = u'' - ru' = -f(x),\ \ 0 < x < 1,\ \ r = \text{const} > 0,$$

$$u(0) = g,\ \ u(1) = \tilde{g},$$

описывающей простейший процесс переноса тепла в движущейся жидкости, построим на равномерной сетке с шагом $h = 1/I$ две разностные схемы: 2-го порядка аппроксимации

$$\mathring{\Lambda} y = y_{\bar{x}x} - r y_{\mathring{x}} = -f(x),\ \ x \in G_h,\ \ y(0) = g,\ \ y(1) = \tilde{g}\ , \quad (2.16)$$

и 1-го порядка аппроксимации

$$\bar{\Lambda} y = y_{\bar{x}x} - r y_{\bar{x}} = -f(x),\ \ x \in G_h,\ \ y(0) = g,\ \ y(1) = \tilde{g}. \quad (2.17)$$

Распишем разностные уравнения в индексной форме соответственно:

$$\mathring{\Lambda} y = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - r\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = -f_i,$$

$$\bar{\Lambda} y = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - r\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = -f_i,$$

или в виде (2.12):

$$\frac{2}{h^2} y_i = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{r}{2h}\right) y_{i-1} + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{r}{2h}\right) y_{i+1} + f_i,$$

$$\left(\frac{2}{h^2} + \frac{r}{h}\right) y_i = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{r}{h}\right) y_{i-1} + \frac{1}{h^2} y_{i+1} + f_i,\ \ 0 < i < I.$$

Отсюда видно, что схема (2.17) удовлетворяет условиям (2.13) при всех h, в то время как схема (2.16) — лишь при шагах $h \leqslant 2/r$. На концах, как и в предыдущем примере, $D=1$. Так что на основании второго признака монотонная схема (2.17) устойчива по граничным условиям при любом h, а устойчивость схемы (2.16) обеспечивается при $h \leqslant 2/r$.

3. В области $\bar{G} = \{X = (x,\ t) |\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ t \geqslant 0\}$ рассмотрим нестационарную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,\ t),\ Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r\,\frac{\partial u}{\partial x},\ r = \text{const} > 0,$$

$$0 < x < 1,\ t > 0, \tag{2.18}$$

$$u(0,\ t) = g(t),\ u(1,\ t) = \tilde{g}(t),\ u(x,\ 0) = u^0(x).$$

Введем в области $\bar{G}$ равномерную сетку

$$\bar{G}_{h\tau} = \{X_i^n = (x_i,\ t_n) | x_i = ih,\ t_n = n\tau,$$

$$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ I,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ h = 1/I,\ \tau > 0\},$$

где h — шаг по x; τ — шаг по времени t. На основе разностных операторов (2.16) и (2.17) составим на сетке $\bar{G}_{h\tau}$ четыре разностные схемы для задачи (2.18):

$$\text{(а)}\ \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \mathring{\Lambda} y_i^n + f_i^n,\ \text{(б)}\ \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \bar{\Lambda} y_i^n + f_i^n,$$

$$\text{(в)}\ \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \mathring{\Lambda} y_i^{n+1} + f_i^n,\quad \text{(г)}\ \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \bar{\Lambda} y_i^{n+1} + f_i^n,$$

где $y_i^n = y(X_i^n)$, $0 < i < I$, $n \geqslant 0$. Граничные и начальные условия аппроксимируем точно:

$$y_0^{n+1} = g^{n+1},\ y_I^{n+1} = \tilde{g}^{n+1},\ n \geqslant 0,\ y_i^0 = u_i^0,\ 0 \leqslant i \leqslant I.$$

Схемы (а) и (б)—явные, (в) и (г)—неявные.

Пользуясь третьим и четвертым признаками, проведем анализ устойчивости данных схем. Для этого представим их в виде (2.14):

$$\text{(а)}\ \frac{1}{\tau}\, y_i^{n+1} = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2}{h^2}\right) y_i^n +$$

$$+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{r}{2h}\right)y_{i-1}^n+\left(\frac{1}{h^2}-\frac{r}{2h}\right)y_{i+1}^n+f_i^n,$$

(б) $$\frac{1}{\tau}y_i^{n+1}=\left(\frac{1}{\tau}-\frac{2}{h^2}-\frac{r}{h}\right)y_i^n+$$

$$+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{r}{h}\right)y_{i-1}^n+\frac{1}{h^2}y_{i+1}^n+f_i^n,$$

(в) $$\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}\right)y_i^{n+1}=\left(\frac{1}{h^2}+\frac{r}{2h}\right)y_{i-1}^{n+1}+$$

$$+\left(\frac{1}{h^2}-\frac{r}{2h}\right)y_{i+1}^{n+1}+\frac{1}{\tau}y_i^n+f_i^n,$$

(г) $$\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}+\frac{r}{h}\right)y_i^{n+1}=\left(\frac{1}{h^2}+\frac{r}{h}\right)y_{i-1}^{n+1}+$$

$$+\frac{1}{h^2}y_{i+1}^{n+1}+\frac{1}{\tau}y_i^n+f_i^n$$

и проверим условия принципа максимума (2.13). В случае схемы (в), например,

$$A(X_i^{n+1})=\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}>0,$$

$$B(X_i^{n+1},\ X_{i-1}^{n+1})=\frac{1}{h^2}+\frac{r}{2h}>0,$$

$$B(X_i^{n+1},\ X_{i+1}^{n+1})=\frac{1}{h^2}-\frac{r}{2h},\ B(X_i^{n+1},\ X_i^n)=\frac{1}{\tau}>0,$$

$$D(X_i^{n+1})=\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}-\left(\frac{1}{h^2}+\frac{r}{2h}\right)-\left|\frac{1}{h^2}-\frac{r}{2h}\right|-\frac{1}{\tau}=$$

$$=\frac{1}{h^2}-\frac{r}{2h}-\left|\frac{1}{h^2}-\frac{r}{2h}\right|\leqslant 0,$$

$$\tilde{D}(X_i^{n+1})=D(X_i^{n+1})+\frac{1}{\tau}$$

и совершенно ясно, что эти коэффициенты удовлетворяют условиям (2.13) лишь при шагах $h\leqslant 2/r$.

Аналогично можно показать, что для схемы (а) принцип максимума выполняется при $h\leqslant 2/r$, $\tau\leqslant h^2/2$, для схемы (б) — при $\tau\leqslant h^2/(2+rh)$ и только для схемы (г) — при любых τ и h. Нетрудно убедиться, что при

этих условиях неравенство (2.15) удовлетворяется в каждом из четырех случаев.

Таким образом, схема (а) устойчива при $h \leqslant 2/r$, $\tau \leqslant h^2/2$, схема (б) — при $\tau \leqslant h^2/(2+rh)$ и произвольном h, схема (в) — при $h \leqslant 2/r$ и любом τ, монотонная схема (г) — при любом выборе τ и h. Отметим, что ограничения на τ устраняются за счет неявности схемы, а ограничения на h — монотонной аппроксимацией оператора Lu.

В случае граничных условий 2-го или 3-го рода разностные уравнения в граничных узлах будут иметь более сложный вид, чем в рассмотренных примерах. От того, насколько удачно выбрана аппроксимация граничных условий, зависят свойства разностной схемы в целом. Весьма желательно, чтобы на границе разностные уравнения имели порядок аппроксимации и оценки устойчивости не хуже, чем во внутренних узлах.

ГЛАВА 3

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ

§ 3.1. Простейшие монотонные схемы

§ 3.2. Консервативные схемы

§ 3.3. Монотонная схема повышенной точности

Свойства разностных схем для уравнений ЕК во многом определяются способом аппроксимации пространственных дифференциальных операторов, содержащихся в этих уравнениях. Особенности различных способов пространственной аппроксимации изучим на стационарных аналогах двумерных конвективных уравнений (1.11)—(1.15), (1.24)—(1.27). Если не обращать внимания на зависимость коэффициентов и правых частей от решения, каждый из этих стационарных аналогов будет выглядеть как частный случай уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \mathbf{L}_{\alpha}^{(p,r)} u - q(x)\, u = -f(x), \quad x \in G,$$

$$\mathbf{L}_{\alpha}^{(p,r)} u = \mathbf{L}_{\alpha}\, u - r_{\alpha}(x)\, p_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}}, \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{L}_{\alpha}\, u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(p_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right),$$

где $u = u(x)$ *— искомая функция;* $p_{\alpha}(x) > 0$; $q(x) \geqslant 0$; $f(x)$, $r_1(x) = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_2} \Big/ p_1(x)$, $r_2(x) = -\dfrac{\partial \zeta}{\partial x_1} \Big/ p_2(x)$, $\zeta(x)$ *— все заданные функции;* $x = (x_1, x_2)$ *— точка плоскости;* x_1 *и* x_2 *— ортогональные криволинейные координаты;* G *— расчетная область. Например, положив в (3.1) формально* $x_1 = r$, $x_2 = z$, $u = \omega$, $p_1 = p_2 = \nu r$, $\zeta = \psi - 2\nu z$, $q \equiv 0$, $f = \beta g \partial T / \partial r$, *получим стационарный аналог уравнения завихренности из системы (1.13), соответствующей цилиндрическим координатам* r, z.

Пусть в области G задана равномерная сетка G_h с шагами h_1 по x_1 и h_2 по x_2. Заменим коэффициенты p_α, r_α, q и f уравнения (3.1) сеточными функциями a_α, b_α, d и φ такими, что

$$a_{1,\,ik} = p_{1,\,i-\frac{1}{2}\,k} + O(h^2) > 0,$$

$$a_{2,\,ik} = p_{2,\,ik-\frac{1}{2}} + O(h^2) > 0,\ b_{\alpha,\,ik} = r_{\alpha,\,ik} + O(h^2), \quad (3.2)$$

$$d_{ik} = q_{ik} + O(h^2) \geqslant 0,\ \varphi_{ik} = f_{ik} + O(h^2)$$

для каждого внутреннего узла $x = x_{ik} = (x_{1,\,i},\ x_{2,\,k}) \in G_h$. Здесь $h = |h| = \max(h_1,\ h_2)$; $f_{ik} = f(x_{ik})$; $p_{i-\frac{1}{2}\,k} = p_{ik}^{(-0,5_1)} = p\left(x_{1,\,i} - \frac{1}{2}h_1,\ x_{2,\,k}\right)$; $p_{ik-\frac{1}{2}} = p_{ik}^{(-0,5_2)} = p\left(x_{1,i},\ x_{2,\,k} - \frac{1}{2}h_2\right)$.

В безындексной форме условия (3.2) выглядят так:

$$a_\alpha = p_\alpha^{(-0,5\alpha)} + O(h^2) > 0,\ b_\alpha = r_\alpha + O(h^2),$$

$$d = q + O(h^2) \geqslant 0,\ \varphi = f + O(h^2),\ \alpha = 1,\ 2.$$

В простейшем случае можно положить

$$a_{1,\,ik} = p_{1,\,i-\frac{1}{2}\,k},\ a_{2,\,ik} = p_{2,\,ik-\frac{1}{2}},$$

$$b_{\alpha,\,ik} = r_{\alpha,\,ik},\ d_{ik} = q_{ik},\ \varphi_{ik} = f_{ik}$$

или, например,

$$a_{1,\,ik} = \frac{1}{2}(p_{1,\,i-1\,k} + p_{1,\,ik}),\ a_{2,\,ik} = \frac{1}{2}(p_{2,\,ik-1} + p_{2,\,ik}),$$

$$b_{1,\,ik} = \frac{1}{p_{1,\,ik}}\zeta_{x_2}^{\circ} = \frac{1}{p_{1,\,ik}}\,\frac{1}{2h_2}(\zeta_{ik+1} - \zeta_{ik-1}),$$

$$b_{2,\,ik} = -\frac{1}{p_{2,\,ik}}\zeta_{x_1}^{\circ} = -\frac{1}{p_{2,\,ik}}\,\frac{1}{2h_1}(\zeta_{i+1\,k} - \zeta_{i-1\,k}).$$

Для достаточно гладких функций при условиях (3.2) правомерны асимптотические разложения:

$$a_\alpha u_{\overline{x}_\alpha} = a_\alpha \frac{u - u^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha} = \left(p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h^2) =$$

$$= p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} h_\alpha \mathbf{L}_\alpha u + O(h^2),$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} u_{x_\alpha} = a_\alpha^{(+1_\alpha)} \frac{u^{(+1_\alpha)} - u}{h_\alpha} = \left(p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(+0,5_\alpha)} + O(h^2) = \tag{3.3}$$

$$= p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha \mathbf{L}_\alpha u + O(h^2),$$

где $u = u_{ik}$; $u^{(\pm 1_1)} = u_{i\pm 1\, k} = u(x_{1,\,i} \pm h_1,\ x_{2,\,k})$; $u^{(\pm 1_2)} = u_{i\, k\pm 1} = u(x_{1,\,i},\ x_{2,\,k} \pm h_2)$.

На протяжении этой главы нас не будут интересовать условия на границе области G. Поэтому разностное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (3.1), станем для краткости называть схемой, как и разностную задачу в целом.

Из примеров, рассмотренных в п. 2.3.3, должно быть ясно, что не всякая схема, аппроксимирующая уравнение (3.1), будет монотонной. Так, на основе симметричной *(центральной)* аппроксимации производных можно обобщить схему (2.16) на случай уравнения (3.1) следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \mathring{\Lambda}_\alpha^{(p,r)} y - dy = -\varphi,\ x \in G_h, \tag{3.4}$$

$$\mathring{\Lambda}_\alpha^{(p,r)} y = \Lambda_\alpha y - \frac{1}{2} b_\alpha (a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}),$$

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} (a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} - a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}).$$

В силу условий (3.2) и разложений (3.3) схема (3.4) аппроксимирует уравнение (3.1) со 2-м порядком. Однако принцип максимума (2.13) для нее верен лишь при достаточно малых шагах $h_\alpha \leqslant 2/|b_\alpha|$.

При построении схем, удовлетворяющих принципу максимума при любых шагах h_1 и h_2, т. е. монотонных, используется идея замены первых производных несимметричными *(односторонними)* разностями, которые выбираются с учетом знака коэффициентов при этих производных. Точнее, производная $\partial u/\partial x_\alpha$ в узле $x \in G_h$

аппроксимируется формулой левых разностей $u_{\bar{x}_\alpha}$, если коэффициент b_α положителен, а при отрицательном b_α применяется формула правых разностей u_{x_α}. Приоритет на эту идею признают за статьей [17]. Схемы, полученные указанным способом, называются также *схемами с разностями против потока* (имеется в виду, что b_α совпадает по знаку с x_α-компонентой скорости конвективного движения в уравнениях переноса тепла и завихренности).

Рассмотрим для уравнения (3.1) несколько простых схем этого типа.

3.1.1. Схема 1-го порядка аппроксимации. В каждом узле $x=x_{i\,k}\in G_h$ подвергнем аппроксимации конвективные члены уравнения (3.1) разностями, ориентированными против потока, положив

$$\left(r_1 p_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{i\,k} \sim \begin{cases} b_{1,\,i\,k} a_{1,\,i\,k} \dfrac{u_{i\,k}-u_{i-1\,k}}{h_1} & \text{при } b_{1,\,i\,k} \geqslant 0 \\ b_{1,\,i\,k} a_{1,\,i+1\,k} \dfrac{u_{i+1\,k}-u_{i\,k}}{h_1} & \text{при } b_{1,\,i\,k} < 0 \end{cases} =$$

$$= (b_1^+ a_1 u_{\bar{x}_1} + b_1^- a_1^{(+1_1)} u_{x_1})_{i\,k},$$

$$\left(r_2 p_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{i\,k} \sim \begin{cases} b_{2,\,i\,k} a_{2,\,i\,k} \dfrac{u_{i\,k}-u_{i\,k-1}}{h_2} & \text{при } b_{2,\,i\,k} \geqslant 0 \\ b_{2,\,i\,k} a_{2,\,i\,k+1} \dfrac{u_{i,\,k+1}-u_{i\,k}}{h_2} & \text{при } b_{2,\,i\,k} < 0 \end{cases} =$$

$$= (b_2^+ a_2 u_{\bar{x}_2} + b_2^- a_2^{(+1_2)} u_{x_2})_{i\,k},$$

где $\sim$ — знак аппроксимации;

$$b^+ = \frac{1}{2}(b+|b|) = \begin{cases} b, & \text{если } b \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } b < 0, \end{cases}$$

$$b^- = \frac{1}{2}(b-|b|) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \geqslant 0, \\ b, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

В остальном сохраняя структуру разностного уравнения (3.4), получаем схему вида

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha^{(p,\,r)} y - dy = -\varphi, \quad x \in G_h, \tag{3.5}$$

$$\Lambda_\alpha^{(p,\,r)} y = \Lambda_\alpha y - b_\alpha^+ a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^- a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha},$$

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha},$$

коэффициенты которой вычисляются исходя из требований (3.2).

Рассмотрим невязку $\delta = \delta_h$ схемы (3.5) в узле $x \in G_h$

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha^{(p,\,r)} u - du + \varphi - \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)} u - qu + f \right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \psi_\alpha + (q - d)\, u + (\varphi - f),$$

обозначив $\psi_\alpha = \Lambda_\alpha^{(p,\,r)} u - \mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)} u$ погрешность аппроксимации оператора $\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)} u$ разностным оператором $\Lambda_\alpha^{(p,\,r)} u$ в точке x. Запишем ψ_α в виде суммы:

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^{(1)} + \psi_\alpha^{(2)}, \quad \psi_\alpha^{(1)} = \Lambda_\alpha u - \mathbf{L}_\alpha u,$$

$$\psi_\alpha^{(2)} = r_\alpha p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - b_\alpha^+ a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^- a_\alpha^{(+1\alpha)} u_{x_\alpha}, \quad \alpha = 1,\ 2.$$

Пользуясь условиями (3.2) и разложениями (3.3), находим

$$\psi_\alpha^{(1)} = \frac{1}{h_\alpha} (a_\alpha^{(+1\alpha)} u_{x_\alpha} - a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha}) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = O(h^2),$$

$$\psi_\alpha^{(2)} = r_\alpha p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} b_\alpha (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} + a_\alpha^{(+1\alpha)} u_{x_\alpha}) +$$

$$+ \frac{1}{2} |b_\alpha| (a_\alpha^{(+1\alpha)} u_{x_\alpha} - a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha}) = \frac{1}{2} h_\alpha |r_\alpha| \mathbf{L}_\alpha u + O(h^2) = O(h),$$

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^{2} R_\alpha^* \mathbf{L}_\alpha u + O(h^2), \quad h = \max(h_1,\ h_2),$$

где $R_\alpha^* = h_\alpha |r_\alpha|/2$—разностное число Рейнольдса [12]. Поскольку $R_\alpha^* = O(h)$, то и $\delta = O(h)$ при $r_\alpha \not\equiv 0$. Следовательно, при $r_\alpha \not\equiv 0$ $\|\delta\|_{G_h} = O(h)$, т. е. у схемы (3.5)—1-й порядок аппроксимации.

Аппроксимационная вязкость μ_α, вносимая в узле x оператором $\Lambda_\alpha^{(p,\,r)}$ схемы (3.5), имеет величину

$$\mu_\alpha = R_\alpha^* = \frac{1}{2} h_\alpha |r_\alpha|.$$

Проверим схему (3.5) на устойчивость. Для этого представим ее в виде (2.12):

$$Cy = \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha y^{(-1_\alpha)} + B_\alpha y^{(+1_\alpha)}) + \varphi, \qquad (3.6)$$

где

$$A_\alpha = a_\alpha (1 + h_\alpha b_\alpha^+)/h_\alpha^2;$$

$$B_\alpha = a_\alpha^{(+1_\alpha)} (1 - h_\alpha b_\alpha^-)/h_\alpha^2;$$

$$C = \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) + d.$$

Так как $a_\alpha > 0$, $d \geqslant 0$, $b_\alpha^+ \geqslant 0$, $b_\alpha^- \leqslant 0$, то имеем $A_\alpha > 0$, $B_\alpha > 0$,

$$D \equiv C - \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) \geqslant 0,$$

т. е. для коэффициентов схемы (3.5) условия принципа максимума (2.13) выполняются при всех h_1, h_2. Иными словами, схема (3.5) не накладывает никаких ограничений на выбор шагов h_1 и h_2, обеспечивающих устойчивость линейной разностной задачи (см. в п. 2.3.2 первый и второй признаки устойчивости).

В литературе можно найти немало примеров использования этой схемы для расчета задач ЕК, особенно в ранних работах.

3.1.2. Схемы Самарского и Джакупова. Чтобы улучшить аппроксимационные свойства схемы (3.5), составим более общее разностное уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \tilde{\Lambda}_\alpha^{(p,\,r)} y - dy = -\varphi, \quad x \in G_h, \qquad (3.7)$$

$$\tilde{\Lambda}_\alpha^{(p,\,r)} y = \varkappa_\alpha \Lambda_\alpha y - b_\alpha^+ a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^- a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}$$

с параметром $\varkappa_\alpha = \varkappa_\alpha(x) > 0$. Если записать его в виде (3.6), получим

$$A_\alpha = a_\alpha (\varkappa_\alpha + h_\alpha b_\alpha^+)/h_\alpha^2 > 0,$$

$$B_\alpha = a_\alpha^{(+1_\alpha)} (\varkappa_\alpha - h_\alpha b_\alpha^-)/h_\alpha^2 > 0,$$

$$C = \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) + d \geqslant \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha).$$

Следовательно, схема (3.7) монотонна.

Распишем невязку уравнения (3.7), использовав данные о погрешности аппроксимации схемы (3.5):

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^{2} (\tilde{\Lambda}_\alpha^{(p,\,r)} u - \mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)} u) + (q - d)\, u + (\varphi - f) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} (R_\alpha + \varkappa_\alpha - 1)\, \mathbf{L}_\alpha u + O(h^2), \quad R_\alpha = \frac{1}{2} h_\alpha |b_\alpha|.$$

При $\varkappa_\alpha \equiv 1$ схема (3.7), очевидно, совпадает с (3.5). Однако надлежащим выбором коэффициентов $\varkappa_\alpha$ порядок аппроксимации можно повысить. Зададим $\varkappa_\alpha$ по формуле Самарского [12]:

$$\varkappa_\alpha = 1/(1 + R_\alpha), \quad \alpha = 1,\ 2. \tag{3.8}$$

Тогда

$$R_\alpha + \varkappa_\alpha - 1 = \frac{1 + R_\alpha + R_\alpha^2}{1 + R_\alpha} - 1 = \frac{R_\alpha^2}{1 + R_\alpha} = O(h^2),$$

так как $R_\alpha = O(h)$. Отсюда имеем $\delta = O(h^2)$ и $\|\delta\|_{G_h} = O(h^2)$, т. е. монотонная схема Самарского (3.7), (3.8) аппроксимирует уравнение (3.1) со 2-м порядком.

Полагая

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= (1 + R_2)/(1 + R_1 + R_2), \\ \varkappa_2 &= (1 + R_1)/(1 + R_1 + R_2), \end{aligned} \tag{3.9}$$

приходим к монотонной схеме, рассмотренной Джакуповым в работе [18]. Поскольку в этом случае

$$R_\alpha + \varkappa_\alpha - 1 = \frac{1 + R_1 + R_2 + R_\alpha (R_1 + R_2)}{1 + R_1 + R_2} - 1 =$$

$$= \frac{R_\alpha (R_1 + R_2)}{1 + R_1 + R_2} = O(h^2),$$

то аппроксимация у схемы (3.7), (3.9) также 2-го порядка.

Подсчитаем аппроксимационную вязкость: в схеме Самарского

$$\mu_\alpha = (R_\alpha^*)^2/(1 + R_\alpha^*),$$

а в схеме Джакупова

$$\mu_\alpha = R_\alpha^*(R_1^* + R_2^*)/(1 + R_1^* + R_2^*).$$

Легко находим, что по данному показателю схема Самарского предпочтительнее. В практике численного моделирования конвективных процессов эта схема применяется достаточно широко.

§ 3.2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СХЕМЫ

Уравнения конвекции выражают несколько физических законов сохранения (тепла, массы, завихренности). Дифференциальные уравнения получаются из законов сохранения *(уравнений баланса)* при достаточной гладкости функций, входящих в эти уравнения. В теории и практике метода сеток широко известен *интегро-интерполяционный метод* построения разностных схем [12, 14], когда дискретизации на сеточном шаблоне подвергается не дифференциальное уравнение, а соответствующее ему уравнение баланса. Метод позволяет конструировать схемы, отражающие в дискретной форме интегральные законы сохранения на сколь угодно больших и на сколь угодно малых участках сеточной области. Такие схемы называются *консервативными,* или *дивергентными.* Консервативные схемы, как правило, улучшают точность решения, особенно в качественном отношении. Разностный оператор консервативных схем обладает свойством самосопряженности, которое является одним из определяющих условий сходимости различных итерационных алгоритмов решения разностных задач.

3.2.1. Интегро-интерполяционный метод построения консервативных схем. Продемонстрируем интегро-интерполяционный метод на примере стационарного линейного уравнения (3.1). Заметим, что его коэффициенты связаны соотношением

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(p_\alpha r_\alpha) = 0, \qquad (3.10)$$

выражающим условие неразрывности в конвективных уравнениях, приведенных к функции тока и завихреннос-

ти. Иначе говоря, (3.10) можно трактовать как дифференциальное представление закона сохранения массы для несжимаемой жидкости.

Прежде всего необходимо найти выражение для закона сохранения, соответствующего уравнению (3.1). С этой целью запишем уравнение (3.1) при помощи условия (3.10) в консервативной форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} L_\alpha^{(p,\,r)} u - qu + f = 0, \tag{3.11}$$

$$L_\alpha^{(p,\,r)} u = p_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - r_\alpha u \right),$$

и проинтегрируем (3.11) по произвольной площади D из области определения G:

$$\iint\limits_D \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} L_\alpha^{(p,\,r)} u - qu + f \right) dx_1 dx_2 = 0.$$

Переходя от двойного интеграла к контурному по формуле Грина, имеем

$$\oint\limits_C (L_1^{(p,\,r)} u dx_2 - L_2^{(p,\,r)} u dx_1) -$$

$$- \iint\limits_D q u dx_1 dx_2 + \iint\limits_D f dx_1 dx_2 = 0, \tag{3.12}$$

где C — граница области D. Соотношение (3.12) выражает некоторый закон сохранения для любой ограниченной и односвязной области $D \subseteq G$.

Аналогично из формулы (3.10) получим закон сохранения массы в области D:

$$\oint\limits_C (p_1 r_1 dx_2 - p_2 r_2 dx_1) = 0. \tag{3.13}$$

Введем неравномерную сетку

$$\hat{G}_h = \{x_{i\,k} = (x_{1,\,i},\ x_{2,\,k}) \in G \mid x_{1,\,i} =$$

$$= x_{1,\,i-1} + h_{1,\,i},\ x_{2,\,k} = x_{2,\,k-1} + h_{2,\,k}\}.$$

Фрагмент такой сетки изображен на рис. 3.1.

Выберем в качестве области интегрирования D элемен-

тарную площадку $D_{i\,k}$ (на рисунке заштрихована), ограниченную кривыми

$$x_1 = x_{1,\,i-\frac{1}{2}} = x_{1,\,i} - \frac{1}{2}\,h_{1,\,i},$$

$$x_1 = x_{1,\,i+\frac{1}{2}} = x_{1,\,i} + \frac{1}{2}\,h_{1,\,i+1},$$

$$x_2 = x_{2,\,k-\frac{1}{2}} = x_{2,\,k} - \frac{1}{2}\,h_{2,\,k},$$

$$x_2 = x_{2,\,k+\frac{1}{2}} = x_{2,\,k} + \frac{1}{2}\,h_{2,\,k+1},$$

параллельными координатным линиям и проведенными на расстоянии полушага от узла $x_{i\,k} = (x_{1,\,i},\ x_{2,\,k})$. Интеграл по контуру в выражении (3.12) тогда трансформируется следующим образом:

$$\oint_C (L_1^{(p,\,r)} u dx_2 - L_2^{(p,\,r)} u dx_1) =$$

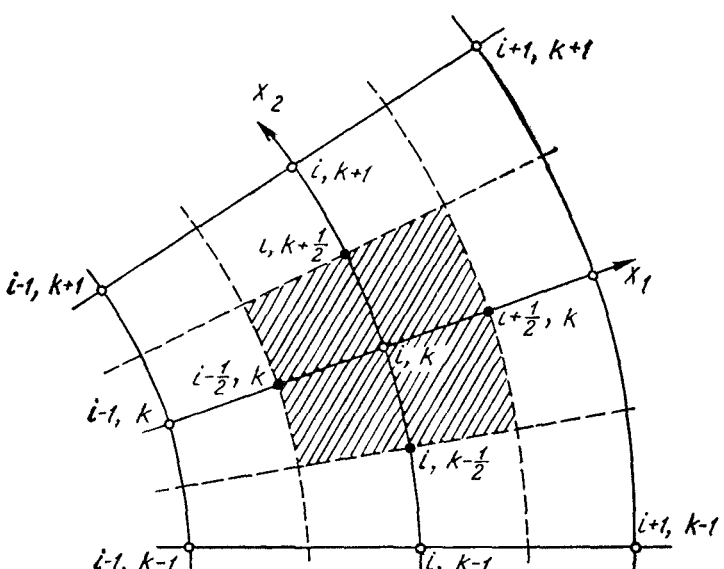


Рис. 3.1. Фрагмент сетки с областью интегрирования

$$= -\int_{x_{1,\,i-\frac{1}{2}}}^{x_{1,\,i+\frac{1}{2}}} \left(L_2^{(p,\,r)}u\right)_{k-\frac{1}{2}}\,dx_1 + \int_{x_{2,\,k-\frac{1}{2}}}^{x_{2,\,k+\frac{1}{2}}} \left(L_1^{(p,\,r)}u\right)_{i+\frac{1}{2}}\,dx_2 -$$

$$- \int_{x_{1,\,i+\frac{1}{2}}}^{x_{1,\,i-\frac{1}{2}}} \left(L_2^{(p,\,r)}u\right)_{k+\frac{1}{2}}\,dx_1 + \int_{x_{2,\,k+\frac{1}{2}}}^{x_{2,\,k-\frac{1}{2}}} \left(L_1^{(p,\,r)}u\right)_{i-\frac{1}{2}}\,dx_2.$$

Следовательно, для площадки $D_{i\,k}$ уравнение баланса (3.12) примет вид

$$\hbar_{1,\,i}\left[\int_{x_{2,\,k-\frac{1}{2}}}^{x_{2,\,k+\frac{1}{2}}} \left(L_1^{(p,\,r)}u\right)_{i-\frac{1}{2}}\,dx_2\right]_{\hat{x}_1} +$$

$$+\hbar_{2,\,k}\left[\int_{x_{1,\,i-\frac{1}{2}}}^{x_{1,\,i+\frac{1}{2}}} \left(L_2^{(p,\,r)}u\right)_{k-\frac{1}{2}}\,dx_1\right]_{\hat{x}_2} -$$

$$- \int_{x_{1,\,i-\frac{1}{2}}}^{x_{1,\,i+\frac{1}{2}}} \int_{x_{2,\,k-\frac{1}{2}}}^{x_{2,\,k+\frac{1}{2}}} (qu-f)\,dx_1dx_2 = 0, \qquad (3.14)$$

где

$$\hbar_{1,\,i} = \frac{1}{2}\,(h_{1,\,i} + h_{1,\,i+1}); \quad \hbar_{2,\,k} = \frac{1}{2}\,(h_{2,\,k} + h_{2,\,k+1}),$$

и заимствованы обозначения из [12] для разностных производных на неравномерной сетке.

Аналогично запишем для ячейки $D_{i\,k}$ закон сохранения массы (3.13):

$$\hbar_{1,\,i}\left[\int_{x_{2,\,k-\frac{1}{2}}}^{x_{2,\,k+\frac{1}{2}}} (p_1r_1)_{i-\frac{1}{2}}\,dx_2\right]_{\hat{x}_1} +$$

$$+\hbar_{2,\,k}\Big[\int\limits_{x_{1,\,i+\frac{1}{2}}}^{x}(p_2r_2)_{k-\frac{1}{2}}\,dx_1\Big]_{\hat{x}_2}=0. \qquad (3.15)$$

Следуя далее интегро-интерполяционному методу, осуществляем дискретизацию уравнения баланса (3.14) путем локальной интерполяции подынтегральных функций. От способа интерполяции зависят устойчивость, экономичность, аппроксимационные свойства разностной схемы. Проще всего аппроксимировать подынтегральные функции некоторыми их средними постоянными значениями на отрезке интегрирования:

$$u\approx\text{const}=u_{i\,k},\ q\approx\text{const}=d_{i\,k},\ f\approx\text{const}=\varphi_{i\,k}$$

при $x\in D_{i\,k}$;

$$L_1^{(p,\,r)}u\approx\text{const}=\lambda_1^{(p,\,r)}u_{i\,k},$$

$$p_1\approx\text{const}=a_{1,\,i\,k},\ r_1\approx\text{const}=b_{1,\,i\,k}$$

при $x_1=x_{1,\,i-\frac{1}{2}}$, $x_{2,\,k-\frac{1}{2}}\leqslant x_2\leqslant x_{2,\,k+\frac{1}{2}}$;

$$L_2^{(p,\,r)}u\approx\text{const}=\lambda_2^{(p,\,r)}u_{i\,k},$$

$$p_2\approx\text{const}=a_{2,\,i\,k},\ r_2\approx\text{const}=b_{2,\,i\,k}$$

при $x_2=x_{2,\,k-\frac{1}{2}}$, $x_{1,\,i-\frac{1}{2}}\leqslant x_1\leqslant x_{1,\,i+\frac{1}{2}}$. Использовав эти приближения в уравнении (3.14), получим схему

$$\hbar_{1,\,i}\hbar_{2,\,k}(\lambda_1^{(p,\,r)}y_{i\,k})_{\hat{x}_1}+\hbar_{1,\,i}\hbar_{2,\,k}(\lambda_2^{(p,\,r)}y_{i\,k})_{\hat{x}_2}-$$
$$-\hbar_{1,\,i}\hbar_{2,\,k}d_{i\,k}y_{i\,k}+\hbar_{1,\,i}\hbar_{2,\,k}\varphi_{i\,k}=0, \qquad (3.16)$$

где $\lambda_1^{(p,\,r)}$ и $\lambda_2^{(p,\,r)}$ — разностные операторы, определенные на выбранном шаблоне сетки $\hat{G}_h$ и аппроксимирующие дифференциальные операторы $L_1^{(p,\,r)}$ и $L_2^{(p,\,r)}$.

Чтобы отразить соответствующие свойства коэффициентов дифференциального уравнения, будем, как и в § 3.1, задавать

$$a_\alpha>0,\ d\geqslant 0 \text{ при всех } x\in\hat{G}_h, \qquad (3.17)$$

а формулы для вычисления b_1 и b_2 выберем так, чтобы из уравнения баланса (3.15) получилось точное равенство

$$\hbar_{1,\,i}\hbar_{2,\,k}[(a_1b_1)_{i\,k}]_{\hat{x}_1} + \hbar_{1,\,i}\hbar_{2,\,k}[(a_2b_2)_{i\,k}]_{\hat{x}_2} = 0. \quad (3.18)$$

Условия (3.17), (3.18) удовлетворяются, например, если взять

$$a_1 = a_{1,\,i\,k} = p_{1,\,i-\frac{1}{2}\,k}, \quad a_2 = a_{2,\,i\,k} = p_{2,\,i\,k-\frac{1}{2}},$$

$$d = d_{i\,k} = q_{i\,k}, \quad b_1 = b_{1,\,i\,k} = \frac{1}{a_{1,\,i\,k}}\left(\frac{\zeta_{i-1\,k}+\zeta_{i\,k}}{2}\right)_{\mathring{x}_2} =$$

$$= \frac{1}{2p_{1,\,i-\frac{1}{2}\,k}}\left(\frac{\zeta_{i-1\,k+1}-\zeta_{i-1\,k-1}}{2\hbar_{2,\,k}} + \frac{\zeta_{i\,k+1}-\zeta_{i\,k-1}}{2\hbar_{2,\,k}}\right),$$

$$b_2 = b_{2,\,i\,k} = \frac{1}{a_{2,\,i\,k}}\left(-\frac{\zeta_{i\,k-1}+\zeta_{i\,k}}{2}\right)_{\mathring{x}_1} = \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{2p_{2,\,i\,k-\frac{1}{2}}}\left(-\frac{\zeta_{i+1\,k-1}-\zeta_{i-1\,k-1}}{2\hbar_{1,\,i}} - \frac{\zeta_{i+1\,k}-\zeta_{i-1\,k}}{2\hbar_{1,\,i}}\right).$$

Уравнения (3.16) и (3.18) есть разностное представление интегральных законов сохранения (3.14) и (3.15) для контрольной области $D_{i\,k}$.

Рассмотрим теперь произвольный участок области G, составленный из площадок $D_{i\,k}$:

$$D_* = \bigcup_{i=i_1}^{i_2}\bigcup_{k=k_1}^{k_2} D_{i\,k} = (x_{1,\,i_1-\frac{1}{2}} \leqslant x_1 \leqslant x_{1,\,i_2+\frac{1}{2}},$$

$$x_{2,\,k_1-\frac{1}{2}} \leqslant x_2 \leqslant x_{2,\,k_2+\frac{1}{2}}) \subset G, \; i_2 > i_1, \; k_2 > k_1.$$

Суммируя (3.14) по индексам $i = i_1, \; i_1+1, \; \ldots, \; i_2, \; k = k_1, \; k_1+1, \; \ldots, \; k_2$, получаем интегральное уравнение баланса для области D_*:

$$\int_{x_{2,\,k_1-\frac{1}{2}}}^{x_{2,\,k_2+\frac{1}{2}}} L_1^{(p,\,r)}u\Big|_{x_{1,\,i_1-\frac{1}{2}}}^{x_{1,\,i_2+\frac{1}{2}}} dx_2 +$$

$$+ \int_{x_{1,\,i_1-\frac{1}{2}}}^{x_{1,\,i_2+\frac{1}{2}}} L_2^{(p,\,r)}u\Big|_{x_{2,\,k_1-\frac{1}{2}}}^{x_{2,\,k_2+\frac{1}{2}}} dx_1 -$$

$$- \int\limits_{x_{1,\, i_1 - \frac{1}{2}}}^{x_{1,\, i_2 + \frac{1}{2}}} \int\limits_{x_{2,\, k_1 - \frac{1}{2}}}^{x_{2,\, k_2 + \frac{1}{2}}} (qu - f)\, dx_1 dx_2 = 0. \qquad (3.20)$$

Поступая аналогично с формулой (3.16), приходим к выражению

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \hbar_{2,\, k} \lambda_1^{(p,\, r)} y_k \Big|_{i_1}^{i_2+1} + \sum_{i=i_1}^{i_2} \hbar_{1,\, i} \lambda_2^{(p,\, r)} y_i \Big|_{k_1}^{k_2+1} -$$

$$- \sum_{i=i_1}^{i_2} \left[\hbar_{1,\, i} \sum_{k=k_1}^{k_2} \hbar_{2,\, k} (d_{i\, k} y_{i\, k} - \varphi_{i\, k}) \right] = 0. \qquad (3.21)$$

Легко убедиться, что (3.21) есть дискретный аналог закона сохранения (3.20) в сеточной области D_*. Поэтому схема (3.16) является консервативной для линейного уравнения (3.1). Таким же способом нетрудно показать, что формула (3.18) обладает консервативностью относительно закона сохранения массы (3.13).

Представим схему (3.16) и условие неразрывности (3.18) в безындексной форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\lambda_\alpha^{(p,\, r)} y)_{\hat{x}_\alpha} - dy = -\varphi, \qquad (3.22)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha b_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} = 0. \qquad (3.23)$$

В случае равномерной сетки G_h с шагами $h_{1,\, i} = h_{1,\, i+1} = h_1$, $h_{2,\, k} = h_{2,\, k+1} = h_2$ эти уравнения примут вид

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\lambda_\alpha^{(p,\, r)} y)_{x_\alpha} - dy = -\varphi, \qquad (3.24)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha b_\alpha)_{x_\alpha} = 0. \qquad (3.25)$$

Разностную схему для двумерной стационарной задачи ЕК будем считать *консервативной*, если каждое из разностных уравнений переноса тепла, завихренности и

функции тока можно представить в виде (3.22) или (3.24) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (3.23) или (3.25). Схемы, рассмотренные в § 3.1, этими свойствами не обладают и поэтому не являются консервативными.

3.2.2. Схема с центральными разностями. Пусть в области G введена равномерная сетка G_h. Для дифференциального оператора

$$L_1^{(p,\,r)}u_{i-\frac{1}{2}} = p_{1,\,i-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{i-\frac{1}{2}} - r_{1,\,i-\frac{1}{2}}\,u_{i-\frac{1}{2}}\right],$$

$$x_{2,\,k-\frac{1}{2}} \leqslant x_2 \leqslant x_{2,\,k+\frac{1}{2}},$$

действующего на границе $x_1 = x_{1,\,i-\frac{1}{2}}$ области $D_{i\,k}$, рассмотрим приближение

$$L_1^{(p,\,r)}u_{i-\frac{1}{2}} \approx a_{1,\,i\,k}\left(\frac{u_{i\,k}-u_{i-1\,k}}{h_1} - b_{1,\,i\,k}u_{i-\frac{1}{2}\,k}\right). \quad (3.26)$$

Если усреднить промежуточное значение $u_{i-\frac{1}{2}\,k}$ некоторой комбинацией значений функции $u(x)$ в узлах шаблона, то правую часть приближенного равенства (3.26) можно принять за разностный оператор $\lambda_1^{(p,\,r)}u_{i\,k}$.

Заменим $u_{i-\frac{1}{2}\,k}$ средним арифметическим $(u_{i-1\,k} + u_{i\,k})/2$ и построим разностный оператор

$$\lambda_1^{(p,\,r)}u_{i\,k} = a_{1,\,i\,k}\left[u_{\overline{x}_1} - \frac{1}{2}\,b_{1,\,i\,k}(u_{i-1\,k}+u_{i\,k})\right].$$

Аналогичным образом составим оператор $\lambda_2^{(p,\,r)}u_{i\,k}$. В результате получим консервативную схему вида (3.24):

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\lambda_\alpha^{(p,\,r)}y)_{x_\alpha} - dy = -\varphi, \quad (3.27)$$

$$\lambda_\alpha^{(p,\,r)}y = a_\alpha\left[y_{\overline{x}_\alpha} - \frac{1}{2}\,b_\alpha(y^{(-1_\alpha)}+y)\right].$$

Коэффициенты a_α, b_α, d и φ зададим, удовлетворяя условиям (3.17), (3.25) и требованиям аппроксимации

$$a_\alpha = p_\alpha^{(-0,5_\alpha)} + O(h^2) > 0, \quad b_\alpha = r_\alpha^{(-0,5_\alpha)} + O(h^2), \quad (3.28)$$

$$d = q + O(h^2) \geqslant 0, \quad \varphi = f + O(h^2), \quad h = \max(h_1,\ h_2).$$

Представим схему (3.27) в виде (3.6) и вычислим коэффициенты

$$A_\alpha = a_\alpha\left(1+\frac{1}{2}\,h_\alpha b_\alpha\right)\Big/\,h_\alpha^2,$$

$$B_\alpha = a_\alpha^{(+1\alpha)}\left(1-\frac{1}{2}\,h_\alpha b_\alpha^{(+1\alpha)}\right)\Big/\,h_\alpha^2,$$

$$C=\sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha+B_\alpha)+d+\sum_{\alpha=1}^{2}[(a_\alpha b_\alpha)_{x_\alpha}.$$

В силу свойств (3.17) и (3.25) ясно, что схема удовлетворяет принципу максимума при $A_\alpha \geqslant 0$, $B_\alpha \geqslant 0$. Решая эти неравенства, находим ограничения на шаги:

$$h_\alpha \leqslant 2/\max_{G_h}|b_\alpha|, \quad \alpha = 1,\ 2.$$

Следовательно, схема (3.27) не является монотонной.

Рассмотрим погрешность аппроксимации этой схемы:

$$\delta=\sum_{\alpha=1}^{2}\psi_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{2}(a_\alpha b_\alpha)_{x_\alpha}u+(q-d)\,u+(\varphi-f),$$

$$\psi_\alpha=\psi_\alpha^{(1)}+\psi_\alpha^{(2)},\quad \psi_\alpha^{(1)}=(a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(p_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$\psi_\alpha^{(2)}=r_\alpha p_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{2}\,[(a_\alpha b_\alpha)^{(+1\alpha)}u_{x_\alpha}+a_\alpha b_\alpha u_{\bar{x}_\alpha}].$$

В п. 3.1.1 получена оценка $\psi_\alpha^{(1)}=O(h^2)$, а из разложений (3.3) находим $\psi_\alpha^{(2)}=O(h^2)$. Отсюда следует оценка $\psi_\alpha = O(h^2)$. На основании этой оценки и условий (3.25), (3.28) имеем $\delta=O(h^2)$, т. е. схема (3.27) — 2-го порядка аппроксимации. При этом аппроксимационная вязкость в ней не возникает: $\mu_\alpha \equiv 0$, $\alpha = 1,\ 2$.

3.2.3. Монотонная схема 1-го порядка аппроксимации. На равномерной сетке получим консервативную схему, удовлетворяющую принципу максимума при любых h_1 и h_2. Разностный оператор $\lambda_1^{(p,\,r)}$ построим, использовав то же соотношение (3.26). Однако аппроксимацию промежуточного значения $u_{\,i-\frac{1}{2}\,h}$ проведем не так, как в схеме (3.27), а в зависимости от знака коэффициента $b_{1,\,ih}$, характеризующего направление конвективного потока в точ-

ке $x_{i-\frac{1}{2}k}$. В случае $b_{1,ik}<0$ будем вместо $u_{i-\frac{1}{2}k}$ брать u_{ik}, а при $b_{1,ik}>0$ заменим $u_{i-\frac{1}{2}k}$ на u_{i-1k}.

Аналогично конструируя и оператор $\lambda_2^{(p,r)}$, получаем консервативную схему

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\lambda_\alpha^{(p,r)}y)_{x_\alpha}-dy=-\varphi, \tag{3.29}$$

$$\lambda_\alpha^{(p,r)}y=a_\alpha(y_{\bar{x}_\alpha}-b_\alpha^{+}\,y^{(-1\alpha)}-b_\alpha^{-}y),$$

$$b_\alpha^{\pm}=\frac{1}{2}(b_\alpha\pm|b_\alpha|).$$

Вычисление коэффициентов подчиним требованиям (3.25), (3.28).

Приведенная к виду (3.6) схема имеет коэффициенты

$$A_\alpha=a_\alpha(1+h_\alpha b_\alpha^{+})/h_\alpha^2>0,$$

$$B_\alpha=a_\alpha^{(+1\alpha)}[1-h_\alpha(b_\alpha^{-})^{(+1\alpha)}]/h_\alpha^2>0,$$

$$C=\sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha+B_\alpha)+d+\sum_{\alpha=1}^{2}(a_\alpha b_\alpha)_{x_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha+B_\alpha)+d,$$

удовлетворяющие условиям (2.13) принципа максимума при любых шагах сетки.

При условиях (3.25) и (3.28) невязку монотонной схемы (3.29) можно записать как

$$\delta=\sum_{\alpha=1}^{2}(\psi_\alpha^{(1)}+\psi_\alpha^{(2)}+\psi_\alpha^{(3)})+O(h^2),$$

где $\psi_\alpha^{(1)}$ и $\psi_\alpha^{(2)}$ — такие же, как и в п. 3.2.2;

$$\psi_\alpha^{(3)}=\frac{1}{2}h_\alpha(a_\alpha|b_\alpha|u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2}(|b_\alpha^{(+1\alpha)}|-|b_\alpha|)\,p_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+O(h).$$

Так как

$$\big||b_\alpha^{(+1\alpha)}|-|b_\alpha|\big|\leqslant|b_\alpha^{(+1\alpha)}-b_\alpha|=h_\alpha\left|\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\alpha}+O(h)\right|=O(h),$$

то $\psi_\alpha^{(3)} = O(h)$ и $\delta = O(h)$, т. е. схема (3.29) аппроксимирует уравнение (3.1) с 1-м порядком. Схемная вязкость у нее такой же величины, как и в неконсервативном случае (3.5).

Схема (3.29) — одна из самых распространенных и апробированных схем аппроксимации конвективных уравнений. На ее основе написана книга [19]. Оригинальный вариант применения этой схемы, связанный с компенсацией аппроксимационной вязкости при малых значениях разностного числа Рейнольдса и пренебрежением диффузионными членами в узлах с большими разностными числами Рейнольдса, предложен в [20].

3.2.4. Монотонная схема 2-го порядка аппроксимации. Не расширяя сеточного шаблона, модифицируем схему (3.29) так, чтобы повысился порядок аппроксимации при сохранении монотонных и консервативных свойств. Для этого введем в разностный оператор схемы (3.29) дополнительные коэффициенты при диффузионных членах — как в схеме Самарского (3.7), (3.8), но с учетом консервативности. Итак, на равномерной сетке рассмотрим консервативную схему

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\lambda_\alpha^{(p,\,r)} y)_{x_\alpha} - dy = -\varphi, \tag{3.30}$$

$$\lambda_\alpha^{(p,\,r)} y = a_\alpha (\varkappa_\alpha y_{\overline{x}_\alpha} - b_\alpha^+ y^{(-1_\alpha)} - b_\alpha^- y),$$

$$\varkappa_\alpha = 1/(1 + \overline{R}_\alpha), \quad \overline{R}_\alpha = \frac{1}{2} h_\alpha |b_\alpha|.$$

Пусть a_α, b_α, d и φ вычисляются по тем же правилам, что и в схемах (3.27), (3.29); можно воспользоваться, в частности, формулами (3.19), положив $\hbar_{1,\,i} = h_1$, $\hbar_{2,\,k} = h_2$. Таким образом, схемы (3.29) и (3.30) различаются лишь коэффициентами $\varkappa_\alpha$: в схеме (3.29) $\varkappa_1 = \varkappa_2 \equiv 1$.

Преобразуя (3.30) к виду (3.6), получаем

$$A_\alpha = a_\alpha (\varkappa_\alpha + h_\alpha b_\alpha^+)/h_\alpha^2 > 0,$$

$$B_\alpha = a_\alpha^{(+1_\alpha)} (\varkappa_\alpha - h_\alpha b_\alpha^-)^{(+1_\alpha)}/h_\alpha^2 > 0,$$

$$C = \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) + d + \sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha b_\alpha)_{x_\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) + d \geqslant \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha)$$

и убеждаемся в монотонности схемы (3.30).

Покажем, что схема (3.30) обладает 2-м порядком аппроксимации. Запишем невязку схемы с учетом условий (3.25), (3.28) и предыдущих оценок:

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[(\lambda_\alpha^{(p,\,r)} u)_{x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} L_\alpha^{(p,\,r)} u \right] +$$

$$+ (q - d)\, u + (\varphi - f) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} (\psi_\alpha^{(1)} + \psi_\alpha^{(2)} + \psi_\alpha^{(3)}) + O(h^2),$$

где $\psi_\alpha^{(1)} = O(h^2)$ и $\psi_\alpha^{(2)} = O(h^2)$ из п. 3. 2. 2;

$$\psi_\alpha^{(3)} = \left[\left(\frac{1}{1 + \overline{R}_\alpha} + \overline{R}_\alpha - 1 \right) a_\alpha u_{\bar{x}} \right]_{x_\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\overline{R}_\alpha^2}{1 + \overline{R}_\alpha} a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} \right)_{x_\alpha} = O(h^2),$$

так как $\bar{R}_\alpha = O(h)$. Но отсюда следует $\delta = O(h^2)$, что и требовалось доказать. Коэффициенты аппроксимационной вязкости у консервативной схемы (3.30) такие же, как и у схемы Самарского (3.7), (3.8).

Схема типа (3.30) была впервые сформулирована и применена в работе [21]. В последующих работах [22—26] она прошла детальную апробацию на различных задачах и системах координат. Данная схема реализована в программе, приведенной в гл. 6.

3.2.5. Аппроксимация на неравномерной сетке. Обобщим схемы (3.27), (3.29) и (3.30) на неравномерную сетку $\hat{G}_h$. Точнее, рассмотрим в точке $x = x_{ik} \in \hat{G}_h$ консервативную схему (3.22) в случае разностных операторов

$$\lambda_{\alpha_1}^{(p,\,r)} y = a_\alpha \left[y_{\bar{x}_\alpha} - \frac{1}{2} b_\alpha (y^{(-1_\alpha)} + y) \right], \qquad (3.31)$$

$$\lambda_\alpha^{(p,\,r)} y = a_\alpha (y_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^+ y^{(-1_\alpha)} - b_\alpha^- y), \qquad (3.32)$$

$$\lambda_\alpha^{(p,\,r)} y = a_\alpha (\varkappa_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^+ y^{(-1_\alpha)} - b_\alpha^- y), \qquad (3.33)$$

где

$$y_{\overline{x}_1} = (y - y^{(-1_1)})/h_1 = (y_{i\,k} - y_{i-1\,k})/h_{1,\,i};$$

$$y_{\overline{x}_2} = (y - y^{(-1_2)})/h_2 = (y_{i\,k} - y_{i\,k-1})/h_{2,k};$$

$$h_1 = h_{1,\,i} = x_{1,\,i} - x_{1,i-1};\ h_2 = h_{2,\,k} = x_{2,\,k} - x_{2,\,k-1};$$

$$\varkappa_\alpha = 1/(1 + \overline{R}_\alpha);\ \overline{R}_\alpha = \frac{1}{2} h_\alpha |b_\alpha|.$$

Пусть коэффициенты a_α и b_α определяются из условий

$$a_\alpha = p_\alpha^{(-0,5\alpha)} + O(|h_\beta^{(+1\beta)} - h_\beta| + \hbar^2) > 0,$$

$$b_\alpha = r_\alpha^{(-0,5\alpha)} + O(|h_\beta^{(+1\beta)} - h_\beta| + \hbar^2),$$

$$\beta \neq \alpha,\ \hbar = \max(\hbar_1,\ \hbar_2),\ \hbar_\alpha = \frac{1}{2}(h_\alpha + h_\alpha^{(+1\alpha)}),$$

$$h_1^{(+1_1)} = h_{1,\,i+1},\ h_2^{(+1_2)} = h_{2,\,k+1}$$

и соотношения (3.23). Коэффициенты d и φ схемы (3.22) естественно вычислять с порядком аппроксимации не ниже, чем у разностного оператора $\sum\limits_\alpha (\lambda_\alpha^{(p,\,r)} u)_{\hat{x}_\alpha}$; из этих соображений с учетом (3.17) пусть

$$d = q + O\Big(\sum_{\alpha=1}^{2} |h_\alpha^{(+1\alpha)} - h_\alpha| + \hbar^2\Big) \geqslant 0,$$

$$\varphi = f + O\Big(\sum_{\alpha=1}^{2} |h_\alpha^{(+1\alpha)} - h_\alpha| + \hbar^2\Big).$$

Указанным требованиям удовлетворяют, например, формулы (3.19).

Каждую из трех схем можно привести к виду (3.6), причем

$$C = \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) + d + \sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha b_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) + d \geqslant \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha).$$

Тогда в схеме с центральными разностями (3.22), (3.31) имеем

$$A_\alpha = a_\alpha \left(1/h_\alpha + \frac{1}{2}\, b_\alpha\right)/\hbar_\alpha,$$

$$B_\alpha = a_\alpha^{(+1\alpha)} \left(1/h_\alpha^{(+1\alpha)} - \frac{1}{2}\, b_\alpha^{(+1\alpha)}\right)/\hbar_\alpha.$$

Решая систему неравенств

$$A_\alpha \geqslant 0,\ B_\alpha \geqslant 0,\ \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) > 0,$$

находим условия

$$h_{1,\,i} \leqslant 2/|b_{1,\,i\,k}|,\ h_{2,\,k} \leqslant 2/|b_{2,\,i\,k}|,$$

при которых для схемы (3.22), (3.31) справедлив принцип максимума (2.13). В случае оператора (3.33) с разностями против потока получим

$$A_\alpha = a_\alpha (\varkappa_\alpha/h_\alpha + b_\alpha^+)/\hbar_\alpha > 0,$$

$$B_\alpha = a_\alpha^{(+1\alpha)} [\varkappa_\alpha^{(+1\alpha)}/\hbar_\alpha^{(+1\alpha)} - (b_\alpha^-)^{(+1\alpha)}]/\hbar_\alpha > 0.$$

При $\varkappa_1 = \varkappa_2 \equiv 1$ эти формулы относятся к оператору (3.32). Отсюда заключаем, что схема (3.22) монотонна как с оператором (3.32), так и с оператором (3.33).

Используя асимптотические разложения, можно показать, что локальная погрешность аппроксимации схемы (3.22) в случае операторов (3.31) и (3.33) имеет величину

$$\delta = O\left(\sum_{\alpha=1}^{2} |h_\alpha^{(+1\alpha)} - h_\alpha| + \hbar^2\right),$$

а в случае оператора (3.32) — величину

$$\delta = O\left(\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{|h_\alpha^{(+1\alpha)} - h_\alpha|}{\hbar_\alpha} + \hbar\right).$$

Таким образом, консервативная схема (3.22) с оператором (3.32) обладает на неравномерной сетке условной аппроксимацией: уравнение (3.1) аппроксимируется в узле $x \in \hat{G}_h$, если только $h_\alpha^{(+1\alpha)}/h_\alpha \to 1$ при $\hbar_\alpha \to 0$, $\alpha = 1, 2$. Это

требование выполняется на сетках со слабой неравномерностью, например, при $h_\alpha^{(+1\alpha)} = h_\alpha/(1+\gamma h_\alpha)$, $\gamma = \text{const} \geqslant 0$.

Из оценки погрешности видно, что в случае операторов (3.31) и (3.33) схема (3.22) приобретает на сетке $\hat{G}_h$ 1-й порядок аппроксимации Более подходит для расчетов монотонная схема (3.22), (3.33), не связанная какими-либо ограничениями на шаги.

3.2.6. Аппроксимация в случае полярных координат. Рассмотрим в полярной системе координат r, φ безразмерное стационарное уравнение завихренности

$$v_1 \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} v_2 \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \mathrm{Gr}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\sin\varphi\right), \quad (3.34)$$

$$v_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_1) + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad (3.35)$$

то (3.34) представимо в консервативной форме:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} - v_1 \omega\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - r v_2 \omega\right)\right] + \\ + \mathrm{Gr}\left[\frac{\partial}{\partial r}(Tr\cos\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(T\sin\varphi)\right] = 0. \quad (3.36)$$

В области определения зададим неравномерную сетку с координатами узлов $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \ldots$, $\varphi_0 = 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_k < \ldots < \varphi_K = 2\pi$, и пусть $r_1 - r_0 = h_1$, $\varphi_k - \varphi_{k-1} = h_{2,k}$. Разностное решение конвективной задачи для удобства обозначим теми же буквами ω, ψ и T, что и точное решение. Этого правила будем придерживаться и далее, не оговаривая его всякий раз.

Уравнения (3.35) и (3 36) имеют соответственно вид (3.10) и (3.11). Так что во внутренних узлах при $r \neq 0$ пригодны разностные схемы, которые получены выше для уравнения (3.11). Точка полюса $r = 0$ является особой, поэтому построение разностных уравнений в ней требует специфического подхода. Нередко в качестве расчетных формул при $r = 0$ применяют обычное среднеарифметическое усреднение по значениям в близлежа-

щих к полюсу узлах. Однако такой прием не обеспечивает локальной аппроксимации конвективных уравнений, что может неблагоприятно отразиться на точности результатов.

Подходящие разностные формулы для узла $r=0$ можно построить в рамках все того же интегро-интерполяционного метода. С этой целью обратимся к закону сохранения (3.12) и выпишем его применительно к уравнению (3.36) для малого круга D с центром в полюсе $r=0$ и радиусом $r_{1/2}=h_1/2$:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} - v_1 \omega + \mathrm{Gr}\, T \cos\varphi \right)\Big|_{r=r_{1/2}} d\varphi = 0. \qquad (3.37)$$

Чтобы из (3.37) получить разностное уравнение, интеграл нужно заменить квадратурной суммой, а дифференциальный оператор, стоящий под знаком интеграла,— разностным оператором. При этом следует ориентироваться на порядок аппроксимации и критерий устойчивости, принятые во внутренних узлах сетки.

Применим к интегралу квадратурное правило трапеций и сделаем приближенную замену:

$$T_{\frac{1}{2}\,k} \approx \frac{1}{2}(T_{0\,k} + T_{1\,k}) = \frac{1}{2}(T_0 + T_{1\,k}),$$

$$(v_1)_{\frac{1}{2}\,k} = \frac{1}{r_{1/2}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)_{\frac{1}{2}\,k} \approx b_k =$$

$$= \frac{2}{h_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_{0\,k+1} - \psi_{0\,k-1}}{2\hbar_{2,\,k}} + \frac{\psi_{1\,k+1} - \psi_{1\,k-1}}{2\hbar_{2,\,k}} \right) =$$

$$= \frac{1}{h_1} \frac{\psi_{1\,k+1} - \psi_{1\,k-1}}{2\hbar_{2,\,k}}$$

(так как $\psi_{0\,k+1} = \psi_{0\,k-1} = \psi_0$). Теперь, использовав разностные операторы (3.31) и (3.33), получим из (3.37) две консервативные формулы:

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\hbar_{2,\,k} \left(\frac{\omega_{1\,k} - \omega_0}{h_1} - b_k \frac{\omega_0 + \omega_{1\,k}}{2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \mathrm{Gr} \frac{T_0 + T_{1\,k}}{2} \cos\varphi_k \right) \right] = 0, \qquad (3.38)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\hbar_{2,\,k}\left(\varkappa_k\frac{\omega_{1\,k}-\omega_0}{h_1}-b_k^{+}\omega_0-b_k^{-}\omega_{1\,k}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{Gr}\,\frac{T_0+T_{1\,k}}{2}\cos\varphi_k\right)\right]=0,\quad \varkappa_k=\frac{1}{1+h_1\,|b_k|/2}. \tag{3.39}$$

Обе формулы обладают погрешностью аппроксимации порядка $O\left(\max\limits_k|h_{2,\,k+1}-h_{2,\,k}|+\max\limits_k h_{2,\,k}^2+h_1^2\right)$. Следовательно, на сетке, равномерной по φ, достигается 2-й порядок аппроксимации. Пользуясь (3.38), значение ω_0 можно вычислять в виде

$$\omega_0=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{K}\left[\left(1-\frac{1}{2}\,h_1b_k\right)\omega_{1\,k}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,h_1\,\mathrm{Gr}\,(T_0+T_{1\,k})\cos\varphi_k\right]\hbar_{2,\,k}, \tag{3.40}$$

а из (3.39) находим

$$\omega_0=\sum_{k=1}^{K}\left[(\varkappa_k-h_1b_k^{-})\,\omega_{1\,k}+\frac{1}{2}\,h_1\,\mathrm{Gr}\,(T_0+\right.$$

$$\left.+T_{1\,k})\cos\varphi_k\right]\hbar_{2,\,k}\Big/\sum_{j=1}^{K}\left(\varkappa_j+\frac{1}{2}\,h_1\,|b_j|\right)\hbar_{2,\,j}. \tag{3.41}$$

Формула (3.40) удовлетворяет условиям принципа максимума при $2/h_1\geqslant\max\limits_k b_k$, формула (3.41) — при любых шагах.

Консервативные разностные уравнения для температуры, функции тока, потенциала магнитного поля при $r=0$ выводятся аналогично.

§ 3.3. МОНОТОННАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

При решении многих практических задач неизбежен переход в область высоких чисел Рэлея, характеризующуюся образованием пограничных слоев с большими градиентами скорости и температуры, мелкомасштабными конвективными движениями. Это накладывает жест-

кие условия на устойчивость и аппроксимационные свойства разностного метода. Схемы 1-го и 2-го порядков аппроксимации недостаточно эффективны, так как для достижения удовлетворительной точности они требуют слишком мелких сеток.

Один из путей решения проблемы — увеличение порядка аппроксимации разностной схемы, хотя при этом весьма непросто выполнить взаимопротиворечивые требования устойчивости и точности. В принципе не составляет труда достигнуть на минимальном шаблоне 3-го и 4-го порядков аппроксимации, если не соблюдать условия монотонности, без которого, однако, не удается добиться устойчивого счета при больших Ra.

Первая монотонная схема повышенной точности была получена и испытана на задачах высокоинтенсивной ЕК [27, 28] и развита в работах [29—31]. Следует иметь в виду, что схемы повышенного порядка заметно усложняют вид численного алгоритма и в этом, вероятно, основная причина редкого их использования. Однако в ряде случаев они могут оказаться полезными, так как позволяют получать решение с необходимой точностью на сравнительно грубой сетке, что особенно важно при больших Ra.

Опишем одну из таких схем, являющуюся, на наш взгляд, более удачной, чем другие.

3.3.1. Построение схемы. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \mathbf{L}_{\alpha}^{(p,\,r)} u + f = 0, \tag{3.42}$$

$$\mathbf{L}_{\alpha}^{(p,\,r)} u = \mathbf{L}_{\alpha} u - r_{\alpha} p_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}},$$

$$\mathbf{L}_{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(p_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right),$$

с коэффициентами $p_\alpha(x) > 0$, $r_\alpha(x)$, $f(x)$, где $x = (x_1, x_2) \in G$, и пусть функции имеют столько непрерывных производных, сколько необходимо по ходу изложения. В области G введем равномерную сетку G_h с шагами h_1 и h_2.

Составим отношение [32]

$$a_\alpha = 6 \Big/ \left[\frac{1}{p_\alpha^{(-1\,\alpha)}} + \frac{1}{p_\alpha} + \frac{4}{p_\alpha^{(-0,5\,\alpha)}} \right] > 0. \tag{3.43}$$

Тогда в каждом внутреннем узле $x \in G_h$ правомерны разложения:

$$a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} = p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} h_\alpha \mathbf{L}_\alpha u + \\ + \frac{1}{6} h_\alpha^2 \sqrt{p_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{p_\alpha}} \mathbf{L}_\alpha u \right) - \\ - \frac{1}{24} h_\alpha^3 \mathbf{L}_\alpha \left(\frac{1}{p_\alpha} \mathbf{L}_\alpha u \right) + O(h_\alpha^4), \tag{3.44}$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} u_{x_\alpha} = p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha \mathbf{L}_\alpha u + \\ + \frac{1}{6} h_\alpha^2 \sqrt{p_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{p_\alpha}} \mathbf{L}_\alpha u \right) + \frac{1}{24} h_\alpha^3 \mathbf{L}_\alpha \left(\frac{1}{p_\alpha} \mathbf{L}_\alpha u \right) + \\ + O(h_\alpha^4).$$

Вычислив a_α по формуле (3.43) и положив

$$\varkappa_\alpha = 1/(1 + R_\alpha + R_\alpha^2 + R_\alpha^3), \tag{3.45}$$

$$R_\alpha = \frac{1}{2} h_\alpha |b_\alpha|, \quad b_\alpha = r_\alpha + O(h^4), \quad h = \max_\alpha h_\alpha,$$

где b_α — сеточная функция, построенная на минимальном шаблоне, рассмотрим разностный оператор

$$\Lambda_\alpha^{(p,\,r)} y = \varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - b_\alpha^+ a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^- a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}, \tag{3.46}$$

аналогичный соответствующему оператору схемы Самарского (3.7), (3.8). В силу разложений (3.44)

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \mathbf{L}_\alpha^{(p,r)} u = \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha^{(p,r)} u + Au + O(h^4); \tag{3.47}$$

при этом дифференциальный оператор Au после несложных преобразований можно записать в виде

$$Au = \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ h_\alpha^2 \left[-\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)} \left(\frac{1}{p_\alpha} \mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)} u \right) + q_\alpha \mathbf{L}_\alpha u - \right. \right. \\ \left. \left. - p_\alpha \mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)} \left(\frac{r_\alpha}{p_\alpha} \right) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] \right\}, \tag{3.48}$$

$$q_\alpha = r_\alpha^2 + \frac{r_\alpha}{p_\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_\alpha} - 2\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

Теперь, следуя принятой методике повышения порядка аппроксимации на минимальном шаблоне, видоизменим оператор Au, выразив из (3.42) $\mathbf{L}_1^{(p,\,r)}u = -\mathbf{L}_2^{(p,\,r)}u - f$ и $\mathbf{L}_2^{(p,\,r)}u = -\mathbf{L}_1^{(p,\,r)}u - f$ и подставив их в (3.48). Таким способом избавимся от производных высоких порядков, не поддающихся разностной аппроксимации на минимальном шаблоне. Затем введем в Au некоторые параметры регуляризации $\sigma(x)$ и $\sigma_*(x)$, добавив к правой части формулы (3.48) слагаемое, равное тождественно нулю на точном решении $u(x)$. С помощью этих параметров можно регулировать основные свойства разностной схемы. Итак, имеем

$$Au = \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{h_\alpha^2\left[\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_\alpha}\mathbf{L}_\beta^{(p,\,r)}u + \frac{f}{p_\alpha}\right) + q_\alpha\mathbf{L}_\alpha u - p_\alpha\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}\left(\frac{r_\alpha}{p_\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right]\right\} + \frac{1}{12}h^2(\sigma+\sigma_*)\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}u + f\right), \quad \beta\neq\alpha,$$

или

$$Au = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\tilde{p}_\alpha\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,\tilde{r})}u + \frac{1}{12}h^2\sigma\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}u\right) + \frac{1}{12}h_1^2\mathbf{L}_1^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_1}\mathbf{L}_2^{(p,\,r)}u\right) + \frac{1}{12}h_2^2\mathbf{L}_2^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_2}\mathbf{L}_1^{(p,\,r)}u\right) + \tilde{f}, \tag{3.49}$$

приняв обозначения

$$\tilde{p}_\alpha = 1 + \frac{1}{12}(q_\alpha h_\alpha^2 + \sigma_* h^2),$$

$$\tilde{r}_\alpha = \frac{1}{\tilde{p}_\alpha}\left[r_\alpha + \frac{1}{12}\left(h_\alpha^2\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}\left(\frac{r_\alpha}{p_\alpha}\right) + \sigma_* r_\alpha h^2\right)\right], \tag{3.50}$$

$$\tilde{f} = \left[1 + \frac{1}{12}h^2(\sigma+\sigma_*)\right]f +$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2} h_\alpha^2 \mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}\left(\frac{f}{p_\alpha}\right)$$

и положив $p_\alpha \neq 0$. В дальнейшем будем поддерживать условие $\tilde{p}_\alpha \geqslant 1$, выбирая

$$\sigma_* = -\min_\alpha \frac{q_\alpha h_\alpha^2}{h^2} = O(1). \tag{3.51}$$

Пусть коэффициенты $\tilde{p}_\alpha$, $\tilde{r}_\alpha$, $\tilde{f}$ аппроксимируются на минимальном шаблоне некоторыми сеточными функциями $\tilde{a}_\alpha$, $\tilde{b}_\alpha$, $\tilde{\varphi}$, причем

$$\tilde{a}_\alpha = \tilde{p}_\alpha + O(h^4),\ \tilde{b}_\alpha = \tilde{r}_\alpha + O(h^4),\ \tilde{\varphi} = \tilde{f} + O(h^4). \tag{3.52}$$

С учетом (3.47), (3.49) и (3.50) искомую разностную схему будем конструировать в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\tilde{a}_\alpha \Lambda_\alpha^{(p,\,\tilde{r})} y + \frac{1}{12} h^2 \sigma \Lambda_\alpha^{(p,\,r)} y) +$$

$$+\frac{1}{12} h_1^2 \Lambda_1^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_1}\Lambda_2^{(p,\,r)} y\right) +$$

$$+\frac{1}{12} h_2^2 \Lambda_2^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_2}\Lambda_1^{(p,\,r)} y\right) + \tilde{\varphi} = 0, \tag{3.53}$$

где

$$\Lambda_\alpha^{(p,\,\tilde{r})} y = \tilde{\varkappa}_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - \tilde{b}_\alpha^{+} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} - \tilde{b}_\alpha^{-} a^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha};$$

$$\tilde{\varkappa}_\alpha = 1/(1 + \tilde{R}_\alpha + \tilde{R}_\alpha^2 + \tilde{R}_\alpha^3);\ \tilde{R}_\alpha = \frac{1}{2} h_\alpha |\tilde{b}_\alpha|,$$

а операторы $\Lambda_1^{(p,\,r)}$ и $\Lambda_2^{(p,\,r)}$ имеют вид (3.46) с коэффициентами, вычисленными по формулам (3.43) и (3.45) (можно также задавать $b_\alpha = r_\alpha + O(h^2)$).

3.3.2. Погрешность аппроксимации. Оценим невязку схемы (3.53), учитывая соотношения (3.47) — (3.52):

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^{2}\left[(\tilde{a}_\alpha \Lambda_\alpha^{(p,\,\tilde{r})} u - \mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)} u) + \frac{1}{12} h^2 \sigma \Lambda_\alpha^{(p,\,r)} u\right] +$$

$$+\frac{1}{12}\,h_1^2\,\Lambda_1^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_1}\,\Lambda_2^{(p,\,r)}u\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\,h_2^2\,\Lambda_2^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_2}\,\Lambda_1^{(p,\,r)}u\right)+\tilde{\varphi}-f=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\tilde{p}_\alpha\,(\Lambda_\alpha^{(p,\,\tilde{r})}u-\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,\tilde{r})}u)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}\,q_\alpha h_\alpha^2\,\mathbf{L}_\alpha u-\frac{1}{12}\,p_\alpha h_\alpha^2\,\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}\left(\frac{r_\alpha}{p_\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right]+$$

$$+\frac{1}{12}\,h^2(\sigma+\sigma_*)\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}u+f\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\,h_1^2\,\mathbf{L}_1^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_1}\,\mathbf{L}_2^{(p,\,r)}u\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\,h_2^2\,\mathbf{L}_2^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_2}\,\mathbf{L}_1^{(p,\,r)}u\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}h_\alpha^2\,\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}\left(\frac{f}{p_\alpha}\right)+\sigma\cdot O(h^4)+O(h^4)=$$

$$=-Au+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{h_\alpha^2\left[q_\alpha\mathbf{L}_\alpha u-p_\alpha\,\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}\left(\frac{r_\alpha}{p_\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\mathbf{L}_\alpha^{(p,\,r)}\left(\frac{1}{p_\alpha}\,\mathbf{L}_\beta^{(p,\,r)}u+\frac{f}{p_\alpha}\right)\right]\right\}+\sigma\cdot O(h^4)+O(h^4)=$$

$$=\sigma\cdot O(h^4)+O(h^4),\quad \beta\neq\alpha,\quad h=\max_\alpha h_\alpha.$$

Следовательно, при любых $\sigma=O(1)$ схема (3.53) аппроксимирует уравнение (3.42) с погрешностью $\delta=O(h^4)$. Аппроксимационная вязкость у нее определяется величиной

$$\nu_\alpha=(R_\alpha^*)^4/[1+R_\alpha^*+(R_\alpha^*)^2+(R_\alpha^*)^3],$$

$$R_\alpha^*=\frac{1}{2}\,h_\alpha\,|r_\alpha|.$$

3.3.3. Исследование монотонности. Схема (3.53) определена на девятиточечном шаблоне типа «ящик». В кано-

нической форме (2.12) ее можно представить следующим образом:

$$Cy = \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha y^{(-1\alpha)} + B_\alpha y^{(+1\alpha)}) + A_{12} y^{(-1_1, -1_2)} +$$

$$+ B_{12} y^{(+1_1, +1_2)} + D_{12} y^{(-1_1, +1_2)} + D_{21} y^{(+1_1, -1_2)} + \tilde{\varphi}. \quad (3.54)$$

Введя обозначения

$$\eta_\alpha = a_\alpha (\varkappa_\alpha + h_\alpha b_\alpha^+) > 0,$$

$$\xi_\alpha = a_\alpha^{(+1\alpha)} (\varkappa_\alpha - h_\alpha b_\alpha^-) > 0,$$

$$\tilde{\eta}_\alpha = a_\alpha (\tilde{\varkappa}_\alpha + h_\alpha \tilde{b}_\alpha^+) > 0,$$

$$\tilde{\xi}_\alpha = a_\alpha^{(+1\alpha)} (\tilde{\varkappa}_\alpha - h_\alpha \tilde{b}_\alpha^-) > 0,$$

выпишем формулы для вычисления коэффициентов:

$$A_\alpha = \frac{1}{12} \eta_\alpha \frac{h^2}{h_\alpha^2} (\sigma - A_\alpha^*), \quad B_\alpha = \frac{1}{12} \xi_\alpha \frac{h^2}{h_\alpha^2} (\sigma - B_\alpha^*),$$

$$A_\alpha^* = \frac{1}{h^2} \left[-12 \frac{\tilde{\eta}_\alpha \tilde{a}_\alpha}{\eta_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{h_\beta^2} \left(\frac{\eta_\beta + \xi_\beta}{p_\alpha} \right)^{(-1\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta_\beta + \xi_\beta}{p_\beta} \right],$$

$$B_\alpha^* = \frac{1}{h^2} \left[-12 \frac{\tilde{\xi}_\alpha \tilde{a}_\alpha}{\xi_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{h_\beta^2} \left(\frac{\eta_\beta + \xi_\beta}{p_\alpha} \right)^{(+1\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta_\beta + \xi_\beta}{p_\beta} \right], \quad (3.55)$$

$$A_{12} = \frac{1}{12} \left[\frac{1}{h_2^2} \eta_1 \left(\frac{\eta_2}{p_1} \right)^{(-1_1)} + \frac{1}{h_1^2} \eta_2 \left(\frac{\eta_1}{p_2} \right)^{(-1_2)} \right] > 0,$$

$$B_{12} = \frac{1}{12} \left[\frac{1}{h_2^2} \xi_1 \left(\frac{\xi_2}{p_1} \right)^{(+1_1)} + \frac{1}{h_1^2} \xi_2 \left(\frac{\xi_1}{p_2} \right)^{(+1_2)} \right] > 0,$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{12} \left[\frac{1}{h_\beta^2} \eta_\alpha \left(\frac{\xi_\beta}{p_\alpha} \right)^{(-1\alpha)} + \frac{1}{h_\alpha^2} \xi_\beta \left(\frac{\eta_\alpha}{p_\beta} \right)^{(+1\beta)} \right] > 0,$$

$$C = \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha + B_\alpha) + A_{12} + \boldsymbol{B_{12}} + \boldsymbol{D_{12}} + \boldsymbol{D_{21}}.$$

Чтобы схема стала монотонной, значения регуляризатора σ должны обеспечить выполнение неравенств $A_\alpha \geqslant 0$ и $B_\alpha \geqslant 0$ при любых h и $\alpha = 1, 2$. Этого можно добиться, например, вычисляя $\sigma = \sigma(x)$ по следующей простой формуле:

$$\sigma = \sigma_0 = [\max_\alpha (A_\alpha^*, B_\alpha^*)]^+ \geqslant 0 \tag{3.56}$$

или выбирая $\sigma > \sigma_0$; причем если среди коэффициентов A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^* не имеется положительных, получим $\sigma_0 = 0$. Заметим, что $\sigma = \sigma_0$ является минимальным по модулю среди всех допустимых значений σ. Так как A_α^* и B_α^* — величины $O(h^{-2})$, а погрешность аппроксимации $\delta = \sigma \cdot O(h^4) + O(h^4)$, применение формулы (3.56) может показаться неоправданным в связи с угрозой понижения порядка аппроксимации при $\sigma_0 \neq 0$. Однако если шаги сетки выбирать из условия

$$\max_{x \in G} \sqrt{\frac{p_1(x)}{5p_2(x)}} < \frac{h_1}{h_2} < \min_{x \in G} \sqrt{\frac{5p_1(x)}{p_2(x)}}, \tag{3.57}$$

то можно показать, следуя [29], что:

1) при достаточно малом $h = \max(h_1, h_2)$ все коэффициенты A_α^*, B_α^* становятся отрицательными, обеспечивая тем самым при $\sigma = \sigma_0$ величину погрешности аппроксимации $\delta = O(h^4)$;

2) существует $\sigma = \sigma_1 > \sigma_0$, при котором условия монотонности выполняются с сохранением 4-го порядка аппроксимации при любых h.

Учитывая характер зависимости δ от σ, при выборе $\sigma > \sigma_0$ естественно ожидать большей потери точности, чем при $\sigma = \sigma_0$. Во всяком случае, на тестовой задаче точность решения при $\sigma = \sigma_0$ оказалась значительно выше, чем при $\sigma = \sigma_1$.

3.3.4. Пример. Для иллюстрации рассмотрим стационарное безразмерное уравнение завихренности (см. (1.15))

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \mathrm{Gr}\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \tag{3.58}$$

которое формально получается из уравнения (3.42), если положить $u=\omega$, $x_1=x$, $x_2=y$, $p_1=p_2\equiv 1$, $r_1=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $r_2=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, $f=\mathrm{Gr}\dfrac{\partial T}{\partial x}$.

Будем для простоты считать $\mathrm{Pr}=1$, а сетку зададим квадратной ($h_1=h_2=h$). Тогда, использовав стационарные уравнения для функции тока и температуры, найдем из разложений в ряд Тейлора:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \psi_y^\circ - \frac{1}{6}h^2\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + O(h^4) = \\
&= \psi_y^\circ + \frac{1}{6}h^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\omega\right) + O(h^4), \\
r_2 &= -\psi_x^\circ - \frac{1}{6}h^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\omega\right) + O(h^4), \\
f &= \mathrm{Gr}\left(T_x^\circ - \frac{1}{6}h^2\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right) + O(h^4) = \\
&= \mathrm{Gr}\left[T_x^\circ + \frac{1}{6}h^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] + O(h^4), \\
q_1 &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \psi_y^{2\circ} - 2\psi_{xy}^{\circ\circ} + O(h^2), \\
q_2 &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \psi_x^{2\circ} + 2\psi_{xy}^{\circ\circ} + O(h^2).
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Приводя схему (3.53) к виду (3.54) и вводя индексы узлов, получаем в случае уравнения (3.58)

$$
\begin{aligned}
C_{i\,k}\omega_{i\,k} &= A_{1,\,i\,k}\omega_{i-1\,k} + A_{2,\,i\,k}\omega_{i\,k-1} + B_{1,\,i\,k}\omega_{i+1\,k} + \\
&+ B_{2,\,i\,k}\omega_{i\,k+1} + A_{1\bar{2},\,i\,k}\omega_{i-1\,k-1} + B_{12,\,i\,k}\omega_{i+1\,k+1} + \\
&+ D_{12,\,i\,k}\omega_{i-1\,k+1} + D_{21,\,i\,k}\omega_{i+1\,k-1} + \tilde{\varphi}_{i\,k}.
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Коэффициенты схемы вычисляются по общим формулам (3.55) при $h_1 = h_2 = h$, $p_1 = p_2 \equiv 1$. В силу соотношений (3.59) можно положить:

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_{1,\,ik} = 1 + \frac{1}{12} h^2 (\psi_{\overset{\circ}{y}}^2 - 2\psi_{\overset{\circ}{xy}} + \sigma_{*,\,ik}),$$

$$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_{2,\,ik} = 1 + \frac{1}{12} h^2 (\psi_{\overset{\circ}{x}}^2 + 2\psi_{\overset{\circ}{xy}} + \sigma_{*,\,ik}),$$

$$\sigma_* = -\min (\psi_{\overset{\circ}{y}}^2 - 2\psi_{\overset{\circ}{xy}},\ \psi_{\overset{\circ}{x}}^2 + 2\psi_{\overset{\circ}{xy}}),$$

$$\tilde{b}_1 = \tilde{b}_{1,\,ik} = \frac{1}{\tilde{a}_{1,\,ik}} \Big[\psi_{\overset{\circ}{y}} + \frac{1}{6} h^2 (\psi_{\overset{-}{x}\overset{\circ}{xy}} + \omega_{\overset{\circ}{y}}) + \frac{1}{12} h^2 (\psi_{\overset{-}{x}\overset{\circ}{xy}} - \psi_{\overset{\circ}{y}} \psi_{\overset{\circ}{xy}} + \sigma_{*,\,ik} \psi_{\overset{\circ}{y}}) \Big],$$

$$\tilde{b}_2 = \tilde{b}_{2,\,ik} = \frac{1}{\tilde{a}_{2,\,ik}} \Big[-\psi_{\overset{\circ}{x}} - \frac{1}{6} h^2 (\psi_{\overset{\circ}{x}\,\overset{-}{y}\,y} + \omega_{\overset{\circ}{x}}) - \frac{1}{12} h^2 (\psi_{\overset{\circ}{x}\,\overset{-}{y}\,y} + \psi_{\overset{\circ}{x}} \psi_{\overset{\circ}{xy}} + \sigma_{*,\,ik} \psi_{\overset{\circ}{x}}) \Big], \tag{3.61}$$

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{ik} = \mathrm{Gr} \Big[1 + \frac{1}{12} h^2 (\sigma_{ik} + \sigma_{*,\,ik}) \Big] T_{\overset{\circ}{x}} + \frac{1}{12} h^2 \mathrm{Gr} (2T_{\overset{\circ}{x}\,\overset{-}{y}\,y} - \psi_{\overset{\circ}{xy}} T_{\overset{\circ}{x}} - 2\psi_{\overset{\circ}{y}} T_{\overset{-}{x}\,x} + \psi_{\overset{-}{x}\,x} T_{\overset{\circ}{y}} + 2\psi_{\overset{\circ}{x}} T_{\overset{\circ}{xy}}).$$

Кроме того, чтобы сохранить 4-й порядок аппроксимации и не выйти за пределы девятиточечного шаблона, в формулах (3.55) достаточно задать:

$$b_1 = b_{1,\,ik} = \psi_{\overset{\circ}{y}},\ b_1^{(-1_2)} = b_{1,\,ik-1} = \psi_{\overset{-}{y}} + \frac{1}{2} h (\psi_{\overset{-}{xx}} + \omega)_{ik-1},\ b_1^{(+1_2)} = b_{1,\,ik+1} = \psi_y - \frac{1}{2} h (\psi_{\overset{-}{xx}} + \omega)_{ik+1},$$

$$b_2 = b_{2,\,ik} = -\psi_{\overset{\circ}{x}},\ b_2^{(-1_1)} = b_{2,\,i-1\,k} = \tag{3.62}$$

$$= -\psi_{\bar{x}} - \frac{1}{2} h (\psi_{\bar{y}y} + \omega)_{i-1\ k},$$

$$b_2^{(+1_1)} = b_{2,\ i+1\ k} = -\psi_x + \frac{1}{2} h (\psi_{\bar{y}y} + \omega)_{i+1\ k}.$$

На основании пп. 3.3.2, 3.3.3 схема (3.60) с коэффициентами (3.55), (3.56), (3.61), (3.62) является монотонной и аппроксимирует на выбранной сетке уравнение завихренности с 4-м порядком. Заметим, что условие (3.57) удовлетворяется здесь тождественно.

Используя интегро-интерполяционный метод, удается строить также консервативные монотонные схемы, обладающие 4-м порядком аппроксимации. Одна из таких схем описана в [29, 31].

Испытания на тестовых задачах (см. § 5.1) показывают, что схемы повышенного порядка аппроксимации становятся наиболее эффективными при числах Рэлея $\mathrm{Ra} \geqslant 10^5$, соответствующих развитой ламинарной конвек ии.

ГЛАВА 4

ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

§ 4.1. Приближенные граничные условия

§ 4.2. Нестационарные задачи

§ 4.3. Стационарные задачи

§ 4.4. Расчет чисел Нуссельта

§ 4.5. Алгоритм корректировки сетки при счете

Здесь мы обсудим основные практические аспекты конструирования вычислительного алгоритма при решении двумерных задач ЕК на ЭВМ. Изложение материала привяжем к системе уравнений гравитационной ЕК (1.15), которая описывает плоское конвективное движение в декартовых координатах x, y. Для упрощения выкладок штрихи при безразмерных переменных будем в дальнейшем опускать, обозначая буквами T, ω и ψ как точное, так и приближенное решение безразмерной задачи ЕК.

Большинство из представленных алгоритмов достаточно просты, практичны и предназначены для широкого класса задач ЕК. Они записаны в виде, удобном для программной реализации.

§ 4.1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Вопрос постановки граничных условий для завихренности частично затрагивался в гл. 1, причем для некоторых типов границы были получены точные значения завихренности. Вместе с тем в ряде важных случаев (твердая стенка, линия раздела двух жидкостей и др.) удается строить лишь приближенные формулы, которые могут существенно влиять на точность численного решения и устойчивость алгоритма. При граничных условиях 2, 3 или 4-го рода аналогичная проблема возникает и для температуры.

4.1.1. Твердая стенка. Предположим, на участке Г граница расчетной области есть гладкая, неподвижная и

непроницаемая твердая стенка. Выберем ее параллельной оси ординат Oy и примыкающей к жидкости слева. Тогда условия прилипания (1.33) в любой точке $(x, y) \in \Gamma$ и любой момент времени t примут вид

$$\psi_\Gamma = 0, \tag{4.1}$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_\Gamma = 0. \tag{4.2}$$

Первое из них служит точным граничным условием для уравнения функции тока. Чтобы замкнуть вычислительную процедуру, попытаемся найти также некоторую формулу для задания завихренности на стенке Γ. Ее обычно строят, исходя из разностной аппроксимации условия (4.2).

Пусть $(x_0, y_k) \in \Gamma$ — граничный узел сетки, а (x_1, y_k) — ближайший к нему приграничный узел, где $x_1 - x_0 = h_1$. На основании (4.1) и (4.2) правомерно асимптотическое разложение

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{0k} = \frac{1}{h_1}\psi_{1k} - \frac{1}{2}h_1\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{0k} - \frac{1}{6}h_1^2\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right)_{0k} -$$

$$- \frac{1}{24}h_1^3\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right)_{0k} - \frac{1}{120}h_1^4\left(\frac{\partial^5\psi}{\partial x^5}\right)_{0k} + O(h_1^5) = 0 \tag{4.3}$$

для достаточно гладкой функции тока. Из уравнения для функции тока найдем при условиях (4.1), (4.2)

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|_\Gamma = -\omega_\Gamma - \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_\Gamma = -\omega_\Gamma,$$

$$\left.\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right|_\Gamma = -\left.\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|_\Gamma - \left.\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right|_\Gamma = -\left.\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|_\Gamma. \tag{4.4}$$

В результате этих замен из (4.3) получаем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{0k} = \frac{1}{h_1}\psi_{1k} + \frac{1}{2}h_1\omega_{0k} + O(h_1^2) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{0k} = \frac{1}{h_1}\psi_{1k} + \frac{1}{2}h_1\omega_{0k} + \frac{1}{6}h_1^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{0k} +$$

$$+ O(h_1^3) = \frac{1}{h_1}\psi_{1k} + \frac{1}{2}h_1\omega_{0k} + \frac{1}{6}h_1^2(\omega_x)_{0k} + \tag{4.5}$$

$$+ O(h_1^3) = \frac{1}{h_1}\psi_{1k} + \frac{1}{3}h_1\omega_{0k} + \frac{1}{6}h_1\omega_{1k} + O(h_1^3) = 0.$$

Пренебрегая членами, обозначенными $O(h_1^2)$ и $O(h_1^3)$, получаем аппроксимацию условия (4.2) соответственно со 2-м и 3-м порядками, откуда вытекают две простые приближенные формулы для вычисления завихренности на стенке Г:

$$\omega_{0\,k} = -\frac{2}{h_1^2}\,\psi_{1\,k}, \tag{4.6}$$

$$\omega_{0\,k} = -\frac{1}{2}\,\omega_{1\,k} - \frac{3}{h_1^2}\,\psi_{1\,k}. \tag{4.7}$$

Условие (4.6) применялось еще в 1928 г. Томом (см. [33]). Оно прошло многочисленную апробацию и используется до настоящего времени. Ввиду (4.5) вычисление завихренности по формуле Тома (4.6) происходит с погрешностью 1-го порядка по h_1. Условие (4.7) предложено Вудсом [34]. В отличие от (4.6) оно аппроксимирует завихренность со 2-м порядком. Нетрудно убедиться, что на всякой другой твердой стенке, параллельной координатным осям, условия Тома и Вудса записываются аналогичным образом.

Для температуры на стенке Г рассмотрим условие общего вида (1.30) в момент времени $t=t_{n+1}$:

$$a\,\frac{\partial T(x_0,\ y_k,\ t_{n+1})}{\partial x} - bT(x_0,\ y_k,\ t_{n+1}) +$$

$$+ D(y_k,\ t_{n+1}) = 0, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad a+b>0.$$

Предлагается аппроксимировать его на минимальном шаблоне со 2-м порядком. Учитывая вид уравнения переноса тепла на стенке Г, записываем разложение

$$\frac{T_{1\,k}-T_{0\,k}}{h_1} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0\,k} + \frac{1}{2}\,h_1\left(\mathrm{Pr}\,\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{0\,k} + O(h_1^2),$$

на основании которого разностное граничное условие

$$a\left[\frac{1}{h_1}\,(T_{1\,k}^{n+1} - T_{0\,k}^{n+1}) - \frac{h_1\mathrm{Pr}}{2\tau}\,(T_{0\,k}^{n+1} - T_{0\,k}^{n}) +\right.$$

$$\left. + \frac{h_1}{2h_2^2}\,(T_{0\,k-1}^{n} - 2T_{0\,k}^{n} + T_{0\,k+1}^{n})\right] - bT_{0\,k}^{n+1} + D_k^{n+1} = 0 \tag{4.8}$$

имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, где $h = \max(h_1,\ h_2)$; τ — шаг по времени; $T^n = T(t_n)$.

Стационарный аналог формулы (4.8)

$$T_{0k} = \left[aT_{1k} + \frac{ah_1^2}{2h_2^2}(T_{0\,k-1} + T_{0\,k+1}) + \right.$$

$$\left. + h_1 D_k \right] \Big/ \left(a + \frac{ah_1^2}{h_2^2} + h_1 b \right) \qquad (4.9)$$

удовлетворяет принципу максимума при любых h_1 и h_2.

4.1.2. Угловая точка. Пусть на левой вертикальной стенке Γ_1 и нижней горизонтальной стенке Γ_2 температура задана условиями 2-го или 3-го рода. В угловой точке (x_0, y_0) тогда возникает проблема стыковки двух условий:

$$a_1 \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\Gamma_1} - b_1 T_{\Gamma_1} + D_1(y, t) = 0, \quad a_1 > 0, \ b_1 \geqslant 0,$$

$$a_2 \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\Gamma_2} - b_2 T_{\Gamma_2} + D_2(x, t) = 0, \quad a_2 > 0, \ b_2 \geqslant 0, \qquad (4.10)$$

причем предположение о достаточной гладкости температуры требует, чтобы выполнялось условие согласования

$$a_1 \frac{\partial D_2(x_0, t)}{\partial x} - b_1 D_2(x_0, t) = a_2 \frac{\partial D_1(y_0, t)}{\partial y} - b_2 D_1(y_0, t).$$

Записывая соотношения (4.10) для угловой точки (x_0, y_0) в виде

$$a_1 \left[T_x - \frac{1}{2} h_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + O(h_1^2) \right]_{0\,0} - b_1 T_{0\,0} + D_1(y_0, t) = 0,$$

$$a_2 \left[T_y - \frac{1}{2} h_2 \left(\frac{\partial T}{\partial t} \Pr - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + O(h_2^2) \right]_{0\,0} -$$

$$- b_2 T_{0\,0} + D_2(x_0, t) = 0$$

и комбинируя их так, чтобы исключить вторую производную, приходим к монотонной разностной формуле

$$a_2 h_2 \left[a_1 \frac{T_{1\,0}^{n+1} - T_{0\,0}^{n+1}}{h_1} - b_1 T_{0\,0}^{n+1} + D_1(y_0, t_{n+1}) \right] +$$

$$+ a_1 h_1 \left[a_2 \left(\frac{T_{0\,1}^{n+1} - T_{0\,0}^{n+1}}{h_2} - \frac{1}{2} h_2 \Pr \frac{T_{0\,0}^{n+1} - T_{0\,0}^{n}}{\tau} \right) - \right.$$

$$-b_2 T_{0\,0}^{n+1} + D_2(x_0,\ t_{n+1})\Big] = 0. \qquad (4.11)$$

Если в узле (x_0, y_1) применять формулу (4.8), а в узле (x_1, y_0) — однотипную формулу, то уравнение (4.11) аппроксимирует каждое из согласованных условий (4.10) в точке (x_0, y_0) с погрешностью $O(\tau^2+h^2)$.

Приведем также стационарный вариант формулы (4.11):

$$T_{0\,0} = \left(\frac{h_2}{h_1} T_{1\,0} + \frac{h_1}{h_2} T_{0\,1} + \frac{h_2}{a_1} D_1(y_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{h_1}{a_2} D_2(x_0)\right) \Big/ \left(\frac{h_2}{h_1} + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_2}{a_1} b_1 + \frac{h_1}{a_2} b_2\right). \qquad (4.12)$$

4.1.3. Криволинейная граница. Ясно, что на практике граница не всегда параллельна координатной линии. В качестве примера рассмотрим гладкую искривленную твердую стенку (рис. 4.1). Действующие на ней условия прилипания (1.33) применим в эквивалентном виде

$$\psi_\Gamma = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_\Gamma = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_\Gamma = 0. \qquad (4.13)$$

Предстоит вывести формулы для вычисления завихренности в граничных узлах. Пусть касательные к линии Γ в точках A и B направлены вертикально.

Рис. 4.1. Сетка у криволинейной границы:
A, B, C — граничные узлы, $A+1$, $B+1$, $C+1$ — приграничные узлы

На основании (4.13) приходим к выводу, что в узлах A и B

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_{A,\,B} = -\left.\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right|_{A,\,B} = 0.$$

Следовательно, к этим узлам применимо приближенное условие Тома (4.6):

$$\omega_A = -\frac{2}{h_{1,\,2}^2}\psi_{A+1},$$

$$\omega_B = -\frac{2}{h_{1,\,1}^2}\psi_{B+1}.$$

Ввиду (4.13) в точке C справедливо разложение

$$\frac{2}{h_{1,2}^2}\psi_{C+1}+\frac{2}{h_2^2}\psi_{B+1}=\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|_C+\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_C+O(h_{1,2}+h_2).$$

Из него сразу находим формулу 1-го порядка для завихренности:

$$\omega_C=-\frac{2}{h_{1,2}^2}\psi_{C+1}-\frac{2}{h_2^2}\psi_{B+1}.$$

4.1.4. Линия раздела жидкостей. Попробуем распространить подход Тома и Вудса на тот случай, когда Γ является горизонтальной линией раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей. На этой линии должны выполняться условия (1.36), (1.37), т. е. кроме (4.1) имеем еще

$$\left.\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial y}\right|_\Gamma=\left.\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial y}\right|_\Gamma, \tag{4.14}$$

$$\eta^{(1)}\omega_\Gamma^{(1)}=\eta^{(2)}\omega_\Gamma^{(2)}, \tag{4.15}$$

где индекс (1) относится к жидкости, находящейся вверху, а индекс (2)—к нижней жидкости. Функция завихренности на Γ, вообще говоря, терпит разрыв, имея пределом сверху значение $\omega_\Gamma^{(1)}$, а пределом снизу—значение $\omega_\Gamma^{(2)}$, которые связаны соотношением (4.15).

Положим $(x_i, y_k)\in\Gamma$ — узел на линии раздела, (x_i, y_{k-1}) и (x_i, y_{k+1})—близлежащие нижний и верхний внутренние узлы, $y_k-y_{k-1}=y_{k+1}-y_k=h_2$. Учитывая (4.5), (4.14) и (4.15), можно расписать равенство (4.14) в точке (x_i, y_k) двумя способами:

$$\frac{1}{h_2}\psi_{i\,k+1}+\frac{1}{2}h_2\omega_{i\,k}^{(2)}\frac{\eta^{(2)}}{\eta^{(1)}}+O(h_2^2)=$$

$$=-\frac{1}{h_2}\psi_{i\,k-1}-\frac{1}{2}h_2\omega_{i\,k}^{(2)},$$

$$\frac{1}{h_2}\psi_{i\,k+1}+\frac{1}{3}h_2\omega_{i\,k}^{(2)}\frac{\eta^{(2)}}{\eta^{(1)}}+\frac{1}{6}h_2\omega_{i\,k+1}+O(h_2^3)=$$

$$=-\frac{1}{h_2}\psi_{i\,k-1}-\frac{1}{3}h_2\omega_{i\,k}^{(2)}-\frac{1}{6}h_2\omega_{i\,k-1}.$$

Отсюда приходим к аналогу формулы Тома на линии раздела Γ

$$\omega_{i\,k}^{(2)} = -\frac{2}{h_2^2}\,(\psi_{i\,k-1} + \psi_{i\,k+1}) \Big/ \left(1 + \frac{\eta^{(2)}}{\eta^{(1)}}\right)$$

и аналогу формулы Вудса

$$\omega_{i\,k}^{(2)} = -\left[\frac{1}{2}\,(\omega_{i\,k-1} + \omega_{i\,k+1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{h_2^2}\,(\psi_{i\,k-1} + \psi_{i\,k+1})\right] \Big/ \left(1 + \frac{\eta^{(2)}}{\eta^{(1)}}\right).$$

При такой записи какое-либо из этих условий служит для вычисления $\omega_{i\,k}^{(2)}$, а $\omega_{i\,k}^{(1)}$ определяется по формуле (4.15).

Аналогично можно аппроксимировать тепловые условия сопряжения (1.31), которые на линии раздела должны задаваться в виде

$$T_{i\,k}^{(1)} = T_{i\,k}^{(2)}, \quad \lambda^{(1)}\left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial y}\right)_{i\,k} = \lambda^{(2)}\left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial y}\right)_{i\,k}. \qquad (4.16)$$

Заменим их приближенным соотношением

$$\lambda^{(1)}\left[T_y - \frac{1}{2}\,h_2\left(\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{Pr}^{(1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,\mathrm{Pr}^{(1)} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\right]_{i\,k} \approx$$

$$\approx \lambda^{(2)}\left[T_{\overline{y}} + \frac{1}{2}\,h_2\left(\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{Pr}^{(2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,\mathrm{Pr}^{(2)} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\right]_{i\,k},$$

в силу которого на Γ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \Lambda_x T + \Lambda_y T,$$

где

$$\Lambda_x T = \frac{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)}\,\mathrm{Pr}^{(1)} + \lambda^{(2)}\mathrm{Pr}^{(2)}}\,T_{\overline{x}x} - \psi_{\circ y}^{+} T_{\overline{x}} - \psi_{\circ y}^{-} T_x;$$

$$\Lambda_y T = \frac{2}{\lambda^{(1)}\mathrm{Pr}^{(1)} + \lambda^{(2)}\mathrm{Pr}^{(2)}}\,\frac{1}{h_2}\,(\lambda^{(1)} T_y - \lambda^{(2)} T_{\overline{y}}).$$

Для вычисления температуры на линии раздела приведем явную схему

$$\frac{T_{i\,k}^{n+1} - T_{i\,k}^{n}}{\tau} = \Lambda_x T^n + \Lambda_y T^n \qquad (4.17)$$

и схему переменных направлений

$$\frac{T_{ik}^{n+1/2}-T_{ik}^{n}}{\tau/2}=\Lambda_x T^{n+1/2}+\Lambda_y T^{n},$$
$$\frac{T_{ik}^{n+1}-T_{ik}^{n+1/2}}{\tau/2}=\Lambda_x T^{n+1/2}+\Lambda_y T^{n+1}. \tag{4.18}$$

Они могут быть реализованы совместно с аналогичными схемами (4.30) и (4.34), (4.35), действующими по обе стороны от линии раздела, по так называемому *алгоритму сквозного счета.* И схема (4.17), и схема (4.18) аппроксимируют условия сопряжения (4.16) с погрешностью $O(\tau^2+h^2)$. Нетрудно убедиться, что в стационарном случае расчетная формула для условий сопряжения (4.16) примет вид

$$T_{ik}=(\lambda^{(1)}T_{ik+1}+\lambda^{(2)}T_{ik-1}+AT_{i-1k}+ \\ +BT_{i+1k})/C, \tag{4.19}$$

$$A=\frac{h_2^2}{2h_1^2}[\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+ \\ +h_1\psi_{y\circ}^{+}(\lambda^{(1)}\mathrm{Pr}^{(1)}+\lambda^{(2)}\mathrm{Pr}^{(2)})]>0,$$

$$B=\frac{h_2^2}{2h_1^2}[\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}- \\ -h_1\psi_{y\circ}^{-}(\lambda^{(1)}\mathrm{Pr}^{(1)}+\lambda^{(2)}\mathrm{Pr}^{(2)})]>0,$$

$$C=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+A+B,$$

$$\psi_{y}^{\circ}=\frac{1}{2h_2}(\psi_{ik+1}-\psi_{ik-1}),$$

$$\psi^{\pm}=(\psi\pm|\psi|)/2.$$

Коэффициенты формулы (4.19) удовлетворяют требованиям принципа максимума при всех допустимых h_1 и h_2.

4.1.5. Повышение точности на минимальном шаблоне. В связи с возможностью применения схем повышенного порядка аппроксимации для дифференциальных уравнений ЕК целесообразно улучшить аппроксимационные

характеристики разностных граничных условий. Остановимся лишь на стационарной задаче, полагая решение не зависящим от времени, т. е. производные по времени примем равными нулю. Участок Г снова будем считать вертикальной твердой стенкой, ограничивающей жидкость слева. На ней, таким образом, имеют место соотношения (4.1)—(4.4).

Из стационарных уравнений для функции тока и завихренности при условиях (4.1), (4.2) получаем следующие выражения для производных от функции тока на стенке Г:

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} = -\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} - \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + f, \quad f = \mathrm{Gr}\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} = -2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - f.$$

Теперь учтем (4.20) вместе с (4.4) в разложении (4.3):

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{0k} = \frac{1}{h_1}\psi_{1k} + \frac{1}{2}h_1\omega_{0k} + \frac{1}{6}h_1^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}h_1\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)_{0k} + \frac{1}{24}h_1^3 f_{0k} + O(h_1^4) = \frac{1}{h_1}\psi_{1k} +$$

$$+ \frac{1}{2}h_1\omega_{0k} + \frac{1}{6}h_1(\omega_{1k} - \omega_{0k}) +$$

$$+ \frac{1}{24}h_1^3 f_{0k} + O(h_1^4) = 0.$$

Отсюда ясно, что завихренность в узле $(x_0, y_k) \in \Gamma$ можно вычислять по формуле

$$\omega_{0k} = -\frac{1}{2}\omega_{1k} - \frac{3}{h_1^2}\psi_{1k} - \frac{1}{8}h_1^2 f_{0k}, \tag{4.21}$$

которая была предложена Кусковой и Чудовым [35]. Чтобы она имела 3-й порядок точности, правую часть f_{0k} достаточно аппроксимировать даже с 1-м порядком, например,

$$f_{0k} \approx \mathrm{Gr}\,(T_x)_{0k} = \mathrm{Gr}\,\frac{T_{1k} - T_{0k}}{h_1}.$$

С точки зрения практических расчетов привлекает простой вид формулы (4.21).

Покажем [31, 36], что на минимальном сеточном шаблоне можно построить условие, аппроксимирующее завихренность на стенке Г с погрешностью $O(h^4)$. С этой целью удержим в разложении (4.3) все члены ниже 5-го порядка малости и, использовав (4.4) и (4.20), перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{0\,k} = \frac{1}{h_1}\psi_{1\,k} + \frac{1}{2}h_1\omega_{0\,k} + \frac{1}{6}h_1^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}h_1\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h_1^2\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}\Big)_{0\,k} + \frac{1}{24}h_1^3\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}h_1\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big)_{0\,k}\mathrm{Gr} - \frac{1}{120}h_1^4\left(\frac{\partial^5\psi}{\partial x^5} + \right.$$
$$+ \frac{10}{3}\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3} + \frac{5}{2}\mathrm{Gr}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big)_{0\,k} + O(h_1^5) = 0. \quad (4.22)$$

Затем, дифференцируя уравнения для функции тока и завихренности с учетом (4.1), (4.2), находим:

$$\left.\frac{\partial^5\psi}{\partial x^3\partial y^2}\right|_{\Gamma} = -\left.\frac{\partial^3\omega}{\partial x\partial y^2}\right|_{\Gamma}, \quad \left.\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}\right|_{\Gamma} = -\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial x\partial y^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma}, \quad \left.\frac{\partial^5\psi}{\partial x^5}\right|_{\Gamma} = -\left(\frac{\partial^5\psi}{\partial x^3\partial y^2} + \frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}\right)_{\Gamma}.$$

Используя эти замены в (4.22), имеем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{0\,k} = \frac{1}{h_1}\psi_{1\,k} + \frac{1}{2}h_1\omega_{0\,k} + \frac{1}{6}h_1(\omega_{1\,k} - \omega_{0\,k}) +$$
$$+ \frac{1}{24}h_1^2\mathrm{Gr}(T_{1\,k} - T_{0\,k}) + \frac{1}{360}h_1^4\left(4\frac{\partial^3\omega}{\partial x\partial y^2} + \right.$$
$$+ 7\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{1}{2}\mathrm{Gr}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big)_{0\,k} + O(h_1^5) = 0. \quad (4.23)$$

Теперь, чтобы добиться желаемого, дифференциальные производные в (4.23) необходимо аппроксимировать на минимальном шаблоне хотя бы с 1-м порядком. На равномерной сетке с шагами h_1 и h_2 этим свойством обладают следующие приближения:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{0\,k} = -\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{0\,k} \approx -(T_{\bar{y}y})_{0\,k},$$

$$\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial x\partial y^2}\right)_{0\,k} \approx (\omega_{x\bar{y}y})_{0\,k} =$$

$$= \frac{1}{h_1}[(\omega_{\bar{y}y})_{1\,k} - (\omega_{\bar{y}y})_{0\,k}].$$

Кроме того, в целях улучшения устойчивости искомой разностной формулы и с учетом того, что

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{0\,k} = \frac{2}{h_1^2}\psi_{1\,k} + O(h_1),$$

применим монотонную аппроксимацию 1-го порядка

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{0\,k} \approx \frac{2}{h_1^2}[\psi_{1\,k}^{+}(\omega_{\bar{y}})_{0\,k} + \psi_{1\,k}^{-}(\omega_y)_{0\,k}].$$

В результате этих приближенных замен получим из (4.23) граничное условие

$$\omega_{0\,k} = (A\omega_{1\,k} + B_1\omega_{0\,k-1} + B_2\omega_{0\,k+1} + D\omega_{1\,k-1} + D\omega_{1\,k+1} + \Phi)/C, \tag{4.24}$$

где

$$A = 2\gamma^2 - 15;\ B_1 = \gamma\left(\gamma + \frac{7}{2}\psi_{1,k}^{+}\right);$$

$$B_2 = \gamma\left(\gamma - \frac{7}{2}\psi_{1\,k}^{-}\right);\quad D = -\gamma^2;\quad \gamma = h_1/h_2;$$

$$C = A + B_1 + B_2 + 2D + 45;$$

$$\Phi = -\frac{90}{h_1^2}\psi_{1\,k} - \frac{15}{4}h_1^2\,\mathrm{Gr}\,(T_x)_{0\,k} -$$

$$-\frac{1}{8}h_1^3\,\mathrm{Gr}\,(T_{\bar{y}y})_{0\,k};\ \psi^{\pm} = \frac{1}{2}(\psi \pm |\psi|);$$

$$(T_x)_{0\,k} = \frac{1}{h_1}(T_{1\,k} - T_{0\,k});$$

$$(T_{\bar{y}y})_{0\,k} = \frac{1}{h_2^2}(T_{0\,k-1} - 2T_{0\,k} + T_{0\,k+1}).$$

Формула (4.24) аппроксимирует $\omega_{0\,k}$ с погрешностью $O(h^4)$. Если шаги связаны отношением

$$h_1/h_2 < \frac{1}{2}\sqrt{45} \approx 3{,}35, \tag{4.25}$$

то ее коэффициенты удовлетворяют условию $|C|>|A|+|B_1|+|B_2|+2|D|$, которое требуется по первому достаточному признаку устойчивости для линейных разностных задач (см. § 2.3). Сравнивая (4.25) с условием монотонности (3.57), приходим к выводу, что формула (4.24) приемлема для реализации со схемой 4-го порядка (3.53). Проводившиеся численные эксперименты на задачах ЕК подтвердили оценку на шаги (4.25) для граничного условия (4.24). В случае схем 1-го и 2-го порядков аппроксимации, по-видимому, более предпочтительны простые условия Тома, Вудса, Кусковой — Чудова, которые удовлетворяют вышеупомянутому линейному признаку устойчивости при любых шагах.

§ 4.2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Полная постановка задач ЕК предполагает, что температура, завихренность и функция тока не только зависит от пространственных координат, но и изменяются во времени. Например, типично нестационарное решение возникает, когда температура на границе задается как функция времени t, а также при турбулентном режиме конвекции. Нестационарную модель часто применяют и к заведомо стационарным задачам, находя их решение в результате установления при $t\to\infty$.

4.2.1. Явные схемы. Начинающему исследователю наиболее доступны алгоритмы, которые получаются за счет явной по времени аппроксимации уравнений переноса тепла и завихренности. Явные схемы просты в реализации и на расчет одного временно́го слоя требуют минимальных затрат машинного времени. Однако линейный анализ их устойчивости накладывает весьма жесткие ограничения на величину сеточного шага τ по переменной t, заставляя считать большое число слоев для получения численного решения на заданном отрезке времени. Поэтому применение явных схем безусловно оправдано в случаях, когда для достижения приемлемой точности шаг τ должен выбираться столь же малым, как и для обеспечения устойчивости алгоритма. Это может иметь место, например, если искомое решение является быстроосциллирующим по времени. Отметим также, что если количество расчетных вариантов невелико, то возможный проигрыш в затратах машинного времени при

эксплуатации явной схемы возмещается сравнительно короткими сроками подготовки и отладки машинной программы.

Рассмотрим две двухслойные явные схемы для уравнений (1.15). Сначала на основе разностного оператора (3.4), аппроксимирующего конвективные члены центральными разностями, составим простейший алгоритм

$$\frac{T^{n+1}_{ik} - T^n_{ik}}{\tau} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(T^n_{\overline{x}x} + T^n_{\overline{y}y}\right) - \psi^n_{\circ y} T^n_{\circ x} + \psi^n_{\circ x} T^n_{\circ y}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\omega^{n+1}_{ik} - \omega^n_{ik}}{\tau} = \omega^n_{\overline{x}x} + \omega^n_{\overline{y}y} - \psi^n_{\circ y}\omega^n_{\circ x} + \psi^n_{\circ x}\omega^n_{\circ y} + \mathrm{Gr}\, T^{n+1}_{\circ x}, \quad (4.27)$$

$$\psi^{n+1}_{\overline{x}x} + \psi^{n+1}_{\overline{y}y} + \omega^{n+1}_{ik} = 0, \quad (4.28)$$

где $n=0, 1, \ldots$ — индекс сетки по t (номер временно́го слоя).

Разностные уравнения (4.26)—(4.28) используются во внутренних узлах сетки при заданных начальных и граничных условиях, определяемых из физической постановки. На $(n+1)$-м слое сначала по явной формуле (4.26) вычисляется температура T^{n+1}, затем по явной формуле (4.27) — завихренность ω^{n+1} и, наконец, решается система линейных алгебраических уравнений (4.28) для нахождения функции тока ψ^{n+1}. Задавая T^0, ω^0 и ψ^0 из начального условия при $t=t_0$, можно найти решение для любого момента времени $t_{n+1}=t_n+\tau$, $n=0, 1, \ldots$. Схема (4.26)—(4.28) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau+h^2)$.

Принцип максимума (2.13), примененный к каждому из разностных уравнений в предположении их линейности, дает следующую систему достаточных условий устойчивости:

$$h_1 \leqslant \frac{2}{c_1 \max\limits_{i,k,n} |\psi_{\circ y}|}, \quad h_2 \leqslant \frac{2}{c_1 \max\limits_{i,k,n} |\psi_{\circ x}|},$$

$$\tau \leqslant c_2 \Big/ \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right), \quad (4.29)$$

$$c_1 = \max(1, \mathrm{Pr}), \quad c_2 = \min(1, \mathrm{Pr}).$$

Заметим, что проверка условий (4.29) возможна лишь после того, как решение найдено на всех временны́х сло-

ях. В режиме развитой конвекции ($\mathrm{Ra}>10^5$) условия на h_1 и h_2 практически трудно выполнимы из-за дефицита машинных ресурсов.

Обременительные ограничения на шаги h_1 и h_2 удается снять, если конвективные члены аппроксимировать односторонними разностями, ориентированными против течения. Применим, например, монотонный оператор консервативной схемы (3.30), построенной для стационарного конвективного уравнения. При этом неявное разностное уравнение для функции тока (4.28) оставим в силе, а для температуры и завихренности составим чисто явные аппроксимации вида

$$\frac{T_{i\,k}^{n+1}-T_{i\,k}^{n}}{\tau}=\Lambda_x^{[\mathrm{Pr}]}T^n+\Lambda_y^{[\mathrm{Pr}]}T^n, \tag{4.30}$$

$$\frac{\omega_{i\,k}^{n+1}-\omega_{i\,k}^{n}}{\tau}=\Lambda_x^{[1]}\omega^n+\Lambda_y^{[1]}\omega^n+\mathrm{Gr}\,T_{\overset{\circ}{x}}^{n+1}, \tag{4.31}$$

где разностные операторы раскрываются по формулам

$$\Lambda_x^{[\sigma]}f=\left(\frac{1}{\sigma h_1\left(1+|u_{i+\frac12\,k}|\sigma h_1/2\right)}-u^-_{i+\frac12\,k}\right)\frac{f_{i+1\,k}-f_{i\,k}}{h_1}-$$

$$-\left(\frac{1}{\sigma h_1\left(1+|u_{i-\frac12\,k}|\sigma h_1/2\right)}+u^+_{i-\frac12\,k}\right)\frac{f_{i\,k}-f_{i-1\,k}}{h_1},$$

$$\Lambda_y^{[\sigma]}f=\left(\frac{1}{\sigma h_2\left(1+|v_{i\,k+\frac12}|\sigma h_2/2\right)}-v^-_{i\,k+\frac12}\right)\frac{f_{i\,k+1}-f_{i\,k}}{h_2}- \tag{4.32}$$

$$-\left(\frac{1}{\sigma h_2\left(1+|v_{i\,k-\frac12}|\sigma h_2/2\right)}+v^+_{i\,k-\frac12}\right)\frac{f_{i\,k}-f_{i\,k-1}}{h_2},$$

$$u_{i\pm\frac12\,k}=\frac{1}{4h_2}\left(\psi^n_{i\pm1\,k+1}-\psi^n_{i\pm1\,k-1}+\psi^n_{i\,k+1}-\psi^n_{i\,k-1}\right),$$

$$v_{i\,k\pm\frac12}=-\frac{1}{4h_1}\left(\psi^n_{i+1\,k\pm1}-\psi^n_{i-1\,k\pm1}+\psi^n_{i+1\,k}-\psi^n_{i-1\,k}\right),$$

$$u^{\pm}=(u\pm|u|)/2.$$

Явная схема (4.30), (4.31) вместе с уравнением (4.28) имеет тот же порядок аппроксимации, что и предыдущая схема. Сохраняется также структура вычислительного процесса. Что касается условия устойчивости, то принцип максимума накладывает его теперь только на шаг $\tau = \tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$:

$$\tau = \tau_{n+1} \leqslant c_2 \Big/ \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} + \frac{c_2}{h_1} \max_{i,\,k} |\psi_{\circ}^{n}| + \right.$$

$$\left. + \frac{c_2}{h_2} \max_{i,\,k} |\psi_{\circ}^{n}| \right). \qquad (4.33)$$

Важное преимущество условия (4.33) в том, что шаг τ_{n+1} хотя и зависит от разностного решения, но лишь с предыдущего слоя. Это обстоятельство в ряде случаев позволяет автоматизировать выбор τ_{n+1} при переходе от слоя к слою.

4.2.2. Неявные схемы. Применение неявных разностных схем для уравнений переноса тепла и завихренности позволяет повысить устойчивость алгоритма, что проявляется в увеличении допустимых значений шага τ. Несмотря на то что при переходе к неявным аппроксимациям время счета на каждом слое возрастает, общий расход машинного времени на решение задачи может значительно сократиться из-за уменьшения числа расчетных слоев. Неявные схемы имеют более сложную конструкцию, чем явные, а значит, требуют дополнительных усилий и времени на составление и отладку программы для счета на ЭВМ. Они перспективны в первую очередь при решении стационарных задач по методу установления, а также при расчете крупномасштабных нестационарных процессов, когда выбор большого шага по времени не противоречит физическим представлениям.

Наиболее эффективны неявные схемы, основанные на идее так называемых экономичных методов [12, 14], позволяющих свести решение многомерного уравнения к решению последовательности одномерных задач. При численном моделировании двумерных задач ЕК часто используется схема переменных направлений. В книгах [1—3] приведены некоторые варианты этой схемы в зависимости от способа аппроксимации пространственных производных. Запишем ее для нестационарных уравнений переноса тепла и завихренности, применив консервативные монотонные операторы (4.32):

$$\frac{T_{i\,k}^{n+1/2}-T_{i\,k}^{n}}{\tau/2}=\Lambda_x^{[\mathrm{Pr}]}T^{n+1/2}+\Lambda_y^{[\mathrm{Pr}]}T^{n}, \qquad (4.34)$$

$$\frac{T_{i\,k}^{n+1}-T_{i\,k}^{n+1/2}}{\tau/2}=\Lambda_x^{[\mathrm{Pr}]}T^{n+1/2}+\Lambda_y^{[\mathrm{Pr}]}T^{n+1}, \qquad (4.35)$$

$$\frac{\omega_{i\,k}^{n+1/2}-\omega_{i\,k}^{n}}{\tau/2}=\Lambda_x^{[1]}\omega^{n+1/2}+\Lambda_y^{[1]}\omega^{n}+\mathrm{Gr}\,T_{\circ\,x}^{n}, \qquad (4.36)$$

$$\frac{\omega_{i\,k}^{n+1}-\omega_{i\,k}^{n+1/2}}{\tau/2}=\Lambda_x^{[1]}\omega^{n+1/2}+\Lambda_y^{[1]}\omega^{n+1}+\mathrm{Gr}\,T_{\circ\,x}^{n+1}. \qquad (4.37)$$

Похожая схема применялась в работах [22, 37—39]. Схема (4.34)—(4.37) представляет несколько улучшенный вариант, предложенный в [29].

Если раскрыть разностные операторы, то уравнения (4.36) и (4.37) можно привести к каноническому трехдиагональному виду:

$$A_1\omega_{i-1\,k}^{n+1/2}-\left(\frac{2}{\tau}+A_1+B_1\right)\omega_{i\,k}^{n+1/2}+B_1\omega_{i+1\,k}^{n+1/2}=-F_1, \qquad (4.38)$$

$$A_2\omega_{i\,k-1}^{n+1}-\left(\frac{2}{\tau}+A_2+B_2\right)\omega_{i\,k}^{n+1}+B_2\omega_{i\,k+1}^{n+1}=-F_2, \qquad (4.39)$$

удобному для применения прогонки, где

$$A_1=\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{\sigma h_1\,(1+|u_{i-\frac{1}{2}\,k}|\sigma h_1/2)}+u^{+}_{i-\frac{1}{2}\,k}\right)>0;$$

$$B_1=\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{\sigma h_1\,(1+|u_{i+\frac{1}{2}\,k}|\sigma h_1/2)}-u^{-}_{i+\frac{1}{2}\,k}\right)>0;$$

$$A_2=\frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{\sigma h_2\,(1+|v_{i\,k-\frac{1}{2}}|\sigma h_2/2)}+v^{+}_{i\,k-\frac{1}{2}}\right)>0;$$

$$B_2=\frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{\sigma h_2(1+|v_{i\,k+\frac{1}{2}}|\sigma h_2/2)}-v^{-}_{i\,k+\frac{1}{2}}\right)>0;$$

$$F_1=\frac{2}{\tau}\,\omega_{i\,k}^{n}+\Lambda_y^{[\sigma]}\omega^{n}+\mathrm{Gr}\,\frac{1}{2h_1}\,(T_{i+1\,k}^{n}-T_{i-1\,k}^{n});$$

$$F_2 = \frac{2}{\tau}\omega_{i\,k}^{n+1/2} + \Lambda_x^{[\sigma]}\omega^{n+1/2} +$$

$$+ \mathrm{Gr}\frac{1}{2h_1}(T_{i+1\,k}^{n+1} - T_{i-1\,k}^{n+1}); \quad \sigma = 1.$$

Чтобы получить каноническую запись разностных уравнений (4.34) и (4.35), следует в (4.38) и (4.39) формально положить $\omega = T$, $\sigma = \mathrm{Pr}$, $\mathrm{Gr} = 0$. Так как все коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 положительны, то достаточный признак устойчивости метода прогонки удовлетворяется при любых h_1, h_2 и τ [12].

Таким образом, температура в момент времени t_{n+1}, равно как и завихренность, при заданных граничных условиях отыскивается в два приема. Сначала прогонками по направлению x при всех k решается уравнение (4.34) и строится промежуточная сеточная функция $T^{n+1/2}$. А затем к уравнению (4.35) при каждом i применяется прогонка по направлению y и в результате находится нужное решение T^{n+1}. Завихренность ω^{n+1} определяется аналогично последовательным решением уравнений (4.36) и (4.37). Ясно, что все уравнения должны быть предварительно представлены в канонической форме. Для вычисления функции тока годится уравнение (4.28).

Схема переменных направлений имеет одно неоспоримое преимущество перед явными схемами: в линейном случае доказана ее абсолютная устойчивость [12]. Однако это не означает, что схема (4.34)—(4.37), (4.28) будет устойчивой при сколь угодно больших τ. Фактор нелинейности накладывает на величину τ ограничения, которые зависят от способа вычисления граничных условий и коэффициентов разностных уравнений. При неудачном выборе расчетных правил на границе и в коэффициентах схема переменных направлений может оказаться менее экономичной, чем соответствующая явная схема.

Пары разностных уравнений (4.34), (4.35) и (4.36), (4.37) аппроксимируют дифференциальные уравнения переноса тепла и завихренности с погрешностью $O(\tau + h^2)$. Порядок аппроксимации по времени можно сделать вторым, если коэффициенты вычислять не на нижнем слое, а на промежуточном, используя усреднения

$$u_{i\,\pm\frac{1}{2}\,k} = \frac{1}{8h_2}(\psi_{\pm1\,k+1}^{i\,n} - \psi_{i\pm1\,k-1}^{n} + \psi_{i\,k+1}^{n} - \psi_{i\,k-1}^{n} +$$

$$+ \psi^{n+1}_{i\pm1\,k+1} - \psi^{n+1}_{i\pm1\,k-1} + \psi^{n+1}_{i\,k+1} - \psi^{n+1}_{i\,k-1}), \tag{4.40}$$

$$\upsilon_{i\,k\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{8h_1}(\psi^{n}_{i-1\,k\pm1} - \psi^{n}_{i+1\,k\pm1} + \psi^{n}_{i-1\,k} - \psi^{n}_{i+1\,k} +$$
$$+ \psi^{n+1}_{i-1\,k\pm1} - \psi^{n+1}_{i+1\,k\pm1} + \psi^{n+1}_{i-1\,k} - \psi^{n+1}_{i+1\,k}),$$

и поддерживать на левой и правой границах условия согласования [12]:

$$T^{n+1/2}_{\Gamma} = \frac{1}{2}(T^{n}_{\Gamma} + T^{n+1}_{\Gamma}) - \frac{1}{4}\tau\Lambda_y^{[\mathrm{Pr}]}(T^{n+1}_{\Gamma} - T^{n}_{\Gamma}), \tag{4.41}$$

$$\omega^{n+1/2}_{\Gamma} = \frac{1}{2}(\omega^{n}_{\Gamma} + \omega^{n+1}_{\Gamma}) - \frac{1}{4}\tau\Lambda_y^{[1]}(\omega^{n+1}_{\Gamma} - \omega^{n}_{\Gamma}).$$

Формулы (4.40) вносят нелинейность в разностные уравнения относительно слоя t_{n+1}. Так что в этом случае не обойтись без дополнительного итерационного процесса для пересчета полей температуры, завихренности и функции тока, т. е. на каждом слое численный алгоритм должен состоять из двух итерационных циклов: внутреннего для уравнения (4.28) и внешнего для уточнения решения T^{n+1}, ω^{n+1}, ψ^{n+1}. Расчет T^{n+1} и ω^{n+1} на внешних итерациях ведется по обычной схеме переменных направлений, использующей усреднения (4.40) и условия согласования (4.41). Такая процедура не только повышает точность нестационарного решения, но и при умелой обработке граничных условий заметно улучшает устойчивость разностной схемы. При этом, как правило, достаточно ограничиться лишь тремя — пятью внешними итерациями.

4.2.3. Решение уравнения для функции тока. Разностное уравнение Пуассона (4.28) является одним из наиболее изученных объектов вычислительной математики. Для его решения имеется широкое разнообразие как прямых (точных), так и итерационных методов. Исчерпывающий обзор алгоритмов численного решения уравнения Пуассона дан в книгах [1, 12, 14, 40].

Среди прямых методов выделим метод разделения переменных с быстрым преобразованием Фурье, а среди итерационных — метод переменных направлений, попеременно-треугольный и метод последовательной верхней релаксации.

Метод разделения переменных с использованием бы-

строго преобразования Фурье является самым экономичным методом решения разностного уравнения Пуассона в прямоугольной области. Он относится к классу прямых методов и позволяет получать решение с «машинной» точностью за сравнительно небольшое число арифметических действий, определяемое количеством сеточных узлов. Однако применимость метода ограничена прямоугольной геометрией области и равномерной сеткой (хотя бы по одной переменной). Он неприменим также к уравнениям с переменными коэффициентами, которые возникают для функции тока в системах координат, отличных от декартовой. По сравнению с итерационными методами этот метод требует большого объема машинной памяти, приводит к сложному алгоритму и программе.

Итерационный метод переменных направлений для решения уравнения (4.28) при $t=t_{n+1}$ строится и реализуется по той же идее, что и схемы (4.34), (4.35) и (4.36), (4.37), только роль индекса по времени играет номер итерации s, а вместо шага τ вводятся два семейства итерационных параметров $\{\tau_s^{(1)}\}$ и $\{\tau_s^{(2)}\}$, которые выбираются из условия максимальной скорости сходимости итераций. В случае прямоугольной области и равномерной сетки известны оптимальные наборы $\{\tau_s^{(1)}\}$ и $\{\tau_s^{(2)}\}$, при которых метод переменных направлений превосходит другие итерационные методы не только по количеству итераций, но и по объему вычислений для достижения точности ε. Но чтобы получить решение по методу переменных направлений с точностью $\varepsilon=10^{-3}$—10^{-4}, на реальных сетках нужно выполнить в 6—9 раз больше арифметических действий, чем требуется для метода разделения переменных. Усложнение задачи (переменные коэффициенты в уравнении, неравномерная сетка, непрямоугольная область) не вносит принципиальных изменений в конструкцию метода переменных направлений, однако если не найден приемлемый способ вычисления оптимальных наборов $\{\tau_s^{(1)}\}$ и $\{\tau_s^{(2)}\}$, он становится малоэффективным.

Идея *попеременно-треугольного метода* предложена Самарским [41]. В дальнейшем метод интенсивно совершенствовался, обобщался; в книгах [12, 40] он детально описан и обоснован. Разработана техника его реализации в областях сложной формы в случае эллиптического уравнения с непостоянными коэффициентами.

Применим этот метод к уравнению (4.28), предположив, что областью определения является прямоугольник $\bar{G}=(0\leqslant x\leqslant l_1,\ 0\leqslant y\leqslant l_2)$ с границей Г.

Пусть $\psi^{n+1,\,s}$ — итерационное приближение номера s к решению ψ^{n+1} уравнения (4.28), $\psi^{n+1,\,0}=\psi^n$ — начальное приближение и пусть $\psi^{n+1,\,s}$ найдено. Алгоритм попеременно-треугольного метода вычисления $(s+1)$-го приближения к ψ^{n+1} состоит из двух рекуррентных устойчивых формул.

Сначала по формуле

$$\bar{\psi}_{i\,k}=\left(\frac{q}{h_1^2}\bar{\psi}_{i-1\,k}+\frac{q}{h_2^2}\bar{\psi}_{i\,k-1}+\right.$$

$$\left.+\,F^s_{i\,k}\right)\Big/\left(1+\frac{q}{h_1^2}+\frac{q}{h_2^2}\right),$$

$$F^s_{i\,k}=\tau_{s+1}\omega^{n+1}_{i\,k}+\psi^{n+1,\,s}_{i\,k}+$$

$$+\left(\tau_{s+1}-q-\frac{q^2}{h_1^2}-\frac{q^2}{h_2^2}\right)(\psi^{n+1,\,s}_{\bar{x}x}+\psi^{n+1,\,s}_{\bar{y}y})+$$

$$+\frac{q^2}{h_1^2h_2^2}(\psi^{n+1,\,s}_{i-1\,k+1}+\psi^{n+1,\,s}_{i+1\,k-1}-2\psi^{n+1,\,s}_{i\,k}),$$

$$\bar{\psi}_\Gamma=0,$$

определяется вспомогательная функция $\bar{\psi}$ путем последовательного обхода узлов в направлении слева направо и снизу вверх.

После того как сеточная функция $\bar{\psi}$ построена, вычисляется $(s+1)$-е итерационное приближение

$$\psi^{n+1,\,s+1}_{i\,k}=\left(\frac{q}{h_1^2}\psi^{n+1,\,s+1}_{i+1\,k}+\frac{q}{h_2^2}\psi^{n+1,\,s+1}_{i\,k+1}+\right.$$

$$\left.+\,\bar{\psi}_{i\,k}\right)\Big/\left(1+\frac{q}{h_1^2}+\frac{q}{h_2^2}\right),\qquad \psi^{n+1,\,s+1}_\Gamma=0.$$

Движение по узлам здесь осуществляется в обратном порядке, т. е. справа налево и сверху вниз.

Наивысшая скорость сходимости обеспечивается при следующих значениях итерационных параметров:

$$q = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad \tau_s = \tau_0/(1 + \rho_0\mu_s), \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$\delta = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2l_2}; \quad \Delta = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2};$$

$$\tau_0 = \frac{8}{\sqrt{\delta\Delta}}\,\frac{1+\eta}{1+3\eta}; \quad \rho_0 = \frac{1-\eta}{1+3\eta}; \quad \eta = \sqrt{\delta/\Delta};$$

$$m = \left[\frac{\ln(\varepsilon/2)}{\ln\rho_1} + 1\right]; \quad \rho_1 = \frac{1-\eta}{1+3\eta+2\sqrt{2\eta(1+\eta)}};$$

$\{\mu_s\}$ — упорядоченная последовательность корней многочлена Чебышева степени m; квадратные скобки обозначают целую часть; $m = m(\varepsilon)$ — минимальный номер, при котором достигается требуемая точность ε, т. е. при $s = m$ в одной из сеточных норм будет удовлетворяться условие

$$\frac{\|\psi_{\bar{x}x}^{n+1,\,s} + \psi_{\bar{y}y}^{n+1,\,s} + \omega^{n+1}\|}{\|\psi_{\bar{x}x}^{n} + \psi_{\bar{y}y}^{n} + \omega^{n+1}\|} \leqslant \varepsilon. \qquad (4.42)$$

Таким образом, счет ведется до $s = m$ и последнее приближение $\psi^{n+1,\,m}$ принимается за искомое решение ψ^{n+1}.

На рассмотренной задаче попеременно-треугольный метод с оптимальным выбором параметров немного уступает методу переменных направлений по основному показателю — количеству арифметических действий, но он более прост для программной реализации. Этот метод может оказаться эффективным и в случае непрямоугольной области и переменных коэффициентов, хотя процедура оптимизации итерационных параметров усложняется.

Наиболее часто для расчета функции тока используется *метод последовательной верхней релаксации*. Предельно простой по конструкции и легко программируемый алгоритм, приемлемая скорость сходимости в сочетании с минимальным потреблением машинного времени на одну итерацию — факторы, которые определяют постоянный интерес к этому методу.

Расчетная формула для уравнения (4.28) имеет вид

$$\psi_{i\,k}^{n+1,\,s+1} = (1-q)\,\psi_{i\,k}^{n+1,\,s} + q\left[\frac{1}{h_1^2}\left(\psi_{i-1\,k}^{n+1,\,s+1} + \psi_{i+1\,k}^{n+1,\,s}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{h_2^2}(\psi_{i\,k-1}^{n+1,\,s+1}+\psi_{i\,k+1}^{n+1,\,s})+\omega_{i\,k}^{n+1}\Big]\Big/\Big(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\Big), \tag{4.43}$$

где q — параметр релаксации. За начальное приближение $\psi^{n+1,\,0}$ обычно принимается решение с предыдущего слоя ψ^n. Вычисления организуются либо по строкам, либо по столбцам в сторону увеличения индексов i, k. Найденное значение $\psi_{i\,k}^{n+1,\,s+1}$ сразу же помещается на место $\psi_{i\,k}^{n+1,\,s}$, поэтому алгоритм обходится минимумом памяти ЭВМ. Погрешность итерационного решения можно оценивать условием (4.42) или каким-либо другим подходящим условием.

Сходимость метода имеет место при всех $0<q<2$. В частном случае $q=1$ алгоритм (4.43) соответствует *методу Зейделя*. Для прямоугольной области $\overline{G}=(0\leqslant x\leqslant l_1,\ 0\leqslant y\leqslant l_2)$ оптимальное значение параметра релаксации дается формулой

$$q=q_0=2/(1+\sqrt{\lambda(2-\lambda)}), \tag{4.44}$$

$$\lambda=\frac{2}{h_1^2+h_2^2}\left(h_2^2\sin^2\frac{\pi h_1}{2l_1}+h_1^2\sin^2\frac{\pi h_2}{2l_2}\right).$$

По количеству арифметических действий одна итерация метода релаксации соответствует примерно 2,5 итерациям попеременно-треугольного метода или четырем итерациям метода переменных направлений. Однако из-за меньшей скорости сходимости при оптимальных значениях параметров метод релаксации требует на решение задачи в 1,5—2,5 раза больше машинного времени, чем два других метода.

Согласно [1] сходимость итераций можно улучшить, если на первом шаге задавать $q=1$, а на последующих руководствоваться формулой (4.44). Более радикальной модификацией является так называемый *циклический метод Чебышева* [42], в котором обход сеточных узлов осуществляется в «шахматном» порядке: счет сначала ведется только в узлах с четной суммой индексов $i+k$ по формуле

$$\psi_{i\,k}^{n+1,\,s+1}=(1-q_{s+1/2})\,\psi_{i\,k}^{n+1,\,s}+q_{s+1/2}\left[\frac{1}{h_1^2}(\psi_{i-1\,k}^{n+1,\,s}+\right.$$

$$+ \psi_{i+1\,k}^{n+1,\,s}) + \frac{1}{h_2^2}(\psi_{i\,k-1}^{n+1,\,s} + \psi_{i\,k+1}^{n+1,\,s}) + \omega_{i\,k}^{n+1}\Big] \Big/ \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right),$$

а затем — в нечетных узлах посредством формулы

$$\psi_{i\,k}^{n+1,\,s+1} = (1 - q_{s+1})\,\psi_{i\,k}^{n+1,\,s} + q_{s+1}\left[\frac{1}{h_1^2}(\psi_{i-1\,k}^{n+1,\,s+1} + \right.$$

$$+ \psi_{i+1\,k}^{n+1,\,s+1}) + \frac{1}{h_2^2}(\psi_{i\,k-1}^{n+1,\,s+1} +$$

$$\left. + \psi_{i\,k+1}^{n+1,\,s+1}) + \omega_{i\,k}^{n+1}\right] \Big/ \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right).$$

Ясно, что на выполнение одной итерации циклическим методом расходуется такое же количество операций, как и методом (4.43). Однако за счет введения в алгоритм параметра, зависящего от s, скорость сходимости на ранней стадии итерационного процесса удается значительно повысить. Для этого рекомендуется вычислять значения параметра релаксации по следующему рекуррентному правилу [42]:

$$q_{1/2} = 1,\ q_1 = 1 \Big/ \left[1 - \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2\right],$$

$$q_p = 1 \Big/ \left[1 - \frac{1}{4}(\lambda - 1)^2 q_{p-1/2}\right],\ p > 1.$$

Отметим, что при $p \to \infty$ параметр q_p стремится к значению q_0, оптимальному для метода верхней релаксации.

Обобщения, связанные с непрямоугольной конфигурацией границ и применением криволинейных координат, не вносят принципиальных изменений в конструкцию и не отражаются на основных свойствах метода релаксации. Несмотря на то что аналитическая оценка для оптимального параметра q_0 в общем случае не найдена, этот метод, по-видимому, остается наиболее эффективным именно для задач со сложной геометрией и переменными коэффициентами в уравнении функции тока, во-первых, в силу своей простоты и, во-вторых, потому, что подобрать близкое к оптимальному значение одного параметра q несравнимо легче, чем найти оптимальную последовательность $\{\tau_s\}$ экспериментальным путем в методах переменных направлений и попеременно-треугольном. Так как коэффициенты разностных уравнений для

функции тока обычно линейны и не зависят от времени, а правая часть не влияет на оптимальное значение q_0, исследование q_0 достаточно провести один раз: на первом слое по времени, чтобы пользоваться им на всех последующих слоях и в других вариантах той же задачи.

4.2.4. О граничных условиях. При решении задач ЕК важное место занимает вопрос о процедуре вычисления завихренности на твердой стенке. От того, насколько она удачна, зависят аппроксимационные свойства и устойчивость алгоритма в целом. При этом надо иметь в виду, что условия устойчивости, приобретенные схемами во внутренних узлах, невозможно улучшить, к каким бы ухищрениям мы ни прибегали на границе. Однако важно их не испортить.

В § 4.1 рассмотрено несколько приближенных формул для завихренности на стенке, которые пригодны для реализации с явными схемами,— формулы Тома (4.6), Вудса (4.7), Кусковой — Чудова (4.21). Ни одна из них не понижает порядка аппроксимации схем (4.27) и (4.31) и, как показывают расчеты, практически не ухудшает условий на τ (4.29) и (4.33).

Сложнее обстоит дело с неявными схемами, устойчивость которых радикально зависит от способа получения граничных значений завихренности. Упомянутые приближенные формулы приводят к таким ограничениям на шаг τ, при которых неявные схемы теряют свое преимущество в устойчивости и в ряде случаев уступают явным схемам.

В работах Полежаева и Грязнова [43, 44] развит подход, при котором граничные значения завихренности вообще не требуются. Суть его в следующем. После того как проведен расчет поля температуры T^{n+1}, по формуле $\omega^{n+1} = -\psi_{xx}^{n+1} - \psi_{yy}^{n+1}$ вычисляем завихренность в приграничных узлах. Используя найденные значения как граничные, решаем разностное уравнение для завихренности и определяем $\omega_{i\,k}^{n+1}$ в остальных внутренних узлах. Далее любым из описанных ранее методов решаем разностное уравнение для функции тока (4.28) при условии (4.1) и находим все $\psi_{i\,k}^{n+1}$. С их помощью корректируем функцию тока в приграничных узлах так, чтобы выполнялось разностное соотношение, аппроксимирующее с высоким порядком условие прилипания $\partial\psi/\partial n = 0$. Это соотношение строим обычным методом неопределенных

коэффициентов на расширенном одностороннем шаблоне из трех — пяти точек. Если ищем стационарное решение, то на этом цикл можно закончить и перейти к следующему временно́му слою, но если решаем нестационарную задачу, рекомендуется на каждом слое организовать внешний итерационный процесс для уточнения найденных полей T^{n+1}, ω^{n+1} и ψ^{n+1}.

Описанная процедура эффективна при использовании во внутренних узлах устойчивых разностных схем, например схем переменных направлений (4.34)—(4.37), которые допускают большие шаги по времени. По сравнению с традиционным способом вычисления завихренности на стенке она позволяет увеличить шаг τ в 5—10, а иногда и более раз. Однако при больших числах Рэлея ($Ra > 10^5$) сказывается сглаживающий эффект этого метода, который может привести к ощутимой потере точности и требующий поэтому значительного сгущения сетки в пристеночном слое. Тем не менее метод нашел применение во многих отечественных работах по ЕК, в том числе и в исследованиях по турбулентной конвекции [45—47].

Для стабилизации вычислительного процесса иногда прибегают к сглаживанию (релаксации) краевых значений завихренности (в методе Грязнова — Полежаева они находятся в приграничных узлах): подсчитанные на $(p+1)$-й внешней итерации краевые значения $\omega^{n+1,\,p+1}$ немедленно подправляются по формуле

$$\tilde{\omega}^{n+1,\,p+1} = (1 - \eta)\,\omega^{n+1,\,p} + \eta\omega^{n+1,\,p+1},$$

где $0 < \eta \leqslant 1$ — параметр нижней релаксации; p — номер предыдущей итерации. Тарунины [48, 49] выполнено теоретическое исследование оптимальных значений параметра η для различных задач, при которых скорость сходимости внешних итераций заметно возрастает.

Опыт расчетов показывает, что методика, основанная на внесении краевых значений завихренности в приграничные узлы в сочетании с релаксационной процедурой внешних итераций на каждом слое, способна во много раз расширить область устойчивости в случае неявных схем. Так, в работе [39] шаг τ выбирался из условия $\tau < h$.

Судя по количеству публикаций, практический интерес вызывают прежде всего те задачи ЕК, которые допускают решения, не зависящие от времени t. Стационарные движения жидкости возникают в ламинарном режиме конвекции при стационарных граничных условиях. Такие решения удовлетворяют стационарным конвективным уравнениям, которые в плоском случае декартовых координат выглядят, очевидно, так:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\mathrm{Gr}\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\omega=0,$$

где $T=T(x,\ y)$; $\omega=\omega(x,\ y)$; $\psi=\psi(x,\ y)$.

4.3.1. О методе установления. Решение, удовлетворяющее (4.45), можно находить, решая при тех же граничных условиях систему полных нестационарных уравнений (1.15) в пределе $t\to\infty$. Такой способ получения стационарного решения называют *методом установления*. Организация счета в этом случае фактически не отличается от описанной в § 4.2. Чтобы придать физический смысл вычислительному процессу, за начальное условие выбирают известное решение рассматриваемой задачи, найденное для другого значения числа Рэлея, например, при теплопроводности ($\mathrm{Ra}=0$). Счет по слоям ведется до тех пор, пока нестационарный процесс в достаточной степени не установится, и установившееся решение принимается за искомое. Важно, что метод не предполагает априорно существования стационарного решения, поэтому если оно в действительности отсутствует, установления не будет. Обратное, вообще говоря, неверно: неустановление численных результатов при $t\to\infty$ совсем не обязательно имеет физическую природу — оно может происходить из-за вычислительной неустойчивости примененного алгоритма. По этой причине расчетные значения критических чисел Рэлея, соответствующих возникновению турбулентности, могут оказаться заниженными.

4.3.2. Релаксационный метод. При изучении стационарных задач имеет смысл исходить непосредственно из системы (4.45), решать ее с помощью какой-либо итерационной процедуры и подчинять выбор имеющихся итерационных (релаксационных) параметров лишь требованию максимальной скорости сходимости итераций. Иногда для улучшения вычислительной устойчивости (внешний) итерационный процесс дополняют внутренними итерациями для каждого из уравнений (4.45). Однако это влечет за собой повышение временно́й цены внешних итераций, и предпочтительно добиваться стабилизации без внутренних итераций.

Среди разнообразных итерационных схем, используемых на практике, минимальными затратами машинного времени на расчет одной итерации и машинной памяти, простотой программной реализации отличается *метод Зейделя*. Для его сходимости в случае линейной разностной задачи общего вида (2.12) достаточно [19, 50], чтобы во всех узлах выполнялись условия принципа максимума (2.13) и по крайней мере в одной граничной точке имело место строгое неравенство $D>0$.

Рассмотренные нами монотонные схемы и граничные формулы обладают этими свойствами при сколь угодно больших шагах сетки, хотя при повышенном порядке аппроксимации действуют некоторые ограничения на отношение шагов. Недостаток метода Зейделя — неудовлетворительные показатели по скорости сходимости и вычислительной устойчивости в условиях развитой конвекции ($\mathrm{Ra}\geqslant 10^4$), даже в случае монотонных аппроксимаций. Нейтрализовать дестабилизирующее влияние числа Рэлея удается за счет введения в алгоритм параметров релаксации.

Для стационарных уравнений (4.45), аппроксимированных со 2-м порядком монотонной консервативной схемой (3.30), рассмотрим простейший релаксационный алгоритм зейделевского типа:

$$T_{i\,k}^{s+1} = (1-q_T)\,T_{i\,k}^{s} + q_T(A_1^{[\mathrm{Pr}]}T_{i-1\,k}^{s+1} +$$

$$+ A_2^{[\mathrm{Pr}]}T_{i\,k-1}^{s+1} + B_1^{[\mathrm{Pr}]}T_{i+1\,k}^{s} + B_2^{[\mathrm{Pr}]}T_{i\,k+1}^{s})/C^{[\mathrm{Pr}]},$$

$$\omega_{i\,k}^{s+1} = (1-q_\omega)\,\omega_{i\,k}^{s} + q_\omega\Big(A_1^{[1]}\omega_{i-1\,k}^{s+1} + A_2^{[1]}\omega_{i\,k-1}^{s+1} +$$

$$+ B_1^{[1]}\omega^s_{i+1\,k} + B_2^{[1]}\omega^s_{i\,k+1} + \mathrm{Gr}\,\frac{T^s_{i+1\,k} - T^{s+1}_{i-1\,k}}{2h_1}\Big)\Big/ C^{[1]}, \tag{4.46}$$

$$\psi^{s+1}_{i\,k} = (1 - q_\psi)\,\psi^s_{i\,k} + q_\psi\left[\frac{1}{h_1^2}\,(\psi^{s+1}_{i-1\,k} + \psi^s_{i+1\,k}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h_2^2}\,(\psi^{s+1}_{i\,k-1} + \psi^s_{i\,k+1}) + \omega^{s+1}_{i\,k}\right]\Big/\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right),$$

где s — номер итерации; q_T, q_ω и q_ψ — параметры релаксации;

$$A_1^{[\sigma]} = \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{1}{1 + |u_{i-\frac{1}{2}\,k}|\sigma h_1/2} + u^+_{i-\frac{1}{2}\,k}\sigma h_1\right) > 0;$$

$$A_2^{[\sigma]} = \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{1}{1 + |v_{i\,k-\frac{1}{2}}|\sigma h_2/2} + v^+_{i\,k-\frac{1}{2}}\sigma h_2\right) > 0;$$

$$B_1^{[\sigma]} = \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{1}{1 + |u_{i+\frac{1}{2}\,k}|\sigma h_1/2} - u^-_{i+\frac{1}{2}\,k}\sigma h_1\right) > 0;$$

$$B_2^{[\sigma]} = \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{1}{1 + |v_{i\,k+\frac{1}{2}}|\sigma h_2/2} - v^-_{i\,k+\frac{1}{2}}\sigma h_2\right) > 0;$$

$$C^{[\sigma]} = A_1^{[\sigma]} + A_2^{[\sigma]} + B_1^{[\sigma]} + B_2^{[\sigma]};$$

$$u_{i\pm\frac{1}{2}\,k} = \frac{1}{4h_2}\,(\psi^s_{i\pm1\,k+1} - \psi^{s+1}_{i\pm1\,k-1} + \psi^s_{i\,k+1} - \psi^{s+1}_{i\,k-1});$$

$$v_{i\,k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4h_1}\,(\psi^{s+1}_{i-1\,k-1} - \psi^{s+1}_{i+1\,k-1} + \psi^{s+1}_{i-1\,k} - \psi^s_{i+1\,k});$$

$$v_{i\,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4h_1}\,(\psi^s_{i-1\,k+1} - \psi^s_{i+1\,k+1} + \psi^{s+1}_{i-1\,k} - \psi^s_{i+1\,k}).$$

В этом алгоритме, который при $q_T = q_\omega = q_\psi = 1$ соответствует методу Зейделя для системы нелинейных уравнений, вычисление температуры, завихренности и функции тока на итерационном слое происходит параллельно, причем найденные в узле (x_i, y_k) значения $T^{s+1}_{i\,k}$, $\omega^{s+1}_{i\,k}$ и $\psi^{s+1}_{i\,k}$ помещаются на место предыдущих приближений $T^s_{i\,k}$, $\omega^s_{i\,k}$ и $\psi^s_{i\,k}$, не требуя дополнительной памяти. Верхние индексы

формул (4.46) расставлены так, чтобы движение по узлам осуществлялось по направлению возрастания нижних индексов i, k. При желании их можно переставить, если иная последовательность обхода узлов покажется более выгодной. В частности, некоторый выигрыш по количеству итераций удается получить, ведя счет «по спирали» от границ к центру сеточной области или чередуя направление счета. Начальным приближением лучше брать уже известное решение для предшествующего значения числа Рэлея. Если таковых решений не найдено, можно попробовать для этой цели нулевое распределение.

Релаксационная процедура применяется не только во внутренних узлах, но и распространяется на граничные расчетные формулы. Например, условие Вудса для левой вертикальной стенки (4.7) преобразуется к виду

$$\omega_{0\,k}^{s+1} = (1 - q_\omega)\,\omega_{0\,k}^{s} + q_\omega \left(-\frac{1}{2}\,\omega_{1\,k}^{s} - \frac{3}{h_1^2}\,\psi_{1\,k}^{s} \right),$$

где итерационные номера приграничных значений соответствуют порядку счета, принятому в (4.46).

Для других разностных схем и граничных условий метод применяется аналогично. При этом важно проследить, чтобы при счете использовались последние приближения искомых функций в периферийных точках сеточного шаблона.

Если метод установления содержит один параметр для регулирования вычислительным процессом — шаг по времени τ, то в релаксационном алгоритме их три: q_T, q_ω и q_ψ, т. е. для каждой из функций по одному. Увеличение числа независимых параметров, безусловно, предоставляет более широкие возможности в управлении скоростью сходимости итераций, позволяя учитывать специфику каждого уравнения в отдельности и их взаимосвязь. Машинные эксперименты, описанные в § 5.2, показывают, что при оптимальном выборе q_T, q_ω и q_ψ релаксационный метод становится чрезвычайно эффективным. Там же предложен простой алгоритм оптимизации этих параметров для различных задач и разностных схем.

Так как релаксационный метод не обеспечивает аппроксимации нестационарных уравнений ЕК, сфера его применимости, строго говоря, ограничена стационарными задачами. Вместе с тем не исключено, что за счет искусственного подавления возникающих возмущений па-

раметрами релаксации он способен приводить к стационарным решениям и при числах Рэлея, соответствующих турбулентной конвекции. Несмотря на известную условность таких решений, опыт расчетов убеждает, что они дают верное представление об интегральных характеристиках турбулентного процесса, например, о числе Нуссельта и максимальной скорости движения, о макроструктуре течения и конвективного теплообмена.

4.3.3. Критерий сходимости итераций. Поскольку итерационный процесс не может продолжаться бесконечно, нужно выбрать подходящее условие его окончания: *критерий сходимости итераций,* при выполнении которого последнее найденное итерационное приближение может быть принято за искомое решение. Аналогичная проблема возникает и при использовании метода установления.

Большинство из ныне применяемых условий сходимости сводятся, по существу, к проверке приближенных равенств $T^{s+1} \approx T^s$, $\omega^{s+1} \approx \omega^s$, $\psi^{s+1} \approx \psi^s$ ($T^{n+1} \approx T^n$, $\omega^{n+1} \approx \approx \omega^n$, $\psi^{n+1} \approx \psi^n$ — в методе установления) с той или иной точностью.

На практике хорошо зарекомендовали себя различные аналоги относительной погрешности. Так, релаксационную процедуру (4.46) обычно можно прекращать, если на некотором $(s+1)$-м шаге окажется

$$\max(\varepsilon_T,\ \varepsilon_\omega,\ \varepsilon_\psi) < \varepsilon = 10^{-4} - 10^{-3}, \tag{4.47}$$

где

$$\varepsilon_\xi = \max_{i,\,k} |\varepsilon_{i\,k}^{(\xi)}|;\quad \varepsilon_{i\,k}^{(\xi)} = \frac{1}{q_\xi \bar{\xi}^s}\,(\xi_{i\,k}^{s+1} - \xi_{i\,k}^s);$$

$$\bar{\xi}^s = \sum_{i,k} |\xi_{i\,k}^s|/M;\quad \xi = T,\ \omega,\ \psi;$$

M — полное число узлов сеточной области. Понятно, что надежность таких критериев во многом зависит от поведения итерационного процесса: в принципе существует вероятность, что две соседние итерации дадут близкие результаты, которые, однако, будут сильно отличаться от точного решения разностной задачи. Чтобы воспрепятствовать преждевременному приостановлению итераций, рекомендуется продолжать счет до тех пор, пока условие (4.47) не выполнится несколько раз.

Более объективным показателем точности итерацион-

ного решения является относительная норма невязки разностных уравнений. Если, к примеру, разностное уравнение завихренности имеет вид

$$\Lambda_x^{[1]}\omega + \Lambda_y^{[1]}\omega + \mathrm{Gr}\, T_x^{\circ} = 0,$$

то одним из условий сходимости может служить неравенство

$$\varepsilon_\omega = \frac{\|\Lambda_x^{[1]}\,\omega^{s+1} + \Lambda_y^{[1]}\,\omega^{s+1} + \mathrm{Gr}\, T_x^{s+1}\|}{\max\limits_{0\leqslant s_0\leqslant s} \|\Lambda_x^{[1]}\,\omega^{s_0} + \Lambda_y^{[1]}\,\omega^{s_0} + \mathrm{Gr}\, T_x^{s_0}\|} < \varepsilon, \qquad (4.48)$$

где в разностных операторах $\Lambda_x^{[1]}\omega$ и $\Lambda_y^{[1]}\omega$ значения функции тока берутся с той же итерации, что и завихренность. Условие (4.48) дополняется аналогичными неравенствами, составленными для невязок в уравнениях переноса тепла, функции тока и граничных формулах, причем итерации не прекращаются, пока не будет выполнено каждое из них. Равенство невязки иулю на всех итерациях означает, что начальное приближение T^0, ω^0, ψ^0 удовлетворяет разностной задаче. Отметим, что проверка условий типа (4.48) на каждой итерации практически удваивает время решения задачи и требует в несколько раз большей вычислительной работы, чем проверка условия (4.47).

Полезно организовать через каждые 30—50 итераций выдачу на печать текущей информации о величине итерационных погрешностей ε_T, ε_ω, ε_ψ и значениях некоторых интегральных характеристик решения — чисел Нуссельта, экстремумов температуры, завихренности, функции тока и других, по изменению которых можно дополнительно судить о достигнутой сходимости итераций.

Заметим, что критерии (4.47) и (4.48) пригодны и для метода установления, если под итерационным номером s понимать номер временно́го слоя n, а в (4.47), кроме того, положить $q_T = q_\omega = \tau$, $q_\psi = 1$.

§ 4.4. РАСЧЕТ ЧИСЕЛ НУССЕЛЬТА

Числа Нуссельта (см. п. 1.1.5) описывают интенсивность и структуру теплоотдачи, являясь одной из важнейших характеристик конвективного процесса. Ввиду дискретности сеточной области интегральные числа

$$\widetilde{\mathrm{Nu}}^{+} = \int\limits_{\Gamma^{+}} \mathrm{Nu}_0\, d\Gamma,\quad \widetilde{\mathrm{Nu}}^{-} = \int\limits_{\Gamma^{-}} \mathrm{Nu}_0\, d\Gamma$$

определяются по приближенным квадратурным правилам, которые можно найти в справочной литературе. Напомним, что $\widetilde{\mathrm{Nu}}^{+}$ и $\widetilde{\mathrm{Nu}}^{-}$ характеризуют количество тепла, поступающего в жидкость и отводящегося из нее соответственно. Поскольку участки Γ^{+} и Γ^{-} заранее неизвестны, удобнее пользоваться формулами

$$\widetilde{\mathrm{Nu}}^{+} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} (\mathrm{Nu}_0 + |\mathrm{Nu}_0|)\, d\Gamma,$$

$$\widetilde{\mathrm{Nu}}^{-} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} (\mathrm{Nu}_0 - |\mathrm{Nu}_0|)\, d\Gamma, \qquad (4.49)$$

производя интегрирование по всей границе Γ.

В объеме жидкости, ограниченном замкнутой поверхностью и лишенном внутренних источников тепла, точные значения $\widetilde{\mathrm{Nu}}^{+}$ и $|\widetilde{\mathrm{Nu}}^{-}|$ должны совпадать. Однако их приближенные значения, построенные на разностном решении задачи ЕК, могут отличаться как от точных, так и друг от друга. Дисбаланс между $\widetilde{\mathrm{Nu}}^{+}$ и $|\widetilde{\mathrm{Nu}}^{-}|$ устраняется по мере дробления сетки и улучшения аппроксимационных свойств алгоритма. На грубых сетках суммарный тепловой поток через полость, заполненную жидкостью, целесообразно оценивать по среднему арифметическому:

$$\widetilde{\mathrm{Nu}} = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathrm{Nu}}^{+} + |\widetilde{\mathrm{Nu}}^{-}|).$$

Если температура на границе задана условиями 2-го или 3-го рода, то из общей формулы (1.30) для локального числа Нуссельта $\mathrm{Nu}_0 = -\partial T/\partial n$ имеем точно

$$\mathrm{Nu}_0 = (bT_{\Gamma} + D_{\Gamma})/a.$$

Иначе обстоит дело в случае граничных условий 1-го рода, не располагающих соответствующим точным выражением для производной по нормали. Рассмотрим несколько способов аппроксимации Nu_0 при условиях 1-го рода.

Пусть для определенности Γ — один из нижних участ-

ков границы, совпадающий с осью абсцисс Ox, на котором поддерживаются условия

$$T(x,\ 0,\ t) = \Theta(x,\ t).$$

Наиболее часто для вычисления Nu_0 используются формулы

$$\mathrm{Nu}_0|_\Gamma \sim \frac{1}{h_2}(\Theta - T^{(+1_2)}), \tag{4.50}$$

$$\mathrm{Nu}_0|_\Gamma \sim \frac{1}{2h_2}(3\Theta - 4T^{(+1_2)} + T^{(+2_2)}) \tag{4.51}$$

соответственно 1-го и 2-го порядков аппроксимации. Недостатки этих формул очевидны формула (4.50) имеет низкий порядок аппроксимации, а формула (4.51) использует расширенный шаблон узлов.

Следуя общей идее повышения порядка аппроксимации на минимальном шаблоне и учитывая условия прилипания (1.33), записываем разложение

$$-\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_\Gamma = -T_y + \frac{1}{2}h_2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\Big|_\Gamma + O(h_2^2) =$$

$$= -T_y - \frac{1}{2}h_2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial t}\right)_\Gamma + O(h_2^2).$$

Отсюда получаем формулу

$$\mathrm{Nu}_0|_\Gamma \sim \frac{1}{h_2}(\Theta - T^{(+1_2)}) - \frac{1}{2}h_2\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} - \mathrm{Pr}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right), \tag{4.52}$$

аппроксимирующую со 2-м порядком на минимальном шаблоне.

Формула повышенного порядка аппроксимации построена в [51]. Выведем ее, ограничившись для простоты выкладок стационарным случаем. Для этого рассмотрим разложение в ряд Тейлора до членов $O(h_2^3)$ включительно.

$$-\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_\Gamma = -T_y + \left(\frac{1}{2}h_2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{6}h_2^2\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24}h_2^3\frac{\partial^4 T}{\partial y^4}\right)_\Gamma + O(h_2^4). \tag{4.53}$$

Чтобы добиться погрешности аппроксимации $O(h^4)$, требуется аппроксимировать вторую, третью и четвер-

тую производные не хуже, чем с погрешностями $O(h^3)$, $O(h^2)$ и $O(h)$ соответственно. Чтобы не расширить шаблона, понизим порядок этих производных, использовав уравнения ЕК (4.45). На нижней границе Г будем иметь:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} = \mathrm{Pr}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y},$$

$$\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} = \mathrm{Pr}\left(2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}\frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2},$$

$$\frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega,$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = T_{\overset{\circ}{xy}} + O(h),$$

$$\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y} = T_{\overline{xx}y} - \frac{1}{2} h_2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^2).$$

Использовав эти представления в разложении (4.53), составим формулу 4-го порядка аппроксимации:

$$\mathrm{Nu}_0|_\Gamma \sim AT_y + BT_{\overset{\circ}{xy}} + CT_{\overline{xx}y} + F, \qquad (4.54)$$

где

$$A = -1 + \frac{1}{24} h_2^3 \mathrm{Pr}\,\omega_{\overset{\circ}{x}}; \quad B = -\frac{1}{12} h_2^3 \mathrm{Pr}\,\omega;$$

$$C = -\frac{1}{6} h_2^2;$$

$$F = -\frac{1}{2} h_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h_2^2 \mathrm{Pr}\,\omega \frac{\partial \Theta}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{24} h_2^3 \left(\mathrm{Pr}\,\omega_y \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4}\right).$$

Разностные формулы (4.50)—(4.52), (4.54) не требуют исследования устойчивости, так как они не носят рекуррентного характера. Формула (4.54), несмотря на более громоздкий, чем у (4.50)—(4.52), вид, легко программируется для ЭВМ, а расход машинного времени на ее реализацию мал по сравнению с общими затратами машинного времени на решение задачи ЕК. Применение

этой формулы обосновано при условии, что интегралы (4.49) вычисляются не ниже, чем с 4-м порядком точности, например по методу Симпсона.

§ 4.5. АЛГОРИТМ КОРРЕКТИРОВКИ СЕТКИ ПРИ СЧЕТЕ

Одна из проблем, возникающих при численном исследовании конвекции,— обеспечение приемлемой точности результатов в режиме формирующегося пограничного слоя. Обычная процедура увеличения размерности сетки в этих условиях становится либо невозможной из-за недостаточного объема оперативной памяти ЭВМ, либо нежелательной по причине чрезмерного потребления машинного времени. При переходе в область мелких сеток существенная экономия машинного времени может быть достигнута методом решения на последовательности сеток [52]. Но точность решения можно повысить и на сравнительно грубых сетках: за счет улучшения аппроксимационных свойств разностной схемы и путем неравномерного распределения сеточных узлов, сгущая их на участках с более интенсивным движением. Исходя из того, что картина течения заранее неизвестна, важно выбрать подходящее правило, которое бы устанавливало зависимость шагов сетки от структуры искомого решения. Обсудим отдельные приемы улучшения сетки в процессе решения разностной задачи.

Пусть жидкость движется по направлению оси y со скоростью $v=v_y(x)$, которая определяется в результате решения одномерной задачи конвекции на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$. Будем полагать далее, что I — заданное число разбиений сетки, $x_0=a$ и $x_I=b$ — граничные узлы. Требуется разместить внутренние узлы $x_1, x_2, \ldots, x_{I-1}$ на отрезке $[a, b]$ так, чтобы их плотность изменялась согласованию с величиной скорости $|v|$ (вариант (А) [53]) или градиента скорости $|v'|=|\omega|$, где ω — завихренность (вариант (Б)). Для нахождения $x_1, x_2, \ldots, x_{I-1}$ составим разностную задачу

$$(\mu_{i-1}+\mu_i)(x_i-x_{i-1})=(\mu_i+\mu_{i+1})(x_{i+1}-x_i),$$

$$i=\overline{1,\ I-1},\quad x_0=a,\quad x_I=b,$$

где (А) $\mu_i=|v(x_i)|$; (Б) $\mu_i=|\omega(x_i)|$.

Задача разрешима, если $\mu_{i-1} + \mu_i \neq 0$ при всех $i = \overline{1, I}$. Ее решение можно организовать в виде итерационного процесса

$$(\mu_{i-1}^s + \mu_i^s) x_{i-1}^{s+1} - (\mu_{i-1}^s + 2\mu_i^s + \mu_{i+1}^s) x_i^{s+1} +$$

$$+ (\mu_i^s + \mu_{i+1}^s) x_{i+1}^{s+1} = 0, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad x_0^{s+1} = a,$$

$$x_I^{s+1} = b,$$

где $s = 0, 1, \ldots$ — номер итерации. Итерационное приближение $\{x_i^{s+1}\}$ находим по методу прогонки. Коэффициенты μ_i^{s+1}, $i = \overline{0, I}$, вычисляем, решая уравнения конвекции на новой сетке $\{x_i^{s+1}\}$. Начальную сетку $\{x_i^0\}$ можно взять равномерной.

Пусть теперь задача конвекции двумерная, а областью ее определения служит прямоугольник $\bar{G} = (a_1 \leqslant x \leqslant b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2)$. В прямоугольнике $\bar{G}$ построим неравномерную сетку $\{(x_i, y_k)\}$ с числом разбиений I и K по осям x и y соответственно, положив $x_0 = a_1$, $x_I = b_1$, $y_0 = a_2$, $y_K = b_2$.

Сеточные координаты $x_1, \ldots, x_{I-1}$ и $y_1, \ldots, y_{K-1}$ ищем по аналогии с одномерным случаем, согласуя их распределение с максимальными величинами компонент скорости или производных от них по соответствующим переменным. Алгоритм построения координат $x_1, x_2, \ldots, x_{I-1}$ примет вид

$$(\alpha_{i-1}^s + \alpha_i^s) x_{i-1}^{s+1} - (\alpha_{i-1}^s + 2\alpha_i^s + \alpha_{i+1}^s) x_i^{s+1} +$$

$$+ (\alpha_i^s + \alpha_{i+1}^s) x_{i+1}^{s+1} = 0, \quad i = \overline{1, I-1}, \qquad (4.55)$$

$$x_0^{s+1} = a_1, \quad x_I^{s+1} = b_1.$$

В варианте (А) можно положить, например,

$$\alpha_i^s = \max_{0 \leqslant k \leqslant K} |v_y(x_i^s, y_k^s)| = \max_{0 \leqslant k \leqslant K} \left| \frac{\partial \psi(x_i^s, y_k^s)}{\partial x} \right|, \qquad (4.56)$$

а в варианте (Б) —

$$\alpha_i^s = \max_{0 \leqslant k \leqslant K} \left| \frac{\partial v_y(x_i^s, y_k^s)}{\partial x} \right| =$$

$$= \max_{0 \leqslant k \leqslant K} \left| \frac{\partial^2 \psi (x_i^s,\ y_k^s)}{\partial y^2} + \omega (x_i^s,\ y_k^s) \right| \qquad (4.57)$$

с учетом уравнения для функции тока из (4.45).

Аналогичную задачу составим для координат y_1, y_2, ..., y_{K-1}:

$$(\beta_{k-1}^s + \beta_k^s)\, y_{k-1}^{s+1} - (\beta_{k-1}^s + 2\beta_k^s + \beta_{k+1}^s)\, y_k^{s+1} +$$
$$+ (\beta_k^s + \beta_{k+1}^s)\, y_{k+1}^{s+1} = 0, \quad k = \overline{1,\ K-1},$$
$$y_0^{s+1} = a_2, \quad y_K^{s+1} = b_2, \qquad (4.58)$$

выбрав

(А)
$$\beta_k^s = \max_{0 \leqslant i \leqslant I} |v_x (x_i^s,\ y_k^s)| =$$
$$= \max_{0 \leqslant i \leqslant I} \left| \frac{\partial \psi (x_i^s,\ y_k^s)}{\partial y} \right|, \qquad (4.59)$$

(Б)
$$\beta_k^s = \max_{0 \leqslant i \leqslant I} \left| \frac{\partial v_x (x_i^s,\ y_k^s)}{\partial y} \right| =$$
$$= \max_{0 \leqslant i \leqslant I} \left| \frac{\partial^2 \psi (x_i^s,\ y_k^s)}{\partial x^2} + \omega (x_i^s,\ y_k^s) \right|. \qquad (4.60)$$

Решив прогонкой задачи (4.55), (4.56) и (4.58), (4.59) или (4.55), (4.57) и (4.58), (4.60), определим положение сеточных узлов на любой итерации. Итерационные приближения α_i^s и β_k^s строятся на решении рассматриваемой двумерной задачи ЕК, полученном на сетке с номером s. Если не имеется предварительной информации о структуре конвективного движения, начальную сетку естественно выбрать равномерной.

Предложенный метод носит в основном качественный характер, поэтому в целях экономии машинного времени при расчетах достаточно ограничиться двумя-тремя итерациями алго итма кор екти овки.

ГЛАВА 5

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 5.1. Испытания на тестовых задачах

§ 5.2. Оптимизация параметров релаксации

§ 5.3. Примеры исследования конвекции в замкнутых областях

Самым убедительным критерием эффективности того или иного алгоритма служит практическая апробация на достаточно сложных задачах. Ниже описываются результаты тестирования разностных схем, выполненного в широком диапазоне сеток и чисел Рэлея. Представлена подробная информация об оптимальных параметрах релаксации в итерационном алгоритме (4.46), полученная путем численного экспериментирования. Выработаны практические рекомендации по выбору схемы, конструированию сетки, стабилизации итерационного процесса. Наибольшее внимание уделяется методике расчетов при больших Ra. *Возможности лучших методов демонстрируются не только на известных, но и на новых задачах ЕК.*

§ 5.1. ИСПЫТАНИЯ НА ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧАХ

Теоретический аппарат современной вычислительной математики в состоянии дать лишь весьма грубое представление о свойствах методов, предназначенных для численного исследования конвекции. Поэтому первостепенное значение для сравнения, отбора и совершенствования численных алгоритмов имеют *испытания на тестовых задачах.*

5.1.1. Тестовые задачи. На Всесоюзных семинарах по численным методам механики вязкой жидкости в качестве тестовых рекомендованы две известные задачи ЕК. Первая — о стационарном плоском конвективном движении вязкой жидкости в квадратной области при однородном подогреве сбоку. Она исследовалась численно в [21, 28, 54, 55] и экспериментально в [56]. Объектом

второй задачи является та же физическая ситуация, но нагрев жидкости осуществляется через верхнюю границу, температура на которой распределена по синусоидальному закону. Численному решению этой задачи посвящены работы [28, 57], а в статье [58] она изучалась экспериментально.

Математически обе задачи формулируются системой стационарных уравнений (4.45) с граничными условиями для функции тока (1.33). Если выбирать характерным размером длину основания, областью определения будем иметь единичный квадрат ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$).

Для температуры задаются краевые условия 1-го рода. В задаче о нагреве сбоку температура на вертикальных стенках принимается постоянной по y с линейным распределением на горизонтальных границах:

$$T(0,\ y) = 0,\ T(1,\ y) = 1,\ T(x,\ 0) = T(x,\ 1) = x. \quad (5.1)$$

В задаче о нагреве сверху температура на верхней границе изменяется по синусоидальному закону с полупериодом, равным длине стороны квадрата, а на остальных границах поддерживается постоянной:

$$T(x,\ 1) = \sin \pi x,\ T(x,\ 0) = T(0,\ y) = T(1,\ y) = 0. \quad (5.2)$$

Решение обеих задач обладает симметрией относительно вертикали $x=0{,}5$, проходящей через середину полости. В задаче (5.1) условия симметрии имеют вид

$$T(x,\ y) = 1 - T(1-x,\ 1-y),\ \omega(x,\ y) =$$

$$= \omega(1-x,\ 1-y),\ \psi(x,\ y) = \psi(1-x,\ 1-y),$$

а в задаче (5.2) — вид

$$T(x,\ y) = T(1-x,\ y),\ \omega(x,\ y) =$$

$$= -\omega(1-x,\ y),\ \psi(x,\ y) = -\psi(1-x,\ y).$$

Эти условия позволяют ради экономии машинных ресурсов ограничиться счетом только на половине области определения ($0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$, $0 \leqslant y \leqslant 1$).

На первой задаче тестовые испытания, описанные в § 5.1, выполнялись при $\mathrm{Pr}=1$, на второй задаче — при $\mathrm{Pr}=0{,}7$ (воздух).

Обе задачи моделируют типичный конвективный процесс с сильной нелинейностью, поэтому их точное решение не найдено. Привлекательная особенность задачи

(5.2) в том, что ее разностному решению присущ дисбаланс расчетных значений чисел Нуссельта Nu^+ и $|Nu^-|$, который уменьшается по мере дробления сетки и совершенствования разностной схемы. Величина невязки между Nu^+ и $|Nu^-|$ может служить удобной интегральной характеристикой погрешности численного решения при тестировании разностных схем.

Вместе с тем желательно, чтобы аппроксимационные свойства разностных схем проверялись на задаче с известным точным решением. Для этой цели возьмем модельную задачу о течении Куэтта со вдувом массы через стенки [19]. Рассматривается течение вязкого изотермического газа между двумя параллельными пористыми пластинами, одна из которых движется. Газ вдувается через неподвижную пластину и отсасывается с той же скоростью через подвижную. Считая задачу одномерной, направляем ось x перпендикулярно к стенкам по направлению вдува. Тогда безразмерные завихренность и функция тока удовлетворяют уравнениям

$$\omega'' - \mathrm{Re}\cdot\omega' = 0,\ \psi'' + \omega = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\psi(0) = 0,\ \psi(1) = \frac{1 + \mathrm{Re} - e^{\mathrm{Re}}}{\mathrm{Re}\,(1 - e^{\mathrm{Re}})},\ \psi'(0) = 0,\ \psi'(1) = 1, \tag{5.3}$$

где Re — число Рейнольдса, определенное по скорости вдува и расстоянию между пластинами. Задача имеет аналитическое решение:

$$\omega(x) = \frac{\mathrm{Re}\cdot e^{\mathrm{Re}\cdot x}}{1 - e^{\mathrm{Re}}},\ \psi(x) = \frac{1 + \mathrm{Re}\cdot x - e^{\mathrm{Re}\cdot x}}{\mathrm{Re}\,(1 - e^{\mathrm{Re}})}.$$

5.1.2. Сравнение разностных схем. Перечислим разностные схемы, выбранные для испытания на тестовых задачах: A — монотонная схема 1-го порядка аппроксимации (3.5); B — консервативная монотонная схема 1-го порядка (3.29); C — монотонная схема 2-го порядка (3.7), (3.8); D — консервативная монотонная схема 2-го порядка (3.30); E — монотонная схема 4-го порядка аппроксимации (3.53); F — консервативная схема с центральными разностями 2-го порядка аппроксимации (3.27).

Схемы A—D и F определены на пятиточечном шаблоне типа «крест», а схема E — на девятиточечном шаблоне типа «ящик». Таким образом, все они обладают

примерно одинаковой разрешающей способностью при расчете мелкоструктурных конвективных движений.

Обсудим коэффициенты аппроксимационной вязкости — непременный атрибут монотонных аппроксимаций. Для всех испытуемых монотонных схем их можно записать общей формулой

$$\mu_\alpha = R_\alpha^n \Big/ \sum_{k=0}^{n-1} R_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2,$$

где R_α — разностное число Рейнольдса; n — порядок аппроксимации схемы. Простой анализ показывает, что при $R_\alpha \geqslant 10$ величина аппроксимационной вязкости практически не зависит от порядка аппроксимации схемы, в то время как при $R_\alpha \leqslant 2$ заметные преимущества по этому показателю имеет схема повышенного порядка E. Однако величину μ_α не следует отождествлять с погрешностью аппроксимации, так как точность численных результатов может сильно зависеть от членов с более высокими, чем вторая, производными искомой функции, входящих в погрешность аппроксимации схемы, а также от способа аппроксимации коэффициентов дифференциального уравнения. Этим, вероятно, объясняется, что центрально-разностная схема Γ, у которой аппроксимационная вязкость отсутствует, уступает по точности монотонной схеме E не только на мелких, но и на грубых сетках. Тем не менее анализ коэффициентов μ_α полезен для качественного сопоставления схем.

Точность в случае задачи (5.2) оценивалась относительной величиной невязки в интегральных тепловых потоках $\varepsilon_{Nu} = (Nu^+ + Nu^-)/(Nu^+ + |Nu^-|)$, а в задаче (5.3) — максимальной относительной погрешностью сеточных значений завихренности ε_ω. Сравнение схем проводилось на квадратных сетках с шагом $1/60 \leqslant h \leqslant 1/10$. Для решения разностных задач применялся релаксационный алгоритм (4.46). Чтобы обеспечить одинаковые условия при тестировании, аппроксимация завихренности на стенках во всех случаях осуществлялась с 4-м порядком по формулам типа (4.24). Однако пересчет отдельных вариантов с условием Вудса (4.7) показал, что со схемами 1-го и 2-го порядков аппроксимации оно приводит, по существу, к тем же результатам, что и формула (4.24).

Расчеты не выявили заметных различий в стабилизи-

рующих свойствах тестируемых монотонных схем: замена одной монотонной схемы другой практически не влияла на скорость сходимости итерационного процесса ни при малых, ни при больших числах Рэлея. Что касается схемы F, построенной на основе обычной центральной аппроксимации конвективных производных, то на ее устойчивость, как известно, принцип максимума накладывает серьезные ограничения, которые при достаточно больших Ra, по-видимому, не могут не отразиться на поведении итераций. Подтверждение тому — численные эксперименты, выполненные на задаче (5.1) в § 5.2. Оказалось, что при слабой конвекции ($\mathrm{Ra} \leqslant 10^4$) схема F требует такого же количества итераций, как и монотонные схемы, будь то при оптимальном выборе параметров релаксации или в случае метода Зейделя ($q_T = q_\omega = q_\psi = 1$). Однако если с монотонными схемами метод Зейделя перестает сходиться при $\mathrm{Ra} \geqslant 10^5$, то со схемой F — при $\mathrm{Ra} \geqslant 3{,}2 \cdot 10^4$, т. е. вместе с началом формирования ламинарного пограничного слоя в конвективном потоке. Хотя оптимизация параметров релаксации значительно расширяет область сходимости, при дальнейшем увеличении Ra схема F все заметнее уступает монотонным схемам по количеству итераций. Переход же к числам Рэлея $\mathrm{Ra} > 10^6$ стал возможен исключительно благодаря монотонным схемам, поскольку для схемы F при таких Ra не удалось добиться установления итерационного процесса ни при каких значениях релаксационных параметров.

На промежутке $\mathrm{Ra} \leqslant 10^5$ все схемы дали близкие решения — разница в результатах, полученных на сетках с шагом $h \leqslant 1/20$, при $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\mathrm{Ra} = 10^5$ не превышала соответственно 1 % и 10 %. При таких Ra практическая ценность громоздкой по конструкции схемы E невелика, несмотря на высокий порядок аппроксимации. Предпочтительнее здесь выглядит схема D, которая так же проста и так же «быстра», как и схемы A, B, C, но обладает несколько лучшими аппроксимационными свойствами. При низких числах Рэлея ($\mathrm{Ra} \leqslant 10^4$) некоторый выигрыш по затратам машинного времени дает центрально-разностная схема F; он достигается за счет меньшего на 10—15 % по сравнению со схемой D количества арифметических действий, приходящихся на одну итерацию.

Аппроксимационные возможности тестируемых схем в условиях высокоинтенсивной конвекции проиллюстри-

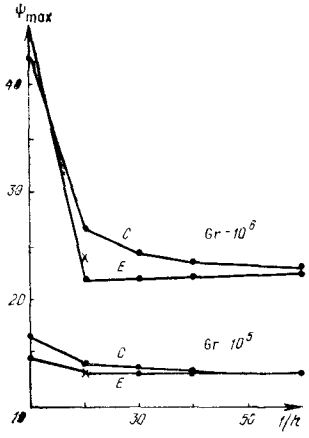


Рис. 5.1. Сравнение схем на тестовой задаче (5.1):
крестиками отмечены значения, полученные по схеме F

рованы на рис. 5.1, 5.2. Важным показателем эффективности той или иной схемы становится порядок аппроксимации. В ходе численных экспериментов при больших Ra хорошо зарекомендовала себя схема E. Из графиков, в частности, видно, что решение задачи (5.1) при $Gr=10^6$ и решение задачи (5.2) при $Gr=5\cdot10^6$, найденные с шагом $h=1/20$ по схеме E, не уступают в точности соответствующим решениям, полученным при $h=1/40$ с помощью аппроксимаций 2-го порядка. Правда, выигрыш во времени, ожидаемый в первом случае за счет четырехкратного сокращения числа сеточных узлов, а также вследствие понижения скорости сходимости итераций по мере дробления сетки, компенсируется разницей во временно́й цене одной итерации, которая у схемы E примерно в 4 раза выше, чем у схем A—D. При $Ra>10^7$ схема повышенного порядка аппроксимации позволила получить числовой материал, обладающий удовлетворительной

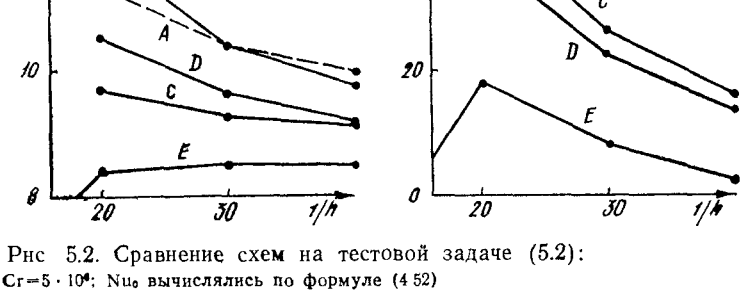


Рис 5.2. Сравнение схем на тестовой задаче (5.2):
$Gr=5\cdot10^6$; Nu_0 вычислялись по формуле (4 52)

точностью, в то время как схемы A—D часто требовали нереальные объемы машинной памяти.

Зависимости, приведенные на рис. 5.3, отражают влияние шага сетки и числа Рейнольдса на погрешность разностного решения одномерной задачи Куэтта (5.3) для трех монотонных схем. Они в целом согласуются с данными, полученными на задачах ЕК, только в роли режимного параметра выступает число Рейнольдса Re.

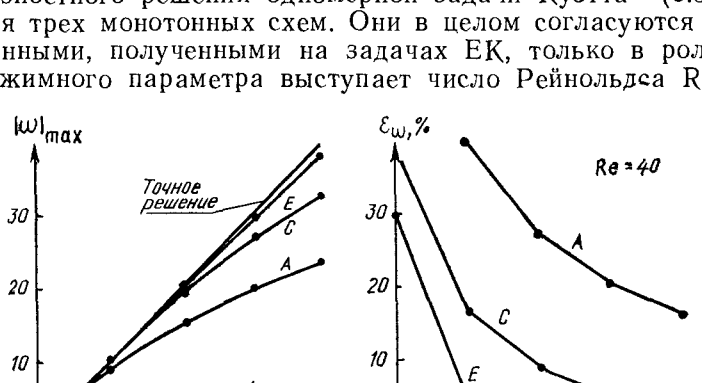


Рис. 5.3. Сравнение схем на задаче Куэтта (5.3)

При небольших Re все схемы дают на рассмотренных сетках достаточно точные результаты. Однако при $Re > 30$ выявляется преимущество схемы E. В случае $Re = 40$, например, численное решение с погрешностью 5 % можно получить даже при шаге $h = 1/20$, если использовать схему E, или при шаге $h = 1/40$, если применять схему 2-го порядка C.

5.1.3. Влияние сетки при больших числах Рэлея. При переходе в область больших Ra возникает дилемма с выбором сетки, которая должна быть настолько мелкой, чтобы не страдала точность численного решения, но достаточно грубой, чтобы не перегружалась машинная память и время счета не превышало разумного предела. Определенную ясность в этот вопрос вносят численные эксперименты, выполненные при $Gr > 10^6$ на задаче (5.2) [29].

Наряду с равномерными сетками использовались и неравномерные (блочно-равномерные) с числом узлов 41×41 (сетки А, Б) и 21×21 (сетка В), схематически изображенные на рис. 5.4 для левой половины области

определения тестовой задачи (штриховые линии соответствуют сетке В). Структура сеток А, Б и В учитывает неоднородность распределения градиентов температуры и скорости при больших Gr (рис. 5.5). При этом во всех узлах разностные схемы строились на регулярном сеточном шаблоне.

На рассмотренных сетках не выявлено ощутимого влияния аппроксимационных свойств алгоритма на структуру решения: количество и ориентация расчетных вихрей течения всякий раз определялись только параметрами сетки. Это позволяет заключить, что для качественного исследования высокоинтенсивной ЕК приемлемы монотонные схемы с низким порядком аппроксимации *A—D*.

Оказалось, что большие разностные числа Рейнольдса приводят к счетному эффекту конвективной неустойчивости, проявляющемуся в образовании ложных вихрей в структуре конвективного движения, которые с измельчением сетки исчезают (рис. 5.6). Замечено, что

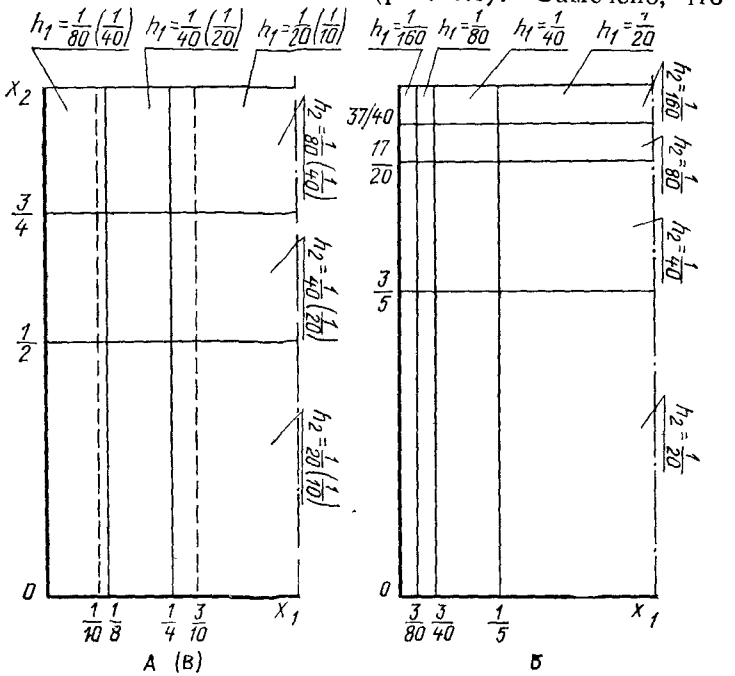


Рис. 5.4. Неравномерные сетки для задачи (5.2)

правильная картина течения получается на любой сетке, удовлетворяющей условию $R_\alpha \leqslant 4$. Сетки, обладающие этим свойством, условимся для краткости называть *допустимыми*.

С ростом числа Рэлея диапазон допустимых сеток сужается. Так, в задаче (5.2) среди квадратных сеток допустимыми являются: при $Gr = 5 \cdot 10^6$ — сетки с шагом $h \leqslant 1/20$, при $Gr = 5 \cdot 10^7$ — сетки с шагом $h \leqslant 1/40$, при $Gr = 5 \cdot 10^8$—сетки с шагом $h \leqslant 1/80$. Чтобы добиться качественно верного решения, сетку следует сгущать до тех пор и таким образом, чтобы она стала допустимой. При этом можно руководствоваться следующим признаком: если по любому радиусу каждого обнаруженного вихря течения от центра до его границы укладывается не менее трех элементарных ячеек сетки, то использованная сетка является допустимой, а найденная на ней конвективная структура — качественно правильной.

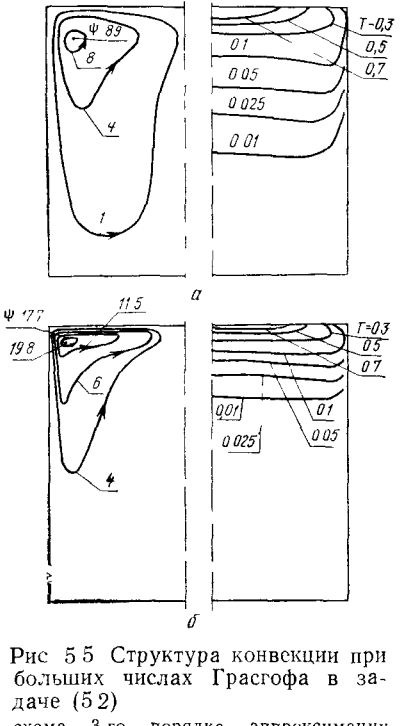


Рис 5 5 Структура конвекции при больших числах Грасгофа в задаче (5 2)

схема 3 го порядка аппроксимации [27], неравномерная сетка А, *а* — $Gr = 5 \cdot 10^6$, *б* — $Gr = 5 \cdot 10^8$, слева — линии тока, справа - изотермы

Известное стабилизирующее действие монотонных схем проявляется тем сильнее, чем грубее сетка. На равномерной сетке с $h = 1/20$ удалось получить решение задачи (5.2) даже при $Gr = 10^{10}$, но измельчение сетки существенно снизило границу вычислительной неустойчивости. Окончательное значение «критического» числа Рэлея, найденное на допустимых сетках А и Б (см. рис. 5.4), составило примерно $5 \cdot 10^8$. Для задачи (5.1) «критическим» оказалось значение $Ra = 5 \cdot 10^7$, полученное аналогичным путем. Интересно, что в лабораторных экс-

периментах [56], выполненных с воздухом (Pr=0,7), нестационарные явления при нагреве сбоку наблюдались уже при $Ra \sim 3 \cdot 10^6$. Существует, однако, точка зрения [59], что величина критического числа сильно зависит от условий опыта и при тщательном его проведении может быть значительно увеличена.

Рациональным конструированием сетки, нацеленным на однородное распределение разностных чисел Рейнольдса, удается существенно повысить точность численных результатов при больших Ra без привлечения дополнительных машинных ресурсов (рис. 5.7). Результаты, найденные на неравномерной сетке с конструкцией, близкой к оптимальной, и на равномерной сетке с шагом, равным минимальному шагу упомянутой неравномерной сетки, мало отличаются друг от друга. Иначе говоря, при соответствующих Ra на сетке типа A получится примерно такое же решение, как и на квадратной сетке с шагом $h=1/80$, но при этом расход машинной памяти сократится в 4 раза, а счетное время — не менее чем в 5—6 раз. Однако немалые трудности здесь представляет организация однородного распределения разностных чисел Рейнольдса в сеточной области. Решению этой проблемы может помочь алгоритм, описанный в § 4.5.

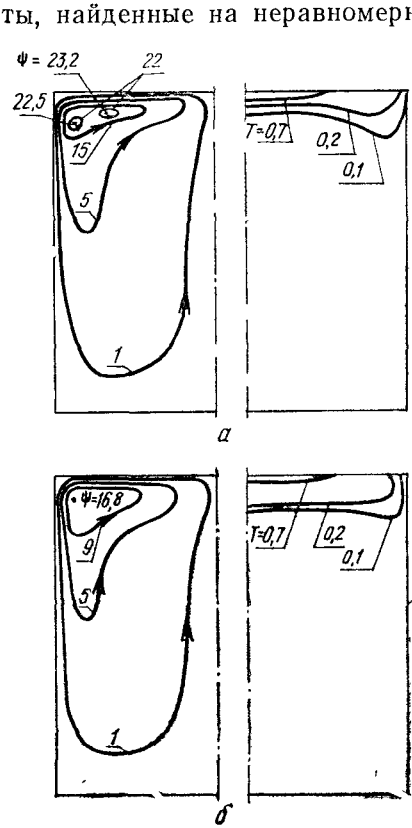


Рис. 5.6. Влияние шага сетки на структуру конвекции:
задача (5.2); $Gr=5 \cdot 10^7$; схема D; $а$ — $h=1/20$; $б$ — $h=1/40$; слева — линии тока, справа — изотермы

5.1.4. Сравнение формул расчета чисел Нуссельта. На тестовых задачах ЕК про-

водилось сравнение формул аппроксимации локального числа Нуссельта Nu_0 (4.50), (4.51) и (4.54) [51]. Для аппроксимации стационарных уравнений ЕК применялась схема Самарского *С.* Расчеты выполнялись на квадратных сетках. Интегральные числа Нуссельта Nu вычислялись по правилу Симпсона.

Для удобства обсуждения результатов будем обозначать Nu* точное значение числа Нуссельта, т. е. $Nu^* = \lim_{h \to 0} Nu$. В табл. 5.1 даны числа Нуссельта для задачи (5.1), полученные при каждом способе аппроксимации Nu_0 в широком интервале значений числа Рэлея и шага сетки. Симметрия решения задачи (5.1) такова, что численные значения Nu^+ и $|Nu^-|$ всегда совпадают между собой, т е. $Nu^+ = |Nu^-| = Nu$ при любых h. Однако они могут сильно отличаться от Nu*, особенно при больших Ra и грубых сетках. Лишь формула повышенного порядка аппроксимации (4.54) при уменьшении h обеспечивает быстрое попадание Nu в малую окрестность его предельного значения Nu*; значения, полученные уже на сетке с $h = 1/20$, практически не изменяются при дальнейшем дроблении сетки даже при $Ra = 10^6$ и $Ra = 10^7$. Табличные данные, соответствующие формуле (4.54) при $h = 1/60$, почти идеально описываются интерполирующей функцией

$$Nu = 0{,}23\, Ra^{0{,}276}.$$

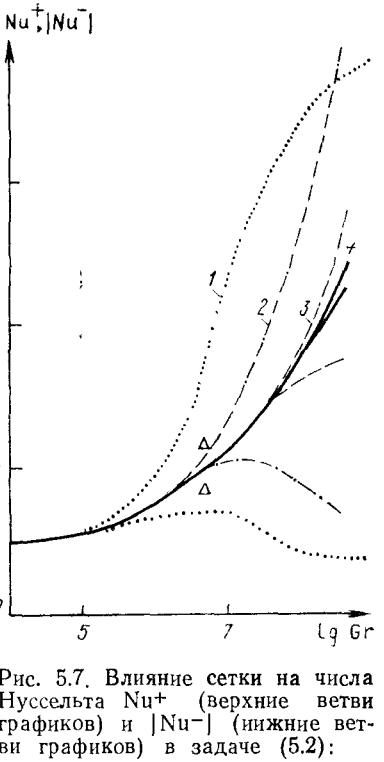


Рис. 5.7. Влияние сетки на числа Нуссельта Nu^+ (верхние ветви графиков) и $|Nu^-|$ (нижние ветви графиков) в задаче (5.2):
схема *D*; Nu_0 вычислялись по формуле (4.51); *1* — $h = 1/20$; *2* — $h = 1/40$; *3* — сетка А, *4* — сетка Б; треугольники — сетка В

Таблица 5.1. **Значения Nu при нагреве сбоку (5.1) в зависимости от числа Рэлея, способа вычисления Nu_0 и шага сетки**

Ra	Формула для Nu_0	h				
		1/10	1/20	1/30	1/40	1/60
10^4	(4.50)	2,58	2,81	2,88	2,89	2,92
	(4.51)	3,02	2,97	2,96	2,94	2,94
	(4.54)	2,84	2,88	2,91	2,92	2,92
10^5	(4.50)	4,41	5,21	5,40	5,46	5,53
	(4.51)	5,86	5,88	5,74	5,68	5,63
	(4.54)	5,56	5,52	5,54	5,55	5,56
10^6	(4.50)	5,74	9,00	9,79	10,06	10,28
	(4.51)	8,18	11,44	11,27	10,96	10,71
	(4.54)	9,56	10,34	10,42	10,42	10,43
10^7	(4.50)		12,48	15,96	17,47	18,48
	(4.51)	—	17,38	20,76	21,24	20,51
	(4.54)		18,26	18,23	19,04	19,18

При испытаниях на задаче (5.2) преимущества формулы повышенного порядка аппроксимации также проявились отчетливо. Любопытно, что в режиме теплопроводности ($Ra=0$) величина $\widetilde{Nu}$ при нагреве сверху (5.2) в 2 раза выше, чем при нагреве сбоку (5.1). В условиях же развитой конвекции наблюдается противоположная ситуация: например, при $Ra=10^6$ теплообмен в задаче (5.1) интенсивнее более чем в 2,5 раза.

§ 5.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РЕЛАКСАЦИИ

Для решения стационарных разностных задач ЕК в § 4.3 предложен релаксационный алгоритм (4.46). Он содержит в себе три параметра релаксации q_T, q_ω и q_ψ, призванных управлять сходимостью итерационного процесса. К сожалению, проблема оптимального выбора этих параметров недоступна для современных методов теоретического анализа. В подобных случаях могут выручить численные исследования на тестовых задачах. Основное содержание настоящего параграфа составляют численные эксперименты по нахождению оптимальных значений параметров q_T, q_ω и q_ψ [60]. В результате обработки полученной информации найдено простое прави-

ло оптимизации релаксационных параметров при больших Ra, способное обеспечить эффективную стабилизацию итерационного процесса в широком классе задач ЕК.

5.2.1. Методика численного эксперимента. Исследования проводились на тестовых задачах (5.1) и (5.2) при $\mathrm{Pr}=1$. Уравнения (4.45) аппроксимировались со 2-м порядком схемой Самарского (3.7), (3.8) — схемой C в обозначениях п. 5.1.2. Для вычисления завихренности ω на границе применялась разностная формула повышенной точности типа (4.24). В угловых точках полагалось $\omega=0$. Полученная система нелинейных разностных уравнений решалась итерационно-релаксационным методом вида (4.46) на квадратных сетках с числом узлов $M=11\times11$, $M=21\times21$ и $M=41\times41$. Начальным приближением для итерационного процесса в первой задаче выбиралось решение в режиме теплопроводности: $T^0=x$, $\omega^0=\psi^0=0$. Во второй задаче начальное состояние задавалось нулевым. Расчеты выполнялись на машине БЭСМ-6.

Сходимость итераций считалась достигнутой, если условие

$$\overline{\varepsilon}^s=\sum_{m=s-N_0+1}^{s}|\varepsilon^m|/N_0<10^{-3} \qquad (5.4)$$

удовлетворялось для какого-либо номера $s=N$. Здесь

$$|\varepsilon^s|=\max_{i,\,k}\left(|\varepsilon^s_{T,\,i\,k}|,\ |\varepsilon^s_{\omega,\,i\,k}|,\ |\varepsilon^s_{\psi,\,i\,k}|\right),$$

$$\varepsilon^s_{\xi,\,i\,k}=\frac{1}{q_\xi}\left(\xi^s_{i\,k}-\xi^{s-1}_{i\,k}\right)\Big/\left(\sum_{i,\,k}|\xi^{s-1}_{i\,k}|/M\right),$$

$$\xi=T,\ \omega,\ \psi.$$

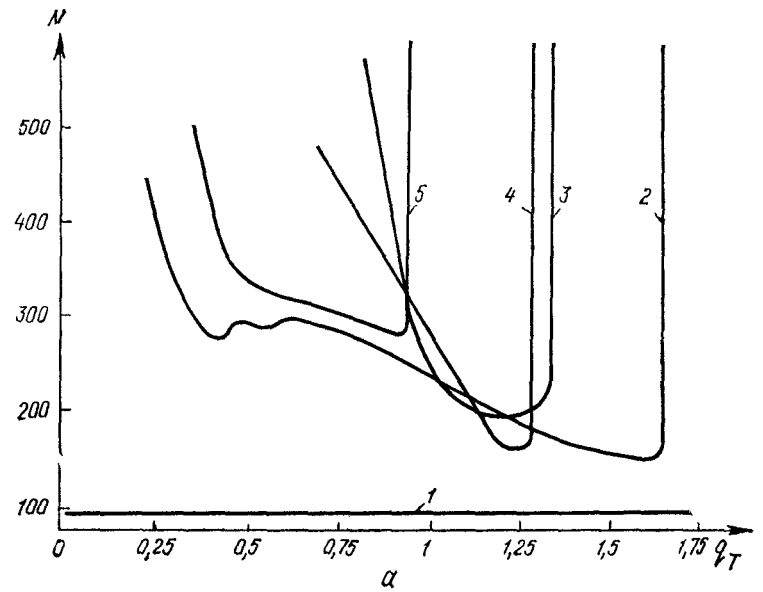
Номер N — наименьший из итерационных номеров, при которых условие (5.4) выполняется. Величина N_0 задавалась формулой $N_0=[2{,}5\sqrt{M}]$ (см. п. 5.2.3). Структура сходимости контролировалась знакопеременной величиной ε^s, равной тому значению $\varepsilon^s_{T,\,i\,k}$, $\varepsilon^s_{\omega,\,i\,k}$, $\varepsilon^s_{\psi,\,i\,k}$ на сетке, которое по модулю является максимальным.

Для построения оптимального набора параметров ре-

лаксации $q_{\text{опт}} = \{\overset{*}{q_T}, \overset{*}{q_\omega}, \overset{*}{q_\psi}\}$, обеспечивающего при данном Ra наивысшую скорость сходимости итераций, решалась задача минимизации функции трех переменных $N(q_T, q_\omega, q_\psi)$. Точка минимума $q_{\text{опт}}$ определялась по методу покоординатного спуска. Точность оценивалась нормой разности между векторными параметрами $q_{\text{опт}}^{(l-1)} = \{q_T^{(l-1)}, q_\omega^{(l-1)}, q_\psi^{(l-1)}\}$ и $q_{\text{опт}}^{(l)} = \{q_T^{(l)}, q_\omega^{(l)}, q_\psi^{(l)}\}$ — предыдущим и последующим приближениями к точке минимума; вычисления прекращались, как только неравенство

$$\|q_{\text{опт}}^{(l)} - q_{\text{опт}}^{(l-1)}\| < \delta = \begin{cases} 10^{-2}, & \text{Ra} \leqslant 10^5, \\ 10^{-3}, & \text{Ra} > 10^5 \end{cases}$$

выполнялось для какого-нибудь $l = L$ и приближение $q_{\text{опт}}^{(L)} = \{q_T^{(L)}, q_\omega^{(L)}, q_\psi^{(L)}\}$ принималось за $q_{\text{опт}}$. Решение одномерных задач оптимизации для компонент l-го приближения $q_T^{(l)}$, $q_\omega^{(l)}$ и $q_\psi^{(l)}$ осуществлялось численно. Точность δ при этом достигалась на последовательности сеток для сужающейся области существования минимума. Если минимумов оказывалось несколько, то разрабатывался каждый из них.



а

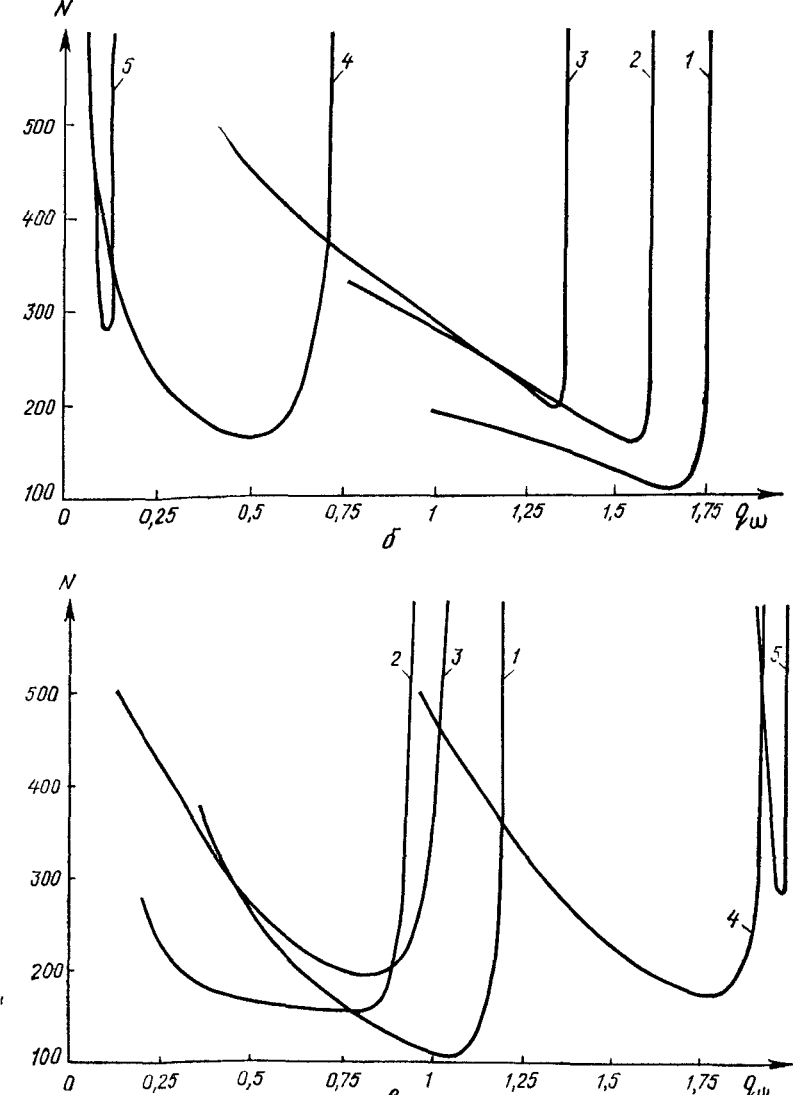


Рис 5.8. Зависимость числа итераций от параметров релаксации: задача (5.1); схема C; $h=1/20$; $а$—$q_\omega=q^*_\omega$, $q_\psi=q^*_\psi$; $б$—$q_T=q^*_T$, $q_\psi=q^*_\psi$; $в$—$q_T=q^*_T$, $q_\omega=q^*_\omega$; *1*—Ra=10; *2*—Ra=10^4; *3*—Ra=$5\cdot10^4$; *4*—Ra=10^5, *5*—Ra=10^6

Успешному выполнению процедуры оптимизации способствовал удачный выбор критерия сходимости итераций в алгоритме решения тестовой задачи. Так, если итерационный процесс заканчивать не по условию (5.4), а согласно критерию (4.47), т. е. при $|\varepsilon^s| < 10^{-3}$, то зависимость N от параметров релаксации носит сложный пилообразный характер [60]. Это обстоятельство могло бы существенно затруднить поиск оптимальных параметров. Что касается интегрального признака (5.4), то в исследованном диапазоне чисел Рэлея он обеспечил достаточную гладкость функции $N(q_T, q_\omega, q_\psi)$.

5.2.2. Основные результаты. Релаксация является эффективным средством повышения скорости сходимости, стабилизации итерационного процесса (рис. 5.8). В особенности это заметно при больших Ra, когда даже незначительное отклонение какого-либо из параметров от оптимального значения пагубно отражается на устойчивости алгоритма. Наиболее стабилизирующее влияние на вычисления оказывает параметр q_ω, наименее существенна релаксация уравнения переноса тепла. Например, при $\mathrm{Ra}=10^6$ установления итераций можно добиться посредством одного лишь q_ω, выбирая его достаточно малым при $q_T=q_\psi=1$. Но если при том же Ra положить $q_\omega=1$, то итерации не сходятся при любом выборе q_T и q_ψ. При *малых числах* Рэлея ($\mathrm{Ra}<10^4$) релаксацией уравнений переноса тепла и функции тока можно вообще не пользоваться, так как почти оптимальная сходимость достигается только за счет q_ω.

Основные результаты проведенного исследования собраны в табл. 5.2, 5.3 и проиллюстрированы на рис. 5.9. Нетрудно увидеть ряд закономерностей. В области $\mathrm{Ra}<10^3$, где основным механизмом распространения тепла является теплопроводность, наиболее быстрое установление итераций наблюдается при верхней релаксации всех функций. Резкая смена оптимальных режимов релаксации при $\mathrm{Ra}\approx 5\cdot 10^4$ соответствует начальной стадии образования пограничного слоя в обеих задачах [28, 54]. В условиях формирующегося пограничного слоя величина q_ψ^* с ростом Ra монотонно стремится к верхнему пределу 2, а q_T^* и q_ω^* убывают к нулю. Даже при $\mathrm{Ra}<10^5$ релаксация заметно сокращает время установления. Но и при высокоинтенсивной конвекции, когда итерации Зейделя уже не сходятся, методом релаксации получены

стационарные решения при сравнительно небольших затратах машинного времени. Влияние сетки на оптимальные параметры релаксации носит качественно такой же характер, как и в линейном случае [61]: их величина растет с уменьшением h. Некоторое отклонение от этого правила наблюдалось на грубых сетках при больших Ra (см. табл. 5.3). Оно касалось лишь параметров q_T^* и q_ω^* и обусловлено, вероятно, зависимостью от сетки коэффициентов разностных уравнений для температуры и завихренности [62].

Таблица 5.2. **Оптимальные наборы параметров релаксации и требуемое число итераций при шаге $h=1/20$**

Ra	q_T^*	q_ψ^*	q_ω^*	N^*	N, $q_T=q_\psi=q_\omega=1$
10	1,7 1,8	1,05 1,22	1,64 1,41	98 101	195 226
10^2	1,7 1,8	1,05 1,22	1,64 1,41	98 101	195 225
10^3	1,7 1,8	1,0 1,08	1,67 1,55	98 98	201 219
5×10^3	1,65 1,8	0,85 0,84	1,6 1,7	113 94	295 204
10^4	1,63 1,8	0,83 0,75	1,55 1,73	151 97	337 224
$3,2\times10^4$	1,28 1,8	0,79 0,65	1,4 1,69	184 112	320 330
5×10^4	1,22 1,78	0,85 1,0	1,33 1,32	189 160	339 397
10^5	1,28 1,75	1,77 1,7	0,53 0,35	161 128	Сходимости нет 481
$3,2\times10^5$	1,09 1,12	1,95 1,88	0,23 0,25	211 168	Сходимости нет 1187
10^6	0,93 0,87	1,97 1,94	0,123 0,165	280 224	Сходимости нет » »
10^7	0,435 0,56	1,988 1,955	0,042 0,085	884 350	Сходимости нет » »

Примечание. Схема C; нечетные строки — задача (5.1), четные — задача (5.2); N^* здесь и далее — значение номера N при $q_T=q_T^*$, $q_\omega=q_\omega^*$, $q_\psi=q_\psi^*$.

Таблица 5.3 **Зависимость оптимальных параметров релаксации и числа итераций от шага сетки**

Ra	h	q_T^*	q_ψ^*	q_ω^*	N^*	N, $q_T = q_\psi = q_\omega = 1$
10	1/10	1,5	0,97	1,43	52	71
	1/20	1,7	1,05	1,64	98	195
	1/40	1,8	1,19	1,68	234	514
$3{,}2\times10^4$	1/10	1,25	0,77	1,06	109	167
	1/20	1,28	0,79	1,4	184	320
	1/40	1,46	0,85	1,62	375	866
10^6	1/10	0,99	1,686	0,155	173	Сходимости нет
	1/20	0,93	1,97	0,123	280	» »
	1/40	1,215	1,976	0,195	524	» »

Примечание. Задача (5.1); схема *С*.

5.2.3. Алгоритм стабилизации итерационного процесса при больших числах Рэлея. Релаксация температуры, как отмечалось, вносит сравнительно небольшой вклад в ускорение сходимости итераций. В самом деле, если положить $q_T = 1$ и найти оптимальные параметры для завихренности и функции тока (обозначим их соответственно $\tilde{q}_\omega^*$ и $\tilde{q}_\psi^*$), то, например, при $\mathrm{Ra} = 10^6$ число итераций $N = \tilde{N}^*$, соответствующее набору $\{1, \tilde{q}_\omega^*, \tilde{q}_\psi^*\}$, лишь в 1,2 раза превышает значение $N = N^*$ при наилучшем наборе $\{q_T^*, q_\omega^*, q_\psi^*\}$. Графики $\tilde{q}_\omega^*(\mathrm{Ra})$ и $\tilde{q}_\psi^*(\mathrm{Ra})$ качественно аналогичны соответствующим графикам $q_\omega^*(\mathrm{Ra})$ и $q_\psi^*(\mathrm{Ra})$, представленным на рис. 5.9. В диапазоне $\mathrm{Ra} > 10^5$ они проходят чуть ниже кривых $q_\omega^*(\mathrm{Ra})$ и $q_\psi^*(\mathrm{Ra})$, располагаясь почти симметрично относительно единицы. Следовательно, при $\mathrm{Ra} > 10^5$ близкую к оптимальной скорость сходимости можно ожидать, решая одномерную задачу оптимизации q_ω, где $0 < q_\omega \leqslant 1$, при $q_T = 1$ и $q_\psi = 2 - q_\omega$.

Анализ структуры итерационного процесса показал, что при больших числах Рэлея ($\mathrm{Ra} > 10^4$) сходимость является колебательной и обусловливается главным образом завихренностью, т. е. в критерии (5.4) $\varepsilon^s = \varepsilon_\omega^s$. Период колебаний D знакопеременной величины ε^s обратно пропорционален q_ω. Причем при оптимальных наборах $\{q_T^*, q_\omega^*, q_\psi^*\}$

и $\{1, \tilde{q}_\omega^*, \tilde{q}_\psi^*\}$ осцилляции совершаются примерно с одинаковым периодом $D = D^*$, зависимость которого как от Ra из диапазона $10^5 \leqslant \mathrm{Ra} \leqslant 10^7$, так и от граничных условий оказалась незначительной. По мере изменения q_ω вверх и вниз от оптимального значения уменьшение и рост D происходят стремительно. Тесты выявили заметное влияние сетки на период колебаний D^* в оптимальном режиме сходимости. Оно удовлетворительно описывается эмпирической формулой

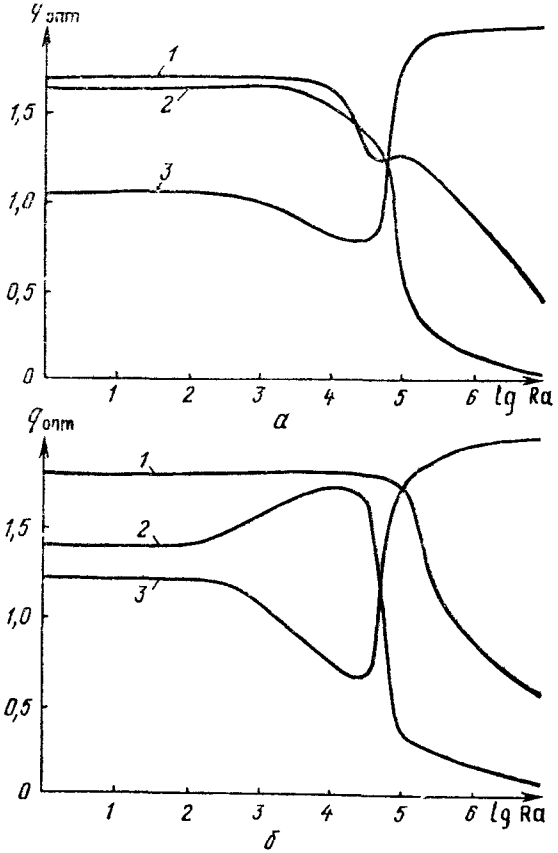


Рис 5.9. Зависимость оптимальных параметров релаксации от числа Рэлея:
схема C; $h=1/20$; $а$—задача (5.1); $б$—задача (5.2); 1—q_T^*; 2—q_ω^*; 3—q_ψ^*

$$D^* \approx k\sqrt{M},\ k = 5. \tag{5.5}$$

С учетом этих обстоятельств нетрудно построить простой алгоритм стабилизации итераций в условиях высокоинтенсивной конвекции. Изложим его суть.

1. Вычисление температуры проводим при $q_T = 1$.

2. В начале счета задаем начальные приближения $q_\omega = q_\omega^0$ и $q_\psi = q_\psi^0$. Учитывая симметрию графиков $\tilde{q}_\omega^*(\mathrm{Ra})$ и $\tilde{q}_\psi^*(\mathrm{Ra})$ при больших Ra, выбираем их следующим образом:

$$0 \leqslant a^0 < q_\omega^0 \leqslant b^0 \leqslant 1,\ \ q_\psi^0 = 2 - q_\omega^0,$$

где a^0 и b^0 — границы области изменения оптимального параметра $\tilde{q}_\omega^*$. Если более точная информация о границах этой области отсутствует, можно положить $a^0 = 0$, $b^0 = 1$.

3. Предусматриваем запоминание тех номеров s, при которых ε^s меняет знак, и находим период D.

4. Начиная с $s = D^*$, где D^* определяется по формуле (5.5), через каждые $N_0 = [D^*/2]$ итераций сравниваем средние характеристики $\bar{\varepsilon}^s$ и $\bar{\varepsilon}^{s-N_0}$. Показателем хорошей сходимости считаем выполнение условия

$$\bar{\varepsilon}^s < (1 - \rho_1)\,\bar{\varepsilon}^{s-N_0},\ 0 < \rho_1 < 1. \tag{5.6}$$

Если неравенство (5.6) удовлетворяется, а также если s не кратно N_0, никаких изменений в вычислительном алгоритме на последующие N_0 итераций не производим, так что в этих случаях

$$q_\omega^{s+1} = q_\omega^s,\ q_\psi^{s+1} = q_\psi^s,\ a^{s+1} = a^s,\ b^{s+1} = b^s.$$

Если же (5.6) не выполняется, то, зная D, анализируем структуру итерационного процесса на полуинтервале $(s - N_0,\ s]$.

5. Если $D < D^*$, то это означает, что параметры релаксации находятся между кривыми $\tilde{q}_\omega^*(\mathrm{Ra})$ и $\tilde{q}_\psi^*(\mathrm{Ra})$. Чтобы подавить высокочастотные осцилляции и приблизить q_ω и q_ψ к оптимальным значениям, уменьшаем q_ω и соответственно увеличиваем q_ψ:

$$q_\omega^{s+1} = q_\omega^s - \rho_2(q_\omega^s - a^s),\ q_\psi^{s+1} = 2 - q_\omega^{s+1},\ 0 < \rho_2 < 1.$$

При этом с целью сужения области варьирования параметров полагаем для верхней границы

$$b^{s+1} = q_\omega^s \quad (a^{s+1} = a^s).$$

6. Соотношение $D > D^*$ свидетельствует о том, что реализуется случай $0 < q_\omega < \tilde{q}_\omega^*$, $\tilde{q}_\psi^* < q_\psi < 2$. Соответственно корректируем параметры:

$$q_\omega^{s+1} = q_\omega^s + \rho_3 (b^s - q_\omega^s),\ q_\psi^{s+1} = 2 - q_\omega^{s+1},\ 0 < \rho_3 < 1,$$

$$a^{s+1} = q_\omega^s \quad (b^{s+1} = b^s).$$

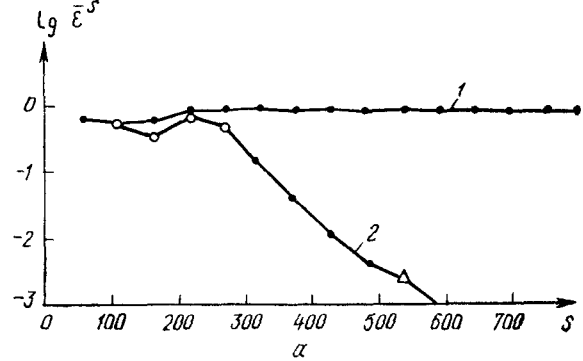
Через каждые N_0 итераций процедура повторяется. Таким образом происходит самонастраивание итерационного алгоритма на оптимальный режим сходимости.

Специальных исследований относительно выбора корректировочных коэффициентов ρ_1, ρ_2, ρ_3 не проводилось. Отметим лишь, что рост Ra требует их уменьшения. В ходе численных экспериментов эти коэффициенты приравнивались. Хорошая сходимость при $\mathrm{Ra} = 10^5$; 10^6; 10^7 достигалась выбором $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0{,}6$; 0,5; 0,2 соответственно. При более низких значениях (например, при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0{,}1$) итерации также сходятся во всех трех случаях, но медленнее.

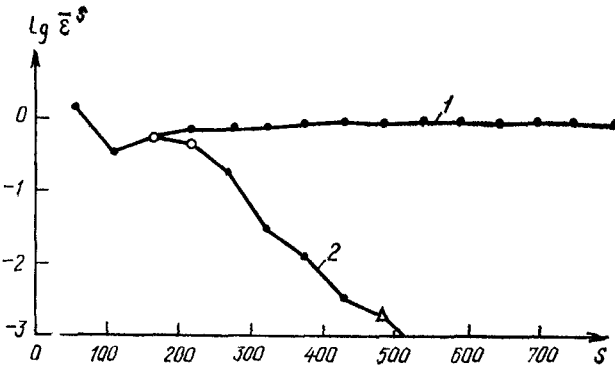
Эффективность предложенного способа корректировки параметров релаксации в зависимости от начального приближения q_ω^0 отражена на рис. 5.10. Заметим, что даже в самом неблагоприятном случае $q_\omega^0 = q_\psi^0 = 1$ алгоритм позволил стабилизировать процесс за число итераций, превосходящее минимальное значение менее чем в 2 раза.

5.2.4. Общие выводы. Чтобы выяснить степень общности описанных результатов, их проверяли при иных входных данных разностной задачи, на других разностных схемах и граничных условиях для завихренности, хотя эти исследования и не носили систематического и детального характера.

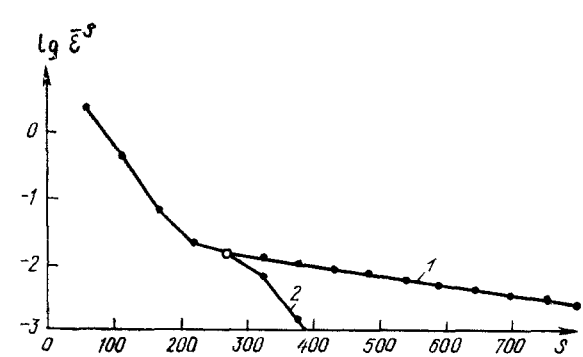
Так, на задаче (5.1) оценивались оптимальные параметры для центрально-разностной схемы F, на задаче (5.2) — для монотонных схем B, D, E. Численный эксперимент со схемой F проводился по той же методике, что и со схемой C (см. п. 5.2.1). Результаты исследования представлены в табл. 5.4, а попытки добиться затухания итераций при $\mathrm{Ra} > 10^6$ не увенчались успехом. Схемы B, D, E испытывались при $\mathrm{Ra} = 10$; $3{,}2 \cdot 10^4$ и 10^6 с шагом $h = 1/20$ и показали примерно те же результаты, что и схема C (см. табл. 5.2). При этом для завихренности



а

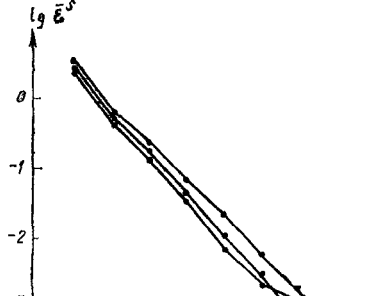


б

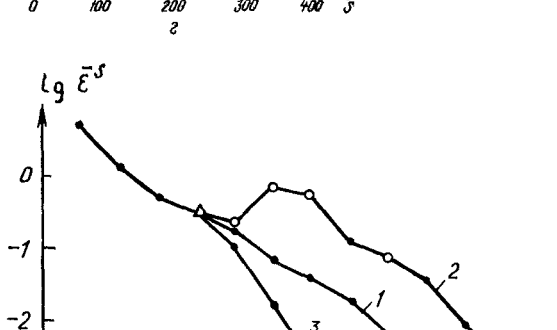


в

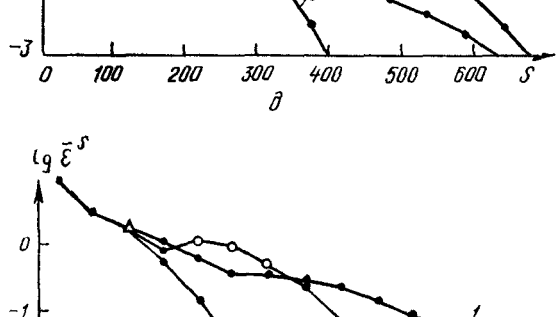
Рис. 5.10. Картина сходимости итерационного процесса при подключ-
задача (5.1); Ra=10^4; схема C; h=1/20; $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0{,}5$; *а*—$q^0_\omega=1$; *б*—$q^0_\omega$
в—$q^0_\omega=0{,}025$; *1*—параметры релаксации при счете не корректируются ($q_T=1$,
параметров отмечены кружками (при уменьшении q_ω) и треугольниками (при



г



д



е

чении алгоритма стабилизации

=0,25, $в$—q_{ω}^{0}=0,125, $г$—q_{ω}^{0}=0,08, 0,09, 0,1 (сверху вниз); $д$—q_{ω}^{0}= ,05, q_{ψ}=2−q_{ω}, q_{ω}=q_{ω}^{0}), 2—a^0=0, b^0=1; 3—a^0=0, b^0=0,2, точки корректировки увеличении q_{ω}

Таблица 5.4. **Оптимальные наборы параметров релаксации и требуемое число итераций при использовании схемы F**

Ra	q_T^*	q_ψ^*	q_ω^*	N^*	N, $q_T=q_\psi=q_\omega=1$
10^2	1,88	1,09	1,61	102	195
10^3	1,85	1,03	1,66	100	201
10^4	1,68	0,4	1,55	166	342
$3{,}2\times10^4$	1,3	1,04	1,21	207	Сходимости нет
10^5	1,07	1,93	0,28	204	» »
$3{,}2\times10^5$	0,83	1,97	0,12	306	» »
10^6	0,36	1,98	0,07	516	» »

Примечание. Задача (5.1); $h=1/20$.

применялись граничные условия Вудса (4.7), Кусковой—Чудова (4.21). Кроме нулевого распределения рассматривались и иные начальные состояния в итерационном процессе, а именно решения, соответствующие меньшим Ra.

Результаты, приведенные в пп. 5.2.2, 5.2.3, прошли успешную апробацию при решении ряда новых задач [22—26]. Применялась консервативная монотонная схема 2-го порядка аппроксимации (3.30) — схема D. В области низких и умеренных Ra параметры релаксации принимались обычно $q_T=q_\psi=1$, $q_\omega=1{,}5$ и обеспечивали хорошую скорость сходимости. Для получения стационарных решений при больших Ra применялся алгоритм стабилизации, построенный в п. 5.2.3. Величина D^* задавалась соотношением (5.5) или по близкой формуле. Структуру сходимости оказалось иногда лучше рассматривать на промежутке $N_0=[D^*]$, так как при $N_0=[D^*/2]$ итерационный процесс не всегда мог в достаточной степени развиться. При этом достигалось установление итераций, которое не имело места при $q_T=q_\omega=q_\psi=1$. Как правило, процесс сходился за число итераций, соизмеримое с достигнутым на тестовых задачах. Если скорость сходимости была неудовлетворительной (а это случалось на сетках, отличных от рассмотренных при численном эксперименте), повысить ее удавалось путем изменения (обычно в сторону увеличения) коэффициента k в формуле (5.5), но не более чем в 2 раза.

Следует отметить, что при достаточно больших Ra, соответствующих области ламинарного пограничного

слоя, не приходилось сталкиваться с иной формой развития итераций, кроме как в виде осцилляций. Если трактовать итерационный алгоритм как некоторую схему установления [12], то возникновение колебаний в итерациях вполне может иметь физическую природу и вызываться приближающейся турбулизацией конвективного потока. Все это позволяет надеяться, что основные идеи предложенного способа стабилизации итераций будут продуктивны при решении многих задач в режиме ламинарного пограничного слоя.

Попутно оценивались более слабые, чем (5.4), условия сходимости, которые иногда применяются на практике: установление трех и четырех значащих цифр в числе Нуссельта. В результате стало возможным провести некоторое сравнение. Так, установление трех знаков в числе Нуссельта при решении задачи (5.1) на квадратной сетке 21×21 при $\mathrm{Ra}=5\cdot10^4$ достигается за 25—30 шагов по времени при временно́м шаге $\tau=0{,}002$ (которое близко к максимально допустимому), если применять неявную схему метода установления, предложенную в [43]. Отметим, что по устойчивости и экономичности она является одной из лучших эволюционных схем, применяемых для решения задач ЕК. При этом на каждом временно́м слое уравнения переноса тепла и завихренности, аппроксимированные с помощью схемы Самарского C, считаются по схеме переменных направлений, а разностное уравнение Пуассона для функции тока — методом последовательной верхней релаксации.

Этот же вариант релаксационным методом (4.46) при $q_T=q_T^*$, $q_\omega=q_\omega^*$, $q_\psi=q_\psi^*$ просчитывался за 60—65 итераций. Однако ввиду примерно шестикратной разницы во временно́й цене одной итерации получаем, что по общим затратам машинного времени метод релаксации почти в 3 раза экономичнее. Что же касается области высоких чисел Рэлея, то уже при $\mathrm{Ra}=10^6$ алгоритм [43] не дает установления даже при очень малых τ. Повышенные стабилизирующие свойства релаксационного метода обеспечиваются более гибкой, чем у схем установления, организацией вычислительного процесса при решении стационарных задач ЕК.

Предпринималась попытка улучшить алгоритм (4.46) путем введения в него дополнительного параметра релаксации — для завихренности на границе. Модифицированный алгоритм проверялся на задаче (5.1) при не-

скольких числах Рэлея. Выяснилось, что численная минимизация функции четырех переменных N приводит почти к тем же минимальным значениям N^*, которые получались ранее при трех параметрах релаксации (отклонение не превышало 2%). Причем оказались почти одинаковыми оптимальные значения обоих параметров релаксации для завихренности, а оптимальные значения q_T, q_ω и q_ψ практически совпали с полученными ранее для алгоритма с тремя параметрами.

§ 5.3. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ

5.3.1. Гравитационная конвекция в прямоугольной полости при нагреве сбоку. Ввиду многочисленных приложений неизменный интерес вызывает плоская задача о конвективном теплообмене в длинном горизонтальном канале прямоугольного сечения с твердыми, неподвижными и непроницаемыми стенками при нагреве сбоку. На вертикальных границах $x=0$ и $x=1$ рассматривается однородное распределение температуры:

$$T(0,\ y) = 0,\ T(1,\ y) = 1.$$

Торцевые стенки $y = 0$ и $y = \mathrm{H/L}$ считаются либо адиабатическими:

$$\frac{\partial T(x,\ 0)}{\partial y} = \frac{\partial T(x,\ \mathrm{H/L})}{\partial y} = 0, \qquad (5.7)$$

либо идеально теплопроводными:

$$T(x,\ 0) = T(x,\ \mathrm{H/L}) = x. \qquad (5.8)$$

Краевые условия для функции тока имеют вид (1.33). При стационарной постановке пространственное распределение тепла, завихренности и функции тока описывается системой уравнений (4.45).

Сформулированная задача является одной из наиболее изученных задач ЕК. Имеется несколько десятков опубликованных работ, отражающих различные аспекты конвективного процесса при $\mathrm{H/L} \geqslant 1$. При этом пристальное внимание уделялось изучению зависимости конвективного числа Нуссельта от определяющих параметров: числа Рэлея, числа Прандтля и геометрического комплекса H/L, где H — высота; L — ширина канала.

В работе [30] задача решалась на промежутке $1 \leqslant H/L \leqslant 10$. Дифференциальные уравнения аппроксимировались схемой 4-го порядка (3.53), с таким же порядком аппроксимации вычислялись значения завихренности на границе, адиабатические граничные условия для температуры и числа Нуссельта.

Наиболее важным результатом, полученным в [30], следует считать построение критериальных формул, описывающих величину числа Нуссельта как показатель интенсивности конвективного теплообмена в зависимости от Ra, Pr и H/L. В случае (5.7) эти соотношения имеют вид

$$\mathrm{Nu} = 0{,}22\,(H/L)^{-0{,}25}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0{,}2+\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Ra}\right)^{0{,}28} \qquad (5.9)$$

при $2 \leqslant H/L \leqslant 10$, $10^{-3} < \mathrm{Pr} < 10^5$, $10^3(0{,}2+\mathrm{Pr})/\mathrm{Pr} < \mathrm{Ra} < 10^{10}$ и

$$\mathrm{Nu} = 0{,}18\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0{,}2+\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Ra}\right)^{0{,}29} \qquad (5.10)$$

при $1 \leqslant H/L \leqslant 2$, $10^{-3} < \mathrm{Pr} < 10^5$, $10^3(0{,}2+\mathrm{Pr})/\mathrm{Pr} < \mathrm{Ra} < 10^{10}$, где число Рэлея определено по ширине канала.

Если горизонтальные границы идеально теплопроводны, т. е. на них поддерживаются условия (5.8), конвективный теплообмен удовлетворительно описывается формулой (5.9) на всем интервале $1 \leqslant H/L \leqslant 10$.

В обзорном докладе Кеттона [63] на 6-й Международной конференции по теплообмену (Торонто, 1978) критериальные уравнения (5.9), (5.10) признаны лучшими из существующих аналогичных соотношений по конвективному теплообмену при $H/L \geqslant 1$. Хорошая точность вычисления Nu вплоть до $\mathrm{Ra} \sim 10^{10}$ достигнута во многом благодаря применению формулы повышенной точности (4.54) совместно с разностной схемой 4-го порядка аппроксимации.

Результаты расчета достаточно хорошо согласуются с экспериментальными формулами различных авторов (рис. 5.11). Некоторое расхождение с данными работы [64] вызвано, вероятно, тем, что в упомянутой работе зависимость от числа Прандтля устанавливалась на основании рассмотрения горизонтального слоя, подогреваемого снизу. Полученные численно значения Nu аппроксимируются формулами (5.9), (5.10) с погрешностью около 10%.

В исследованном диапазоне чисел Прандтля и $2 \leqslant H/L \leqslant 10$ стационарное решение удавалось находить при $Ra \leqslant 5 \cdot 10^8 \sqrt{Pr}/(H/L)^3 \pm 30\%$, а на промежутке $1 \leqslant H/L \leqslant 2$ — при $Ra \leqslant 10^8 \sqrt{Pr}$. При более высоких числах Рэлея в итерационном решении возникали незатухающие «стационарные» колебания. Те участки расчетных кривых на рис. 5.11, которые принадлежат закритическим числам Рэлея, построены по средним арифметическим от минимального и максимального значений осциллирующего числа Нуссельта. Небольшое отклонение этих линий от критериальных прямых [64—66], полученных в результате статистической обработки экспериментальных данных, дает основания полагать, что стационарная модель не только применима для ламинарной конвекции, но и может оказаться рациональной при расчете средних характеристик турбулизированного потока.

Без заметной потери точности (5.9) и (5.10) заменяются общей формулой

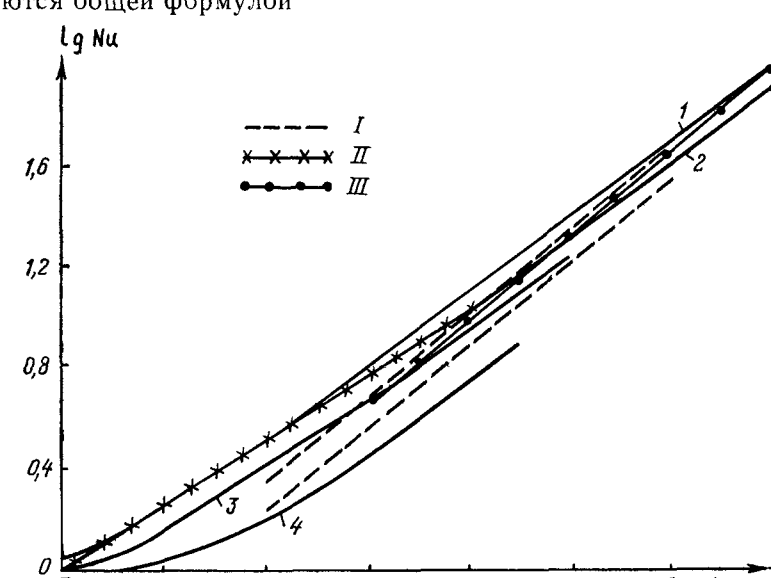


Рис. 5.11. Сопоставление численных результатов (*1—4*) и экспериментальных данных (I—III) по зависимости конвективного числа Нуссельта от чисел Рэлея и Прандтля:

H/L=5, *1* — Pr=10^3, *2* — Pr=1, *3* — Pr=0,1; *4* — Pr=0,01; I — [64] (верхняя линия — Pr=1, нижняя линия — Pr=0,02); II — [65] ($3 \leqslant Pr \leqslant 3 \cdot 10^4$); III — [66] ($1 < Pr < 2 \cdot 10^4$)

$$\mathrm{Nu} = 0{,}22\left(\frac{(\mathrm{H/L})^2 + 0{,}05}{\mathrm{H/L}}\right)^{-0,25}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0{,}2+\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Ra}\right)^{0,29}, \quad (5.11)$$

действующей на интервалах $1 \leqslant \mathrm{H/L} \leqslant 10$, $\mathrm{Pr} > 10^{-3}$, $10^3(0{,}2+\mathrm{Pr})/\mathrm{Pr} < \mathrm{Ra} < 10^{10}$.

В том же докладе [63] высказано сожаление об отсутствии аналогичного критериального уравнения для областей с $\mathrm{H/L} < 1$. В результате дополнительных расчетов при условиях (5.7) и обработки числовой информации по методу наименьших квадратов такое уравнение удалось построить в виде

$$\mathrm{Nu} = 10^{\gamma_1}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0{,}2+\mathrm{Pr}}\right)^{\gamma_2}\mathrm{Ra}^{\gamma_3+\gamma_4 \lg(\mathrm{Pr}/(0{,}2+\mathrm{Pr}))}, \quad (5.12)$$

где

$$\gamma_1 = -4{,}886\,(\lg(\mathrm{H/L}) - 0{,}0517)^2 - 1{,}013;$$

$$\gamma_2 = -1{,}117\,(\lg(\mathrm{H/L}) + 0{,}116)^2 - 0{,}188;$$

$$\gamma_3 = 0{,}466\,(\lg(\mathrm{H/L}) - 0{,}209)^2 + 0{,}327;$$

$$\gamma_4 = 0{,}1155\,(\lg(\mathrm{H/L}) + 0{,}0985)^2 + 0{,}0895.$$

В слоях $0{,}1 \leqslant \mathrm{H/L} \leqslant 1$ при $\mathrm{Pr} > 10^{-3}$, $10^3(0{,}2+\mathrm{Pr})/\mathrm{Pr} < \mathrm{Ra} < 10^{10}$ относительная погрешность формулы (5.12), как правило, не превышает 8%. Лишь при некоторых малых числах Прандтля погрешность может быть выше, но во всяком случае в пределах 20%, что является удовлетворительным для тепловых задач. Некоторая громоздкость формулы (5.12) по сравнению с (5.11) объясняется более сложным характером зависимости Nu от Ra, Pr и H/L при $\mathrm{H/L} < 1$, чем при $\mathrm{H/L} > 1$.

Пара интерполирующих функций (5.11) и (5.12) описывает конвективный теплообмен на всем промежутке $0{,}1 \leqslant \mathrm{H/L} \leqslant 10$ при теплоизолированных горизонтальных стенках.

5.3.2. Конвективная устойчивость магнитной жидкости в кольцевом слое. Как известно, в неизотермической магнитной жидкости, находящейся в условиях невесомости, при наложении неоднородного магнитного поля возбуждается конвективное движение, обусловленное зависимостью намагниченности жидкости от температуры. Однако если градиент магнитного поля коллинеарен температурному градиенту, в жидкости возможно состояние механического равновесия [6, 7].

Поместим магнитную жидкость в кольцевой зазор

между двумя твердыми коаксиальными цилиндрами: внутренний цилиндр представляет собой бесконечно длинный проводник с силой тока I и имеет радиус r_1, а внешний цилиндр — радиус r_2. Будем считать, что температура проводника $T_1=\text{const}$ превышает температуру внешней оболочки $T_0=\text{const}$. Магнитное поле, создаваемое проводником, имеет напряженность $H=I/2\pi r$ (в размерных величинах), где r — расстояние точки пространства от оси проводника. Чтобы исключить гравитационный механизм возникновения конвекции, дополним постановку задачи предположением невесомости.

При данной конфигурации области процесс термомагнитной конвекции естественно рассматривать в цилиндрической системе координат, совместив ось z с осью цилиндров. Введем безразмерные переменные, выбрав характерным размером толщину зазора $d=r_2-r_1$, характерными градиентами магнитного поля и температуры — соответственно $G=|H(r_1)-H(r_2)|/d=I/2\pi r_1 r_2$ и $\gamma=(T_1-T_0)/d$. На стенке внешнего цилиндра, соответствующей безразмерному радиусу $r=1/(1-r_1/r_2)$, значение безразмерной температуры удобно взять $T=0$; тогда на противолежащей стенке $r=1/(1-r_1/r_2)-1$ получим $T=1$. Симметрия формы стенок, температурных условий на них и структуры магнитного поля таковы, что при невесомости ($\mathrm{Gr}=0$) двумерной математической моделью может служить как система уравнений (1.24) (плоская задача), так и система уравнений (1.26) (осесимметричная задача). В плоской задаче решение предполагается не зависящим от координаты z, в осесимметричной — от полярного угла φ.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что одним из решений при любых значениях магнитного числа Грасгофа Gr_m является

$$T=\ln[(1-r_1/r_2)r]/\ln(r_1/r_2),\ \omega=\psi=0,$$
$$1/(1-r_1/r_2)-1\leqslant r\leqslant 1/(1-r_1/r_2), \tag{5.13}$$

отвечающее состоянию механического равновесия. Так как градиент магнитного поля в данном случае параллелен температурному градиенту, резонно ожидать по аналогии с плоским горизонтальным слоем в поле тяжести [6], что равновесие будет устойчиво до тех пор, пока магнитное число Рэлея $\mathrm{Ra}_m=\mathrm{Gr}_m\cdot\mathrm{Pr}$ не превысит неко-

торого критического значения Ra_m^*, но при всяком $\mathrm{Ra}_m > \mathrm{Ra}_m^*$ наступит кризис равновесного состояния и возникнет конвективное движение.

Исследование устойчивости механического равновесия в кольцевом слое МЖ осуществлялось методом сеток, который является универсальным инструментом современной нелинейной теории конвективной устойчивости. Рассматривались как наиболее вероятные конвективные движения двух типов: плоские и осесимметричные. Для сокращения времени счета и затрат машинной памяти плоская задача решалась в полукольце $(1/(1-r_1/r_2)-1 \leqslant r \leqslant 1/(1-r_1/r_2),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ при обычных условиях симметрии $\partial T/\partial\varphi = \omega = \psi = 0$ на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

В случае осесимметричной задачи метод сеток требует конечных размеров слоя жидкости по длине, поэтому область решения задавалась прямоугольником $(1/(1-r_1/r_2)-1 \leqslant r \leqslant 1/(1-r_1/r_2),\ 0 \leqslant z \leqslant l/d)$ с твердыми торцевыми стенками $z=0$ и $z=l/d$, которые считались теплоизолированными. В связи с замыканием слоя в осесимметричной задаче по сравнению с плоской возник дополнительный геометрический параметр l/d — отношение длины слоя к толщине.

Наряду с уравнениями термомагнитной конвекции (1.24) и (1.26) при том же $\mathrm{Gr}=0$ рассматривались и стационарные аналоги этих уравнений.

Пространственные дифференциальные операторы аппроксимировались на равномерной сетке со 2-м порядком посредством консервативной монотонной схемы (3.30). Для вычисления завихренности на стенках цилиндров строились приближенные формулы типа Вудса. В случае нестационарной постановки задач разностное решение находилось методом установления с неявной схемой типа описанной в п. 4.2.2 для температуры и завихренности и с расчетом функции тока на временных слоях по методу последовательной верхней релаксации. При стационарной постановке решение разностных задач осуществлялось с помощью релаксационного метода, изложенного в п. 4.3.2 и § 5.2. Сразу отметим, что в рассмотренном диапазоне магнитных чисел Рэлея релаксационный алгоритм решения стационарных конвективных уравнений приводил к тем же результатам, что и нестационарный метод установления, адекватно реагируя на кризис равновесного состояния при $\mathrm{Ra}_m \geqslant \mathrm{Ra}_m^*$.

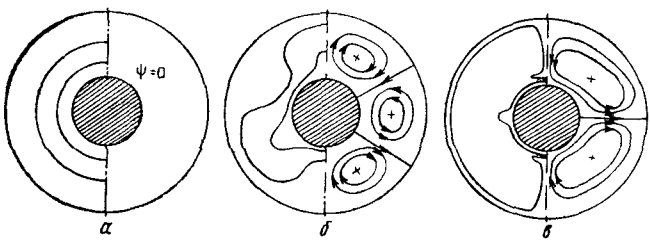
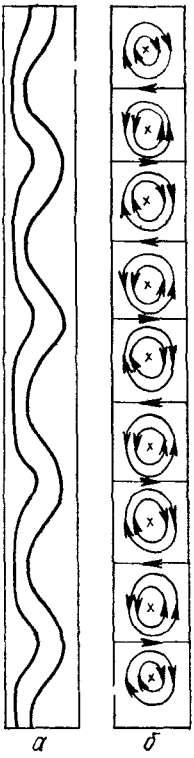


Рис. 5.12. Типичные изотермы (левое полукольцо) и линии тока (правое полукольцо) в плоской задаче:
Pr=36; $r_2/r_1=3$; *а*—$\mathrm{Ra}_m=5\cdot10^3$, $\psi=0$; *б*—$\mathrm{Ra}_m=5\cdot10^3$, $\psi_{max}=0{,}12$; *в*—$\mathrm{Ra}_m=5\cdot10^4$, $\psi_{max}=21$.

Здесь и на рис. 5.13 изотермы соответствуют $T=1/3$ и $T=2/3$, линии тока—$|\psi|=0$, $|\psi|=1/3$ и $|\psi|=2/3$ от ψ_{max}



Процедура определения критического числа Ra_m^* в основном сводилась к следующему. Задавалось начальное возмущение, в качестве которого выбиралось решение, соответствующее значению Ra_m, заведомо большему критического. Обычно для этой цели использовалось разностное решение, полученное при $\mathrm{Ra}_m=5\cdot10^3$. Затем при различных значениях Ra_m наблюдалась эволюция этого начального возмущения либо в методе установления, либо в итерационном процессе. При расчетах в области докритических значений магнитного числа Рэлея происходило полное затухание начального возмущения к состоянию равновесия (5.13). В закритической же области начальное возмущение развивалось в стационарное течение, интенсивность которого зависела от степени надкри-

Рис. 5.13. Типичные изотермы (*а*) и линии тока (*б*) в осесимметричной задаче:
$\mathrm{Ra}_m=3600$, Pr=36; $r_2/r_1=3$; $l/d=10$; $\psi_{max}=0{,}08$

тичности, а структура представляла собой периодическое конвективное движение, напоминающее бенаровскую конвекцию (рис. 5.12, 5.13). Влияние магнитного числа

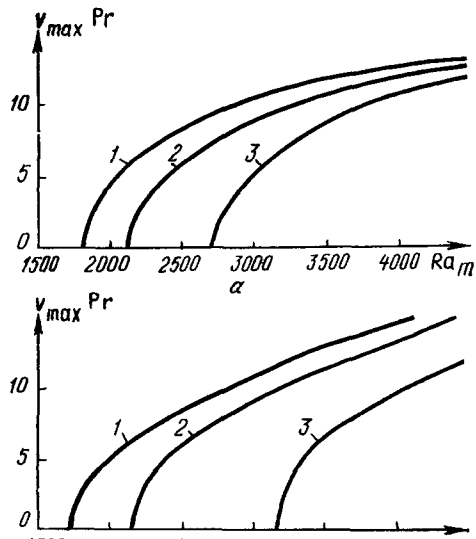


Рис. 5.14. Интенсивность движения вблизи порога:
а — плоская задача; *б* — осесимметричная задача ($l/d=5$); *1* — $r_2/r_1=1{,}5$; *2* — $r_2/r_1=3$; *3* — $r_2/r_1=5$

Рэлея на максимальную величину скорости стационарного конвективного движения в кольцевом слое показано на рис. 5.14. Видно, что при достижении числом Ra_m порогового значения Ra_m^*, зависящего от геометрических параметров r_2/r_1 и l/d, МЖ теряет состояние неподвижности (5.13). В закритической области $\mathrm{Ra}_m^* < \mathrm{Ra}_m < 2\,\mathrm{Ra}_m^*$ зависимость $v_{\max}\cdot\mathrm{Pr}$ от Ra_m подчиняется корневому закону Ландау [4, 6]:

$$v_{\max}\cdot\mathrm{Pr} = \sqrt{a\,(\mathrm{Ra}_m - \mathrm{Ra}_m^*)},$$

где постоянная $a>0$ определяется геометрическими параметрами и изменяется в пределах $0{,}08<a<0{,}11$ для рассмотренных диапазонов этих параметров. Пороговые числа Ra_m^* вычислялись путем экстраполяции графиков

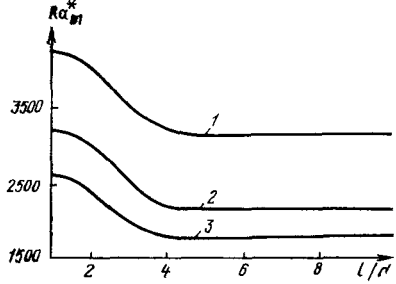


Рис. 5.15. Критические значения магнитного числа Рэлея в зависимости от длины слоя.
осесимметричная задача; *1* — $r_2/r_1=5$; *2* — $r_2/r_1=3$; *3* — $r_2/r_1=1{,}5$

$v_{\max}(\mathrm{Ra}_m)\mathrm{Pr}$ на нулевое значение скорости; погрешность экстраполяции составила около 3%.

Зависимость критического числа Ra_m^* от относительной длины l/d существенна лишь при небольших l/d (рис. 5.15). При $l/d>5$ длина слоя не оказывает заметного воздействия на значения Ra_m^* в осесимметричной задаче. Но с уменьшением параметра l/d повышается стабилизирующее влияние сил вязкости у торцевых стенок, поэтому на интервале от $l/d=5$ до $l/d=1$ критические числа монотонно возрастают. Заметное ослабление темпов роста при изменении геометрического параметра от $l/d=2$ до $l/d=1$ объясняется эффектом тепловой изоляции торцов, которая способствует понижению устойчивости равновесия [67].

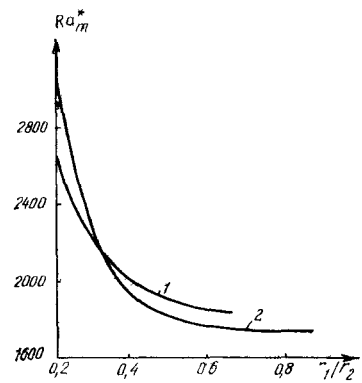


Рис. 5.16 Критические значения магнитного числа Рэлея в зависимости от отношения радиусов кольца:
1 — плоская задача, *2* — осесимметричная задача ($l/d>5$)

Интересны данные зависимости критических чисел от отношения радиусов цилиндров (рис. 5.16). Как в плоской, так и в осесимметричной задачах убывание r_1/r_2 сопровождается ростом

Ra_m^*, который, видимо, связан со стабилизирующим действием кривизны слоя. Причем если на интервале $r_1/r_2 \leqslant 2/3$ зависимость $Ra_m^*(r_1/r_2)$ носит интенсивный характер, то при $r_1/r_2 \geqslant 2/3$ влияние кривизны становится несущественным и наступает переход к классическому случаю горизонтального слоя в поле тяжести. При $r_1/r_2 \sim 1/3$ происходит пересечение кривых $Ra_m^*(r_1/r_2)$, означающее смену формы неустойчивости. Это позволяет предположить, что в области $r_1/r_2 \leqslant 1/3$ неустойчивость в длинном кольцевом слое МЖ связана с движением в виде продольных валов (см. рис. 5.12), а при $r_1/r_2 \geqslant 1/3$ предпочтительным становится осесимметричное движение, представляющее собой однородную систему поперечных тороидальных валов (см. рис. 5.13). Предполагаемый эффект переориентации конвективных движений при изменении r_1/r_2 несколько напоминает вывод о том, что в прямоугольном параллелепипеде при однородном подогреве снизу в поле тяжести всегда реализуются валы с осями, параллельными короткому ребру основания параллелепипеда [68].

ГЛАВА 6

ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПОЛОСТЯХ

§ 6.1. Описание программы
§ 6.2. Тестовый пример
§ 6.3. Текст программы

Написание программы — ответственный этап вычислительного эксперимента. Исследователю, приступающему к численному моделированию процессов ЕК, важно иметь в своем распоряжении простой пример действующей программы для какой-нибудь типичной задачи. Программа, описанная в данной главе, охватывает широкий класс задач, поэтому в ряде случаев может использоваться как стандартная Вместе с тем она является хорошей основой для разработки программ, отвечающих многим другим постановкам стационарных задач ЕК.

§ 6.1. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

6.1.1. Назначение и основные характеристики. Предлагаемая программа предназначена для решения двумерных стационарных задач гравитационной ЕК в длинных горизонтальных каналах прямоугольного сечения при граничных условиях для температуры 1, 2 н 3-го рода. Для описания конвективного процесса используются стационарные уравнения (4.45). Характерной единицей длины принята ширина канала, так что областью определения безразмерной задачи служит прямоугольник $\bar{G}=(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \mathrm{H/L})$. Для функции тока ψ на стенках ставятся условия прилипания (1.33), а для температуры T рассматриваются условия общего вида:

$$-\mathrm{AA}\,(\partial T/\partial y)+\mathrm{DA}\,(x)=\mathrm{BA}\cdot T,\ y=\mathrm{H/L},$$
$$\mathrm{AB}\,(\partial T/\partial y)+\mathrm{DB}\,(x)=\mathrm{BB}\cdot T,\ y=0, \qquad (6.1)$$

$$\mathrm{AL}\,(\partial T/\partial x) + \mathrm{DL}\,(y) = \mathrm{BL}\cdot T,\ x = 0,$$

$$-\mathrm{AR}\,(\partial T/\partial x) + \mathrm{DR}\,(y) = \mathrm{BR}\cdot T,\ x = 1, \qquad (6.1)$$

где коэффициенты AA, AB, AL, AR, BA, BB, BL, BR — неотрицательные константы; DA, DB, DL, DR — заданные функции.

Программа написана на языке Фортран и состоит из основной подпрограммы RECON и вспомогательных подпрограмм COEF, NUINT и POPRI. Обращение к RECON осуществляется из головной программы, которая составляется пользователем. В подпрограмме RECON реализуется релаксационный алгоритм (4.46) с условиями типа Вудса (4.7) для завихренности и разностными формулами типа (4.9), (4.12) для аппроксимации тепловых условий (6.1). Приближенное решение задачи находится в результате сходимости итераций, которая контролируется критерием (4.47). Расчеты выполняются на равномерной сетке с числом узлов $\mathrm{NX} = 1/h_1 + 1$ по ширине области $\bar{G}$ и $\mathrm{NY} = (\mathrm{H/L})/h_2 + 1$ по высоте, где h_1 — шаг сетки по x; h_2 — шаг сетки по y.

Кроме полей температуры, функции тока и завихренности вычисляются интегральные числа Нуссельта, экстремальные значения функции тока и максимальная величина скорости в сеточной области. Периодически печатается контрольная информация о сходимости итерационного процесса. Предусмотрена возможность выдачи на печать любого из массивов решения: температуры, функции тока, завихренности. Но при желании пользователь может выводить их на внешние устройства самостоятельно, после возврата из подпрограммы RECON в головную программу. Для экономии ресурсов машины в случае, когда итерации не сходятся, организован выход из подпрограммы при достижении счетчиком итераций заданного значения.

Вспомогательные подпрограммы COEF, NUINT и POPRI вызываются из RECON. Подпрограмма COEF служит для вычисления коэффициентов в итерационных формулах (4.46). В подпрограмме NUINT вычисляются интегральные числа Нуссельта $\widetilde{\mathrm{Nu}}^+$ и $\widetilde{\mathrm{Nu}}^-$; при этом интегралы (4.49) аппроксимируются квадратурной формулой трапеций, а подынтегральные производные — разностями (4.50). Подпрограмма POPRI предназначена для вывода на АЦПУ массивов решения.

При заданных NX и NY программа обходится минимумом машинной памяти, экономична по затратам машинного времени. Максимально допустимое число узлов сетки в области $\bar{G}$ определяется мощностью оперативной памяти ЭВМ и может быть достаточно большим: от 2500 до 10 000 на современных вычислительных комплексах. На расчет одного итерационного слоя расходуется около (0,005 NX·NY) с машинного времени ЕС-1035, что составляет примерно 670·NX·NY арифметических действий на одну итерацию. Общее количество итераций, необходимое для решения задачи, зависит от ряда факторов: величины итерационной погрешности ε в критерии сходимости, числа узлов NX·NY, выбора параметров релаксации q_T, q_ω и q_ψ, физических параметров Gr и Pr, геометрического параметра H/L, типа граничных условий для температуры. При $q_T = q_\omega = q_\psi = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$—10^{-3}, NX·NY<1000 и умеренных числах Рэлея оно обычно больше 100 и не превосходит 1000. Пользуясь методикой оптимизации релаксационных параметров (см. § 5.2), скорость сходимости можно значительно улучшить.

Программа приспособлена для любой быстродействующей машины в современных версиях Фортрана. Из внешних устройств используется лишь устройство печати. Наличия библиотек стандартных программ не требуется.

На протяжении многих лет программа успешно эксплуатировалась с граничными условиями 1-го и 2-го рода. Установлен диапазон ее надежной работы: $0 \leqslant \mathrm{Ra} \leqslant 10^5$, $10^{-2} \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 10^3$, $\mathrm{Gr} \leqslant 10^6$. При умелом задании релаксационных параметров программа эффективна на интервале $10^5 < \mathrm{Ra} < 10^7$. Относительная высота H/L может варьироваться в широких пределах от $\mathrm{H/L} \ll 1$ до $\mathrm{H/L} \gg 1$.

6.1.2. Входная информация и порядок организации расчетов. Входная информация задается пользователем в головной программе и передается в подпрограмму RECON через обращение

```
CALL RECON (T, P, W, DA, DB, DL, DR,
NX, NY, HL, AA, AB, AL, AR, BA, BB, BL, BR,
GR, PR, NN, IT, EPS, QT, QP, QW, NT, NP, NW).
```

Тип фактических параметров в данном обращении распознается по правилам неявной спецификации.

Подробно опишем список входных данных.

T, P, W — массивы размерности NX × NY для температуры T, функции тока ψ, завихренности ω соответственно, в которые перед обращением к подпрограмме помещается начальное итерационное приближение T^0, ψ^0, ω^0. При этом элементам T(I, K), P(I, K), W(I, K) присваиваются значения $T^0(x_I, y_K)$, $\psi^0(x_I, y_K)$, $\omega^0(x_I, y_K)$, где $x_I = (I-1)h_1$; $y_K = (K-1)h_2$; $I = \overline{1, NX}$; $K = \overline{1, NY}$. Следовательно, нижней границе области $\bar{G}$ соответствует индекс K = 1, верхней — K = NY, левой — I = 1, правой — I = NX.

DA, DB, DL, DR — одномерные массивы (DA и DB имеют размерность NX, DL и DR — размерность NY), в которые перед обращением к подпрограмме RECON помещаются таблицы значений соответствующих функций из граничных условий (6.1): DA(I) = DA(x_I), DB(I) = DB(x_I), DL(K) = DL(y_K), DR(K) = DR(y_K), $I = \overline{1, NX}$, $K = \overline{1, NY}$.

NX и NY — количество узлов сетки на основании и вертикальной границе прямоугольника $\bar{G}$. Программа не накладывает ограничений на максимальные значения NX и NY. Допустимое число узлов NX·NY определяется лишь возможностями ЭВМ.

HL — идентификатор относительно высоты H/L прямоугольника $\bar{G}$.

AA, AB, AL, AR, BA, BB, BL, BR — коэффициенты из граничных условий (6.1).

GR — число Грасгофа Gr.

PR — число Прандтля Pr.

NN — количество итераций, через которое происходит выдача на печать контрольной информации.

IT — величина, ограничивающая общее количество итераций с целью предотвратить чрезмерный расход машинного времени в случае несходимости итерационного процесса. Счет прекратится, как только число итераций достигнет номера IT.

EPS — идентификатор итерационной погрешности ε.

QT, QP, QW — параметры релаксации для температуры (q_T), функции тока (q_ψ) и завихренности (q_ω) соответственно. При QT = QP = QW = 1 вычисления проводятся обычным методом Зейделя. Чтобы уменьшить время решения задачи, следует руководствоваться рекомендациями § 5.2.

NT — признак печати массива температуры. Выдача массива T на печать происходит при $NT \neq 0$.

NP — признак печати массива функции тока P.

NW — признак печати массива завихренности W.

Вычисления организуются головной программой, которая составляется по следующей схеме.

1. Резервируется оперативная память для двумерных массивов T, P, W и одномерных DA, DB, DL, DR посредством оператора

DIMENSION T(NX, NY), P(NX, NY), W(NX, NY),

DA(NX), DB(NX), DL(NY), DR(NY)

Согласно правилам Фортрана здесь NX и NY — константы целого типа.

2. Массивы T, P, W заполняются начальным итерационным приближением T^0, ψ^0, ω^0, которым может служить известное решение, полученное для близкого значения числа Рэлея, решение в режиме теплопроводности, наконец, просто нулевое распределение. Как в этих, так и в других случаях нужно следить, чтобы значения ψ^0 в граничных узлах задавались нулевыми.

3. В массивы DA, DB, DL, DR помещаются таблицы значений переменных коэффициентов из условий (6.1).

4. Осуществляется обращение к подпрограмме RECON:

CALL RECON(. . .)

Фактические параметры могут быть константами или заданы в виде переменных, которые предварительно определены либо операторами присваивания, либо операторами ввода.

6.1.3. Выходная информация. Проведению основных расчетов в подпрограмме RECON предшествует печать входных данных: GR, PR, H/L, NX, NY, QT, QP, QW.

Для контроля за сходимостью итераций организована печать текущих значений некоторых характерных параметров:

NIT — номер итерации (s);

ET, EP, EW — максимальные по модулю значения итерационных погрешностей $\varepsilon_{ik}^{(T)}$, $\varepsilon_{ik}^{(\psi)}$, $\varepsilon_{ik}^{(\omega)}$ на s-й итерации;

PMIN, PMAX — минимальное и максимальное значения функции тока ψ^s;

VMAX — максимальная величина скорости на s-й итерации;

NU —, NU + — значения чисел Нуссельта $\widetilde{\mathrm{Nu}}^-$ и $\widetilde{\mathrm{Nu}}^+$ на s-й итерации.

Выдача контрольной информации осуществляется через каждые NN итераций, начиная с NIT = 10, а также на последней итерации.

По окончании итерационного процесса можно напечатать любой из массивов решения T, P и W, используя признаки печати NT, NP и NW. Печать осуществляется с помощью сервисной подпрограммы POPRI, которая в нижней строке выдаваемых таблиц печатает значения индекса I, а в левом столбце — значения индекса K, нумерующих каждый элемент таблицы в принятой последовательности.

§ 6.2. ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР

Программа прошла обстоятельную проверку на задаче, рассмотренной в п. 5.3.1 о гравитационной ЕК в прямоугольной полости для случая однородного нагрева сбоку. На вертикальных границах области $\bar{G}$ температура задавалась постоянной:

$$T(0,\ y) = 0,\ T(1,\ y) = 1. \tag{6.2}$$

На верхней и нижней стенках ставились условия двух типов: 1-го рода

$$T(x,\ 0) = T(x,\ \mathrm{H/L}) = x \tag{6.3}$$

и 2-го рода

$$\frac{\partial T(x,\ 0)}{\partial y} = \frac{\partial T(x,\ \mathrm{H/L})}{\partial y} = 0. \tag{6.4}$$

Отметим, что постановке граничных условий (6.2) на вертикальных стенках отвечают значения параметров

$$\mathrm{AL} = \mathrm{AR} = 0,\ \mathrm{BL} = \mathrm{BR} = 1,\ \mathrm{DL}(y) \equiv 0,\ \mathrm{DR}(y) \equiv 1$$

в условиях общего вида (6.1), реализованных в программе. В свою очередь граничные условия (6.3) и (6.4) на горизонтальных стенках формируются из (6.1) соответственно при

$$AA = AB = 0,\ BA = BB = 1,\ DA(x) = DB(x) = x,$$

$$AA = AB = 1,\ BA = BB = 0,\ DA(x) \equiv DB(x) \equiv 0.$$

Наиболее подробные исследования проводились в диапазонах режимных параметров: $0{,}1 \leqslant H/L \leqslant 10$, $10^{-2} \leqslant Pr \leqslant 10^3$, $0 \leqslant Ra \leqslant 10^7$. Сеточные числа NX и NY менялись от 11 до 101. Величина итерационной погрешности ε полагалась либо 10^{-3}, либо 10^{-4}. Параметры релаксации q_T, q_ψ, q_ω при малых числах Рэлея обычно выбирались равными единице, при больших — из интервала (0, 2) на основании зависимостей, установленных в § 5.2. За начальное итерационное приближение T^0, ψ^0, ω^0 бралось решение, найденное при более низком значении числа Рэлея, например решение в режиме теплопроводности:

$$T(x, y) \quad x,\ \psi(x, y) \quad \omega(x, y) \equiv 0. \qquad (6.5)$$

Расчеты выполнялись на машинах БЭСМ-6, ЕС-1035, СМ-4, «Минск-32». Результаты сопоставлялись при различных значениях физических и сеточных параметров с численными и экспериментальными данными, приведенными в работах [21, 28, 30, 43, 54, 64—66, 69—72] и в п. 5.3.1. Во всех случаях достоверность тестовых решений не вызывала сомнений, свидетельствуя о корректности составленной программы и пригодности численного алгоритма.

Порядок обращения к подпрограмме RECON и представления результатов на АЦПУ проиллюстрируем на одном варианте задачи:

$$H/L \quad 2,\ Gr \quad 10^4,\ Pr \quad 1,$$
$$T(0, y) = 0,\ T(1, y) = 1,\ T(x, 0) = T(x, H/L) = x. \qquad (6.6)$$

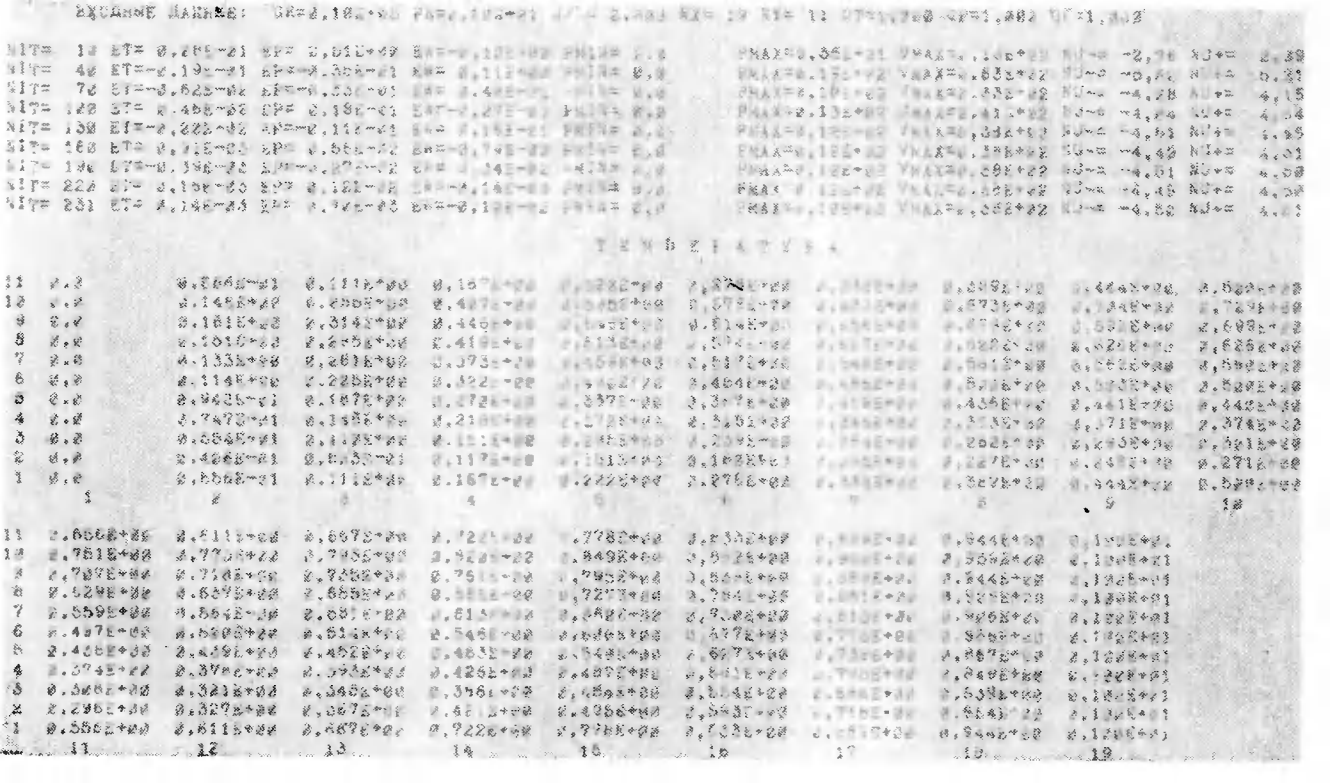
Пусть решение ищется на сетке 19×11, которой соответствуют шаги $h_1 = 1/18$, $h_2 = 1/5$, при величине итерационной погрешности $\varepsilon = 0{,}001$. Параметры релаксации выберем для метода Зейделя: $q_T = q_\psi = q_\omega = 1$. В качестве начального приближения возьмем (6.5). Вывод контрольной информации организуем через каждые NN = 30 итераций. Напомним, что первая выдача производится при NIT = 10, а последняя — после окончания итерационного процесса, т. е. при выполнении условия сходимости итераций или же при достижении счетчиком NIT предель-

ного значения NIT=IT. Для определенности примем IT=1000. Потребуем также, чтобы на печать выдавался только один из массивов решения — массив температуры, для чего положим NT=1, NP=NW=0.

С учетом данных установок и общей схемы, описанной в § 6.1, составим головную программу для решения задачи (6.6) в виде:

```
      DIMENSION T(10,11),P(10,11),W(10,11),
     *      DA(10),DB(10),DL(11),DR(11)
      DO 1 I=1,10
      DO 1 K=1,11
      P(I,K)=0.
      W(I,K)=0.
    1 T(I,K)=(I-1)/10.
      DO 2 I=1,10
      DA(I)=(I-1)/10.
      DB(I)=DA(I)
      DO 3 K=1,11
      DL(K)=0.
    3 DR(K)=1.
      CALL RECON(T,P,W,DA,DB,DL,DR,10,11,2,
     *      0.,0.,0.,0.,1.,1.,1.,1.,
     *      1.E4,1.,.95,1000,1.E-3,1.,1.,1.,1,0,0)
      STOP
      END
```

Отвечающая этой головной программе распечатка таблицы результатов представлена ниже. Она иллюстрирует организацию печати в подпрограммах RECON и POPRI. По значениям погрешностей ET, EP, EW и анализируя поведение экстремальных значений функции тока PMIN и PMAX, максимальной скорости VMAX, чисел Нуссельта NU— и NU+ на заключительной стадии итерационного процесса, можно убедиться в приемлемом уровне установления итераций. Это видно также из распределения температуры в сеточной области, которое уже в достаточной степени приобрело свойство симметрии, присущее решениям данной задачи.



```
      SUBROUTINE RECOK(T,P,W,DA,DB,DL,DR,AX,AY,RE,
     *      AA,AB,AL,AR,BA,BB,BL,BR,GR,PR,
     *      HN,IT,EPS,QT,QP,QW,NT,NP,NW)
      DIMENSION T(NX,NY),P(NX,NY),W(NX,NY),
     *      DA(NX),DB(NX),DL(NY),DR(NY)
C*****************************************************************
C  ПЕЧАТЬ ВХОДНЫХ ДАННЫХ
C*****************************************************************
      PRINT 10,GR,PR,RE,NX,NY,QT,QP,QW
10    FORMAT(/9X,16HВХОДНЫЕ ДАННЫЕ:,2X,3HGR=,E8.2,1X,3HPR=,
     *      E8.2,1X,4HRE/L=,F6.3,1X,3HNX=,I3,1X,3HNY=,
     *      I3,1X,3HQT=,F6.3,1X,3HQP=,F6.3,1X,3HQW=,F6.3/)
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОБХОДИМЫХ КОНСТАНТ
C*****************************************************************
      NX1=NX-1
      NY1=NY-1
      HX=1./NX1
      HY=RL/NY1
      H=HX/HY
      HP=H*1./H
      NIT=0
      N=1
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦЕ
C  ПРИ УСЛОВИИ 1-ГО РОДА
C*****************************************************************
      IF(AA.NE.0.) GOTO 30
      DO 20 I=1,NX
20    T(I,NY)=DA(I)/BA
30    IF(AB.NE.0.) GOTO 50
      DO 40 I=1,NX
40    T(I,1)=DB(I)/BB
50    IF(AL.NE.0.) GOTO 70
      DO 60 K=1,NY
60    T(1,K)=DL(K)/BL
70    IF(AR.NE.0.) GOTO 90
      DO 80 K=1,NY
80    T(NX,K)=DR(K)/BR
C*****************************************************************
C  НАЧАЛО ИТЕРАЦИОННОГО ЦИКЛА
C*****************************************************************
90    NIT=NIT+1
      ET=0.
      EP=0.
      EW=0.
      SUMT=0.
      SUMP=0.
      SUMW=0.
      DO 107 I=1,NX
      DO 100 K=1,NY
      SUMT=SUMT+ABS(T(I,K))
      SUMP=SUMP+ABS(P(I,K))
100   SUMW=SUMW+ABS(W(I,K))
      ZNT=SUMT/NX/NY
      ZNP=SUMP/NX/NY
      ZNW=SUMW/NX/NY
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ,
C  ФУНКЦИИ ТОКА, ЗАВИХРЕННОСТИ
C*****************************************************************
      DO 160 K=1,NY
      DO 160 I=1,NX
```

```
      XT=T(I,K)
      XP=P(I,K)
      X=R(I,K)
      IF(I.NE.1.AND.I.NE.NX.AND.K.NE.1.AND.K.NE.NY) GOTO 120
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦЕ
C  ПРИ УСЛОВИЯХ 2-ГО И 3-ГО РОДА
C*****************************************************************
      IF(I.EQ.1.AND.K.EQ.NY.AND.AA*AL.NE.0)
     *      T(1,NY)=(AA*AL*(T(1,NY1)*H+T(2,NY)/E)+
     *      AL*HX*BA(1)+AA*HY*DL(NY))/
     *      (AA*AL*HH+AL*HX*BA+AA*HY*BL)
      IF(I.EQ.NX.AND.K.EQ.1.AND.AB*AR.NE.0)
     *      T(NX,1)=(AB*AR*(T(NX,2)*H+T(NX1,1)/H)+
     *      AR*HX*DB(NX)+AB*HY*DR(1))/
     *      (AB*AR*HH+AR*HX*BB+AB*HY*BH)
      IF(I.EQ.1.AND.K.EQ.1.AND.AB*AL.NE.0)
     *      T(1,1)=(AB*AL*(T(1,2)*H+T(2,1)/H)+
     *      AL*HA*DB(1)+AB*HY*DL(1))/
     *      (AB*AL*HH+AL*HX*BH+AB*HY*BL)
      IF(I.EQ.NX.AND.K.EQ.NY.AND.AA*AR.NE.0)
     *      T(NX,NY)=(AA*AR*(T(NX,NY1)*H+T(NX1,NY)/H)+
     *      AR*HX*DA(NX)+AA*HY*DR(NY))/
     *      (AA*AR*HH+AR*HX*BA+AA*HY*BR)
      IF((K.EQ.1.AND.I.EQ.1).OR.(K.EQ.NY.AND.I.EQ.NX),
     *      OR,(K.EQ.1.AND.I.EQ.NX).OR.
     *      (K.EQ.NY.AND.I.EQ.1)) GOTO 110
      IF(I.EQ.1.AND.AL.NE.0.) T(1,K)=(AL/H*T(2,K)+AL*(T(1,K+1)+
     *      T(1,K-1))*H/2.+HY*DL(K))/(BL*HY+AL*HH)
      IF(I.EQ.NX.AND.AR.NE.0.) T(NX,K)=(AR/H*T(NX1,K)+AR*(T(NX,K+1)
     *      +T(NX,K-1))*H/2.+HY*DR(K))/(BR*HY+AR*HH)
      IF(K.EQ.1.AND.AB.NE.0.) T(I,1)=(AB*R*P(I,2)+AB*(T(I+1,1)+
     *      T(I-1,1))/H/2.+HX*DB(I))/(BB*HX+AB*HH)
      IF(K.EQ.NY.AND.AA.NE.0.) T(I,NY)=(AA*HY*T(I,NY1)+AA*(T(I+1,NY)
     *      +T(I-1,NY))/H/2.+HX*DA(I))/(BA*HX+AA*HH)
110   T(I,K)=(1.-QT)*XT+QT*T(I,K)
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗАВИХРЕННОСТИ НА ГРАНИЦЕ
C*****************************************************************
      IF (I.EQ.1) W(1,K)=-3./HX/HX*(P(2,K)-R(2,K))/2.
      IF (I.EQ.NX) W(NX,K)=-3./HX/HX*(P(NX1,K)-W(NX1,K))/2.
      IF (K.EQ.1) W(I,1)=-3./HY/HY*P(I,2)-W(I,2)/2.
      IF (K.EQ.NY) W(I,NY)=-3./HY/HY*P(I,NY1)-W(I,NY1)/2.
      GOTO 130
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВО ВНУТРЕННИХ УЗЛАХ
C*****************************************************************
120   CALL COEF(PR*P(I-1,K),PR*P(I+1,K),
     *      PH*P(I,K-1),PH*P(I,K+1),PH*P(I-1,K-1),
     *      PH*P(I-1,K+1),PR*P(I+1,K-1),PR*P(I+1,K+1),H,
     *      A1,A2,B1,B2,C)
      T(I,K)=(A1*T(I-1,K)+A2*T(I+1,K-1)+B1*T(I+1,K)+B2*T(I,K+1))/C
      T(I,K)=(1.-QT)*XT+QT*T(I,K)
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ТОКА ВО ВНУТРЕННИХ УЗЛАХ
C*****************************************************************
      FP=HX*HY*W(I,K)
      P(I,K)=((P(I+1,K)+P(I-1,K))/H+(P(I,K-1)+P(I,K+1))*H+FP)/RH/2.
      P(I,K)=(1.-QP)*XP+QP*P(I,K)
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗАВИХРЕННОСТИ ВО ВНУТРЕННИХ УЗЛАХ
C*****************************************************************
      PW=GR*HY*(T(I+1,K)-T(I-1,K))/2.
      CALL COEF(P(I-1,K),P(I+1,K),P(I,K-1),
     *      P(I,K+1),P(I-1,K-1),P(I-1,K+1),P(I+1,K-1),P(I+1,K+1),
     *      PW,A1,A2,B1,B2,C)
```

```
      W(I,K)=(A1*W(I-1,K)+A2*W(I,K-1)+B1*W(I+1,K)+B2*W(I,K+1)+FW)/
130   W(I,K)=(1.-QW)*XW+QW*W(I,K)
C*****************************************************************
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ
C  ПОГРЕШНОСТЕЙ И ИХ МАКСИМУМА
C*****************************************************************
      IF(ZNT.LT.1.E-6) GOTO 140
      ETT=(T(I,K)-XT)/ZNT/QT
      IF(ABS(ET).LT.ABS(ETT)) ET=ETT
140   IF(ZNP.LT.1.E-8) GOTO 160
      EPP=(P(I,K)-XP)/ZNP/QP
      IF(ABS(EP).LT.ABS(EPP)) EP=EPP
160   IF(ZNW.LT.1.E-8) GOTO 180
      EWW=(W(I,K)-XW)/ZNW/QW
      IF(ABS(EW).LT.ABS(EWW)) EW=EWW
180   CONTINUE
      E=AMAX1(ABS(ET),ABS(EP),ABS(EW))
      IF(E.LE.EPS.AND.NIT.GT.10) GOTO 190
      IF(N.GT.NIT) GOTO 90
C*****************************************************************
C  ПОДГОТОВКА КОНТРОЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ (РАСЧЕТ ЧИСЕЛ КУССЕЛЬТА,
C  ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ТОКА, МАКСИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ)
C*****************************************************************
190   CALL RGINT(T,NX,NY,A,RNEG,RPOS)
      PMIN=P.
      PMAX=P.
      VMAX=P.
      DO 180 I=2,NX1
      DO 180 K=2,NY1
      IF(PMIN.GT.P(I,K)) PMIN=P(I,K)
      IF(PMAX.LT.P(I,K)) PMAX=P(I,K)
      V1=(P(I,K+1)-P(I,K-1))/HY/2.
      V2=(P(I-1,K)-P(I+1,K))/HX/2.
      VMAX=AMAX1(VMAX,SQRT(V1*V1+V2*V2))
C*****************************************************************
C  ПЕЧАТЬ КОНТРОЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ
C*****************************************************************
      PRINT 190,NIT,ET,EP,EW,PMIN,PMAX,VMAX,RNEG,RPOS
190   FORMAT(3X,4HNIT=,I4,1X,3HET=,E9.2,1X,3HEP=,E9.2,
     *       1X,3HEW=,E9.2,1X,5HPMIN=,E9.2,1X,5HPMAX=,E9.2,
     *       1X,5HVMAX=,E8.2,1X,4HRN0=,F8.2,1X,4HRN0=,F8.2)
      N=N+NA
C*****************************************************************
C  ПРОВЕРКА УСЛОВИЯ ОКОНЧАНИЯ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА
C*****************************************************************
      IF(IT.GT.NIT.AND.E.GT.EPS) GOTO 90
      IF(INT.EQ.2) GOTO 210
C*****************************************************************
C  ПЕЧАТЬ МАССИВА ТЕМПЕРАТУРЫ
C*****************************************************************
      PRINT 200
200   FORMAT(/54X,21HТ Е М П Е Р А Т У Р А/)
      CALL POPRI(T,NX,NY)
210   IF(NP.EQ.0) GOTO 230
C*****************************************************************
C  ПЕЧАТЬ МАССИВА ФУНКЦИИ ТОКА
C*****************************************************************
      PRINT 220
220   FORMAT(/52X,24HФ У Н К Ц И Я    Т О К А/)
      CALL POPRI(P,NX,NY)
230   IF(NW.EQ.0) GOTO 250
C*****************************************************************
C  ПЕЧАТЬ МАССИВА ЗАВИХРЕННОСТИ
C*****************************************************************
      PRINT 240
240   FORMAT(/51X,25HЗ А В И Х Р Е Н Н О С Т И/)
```

```
      SUBROUTINE POPR1(N,NX,NY)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE COEF(PN,PE,PS,PW,P*S,P*W,PES,PEN,
     *      H,A1,A2,B1,B2,C)
      HN=(PNN+PN-P*S-PS)*H/8.
      HS=(P*S+PN-PES-PE)/H/8.
      HE=(PN+PEN-PS-PES)*H/8.
      HN=(PW+P*N-PE-PEN)/H/8.
      A1=(1./(1.+ABS(HW))+HW+ABS(HW))/H
      A2=(1./(1.+ABS(HS))+HS+ABS(HS))*H
      B1=(1./(1.+ABS(HE))-HE+ABS(HE))/H
      B2=(1./(1.+ABS(HN))-HN+ABS(HN))*H
      C=A1+A2+B1+B2
      RETURN
      END
      SUBROUTINE QUINT(T,NX,NY,H,HN,HPOS)
      DIMENSION T(NX,NY)
      HA=0.
      HA1=0.
      HB=0.
      HB1=0.
      DO 10 I=2,NX
      F1=T(I-1,1)-T
      F2=T(I,1)-T(
      Z1=T(I-1,
      Z2=T(I,1
      HA=HA+
      HA1=HA1+(ABS(Z1)+ABS(Z2))*H/2.
      HB=HB+(F1+F2)*
10    HB1=HB1+(ABS(F1)+ABS(F2))*H/2.
      HL=0.
      HL1=0.
      HH=0.
      HH1=0.
      DO 20 K=2,NY
      F1=T(1,K-1)-T(
      F2=T(1,K)-T(2,K
      Z1=T(NX,K-1)-T(NX-1,K-1)
      Z2=T(NX,K)-T(NX-1,K)
      HH=HH+(Z1+Z2)*H/2.
      HH1=HH1+(ABS(
      HL=HL+(F1+F2)*H/2.
20    HL1=HL1+(ABS(F1)+ABS(F2))*H/2.
      HALF=HA+HB+HL+HH
      HPOS=(HA1+HB1+HL1+HH1+HALF)/2.
      HERR=HALF-HPOS
      RETURN
      END
      SUBROUTINE POPR1(F,NX,NY)
      DIMENSION IA(10),F(NX,NY)
      J1=1
10    J2=J1+9
      IF(J2.GT.NX) J2=NX
      DO 20 K1=1,NY
      K=NY-K1+1
20    PRINT 30,K,(F(I,K),I=J1,J2)
30    FORMAT(1X,I4,10E11.3)
      DO 40 I=1,10
40    IA(I)=I+J1-1
      I1=J2-J1+1
      PRINT 50,(IA(I),I=1,I1)
50    FORMAT(12I11/)
      J1=J2+1
      IF(J1.LT.NX+1) GOTO 10
      RETURN
      END
```

1. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.

2. *Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.

3. *Берковский В. М., Ноготов Г. Ф.* Разностные методы исследования задач теплообмена. Минск: Наука и техника, 1976. 144. с.

4. *Ландау* Л. *Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.; Наука, 1986. 736 с.

5. *Джалурия И.*Естественная конвекция: тепло- и масоообмен. М.: Мир, 1983 100 с.

6. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

7. *Баштовой В.Г.,Берковский Б. М , Вислович А. Н.* Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М.: ИВТАН, 1985. 188 с,

8. *Лыков А. В., Берковский Б. М.* Конвекция и тепловые волны. М.: Энергия, 1974. 336 с.

9. *Фертман В. Е.* Магнитные жидкости — естественная конвекция и теплообмен. Минск: Наука и техника, 1978. 208 с,

10. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

11. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2. 728 с

12. *Самарский А. А.* Теория разностных схем М.: Наука, 1977. 656 с.

13. *Самарский А. А., Гулин А.В.*Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.

14. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М: Наука, 1980. 636 с.

15. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука. 1978. 512 с.

10. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений М.: Наука, 1976. 352 с.

17. *Courant R., Isaacson E., Rees M.* // Comput. on Pure and Appl. Math. 1952. Vol. 5. P. 243 — 255.

18. *Джакупов К. Б.* // Числен. методы механики сплошной среды. 1971. Т. 2, № 1. С. 17 — 26.

19. *Численные* методы исследования течений вязкой жидкости / А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел и др. М.: Мир, 1972. 326 с.

20. *Купцова В. С.* // Вопр. теплопередачи. М.: Моск. лесотехн. ин-т, 1976. С. 116—124.

21. *Берковский Б. М., Полевиков В. К.* // Инж.-физ. журн. 1973. Т. 24. № 5. С. 842—849.

22. *Berkovsky B. M., Fertman V. E., Polevikov V. K.* a. o. //Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 1976. Vol. 19. N 9. P. 981—986.

23. *Полевиков В. К., Фертман В. Е.* // Магнит. гидродинамика. 1977. № 1. С. 15—21.

24. *Ноготов Е. Ф., Полевиков В. К.* // Там же. № 2. С. 28—34.

25. *Berkovsky B. M., Fertman V. E., Polevikov V. K.* a. o. // Heat Transfer 1978. Washington: Hemisphere Publ., 1978. *Vol.* 3. P. 147—151.

26. *Полевиков В. К.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 3. С. 11—16.

27. *Полевиков В. К.* // Современ. проблемы тепловой гравитац. конвекции. Минск: ИТМО АН БССР, 1974. С. 84—88.

28. *Berkovsky B. M., Polevikov V. K.* // Heat Transfer 1974. Tokyo. 1974. Vol. 3. P. 85 89.

29. *Полевиков В. К* Некоторые вопросы численного исследовании нелинейных задач тепловой конвекции методом сеток: Дис ... канд. физ.-мат, наук. Минск, 1977. 156 с.

30. *Berkovsky B. M., Polevikov V. K.* // Heat Transfer and Turbulent Buoyant Convection. Washington: Hemisphere Publ., 1977. P. 443—455.

31. *Полевиков В. К.* //Мат. модели течений жидкости. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. С. 207—216.

32. *Самарский А. А.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 5. С. 812—840.

33. *Том А., Эйплт К.* Числовые расчеты полей в технике и физике, М.: Энергия, 1964. 208 с.

34. *Woods L. C.* // Aeronaut. Quart. 1954. Vol. 5. N 3. P. 176—184.

35. *Кускова Т. В., Чудов Л. А.* // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. Вып. 2. № 8. С. 92—96.

36. *Полевиков В. К.* // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. № 10. С. 872—875.

37. *Берковский Б. М., Синицын А. К* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 1. С. 180—182.

38. *Полевиков В. К.* // Исследование конвектив. и волновых процессов в ферромагнит. жидкостях. Минск: ИТМО АН БССР, 1975. С. 16—24.

39. *Ноготов Е. Ф., Синицын А. К.* // Инж.-физ. журн. 1976. Т. 31. № 6. С. 1113—1119.

40. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

41. *Самарский А. А.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4. № 3. С. 580—585.

42. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с.

43. *Грязнов В. Л., Полежаев В. И.* Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции. М., 1974. *71* с. (Препринт /Ин-т проблем механики АН СССР; № 40).

44. *Полежаев В. И., Грязнов В. Л.* // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 2. С. 301—304.

45. *Грязнов В. Л., Полежаев В. И.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 5. С. 8—15.

46. *Грязнов В. Л., Полежаев В. И.* Численное решение неста-

ционарных уравнений Навье — Стокса для турбулентного режима естественной конвекции. М., 1977. 56 с. (Препринт /Ин-т проблем механики АН СССР; № 81).

47. *Дайковский А. Г., Полежаев В. И., Федосеев А. И.* Численное моделирование переходного и турбулентного режимов конвекции на основе нестационарных уравнений Навье–Стокса. М., 1978. 65 с. (Препринт /Ин-т проблем механики АН СССР; № 101).

48. *Тарунин Е, Л.* // Числен. методы механики сплошной среды. 1978. Т. 9 №7. С. 97—111.

49. *Тарунин Е. Л.* Численное исследование свободной конвекции: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1983. 406 с.

50. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М.: Мир, 1977. 584 с.

51. *Полевиков В. К.* // Пробл. механики магнит. жидкостей. Минск: ИТМО АН БССР, 1981. С. 66—75.

52. *Тарунин Е. Л.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 2. С. 436—445.

53. *Полевиков В. К.* // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1983. № 3. С. 69—70.

54. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С, 56—62.

55. *Фромм Дж.* // Числен. методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С 289—299.

56. *Тарунин Е. Л. , Шайдуров В. Г. Шарифулин А. Н.* // Конвектив. течения и гидродинам. устойчивость. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. С 3—16.

57. *Берковский Б. М., Ноготов Е. Ф.* // *Изв.* АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 2. С. 147—154.

58. *Лыков А. В., Берковский Б. М., Фертман В. Е.* // Инж.-физ. журн. 1969. Т. 16. № 6. С. 972- 976

59. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

60. *Полевиков В. К.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21. № 1. С. 127—138.

61. *Федоренко Р. П.*// Успехи мат. наук. 1973. Т. 28. Вып. 2 (170). С. 121 — 182.

62. *Джонсон Р.В., Данак А.М.*// Теплопередача. М.: Мир, 1976. № 2. С. 84—90.

63. *Cattion I.* // Heat Transfer 1978. Washington: Hemisphere Publ., 1978. Vol. 3. P. 13—31.

64. *Дропкин Д., Сомерскейлз Е.* // Теплопередача. М.: Мир, 1965. № 1. С. 94-101.

65. *Эмери А., Чу Н.*// Там же. С. 132—140.

66. *Мак-Грегор Р., Эмери* А. // Там же. 1969. № 3. С. 109—122.

67. *Kurzweg U.H.*// Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 1965. Vol. 8. N 1. P. 35—41.

68. *Davis S.* // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. N 3. P. 465—478.

69. *Elder J. W.* // Ibid. 1965. Vol. 23. N 1. P. 77—98.

70. *Полежаев В. И.* // Тепло- и массоперенос. М.: Энергия, 1968. Т. 1. С. 631—640.

71. *Тарунин Е. Л.* // Гидродинамика. Пермь, 1970. Вып. 2. С. 163—175.

72. *Сэйд М., Трапп А.*// Теплопередача. М.: Мир, 1979. № 3. С. 225—227.

Научное издание

Берковский Борис Михайлович
Полевиков Виктор Кузьмич

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В КОНВЕКЦИИ

Редактор М. Г. Хаютина
Младший редактор Т. А. Рыжкова
Художник В. С. Шалимо
Художественный редактор С. В. Баленок
Технический редактор Г. Ф. Дубровская
Корректор Л. В. Лебедева

ИБ № 1033

Сдано в набор 20 05 87 Подписано в печать 19 09 88 АТ 08744 Формат 84X108/32 Бумага типографская № 1 Гарнитура литературная Высокая печать Усл печ л 8,82 Усл кр отт 9,24 Уч изд л 9,4 Тираж 1680 экз Заказ 1739 Цена 1 р 50 к

Издательство «Университетское» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 220048 Минск, проспект Машерова, 11

Типография им Франциска Скорины издательства «Наука и техника» 220600 Минск Ленинский проспект, 68