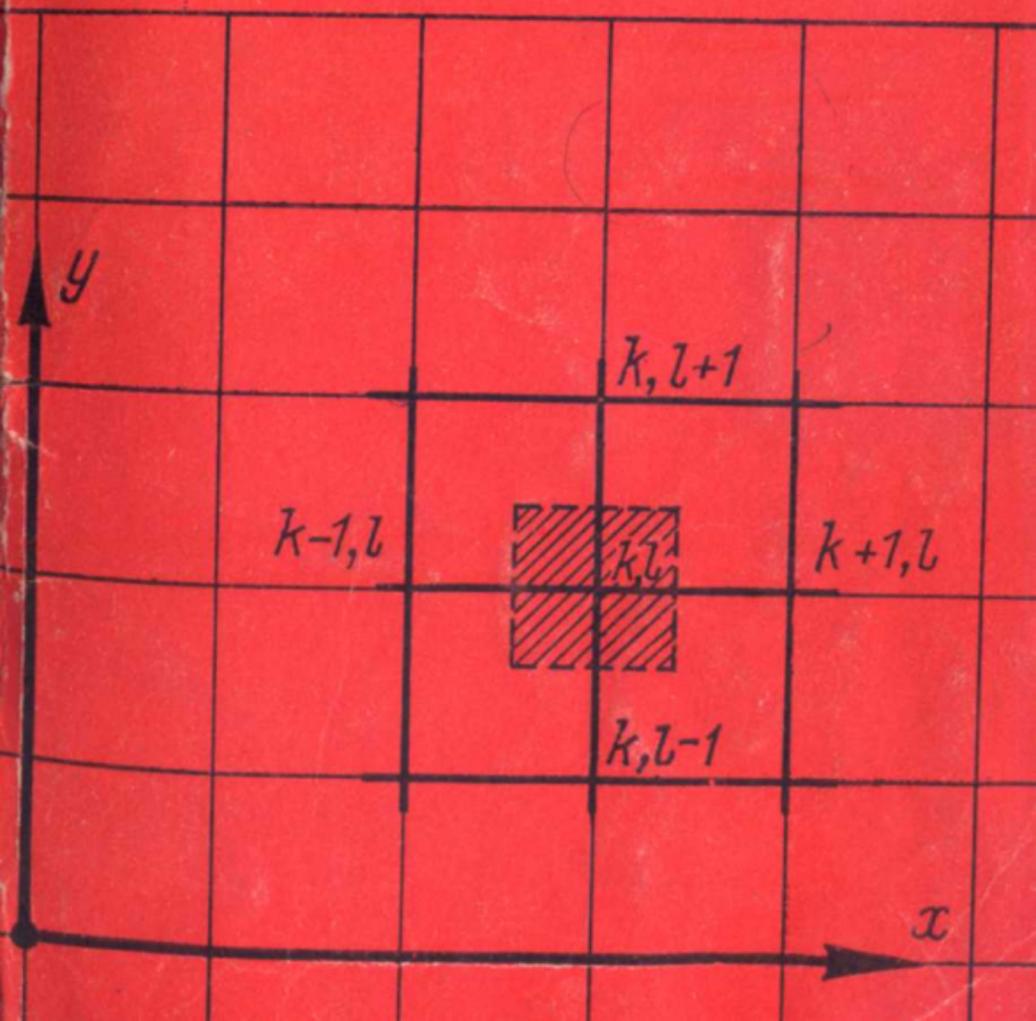


БЕРКОВСКИЙ, Е. Ф. НОГотов

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА



АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР
Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова

Б. М. БЕРКОВСКИЙ, Е. Ф. НОГотов

**РАЗНОСТНЫЕ
МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ
ЗАДАЧ
ТЕПЛООБМЕНА**

Под редакцией
члена-корреспондента АН БССР
А. Г. Шашкова

Минск
Издательство «Наука и техника»
1976

Берковский Б. М., Ноготов Е. Ф. **Разностные методы исследования задач теплообмена.** Минск, «Наука и техника», 1976, 144 с.

Книга посвящена современным методам численного исследования задач тепло- и массообмена с помощью быстродействующих вычислительных машин. В ней содержатся основные сведения из теории разностных схем. Для основных типов задач, встречающихся в научных исследованиях и инженерной практике при изучении теплопроводности и конвективного теплообмена, указаны конкретные методы, позволяющие с помощью современной вычислительной техники решать эти задачи. Определен диапазон режимных параметров, при которых целесообразно использовать данный метод, а также приведены оценки точности приближенного решения. Обобщаются опыт советских и зарубежных исследователей в области численного решения задач теплообмена.

Предназначена для специалистов по теплофизике, тепло- и массообмену, механике жидкостей и газов, вычислительной математике, а также для преподавателей, аспирантов и студентов высших учебных заведений соответствующих специальностей.

Библиография — 68 названий.

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук Н. П. Кеда,
кандидат технических наук А. Л. Парнас

30302—105
Б $\frac{\quad}{\text{М316—76}}$ 104—76

© Издательство «Наука и техника», 1976.

Большинство задач, встречающихся при исследовании процессов теплообмена, сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных. Дифференциальные уравнения, описывающие реальные физические процессы, как правило, весьма сложны, и получить их решение в виде конечной формулы удается только в самых простых случаях. В связи с этим особое значение для решения таких задач приобретают приближенные методы, которые условно можно разделить на две группы.

К первой группе следует отнести методы, которые позволяют выразить приближенное решение задачи в аналитической форме, например в виде отрезка некоторого ряда. В большинстве случаев такое решение имеет сложную структуру, может содержать интегралы, специальные функции и т. п., и анализировать его очень трудно.

Вторую группу составляют численные методы, с помощью которых можно получить числовую таблицу приближенных значений искомого решения. Это прежде всего методы конечных разностей, прямых, больших частиц, Монте Карло.

Наиболее универсален и широко распространен метод конечных разностей. Суть его заключается в замене дифференциальных операторов исходных дифференциальных уравнений их приближенными значениями, выраженными через разности величин функции в отдельных дискретных точках (узлах) разностной сетки. В результате такой замены дифференциальные уравнения сводятся к алгебраическим системам, в которых неизвестны значения функции в узлах сетки. Большую популярность этот метод получил благодаря своей универсальности и возможности относительно простой реализации на электронных вычислительных машинах.

Широкое применение метода конечных разностей для расчета задач математической физики (в том числе и задач теплообмена) связано с быстрым развитием вычислительной техники. Современные вычислительные машины позволяют численно исследовать многие важные задачи в наиболее общей их постановке. При строгой постановке задачи, предполагающей минимальное число допущений, эти исследования сравнимы с лучшими физическими экспериментами. К тому же численные эксперименты по сравнению с физическими обладают рядом преимуществ: позволяют относительно просто и в широком диапазоне варьировать параметры задачи и краевые условия, а также получать исчерпывающую информацию об исследуемом процессе.

В данной монографии авторы попытались дать систематическое описание наиболее типичных и вместе с тем достаточно эффективных конечно-разностных алгоритмов, использовавшихся для решения задач теплопроводности и конвективного теплообмена. Поскольку приведенные здесь методы предназначены для реализации их на ЭВМ, то при оценке эффективности того или иного метода для решения некоторого класса задач имелась в виду экономичность решения их на ЭВМ и учитывалось не только количество необходимых арифметических операций, но и логическая сложность программной реализации, объем информации, необходимой для запоминания, и т. п. Основное внимание уделено построению численного алгоритма, выбору оптимальной величины сеточных параметров, оценке погрешности получаемого численного решения.

Чтобы помочь читателю в конструировании численных схем для решения конкретных физических задач, в первой главе приводятся некоторые элементарные сведения из теории метода конечных разностей, даются понятия аппроксимации, устойчивости, сходимости.

Более глубоко теоретические основы метода конечных разностей изложены в работах А. А. Самарского [1], С. К. Годунова и В. С. Рябенского [2], Р. Д. Рихтмайера и К. В. Мортонa [3], Н. Н. Яненко [4], Г. И. Марчука [5].

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1.1. Идея метода,

Чтобы решить ту или иную задачу на ЭВМ, необходимо сформулировать ее на доступном языке чисел и арифметических операций. Задачи же математической физики содержат обычно специальные функции, интегралы, дифференциальные операторы и т. п. При подготовке к решению на ЭВМ эти задачи должны быть заменены на другие, близкие к ним, но сформулированные в терминах чисел и арифметических действий. Специальные функции, например, выражаются чаще всего через отрезки ряда, интегралы заменяются конечными суммами, дифференциальные же операторы аппроксимируются разностными отношениями.

Способ решения дифференциальных задач, основанный на замене дифференциальных операторов их приближенными значениями, выраженными через значения функции в отдельных дискретных точках, называется методом конечных разностей, или, иначе, методом сеток.

В результате такой замены дифференциальная задача сводится к системе алгебраических уравнений. И хотя число неизвестных в этой системе бывает значительным, решение ее с точки зрения математических трудностей представляет более простую задачу, чем первоначальная.

Суть метода конечных разностей поясним на простом примере. Пусть требуется решить уравнение теплопроводности для однородного тонкого стержня единичной длины ($0 \leq x \leq 1$) с распределенными в нем источниками тепла:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ —температура; $Q(x, t)$ —функция распределения источников тепла; $\kappa = \text{const} > 0$ — коэффициент теплопро-

водности; t —время. Кроме того, заданы распределение температуры в стержне в начальный момент времени $t=0$

$$u(x, 0) = c(x) \quad (2)$$

и законы изменения температуры в зависимости от времени на концах стержня

$$u(0, t) = a(t), u(1, t) = b(t). \quad (3)$$

Требуется найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне в любой заданный момент времени $t > 0$.

Для упрощения дальнейших выкладок и большей наглядности изложения запишем эту задачу в операторном виде

$$Lu = f, \quad (4)$$

для чего введем обозначения

$$Lu \equiv \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0), \\ u(0, t), u(1, t), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} Q(x, t), \\ c(x), \\ a(t), b(t). \end{cases}$$

Здесь L — дифференциальный оператор; f — правая часть. Дифференциальная задача (4) определена в области $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$, которую обозначим символом G .

Предположим, что решение $u(x, t)$ в области G существует и что оно единственно. Чтобы найти его с помощью метода конечных разностей, перейдем от исходной дифференциальной задачи к разностной. Для этого прежде всего заменим область непрерывного изменения аргументов G дискретным множеством точек, совокупность которых в дальнейшем будем обозначать $G_{h\tau}$ и называть разностной сеткой, а сами точки — узлами сетки. Функции, определенные на таком дискретном множестве, назовем сеточными.

Расположение узлов сетки в области $G_{h\tau}$ может быть произвольным. Оно определяется спецификой решаемой задачи. Для простоты изложения примем, что выбранная нами сетка $G_{h\tau}$ равномерно покрывает всю область, а ее узлы определяются координатами

$$x_k = kh, k = 0, 1, 2, \dots, K, t^n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots$$

Тем самым в рассмотрении вводятся два новых параметра (τ и h), называемые шагами сетки, характеризующие плотность распределения узлов соответственно по временной и пространственной переменной. Уменьшение τ и h влечет за собой сгущение узлов сетки.

Набор узлов (x_k, t^n) , соответствующий фиксированному моменту времени $t = t^n$, назовем n -м временным слоем.

Вместо непрерывных функций $u(x, t)$ и $f(x, t)$ рассмотрим соответствующие им числовые последовательности, определенные в точках сетки (x_k, t^n) , обозначив их соответственно u_k^n и f_k^n . Чтобы отличать пространственную сетку от временной, пространственные узлы сетки будем обозначать подстрочными индексами, а временные—надстрочными. В некоторых случаях для обозначения сеточной функции возможна и другая форма ее записи: после символа, обозначающего функцию, ставится внизу индекс h , например u_h, f_h . Обычно переход от непрерывной функции к сеточной осуществляется по правилу: значение сеточной функции в узле (x_k, t^n) равно величине соответствующей непрерывной функции в этой же точке:

$$u_k^n = u(x_k, t^n), \quad f_k^n = f(x_k, t^n). \quad (5)$$

Указанный прием называется проектированием функции на сетку.

Возможны и другие способы определения сеточных функций. Например, в качестве u_k^n и f_k^n можно рассматривать

$$u_k^n = \frac{1}{h} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} u(x, t^n) dx, \quad f_k^n = \frac{1}{h} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} f(x, t^n) dx. \quad (6)$$

Такой способ определения сеточных функций удобен, когда $u(x, t)$, $f(x, t)$ не являются непрерывными функциями, но известно, что интеграл от каждой из них по любому конечному отрезку существует.

В дальнейшем, если не оговаривается противное, будем предполагать, что значения рассматриваемых сеточных функций совпадают с соответствующими значениями непрерывных в узлах сетки.

Таким образом, решение исходной дифференциальной задачи (1)—(3) сводится к определению таблицы u_k^n

числовых значений ее точного решения u в точках сетки G_{ht} . Для приближенного вычисления этой таблицы необходимо перейти от дифференциального уравнения (1) к аппроксимирующему его в узлах сетки разностному уравнению. Для чего заменим производные, содержащиеся в уравнении, приближающими их разностными отношениями. Наиболее естественный способ такой замены основывается на определении производной как предела

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}.$$

Действительно, зафиксировав h в данном равенстве, получим приближенную формулу для первой производной, выраженную через конечные разности:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}. \quad (7)$$

Аналогичным образом можно аппроксимировать и производные более высокого порядка. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h} \left[\frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Разностные уравнения оперируют с сеточными функциями. Для каждой точки сеточной области G_{ht} отношения (7) и (8) запишутся следующим образом:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_k^n \approx \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k^n \approx \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}. \quad (9)$$

Заменив в уравнении (1) производные приближающими их разностными отношениями, получим

$$\frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{h} = \kappa \frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n, \quad (10)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, K-1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Начальные и граничные условия также выразим в разностной форме

$$U_k^0 = c_h, \quad U_0^n = a^n, \quad U_K^n = b^n. \quad (11)$$

Таким образом, исходная дифференциальная задача (1) — (3) сведена к разностной задаче (10) — (11). Разумеется, использованный выше способ замены производных не единственный.

Совокупность разностных уравнений и краевых условий, выраженных в разностной форме, назовем конечно-разностной (разностной) схемой.

Алгоритм решения задачи (10) — (11) весьма прост. Если для некоторого момента времени $t^n = n\tau$ решение U_k^n известно, то значения U_k^{n+1} могут быть вычислены по формуле

$$U_k^{n+1} = \frac{\tau\kappa}{h^2}(U_{k+1}^n + U_{k-1}^n) + \left(1 - \frac{2\tau\kappa}{h^2}\right)U_k^n + \tau Q_k^n. \quad (12)$$

Поскольку для начального момента времени $t = 0$ значения U_k^0 заданы, то можно последовательно определить $U_k^1, U_k^2, U_k^3, \dots, U_k^n, \dots$

При записи разностной задачи для обозначения ее решения вместо символа u , обозначающего точное решение исходной дифференциальной задачи, использован символ U . Это сделано для того чтобы подчеркнуть, что решение разностной задачи U_k^n и проекция точного решения дифференциальной задачи на точки сетки u_k^n не одно и то же. Рассмотрим этот момент более детально.

1.2. Понятие аппроксимации

При использовании метода конечных разностей вместо негравитационной области изменения аргументов вводится некоторое дискретное множество точек, а дифференциальная задача заменяется разностной. Совершенно очевидно, что для близости решений этих задач необходимо, чтобы в пределе при стремлении к нулю шагов сетки по времени и по пространству разностная задача совпадала с исходной дифференциальной. Если это требование выполняется, то говорят, что разностная задача аппроксимирует дифференциальную.

При замене дифференциальной задачи $Lu = f$ разностной $L_h U_h = \varphi_h$ допускается ошибка — погрешность аппроксимации. Погрешность аппроксимации обычно характеризуется величиной невязки $\delta_h = L_h u_h - \varphi_h$, которая получается при подстановке точного решения исходной зада-

чи в разностную. Для оценки величины δ_h введем метрику в пространстве сеточных функций. Наиболее простой нормой скалярной сеточной функции является максимум ее модуля

$$\|U_k^n\| = \max_{k,n} |U_k^n|. \quad (13)$$

Согласно [2], разностная задача $L_h U_h = \varphi_h$ аппроксимирует дифференциальную $Lu = f$ на решении u с порядком p относительно τ и порядком q относительно h , если при $\tau, h \rightarrow 0$ для погрешности аппроксимации выполняется неравенство

$$\|\delta_h\| \leq M_1 \tau^p + M_2 h^q, \quad (14)$$

где M_1, M_2, p, q — положительные и не зависят от τ и h .

Проверка аппроксимации несложна и проводится единообразно для всех задач на основе разложения точного решения дифференциальной задачи в узлах сетки в ряд Тейлора. Способ определения порядка аппроксимации разностной схемы проиллюстрируем на примере задачи (10) — (11).

Покажем, что разностная схема (10) — (11) аппроксимирует дифференциальную задачу (1) — (3) на ее точном решении $u(x, t)$, и установим порядок аппроксимации этой схемы. Для этого оценим величину невязки $\delta_h = L_h u_h - \varphi_h$. Поскольку в рассматриваемом случае краевые условия аппроксимируются точно, то величина невязки δ_h будет определяться лишь погрешностью, с которой разностное уравнение (10) аппроксимирует исходное уравнение (1):

$$\delta_h = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} - \frac{\kappa}{h^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) - Q_k^n. \quad (15)$$

Чтобы оценить величину δ_h , разложим содержащиеся в правой части равенства (15) функции $u_{k+1}^n = u(x_k + h, t^n)$, $u_{k-1}^n = u(x_k - h, t^n)$, $u_k^{n+1} = u(x_k, t^n + \tau)$ в окрестности точки (x_k, t^n) в ряд Тейлора. При этом, конечно, необходимо, чтобы решение $u(x, t)$ удовлетворяло условиям гладкости и имело достаточное число ограниченных производных. Заметим, что решение большинства задач, встречающихся в инженерной и научной практике при исследовании проблем теплообмена, заведомо удовлетворяет этим требова-

ниям. Предположим, что здесь они выполнены, и, следовательно, указанные функции можно представить в виде

$$u(x_k, t^n + \tau) = u(x_k, t^n) + \tau \frac{\partial u(x_k, t^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_k, \tilde{t})}{\partial t^2},$$

$$u(x_k + h, t^n) = u(x_k, t^n) + h \frac{\partial u(x_k, t^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u(x_k, t^n)}{\partial x^2} + \\ + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u(x_k, t^k)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 u(\tilde{x}, t^n)}{\partial x^4},$$

$$u(x_k - h, t^n) = u(x_k, t^n) - h \frac{\partial u(x_k, t^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u(x_k, t^n)}{\partial x^2} - \\ - \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u(x_k, t^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 u(\tilde{\tilde{x}}, t^n)}{\partial x^4},$$

где \tilde{t} , \tilde{x} , $\tilde{\tilde{x}}$ — некоторые фиксированные значения переменных t и x , удовлетворяющие неравенствам: $t^n \leq \tilde{t} \leq t^{n+1}$, $x_k \leq \tilde{x} \leq x_{k+1}$, $x_{k-1} \leq \tilde{\tilde{x}} \leq x_k$.

На основе полученных соотношений запишем

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_k^n + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_k, \tilde{t})}{\partial t^2}, \\ \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k^n + \frac{h^2}{24} \times \\ \times \left[\frac{\partial^4 u(\tilde{x}, t^n)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\tilde{\tilde{x}}, t^n)}{\partial x^4} \right]. \quad (16)$$

Здесь индексы при производных означают, что они берутся в точке (x_k, t^n) . Подставив эти выражения в формулу (15), получим

$$\delta_h = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_k^n - \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k^n - Q_k^n + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_k, \tilde{t})}{\partial t^2} - \\ - \frac{\kappa h^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u(\tilde{x}, t^n)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\tilde{\tilde{x}}, t^n)}{\partial x^4} \right].$$

Поскольку $u(x, t)$ в точности удовлетворяет (1) и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k^n = Q_k^n,$$

то

$$\delta_h = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_h, \tilde{t})}{\partial t^2} - \frac{\kappa h^2}{24} \times \\ \times \left[\frac{\partial^4 u(\tilde{x}, t^n)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\tilde{x}, t^n)}{\partial x^4} \right]. \quad (17)$$

Так как все производные, входящие в равенство (17), по предположению ограничены и, следовательно, имеют точную верхнюю грань, справедлива следующая оценка:

$$|\delta_h| \leq \frac{\tau}{2} \sup \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| + \frac{\kappa h^2}{12} \sup \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|. \quad (18)$$

Таким образом, установлено, что конечно-разностная схема (10)—(11) действительно аппроксимирует дифференциальную задачу (1)—(3) на ее точном решении $u(x, t)$, обладающем ограниченными вторыми производными по t и ограниченными четвертыми производными по x . При этом имеет место первый порядок аппроксимации относительно τ и второй порядок относительно h . Обычно в таких случаях говорят, что разностная схема (10)—(11) аппроксимирует задачу (1)—(3) на решении последней с точностью $o(\tau + h^2)$ *.

В рассмотренном случае краевые условия и правая часть дифференциальной задачи аппроксимировались точно и не влияли на величину невязки. Если же краевые условия задачи или ее правая часть аппроксимируются с какой-то погрешностью, то величину этой погрешности, безусловно, необходимо учитывать при оценке δ_h .

В реальной обстановке шаги разностной сетки всегда имеют конечную величину. Поэтому решение разностной схемы, аппроксимирующей некоторую дифференциальную задачу, всегда будет отличаться от точного решения последней. И чем грубее сетка (чем больше τ и h), тем значительнее это отличие.

* Выражение $O(\alpha^m)$, $m > 0$ означает величину, для которой $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{O(\alpha^m)}{\alpha^m} = M$, где M — постоянная, отличная от нуля.

1.3. Устойчивость. Теорема сходимости

Второй источник ошибок численного решения связан с погрешностью вычислений. Арифметические операции, выполняемые вычислительной машиной, как правило, не точны. ЭВМ может оперировать числами с конечным числом значащих цифр, определяемым количеством разрядов машинного слова. Вследствие этого всегда неизбежны ошибки округления.

В зависимости от особенностей вычислительного алгоритма эти ошибки в процессе счета могут затухать или возрастать. В первом случае будем говорить, что численный метод устойчив, а во втором — неустойчив.

Для решения практических задач используются только устойчивые алгоритмы. В противном случае суммарная ошибка быстро увеличивается и численное решение теряет всякий смысл. Заметим, что один и тот же алгоритм может при одних условиях быть устойчивым, а при других терять это свойство.

Вернемся к нашему примеру. Запишем разностное уравнение (12) в виде

$$U_k^{n+1} = \rho(U_{k+1}^n + U_{k-1}^n) + (1 - 2\rho)U_k^n + \tau Q_k^n, \quad (19)$$

где $\rho = \kappa\tau/h^2$. Поскольку решение разностной задачи (10) — (11) всегда отличается от точного решения исходной задачи (1) — (3), справедливо равенство

$$U_k^n = u_k^n + \varepsilon_k^n. \quad (20)$$

Здесь ε_k^n — величина отклонения этих решений в точке (x_k, t^n) .

Подставляя (20) в формулу (19) и учитывая, что разностная схема (10) — (11) аппроксимирует задачу (1) — (3) с погрешностью порядка $o(\tau + h^2)$ и, следовательно,

$$u_k^{n+1} - \rho(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - (1 - 2\rho)u_k^n - \tau Q_k^n = o(\tau + h^2),$$

получим

$$\varepsilon_k^{n+1} = \rho(\varepsilon_{k+1}^n + \varepsilon_{k-1}^n) - (1 - 2\rho)\varepsilon_k^n + \tau o(\tau + h^2). \quad (21)$$

Соотношение (21) описывает процесс эволюции ошибки при переходе от одного временного уровня к другому. Проанализируем это выражение.

Если величина ρ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \rho \leq 0,5 \quad \left(\tau \leq \frac{h^2}{2\kappa} \right), \quad (22)$$

то коэффициенты при ε_{k+1}^n , ε_k^n , ε_{k-1}^n положительны и можно записать

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k^{n+1}| &\leq \rho (|\varepsilon_{k+1}^n| + |\varepsilon_{k-1}^n|) + (1 - 2\rho) |\varepsilon_k^n| + \tau o(\tau + h^2) \leq \\ &\leq \max (|\varepsilon_{k-1}^n|, |\varepsilon_k^n|, |\varepsilon_{k+1}^n|) + \tau o(\tau + h^2). \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку это неравенство выполняется при всех значениях индекса k , то справедливо также

$$\max_k |\varepsilon_k^{n+1}| \leq \max_k |\varepsilon_k^n| + \tau o(\tau + h^2). \quad (24)$$

Это показывает, что максимальное отклонение ε увеличивается за один шаг τ не более чем на величину $\tau o(\tau + h^2)$. Следовательно, после N шагов имеем

$$\max_k |\varepsilon_k^N| \leq \max_k |\varepsilon_k^0| + N\tau o(\tau + h^2).$$

Для практических целей обычно требуется знать решение задачи в каком-то конечном интервале времени $0 \leq t \leq t_1 = N\tau$. Зафиксируем это значение t_1 и устремим τ и h к нулю, а N к бесконечности. Поскольку начальные условия исходной задачи аппроксимированы точно, т. е. $\varepsilon_k^0 = u(x_k, 0) - u_k^0 = 0$, то в пределе получим

$$\max_k |\varepsilon_k^N| \leq o(\tau + h^2). \quad (25)$$

Тем самым доказано, что если условие (22) выполнено, то при стремлении τ и h к нулю ошибки, допущенные во время счета, не возрастают со временем, и, следовательно, разностная схема (10)—(11) устойчива. Более того, установлено, что при уменьшении τ и h решение разностной задачи (10)—(11) приближается к точному решению исходной задачи (1)—(3).

Рассмотрим случай, когда условие (22) нарушено. Пусть, например, $\rho > 0,5$. Покажем, что при таких значениях ρ рассматриваемая разностная схема неустойчива, и ошибка, допущенная в какой-то момент счета, при

дальнейших вычислениях неограниченно возрастает. Если $\rho > 0,5$, по индукции легко проверить, что при возрастании n знак погрешности ε_k в узлах x_k будет чередоваться. Сама ошибка ε_k^n — некоторая сложная функция от индекса k . Но поскольку знак ошибки меняется от узла к узлу, то ее можно представить в виде суммы, одно из слагаемых которой имеет вид $(-1)^k \varepsilon$. Рассмотрим развитие этой компоненты ошибки.

Без ограничения общности предположим, что погрешность допущена в начальный момент времени $t=0$ при аппроксимации начальных условий. Исходя из сказанного выше, примем

$$\varepsilon_k^0 = (-1)^k \varepsilon \quad (26)$$

и рассмотрим уравнение (21), описывающее процесс развития ошибки при переходе от одного временного уровня к другому. Несколько идеализируя задачу, не будем учитывать вклад, вносимый членом $\tau O(\tau + h^2)$ на последующих шагах. Подставляя (26) в уравнение (21), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^1 &= (1 - 2\rho)(-1)^k \varepsilon + \rho(-1)^{k+1} \varepsilon + \\ &+ \rho(-1)^{k-1} \varepsilon = (1 - 4\rho)(-1)^k \varepsilon. \end{aligned} \quad (27)$$

Соответственно после n -го шага по времени

$$\varepsilon_k^n = (1 - 4\rho)^n (-1)^k \varepsilon. \quad (28)$$

Таким образом, развитие рассматриваемой компоненты ошибки определяется величиной $(1 - 4\rho)$. При

$$|1 - 4\rho| \leq 1 \quad (29)$$

ошибки затухают, в противном случае они нарастают экспоненциально. Последнее приводит к тому, что решение U_k^n , содержащее эту ошибку, довольно быстро теряет какой-либо смысл, становясь хаотической последовательностью очень больших чисел. При этом уменьшение τ и h только способствует ускорению роста ошибки. Действительно, если условие (29) нарушено, то на любом конечном промежутке времени $t_1 = N\tau$ при стремлении τ и h к нулю

$$|\varepsilon_k^N| = |1 - 4\tau h^2|^{t_1/\tau} \varepsilon \rightarrow \infty.$$

Заметим, что условия (22) и (29) эквивалентны.

Итак, в результате проведенного исследования установлено, что при $\tau \leq \frac{h^2}{2\kappa}$ решение U_k^n разностной задачи (10) — (11) при стремлении τ и h к нулю будет приближаться к точному решению u_k^n дифференциальной задачи (1) — (3). При $\tau > \frac{h^2}{2\kappa}$ указанная разностная схема неустойчива, и о близости этих решений не может быть речи.

Определим понятие устойчивости более строго. Рассмотренный пример показывает, что устойчивость разностной задачи фактически означает равномерную относительно шагов разностной сетки непрерывную зависимость ее решения от правой части. Очевидно, можно утверждать, что разностная краевая задача $L_h U_h = \varphi_h$ устойчива, если при любых достаточно малых шагах сетки она однозначно разрешима и ее решение U_h имеет тот же порядок, что и правая часть φ_h , причем небольшое возмущение правой части приводит к такому же по порядку возмущению решения.

Если оператор L_h линейный, то справедливо следующее утверждение: разностная задача $L_h U_h = \varphi_h$ устойчива, если при любых достаточно малых шагах сетки τ и h она однозначно разрешима, и существует постоянная $M > 0$, не зависящая от τ и h , такая, что имеет место неравенство

$$\|U_h\| \leq M \|\varphi_h\|. \quad (30)$$

Приведенное выше определение устойчивости конечно-разностной схемы, сформулированное в работах [2, 6], тесно связано с понятием корректности задачи с непрерывными аргументами. Можно сказать, что устойчивость устанавливает непрерывную зависимость решения от входных данных в случае задач с дискретным аргументом. Согласно данному определению, выполнение условий устойчивости зависит только от свойств конечно-разностной схемы и не связано с исходной дифференциальной задачей. Следовательно, устойчивость — внутреннее свойство разностной задачи.

При использовании метода конечных разностей для решения дифференциальных задач необходимо, чтобы при уменьшении шагов сетки разностное решение стремилось к точному решению соответствующей дифферен-

циальной задачи. Можно сказать, что решение U_h разностной задачи $L_h U_h = \varphi_h$ сходится к точному решению u дифференциальной задачи $Lu = f$, если при $\tau, h \rightarrow 0$ разность $|U_h - u_h| \rightarrow 0$. Причем когда выполняется неравенство

$$|U_h - u_h| \leq M_1 \tau^p + M_2 h^q,$$

где M_1, M_2, p, q — положительные постоянные, не зависящие от τ и h , то говорят, что имеет место сходимость порядка $O(\tau^p + h^q)$ или, иначе, что разностная схема имеет p -й порядок точности относительно τ и q -й — относительно h .

Сходимость — основной критерий качества разностной схемы. Если разностная схема сходится, то, выбирая шаги сетки достаточно малыми, можно вычислить решение соответствующей дифференциальной задачи с любой наперед заданной точностью.

Рассмотренный выше пример показывает, что наличие аппроксимации еще не позволяет судить о сходимости разностной схемы. Действительно, разностная схема (10) — (11) аппроксимирует дифференциальную задачу (1) — (3) независимо от того, выполнено ли условие устойчивости (22). Для сходимости U_h к u_h необходимо, чтобы это условие было выполнено, т. е. сходимость разностной схемы (10) — (11) имеет место лишь при наличии аппроксимации и устойчивости. Можно показать, что это утверждение справедливо и в общем случае. Докажем правомерность его, например, для линейной разностной схемы

$$L_h U_h = \varphi_h, \quad (31)$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу

$$Lu = f \quad (32)$$

на ее точном решении u с погрешностью $\delta_h = \varphi_h - L_h u_h$. Здесь L_h — линейный разностный оператор, а φ_h включает начальные и краевые условия.

Пусть ε_h — погрешность решения разностной задачи (31), т. е. $\varepsilon_h = U_h - u_h$. В силу линейности оператора L_h справедливо соотношение

$$L_h U_h = L_h (u_h + \varepsilon_h) = L_h u_h + L_h \varepsilon_h = \varphi_h \quad (33)$$

или

$$L_h \varepsilon_h = \varphi_h - L_h u_h = \delta_h. \quad (34)$$

Если разностная схема $L_h U_h = \varphi_h$ устойчива, а следовательно, устойчива и схема $L_h \varepsilon_h = \delta_h$, то, согласно определению устойчивости, имеет место неравенство

$$\|\varepsilon_h\| \leq M \|\delta_h\|, \quad (35)$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от шагов сетки, а $\|\cdot\|$ — какая-либо норма. Поскольку разностная схема (31) аппроксимирует задачу (32) на ее точном решении, то при стремлении шагов сетки к нулю величина погрешности аппроксимации $\|\delta_h\| \rightarrow 0$, а, следовательно, в силу неравенства (35) будет стремиться к нулю и погрешность решения ε_h , что и доказывает сходимость разностной схемы (31). В случае нелинейной разностной задачи доказательство сходимости проводится аналогичным образом.

Это утверждение известно как теорема сходимости: *если разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную на ее точном решении и устойчива, то решение разностной задачи при измельчении сетки сходится к точному решению дифференциальной задачи и порядок точности разностной схемы совпадает с порядком аппроксимации.*

Это одна из важнейших теорем вычислительной математики почти одновременно и с разных позиций была сформулирована в середине 50-х годов В. С. Рябенским и А. Ф. Филипповым [6] и П. Д. Лаксом и Р. Д. Рихтмайером [7]. Теорема сходимости указывает способ построения сходящейся разностной схемы для численного решения дифференциальной задачи: необходимо строить аппроксимирующую ее разностную схему и из многих возможных способов аппроксимации следует выбрать такой, при котором разностная схема будет устойчивой.

1.4. Исследование устойчивости разностных схем

Для доказательства сходимости разностной схемы необходимо показать, что она аппроксимирует исходную дифференциальную задачу и является устойчивой. Если проверка аппроксимации даже для сложных задач не вызывает затруднений, то исследовать конечно-разностную схему на устойчивость чрезвычайно трудно. Только в простейших случаях удается решить эту задачу.

Поиску эффективных критериев устойчивости конечно-разностных схем посвящены многие работы. Наиболее полный обзор их приводится в книге А. А. Самарского и А. В. Гулина [8]. Однако эта проблема в какой-то степени решена лишь для линейных задач. Вопрос об устойчивости нелинейных разностных задач практически не решен.

Исследование устойчивости линейных разностных схем с постоянными коэффициентами удобно проводить при помощи спектрального метода. Систему разностных уравнений формально запишем в операторном виде

$$U_k^{n+1} = SU^n, \quad U^n = \{U_p^n\}. \quad (36)$$

Здесь $\{U_p^n\}$ —множество сеточных функций, определенное на совокупности узлов, которые используются для записи разностной схемы (шаблоне разностной схемы); S —некоторый линейный оператор, зависящий от шагов разностной сетки, называемый оператором перехода, который переводит функцию U_k^n , определенную на n -м слое, в функцию U_k^{n+1} , определенную на $(n+1)$ -м слое. Если положим, например,

$$SU^n = \frac{\tau\kappa}{h^2} (U_{k-1}^n + U_{k+1}^n) + \left(1 - \frac{2\tau\kappa}{h^2}\right) U_k^n, \quad (37)$$

то получим разностную схему (12) с источником $Q \equiv 0$.

Поскольку оператор S линейный и не зависит от n , для некоторого фиксированного достаточно далекого момента времени $t_1 = N\tau$ можно записать

$$U_k^N = SU^{N-1} = S^2U^{N-2} = \dots = S^N U^0. \quad (38)$$

Согласно данному выше определению устойчивости, разностная схема (36) устойчива, если при любых U_k^0 справедлива оценка

$$\|U_k^n\| \leq M \|U_k^0\|, \quad (39)$$

где $M > 0$ —постоянная, не зависящая от шагов разностной сетки. В приведенном примере это условие эквивалентно требованию равномерной ограниченности по норме степеней оператора перехода:

$$\|S^n\| \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

Норма оператора S характеризуется его собственными значениями. Рассмотрим частные решения разностной задачи (36) следующего вида:

$$U_k^n = \lambda^n V_k, \quad (41)$$

где λ — комплексное число, которое подбирается таким образом, чтобы решение (41) удовлетворяло разностной задаче (36); V_k — некоторая комплексная сеточная функция, не зависящая от времени. Подставляя решение (41) в разностную схему (36), получаем для сеточных функций V_k задачу на собственные значения:

$$\lambda V_k = S V_k. \quad (42)$$

Здесь функции V_k можно рассматривать как собственные функции оператора S , а λ — как собственные значения, соответствующие этим функциям.

Покажем, что частные решения (41) ограничены во времени, если соответствующие им собственные значения удовлетворяют неравенству

$$|\lambda| \leq 1 + m\tau, \quad (43)$$

где $m > 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h . Зафиксируем какой-то момент времени $t_1 = n\tau$ и устремим τ к нулю, а n — соответственно к бесконечности. Тогда

$$|\lambda|^n \approx (1 + m\tau)^{t_1/\tau} \approx e^{mt_1}, \quad (44)$$

и для решения (41) справедлива оценка (39), в которой постоянная $M = e^{mt_1}$. Если взять максимум по всем собственным значениям оператора S , получим необходимое условие устойчивости

$$\max |\lambda| \leq 1 + m\tau, \quad (45)$$

которое известно как условие Неймана.

Заметим, что величина e^{mt_1} хотя и конечна, но может быть достаточно большой. Поэтому часто вместо (45) применяют более жесткое условие

$$\max |\lambda| \leq 1. \quad (46)$$

Собственные значения λ образуют спектр оператора S . В связи с этим условия устойчивости такого вида называют спектральными.

Для оценки собственных значений оператора перехода S к разностной схеме обычно применяют преобразование Фурье, которое, как известно, сохраняет метрические свойства оператора. В результате оператор перехода заменяется коэффициентом перехода или в случае системы уравнений матрицей перехода. Оценка собственных значений последней существенно упрощается, поскольку она не содержит пространственных разностных операторов и состоит из чисел (действительных или комплексных).

Частный случай спектрального метода исследования устойчивости разностных схем — метод гармоник [7]. Устойчивость разностной задачи при этом устанавливается для ее частных решений, имеющих вид разностной гармоники:

$$U_k^n = u_0 \lambda^n e^{i\varphi kh}, \quad (47)$$

где i — мнимая единица; φ — произвольное действительное число. Решение (47) подставляется в разностную схему и определяются условия, при которых для всех φ выполняется неравенство

$$|\lambda(\varphi)| \leq 1 \quad (\text{или } |\lambda(\varphi)| \leq 1 + m\tau). \quad (48)$$

Для примера исследуем устойчивость разностной схемы (12). Подставив в нее решение (47) и произведя очевидные преобразования, получим

$$\lambda(\varphi) = 1 - \frac{4\tau\kappa}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi h}{2}. \quad (49)$$

Неравенство (49) выполняется при $\tau \leq \frac{h^2}{2\kappa}$, что эквивалентно выведенному ранее условию (22).

Исследование устойчивости разностных схем методом гармоник легко обобщается для двух измерений и более, а также для разностных схем, аппроксимирующих системы дифференциальных уравнений. Например, если решение задачи зависит от двух пространственных координат, то в разностную задачу подставляется гармоника следующего вида:

$$U_{k,l}^n = u_0 \lambda^n e^{i\varphi_1 kh_1 + i\varphi_2 lh_2}, \quad (50)$$

где h_1 и h_2 — шаги сетки по пространственным переменным, а k и l — соответственно номера узлов. Условием

устойчивости схемы будет выполнение неравенства $|\lambda(\varphi_1, \varphi_2)| \leq 1$ для всех φ_1 и φ_2 . Многочисленные примеры применения метода гармоник для исследования устойчивости разностных схем даны в монографиях [3, 4, 9].

Еще раз подчеркнем, что критерий Неймана дает необходимое условие устойчивости и его выполнение не гарантирует устойчивости рассматриваемой разностной схемы. Для этого должно быть выполнено одно из достаточных условий. Условие Неймана будет необходимым и достаточным лишь в том случае, если матрица перехода, получаемая в результате применения к разностной схеме преобразования Фурье, нормальная. В частности, оно является достаточным для устойчивости двухслойных разностных схем с одной зависимой функцией, поскольку матрица перехода для них имеет первый порядок.

При переменных коэффициентах и граничных условиях, не сводящихся к условиям периодичности, непосредственно применить спектральный признак анализа устойчивости нельзя. В этом случае иногда пользуются принципом замораживания коэффициентов, согласно которому переменные в коэффициентах схемы фиксируют и исследуют устойчивость получающейся схемы с постоянными коэффициентами. Если схема с замороженными коэффициентами устойчива при всех возможных значениях переменных, то считают, что схема с переменными коэффициентами также устойчива. Условие устойчивости при этом получается более жестким, чем у соответствующих схем с постоянными коэффициентами. Например, если коэффициент теплопроводности κ зависит от координаты x , то условие (22) примет вид

$$\tau \leq \frac{h}{2 \max_x \kappa(x)}. \quad (51)$$

В заключение заметим, что пользоваться принципом замораживания коэффициентов надо осторожно, так как известны примеры [1, 2], показывающие, что полученные при этом условия устойчивости не являются ни необходимыми, ни достаточными для устойчивости схемы с переменными коэффициентами.

Часто устойчивость разностной схемы можно обосновать с помощью принципа максимума, который для разностного оператора

$$L_k U_k = A_k U_{k-1} + B_k U_k + C_k U_{k+1},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, K-1 \quad (52)$$

формулируется следующим образом: если для всех точек разностной сетки выполнены условия

$$A_k > 0, C_k > 0, -B_k \geq A_k + C_k, \quad (53)$$

то функция U_k достигает своего наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения только на границе сеточной области. Коэффициенты A_k, B_k, C_k могут зависеть не только от шагов разностной сетки, но и быть функцией координат и времени.

Для двухслойных линейных разностных задач справедливость условий (53) равноценна выполнению неравенства [1, 8]

$$\max_k |U_k^{n+1}| \leq \max \{ \max_n |a^n|, \max_n |b^n|, \max_{k,n} |U_k^n| + \tau \max_{k,n} |\varphi_k^n| \}, \quad (54)$$

где a^n и b^n — граничные условия; φ_k^n — правая часть. При выполнении условия (54) устойчивость разностной схемы несложно обосновать [2].

Из неравенства (54) следует, что при постоянных граничных условиях и $\varphi_k^n \equiv 0$ максимум модуля решения разностной задачи не возрастает со временем.

Таким образом, удовлетворение принципу максимума является для линейной разностной задачи достаточным условием ее устойчивости. Доказательство устойчивости сводится к определению условий, при которых рассматриваемая разностная схема удовлетворяет принципу максимума.

Достоинства этого способа в том, что он позволяет проводить исследование устойчивости разностных задач переменными коэффициентами и с граничными условиями, не сводящимися к условиям периодичности. Однако условия устойчивости, получаемые с помощью этого метода, весьма жесткие, и требуется выполнение их в каждой точке разностной сетки.

Среди других методов исследования устойчивости разностных схем наиболее известен метод энергетических неравенств, который носит конструктивный характер. Его

можно использовать не только для доказательства устойчивости, но и для отбора наиболее эффективных разностных схем. Суть этого метода в том, что для оценки решения задачи выбирается такая метрика, в которой за каждый шаг оно возрастает не более чем в $1 + o(\tau)$ раз. Иными словами, выбирается метрика, в которой разностная схема устойчива. Все дальнейшие рассуждения сводятся к тому, чтобы установить эквивалентность выбранной метрики с энергетической нормой. Общая теория исследования устойчивости разностных схем на основе метода энергетических неравенств достаточно полно изложена в работе А. А. Самарского и А. В. Гулина [8].

Применение названных выше способов анализа устойчивости разностных схем правомерно лишь для линейных задач. Строго обоснованных методов исследования устойчивости нелинейных разностных задач в настоящее время не имеется.

На практике для доказательства сходимости часто применяется метод Рунге, основанный на сравнении приближенных решений, полученных при различных шагах пространственной сетки. Обычно шаг сетки h уменьшается в 2, 4, 8 и т. д. раз до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Если известны два приближенных решения U_h и U_{2h} линейной разностной задачи, полученных соответственно при шаге сетки h и $2h$, и схема имеет погрешность аппроксимации $o(h^m)$ (порядок погрешности обычно известен), то можно записать

$$u_h = U_h + h^m M + \dots, \quad u_{2h} = U_{2h} + (2h)^m M + \dots, \quad (55)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости, а M — некоторая положительная ограниченная функция. Ее величина может быть приближенно определена из соотношений (55)

$$M \approx \frac{U_h - U_{2h}}{h^m (2^m - 1)}. \quad (56)$$

Формулу (56) можно использовать для уточнения приближенного решения U_h :

$$\tilde{U}_h = U_h + \frac{U_h - U_{2h}}{2^m - 1}. \quad (57)$$

Заметим, что применять правило Рунге надо осторожно. Известны примеры [1], когда решение разностной задачи, полученное при сгущении сетки, сходится к функции, не имеющей ничего общего с точным решением исходной дифференциальной задачи.

1.5. Построение разностных алгоритмов

Построение разностной задачи начинается с выбора расчетной сетки. Область значений непрерывных независимых переменных исходной дифференциальной задачи заменяется конечным дискретным множеством точек. Функциям непрерывного аргумента ставятся в соответствие сеточные функции, определенные на этом множестве, после чего дифференциальные соотношения, содержащиеся в исходной дифференциальной задаче, заменяются разностными.

При дискретизации задач, включающих уравнения в частных производных, первостепенное значение имеет вопрос об оптимальной величине сеточных параметров, характеризующих частоту расположения ее узлов. Чем гуще сетка, тем выше точность разностного решения. Однако требования точности вступают здесь в противоречие с такими факторами, как машинное время счета, допустимый объем программы, ограниченный емкостью запоминающего устройства ЭВМ, и т. п. Оптимальной будем считать сетку, которая обеспечивает требуемую точность решения при минимальном числе узлов.

Естественно, в тех частях расчетной области, где решение изменяется быстро, сетка должна быть гуще, а там, где решение изменяется медленно, она может быть более редкой. Однако использование нерегулярной сетки существенно усложняет алгоритм решения. Поэтому такие сетки используются довольно редко.

При решении стационарных задач весьма перспективно, на наш взгляд, получение решения на последовательности сеток. Сущность этого способа заключается в том, что сначала задача решается на редкой сетке, а затем решение интерполируется в узлы более мелкой. Используя полученное таким образом решение в качестве начального приближения, решаем задачу на мелкой сетке. Опыт расчетов показывает [10], что применение одной вспомогательной сетки уменьшает объем вычислений

примерно в 5—8 раз при решении двумерных задач и в 12—16 раз при решении трехмерных.

После выбора сетки осуществляется конструирование разностных уравнений. Рассмотрим наиболее типичные способы построения разностных аппроксимаций. На практике разностные уравнения чаще всего получаются путем замены производных, входящих в исходные дифференциальные уравнения и граничные условия, приближающими их разностными отношениями. Приведем наиболее употребительные формулы разностных операторов и укажем старшие члены их погрешности.

Простейший дифференциальный оператор $\frac{\partial u}{\partial x}$ может быть заменен одним из следующих разностных операторов:

$$u_x = \frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + o(h^2) \right], \quad (58)$$

$$u_{\bar{x}} = \frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[-\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + o(h^2) \right]. \quad (59)$$

Выражения (58)—(59)* называются соответственно правой и левой разностной производной. Линейная комбинация $\sigma u_{\bar{x}} + (1 - \sigma) u_x$, где σ —любое вещественное число, естественно, также будет аппроксимировать $\frac{\partial u}{\partial x}$. В частности,

при $\sigma = 0,5$ получаем центральную разностную производную

$$u_0 = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[\frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + o(h^4) \right]. \quad (60)$$

Нетрудно заметить, что если функция u достаточно гладкая и имеет ограниченные производные до третьего порядка включительно, то разностные операторы $u_{\bar{x}}$ и u_x аппроксимируют производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ с погрешностью $o(h)$, а оператор

u_0 — с погрешностью $o(h^2)$. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, всегда будем предполагать, что рас-

* Если функция u зависит не только от x , но и от других независимых переменных, то в разностных формулах, кроме k , будут стоять индексы, соответствующие этим переменным.

смаатриваемые функции достаточно гладкие и имеют необходимое число ограниченных производных.

При построении разностных алгоритмов часто применяются трехточечные аппроксимации

$$\frac{1}{2h} (-3u_k + 4u_{k+1} - u_{k+2}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[-\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + o(h^3) \right], \quad (61)$$

$$\frac{1}{2h} (3u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + o(h^3) \right], \quad (62)$$

которые также аппроксимируют производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ с погрешностью $o(h^2)$.

Производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ обычно аппроксимируется на трехточечном шаблоне $x_k - h_{k-1}$, x_k , $x_k + h_k$:

$$\begin{aligned} u_{x^2}^- &= \frac{2}{h_k + h_{k-1}} \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h_k} - \frac{u_k - u_{k-1}}{h_{k-1}} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \left[\frac{h_k - h_{k-1}}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \right. \\ &\left. + \frac{h_k^2 - h_k h_{k-1} + h_{k-1}^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_k + o(h^3) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Если сетка равномерная, т. е. $h_k = h_{k-1} = h$, то выражение (63) существенно упрощается

$$\begin{aligned} u_{x^2}^- &= \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \\ &+ \left[\frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_k + o(h^4) \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Таким образом, на равномерной сетке оператор $u_{x x}^1$ аппроксимирует производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с локальной погрешностью порядка $o(h^2)$, а на неравномерной — с погрешностью $o(h)$. Введение неравномерной сетки понижает локальный порядок аппроксимации разностной схемы.

Аналогичные соотношения имеют место в случае цилиндрической и сферической систем координат ($x_k \neq 0$)

$$u_{x x}^m = \frac{2}{x_k^m (h_k + h_{k-1})} \left[\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right)^m \frac{u_{k+1} - u_k}{h_k} - \left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right)^m \frac{u_k - u_{k-1}}{h_{k-1}} \right] = \left[\frac{1}{x^m} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_k + \left[\frac{h_k - h_{k-1}}{3} \left(\frac{3m}{4x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + o(h^2) \right]. \quad (65)$$

Здесь $m=1$ соответствует цилиндрической системе координат, а $m=2$ — сферической. Случай $m=0$ соответствует декартовой системе координат. Для равномерной сетки $h_{k-1} = h_k = h$ выражение (65) записывается следующим образом:

$$u_{x x}^m = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + \frac{m}{x_k^m} \cdot \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} = \left[\frac{1}{x^m} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_k + \left[\frac{h^2}{6} \cdot \frac{m}{x_k} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) + o(h^4) \right]. \quad (66)$$

В точке $x_k = 0$ операторы (65), (66) неприменимы. Здесь вместо $u_{x x}^m$ следует взять $(m+1)u_{x x}$, так как при $x \rightarrow 0$ выражение

$$\frac{1}{x^m} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \frac{\partial u}{\partial x} \right) \rightarrow (m+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим способы аппроксимации оператора Лапласа $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (в случае цилиндрической системы координат)

ординат $\nabla^2 u = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) и уравнения Пуассона $\nabla^2 u = f$, часто встречающиеся в задачах теплообмена. Сетку будем считать квадратной $\Delta x = \Delta y = h$. Простейшие аппроксимации этих выражений написать несложно. В случае декартовой системы координат имеем

$$\nabla_{k,l}^2 = u_{x-x} + u_{y-y} = f_{k,l}, \quad (67)$$

соответственно для цилиндрической системы координат

$$\nabla_{k,l}^2 = u_{x-x}^1 + u_{y-y} = f_{k,l}. \quad (68)$$

В обоих случаях погрешность аппроксимации имеет порядок $o(h^2)$.

Приведем аппроксимацию повышенного порядка точности для уравнения Пуассона. В случае декартовой системы координат нетрудно проверить справедливость выражения

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{k,l}^2 u &= \frac{1}{6h^2} [u_{k+1,l+1} + u_{k+1,l-1} + u_{k-1,l+1} + u_{k-1,l-1} + \\ &+ 4(u_{k+1,l} + u_{k-1,l} + u_{k,l+1} + u_{k,l-1}) - 20u_{k,l}] = \\ &= (\nabla^2 u)_{k,l} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 u) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nabla^2 u) \right]_{k,l} + \frac{2h^4}{6!} \times \\ &\times \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} (\nabla^2 u) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} (\nabla^2 u) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} (\nabla^2 u) \right]_{k,l} + o(h^6). \quad (69) \end{aligned}$$

Очевидно, если u — гармоническая функция, то разностный оператор $\tilde{\nabla}_{k,l}^2 u$ аппроксимирует оператор Лапласа $\nabla^2 u$ с погрешностью $o(h^6)$. Разностный аналог уравнения Пуассона $\nabla^2 u = f$ с погрешностью $o(h^4)$ запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{k,l}^2 u &= f_{k,l} + \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{k,l} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{k,l} \right] = \\ &= f_{k,l} + \frac{h^2}{12} \nabla_{k,l}^2 f. \quad (70) \end{aligned}$$

Производные от функции f при этом можно заменить конечно-разностными аппроксимациями вида (64). Порядок погрешности уравнения (70) при этом не нарушится.

Точно таким же образом может быть получен разностный аналог уравнения Пуассона с погрешностью $o(h^6)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{k,l}^2 u = f_{k,l} + \frac{h^2}{12} \nabla_{k,l}^2 f + \frac{2h^4}{6!} \times \\ \times \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Формулы (70) и (71) особенно эффективны для численного решения уравнения Пуассона с аналитической правой частью, поскольку члены, стоящие в правой части, аппроксимируются точно, а расчетные формулы значительно упрощаются.

Более общий подход к конструированию разностных алгоритмов состоит в том, что сразу аппроксимируется весь дифференциальный оператор, а не каждая производная в отдельности. Для этого сначала, исходя из соображений эвристического характера, выбирается шаблон узлов, значения функции в которых предполагается объединить разностными отношениями. Далее введением неопределенных коэффициентов задается общий вид разностного аналога исходного дифференциального оператора. Затем, требуя выполнения условий аппроксимации и устойчивости, задача отыскания неопределенных коэффициентов сводится к решению системы алгебраических уравнений и неравенств.

При построении разностных алгоритмов для численного решения дифференциальных задач важно, чтобы построенная конечно-разностная схема правильно отражала основные особенности физического процесса, описываемого исходными дифференциальными уравнениями. В частности, всегда надо стремиться к тому, чтобы разностный алгоритм выражал на сетке основные законы сохранения (тепла, массы, энергии и т. п.), положенные в основу исходной дифференциальной задачи. Разностные схемы, удовлетворяющие этому требованию, называются консервативными, схемы, нарушающие законы сохранения, — неконсервативными, или дисбалансными.

Одним из наиболее общих и удобных методов построения консервативных разностных схем является интегрируемый интерполяционный [1]. Суть его заключается в следующем. Сначала путем интегрирования исходных

уравнений по элементарной ячейке сеточной области составляется для нее (ячейки) уравнение баланса. Затем интегралы и производные, содержащиеся в этом уравнении, заменяются разностными отношениями таким образом, чтобы законы сохранения не нарушались, а являлись алгебраическим следствием разностных уравнений.

Для примера рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (72)$$

где $\kappa(x, t) > 0$, $f(x, t)$ — заданные функции. Составим уравнение баланса для элементарной ячейки D_k ($x_{k-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{k+\frac{1}{2}}$, $t^n \leq t \leq t^{n+1}$). Для этого проинтегрируем уравнение (72) по D_k . Считая подинтегральные функции достаточно гладкими и применяя известную формулу Грина

$$\iint_{D_k} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) dt dx = \oint_{\Gamma_k} (\Phi_1 dx + \Phi_2 dt) \quad (73)$$

(здесь Γ_k — контур, ограничивающий ячейку D_k), перейдем в уравнении баланса от поверхностных интегралов к контурным

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} [u(t^{n+1}, x) - u(t^n, x)] dx = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\kappa(x_{k+\frac{1}{2}}, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} - \kappa(x_{k-\frac{1}{2}}, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{k-\frac{1}{2}} \right] dt + \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x, t) dx dt. \quad (74)$$

Следуя работе [1], введем обозначения

$$W(x, t) = -\kappa(x, t) \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\Phi_k = \frac{1}{\tau h} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x, t) dx dt \quad (75)$$

и примем усреднения

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} [u(t^{n+1}, x) - u(t^n, x)] dx \approx h [u(t^{n+1}, x_k) - u(t^n, x_k)], \quad (76)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} [W(x_{k+\frac{1}{2}}, t) - W(x_{k-\frac{1}{2}}, t)] dt \approx \frac{\tau}{2} [W(x_{k+\frac{1}{2}}, t^{n+1}) + W(x_{k+\frac{1}{2}}, t^n) - W(x_{k-\frac{1}{2}}, t^{n+1}) - W(x_{k-\frac{1}{2}}, t^n)]. \quad (77)$$

Здесь $W(x, t)$ — поток тепла через сечение x , а Φ_k — количество тепла, выделяющегося на отрезке $[x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}}]$ за время $\tau = t^{n+1} - t^n$ за счет внешних источников, распределенных на этом отрезке с плотностью $f(x, t)$.

Подставляя (75), (76) и (77) в (74) и обозначая искомую функцию U_k^n , получаем конечно-разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\tau} = \frac{1}{2h} \left[\left(\kappa_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{U_{k+1}^{n+1} - U_k^{n+1}}{h} - \right. \right. \\ \left. \left. - \kappa_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{U_k^{n+1} - U_{k-1}^{n+1}}{h} \right) + \left(\kappa_{k+\frac{1}{2}}^n \frac{U_{k+1}^n - U_k^n}{h} - \right. \right. \\ \left. \left. - \kappa_{k-\frac{1}{2}}^n \frac{U_k^n - U_{k-1}^n}{h} \right) \right] + \frac{1}{\tau h} \Phi_k, \quad (78) \end{aligned}$$

которая в разностной форме выражает закон сохранения тепла на элементарном отрезке $[x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}}]$ за время $\tau = t^{n+1} - t^n$. В этом легко убедиться, если записать равенство (78) в виде

$$h(U_k^{n+1} - U_k^n) = \frac{\tau}{2} (W_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} + W_{k-\frac{1}{2}}^n - W_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - W_{k+\frac{1}{2}}^n) + \Phi_k \quad (79)$$

где $W_{k-\frac{1}{2}}^n = -\chi_{k-\frac{1}{2}}^n \frac{U_k^n - U_{k-1}^n}{h}$ — разностное выражение потока тепла через сечение $x = x_{k-\frac{1}{2}}$.

Суммируя (79) по всем узлам $k = 1, 2, 3, \dots, K-1$, находим разностный закон сохранения тепла во всей сеточной области за время $\tau = t^{n+1} - t^n$:

$$h \sum_{k=1}^{K-1} (U_k^{n+1} - U_k^n) = \frac{\tau}{2} (W_{\frac{1}{2}}^{n+1} + W_{\frac{1}{2}}^n - W_{K-\frac{1}{2}}^{n+1} - W_{K-\frac{1}{2}}^n) + \sum_{k=1}^{K-1} \Phi_k, \quad (80)$$

который является разностной аппроксимацией интегрального закона сохранения тепла для уравнения (72), что подтверждает консервативность полученной разностной схемы.

Разностная схема (78) аппроксимирует уравнение (72) с погрешностью $o(\tau^2 + h^2)$. Поскольку коэффициенты разностного уравнения (78) во всех узлах расчетной области вычисляются по одним и тем же формулам, то схема (78) однородна.

Имеются и другие способы конструирования разностных алгоритмов. Среди них наиболее эффективны, на наш взгляд, способы, основанные на использовании вариационных методов Рунца, Галеркина и метода наименьших квадратов. Однако применение этих методов существенно усложняет алгоритмы численного решения и требует хорошего знания теории вариационных методов.

1.6. Решение разностных уравнений

Выше было показано, что для одной и той же дифференциальной задачи можно построить много различных разностных схем. Наиболее простой алгоритм для вычисления разностного решения у явных схем. Разностная схема в этом случае представляет собой формулу для явного выражения решения, соответствующего какому-либо n -му временному (итерационному) слою, через известные его значения на предыдущих слоях. Именно поэтому такие схемы и называют явными.

К сожалению, явные методы устойчивы лишь при определенных соотношениях между шагами сетки по времени и по пространству ($\tau < h^2$). Выполнение требований устойчивости приводит к необходимости очень мелкой дискретизации временной переменной, что неоправданно увеличивает время счета.

Неявные разностные схемы не имеют этого недостатка. Они допускают независимый выбор шагов сетки как по времени, так и по пространству. Однако для получения разностного решения задачи в этом случае на каждом слое необходимо решать систему алгебраических уравнений. Число уравнений и неизвестных в такой системе очень велико — пропорционально h^{-p} , где p — число независимых пространственных переменных. Если не учитывать специфику этой системы и решать ее как систему общего вида, то это потребует огромного числа арифметических операций. Специфика же системы разностных уравнений заключается в том, что матрица коэффициентов имеет трехдиагональную форму. Это позволяет для решения таких систем применять некоторые специальные методы.

Одним из наиболее эффективных и часто употребляемых способов решения разностных уравнений является метод прогонки [11].

Рассмотрим систему разностных уравнений вида

$$\begin{aligned} A_k U_{k-1} + B_k U_k + C_k U_{k+1} &= F_k, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, K-1, \end{aligned} \quad (8)$$

с заданными граничными условиями

$$U_0 = a_0 U_1 + b_0, \quad U_K = a_K U_{K-1} + b_K, \quad (8')$$

где $A_k, B_k, C_k, F_k, a_0, b_0, a_K, b_K$ — известные величины. Такой вид разностной схемы имеют все неявные двухслойные разностные задачи с одной пространственной переменной и граничными условиями первого, второго или третьего рода. Ниже будет показано, как на основе принципа дробных шагов сводятся к такому же виду конечные разностные схемы для многомерных задач математической физики.

Найдем решение системы (81)—(82) в виде, в котором записаны граничные условия:

$$U_k = \alpha_k U_{k+1} + \beta_k. \quad (8'')$$

Здесь α_k и β_k — неизвестные коэффициенты. Равенство (83) имеет силу при всех указанных значениях индекса k . Поэтому запишем

$$U_{k-1} = \alpha_{k-1} U_k + \beta_{k-1}.$$

Подставляя это выражение в (81), получаем

$$A_k (\alpha_{k-1} U_k + \beta_{k-1}) + B_k U_k + C_k U_{k+1} = F_k.$$

Перепишем полученное равенство в форме (83)

$$U_k = - \frac{C_k}{A_k \alpha_{k-1} + B_k} U_{k+1} + \frac{F_k - A_k \beta_{k-1}}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}. \quad (84)$$

Сравнение выражений (84) и (83) дает рекуррентные соотношения для определения коэффициентов α_k и β_k :

$$\alpha_k = - \frac{C_k}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}, \quad \beta_k = \frac{F_k - A_k \beta_{k-1}}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}. \quad (85)$$

Но $\alpha_0 = a_0$, $\beta_0 = b_0$ известны из граничного условия в точке с индексом $k = 0$. Формула (85) позволяет последовательно вычислять $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{K-1}, \beta_{K-1}$.

Далее на основании выражения (83) для точки с индексом $k = K - 1$ можно записать

$$U_{K-1} = \alpha_{K-1} U_K + \beta_{K-1}. \quad (86)$$

Это соотношение должно выполняться независимо от второго граничного условия, связывающего эти же величины. Решая уравнения (82) и (86) совместно, находим

$$U_K = \frac{a_K \beta_{K-1} + b_K}{1 - a_K \alpha_{K-1}}.$$

Зная U_K по рекуррентной формуле (83), можно определить последовательно $U_{K-1}, U_{K-2}, \dots, U_1, U_0$ и, таким образом, решить разностную задачу (81) — (82).

В некоторых задачах полезно строить вычислительный алгоритм так, чтобы значения U_k находились последовательно, начиная с левой границы. В этом случае расчетные формулы выводятся аналогичным образом:

$$\xi_k = - \frac{A_k}{C_k \xi_{k+1} + B_k}, \quad \eta_k = \frac{F_k - C_k \eta_{k+1}}{C_k \xi_{k+1} + B_k},$$

$$\xi_K = a_K, \quad \eta_K = b_K, \quad (87)$$

$$U_0 = \frac{a_0 \eta_1 + b_0}{1 - a_0 \xi_1}, \quad U_k = \xi_k U_{k-1} + \eta_k.$$

Для того чтобы формулы прогонки (83), (85) были устойчивыми, необходимо, чтобы коэффициент α_k не превышал по модулю единицы. В этом случае ошибки округления, возникающие в процессе счета по рекуррентной формуле (83), не будут возрастать. Устойчивость этих формул обеспечивается условиями [11]

$$\begin{aligned} A_k > 0, \quad C_k > 0, \quad -B_k \geq A_k + C_k, \\ 0 \leq a_0 < 1, \quad 0 \leq a_K < 1. \end{aligned} \quad (88)$$

Действительно, $\alpha_0 = a_0 < 1$, и если $0 \leq \alpha_{k-1} < 1$, то

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_k &= \frac{C_k}{-B_k - A_k \alpha_{k-1}} = \\ &= \frac{C_k}{C_k + (1 - \alpha_{k-1}) A_k - B_k - A_k} < 1. \end{aligned}$$

В работе [1] приводятся условия устойчивости метода прогонки с менее жесткими ограничениями на коэффициенты в граничных условиях

$$\begin{aligned} A_k > 0, \quad C_k > 0, \quad -B_k \geq A_k + C_k; \\ \text{а) } 0 \leq a_0 \leq 1, \quad 0 \leq a_K \leq 1, \quad -B_k \neq A_k + C_k; \quad (89) \\ \text{б) } 0 \leq a_0 \leq 1, \quad 0 \leq a_K \leq 1, \quad a_0 + a_K < 2. \end{aligned}$$

При решении краевых задач с граничными условиями первого рода для обеспечения устойчивости метода прогонки часто используется условие, полученное в работе [2]:

$$\frac{|B_k| - |A_k + C_k|}{|A_k| + |B_k| + |C_k|} > 0. \quad (90)$$

Алгоритм метода прогонки весьма прост и эффективен. При его использовании число операций, необходимых для расчета одного временного слоя, примерно в 5 раз больше, чем в явной схеме. Следовательно, применение неявных схем целесообразно, если величина шаг²

по времени τ , допустимая требованиями точности, более чем в 5 раз превосходит значение τ , допустимое требованиями устойчивости в соответствующих явных схемах.

Аналогичный метод решения разностных уравнений можно применять и для многомерных задач. Исходная система разностных уравнений записывается в форме (81). Однако коэффициенты A_k, B_k, C_k будут представлять собой матрицы, а $U_k F_k$ — векторы. Метод решения в этом случае называется методом матричной прогонки. Однако на практике он используется довольно редко из-за высоких требований, предъявляемых им к памяти вычислительной машины, которые обусловлены необходимостью обращения большого числа вспомогательных матриц произвольной структуры.

Для решения систем разностных уравнений часто используют итерационные методы. Система линейных разностных уравнений в общем случае записывается в векторно-матричной форме

$$A\mathbf{u} = \vec{\varphi}, \quad (91)$$

где \mathbf{u} — вектор неизвестных. Матрица коэффициентов A определяется конечно-разностной аппроксимацией и сеткой дискретизации, а вектор $\vec{\varphi}$ — краевыми условиями и правой частью. Поскольку матрица A не вырождена, то система (91) всегда имеет решение, которое можно записать в виде $\mathbf{u} = A^{-1}\vec{\varphi}$.

Для решения системы (91) методом итераций ее приводят к виду

$$\mathbf{u} = B\mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (92)$$

Это всегда можно сделать элементарными преобразованиями. Итерационный алгоритм решения записывается следующим образом:

$$\mathbf{u}^{s+1} = B\mathbf{u}^s + \mathbf{f}, \quad (93)$$

где s — номер итерации, а \mathbf{u}^0 — начальное приближение. Если итерационный процесс сходится, то последовательность $\{\mathbf{u}^s\}$ стремится к решению линейной системы

$$[E - B]\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (94)$$

где E — единичная матрица.

Для получения условий сходимости процесса (93) определим погрешность решения

$$\vec{\epsilon}^s = \mathbf{u} - \mathbf{u}^s. \quad (95)$$

С учетом формул (93) и (94) имеем

$$\vec{\epsilon}^{s+1} = \mathbf{u} - B\mathbf{u}^s - \mathbf{f} = \mathbf{u} - B\mathbf{u}^s - [E - B]\mathbf{u}$$

и, следовательно,

$$\vec{\epsilon}^{s+1} = B\vec{\epsilon}^s = B^2\vec{\epsilon}^{s-2} = \dots = B^s\vec{\epsilon}^0. \quad (96)$$

Равенство (96) означает, что итерационный алгоритм (93) сходится при всех $\vec{\epsilon}^0$ только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы. Определим спектральный радиус $\rho(B)$ матрицы B :

$$\rho(B) = \max_m |\lambda_m|,$$

где λ_m — m -ное собственное значение матрицы B . Тогда условием сходимости итерационного процесса (93) будет выполнение неравенства

$$\rho(B) < 1. \quad (97)$$

Рассмотрим некоторые итерационные методы, наиболее часто употребляемые для решения систем разностных уравнений. В качестве модельной задачи выберем уравнение Пуассона, которое в разностной форме в декартовых координатах на равномерной пространственной сетке с шагом h запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{U_{k+1,l} - 2U_{k,l} + U_{k-1,l}}{h^2} + \\ & + \frac{U_{k,l+1} - 2U_{k,l} + U_{k,l-1}}{h^2} = f_{k,l}. \end{aligned} \quad (98)$$

Решение $U_{k,l}$ требуется найти для всех точек сетки с индексами $k=1, 2, 3, \dots, K-1, l=1, 2, 3, \dots, L-1$. Считаем, что функции $U_{0,l}, U_{K,l}, U_{k,0}, U_{k,L}$ заданы.

Для построения итерационного алгоритма приведем уравнение (98) к виду (92)

$$U_{k,l} = \frac{1}{4} (U_{k+1,l} + U_{k-1,l} + U_{k,l+1} + U_{k,l-1} + h^2 f_{k,l}),$$

откуда следует простая итерационная схема

$$U_{k,l}^{s+1} = \frac{1}{4} (U_{k+1,l}^s + U_{k-1,l}^s + U_{k,l+1}^s + U_{k,l-1}^s + h^2 f_{k,l}). \quad (99)$$

Каждое значение $U_{k,l}^{s+1}$ вычисляется независимо от других. Процедура (99) называется методом простой итерации. Иногда ее называют точечным методом Якоби.

Спектральный радиус матрицы B , соответствующей итерационной схеме (99), равен [12]

$$\rho(B) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{K} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{L} < 1. \quad (100)$$

Таким образом, итерационный процесс (99) всегда сходится. Однако при густой сетке (больших K и L) $\rho(B) \approx 1 - \frac{\pi^2}{4K^2} - \frac{\pi^2}{4L^2}$, и, следовательно, в этом случае сходимость итерационного процесса чрезвычайно медленная.

Если новые значения $u_{k,l}^{s+1}$ использовать сразу по мере их вычисления, то получим итерационный метод Зейделя

$$u_{k,l}^{s+1} = \frac{1}{4} (U_{k+1,l}^s + U_{k-1,l}^{s+1} + U_{k,l+1}^s + U_{k,l-1}^{s+1} + h^2 f_{k,l}). \quad (101)$$

Скорость сходимости метода Зейделя несколько выше, чем метода простой итерации [12]. К тому же для его реализации требуется на $(K+1)(L+1)$ ячеек памяти меньше, чем при применении метода простой итерации, поскольку он позволяет вновь вычисленные значения $u_{k,l}^{s+1}$ сразу заносить на место старых.

Для ускорения сходимости рассмотренных выше итерационных методов часто используют релаксационные параметры. Запишем очевидное тождество $u_{k,l}^{s+1} \equiv u_{k,l}^s + (u_{k,l}^{s+1} - u_{k,l}^s)$, которое показывает, что новое значение $u_{k,l}^{s+1}$ получается прибавлением к старому значению $u_{k,l}^s$ добавки $(u_{k,l}^{s+1} - u_{k,l}^s)$. Естественно, регулируя величину этой добавки, можно управлять итерационным процессом. Подставив в это тождество регулирующий множитель γ перед скобками и заменив в скобках $u_{k,l}^{s+1}$ ее выражением (101), получим

$$u_{k,l}^{s+1} = (1 - \gamma)u_{k,l}^s + \frac{\gamma}{4} (u_{k-1,l}^{s+1} + u_{k+1,l}^s + u_{k,l-1}^{s+1} + u_{k,l+1}^s + h^2 f_{k,l}). \quad (102)$$

Анализ собственных значений матрицы коэффициентов системы (102) показывает [12], что итерационный процесс сходится для всех γ из диапазона $0 < \gamma < 2$. При этом наиболее быстрая сходимость имеет место при некотором оптимальном значении $\gamma = \gamma_0$ ($1 < \gamma_0 < 2$). В случае равномерной сетки и прямоугольной области оптимальное значение параметра релаксации γ равно [13]:

$$\gamma_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}}, \quad (103)$$

где $\rho(B)$ — спектральный радиус матрицы коэффициентов соответствующей схемы простой итерации. Таким образом, для итерационной схемы (102) наивысшую скорость сходимости получаем при

$$\gamma_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{K} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{L} \right)^2}}. \quad (104)$$

При увеличении числа узлов разностной сетки величина $\gamma_0 \approx 2 / \left(1 + \pi \sqrt{\frac{1}{2K^2} + \frac{1}{2L^2}} \right)$ стремится к своему предельному значению 2.

Поскольку наивысшая скорость сходимости достигается при значениях $\gamma > 1$, то определенный таким способом итерационный процесс называется методом верхней релаксации. Заметим, что в некоторых случаях сходимость итераций имеет место лишь при $\gamma < 1$. Тогда итерационный процесс называют методом нижней релаксации.

Формула (103) позволяет определить оптимальное значение γ_0 по величине спектрального радиуса $\rho(B)$ матрицы коэффициентов B соответствующей схемы простой итерации. Однако определить последнюю также не всегда просто. На практике величину $\rho(B)$ чаще всего определяют приближенно путем численных экспериментов. Для этого сначала считают контрольный вариант задачи с $\gamma = 1$. Затем, следя за скоростью сходимости итераций, постепенно увеличивают γ . Как только сходимость итерационного процесса начинает замедляться, дальнейшее увеличение γ прекращают. Найденное таким образом значение γ считают оптимальным.

Заметим, что для ускорения сходимости метода верхней релаксации в начальной стадии итерационного про-

цесса целесообразно величину γ менять от шага к шагу. В методе Чебышева, например, величина параметра релаксации задается следующим образом:

$$\begin{aligned}\gamma^1 &= 1, \quad \gamma^2 = 1/(1 - 0,5\rho^2(B)), \\ \gamma^{s+1} &= 1/(1 - 0,25\rho^2(B)\gamma^s), \\ \gamma^\infty &= 2/(1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}).\end{aligned}\tag{105}$$

Здесь надстрочный индекс при величине γ соответствует номеру итерации, а $\rho(B)$ — по-прежнему спектральный радиус матрицы коэффициентов в соответствующей схеме простой итерации.

Из других итерационных методов, применяемых для решения систем разностных уравнений, наиболее перспективны, на наш взгляд, алгоритмы, основанные на методе дробных шагов [4] и позволяющие сводить решение многомерных задач математической физики к одномерным. Описание некоторых таких схем будет дано ниже.

При решении систем разностных уравнений иногда применяются блочные итерационные методы. Суть этих методов в том, что на каждом итерационном слое решение общей системы разностных уравнений сводится к решению нескольких систем меньшего порядка. И хотя сходимость итерационного процесса в блочных методах несколько выше, чем в точечных, однако по сравнению с последними блочные методы требуют на одну итерацию примерно вдвое большего числа операций. Поэтому ни один из блочных итерационных методов не обладает какими-либо преимуществами перед точечными аналогами.

В настоящее время, когда быстродействие вычислительных машин выражается в микросекундах, а их оперативные запоминающие устройства могут хранить большой объем информации, первостепенное значение приобретает простота использования численного метода.

ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2.1. Постановка задач теплопроводности

Процесс распространения тепла в неподвижной среде описывается уравнением теплопроводности, которое в общем случае имеет вид [14]

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \kappa \nabla T + Q. \quad (106)$$

Здесь $T = T(\bar{x}, t)$ — температура; c — теплоемкость единицы массы; ρ — плотность; κ — коэффициент теплопроводности; $Q = Q(\bar{x}, t)$ — плотность тепловых источников, т. е. количество тепла, выделяющегося в единицу времени в единице объема; \bar{x} — вектор, характеризующий положение точки в пространстве; t — время. Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность могут зависеть от температуры, времени и координат.

Уравнение (106) с надлежащими начальными и граничными условиями представляет задачу о распределении температуры в каждой точке рассматриваемого объема вещества для любого момента времени. Начальное распределение температуры в веществе, температурный режим на его границе, распределение и мощность расположенных в нем источников тепла обычно известны. Необходимо найти распределение температуры в последующие моменты времени.

Запишем уравнение (106) в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q. \end{aligned} \quad (107)$$

При исследовании распространения тепла в однородном веществе, теплофизические свойства которого в рассматриваемом диапазоне температуры и времени изменяются несущественно, коэффициенты c_p и κ считают постоянными

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + f. \quad (108)$$

Здесь $a = \frac{\kappa}{c_p}$ — коэффициент температуропроводности;

функция источника $f = \frac{Q}{c_p}$.

Для определения температурного поля в телах цилиндрической формы целесообразно перейти от декартовых координат к цилиндрическим

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

После выполнения замены переменных уравнение (108) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + f. \quad (109)$$

Иногда полезно использовать сферические координаты

$$x = r \sin \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \sin \psi, \quad z = r \cos \varphi,$$

в которых уравнение теплопроводности (108) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right] + f. \quad (110) \end{aligned}$$

При решении конкретных физических задач уравнение теплопроводности дополняется начальными и граничными условиями. Задается распределение температуры в веществе в какой-то момент времени $t=0$, принимаемый обычно за начало отсчета, и формулируются температурные условия на границе рассматриваемого объема. При этом на границе могут быть заданы значение температу-

ры (граничные условия первого рода), плотность теплового потока, т. е. производная от температуры по нормали к поверхности (граничные условия второго рода) или некоторое соотношение, связывающее значение температуры с величиной теплового потока (граничное условие третьего рода). В последнем случае тепловой поток часто пропорционален разности температур границы и окружающей среды

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_r = \alpha (T_r - T_0). \quad (111)$$

Здесь коэффициент теплопроводности κ , коэффициент теплоотдачи α и температура окружающей среды T_0 известны. В общем виде указанные типы граничных условий описываются формулой

$$\beta \frac{\partial T}{\partial n} + \gamma T + \sigma = 0 \quad (112)$$

и могут быть функцией времени и координат. При $\beta=0$, $\gamma \neq 0$ имеем условие первого рода, при $\beta \neq 0$, $\gamma=0$ — условие второго рода и при $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ — условие третьего рода.

Когда решается задача о теплообмене двух или более сред с различными теплофизическими свойствами, то на границе раздела сред ставятся условия сопряжения

$$\begin{aligned} T_1|_r &= T_2|_r, \\ -\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_r &= -\kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_r. \end{aligned} \quad (113)$$

Условия (113) иногда называют граничными условиями четвертого рода.

Наконец, при теплообмене излучением задаются условия, при которых плотность теплового потока пропорциональна разности четвертых степеней температур границы и окружающей среды.

Для того чтобы решение физической задачи носило обобщенный характер, последнюю приводят к безразмерному виду. При этом выделяется некоторое количество безразмерных комплексов, характеризующих ее решение. При решении задач теплопроводности в качестве безразмерной температуры часто выбирают величину $\Theta =$

$= (T - T_0) / \Delta T$, где T_0 — какое-то фиксированное значение температуры (чаще всего это температура окружающей среды), а ΔT — некоторая характерная разность температур. Если диапазон изменения температуры в рассматриваемой задаче известен заранее, то удобно выбрать $\Theta = (T - T_{\min}) / (T_{\max} - T_{\min})$. Значения Θ в этом случае будут изменяться от нуля до единицы. В качестве масштаба расстояния выбирается некоторый характерный размер задачи (длина стержня, толщина пластины, радиус трубы и т. п.).

Для примера представим в безразмерном виде уравнение (108). Введем следующие обозначения:

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad t' = \frac{at}{l^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}. \quad (114)$$

Здесь l — некоторый масштаб расстояния; $\frac{at}{l^2}$ — число Фурье. Тогда уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \varphi. \quad (115)$$

Штрихи при новых независимых переменных здесь опущены, функция источника $\varphi = \frac{l^2 f}{a}$.

Аналогичным образом приводятся к безразмерному виду и краевые условия. Условие (111), например, в переменных (114) запишется:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} + \text{Bi} \Theta = 0, \quad (116)$$

где $\text{Bi} = \frac{\alpha l}{\kappa}$ — критерий Био.

Таким образом, решение задачи (115) — (116) определяется двумя параметрами: числом Фурье и критерием Био.

2.2. Разностные алгоритмы решения простейших задач теплопроводности

Известно большое количество конечно-разностных схем, использовавшихся для решения задач теплопроводности. Многие из них описаны в работах А. А. Самарского [1], Н. Н. Яненко [4], Г. И. Марчука [5], В. К. Саульева [15], В. Вазова и Дж. Форсайта [9], Р. Д. Рихтмайера и К. В. Мортон [3]. Среди разностных алгоритмов вряд ли можно указать такой, который имел бы преимущества во всех отношениях. Каждая из разностных схем имеет свои достоинства и недостатки. Выбор численной схемы обусловлен многими причинами: спецификой решаемой задачи, особенностями вычислительной машины, опытом вычислителя и т. п.

Рассмотрим некоторые типичные разностные схемы наиболее часто употребляемые для решения задач теплопроводности. Основное внимание будем уделять алгоритмическим аспектам рассматриваемых методов. Детальное теоретическое обоснование большинства из них можно найти в работах А. А. Самарского [1], А. А. Самарского и А. В. Гулина [8].

В качестве простейшего примера рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (117)$$

Требуется найти его решение на отрезке $0 \leq x \leq 1$ для достаточно большого промежутка времени $0 \leq t \leq t_1$ при следующих краевых условиях:

$$\Theta(0, t) = a(t), \quad \Theta(1, t) = b(t), \quad \Theta(x, 0) = c(x). \quad (118)$$

Для решения этой задачи введем равномерную разностную сетку с координатами узлов (x_k, t^n) , где $x_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots, K$, $t^n = nt$, $n = 0, 1, 2, \dots, t_1/\tau$, построим разностную схему следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n}{\tau} &= \frac{\sigma}{h^2} (\Theta_{k+1}^{n+1} - 2\Theta_k^{n+1} + \Theta_{k-1}^{n+1}) + \\ &+ \frac{1 - \sigma}{h^2} (\Theta_{k+1}^n - 2\Theta_k^n + \Theta_{k-1}^n) + \varphi_k^n, \end{aligned}$$

$$\Theta_0^n = a^n, \Theta_K^n = b^n, \Theta_k^0 = c_k. \quad (119)$$

Здесь φ_k^n — сеточная функция, аппроксимирующая источник тепла $f(x, t)$; σ — произвольный вещественный параметр. Фиксируя различные значения параметра σ , получаем разностные схемы с различными свойствами.

В дальнейшем семейство разностных схем (119) будем называть схемой с весами для уравнения теплопроводности. В частности, при $\sigma=0$ имеем явную разностную схему, описанную в параграфе 1.1. Случай $\sigma=1$ соответствует так называемой схеме с опережением, а $\sigma=0,5$ — симметричной, известной как схема Кранка — Николсона [16]. Все разностные алгоритмы, получаемые при $\sigma \neq 0$, неявные. Для определения значений Θ_k^{n+1} они требуют решения системы алгебраических уравнений

$$\Theta_{k-1}^{n+1} - \left(2 + \frac{h^2}{\sigma\tau} \right) \Theta_k^{n+1} + \Theta_{k+1}^{n+1} = -F_k^n,$$

$$\Theta_0^{n+1} = a^{n+1}, \Theta_K^{n+1} = b^{n+1}, k = 1, 2, 3, \dots, K-1, \quad (120)$$

где

$$F_k^n = \frac{1-\sigma}{\sigma} (\Theta_{k-1}^n - 2\Theta_k^n + \Theta_{k+1}^n) + \\ + \frac{h^2}{\sigma\tau} \Theta_k^n + \frac{h^2}{\sigma} \varphi_k^n.$$

Наиболее рациональный способ решения систем такого вида — метод прогонки, рассмотренный в параграфе 1.6. Сначала по рекуррентным формулам

$$\alpha_k = \frac{1}{2 + \frac{h^2}{\sigma\tau} - \alpha_{k-1}}, \beta_k = (\beta_{k-1} + F_k^n) \alpha_k \quad (121)$$

вычисляем коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{K-1}$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{K-1}$. При этом учитываем то обстоятельство что на границе $x=0$ $\Theta_0^{n+1} = a^{n+1}$, а, следовательно, $\alpha_0 = 0, \beta_0 = a^{n+1}$. После определения прогоночных коэффициентов по формуле

$$\Theta_k^{n+1} = \alpha_k \Theta_{k+1}^{n+1} + \beta_k \quad (122)$$

и известному $\Theta_K^{n+1} = b^{n+1}$ последовательно определяет $\Theta_{K-1}^{n+1}, \Theta_{K-2}^{n+1}, \dots, \Theta_1^{n+1}$. Таким образом, все значения Θ_k^{n+1} на $(n+1)$ -м временном слое известны и можно перейти к вычислению значений Θ_k^{n+2} на очередном $(n+2)$ -м слое.

Исследование аппроксимации разностной схемы (119) проведенное на основе разложения точного решения дифференциальной задачи (117) — (118) в ряд Тейлора в окрестности точки (x_k, \bar{t}) , ($\bar{t} = t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + 0,5 \tau^{n+1}$), показывает [1], что она аппроксимирует последнюю на ее точном решении с погрешностью

$$\delta_h = \varphi - \bar{f} + \left[(\sigma - 0,5) \tau + \frac{h^2}{12} \right] \frac{\partial^3 \bar{\Theta}}{\partial t \partial x^2} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} + o(\tau^2 + h^4). \quad (123)$$

Здесь и далее черта над функцией означает, что ее значение берется в момент времени \bar{t} . Следовательно, при любом значении σ и $\varphi_k^n = \bar{f}_k$ разностная схема (119) имеет погрешность аппроксимации порядка $o(\tau + h^2)$. Схеме Кранка—Николсона ($\sigma=0,5$) аппроксимирует задачу (117)–(118) с погрешностью $o(\tau^2 + h^2)$. При

$$\sigma = 0,5 - \frac{h^2}{12\tau}, \quad \varphi_k^n = \bar{f}_k + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} \right)_k \quad (124)$$

имеем схему повышенного порядка точности с погрешностью аппроксимации $o(\tau^2 + h^4)$. В последнем случае при счете правая часть φ_k^n вычисляется по формуле

$$\varphi_k^n = \bar{f}_k + \frac{1}{12} (\bar{f}_{k-1} - 2\bar{f}_k + \bar{f}_{k+1}). \quad (125)$$

Условие устойчивости для разностных схем вида (119) может быть получено с помощью спектрального метода. Множитель перехода, получаемый в результате применения к ним преобразования Фурье, равен

$$\lambda(\omega) = \frac{1 - (1 - \sigma) \rho (1 - \cos \omega h)}{1 + \sigma \rho (1 - \cos \omega h)}, \quad (126)$$

где $\rho = \frac{2\tau}{h^2}$. Анализ этого выражения показывает, что при $\sigma \geq 0,5$ все разностные схемы вида (119) устойчивы при любых τ и h . Это относится, в частности, и к чисто неявной схеме, получаемой при $\sigma=1$, и к симметричной схеме, получаемой при $\sigma=0,5$. В случае $0 \leq \sigma < 0,5$ для обеспечения устойчивости необходимо выполнение неравенства

$$\frac{2\tau}{h^2} \leq \frac{1}{1-2\sigma} \left(\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} \right). \quad (127)$$

Схема повышенного порядка точности устойчива, поскольку для нее соотношение между τ и h удовлетворяет условию (127). Условная устойчивость имеет место и при $\sigma < 0$, но обычно такие значения σ не используются.

Если шаг по времени τ меняется от слоя к слою, то при счете по схеме повышенного порядка точности необходимо менять соответственно и параметр σ :

$$\sigma^{n+1} = 0,5 - \frac{h^2}{12\tau^{n+1}}. \quad (128)$$

Условие устойчивости (22) в этом случае также изменится:

$$\sigma^{n+1} \geq 0,5 - \frac{h^2}{4\tau^{n+1}}. \quad (129)$$

Точность разностного решения определяется погрешностью аппроксимации уравнений и краевых условий. При составлении разностной задачи необходимо, естественно, аппроксимировать краевые условия с такой же точностью (или точнее), как и дифференциальные уравнения.

Аппроксимация граничных условий первого рода (на границе задано решение) не составляет особых трудностей. Если границы расчетной и реальной областей совпадают, то граничные условия аппроксимируются точно. В качестве граничных берутся значения заданной функции в соответствующих точках реальной границы. Если же границы сеточной области не идентичны с реальными границами, то краевые условия для разностной задачи получаются интерполяцией и их точность определяется погрешностью интерполяции.

В рассмотренном выше случае краевые условия аппроксимировались точно. Укажем один из способов аппроксимации граничных условий третьего рода для разностной схемы с весами [1]. Приведенные ниже рассуждения справедливы и для условий второго рода.

Итак, рассмотрим вместо (118) условия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial x} &= a\Theta(0, t) + b(t), \quad a = \text{const} > 0, \\ \frac{\partial \Theta(1, t)}{\partial x} &= \tilde{a}\Theta(1, t) + \tilde{b}(t), \quad \tilde{a} = \text{const} > 0, \\ \Theta(x, 0) &= c(x).\end{aligned}\quad (130)$$

Основная трудность заключается в аппроксимации производной $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_0}{h} = \frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial x} + \left[\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Theta(0, t)}{\partial x^2} + o(h^2) \right], \quad (131)$$

аппроксимирующее ее с точностью $o(h)$, и проанализируем главные члены погрешности. В силу того что уравнение (117) справедливо в точке $x = 0$, можно записать

$$\begin{aligned}\frac{\Theta_1 - \Theta_0}{h} - \frac{h}{2} \left[\frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial t} - f(0, t) \right] &= \\ &= \frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial x} + o(h^2).\end{aligned}\quad (132)$$

Заменяя производную $\frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial x}$ аппроксимирующим ее раз-

ностным отношением $(\Theta_0^{n+1} - \Theta_0^n)/\tau$, получим в левой части формулы (132) выражение, аппроксимирующее производную

$\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ в точке $x = 0$ с погрешностью $o(h^2)$. Подставим это выражение в граничное условие и запишем последнее в виде, аналогичном разностному уравнению (119):

$$\sigma \left(\frac{\Theta_1^{n+1} - \Theta_0^{n+1}}{h} - a\Theta_0^{n+1} \right) + (1 - \sigma) \times$$

$$\times \left(\frac{\Theta_1^n - \Theta_0^n}{h} - a\Theta_0^n \right) = \frac{h}{2} \left(\frac{\Theta_0^{n+1} - \Theta_0^n}{\tau} - \varphi_0^n \right) + b^{n+\frac{1}{2}}. \quad (133)$$

Здесь φ_0^n — сеточная аппроксимация источника $f(x, t)$ в точке $x = 0$. Она определяется выбором параметра σ . Нетрудно проверить, что для каждого σ выражение (133) аппроксимирует граничное условие (132) в точке $x = 0$ с той же точностью, с которой аппроксимируется уравнение (117).^{*}

Приведем условие (133) к виду

$$\Theta_0^{n+1} = \alpha_0 \Theta_1^{n+1} + \beta_0, \quad (134)$$

удобному для вычислений. Разрешив уравнение (133) относительно Θ_0^{n+1} и сравнив соответствующие коэффициенты, получим

$$\alpha_0 = \frac{\sigma}{\sigma(1 + ah) + h^2/(2\tau)}, \quad (135)$$

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{\sigma} \left\{ (1 - \sigma) \Theta_1^n + \left[\frac{h^2}{2\tau} - (1 - \sigma)(1 + ah) \right] \times \right. \\ \left. \times \Theta_0^n + \frac{h^2}{2} \varphi_0^n - hb^{n+\frac{1}{2}} \right\}.$$

Граничное условие в точке $x = 1$ аппроксимируется аналогичным образом:

$$\Theta_{K-1}^{n+1} = \alpha_{K-1} \Theta_K^{n+1} + \beta_{K-1}, \quad \alpha_{K-1} = 1 - \tilde{a}h + \frac{h^2}{2\sigma\tau}, \quad (136)$$

$$\beta_{K-1} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \left[(1 - \sigma)(1 - \tilde{a}h) - \frac{h^2}{2\tau} \right] \Theta_K^n - \right. \\ \left. - (1 - \sigma) \Theta_{K-1}^n - \frac{h^2}{2} \varphi_K^n - h\tilde{b}^{n+\frac{1}{2}} \right\}.$$

По-видимому, небезынтересно отметить, что, как показывает опыт расчетов, разностное решение, получаемое по явной схеме ($\sigma=0$), как правило, приближается к точному решению снизу, а решение, определяемое по чисто неявной схеме ($\sigma=1$), — сверху. Очевидно, сеточ-

ные методы, использующие комбинации этих схем, более точны. С этой точки зрения наиболее целесообразно применять симметричную схему, получаемую при $\sigma=0,5$. К тому же она имеет погрешность аппроксимации порядка $o(\tau^2+h^2)$. Весьма перспективны также схемы повышенного порядка. Использование таких схем позволяет уменьшить число узлов разностной сетки, что приводит к сокращению общего времени счета.

Опыт расчетов показывает, что употребление разностных схем вида (119) предпочтительнее при решении задач с гладкими входными данными (коэффициенты, начальные условия). При быстроменяющихся или разрывных коэффициентах и начальных функциях целесообразнее, по-видимому, использовать многослойные разностные схемы. К тому же они, как правило, имеют второй порядок точности.

Для расчета задач теплообмена с успехом применяется предложенная Дюфортом и Франкелом [17] трехслойная разностная схема, которая для уравнения (117) записывается следующим образом:

$$\frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^{n-1}}{2\tau} = \frac{\Theta_{k-1}^n - \Theta_k^{n-1} - \Theta_k^{n+1} + \Theta_{k+1}^n}{h^2} + \varphi_k^n. \quad (137)$$

Это одна из немногих явных схем, обладающая свойством абсолютной устойчивости. Действительно, анализ устойчивости не дает никаких ограничений на соотношение τ и h .

Записав разностное уравнение (137) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^{n-1}}{2\tau} &= \frac{\Theta_{k-1}^n - 2\Theta_k^n + \Theta_{k+1}^n}{h^2} - \frac{\tau^2}{h^2} \times \\ &\times \frac{\Theta_k^{n-1} - 2\Theta_k^n + \Theta_k^{n+1}}{\tau^2} + \varphi_k^n, \end{aligned} \quad (138)$$

нетрудно заметить, что схема Дюфорта — Франкела аппроксимирует уравнение (117) с погрешностью $\frac{\tau^2}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + o(\tau^2 + h^2)$, т. е. аппроксимация имеет место лишь в том случае, когда τ стремится к нулю быстрее, чем h . В противном случае разностная схема аппроксимирует гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + f. \quad (139)$$

Таким образом, несмотря на то что эта схема абсолютно устойчива, для обеспечения точности порядка $o(h^2)$ шаг по времени следует выбирать равным $\tau \sim h^2$. Правда, при расчете стационарных задач, решение которых не меняется со временем, можно проводить расчеты с большими τ . Это существенно экономит время счета.

Среди других многослойных схем при решении задач теплопроводности наиболее часто применяются неявные трехслойные схемы двух видов: симметричные и несимметричные.

Однопараметрическое семейство симметричных схем записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^{n-1}}{2\tau} &= \frac{\sigma}{h^2} [(\Theta_{k+1}^{n+1} - 2\Theta_k^{n+1} + \Theta_{k-1}^{n+1}) + \\ &+ (\Theta_{k+1}^{n-1} - 2\Theta_k^{n-1} + \Theta_{k-1}^{n-1})] + (1 - 2\sigma) \times \\ &\times \frac{1}{h^2} (\Theta_{k+1}^n - 2\Theta_k^n + \Theta_{k-1}^n) + \varphi_k^n. \end{aligned} \quad (140)$$

Разностные схемы (140) при любом σ аппроксимируют дифференциальное уравнение (117) с погрешностью $o(\tau^2 + h^2)$. Однако они устойчивы лишь при $\sigma > 1/4$.

Однопараметрическое семейство несимметричных неявных трехслойных схем имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sigma}{\tau} (\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n) - \frac{\sigma}{\tau} (\Theta_k^n - \Theta_k^{n-1}) &= \\ = \frac{\Theta_{k+1}^n - 2\Theta_k^n + \Theta_{k-1}^n}{h^2} + \varphi_k^n. \end{aligned} \quad (141)$$

Разностные схемы, определяемые формулой (141), устойчивы при любом $\sigma \geq 0$. Порядок точности их зависит от величины параметра σ . При $\sigma = 0,5$ и $\varphi_k^n = f_k^{n+1}$ получаем схему с погрешностью аппроксимации $o(\tau^2 + h^2)$. Схему повышенного порядка точности $o(\tau^2 + h^4)$ имеем при

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} + \frac{h^2}{12\tau}, \quad \varphi_k^n = f_k^{n+1} + \\ &+ \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_k^{n+1} + f_k^{n+\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (142)$$

Во всех остальных случаях разностные схемы вида (141) аппроксимируют уравнение теплопроводности (117) с погрешностью $o(\tau + h^2)$.

Разностные схемы (137), (140) и (141) для вычисления Θ_k^{n+1} требуют задания значений функции Θ на двух предыдущих слоях. В начальный момент времени, например, для определения Θ_k^2 надо, кроме Θ_k^0 , знать и Θ_k^1 . Значения Θ_k^1 лучше всего определить по какой-либо двухслойной разностной схеме. Однако в тех случаях, когда величина Θ изменяется медленно или необходимо знать лишь стационарное распределение температуры, можно принять $\Theta_k^1 = \Theta_k^0$.

В случае схемы Дюфорты — Франкела разностное решение выражается в явном виде. Для получения разностного решения по неявным схемам (140) и (141) обычно применяется метод прогонки.

2.3. Решение одномерных задач теплопроводности с переменными коэффициентами

Запишем разностную схему с весами для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x, t) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + f(x, t). \quad (143)$$

По-прежнему будем считать, что решение ищется в области $D (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq t_1)$, на границах которой заданы краевые условия первого рода. Пусть коэффициент $\kappa(x, t)$ в рассматриваемой области ограничен, т. е. $M_1 \leq \kappa(x, t) \leq M_2$.

Для построения разностной схемы применим метод интерполяции, описанный в параграфе 1.5. Путем интегрирования уравнения (143) по элементарной ячейке $x_{k-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{k+\frac{1}{2}}$ составим для него уравнение баланса,

соответствующее моменту времени $\bar{t} = t^{n+\frac{1}{2}}$ [1]:

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \Theta(x, \bar{t})}{\partial t} dx = \left| \kappa(x, \bar{t}) \frac{\partial \Theta(x, \bar{t})}{\partial x} \right|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} f(x, \bar{t}) dx, \quad (144)$$

и аппроксимируем входящие в него слагаемые следующим образом:

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \Theta(x, \bar{t})}{\partial t} dx \approx h \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n}{\tau},$$

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} f(x, \bar{t}) dx \approx h f_k^{n+\frac{1}{2}}, \quad (145)$$

$$\left| \kappa(x, \bar{t}) \frac{\partial \Theta(x, \bar{t})}{\partial x} \right|_{x_{k-\frac{1}{2}}} \approx a_k \left(\sigma \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \right. \\ \left. + (1 - \sigma) \frac{\Theta_k^n - \Theta_{k-1}^n}{h} \right).$$

Здесь σ — вещественный параметр; коэффициенты a_k выражаются через функцию $\kappa(x, \bar{t})$ таким образом, чтобы обеспечить разностной схеме свойство консервативности.

После подстановки соотношений (145) в уравнение (144) получим разностную схему

$$\frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n}{\tau} = \frac{\sigma}{h} \left(a_{k+1} \frac{\Theta_{k+1}^{n+1} - \Theta_k^{n+1}}{h} - \right. \\ \left. - a_k \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_{k-1}^{n+1}}{h} \right) + \frac{(1 - \sigma)}{h} \left(a_{k+1} \frac{\Theta_{k+1}^n - \Theta_k^n}{h} - \right. \\ \left. - a_k \frac{\Theta_k^n - \Theta_{k-1}^n}{h} \right) + f_k^{n+\frac{1}{2}}. \quad (146)$$

Считаем, что краевые условия аппроксимированы точно, и рассматривать здесь их не будем. Укажем некоторые способы выбора коэффициентов a_k .

На практике консервативность разностного оператора $A_k U_{k-1} + B_k U_k + C_k U_{k+1}$ устанавливается проверкой условия

$$C_k = A_{k+1}. \quad (147)$$

Очевидно, разностная схема (146) будет консервативна, если коэффициенты a_k вычислять по одной из формул:

$$a_k = \kappa(x_{k-\frac{1}{2}}, \bar{t}), \quad a_k = \frac{1}{2} [\kappa(x_k, \bar{t}) + \kappa(x_{k-1}, \bar{t})],$$

$$a_k = \frac{2\kappa(x_k, \bar{t})\kappa(x_{k-1}, \bar{t})}{\kappa(x_k, \bar{t}) + \kappa(x_{k-1}, \bar{t})}. \quad (148)$$

Нетрудно установить, что при $\sigma = 0,5$ разностная схема (146) аппроксимирует уравнение (143) с погрешностью $o(\tau^2 + h^2)$. Если $\sigma \neq 0,5$, погрешность аппроксимации имеет порядок $o(\tau + h^2)$. Достаточное условие устойчивости для нее имеет вид [1]

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau M_2}. \quad (149)$$

следовательно, при $\sigma \geq 0,5$ разностная схема (146) абсолютно устойчива. Если $\sigma < 0,5$, то для ее устойчивости необходимо выполнение условия

$$\tau < \frac{h^2}{4(0,5 - \sigma) M_2}. \quad (150)$$

Таким образом, явная схема, получаемая при $\sigma = 0$, устойчива при $\tau \leq h^2/(2M_2)$ и пользоваться ею при больших коэффициентах теплопроводности нецелесообразно. Лучше выбирать параметр $\sigma = 0,5$. Симметричная схема, получаемая в этом случае, абсолютно устойчива и имеет второй порядок точности.

При составлении программы для счета разностную схему (146) удобно представить в виде

$$A_k \Theta_{k-1}^{n+1} - (1 + A_k + A_{k+1}) \Theta_k^{n+1} + A_{k+1} \Theta_{k+1}^{n+1} = -F_k^n,$$

$$F_k^n = \tilde{A}_k \Theta_{k-1}^n - (\tilde{A}_k + \tilde{A}_{k+1} - 1) \Theta_k^n +$$

$$+ \tilde{A}_{k+1} \Theta_{k+1}^n + \tau f_k^{n+\frac{1}{2}}, \quad (151)$$

$$A_k = \sigma \tau a_k / h^2, \quad \tilde{A}_k = (1 - \sigma) \tau a_k / h^2,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, K-1.$$

Если $\sigma > 0$, то решение этой системы при заданных граничных условиях находится методом прогонки. В случае $\sigma = 0$ оно выражается явно.

Разностная схема (146) применима и в том случае, если функции $\kappa(x, t)$ и $f(x, t)$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ имеют конечное число разрывов первого рода, в которых выполняются условия сопряжения (113). При этом разностная сетка выбирается таким образом, чтобы ее узлы совпадали с точками разрыва. Для вычисления коэффициентов a_k и правой части φ_k^n можно рекомендовать формулы

$$a_k = \kappa(x_{k-\frac{1}{2}}, \bar{t}), \quad a_k = 0,5 [\kappa(x_{k-1}+0, \bar{t}) + \kappa(x_k-0, \bar{t})],$$

$$\varphi_k^n = 0,5 [f(x_k+0, \bar{t}) + f(x_k-0, \bar{t})]. \quad (152)$$

Использование сеток, неравномерных по времени, не вносит изменений в написание расчетных формул. При применении сетки, неравномерной по пространству, они меняются незначительно:

$$A_k \Theta_{k-1}^{n+1} - \left(A_k + A_{k+1} + \frac{2}{h_k + h_{k+1}} \right) \Theta_k^{n+1} +$$

$$+ A_{k+1} \Theta_{k+1}^{n+1} = -F_k^n,$$

$$F_k^n = \tilde{A}_k \Theta_{k-1}^n - \left(\tilde{A}_k + \tilde{A}_{k+1} - \frac{2}{h_k + h_{k+1}} \right) \Theta_k^n +$$

$$+ \tilde{A}_{k+1} \Theta_{k+1}^n + 0,25 \tau (h_k + h_{k+1}) [h_k f(x_k -$$

$$- 0, \bar{t}) + h_{k+1} f(x_k + 0, \bar{t})], \quad (153)$$

$$A_k = \sigma \tau a_k / h_k, \quad \tilde{A}_k = (1 - \sigma) \tau a_k / h_k, \quad h_k = x_k - x_{k-1}.$$

2.4. Особенности решения задач в цилиндрических и сферических координатах

Некоторые особенности, встречающиеся при решении задач теплопроводности с осевой и центральной симметрией, рассмотрим на примере одномерного уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r^m} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \kappa(r, t) \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + f(r, t), \quad (154)$$

где $0 < M_1 \leq \kappa(r, t) \leq M_2$; $0 \leq r \leq R$; $t > 0$. При $m=1$ оно описывает распространение тепла в телах цилиндрической формы. Случай $m=2$ соответствует сферической геометрии. При $m=0$ оно переходит в уравнение (143) описывающее распределение температуры в прямоугольной геометрии. Уравнение (154) можно представить также в виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa(r, t) \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{m}{r} \kappa(r, t) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + f(r, t). \quad (155)$$

Нетрудно заметить, что при $m=1$ и $m=2$ оба уравнения в точке $r=0$ имеют особенность, которую необходимо учитывать при построении численной схемы. Обычно по условию задачи решение в этой точке ограничено и в силу симметрии производная

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (156)$$

Переходя к пределу и применяя правило Лопиталья, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m}{r} \kappa(r, t) \frac{\partial \Theta}{\partial r} = m \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa(0, t) \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{r=0}. \quad (157)$$

Следовательно, в точке $r=0$ вместо уравнения (154) или (155) имеем

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = (1 + m) \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa(0, t) \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + f(0, t). \quad (158)$$

Применяя интегро-интерполяционный метод, нетрудно построить схему с весами для уравнения (154). Опускаем

промежуточные выкладки, приведем лишь конечную формулу

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n}{\tau} = & \frac{2\sigma}{r_k^m (h_k + h_{k+1})} \left[a_{k+1} \left(r_k + \frac{h_{k+1}}{2} \right) \times \right. \\ & \times \frac{\Theta_{k+1}^{n+1} - \Theta_{k+1}^{n+1}}{h_{k+1}} - a_k \left(r_k - \frac{h_k}{2} \right) \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_{k-1}^{n+1}}{h_k} \left. \right] + \\ & + \frac{2(1-\sigma)}{r_k^m (h_k + h_{k+1})} \left[a_{k+1} \left(r_k + \frac{h_{k+1}}{2} \right) \times \right. \\ & \times \frac{\Theta_{k+1}^n - \Theta_k^n}{h_{k+1}} - a_k \left(r_k - \frac{h_k}{2} \right) \frac{\Theta_k^n - \Theta_{k-1}^n}{h_k} \left. \right] + \varphi_k^n. \quad (159) \end{aligned}$$

Здесь σ — вещественный параметр; $h_k = r_k - r_{k-1}$ — шаг сетки по пространству, которая выбрана здесь неравномерной; коэффициенты a_k вычисляются по формулам (148) или (152); φ_k^n — сеточная функция, аппроксимирующая функцию $f(r, t)$. В случае $m=1$ обычно принимается $\varphi_k^n = f_k^{n+1}$. При $m=2$ лучше брать [1]

$$\varphi_k^n = \left(1 + \frac{(h_k + h_{k+1})^2}{48 r_k^2} \right) f_k^{n+\frac{1}{2}}. \quad (160)$$

В точке $r=0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_0^{n+1} - \Theta_0^n}{\tau} = & \frac{2(1+m)}{h_1^2} a_1 [\sigma (\Theta_1^{n+1} - \Theta_0^{n+1}) - \\ & - (1-\sigma) (\Theta_1^n - \Theta_0^n)] + f_1^{n+\frac{1}{2}}. \quad (161) \end{aligned}$$

Разностное соотношение (161) получено в результате аппроксимации уравнения (158) с учетом условия (156). Граничное условие в точке $r=R$ аппроксимируется как обычно.

Разностная схема (159) — (161) аппроксимирует уравнение теплопроводности (154) — (158) с погрешностью $o\left(\tau + h_0^2 + \frac{mh_0^2}{r}\right)$ при любом значении $0 \leq \sigma \leq 1$ и с погреш-

ностью $o\left(\tau^2 + h_0^2 + \frac{mh_0^2}{r}\right)$ при $\sigma = 0,5$, где $h_0 = \max_k h_k$.

По условиям устойчивости она близка к схеме (146), рассмотренной в предыдущем параграфе.

Если сетка равномерна по пространству, т. е. $h_k = h_{k+1} = h$, то формула (159) существенно упрощается

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n}{\tau} &= \frac{\sigma}{k^m h^2} \left[a_{k+1} \left(k + \frac{1}{2} \right)^m \times \right. \\ &\times (\Theta_{k+1}^{n+1} - \Theta_k^{n+1}) - a_k \left(k - \frac{1}{2} \right)^m (\Theta_k^{n+1} - \Theta_{k-1}^{n+1}) \left. \right] + \\ &+ \frac{1-\sigma}{k^m h^2} \left[a_{k+1} \left(k + \frac{1}{2} \right)^m (\Theta_{k+1}^n - \Theta_k^n) - \right. \\ &\left. - a_k \left(k - \frac{1}{2} \right)^m (\Theta_k^n - \Theta_{k-1}^n) \right] + \varphi_k^n. \end{aligned} \quad (162)$$

Вид формулы (161) не изменяется. Для расчета на ЭВМ уравнение (162) удобно записать в виде

$$\begin{aligned} A_k \Theta_{k-1}^{n+1} - (A_k + A_{k+1} + k^m) \Theta_k^{n+1} + A_{k+1} \Theta_{k+1}^{n+1} &= -F_k^n, \\ F_k^n &= \tilde{A}_k \Theta_{k-1}^n - (\tilde{A}_k + \tilde{A}_{k+1} + k^m) \Theta_k^n + \\ &+ \tilde{A}_{k+1} \Theta_{k+1}^n + \tau k^m \varphi_k^n, \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned} A_k &= \sigma \tau a_k (k - 0,5)^m / h^2, \quad \tilde{A}_k = (1 - \sigma) \tau a_k (k - 0,5)^m / h^2, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, K - 1. \end{aligned}$$

При $\sigma = 0$ решение Θ_k^{n+1} выражается в явном виде. Чтобы получить его в случае $\sigma \neq 0$, необходимо решить систему алгебраических уравнений (163). Для ее решения обычно используется метод прогонки.

2.5. Метод дробных шагов

Реальные физические процессы протекают во времени и пространстве, имеющем три измерения, и это приходится учитывать при их численном исследовании. Переход к многомерным задачам не вызывает принципиальных трудностей при построении разностных алгоритмов

Почти все рассмотренные выше конечно-разностные схемы несложно обобщить на случай двух измерений и более. Однако число неизвестных в системе разностных уравнений при этом значительно возрастает (оно равно h^{-p} , где p — число измерений). Соответственно увеличивается число арифметических операций, необходимых для ее решения. В этом случае особую ценность приобретает свойство экономичности разностной схемы.

Но возрастание объема вычислительной работы при переходе к многомерным задачам связано не только с увеличением числа неизвестных и уравнений. Рассмотрим задачу Коши для простейшего двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \quad \Theta(x, y, 0) = \Phi(x, y). \quad (164)$$

Введем разностную сетку с шагами дискретизации Δx , Δy , τ по переменным x , y , t соответственно и примем обозначения

$$\begin{aligned} \Theta_{k,l}^n &= \Theta(k\Delta x, l\Delta y, n\tau), \\ \Theta_{xx} &= \frac{\Theta_{k+1,l} - 2\Theta_{k,l} + \Theta_{k-1,l}}{(\Delta x)^2}, \\ \Theta_{yy} &= \frac{\Theta_{k,l+1} - 2\Theta_{k,l} + \Theta_{k,l-1}}{(\Delta y)^2}. \end{aligned}$$

Для простоты положим, что шаги дискретизации по пространственным переменным x и y одинаковы, т. е. $\Delta x = \Delta y = h$. По аналогии с одномерным случаем для задачи (164) запишем две следующие схемы:

$$\frac{\Theta_{k,l}^{n+1} - \Theta_{k,l}^n}{\tau} = \Theta_{xx}^n + \Theta_{yy}^n, \quad (165)$$

$$\frac{\Theta_{k,l}^{n+1} - \Theta_{k,l}^n}{\tau} = \Theta_{xx}^{n+1} + \Theta_{yy}^{n+1}. \quad (166)$$

Первая из этих схем явная. Для вычисления $\Theta_{k,l}^{n+1}$ по известным значениям $\Theta_{k,l}^n$ требуется выполнить арифметические операции в количестве, пропорциональном числу неизвестных ($\sim h^{-2}$). В этом смысле явная схема неуплучшаема. Но она устойчива лишь при весьма жестких огра-

ничениях шага по времени $\left(\tau \leq \frac{h^2}{4}\right)$. Такое мелкое дробление шага τ , не связанное с требованием точности, приводит к неоправданно большим затратам машинного времени. По этой причине использование явных схем для решения одномерных и тем более многомерных задач малоэффективно.

Вторая схема неявная. Она устойчива при любых τ и h . Но для вычисления $\Theta_{k,l}^{n+1}$ необходимо решать систему $\sim h^{-2}$ уравнений.

В одномерном случае для решения подобной системы можно использовать экономичный метод скалярной прогонки. В случае двух измерений и более этот метод неприменим. Другие же методы при переходе от $\Theta_{k,l}^n$ к $\Theta_{k,l}^{n+1}$ требуют выполнения большого числа арифметических действий. Вследствие этого использование схемы (166) приводит к большому объему вычислений, что делает ее также малоэффективной.

Для решения многомерных задач математической физики в последние годы успешно применяются разностные схемы, основанные на методе дробных шагов [4]. Такие схемы сочетают положительные качества явных и неявных методов — они абсолютно устойчивы и для перехода от одного слоя к другому требуют числа арифметических операций, пропорционального числу узлов разностной сетки. Такая экономичность разностных схем, основанных на методе дробных шагов, достигается благодаря тому, что решение сложной многомерной задачи сводится к решению ряда одномерных. При этом для решения последних можно применить метод прогонки.

Изложим более подробно идею метода дробных шагов. Рассмотрим один из его вариантов — метод расщепления. Пусть требуется найти решение задачи (164) на интервале времени $t^n \leq t \leq t^{n+1}$. Допустим, что значения $\Theta(x, y, t^n)$ известны и надо определить $\Theta(x, y, t^{n+1})$.

Уравнение (164) описывает процесс распространения тепла на координатной плоскости в направлениях осей x и y . Зафиксируем промежуток времени $\tau = t^{n+1} - t^n$ условно разделим этот процесс на два этапа. На первом из них будем считать, что тепло распространяется только в направлении оси x , а на другом — только в направлении оси y . Математически это означает, что вместо реше

ния двумерной задачи (164) можно последовательно решить две одномерные:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1},$$

$$u(x, y, t^n) = \Theta(x, y, t^n),$$
(167)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1},$$

$$v(x, y, t^n) = u(x, y, t^{n+1}).$$
(168)

И действительно, используя разложение в ряд Тейлора, несложно показать, что если $\Theta(x, y, t)$ — решение задачи (164), то

$$v(x, y, t^{n+1}) = \Theta(x, y, t^{n+1}) + o(\tau^2).$$

Для решения задач (167) и (168) аппроксимируем их разностными соотношениями

$$\frac{U_{k,l}^{n+1} - U_{k,l}^n}{\tau} = U_{xx}^{n+1}, \quad U_{k,l}^n = \Theta_{k,l}^n, \quad (169)$$

$$\frac{V_{k,l}^{n+1} - V_{k,l}^n}{\tau} = V_{yy}^{n+1}, \quad V_{k,l}^n = U_{k,l}^{n+1}. \quad (170)$$

Полученную разностную схему называют схемой расщепления. Она позволяет по известным значениям $\Theta_{k,l}^n$ в два этапа определить $\Theta_{k,l}^{n+1}$. На первом этапе по заданным $U_{k,l}^n = \Theta_{k,l}^n$ вычисляем $U_{k,l}^{n+1}$, на втором по известным $V_{k,l}^n = U_{k,l}^{n+1}$ находим $V_{k,l}^{n+1} \approx \Theta_{k,l}^{n+1}$. Разностные схемы (169) и (170) неявные. Они абсолютно устойчивы и для их решения можно использовать метод прогонки.

Описанный здесь способ расщепления задачи (164) не является единственным. Возможностей здесь много. После того как разностная схема расщепления для численного решения задачи (164) построена, необходимо проверить ее на аппроксимацию и устойчивость.

2.6. Решение многомерных задач теплопроводности

В настоящее время имеется большое количество экономичных конечно-разностных схем для решения многомерных задач теплопроводности. Все они основаны на

использовании метода дробных шагов. При численном решении двумерных задач большую популярность завоевала продольно-поперечная схема, предложенная в работах [19, 20].

Пусть требуется найти решение $\theta(x, y, t)$ двумерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_1(x, y, t) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_2(x, y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + f(x, y, t) \end{aligned} \quad (171)$$

внутри прямоугольной области $D (0 \leq x \leq l_x; 0 \leq y \leq l_y)$, на границе Γ которой задано значение температуры

$$\theta|_{\Gamma} = \Phi(x, y, t). \quad (172)$$

В начальный момент времени $t = 0$ распределение температуры в области D известно

$$\theta(x, y, 0) = \Phi(x, y). \quad (173)$$

Необходимо определить значения $\theta(x, y, t)$ для любого времени $t > 0$.

Примем обозначения

$$\begin{aligned} L_x \theta &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_1(x, y, t) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \\ L_y \theta &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_2(x, y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (174)$$

и запишем уравнение (171) в более наглядном и компактном виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = L_x \theta + L_y \theta + f. \quad (175)$$

Для построения разностной схемы введем разностную сетку с координатами узлов (x_k, y_l, t^n) , где $x_k = k\Delta x$ ($k = 0, 1, 2, \dots, K$; $\Delta x = l_x/K$); $y_l = l\Delta y$ ($l = 0, 1, 2, \dots, L$; $\Delta y = l_y/L$); $t^n = n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Значение функции в узле (x_k, y_l, t^n) обозначим при помощи индексов $\theta(x_k, y_l, t^n) = \theta_{k,l}^n$. Дифференциальные опе

раторы L_x и L_y аппроксимируем соответственно разностными операторами Λ_x и Λ_y :

$$\Lambda_x \Theta = \frac{1}{\Delta x} \left[a_{k+1,l} \frac{\Theta_{k+1,l} - \Theta_{k,l}}{\Delta x} - a_{k,l} \frac{\Theta_{k,l} - \Theta_{k-1,l}}{\Delta x} \right], \quad (176)$$

$$\Lambda_y \Theta = \frac{1}{\Delta y} \left[b_{k,l+1} \frac{\Theta_{k,l+1} - \Theta_{k,l}}{\Delta y} - b_{k,l} \frac{\Theta_{k,l} - \Theta_{k,l-1}}{\Delta y} \right].$$

Коэффициенты $a_{k,l}$ и $b_{k,l}$ выберем так, чтобы при любом $t \in [t^n, t^{n+1}]$ был обеспечен второй порядок аппроксимации операторов L_x и L_y , т. е.

$$\Lambda_x \Theta = L_x \Theta + o((\Delta x)^2), \quad \Lambda_y \Theta = L_y \Theta + o((\Delta y)^2).$$

Как и в одномерном случае, для вычисления коэффициентов $a_{k,l}$, $b_{k,l}$ можно рекомендовать формулы:

$$\text{а) } a_{k,l} = \kappa_1 \left(x_{k-\frac{1}{2}}, y_l, \bar{t} \right), \quad b_{k,l} = \kappa_2 \left(x_k, y_{l-\frac{1}{2}}, \bar{t} \right), \quad (177)$$

$$\text{б) } a_{k,l} = 0,5 [\kappa_1(x_k, y_l, \bar{t}) + \kappa_1(x_{k-1}, y_l, \bar{t})],$$

$$b_{k,l} = 0,5 [\kappa_2(x_k, y_l, \bar{t}) + \kappa_2(x_k, y_{l-1}, \bar{t})],$$

$$\bar{t} = t^n + 0,5\tau.$$

Если κ_1 и κ_2 постоянные, то

$$\Lambda_x \Theta = \frac{\kappa_1}{(\Delta x)^2} (\Theta_{k+1,l} - 2\Theta_{k,l} + \Theta_{k-1,l}),$$

$$\Lambda_y \Theta = \frac{\kappa_2}{(\Delta y)^2} (\Theta_{k,l+1} - 2\Theta_{k,l} + \Theta_{k,l-1}).$$

Наряду со значениями искомой функции $\Theta_{k,l}^n$ и $\Theta_{k,l}^{n+1}$, соответствующими моментам времени t^n и t^{n+1} , рассмотрим некоторые промежуточные ее значения $\bar{\Theta}_{k,l}$. Для вычисления функции $\Theta_{k,l}^{n+1}$ построим следующую разностную схему:

$$\bar{\Theta}_{k,l} = \Theta_{k,l}^n + 0,5\tau (\Lambda_x \bar{\Theta} + \Lambda_y \Theta^n + \bar{f}_{k,l}), \quad (178)$$

$$\Theta_{k,l}^{n+1} = \bar{\Theta}_{k,l} + 0,5\tau (\Lambda_x \bar{\Theta} + \Lambda_y \Theta^{n+1} + \bar{f}_{k,l}).$$

Здесь переход от n -го временного слоя к $(n+1)$ -му осуществляется в два этапа. Сначала вычисляются промежуточные значения искомой функции $\bar{\Theta}_{k,l}$, а затем определяются $\Theta_{k,l}^{n+1}$. Первое из уравнений (178) неявно по x и явно по y , второе, наоборот, явно по x и неявно по y .

К уравнениям (178) необходимо добавить краевые условия:

$$\begin{aligned}\Theta_{k,l}^0 &= \Phi_{k,l}^0, \\ \bar{\Theta}_{k,l} &= \bar{\Phi}_{k,l} \text{ при } k=0, k=K, \\ \Theta_{k,l}^{n+1} &= \Phi_{k,l}^{n+1} \text{ при } l=0, l=L.\end{aligned}\tag{179}$$

Функция $\bar{\Phi}_{k,l} = 0,5 (\Phi_{k,l}^{n+1} + \Phi_{k,l}^n) - 0,25\tau\Lambda_y (\Phi^{n+1} - \Phi^n)$ выбирается таким образом, чтобы был обеспечен для разностной схемы (178) — (179) второй порядок точности по τ .

При реализации данной схемы в программе для ЭВМ ее удобно записать в виде

$$\begin{aligned}a_{k,l}\bar{\Theta}_{k-1,l} - \left(a_{k,l} + a_{k+1,l} + \frac{2(\Delta x)^2}{\tau} \right) \bar{\Theta}_{k,l} + \\ + a_{k+1,l}\bar{\Theta}_{k+1,l} = -F_{k,l}^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{k,l}^n = \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} \left[b_{k,l}\Theta_{k,l-1}^n - \left(b_{k,l} + b_{k,l+1} - \frac{2(\Delta y)^2}{\tau} \right) \Theta_{k,l}^n + \right. \\ \left. + b_{k,l+1}\Theta_{k,l+1}^n \right] + (\Delta x)^2 f_{k,l}^{n+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\bar{\Theta}_{0,l} = \bar{\Phi}_{0,l}, \quad \bar{\Theta}_{K,l} = \bar{\Phi}_{K,l}, \quad k=1, 2, 3, \dots, K-1; \tag{18^0}$$

$$\begin{aligned}b_{k,l}\Theta_{k,l-1}^{n+1} - \left(b_{k,l} + b_{k,l+1} + \frac{2(\Delta y)^2}{\tau} \right) \Theta_{k,l}^{n+1} + \\ + b_{k,l+1}\Theta_{k,l+1}^{n+1} = -\bar{F}_{k,l},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{k,l} = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \left[a_{k,l}\bar{\Theta}_{k-1,l} - \left(a_{k,l} + a_{k+1,l} - \frac{2(\Delta x)^2}{\tau} \right) \bar{\Theta}_{k,l} + \right. \\ \left. + a_{k+1,l}\bar{\Theta}_{k+1,l} \right] + (\Delta y)^2 f_{k,l}^{n+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\Theta_{k,0}^{n+1} = \Phi_{k,0}^{n+1}, \quad \Theta_{k,L}^{n+1} = \Phi_{k,L}^{n+1}, \quad l=1, 2, 3, \dots, L-1. \tag{18^1}$$

Если известны значения $\Theta_{k,l}^n$, то можно вычислить $F_{k,l}^n$. Зафиксировав $l = 1$, с помощью метода прогонки решаем задачу (180) и определяем $\bar{\Theta}_{k,1}$. Далее для $l = 2$ находим $\bar{\Theta}_{k,2}$ и т. д. до тех пор, пока не вычислим $\bar{\Theta}_{k,l}$ во всех узлах сетки.

После решения задачи (180) можно последовательно таким же образом решить задачу (181). Для этого, зафиксировав $k = 1$, определим $\Theta_{1,l}^{n+1}$, затем для $k = 2$ получим $\Theta_{2,l}^{n+1}$ и т. д., пока не найдем все значения искомой функции $\Theta_{k,l}^{n+1}$ на $(n + 1)$ -м временном слое. При переходе от $(n + 1)$ -го слоя к $(n + 2)$ -му процедура счета повторяется, т. е. все время происходит чередование направлений.

При исследовании устойчивости и сходимости разностных схем такого вида обычно исключают промежуточные значения $\bar{\Theta}_{k,l}$. Нетрудно установить, что разностная схема (178)—(179) аппроксимирует исходную задачу с погрешностью порядка $o(\tau^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)$. Анализ устойчивости [1] показывает, что если коэффициенты κ_1 и κ_2 не зависят от времени, т. е. $\kappa_1 = \kappa_1(x, y)$ и $\kappa_2 = \kappa_2(x, y)$, то продольно-поперечная схема (178)—(179) абсолютно устойчива. В том случае, когда κ_1 и κ_2 изменяются во времени, абсолютную устойчивость разностной схемы доказать не удается, однако численные эксперименты, проведенные для некоторых модельных задач, показывают, что она устойчива при $\tau \sim h$ ($h = \min(\Delta x, \Delta y)$).

Из других разностных методов для решения задач теплопроводности чаще употребляются экономичные схемы расщепления, стабилизации и предиктор-корректор. Первая из этих схем рассмотрена в предыдущем параграфе. Приведем здесь для уравнения (171) более точную модификацию ее, предложенную Н. Н. Яненко [4]:

$$\bar{\Theta}_{k,l} = \Theta_{k,l}^n + \tau \Lambda_x \left(\frac{\bar{\Theta} + \Theta^n}{2} \right), \quad (182)$$

$$\Theta_{k,l}^{n+1} = \bar{\Theta}_{k,l} + \tau \Lambda_y \left(\frac{\bar{\Theta} + \Theta^{n+1}}{2} \right).$$

Нетрудно установить, что эта схема абсолютно устойчива и, если операторы Λ_x и Λ_y перестановочны, имеет погрешность аппроксимации порядка $o(\tau^2 + h^2)$. В случае,

если эти операторы не коммутативны, погрешность аппроксимации имеет порядок $o(\tau + h^2)$. Структура численного алгоритма такая же, как и в продольно-поперечной схеме.

В монографии Г. И. Марчука [5] предложен следующий алгоритм:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}_{k,l} &= \Theta_{k,l}^n + \tau \Lambda_x \left(\frac{\bar{\Theta} + \Theta^n}{2} \right), \\ \Theta_{k,l}^{n+1} &= \bar{\Theta}_{k,l} + \tau \Lambda_y \left(\frac{\bar{\Theta} + \Theta^{n+1}}{2} \right) + 2\tau f_{k,l}^{n+1}, \\ \tilde{\Theta}_{k,l} &= \Theta_{k,l}^{n+1} + \tau \Lambda_y \left(\frac{\tilde{\Theta} + \Theta^{n+1}}{2} \right), \\ \Theta_{k,l}^{n+2} &= \tilde{\Theta}_{k,l} + \tau \Lambda_x \left(\frac{\tilde{\Theta} + \Theta^{n+2}}{2} \right),\end{aligned}\tag{183}$$

где $\bar{\Theta}_{k,l}$ и $\tilde{\Theta}_{k,l}$ — некоторые промежуточные значения искомой функции. Показано, что такая двухциклическая схема имеет точность второго порядка относительно τ даже в том случае, если операторы Λ_x и Λ_y не коммутативны. Опыт расчетов также подтверждает, что такое построение вычислительного алгоритма способствует улучшению точности и устойчивости разностной схемы. Разностный алгоритм (183) позволяет по известным значениям $\Theta_{k,l}^n$ определить $\Theta_{k,l}^{n+2}$, т. е. продвинуться сразу на два шага по времени τ .

Разностные схемы стабилизации и предиктор-корректор чаще используются при решении трехмерных задач и будут рассмотрены ниже.

Трудности, связанные с переходом от одномерных уравнений к двумерным, возрастают еще больше при решении трехмерных задач. Число разностных уравнений и соответственно число неизвестных в этом случае пропорционально величине h^{-3} . Следовательно, для решения таких задач требуется в h^{-1} раз больше машинного времени, чем для решения двумерных.

Приведем некоторые экономичные разностные алгоритмы для численного решения трехмерных уравнений теплопроводности следующего вида:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = L_x \Theta + L_y \Theta + L_z \Theta + f(x, y, z, t). \quad (184)$$

Здесь $L_x \Theta = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_1(x, y, z, t) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)$; $L_y \Theta = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_2(x, y, z, t) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)$; $L_z \Theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_3(x, y, z, t) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)$ — дифференциальные операторы. Требуется найти решение $\Theta(x, y, z, t)$ внутри параллелепипеда D ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$, $0 \leq z \leq l_z$), на границе Γ которого задано условие

$$\Theta|_{\Gamma} = \Phi(x, y, z, t). \quad (185)$$

Кроме того, известно распределение температуры в параллелепипеде в начальный момент времени $t = 0$

$$\Theta(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z). \quad (186)$$

Требуется определить $\Theta(x, y, z, t)$ для $t > 0$.

Для численного решения задачи (184)—(186) введем разностную сетку с шагами дискретизации $\Delta x = l_x/K$, $\Delta y = l_y/L$, $\Delta z = l_z/M$ и τ по переменным x , y , z и t соответственно. Операторы L_x , L_y , L_z , как и в двумерном случае, будем аппроксимировать следующим образом:

$$\Lambda_x \Theta = \frac{1}{\Delta x} \left[a_{k+1,l,m} \frac{\Theta_{k+1,l,m} - \Theta_{k,l,m}}{\Delta x} - a_{k,l,m} \frac{\Theta_{k,l,m} - \Theta_{k-1,l,m}}{\Delta x} \right], \quad (187)$$

$$\Lambda_y \Theta = \frac{1}{\Delta y} \left[b_{k,l+1,m} \frac{\Theta_{k,l+1,m} - \Theta_{k,l,m}}{\Delta y} - b_{k,l,m} \frac{\Theta_{k,l,m} - \Theta_{k,l-1,m}}{\Delta y} \right],$$

$$\Lambda_z \Theta = \frac{1}{\Delta z} \left[c_{k,l,m+1} \frac{\Theta_{k,l,m+1} - \Theta_{k,l,m}}{\Delta z} - c_{k,l,m} \frac{\Theta_{k,l,m} - \Theta_{k,l,m-1}}{\Delta z} \right].$$

Для определения a , b , c могут быть использованы, например, формулы

$$a_{k,l,m} = \kappa_1(x_{k-\frac{1}{2}}, y_l, z_m, \bar{t}), \quad b_{k,l,m} = \kappa_2(x_k, y_{l-\frac{1}{2}}, z_m, \bar{t}), \quad (188)$$

$$c_{k,l,m} = \kappa_3(x_k, y_l, z_{m-\frac{1}{2}}, \bar{t}), \quad \bar{t} = t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + 0,5\tau,$$

обеспечивающие разностным операторам (187) второй порядок точности относительно пространственных шагов разностной сетки.

Решение трехмерной задачи (184) — (186) может быть получено с помощью описанной выше двухциклической схемы расщепления, которая в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta_{k,l,m}^{n-\frac{2}{3}} &= \Theta_{k,l,m}^{n-1} + 0,5\tau\Lambda_x(\Theta_{k,l,m}^{n-\frac{2}{3}} + \Theta_{k,l,m}^{n-1}), \\ \Theta_{k,l,m}^{n-\frac{1}{3}} &= \Theta_{k,l,m}^{n-\frac{2}{3}} + 0,5\tau\Lambda_y(\Theta_{k,l,m}^{n-\frac{1}{3}} + \Theta_{k,l,m}^{n-\frac{2}{3}}), \\ \Theta_{k,l,m}^n &= \Theta_{k,l,m}^n + 0,5\tau\Lambda_z(\Theta_{k,l,m}^n + \Theta_{k,l,m}^{n-\frac{1}{3}}) + 2\tau f_{k,l,m}^n, \\ \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{3}} &= \Theta_{k,l,m}^n + 0,5\tau\Lambda_z(\Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{3}} + \Theta_{k,l,m}^n), \\ \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{2}{3}} &= \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{3}} + 0,5\tau\Lambda_y(\Theta_{k,l,m}^{n+\frac{2}{3}} + \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{3}}), \\ \Theta_{k,l,m}^{n+1} &= \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{2}{3}} + 0,5\tau\Lambda_x(\Theta_{k,l,m}^{n+1} + \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{2}{3}}). \end{aligned} \quad (189)$$

Система разностных уравнений решается в интервале $t^{n-1} \leq t \leq t^{n+1}$. Разностная схема имеет второй порядок точности относительно Δx , Δy , Δz , τ ; она абсолютно устойчива даже в том случае, если операторы Λ_x , Λ_y , Λ_z не коммутативны и зависят от времени. Несмотря на некоторую сложность формул, численный алгоритм удобен при реализации в программе для быстродействующей вычислительной машины. Указанные достоинства этой схемы открывают широкие возможности для применения ее к решению многомерных задач теплопроводности самого общего вида.

Для решения трехмерных задач теплопроводности иногда используется схема стабилизации, численный алгоритм которой может быть записан следующим образом [5]:

$$\begin{aligned}\Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{3}} &= 0,5\tau\Lambda_x\Theta^{n+\frac{1}{3}} + \Lambda_x\Theta^n + \Lambda_y\Theta^n + \Lambda_z\Theta^n + f_{k,l,m}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{2}{3}} &= \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{3}} + 0,5\tau\Lambda_y\Theta^{n+\frac{2}{3}}, \\ \bar{\Theta}_{k,l,m}^{n+1} &= \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{2}{3}} + 0,5\tau\Lambda_z\bar{\Theta}^{n+1}, \\ \Theta_{k,l,m}^{n+1} &= \Theta_{k,l,m}^n + \tau\bar{\Theta}_{k,l,m}^{n+1}.\end{aligned}\quad (190)$$

Метод стабилизации в случае достаточной гладкости решения имеет второй порядок точности и абсолютно устойчив, если коэффициенты исходного дифференциального уравнения не зависят от времени, а операторы Λ_x , Λ_y , Λ_z коммутируют друг с другом [5]. Функция $\Theta_{k,l,m}^{n+1}$ может быть найдена по известным значениям $\Theta_{k,l,m}^n$ последовательным решением трех неявных разностных уравнений и одного явного. Неявные уравнения (190) решаются методом прогонки.

Для решения задач теплопроводности в трехмерной постановке можно использовать метод предиктор-корректор [4]:

$$\begin{aligned}\Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{4}} &= \Theta_{k,l,m}^n + 0,5\tau\Lambda_x\Theta^{n+\frac{1}{4}}, \\ \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{2}} &= \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{4}} + 0,5\tau\Lambda_y\Theta^{n+\frac{1}{2}}, \\ \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{3}{4}} &= \Theta_{k,l,m}^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau\Lambda_z\Theta^{n+\frac{3}{4}}, \\ \Theta_{k,l,m}^{n+1} &= \Theta_{k,l,m}^n + \tau(\Lambda_x\Theta^{n+\frac{3}{4}} + \Lambda_y\Theta^{n+\frac{3}{4}} \\ &\quad + \Lambda_z\Theta^{n+\frac{3}{4}} + f_{k,l,m}^{n+\frac{1}{2}}).\end{aligned}\quad (191)$$

Здесь первые три неявных уравнения играют роль предиктора, а последнее явное служит корректором. Этот метод также имеет второй порядок точности относитель-

по шагов разностной сетки. Доказать абсолютную устойчивость его удается только при условии коммутативности операторов $\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$. Правда, численные эксперименты показывают, что даже если эти операторы не перестановочны, вычислительный процесс остается устойчивым вплоть до $\tau \sim h$ ($h = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$).

2.7. Особенности решения нелинейных задач теплопроводности

В предыдущих параграфах рассматривались линейные задачи теплопроводности, в которых коэффициенты и правая часть не зависели от температуры. Но на самом деле такая зависимость почти всегда имеет место и ее надо учитывать. Особенно большое влияние на процессы распространения тепла оказывает температурная зависимость коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в высокотемпературных процессах. Учет этой зависимости приводит к нелинейным уравнениям теплопроводности. Нелинейными уравнениями описываются и процессы распространения тепла в телах, имеющих нелинейные источники, а также в случае наличия на границе нелинейных условий теплообмена.

Для нелинейных задач метод конечных разностей — практически единственный метод, позволяющий получить их решение. Однако для таких задач еще нет достаточно общих и надежных методов исследования сходимости разностных схем. Как правило, эти исследования проводятся для линеаризованных систем, и полученные таким образом результаты трансформируются на нелинейные уравнения. Необходимо указать, что такой подход в большинстве случаев оправдан. По крайней мере условия сходимости, полученные для линеаризованных систем, очень часто при некотором их усилении оказываются достаточными и для сходимости нелинейных уравнений.

При решении нелинейных задач обычно на каждом шаге по времени строится итерационный процесс для уточнения значений коэффициентов, зависящих от решения. В этих случаях целесообразно контролировать устойчивость вычислительного процесса по числу итераций, необходимых для получения требуемой точности. Если, например, число итераций на данном временном

слой превышает заданное максимально допустимое число их $N_{\max} \sim 7-10$, временной шаг τ^n уменьшается вдвое, и счет задачи повторяется для этого же временного слоя с уменьшенным шагом $0,5 \tau^n$. Если же, наоборот, необходимая точность достигается за число итераций, меньших какого-то заданного числа N_{\min} (обычно $N_{\min}=2$ или 3), то новый временной слой считается с $\tau^{n+1}=1,3 \tau^n$. В том случае, когда число итераций S находится в пределах $N_{\min} \leq S \leq N_{\max}$, очередной $(n+1)$ -й слой считается с $\tau^{n+1}=\tau^n$.

Основные особенности конструкции разностного алгоритма для решения нелинейных дифференциальных задач рассмотрим на примере простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + f(\Theta), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \quad (192)$$

$\Theta(x, 0) = \Phi(x)$, $\Theta(0, t) = \Phi_1(t)$, $\Theta(1, t) = \Phi_2(t)$,
где $\kappa(\Theta) > 0$.

Заметим, что использование явных методов для решения задач такого вида нецелесообразно, поскольку условие их устойчивости, которое в данном случае имеет вид $\tau \leq h^2 / (2 \max \kappa(\Theta))$, требует значительного уменьшения шага по времени. Предпочтительнее применять абсолютно устойчивые неявные схемы. Рассмотрим два типа неявных разностных алгоритмов для решения задачи (192), которые довольно часто встречаются на практике:

$$\frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{k+1}(\Theta^n) \frac{\Theta_{k+1}^{n+1} - \Theta_k^{n+1}}{h} - a_k(\Theta^n) \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_{k-1}^{n+1}}{h} \right] + f(\Theta^n), \quad (193)$$

$$\frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{k+1}(\Theta^{n+1}) \frac{\Theta_{k+1}^{n+1} - \Theta_k^{n+1}}{h} - a_k(\Theta^{n+1}) \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_{k-1}^{n+1}}{h} \right] + f(\Theta^{n+1}), \quad (194)$$

где

$$a_k(\Theta) = \kappa \left(\frac{\Theta_k + \Theta_{k-1}}{2} \right).$$

Сравним эти схемы. Каждая из них имеет погрешность аппроксимации $o(\tau + h^2)$. Обе схемы абсолютно устойчивы. Схема (193) линейна относительно функции $\Theta_{k,l}^{n+1}$ на слое t^{n+1} . Определить значения функции $\Theta_{k,l}^{n+1}$ можно методом прогонки. Поскольку схема (193) абсолютно устойчива, то шаг по времени τ выбирается только из соображений точности. Схема (194) нелинейна относительно функции $\Theta_{k,l}^{n+1}$ и для ее решения необходимо строить итерационный процесс. Построим его, например, следующим образом:

$$\frac{\Theta_k^{s+1} - \Theta_k^s}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{k+1}(\Theta^s) \frac{\Theta_{k+1}^{s+1} - \Theta_k^{s+1}}{h} - a_k(\Theta^s) \frac{\Theta_k^{s+1} - \Theta_{k-1}^{s+1}}{h} \right] + f(\Theta^s). \quad (195)$$

Итерационная разностная схема (195) линейна относительно Θ_k^{s+1} . Поэтому для нахождения Θ_k^{s+1} на каждой итерации можно использовать метод прогонки. В качестве начального приближения функции Θ обычно берется ее значение, полученное на предыдущем шаге по времени, т. е. $\Theta^{s=0} = \Theta^n$. Итерационный процесс для большинства встречающихся на практике коэффициентов κ и f сходится. Практически достаточно произвести две-три итерации. Точность итераций контролируется выполнением условия

$$\frac{\max_k |\Theta_k^{s+1} - \Theta_k^s|}{\max_k |\Theta_k^{s+1}|} \leq \varepsilon, \quad (196)$$

где ε — заданная точность. Если это условие выполнено, то считают, что $\Theta_k^{s+1} = \Theta_k^{n+1}$.

Для определения функции Θ_k^{n+1} по численной схеме (194) на каждом временном слое требуется определенное число итераций. Разностный алгоритм (193) позволяет находить значения Θ_k^{n+1} сразу. Поскольку обе схемы абсолютно устойчивы и имеют одинаковый порядок погрешности аппроксимации, то казалось бы, что схема (193) лучше. Однако это не так. Численные эксперименты и практика расчетов показывают, что фактическая точность и устойчивость итерационной схемы (194) значительно выше, чем у схемы (193). При одинаковой точности

сти решения она позволяет использовать более крупный шаг по времени и, несмотря на необходимость итераций, требует меньшего времени счета.

Недостаток схемы (194) в том, что она по сравнению со схемой (193) требует в 2 раза больше памяти, так как для вычисления функции Θ_k^{n+1} необходимо сохранять не только значения Θ_k^n , но и Θ_k^s . Однако это имеет значение лишь при использовании ЭВМ с небольшим объемом оперативного запоминающего устройства.

Рассмотренные выше разностные схемы несложно обобщить на случай двух измерений и более. Общая конструкция итерационной схемы, применяемой на каждом временном слое, при этом не меняется. Не изменяется также и структура разностных схем, описанных выше для линейных задач. Дифференциальные операторы L_x , L_y , L_z аппроксимируются разностными операторами вида (187). Правда, в формулах для вычисления коэффициентов необходимо учитывать зависимость последних от решения. Например, в случае зависимости коэффициента теплопроводности κ_1 от температуры формула (188) для вычисления $a_{k,l,m}$ может быть записана следующим образом:

$$a_{k,l,m} = \kappa_1 \left(x_{k-\frac{1}{2}}, y_l, z_m, t^{n+\frac{1}{2}}, \frac{\Theta_{k-1,l,m} + \Theta_{k,l,m}}{2} \right). \quad (197)$$

Формулы для вычисления коэффициентов $b_{k,l,m}$, $c_{k,l,m}$ записываются аналогичным образом.

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

3.1. Уравнения тепловой конвекции для несжимаемых жидкостей

Выше нами рассматривались задачи о распространении тепла в неподвижных средах. Исследование теплообмена в жидких и газообразных средах существенно усложняется, так как необходимо учитывать влияние на теплообмен перемещения теплоносителя. Если в твердых телах теплообмен осуществляется вследствие молекулярной теплопроводности и излучения, то в жидкостях (в дальнейшем, если не будет оговорено противное, под термином «жидкость» будем понимать жидкие и газообразные среды) значительный вклад в теплопередачу вносит «конвективная составляющая», т. е. перенос тепла в результате перемещения теплоносителя. При этом конвективное перемещение среды может осуществляться как под действием внешних сил (вынужденная конвекция), так и вследствие разности плотностей, вызванной местным нагревом в поле силы тяжести (свободная конвекция).

Исследование процессов теплопередачи в условиях конвективного перемещения среды сводится к решению нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, которая включает уравнения законов сохранения энергии, импульса и массы, уравнение состояния и т. п. В полной постановке такая система весьма сложна, и даже приближенное ее решение удается получить далеко не во всех случаях. При изучении особенностей конвективного теплообмена обычно прибегают к разного вида упрощениям, которые, не искажая физической сути явления, позволяют исследовать его с помощью доступных методов.

Наиболее часто используется приближение, при котором исследуемая среда считается несжимаемой, а ее фи-

зические характеристики (кроме плотности) постоянны, не зависящими от температуры. Изменение плотности от температуры учитывается лишь в выражении для силы тяжести. Предполагается, что плотность не зависит от давления. Не учитывается также и изменение температуры, обусловленное выделением тепла, связанным с вязкой диссипацией. Такой подход к решению задач конвективного теплопереноса впервые был предложен Обербеком [21, 22], а затем позже существенно развит в работах Буссинеска [23]. В настоящее время в литературе это приближение известно как приближение Буссинеска. Многочисленные работы как теоретического, так и экспериментального характера подтверждают оправданность такого приближения для большинства практических задач.

Сформулируем систему уравнений конвективного теплообмена в приближении Буссинеска для обычных ньютоновских жидкостей [21, 23—26]

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \nabla^2 \bar{v} - g \beta (T - T_0), \quad (198)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T = a \nabla^2 T, \quad (199)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (200)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)], \quad (201)$$

где ρ_0 — среднее (отсчетное) значение плотности при постоянной температуре T_0 ; $\beta = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_0}$ — коэффициент теплового расширения жидкости; ν — кинематическая вязкость; $a = \kappa / (\rho_0 c_p)$ — коэффициент температуропроводности (κ — коэффициент теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость). Если в жидкости имеются источники тепла, то к правой части уравнения (199) необходимо добавить член $Q / (\rho_0 c_p)$, где Q — мощность этих источников.

Система (198) — (201) определяет четыре неизвестные функции: \bar{v} , T , P , ρ . Она решается при заданных граничных и начальных условиях, определяемых условиями задачи. Кроме параметров ν , a и $g\beta$, характеризующих теплофизические свойства жидкости, уравнения и граничные условия содержат масштабы расстояния L , темпера-

туры $\Delta T = T_1 - T_0$ и времени, характеризующего нестационарность внешних условий, τ_0 . Из этих величин можно составить три независимых безразмерных комплекса. Обычно в качестве таких комплексов выбирают параметр Грасгофа $Gr = g\beta L^3 \Delta T / \nu^2$, Прандтля $Pr = \nu / a$ и Струхала $Sh = L^2 / (\tau_0 \nu)$. Иногда вместо числа Струхала используют число Фурье $Fo = a\tau_0 / L^2$.

Заметим, что в случае, когда тепловые условия на границе области и источники тепла внутри ее не изменяются со временем, масштаб времени τ_0 не является «свободным» и критерий Струхала (Фурье) не входит в число определяющих параметров системы. Если имеются потоки, обусловленные действием внешних сил, то к указанным параметрам добавляется масштаб скорости v_1 и соответственно появляется еще один безразмерный комплекс — число Рейнольдса $Re = v_1 L / \nu$. Система уравнений (198) — (201) в плоской декартовой системе координат тогда запишется в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial P'}{\partial x} - \frac{Gr}{Re^2} \Theta \sin \varphi, \quad (202)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{Gr}{Re^2} \Theta \cos \varphi, \quad (203)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (204)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \Theta}{\partial x} - v \frac{\partial \Theta}{\partial y}. \quad (205)$$

Здесь u и v — проекции скорости на оси x и y соответственно; P' — отклонение давления от статического состояния; Θ — температура; t — время. Внешняя сила направлена под углом φ к вертикали.

В случае заданного внешнего потока с масштабом скорости v_1 система (202) — (205) описывает совместное

действие свободной и вынужденной конвекции. Режим вынужденной конвекции реализуется при $Gr=0$. Если имеет место только свободная конвекция, то масштаб скорости v_1 , не заданный в этом случае условием задачи, разумно принять равным v/L , что соответствует $Re=1$. Единицей времени тогда будет величина L^2/ν .

При численном исследовании двумерных задач конвективного теплообмена удобно исключить из системы (202) — (205) давление и ввести функцию тока ψ , связанную с компонентами скорости соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad (206)$$

и ввести функцию вихря скорости ω . Уравнение неразрывности (204) в этом случае удовлетворяется автоматически. После указанных преобразований система (202) — (207) приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \Theta}{\partial x} - v \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad (207)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \\ + \frac{Gr}{Re^2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cos \varphi \right), \end{aligned} \quad (208)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (209)$$

Уравнения (207) — (209) в литературе часто называют (Θ, ω, ψ) -системой. Нами в дальнейшем также будет применяться это название. Отметим, что поскольку $\text{div } \bar{v} = 0$, то систему (207) — (209) можно представить в следующей дивергентной форме:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re Pr} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} - u\Theta \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Re Pr} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} - v\Theta \right), \quad (210)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - u\omega \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - v\omega \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cos \varphi \right), \quad (211)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (212)$$

Для характеристики конвективного теплообмена обычно пользуются конвективным числом Нуссельта Nu^k , которое характеризует дополнительный по сравнению со случаем «чистой» теплопроводности перенос тепла вследствие перемещения теплоносителя. Оно определяется соотношением

$$\text{Nu}^k = \frac{\text{Nu}}{\text{Nu}^r}. \quad (213)$$

Здесь Nu и Nu^r — числа Нуссельта, характеризующие соответственно теплопередачу в условиях конвекции и в режиме теплопроводности.

Конвективное число Нуссельта зависит от параметров Прандтля, Грасгофа, а также Струхаля (или Фурье). В некоторых случаях для характеристики конвективного движения жидкости вместо чисел Pr и Gr можно использовать критерий Релея $\text{Ra} = \text{PrGr}$.

3.2. Пространственная аппроксимация

Большинство методов численного решения уравнений Буссинеска основано на переходе к (Θ, ω, ψ) -системе. При решении этой системы методом конечных разностей исследователь стоит перед проблемой выбора конечно-разностной схемы, обеспечивающей с требуемой точностью приближенное решение задачи при разумных затратах машинного времени. Свойства разностной схемы во многом определяются способом аппроксимации пространственных дифференциальных операторов, содержащихся в исходной системе уравнений. Ниже будут рассмотрены некоторые характерные способы пространственной аппроксимации (Θ, ω, ψ) -системы.

Структура уравнений (Θ, ω, ψ) -системы при выяснении пространственных аппроксимационных свойств раз-

ностных схем позволяет ограничиться изучением аппроксимации оператора вида

$$L_x \Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - u \Phi \right) \text{ или}$$

$$L_y \Phi = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - v \Phi \right). \quad (214)$$

Для простоты будем считать, что выбрана квадратная сетка с координатами узлов ($x_k = kh$, $y_l = lh$).

Анализ литературных данных показывает, что при численном исследовании задач конвективного теплообмена наиболее часто используется симметричная аппроксимация вида [28—37]

$$L_x \approx \Lambda_x = \frac{1}{\rho h^2} (\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}) - \frac{u_k}{2h} (\Phi_{k+1} - \Phi_{k-1}). \quad (215)$$

Для краткости и большей наглядности формул второй индекс здесь опущен.

Разлагая функции Φ_{k+1} и Φ_{k-1} в ряд Тейлора в окрестности точки x_k и подставляя полученные разложения в (215), нетрудно показать, что выражение (215) аппроксимирует дифференциальный оператор L_x с погрешностью порядка $o(h^2)$.

Для такой аппроксимации пространственных дифференциальных операторов характерны простота, наглядность и относительно высокий порядок точности. Опыт расчетов показывает, что разностные схемы, основанные на симметричной аппроксимации пространственных производных, могут успешно применяться для решения широкого круга задач теплообмена в условиях слабой и умеренной конвекции ($Ra \leq 10^5$). Правда, схемы, использующие аппроксимацию (215), не обладают свойством консервативности (это легко установить, суммируя разностные уравнения по всем узлам сетки), что приводит к нарушению законов сохранения, присущих исходным дифференциальным уравнениям. Однако при небольших числах Релея ($Ra \leq 10^4$), а также при равномерном подводе тепла к области это не очень заметно.

Используя интегро-интерполяционный метод, нетрудно построить консервативную симметричную аппроксимацию оператора L_x .

Принтегрируем $L_x \Phi$ по элементарной ячейке $(x_{k-\frac{1}{2}},$

$x_{k+\frac{1}{2}})$:

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{P} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - u \Phi \right) dx = \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} -$$

$$- u \Phi \Big|_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{P} \left(\frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{h} - \frac{\Phi_k - \Phi_{k-1}}{h} \right) -$$

$$- \left(u_{k+\frac{1}{2}} \Phi_{k+\frac{1}{2}} - u_{k-\frac{1}{2}} \Phi_{k-\frac{1}{2}} \right). \quad (216)$$

Положив $\Phi_{k\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\Phi_k + \Phi_{k\pm 1})$, получим

$$\Lambda_x \Phi = \frac{1}{Ph^2} (\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}) -$$

$$- \frac{1}{2h} \left[u_{k+\frac{1}{2}} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) - u_{k-\frac{1}{2}} (\Phi_k - \Phi_{k-1}) \right]. \quad (217)$$

Несложно проверить, что такая аппроксимация оператора L_x действительно обладает свойством консервативности и имеет погрешность порядка $o(h^2)$. Для вычисления значений компонент скорости можно рекомендовать формулу

$$u_{k-\frac{1}{2}, l} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{k-\frac{1}{2}, l} = \frac{1}{h} (\psi_{k-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} -$$

$$- \psi_{k-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4h} (\psi_{k-1, l+1} + \psi_{k, l+1} - \psi_{k-1, l-1} - \psi_{k, l-1}). \quad (218)$$

Наряду с отмеченными преимуществами симметричные аппроксимации (215) и (217) имеют существенный недостаток — они немонокотны, поскольку не всегда удовлетворяют принципу максимума. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно записать эти приближения в виде $A_k \Phi_{k-1} -$

$-B_k \Phi_k + C_k \Phi_{k+1} = [F_k]$. Условия монотонности ($A_k > 0$, $C_k > 0$, $B_k \geq A_k + C_k$) будут удовлетворены лишь при

$$h < \frac{2}{P \max_{k,l} (|u_{k,l}|, |v_{k,l}|)}. \quad (219)$$

Это значительно сужает область применимости разностных схем, основанных на симметричной аппроксимации пространственных производных. Опыт расчетов показывает, что при числах Релея $Ra > 10^6$, соответствующих высокоинтенсивным конвективным процессам, получить численное решение практически невозможно из-за ограничений, накладываемых условием (219) на величину пространственного шага сетки.

Трудности, связанные с немонотонным характером симметричной аппроксимации пространственных производных, исчезают при переходе к односторонним разностям. Разностные схемы, использующие несимметричную аппроксимацию пространственных производных, широко применяются в вычислительной практике. Весьма популярна у исследователей монотонная аппроксимация вида [38—44]

$$\begin{aligned} \Delta_x \Phi = & \frac{1}{Ph^2} (\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}) - \\ & - u_k^- \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{h} - u_k^+ \frac{\Phi_k - \Phi_{k-1}}{h}. \end{aligned} \quad (220)$$

Здесь и далее используется обозначение

$$u_{k,l}^- = \frac{u_{k,l} - |u_{k,l}|}{2}, \quad u_{k,l}^+ = \frac{u_{k,l} + |u_{k,l}|}{2}. \quad (221)$$

Такая аппроксимация не приводит к ограничениям пространственных шагов сетки по устойчивости и допускает проведение расчетов при высоких скоростях конвективного перемещения среды. Однако разностные схемы, основанные на приближении (220), имеют погрешность аппроксимации порядка $o(h)$ и для обеспечения удовлетворительной точности требуют применения мелкой сетки.

Применяя разложение в ряд Тейлора, нетрудно показать, что главный член погрешности в формуле (220) имеет вид

$$0,5h |u_k| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx o(h). \quad (222)$$

Величину $0,5h |u_k|$ часто называют разностным числом Рейнольдса Re_h . Это один из важнейших критериев численного решения задач вязкой жидкости. Таким образом, можно записать

$$\frac{1}{P h^2} (\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}) - u_k^- \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{h} - u_k^+ \frac{\Phi_k - \Phi_{k-1}}{h} = L_x \Phi + Re_h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + o(h^2). \quad (223)$$

Следовательно, в результате решения разностной задачи получается решение, фактически соответствующее не исходному оператору $L_x \Phi$, а оператору $L'_x \Phi = \left(\frac{1}{P} + Re_h \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - u \Phi$, т. е. при такой аппроксимации пространственных производных искусственно вводится в уравнение дополнительная вязкость Re_h . Разностные схемы такого вида иногда называют схемами с аппроксимационной (счетной) вязкостью [3, 9]. Естественно, решение разностной задачи будет соответствовать исходной дифференциальной, если аппроксимационная вязкость невелика.

А. А. Самарским [45] предложена монотонная аппроксимация второго порядка точности

$$\Lambda_x \Phi = \frac{\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}}{Ph^2 (1 + 0,5Ph |u_k|)} - u_k^- \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{h} - u_k^+ \frac{\Phi_k - \Phi_{k-1}}{h}. \quad (224)$$

Следует отметить, что хотя аппроксимация (224) формально и имеет погрешность порядка $o(h^2)$, необходимо осторожно оценивать точность результатов, полученных с ее помощью. Действительно, главный член погрешности аппроксимации равен

$$\frac{Re_h^2}{1 + Re_h} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx o(h^2). \quad (225)$$

При увеличении разностного числа Рейнольдса коэффициент перед второй производной стремится к величине Re_h , т. е. при больших Re_h разностная схема имеет погрешность аппроксимации порядка $o(h)$. Так, уже при $Re_h \sim 10$ отличие формул (222) и (225) составляет не более 10%. Однако на практике величина Re_h имеет довольно сложное локальное распределение и изменяется от нуля до $Re_{h \max}$. Анализ эффектов, вносимых монотонной аппроксимацией (224), проведенный для некоторых модельных задач конвективного теплообмена [27], показывает, что точность решения будет удовлетворительной при значениях $Re_{h \max} < 10$.

Разностные схемы, использующие аппроксимации (220) и (224), не обладают свойством консервативности и при больших значениях $u(v)$ заметно искажают балансы тепловых потоков, энергии и т. п. Применяя интегрирующе-интерполяционный метод, можно построить монотонные консервативные аппроксимации оператора $L_x \Phi (L_y \Phi)$. Для этого в выражении (216), полученном в результате интегрирования оператора $L_x \Phi$ по элементарной ячейке $(x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}})$, при аппроксимации $\Phi_{k-\frac{1}{2}}$ и $\Phi_{k+\frac{1}{2}}$ необходимо поставить условия, которые исключали бы нарушение монотонности при всех значениях h . Такие условия, очевидно, будут определяться направлением вектора скорости, т. е. знаком u . Действительно, если в формуле (216) заменить

$$u_{k+\frac{1}{2}} \Phi_{k+\frac{1}{2}} - u_{k-\frac{1}{2}} \Phi_{k-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{k+\frac{1}{2}} \Phi_k - u_{k-\frac{1}{2}} \Phi_{k-1} & \text{при } u > 0, \\ u_{k+\frac{1}{2}} \Phi_{k+1} - u_{k-\frac{1}{2}} \Phi_k & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (226)$$

то получим монотонную консервативную аппроксимацию

$$\Lambda_x \Phi = \frac{1}{Ph^2} (\Phi_{k-1} - 2\Phi_k + \Phi_{k+1}) - \frac{1}{h} \left[(u_{k+\frac{1}{2}}^+ \Phi_k - u_{k-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{k-1}) + (u_{k+\frac{1}{2}}^- \Phi_{k+1} - u_{k-\frac{1}{2}}^- \Phi_k) \right]. \quad (227)$$

Выражение (227) аппроксимирует оператор $L_x \Phi$ с погрешностью $o(h)$. Для повышения порядка погрешности аппроксимации воспользуемся стандартным приемом. На основе разложения функции Φ в ряд Тейлора в окрестности k -го узла сетки получим выражение для старшего члена погрешности

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(|u| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \approx o(h). \quad (228)$$

При построении аппроксимационной формулы учтем его с обратным знаком, не нарушая при этом консервативности и монотонности. Опуская несложные промежуточные выкладки, приведем лишь конечную формулу [46—49]

$$\begin{aligned} \Lambda_x \Phi = & \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{Rh^2(1 + 0,5Rh|u_{k+\frac{1}{2}}|)} - \frac{\Phi_k - \Phi_{k-1}}{Rh^2(1 + 0,5Rh|u_{k-\frac{1}{2}}|)} - \\ & - \frac{1}{h} \left[\left(u_{k+\frac{1}{2}}^+ \Phi_k - u_{k-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{k-1} \right) + \right. \\ & \left. + \left(u_{k+\frac{1}{2}}^- \Phi_{k+1} - u_{k-\frac{1}{2}}^- \Phi_k \right) \right]. \quad (229) \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов $u_{k \pm \frac{1}{2}}$ целесообразно использовать формулу (218). Заметим, что, положив в выражении (229) $u_{k+\frac{1}{2}} = u_{k-\frac{1}{2}} = u_k$, получим монотонную аппроксимацию (224). Нетрудно проверить, что приближение (229) обладает свойством монотонности и консервативности. По аппроксимационным свойствам оно близко к приближению (224). Однако использование формулы (229) предпочтительнее, поскольку она более точно отражает физическую суть решения исходной дифференциальной задачи.

3.3. Граничные условия для вихря скорости

Рассмотрим некоторые особенности численного решения (Θ, ω, ψ) -системы, связанные с представлением уравнения движения в виде двух уравнений для завихренности и функции тока. Такой подход получил широкое распространение и успешно используется при решении задач конвективного теплообмена и гидродинамики.

Для определенности будем рассматривать в дальнейшем внутренние задачи, т. е. будем считать, что решение необходимо получить внутри какой-то замкнутой области. Заметим, что внешние задачи при решении методом сеток обычно также сводятся к внутренним введением новых переменных.

Одна из основных трудностей, которая возникает при численном решении (Θ, ω, ψ) -системы, связана с постановкой граничных условий для функции ω . Действительно, в данном случае решение (Θ, ω, ψ) -системы должно удовлетворять лишь заданным граничным условиям для скорости (или, что то же самое, для функции ψ) и для температуры. Функция же завихренности определена только внутри рассматриваемой области и не определена на ее границе. Однако для получения численного решения методом сеток формально требуется, чтобы граничные условия для функции ω были заданы.

Избежать указанных сложностей можно несколькими путями. Один из наиболее распространенных заключается в том, что значения ω на границе находятся приближенно в ходе счета, причем для этого используются значения ψ в ближайших к границе узлах сетки. Формулы для приближенного вычисления граничных значений завихренности ω могут быть получены либо разложением в ряд Тейлора функции тока ψ в окрестности граничных точек, либо из уравнения Пуассона для функции тока в предположении, что оно справедливо на границе области. В обоих случаях учитываются граничные условия для функции тока.

Для примера рассмотрим случай, когда рассматриваемый участок границы совпадает с осью x , т. е. лежит на прямой $y=0$ (в декартовой системе координат), а расчетная область расположена выше ее. Пусть на этом участке границы заданы следующие граничные условия для функции тока:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = a(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = b(x), \quad (230)$$

т. е. заданы обе компоненты скорости. Получим простейшую приближенную формулу для определения завихренности на этом участке границы.

Будем считать, что шаг дискретизации по переменной y постоянен и равен h . Выберем на границе произвольную

точку с координатами $(x_h, 0)$. Чтобы получить формулу для вычисления $\omega_{h,0}$, разложим в ряд Тейлора функцию $\psi(x, y)$ по y в окрестности приграничной точки (x_h, h) :

$$\psi_{h,1} = \psi_{h,0} + h \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{k,0} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{k,0} + o(h^3). \quad (231)$$

Предположив, что уравнение Пуассона для функции тока выполняется на границе, находим

$$\omega_{h,0} = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{k,0} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{k,0} = - \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)_{k,0} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{k,0}. \quad (232)$$

Подставляя полученное из (231) выражение для $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{k,0}$ в формулу (232), имеем

$$\omega_{h,0} = \frac{2}{h} (\psi_{k,0} - \psi_{k,1}) + \frac{2}{h} b_{k,0} - \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)_{k,0} + o(h). \quad (233)$$

Здесь отброшены члены старше второго порядка относительно h , а производная $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{k,0}$ заменена на $b_{k,0}$. При $a(x) \equiv b(x) \equiv 0$ получаем известное условие Тома [50].

Аппроксимируя более точно член $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$, можно повысить порядок точности условия (233). При решении задач конвективного теплообмена наиболее часто используется условие Вудса [51]

$$\omega_{h,0} = \frac{3}{h^2} (\psi_{k,0} - \psi_{k,1} + hb_{k,0}) - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)_{k,0} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right)_{k,0} - \frac{\omega_{h,1}}{2} + o(h^2) \quad (234)$$

и условие, полученное Т. В. Кусковой [52]:

$$\omega_{h,0} = \frac{1}{2h^2} (7\psi_{k,0} - 8\psi_{k,1} + \psi_{k,2}) +$$

$$+ \frac{3}{h} a_{k,0} - \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_{k,0} + o(h^2). \quad (235)$$

Формула (235) предпочтительнее для практических расчетов. К тому же численные эксперименты показывают [53], что она обеспечивает более высокую скорость сходимости, чем условие (234). Это, по-видимому, связано с тем, что условие (235) в отличие от (234) для расчета граничных значений завихренности привлекает лишь значения функции ψ , процесс установления которой быстрее, чем функции ω . Однако если градиенты скорости и температуры в приграничной зоне велики, то условие (234) точнее, поскольку оно определено на более узком шаблоне.

Учитывая в разложении (231) члены порядка $o(h^3)$, можно получить формулы третьего порядка точности относительно h для вычисления граничных значений завихренности. Вывод одной из таких формул приведен в работе [54]. Формулы с погрешностью $o(h^3)$, соответствующие условиям прилипания $a(x) = b(x) = 0$, даны в работе [55].

Из других способов определения граничных условий для завихренности следует отметить метод, основанный на применении итерационного процесса:

$$\omega_{k,0}^{s+1} = \omega_{k,0}^s + \sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{k,0}. \quad (236)$$

В общем случае итерационным параметром σ может служить любой оператор, обеспечивающий сходимость итерационного процесса. Такое определение граничных условий для функции ω было впервые предложено А. А. Дородницыным и Н. А. Меллер [56]. Однако они использовали несколько иную интерпретацию этого условия, основанную на введении малого параметра.

Все описанные выше способы определения завихренности на границе носят локальный характер и в силу этого отрицательно влияют на устойчивость вычислительного процесса. Особенно ярко это проявляется при применении экономичных неявных разностных схем. Погрешности, связанные с аппроксимацией граничных условий, в этом случае приводят к таким ограничениям по устойчивости, при которых эти схемы по эффективности ста-

новятся сравнимыми с простейшими явными схемами [27].

Более перспективен, на наш взгляд, другой подход к решению проблемы граничных условий для завихренности, при котором значения функции ω на границе вообще не используются. Такая методика решения (Θ, ω, ψ) -системы предложена В. Л. Грязновым и В. И. Полежаевым [27, 57]. Методические расчеты подтвердили ее высокую эффективность.

Суть этого способа решения (Θ, ω, ψ) -системы состоит в следующем. При постановке задач конвективного теплообмена на границе расчетной области обычно задаются значения функции тока ψ и ее нормальной производной $\frac{\partial \psi}{\partial n}$. Условию прилипания соответствует, например, $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$. Основная идея предлагаемого способа — обеспечить выполнение граничного условия для функции тока на каждом временном (итерационном) слое. Достигается это соответствующим подправлением значений ψ в точках границы.

Допустим, что для получения численного решения (Θ, ω, ψ) -системы построена какая-то разностная схема, состоящая из разностных уравнений для функции тока, завихренности и температуры. Значения функций Θ, ω и ψ на n -м временном слое известны. Тогда вычислительный алгоритм для определения $\Theta_{k,l}^{n+1}, \omega_{k,l}^{n+1}, \psi_{k,l}^{n+1}$ строится следующим образом.

1. Из разностного уравнения для функции тока

$$\omega_{k,l}^{n+1} = \frac{\psi_{k+1,l}^n - 2\psi_{k,l}^n + \psi_{k-1,l}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{\psi_{k,l+1}^n - 2\psi_{k,l}^n + \psi_{k,l-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (237)$$

определяются значения $\omega_{k,l}^{n+1}$ в приграничных точках разностной сетки (внутренних узлах, отстоящих от границ на расстоянии в один шаг сетки).

2. Принимая найденные таким образом значения $\omega_{k,l}^{n+1}$ за граничные, решается разностное уравнение для завих-

ренности и вычисляются значения $\omega_{k,l}^{n+1}$ внутри этой уменьшенной области.

3. Решая разностное уравнение для функции тока в предположении, что на основной границе значения $\psi_{k,l}^{n+1}$ заданы, определяются значения функции тока $\psi_{k,l}^{n+1}$ внутри основной области.

4. Подправляются значения функции тока на границе уменьшенной области таким образом, чтобы выполнялось условие на $\frac{\partial \psi}{\partial n}$.

Так, например, пусть на основной границе заданы условия прилипания $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ и производная $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ аппроксимируется выражением

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 = -\frac{1}{2h} (3\psi_0 - 4\psi_1 + \psi_2) + o(h^2). \quad (238)$$

Тогда для выполнения этих условий необходимо, чтобы $\psi_1 = 0,25\psi_2$, $\psi_0 = 0$. Если для аппроксимации производной $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ использовать формулу третьего порядка точности относительно h

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 = -\frac{1}{6h} (11\psi_0 - 18\psi_1 + 9\psi_2 - 2\psi_3) + o(h^3), \quad (239)$$

то условия прилипания выполняются при $\psi_1 = \frac{1}{2} \psi_2 - \frac{1}{9} \psi_3$, $\psi_0 = 0$.

5. Решается разностное уравнение для температуры и определяются значения $\Theta_{k,l}^{n+1}$. Далее весь цикл повторяется.

Несомненным достоинством этого метода является его высокая вычислительная устойчивость. Особенно эффективен он при использовании устойчивых неявных разностных схем, поскольку допускает проведение расчетов с большими шагами по времени.

3.4. Решение уравнения Пуассона для функции тока

Введение функции тока ψ и завихренности ω при численном интегрировании уравнений движения приводит к необходимости решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (240)$$

Имеется много методов численного решения этого уравнения. Рассмотрим два итерационных алгоритма, которые наиболее часто применяются в вычислительной практике при решении (Θ, ω, ψ) -системы. Оба алгоритма имеют достаточно высокую скорость сходимости и относительно просты для программной реализации их на ЭВМ.

Более полный обзор алгоритмов численного решения уравнений Пуассона дан в работах [1, 10, 12, 58].

Пожалуй, наиболее часто при численном исследовании задач конвективного теплообмена для решения уравнения Пуассона (240) используется итерационный метод Зейделя в сочетании с последовательной верхней релаксацией. Расчетная формула для получения численного решения записывается в разностном виде

$$\begin{aligned} \psi_{k,l}^{s+1} = (1 - \gamma) \psi_{k,l}^s + \frac{\gamma}{4} (\psi_{k+1,l}^s + \psi_{k-1,l}^{s+1} + \psi_{k,l+1}^s + \\ + \psi_{k,l-1}^{s+1} + h^2 \psi_{k,l}^{n+1}). \end{aligned} \quad (241)$$

Здесь s — номер итерации; γ — релаксационный параметр; n — номер временного слоя (внешнего итерационного цикла); h — пространственный параметр сетки. За начальное приближение обычно принимаются значения $\psi_{k,l}^n$, полученные на предыдущем шаге по времени. Итерационный процесс прекращается при выполнении условия

$$\begin{aligned} \max_{k,l} \left| \frac{1}{h^2} (\psi_{k+1,l}^{s+1} + \psi_{k-1,l}^{s+1} + \psi_{k,l+1}^{s+1} + \psi_{k,l-1}^{s+1} - \right. \\ \left. - 4\psi_{k,l}^{s+1}) + \omega_{k,l}^{n+1} \right| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (242)$$

ИЛИ

$$\frac{\max_{k,l} |\psi_{k,l}^{s+1} - \psi_{k,l}^s|}{\max_{k,l} |\psi_{k,l}^{s+1}|} \leq \varepsilon_\psi \quad (243)$$

и полагается, что $\psi_{k,l}^{s+1} = \psi_{k,l}^{n+1}$.

Оптимальная величина релаксационного параметра γ изменяется в интервале $1 < \gamma < 2$ и может быть определена путем численных экспериментов. Для области прямоугольного вида и регулярной сетки оптимальное значение γ вычисляется по формуле [59]:

$$\gamma = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \pi \Delta x + \cos \pi \Delta y}{2} \right)^2}} \quad (244)$$

В случае квадратной сетки $\Delta x = \Delta y = h$

$$\gamma = \frac{2}{1 + \sin \pi h} \quad (245)$$

При решении (Θ, ω, ψ) -системы методом установления в начальной стадии счета для достижения точности $\varepsilon_\psi \sim 10^{-3}$ обычно требуется 10—20 итераций. По мере установления стационарного режима число необходимых итераций сокращается до 1—3. Важное преимущество этого метода в том, что для своей реализации в программе он требует минимального объема машинной памяти.

Для вычисления функции тока часто применяется итерационный процесс, основанный на методе дробных шагов. Численный алгоритм решения в этом случае разбивается на два этапа:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{h,l} = \psi_{k,l}^s + \frac{\tau'}{2} \left(\frac{\bar{\psi}_{k+1,l} - 2\bar{\psi}_{k,l} + \bar{\psi}_{k-1,l}}{h^2} + \right. \\ \left. + \frac{\psi_{k,l+1}^s - 2\psi_{k,l}^s + \psi_{k,l-1}^s}{h^2} + \omega_{k,l}^{n+1} \right), \end{aligned} \quad (246)$$

$$\begin{aligned} \psi_{k,l}^{s+1} = \bar{\psi}_{h,l} + \frac{\tau'}{2} \left(\frac{\bar{\psi}_{k+1,l} - 2\bar{\psi}_{k,l} + \bar{\psi}_{k-1,l}}{h^2} + \right. \\ \left. + \frac{\psi_{k,l+1}^{s+1} - 2\psi_{k,l}^{s+1} + \psi_{k,l-1}^{s+1}}{h^2} + \omega_{k,l}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Здесь τ' — итерационный параметр. Неявные уравнения системы (246) решаются методом прогонки. Рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов прогонки для первого уравнения имеют вид

$$\alpha_k = \frac{1}{2 + \frac{2h^2}{\tau'} - \alpha_{k-1}}, \quad \beta_k = (\beta_{k-1} + \bar{F}) \alpha_k, \quad (247)$$

$$\bar{F} = \psi_{k,l+1}^s + \left(\frac{2h^2}{\tau'} - 2 \right) \psi_{k,l}^s + \psi_{k,l-1}^s + h^2 \omega_{k,l}^{n+1}.$$

Решение $\bar{\psi}_{k,l}$ определяется по формуле

$$\bar{\psi}_{k,l} = \alpha_k \bar{\psi}_{k+1,l} + \beta_k, \quad \bar{\psi}_{K,l} = 0. \quad (248)$$

Для второго уравнения

$$\alpha_l = \frac{1}{2 + \frac{2h^2}{\tau'} - \alpha_{l-1}}, \quad \beta_l = (\beta_{l-1} + F) \alpha_l, \quad (249)$$

$$F = \bar{\psi}_{k+1,l} + \left(\frac{2h^2}{\tau'} - 2 \right) \bar{\psi}_{k,l} + \bar{\psi}_{k-1,l} + h^2 \omega_{k,l}^{n+1}.$$

Решение $\psi_{k,l}^{s+1}$ вычисляется по рекуррентному выражению

$$\psi_{k,l}^{s+1} = \alpha_l \psi_{k,l+1}^{s+1} + \beta_l, \quad \psi_{k,L} = 0. \quad (250)$$

Как и в первом способе, точность итерационного процесса (246) контролируется условием (242) или (243).

В обоих случаях имеет место аппроксимация порядка $o(h^2)$. Второй способ решения уравнения (240) хотя и более трудоемок, однако его использование предпочтительнее, поскольку скорость сходимости итерационного процесса у него при разумном выборе параметра τ' примерно в 1,5 раза выше, чем у метода Зейделя [1].

При исследовании нестационарных задач, когда точное решение необходимо получить для всего временного интервала, на каждом временном слое уравнение Пуассона решается с постоянной точностью ϵ_ψ . Величина ϵ_ψ задается в соответствии с точностью, с которой вычисляются функции Θ и ω .

При решении стационарных задач, когда процесс установления стационарного режима не представляет интереса и важно, чтобы заданную точность ε_ψ имело лишь стационарное решение, задавать величину ε_ψ постоянной нецелесообразно, поскольку в начальной стадии счета это приводит к неоправданному увеличению машинного времени. По-видимому, разумно точность решения уравнения (240) устанавливать в соответствии с точностью, достигнутой к данному моменту функциями Θ и ω . Например, можно задать

$$\varepsilon_\psi = \min(\varepsilon_\Theta, \varepsilon_\omega), \quad (251)$$

где

$$\varepsilon_\Theta = \max_{k,l} |\Theta_{k,l}^{n+1} - \Theta_{k,l}^n| / \max_{k,l} |\Theta_{k,l}^{n+1}|;$$

$$\varepsilon_\omega = \max_{k,l} |\omega_{k,l}^{n+1} - \omega_{k,l}^n| / \max_{k,l} |\omega_{k,l}^{n+1}|.$$

Численные эксперименты показывают, что для получения такой точности на каждом шаге по времени требуется не более трех-четырёх итераций.

3.5. Явные схемы

Наиболее простые способы численного решения (Θ, ω, ψ) -системы основываются на использовании явных схем. Благодаря простоте численного алгоритма они позволяют в короткий срок составить и отладить программу расчета на ЭВМ и получить численное решение. Однако необходимо отметить, что явные разностные схемы неэкономичны и для расчета одного варианта задачи требуют относительно больших затрат машинного времени. Но если количество вариантов невелико, то проигрыш в увеличении времени счета возмещается сокращением сроков подготовки и отладки программы расчета.

Особенно часто используется явная разностная схема, основанная на симметричной аппроксимации пространственных производных (215) [28—36]. Разностный алгоритм для вычисления приближенного решения при этом записывается следующим образом:

$$\frac{\Theta_{k,l}^{n+1} - \Theta_{k,l}^n}{\tau} = \frac{1}{\text{Pr}h^2} (\Theta_{k+1,l}^n - 2\Theta_{k,l}^n + \Theta_{k-1,l}^n) -$$

$$- u_{k,l}^n \frac{\Theta_{k+1,l}^n - \Theta_{k-1,l}^n}{2h} + \frac{1}{\text{Pr}h^2} (\Theta_{k,l+1}^n - 2\Theta_{k,l}^n +$$

$$+ \Theta_{k,l-1}^n) - v_{k,l}^n \frac{\Theta_{k,l+1}^n - \Theta_{k,l-1}^n}{2h}, \quad (252)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{k,l}^{n+1} - \omega_{k,l}^n}{\tau} &= \frac{1}{h^2} (\omega_{k+1,l}^n - 2\omega_{k,l}^n + \omega_{k-1,l}^n) - \\ &- u_{k,l}^n \frac{\omega_{k+1,l}^n - \omega_{k-1,l}^n}{2h} - \frac{1}{h^2} (\omega_{k,l+1}^n - 2\omega_{k,l}^n + \\ &+ \omega_{k,l-1}^n) - v_{k,l}^n \frac{\omega_{k,l+1}^n - \omega_{k,l-1}^n}{2h} + \text{Gr} \frac{\Theta_{k+1,l}^{n+1} - \Theta_{k-1,l}^{n+1}}{2h}, \end{aligned} \quad (253)$$

$$\nabla^2 \Psi_{k,l}^{n+1} = -\omega_{k,l}^{n+1}. \quad (254)$$

Компоненты скорости $u_{k,l}^n$ и $v_{k,l}^n$ обычно вычисляются по формулам:

$$u_{k,l}^n = \frac{\Psi_{k,l+1}^n - \Psi_{k,l-1}^n}{2h}, \quad v_{k,l}^n = -\frac{\Psi_{k+1,l}^n - \Psi_{k-1,l}^n}{2h}. \quad (255)$$

Для решения уравнения Пуассона (254) используется один из алгоритмов, описанных в предыдущем параграфе.

Уравнения (252)–(254) решаются при заданных начальных и граничных условиях, определяемых постановкой физической задачи. Переход от n -го временного уровня к $(n+1)$ -му осуществляется следующим образом. По формуле

$$\omega_{k,l}^{n+1} = -\frac{1}{h^2} (\Psi_{k+1,l}^n + \Psi_{k-1,l}^n + \Psi_{k,l+1}^n + \Psi_{k,l-1}^n - 4\Psi_{k,l}^n) \quad (256)$$

вычисляются значения функции ω в приграничных точках расчетной области. Затем, принимая полученные таким образом значения ω за граничные, из уравнения (253) определяются значения $\omega_{k,l}^{n+1}$ внутри уменьшенной области. После этого из уравнения (254) находятся значения $\Psi_{k,l}^{n+1}$ внутри основной области (граничные значения функции тока предполагаются известными). В приграничных точках области значения Ψ подправляются таким образом, чтобы выполнялось граничное условие для нор-

мальной производной $\frac{\partial \psi}{\partial n}$. Наконец, из уравнения (252) вычисляются значения $\Theta_{k,l}^{n+1}$. Таким образом, все величины функций Θ , ω и ψ на $(n+1)$ -м временном уровне становятся известными и можно приступать к очередному продвижению по временной переменной.

Разностные уравнения (252)—(254) аппроксимируют уравнения (Θ, ω, ψ) -системы с погрешностью $o(\tau + h^2)$. Алгоритм получения численного решения, как видим, довольно прост. Если известно решение в начальный момент времени $t=0$ (начальные условия, как правило, определяются постановкой задачи), то по формулам (252)—(254) можно найти решение для любого момента $t=t^n$. Условие устойчивости для этой схемы

$$\tau \leq \frac{h^2}{2[2Pr + h \max_{k,l} (|u_{k,l}|, |v_{k,l}|)]} \quad (257)$$

накладывает жесткие ограничения на величину шага по времени, что приводит к неоправданному увеличению времени счета. К тому же разностная схема (252)—(254) не монотонна и неконсервативна. Условие монотонности для нее

$$h \leq \frac{2}{\max_{k,l} (|u_{k,l}|, |v_{k,l}|)} \quad (258)$$

при числах Релея $Ra > 10^6$ практически невыполнимо. Нарушение условия (258) приводит к появлению «ряби» в решении. При фиксированной величине сеточного параметра h с течением времени устанавливаются периодические колебания температуры, завихренности и функции тока около некоторых средних значений. Уменьшение шага по времени τ не меняет положения. Это сильно сужает диапазон применимости указанной схемы. Однако отмеченные недостатки компенсируются простотой численного алгоритма, что, по-видимому, и объясняет ее большую популярность.

Применяя другие аппроксимации пространственных производных (см. параграф 3.2), можно получить разностные схемы, обладающие как свойством монотонности, так и свойством консервативности. При этом изменится только вид уравнений для температуры и завихренности.

Так, например, используя монотонную консервативную аппроксимацию (229), можно построить явную разностную схему, обладающую этими свойствами. Разностный аналог уравнений температуры и вихря скорости проиллюстрируем на примере модельного уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - u \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - v \Phi \right) + f, \quad (259)$$

которое при $\Phi = \Theta$ и $f = 0$ превращается в уравнение для температуры и при $\Phi = \omega$, $\text{Pr} = 1$, и $f = \text{Gr} \frac{\partial \Theta}{\partial x}$ — в уравнение для завихренности:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{k,l}^{n+1} - \Phi_{k,l}^n}{\tau} = & \frac{\Phi_{k+1,l}^n - \Phi_{k,l}^n}{\text{Pr} h^2 (1 + 0,5 \text{Pr} h |u_{k+\frac{1}{2},l}|)} - \\ & - \frac{\Phi_k^n - \Phi_{k-1}^n}{\text{Pr} h^2 (1 + 0,5 \text{Pr} h |u_{k-\frac{1}{2},l}|)} - \frac{1}{h} [(u_{k+\frac{1}{2},l}^+ \Phi_{k,l}^n - \\ & - u_{k-\frac{1}{2},l}^+ \Phi_{k-1,l}^n) + (u_{k+\frac{1}{2},l}^- \Phi_{k+1,l}^n - u_{k-\frac{1}{2},l}^- \Phi_{k,l}^n)] + \\ & + \frac{\Phi_{k,l+1}^n - \Phi_{k,l}^n}{\text{Pr} h^2 (1 + 0,5 \text{Pr} h |v_{k,l+\frac{1}{2}}|)} - \\ & - \frac{\Phi_{k,l}^n - \Phi_{k,l-1}^n}{\text{Pr} h^2 (1 + 0,5 \text{Pr} h |v_{k,l-\frac{1}{2}}|)} - \frac{1}{h} [(v_{k,l+\frac{1}{2}}^+ \Phi_{k,l}^n - \\ & - v_{k,l-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{k,l-1}^n) + (v_{k,l+\frac{1}{2}}^- \Phi_{k,l+1}^n - v_{k,l-\frac{1}{2}}^- \Phi_{k,l}^n)] + f_{k,l}. \end{aligned} \quad (260)$$

Здесь использованы обозначения (221). Компоненты скорости вычисляются по формуле (218).

Устойчивость этой разностной схемы контролируется условием (257). Схема имеет погрешность аппроксимации $o(\tau + h^2)$, монотонна и обладает свойством консервативности. Анализ погрешности для нее показывает, что

при разностных числах Рейнольдса $Re_h < 1$, действительно, имеет место аппроксимация второго порядка точности относительно пространственных параметров сетки. И хотя численный алгоритм позволяет получать приближенное решение практически при всех допустимых значениях режимных параметров, численные эксперименты показывают, что при использовании сеток с $h \sim 0,05-0,02$ гарантированную точность решения 10--15% можно ожидать лишь при числах Релея $Ra < 10^8$.

3.6. Неявные схемы

Когда к численному счету прибегают эпизодически для решения небольшого количества вариантов задачи, использование явных схем в какой-то степени оправдано. Однако при систематическом исследовании некоторого класса задач, когда необходимо рассмотреть много различных вариантов, более целесообразно применение экономичных неявных методов расчета. Такие методы, хотя и требуют несколько больших усилий и времени для составления и отладки программы для счета на ЭВМ, позволяют значительно сократить необходимое машинное время счета.

Среди неявных разностных схем наиболее эффективны схемы, основанные на методе дробных шагов. Известно много их различных модификаций.

При численном решении задач вязкой жидкости и конвективного теплообмена часто используется продольно-поперечная конечно-разностная схема, которая для модельного уравнения (259) может быть записана в следующем общем виде:

$$\bar{\Phi}_{k,l} = \Phi_{k,l}^n + 0,5\tau(\Lambda_x \bar{\Phi} + \Lambda_y \Phi^n + \bar{f}_{k,l}), \quad (261)$$

$$\Phi_{k,l}^{n+1} = \bar{\Phi}_{k,l} + 0,5\tau(\Lambda_x \bar{\Phi} + \Lambda_y \Phi^{n+1} + \bar{f}_{k,l}). \quad (262)$$

Здесь Λ_x и Λ_y — разностные операторы, аппроксимирующие соответственно дифференциальные операторы L_x и L_y (см. параграф 3.2); $\bar{f}_{k,l} = 0,5(f_{k,l}^n + f_{k,l}^{n+1})$. Используя различные способы аппроксимации операторов L_x и L_y , можно конструировать разностные схемы с различными свойствами.

Приведем экономичную монотонную консервативную разностную схему второго порядка точности, основанную на аппроксимации вида (229), которая успешно применялась авторами при расчете ряда стационарных и нестационарных задач конвективного теплообмена [48, 49]. Построение ее основано на использовании интегро-интерполяционного метода.

Расчетные формулы для решения уравнений температуры и завихренности имеют много общего. Поэтому имеет смысл привести их лишь для модельного уравнения (259). Систему разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение (259), запишем в виде

$$A_x \bar{\Phi}_{k-1,l} - (C_x + 0,5\tau) \bar{\Phi}_{k,l} + B_x \bar{\Phi}_{k+1,l} = -F_x, \quad (263)$$

$$A_y \Phi_{k,l-1}^{n+1} - (C_y + 0,5\tau) \Phi_{k,l}^{n+1} + B_y \Phi_{k,l+1}^{n+1} = -F_y, \quad (264)$$

где

$$A_x = [\text{Pr}h^2 (1 + 0,5\text{Pr}h |u_{k-\frac{1}{2},l}|)]^{-1} + \frac{1}{h} u_{k-\frac{1}{2},l}^+;$$

$$B_x = [\text{Pr}h^2 (1 + 0,5\text{Pr}h |u_{k+\frac{1}{2},l}|)]^{-1} - \frac{1}{h} u_{k+\frac{1}{2},l}^-;$$

$$C_x = A_x + B_x + \frac{1}{h} (u_{k+\frac{1}{2},l}^+ - u_{k-\frac{1}{2},l}^-);$$

$$A_y = [\text{Pr}h^2 (1 + 0,5\text{Pr}h |v_{k,l-\frac{1}{2}}|)]^{-1} + \frac{1}{h} |v_{k,l-\frac{1}{2}}^+|;$$

$$B_y = [\text{Pr}h^2 (1 + 0,5\text{Pr}h |v_{k,l+\frac{1}{2}}|)]^{-1} - \frac{1}{h} |v_{k,l+\frac{1}{2}}^-|;$$

$$C_y = A_y + B_y + \frac{1}{h} (v_{k,l+\frac{1}{2}}^+ - v_{k,l-\frac{1}{2}}^-);$$

$$F_x = A_y \Phi_{k,l-1}^n - (C_y - 0,5\tau) \Phi_{k,l}^n + B_y \Phi_{k,l+1}^n + \bar{f}_{k,l};$$

$$F_y = A_x \bar{\Phi}_{k-1,l} - (C_x - 0,5\tau) \bar{\Phi}_{k,l} + B_x \bar{\Phi}_{k+1,l} + \bar{f}_{k,l}.$$

Компоненты скорости $u_{k\pm\frac{1}{2},l}$, $v_{k,l\pm\frac{1}{2}}$ вычисляются

формуле (218). При этом целесообразно использовать следующее усреднение:

$$u_{k-\frac{1}{2},l} = \frac{1}{8h} (\psi_{k-1,l+1}^n + \psi_{k,l+1}^n - \psi_{k-1,l-1}^n - \psi_{k,l-1}^n + \\ + \psi_{k-1,l+1}^{n+1} + \psi_{k,l+1}^{n+1} - \psi_{k-1,l-1}^{n+1} - \psi_{k,l-1}^{n+1}), \quad (265)$$

$$v_{k,l-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8h} (\psi_{k-1,l}^n + \psi_{k-1,l-1}^n - \psi_{k+1,l}^n - \psi_{k+1,l-1}^n + \\ + \psi_{k-1,l}^{n+1} + \psi_{k-1,l-1}^{n+1} - \psi_{k+1,l}^{n+1} - \psi_{k+1,l-1}^{n+1}).$$

Подобное усреднение применяется и при аппроксимации свободного члена

$$\bar{f}_{h,l} = \frac{Gr}{4h} (\Theta_{k+1,l}^n - \Theta_{k-1,l}^n + \Theta_{k+1,l}^{n+1} - \Theta_{k-1,l}^{n+1}). \quad (266)$$

Разностные уравнения (263) — (264) решаются методом прогонки. Рекуррентные формулы для вычисления прогоночных коэффициентов, необходимых для решения первой группы уравнений, представим в виде

$$\alpha_k = B_x (C_x + 0,5\tau - A_x \alpha_{k-1})^{-1}, \\ \beta_k = (A_x \beta_{k-1} + F_x) \alpha_k / B_x. \quad (267)$$

При решении уравнений (264) коэффициенты прогонки вычисляются по формулам

$$\alpha_l = B_y (C_y + 0,5\tau - A_y \alpha_{l-1})^{-1}, \\ \beta_l = (A_y \beta_{l-1} + F_y) \alpha_l / B_y. \quad (268)$$

Решение $\Phi_{k,l}^{n+1}$ по известным значениям $\Phi_{k,l}^n$ получаем в следующем порядке. Сначала при фиксированном значении индекса l , используя граничное условие на левой границе, вычисляем коэффициенты α_k, β_k ($k=1, 2, 3, \dots, K-1$) и, используя условие на правой границе, по формуле

$$\bar{\Phi}_{h,l} = \alpha_k \bar{\Phi}_{h+1,l} + \beta_k \quad (269)$$

определяем значения $\bar{\Phi}_{h,l}$ ($k = K-1, K-2, K-3, \dots, 1$). При этом граничное условие для функции $|\Phi$

должно удовлетворять условию согласованности, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\bar{\Phi}_r = 0,5 (\Phi_r^n + \Phi_r^{n+1}) - 0,25\tau\Lambda_y (\Phi_r^{n+1} - \Phi_r^n). \quad (270)$$

Индекс внизу означает, что функция Φ рассматривается в точках границы. Нарушение условия (270) заметно ухудшает устойчивость разностной схемы, а при решении нестационарных задач снижает точность.

Таким образом, после перебора всех индексов l нам будут известны все значения искомой функции $\Phi_{k,l}$ на промежуточном слое. После этого, фиксируя индекс k и используя условие на одной из горизонтальных границ, вычисляем коэффициенты α_l, β_l ($l=1, 2, 3, \dots, L-1$). Затем, используя условие на другой горизонтальной границе, по формуле

$$\Phi_{k,l}^{n+1} = \alpha_l \Phi_{k,l+1}^{n+1} + \beta_l \quad (271)$$

определяем значение $\Phi_{k,l}^{n+1}$ ($l=L-1, L-2, L-3, \dots, 1$). В итоге получаем все значения $\Phi_{k,l}^{n+1}$.

Условия устойчивости метода прогонки обеспечиваются выполнением неравенства

$$\frac{2}{\tau} > \max_{k,l} \left(\frac{u_{k-\frac{1}{2},l} - u_{k+\frac{1}{2},l}}{h}, \frac{v_{k,l-\frac{1}{2}} - v_{k,l+\frac{1}{2}}}{h} \right). \quad (272)$$

Очевидно, если производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ положительны, то ограничений на τ не имеется, поскольку неравенство (272) в этом случае всегда выполнимо. При отрицательных значениях производных обременительность ограничения (272) ощутима лишь при числах Релея $Ra \sim 10^7$ и выше.

При $f_{k,l} = 0$ имеем алгоритм для вычисления значений температуры $\Theta_{k,l}^{n+1}$. Положив $P_r = 1$ и подставив вместо $f_{k,l}$ выражение (266), получим алгоритм для вычисления вихря скорости $\omega_{k,l}^{n+1}$.

Решение уравнения Пуассона для функции тока осуществляется по итерационной схеме переменных направлений (246).

Общая структура вычислительного алгоритма для определения функций $\Theta_{k,l}^{n+1}, \omega_{k,l}^{n+1}, \psi_{k,l}^{n+1}$ такая же, как и в чис

ленной схеме (252)—(254). Однако для уточнения полученных значений $\Theta_{k,l}^{n+1}$, $\omega_{k,l}^{n+1}$ и $\psi_{k,l}^{n+1}$ используется внешний итерационный цикл.

Итерационный процесс по уточнению значений $\Theta_{k,l}^{n+1}$, $\omega_{k,l}^{n+1}$ и $\psi_{k,l}^{n+1}$ строится следующим образом. Сначала эти величины вычисляются обычным путем, далее расчет повторяется, с той только разницей, что при нахождении компонент скорости, источника $\text{Gr} \frac{\partial \Theta}{\partial x}$ и граничных значений

функции $\bar{\Phi}$ используются значения $\Theta_{k,l}^{n+1}$, $\omega_{k,l}^{n+1}$, $\psi_{k,l}^{n+1}$. Вновь вычисленные таким образом значения $\Theta_{k,l}^{n+1}$, $\omega_{k,l}^{n+1}$, $\psi_{k,l}^{n+1}$ сравниваются со старыми значениями этих величин. Если требуемая точность не достигнута, расчет повторяется. При этом при вычислении u , v , $\text{Gr} \frac{\partial \Theta}{\partial x}$ и граничных

значений функции $\bar{\Phi}$ применяются уточненные значения температуры, завихренности и функции тока.

Следовательно, численный алгоритм включает два итерационных цикла — внешний и внутренний. Выход из внутреннего цикла осуществляется при выполнении условия (243). Выход из внешнего итерационного цикла определяется условием

$$\frac{\max_{k,l} |\omega_{k,l}^{n+1,s1+1} - \omega_{k,l}^{n+1,s1}|}{\max_{k,l} |\omega_{k,l}^{n+1,s1+1}|} \leq \varepsilon_{\omega}, \quad (273)$$

где $s1$ — номер внешней итерации. Можно, конечно, установить аналогичное условие и на величину Θ , однако в этом нет необходимости, поскольку скорость сходимости функции Θ гораздо больше, чем ω .

Рассматриваемая разностная схема имеет погрешность аппроксимации порядка $o(\tau^2 + h^2)$. Однако поскольку здесь используется аппроксимация (229), эта оценка справедлива лишь в том случае, если разностные числа Рейнольдса $\text{Re}_h < 1$.

Можно ожидать, что точность разностной схемы (261)—(262) несколько повысится, если на нижнем временном уровне использовать вместо монотонной аппроксимации (229) немонотонную симметричную аппроксимацию (215) или (217). Опыт применения таких схем к расчету задач конвективного теплообмена показывает [60],

что монотонность численной схемы в целом в этом случае не нарушается.

Устойчивость разностных схем переменных направлений при отрицательной определенности операторов Λ_x и Λ_y можно доказать с помощью леммы Келлога [5]. Но при выполнении условия (272) эти операторы всегда отрицательны. Следовательно, предложенная выше разностная схема устойчива для каждого из уравнений в отдельности. Но приближенный характер граничных условий для завихренности, которые должны уточняться на каждом временном слое, чтобы удовлетворить условию (270), накладывает определенное ограничение на величину τ . При большом τ итерационный процесс может расходиться, даже если условие (272) удовлетворено.

Опыт расчетов показывает, что сходимость внешних итераций заметно улучшается при применении сглаживания граничных условий для завихренности:

$$\bar{\omega}_r^{n+1, s_1+1} = (1 - \eta)\omega_r^{n+1, s_1} + \eta\omega_r^{n+1, s_1+1}. \quad (274)$$

Здесь η — параметр сглаживания. Оптимальное значение этого параметра зависит от входных данных задачи и типа граничных условий. Численные эксперименты показывают, что при $Ra \leq 10^5$ оптимальное значение η близко к 0,85, что хорошо согласуется с данными работы [61], в которой применялось аналогичное сглаживание.

Следует заметить, что проведение расчетов с большими шагами по времени не всегда оправдано. Как показал опыт расчетов, при быстром развитии конвективного движения (например, в начальный момент установления), а также при перестроении конвективных структур в слое проведение расчетов с большим τ приводит к резкому увеличению количества итераций внешнего цикла, а нередко даже к расходимости итерационного процесса. В таких случаях для уменьшения времени счета более целесообразно производить вычисления с меньшим τ .

Для сокращения затрат машинного времени весьма эффективен выбор шага τ в зависимости от количества внешних итераций, выполненных на предыдущем слое. Если количество итераций s_1 на n -м слое больше, чем $N_{\text{опт}}$, то на $(n+1)$ -м слое шаг выбирается равным $\tau^{n+1} = 0,7\tau^n$. При $s_1 \leq N_{\text{опт}}$ шаг увеличивается $\tau^{n+1} = 1,2\tau^n$. Если s_1 больше, чем N_{max} , то τ уменьшается вдвое и расчет повторяется. Последнее гарантирует устойчивость сче-

та, поскольку наступлению неустойчивости, как правило, предшествует резкое возрастание количества итераций. Опыт расчетов показывает, что при выборе $N_{\text{опт}}=4$, $N_{\text{max}}=8$ на тех участках, где решение изменяется плавно, программа выбирает максимально допустимый шаг $\tau \sim h$ (ставится ограничение $\tau < h!$). Величину шага τ регулирует также условие (272). Если оно не выполняется, шаг τ пересчитывается по формуле $\tau^{n+1} = 0,7\tau^n$.

Для выяснения основных особенностей представленной выше разностной схемы была проведена серия методических расчетов. В результате численных экспериментов был установлен оптимальный порядок точности внешних и внутренних итераций: $\epsilon_\psi = 0,01$, $\epsilon_\omega = 0,05$ при $Ra < 10^4$ и $\epsilon_\psi = 0,005$, $\epsilon_\omega = 0,01$ при $Ra > 10^4$. При меньших ϵ_ψ и ϵ_ω затраты машинного времени резко возрастают, хотя решение практически не изменяется, при больших в третьем и четвертом знаке решения возникают колебания.

Были проведены также эксперименты для определения оптимальной величины внутреннего итерационного параметра τ' . Установлено, что оптимальное значение τ' существенно зависит от пространственного шага сетки и приблизительно может быть вычислено по формуле $\tau' = h/5$. Однако более перспективно, по-видимому, осуществлять выбор итерационных параметров, оптимизированных по Жордану [1].

Методические расчеты показали, что приведенная разностная схема позволяет получать монотонные решения вплоть до чисел $Ra \sim 10^{10}$ и выше. При этом машинное время счета у нее при прочих равных условиях приблизительно в 4—6 раз меньше, чем, например, у явной схемы (252) — (254).

3.7. Методы решения стационарных задач конвективного теплообмена

При численном исследовании стационарных задач конвективного теплообмена широко применяется метод установления. Решение стационарной задачи рассматривается как предел, к которому стремится решение соответствующей нестационарной задачи при $t \rightarrow \infty$. В случае решения стационарных задач методом установления сам процесс установления стационарного режима интереса не представляет. В большинстве случаев он является

функцией последовательных приближений и лишен физического смысла.

Благодаря такому подходу все рассмотренные выше разностные схемы для решения нестационарной (Θ, ω, ψ) -системы можно использовать для решения стационарных задач, рассматривая при этом τ как итерационный параметр. При этом вычислительный алгоритм решения существенно упрощается, поскольку на каждом итерационном слое не обязательно точно решать уравнение Пуассона и строить итерационный цикл для уточнения значений $\Theta_{k,l}^{n+1}, \omega_{k,l}^{n+1}, \psi_{k,l}^{n+1}$.

Вместе с тем в ряде случаев численное исследование стационарных задач конвективного теплообмена целесообразно проводить на основе решения стационарной системы термоконвективных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} - u\Theta \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} - v\Theta \right) = 0, \quad (275)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - u\omega \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - v\omega \right) = -Gr \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad (276)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (277)$$

Для получения численного решения этой системы уравнений надо перейти к аппроксимирующей ее разностной задаче и решить последнюю с помощью одного из известных итерационных методов. Здесь, как и при решении нестационарных задач, имеется большой выбор конечно-разностных схем и способов их решения. Трудности, возникающие при численном решении стационарных задач, те же, что и в нестационарном случае.

Использование центральных разностей для аппроксимации конвективных членов в этом случае также приводит к немонотонной разностной схеме, применение которой ограничивается значениями чисел Релея $Ra < 10^6$. При исследовании высокоинтенсивных процессов конвективного теплообмена необходимо использовать монотонные разностные схемы. Здесь также большое значение имеют их консервативные свойства.

Рассмотрим консервативную монотонную конечно-разностную схему второго порядка точности, аппроксими-

рующую систему (275) — (277). Эта схема хорошо зарекомендовала себя при численном исследовании стационарных задач конвективного теплообмена в широком диапазоне изменения режимных параметров [46].

Разностная схема строится интегро-интерполяционным методом, обеспечивающим соблюдение интегральных законов сохранения (тепла, массы, энергии и т. п.) на любых участках сеточной области. Методику построения этой схемы приводить не будем, поскольку она достаточно подробно рассмотрена в предыдущих параграфах. Система разностных уравнений получается в результате интегрирования исходной системы по элементарной ячейке

$$D_k(x_{k-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{k+\frac{1}{2}}, y_{l-\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{l+\frac{1}{2}})$$

и последующего применения теоремы Гаусса — Остроградского. Запишем ее в виде итерационного процесса Зейделя с применением параметров релаксации:

$$\Theta_{k,l}^{s+1} = \frac{\gamma_{\Theta}}{E_{\Theta}} (A_{\Theta} \Theta_{k+1,l}^s + B_{\Theta} \Theta_{k-1,l}^{s+1} + C_{\Theta} \Theta_{k,l+1}^s + D_{\Theta} \Theta_{k,l-1}^{s+1}) + (1 - \gamma_{\Theta}) \Theta_{k,l}^s, \quad (278)$$

$$\omega_{k,l}^{s+1} = \frac{\gamma_{\omega}}{E_{\omega}} [A_{\omega} \omega_{k+1,l}^s + B_{\omega} \omega_{k-1,l}^{s+1} + C_{\omega} \omega_{k,l+1}^s + D_{\omega} \omega_{k,l-1}^{s+1} + 0,5Gr h (\Theta_{k+1,l}^{s+1} - \Theta_{k-1,l}^{s+1})] + (1 - \gamma_{\omega}) \omega_{k,l}^s, \quad (279)$$

$$\psi_{k,l}^{s+1} = \frac{\gamma_{\psi}}{4} (\psi_{k+1,l}^s + \psi_{k-1,l}^{s+1} + \psi_{k,l+1}^s + \psi_{k,l-1}^{s+1} + h^2 \omega_{k,l}^{s+1}) + (1 - \gamma_{\psi}) \psi_{k,l}^s. \quad (280)$$

Здесь s — номер итерации; γ_{Θ} , γ_{ω} , γ_{ψ} — параметры релаксации. Коэффициенты рассчитываются по формулам:

$$A_{\Theta} = [\text{Pr} (1 + 0,5\text{Pr} h | u_{k+\frac{1}{2},l} |)]^{-1} - hu_{k+\frac{1}{2},l}^{-},$$

$$B_{\Theta} = [\text{Pr} (1 + 0,5\text{Pr} h | u_{k-\frac{1}{2},l} |)]^{-1} + hu_{k-\frac{1}{2},l}^{+},$$

$$\begin{aligned}
C_{\Theta} &= [\text{Pr} (1 + 0,5\text{Pr} h | v_{k,l+\frac{1}{2}} |)^{-1} - hv_{k,l+\frac{1}{2}}^{-}], \\
D_{\Theta} &= [\text{Pr} (1 + 0,5\text{Pr} h | v_{k,l-\frac{1}{2}} |)^{-1} + hv_{k,l-\frac{1}{2}}^{+}], \\
E_{\Theta} &= A_{\Theta} + B_{\Theta} + C_{\Theta} + D_{\Theta}, \\
A_{\omega} &= (1 + 0,5h | u_{k+\frac{1}{2},l} |)^{-1} - hu_{k+\frac{1}{2},l}^{-}, \\
B_{\omega} &= (1 + 0,5h | u_{k-\frac{1}{2},l} |)^{-1} + hu_{k-\frac{1}{2},l}^{+}, \\
C_{\omega} &= (1 + 0,5h | v_{k,l+\frac{1}{2}} |)^{-1} - hv_{k,l+\frac{1}{2}}^{-}, \\
D_{\omega} &= (1 + 0,5h | v_{k,l-\frac{1}{2}} |)^{-1} + hv_{k,l-\frac{1}{2}}^{+}, \\
E_{\omega} &= A_{\omega} + B_{\omega} + C_{\omega} + D_{\omega}. \quad (281)
\end{aligned}$$

Проекция скорости u и v вычисляются по формуле (218). Итерационный процесс (278)—(280) сходится при любых значениях h . Параметры релаксации удобно выбирать автоматически в ходе счета.

В результате многочисленных экспериментов было установлено, что на первых 250 итерациях целесообразно задавать

$$\gamma_{\Theta} = 1, \quad \gamma_{\omega} = 0,75, \quad \gamma_{\psi} = 1,5. \quad (282)$$

Если за 250 итераций итерационный процесс не сходится, то параметры релаксации изменяются следующим образом:

$$\gamma_{\Theta}^{(2)} = \gamma_{\Theta}, \quad \gamma_{\omega}^{(2)} = \frac{2}{3} \gamma_{\omega}, \quad \gamma_{\psi}^{(2)} = \frac{2}{3} (1 + \gamma_{\psi}). \quad (283)$$

Процедура повторяется через каждые 250 итераций.

Вычислительный алгоритм строится таким образом, что в каждой точке сетки вычисляются одновременно значения $\Theta_{k,l}^{s+1}$, $\omega_{k,l}^{s+1}$ и $\psi_{k,l}^{s+1}$. Итерационный процесс прекращается при выполнении условия

$$\max(\epsilon_{\Theta}, \epsilon_{\omega}, \epsilon_{\psi}) \leq \epsilon, \quad (284)$$

где

$$\varepsilon_{\Theta} = \max_{k,l} \frac{|\Theta_{k,l}^{s+1} - \Theta_{k,l}^s|}{\Theta_{\text{ср}}}; \quad \varepsilon_{\omega} = \max_{k,l} \frac{|\omega_{k,l}^{s+1} - \omega_{k,l}^s|}{\omega_{\text{ср}}};$$

$$\varepsilon_{\Psi} = \max_{k,l} \frac{|\Psi_{k,l}^{s+1} - \Psi_{k,l}^s|}{\Psi_{\text{ср}}}. \quad (285)$$

Здесь $\Theta_{\text{ср}}$, $\omega_{\text{ср}}$, $\Psi_{\text{ср}}$ — среднearифметические значения модулей искомых функций на s -м итерационном слое. Например,

$$\Theta_{\text{ср}} = \frac{\sum_{k=1}^{K+1} \sum_{l=1}^{L+1} |\Theta_{k,l}^s|}{(K+1)(L+1)}. \quad (286)$$

Основное достоинство стационарных конечно-разностных схем заключается в том, что для своей реализации они требуют минимального объема машинной памяти и сравнительно просты в реализации.

3.8. Тепловая конвекция в цилиндрических сосудах

Рассмотрим особенности численного исследования термоконвективных процессов внутри вертикального круглого цилиндра высотой H и радиусом R , когда поле внешней массовой силы \vec{g} направлено вдоль его оси. Будем предполагать, что краевые условия задачи соответствуют аксиальной симметрии температуры, скорости, давления и исключают азимутальное движение жидкости.

Введем цилиндрическую координатную систему (r, z) с началом координат в центре основания цилиндра. Ось z направим вертикально вверх противоположно направлению массовой силы \vec{g} . Система дифференциальных уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска для определения поля течения и температуры запишется следующим образом [23, 24]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial r} + \nabla^2 u - \frac{u}{r}, \quad (287)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \nabla^2 v + \text{Gr} \Theta, \quad (288)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{v}{r} = 0, \quad (289)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \Theta, \quad (290)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}.$$

Уравнения (287) — (290) записаны в безразмерном виде. Здесь u, v — проекции скорости на оси r и z соответственно; P — давление; Θ — температура; t — время. Для искомых функций и независимых переменных выбраны следующие масштабы: за единицу длины принята величина радиуса цилиндра R , скорости ν/R (ν — кинематическая вязкость), времени R^2/ν , давления $\rho\nu^2/R^2$ (ρ — плотность). Масштаб для температуры можно выбирать по-разному. В частности, если на границе области задается поток тепла, то в качестве масштаба для температуры удобно принять величину qR/κ , где q — плотность теплового потока, а κ — коэффициент теплопроводности. Уравнения (287) — (290) содержат два безразмерных критерия: Грасгофа $\text{Gr} = g\beta qR^4/(\nu^2\kappa)$ и Прандтля $\text{Pr} = \nu/a$ (a — коэффициент температуропроводности).

Наличие аксиальной симметрии позволяет искать решение в области $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq H/R$. На ее границе задаются условия, соответствующие постановке рассматриваемой задачи. На твердых стенках ставится обычно условие прилипания

$$u = v = 0. \quad (291)$$

Если имеется свободная поверхность (например, $z = H/R$), то на ней принимается

$$v = \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (292)$$

На оси симметрии $r = 0$ обычно задается

$$u = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r} = 0. \quad (293)$$

Как и в случае прямоугольной геометрии, при построении разностной схемы для решения системы (287) — (290)

исключаем давление и переходим к функциям тока и завихренности. Чтобы избавиться от давления, достаточно продифференцировать уравнение (287) по z и вычесть из него уравнение (288), продифференцированное по r . Функция вихря скорости вводится как обычно:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (294)$$

Функция тока ψ подбирается таким образом, чтобы автоматически удовлетворялось уравнение неразрывности (289). В отличие от плоского случая выбор ψ здесь не очевиден. Вводить функцию тока можно по-разному. На наш взгляд, более удобно использовать функцию тока, связанную с компонентами скорости соотношениями

$$u = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (295)$$

В этом случае вдоль линии тока величина ψ сохраняет постоянное значение.

После выполнения указанных преобразований приходим к системе:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} + \frac{\omega u}{r} - u \frac{\partial \omega}{\partial r} - v \frac{\partial \omega}{\partial z} - \text{Gr} \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad (296)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \Theta - u \frac{\partial \Theta}{\partial r} - v \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \quad (297)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\omega r. \quad (298)$$

Граничные условия для температуры при этом не изменяются. Для функции тока они получаются непосредственно из условий (291)—(293) для компонент скорости. Условию прилипания, например, соответствует

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1). \quad (299)$$

На свободной поверхности $z = H/R$ задается

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (300)$$

на оси симметрии $r = 0$ принимается

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0. \quad (301)$$

Что касается граничных условий для функции вихря, то на оси симметрии и на свободной поверхности обычно задается

$$\omega = 0. \quad (302)$$

На твердых же участках границы функция ω не определена и постановка граничных условий для нее вызывает определенные трудности. Обычно, как и в плоском случае, для вычисления граничных значений ω используют приближенные формулы, которые получают из уравнения неразрывности с учетом условия (299). Однако приближенный характер вводимых таким образом граничных условий для вихря существенно ухудшает устойчивость численной схемы. По-видимому, более целесообразно пользоваться методикой, предложенной в работе [27], при которой значения функции ω на твердых участках границы вообще не используются (см. параграф 3.3).

Важной характеристикой теплообмена является величина безразмерных тепловых потоков на границах области, характеризующихся числами Нуссельта. На верхней и нижней поверхностях цилиндра они определяются соответственно по формулам

$$Nu_B = 2\pi \int_0^1 r \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_{z=1} dr, \quad Nu_H = -2\pi \int_0^1 r \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{z=0} dr. \quad (303)$$

Тепловой поток на боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$Nu_B = 2\pi \int_0^{H/R} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{r=1} dz. \quad (304)$$

Если нет внутренних источников (стоков) тепла, то в стационарном режиме должно быть выполнено соотношение

$$Nu_B + Nu_H + Nu_B = 0. \quad (305)$$

При построении разностной схемы для решения системы (99)—(101) последнюю удобно записать в дивергентном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} - v\omega \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r\omega)}{\partial r} - u\omega \right) - \text{Gr} \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad (306)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} - v\Theta \right) + \\ & + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} - u\Theta r \right), \end{aligned} \quad (307)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\omega. \quad (308)$$

Введем разностную сетку, регулярную по пространственным переменным, с координатами узлов ($r_k = k\Delta r$, $z_l = l\Delta z$, $t^n = t^{n-1} + \tau^n$), где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, K$; $l = 0, 1, 2, 3, \dots, L$; $n = 0, 1, 2, \dots$. Сеточные функции будем обозначать при помощи индексов, так что $F(r_k, z_l, t^n) = F_{k,l}^n$.

Общая структура разностных алгоритмов, использующихся для решения системы (306)—(308), не отличается от случая декартовой геометрии. В зависимости от вида решаемой задачи, опыта вычислителя и возможностей вычислительной машины, на которой предполагается решать задачу, применяются явные или неявные конечно-разностные схемы, конструкция которых описана в параграфах 3.5—3.7. Отличие заключается лишь в способе аппроксимации операторов

$$\begin{aligned} L_r \omega &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r\omega)}{\partial r} - u\omega \right), \\ \tilde{L}_r \Theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} - ru\Theta \right) \end{aligned}$$

и уравнения (308). Некоторые особенности имеются также в формулах для вычисления компонент скорости и в разностном представлении краевых условий.

Используя интегро-интерполяционный метод [18], нетрудно построить для операторов L_r и \tilde{L}_r аппроксимации такого же вида, как и описанные в параграфе 3.2 аппроксимации для оператора $L_x \Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - u \Phi \right)$. В качестве примера приведем здесь консервативную симметричную аппроксимацию этих операторов:

$$\Lambda_r \omega = \frac{1}{\Delta r} \left[\frac{r_{k+1} \omega_{k+1,l} - r_k \omega_{k,l}}{r_{k+\frac{1}{2}} \Delta r} - \frac{r_k \omega_{k,l} - r_{k-1} \omega_{k-1,l}}{r_{k-\frac{1}{2}} \Delta r} - \left(u_{k+\frac{1}{2},l} \frac{\omega_{k+1,l} + \omega_{k,l}}{2} - u_{k-\frac{1}{2},l} \frac{\omega_{k,l} + \omega_{k-1,l}}{2} \right) \right], \quad (309)$$

$$\tilde{\Lambda}_r \Theta = \frac{1}{\Delta r r_k} \left[\frac{r_{k+\frac{1}{2}}}{Pr} \cdot \frac{\Theta_{k+1,l} - \Theta_{k,l}}{\Delta r} - \frac{r_{k-\frac{1}{2}}}{Pr} \times \right. \\ \times \frac{\Theta_{k,l} - \Theta_{k-1,l}}{\Delta r} - \left(r_{k+\frac{1}{2}} u_{k+\frac{1}{2},l} \frac{\Theta_{k+1,l} + \Theta_{k,l}}{2} - \right. \\ \left. \left. - r_{k-\frac{1}{2}} u_{k-\frac{1}{2},l} \frac{\Theta_{k,l} + \Theta_{k-1,l}}{2} \right) \right]. \quad (310)$$

Формулы (309), (310) аппроксимируют операторы L_r и \tilde{L}_r с погрешностью порядка $o((\Delta r)^2)$. Такую аппроксимацию дифференциальных операторов можно рекомендовать для построения конечно-разностных схем, предназначенных для исследования термоконвективных процессов в диапазоне параметров Релея $Ra \leq 10^6$. При $Ra > 10^6$ следует использовать монотонные аппроксимации вида (224) или (229). Для вычисления компонент скорости внутри расчетной области можно рекомендовать формулы

$$u_{k-\frac{1}{2},l} = - \frac{1}{r_{k-\frac{1}{2}}} \times \\ \times \frac{\psi_{k,l+1} + \psi_{k-1,l+1} - \psi_{k,l-1} - \psi_{k-1,l-1}}{4\Delta z}, \quad (311)$$

$$v^{k,l} - \frac{1}{2} = \frac{1}{r_k} \cdot \frac{\psi_{k+1,l} + \psi_{k+1,l-1} - \psi_{k-1,l} - \psi_{k-1,l-1}}{4\Delta r}, \quad (312)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, K-1; l = 1, 2, 3, \dots, L-1),$$

имеющие второй порядок точности относительно пространственных параметров разностной сетки. На оси симметрии $r = 0$

$$u_{0,l} = 0, \quad v_{0,l} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_{0,l} = \frac{2\psi_{1,l}}{(\Delta r)^2}. \quad (313)$$

Для определения значений функции тока из уравнения (308), как и в случае декартовой системы координат, чаще всего используется итерационный метод Зейделя в сочетании с последовательной верхней релаксацией или же итерационный метод переменных направлений. При использовании метода Зейделя итерационный процесс строится следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{k,l}^{s+1} = & (1 - \gamma) \psi_{k,l}^s + \\ & + \frac{\gamma}{\frac{2}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{(\Delta r)^2} \left(\frac{r_k}{r_{k+\frac{1}{2}}} + \frac{r_k}{r_{k-\frac{1}{2}}} \right)} \left[r_k \omega_{k,l}^{n+1} + \right. \\ & + \frac{1}{(\Delta z)^2} (\psi_{k,l+1}^s - \psi_{k,l-1}^{s+1}) + \frac{1}{(\Delta r)^2} \times \\ & \left. \times \left(\frac{r_k}{r_{k+\frac{1}{2}}} \psi_{k+1,l}^s - \frac{r_k}{r_{k-\frac{1}{2}}} \psi_{k-1,l}^{s+1} \right) \right]. \quad (314) \end{aligned}$$

Здесь s — номер итерации; γ — релаксационный параметр. При изменении величины сеточных параметров Δr , Δz в диапазоне $1/10$ — $1/20$ оптимальное значение γ близко к 1,5.

В горизонтальном цилиндре круглого сечения плоское конвективное движение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах в безразмерной форме описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla^2 \omega - u \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} +$$

$$+ \text{Gr} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cos \varphi \right), \quad (315)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \Theta - u \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}, \quad (316)$$

$$-\omega = \nabla^2 \psi \left(\nabla^2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (317)$$

Здесь использовано приближение Буссинеска. Переменные r и φ изменяются в диапазонах $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Компоненты скорости

$$u = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (318)$$

соответствующие координатным осям r и φ , выбраны таким образом, чтобы уравнение неразрывности

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad (319)$$

выполнялось автоматически. В качестве единиц расстояния, функции тока, скорости, температуры и времени выбраны радиус цилиндра R , кинематическая вязкость ν , отношение ν/R , характерный перепад температуры ΔT и величина R^2/ν соответственно.

Система (315)–(317) решается при начальных и граничных условиях, определяемых постановкой задачи.

При построении разностной схемы систему (315)–(317) удобно представить в дивергентном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} - ru\omega \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \right.$$

$$\left. - rv\omega \right) + \text{Gr} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cos \varphi \right), \quad (320)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} - ru\Theta \right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} - rv\Theta \right), \quad (321)$$

$$-\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \quad (322)$$

Будем считать, что разностная сетка регулярна по пространственным переменным:

$$r_k = k\Delta r \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, K),$$

$$\varphi_l = l\Delta\varphi \quad (l = 0, 1, 2, \dots, L).$$

Шаг по временной переменной может быть переменным, т. е. $t^{n+1} = t^n + \tau^{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Функцию в узлах расчетной сетки обозначим как обычно $f_{k,l}^n = f(r_k, \varphi_l, t^n)$. Причем отметим, что $f_{k,l}^n \equiv f_{k,L+l}^n$.

Для операторов вида $L_r\Phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{Pr} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} - ru\Phi \right)$, $L_\varphi\Phi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - rv\Phi \right)$ построим аппроксимации, аналогичные описанным в параграфе 3.2 аппроксимациям оператора $L_x\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - u\Phi \right)$. Консервативная симметричная аппроксимация второго порядка точности, например, для этих операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda_r\Phi &= \frac{1}{r_k\Delta r} \left[\frac{r_{k+\frac{1}{2}}}{Pr} \frac{\Phi_{k+1,l} - \Phi_{k,l}}{\Delta r} - \frac{r_{k-\frac{1}{2}}}{Pr} \times \right. \\ &\times \frac{\Phi_{k,l} - \Phi_{k-1,l}}{\Delta r} - \left(r_{k+\frac{1}{2}} u_{k+\frac{1}{2},l} \frac{\Phi_{k+1,l} + \Phi_{k,l}}{2} - \right. \\ &\left. \left. - r_{k-\frac{1}{2}} u_{k-\frac{1}{2},l} \frac{\Phi_{k,l} + \Phi_{k-1,l}}{2} \right) \right], \\ \Lambda_\varphi\Phi &= \frac{1}{\Delta\varphi} \left[\frac{1}{Pr} \left(\frac{\Phi_{k,l+1} - \Phi_{k,l}}{\Delta\varphi} - \frac{\Phi_{k,l} - \Phi_{k,l-1}}{\Delta\varphi} \right) - \right. \\ &\left. - r_k \left(v_{k,l+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_{k,l+1} + \Phi_{k,l}}{2} - v_{k,l-\frac{1}{2}} \frac{\Phi_{k,l} + \Phi_{k-1,l}}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (323)$$

Общая структура разностных схем для решения системы (320) — (322) ничем не отличается от случая декартовой геометрии. Неопределенность некоторых выражений в граничной точке $r=0$ раскрывается обычно по правилу Лопиталья. Для вычисления значений искомых функций в этой точке можно рекомендовать формулы [62]

$$\Theta_0^{n+1} = \Theta_0^n + \tau^{n+1} \left[\frac{1}{\text{Pr}} (\nabla^2 \Theta)_0^n - \frac{1}{L} \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=0}^{L-1} u_{\frac{1}{2}, l}^n \frac{\Theta_{1,l}^n - \Theta_0^n}{\Delta r} \right], \quad (324)$$

$$\omega_0^{n+1} = \omega_0^n + \tau^{n+1} \left[(\nabla^2 \omega)_0^n - \right. \\ \left. - \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} u_{\frac{1}{2}, l}^n \frac{\omega_{1,l}^n - \omega_0^n}{\Delta r} + \frac{\text{Gr}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\frac{\Theta_{1,l}^{n+1} - \Theta_0^n}{\Delta r} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos(l\Delta\varphi) - \frac{\Theta_{1,l+1}^{n+1} - \Theta_{1,l-1}^{n+1}}{2\Delta r \Delta\varphi} \sin(l\Delta\varphi) \right] \right]. \quad (325)$$

Для аппроксимации лапласианов в центральной точке используем формулу, предложенную в работе [63]:

$$(\nabla^2 \Phi)_0 = \frac{4}{(\Delta r)^2} \left[\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \Phi_{1,l} - \Phi_0 \right]. \quad (326)$$

Компоненты скорости вычисляем по формулам

$$u_{k-\frac{1}{2}, l} = - \frac{1}{r_{k-\frac{1}{2}}} \frac{\psi_{k,l+1} + \psi_{k-1,l+1} - \psi_{k,l-1} - \psi_{k-1,l-1}}{4\Delta\varphi}, \\ v_{k,l-\frac{1}{2}} = \frac{\psi_{k+1,l} + \psi_{k+1,l-1} - \psi_{k-1,l} - \psi_{k-1,l-1}}{4\Delta r}. \quad (327)$$

Итерационную формулу для решения уравнения Пуассона (322) методом Зейделя с последовательной верхней релаксацией запишем следующим образом:

$$\psi_{k,l}^{s+1} = (1 - \gamma) \psi_{k,l}^s + \frac{\gamma}{\frac{2r_k}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{r_k (\Delta\varphi)^2}} \left[r_k \omega_{k,l}^{n+1} + \right.$$

$$+ \left[\frac{r_{k+} \frac{1}{2} \psi_{k+1,l}^s + r_{k-} \frac{1}{2} \psi_{k-1,l}^{s+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{\psi_{k,l+1}^s - \psi_{k,l-1}^{s+1}}{r_k (\Delta \varphi)^2} \right].$$

Формула (328) определена для всех узлов сетки с индексом $k \neq 0$. В точке $r = 0$ ($k = 0$) можно использовать формулу

$$\psi_0^{s+1} = (1 - \gamma) \psi_0^s + \gamma \left[\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \psi_{1,l}^s - \frac{(\Delta r)^2}{4} \omega_0^{n+1} \right]. \quad (329)$$

Описанная выше методика расчета конвективных течений и теплообмена в областях цилиндрической формы используется также и при исследовании термоконвективных явлений в прослойках, образованных поверхностями цилиндров с общей осью. В последнем случае задача даже несколько упрощается, поскольку исключается особенность, связанная с вычислением искомых функций на оси $r=0$.

3.9. Схемы повышенного порядка точности

Переход в область высоких температур, больших давлений, неизбежный при решении многих практических вопросов, требует использования численных схем, способных давать решения, соответствующие высокоинтенсивным конвективным процессам. Одна из основных трудностей, встречающихся при этом, — выполнение взаимопrotivоречащих требований устойчивости и точности: или схема устойчива, но тогда аппроксимационная вязкость велика и может значительно превосходить физическую; или схема точна, аппроксимационная вязкость невелика, но вычислительный процесс становится слабо- или вовсе несходящимся.

Данная проблема в какой-то степени может быть решена использованием монотонных разностных схем повышенного порядка точности, что связано, однако, с существенным усложнением численного алгоритма. Это, вероятно, одна из основных причин относительно редкого использования их для решения практических задач. Тем не менее опыт расчетов показывает, что в ряде случаев

применение разностных схем повышенного порядка точности весьма эффективно. В частности, применение разностных схем повышенного порядка точности целесообразно для исследования теплообмена в условиях высокоинтенсивной конвекции ($Ra, Re > 10^6$). Процессы тепло-массопереноса при больших значениях режимных параметров характеризуются образованием пограничных слоев с высокими градиентами температуры и скорости течения, а также мелкомасштабной структурой конвективных движений. Использование монотонных разностных схем первого и второго порядка точности в этом случае малоэффективно, поскольку для получения решения с удовлетворительной точностью они требуют применения очень мелкой сетки. Схемы повышенного порядка точности имеют меньшую погрешность аппроксимации и позволяют получать решение с необходимой точностью на более грубой сетке.

Конечно, при этом необходимо, чтобы разностная схема была монотонной, т. е. удовлетворяла принципу максимума [1] при всех значениях сеточных параметров. Необходимо отметить, что далеко не все схемы повышенного порядка точности, описанные в литературе, обладают свойством монотонности. Приведем монотонную разностную схему третьего порядка точности, разработанную для численного исследования задач конвективного теплообмена [64, 65]:

Обычно при построении разностных схем повышенного порядка точности используют разностные аналоги дифференциальных операторов, определенные при расширенном шаблоне узлов разностной сетки. При этом в приграничных точках сеточной области для получения численного решения приходится конструировать формулы, отличные от тех, по которым рассчитывается решение в ее внутренних точках, т. е. разностная схема становится неоднородной.

Несомненное достоинство приведенной ниже разностной схемы — ее однородность. Значения искомых функций во всех внутренних узлах разностной сетки вычисляются по одним и тем же формулам. Это достигается благодаря тому, что разностная схема определена на минимальном девятиточечном шаблоне.

$$P \{x_r + p\Delta x, y_l + q\Delta y\}, \quad p, q = -1, 0, 1.$$

Порядок аппроксимации повышается здесь в результате разумного использования соотношений, определяемых исходными дифференциальными уравнениями. Такой подход к построению разностных схем повышенного порядка точности, на наш взгляд, весьма перспективен.

Построение разностной схемы проиллюстрируем на примере модельного уравнения

$$L\Phi = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f = 0. \quad (330)$$

Для простоты и большей наглядности выкладок будем считать, что сетка квадратная, т. е. сеточные параметры, характеризующие распределение узлов вдоль осей x и y , одинаковы. Введем следующие безындексные обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{k,l}, & \Phi^+ &= \frac{\Phi + |\Phi|}{2}, & \Phi^- &= \frac{\Phi - |\Phi|}{2}, \\ \Phi_x &= \frac{1}{h} (\Phi_{k+1,l} - \Phi_{k,l}), & \Phi_{\bar{x}} &= \frac{1}{h} (\Phi_{k,l} - \Phi_{k-1,l}), \\ \Phi_y &= \frac{1}{h} (\Phi_{k,l+1} - \Phi_{k,l}), & \Phi_{\bar{y}} &= \frac{1}{h} (\Phi_{k,l} - \Phi_{k,l-1}), \\ \Phi_{x0} &= \frac{1}{2h} (\Phi_{k+1,l} - \Phi_{k-1,l}), & \Phi_{y0} &= \frac{1}{2h} (\Phi_{k,l+1} - \Phi_{k,l-1}), \\ \Phi_{xx}^- &= (\Phi_x^-)_x = \frac{1}{h^2} (\Phi_{k+1,l} - 2\Phi_{k,l} + \Phi_{k-1,l}), \\ \Phi_{yy}^- &= (\Phi_y^-)_y = \frac{1}{h^2} (\Phi_{k,l+1} - 2\Phi_{k,l} + \Phi_{k,l-1}). \end{aligned} \quad (331)$$

В дальнейшем нам понадобятся также разностные операторы

Φ_{xy} , $\Phi_{\bar{x}\bar{y}}$, $\Phi_{\bar{x}y}$, $\Phi_{x\bar{y}}$, $\Phi_{xx\bar{y}}$, $\Phi_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}}$, $\Phi_{\bar{x}\bar{y}\bar{y}}$, $\Phi_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}\bar{y}}$,
 которые строятся аналогичным образом. Например,

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}}^- &= (\Phi_{xx}^-)_{\bar{y}} = \frac{1}{h^3} (\Phi_{k+1,l+1} - 2\Phi_{k,l+1} + \Phi_{k-1,l+1} - \\ &\quad - \Phi_{k+1,l} + 2\Phi_{k,l} - \Phi_{k-1,l}). \end{aligned}$$

Вначале на сеточном шаблоне P построим обычную монотонную аппроксимацию $\Lambda_h \Phi$ дифференциального оператора $L\Phi$ с погрешностью $o(h)$:

$$\Lambda_h \Phi = \frac{1}{P} (\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) - u^+ \Phi_x - u^- \Phi_x - v^+ \Phi_y - v^- \Phi_y + f \quad (332)$$

и выделим в остатке старшие члены порядка $o(h)$ и $o(h^2)$

$$R_1 \Phi = -\frac{h}{2} \left(|u| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + |v| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \sim o(h), \quad (333)$$

$$R_2 \Phi = \frac{h^2}{6} \left(u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right) - \frac{h^2}{12P} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) \sim o(h^2). \quad (334)$$

Таким образом,

$$L\Phi = \Lambda_h \Phi + R_1 \Phi + R_2 \Phi + o(h^3). \quad (335)$$

Очевидно, если аппроксимировать оператор R_1 с погрешностью $o(h^2)$, а оператор R_2 — с погрешностью $o(h)$ и подставить эти приближения в выражение (335), то в результате получим аппроксимацию уравнения (330), имеющую погрешность $o(h^3)$. Поскольку нам необходимо построить монотонную конечно-разностную схему, определенную на сеточном шаблоне P , то при аппроксимации R_1 и R_2 , естественно, следует обеспечить выполнение условий монотонности и не выходить за рамки шаблона P .

Для упрощения задачи построения монотонной разностной схемы преобразуем выражение (333) с учетом формулы (330), чтобы коэффициенты при вторых производных стали положительными:

$$R_1 \Phi = \frac{h}{2} |u| \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - P \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f \right) \right] + \frac{h}{2} |v| \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - P \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f \right) \right]. \quad (336)$$

Построим монотонную аппроксимацию оператора $R_1\Phi$:

$$R_{1h}\Phi = \frac{h}{2} [|v| \Phi_{xx} + |u| \Phi_{yy} - P(|u| + |v|)(u^+ \Phi_x + u^- \Phi_x + v^+ \Phi_y + v^- \Phi_y - f)]. \quad (337)$$

Разностный оператор R_{1h} аппроксимирует дифференциальный оператор R_1 с погрешностью $o(h)$. Старший член остатка при этом равен

$$S\Phi = -\frac{h^2}{4} P(|u| + |v|) \left(|u| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + |v| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right). \quad (338)$$

Преобразуем $S\Phi$ таким же образом, как и $R_1\Phi$, т. е. с учетом уравнения (330) запишем

$$S\Phi = \frac{h^2}{4} P(|u| + |v|) \left\{ |u| \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - P \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f \right) \right] + |v| \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - P \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f \right) \right] \right\} \quad (339)$$

и построим монотонную аппроксимацию

$$S_h\Phi = \frac{h^2}{4} P(|u| + |v|) (|u| \Phi_{yy} + |v| \Phi_{xx}) - \left[\frac{hP}{2} (|u| + |v|) \right]^2 (u^+ \Phi_x + u^- \Phi_x + v^+ \Phi_y + v^- \Phi_y - f) \quad (340)$$

с погрешностью $o(h)$. Следовательно, имеет место равенство

$$L\Phi = (\Lambda_h + R_{1h} + S_h)\Phi + R_2\Phi + o(h^3). \quad (341)$$

В правой части этого выражения первый член представляет собой разностное выражение, а второй — дифференциальное. Чтобы аппроксимировать остаток $R_2\Phi$ на сеточном шаблоне P , его необходимо преобразовать, чтобы избавиться от производных высоких порядков, не поддающихся обработке на P . Применяя операцию дифференцирования к уравнению (330), представим производные $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}$,

$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}$ как линейные комбинации более простых функций. Подставляя эти выражения в формулу (334), получаем

$$R_2 \Phi = \frac{h^2}{12} \left[A_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + A_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2A_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - A_{10} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - A_{01} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - 2u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - 2v \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{2}{P} \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - P \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right], \quad (342)$$

где

$$A_{20} = u^2 P - 2 \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$A_{02} = v^2 P - 2 \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$A_{11} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - uvP;$$

$$A_{10} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - P \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

$$A_{01} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - P \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (343)$$

Для построения монотонной аппроксимации необходимо преобразовать выражение (342), чтобы коэффициенты при производных $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ стали положительными.

При этом к правой части (342) следует добавить член $\frac{h^2}{12} |A_{11}| \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$ и вычесть равный ему по величине член $\frac{h^2}{12} |A_{11}| P \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f \right)$. В результате имеем

$$R_2 \Phi = \frac{h^2}{12} \left\{ \frac{2}{P} \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - 2v \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2A_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - A_{10} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - A_{01} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \\
& - P \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} - f \right) + \left[|A_{11}| + u^2 P - \right. \\
& - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^- \left. \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left[|A_{11}| + v^2 P + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^- \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \\
& - \left[P |A_{11}| + 2P \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ + 2P \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^+ \right] \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \times \right. \\
& \left. \right) \quad (344)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f \left. \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\
& + P |A_{11}| \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f \right) \left. \right\} = \frac{h^2}{12} \left[\frac{2}{P} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - \right. \\
& - 2u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - 2v \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} - 2A_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + B_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\
& \left. + B_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - B_{10} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - B_{01} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + B_f \right],
\end{aligned}$$

где

$$B_{20} = |A_{11}| + u^2 P - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^- + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^+ \geq 0;$$

$$B_{02} |A_{11}| + v^2 P + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^- \geq 0;$$

$$B_{10} = A_{10} + uP \left[|A_{11}| + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^+ \right];$$

$$B_{01} = A_{01} + vP \left[|A_{11}| + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^+ \right]; \quad (345)$$

$$B_f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - P \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) +$$

$$+ P \left[|A_{11}| + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^+ \right] f.$$

Согласно определению, $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\omega =$
 $= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, а следовательно, справедливы соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|, \quad (346)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Подставив формулы (346) в (345), находим

$$A_{11} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - uvP,$$

$$B_{20} = |A_{11}| + u^2P + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \right),$$

$$B_{02} = |A_{11}| + v^2P + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right), \quad (347)$$

$$B_{10} = -\frac{\partial \omega}{\partial y} - Pv \frac{\partial u}{\partial y} + Pu \left(|A_{11}| + 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| - \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$B_{01} = \frac{\partial \omega}{\partial x} - Pu \frac{\partial v}{\partial x} + Pv \left(|A_{11}| + 2 \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| - \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$B_f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - P \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) +$$

$$+ \left(|A_{11}| + 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) Pf.$$

Для построения разностного аналога $R_2 \Phi$ аппроксимируем производные от функции Φ , содержащиеся в (344):

$$B_{10} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx B_{10}^+ \Phi_{\bar{x}} + B_{10}^- \Phi_x, \quad B_{01} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx B_{01}^+ \Phi_{\bar{y}} + B_{01}^- \Phi_y,$$

$$B_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx B_{20} \Phi_{\bar{x}\bar{x}}, \quad B_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx B_{02} \Phi_{\bar{y}\bar{y}},$$

$$2A_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \approx A_{11}^+ (\Phi_{\bar{x}\bar{y}} + \Phi_{x\bar{y}}) + A_{11}^- (\Phi_{\bar{x}y} + \Phi_{xy}), \quad (348)$$

$$u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \approx u^+ \Phi_{xyy}^- + u^- \Phi_{xyy}^-, \quad v \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \approx v^+ \Phi_{xxy}^- + v^- \Phi_{xxy}^-,$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \Phi_{xxyy}^-.$$

Подставив полученную таким образом аппроксимацию в выражение (341), получаем конечно-разностную схему

$$L\Phi = (\Lambda_h + R_{1h} + S_h + R_{2h})\Phi + o(h^3), \quad (349)$$

которая аппроксимирует уравнение (330) с погрешностью порядка $o(h^3)$. Систему разностных уравнений запишем в виде итерационного алгоритма Зейделя

$$\Phi_{k,l}^{s+1} = \frac{1}{M} (C_1 \Phi_{k+1,l}^s + C_2 \Phi_{k-1,l}^{s+1} + C_3 \Phi_{k,l+1}^s + C_4 \Phi_{k,l-1}^s + C_5 \Phi_{k+1,l+1}^s + C_6 \Phi_{k-1,l+1}^s + C_7 \Phi_{k+1,l-1}^{s+1} + C_8 \Phi_{k-1,l-1}^{s+1} + F), \quad (350)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{3h} \left(\frac{2}{Ph} + |v| \right) - \frac{u - |u|}{2} \left[\frac{2}{3h} + \frac{P}{2} (|u| + |v|) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{Ph}{2} (|u| + |v|) \right) \right] + \frac{P}{4} |v| (|u| + |v|) - \\ - \frac{h}{12} \cdot \frac{B_{10} - |B_{10}|}{2} + \frac{1}{12} \left[u^2 P + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \right) \right] \geq 0;$$

$$C_2 = \frac{1}{3h} \left(\frac{2}{Ph} + |v| \right) + \frac{u + |u|}{2} \left[\frac{2}{3h} + \frac{P}{2} (|u| + |v|) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{Ph}{2} (|u| + |v|) \right) \right] + \frac{P}{4} |v| (|u| + |v|) + \\ + \frac{h}{12} \cdot \frac{B_{10} + |B_{10}|}{2} + \frac{1}{12} \left[u^2 P + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \right) \right] \geq 0;$$

$$C_3 = \frac{1}{3h} \left(\frac{2}{Ph} + |u| \right) - \frac{v - |v|}{2} \left[\frac{2}{3h} + \frac{P}{2} (|u| + |v|) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{Ph}{2} (|u| + |v|) \right) \right] + \frac{P}{4} |u| (|u| + |v|) -$$

$$-\frac{h}{12} \cdot \frac{B_{01} - |B_{01}|}{2} + \frac{1}{12} \left[v^2 P + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) \right] \geq 0;$$

$$G_4 = \frac{1}{3h} \left(\frac{2}{Ph} + |u| \right) + \frac{v + |v|}{2} \left[\frac{2}{3h} + \frac{P}{2} (|u| + |v|) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{Ph}{2} (|u| + |v|) \right) \right] + \frac{P}{4} |u| (|u| + |v|) + \\ + \frac{h}{2} \cdot \frac{B_{01} + |B_{01}|}{2} + \frac{1}{12} \left[v^2 P + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) \right] \geq 0;$$

$$C_5 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{Ph^2} - \frac{u - |u|}{2} - \frac{v - |v|}{2} - \frac{A_{11} - |A_{11}|}{4} \right) \geq 0;$$

$$C_6 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{Ph^2} + \frac{u + |u|}{2} - \frac{v - |v|}{2} + \frac{A_{11} + |A_{11}|}{4} \right) \geq 0;$$

$$C_7 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{Ph^2} - \frac{u - |u|}{2} + \frac{v + |v|}{2} + \frac{A_{11} + |A_{11}|}{4} \right) \geq 0;$$

$$C_8 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{Ph^2} + \frac{u + |u|}{2} + \frac{v + |v|}{2} - \frac{A_{11} - |A_{11}|}{4} \right) \geq 0;$$

$$F = \left[1 + \frac{Ph}{2} (|u| + |v|) \left(1 + \frac{Ph}{2} (|u| + |v|) \right) \right] f + \\ + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - P \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \left(|A_{11}| + 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) P \right] f;$$

$$M = \sum_{i=1}^8 C_i.$$

Нетрудно проверить, что разностная схема (349) монотонна при всех значениях h , а итерационный процесс (350) для нее всегда равномерно сходится.

Поскольку разностная схема (349) имеет погрешность аппроксимации $o(h^3)$, то, естественно, коэффициенты и свободные члены также должны быть аппроксимированы

с третьим порядком точности. Методику такой аппроксимации рассмотрим на примере

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{k,l+1} - \psi_{k,l-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + o(h^4). \quad (351)$$

Дифференцируя уравнение для функции тока, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = & - \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = - \frac{1}{2h} (\omega_{k,l+1} - \omega_{k,l-1}) - \\ & - \frac{1}{2h^3} (\psi_{k+1,l+1} - 2\psi_{k,l+1} + \psi_{k-1,l+1} - \psi_{k+1,l-1} + \\ & + 2\psi_{k,l-1} + \psi_{k-1,l-1}) + o(h^2). \end{aligned} \quad (352)$$

Подставляя уравнение (352) в (351), получаем разностную формулу повышенного порядка точности для компоненты скорости в следующем виде:

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{12h} (\psi_{k+1,l+1} + 4\psi_{k,l+1} + \psi_{k-1,l+1} - \psi_{k+1,l-1} - \\ & - 4\psi_{k,l-1} - \psi_{k-1,l-1}) + \frac{h}{12} (\omega_{k,l+1} - \omega_{k,l-1}) + o(h^4). \end{aligned} \quad (353)$$

Аналогично строятся и другие приближения:

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{12h} (\psi_{k-1,l+1} + 4\psi_{k-1,l} + \psi_{k-1,l-1} - \psi_{k+1,l+1} - \\ & - 4\psi_{k+1,l} - \psi_{k+1,l-1}) + \frac{h}{12} (\omega_{k+1,l} - \omega_{k-1,l}) + o(h^4), \end{aligned} \quad (354)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4h^2} (\psi_{k+1,l+1} - \psi_{k+1,l-1} - \psi_{k-1,l+1} + \\ & + \psi_{k-1,l-1}) + \frac{1}{24} (\omega_{k+1,l+1} - \omega_{k+1,l-1} - \omega_{k-1,l+1} + \\ & + \omega_{k-1,l-1}) + o(h^4), \end{aligned} \quad (355)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = & \frac{1}{12h^2} [\psi_{k+1,l+1} - 2\psi_{k+1,l} + \psi_{k+1,l-1} + \\ & + 10(\psi_{k,l+1} - 2\psi_{k,l} + \psi_{k,l-1}) + \psi_{k-1,l+1} - 2\psi_{k-1,l} + \psi_{k-1,l-1}] + \\ & + \frac{1}{12} (\omega_{k,l+1} - 2\omega_{k,l} + \omega_{k,l-1}) + o(h^4), \end{aligned} \quad (356)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{12h^2} [\psi_{k+1,l+1} - 2\psi_{k,l+1} + \psi_{k-1,l+1} + \\ &+ 10(\psi_{k+1,l} - 2\psi_{k,l} + \psi_{k-1,l}) + \psi_{k+1,l-1} - 2\psi_{k,l-1} + \psi_{k-1,l-1}] + \\ &+ \frac{1}{12} (\omega_{k+1,l} - 2\omega_{k,l} + \omega_{k-1,l}) + o(h^4). \end{aligned} \quad (357)$$

Наконец, рассмотрим построение разностной аппроксимации третьего порядка точности для свободного члена в уравнении вихря скорости

$$f = \text{Gr} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \text{Gr} \left[\frac{1}{2h} (\Theta_{k+1,l} - \Theta_{k-1,l}) - \frac{h^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} + o(h^4) \right]. \quad (358)$$

Из уравнения температуры имеем

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \text{Pr} \left(u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right). \quad (359)$$

Проинтегрировав это выражение по x , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} &= - \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x \partial y^2} + \text{Pr} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} + u \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} + v \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (360)$$

Подставив выражение для $\frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3}$ в формулу (358), аппроксимируем последнее на сеточном шаблоне P :

$$\begin{aligned} f &= \text{Gr} \left\{ \frac{1}{2h} (\Theta_{k+1,l} - \Theta_{k-1,l}) + \frac{1}{12h} (\Theta_{k+1,l+1} - 2\Theta_{k+1,l} + \right. \\ &\left. + \Theta_{k+1,l-1} - \Theta_{k-1,l+1} + 2\Theta_{k-1,l} - \Theta_{k-1,l-1}) - \right. \\ &- \frac{\text{Pr}}{12h} \left[\frac{1}{4} (\psi_{k+1,l+1} - \psi_{k-1,l+1} - \psi_{k+1,l-1} + \psi_{k-1,l-1}) \times \right. \\ &\times (\Theta_{k+1,l} - \Theta_{k-1,l}) + (\psi_{k,l+1} - \psi_{k,l-1})(\Theta_{k+1,l} - 2\Theta_{k,l} + \\ &\left. + \Theta_{k-1,l}) - (\psi_{k+1,l} - 2\psi_{k,l} + \psi_{k-1,l})(\Theta_{k,l+1} - \Theta_{k,l-1}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\psi_{k+1,l} - \psi_{k-1,l})(\Theta_{k+1,l+1} - \Theta_{k-1,l+1} - \Theta_{k+1,l-1} + \\
 & \quad + \Theta_{k-1,l-1}) \Big\} + o(h^4). \quad (361)
 \end{aligned}$$

Численные эксперименты подтвердили [47] высокую эффективность рассмотренной выше конечно-разностной схемы при исследовании задач высокоинтенсивной конвекции ($Ra > 10^6$). Так, например, при числах Релея $Ra \sim 10^7$ разностная схема (349) на сетке $h = 1/20$ обеспечивала такую же точность, как и схема (278) — (280) на сетке $h = 1/70$, при этом для счета необходимо было примерно в 4 раза меньше машинного времени.

Применение этой схемы в диапазоне чисел Релея $Ra < 10^5$ нецелесообразно, поскольку из-за сложности вычислительного алгоритма она при прочих равных условиях требует в 4—5 раз больше счетного времени, чем, например, разностная схема второго порядка точности. В диапазоне чисел Релея $10^5 < Ra < 10^6$ эти схемы для обеспечения одинаковой точности требуют примерно одинаковых затрат машинного времени. Однако применение разностных схем с погрешностью аппроксимации $o(h^2)$ предпочтительнее, так как они проще в реализации.

Схемы повышенного порядка точности практически незаменимы при исследовании задач высокоинтенсивного конвективного теплообмена при числах Релея $Ra > 10^6$, поскольку схемы с погрешностью аппроксимации порядка $o(h)$ и $o(h^2)$ для обеспечения удовлетворительной точности в этом случае требуют применения очень мелких сеток и соответственно большого объема машинной памяти, которым располагают далеко не все современные ЭВМ.

3.10. Конвективный теплообмен в сжимаемых средах

Выше рассматривались численные методы исследования конвективного теплообмена применительно к системе уравнений Буссинеска. Такой подход к изучению указанных проблем в большинстве случаев вполне оправдан, что подтверждают эксперименты. Однако в тех случаях, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности существенно зависят от температуры, а также при больших значениях параметра сжимаемости, когда плотность газа значительно изменяется по высоте слоя, по-видимому, целе-

сообразнее проводить исследования на основе решения полной системы уравнений сжимаемого вязкого газа.

Система двумерных нестационарных уравнений, описывающих течение и теплообмен однокомпонентного сжимаемого вязкого газа, состоит из дифференциальных уравнений количества движения, неразрывности и энергии и в безразмерном виде в декартовой системе координат записывается следующим образом [66]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & - \frac{1}{\kappa \rho C_M^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{\rho C_R} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - C_{Fx}, \end{aligned} \quad (362)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & - \frac{1}{\kappa \rho C_M^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{\rho C_R} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - C_{Fy}, \end{aligned} \quad (363)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (364)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = & \frac{\kappa}{\rho C_v C_R Pr} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \right] - \frac{P(\kappa - 1)}{\rho C_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ & + \mu \frac{\kappa(\kappa - 1)}{\rho C_v} C_M^2 \Phi, \end{aligned} \quad (365)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Здесь Φ — диссипативная функция.

Обычно рассматривается модель совершенного газа с термодинамическим уравнением состояния $P = \rho R \Theta$ (R — газовая постоянная), которое в безразмерной форме имеет вид

$$P = \rho \Theta. \quad (366)$$

Предполагается, что коэффициенты теплопроводности, динамической вязкости и удельная теплоемкость зависят только от температуры

$$\lambda = \lambda(\Theta), \mu = \mu(\Theta), C_v = C_v(\Theta). \quad (367)$$

В качестве масштабов скорости, плотности, температуры, расстояния, времени, коэффициентов теплопроводности, вязкости, теплоемкости соответственно выбраны следующие величины: $v_1, \rho_1, \Theta_1, L_1, t_1 = L/v_1, \lambda_1, \mu_1, c_{v1}, c_{p1}$. Система (165) — (169) содержит построенные по этим параметрам, выбранным в качестве масштаба, безразмерные комплексы:

$$C_R = \frac{v_1 L \rho_1}{\mu_1}, \quad C_M = \frac{v_1}{\sqrt{\kappa R \Theta_1}}, \quad \kappa = \frac{C_{p1}}{C_{v1}}, \quad (368)$$

$$C_{Fx} = \frac{F_x L}{v_1^2}, \quad C_{Fy} = \frac{F_y L}{v_1^2}, \quad Pr = \frac{\mu_1 C_{p1}}{\lambda_1}.$$

Здесь F_x и F_y — проекция вектора внешних сил на оси координат x и y . При численном исследовании конкретных физических задач система (362) — (366) дополняется граничными и начальными условиями, определяемыми постановкой задачи. В том случае, когда введенные выше масштабы заданы условиями задачи, система безразмерных комплексов (368) вместе с безразмерными параметрами, полученными из начальных и краевых условий и дополнительных соотношений (367), образует полную систему критериев подобия, характеризующих рассматриваемый процесс. Конечно, вопрос о том, какие из безразмерных комплексов должны входить в полную систему критериев подобия, решается для каждой конкретной задачи отдельно.

Для решения указанной системы уравнений можно рекомендовать конечно-разностную схему В. И. Полежаева [66—68], которая успешно применялась им для исследования ряда задач конвективного теплообмена в сжимаемом вязком газе. В ее основу положен принцип дроб-

ных шагов. По своему характеру эта схема является промежуточной между явными и неявными схемами. Инерционные и вязкостные члены в уравнении количества движения вынесены на верхний временной слой, а давление оставлено на нижнем. Это позволило построить вычислительный алгоритм, сводящийся к решению систем разностных уравнений с трехдиагональными матрицами, и для их решения использовать экономичный метод прогонки.

Введем пространственно-временную разностную сетку с координатами узлов (x_k, y_l, t^n) , где $x_k = k\Delta x$ ($k = 0, 1, 2, \dots, K$); $y_l = l\Delta y$ ($l = 0, 1, 2, \dots, L$); $t^n = n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Здесь Δx и Δy — шаги сетки по координатам x и y ; τ — шаг по времени.

Разностная схема, аппроксимирующая уравнения (362) — (367), имеет вид

$$\frac{\bar{u}_{k,l} - u_{k,l}^n}{0,5\tau} = \frac{4}{3\rho_{k,l}^n C_R} (\mu\bar{u})_{xx} - u_{k,l}^n \bar{u}_x^0 + \\ + \frac{1}{\rho_{k,l}^n C_R} (\mu u^n)_{yy} - v_{k,l}^n u_y^0 + \bar{f}_u, \quad (369)$$

$$\frac{\bar{v}_{k,l} - v_{k,l}^n}{0,5\tau} = \frac{1}{\rho_{k,l}^n C_R} (\mu\bar{v})_{xx} - u_{k,l}^n \bar{v}_x^0 + \\ + \frac{4}{3\rho_{k,l}^n C_R} (\mu v^n)_{yy} - v_{k,l}^n v_y^0 + \bar{f}_v, \quad (370)$$

$$\frac{\bar{\rho}_{k,l} - \rho_{k,l}^n}{0,5\tau} = - (\bar{u}\bar{\rho})_x^0 - (\bar{v}\bar{\rho})_y^0, \quad (371)$$

$$\frac{\bar{\Theta}_{k,l} - \Theta_{k,l}^n}{0,5\tau} = \frac{\kappa}{\rho_{k,l} C_{v,k,l} C_R \text{Pr}} (\lambda\bar{\Theta})_{xx} - \bar{u}_{k,l} \bar{\Theta}_x^0 + \\ + \frac{\kappa}{\rho_{k,l} C_{v,k,l} C_R \text{Pr}} (\lambda\Theta^n)_{yy} - \bar{v}_{k,l} \Theta_y^0 + \bar{f}_\Theta, \quad (372)$$

$$\frac{u_{k,l}^{n+1} - \bar{u}_{k,l}}{0,5\tau} = \frac{4}{3\bar{\rho}_{k,l} C_R} (\mu\bar{u})_{xx} - \bar{u}_{k,l} \bar{u}_x^0 + \\ + \frac{1}{\bar{\rho}_{k,l} C_R} (\mu u^{n+1})_{yy} - \bar{v}_{k,l} u_y^{n+1} + \bar{f}_u, \quad (373)$$

$$\frac{v_{k,l}^{n+1} - \bar{v}_{k,l}}{0,5\tau} = \frac{1}{\rho_{k,l} C_R} (\mu \bar{v})_{xx} - u_{k,l}^{n+1} \bar{v}_x^0 +$$

$$+ \frac{4}{3\rho_{k,l} C_R} (\mu v^{n+1})_{yy} - \bar{v}_{k,l} v_y^{n+1} + f_v^{n+1}, \quad (374)$$

$$\frac{\rho_{k,l}^{n+1} - \bar{\rho}_{k,l}}{0,5\tau} = - (u^{n+1} \bar{\rho})_x - (v^{n+1} \rho^{n+1})_y, \quad (375)$$

$$\frac{\Theta_{k,l}^{n+1} - \Theta_{k,l}^n}{0,5\tau} = \frac{\kappa}{\rho_{k,l}^{n+1} C_{v,k,l} C_R \text{Pr}} (\lambda \bar{\Theta})_{xx} - u_{k,l}^{n+1} \bar{\Theta}_x^0 +$$

$$+ \frac{\kappa}{\rho_{k,l}^{n+1} C_{v,k,l} C_R \text{Pr}} (\lambda \Theta^{n+1})_{yy} - v_{k,l}^{n+1} \Theta_y^{n+1} + f_{\Theta}^{n+1}. \quad (376)$$

Здесь введено обозначение разностных операторов:

$$(\mu u)_{xx} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [\mu_{k+\frac{1}{2},l} (u_{k+1,l} - u_{k,l}) -$$

$$- \mu_{k-\frac{1}{2},l} (u_{k,l} - u_{k-1,l})],$$

$$(\mu u)_{yy} = \frac{1}{(\Delta y)^2} [\mu_{k,l+\frac{1}{2}} (u_{k,l+1} - u_{k,l}) -$$

$$- \mu_{k,l-\frac{1}{2}} (u_{k,l} - u_{k,l-1})],$$

$$u_x^0 = \frac{1}{2\Delta x} (u_{k+1,l} - u_{k-1,l}), \quad u_y^0 = \frac{1}{2\Delta y} (u_{k,l+1} - u_{k,l-1}),$$

$$(\mu \rho)_x^0 = \frac{u_{k+1,l} \rho_{k+1,l} - u_{k-1,l} \rho_{k-1,l}}{2\Delta x},$$

$$(v \rho)_y^0 = \frac{v_{k,l+1} \rho_{k,l+1} - v_{k,l-1} \rho_{k,l-1}}{2\Delta y}.$$

Операторы $(\mu v)_{xx}$, $(\mu v)_{yy}$, v_x^0 , v_y^0 , $(\lambda \Theta)_{xx}$, $(\lambda \Theta)_{yy}$ аппроксимируются аналогичным образом. Правые части имеют вид

$$f_u^n = - \frac{1}{\kappa \rho_{k,l}^n C_M^2} \frac{P_{k+1,l}^n - P_{k-1,l}^n}{2\Delta x} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta y \rho_{k,l}^n C_R} \left\{ [\mu_{k,l+1}^n (v_{k+1,l+1}^n - v_{k-1,l+1}^n) - \right. \\
& - \mu_{k,l-1}^n (v_{k+1,l-1}^n - v_{k-1,l-1}^n)] - \frac{2}{3} [\mu_{k+1,l}^n (v_{k+1,l+1}^n - \\
& - v_{k+1,l-1}^n) - \mu_{k-1,l}^n (v_{k-1,l+1}^n - v_{k-1,l-1}^n)] \left. \right\} - C_{Fx}, \quad (377)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_v &= - \frac{1}{\kappa \rho_{k,l}^n C_M^2} \cdot \frac{P_{k,l+1}^n - P_{k,l-1}^n}{2\Delta y} + \\
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta y \rho_{k,l}^n C_R} \left\{ \mu_{k+1,l}^n (\bar{u}_{k+1,l+1} - \bar{u}_{k+1,l-1}) - \right. \\
& - \mu_{k-1,l}^n (\bar{u}_{k-1,l+1} - \bar{u}_{k-1,l-1}) - \frac{2}{3} [\mu_{k,l+1}^n (\bar{u}_{k+1,l+1} - \\
& - \bar{u}_{k-1,l+1}) - \mu_{k,l-1}^n (\bar{u}_{k+1,l-1} - \bar{u}_{k-1,l-1})] \left. \right\} - C_{Fy}, \quad (378)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_\Theta &= - \frac{\Theta_{k,l}^n (\kappa - 1)}{C_{vk,l}^n} \left(\frac{\bar{u}_{k+1,l} - \bar{u}_{k-1,l}}{2\Delta x} + \right. \\
& + \left. \frac{\bar{v}_{k,l+1} - \bar{v}_{k,l-1}}{2\Delta y} \right) + \frac{\mu_{k,l}^n \kappa (\kappa - 1) C_M^2}{\bar{\rho}_{k,l} C_{vk,l}^n C_R} \times \\
& \times \left\{ 2 \left[\left(\frac{\bar{u}_{k+1,l} - \bar{u}_{k-1,l}}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\bar{v}_{k,l+1} - \bar{v}_{k,l-1}}{2\Delta y} \right)^2 \right] + \right. \\
& + \left(\frac{\bar{v}_{k+1,l} - \bar{v}_{k-1,l}}{2\Delta x} + \frac{\bar{u}_{k,l+1} - \bar{u}_{k,l-1}}{2\Delta y} \right)^2 - \\
& - \left. \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{u}_{k+1,l} - \bar{u}_{k-1,l}}{2\Delta x} + \frac{\bar{v}_{k,l+1} - \bar{v}_{k,l-1}}{2\Delta y} \right)^2 \right\}, \quad (379)
\end{aligned}$$

$$P_{k,l}^n = P(\rho_{k,l}^n, \Theta_{k,l}^n), \quad C_{vk,l}^n = C_v(\Theta_{k,l}^n), \quad \lambda_{k,l}^n = \lambda(\Theta_{k,l}^n),$$

$$\mu_{k,l}^n = \mu(\Theta_{k,l}^n), \quad \mu_{k \pm \frac{1}{2}, l}^n = \mu(\Theta_{k \pm \frac{1}{2}, l}^n),$$

$$\Theta_{k \pm \frac{1}{2}, l}^n = \frac{\Theta_{k \pm 1, l}^n + \Theta_{k, l}^n}{2}.$$

Приведенная система аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений (362) — (367) с погрешностью порядка $o(\tau + h^2)$.

Системы разностных уравнений (369) — (379) имеют трехдиагональную структуру и могут быть решены методом прогонки. Сначала в результате последовательного решения разностных уравнений (369) — (372) определяются поля компонент скорости, плотности и температуры на промежуточном временном слое по известным значениям этих величин в момент времени t^n . Затем, решая уравнения (373) — (376), получаем значения указанных величин в момент времени t^{n+1} .

Значения функции тока в отличие от методов численного исследования термоконвективных процессов в несжимаемых средах здесь непосредственно не вычисляются. Значения функций тока ψ могут быть найдены при известных значениях u , v , ρ из уравнений, определяющих функцию тока:

$$\rho v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (380)$$

Предпочтительнее следующий способ расчета. Дифференцируя первое из уравнений (380) по x , второе по y и складывая их, получаем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial \rho u}{\partial y} - \frac{\partial \rho v}{\partial x}. \quad (381)$$

Правая часть здесь известна и в любой точке сетки (x_k, y_l) может быть определена. Решить уравнение (381) при определенных граничных условиях можно одним из методов, описанных в параграфе 3.4.

В заключение заметим, что плотность ρ на границе, как правило, не задается условиями задачи. Она находится из уравнения неразрывности (364) с учетом граничных условий для составляющих скорости u и v . Например, если на границе $x=0$ задано условие прилипания $u=v=0$, то имеет место

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Аппроксимировав это выражение по формуле

$$\frac{\bar{\rho}_{k,l} - \rho_{k,l}^n}{0,5\tau} = - \rho_{k,l}^n \frac{\bar{u}_{1,l} - \bar{u}_{0,l}}{h},$$

получаем

$$\bar{\rho}_{0,l} = \left(1 - \frac{\tau}{2h} \bar{u}_{1,l} \right) \rho_{0,l}^n \quad (\bar{u}_{0,l} = 0). \quad (382)$$

Граничные условия для других величин аппроксимируются так же, как и в разностных схемах, аппроксимирующих (Θ, ω, ψ) -систему.

Условие устойчивости для этой разностной схемы, определенное в результате большого числа численных экспериментов, равно

$$\tau \lesssim \min(\Delta x, \Delta y) C_M. \quad (383)$$

Рассмотренная выше разностная схема особенно эффективна для решения нестационарных задач при малых и умеренных скоростях конвекции, поскольку условие устойчивости (383) не зависит от u и v . При высокоинтенсивной конвекции получение стационарного решения существенно затрудняется вследствие немонотонного характера схемы.

1. А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.
2. С. К. Годунов, В. С. Рябенский. Разностные схемы. М., 1973.
3. Р. Д. Рихтмайер, К. В. Мортон. Разностные методы решения краевых задач. М., 1972.
4. Н. Н. Яненко. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1966.
5. Г. И. Марчук. Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1973.
6. В. С. Рябенский, А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. М., 1956.
7. P. D. Lax, R. D. Richtmyer. Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. Pure. Math., 1956, N 9.
8. А. А. Самарский, А. В. Гулин. Устойчивость разностных схем. М., 1973.
9. В. Вазов, Дж. Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., 1963.
10. В. П. Ильин. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Новосибирск, 1970.
11. С. К. Годунов, В. С. Рябенский. Введение в теорию разностных схем. М., 1962.
12. Р. Белман, Э. Энджел. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М., 1974.
13. R. S. Varga. Matrix iterative analysis. N. Y., 1967.
14. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. М., 1967.
15. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., 1960.
16. J. Crank, P. Nicolson. A practical method for numerical evaluation of solution of partial differential equations of heat-conduction type. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, N 43.
17. E. C. Dufort, S. P. Frankel. Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations. Math. Tables and Other Aids to Computation, t. 7. Paris, 1953.
18. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., 1966.
19. J. Douglas. On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1955, 3, N 1.
20. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1955, 3, N 1.

21. А. В. Лыков, Б. М. Берковский. Конвекция и тепловые волны. М., 1974.
22. S. Ostrach. Convection phenomena in fluids heated from below. Trans. ASME, ser. C., 1967, 79, N 2.
23. J. Boussinesque. Theorie analytique de la chaleur, 2, Paris, Cautier-villars, 1903.
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., 1954.
25. Г. А. Остроумов. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М., 1952.
26. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
27. В. Л. Грязнов, В. И. Полежаев. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений тепловой гравитационной конвекции. М., 1974.
28. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Е. Л. Тарунин. Численное исследование конвективного движения в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
29. Е. Л. Тарунин. Численное исследование свободной конвекции. В кн. «Гидродинамика», вып. 1. Пермь, 1968.
30. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Д. Л. Шварцблат. Стационарная конвекция в вертикальном канале с проницаемыми границами. ПММ, 1969, 33, № 3.
31. Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов. Численное исследование свободной конвекции при нагреве сверху. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
32. В. М. Berkovsky, V. E. Fertman, E. F. Nogotov, E. A. Lipkina, V. G. Bastovoi. Free convection. Progress in heat and mass transfer, 4, 1971.
33. А. В. Лыков, Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов. Разностные методы исследования задач тепловой гравитационной конвекции. В кн. «Тепло- и массоперенос», т. 8. Минск, 1972.
34. Г. И. Бурдэ. Численное исследование конвекции, возникающей при колебаниях температуры на горизонтальных границах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
35. Ф. В. Ключников, Г. Б. Петражицкий. Особенности течения и переноса тепла в прямоугольной полости с нагретым выступом на нижнем основании. «Теплофизика высоких температур», 1971, 9, № 1.
36. М. Хирата, Н. Нишиваки, М. Ито, Х. Мияшита. Теплообмен через вертикальный слой с относительно низким соотношением высоты к толщине. В кн. «Тепло- и массоперенос», т. 9. Минск, 1968.
37. В. И. Полежаев, Ю. В. Вальциферов. Численное исследование нестационарной тепловой конвекции жидкости в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла. В кн. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 3. М., 1971.
38. Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов. Фотоабсорбционная конвекция в полостях. ИФЖ, 1970, 19, № 6.
39. H. Z. Vagstad. Transient laminar free-convection heat and mass transfer in two-dimensional closed containers containing distributed heat source. Paper. ASME, 1965, WA/HT-28.

40. H. Z. Baracat, J. A. Cleark. Analytical and experimental study of the transient laminar convection in partially filled liquid containers. Proc. III Intern. Transf. Conf., t. 2, Chicago, 1966.
41. P. Gert. Numerische Lösung der allgemeinen instationären Bewegungsgleichungen für freie Konvektionströmungen bei hohen Grashofzahlen. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, 1967, 16, N 4.
42. R. K. MacGregor, A. F. Emery. Free convection through vertical plane layer-moderate and high Prandtl number fluids. Trans. ASME, ser. C., 1969, 91, N 3.
43. K. S. Torrance. Comparison of finite-difference computations of natural convection. J. Res. Nat. Stand., 1968, 72, N 4.
44. K. S. Torrance, J. A. Rockett. Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below creeping flow to the onset of laminar instability. J. Fluid Mech., 1969, 36, N 1.
45. А. А. Самарский. О монотонных разностных схемах для эллиптических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора. ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 3.
46. Б. М. Берковский, В. К. Полевиков. Влияние числа Прандтля на структуру и теплообмен при естественной конвекции. ИФЖ, 1973, 24, № 5.
47. В. К. Полевиков. Численные эксперименты с монотонными конечно-разностными схемами для уравнений естественной конвекции. В кн. «Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции». Минск, 1974.
48. Е. Ф. Ноготов, А. К. Синицын. О численном моделировании термоконвективных волн в слоях вязкой несжимаемой жидкости. В кн. «Тезисы докладов 2-й Всесоюзной конференции по современным проблемам тепловой гравитационной конвекции». Пермь, 1975.
49. Е. Ф. Ноготов, А. К. Синицын. Численное исследование термоконвективных волн в слоях ферромагнитной жидкости. В кн. «Исследование конвективных и волновых процессов в ферромагнитных жидкостях». Минск, 1975.
50. А. Том, К. Эйплт. Числовые расчеты полей в технике и физике. М., 1964.
51. L. Woods. Note on the numerical solution of a fourth order differential equation. Aero. Quart., 1954, N 5.
52. Т. В. Кускова. Разностный метод расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. В кн. «Вычислительные методы и программирование», вып. 7. М., 1967.
53. Е. Ф. Ноготов. Автореферат канд. дисс. Минск, 1972.
54. Т. В. Кускова, Л. А. Чудов. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. В кн. «Вычислительные методы и программирование», вып. II. М., 1968.
55. Е. Л. Тарунин, В. А. Онянов. Численные эксперименты по использованию различных разностных схем для задач свободной конвекции в замкнутой области. В кн. «Гидродинамика», вып. 6. Пермь, 1975.
56. А. А. Дородницын, Н. А. Меллер. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье—Стокса. ЖВМ и МФ, 1968, 8, № 2.

57. В. И. Полежаев, В. Л. Грязнов. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье—Стокса в переменных вихрь, функция тока. ДАН СССР, 1974, 219, № 2.
58. Г. И. Марчук, Ю. А. Кузнецов. Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск, 1972.
59. D. Young. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Trans. Amer. Math. Soc., 76, N. Y., 1954.
60. В. И. Полежаев, В. Л. Грязнов. Численное исследование уравнений Навье—Стокса для турбулентной конвекции в вертикальном слое. ДАН СССР, 1976, 228, № 6.
61. К. Е. Пирсон. Численный метод для задач вязкого потока. «Механика», 1969, № 6.
62. В. И. Чернатинский. Численное исследование конвекции в горизонтальном цилиндре круглого сечения. В кн. «Гидродинамика», вып. 7. Пермь, 1974.
63. П. П. Юшков. Труды Ленинградского технологического института холодильной промышленности, т. 14. Л., 1956.
64. В. М. Берковский, В. К. Полевиков. Heat transfer at high-rate free convection. Proc. 5th Internat. Heat Transfer Conf. Tokyo, 1974, 3, NC 3.1.
65. В. К. Полевиков. О построении разностной схемы повышенного порядка точности для задач высокоинтенсивного теплообмена. В кн. «Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции». Минск, 1974.
66. В. И. Полежаев. Численное исследование естественной конвекции жидкостей и газов. В кн. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 4. М., 1971.
67. В. И. Полежаев. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье—Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
68. В. И. Полежаев. Численное решение двумерных нестационарных уравнений Навье—Стокса сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. СО АН СССР, сер. техн., 1967, вып. 3, № 13.

Предисловие . . .	3
-------------------	---

Глава 1

Основные понятия метода конечных разностей

1.1. Идея метода	5
1.2. Понятие аппроксимации	9
1.3. Устойчивость. Теорема сходимости	13
1.4. Исследование устойчивости разностных схем	18
1.5. Построение разностных алгоритмов	25
1.6. Решение разностных уравнений	33

Глава 2

Задачи теплопроводности

2.1. Постановка задач теплопроводности	42
2.2. Разностные алгоритмы решения простейших задач теплопроводности	46
2.3. Решение одномерных задач теплопроводности с переменными коэффициентами	54
2.4. Особенности решения задач в цилиндрических и сферических координатах	58
2.5. Метод дробных шагов	60
2.6. Решение многомерных задач теплопроводности	63
2.7. Особенности решения нелинейных задач теплопроводности	72

Глава 3

Конвективный теплообмен

3.1. Уравнения тепловой конвекции для несжимаемых жидкостей	76
3.2. Пространственная аппроксимация	80
3.3. Граничные условия для вихря скорости	86
3.4. Решение уравнения Пуассона для функции тока	92
3.5. Явные схемы	95
3.6. Неявные схемы	99
3.7. Методы решения стационарных задач конвективного теплообмена	105
3.8. Тепловая конвекция в цилиндрических сосудах	109
3.9. Схемы повышенного порядка точности	119
3.10. Конвективный теплообмен в сжимаемых средах	131
Литература	139

Берковский Б. М., Ноготов Е. Ф.

Б 48 Разностные методы исследования задач теплообмена. Мн., «Наука и техника», 1976.

144 с. с ил.

Обобщен опыт советских и зарубежных исследователей в области численного решения задач теплообмена. — Список лит.: с. 139—142 (68 назв.).

Б $\frac{30302-105}{M316-76}$ 104—76

6П2.2

Борис Михайлович Берковский, Евгений Фомич Ноготов

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА

Редактор Н. А. Гурова, обложка И. А. Терехова, художественный редактор Ю. С. Сергачев, технический редактор Г. И. Якубовская, корректор В. И. Борисова. Печатается по постановлению РИСО АН БССР. АТ 14097. Сдано в набор 24.V 1976 г. Подписано в печать 11.X 1976 г. Бум. тип. № 2. Формат 84×108¹/₃₂. Печ. л. 4,5. Усл. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 6,8. Изд. зак. 54. Тип. зак. 668. Тираж 2250 экз. Цена 69 коп. Издательство «Наука и техника». Минск, Ленинский проспект, 68. Типография им. Франциска (Георгия) Скорины издательства «Наука и техника» АН БССР и Госксмитета СМ БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Минск, Ленинский проспект, 68.