Г. Д. БУРДУН, Б. Н. МАРКОВ

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

(389.001(075)

Бурдун Г. Д., Марков Б. Н. Основы метрологии. Учебное пособие для вузов. Издание третье, переработанное — М.: Изд-во стандартов, 1985, 256 с., ил.

В учебном пособии рассмотрены основы метрологии как науки об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства; рассмотрены способы достижения требуемой точности; приведены основные сведения о единицах физических величин, эталонах и образцовых средствах измерения, способах передачи размеров единиц от эталонов образцовым и от них рабочим средствам измерений; даны теория погрешностей и методы математической обработки результатов измерений; рассмотрены методы и средства измерений; приведены основные сведения о Государственной метрологической службе СССР, а также данные о международных метрологических организациях.

Учебное пособие предназначено для студентов машиностроительных вузов, а также может быть использовано специалистами, работающими в области измерительной техники.

Табл. 30, илл. 51, библ. 25.

Рецензент д-р техн. наук проф. **В. А. Бодиер**

Б $\frac{30104}{085(02)-85}$

© Издательство стандартов, 1985

ПРЕДИСЛОВИЕ

Научно-технический прогресс во всех отраслях науки и техники тесно связан с ростом требований к объему и качеству измерительной информации. Информация, генерируемая в процессе измерений, теперь уже является не только источником получения новых знаний или средством проверки научных гипотез, но используется непосредственно для управления технологическими процессами. Поэтому от качества измерительной информации в конечном итоге зависит качество продукции, эффективность ее производства и использования.

Эти обстоятельства резко повышают роль метрологии как науки об измерениях, о методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности измерений. Возрастающая роль метрологии подчеркивается и в Постановлении Совета Министров СССР от 4 апреля 1983 г. «Об обеспечении единства измерений в стране».

Повышение роли метрологии в научном и техническом прогрессе, расширение ее задач обусловило введение в учебные планы ряда специальных высших учебных заведений курса «Основы метрологии». Данное пособие написано в соответствии с программой курса «Основы метрологии» для специальности «Приборы точной механики» машиностроительных высших учебных заведений и отражает опыт преподавания этого курса на факультете АСУПП Московского ордена Трудового Красного Знамени станкоинструментального института (Мосстанкин). Читаемый в Мосстанкине курс «Основы метрологии» имеет свои особенности, нашедшие отражение в настоящем пособии.

Основная особенность заключается в том, что студенты приборостроительной специальности в соответствии с учебным планом изучают такие специальные дисциплины, как «Теория и расчет измерительных приборов», «Приборы и методы измерения физических величин», «Измерительные приборы в машиностроении», «Приборы автоматического контроля» и др. В связи с этим отпадает необходимость изложения в курсе «Основы метрологии» и, следовательно, в этом учебном пособии ряда вопросов, относящихся непосредственно к средствам измерений, их точностному расчету, применению, к вопросам их поверки.

В третьем издании нашли свое отражение те изменения, которые произошли в системе метрологического обеспечения страны за прошедшие годы. Введены уточнения и дополнения в соответствии с государственными стандартами, вышедшими в 1975—1984 гг. и последними решениями Генеральных конференций по мерам и весам.

Ценные замечания и предложения по 3-му изданию внес д-р техн. наук проф. В. А. Боднер, которому выражаем глубокое признание.

Глава I

ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ МЕТРОЛОГИИ

§ 1. МЕТРОЛОГИЯ — НАУКА ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ

В практической жизни человек всюду имеет дело с измерениями. На каждом шагу встречаются и известны с незапамятных времен измерения таких величин, как длина, объем, вес, время и др.

Измерения являются одним из важнейших путей познания природы человеком. Они дают количественную характеристику окружающего мира, раскрывая человеку действующие в природе закономерности. Математика, механика, физика стали именоваться точными науками только потому, что благодаря измерениям они получили возможность устанавливать точные количественные соотношения, выражающие объективные законы природы. Д. И. Менделеев выразил значение измерений для науки следующим образом: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немыслима без меры».

Все отрасли техники — от строительной механики и машиностроения до ядерной энергетики — не могли бы существовать без развернутой системы измерений, определяющих как все технологические процессы, контроль и управление ими, так и свойства и качество выпускаемой продукции.

Велико значение измерений в современном обществе. Они служат не только основой научно-технических знаний, но имеют первостепенное значение для учета материальных ресурсов и планирования, для внутренней и внешней торговли, для обеспечения качества продукции, взаимозаменяемости узлов и деталей и совершенствования технологии, для обеспечения безопасности труда и других видов человеческой деятельности.

Особенно возросла роль измерений в наш век широкого внедрения новой техники, развития электроники, автоматизации, атомной энергетики, космических полетов. Высокая точность управления полетами космических аппаратов достигнута благодаря современным совершенным средствам измерений, устанавливаемым как на самих космических аппаратах, так и в измерительно-управляющих центрах.

Большое разнообразие явлений, с которыми приходится сталкиваться, определяет широкий круг величин, подлежащих измерению. Если в конце XVIII в. при установлении метрической системы мер существовала необходимость лишь в измерении длины, площади, объема, вместимости и веса, то в настоящее время круг величин, подлежащих измерению, значительно расширился, включив механические, тепловые, электрические, световые и другие величины.

Во всех случаях проведения измерений, независимо от измеряемой величины, метода и средства измерений, есть общее, что составляет основу измерений, — это сравнение опытным путем данной величины с другой подобной ей, принятой за единицу. При всяком измерении мы с помощью эксперимента оцениваем физическую величину в виде некоторого числа принятых для нее единиц, т. е. находим ее значение.

В настоящее время установлено следующее определение измерения: *измерение* есть нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Простейшим примером измерения является определение с помощью микрометра диаметра обрабатываемого на станке металлического стержня. Вместе с тем в современной технике существуют и более сложные измерения, выполняемые с помощью комплекса специальных средств измерений.

Отраслью науки, изучающей измерения, является метрология. Слово «метрология» образовано из двух греческих слов: метрон — мера и логос — учение. Дословный перевод слова «метрология» — учение о мерах.

Долгое время метрология оставалась в основном описательной наукой о различных мерах и соотношениях между ними. С конца прошлого века благодаря прогрессу физических наук метрология получила существенное развитие. Большую роль в становлении современной метрологии как одной из наук физического цикла сыграл Д. И. Менделеев, руководивший отечественной метрологией в период 1892—1907 гг.

Метрология в ее современном понимании — наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Единство измерений — такое состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах и погрешности измерений известны с заданной вероятностью. Единство измерений необходимо для того, чтобы можно было сопоставить результаты измерений, выполненных в разных местах, в разное время, с использованием разных методов и средств измерений.

Точность измерений характеризуется близостью их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Таким образом, важнейшей задачей метрологии является обеспечение единства и необходимой точности измерений.

В большинстве стран мира мероприятия по обеспечению единства и требуемой точности измерений (узаконение определенных единиц измерений, проведение регулярной поверки мер и измерительных приборов, находящихся в эксплуатации, испытания вновь выпускаемых средств измерений) установлены законодательно. Поэтому один из разделов метрологии называется *законодательной метрологией* и включает комплексы взаимосвязанных и взаимообусловленных общих правил, требований и норм, а также другие вопросы, нуждающиеся в регламентации и контроле со

стороны государства, направленные на обеспечение единства измерений и единообразия средств измерений.

§ 2. ЗНАЧЕНИЕ МЕТРОЛОГИИ ДЛЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА И ЕЕ РОЛЬ В НАРОДНОМ ХОЗЯЙСТВЕ СТРАНЫ

Метрология имеет большое значение для прогресса естественных и технических наук, ибо повышение точности измерений — одно из средств совершенствования путей познания природы человеком, открытий и практического применения точных знаний.

Точные измерения неоднократно позволяли делать фундаментальные открытия. Так, американским ученым А. А. Майкельсоном был поставлен опыт для обнаружения небольшого ожидаемого смещения интерференционной картины, вызываемого, по существовавшему в то время мнению, взаимным движением источника и приемника света. Однако тщательные измерения показали, что смещения не происходит. Результаты этого эксперимента были использованы А. Эйнштейном при создании одной из важнейших теорий современной физики — теории относительности. Повышение точности измерения плотности воды привело в 1932 г. к открытию тяжелого изотопа водорода — дейтерия, ничтожное содержание которого в обычной воде увеличивает ее плотность.

Современная научно-техническая революция обусловила развитие метрологии, связанное с усовершенствованием эталонов, разработкой новых методов точных измерений, осуществлением мероприятий по обеспечению единства и требуемой точности измерений.

Велико практическое значение метрологии для народного хозяйства страны. Она служит научной основой измерительной техники.

Под *измерительной техникой,* в широком смысле этого слова, понимают как все технические средства, с помощью которых выполняют измерения, так и технику проведения измерений.

Измерительная техника в торговле, промышленности, транспорте, связи, медицине и других отраслях народного хозяйства занимает значительное место среди материальных и трудовых ресурсов современного общества. Только в СССР ежедневно выполняются несколько миллиардов различных измерений, они составляют сущность профессии не менее 3 миллионов трудящихся. Доля затрат на измерительную технику в настоящее время достигает 20—25% всех затрат на оборудование в машиностроении, в радиоэлектронной, химической, самолетостроительной и ряде других отраслей промышленности.

Для удовлетворения нужд народного хозяйства страны в проведении измерений на необходимом научно-техническом уровне создана Государственная метрологическая служба СССР, задача которой — обеспечение единства и достоверности измерений и единообразия средств измерений.

Особую роль играет метрология в решении важнейшей задачи,

стоящей перед нашей промышленностью — повышении технического уровня и качества продукции, и не только потому, что все показатели качества представляют собой величины, контролируемые при помощи соответствующих средств измерений. Современное развитие технологии производства свидетельствует об органической связи ее с метрологией и требует обеспечения необходимых параметров качества в процессе производства продукции. В машиностроении это достигается путем применения активного контроля при изготовлении изделий на металлообрабатывающих станках, в металлургической, химической и других отраслях промышленности путем автоматического регулирования производственных процессов.

Для обеспечения научно-технического прогресса метрология должна опережать в своем развитии другие области науки и техники, ибо для каждой из них точные измерения являются одним из основных путей их совершенствования.

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерение является важнейшим понятием в метрологии. Это организованное действие человека, выполняемое для количественного познания свойств физического объекта с помощью определения опытным путем значения какой-либо физической величины.

Существует несколько видов измерений. При классификации их обычно исходят из характера зависимости измеряемой величины от времени, вида уравнения измерений, условий, определяющих точность результата измерений, и способов выражения этих результатов.

По характеру зависимости измеряемой величины от времени измерения разделяются на:

статические, при которых измеряемая величина остается постоянной во времени,

динамические, в процессе которых измеряемая величина изменяется и является непостоянной во времени.

Статическими измерениями являются, например, измерения размеров тела, постоянного давления, динамическими — измерения пульсирующих давлений, вибраций.

По способу получения результатов измерений (виду уравнения измерений) их разделяют на прямые, косвенные, совокупные и совместные.

Прямые — это измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно из опытных данных. Прямые измерения можно выразить формулой $Q=X$, где Q — искомое значение измеряемой величины, а X — значение, непосредственно получаемое из опытных данных.

При прямых измерениях экспериментальным операциям подвергают измеряемую величину, которую сравнивают с мерой непосредственно или же с помощью измерительных приборов, градуированных в требуемых единицах. Примерами прямых измере-

ний служат измерения длины тела масштабной линейкой, массы при помощи весов и др. Прямые измерения широко применяются в машиностроении (измерения размерных параметров), а также при контроле технологических процессов (измерение давления, температуры и др.).

Косвенные — это измерения, при которых искомую величину определяют на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

При косвенных измерениях измеряют не собственно определяемую величину, а другие величины, функционально с ней связанные. Значение измеряемой величины находят путем вычисления по формуле $Q=f(X_1, X_2, X_3, \ldots)$, где Q — искомое значение косвенно измеряемой величины; f — знак функциональной зависимости, форма которой и природа связанных ею величин заранее известны; $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — значения величин, измеренных прямым способом.

Примерами косвенных измерений могут служить определение объема тела по прямым измерениям его геометрических размеров, нахождение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения.

Косвенные измерения широко распространены в тех случаях, когда искомую величину невозможно или слишком сложно измерить непосредственно или когда прямое измерение дает менее точный результат. Роль косвенных измерений особенно велика при измерении величин, недоступных непосредственному экспериментальному сравнению, например размеров астрономического или внутриатомного порядка.

Совокупные — это производимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомую величину определяют решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин.

Примером совокупных измерений является определение массы отдельных гирь набора (калибровка по известной массе одной из них и по результатам прямых сравнений масс различных сочетаний гирь).

Пусть, например, необходимо произвести калибровку разновеса, состоящего из гирь массой 1, 2, 2*, 5, 10 и 20 кг (звездочкой отмечена гиря, имеющая то же самое номинальное значение). Калибровка состоит в определении массы каждой гири по одной образцовой гире, например по гире массой 1 кг. Для этого проведем измерения, меняя каждый раз комбинацию гирь (цифры показывают массу отдельных гирь, 1 об — обозначает массу образцовой гири в 1 кг):

$$1 = 1 \text{ об} + a,$$
$$1 + 1 \text{ об} = 2 + b,$$
$$2^* = 2 + c,$$
$$1 + 2 + 2^* = 5 + d \text{ и т. д.}$$

Буквы a, b, c и d означают грузики, которые приходится прибавлять или отнимать от массы гири, указанной в правой

части уравнения, для уравновешивания весов. Решив эту систему уравнений, можно определить значение массы каждой гири.

Совместные — это производимые одновременно измерения двух или нескольких неодноименных величин для нахождения зависимостей между ними.

В качестве примера совместных измерений можно назвать измерение электрического сопротивления при 20° С и температурных коэффициентов измерительного резистора по данным прямых измерений его сопротивления при различных температурах.

По условиям, определяющим точность результата, измерения делятся на три класса.

1. *Измерения максимально возможной точности,* достижимой при существующем уровне техники.

К ним относятся в первую очередь эталонные измерения, связанные с максимально возможной точностью воспроизведения установленных единиц физических величин, и, кроме того, измерения физических констант, прежде всего универсальных (например, абсолютного значения ускорения свободного падения, гиромагнитного отношения протона и др.).

К этому же классу относятся и некоторые специальные измерения, требующие высокой точности.

2. *Контрольно-поверочные измерения,* погрешность которых с определенной вероятностью не должна превышать некоторое заданное значение.

К ним относятся измерения, выполняемые лабораториями государственного надзора за внедрением и соблюдением стандартов и состоянием измерительной техники и заводскими измерительными лабораториями и осуществляемые такими средствами измерений и по такой методике, которые гарантируют погрешность результата с определенной вероятностью, не превышающую некоторого, заранее заданного значения.

3. *Технические измерения,* в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений.

Примерами технических измерений являются измерения, выполняемые в процессе производства на машиностроительных предприятиях, на щитах распределительных устройств электрических станций и др.

По способу выражения результатов измерений различают абсолютные и относительные измерения.

Абсолютными называются измерения, которые основаны на прямых измерениях одной или нескольких основных величин или на использовании значений физических констант.

Примером абсолютных измерений может служить определение длины в метрах, силы электрического тока в амперах, ускорения свободного падения в метрах на секунду в квадрате.

Относительными называются измерения отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы, или измерения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную.

В качестве примера относительных измерений можно привести измерение относительной влажности воздуха, определяемой как отношение количества водяных паров в 1 м^3 воздуха к количеству водяных паров, которое насыщает 1 м^3 воздуха при данной температуре.

Основными характеристиками измерений являются: принцип измерений, метод измерений, погрешность, точность, правильность и достоверность измерений.

Принцип измерений — физическое явление или совокупность физических явлений, положенных в основу измерений. Например, измерение массы тела при помощи взвешивания с использованием силы тяжести, пропорциональной массе, измерение температуры с использованием термоэлектрического эффекта.

Метод измерений — совокупность приемов использования принципов и средств измерений. Средствами измерений являются используемые технические средства, имеющие нормированные метрологические свойства.

Погрешность измерений — разность между полученным при измерении X' и истинным Q значениями измеряемой величины. Погрешность измерения Δ определяется формулой $\Delta = X' - Q$.

Погрешность измерений вызывается несовершенством методов и средств измерений, непостоянством условий наблюдения, а также недостаточным опытом наблюдателя или особенностями его органов чувств.

Как указывалось выше, точность измерений — это характеристика измерений, отражающая близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Количественно точность можно выразить величиной, обратной модулю относительной погрешности:

$$\varepsilon = \left|\frac{\Delta}{Q}\right|^{-1}.$$

Например, если погрешность измерений равна $10^{-2}\% = 10^{-4}$, то точность равна 10^4.

Правильность измерения определяется как качество измерения, отражающее близость к нулю систематических погрешностей результатов (т. е. таких погрешностей, которые остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины). Правильность измерений зависит, в частности, от того, насколько действительный размер единицы, в которой выполнено измерение, отличается от ее истинного размера (по определению), т. е. от того, в какой степени были правильны (верны) средства измерений, использованные для данного вида измерений.

Важнейшей характеристикой качества измерений является их *достоверность;* она характеризует доверие к результатам измерений и делит их на две категории: достоверные и недостоверные, в зависимости от того, известны или неизвестны вероятностные характеристики их отклонений от истинных значений соответствую-

щих величин. Результаты измерений, достоверность которых неизвестна, не представляют ценности и в ряде случаев могут служить источником дезинформации.

Наличие погрешности ограничивает достоверность измерений, т. е. вносит ограничение в число достоверных значащих цифр числового значения измеряемой величины и определяет точность измерений.

§ 4. ГОСУДАРСТВЕННЫЕ НАУЧНЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ УЧРЕЖДЕНИЯ СССР

Первым научным метрологическим учреждением в России была созданная в 1893 г. Д. И. Менделеевым Главная палата мер и весов. Ее задача состояла в «сохранении в государстве единообразия, верности и взаимосоответствия мер и весов». Главная палата провела большую работу по организации метрологической службы в России, а в период 1918—1927 гг. — по внедрению метрической системы мер в СССР.

Д. И. Менделеев, руководя Главной палатой мер и весов в течение последних пятнадцати лет своей жизни, не только лично участвовал в важнейших научных метрологических исследованиях (возобновлении прототипов русских мер, точных измерениях массы, определении плотности спиртовых растворов, измерении ускорения свободного падения и др.), но и создал центральное метрологическое учреждение, стоящее на уровне науки своего времени, организовал поверочное дело в стране.

В настоящее время на базе Главной палаты существует высшее научно-метрологическое учреждение нашей страны — НПО ВНИИМ им. Д. И. Менделеева.

В лабораториях института разрабатываются и хранятся государственные эталоны единиц измерений, разрабатываются и совершенствуются методы точных измерений физических величин, определяются физические константы, характеристики веществ и материалов. Тематика научных работ института охватывает: линейные, угловые, оптические и фотометрические измерения, измерения массы, плотности, вязкости, силы, твердости, скорости, ускорений, вибраций, давлений, вакуума, измерения температурных, теплофизических и термохимических характеристик, pH-измерения, измерения влажности, составов газов, акустические, электрические и магнитные, радиотехнические и ионизирующих излучений.

В настоящее время в НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева» осуществляется цикл работ по созданию новой системы взаимоувязанных естественных эталонов, основанных на применении фундаментальных физических констант и макроскопических квантовых эффектов (эталон вольта, основанный на эффекте Джозефсона, эталон Ома с использованием эффекта квантования сопротивления Холла).

В 1955 г. под Москвой был создан второй крупнейший метрологический центр нашей страны — Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений (ВНИИФТРИ). Институт разрабатывает эталоны и средства точных измерений в ряде важнейших областей науки и техники, имеющих особое значение для научно-технического прогресса в радиоэлектронике, службе времени и частоты, акустике, в области ионизирующих излучений, высоких давлений, низких температур, автоматизации, анализ и обработки информации. Институт имеет филиал в Казани.

В Москве на базе существующего с 1934 г. Московского государственного института мер и измерительных приборов в 1955 г. создан Всесоюзный научно-исследовательский институт Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР (ВНИИГК), являющийся головной научной организацией в области прикладной и законодательной метрологии. С 1972 г. институт реорганизован во Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологической службы (ВНИИМС).

Кроме трех всесоюзных научно-исследовательских метрологических институтов в настоящее время работают научно-исследовательские метрологические институты в Харькове, Новосибирске, Свердловске (свердловский филиал ВНИИМ), Тбилиси, Иркутске, Хабаровске и Львове.

В союзных республиках организованы республиканские центры стандартизации и метрологии (РЦСМ) или республиканские лаборатории государственного надзора за стандартизацией и измерительной техникой (РЛГН), зональные и межобластные центры стандартизации и метрологии (ЦСМ), а в областных центрах и крупных городах — лаборатории государственного надзора за внедрением и соблюдением стандартов и состоянием измерительной техники (ЛГН) и их отделения.

Руководство метрологическими учреждениями страны осуществляет Государственный комитет СССР по стандартам (Госстандарт).

§ 5. МЕЖДУНАРОДНЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ОРГАНИЗАЦИИ

Рост культурных и экономических связей между странами поставил в качестве неотложной задачи обеспечение международного единообразия мер.

Первым шагом в этом направлении было установление в конце XVIII века во Франции, в период Великой Французской революции, метрической системы мер, которая, по мысли ее создателей, должна была служить «на все времена, для всех народов». Однако только во второй половине XIX века метрическая система получила признание в качестве международной. В этом направлении большую роль сыграла Петербургская Академия наук.

В 1870 г. в Париже по предложению Петербургской Академии наук было созвано совещание, которое должно было «принять меры для привлечения внимания правительств разных стран к необходимости установления прототипов мер». Петербургская Академия наук предложила организовать международную комиссию, которой было бы поручено изготовить прототипы мер длины и массы. Такая комиссия была организована и в 1872 г. приняла решение о создании платино-иридиевых эталонов метра и килограмма, которые должны были представлять основные единицы метрической системы.

20 мая 1875 г. 17 государств, в том числе и Россия, на Международной Дипломатической конференции по метру (в которой участвовали дипломатические представители этих стран) «для обеспечения международного единства и усовершенствования метрической системы» подписали Метрическую конвенцию.

В соответствии с этой конвенцией устанавливалось международное сотрудничество стран, подписавших ее, путем:

а) создания научного учреждения — Международного бюро мер и весов (МБМВ), содержащегося на средства всех стран, подписавших Метрическую конвенцию;

б) учреждения Международного комитета мер и весов (МКМВ) в составе ученых разных стран, осуществляющего руководство деятельностью Международного бюро мер и весов;

в) созыва не реже одного раза в шесть лет генеральных конференций по мерам и весам (ГКМВ) для «обсуждения и принятия необходимых мер по распространению и усовершенствованию метрической системы».

Международное бюро мер и весов, находящееся в Севре (близ Парижа), хранит международные прототипы мер (метра и килограмма), имеет международные эталоны электрических и световых единиц и радиоактивности, организует регулярные международные сличения национальных эталонов длины, массы, электродвижущей силы, электрического сопротивления, силы света, светового потока, источников ионизирующих излучений, а также отдельные международные сличения исходных образцовых мер (платиновых термометров сопротивления, температурных ламп, измерительных приборов на сверхвысоких частотах и др.).

При Международном комитете мер и весов функционируют семь консультативных комитетов: по единицам, по определению метра, по определению секунды, по термометрии, по электричеству, по фотометрии и по эталонам для измерений ионизирующих излучений.

В 1933 г. ученые ВНИИМ поставили на Генеральной конференции по мерам и весам вопрос о международном сотрудничестве н в области законодательной метрологии. Этот вопрос изучался на Международной конференции по прикладной метрологии (1937 г.) и во Временном международном комитете законодательной метрологии (1946—1956 гг.). В результате этого в 1956 г. была подписана межправительственная конвенция об учреждении Международной организации законодательной метрологии (МОЗМ).

МОЗМ призвана решать следующие основные задачи:

а) создание центра документации и информации о национальных службах контроля за измерительными приборамн, подлежащимн надзору в соответствии с правилами, установленными законами, и об их поверке;

б) перевод и издание текстов законодательных правил об измерительных приборах и их использовании;

в) изучение с целью унификации методов и правил решения тех задач законодательного и распорядительного характера в области законодательной метрологии, которые представляют международный интерес;

г) составление типового проекта закона и регламента, относящихся к измерительным приборам и их применению;

д) разработка проекта материальной организации типовой службы по поверке измерительных приборов и контролю за ними;

е) установление характеристик и качеств, которые должны быть присущи измерительным приборам, рекомендованным для применения в международном масштабе.

При организации существует Международное бюро законодательной метрологии, находящееся в Париже. Его деятельностью руководит Международный комитет законодательной метрологии. В соответствии с конвенцией не реже одного раза в шесть лет созываются международные конференции по законодательной метрологии, в которых участвуют полномочные представители всех стран — членов организации. В Международной организации законодательной метрологии в настоящее время функционируют 140 секретариатов-докладчиков, закрепленных за метрологическими службами отдельных стран и разрабатывающих как общие вопросы законодательной метрологии (понятие о типах, образцах и системах измерительных приборов, классы точности измерительных приборов, клеймение и маркировка мер и измерительных приборов, составление словаря законодательной метрологии), так и вопросы, относящиеся к отдельным видам измерительных приборов (весам, тахометрам, манометрам, водомерам, счетчикам горючего, электрическим счетчикам, влагомерам зерна, спиртомерам, медицинским термометрам и др.).

Особое значение в международном сотрудничестве имеет сотрудничество метрологов стран—членов СЭВ. При Постоянной Комиссии СЭВ по сотрудничеству в области стандартизации в 1971 г. была создана секция по метрологии, одной из главных задач которой является совершенствование эталонной базы каждой из стран — членов СЭВ. Для доведения результатов совместных научно-исследовательских работ до практического использования создано НПО «Интерэталонприбор».

В 1958 г. по инициативе научно-технических обществ ряда стран была создана Международная Конференция по измерительной технике и приборостроению (ИМЕКО), объединяющая в настоящее время научно-технические общества по измерительной технике и приборостроению разных стран мира. ИМЕКО регулярно, раз в три года, созывает международные конгрессы по измерительной технике и приборостроению. В промежутках между конгрессами проводятся симпозиумы по отдельным проблемам метрологии, измерительной техники и технологии приборостроения. Генеральный Комитет ИМЕКО находится в Будапеште (Венгрия).

§ 6. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МЕТРОЛОГИИ

Программа КПСС устанавливает, что «максимальное ускорение научно-технического прогресса — важнейшая всенародная задача». Научно-технический прогресс определяет и уровень матери-

ального благосостояния народа, и темпы строительства материально-технической базы коммунизма. Ускорение научно-технического прогресса находится в прямой связи с интенсивным развитием метрологии и техники точных измерений, необходимых как для развития естественных и точных наук, так и для создания новой технологии и усовершенствования средств технического контроля и управления. Все это ставит перед метрологией ряд важнейших задач.

В области единиц измерений одной из основных задач является унификация их на базе широкого внедрения единой Международной системы единиц (СИ). Эта система обеспечивает единообразие применяемых единиц для всех областей науки и техники.

Значительно повышаются требования к высшему звену в средствах измерений — к эталонам. Точность измерений в промышленности во многих случаях приближается к предельно возможной при данном состоянии техники и, следовательно, к точности самих эталонов. На очереди дня стоит все более широкое использование фундаментальных физических констант и атомных постоянных, характеризирующихся высокой стабильностью, в качестве основы новых, более совершенных эталонов.

Для поддержания единства измерений, проводимых в разных местах и в разное время, необходимо обеспечить передачу размера единиц от эталонов образцовым, а от них рабочим средствам измерений с наименьшей потерей точности. Устройство современных эталонов и способы передачи размера единиц должны обеспечивать выполнение этого требования.

Неотложной задачей является распространение точных измерений на области очень малых и больших значений измеряемых величин (малых и больших масс, глубокого вакуума и сверхвысоких давлений, сверхнизких и сверхвысоких температур, сверхвысоких частот и др.). Необходимость передачи размера единиц измерений приборам, измеряющим исчезающе малые или сверхбольшие значения величин, часто не позволяет ограничиваться одним эталоном и требует создания нескольких независимых специальных эталонов для одной и той же величины.

Большое значение также приобретают вопросы проведения предельно точных измерений в особых нестационарных условиях, при динамических режимах, при больших ускорениях, высоких или очень низких температурах, давлениях, частотах.

Развитие измерительных и измерительно-управляющих систем привело к качественным изменениям самого процесса измерения. Кроме величин, сравнивают процессы, имеющие многочисленные параметры и характеристики. Метрологическое обеспечение должно быть распространено и на измерительно-управляющие системы.

Важные задачи стоят и в области теории измерений. Развитие математической статистики и теории случайных функций оказывает влияние на вопросы метрологической обработки результатов измерений.

Ширикое применение автоматических методов контроля и ре-

гулирования требует дополнений к сложившимся метрологическим понятиям и представлениям. Методы и средства измерений, используемые в медицине, строительстве, химической промышленности и других отраслях науки и техники, должны быть усовершенствованы.

Служа научной основой измерительной техники, метрология должна обеспечивать необходимую надежность и правильность получаемой измерительной информации, а также законодательно определять единство измерений в стране, единство методов и средств контроля технологических процессов и испытания продукции. Метрология и обобщает практический опыт в этой области, и соответственно направляет развитие измерительной техники.

Метрология органически связана со стандартизацией, и эта связь выражается прежде всего в стандартизации единиц измерений, системы государственных эталонов, средств измерений и методов поверки, в создании стандартных образцов свойств и состава вещества. В свою очередь, стандартизация опирается на метрологию, обеспечивающую правильность и сопоставимость результатов испытаний материалов и изделий, а также заимствует из метрологии методы определения и контроля показателей качества.

В тесном взаимодействии метрология и стандартизация являются важными рычагами технического прогресса во всех областях науки и народного хозяйства страны.

Глава II

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЕДИНИЦЫ

§ 7. ВИДЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Понятие о физической величине — одно из наиболее общих в физике и метрологии. Согласно ГОСТ 16263—70 «Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения», под *физической величиной* понимается «свойство, общее в качественном отношении многим физическим объектам (физическим системам, их состояниям и происходящим в них процессам), но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта». Так, все тела обладают массой и температурой, но для каждого из них эти параметры различны. То же самое можно сказать и о других величинах — электрическом токе, вязкости жидкостей или потоке излучения.

Для того, чтобы можно было установить различия в количественном содержании в каждом данном объекте свойства, отображаемого физической величиной, вводится понятие *размера физической величины*.

Между размерами каждой физической величины существуют отношения, которые, как оказывается при их подробном изучении, имеют ту же логическую структуру, что и отношения между числовыми формами (целыми, рациональными или действительными числами, векторами, матрицами). Поэтому множество числовых форм с определенными отношениями между ними (типа «больше», «меньше», «равенства», «суммы» и т. д.) может служить моделью физической величины, т. е. множества ее размеров с отношениями между ними.

Если соответствие между формальной моделью и самой физической величиной оказывается достаточно строгим и точным, то изучение физических величин и связей между ними можно свести к исследованию лишь их моделей.

Комплекс правил, в соответствии с которыми числовые формы приписываются размерам величин, определяется наличием тех или иных отношений на множестве их размеров. В связи с этим можно выделить три группы физических величин, измерение которых осуществляется по принципиально различным правилам.

К первой группе отнесем величины, на множестве размеров которых определены лишь отношения типа «тверже — мягче», «теплее—холоднее», «одинаково твердые—одинаково теплые». В математике эти отношения получили названия отношений порядка и эквивалентности. Существование подобных отношений устанавливается теоретически, исходя из общефизических соображений, или экспериментально с помощью специальных технических устройств (средств измерений), либо наблюдателем. Так, мы без труда находим, что медь тверже резины, но для обнаружения различия в твердости двух образцов твердости приходится прибегать к помощи измерительных приборов.

К величинам первой группы относится, например, твердость, определяемая как способность тела оказывать сопротивление проникновению в него другого тела, или температура, понимаемая просто как степень нагретости тела.

Вторая группа величин характеризуется тем, что отношения порядка и эквивалентности имеют место не только между их размерами, но и между различиями (разностями) в парах размеров. К этой группе относятся такие величины, как время, потенциал, энергия или температура, связанная, по определению, со шкалой ртутного термометра. Возможность сравнения разностей их размеров вытекает из самих определений этих величин. Так, разности температур считаются равными, если равны расстояния между соответствующими отметками на шкале ртутного термометра. Способ градуировки шкалы не имеет при этом никакого значения. Ясно, что проверить равенство разностей температуры, определенной просто как степень нагретости тел, не представляется возможным.

На множестве размеров величин третьей группы определены, кроме вышеперечисленных, еще и отношения, называемые операциями, подобные арифметическому сложению и вычитанию. Операция считается определенной, если ее результат (сумма или разность) снова является размером той же физической величины, и существует способ ее технической реализации. Операция сложения определяет операцию умножения размеров величин на любое целое число n. Результат такого умножения есть просто сумма n размеров данной величины. К числу подобных величин относятся, например, длина, давление, масса или термодинамическая температура.

Сумма двух масс — это масса такого тела, которое уравновешивает на весах первые два, положенные на одну чашу, а разностью является масса тела, которое нужно положить на чашу весов, где помещено более легкое тело, чтобы привести весы в равновесие. Но такие величины, как электрический потенциал или время, уже не относятся к этой группе, поскольку разность двух потенциалов уже не потенциал, а разность двух моментов времени не является снова моментом.

Нетрудно заметить, что к величинам третьей группы можно отнести и множество различий (разностей) в размерах величин второй группы, поскольку для них тоже могут быть найдены операции, подобные сложению. Поскольку все арифметические операции сводятся, по существу, к сложению, то эти величины оказываются наиболее удобными для применения в физике. Поэтому часто только такие величины и относятся к числу физических.

Интересно отметить, что определения многих физических величин не являются неизменными, а постоянно уточняются. Уточнение определений происходит в направлении, позволяющем вскрыть все большее число отношений на множестве их размеров и ввести их, таким образом, в число величин третьей или хотя бы второй группы, что позволяет значительно упростить аналитические выражения физических законов.

Не случайно температура была упомянута среди величин всех трех групп. Вначале ее определяли интуитивно как степень нагретости тела. Определенная таким образом температура могла входить в законы физики только в неявном виде. Уравнение состояния идеальных газов могло бы при этом иметь только следующий вид: $pV=f(\Theta)$, где $f(\Theta)$ — никоим образом не определенная функция температуры.

Определение, связавшее температуру с ртутной шкалой, позволило перевести ее во вторую группу величин. Благодаря этому температура вошла в некоторое, правда, еще очень ограниченное число уравнений физики. И только определение, которое дал Кельвин, и определение, основанное на явлении теплового расширения идеальных газов, а также данное тем же Кельвином доказательство идентичности этих двух определений, позволили перевести температуру в разряд величин третьей группы и сделать ее равноправной физической величиной.

§ 8. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН

Для того чтобы обосновать возможность количественного представления, т. е. измерения величин различных групп, необходимо остановиться еще на одном метрологическом понятии — *измерительном преобразовании*. Это такой вид преобразования, при котором устанавливается *взаимно-однозначное соответствие между размерами двух величин, сохраняющее для некоторого множества размеров преобразуемой величины все определенные для нее отношения и операции*. В большинстве случаев измерительные преобразования могут быть осуществлены техническими устройствами, называемыми преобразователями. Преобразуемая величина называется тогда входной, а результат преобразования — выходной величиной. Множество размеров входной величины, подвергаемой преобразованию с помощью данного преобразователя, называется диапазоном преобразования.

Операции сложения и умножения на целое число размеров величин третьей группы и разностей размеров величин второй группы позволяют проверить (теоретически и экспериментально) *линейность преобразований* их друг в друга.

Измерительное преобразование называется линейным, если при увеличении преобразуемой величины Q на ΔQ результат преобразования — величина R — увеличивается (или уменьшается) на ΔR, а при увеличении ΔQ в n раз ΔR увеличивается также в n раз и ΔQ и n таковы, что Q и $Q+n\Delta Q$ лежат в диапазоне преобразований. Очевидно, что линейность преобразований, в которых участвуют величины первой группы, проверить нельзя. Все же остальные величины могут быть переведены друг в друга линейными измерительными преобразованиями.

Длина относится к величинам третьей группы, поэтому способ приписания чисел размерам величин этой группы должен быть принципиально тем же, что и способ числового представления длин, рассматриваемый в классической геометрии. Возможность измерения этих величин обосновывается следующей теоремой, доказательство которой основано на аксиомах, подобных аксиомам эвклидовой геометрии.

Каждому размеру величины Q можно приписать положительное действительное число q, являющееся наименьшим из рациональных чисел m/n, где m и n — целые числа, определяемые из соотношения $nQ \leqslant m[Q]$, где $[Q]$ — некоторый размер физической величины, называемый единицей данной физической величины. Число q называется *числовым значением* величины Q, а ее количественное выражение в виде некоторого числа принятых для нее единиц — *значением физической величины* *:

$$Q = q[Q]. \tag{2.1}$$

---

* Правильнее было бы говорить о значении и о числовом значении не самих величин, а размеров величин. Однако в дальнейшем мы будем использовать именно эти термины, поскольку они приведены в ГОСТ 16263—70.

Из уравнения (2.1) следует, что числовое значение величин третьей группы показывает, во сколько раз значение измеряемой величины больше некоторого значения, принятого за единицу. Отсюда вытекает следующее определение измерения таких величин: «измерением мы называем познавательный процесс, заключающийся в сравнении путем физического эксперимента данной величины с некоторым ее значением, принятым за единицу сравнения» *.

Уравнение (2.1) является основным уравнением измерения. Оно показывает, что числовое значение величины зависит от размера принятой единицы. Для единиц $[Q]_1$ и $[Q]_2$ числовые значения одной и той же величины составляют

$$q_1 = \frac{Q}{[Q]_1}; \quad q_2 = \frac{Q}{[Q]_2},$$

откуда непосредственно следует

$$q_2 = q_1 \frac{[Q]_1}{[Q]_2} = k_{1-2} q_1, \tag{2.2}$$

где k_{1-2} — переводной множитель, т. е. отвлеченное число, на которое нужно умножить числовое значение величины, выражаемое в первой единице, чтобы получить ее числовое значение, выраженное во второй единице.

Соотношение (II.2) показывает, что *числовые значения для величин третьей группы единственны до преобразования подобия.*

Для величин второй группы можно написать выражение, аналогичное выражению (2.1): $S_2 - S_1 = s_{21}[S]$, где $S_2 - S_1$ — измеряемая разность размеров; s_{21} — числовое значение этой разности; $[S]$ — единица данной величины, равная любой заранее выбранной разности размеров.

Для того, чтобы путем сравнения разностей можно было сравнивать размеры самих величин, необходимо измерять разности между интересующими нас размерами S величины и некоторым ее вполне определенным размером S_0, принимаемым за начало отсчета. Тогда

$$S - S_0 = s[S], \tag{2.3}$$

и числовое значение любой разности $S_2 - S_1$ можно найти из равенств $S_2 - S_1 = (S_2 - S_0) - (S_1 - S_0) = s_2[S] - s_1[S] = s_{21}[S]$.
Уравнение (2.3) формально можно записать в виде

$$S = S_0 + s[S]. \tag{2.3'}$$

Определяемая уравнением (2.3′) совокупность числовых значений величин второй группы называется *шкалой данной величины.* Шкала полностью определяется заданием начала отсчета S_0 и единицы $[S]$.

Практически шкалу можно осуществить двояко:

---

* Маликов М. Ф. Основы метрологии. М., Изд. Комитета по делам мер и измерительных приборов, 1949.

1. Выбирают два размера S_0 и S_1 величины, которые относительно просто могут быть реализованы физически в наиболее чистом виде. Эти размеры называются *опорными точками* или *основными реперами*, а интервал $S_1 - S_0$ — *основным интервалом*. Одну из опорных точек S_0 принимают за начало отсчета, а какую-либо долю основного интервала — за единицу.

Так, во введенной Фаренгейтом температурной шкале первой опорной точкой и началом отсчета служила температура смеси льда, поваренной соли и нашатыря, а в качестве второй опорной точки была выбрана температура человеческого тела. Единица температуры определялась как девяносто шестая часть полученного таким образом основного интервала и получила название градуса Фаренгейта ($[t]=$°F). Температура таяния льда оказалась равной 32°F, а температура кипения воды — 212°F.

В температурной шкале Цельсия началом отсчета является температура таяния льда, второй опорной точкой служит температура кипения воды, а за единицу температуры — градус Цельсия ($[t]=$°C) — принята одна сотая часть основного интервала.

2. Единица воспроизводится непосредственно как интервал, его некоторая доля или некоторое число интервалов размеров данной величины, а начало отсчета выбирают каждый раз по-разному в зависимости от конкретных условий изучаемого явления. Именно так строятся шкалы измерения времени или электрических потенциалов. Например, за единицу времени принимается секунда, равная 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133, а за начало отсчета принимается начало изучаемого явления.

Для единиц $[S]_1$ и $[S]_2$ и начал отсчета S_{01} и S_{02} числовые значения s_1 и s_2 определяют из уравнения (2.3′) $S=S_{01}+s_1[S]_1$; $S=S_{02}+s_2[S]_2$, которое приводит к следующему соотношению между числовыми значениями s_1 и s_2 величины по разным шкалам:

$$s_2=\left(s_1-\frac{S_{02}-S_{01}}{[S]_1}\right)\frac{[S]_1}{[S]_2}. \qquad (2.4)$$

Так, поскольку значение разности температур между точкой кипения воды и точкой таяния льда по шкале Фаренгейта составляет 212—32=180°F, а по шкале Цельсия— 100°C, то 100°C=180°F и отношение размеров единиц

$$\frac{[S]_1}{[S]_2}=\frac{°\mathrm{F}}{°\mathrm{C}}=\frac{100}{180}=\frac{5}{9}.$$

Числовое значение интервала между началами отсчета по этим двум шкалам, измеренного в градусах Фаренгейта $[S]_1=$°F, равно 32. Поэтому для перехода от числовых значений t_F температуры в градусах Фаренгейта к числовым значениям t_C в градусах Цель-

сия необходимо использовать формулу, следующую из соотношения (2.4):

$$t_C = (t_F - 32) \cdot \frac{5}{9}.$$

Соотношение (2.4) показывает, что числовые значения величин второй группы единственны до линейного преобразования, сами же шкалы, описываемые уравнением (2.3′), будем называть линейными.

Возможность измерения величин первой группы обосновывается следующим образом:

Подбирают измерительное преобразование, переводящее размеры изучаемой величины в некоторую совокупность размеров какой-либо величины третьей группы. Числовые значения последних или некоторые их функции и принимают за числовые значения данной величины. Совокупность этих числовых значений и лежащее в основе их получения измерительное преобразование называется шкалой данной величины.

Обобщая определения шкал величин первой и второй групп, приходим к общему определению шкалы, приводимому в ГОСТ 16263—70: *шкала физической величины* — это «последовательность значений, присвоенная в соответствии с правилами, принятыми по соглашению, последовательности одноименных физических величин различного размера».

Как уже было сказано, линейность преобразований величин первой группы проверить нельзя. Можно лишь утверждать, что ее числовые значения в различных шкалах связаны друг с другом некоторым монотонным преобразованием или *единственны до монотонного преобразования*. Сами же шкалы этих величин будем называть монотонными шкалами.

Так, например, твердость по шкале Бринелля измеряют, вдавливая стальной закаленный шарик в образец с определенным усилием, а числовое значение твердости HB подсчитывают как отношение этого усилия к площади отпечатка на образце. Аналогично определяют твердость HV по шкале Виккерса, с той только разницей, что здесь стальной шарик заменен алмазной пирамидой. По шкале С. Роквелла числовые значения твердости подсчитывают по формуле $HRC = 100 - 2e$, где e — глубина проникновения алмазного конуса в образец, выражаемая в тысячных долях миллиметра, под действием определенной силы.

Поскольку во всех трех случаях используются различные измерительные преобразования, то и числовые значения твердости различны. Из определения шкал Бринелля и Виккерса следует, что числовые значения твердости в них должны быть связаны преобразованием, близким к линейному, их же связь с числовыми значениями твердости по шкале Роквелла должна быть иной.

Поскольку в уравнении физики входят только величины третьей группы и разности размеров величин второй группы, то в дальнейшем мы будем заниматься только ими.

§ 9. ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИСТЕМЫ ВЕЛИЧИН И СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Описание свойства, характеризуемого данной величиной, осуществляется на языке других, ранее определенных величин. Эта возможность обусловливается наличием объективно существующих взаимосвязей между свойствами объектов, которые, будучи переведены на язык величин, становятся их моделями, образующими в своей совокупности систему уравнений, описывающих данный раздел физики. Эти уравнения, записанные в самом общем виде, называются *уравнениями между величинами* *. С их помощью формулируются определения одних величин на языке других и указываются способы их измерения. Если бы число уравнений равнялось числу связываемых ими величин, то все они могли бы быть определены не друг через друга, а в каких-то других терминах, понятных нам и без вышеприведенных рассуждений. Но число уравнений в любом разделе науки всегда меньше числа входящих в них величин, поэтому принято выделять в отдельную группу некоторые величины, число k которых должно равняться разности между числом n величин и числом m независимых уравнений между ними. Эти величины и соответствующие им единицы называются *основными величинами* и *основными единицами*. Все остальные величины и единицы определяются однозначно через основные и называются *производными*. Совокупность выбранных основных величин и образованных с их помощью величин производных называется *системой величин*. Так же создаются и *системы единиц*. Важно отметить, что в рамках одной концепции система основных величин вовсе не обязана совпадать с системой основных единиц в том смысле, что за основные единицы могут приниматься единицы не тех величин, которые принимаются за основные.

В уравнения между величинами входят также универсальные постоянные и физические константы; они отличаются от коэффициентов пропорциональности тем, что характеризуют какие-то определенные свойства физических объектов. Коэффициенты пропорциональности появляются в уравнениях между величинами лишь из-за несогласованности единиц измерения или характеризуют свойства симметрии физических законов.

Правила, по которым тот или иной комплекс единиц выбирают в качестве основного, не могут быть обоснованы теоретически. Единственным аргументом в пользу выбора может служить лишь эффективность и целесообразность использования данной системы.

Для практических целей измерения в качестве основных величин и единиц следует выбирать такие, которые могут быть воспроизведены с наибольшей точностью. В механике это длина, масса и время. Изучение термодинамики приводит к необходимости

---

* В противоположность уравнениям типа эмпирических формул, справедливых лишь при указанных для них единицах измерения.

введения четвертой величины — температуры и ее единиц. В электродинамике и фотометрии появляются еще две основные величины и две единицы — сила электрического тока и сила света.

§ 10. МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОИЗВОДНЫХ ЕДИНИЦ. ПОНЯТИЕ О РАЗМЕРНОСТЯХ

Положим, что исследуемая величина Q связана с величинами A, B, C, ..., единицы которых предварительно установлены, следующим уравнением:

$$Q = F(A, B, C, \ldots). \tag{2.5}$$

Входящие в уравнение (2.5) величины можно представить в виде

$$Q = q[Q];\ A = a[A];\ B = b[B];\ C = c[C];\ \ldots, \tag{2.6}$$

где строчными буквами обозначены числовые значения, а буквами в квадратных скобках — единицы величин Q, A, B, C, ... Уменьшим единицы величин A, $Б$, С, ... в α_1, β_1, γ_1, ... раз. Тогда числовое значение q исследуемой величины Q увеличится в ε число раз, зависящее от $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots$, и будет составлять $q' = q\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots)$. Теперь снова уменьшим единицы исходных величин в α_2; β_2; γ_2 ... раз. Тогда числовое значение q' увеличится в ε $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \ldots)$ раз, и, следовательно,

$$q'' = q'\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \ldots) =$$

$$= q\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots)\,\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \ldots). \tag{2.7}$$

Но такое последовательное уменьшение единиц в $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots$, а затем α_2; β_2; γ_2; ... число раз равносильно их одновременному уменьшению в $\alpha_1\alpha_2$; $\beta_1\beta_2$; $\gamma_1\gamma_2$; ... раз. Поэтому

$$q'' = q\varepsilon(\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \ldots). \tag{2.8}$$

Сравнивая формулы (2.7) и (2.8), легко заметить, что функция ε $(\alpha; \beta; \gamma; \ldots)$ должна удовлетворять условию

$$\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots)\,\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \ldots) = \varepsilon(\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \ldots). \tag{2.9}$$

Предположим, что функция ε $(\alpha; \beta; \gamma; \ldots)$ является дифференцируемой. Тогда, дифференцируя выражение (2.9) по α_1 и α_2, получаем:

$$\varepsilon'_{\alpha_1}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots)\,\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \ldots) = \alpha_2\varepsilon'_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \ldots),$$

$$\varepsilon'_{\alpha_2}(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \ldots)\,\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots) = \alpha_1\varepsilon'_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \ldots).$$

Разделим первое равенство на второе и сгруппируем в разных частях полученного выражения функции с одинаковыми индексами аргументов:

$$\alpha_1\frac{\varepsilon'_{\alpha_1}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots)}{\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \ldots)} = \alpha_2\frac{\varepsilon'_{\alpha_2}(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \ldots)}{\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \ldots)}.$$

Но так как числа α_1 и α_2 произвольны, то приходится сделать следующий вывод:

$$\alpha \frac{\varepsilon'_\alpha(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \ldots)}{\varepsilon(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \ldots)} = \omega_\alpha(\beta;\ \gamma;\ \ldots), \tag{2.10}$$

где $\omega_\alpha(\beta;\ \gamma;\ldots)$ — некоторая функция, не зависящая от α. Разделив переменные в дифференциальном уравнении (2.10), приведем его к виду

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \omega_\alpha(\beta;\ \gamma;\ \ldots)\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Интегрирование полученной формулы приводит к выражению $\varepsilon(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ldots) = C\alpha^{\omega_\alpha(\beta;\ \gamma;\ \cdots)}$, где C — постоянная интегрирования. Для ее определения положим $\alpha = 1$. Тогда обнаружится, что $C = \varepsilon(1;\ \beta;\ \gamma;\ \ldots)$, и, таким образом, $\varepsilon(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \ldots) = \varepsilon(1;\ \beta;\ \gamma;\ldots)\alpha^{\omega_\alpha(\beta;\ \gamma;\ \cdots)}$. Но функция $\varepsilon(1,\ \beta;\ \gamma;\ldots)$ обладает, очевидно, тем же свойством, и поэтому может быть представлена как $\varepsilon(1;\ \beta;\ \gamma;\ldots) = \varepsilon(1;\ 1;\ \gamma;\ldots)\beta^{\omega_\beta(\gamma;\ \cdots)}$, и, следовательно, $\varepsilon(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ldots) = \varepsilon(1;\ 1;\ \gamma;\ldots)\alpha^{\omega_\alpha(\beta;\ \gamma;\ \cdots)}\beta^{\omega_\beta(\gamma;\ \cdots)}$.
Дальнейшие рассуждения приводят нас к выражению
$\varepsilon(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ldots) = \varepsilon(1;\ 1;\ 1;\ldots)\alpha^{\omega_\alpha(\beta;\ \gamma;\ \ldots)}\beta^{\omega_\beta(\gamma;\ \cdots)}\ldots$.
Если бы начать дифференцировать выражение (2.9) не с переменной α, а с любой другой, то показатели степеней при числах $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ оказались бы функциями других чисел. Поэтому можно сделать вывод о независимости этих степеней от чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Кроме того, очевидно, что $\varepsilon(1,\ 1,\ 1,\ldots,1) = 1$, поэтому

$$\varepsilon(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \ldots) = \alpha^{\omega_\alpha}\beta^{\omega_\beta}\gamma^{\omega_\gamma}\ldots \tag{2.11}$$

Полученное выражение называется формулой размерности, а его правая часть — размерностью (dimension) величины Q относительно величин A, B, $C\ldots$ Последнее предложение обычно записывается в виде

$$\dim(Q) = [A^{\omega_\alpha}B^{\omega_\beta}C^{\omega_\gamma}\ldots]. \tag{2.12}$$

Если величины A, B, $C,\ldots$ являются основными, то формула размерности (2.12) определяет размерность производной величины относительно основных величин. Размерности же основных величин выражаются через обозначения этих величин. Так, размерности длины, массы времени, температуры записываются как $\dim(l) = L$; $\dim(m) = M$; $\dim(t) = T$; $\dim(t^\circ) = \Theta$.
Вычисления размерностей существенно упрощается, если принять во внимание два следующих очевидных правила:

1) если $P = RQ$, то $\dim(P) = \dim(R)\dim(Q)$;

2) если $P = \dfrac{R}{Q}$, то $\dim(P) = \dfrac{\dim(R)}{\dim(Q)}$.

Пользуясь этими правилами, вычислим размерности некоторых величин:
размерность скорости $v=\Delta l/\Delta t$ составляет

$$\dim(v)=\frac{\dim(\Delta l)}{\dim(\Delta t)}=\frac{L}{T}=LT^{-1};$$

размерность ускорения находим из уравнения

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}:$$

$$\dim(a)=\frac{\dim(\Delta v)}{\dim(\Delta t)}=LT^{-2};$$

размерность силы определяется вторым законом Ньютона $F=ma$: $\dim(F)=\dim(m)\cdot\dim(a)=LMT^{-2}$.
Если величины A, B, C,... сами являются производными и имеют относительно основных величин L, M, T,... размерности

$$\dim(A)=L^{k_A}M^{l_A}T^{m_A}\ldots;$$

$$\dim(B)=L^{k_B}M^{l_B}T^{m_B}\ldots;$$

$$\dim(C)=L^{k_C}M^{l_C}T^{m_C}\ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то размерность величины Q относительно основных составит $\dim(Q)=\left[L^{\omega_\alpha k_A+\omega_\beta k_B+\ldots}M^{\omega_\alpha l_A+\omega_\beta l_B+\ldots}\ldots\right]=L^kM^lT^m\ldots$,
где $k=\omega_\alpha k_A+\omega_\beta k_B+\omega_\gamma k_C+\ldots$; $l=\omega_\alpha l_A+\omega_\beta l_B+\omega_\gamma l_C+\ldots$; $m=\omega_\alpha m_A+\omega_\beta m_B+\omega_\gamma m_C+\ldots$. До сих пор мы рассматривали ε как величину, на которую изменяется числовое значение Q вследствие изменения в α; β; γ;.. раз единиц величин A, B, C,.. при постоянной единице $[Q]$. Если же мы хотим оставить неизменным числовое значение q, то единицу $[Q]$ нужно изменить в то же число раз ε. Поэтому наряду с равенствами $[A]=\alpha[A]'$; $[B]=\beta[B]'$; $[C]=\gamma[C]'$;..., определяющими числами α; β; γ;..., действительно и равенство $[Q]=\varepsilon(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ldots)\cdot[Q]'$.
Таким образом, формула (2.11) размерностей приобретает вид:

$$\frac{[Q]}{[Q]'}=\left(\frac{[A]}{[A]'}\right)^{\omega_\alpha}\left(\frac{[B]}{[B]'}\right)^{\omega_\beta}\left(\frac{[C]}{[C]'}\right)^{\omega_\gamma}\ldots$$

или

$$[Q]=K[A]^{\omega_\alpha}[B]^{\omega_\beta}[C]^{\omega_\gamma}\ldots, \tag{2.13}$$

где K — некоторое постоянное число.

Если единицы $[A]$, $[B]$, $[C]$,... являются основными, то формула (2.13) определяет размерность производной единицы $[Q]$ относительно основных единиц, что записывается также в форме выражения

$$\dim [Q] = [A]^{\omega_\alpha} [B]^{\omega_\beta} [C]^{\omega_\gamma} \ldots \quad (2.14)$$

Нетрудно видеть, что размерности единиц совпадают с размерностями величин, если совпадают выбранные системы единиц и величин. Формула (2.13) показывает размерность производной единицы, но еще ничего не говорит о размере единицы, поскольку множитель K пока не определен.

Среди производных величин особое место занимают такие, для которых все показатели степени в формуле размерности (2.12) обращаются в нуль. Эти величины называются безразмерными и остаются такими в любой системе величин. Согласно уравнению (2.13) их единицей может служить любое число, в частности — арифметическая единица. К таким величинам относятся, например, коэффициент полезного действия, число Рейнольдса в аэродинамике, $\cos \varphi$ в электродинамике.

§ 11. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И КОГЕРЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Понятие размерности физических величин широко используется в физике при проверке правильности сложных расчетных формул, выяснении зависимости между величинами (анализе размерностей) и в теории физического подобия, где анализ размерностей позволяет сократить объем экспериментальных работ по определению некоторых зависимостей.

Широкое применение понятия размерности объясняется особой структурой уравнений между величинами, устанавливаемой основной теоремой анализа размерностей.

Для вывода этой теоремы представим уравнение (2.5) между величинами в форме $q[Q] = F(a[A];\ b[B];\ c[C]; \ldots)$, где q является функцией числовых значений исходных величин. Это уравнение справедливо для любых числовых значений, в том числе и для $a = b = c = \ldots = 1$. Таким образом, $q(1;\ 1;\ 1; \ldots)\ [Q] = F([A];\ [B];\ [C]; \ldots)$ и

$$[Q] = \frac{F([A];\ [B];\ [C];\ \ldots)}{q(1;\ 1;\ 1;\ \ldots)}. \quad (2.15)$$

Но производная единица $[Q]$ выражается через единицы $[A]$; $[B]$; $[C] \ldots$ по формуле (2.13). Сравнивая формулы (2.13) и (2.15), приходим к выводу, что функция F должна обладать следующей структурой: $F([A]; [B];\ [C]; \ldots) = Kq(1;\ 1;\ 1; \ldots)[A]^{\omega_\alpha} [B]^{\omega_\beta} [C]^{\omega_\gamma} \ldots$, и, следовательно,

$$Q = F(A;\ B;\ C;\ \ldots) = Kq(1;\ 1;\ 1;\ \ldots) A^{\omega_\alpha} B^{\omega_\beta} C^{\omega_\gamma} \ldots \quad (2.16)$$

Разделив уравнение (2.16), связывающее величины, на уравнение (2.13), связывающее единицы, получим уравнение, относящееся к числовым значениям:

$$q(a;\ b;\ c;\ \ldots) = q(1;\ 1;\ 1;\ \ldots) a^{\omega_\alpha} b^{\omega_\beta} c^{\omega_\gamma} \ldots \quad (2.17)$$

Таким образом, функция, определяющая исследуемую производную величину Q через некоторые исходные величины A, B, $C, \ldots$, всегда может быть представлена в форме произведения постоянного коэффициента K, зависящего от размеров выбранных единиц, безразмерного выражения q (1, 1, ...) и степеней рассматриваемых величин. Само же уравнение (2.5) между величинами распадается на уравнение (2.13), связывающее единицы, и уравнение (2.17), относящееся к числовым значениям.

Но функция F, определяющая величину Q, может содержать, кроме размерных величин, еще и безразмерные величины Φ_1, $\Phi_2 \ldots$, которые должны иметь ту же структуру (2.16), т. е. представлять собой произведения постоянного коэффициента и степеней отдельных размерных величин: $Q = F(A;\ B;\ C; \ldots;\ \Phi_1;\ \Phi_2 \ldots)$.
Поэтому уравнение (2.16) в более общей форме должно быть записано как

$$Q = Kq(\Phi_1;\ \Phi_2;\ \ldots) A^{\omega_\alpha} B^{\omega_\beta} C^{\omega_\gamma} \ldots \tag{2.18}$$

Последнее выражение и представляет собой формулу основной теоремы анализа размерностей; *уравнение между величинами всегда может быть приведено к выражению, определяющему одну из величин как произведение коэффициента пропорциональности, функции безразмерных комплексов и степеней исходных величин.*

Если построить еще один безразмерный комплекс

$$\Phi = \frac{Q}{A^{\omega_\alpha} B^{\omega_\beta} C^{\omega_\gamma} \ldots},$$

то уравнение (2.5) можно представить в безразмерной форме

$$\Phi = Kq(\Phi_1;\ \Phi_2;\ \ldots). \tag{2.19}$$

В предыдущем параграфе было отмечено, что формула (2.13) позволяет установить единицы производных величин через основные единицы, но размер производной единицы зависит от выбора значения коэффициента пропорциональности K.

Коэффициент K желательно выбрать таким, чтобы уравнение между величинами формально совпало с уравнением между числовыми значениями; при этом вычисления по уравнениям физики значительно упрощаются. Сравнивая уравнения (2.16) и (2.17), приходим к выводу, что для этого достаточно положить $K = 1$, и тогда производную единицу можно определить как

$$[Q] = [A]^{\omega_\alpha} [B]^{\omega_\beta} [C]^{\omega_\gamma} \ldots \tag{2.20}$$

Системы единиц, производные единицы которых образованы по формуле (2.20), называются *согласованными*, или *когерентными*. Когерентные системы отличаются от остальных большей простотой выполняемых расчетов и поэтому шире распространены.

Основные единицы обозначаются символами, происходящими от их названия. Так, единицами длины, массы и времени служат

метр, килограмм и секунда, что обозначается следующим образом: $[l]=$ м; $[m]=$ кг; $[t]=$ с.

Производные единицы находят из уравнений физики после приведения их к виду (2.18). Так, единицей скорости в когерентной системе единиц [м, кг, с] будет

$$[v]=\left[\frac{\Delta l}{\Delta t}\right]=\text{м}\cdot\text{с}^{-1};$$

единица ускорения составляет

$$[a]=\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]=\text{м}\cdot\text{с}^{-2};$$

единица силы

$$[F]=[ma]=\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Некоторые из производных единиц имеют собственные наименования, например, единица силы — ньютон (1Н=1 кг·м·с$^{-2}$) или единица электрического сопротивления — Ом. Другие производные единицы собственных наименований не имеют и обозначаются как произведения степеней основных единиц. Так, единица плотности в когерентной системе единиц [м, кг, с] обозначается как $[\rho]=$ кг·м$^{-3}$, единица динамической вязкости $[\mu]=$ кг·м$^{-1}$·с$^{-1}$.

В заключение рассмотрим простейший пример использования метода размерностей.

Пусть требуется определить силу R, действующую на тело в потоке жидкости. Допустим, что движение жидкости настолько медленно, что инерционными силами по сравнению с силами вязкости можно пренебречь. В этом случае сила R должна зависеть от скорости v, линейного размера тела l и динамической вязкости μ. Эта зависимость должна в соответствии с формулой (2.16) иметь вид $R=Cl^{\alpha}v^{\beta}\mu^{\gamma}$, где C — постоянная, зависящая от формы тела и расположения его относительно потока, или, возможно, функция некоторых безразмерных комплексов, составленных из тех же величин l, v и μ. Формула размерностей имеет вид $\dim(R)=\dim(l^{\alpha}v^{\beta}\mu^{\gamma})=\{\dim(l)\}^{\alpha}\ \{\dim(v)\}^{\beta}\ \{\dim(\mu)\}^{\gamma}$. Но $\dim(R)=LMT^{-2}$; $\dim(l)=L$; $\dim(v)=LT^{-1}$; $\dim(\mu)=L^{-1}MT^{-1}$, поэтому $LMT^{-2}=L^{\alpha}(LT^{-1})^{\beta}(L^{-1}MT^{-1})^{\gamma}=L^{\alpha+\beta-\gamma}M^{\gamma}T^{-\beta-\gamma}$.

Для определения показателей α; β и γ имеем, таким образом, систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=1;\\ \gamma=1;\\ -\beta-\gamma=-2,\end{cases}$$

откуда получаем $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$ и, следовательно,

$$R=C\,lv\mu=\frac{C}{\mathrm{Re}}\rho v^2l^2,$$

где $\mathrm{Re}=\rho vl/\mu$ — безразмерный параметр, называемый числом Рейнольдса.

В ряде случаев возникает необходимость, имея единицу какой-либо величины, применять кратные и дольные единицы от нее для выражения больших или малых значений измеряемой величины.

Кратными называют единицы, составляющие целое число основных или производных единиц, например, километр, мегагерц и др. Дольными называют единицы, в целое число раз меньшие основной или производной единицы, например, миллиметр, наносекунда и др.

§ 12. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Исторически первой системой единиц физических величин была принятая в 1791 г. Национальным собранием Франции метрическая система мер. Она не являлась еще системой единиц в современном понимании, а включала в себя единицы длин, площадей, объемов, вместимостей и веса, в основу которых были положены две единицы: метр и килограмм.

В 1832 г. немецкий математик К. Гаусс предложил методику построения системы единиц как совокупности основных и производных. Он построил систему единиц, в которой за основу были приняты три произвольные, независимые друг от друга единицы — длины, массы и времени. Все остальные единицы можно было определить с помощью этих трех. Такую систему единиц, связанных определенным образом с тремя основными единицами длины, массы и времени, Гаусс назвал абсолютной системой. За основные единицы он принял миллиметр, миллиграмм и секунду.

В дальнейшем с развитием науки и техники появился ряд систем единиц физических величин, построенных по принципу, предложенному Гауссом, базирующихся на метрической системе мер, но отличающихся друг от друга основными единицами.

Рассмотрим главнейшие системы единиц физических величин.

Система СГС. Система единиц физических величин СГС, в которой основными единицами являются сантиметр как единица длины, грамм как единица массы и секунда как единица времени, была установлена в 1881 г. первым Международным конгрессом электриков. Конгресс установил систему СГС по принципам, предложенным Гауссом, и ввел наименование для двух важнейших производных единиц: дина — для единицы силы и эрг — для единицы работы. Для измерения мощности в системе СГС применяется эрг в секунду, для измерения кинематической вязкости — стокс, динамической — пуаз.

Давление в системе СГС измеряют в динах на квадратный сантиметр. Эта единица в прошлом называлась бар, однако в связи с переименованием в бар единицы давления, равной 10^5 Н/м^2, для единиц давления СГС иногда применяют наименование барий и одновременно микробар (так как она равна одной миллионной нового бара).

В области механических измерений система СГС опирается на три основные единицы, из которых остальные образуются как производные.

Сложнее обстоит дело с применением системы СГС для электрических и магнитных измерений. Исторически сложилось так, что для них к настоящему времени существует семь видов системы СГС для электрических и магнитных величин, из которых наиболее распространены следующие три:

1. Система СГСЭ, построенная на трех основных единицах — сантиметре, грамме, секунде; диэлектрическая проницаемость вакуума принята равной безразмерной единице. Эта система называется также абсолютной электростатической системой единиц.

2. Система СГСМ, основные единицы которой такие же, как и системы СГСЭ, — сантиметр, грамм, секунда, а магнитная проницаемость вакуума принята равной безразмерной единице. Эта система называется также абсолютной электромагнитной системой единиц.

3. Система СГС, называемая также системой СГС симметричной или системой Гаусса. В ней электрические единицы совпадают с электрическими единицами СГСЭ, а магнитные с магнитными единицами СГСМ.

Система СГС (симметричная) отличается стройностью и логичностью построения, она когерентна (согласованна) и широко применяется в физике для выражения измеряемых физических величин и расчетов. Система была допущена к применению в СССР государственным стандартом на электрические и магнитные единицы (ГОСТ 8033—56). До настоящего времени значительное число физических констант выражалось в единицах СГС. Однако большинство единиц СГС (дина, эрг, единицы электрических величин СГС и др.) имеет неудобные размеры и в практике не применяется.

Система МКГСС. Как известно, в период установления метрической системы мер, в конце XVIII столетия килограмм был принят как единица веса.

Применение килограмма как единицы веса, а в последующем как единицы силы вообще, привело в конце XIX века к формированию системы единиц физических величин с тремя основными единицами: метр — единица длины, килограмм-сила — единица силы и секунда — единица времени (система МКГСС). Килограмм-сила (кгс) — это сила, которая сообщает массе, равной массе международного прототипа килограмма, ускорение 9,80665 м/с² (нормальное ускорение свободного падения).

Эта система единиц широко распространилась в механике и в технике, получив неофициальное наименование «техническая». Одной из причин распространения системы МКГСС явилось удобство выражения сил в единицах веса и удобный размер основной единицы силы — килограмм-силы.

В некоторых странах (например, Бельгии) система МКГСС была названа метрической, исходя из того, что первоначально, при установлении метрической системы мер, килограмм служит не единицей массы, а единицей веса. Однако наряду с распространением системы МКГСС в технике все больше вырисовывались ее недостатки, связанные с использованием в качестве основной единицы силы, а не массы.

Первый недостаток состоит в том, что нарушается принцип выбора в качестве основной единицы той, которая может наиболее точно воспроизводиться. Единица силы воспроизводится менее точно, чем единица массы.

Второй недостаток заключается в сходности наименования единицы силы — килограмм-силы и метрической единицы массы — килограмма, что часто приводит к путанице. Частичным решением этого вопроса явилось принятие в отдельных странах (Австрия, ГДР, ФРГ) нового наименования килограмм-силы: килопонд.

Третьим крупным недостатком системы МКГСС является ее некогерентность (несогласованность) с единицами электрических и магнитных величин. Если единицей работы и энергии в системе МКГСС служит килограмм-сила-метр, то в системе практических электрических единиц работа и энергия измеряется джоулями, поэтому при переходе в расчетах от механических величин к электрическим (а также к тепловым, световым и т. д.) требуется переходный множитель.

За единицу массы в системе МКГСС принята масса тела, получающего ускорения 1 м/с² под действием приложенной силы 1 кгс. Эта единица (килограмм-сила-секунда в квадрате на метр) иногда называется технической единицей массы (т. е. м.) или инертной, хотя оба эти наименования не установлены ни в одной из рекомендаций на единицы физических величин. Единица массы МКГСС — кгс·с²/м ≈ 9,81 кг — единицы массы СИ.

Широко применялись в технике единицы работы и энергии МКГСС — килограмм-сила-метр (кгс·м) и единица мощности — килограмм-сила-метр в секунду (кгс·м/с).

Система МТС. В системе единиц МТС основными единицами являются: единица длины — метр, единица массы — тонна и единица времени — секунда.

Эта система единиц впервые была установлена в 1919 г. во Франции, где была принята в законоположении о единицах измерений. В 1927—1933 гг. система МТС была рекомендована советскими стандартами на механические единицы. Выбор тонны в качестве основной единицы массы казался удачным, так как достигалось соответствие между единицами длины и объема, с одной стороны, и единицей массы — с другой (с точностью, достаточной для большинства технических расчетов, 1 т соответствует массе 1 м³ воды). Кроме того, единица работы и энергии в этой системе (килоджоуль) и единица мощности (киловатт) совпадали с соответствующими кратными практическими электрическими единицами.

В системе МТС единицей силы служит стен (сн), равный силе, сообщающей массе 1 т ускорение 1 м/с², единицей давления — пьеза — 1 сн/м².

Однако в СССР система МТС не нашла практического распространения и в 1955 г. при утверждении ГОСТ 7664—55 «Механические единицы» не была в него включена. Во Франции применение этой системы также отменено законоположением от 3 мая 1961 г.

Абсолютная практическая система электрических единиц была установлена в 1881 г. первым Международным конгрессом электриков в качестве производной от системы СГСМ и предназначалась для практических измерений в связи с тем, что электрические и магнитные единицы системы СГС оказались неудобными для практики (одни слишком велики, другие слишком малы). В абсолютной практической системе электрические и магнитные единицы были образованы из соответствующих единиц абсолютной электромагнитной системы СГСМ путем умножения их на соответствующие степени числа 10.

В числе первых практических электрических единиц были приняты:

а) практическая единица электрического сопротивления, равная 10^9 единицам сопротивления СГСМ, которая получила впоследствии наименование Ом;

б) практическая единица электродвижущей силы равна 10^8 единицам электродвижущей силы СГСМ, названная «вольт»;

в) практическая единица силы электрического тока — ампер, равная 10^{-1} электромагнитным единицам силы тока СГСМ;

г) практическая единица электрической емкости, равна 10^{-9} единицам электрической емкости СГСМ, названная «фарада».

Множитель 10^9 для практической единицы сопротивления взят из тех соображений, что единица сопротивления должна была по размеру быть близка к большинству существовавших в то время единиц сопротивления, особенно к ртутной единице Сименса (сопротивление столбика ртути длиной 100 см и поперечным сечением 1 мм²), тогда широко распространенной. Множитель 10^8 для практической единицы электродвижущей силы был выбран с целью возможного приближения к электродвижущей силе элемента Даниэля, наиболее распространенного в то время и имевшего э.д.с., близкую к 1 В.

Второй Международный конгресс электриков в 1889 г. включил в список практических электрических единиц еще три:

а) джоуль как единицу энергии, равную 10^7 единицам энергии СГСМ;

б) ватт, равный 10^7 единицам мощности СГСМ;

в) квадрант (впоследствии это наименование заменено на «генри») как единицу индуктивности, равную 10^9 единицам индуктивности СГСМ.

В дальнейшем решениями Международной электротехнической комиссии и генеральных конференций по мерам и весам были установлены другие практические электрические и магнитные единицы (вебер, сименс, тесла и др.).

Международные электрические единицы. В 1893 г. в Чикаго Третий Международный конгресс электриков принял международные электрические единицы, отличавшиеся от единиц абсолютной практической системы электрических единиц тем, что они базировались не на теоретическом определении единиц, а на их эталонах. Это объяснялось трудностями точного воспроизведения теоретически установленных абсолютных практических электрических единиц. Взамен их были установлены практические электрические единицы, основанные на соответствующих абсолютных единицах, но определяемые с помощью условных эталонов, служащих для их воспроизведения. Этим электрическим единицам в отличие от абсолютных, определяемых теоретически через единицы длины, массы и времени, было присвоено наименование «международных электрических единиц».

Конгресс установил три основные международные электрические единицы: международной ом, для определения которого использовали ртутный эталон, международный ампер, определяемый с помощью серебряного вольтметра, и международный вольт, определяемый по элементу Кларка. Остальные электрические единицы (международный кулон, международная фарада и др.) были определены как производные от них.

Завершением работы по установлению международных электрических единиц и четкому разграничению абсолютных практических единиц и международных явились решения Международной Лондонской конференции электриков в 1908 г. В качестве единиц, которые с достаточным приближением при практических измерениях и для законодательных целей воспроизводят электрические

единицы, конференция рекомендовала принять международный ом, международный ампер, международный вольт и международный ватт. Конференция утвердила спецификации для воспроизведения международного ома и международного ампера.

После этого международные электрические единицы начали вводить законодательными актами в разных странах, и они получили широкое распространение до отмены их с 1 января 1948 г. решением Международного комитета мер и весов, когда был совершен переход на абсолютные электрические единицы с соотношениями: 1 международный ом = 1,00049 абсолютного ома; 1 международный вольт = 1,00034 абсолютного вольта.

Международные электрические единицы были введены в нашей стране постановлением Высшего Совета Народного Хозяйства РСФСР от 7 февраля 1919 г. «Об электрических единицах» и общесоюзным стандартом ОСТ 515 «Международные электрические единицы», утвержденным в 1929 г. Они отменены с 1 мая 1948 г. в связи с переходом на абсолютные практические электрические единицы.

Система МКСА. Основы этой системы были предложены в 1901 г. итальянским ученым Джорджи (поэтому система имеет и второе наименование, принятое в 1958 г. Международной электротехнической комиссией, — «система Джорджи», но не получившее, однако, распространения). Основными единицами системы МКСА являются метр, килограмм, секунда и ампер. В системе МКСА сила измеряется в ньютонах, работа и энергия в джоулях, мощность в ваттах.

В системе МКСА механические единицы полностью согласованы с единицами абсолютной практической системы электрических и магнитных единиц — ампером, вольтом, омом, кулоном и др. Система МКСА является частью Международной системы единиц (СИ).

Система МКСА установлена в качестве основной в ГОСТ 8033—56 «Электрические и магнитные единицы», действующем в СССР с 1 января 1957 г. В этом стандарте система МКСА принята для рационализованной формы уравнений электромагнитного поля (в которой множитель 4π исключен из наиболее важных и часто применяемых уравнений). В соответствии с этим взяты следующие значения постоянных: для электрической постоянной $\varepsilon_0 = 10^7/4\pi c^2$ Ф/м и для магнитной постоянной $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, где c — числовое значение скорости света в вакууме, равное $2{,}997925 \cdot 10^8$ м/с.

§ 13. ВНЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Наряду с системами единиц физических величин в практику измерений вводились единицы, не входящие ни в одну из систем, — так называемые внесистемные единицы. Число их довольно велико, причем возникновение большинства связано с соображениями удобства при измерениях тех или иных величин. Так, исторически возникла единица давления — атмосфера, равная давлению, производимому силой 1 кгс на площадь 1 см^2, ибо атмосфера близка по размеру к среднему давлению атмосферного воздуха на уровне моря.

К числу важнейших внесистемных единиц, имеющих широкое применение, относятся единицы длины — ангстрем, икс-единица, световой год, парсек; площади — ар, гектар; объема — литр; массы — карат; давления — атмосфера, бар, миллиметр ртутного столба, миллиметр водяного столба; количества теплоты — калория; электрической энергии — электронвольт, киловатт-час; акустических величин — децибел, фон, октава; ионизирующих излучений — рентген, рад, кюри.

Внесистемными единицами являются также такие распространенные единицы времени, как минута и час, а также кратные и дольные единицы измерения, иногда имеющие собственные наименования, например единица длины — микрон (мк), равный 10^{-6} м и в соответствии с правилами образования дольных единиц называемый в настоящее время микрометром (мкм); единица массы — тонна (т), равная 1000 кг и как кратная единица массы, называемая также мегаграмм (Мг) и т. д.

В связи с унификацией единиц и принятием единой системы единиц число применяемых внесистемных единиц сводится к минимуму, определяемому потребностью в них для практических целей. Отдельные же распространенные вне-

системные единицы, являющиеся собственными наименованиями некоторых кратных и дольных единиц СИ, — тонна, гектар, и т. д. — могут сохраниться при практических измерениях.

§ 14. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕДИНИЦЫ

В науке и технике широко распространены относительные и логарифмические величины и их единицы, которыми характеризуют состав и свойства материалов, отношения энергетических и силовых величин, например, относительное удлинение, относительная плотность, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, усиление и ослабление мощностей и т. п.

Относительная величина представляет собой безразмерное отношение физической величины к одноименной физической величине, принимаемой за исходную. В число относительных величин входят и относительные атомные или молекулярные массы химических элементов, выражаемые по отношению к одной двенадцатой (1/12) массы атома углерода-12.

Относительные величины могут выражаться в безразмерных единицах (когда отношение двух одноименных величин равно 1), в процентах (когда отношение равно 10^{-2}), промилле (отношение равно 10^{-3}) или в миллионных долях (отношение равно 10^{-6}).

Логарифмическая величина представляет собой логарифм (десятичный, натуральный или при основании 2) безразмерного отношения двух одноименных физических величин. Логарифмические величины применяют для выражения уровня звукового давления, усиления, ослабления, выражения частотного интервала и т. п.

Единицей логарифмической величины является бел (Б), определяемый соотношением $1\text{Б}=\lg P_2/P_1$ при $P_2=10P_1$ (где P_1 и P_2 — одноименные энергетические величины: мощности, энергии, плотности энергии и т. п.).

В случае, если берется логарифмическая величина для отношения двух одноименных «силовых» величин (напряжения, силы тока, давления, напряженности поля и т. п.), бел определяется по формуле $1\ \text{Б}=2\lg F_2/F_1$ при $F_2=\sqrt{10}F_1$. Дольной единицей от бела является децибел, равный 0,1 Б.

Так, в случае характеристики усиления электрических мощностей при отношении полученной мощности P_2 к исходной P_1, равном 10, логарифмическая величина усиления будет составлять один бел или 10 дБ, при увеличении или уменьшении мощности в 1000 раз логарифмическая величина усиления составит 3 Б или 30 дБ и т. д.

§ 15. ЕСТЕСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

В физической литературе в отдельных случаях применяются естественные системы единиц, основанные на универсальных (мировых) физических постоянных (константах), которые, будучи приняты в качестве основных единиц, определяют единицы различных физических величин. Практическое значение таких систем заключается в значительном упрощении вида отдельных уравнений физики.

Так, в системе единиц, предложенной М. Планком, в основу положены гравитационная постоянная, скорость света, постоянная Планка и постоянная Больцмана. Преимущество этой системы заключается в неизменности основания системы. Но размеры единиц делают эту систему мало удобной для практики: единица длины равна в ней $4{,}02\cdot10^{-33}$ см, единица массы равна $5{,}43\cdot10^{-5}$ г и единица времени равна $1{,}34\cdot10^{-43}$ с. Вторая причина, не позволяющая ставить вопрос о переходе на такую систему, заключается в том, что еще не достигнута точность измерений выбранных универсальных констант, необходимая для установления всех производных единиц.

В атомной физике в отдельных случаях нашла применение система атомных единиц Хартри. В ней в качестве основных приняты заряд электрона, масса электрона, радиус первой боровской орбиты атома водорода

и постоянная Планка. В этой системе единица энергии составляет $4{,}359 \cdot 10^{-11}$ эрг, единица времени $2{,}419 \cdot 10^{-17}$ с. При рассмотрении атомных объектов в такой системе единиц уравнения освобождаются от лишних числовых множителей, благодаря чему законы физики приобретают более простой вид.

В релятивистской квантовой механике пользуются системой, в которой основными единицами являются постоянная Планка, скорость света и масса какой-либо элементарной частицы (электрона или протона), в зависимости от того, какие процессы рассматриваются. В качестве четвертой единицы принимают постоянную Больцмана. В этой системе единицей длины является комптоновская длина волны электрона, равная $\sim 3{,}85 \cdot 10^{-11}$ см, единица времени, равна $\sim 1{,}28 \cdot 10^{-21}$ с, и единица энергии, равная энергии покоя электрона $0{,}82 \cdot 10^{-12}$ эрг.

В настоящее время продолжают возвращаться к вопросу о построении такой унифицированной системы единиц, которая зиждилась бы на неизменных основаниях — универсальных физических постоянных. В этом отношении представляет интерес работа польского ученого Людовичи. Он считает, что система единиц должна удовлетворять следующим требованиям: быть неразрушимой, неизменяемой во времени, независимой от местоположения. Кроме того, эталоны должны быть легко и точно воспроизводимыми и повсеместными. Исходя из этих требований, Людовичи предлагает систему единиц, в которой за основу приняты три разных поля: гравитационное, электрическое и магнитное. В соответствии с этим предлагаются в качестве трех основных единиц следующие физические константы: гравитационная постоянная, диэлектрическая проницаемость свободного пространства и магнитная проницаемость свободного пространства. В качестве четвертой основной единицы Людовичи предлагает принять атомную константу — электрический заряд электрона.

Следует признать, что точность измерения основных единиц предлагаемой естественной системы еще недостаточна и значительно уступает точности исходных единиц современной Международной системы единиц. Кроме того, единицы распространенных величин в предложенной системе имеют неудобные для практики размеры (единица длины равна $\sim 4{,}88 \cdot 10^{-36}$ м, единица массы $\sim 6{,}60 \cdot 10^{-9}$ кг и т. д.).

В силу указанных соображений предложенные естественные системы единиц не могут в настоящее время найти применения при решении вопроса об унификации единиц измерения.

Глава III

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)

§ 16. УСТАНОВЛЕНИЕ ЕДИНОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Наличие ряда систем единиц физических величин, а также значительного числа внесистемных единиц, неудобства, связанные с пересчетом при переходе от одной системы единиц к другой, настойчиво выдвигали требование унификации единиц измерений. Рост научно-технических и экономических связей между разными странами обусловливал необходимость такой унификации в международном масштабе.

Требовалась единая система единиц физических величин, практически удобная и охватывающая различные области измерений. При этом она должна была сохранить принцип когерентности (равенство единице коэффициента пропорциональности в уравнениях связи между физическими величинами).

Применявшаяся в механике и механических прикладных науках система МКГСС не отвечала этим требованиям, так как не была согласована с практическими электрическими единицами. Размеры единиц системы СГС, широко применяемых физиками, были слишком неудобны для использования в технике.

В 1954 г. X Генеральная конференция по мерам и весам установила шесть основных единиц (метр, килограмм, секунда, ампер, градус Кельвина и свеча) практической системы единиц для международных сношений. Одновременно Международный комитет по мерам и весам выделил из своего состава комиссию по разработке единой Международной системы единиц.

Эта комиссия в 1956 г. разработала проект Международной системы единиц, который был принят Международным комитетом по мерам и весам и в 1960 г. утвержден XI Генеральной конференцией по мерам и весам. Система, основанная на утвержденных в 1954 г. шести основных единицах, была названа Международной системой единиц, сокращенно СИ (SI — начальные буквы французского наименования Système International). Был утвержден перечень шести основных, двух дополнительных и первый список двадцати семи производных единиц, а также приставки для образования кратных и дольных единиц.

Принятие Международной системы единиц явилось важным прогрессивным актом, подытожившим большую многолетнюю подготовительную работу в этом направлении и обобщившим опыт работы научно-технических кругов разных стран и международных организаций по метрологии, стандартизации, физике и электротехнике.

Решения Генеральной конференции и Международного комитета мер и весов по Международной системе единиц учтены в рекомендациях Международной организации по стандартизации (ИСО) по единицам измерений, приняты Международной организацией законодательной метрологии и уже нашли отражение в законодательных положениях о единицах и в стандартах на единицы во многих странах мира.

Международная система единиц вошла в рекомендации по единицам Международного союза чистой и прикладной физики, принята Международной электротехнической комиссией и рядом других международных организаций. Организация объединенных наций по образованию, науке и культуре (ЮНЕСКО) призвала все страны — члены организации принять Международную систему единиц.

В 1961 г. Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР утвердил ГОСТ 9867—61 «Международная система единиц», которым устанавливается предпочтитель-

ное применение этой системы во всех областях науки и техники и при преподавании.

В 1970 г. в СССР была издана окончательная редакция проекта стандарта «Единицы физических величин», в котором в основу единиц, принятых для обязательного применения, положены единицы Международной системы.

Международная система единиц имеет ряд достоинств, важнейшими из которых являются:

1) универсальность — охват ею всех областей науки, техники, народного хозяйства;

2) унификация единиц для всех видов измерений; так, вместо ряда единиц давления (атмосфера, миллиметр ртутного столба, миллиметр водяного столба, бар, пьеза, дина на квадратный сантиметр и др.) в СИ применяется единая единица давления — паскаль; вместо ряда единиц работы и энергии (килограмм — сила — метр, эрг, калория, килокалория, киловаттчас, электрон — вольт и др.) — одна единица для измерения работы и всех видов энергии — джоуль;

3) применение удобных для практики основных и большинства производных единиц (площади — квадратный метр, объема — кубический метр, электрического напряжения — вольт, электрического сопротивления — ом и др.);

4) когерентность (связность, согласованность) системы; коэффициенты пропорциональности в физических уравнениях, определяющих единицы производных величин, равны безразмерной единице;

5) четкое разграничение в СИ единиц массы (килограмма) и силы (ньютона);

6) упрощение записи уравнений и формул, отсутствие в них переводных коэффициентов, появлявшихся в связи с тем, что величины, входящие в эти формулы, давались в разных системах единиц;

7) облегчение педагогического процесса в средней и высшей школе (отпадает необходимость подробного изучения множества систем единиц и внесистемных единиц);

8) лучшее взаимопонимание при дальнейшем развитии научно-технических и экономических связей между различными странами.

С 1 января 1982 г. введен в действие ГОСТ 8.417—81 (СТ СЭВ 1052—78) «ГСИ. Единицы физических величин», в соответствии с которым осуществляется переход на Международную систему единиц СИ во всех областях науки, техники, народного хозяйства, а также в учебном процессе (включая учебники и учебные пособия) во всех учебных заведениях.

§ 17. ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ

Основные единицы Международной системы единиц были выбраны в 1954 г. X Генеральной конференцией по мерам и весам. При этом исходили из того, чтобы: 1) охватить системой все области науки и техники; 2) создать основу образования производ-

ных единиц для различных физических величин; 3) принять удобные для практики размеры основных единиц, уже получившие широкое распространение; 4) выбрать единицы таких величин, воспроизведение которых с помощью эталонов возможно с наибольшей точностью.

В 1971 г. XIV Генеральная конференция по мерам и весам приняла седьмую основную единицу СИ — единицу количества вещества — моль. Основные единицы СИ с указанием сокращенных обозначений русскими и латинскими буквами приведены в табл. 1.

Таблица 1

Основные единицы СИ

Величина	Единица измерения	Сокращенное обозначение единицы	
		русское	международное
Длина	метр	м	m
Масса	килограмм	кг	kg
Время	секунда	с	s
Сила электрического тока	ампер	А	A
Термодинамическая температура	кельвин	К	K
Сила света	кандела	кд	cd
Количество вещества	моль	моль	mol

Определения основных единиц, соответствующие решениям Генеральной конференции по мерам и весам, следующие.

Метр равен длине пути, проходимого светом в вакууме за 1/299792458 долю секунды.

Килограмм равен массе международного прототипа килограмма.

Секунда равна 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$Н.

Кельвин равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

Кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.

§ 18. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ

Международная система единиц включает в себя две дополнительные единицы — для измерения плоского и телесного углов.

Угловые единицы не могут быть введены в число основных, так как это вызвало бы затруднение в трактовке размерностей величин, связанных с вращением (дуги окружности, площади круга, работы пары сил и т. д.). Вместе с тем они не являются и производными единицами, так как не зависят от выбора основных единиц. Действительно, при любых единицах длины размеры радиана и стерадиана остаются неизменными.

Единица плоского угла — *радиан* (рад) — угол между двумя радиусами окружности, дуга между которыми по длине равна радиусу. В градусном исчислении радиан равен 57°17′44,8″.

Стерадиан (ср), принимаемый за единицу телесного угла, — телесный угол, вершина которого расположена в центре сферы и который вырезает на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу сферы.

Измеряют телесные углы путем определения плоских углов и проведения дополнительных расчетов по формуле

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \alpha/2), \qquad (3.1)$$

где Ω — телесный угол; α — плоский угол при вершине конуса, образованного внутри сферы данным телесным углом.

Телесному углу 1 ср соответствует плоский угол, равный 65°32′, углу π ср — плоский угол 120°, углу 2π ср — плоский угол 180°.

Дополнительные единицы СИ использованы для образования единиц угловой скорости, углового ускорения и некоторых других величин. Сами по себе радиан и стерадиан применяются в основном для теоретических построений и расчетов (например, стерадиан используется в светотехнике), для практических же измерений их не применяют, так как большинство важных для практики значений углов (полный угол, прямой угол и т. д.) в радианах выражаются трансцендентными числами (2π, $\pi/2$ и т. д.).

Практически плоские углы чаще всего измеряют в угловых градусах, минутах и секундах, и в этих единицах проградуировано большинство угломерных приборов. Применяют и другие угловые единицы (полный оборот, прямой угол, град, равный 0,01

прямого, и т. д.). Измерительных приборов, шкала которых была бы градуирована в радианах, не изготовляют; нет приборов и для измерения телесных углов в стерадианах.

§ 19. ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ

Производные единицы Международной системы единиц образуются с помощью простейших уравнений между величинами (определяющих уравнений), в которых числовые коэффициенты равны единице. Так, для линейной скорости в качестве определяющего уравнения можно воспользоваться выражением для скорости равномерного прямолинейного движения $v=l/t$.

При длине пройденного пути l (в метрах) и времени t, за которое пройден этот путь (в секундах), скорость выражается в метрах в секунду (м/с). Поэтому единица скорости СИ — метр в секунду — это скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой она за время 1 с перемещается на расстояние 1 м.

Если в определяющее уравнение входит числовой коэффициент, то для образования производной единицы в правую часть уравнения следует подставлять такие числовые значения исходных величин, чтобы числовое значение определяемой производной единицы было равно единице. Образуя, например, единицу энергии E из соотношения $E=1/2mv^2$, где E — кинетическая энергия; m — масса материальной точки; v — скорость ее движения, следует либо принять массу, равной 2 кг, либо скорость, равной $\sqrt{2}$ м/с. Поэтому единица кинетической энергии СИ — килограмм-метр в квадрате на секунду в квадрате — это кинетическая энергия тела массой 2 кг, движущегося со скоростью 1 м/с, или кинетическая энергия тела массой 1 кг, движущегося со скоростью $\sqrt{2}$ м/с. Эта единица имеет особое наименование — джоуль (сокращенное обозначение Дж).

Важнейшие единицы Международной системы единиц приведены в табл. 1 приложения.

Семнадцати производным единицам присвоены собственные наименования по именам ученых. Исключения составляют две производные единицы — люмен и люкс. Комплекс единиц, которым присвоены собственные наименования, приведен в табл. 2 приложения. Наряду с основными единицами они могут быть использованы для образования наименований других производных единиц СИ.

В печатных изданиях допускается применять либо русские, либо международные обозначения единиц. Однако не допускается использовать в одном издании одновременно и русские, и международные обозначения, исключая публикации по единицам физических величин. При указании значений величин на шкалах или щитках, помещаемых на изделиях, следует пользоваться международными обозначениями единиц.

При написании обозначений производных единиц, не имеющих собственных наименований, ГОСТ 8.417—81 устанавливает следующие правила:

буквенные обозначения единиц, входящих в произведения, разделяются точками на средней линии как знаками умножения, например, Н·м (ньютон-метр) или лм·с (люмен-секунда);

в обозначениях единиц, которые образованы делением одних единиц на другие, в качестве знака деления должна применяться только одна горизонтальная или косая черта;

при применении косой черты все обозначения сложной единицы помещаются в одну строку, а произведение единиц в знаменателе заключается в круглые скобки, например, Вт/(м²·К) или $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ватт на квадратный метр — кельвин;

допускается обозначение единицы в виде произведения обозначений единиц, возведенных в положительные и отрицательные степени, например, Вт·м$^{-2}$·К$^{-1}$.

Единицы Международной системы электрических и магнитных величин определяются из формул, записанных в рационализованной форме. Рационализация уравнений электромагнитного поля имеет целью исключение безразмерных коэффициентов 4π и $1/4\pi$ из всех соотношений, в которых наличие этих коэффициентов не оправдано, и введение их в соотношения для частных случаев, характеризуемых осевой или сферической симметрией, т. е. в соотношения, в которых наличие этих коэффициентов является естественным и логичным (коэффициент 4π численно равен площади сферы, а π — площади круга, радиусы которых равны единице).

Не оправдано наличие коэффициента 4π в ряде формул, записанных в нерационализованной форме, например, в формуле для электроемкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_a S}{4\pi d}.$$

Между тем не оправдано отсутствие коэффициента 4π в ряде формул, записанных в нерационализованной форме, например, в формуле закона Кулона $F = Q_1 Q_2 / \varepsilon_a r^2$, который характеризует действия одного точечного заряда на другой во все стороны, т. е. через сферу, в формуле, выражающей электроемкость шара, $C = \varepsilon_a r$; в выражении для напряженности магнитного поля прямолинейного проводника кругового сечения $H = 2I/r$; в выражении для емкости цилиндрического конденсатора $C = \frac{\varepsilon_a}{2 \ln R/r}$ или сферического конденсатора $C = \frac{\varepsilon_a r R}{R - r}$ и т. д..

К величинам, единицы которых подвержены рационализации, относятся электрическое смещение (или электрическая индукция) D, поток электрического смещения (или поток электрической индукции) ψ_D, абсолютные диэлектрическая ε_a и магнитная μ_a проницаемости (и соответствующие постоянные ε_0 и μ_0), напряженность магнитного поля H, магнитодвижущая сила F, магнитная восприимчивость $k_м$, магнитное сопротивление $r_м$ и магнитная проводимость $g_м$.

Для рационализации уравнений электромагнитного поля, описывающих электромагнитные и электрические явления и записанных в нерационализованной форме, приписывается множитель 4π к величинам ε_a, ε_0, D, ψ_D, H, F, $r_м$ и множитель $1/4\pi$ к величинам μ_a, μ_0, $k_м$ и $g_м$. Уравнения, не содержащие приведенных величин, записываются одинаково как в нерационализованной, так и в рационализованной формах.

В соответствии со СТ СЭВ 1052—78 и ГОСТ 8.417—81 допускается к применению без ограничения срока ряд единиц не входящих в Международную

систему единиц СИ, причем некоторые из них разрешается применять только в специальных областях знаний. Эти единицы представлены в табл. 3 и 4 приложения.

§ 20. КРАТНЫЕ И ДОЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Наиболее прогрессивным способом образования кратных и дольных единиц является принятая в метрической системе мер десятичная кратность между бо́льшими и меньшими единицами.

В соответствии с резолюцией XI Генеральной конференции по мерам и весам 1960 г. десятичные кратные и дольные единицы от единиц СИ образуются путем присоединения приставок.

В табл. 2 приводятся множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования.

Таблица 2

Множители и приставки для образования кратных и дольных единиц и их наименования

Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		русское	международное
10^{18}	экса	Э	E
10^{15}	пета	П	P
10^{12}	тера	Т	T
10^{9}	гига	Г	G
10^{6}	мега	М	M
10^{3}	кило	к	k
10^{2}	гекто	г	h
10^{1}	дека	да	da
10^{-1}	деци	д	d
10^{-2}	санти	с	c
10^{-3}	милли	м	m
10^{-6}	микро	мк	μ
10^{-9}	нано	н	n
10^{-12}	пико	п	p
10^{-15}	фемто	ф	f
10^{-18}	атто	а	a

Приставки для кратности от 10^{12} до дольности 10^{-12} взяты из латинского и греческого языков. Приставки фемто (10^{-15}) и атто (10^{-18}) взяты из датского языка.

Следует учитывать, что при образовании кратных и дольных единиц площади и объема с помощью приставок может возникнуть двойственность прочтения в зависимости от того, куда добавляется приставка: к исходной единице или единице, взятой во второй или третьей степени. Так, сокращенное обозначение 1 км² можно трактовать и как 1 квадратный километр и как 1000 квадратных метров, что, очевидно, не одно и то же (1 квадратный километр = =1 000 000 квадратных метров). В соответствии с международными правилами (в частности, с рекомендациями ИСО) кратные и дольные единицы площади и объема (как и других величин), получаемые возведением в степень единицы длины, следует образовывать, присоединяя приставки к исходным единицам. Таким образом, степени относятся к тем единицам, которые получены в результате присоединения приставок, и не относятся к тем, из которых образованы кратные и дольные единицы. Поэтому 1 км² = 1 (км)² = (10^3 м)² = 10^6 м², аналогично 1 см³ = 1 (см)³ = (10^{-2} м)³ = 10^{-6} м³.

Глава IV

ЭТАЛОНЫ. ЭТАЛОНЫ ОСНОВНЫХ ЕДИНИЦ МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

§ 21. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ЭТАЛОНАХ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭТАЛОНОВ

Для обеспечения единства измерений необходима тождественность единиц, в которых проградуированы все средства измерений одной и той же физической величины. Это достигается путем точного воспроизведения и хранения установленных единиц физических величин и передачи их размеров применяемым средствам измерений.

Воспроизведение, хранение и передача размеров единиц осуществляются с помощью эталонов и образцовых средств измерений. Высшим звеном в метрологической цепи передачи размеров единиц измерений являются эталоны.

Эталон представляет собой средство измерений (или комплекс средств измерений), обеспечивающее воспроизведение и хранение единицы физической величины (или одну из этих функций) с целью передачи размера единицы образцовым, а от них рабочим средствам измерений и утвержденное в качестве эталона в установленном порядке.

Если эталон воспроизводит единицу с наивысшей в стране точностью, он называется *первичным*. Первичные эталоны основных единиц воспроизводят единицу в соответствии с ее определением. Примером первичного эталона является комплекс средств измерений для воспроизведения килограмма с помощью платиноиридиевого прототипа и эталонных весов.

Для воспроизведения единиц в особых условиях, в которых прямая передача размера единицы от существующих эталонов технически неосуществима с требуемой точностью (высокие и сверхвысокие частоты, энергии, давления, температуры, особые состояния вещества, крайние участки диапазона измерений и т. п.), создаются и утверждаются специальные эталоны.

Специальный эталон воспроизводит единицу в особых условиях и заменяет в этих условиях первичный эталон.

Примером специального эталона является эталон мощности электромагнитных волн при частотах 2,59; ...; 37,5 ГГц в волноводных трактах.

Первичный, или специальный, эталон, официально утвержденный в качестве исходного для страны, называется *государственным*. Государственные эталоны утверждаются Государственным комитетом стандартов Совета Министров СССР, и на каждый из них утверждается государственный стандарт.

Основное назначение эталонов — служить материально-технической базой воспроизведения и хранения единиц физических величин. Принят принцип систематизации эталонов по воспроизводимым единицам.

Основные единицы Международной системы единиц (СИ) должны воспроизводиться с помощью государственных эталонов, т. е. централизованно. Дополнительные, производные, а при необходимости и внесистемные единицы, исходя из соображений технико-экономической целесообразности, воспроизводятся одним из двух способов:

1) централизованно — с помощью единого для всей страны государственного эталона;

2) децентрализованно — посредством косвенных измерений, выполняемых в органах метрологической службы с помощью образцовых средств измерений.

Централизованно воспроизводится большинство важнейших производных единиц СИ (ньютон, джоуль, паскаль, ом, вольт, генри, вебер, и др.), а децентрализованно — производные единицы, размер которых не может передаваться прямым сравнением с эталоном (например, единицы площади) или, если поверка мер посредством косвенных измерений проще, чем их сравнение с эталоном, и обеспечивает необходимую точность (например, меры вместимости и объема). При этом, когда для воспроизведения единицы необходимо специально предназначенное оборудование, создаются поверочные установки высшей точности. Примером такой поверочной установки является тахометрическая установка, сравнивающая частоту вращения с частотой образцового генератора.

В метрологической практике широко распространены *вторичные эталоны,* значения которых устанавливаются по первичным эталонам. Вторичные эталоны являются частью подчиненных средств хранения единиц и передачи их размера. Они создаются и утверждаются в тех случаях, когда это необходимо для организации поверочных работ и для обеспечения сохранности и наименьшего износа государственного эталона.

В качестве примеров вторичного эталона можно привести эталон-копию единицы массы (килограмма) в виде платино-иридиевой гири № 26 и рабочий эталон килограмма, изготовленный из нержавеющей стали.

По своему метрологическому назначению вторичные эталоны делятся на эталоны-копии, эталоны сравнения, эталоны-свидетели и рабочие эталоны.

Эталон-копия представляет собой вторичный эталон, предназначенный для хранения единицы и передачи ее размера рабочим эталонам. Он не всегда может быть физической копией государственного эталона.

Эталон-сравнения — вторичный эталон, применяемый для сличения эталонов, которые по тем или иным причинам не могут быть непосредственно сличаемы друг с другом. Примером эталона сравнения может служить группа нормальных элементов, приме-

няемая для сличения государственного эталона вольта СССР с эталоном вольта Международного бюро мер и весов.

Эталон-свидетель — вторичный эталон, применяемый для проверки сохранности государственного эталона и для замены его в случае порчи или утраты. Эталон-свидетель применяется лишь тогда, когда государственный эталон является невоспроизводимым.

Рабочий эталон — вторичный эталон, применяемый для хранения единицы и передачи ее размера образцовым средствам измерений высшей точности и при необходимости — наиболее точным рабочим мерам и измерительным приборам.

Допускается применение государственного эталона в качестве рабочего, если это предусмотрено правилами хранения и применения эталона.

Государственные эталоны всегда осуществляются в виде комплекса средств измерений и вспомогательных устройств, обеспечивающих воспроизведение единицы и в необходимых случаях ее хранение, а также передачу размера единицы вторичным эталонам.

Вторичные же эталоны могут осуществляться в виде: а) комплекса средств измерений, б) одиночных эталанов, в) групповых эталонов, г) эталонных наборов.

Одиночный эталон состоит из одной меры, одного измерительного прибора или одной измерительной установки, обеспечивающих воспроизведение или хранение единицы самостоятельно без участия других средств измерений того же типа. Примерами одиночного эталона являются вторичные эталоны единицы массы — килограмма в виде платино-иридиевой и стальных гирь.

Групповой эталон состоит из совокупности однотипных мер, измерительных приборов или других средств измерений, применяемых как одно целое для повышения надежности хранения единицы.

Размер единицы, хранимой групповым эталоном, определяется как среднее арифметическое из значений, воспроизводимых отдельными мерами и измерительными приборами, входящими в состав группового эталона.

Отдельные меры и измерительные приборы, входящие в групповой эталон, применяют в качестве одиночных рабочих эталонов, если это допустимо по условиям хранения единицы.

Групповые эталоны могут быть постоянного и переменного составов. В групповые эталоны переменного состава входят меры и измерительные приборы, периодически заменяемые новыми.

Эталонный набор представляет собой набор мер или измерительных приборов, позволяющий хранить единицу или измерять величину в определенных пределах. Эти меры или измерительные приборы предназначены для различных значений или различных областей значений измеряемой величины. Примером эталонного набора является рабочий эталон единицы плотности жидкостей в

виде набора денсиметров, служащих для определения плотности жидкостей в различных участках диапазона.

Подобно групповым эталонам эталонные наборы могут быть постоянного и переменного состава.

Государственные эталоны хранятся в метрологических институтах СССР. Для проведения работ с государственными эталонами назначаются особые ответственные лица — ученые хранители эталонов.

Вторичные эталоны используются в метрологических институтах и в других крупных органах Государственной метрологической службы СССР. По разрешению Госстандарта допускается их хранение и применение в органах ведомственной метрологической службы.

Кроме национальных эталонов единиц физических величин существуют *международные* эталоны, хранимые в Международном бюро мер и весов. Программой деятельности Международного бюро предусмотрены систематические международные сличения национальных эталонов крупнейших метрологических лабораторий разных стран с международными эталонами и между собой.

Эталоны метра и килограмма сличают раз в 25 лет, электрические и световые эталоны (вольта и ома, канделы и люмена) — раз в 3 года. Проводятся также эпизодические международные сличения источников ионизирующих излучений, платиновых термометров сопротивления, температурных ламп и др.

Комплексной программой дальнейшего углубления и совершенствования сотрудничества и развития социалистической экономической интеграции стран — членов Совета Экономической Взаимопомощи (СЭВ) предусмотрено проведение работ по созданию единой системы эталонов на основе Международной системы единиц и взаимное сличение национальных эталонов стран СЭВ.

§ 22. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ ДЛИНЫ — МЕТРА

В конце XVIII века, в период введения метрической системы мер, был принят первый эталон единицы длины — метр. За метр приняли одну десятимиллионную часть четверти Парижского меридиана.

В 1799 г. на основе измерений части дуги меридиана был изготовлен эталон метра в виде платиновой концевой меры, переданный на хранение в Национальный Архив Франции и получивший название «метра Архива». Метр Архива представляет собой платиновую линейку шириной около 25 мм, толщиной около 4 мм с расстоянием между концами, равным 1 м.

Повторные измерения дуги меридиана, выполненные в XIX веке, показали, что длина принятого метра несколько короче подлинного «естественного» метра. Так как в дальнейшем при более точных измерениях, вероятно, можно было получить различные значения основной единицы длины, Международная комиссия по прототипам метрической системы, созданная по инициативе Петербургской Академии наук, в 1872 г. решила отказаться от «естественного» эталона метра и принять в качестве исходной меры длину метра Архива.

В соответствии с решением этой комиссии был изготовлен 31 эталон метра в виде штриховой меры из сплава платины с иридием. Из них метр № 6 оказался при 0° С равным метру Архива и был принят в 1889 г. I Генеральной конференцией по мерам и весам в качестве международного прототипа метра. Остальные 30 эталонов были распределены между различными государствами.

Эталон метра представляет собой платино-иридиевый брусок длиной 102 см, имеющий в поперечном сечении форму X, как бы вписанную в воображаемый квадрат, сторона которого равна 20 мм. Платино-иридиевый эталон метра № 28, полученный Россией в 1889 г., был в последующем утвержден в качестве Государственного эталона СССР.

В 1927 г. VII Генеральная конференция по мерам и весам утвердила следующее определение метра, действовавшее до 1960 г. «Единица длины — метр — определяется расстоянием при 0° С между осями двух средних штрихов, нанесенных на платино-иридиевом бруске, хранящемся в Международном бюро мер и весов и принятом в качестве прототипа метра I Генеральной конференцией по мерам и весам, при условии, что эта линейка находится при нормальном атмосферном давлении и поддерживается двумя роликами диаметром не менее 1 см, расположенными симметрично в одной горизонтальной плоскости на расстоянии 571 мм один от другого».

Требования к повышению точности эталона единицы длины (платино-иридиевый прототип метра не может дать точности воспроизведения выше 0,1—0,2 мкм), а также целесообразность установления естественного и неразрушимого эталона привели к тому, что XI Генеральная конференция по мерам и весам в 1960 г. приняла в качестве эталона единицы длины метр, выраженный в длинах световых волн оранжевой линии спектра криптона-86, соответствующей переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ этого атома.

В резолюции XI Генеральной конференции по мерам и весам о новом определении метра указывается, что, с одной стороны, международный прототип не определяет метр с точностью, достаточной для современных потребностей, и что, с другой — желательно принять естественный и неразрушимый эталон, поэтому конференция решает:

1. Метр — есть длина, равная 1650763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86.

2. Определение метра, действующее с 1889 г., основанное на международном платино-иридиевом эталоне, отменяется.

3. Международный прототип метра, утвержденный I Генеральной конференцией по мерам и весам в 1889 г., будет храниться в Международном бюро мер и весов в таких же условиях, какие были установлены в 1889 г.

Новый эталон метра может воспроизводиться в отдельных метрологических лабораториях, и точность его по сравнению с платино-иридиевым прототипом выше на порядок (в 10 раз).

Физические принципы, лежащие в основе применения эталонного источника излучения для выражения метра в длинах световых волн, заключаются в следующем.

Как известно, возбужденные пары и газы излучают свет, в спектре которого имеется ряд линий (линейчатый спектр). Каждая линия в спектре, соответствующая излучению с определенной длиной волны, является источником монохроматического света. Расположение линий в спектрах и их длины волн находятся в строгом соответствии с атомным строением вещества излучающего элемента. Атомы излучают свет вследствие изменения внутренней энергии, зависящей от взаимного расположения ядра атома и внешних слоев окружающих его электронов. При этом атомы могут находиться только в определенных энергетических состояниях. Энергии этих состояний расположены на различных уровнях. Ступени между уровнями и значениями самих энергий различны для атомов разных элементов. В нормальном состоянии атомы не излучают свет и обладают минимальной энергией E_0. После возбуждения атома он переходит в одно из возможных состояний с более высоким уровнем энергии E_1, E_2 и т. д. Затем атом самопроизвольно возвращается в какое-либо допустимое энергетическое состояние с низшим уровнем энергии. Этот процесс связан с излучением световой энергии. Согласно квантовой теории атома, частота излучения ν определяется условием

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}, \qquad (4.1)$$

где E_2 — энергия уровня, с которого совершается переход; E_1 — энергия уровня, на который совершается переход; h — постоянная Планка.

Длина волны, соответствующая частоте ν при распространении света в пустоте со скоростью c,

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \tag{4.2}$$

Каждый переход атома с одного энергетического уровня на другой соответствует излучению одной линии. Величину, обратную длине волны $1/\lambda$, называют волновым числом и выражают в метрах в минус первой степени ($м^{-1}$). Подставив в формулу (4.1) значение ν из выражения (4.2), переходят к волновым числам и получают следующую зависимость:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_2 - E_1}{ch}. \tag{4.3}$$

Отношения E/ch называют спектральными термами.

При изучении спектров излучения элементов исходят из вычисленных волновых чисел и составляют схему спектральных термов. Для получения монохроматического света применяют источники, в которых свечение вызывает электрический ток, проходящий через газ или пар. Отдельные спектральные линии излучения источника выделяют при помощи светофильтров или монохроматоров. При измерениях длины с помощью световых волн применяют лампы, заполненные инертными газами (криптоном, гелием, неоном), и лампы с ртутью и кадмием.

Теоретически длина волны любого излучения атома, являясь константой, может быть использована для точного определения единицы длины. Однако даже в идеальном случае вследствие размытости (конечной ширины) уровней энергии в атоме излучаемая спектральная линия представляет собой некоторое симметричное распределение световой энергии — интенсивности линии по шкале частот. Идеальная монохроматическая линия расширена на некоторый интервал частот. Распределение интенсивности спектральной линии по частоте представляется в виде ее контура, ширина которого при спадении интенсивности наполовину называется шириной спектральной линии. Тогда длина волн светового излучения относится к середине максимума естественного контура линии.

Спектр излучения монохроматического источника искажается добавочными возбуждениями атомов. Наличие электрических и магнитных полей в газовом разряде, нагревание, соударение излучающих атомов с другими являются причинами возмущения уровней и, следовательно, расширения линии и смещения максимума контура по шкале частот. Таким образом, действительный контур линии значительно шире естественного и может быть несимметричным.

Исследованиями с помощью интерференции света установлено, что почти все спектральные линии обладают сложным строением — сверхтонкой структурой. Наличие сверхтонкой структуры линии связано с присутствием изотопов в естественных элементах. Четно-четные элементы (с четной атомной массой и четным номером в периодической системе элементов) излучают линии с простым контуром. Такие элементы начали получать в последнее время в результате развития техники разделения изотопов. Чем проще контур, тем точнее можно воспроизвести его максимум, а следовательно, и длину световой волны.

Излучение криптона-86, определяющее метр, охарактеризовано в международном постановлении спектральными термами с обозначениями по Пашену.

На рис. 1 приведена схема термов атома криптона. Каждый терм обозначен горизонтальной черточкой. По вертикали снизу вверх отложены волновые числа в сантиметрах в минус первой степени. Нормальное состояние атома криптона соответствует уровню p_0 (линия p_0 показана условно, так как расстояние 0—80000 $см^{-1}$ не соответствует масштабу фигуры). При отрыве электрона от атома последний переходит в ионизованное состояние и может занять один из уровней, обозначенных $2p^{0'}_{\frac{1}{2}}$ и $2p^{1'}_{\frac{1}{2}}$. Нейтральный возбужденный атом может находиться на любом из термов, объединенных на фигуре в четыре группы S, p, d и F. В каждой группе состояние атома характеризуется одним зна-

чением внутреннего квантового числа, определяющего полный момент количества движения атома. Во всех группах значения термов увеличиваются в соответствии с главными квантовыми числами.

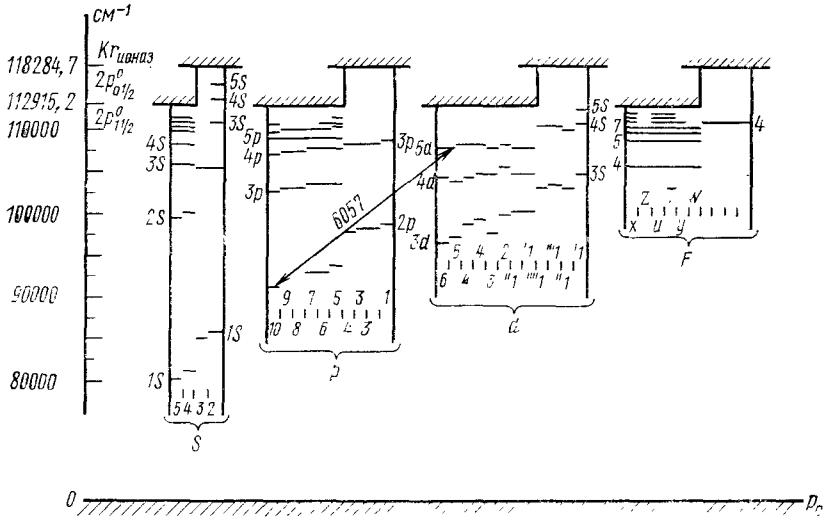


Рис. 1

Каждый терм обозначают цифрой, соответствующей величине, пропорциональной главному квантовому числу, буквой, показывающей, в какой группе расположен терм, и индексом, указывающим номер подгруппы. Например, термы S имеют обозначение 1 S_5, 3 S_4 и т. д. Для группы S номера термов начинаются с 1; для группы p — с 2 и для группы d — с 3.

Излучение криптона, принятое в качестве эталонного, соответствует переходу между уровнями, обозначенными $2p_{10}$ и $5d_5$.

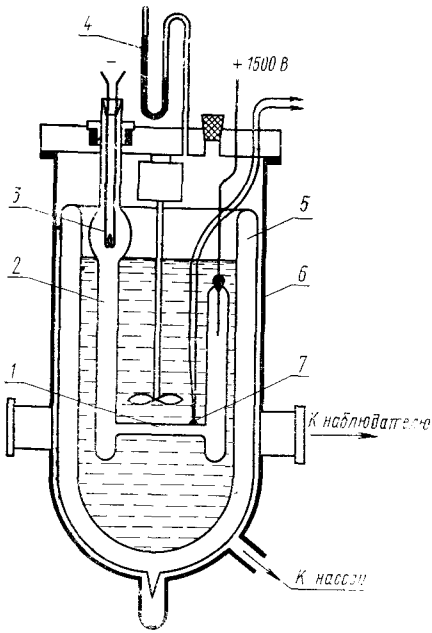


Рис. 2

В Международном бюро мер и весов и крупных национальных метрологических лабораториях созданы установки для воспроизведения метра в длинах световых волн с помощью излучения лампы, наполненной изотопом криптона-86. На рис. 2 изображена схема такой лампы, помещенной в дьюаровский сосуд для охлаждения ее до температуры тройной точки азота. Лампа *2* представляет собой газоразрядную трубку с накаленным катодом *3*. Капилляр *1*, в котором происходит свечение, имеет внутренний диаметр 2—3 мм и длину 10—12 см. Сосуд Дьюара *5* помещен в герметически закрывающуюся камеру *6*. При эксплуатации лампы в сосуд наливают чистый жидкий азот. Откачивая пары азота насосом, температуру внутри сосуда понижают до 63 К.

С помощью термопары 7, введенной внутрь сосуда, можно определить температуру стенок капилляра лампы, а по манометру 4 — упругость паров азота при его тройной точке.

Для сличения штриховых мер, в том числе и платино-иридиевых прототипов метра, с концевыми мерами и с длиной эталонной световой волны в метрологических лабораториях применяют интерференционные фотоэлектрические компараторы.

Государственный первичный эталон СССР для воспроизведения единицы длины — метра — и передачи ее размера состоит из следующего комплекса аппаратуры:

1. Источника излучения, представляющего собой газоразрядную лампу с изотопом криптона-86 конструкции ВНИИМ, выполненную и применяемую согласно требованиям спецификации Международного комитета мер и весов.

2. Эталонного интерферометра с фотоэлектрическим микроскопом и рефрактометром, представляющего собой двухлучевой интерферометр для измерений длины мер в пределах 0—1000 мм, снабженный платиновым термометром сопротивления и дифференциальными термопарами для точных измерений температуры.

3. Эталонного спектроинтерферометра, состоящего из спектрометра со сменными дифракционными решетками, обеспечивающими измерение длин световых волн в пределах 3000—200 нм, интерферометра Фабри и Перо и фотоэлектрического регистрирующего устройства.

Место хранения эталона — НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева».

Условия эксплуатации комплекса аппаратуры, входящего в состав Государственного эталона метра, установлены особой спецификацией. При соблюдении этих условий единица длины воспроизводится и передается со средним квадратическим отклонением результата, не превышающим $5 \cdot 10^{-9}$.

В настоящее время рассматриваются вопросы о возможности дальнейшего повышения точности воспроизведения метра в длинах волн излучения с учетом последних достижений физики (атомные пучки, лазеры, эффект Мессбауэра). Атомный пучок в вакууме может явиться источником монохроматического излучения отдельных атомов, находящихся друг от друга на больших расстояниях, в результате чего возможно уменьшение допплеровского расширения спектральной линии, вызванного соударениями атомов, по крайней мере в 10 раз. Лазер (оптический квантовый генератор) может обеспечить интенсивное монохроматическое излучение с узкой спектральной линией.

Узость спектральных линий ядерного излучения, возникающего вследствие эффекта Мессбауэра, полное отсутствие в нем допплеровского расширения, его характер естественной константы атомного ядра являются чрезвычайно ценными свойствами при использовании ядерного излучения в качестве эталона единицы длины, однако еще неясен путь практического осуществления этого.

Наиболее перспективным для повышения точности эталона единицы длины на сегодняшний день является применение стабилизированного лазера.

Принятое XVII Генеральной конференцией по мерам и весам в 1983 г. новое определение метра как длины пути, проходимого светом в вакууме за 1/299 792 458 долю секунды, создает предпосылки для реализации единого эталона длины — частоты — времени, что позволит в ближайшем будущем увеличить точность воспроизведения единицы длины приблизительно на два порядка. Новое определение метра предусматривает, что скорости света в вакууме приписано значение $c = 299792458$ м/с точно. Поэтому новый метод воспроизведения единицы длины может быть реализован двумя способами: 1 — как длина пути l, проходимая в вакууме плоской электромагнитной волной за интервал времени t ($l = c \cdot t$); 2 — как длина в вакууме плоской электромагнитной волны с частотой f ($\lambda = c/f$). Таким образом, воспроизведение единицы длины связывается с воспроизведением единицы времени или частоты.

Частота эталонного перехода между линиями сверхтонкой структуры цезия — 133, соответствует длине волны λ, равной $299792458/9\,192\,631770 = 0{,}032612255 \approx 32{,}6$ мм. Длина волны излучения криптона-86, используемая в Государственном первичном эталоне единицы длины, составляет 0,606 мкм. Непосредственное сличение длин волн, лежащих в столь различных интервалах, требует создания специального, очень сложного и точного оборудования для

передачи единицы длины волны из области радиоизлучения в оптическую часть спектра.

В настоящее время метрологические институты страны ведут работы по созданию единого эталона длины, времени и частоты. Предполагается, что единый эталон будет включать в себя:

Государственный первичный эталон времени и частоты;

радиооптический частотный мост, позволяющий измерять частоту излучения He—Ne/CH_4-лазеров с относительной погрешностью $1{,}6 \cdot 10^{-11}$, что в 200 раз выше погрешности определения длины волны эталонного излучения криптона-86;

Государственный первичный эталон длины;

микроинтерферометр НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева» для определения соотношения длин волн излучения лазера в инфракрасной и видимой частях спектра с относительной погрешностью в несколько единиц десятого десятичного разряда;

транспортируемые лазеры, обеспечивающие связь между эталонами во ВНИИФТРИ и в НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева».

В этих институтах уже разработаны высокоточные, частотно-стабилизированные гелий-неоновые лазеры на длины волн 3,39 и 0,63 мкм, которые обеспечивают воспроизводимость частоты излучения в несколько единиц 10 и 11-го разряда. Они должны будут использоваться для проведения международных сличений и передачи размера единицы в оптическую область спектра.

§ 23. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ МАССЫ — КИЛОГРАММА

При установлении метрической системы мер в качестве единицы массы приняли массу одного кубического дециметра чистой воды при температуре ее наибольшей плотности (4° С). В этот период были проведены точные определения массы известного объема воды путем последовательного взвешивания в воздухе и в воде пустого бронзового цилиндра, размеры которого были тщательно определены.

Изготовленный на основе этих взвешиваний первый прототип килограмма представлял собой платиновую цилиндрическую гирю высотой 39 мм, равной его диаметру. Как и прототип метра, он был передан на хранение в Национальный Архив Франции.

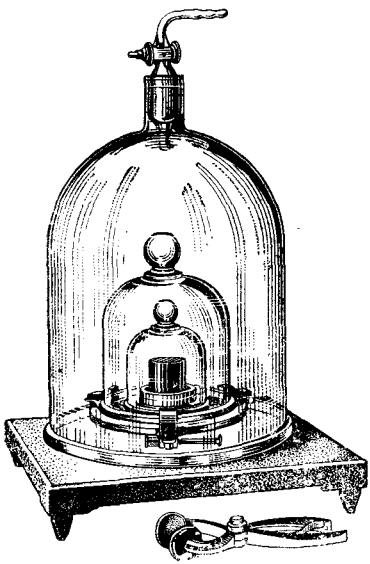


Рис. 3

В XIX веке повторно осуществили несколько тщательных измерений массы одного кубического дециметра чистой воды при температуре 4° С. При этом было установлено, что эта масса немного (приблизительно на 0,028 г) меньше массы прототипа килограмма Архива. Для того, чтобы при дальнейших более точных взвешиваниях не менять значения исходной единицы массы, на Международной комиссии по эталонам метрической системы в 1872 г. было решено за единицу массы принять массу прототипа килограмма Архива.

При изготовлении платино-иридиевых эталонов килограмма за международный прототип был принят тот, масса которого менее всего отличалась от массы прототипа килограмма Архива. На рис. 3 показан международный прототип килограмма. Он представляет собой гирю в виде прямого цилиндра с закругленными ребрами диаметром и высотой 39 мм.

В связи с принятием условного прототипа единицы массы литр оказался не равным кубическому дециметру. Это отклонение (1 л = 1,000028 дм^3) соответствует

разности между массой международного прототипа кнлограмма н массой кубического дециметра воды. В 1964 г. XII Генеральная конференция по мерам и весам приняла решение о приравниванин объема 1 л к 1 дм^3 (точно).

Следует отметить, что в момент установления метрической системы мер не было четкого разграничения понятий массы н веса, поэтому международный прототип килограмма считался эталоном единицы веса. Однако уже при утверждении международного прототипа килограмма на I Генеральной конференции по мерам и весам 1889 г. килограмм был утвержден в качестве прототипа массы. Четкое разграничение килограмма как единицы массы и килограмма как единицы силы было дано в решениях III Генеральной конференции по мерам и весам.

В связи с развитием работ по созданию новых эталонов единиц физических величин, основанных на атомных постоянных (метра — на длине световой волны, секунды — на частоте колебаний атомов и молекул, электрических и магнитных единиц — на гиромагнитном отношении протона), возник вопрос и о связи единицы массы с атомными константами. Этим объясняются предложения о применении для метрологических целей такой константы, как масса иейтрона.

Разработка и создание образцов одноизотопного состава с массой порядка 1 мг для исследования их масс спектрометрическим и массовым методами является весьма перспективной. Можно предполагать, что это даст возможность связать современный условный эталон массы, имеющий разрушимый и невоспроизводимый характер, с естественными константами масс атомных частиц, неизменных с точностью, далеко превосходящей любые практические требования.

Государственный первичный эталон килограмма СССР предназначен для воспроизведения, хранения и передачи единицы измерения массы — килограмма.

В состав эталона входит:

1. Копия международного прототипа килограмма — платино-иридиевый прототип № 12, представляющая собой гирю в виде прямого цилиндра с закругленными ребрами диаметром и высотой 39 мм. Плотность платино-иридиевого сплава — 21548,1 кг/м^3, содержаиие иридия в сплаве 10,08 — 10,09 %, объем килограмма при 0° С составляет 46,408 см^3.

2. Эталониые весы № 1 (Рупрехта) и № 2 (ВНИИМ) на 1 кг с дистанционным управлением, служащие для передачи размера единицы массы от прототипа № 12 эталонам-копиям и от эталонов-копий рабочим эталонам по методике, установленной спецификацией.

Масса килограмма № 12 в 1899 г. равнялась 1 кг+0,068 мг. По результатам сличений с эталонами Международного бюро мер и весов, произведенных в 1948—1954 гг., масса прототипа № 12 равна 1,000000085 кг.

Цена делеиия эталонных весов не превышает $4 \cdot 10^{-8}$ кг, среднее квадратическое отклонение результата измерений не более $3 \cdot 10^{-8}$ кг.

Государственный первичный эталон обеспечивает воспроизведение единицы со средним квадратическим отклонением результата измерений, не превышающим $2 \cdot 10^{-3}$ мг.

§ 24. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ

Время — это непрерывно изменяющаяся независимая переменная, участвующая во всех уравнениях, связанных с описанием движений. Исчисление времени заключается в определении дат моментов времени относительно некоторого начала и в измерении интервалов времени. Выбранный за единицу интервал времени и начало отсчета определяют шкалу времени. Измерение интервалов времени основывается на использовании периодических явлений таких, как движение Земли вокруг собственной оси или вокруг Солнца, колебания маятника или электромагнитные колебания, излучаемые атомами в процессе перехода между двумя энергетическими уровнями. Поэтому измерения времени и частоты колебаний тесио связаны друг с другом, и их единица воспроизводится одним и тем же эталоном.

Астрономические шкалы времени базируются на явлениях вращения Земли вокруг собственной оси и обращения Земли вокруг Солнца по слегка эллипти-

ческой орбите. Ось вращения Земли наклонена на угол 23,5° относительно нормали к плоскости орбиты. В геоцентрической системе координат вокруг Земли строится сфера (так называевая небесная сфера), а земная ось ориентируется по вертикали. Проекция земного экватора на небесную сферу образует небесный экватор. Видимый путь Солнца, также спроецированный на небесную сферу, изображается как окружность большого круга, наклоненного к плоскости небесного экватора под углом 23,5°. Траектория видимого движения Солнца по небесной сфере называется эклиптикой. Точка пересечения небесного экватора с эклиптикой при движении Солнца из южной половины небесной сферы в северную является точкой весеннего равноденствия, противоположная точка — точкой осеннего равноденствия. В процессе движения Солнца по эклиптике, начиная с точки весеннего равноденствия, оно пересекает ряд созвездий, называемых зодиакальными: Козерог, Водолей, Рыбы, Овен, Телец, Близнецы, Рак, Лев, Дева, Весы, Скорпион. Стрелец.

С давних времен принято делить эклиптику на двенадцать равных частей через 30°. Каждая из этих частей носит название того зодиакального созвездия, которое соответствовало этой части в 0 году новой эры.

В астрономии, навигации, картографии и ряде смежных дисциплин используется *шкала звездного времени (сидерическая шкала)*. Размер секунды (звездной секунды) определяется по этой шкале как 1/86400 часть промежутка времени между двумя последовательными верхними кульминациями точки весеннего равноденствия. Момент верхней кульминации считается началом звездных суток на меридиане места наблюдения. Начало отсчета шкалы совмещается с началом любых определенных звездных суток. Практически звездное время определяют, исходя из наблюдения момента прохождения некоторой звезды через меридиан места наблюдения, поскольку движение точки весеннего равноденствия известно. В одну ночь можно наблюдать прохождение нескольких звезд через меридиан, что дает возможность повышать точность определения времени.

В соответствии со шкалой звездного времени сидерический месяц определяется как время возвращения Луны при вращении вокруг Земли, а сидерический год — как время возвращения Земли при своем движении вокруг Солнца в прежнее положение относительно неподвижных звезд.

Звездная шкала времеии неудобна тем, что она не связана с движением Солнца, по которому живет человечество. Так, звездные сутки приблизительно на 4 мин короче средних солнечных суток. Поэтому была введена *шкала солнечного времени,* в которой размер секунды (солнечной секунды) определяется как 1/86400 часть истинных солнечных суток, — промежутка времени между двумя последовательными верхними кульминациями центра видимого диска Солнца на меридиане места наблюдения. Начальный момент совмещается при этом с началом любых определенных солнечных суток.

Истинные солнечные сутки, в противоположность звездным, не равны времени оборота Земли вокруг своей оси, а определяют, ввиду движения Земли вокруг Солнца, несколько больший интервал времени. На протяжении одного года число звездных суток на единицу превышает число солнечных суток. Наблюдения показывают, что продолжительность истинных солнечных суток все время колеблется. Это объясняется следующими причинами. Во-первых, в перигелии Земля движется быстрее, чем в афелии, что непосредственно следует из законов Кеплера. Поэтому в декабре солнечные сутки приблизительно на 16 с длиннее июньских суток, когда Земля находится в перигелии. Во-вторых, поскольку плоскость эклиптики наклонена по отношеиию к плоскости небесного экватора, а эклиптика и экватор пересекаются в точках весеннего и осеннего равноденствий, то и истинные солнечные сутки в марте и сентябре короче (приблизительно на 20 с), чем в июне и декабре. Усреднение за год кривой, описывающей изменение продолжительности истинных солнечных суток, приводит к определению средних солнечных суток. Эти сутки разбиваются на $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ частей, что и дает нам размер единицы времени — секунды — в шкале среднего солнечного времеии.

Поскольку солнечное время определяется по моментам верхней кульминации Солнца на меридиане наблюдателя, то оно различно на каждом меридиане. Поэтому для практических целей вся поверхность Земли разбивается на часо-

вые пояса и вводится поясное время, равное среднему солнечному времени основного меридиана часового пояса. В СССР используется декретное время, увеличенное на 1 ч с последнего воскресенья сентября по последнее воскресенье марта и на 2 ч в остальное время по сравнению с поясным временем. Границы часовых поясов установлены в СССР не по меридианам, а по ближайшим границам административных территорий.

Число средних солнечных суток, прошедших от одного весеннего равнодействия до другого, т. е. между двумя прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия, определяет продолжительность тропического года. Продолжительность среднего тропического года составляет: 1 год$_{\text{троп}}$ = =365,24220 средн. солн. сут., т. е. приблизительно на 1/4 суток превышает 365 дней. Поэтому каждые 4 года добавляется один день и так получается високосный год. Для учета последующих десятичных знаков первый год каждого столетия не считается високосным. Кроме того, был специально удлинен на 2 с 1972 (високосный) год и по одной секунде добавили 1 января 1973 г. и 1 января 1974 г.

Настоятельная необходимость в повышении точности измерений привела к установлению *шкалы эфемеридного времени* (*ЕТ*), основанной на продолжительности тропического года. Поскольку тропический год сам по себе не является постоянным, необходимо было исходить из одного, определенного года. Шкала эфемеридного времени была принята Международным комитетом мер и весов в 1956 г. Начало отсчета времени было дано определением даты 1900, январь 0,12 часов ровно (что соответствует полудню 31 декабря 1899 г.) как такого момента времени вблизи начала 1900 г., когда средняя геометрическая долгота Солнца на небесной сфере составляла точно 279°41′48,04″. Размер единицы — эфемеридная секунда, — определяется как 1/31556926,9747 часть тропического года для 1900, января 0,12 час *ЕТ*, т. е. как интервал времени, в течение которого средняя долгота Солнца изменилась бы на 129602678,13/3155760000 долей угловой секунды если бы, начиная с момента 1900, января 0,12 час *ЕТ* долгота Солнца стала бы изменяться равномерно.

Шкала эфемеридного времени неудобна тем, что время по ней определяется всегда лишь задним числом по результатам астрономических наблюдений. Она равномерна на продолжительных интервалах времени, точность измерения временных промежутков имеет порядок 10^{-8}, однако моменты времени определяются с погрешностью порядка 0,4 с.

Определение эфемеридного времени очень сложно и непринемлемо для обыденной жизни.

Современные международные и национальные шкалы времени. Расширение международного сотрудничества привело к необходимости установления единой шкалы времени. В настоящее время практическое значение имеют три международные шкалы среднего солнечного времени UT (Universal Time).

Шкала всемирного солнечного времени UT0 строится таким образом, что размер единицы остается равным средней солнечной секунде, а начало отсчета времени в течение каждых суток совмещается с моментом нижней кульминации среднего Солнца в начальном гринвичском меридиане. Эта шкала неравномерна вследствие перемещения полюсов Земли под влиянием изменений положения Солнца и Луны относительно Земли и сезонных колебаний частоты вращения Земли, вызываемых явлениями приливов, таянием полярных льдов и изменениями атмосферы. Эти неравномерности вносят систематические погрешности, которые вычисляются и соответствующие поправки регулярно публикуются Международным Бюро мер и весов. Учет поправок позволяет построить две исправленные шкалы всемирного времени: шкалу UT1, учитывающую влияние перемещения полюсов на положение меридианов, и шкалу UT2, учитывающую сезонные неравномерности частоты вращения Земли.

Всемирное время наиболее удобно и широко используется в тех случаях, когда необходимо знать положение Земли по отношению к внеземным объектам. Наиболее часто всемирное время используется в астрономии, картографии, навигации, а также в системах слежения за искусственными спутниками Земли. Шкала UT2 позволяет измерять интервалы времени с погрешностью, не большей 10^{-8}, и определять моменты времени с погрешностью от 2 до 4 мс.

В *шкале атомного времени* TA размер единицы — атомной секунды — при-

нимается равным секунде СИ, а начало отсчета в различных разновидностях шкалы выбирается по-разному. Многие западные государства ведут совместную *Международную шкалу атомного времени,* в которой начальный момент выбран так, чтобы она совпала со шкалой всемирного времени UT2 в 0 ч 1 января 1958 г. После этого международная шкала атомного времени ведется независимо от астрономических шкал. СССР ведет свою независимую *шкалу равномерного атомного времени* TA(SU), которая совмещена со шкалой UT2 в 12 ч всемирного времени 1 января 1964 г.

Шкала всемирного времени UT2 и искусственно создаваемые атомные шкалы со временем расходятся. Различие между атомным и всемирным временем увеличивается примерно на 1 с в год. Для ликвидации этих расхождений Международным Бюро мер и весов была введена *международная шкала координированного времени* UTC, в которой размер единицы времени равен секунде международной шкалы атомного времени, а расхождение между моментами времени по шкалам UTC и UT2 никогда не превосходят 0,8 с.

Для достижения этого, шкала перестраивается по мере необходимости путем добавления или вычитания целой секунды в строго регламентированные моменты времени — в конце 31 марта, 30 июня, 30 сентября или 31 декабря любого года.

Ряд стран согласился вести свои национальные шкалы координированного времени. В СССР ведется *шкала координированного времени* UTC(SU), в которой размер секунды равен секунде СИ, а начало отсчета допускается изменять на 1 с первого числа каждого месяца (предпочтительно 1 января, 1 июля или 1 октября) в 0 ч по шкале UTC так, чтобы расхождение между шкалами UTC(SU) и UT2 не превышало никогда 0,9 с. Таким образом, национальная шкала UTC(SU) близка к международной шкале координированного времени UTC. Поэтому одновременно с корректировкой шкалы UTC осуществляется и корректировка шкалы UTC(SU). Объявление об очередной корректировке публикуется в центральной прессе и передается по радио и телевидению. Расхождение между этими шкалами на 1 января 1976 г. не превышало 10 мкс, в то время как расхождение между шкалами UTC(SU) и атомной шкалой TA(SU) достигло 12,1728 с и продолжает расти приблизительно на 1 с в год.

Шкала UTC(SU) является основной для СССР и именно по ней ведутся все передачи сигналов времени и частоты с помощью телевидения, радио и других каналов связи, обеспечивающих единство измерения времени и частоты в нашей стране.

Одновременно специальным кодом передается и расхождение шкал UTC(SU) и UT1, которая продолжает использоваться в астрономии, геодезии, при запусках и наблюдениях за искусственными спутниками Земли. Продолжает определяться и эфемеридное время, которое используется при измерении различных физических констант.

Основное достоинство астрономических шкал времени заключается в их глобальном характере. Они формируются независимо от воли людей и, если однажды остановить все часы и прекратить все наблюдения, то спустя некоторое время астрономическую шкалу можно восстановить. Иначе обстоит дело со шкалой атомного времени. Несмотря на то, что атомная секунда воспроизводится с наивысшей достижимой точностью 10^{-14}, точность определения моментов времени по ней не столь велика. Это объясняется тем, что атомные шкалы являются искусственно созданными и локальными. Каждые атомные часы формируют свою шкалу времени. Счет колебаний по этим шкалам нужно вести непрерывно и каждая однажды сделанная ошибка остается в ней навсегда. Поэтому в настоящее время не прекращаются попытки построения более точной астрономической шкалы времени, которая носила бы глобальный характер, была достаточно долговременной и независимой от земных условий. Специалистами РАС ФИ АН СССР была предложена *шкала пульсарного времени* PT, основанная на регулярной последовательности интервалов времени между импульсами радиоизлучения пульсара. При этом в качестве основного репера предлагается использовать пульсар PSR 0834+06. Построенная таким образом шкала позволяет уже воспроизводить единицу интервала времени с точностью 10^{-11}, соизмеримой со шкалой TA, и моменты времени с погрешностью, меньшей 200 мкс, недостижимой при использовании других шкал. Шкала пульсарного

времени позволяет хранить земные единицы времени и ход времени на Земле практически на необозримых отрезках времени порядка 10^6—10^7 лет.

Воспроизведение единицы времени и частоты. В 1967 г. XIII Генеральная конференция по мерам и весам постановила, что квантовый переход между линиями сверхтонкой структуры атома ^{133}Cs, а именно невозмущенный внешними полями переход $F=4$; $m_F=0 \rightleftarrows F=3$; $m_F=0$ основного состояния $^2S_{1/2}$, дает частоту 9,192631770 ГГц точно. Тем самым определяется и единица времени — секунда — как интервал времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний излучения при этом переходе.

Ядро атома цезия, обладающее магнитным моментом (спин $I=7/2$), взаимодействует с магнитным моментом валентного электрона (спин $I=1/2$). Это и приводит к расщеплению основного электронного уровня атома на ряд подуровней, т. е. к образованию так называемой сверхтонкой структуры. Частоты, соответствующие переходам между уровнями сверхтонкой структуры, попадают в диапазон радиочастот. Очень важно, что энергия перехода между уровнями сверхтонкой структуры, а стало быть и соответствующая частота, очень мало зависят от внешних магнитных полей.

В эталонах удается настолько снизить напряженность внешних магнитных полей, что смещение частоты, соответствующей используемому переходу, составляет всего 10^{-12} от частоты при полном отсутствии внешних магнитных полей. От других параметров (электрического поля, давления, плотности пучка и т. п.) частота перехода зависит еще меньше.

На рис. 4 приведена схема цезиевого атомно-лучевого эталона времени и частоты.

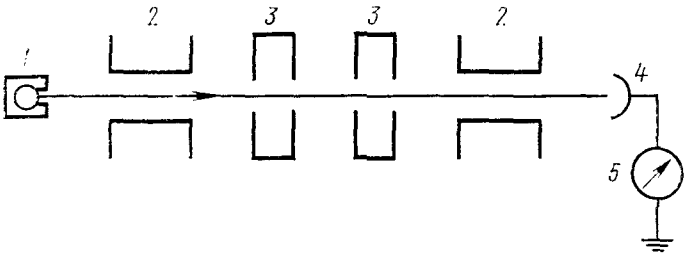


Рис. 4

Источник *1* атомного пучка представляет собой контейнер из металла, стойкого по отношению к щелочам. В стенке контейнера имеются каналы, формирующие пучок. Температура источника — 100—150° С. Магниты *2* служат для сортировки атомов пучка по состояниям сверхтонкой структуры: выделяются атомы, находящиеся в состояниях $F=3$, $M=0$ и $F=4$, $M=0$.

К резонаторам *3* подводится сверхвысокочастотный сигнал, частоту которого можно в некоторых пределах изменять около значения 9192631770 Гц. В результате действия этого сигнала выделенные атомы переходят из состояния $F=3$, $M=0$ в состояние $F=4$, $M=0$ или обратно. Второй сортирующий магнит выделяет из пучка только те атомы, которые перешли из одного состояния в другое в результате взаимодействия с полем сигнала. Атомы, совершившие переход, попадают в приемник *4* и регистрируются индикатором *5*.

Если частота подводимого сигнала точно соответствует частоте перехода, то показания индикатора максимальны. Если же частота сигнала отличается от частоты перехода, то показания индикатора резко уменьшаются. Это и служит основой стабилизации частоты. Частота сигнала, соответствующая максимальным показаниям индикатора, принимается за 9192631770 Гц.

Все узлы установки помещены в камеру, в которой поддерживается высокий вакуум.

Стабильность эталонов с атомным пучком цезия равна 10^{-11}, в настоящее время их используют службы времени и частоты.

Принцип работы водородных генераторов (на атомарном водороде) основан на использовании квантового перехода между состояниями $F=1$, $m_F=0$ и $F=0$, $m_F=0$ в сверхтонкой структуре основного состояния атомов водорода, частота которого при отсутствии внешних воздействий постоянна и равна 1420405751,8 Гц.

Схема и принцип действия водородного генератора изображены на рис. 5.

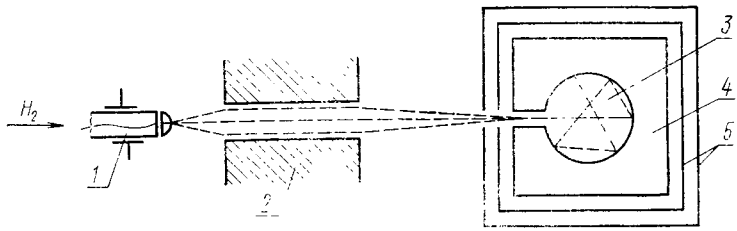


Рис. 5

Атомы водорода получаются в источнике *1*, представляющем собой стеклянную трубку, где происходит диссоциация молекул водорода под действием высокочастотного электрического разряда. Пучок атомов водорода выходит из источника через коллиматор, обеспечивающий его направленность, и попадает в поле шестиполюсного аксиального магнита *2*. В сильном неоднородном поле, создаваемом этим магнитом, происходит пространственная сортировка атомов в пучке, так что атомы, находящиеся на уровне $F=1$, $m_F=0$, фокусируются на вход накопительной ячейки *3*, которая расположена внутри высокодобротного объемного резонатора *4*, настроенного на частоту используемого перехода.

Конструкция ячейки такова, что атомы находятся в резонаторе около секунды. Ее стенки покрыты фторопластом, в результате чего даже при более чем 10^5 соударениях атома водорода со стенкой его энергетическое состояние не меняется.

Взаимодействие возбужденных атомов с высокочастотным полем резонатора в течение секунды повышает вероятность их перехода в нижнее энергетическое состояние и вызывает самовозбуждение генератора, а такж увличивает добротность линии излучения и соответственно стабильность частоты генератора.

Для уменьшения влияния внешних магнитных полей на частоту водородного генератора резонатор помещают в многослойный экран *5*.

В Государственном первичном эталоне времени и частоты используются квантовые меры, в которых за опорную принимается частота, соответствующая частоте энергетического перехода в атомах или молекулах выбранного вещества. Квантовые меры подразделяются на реперы и хранители. Оии различаются тем, что реперы включаются эпизодически с целью осуществления поверок и регулировок средств измерения частоты, а хранители (часы) работают непрерывно и для них определяется значение фазы выходного сигнала относительно некоторого начального момента. Таким образом, квантовые меры частоты (реперы) обеспечивают воспроизведение единицы времени и частоты, а квантовые часы (хранители времени) служат для воспроизведения шкал времени TA(SU) и UTC(SU).

В состав Государственного первичного эталона входят: цезиевый репер; цезиевые часы; водородные реперы и часы; рубидиевые часы (квантовый генератор на рубидии с оптической накачкой); аппаратура внутренних и внешних сличений эталонов и аппаратура средств обеспечения.

Цезиевый репер, входящий в состав эталона, включается два раза в месяц, и с его помощью определяют частоту рубидиевых часов, отличающихся высокой кратковременной стабильностью (порядка $1\cdot10^{-13}$—$2\cdot10^{-13}$ в течение 1—10 с, за сутки приблизительно на два порядка хуже). Одновременно путем сравнения с частотой рубидиевых часов, определяют частоту водородных реперов. После

этого, в течение полумесяца с ними сравнивают основные хранители эталона — водородные и цезиевые часы.

Государственный первичный эталон времени и частоты СССР обеспечивает воспроизведение единиц с относительным средним квадратическим отклонением результата измерений, не большим $1 \cdot 10^{-13}$, при неисключенной относительной систематической погрешности, не превышающей $1 \cdot 10^{-12}$.

§ 25. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ СИЛЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА — АМПЕРА

Из определения силы тока как физической величины видно, что единица силы тока равна единице количества электричества, проходящего через поперечное сечение проводника в единицу времени. Поэтому естественно было бы принять за основную электрическую единицу некоторый заряд, например, равный заряду электрона или определенного числа электронов. Однако в настоящее время нет возможности осуществить с достаточной точностью эталон, опирающийся на такое определение. Вследствие этого пришлось отказаться от единицы количества электричества как основной электрической единицы и принять в качестве таковой единицу силы тока — ампер.

Размер ампера ввиду отсутствия возможности на практике определить его через количество электричества приходится определять по тем действиям или явлениям, которые ток вызывает в окружающей среде, например, выделение теплоты при прохождении тока по проводнику, осаждение вещества на электродах при прохождении тока через электролит, пондеромоторные (механические) действии тока на магнит или на проводник с током. Любой из законов, относящихся к этим явлениям, может быть положен в основу установления единицы силы тока. Для целей метрологии следует выбрать тот, который позволяет воспроизвести единицу силы тока с наибольшей точностью.

В 1893 г. Международный конгресс электриков в Чикаго принял первый эталон силы электрического тока — ампер, установив так называемый международный ампер, определяемый через эталон, служащий для его воспроизведения. Ампер воспроизводился с помощью серебряного вольтаметра и имел следующее определение: международный ампер — неизменяющийся ток, который, проходя через водный раствор азотнокислого серебра, при соблюдении приложенной спецификации выделяет 0,0011180 г серебра в 1 с.

В 1948 г. при переходе на абсолютную практическую систему электрических единиц международный ампер был отменен. В основу современного эталона ампера положен закон взаимодействия электрических токов. Измерение силы, с которой один проводник действует на другой, можно осуществлять более точно, чем измерение количества выделенного током тепла или количества выделенного вещества на электродах. Поэтому определение ампера основано на законе Ампера взаимодействия токов.

В настоящее время ампер определяется по силе взаимодействия двух прямолинейных проводников бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 м один от другого в пустоте. При силе электрического тока в проводниках 1 А сила взаимодействия составляет $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Приведенная формулировка содержит понятие бесконечно длинных и бесконечно тонких проводников, которые на практике осуществить невозможно. Однако на основе закона Ампера можно рассчитать с достаточно высокой точностью силу взаимодействия токов, протекающих по проводникам конечных размеров.

При взаимодействии подвижной и неподвижной катушек, так называемых токовых весов, теоретический расчет дает надежные результаты. Поэтому токовые весы и приняты в качестве эталона единицы силы электрического тока — ампера. Схема токовых весов приведена на рис. 6.

Токовые весы представляют собой рычажные равноплечие весы, в которых подвешенная слева подвижная катушка уравновешивается грузом, положенным на правую чашку весов. Подвижная катушка входит во вторую неподвижную коаксиально расположенную катушку. При прохождении по этим последовательно соединенным катушкам постоянного электрического тока подвижная катушка

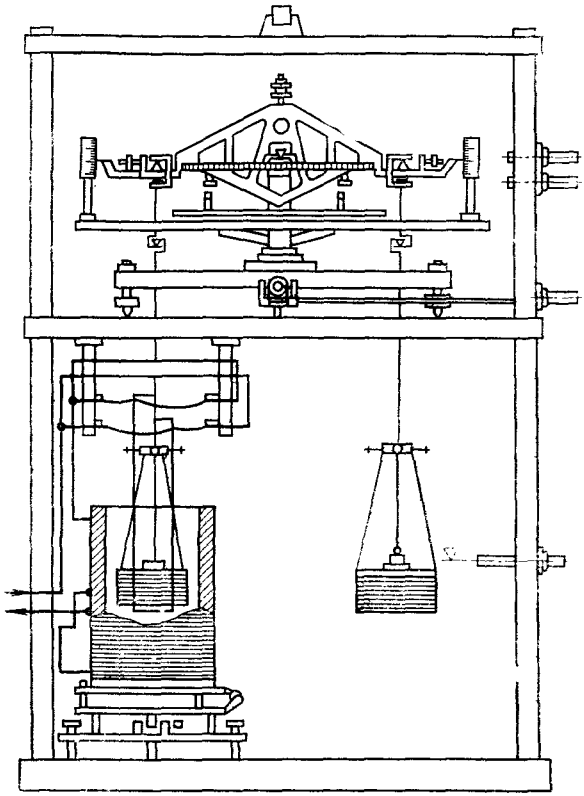


Рис. 6

опускается, поэтому на правую чашку весов следует положить добавочный груз. По массе добавочного груза и судят о силе электрического тока, проходящего по катушкам. В самом деле, как уже указывалось, в соответствии с законом Ампера

$$F = kI_1I_2 = kI^2, \tag{4.4}$$

где F — сила взаимодействия токов в катушках: I_1 и I_2 — силы токов в катушках ($I_1 = I_2 = I$ при последовательном соединении катушек); k — коэффициент пропорциональности (постоянная электродинамической системы), зависящий от формы и размеров катушек, диаметра сечения проводов катушек, принятого значения относительной магнитной проницаемости среды и т. д.

С другой стороны, в соответствии со вторым законом Ньютона

$$F = mg, \tag{4.5}$$

где F — уравновешивающая сила тяжести; m — масса добавочного груза; g — ускорение свободного падения в месте расположения весов.

Приравнивая выражения (4.4) и (4.5), получаем расчетную формулу для определеиия силы тока в зависимости от массы добавочного груза:

$$I = \sqrt{\frac{mg}{k}}. \tag{4.6}$$

Государственный первичный эталон ампера СССР представляет собой комплекс измерительных средств, применяемых для воспроизведения, хранения и передачи единицы силы электрического тока — ампера.

В состав эталона входят:

1. Токовые весы, состоящие из:

а) электродинамической системы в виде неподвижной катушки, имеющей две однослойные обмотки, и двух коаксиальных жестко связанных между собой подвижных катушек с однослойными обмотками, подвешенных к одному плечу коромысла весов. Постоянная электродинамической системы, рассчитанная по размерам катушек, равна $3860555 \cdot 10^{-8}$ Н/А^2;

б) весов с дистанционным управлением, служащих для уравновешивания силы взаимодействия токов, пропускаемых по обмоткам неподвижной и подвижных катушек, силой тяжести гири, имеющей массу 8,16044 г и выполненной в виде латунного цилиндра диаметром 5 мм и длиной 50 мм. Значение ускорения свободного падения принято в соответствии с данными измерений для пункта ВНИИМ. Цена деления весов не превышает $1 \cdot 10^{-7}$ кг.

Токовые весы дают достаточно высокую точность для поддержания единства измерений почти во всех случаях с учетом нынешнего состояния измерительной техники.

2. Аппаратура для передачи размера единицы, в которую входит катушка сопротивления, получившая свое значение от первичного эталона ома.

Воспроизведение размера единицы силы тока Государственным первичным эталоном ампера осуществляется со средним квадратическим отклонением результата, не превышающим $4 \cdot 10^{-6}$, при неисключенной систематической погрешности, не большей $8 \cdot 10^{-6}$.

Достижения современной физики в области исследования свойств атомного ядра раскрывают новые возможности для осуществления электрических и магнитных эталонов, основанных на внутриатомных процессах. Одним из вероятных новых эталонов является эталон, основанный на ядерном магнитном резонансе. Гиромагнитное отношение протона может быть принято в качестве основной константы, необходимой для образования всей совокупности электрических и магнитных единиц.

Другим возможным путем является переход к единицам электрического заряда и тока, основанным непосредственно на заряде электрона и счете элементарных электрических частиц.

Многообещающей является также область криогенных исследований. Так, при изучении явления сверхпроводимости было показано, что токи могут сохраняться в сверхпроводящих веществах неопределенно долгое время. С развитием этой области появится возможность получать устройства — эталоны электрического тока, которые смогут осуществлять те же функции, что и эталонные катушки сопротивления и эталонные элементы в настоящее время.

§ 26. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ ТЕМПЕРАТУРЫ — КЕЛЬВИНА

Для единицы температуры — кельвина в метрологических научных учреждениях разработан комплекс эталонной аппаратуры, служащий для воспроизведения и измерения термодинамической температуры и международной практической температуры. Этот комплекс состоит из эталонных газовых термометров, аппаратуры для воспроизведения основных реперных точек и эталонных приборов в виде платиновых термометров сопротивления и платинородий-платиновых термопар.

Измерение температуры с момента изобретения термометра Галилеем в 1598 г. основывалось на применении того или иного термометрического вещества, изменяющего свой объем или давление при изменении температуры.

В 1715 г. Фаренгейт создал ртутный термометр и предложил для построения термометрической шкалы две точки: температуру смеси льда с солью и нашатырем, которую он обозначил 0, и температуру тела человека, которую он обозначил числом 96.

В 1736 г. Реомюр предложил для термометрической шкалы другие две постоянные точки, более удобные для воспроизведения: точку таяния льда 0° и точку кипения воды 80°.

В 1742 г. Цельсий предложил термометрическую шкалу, в которой расстояние по шкале между точкой таяния льда и точкой кипения воды делилось на 100 частей. Показания термометров такого типа зависели от рода примененного термометрического вещества и от особенностей и условий теплового расширения его.

В середине прошлого века английский физик В. Томсон (с 1892 г. — лорд Кельвин) показал, что можно установить термодинамическую температурную шкалу, не зависящую от рода термометрического вещества.

Термодинамическая температурная шкала. Шкала построена на основании следующих положений.

Если в обратимом цикле Карно тело, совершающее цикл, поглощает теплоту Q_1 при температуре T_1 и отдает тепло Q_2 при температуре T_2, то отношение абсолютных температур T_1/T_2 равно отношению количеств тепла Q_1/Q_2. Согласно положениям термодинамики, это отношение не зависит от свойств рабочего тела.

Так как изменения количества тепла всегда могут быть измерены, то при помощи цикла Карно, проведенного, например, между температурой плавления льда T_0 и температурой кипения воды T_s, можно определить отношение T_s/T_0. Для этого надо измерить количество тепла Q_0, отдаваемое рабочим веществом, и количество тепла Q_s, поглощаемое рабочим веществом. Затем можно измерить любую температуру T, если один из двух тепловых резервуаров будет иметь температуру T_0.

Установленная таким образом термодинамическая температурная шкала, не зависящая от свойств термометрического вещества, называется также *шкалой Кельвина*.

Так как свойства газов при большом разрежении близки к свойствам идеального газа, термодинамическая температурная шкала в пределах значительного температурного интервала совпадает со шкалой, установленной с помощью газового термометра при весьма большом разрежении газа, заполняющего газовый термометр.

При установлении термодинамической температурной шкалы для сохранения преемственности числового выражения ее со стоградусной температурной шкалой Цельсия температурный промежуток между точкой таяния льда и точкой **кипения воды был приравнен 100°.**

Кельвин и независимо от него Д. И. Менделеев высказали соображения о целесообразности построения термодинамической шкалы температур по одной реперной точке. Такая шкала имеет значительные преимущества и позволяет определять абсолютную температуру точнее, чем шкала с двумя реперными точками. В шкале с одной реперной точкой необходимо приписывать определенное числовое значение единственной экспериментально реализуемой точке шкалы. Нижней границей температурного интервала будет служить тогда точка абсолютного нуля.

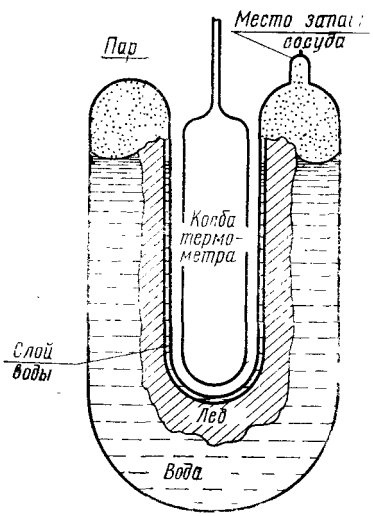


Рис. 7

Погрешность воспроизведения точки кипения воды составляет 0,002—0,01° С, точки таяния льда 0,0002—0,001° С. Тройная же точка воды, являющаяся точкой равновесия воды в твердой, жидкой и газообразной фазах, может быть воспроизведена в специальных сосудах с погрешностью не более 0,0001° С. Схема сосуда для осуществления тройной точки воды показана на рис. 7.

Консультативный комитет по термометрии Международного комитета мер и весов в 1954 г. принял рекомендацию о переходе к определению термодинамической шкалы посредством одной реперной точки — тройной точки воды.

Рассмотрев тщательно все числовые результаты, полученные в различных лабораториях, Консультативный комитет по термометрии признал, что значением температуры тройной точки воды, лежащей выше точки таяния льда на 0,01 К, является 273,16 К.

X Генеральная конференция по мерам и весам в 1954 г. на основании этого установила термодинамическую шкалу температур с одной реперной точкой — тройной точкой воды.

Таким образом, термодинамическая температура является основной и обозначается символом T. Ее единицей служит кельвин (символ К), определенный как 1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды.

Температура в градусах Цельсия, которая обозначается символом t, определяется как

$$t = T - T_0, \tag{4.7}$$

где $T_0 = 273{,}15$ К. Единицей в этом случае является градус Цельсия (символ °С). Градус Цельсия равен кельвину. Температурные разности (интервалы) выражаются в кельвинах, но могут быть выражены также и в градусах Цельсия.

Практические температурные шкалы. Измерение температуры по термодинамической шкале путем ее прямой реализации с помощью газовой термометрии связано с серьезными трудностями. Практические измерения осуществляются с помощью единой системы температурных шкал, непрерывной в диапазоне от 0,01 до 100000 К. В различных поддиапазонах используются различные шкалы, однако все они установлены таким образом, чтобы измеренные по ним температуры были как можно ближе к термодинамическим температурам. Совокупность практических температурных шкал устанавливается ГОСТ 8.157—75.

В диапазоне температур от 0,01 до 0,8 К измерения осуществляются по температурной шкале термометра магнитной восприимчивости ТШТМВ. Чувствительный элемент этого термометра выполняется из церий-магниевого нитрата, магнитная восприимчивость которого определяется температурой T в соответствии с законом Кюри $\chi = C/T$. Входящая сюда постоянная C находится при градуировке магнитного термометра.

В области температур от 0,8 до 1,5 К используется шкала ^{3}He 1962 г., использующая зависимость давления насыщенных паров изотопа гелия-3 от температуры. Уравнение, выражающее эту зависимость, приводится в ГОСТ 8.157—75.

В диапазоне от 1,5 до 4,2 К используется шкала ^{4}He 1958, построенная по тому же принципу, что и шкала ^{3}He 1962 г. Однако зависимость давления насыщенных паров изотопа гелия-4 от температуры оказывается более сложной, поэтому в ГОСТ 8.157—75 она приводится в виде таблицы.

В области температур от 4,2 до 13,81 К температура измеряется по шкале германиевого термометра сопротивления ТШГТС, основанная на зависимости электрического сопротивления германия от температуры. Зависимость эта выражается полиномом восьмой степени, девять коэффициентов которого определяются градуировкой германиевого термометра по газовому термометру.

Для диапазона температур от 13,81 до 6300 К в 1968 г. была установлена Международная практическая температурная шкала МПТШ-68, основанная на ряде воспроизводимых равновесных состояний различных веществ, которым приписаны определенные значения температур. Эти значения температур были определены с помощью газовых термометров по термодинамической шкале. Однако полученные разными авторами значения температур для одних и тех же фазовых переходов значительно различались вследствие больших погрешностей, присущих газовым термометрам. Поэтому для каждой точки равновесия выбранных фазовых переходов были законодательно приняты наиболее достоверные (точные) значения, приведенные в табл. 3 и образующие в своей совокупности основные реперные точки шкалы МПТШ-68.

В промежуточных точках температура определяется по приведенным в ГОСТ 8.157—75 зависимостям, устанавливающим связь между показаниями эталонных приборов и значениями МПТШ-68. В качестве эталонных приборов в области температур от 13,81 до 903,89 К используется платиновый термометр сопротивления, а при температурах от 903,89 до 1337,58 К — термоэлектрический

Таблица 3

Основные реперные точки МПТШ-68 *

Состояние фазового равновесия	Принятое значение международной практической температуры	
	T_{68}, К	t_{68}, °С
Равновесие между твердой, жидкой и парообразной фазами равновесного водорода (тройная точка равновесного водорода)	13,81	—259,34
Равновесие между жидкой и парообразной фазами равновесного водорода при давлении 33330,6 Па (25/76 нормальной атмосферы)	17,042	—256,108
Равновесие между жидкой и парообразной фазами равновесного водорода (точка кипения равновесного водорода)	20,28	—252,87
Равновесие между жидкой и парообразной фазами неона (точка кипения неона)	27,102	—246,048
Равновесие между твердой, жидкой и парообразной фазами кислорода (тройная точка кислорода)	54,361	—218,789
Равновесие между жидкой и парообразной фазами кислорода (точка кипения кислорода)	90,188	—182,962
Равновесие между твердой, жидкой и парообразной фазами воды (тройная точка воды)**	273,16	0,01
Равновесие между жидкой и парообразной фазами воды (точка кипения воды)***	373,15	100
Равновесие между твердой и жидкой фазами цинка (точка затвердевания цинка)	692,73	419,58
Равновесие между твердой и жидкой фазами серебра (точка затвердевания серебра)	1235,08	961,93
Равновесие между твердой и жидкой фазами золота (точка затвердевания золота)	1337,58	1064,43

* За исключением тройных точек и одной точки равновесного водорода (17,042 К) принятые значения температур даны для состояния равновесия при давлении одна нормальная атмосфера (p_0=101325 Па).

** Используемая вода должна иметь изотопический состав, соответствующий океанской воде.

*** За состояние равновесия между твердой и жидкой фазами олова (точка затвердевания олова) принято состояние при t_{68}=231,9681 °С; оно может быть использовано вместо точки кипения воды.

термометр, образованный термопарой с электродами из платинородия (10 % родия) и платины. Более высокие температуры определяются расчетом по измеренным значениям спектральной плотности энергии $L_\lambda(T)$ и $L_\lambda[T(Au)]$ излучения черного тела при измеряемой температуре T и в точке затвердевания золота T(Au) в соответствии с уравнением

$$\frac{L_\lambda(T)}{L_\lambda[T(\mathrm{Au})]}=\frac{\exp\left[\dfrac{C_2}{\lambda T(\mathrm{Au})}\right]-1}{\exp\left[\dfrac{C_2}{\lambda T}\right]-1},$$

где λ — длина волны, на которой проводятся измерения спектральной плотности; C_2=0,014388 м·К — постоянная Планка.

Построенная таким образом температурная шкала отличается, конечно, от термодинамической шкалы и является условной. Близость этих двух шкал опре-

деляется современным уровнем наших знаний, однако и сейчас расхождение между МПТШ-68 и термодинамической шкалой достигает 0,004—0,005 К в районе точки кипения воды. Это говорит о том, что температура определяется менее точно, чем остальные основные величины.

Для диапазона температур от 6300 до 100000 К измерения температуры базируются на шкале термометра микроволнового излучения (ТШПМИ), основанной на зависимости спектральной плотности энергии излучения черного тела от температуры, которая при использовании теплового излучения с длинами волн более 1 мм принимает вид

$$\frac{L(T)}{L[T(\mathrm{Au})]} = \frac{T}{T(\mathrm{Au})},$$

где $T(\mathrm{Au})$ — температура в точке затвердевания золота.

Глава V

ПЕРЕДАЧА РАЗМЕРА ЕДИНИЦ ОТ ЭТАЛОНОВ ОБРАЗЦОВЫМ И РАБОЧИМ СРЕДСТВАМ ИЗМЕРЕНИЙ. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ

§ 27. ОБРАЗЦОВЫЕ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

Передача размеров единиц от эталонов рабочим мерам и измерительным приборам осуществляется посредством образцовых средств измерений.

Образцовые средства измерений представляют собой меры, измерительные приборы или измерительные преобразователи, предназначенные для поверки и градуировки по ним других средств измерений и в установленном порядке утвержденные в качестве образцовых. Образцовые средства измерений хранят и применяют органы Государственной метрологической службы и органы отраслевых (ведомственных) метрологических служб.

В качестве образцовых средств измерений применяются меры, измерительные приборы и измерительные устройства, прошедшие метрологическую аттестацию и признанные пригодными для использования в качестве образцовых. На образцовые средства измерений выдаются свидетельства с указанием метрологических параметров и разряда по общесоюзной поверочной схеме.

На рис. 8 показана метрологическая цепь передачи размеров единиц от первичных эталонов (верхнее звено метрологической цепи) рабочим эталонам, от них — разрядным образцовым средствам измерений и далее — рабочим мерам и измерительным приборам.

Между разрядами образцовых средств измерений существует соподчиненность: образцовые средства измерений 1-го разряда

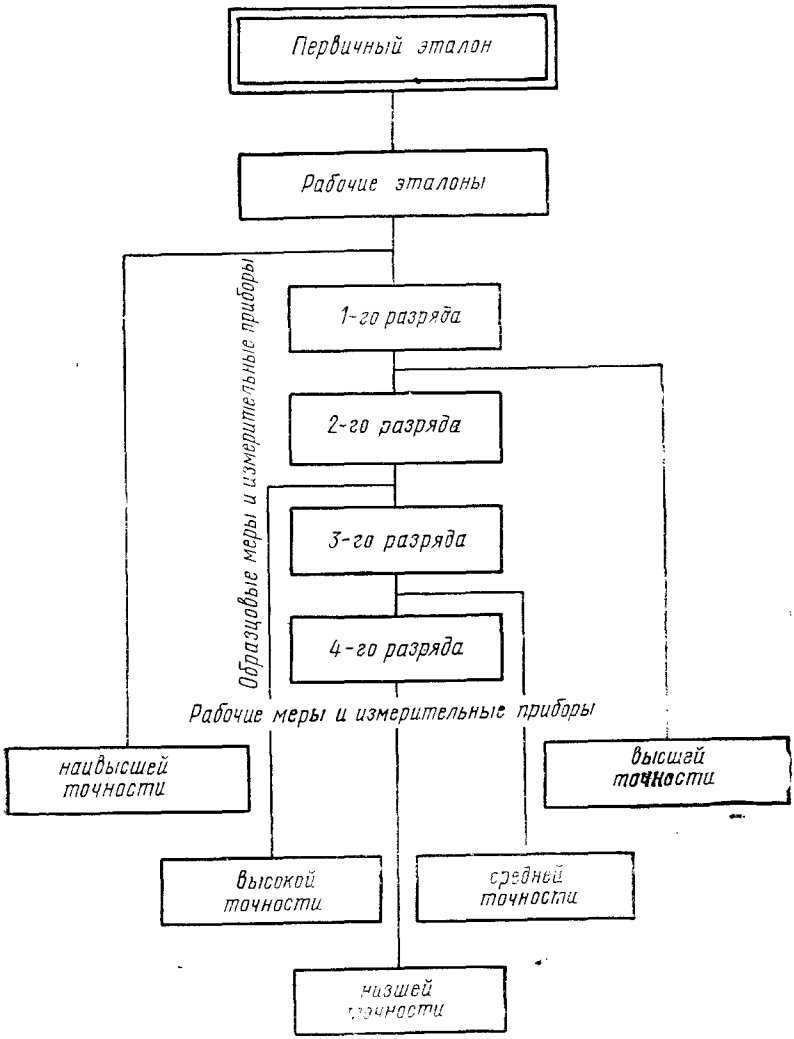


Рис. 8

поверяются, как правило, непосредственно по рабочим эталонам, образцовые средства измерений, аттестуемые в качестве образцовых 2-го и последующего разрядов, подлежат поверке по образцовым средствам измерений непосредственно предшествующих разрядов. Для разных видов измерений устанавливается, исходя из требований практики, различное число разрядов образцовых средств измерений, устанавливаемых стандартами на поверочные схемы для данного вида средств измерений.

Как видно из данной схемы (см. рис. 8), отдельные рабочие меры и измерительные приборы наивысшей точности могут пове-

ряться по рабочим эталонам; средства измерений высшей точности — по образцовым мерам и измерительным приборам 1-го разряда; высокой точности — по образцовым мерам и измерительным приборам 2-го разряда и т. д.

Образцовые средства измерений находятся в метрологических институтах или лабораториях Государственной метрологической службы, а также поверочных лабораториях отраслевых (ведомственных) метрологических служб, которым в установленном порядке предоставлено право поверки средств измерений.

Средства измерений в качестве образцовых утверждаются органами Государственной метрологической службы, располагающими образцовыми средствами измерений более высокого разряда, чем представляемые для аттестации. В отдельных случаях по разрешению органов Государственной метрологической службы предоставляется право утверждения образцовых средств измерений органам отраслевых метрологических служб при наличии у них требуемых условий.

Все образцовые средства измерений подлежат обязательной периодической поверке в строки, устанавливаемые правилами Госстандарта.

§ 28. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОВЕРОЧНЫХ СХЕМАХ

Для обеспечения правильной передачи размера единиц физических величин во всех звеньях метрологической цепи (от эталонов образцовым мерам, а от них — рабочим мерам и измерительным приборам) должен быть установлен определенный порядок. Этот порядок и приводится в поверочных схемах.

Поверочная схема представляет собой исходный документ, устанавливающий метрологическое соподчинение эталонов, образцовых средств измерений и порядок передачи размера единицы образцовым и рабочим средствам измерений.

Исходное положение о поверочных схемах приводится в ГОСТ 8.061—80 «ГСИ. Поверочные схемы. Содержание и построение».

Поверочные схемы подразделяются на общесоюзные и локальные (отдельных органов государственной метрологической службы или ведомственных метрологических служб).

Государственные *поверочные схемы* должны служить основанием для составления локальных поверочных схем и для разработки государственных стандартов и методических указаний на методы и средства поверки образцовых и рабочих средств измерений. Общесоюзные поверочные схемы утверждаются в качестве государственных стандартов.

Элементами общесоюзной поверочной схемы являются наименования государственных эталонов, эталонов-копий, эталонов-свидетелей, эталонов сравнения, рабочих эталонов, образцовых средств измерений и рабочих средств измерений, а также методов передачи размера единиц (методов поверки).

Общее количество разрядов образцовых средств измерений должно обеспечивать рациональную систему передачи размера единицы всем применяемым в стране рабочим средствам измерений.

Поверочные схемы состоят из текстовой части и чертежа. В локальные поверочные схемы допускается не включать текстовую часть.

На чертеже поверочной схемы указываются: наименования средств измерений, диапазоны значений физических величин, обозначения и оценки погрешностей, наименования методов поверки.

Методы поверки, указываемые на поверочной схеме, должны отражать специфику поверки данного вида средств измерений. Они соответствуют одному из следующих общих методов:

непосредственному (т. е. без компаратора) сличению поверяемого средства измерений с образцовым средством измерений того же вида (т. е. меры с мерой или измерительного прибора с измерительным прибором);

сличению поверяемого средства измерений с образцовым средством измерений того же вида при помощи компаратора;

прямому измерению поверяемым измерительным прибором величины, воспроизведенной образцовой мерой;

прямому измерению образцовым измерительным прибором величины, воспроизведенной подвергаемой поверке мерой;

косвенным измерениям величины, воспроизводимой мерой или измеряемой прибором, подвергаемым поверке;

независимой поверке, т. е. поверке средств измерений относительных (безразмерных) величин, не требующих передачи размеров единиц от эталонов или образцовых средств измерений, проградуированных в единицах размерных величин.

Текстовая часть состоит из вводной части и пояснений к элементам поверочной схемы.

Структура поверочной схемы состоит из нескольких полей, соответствующих ступеням передачи размеров единицы от первичного эталона рабочим средствам измерений. Поля отделены друг от друга горизонтальными пунктирными линиями. В левой части поверочной схемы по вертикали указывают наименования элементов поверочной схемы. В самих полях располагают структурные элементы поверочной схемы, заключаемые в прямоугольники и круги или овалы (прямоугольники для эталонов, образцовых и рабочих средств измерений, круги для методов поверки). Соподчиненность структурных элементов указывают соединительными линиями.

В верхнем поле поверочной схемы указывают наименования эталонов. Наименование первичного эталона заключают в прямоугольник, обведенный двойной линией.

Ниже первичного эталона в том же поле помещают наименования вторичных эталонов и диапазон, в котором они хранят единицу измерений. Наименования вторичных эталонов заключают в прямоугольники, обведенные одной линией.

Если для данного вида измерений отсутствуют эталоны и их единицы воспроизводят косвенным путем, в верхнем поле поверочной схемы помещают наименование образцовых средств измерений, применяемых для воспроизведения данной единицы, заимствованные из поверочных схем для соответствующих средств измерений; при этом на поверочной схеме должна быть сделана ссылка на другие поверочные схемы, из которых заимствованы наименования образцовых средств измерений.

Под полем эталонов располагают поля образцовых средств измерений 1-го и других разрядов, помещая в каждое из них наименование образцовых средств измерений соответствующего разряда. Наименования образцовых средств измерений с указанием диапазонов измерений и погрешностей поверки заключают в прямоугольники аналогично вторичным эталонам.

Погрешность поверки указывают в виде погрешности передачи размера единицы от предыдущего высшего звена поверочной схемы данному образцовому средству измерений. При наличии общепринятых классов точности вместо погрешности указывают класс точности.

Под полем образцовых средств измерений низшего разряда помещают поле рабочих средств измерений. Рабочие средства измерений подразделяют по точности и диапазонам измерений на группы, располагая группы в порядке убывающей точности так, чтобы наименования наиболее точных средств измерений находились в левой части поля.

Кроме наименований рабочих средств измерений, указывают диапазоны измерений и характеристики точности в виде класса точности, предела допускаемой погрешности или цены деления. Рабочие средства измерений группируются на поверочной схеме по диапазонам значений измеряемых величин, по точности и методам поверки.

На поверочной схеме указывают в кругах (или при наименовании метода состоящем из нескольких слов, — в овале) конкретные методы поверки, при

меняемые в данной области измерений, руководствуясь при этом данной выше классификацией.

Круги располагают между наименованиями объектов поверки и образцовых средств измерений, применяемых для их поверки, причем, если эти круги находятся не в поле эталонов, их располагают в разрывах пунктирной линии, разделяющей соответствующие поля схемы.

Передачу размеров единиц от эталонов образцовым и рабочим средствам измерений изображают соединительными линиями, проходящими через круг, в котором указан метод поверки. Соединительные линии, как правило, не должны пересекаться.

На рис. 9 приведен пример компоновки элементов поверочной схемы. На рисунке *1* — государственный эталон; *2* — метод передачи размера единиц; *3* — эталон-копия; *4* — эталон-свидетель; *5* — рабочий эталон; *6*, *7*, *8* — образцовые средства измерений соответствующих разрядов; *9* — образцовые средства измерений, заимствованные из других поверочных схем; *10* — рабочие средства измерений.

Государственные поверочные схемы разрабатываются метрологическими институтами СССР.

Локальные поверочные схемы утверждаются руководителями предприятий

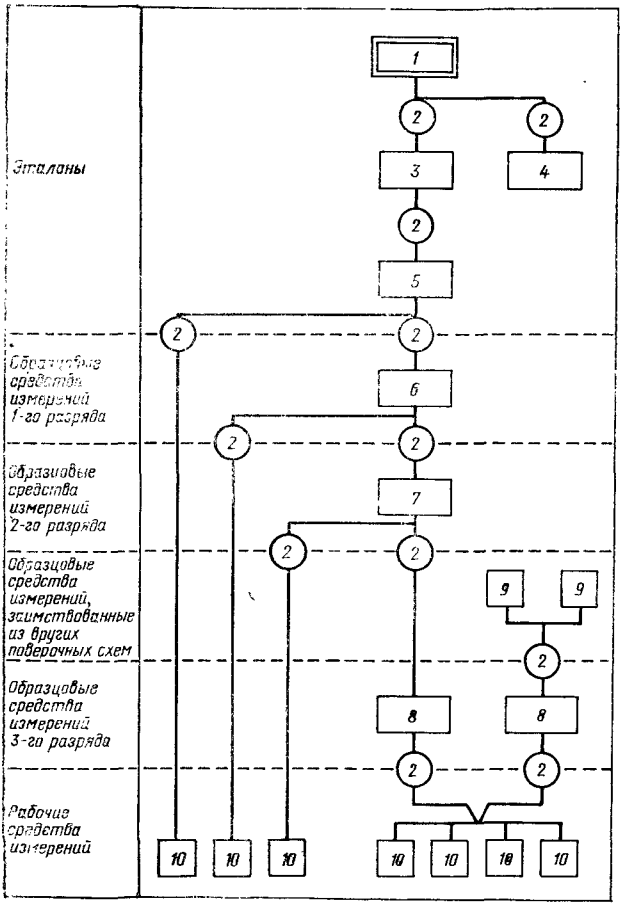


Рис. 9

или организаций, в которых используется данная поверочная схема, по согласованию с органами государственной метрологической службы, осуществляющими для них поверку исходных образцовых средств измерений, включенных в поверочную схему.

Локальные поверочные схемы должны составляться при наличии более двух ступеней передачи размера единицы физических величин и не должны противоречить государственным поверочным схемам для средств измерений данного вида. В верхней части локальной поверочной схемы должны быть указаны местонахождение и наименование эталона или образцового средства измерений (в соответствии с общесоюзной поверочной схемой), по которому проводится поверка исходных образцовых средств измерений данной схемы.

В локальную поверочную схему должны быть включены все находящиеся в эксплуатации или выпускаемые в обращение рабочие средства измерений данной физической величины.

Элементами локальной поверочной схемы являются наименования образцовых средств измерений, рабочих средств измерений, а также методов поверки; допускается включение в поверочную схему наименований эталонов-копий и рабочих эталонов.

§ 29. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

Для этих видов средств измерений в НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева» разработаны две поверочные схемы: для мер длины и приборов для линейных измерений; для угловых мер и угломерных приборов.

Первая из этих поверочных схем в свою очередь делится на две части: штриховые меры длины и поверяемые по ним приборы и концевые меры длины и поверяемые по ним приборы.

Во главе обеих частей поверочных схем поставлен эталонный комплекс приборов для воспроизведения метра в длинах световых волн оранжевой линии криптона-86.

В первой части поверочной схемы показана передача размера метра вторичным эталонам — платино-иридиевым метрам и интерференционным установкам для абсолютных измерений длины в длинах волн вторичных эталонных излучений криптона-86, ртути-198, кадмия-114 и стабилизированных гелий-неоновых лазеров, по своему метрологическому назначению играющим роль эталонов-копий, а также эталонным штриховым мерам, применяемым при периодическом контроле правильности абсолютных измерений длины на интерференционных установках метрологических институтов с использованием вторичных эталонных длин волн.

Платино-иридиевый метр № 2 является одновременно штриховой и концевой мерой. Действительную длину его как концевой меры можно определять с помощью интерферометра. Действительную длину подразделений шкалы метров № 11 и ВИЛ-100 определяют методом прямых измерений.

Рабочими эталонами служат наборы, состоящие из мер длиной 1 мм — 1 м. Действительное значение рабочих эталонов определяют как интерференционным методом с использованием вторичных эталонов длин волн, так и сличением со вторичными платино-иридиевыми эталонами посредством компараторов методом калибровки.

Поверочная схема предусматривает в качестве следующих звеньев метрологической цепи для штриховых мер: образцовые штриховые меры 1-го разряда (поверяемые сличением с рабочими эталонами либо измерением интерференционным методом с использованием вторичных эталонных длин волн) и образцовые штриховые меры 2-го разряда (поверяемые по образцовым мерам 1-го разряда).

Поверку миллиметровых и сантиметровых подразделений штриховых мер повышенной точности можно выполнить также сличением их с образцовыми штриховыми мерами 1-го разряда или методом калибровки.

Вторая часть поверочной схемы посвящена концевым мерам длины и поверяемым по ним приборам. По этой схеме размер метра от первичного этало-

на передается эталонным плоскопараллельным концевым мерам длиной 10÷1000 мм, предназначенным для периодического контроля правильности абсолютных измерений длины, проводимых в метрологических институтах на интерферометрах с использованием вторичных эталонных длин световых волн.

Далее в поверочной схеме приведены образцовые концевые меры 1, 2, 3, 4 и 5-го разрядов. Одновременно поверочная схема предусматривает для рабочих концевых мер длины классы точности 00; 0; 1; 2; 4 и 5.

Образцовые концевые меры 1-го разряда поверяют абсолютным интерференционным методом, используя вторичные эталоны длины волн. Эти меры применяют для поверки образцовых концевых мер 2-го разряда. Рабочие концевые меры класса 0 поверяют по образцовым концевым мерам 1-го разряда.

Образцовые плоскопараллельные концевые меры длины 2-го разряда поверяют относительным интерференционным методом по образцовым концевым мерам длины 1-го разряда и применяют для поверки образцовых концевых мер длины 3-го разряда и концевых мер длины класса 0.

Образцовые плоскопараллельные концевые меры длины 3-го разряда длиной до 100 мм поверяют по образцовым концевым мерам длины 2-го разряда техническим интерференционным методом или на контактных интерферометрах. Концевые меры 3-го разряда служат для поверки образцовых концевых мер длины 4-го разряда и концевых мер длины класса 1, а также для поверки некоторых мер и измерительных приборов, показанных на поверочной схеме.

Образцовые концевые меры длины 4-го разряда служат для поверки мер 5-го разряда и класса 2. С помощью образцовых концевых мер длины 5-го разряда поверяют различные рабочие измерительные приборы как методом сличения с образцовыми мерами, так и при помощи концевых измерительных машин и других оптико-механических измерительных приборов.

Во главе поверочной схемы для угловых мер и углоизмерительных приборов находится Государственный первичный эталон, включающий в себя следующий комплекс средств измерений:

интерференционный экзаменатор для воспроизведения единицы и передачи ее размера в области малых углов;

угломерную автоколлимационную установку для передачи размера единицы;

двенадцатигранную кварцевую призму, служащую для контроля стабильности эталона.

Плоский угол воспроизводится первичным эталоном с дискретностью 10° в диапазоне 0—360°. При проведении 132 совокупных измерений двенадцатигранной призмы среднее квадратическое отклонение результата измерений не превосходит 0,01″ при неисключенной систематической погрешности, не большей 0,02″.

Для целей международных сличений и передачи размера единицы рабочим эталонам служит эталон сравнения, состоящий из автоколлиматора и многогранных кварцевых призм. Рабочие эталоны представлены многогранными кварцевыми призмами, применяемыми раздельно и совместно с автоколлиматором, автоколлимационными установками и интерференционными экзаменаторами.

Для дальнейшей передачи размера единицы угла используются образцовые средства измерений 1—4-го разрядов, к числу которых относятся многогранные призмы, угловые меры с одной, тремя или четырьмя рабочими углами, гониометры и угломерные установки, круговые машины уровни и экзаменаторы. Для поверки экзаменаторов методом косвенных измерений используются плоскопараллельные концевые меры длины 2—5-го разрядов, заимствованные из поверочной схемы для средств измерений длин.

По образцовым средствам измерения различных разрядов, а также непосредственно по рабочим эталонам, поверяется большая номенклатура рабочих средств измерений. К ним относятся угловые меры классов точности 0; 1 и 2, многогранные призмы классов точности 00; 0; 1 и 2, гониометры, автоколлиматоры, теодолиты, круговые делительные и измерительные машины, ампулы уровней и уровни, различные механические и оптические угломеры. Пределы допускаемой абсолютной погрешности рабочих средств измерений составляют от 0,1″ (наиболее точные автоколлиматоры) до 15′ (угломеры с нониусом).

Поверочную схему для средств измерения отклонений от прямолинейности

и плоскостности возглавляет государственный специальный эталон, включающий в себя:

твердокаменный мост длиной 5 м, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, верхняя рабочая поверхность которого воспроизводит профиль поверхности с нормированным отклонением от прямолинейности и являющийся таким образом мерой отклонения от прямолинейности;

измерительную систему, состоящую из блока излучателей, измерительной каретки и блока обработки сигналов и регистрации результатов;

специальный комплект концевых мер длины 1-го разряда, осуществляющий связь с поверочной схемой для средств измерения длин.

Государственный специальный эталон воспроизводит единицу длины в области измерения отклонений от прямолинейности и плоскостности в диапазоне до 50 мкм со средним квадратическим отклонением, не превышающим 0,14 мкм при 10 независимых наблюдениях, при неисключенной систематической погрешности, не большей $0{,}1 \cdot L$ мкм (L — контролируемая длина в метрах).

Эталоном-копией служат оптико-механические приборы с автоматической записью профиля поверхности. Среднее квадратическое отклонение результата сличения с государственным эталоном составляет $0{,}15\,L$ мкм.

Рабочим эталоном является твердокаменный мост длиной 3 м. Воспроизводимое им отклонение от прямолинейности измеряется с помощью установки, состоящей из измерительной каретки с двумя зеркальными отражателями и двух автоколлиматоров с ценой деления 0,25″. Для образцовых средств измерений поверочной схемой предусмотрено три разряда. В качестве образцовых средств используются автоколлиматоры в комплекте с отражателями, оптические линейки, автоматические автоколлимационные и гравитационные приборы, микронивелиры, оптические линейки, струны и плоскомеры, поверочные линейки, плиты и твердокаменные блоки. Пределы допускаемых абсолютных погрешностей рабочих средств измерений лежат в пределах от $(0{,}5+0{,}005H)$ мкм до $(5+12L)$ мкм, причем наиболее точные средства поверяются по образцовым средствам измерений высших разрядов или даже непосредственно по рабочим эталонам методом прямых измерений или сличением с помощью компаратора с измерительной головкой, имеющей цену деления 1; 2 или 10 мкм.

Во главе поверочной схемы для средств измерения параметров шероховатости поверхности $Rmax$ и Rz в диапазоне от 0,1 до 1000 мкм находится Государственный специальный эталон, включающий в себя:

образцовый газовый оптический квантовый генератор 1-го разряда, стабилизированный по провалу Лэмба;

микроинтерференционную установку, состоящую из микроинтерферометра, устройства для объективного наведения на характерные точки интерференционной картины и дополнительных средств измерения перемещений;

меры шероховатости.

Воспроизведение единицы указанным эталоном осуществляется со средним квадратическим отклонением результата измерения 0,005 мкм в диапазоне 0,1—1 мкм и 0,05 мкм в диапазоне 1—1000 мкм при неисключенной систематической погрешности 0,005 мкм и 0,05 мкм соответственно.

Рабочими эталонами служат наборы мер шероховатости в виде плоскопараллельных пластин с неровностями периодического профиля на рабочей поверхности.

Среднее квадратическое отклонение результатов поверки рабочих эталонов, приведенное к верхнему пределу диапазонов измерения 0,1—1 мкм и 1—1000 мкм, составляет 0,8 и 1 % соответственно. От рабочих эталонов размер единицы передается образцовым измерительным приборам 1-го разряда методом прямых измерений эталонных мер и образцовым мерам шероховатости 1-го разряда сличением с помощью специального компаратора с эталонными мерами. Всего предусмотрено три разряда образцовых средств убывающей точности. В качестве рабочих средств измерения используются микроинтерферометры, растровые измерительные микроскопы, приборы светового и теневого сечений, профилометры-профилографы, а также образцы шероховатости поверхности и специальные детали — образцы шероховатости.

Особой областью линейно-угловых измерений является измерение отклонений параметров зубчатых колес, в частности, колес с профилем зуба, описы-

ваемым эвольвентой. Для целей обеспечения единства измерений в этой области разработан Государственный специальный эталон и Государственная поверочная схема для средств измерений параметров эвольвентных поверхностей.

Государственный специальный эталон единицы длины — метра — для эвольвентных поверхностей представляет собой комплекс следующих средств измерений, состоящий из:

комплекта эталонных эвольвентных мер, соответствующих радиусам основной окружности от 37 до 100 мм и углам развернутости от 0 до 35°;

комплекта эталонов Фабри-Перро;

интерференционной установки для измерения параметров эвольвентной поверхности в полярной системе координат.

Единица воспроизводится эталоном со средним квадратическим отклонением результата измерений, не превышающим 0,25 мкм, при неисключенной систематической погрешности, не большей 0,15 мкм. Методом прямых измерений или сличением с помощью компаратора размер единицы передается далее образцовым эвольвентным мерам 1-го разряда и далее непосредственно наиболее точным рабочим эвольвентомерам с пределом допускаемой абсолютной погрешности 1,2—4,0 мкм.

Более грубые рабочие приборы для контроля профиля зуба (эвольвентомеры и координатно-измерительные машины с пределами допускаемой абсолютной погрешности 5—8 мкм) поверяются по образцовым измерительным зубчатым колесам или образцовым эвольвентным мерам 3-го разряда. Размер единицы передается этим мерам от образцовых мер 1-го разряда посредством образцовых интерференционных приборов и эвольвентомеров 2-го разряда.

§ 30. ПОВЕРОЧНАЯ СХЕМА ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ

Благодаря сигналам времени и частоты, передаваемым по телевидению, радио и другим каналам связи, единицы времени и частоты, воспроизводимые Государственным первичным эталоном, стали доступными для самого широкого круга пользователей. Этим объясняются особенности поверочной системы для средств измерения времени и частоты, в соответствии с которой образцовые средства измерений не подразделяются на разряды, рабочие средства измерений не делятся на классы точности и как те, так и другие средства измерений могут поверяться непосредственно по Государственному первичному эталону.

Поле эталонов поверочной схемы представлено Государственным первичным эталоном, эталоном-копией, перевозимыми квантовыми часами и рабочими эталонами. Среднее квадратическое отклонение результата поверки эталона-копии не превышает $5 \cdot 10^{-13}$, а рабочих эталонов — $5 \cdot 10^{-12}$, в то время как пределы допускаемого расхождения шкалы UTC (SU) и шкал, воспроизводимыми этими вторичными эталонами, составляют 3 и 10 мкс соответственно.

Передача размеров единиц от эталонов образцовым и рабочим средствам измерения осуществляется методом непосредственного сличения, сличением при помощи телевидения, радио и других каналов связи или сличением с помощью перевозимых квантовых часов.

Поверочной схемой предусмотрено семь ступеней образцовых мер времени и частоты со средними квадратическими отклонениями результатов их поверки от $1 \cdot 10^{-11}$ до $1 \cdot 10^{-5}$ и с нараста-

ющими от 20 мкс до 20 с пределами допускаемого расхождения собственных шкал времени от шкалы UTC (SU).

Рабочие средства измерений времени и частоты (балансовые, маятниковые, камертонные, резонансные и гетеродинные измерители частоты, кварцевые и квантовые меры, электронно-счетные частотомеры и т. д.) характеризуются средним квадратическим отклонением результата их поверки от $1 \cdot 10^{-3}$ до $1 \cdot 10^{-11}$. В зависимости от точности, они могут поверяться либо методом непосредственного сличения по образцовым мерам времени и частоты, либо сличением с помощью телевидения, радио и других каналов связи по наиболее точным образцовым мерам или даже непосредственно по эталону.

Передача сигналов времени и частоты осуществляется специализированными радиостанциями Государственной службы времени и частоты СССР, работающими на низкой и высокой частоте. Для передачи используются сигналы следующих типов:

A0 — немодулированные синусоидальные колебания заданной частоты;

A1 — синусоидальное несущее колебание, манипулируемое по амплитуде прямоугольными импульсами; начало переднего фронта импульса служит временной меткой.

Временные метки формируются прямоугольными импульсами с частотой 1 и 10 Гц. Длительность импульсов с частотой 1 Гц составляют 100 мс, а импульсы, приходящиеся на начало каждой новой минуты, удлиняются до 500 мс.

Длительность импульсов, передаваемых с частотой 10 Гц, составляет 20 мс, а импульсов, приходящихся на начало каждой новой секунды или минуты, удлиняются, соответственно, до 40 мс и 500 мс.

Для взаимного сличения шкал времени с очень высокой точностью применяется метеорная связь на УКВ, использующая отражение электромагнитных волн от следов ионизации, оставляемых влетающими в атмосферу Земли метеорами. Для осуществления сличения антенны передающей и приемной радиостанций нацеливаются на одну и ту же область атмосферы. След одного метеора отражает волны в течение нескольких секунд, а за одни сутки возможно проведение нескольких десятков сличений с погрешностью порядка 0,1 мкс.

§ 31. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Поверочная схема для гирь и весов устанавливает порядок передачи единицы массы от Государственного первичного эталона — национального прототипа № 12 — через рабочие эталоны и образцовые гири рабочим гирям и весоизмерительным приборам.

Для проверки сохранности государственного эталона используется эталон-свидетель — платино-иридиевый килограмм № 26,

являющийся физической копией килограмма № 12. Среднее квадратическое отклонение результата его поверки составляет $2 \cdot 10^{-3}$ мг. Передача размера единицы рабочим эталонам осуществляется через эталоны-копии — гири по 1 кг из платино-иридиевого сплава и немагнитной нержавеющей стали — посредством сличения на эталонных весах № 1 (Рупрехта) и №2 (ВНИИМ). Рабочими эталонами служат наборы гирь от 1 мг до 1 кг из тех же материалов. Далее поверочной схемой предусмотрено четыре разряда образцовых средств измерений. Меры 1-го разряда представлены наборами гирь-рейтеров от 0,1 до 5 мг и наборами гирь от 1 мг до 1 кг. Гири 2-го разряда имеют номинальные значения от 1 мг до 20 кг; меры 3-го разряда включают в себя гири от 5 мг до 20 кг, гири параллелепипедной формы на 20 кг и условные гири по 5 и 10 кг. Образцовые средства измерений 4-го разряда представлены наборами гирь от 10 мг до 2000 кг, гирями параллелепипедной формы массой 20 кг и условными гирями массой 50 мг, 5 и 20 кг. Кроме мер, в 4-ом разряде появляются и весы — контрольно-весовые платформы для масс от 25 до 50 Мг (т).

Для передачи размера единицы массы по всей цепочке образцовых средств измерений от рабочих эталонов до рабочих гирь и весов используются образцовые весы разрядов 1а; 1; 2; 3 и 4. Образцовые гири поверяются методом сличения на этих образцовых весах.

Рабочими средствами измерений являются гири массой от 1 мг до 20 кг, крутильные, лабораторные и торсионные весы, весы специального назначения, автоматические весы и дозаторы, технологические и вагонные весы, рычажные весы общего назначения. Рабочие гири подразделяются на пять классов точности. Для гирь классов 1; 2 и 3 доверительная абсолютная погрешность в зависимости от номинального значения составляет от $7 \cdot 10^{-4}$ до 60 мг (при доверительной вероятности 0,95); для гирь классов точности 4 и 5 пределы допускаемой абсолютной погрешности лежат в интервале от $5 \cdot 10^2$ до $3{,}25 \cdot 10^3$ мг.

Поверочная схема для средств измерения силы возглавляется Государственным первичным эталоном, состоящим из набора мер силы в четырех эталонных установках, воспроизводящих единицу силы в диапазонах:

от	10	до	$2 \cdot 10^2$ Н	с	дискретностью	10 Н;
»	10^2	»	$5 \cdot 10^3$ Н	с	»	10^2 Н;
»	$2 \cdot 10^3$	»	10^5 Н	с	»	10^3 Н;
»	10^4	»	10^6 Н	с	»	10^4 Н.

Метод воспроизведения силы основан на применении взвешенного с большой точностью комплекта грузов, находящихся в поле тяжести Земли. Массы грузов, будучи умноженными на ускорение свободного падения на географической широте НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», и образуют кратные единицы силы. Единица силы воспроизводится эталоном с относительным средним квадратическим отклонением результата измерений, не превыша-

ющем $5 \cdot 10^{-6}$, и неисключенной относительной систематической погрешностью, меньшей $1 \cdot 10^{-5}$.

Градуировкой методом непосредственного нагружения размер единицы силы передается образцовым переносным динамометром 1-го разряда непосредственно от Государственного первичного эталона. Далее, посредством образцовых силоизмерительных машин 2-го разряда и переносных динамометров 3-го разряда, единица силы передается рабочим приборам — испытательным машинам, прессам и деформационным динамометрам с пределами допускаемой приведенной погрешности от 0,5 до 2,0 %.

В области измерений твердости разработаны три государственных специальных эталона и три поверочных схемы для трех наиболее распространенных шкал твердости (Бриннеля, Роквелла и Супер-Роквелла, Виккерса). Все три схемы построены одинаково. Во главе их находится государственный специальный эталон в виде одного или двух стационарных приборов непосредственного нагружения с набором специальных гирь, воспроизводящих ряд фиксированных нагрузок. В состав эталонов входят, кроме того, наконечники в форме стальных закаленных шариков, алмазного конуса или правильной алмазной четырехгранной пирамиды, и специальные микроскопы для измерения размеров отпечатков или глубины внедрения наконечников в испытуемый материал.

Единица твердости по шкале Бриннеля воспроизводится с относительным средним квадратическим отклонением $1 \cdot 10^{-3}$ и неисключенной относительной систематической погрешностью $3 \cdot 10^{-3}$ в диапазоне от 8 до 450 единиц твердости HB. По шкале Роквелла и Супер-Роквелла единица твердости воспроизводится со средним квадратическим отклонением результата измерений, не превышающим 0,1 и 0,2 единиц твердости, и с неисключенной систематической погрешностью 0,3 и 0,6 единиц твердости соответственно. По шкале Виккерса единица твердости воспроизводится в диапазоне от 8 до 2000 единиц твердости HV с относительным средним квадратическим отклонением от $2 \cdot 10^{-3}$ до $6 \cdot 10^{-3}$ при неисключенной относительной систематической погрешности от $1 \cdot 10^{-3}$ до $3 \cdot 10^{-3}$.

Далее поверочными схемами предусматриваются два разряда наборов образцовых мер твердости Бриннеля (МТБ), Роквелла (МТР), Супер-Роквелла (МТСР) и Виккерса (МТВ). Образцовые меры 1-го разряда получают размер единицы непосредственно от Государственного специального эталона методом косвенных измерений, а меры 2-го разряда поверяются методом прямых измерений с помощью соответствующего прибора для измерения твердости, настроенного по образцовым мерам 1-го разряда. Рабочими средствами измерений служат переносные и стационарные приборы (твердомеры) Бриннеля и Виккерса с пределами допускаемых относительных погрешностей от 3 до 5 % и приборы Роквелла и Супер-Роквелла с пределами допускаемой абсолютной погрешности от 1,0 до 3,0 единиц твердости.

В области измерения давлений разработаны эталоны и повероч-

ные схемы для средств измерения абсолютных и избыточных давлений и разностей давлений.

Во главе поверочной схемы для средств измерения малых абсолютных давлений от $1 \cdot 10^{-8}$ до $1 \cdot 10^{3}$ Па находится государственный специальный эталон, состоящий из группы компрессионных и мембранно-емкостных вакуумметров и аппаратуры для создания и поддержания абсолютного давления.

Компрессионный манометр является результатом совершенствования U-образных жидкостных манометров. Возможность измерения малых давлений U-образным манометром ограничена трудностями отсчета малых разностей уровней рабочей жидкости в коленах манометра. В компрессионном манометре, предложенном в 1874 г. Мак-Леодом, газ сжимают в одном из колен до определенного объема. Степень сжатия может иметь порядок 10^{6}. Во столько же раз в соответствии с законом Бойля-Мариотта возрастает и давление газа, а разность уровней увеличивается до пределов, позволяющих произвести отсчет. Результат измерения находится расчетом. Таким образом, компрессионный манометр реализует абсолютный метод измерения и не требует поверки по более точному манометру. Измерения сводятся к определению линейных размеров и перемещений; площадей; объемов, занимаемых газом до и после сжатия; к использованию таких постоянных, как плотность рабочей жидкости и ускорение свободного падения, и введению поправок на ряд сопутствующих измерению явлений.

Мембранно-емкостный вакуумметр представляет собой камеру, разделенную тонкой металлической мембраной на две полости. В каждой из них параллельно плоскости мембраны расположено по одному плоскому электроду, каждый из которых образует с мембраной по одному плоскому воздушному конденсатору. В одну полость вакуумметра подается газ, давление которого подлежит измерению, а в другой полости создается глубокий вакуум. Под действием разности давлений мембрана прогибается и изменяется емкость конденсаторов. Измерение малого абсолютного давления сводится таким образом к измерению электрических величин.

Эталон воспроизводит единицу давления в диапазоне от $1 \cdot 10^{-3}$ до $1 \cdot 10^{3}$ Па с относительным средним квадратическим отклонением результата измерения, меньшим $0{,}3 \cdot 10^{-2}$ и с неисключенной относительной систематической погрешностью, не большей $0{,}3 \cdot 10^{-2}$.

Посредством рабочего эталона и образцовых средств измерений 1 и 2-го разрядов единица давления передается рабочим средствам измерения, в качестве которых используются магнитные; ионизационные; термопарные и деформационные вакуумметры; вакуумметры и измерители парциальных давлений, которые в диапазоне от $1 \cdot 10^{-8}$ до $1 \cdot 10^{3}$ Па характеризуются пределами допускаемых относительных погрешностей от $100 \cdot 10^{-2}$ до $5 \cdot 10^{-2}$ в зависимости от диапазона измерений. Таким образом, в области высокого вакуума (порядка $1 \cdot 10^{-8}$ Па) относительная погрешность измерения может достигать 100 %.

В диапазоне более высоких абсолютных давлений от 270 Па до 0,4 МПа единство измерений обеспечивается поверочной схемой, поле эталонов которой возглавляется Государственным специальным эталоном в виде двух грузопоршневых манометров абсолютного давления, которые обеспечивают воспроизведение единицы в диапазоне от 270 Па до 0,13 МПа со средним квадратическим отклонением результата, не большим 0,3 Па, при неисключенной систематической погрешности 2 Па. В грузопоршневом манометре измеряемое давление уравновешивается весом грузов определенной массы, накладываемых на поршень определенного поперечного сечения. В связи с этим при известном ускорении свободного падения измерение давления сводится к измерению массы грузов и линейных размеров поршня, поэтому с помощью грузопоршневого манометра реализуются абсолютные измерения давления. Методом непосредственного сличения единица передается эталону сравнения и от него рабочему эталону. Поверочной схемой предусмотрено три разряда образцовых средств. В качестве рабочих средств измерения используются деформационные барометры, микробарометры, барографы, микробарографы и измерительные преобразователи, а также ртутные манометры и барометры. Пределы допускаемых абсолютных погрешностей рабочих средств измерений лежат в диапазоне от 26 Па до 0,01 МПа в зависимости от типа средств измерений и диапазона измерений. Именно эта поверочная схема отвечает за точность измерения атмосферного давления с помощью известных барометров.

Во главе поверочной схемы для средств измерения избыточных давлений до 250 МПа находится Государственный первичный эталон, состоящий из трех групп грузопоршневых манометров, рассчитанных на диапазоны измерения от 0,05 до 0,5 МПа; от 0,3 до 3,0 МПа и от 1 до 10 МПа, наборов гирь 2-го класса и набора специальных гирь из поверочной схемы для средств измерения массы и аппаратуры для поддержания гидростатического давления и передачи единицы эталону-копии. Единица давления воспроизводится эталоном с относительным средним квадратическим отклонением результата измерения не больше $3 \cdot 10^{-6}$ и неисключенной относительной систематической погрешностью, не большей $2 \cdot 10^{-5}$. Через эталон-копию, рабочие эталоны и образцовые средства измерений четырех разрядов единица передается рабочим средствам измерений — деформационным манометрам и вакуумметрам, ртутным мановакуумметрам и манометрическим измерительным преобразователям классов точности от 0,25 до 6,0.

§ 32. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В области средств измерения электрических и магнитных величин имеется только одна основная единица — ампер. Через ампер и единицу мощности — ватт, единую для электрических, магнит-

ных, механических и тепловых величин, можно было бы определить и все остальные электрические и магнитные единицы. Однако в настоящее время не существует достаточно точных средств воспроизведения ватта абсолютными методами. Поэтому система эталонов электрических и магнитных единиц основывается на эталонах двух единиц — ампера и фарады —, воспроизводимых абсолютными методами, основанными на прямых измерениях основных механических единиц и использовании физических констант, с гораздо более высокой точностью, чем какие-либо другие единицы.

Следует, однако, иметь в виду, что уже сейчас единица разности потенциалов — вольт — воспроизводится абсолютным методом, основанным на использовании эффекта Джозефсона, с точностью, на порядок большей, чем ампер. Поэтому можно предположить, что в скором времени система эталонов электрических и магнитных единиц будет основываться на вольте и фараде.

Поле эталонов поверочной схемы для средств измерения силы постоянного электрического тока в диапазоне от $1 \cdot 10^{-12}$ до 30 А возглавляет Государственный первичный эталон, воспроизводящий ампер в абсолютной мере с относительным средним квадратическим отклонением результата измерения $4 \cdot 10^{-6}$ и неисключенной относительной систематической погрешностью $8 \cdot 10^{-6}$. Посредством эталонных нормальных элементов и мер электрического сопротивления размер единицы передается образцовым мерам малых токов и образцовым амперметрам (один разряд) и далее рабочим средствам измерения. Рабочими средствами являются меры малых постоянных токов с диапазоном от $1 \cdot 10^{-12}$ до $1 \cdot 10^{-6}$ А и пределами допускаемых относительных погрешностей от 0,5 до 1,5 %, амперметры и электрометры для измерения малых постоянных токов от $1 \cdot 10^{-12}$ до $1 \cdot 10^{-6}$ А с пределами допускаемых относительных погрешностей от 1 до 10 %, микроамперметры, милиамперметры и амперметры с диапазоном измерения от 10^{-6} до 30 А классов точности от 0,005 до 4,0.

Поверочная схема для средств измерения емкости возглавляется Государственным первичным эталоном, в состав которого входит:

помещенный в вакуум расчетный конденсатор, в котором размер единицы емкости определяется через ее изменение, вызываемое перемещением одного из электродов, путем прямого измерения этого перемещения и использования физических констант;

интерферометр для измерения перемещения электродов;

емкостной трансформаторный мост на частоте 1 кГц, служащий для передачи единицы от расчетного конденсатора вторичным эталонам.

Воспроизводимое эталоном значение емкости равно 0,1 пФ при относительном среднем квадратическом отклонении результата измерения $2 \cdot 10^{-7}$ и неисключенной относительной систематической погрешности, не большей $5 \cdot 10^{-7}$. Через систему вторичных эталонов и образцовых средств измерений трех разрядов единица емко-

сти передается рабочим средствам измерения — измерительным конденсаторам постоянной и переменной емкости, магазинам емкостей, мостам переменного тока и измерителям емкости (фарадмерам).

Государственный первичный эталон единицы индуктивности представляет собой группу из четырех тороидальных катушек индуктивности с номинальными значениями $10 \cdot 10^{-3}$ Гн. Свое значение индуктивности этих катушек получают от эталона емкости путем сравнения с помощью индуктивно-емкостного моста на частоте 1 кГц. Размер единицы воспроизводится с относительным средним квадратическим отклонением результата измерения $1 \cdot 10^{-6}$ при неисключенной относительной систематической погрешности $5 \cdot 10^{-6}$. Эталон сравнения имеет тот же состав, что и первичный эталон и используется для международных сличений и передачи размера единицы стационарным эталонам-копиям, выполненным в виде группы тороидальных и цилиндрических катушек индуктивности с номинальными значениями от $3 \cdot 10^{-3}$ до $30 \cdot 10^{-3}$ Гн. В качестве рабочих эталонов используются одиночные меры или группы одинаковых мер с номинальными значениями от $1 \cdot 10^{-6}$ до 1 Гн через порядок.

Далее поверочная схема разделяется на две части: для средств измерения индуктивности на частоте от 40 до 10^6 Гц и для средств измерения индуктивности на частоте от 1 до 100 МГц. Первой частью поверочной схемы предусмотрено три разряда образцовых средств измерения. Рабочие средства измерения представлены мерами индуктивности от $1 \cdot 10^{-8}$ до $1 \cdot 10^{3}$ Гн и взаимной индуктивности от $1 \cdot 10^{-6}$ до $1 \cdot 10^{-1}$ Гн, мостами переменного тока и измерителями индуктивности с диапазоном измерения от $1 \cdot 10^{-8}$ до $1 \cdot 10^{4}$ Гн, имеющими пределы допускаемой относительной погрешности от 10^{-2} до 10%, от $3 \cdot 10^{-2}$ до 10% и от 1 до 15% соответственно.

Поверочную схему для средств измерения напряжения постоянного тока возглавляет Государственный первичный эталон, состоящий из мер напряжения на основе эффекта Джозефсона, группы из 20 насыщенных нормальных элементов, компаратора для сравнения мер на основе эффекта Джозефсона между собой и компаратора для их сравнения с нормальными элементами.

Мера напряжения выполняется в виде двух сверхпроводников, разделенных слоем диэлектрика толщиной 0,01 мкм (узел Джозефсона). Если поместить узел Джозефсона в высокочастотное электромагнитное поле, то его вольт-амперная характеристика приобретает ступенчатый (дискретный) характер, причем высота каждой ступеньки составляет

$$\Delta U = h/2e \cdot f,$$

где h — постоянная Планка; e — заряд электрона; f — частота поля. Отношение $\Phi_o = h/2e = 2{,}0678506 \cdot 10^{-15}$ Вб является одной из фундаментальных физических констант и называется квантом магнитного потока. Таким образом, с помощью узла Джозефсона

реализуется абсолютное воспроизведение вольта, сводящееся к измерению частоты и использованию значений физических констант.

В настоящее время квант магнитного потока известен с погрешностью порядка $1 \cdot 10^{-6}$. С такой же погрешностью можно определить и напряжение узла Джозефсона, поскольку частота измеряется с гораздо большей точностью.

При частоте электромагнитного поля 10^{10} Гц напряжение, соответствующее одной ступеньке вольт-амперной характеристики, немногим больше 20 мкВ. Практически удается получить около 500 ступеней и напряжение до 10 мВ.

С узлом Джозефсона с помощью специально для этих целей разработанного компаратора осуществляют сличение группы насыщенных нормальных элементов, образующих элемент сравнения. С ними, в свою очередь, с помощью другого компаратора — потенциометра постоянного тока — сличают 20 нормальных элементов первичного эталона.

Построенный таким образом Государственный первичный эталон вольта воспроизводит единицу с относительным средним квадратическим отклонением результата измерения, не превышающим $5 \cdot 10^{-6}$ при неисключенной относительной систематической погрешности $1 \cdot 10^{-6}$. Систематическая погрешность намного превышает случайные, что говорит о высоких потенциальных возможностях эталона.

Через рабочие эталоны и четыре разряда образцовых средств измерения единица передается рабочим мерам ЭДС классов точности от 0,0002 до 0,02, рабочим мерам напряжения постоянного тока с пределами допускаемой относительной погрешности от $2 \cdot 10^{-6}$ (в диапазоне 10 В) и $5 \cdot 10^{-6}$ (в диапазоне 1000 В) до $3 \cdot 10^{-4}$, и вольтметрам с пределом измерения до 1000 В классов точности от 0,0005 до 4. Вольтметры классов точности 1,0 и 4,0 на $5 \cdot 10^{-10}$—$1 \cdot 10^{-6}$ В поверяются методом косвенных измерений с помощью образцовых амперметров классов точности 0,1; 0,2 и 0,5 и образцовых мер электрического сопротивления 3-го разряда.

Во главе поверочной схемы для средств измерения электрического сопротивления находится Государственный первичный эталон, состоящий из 10 манганиновых одноомных катушек сопротивления и мостовой измерительной установки, играющей роль компаратора при взаимном сличении эталонных мер и передаче размера ома вторичным эталонам. Все токоведущие части установки, включая сличаемые меры, помещаются в термостатированную ванну, заполненную трансформаторным маслом, в которой во время измерения поддерживают температуру $(20 \pm 0{,}02)$ °С. Размер ома в абсолютной мере через единицы длины и времени определяют путем сравнения с емкостью расчетного конденсатора Государственного первичного эталона единицы емкости. Сравнение осуществляется с помощью резистивно-емкостного или трансформаторного моста переменного тока на частоте 1 кГц.

Ом воспроизводится первичным эталоном с относительным средним квадратическим отклонением, не превышающим $1 \cdot 10^{-7}$.

при неисключенной относительной систематической погрешности $5 \cdot 10^{-7}$.

Для международных сличений ома используется эталон сравнения, а для проверки сохранности первичного эталона и эпизодической замены входящих в него мер — эталон-свидетель. Оба эталона представляют собой наборы одноомных мер электрического сопротивления.

Рабочими эталонами служат меры электрического сопротивления с номинальными значениями от 10^{-4} до 10^{9} Ом. Рабочие эталоны применяются для передачи размера единицы образцовым мерам сопротивления постоянного и переменного тока. В качестве компаратора для сличения в первом случае используется мост постоянного тока, а во втором случае — трансформаторный мост.

Далее поверочной схемой предусматривается три разряда образцовых средств измерений, в качестве которых используются одиночные и комбинированные меры сопротивления, мосты и магазины сопротивлений постоянного и переменного тока. В качестве рабочих средств измерений применяются катушки электрического сопротивления, магазины сопротивления и проводимости, мосты постоянного и переменного тока, измерители полных сопротивлений и проводимостей и омметры.

Переход в область измерений электрических величин на переменном токе осуществляется с помощью Государственных специальных эталонов и Государственных поверочных схем для средств измерений силы тока от $2 \cdot 10^{-5}$ до 25 А в диапазоне частот 40—$1 \cdot 10^{5}$ Гц и напряжения 0,001—1000 В в диапазоне частот 20—$3 \cdot 10^{7}$ Гц.

Поверочная схема для средств измерения напряжения возглавляется Государственным специальным эталоном, состоящим из набора низкочастотных и набора высокочастотных термопреобразователей напряжения, стабилизированных источников постоянного и переменного токов и установки для измерения постоянного напряжения, включающей в себя потенциометры постоянного тока классов точности 0,0005 и 0,002, делитель напряжения класса точности 0,0005 и образцовую меру ЭДС 1-го разряда. Термопреобразователь представляет собой комбинацию нагревателя и термопары, преобразующей температуру нагревателя в ТЭДС. На нагреватель подается переменное напряжение и измеряется ТЭДС на выходе термопреобразователя. После этого на вход подается постоянное напряжение такого значения, которое вызывает на выходе такую же ТЭДС. При этом действующее значение переменного напряжения будет равно постоянному напряжению, подаваемому на вход термопреобразователя на втором этапе измерений. Это напряжение измеряется путем сравнения с ЭДС образцовой меры напряжения из поверочной схемы для средств измерения напряжения постоянного тока.

Единица напряжения переменного тока воспроизводится Государственным специальным эталоном в диапазоне от 0,1 до 10 В с относительным средним квадратическим отклонением от $5 \cdot 10^{-6}$

до $5 \cdot 10^{-5}$ при неисключенной относительной систематической погрешности от $1 \cdot 10^{-5}$ до $3 \cdot 10^{-4}$ в зависимости от частоты и воспроизводимого значения напряжения.

Для международных сличений применяют эталон сравнения, представляющий собой группу одиночных термопреобразователей напряжения с номинальными значениями от 0,1 до 100 В.

В качестве рабочих эталонов используют комплексы средств измерения, состоящие из наборов термопреобразователей напряжения с номинальными значениями от 0,1 до 300 В, индуктивного делителя напряжения, установки для измерения постоянных напряжений и стабилизированных источников напряжения постоянного и переменного тока.

От Государственного специального эталона единица напряжения передается вторичным эталонам методом непосредственного сличения. Тем же методом единица передается от рабочих эталонов образцовым средствам измерения 1-го разряда, в качестве которых используются наборы термопреобразователей с номинальными значениями от 0,1 до 300 В в диапазоне частот от 20 до $3 \cdot 10^7$ Гц и поверочные установки с компараторами напряжения от 0,001 до 300 В в диапазоне частот от 20 до $1 \cdot 10^5$ Гц.

Далее, методом прямых измерений или непосредственного сличения единица напряжения передается образцовым средствам измерений 2-го разряда — наборам термопреобразователей и делителей напряжения от 0,001 до 300 В в диапазоне частот 20—$3 \cdot 10^7$ Гц и мерам напряжения 0,001—1000 В и поверочным установкам с компараторами напряжения от 0,1 до 600 В в диапазоне частот от 20 до $1 \cdot 10^5$ Гц. В качестве образцовых средств измерений 3-го разряда используются меры напряжений от 0,001 до 300 В и вольтметры классов точности 0,1; 0,2 и 0,5 для измерения напряжений от 0,1 до 600 В. Рабочими средствами измерений напряжения переменного тока являются меры напряжения от 0,001 до 300 В с пределами допускаемых относительных погрешностей от $1 \cdot 10^{-3}$ до $1 \cdot 10^{-1}$ и вольтметры различных систем классов точности от 0,05 до 4,0 для измерения напряжений от 0,001 до 1000 В. Рабочие меры напряжения и вольтметры высших классов точности поверяются по образцовым средствам измерений 2-го разряда, а более грубые вольтметры — по образцовым средствам 3-го разряда.

Аналогичным образом, путем использования термоэлектрических преобразователей, осуществляется передача единицы средствам измерения переменного электрического тока.

Кроме вышеперечисленных, разработано большое число Государственных первичных и специальных эталонов и государственных поверочных схем, обеспечивающих единство измерений таких электрических величин, как углы сдвига фаз, коэффициент нелинейных искажений, электрические токи, напряжения и полные сопротивления в области высоких частот, напряженность электрического поля, мощность электромагнитных колебаний и многие другие.

§ 33. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ТЕПЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

В области термометрии существуют различные эталоны и различные поверочные схемы для нескольких диапазонов значений температуры. В диапазоне от 1,5 до 4,2 К единица температуры воспроизводится в соответствии с гелиевой шкалой «^{4}He 1958» Государственным специальным эталоном, состоящим из гелиевого конденсационного термометра и электроизмерительной аппаратуры для измерения сопротивления. Погрешность воспроизведения единицы температуры определяется погрешностью измерений давления насыщенных паров гелия эталонным конденсационным термометром. Среднее квадратическое отклонение результата измерений составляет 0,001 К при неисключенной систематической погрешности в пределах $\pm$0,003 К. Путем сличения в криостате единица температуры передается вторичным рабочим эталонам и эталонам-свидетелям, в качестве которых используются германиевые термометры сопротивления, и далее образцовым полупроводниковым термопреобразователям сопротивления. Предусмотрен только один разряд образцовых средств измерений. В качестве рабочих средств измерений используются термодиоды, термоэлектрические преобразователи и полупроводниковые термопреобразователи сопротивления. Они поверяются сличением с образцовыми средствами измерений или с рабочими эталонами в гелиевой ванне с регулятором давления. Предел допускаемой абсолютной погрешности рабочих приборов не превышает 0,3 К.

В диапазоне от 4,2 до 13,8 К единица температуры воспроизводится и хранится в соответствии со шкалой германиевого термометра ТШГТС Государственным специальным эталоном, состоящим из германиевых термометров сопротивления, аппаратуры воспроизведения точки кипения гелия и тройной точки равновесного водорода, эталонного криостата для сравнения температур и электроизмерительной аппаратуры для измерения сопротивления. Погрешность воспроизведения единицы определяется различием показаний и нестабильностью германиевых термометров сопротивления. Среднее квадратическое отклонение результата измерений составляет 0,001 К при неисключенной систематической погрешности в пределах $\pm$0,005 К. При температуре 4,215K шкала, воспроизводимая этим эталоном, переходит в шкалу «^{4}He 1958», а при 13,8 К в шкалу МПТШ-68. В качестве вторичных рабочих эталонов и эталонов-свидетелей используются германиевые термопреобразователи сопротивления, которые сличаются с Государственным специальным эталоном в эталонном криостате. Такие же термометры применяются и в качестве образцовых средств измерений. Рабочими средствами являются термодиоды, термоэлектрические преобразователи и полупроводниковые термосопротивления, поверяемые по образцовым приборам сличением в криостате или в водородной ванне, а также полупроводниковые термопреобразователи сопротивления повышенной точности, поверяемые непосред-

ственно по рабочему эталону. Предел допускаемой абсолютной погрешности рабочих приборов лежит в пределах 0,01—0,3 К.

В диапазоне от 13,81 до 273,15 К единица температуры воспроизводится и хранится в соответствии со шкалой МПТШ-68. Государственный первичный эталон состоит из платиновых термопреобразователей сопротивления, аппаратуры для воспроизведения реперных точек шкалы МПТШ-68 (тройных точек воды, кислорода и равновесного водорода, точек кипения кислорода, неона и равновесного водорода), криостата для сравнения температур, ванны сжиженных газов и электроизмерительной аппаратуры для измерения сопротивлений. Эталон обеспечивает воспроизведение единицы со средним квадратическим отклонением результата 0,001 К при неисключенной систематической погрешности в пределах ±0,003 К. В качестве вторичных эталонов используются платиновые термопреобразователи сопротивления; значение единицы температуры передается им методом сличения в эталонном криостате, в кислородной ванне и с помощью аппаратуры воспроизводящей тройную точку воды. Поверочная схема предусматривает два разряда образцовых средств измерения. Средства измерений 1-го разряда — это полупроводниковые и платиновые термопреобразователи сопротивления и ртутно-стеклянные термометры, которые градуируются по рабочим эталонам методом сличения. Средства измерений 2-го разряда — это полупроводниковые и платиновые термопреобразователи сопротивления, термоэлектрические преобразователи и ртутно-стеклянные термометры. Рабочие средства измерений градуируются по образцовым 2-го разряда методом сличения, пределы их допускаемых абсолютных погрешностей составляют 0,015—5 К.

В диапазоне от 273,15 до 2800 К воспроизведение и хранение единицы осуществляется Государственным первичным эталоном, состоящим из аппаратуры для воспроизведения тройной точки и точки кипения воды и точек затвердевания олова, цинка, серебра и золота, платиновых термометров сопротивления и специальных высокотемпературных термометров сопротивления для точек затвердевания серебра и золота, набора температурных ламп для точки затвердевания золота и фотоэлектрической аппаратуры удвоения яркостей для диапазона от 1337,58 до 2800 К.

В диапазоне от 273,16 до 1337,58 К единица воспроизводится со средним квадратическим отклонением результата измерений от 0,0002 до 0,02 К при неисключенной систематической погрешности от 0,0001 до 0,005 К. При более высоких температурах эти характеристики изменяются до 0,2—1,5 К и 0,1—0,5 К соответственно.

Поверочная схема состоит из термометров и пирометров. В качестве эталона-свидетеля используется газовый термометр, с помощью которого определяются реперные точки по МПТШ-68, а также функциональные зависимости параметров вторичных эталонов от термодинамической температуры. Градуировка пирометров 1-го разряда в диапазоне от 1100 до 2800 К осуществляется

посредством температурных ламп, являющихся рабочими эталонами для второй части поверочной схемы.

Всего предусмотрено три разряда образцовых средств измерений температуры с соотношением погрешностей не более 1 : 2. Рабочие средства измерений характеризуются пределами абсолютной допускаемой погрешностью от 0,002 до 25 К для первой части поверочной схемы и от 4 до 150 К — для пирометров излучения.

§ 34. СПОСОБЫ ПОВЕРКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В поверочных схемах приведены различные способы поверки средств измерений по образцовым средствам измерений, а последних — по эталонам. Поверка средств измерений — это определение метрологическим органом погрешностей средств измерений и установление их пригодности к применению. Меры могут быть поверены:

способом сличения с более точной образцовой мерой посредством компарирующего прибора (например, поверка концевых мер длины);

измерением воспроизводимой мерой величины измерительными приборами соответствующего разряда и класса (в этом случае поверка часто называется градуировкой мер, например, градуировка мер твердости);

способом калибровки, когда с более точной мерой сличается лишь одна мера набора или одна из отметок шкалы многозначной меры, а действительные размеры других мер или значения воспроизводимых ими величин на других отметках шкалы определяются путем их взаимного сравнения в различных сочетаниях на приборах сравнения и при дальнейшей обработке результатов измерений (калибровка гирь или линейных шкал).

Поверка измерительных приборов осуществляется одним из двух методов:

методом измерения величин, воспроизводимых образцовыми мерами соответствующего разряда или класса точности, значения которых выбирают равными соответствующим (чаще всего всем оцифрованным) отметкам шкалы прибора. Наибольшая разность между результатами измерения и соответствующими им размерами мер является в этом случае основной погрешностью прибора;

методом сличения поверяемого и некоторого образцового прибора при измерении одной и той же величины. Разность их показаний при измерении различных значений измеряемой величины определяет погрешность поверяемого прибора. Осуществление этого метода возможно двумя способами:

измеряемая величина изменяется до определенных, оговоренных в стандартах или технических условиях значений, устанавливаемых по образцовому прибору, а погрешность находится по показаниям поверяемого прибора. Этот метод особенно удобен при ав-

томатизации поверочных работ, так как позволяет одновременно несколько приборов поверять с помощью одного образцового;

измеряемая величина изменяется до определенных, оговоренных в стандартах или технических условиях значений, устанавливаемых по поверяемому прибору, а погрешность отсчитывается по образцовому прибору как отклонение от соответствующего штриха шкалы. Преимущество этого метода заключается в том, что он дает возможность точно определить погрешность по образцовому прибору, шкала которого обычно имеет большее число делений. Применив дополнительные устройства, можно отсчитывать погрешность непосредственно в процентах.

Кроме определения погрешностей измерительных средств, в поверку на практике включаются и другие операции, имеющие целью установить соответствие поверяемых средств требованиям стандартов и технических условий.

Важным при поверке является вопрос о выборе оптимального соотношения между допускаемыми погрешностями образцового и поверяемого приборов. Обычно это соотношение принимается равным 1 : 3, когда при поверке вводят поправки на показания образцовых средств измерений. Если же поправки не вводятся, то образцовые средства выбираются исходя из соотношения 1 : 5. В общем случае это соотношение может лежать в интервале от 1 : 2 до 1 : 10. Необходимая точность образцовых средств, а иногда и их типы, регламентируются государственными стандартами на методы поверки средств измерений. Соотношение допускаемых погрешностей поверяемых и образцовых средств измерений устанавливается с учетом принятого метода поверки, характера погрешностей, допустимых значений долей необнаруженного брака и ошибочно забракованных годных изделий и иногда может значительно отличаться от указанных выше цифр.

Глава VI

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 35. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

При анализе измерений следует четко разграничивать два понятия: истинные значения физических величин и их эмпирические проявления — результаты измерений.

Истинные значения физических величин — это значения, идеальным образом отражающие свойства данного объекта как в ко-

личественном, так и в качественном отношении. Они не зависят от средств нашего познания и являются той абсолютной истиной, к которой мы стремимся, пытаясь выразить их в виде числовых значений.

Результаты измерений, напротив, являются продуктами нашего познания. Представляя собой приближенные оценки значений величин, найденные путем измерения, они зависят не только от них, но еще и от метода измерения, от технических средств, с помощью которых проводятся измерения, и от свойств органов чувств наблюдателя, осуществляющего измерения.

Разница Δ между результатами измерения X' и истинным значением Q измеряемой величины называется погрешностью измерения:

$$\Delta = X' - Q. \tag{6.1}$$

Но поскольку истинное значение Q измеряемой величины неизвестно, то неизвестны и погрешности измерения, поэтому для получения хотя бы приближенных сведений о них приходится в формулу (6.1) вместо истинного значения подставлять так называемое действительное значение.

Под действительным значением физической величины мы будем понимать ее значение, найденное экспериментально и настолько приближающееся к истинному, что для данной цели оно может быть использовано вместо него.

Причинами возникновения погрешностей являются: несовершенство методов измерений, технических средств, применяемых при измерениях, и органов чувств наблюдателя. В отдельную группу следует объединить причины, связанные с влиянием условий проведения измерений. Последние проявляются двояко. С одной стороны, все физические величины, играющие какую-либо роль при проведении измерений, в той или иной степени зависят друг от друга. Поэтому с изменением внешних условий изменяются истинные значения измеряемых величин. С другой стороны, условия проведения измерений влияют и на характеристики средств измерений и физиологические свойства органов чувств наблюдателя и через их посредство становятся источником погрешностей измерения.

Описанные причины возникновения погрешностей определяются совокупностью большого числа факторов, под влиянием которых складывается суммарная погрешность измерения [см. формулу (6.1)]. Их можно объединить в две основные группы.

1. Факторы, проявляющиеся весьма нерегулярно и столь же неожиданно исчезающие или проявляющиеся с интенсивностью, которую трудно предвидеть. К ним относятся, например, перекосы элементов приборов в их направляющих, нерегулярные изменения моментов трения в опорах, малые флюктуации влияющих величин, изменения внимания операторов и др.

Доля, или составляющая, суммарной погрешности измерения (6.1), определяемая действием факторов этой группы, называет-

ся *случайной погрешностью* измерения. Ее основная особенность заключается в том, что она случайно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины.

При создании измерительной аппаратуры и организации процесса измерения в целом интенсивность проявления большинства факторов данной группы удается свести к общему уровню, так что все они влияют более или менее одинаково на формирование случайной погрешности. Однако некоторые из них, например, внезапное падение напряжения в сети электропитания, могут проявиться неожиданно сильно, в результате чего погрешность примет размеры, явно выходящие за границы, обусловленные ходом эксперимента в целом. Такие погрешности в составе случайной погрешности называются *грубыми*. К ним тесно примыкают *промахи* — погрешности, зависящие от наблюдателя и связанные с неправильным обращением со средствами измерений, неверным отсчетом показаний или ошибками при записи результатов.

2. Факторы, постоянные или закономерно изменяющиеся в процессе измерительного эксперимента, например, плавные изменения влияющих величин или погрешности применяемых при измерениях образцовых мер. Составляющие суммарной погрешности [см. формулу (6.1)], определяемые действием факторов этой группы, называются *систематическими погрешностями измерения*. Их отличительная особенность заключается в том, что они остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. До тех пор, пока систематические погрешности больше случайных, их зачастую можно вычислить или исключить из результатов измерений надлежащей постановкой опыта.

Таким образом, мы имеем два типа погрешностей измерения:

случайные (в том числе грубые погрешности и промахи), изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины;

систематические погрешности, остающиеся постоянными или закономерно изменяющиеся при повторных измерениях.

В процессе измерения оба вида погрешностей проявляются одновременно, и погрешность измерения можно представить в виде суммы:

$$\Delta = \delta + \Theta, \tag{6.2}$$

где δ — случайная, а Θ — систематическая погрешности.

Для получения результатов, минимально отличающихся от истинных значений величин, проводят многократные наблюдения за измеряемой величиной с последующей математической обработкой опытных данных. Поэтому наибольшее значение имеет изучение погрешности, как функции номера наблюдения, т. е. времени $\Delta(t)$. Тогда отдельные значения погрешностей можно будет трактовать как набор значений этой функции: $\Delta_1 = \Delta(t_1)$; $\Delta_2 = \Delta(t_2)$, $\ldots$, $\Delta_n = \Delta(t_n)$.

В общем случае погрешность является *случайной функцией*

времени, которая отличается от классических функций математического анализа тем, что нельзя сказать, какое значение она примет в момент времени t_i. Можно указать лишь вероятности появления ее значений в том или ином интервале. В серии экспериментов, состоящих из ряда многократных наблюдений, мы получаем одну *реализацию* этой функции. При повторении серии при тех же значениях величин, характеризующих факторы второй группы, неизбежно получаем новую реализацию, отличающуюся от первой.

Реализации отличаются друг от друга из-за влияния факторов первой группы, а факторы второй группы, одинаково проявляющиеся при получении каждой реализации, придают им некоторые общие черты (рис. 10).

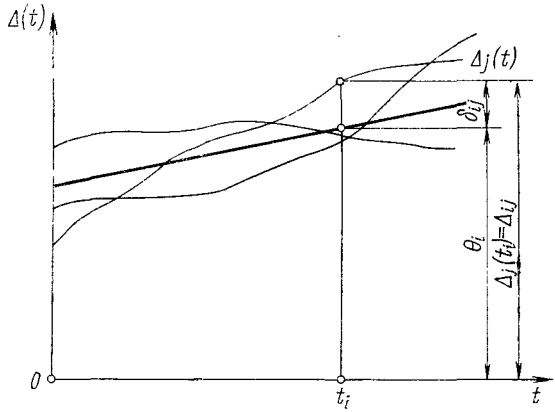


Рис. 10

Погрешность измерений, соответствующая каждому моменту времени t_i, называется *сечением случайной функции* $\Delta(t)$. В каждом сечении в большинстве случаев можно найти *среднее значение* погрешности Θ_i, относительно которого группируются погрешности в различных реализациях. Если через полученные таким образом точки Θ_i провести плавную кривую, то она будет характеризовать общую тенденцию изменения погрешности во времени. Нетрудно заметить, что средние значения Θ_i определяются действием факторов второй группы и представляют собой систематическую погрешность измерения в момент времени t_i, а отклонения δ_{ij} от среднего в сечении t_i, соответствующие j-й реализации, дают нам значения случайной погрешности. Последние являются уже представителями случайных величин — объектов изучения классической теории вероятностей. Таким образом, имеет место равенство $\Delta_{ij}=\Theta(t_i)+\delta_{ij}$.

Предположим, что $\Theta(t_i)=0$, т. е. что систематические погрешности тем или иным способом исключены из результатов наблюдений, и будем рассматривать только случайные погрешности, средние значения которых равны нулю в каждом сечении. Предположим далее, что случайные погрешности в различных сечениях не зависят друг от друга, т. е. знание случайной погрешности в одном сечении как ординаты одной реализации не дает нам никакой дополнительной информации о значении, принимаемом этой реализацией в любом другом сечении, и что все теоретико-вероятностные особенности случайных погрешностей, являющихся значениями реализации в каждом сечении и значениями одной реализации во всех сечениях, совпадают между собой. Тогда случайную погрешность можно рассматривать как случайную величину, а ее значения при каждом из многократных наблюдений одной и той же физической величины — как ее эмпирические проявления, т. е. как результаты независимых наблюдений над ней.

В этих условиях случайная погрешность δ измерений определяется как разность между исправленным результатом X измерения и истинным значением Q измеряемой величины:

$$\delta = X - Q, \tag{6.3}$$

причем исправленным будем называть результат измерений, из которого исключены систематические погрешности.

Пусть, например, при измерении размера гладкой предельной скобы микрометрическим нутромером исправленный результат составляет $X=125{,}065$ мм.

Измеряя тот же размер блоком концевых мер 3-го разряда, погрешность аттестации которых (меньше 1 мкм) пренебрежимо мала по сравнению с погрешностями измерения микрометрическим нутромером (порядка 30 мкм), находим действительный размер скобы: $Q=125{,}0458$ мм.

Случайную погрешность измерения размера скобы находят по формуле (VI.3) в соответствии с правилами приближенных вычислений: $\delta=X-Q=125{,}065-125{,}0458=0{,}019$ мм.
При повторении измерения получится другой результат и, следовательно, новое значение случайной погрешности.

Подобные данные получают обычно при поверке измерительных средств путем измерения заранее известных величин. При проведении же измерений целью является оценка истинного значения измеряемой величины, которое до опыта неизвестно. Результат измерения включает в себя помимо истинного значения еще и случайную погрешность, следовательно, сам является случайной величиной. В этих условиях фактическое значение случайной погрешности, полученное при поверке, еще не характеризует точности измерений, поэтому не ясно, какое же значение принять за окончательный результат измерения и как охарактеризовать его точность.

Ответ на эти вопросы можно получить, используя при метрологической обработке результатов измерения методы математической статистики, имеющей дело именно со случайными величинами.

§ 36. ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим результат наблюдений X за постоянной физической величиной Q как случайную величину, принимающую различные значения X_i в различных наблюдениях за ней. Значения X_i будем называть результатами отдельных наблюдений.

Наиболее универсальный способ описания случайных величин заключается в отыскании их интегральных или дифференциальных функций распределения.

Под *интегральной функцией распределения результатов наблюдений понимается зависимость вероятности того, что результат наблюдения X_i в i-м опыте окажется меньшим некоторого текущего значения x, от самой величины x*:

$$F_X(x) = P\{X_i \leqslant x\} = P\{-\infty < X_i \leqslant x\}. \qquad (6.4)$$

Латинская буква P является здесь символом вероятности события, описание которого заключено в фигурных скобках.

Если рассматривать результат отдельного наблюдения X_i как случайную точку на оси Ox (рис. 11), то значение интегральной функции распределения в точке x' численно равно вероятности того, что случайная точка X_i в результате i-го измерения займет некоторое положение левее точки x'. Эти вероятности, очевидно, различны для различных точек x'. При перемещении точки x' вправо вдоль числовой оси, вероятность того, что в результате измерения точка X_i расположится левее x', не может уменьшаться. Следовательно, интегральная функция распределения результатов наблюдений является *неубывающей* функцией аргумента. При дальнейшем увеличении координаты x' событие $X_i \leqslant x'$ становится все более и более достоверным, а его вероятность асимптотически приближается к единице. При перемещении точки x' влево вдоль числовой оси Ox вероятность события $X_i \leqslant x'$ может только уменьшаться или оставаться постоянной в некоторых интервалах значений x'. В пределе при $x' \to -\infty$ это событие становится невозможным, и его вероятность стремится к нулю.

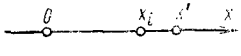


Рис. 11

Обычно график интегральной функции распределения результатов наблюдений представляет собой непрерывную неубывающую кривую, начинающуюся от нуля на отрицательной бесконечности и асимптотически приближающуюся к единице при увеличении аргумента до плюс бесконечности (рис. 12).

Часто при $x = Q$ интегральная функция распределения имеет точку перегиба. Тогда, если в точке перегиба интегральная функция распределения принимает значение, равное половине, говорят о *симметричности* (равносторонности) распределения результатов наблюдений относительно истинного значения измеряемой величины. В этом случае график интегральной функции распределения имеет вид, представленный на рис. 13.

Непрерывность интегральной функции распределения результатов наблюдений выражает собой тот, казалось бы, очевидный факт, что результат наблюдения может принять любое до опыта выбранное значение только с нулевой вероятностью.

На самом деле это не совсем так. Разрешающая способность измерительных средств, применяемых для проведения измерений, делит всю область значений измеряемой величины, близких к ее истинному значению, на ряд полос. Значения измеряемой величины, лежащие в пределах одной полосы, неразличимы для наблю-

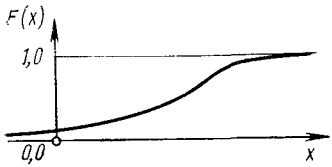
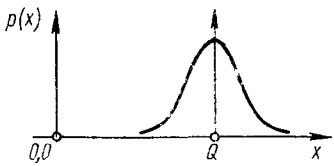


Рис. 12



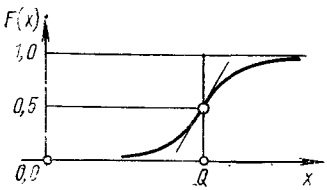


Рис. 13

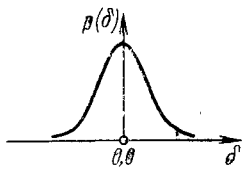


Рис. 14

дателя, вооруженного данными измерительными средствами. Поэтому интегральная функция распределения результатов измерения сохраняет постоянное значение в пределах одной полосы и скачкообразно изменяется на некоторое конечное значение при переходе через границу этой полосы (при отсчете по шкале границами полос являются десятые доли деления шкалы, которые еще учитываются при отсчете, в других случаях за ширину полосы можно принять порог реагирования средства измерения).

В большинстве случаев приведенные обстоятельства не мешают считать интегральную функцию распределения результатов наблюдений непрерывной функцией, а непрерывность значительно упрощает анализ случайных погрешностей.

Случайную погрешность δ будем рассматривать тоже как случайную величину, принимающую в различных опытах различные значения δ_i. Ее интегральную функцию распределения получаем переносом начала координат в точку $x=Q$:

$$F_\delta(\delta) = P\{\delta_i \leqslant \delta\} = P\{X_i - Q \leqslant x - Q\} = P\{X_i < x\}. \qquad (6.5)$$

Более наглядным является описание свойств результатов наблюдений и случайных погрешностей с помощью *дифференциальной функции распределения,* иначе называемой плотностью распределения вероятностей и обозначаемой через $p_X(x)$ или соответ-

ственно через $p_\delta(\delta)$. *Дифференциальная функция распределения является функцией, производной от интегральной по своему аргументу:*

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}; \; p_\delta(\delta) = \frac{dF_\delta(\delta)}{d\delta}. \tag{6.6}$$

График дифференциальной функции распределения, который называют *кривой распределения,* чаще всего имеет колоколообразную форму и обладает максимумом при $x=Q$ или соответственно $\delta=0$ (рис. 14).

От дифференциальной функции распределения легко перейти к интегральной путем интегрирования первой

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x)\,dx; \quad F_\delta(\delta) = \int_{-\infty}^{\delta} p_\delta(\delta)\,d\delta. \tag{6.7}$$

Поскольку $F_X(+\infty)=1$, то справедливо следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_\delta(\delta)\,d\delta = 1. \tag{6.8}$$

Иными словами, площадь, заключенная между кривой дифференциальной функции распределения и осью абсцисс, равна единице.

Размерность плотности распределения вероятностей, как это следует из формулы (6.6), обратна размерности измеряемой величины, поскольку сама вероятность — величина безразмерная.

Используя понятия функций распределения, легко получить выражения для вероятностей того, что результат наблюдения X или случайная погрешность δ примет при проведении измерения некоторое значение в интервале $[x_1; x_2]$ или $[\delta_1; \delta_2]$ *.

В терминах интегральной функции распределения имеем

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = P\{-\infty < X \leqslant x_2\} - P\{-\infty < X \leqslant x_1\} = \\ = F_X(x_2) - F_X(x_1), \tag{6.9}$$

$$P(\delta_1 < \delta \leqslant \delta_2) = P\{-\infty < \delta \leqslant \delta_2\} - P\{-\infty < \delta \leqslant \delta_1\} = \\ = F_\delta(\delta_2) - F_\delta(\delta_1), \tag{6.10}$$

т. е. *вероятность попадания результата наблюдений или случайной погрешности в заданный интервал равна разности значений функции распределения на границах этого интервала.*

Заменяя в полученных формулах интегральные функции распределения на соответствующие плотности распределения вероятностей согласно выражению (6.7), получим формулы для искомой вероятности в терминах дифференциальной функции распределения:

---

* Как принято, будем обозначать интервал $a<X<b$ через $(a; b)$; $a<X\leqslant b$ через $[a; b]$; $a\leqslant X\leqslant b$ через $[a; b]$; $a\leqslant X<b$ через $[a; b]$.

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \int_{-\infty}^{x_2} p_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_X(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)\,dx, \qquad (6.11)$$

$$P\{\delta_1 < \delta \leqslant \delta_2\} = \int_{-\infty}^{\delta_2} p_\delta(\delta)\,d\delta - \int_{-\infty}^{\delta_1} p_\delta(\delta)\,d\delta = \int_{\delta_1}^{\delta_2} p_\delta(\delta)\,d\delta. \qquad (6.12)$$

Таким образом, *вероятность попадания результата наблюдения или случайной погрешности в заданный полуоткрытый интервал равна площади, ограниченной кривой распределения, осью абсцисс и перпендикулярами к ней на границах этого интервала.*

Произведения $p(\delta)d\delta$ и $p_X(x)dx$ называются *элементами вероятности.* Они равны вероятностям того, что случайные величины δ или X примут некоторые значения в интервалах $d\delta$ и dx, поэтому по форме кривой распределения можно судить о том, какие интервалы значений случайных погрешностей более, а какие менее вероятны. Для кривой распределения случайных погрешностей, изображенной на рис. 14, более вероятны малые значения погрешностей, лежащие вокруг $\delta = 0$. Вероятность появления больших погрешностей значительно меньше.

Таким образом, результаты наблюдений в значительной степени сконцентрированы вокруг истинного значения измеряемой величины, и по мере приближения к нему элементы вероятности их появления возрастают. Это дает основание принять за оценку истинного значения измеряемой величины координату центра тяжести фигуры, образованной осью абсцисс и кривой распределения, и называемую *математическим ожиданием* результатов наблюдений:

$$M[X] = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\,dx. \qquad (6.13)$$

В заключение можно дать более строгое определение постоянной систематической и случайной погрешностей.

Систематической постоянной погрешностью называется отклонение математического ожидания результатов наблюдений от истинного значения измеряемой величины:

$$\Theta = M[X] - Q, \qquad (6.14)$$

а случайной погрешностью — разность между результатом единичного наблюдения и математическим ожиданием результатов:

$$\delta = X - M[X]. \qquad (6.15)$$

В этих обозначениях истинное значение измеряемой величины составляет

$$Q = X - \Theta - \delta. \qquad (6.16)$$

§ 37. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Функция распределения является самым универсальным способом описания поведения случайных погрешностей. Однако для определения функций распределения необходимо проведение

весьма кропотливых научных исследований и обширных вычислительных работ. Поэтому к такому способу описания случайных погрешностей прибегают иногда при исследовании принципиально новых мер и измерительных приборов.

Значительно чаще бывает достаточно охарактеризовать случайные погрешности с помощью ограниченного числа специальных величин, называемых моментами.

Начальным моментом r-го порядка результатов наблюдений называется интеграл вида

$$\alpha_r[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p_X(x)\,dx = M[X^r], \tag{6.17}$$

представляющий собой математическое ожидание степени X^r. Из выражения (6.17) непосредственно следует, что первый начальный момент совпадает с математическим ожиданием результатов наблюдений: $\alpha_1[X]=m_X=M[X]$.

Центральным моментом r-го порядка результатов наблюдений называется интеграл вида

$$\mu_r[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_X)^r p_X(x)\,dx = M[(X-m_X)^r], \tag{6.18}$$

представляющий собой математическое ожидание величины $(X-m_X)^r$, т. е. r-й степени случайной погрешности.

Вычислим первый центральный момент: $\mu_1[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)p_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}xp_X(x)\,dx-m_X\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)\,dx=m_X-m_X=0.$

Таким образом, первый центральный момент результатов наблюдений тождественно равен нулю.

Аналогично строится система моментов для распределения случайных погрешностей. Важно отметить, что начальные и центральные моменты случайных погрешностей совпадают между собой и с центральными моментами результатов наблюдений: $\alpha_r[\delta]=\mu_r[\delta]=\mu_r[X]$, поскольку математическое ожидание случайных погрешностей равно нулю.

Особое значение наряду с математическим ожиданием результатов наблюдений имеет второй центральный момент, называемый *дисперсией результатов наблюдений* и обозначаемый через $D[X]$:

$$D[X] = D[\delta] = M[(X-m_X)^2] = M[\delta^2] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^2 p_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta^2 p_\delta(\delta)\,d\delta. \tag{6.19}$$

Дисперсия случайной погрешности равна дисперсии результатов наблюдений и является *характеристикой их рассеивания* относительно математического ожидания. Действительно, как видно из формулы (6.19), дисперсия все более увеличивается с ростом элементов вероятности $p_\delta(\delta)d\delta$ появления бо́льших значений случай-

ной погрешности, т. е. увеличением рассеивания результатов наблюдений.

Если математическое ожидание результатов наблюдений можно рассматривать в механической интерпретации как абсциссу центра тяжести фигуры, заключенной между кривой распределения и осью Ox, то дисперсия является аналогом момента инерции этой фигуры относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести.

Дисперсия [см. формулу (6.19)] имеет размерность квадрата измеряемой величины, поэтому она не совсем удобна в качестве характеристики рассеивания. Значительно чаще в качестве последней используется положительное значение корня квадратного из дисперсии, называемое *средним квадратическим отклонением* результатов наблюдений:

$$\sigma_X = +\sqrt{D[X]}. \tag{6.20}$$

Если нет сомнения относительно того, какая величина измеряется, то индекс у среднего квадратического отклонения будем опускать.

С помощью среднего квадратического отклонения можно оценить вероятность того, что при однократном наблюдении случайная погрешность по абсолютной величине не превзойдет некоторой наперед заданной величины ε, т. е. вероятность $P\{|\delta|<\varepsilon\}$.

Для этого запишем выражение для дисперсии случайной погрешности: $\sigma^2_X = D[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta^2 p_\delta(\delta)\,d\delta$.

Если сузить пределы интегрирования, то правая часть равенства возрасти не может. Поэтому имеет место следующее неравенство: $\sigma^2_X \geqslant \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta^2 p_\delta(\delta)\,d\delta + \int\limits_{+\varepsilon}^{\infty} \delta^2 p_\delta(\delta)\,d\delta$.

При замене под знаком интеграла δ^2 на меньшую величину ε^2 неравенство может только усилиться: $\sigma^2_X \geqslant \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \varepsilon^2 p_\delta(\delta)\,d\delta +$

$$+ \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^2 p_\delta(\delta)\,d\delta = \varepsilon^2\Big[\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} p_\delta(\delta)\,d\delta + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} p_\delta(\delta)\,d\delta\Big].$$

Интегралы в квадратных скобках представляют собой, согласно формуле (6.12), вероятности того, что случайная погрешность примет значения, лежащие в интервалах, определяемых пределами интегрирования: $\sigma^2_X \geqslant \varepsilon^2(P\{-\infty<\delta\leqslant-\varepsilon\}+P\{\varepsilon<\delta\leqslant+\infty\}) = \varepsilon^2(1-P\{-\varepsilon<\delta\leqslant+\varepsilon\}) = \varepsilon^2(1-P\{|\delta|<\varepsilon\})$.

Отсюда получаем окончательно

$$P\{|\delta|<\varepsilon\} \geqslant 1-\frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2};\ P\{|\delta|>\varepsilon\} < \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}. \tag{6.21}$$

Этот результат известен как *неравенство Чебышева.*

Полагая $\varepsilon = 3\sigma_X$, найдем вероятность того, что результат однократного наблюдения отличается от истинного значения на величину, большую утроенного среднего квадратического отклоне-

ния, т. е. вероятность того, что случайная погрешность окажется большей $3\sigma_X$

$$P\{|\delta| > 3\sigma_X\} < \frac{\sigma_X^2}{(3\sigma_X)^2} = \frac{1}{9} \approx 11\ \%.$$

Вероятность того, что погрешность измерения не превысит $3\sigma_X$, составит соответственно

$$P\{|\delta| < 3\sigma_X\} \geqslant 1 - \frac{\sigma_X^2}{(3\sigma_X)^2} \approx 89\ \%.$$

Неравенство Чебышева дает только нижнюю границу для вероятности $P\{|\delta| < \varepsilon\}$, меньше которой она не может быть ни при каком распределении. Обычно $P\{|\delta| < 3\sigma\}$ значительно больше 89 %. Так, например, в случае нормального распределения погрешностей эта вероятность составляет 99,73 %.

Математическое ожидание и дисперсия являются наиболее часто применяемыми моментами, поскольку они определяют наиболее важные черты распределения: положение центра распределения и степень его разбросанности. Для более подробного описания распределения используются моменты более высоких порядков.

Третий момент случайных погрешностей служит характеристикой асимметрии, или скошенности, распределения. В общем случае любой нечетный момент случайной погрешности характеризует асимметрию распределения. Действительно, если распределение обладает свойством симметрии, то все функции вида $\delta^s p_\delta(\delta)$, где $s = 1, 3, 5, \ldots$, являются нечетными функциями δ (рис. 15).

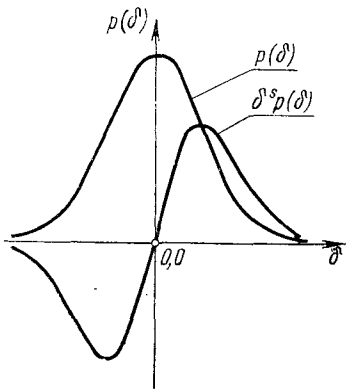


Рис. 15

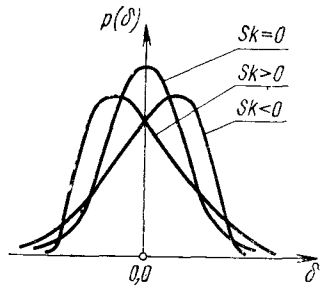


Рис. 16

Поэтому все нечетные моменты, являющиеся интегралами этих функций в бесконечных пределах, должны равняться нулю. Отличие этих моментов от нуля как раз и указывает на асимметрию распределения.

Простейшим из нечетных моментов является третий момент $\mu_3[\delta]$. Чтобы получить безразмерную характеристику, третий момент делят на третью степень среднего квадратического отклонения и получают *коэффициент асимметрии* или просто *асимметрию* Sk распределения:

$$Sk = \frac{\mu_3[\delta]}{\sigma_X^3}. \qquad (6.22)$$

Для иллюстрации сказанного на рис. 16 приведены три кривые распределения случайных погрешностей с положительной, отрицательной и нулевой асимметрией.

Четвертый момент служит для характеристики плосковершинности или островершинности распределения случайных погрешностей. Эти свойства описываются с помощью *эксцесса* — безразмерной характеристики, определяемой выражением.

$$Ex = \frac{\mu_4[\delta]}{\sigma_X^4} - 3. \qquad (6.23)$$

Число 3 вычитают из отношения $[\sigma]/\sigma_X^4$, потому что для широко распространенного нормального распределения погрешностей $\mu_4[\delta] = 3\sigma_X^4$. Таким образом, для нормального распределения эксцесс равен нулю, более плосковершинные распределения обладают отрицательным эксцессом, более островершинные — положительным (рис. 17).

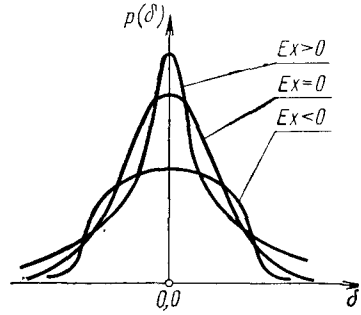


Рис. 17

§ 38. ВИДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЯ И СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Случайная погрешность измерения образуется под влиянием большого числа факторов, сопутствующих процессу измерения. В каждой конкретной ситуации работает свой механизм образования погрешности. Поэтому естественно предположить, что каждой ситуации должен соответствовать свой тип распределения погрешности. Однако во многих случаях имеются возможности еще до проведения измерений сделать некоторые предположения о форме функции распределения так, что после проведения измерений остается только определить значения некоторых параметров, входящих в выражение для предполагаемой функции распределения.

Случайная погрешность характеризует неопределенность наших знаний об истинном значении измеряемой величины, полученных в результате проведенных наблюдений. Согласно К. Шеннону мерой неопределенности ситуации, описываемой случайной величиной X, является энтропия $H = -\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \ln p_X(x)\, dx$, являющаяся

функционалом дифференциальной функции распределения $p_X(x)$. Можно предположить, что любой процесс измерения формируется таким образом, что неопределенность результата наблюдений оказывается наибольшей в некоторых пределах, определяемых допускаемыми значениями погрешности. Поэтому наиболее вероятными должны быть такие распределения $p_X(x)$, при которых энтропия обращается в максимум.

Для выявления вида наиболее вероятных распределений рассмотрим несколько наиболее типичных случаев.

1. В классе распределений результатов наблюдений $p_X(x)$, обладающих определенной зоной рассеивания между значениями $x=b$ и $x=a$ шириной $b-a=2\alpha$, найдем такое, которое обращает в максимум энтропию $H=-\int_a^b p_X(x)\ln p_X(x)dx$

при наличии ограничивающих условий $p_X(x)>0$; $\int_a^b p_X(x)dx=1$; $\int_a^b xp_X(x)dx=m_X$, где $m_X=\frac{b+a}{2}$ — математическое ожидание результатов наблюдений. Поставленная задача является частным случаем изопериметрической задачи вариационного исчисления. Ее решение методом множителей Лагранжа находится из условия $\frac{d}{dp_X}(-p_X\ln p_X+\mu_1 p_X+\mu_2 xp_X)=0$, которое после дифференцирования приводится к виду $-\ln p_X-1+\mu_1+\mu_2 x=0$ или $p_X(x)=e^{-1+\mu_1+\mu_2\cdot x}$. Для такой плотности распределения первое условие выполняется автоматически, а два других позволяют определить множители Лагранжа $\mu_2=0$; $e^{-1+\mu_1}=\frac{1}{b-a}$ так, что искомая плотность распределения результатов наблюдений описывается выражением

$$p_X(x)=\begin{cases}0; & -\infty<x<a;\\ \frac{1}{b-a}=\frac{1}{2\alpha}; & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0; & b<x<+\infty.\end{cases} \tag{6.24}$$

Такое распределение результатов наблюдений называется равномерным.

Значения дифференциальной функции распределения равномерной распределенной случайной погрешности постоянны в интервале $[-\alpha;\ +\alpha]$, а вне этого интервала равны нулю (рис. 18). Поэтому выражение для дифференциальной функции распределения случайной погрешности можно записать в виде

$$p_\delta(\delta)=\begin{cases}0; & -\infty<\delta<-\alpha;\\ \frac{1}{b-a}=\frac{1}{2\alpha} & -\alpha\leqslant\delta\leqslant+\alpha;\\ 0; & +\alpha<\delta<+\infty.\end{cases} \tag{6.25}$$

Значения дифференциальной функции распределения равномерно распределенной случайной погрешности в интервале $[-\alpha;\ +\alpha]$ постоянны, а вне этого интервала равны нулю.

Уравнение для интегральной функции распределения получаем интегрированием дифференциальной функции распределения. До тех пор, пока

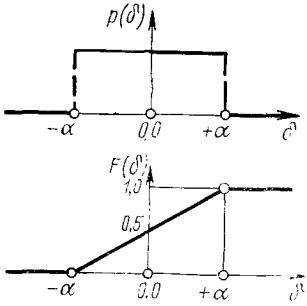


Рис. 18

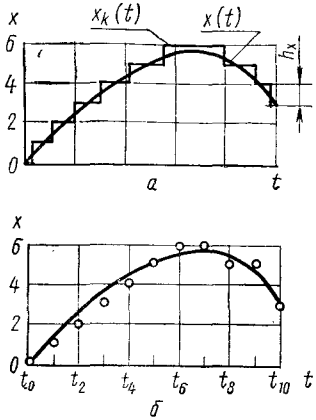


Рис. 19

$\delta < -\alpha$, интеграл равен нулю и $F_\delta(\delta) = 0$.
В пределах интервала $[-\alpha;\ +\alpha]$

$$F_\delta(\delta) = \int_{-\infty}^{\delta} p_\delta(\delta)\, d\delta = \int_{-\alpha}^{\delta} \frac{1}{2\alpha}\, d\delta = \frac{1}{2\alpha}(\delta + \alpha).$$

Таким образом, интегральная функция распределения растет линейно со случайной погрешностью от $F_\delta(\delta) = 0$ при $\delta = -\alpha$ до $F_\delta(\delta) = 1$ при $\delta = +\alpha$. При прохождении абсциссы через нуль интегральная функция распределения уменьшается в два раза. Этого и следовало ожидать, поскольку равномерное распределение симметрично. При увеличении случайной погрешности сверх $\delta = +\alpha$ площадь под кривой распределения не меняется и интегральная функция распределения сохраняет постоянное значение, равное единице. Окончательное выражение для интегральной функции равномерного распределения следующее:

$$F_\delta(\delta) = \begin{cases} 0; & -\infty < \delta < -\alpha; \\ \dfrac{1}{2\alpha}(\delta + \alpha); & -\alpha \leqslant \delta \leqslant +\alpha; \\ 1; & +\alpha < \delta < \infty. \end{cases} \qquad (6.26)$$

В качестве примера рассмотрим схему формирования случайных погрешностей при равномерном квантовании измеряемой величины по уровню. Измерению подлежит функция времени $x(t)$ (рис. 19, *а*).

При равномерном квантовании функции по уровню весь диапазон ее изменения подразделяется на некоторое число равноотстоя-

щих уровней (на рисунке семь уровней, включая нулевой). В те моменты времени, когда измеряемая функция $x(t)$ принимает значение, соответствующее половине шага квантования, квантованная функция $x_k(t)$ изменяется скачком на величину, равную шагу квантования h_x (разность соседних уровней). В остальные моменты времени значения квантованной функции $x_k(t)$ постоянны.

Функцию измеряют в равноотстоящие интервалы времени t_0; t_1; ...; t_9; ..., когда фиксируется один из уровней квантования. В результате получается совокупность точек, изображенных на рис. 19, *б* и несущих в себе всю информацию об измеряемой функции. Погрешности квантования, равные разностям ординат этих точек и действительных значений измеряемой функции, очевидно, нигде не будут превышать $1/2h_x$. При достаточно малом шаге квантования распределение этих погрешностей можно считать равномерным в интервале $[-1/2h_x; +1/2h_x]$.

Определим числовые характеристики равномерного распределения.

Математическое ожидание случайной погрешности находим по формуле (6.13):

$$M[\delta] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta p_\delta(\delta)\, d\delta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha}\, \delta d\delta = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\delta^2}{2}\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2\alpha}\left[\alpha^2 - (-\alpha)^2\right] = 0.$$

Дисперсию случайной равномерно распределенной погрешности можно найти по формуле (6.19):

$$D[\delta] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 p_\delta(\delta)\, d\delta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta^2 \frac{1}{2\alpha}\, d\delta = \frac{1}{6\alpha}\, \delta^3 \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{3}; \qquad (6.27)$$

$$\sigma_\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \qquad (6.28)$$

В силу симметрии распределения относительно математического ожидания коэффициент асимметрии должен равняться нулю:

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma_\delta^3} = \frac{1}{\sigma_\delta^3} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha}\, \delta^3 d\delta = \frac{1}{8\alpha\sigma_\delta^3}\, \delta^4 \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 0. \qquad (6.29)$$

Для определения эксцесса найдем вначале четвертый момент случайной погрешности:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^4 p_\delta(\delta) d\delta = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta^4 d\delta = \frac{1}{10\alpha}\, \delta^5 \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\alpha^4}{5},$$

поэтому

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma_\delta^4} - 3 = \frac{\alpha^4 \cdot 9}{5 \cdot \alpha^4} - 3 = -1{,}2. \qquad (6.30)$$

В заключение найдем вероятность попадания случайной погрешности в заданный интервал $[\delta_1, \delta_2]$, равный заштрихованной площади на рис. 20.

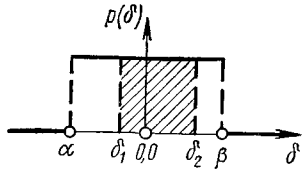


Рис. 20

$$P\{\delta_1 < \delta \leqslant \delta_2\} = \int_{\delta_1}^{\delta_2} p_\delta(\delta)\,d\delta = \begin{cases} 0; & \delta_1 < -\alpha;\ \delta_2 < -\alpha; \\ \frac{1}{2\alpha}(\delta_2 + \alpha); & \delta_1 < -\alpha;\ \delta_2 < +\alpha; \\ \frac{1}{2\alpha}(\delta_2 - \delta_1); & \delta_1 > -\alpha;\ \delta_2 < +\alpha; \\ 2\frac{1}{\alpha}(\alpha - \delta_1); & \delta_1 > -\alpha;\ \delta_2 > +\alpha; \\ 0; & \delta_1 > +\alpha;\ \delta_2 > +\alpha. \end{cases} \quad (6.31)$$

В том случае, если интервал $(\delta_1; \delta_2]$ полностью укладывается в интервале $[-\alpha; \alpha]$, в котором распределены возможные значения случайных погрешностей, искомая вероятность равна отношению длин этих интервалов. Если же интервал $(\delta_1; \delta_2]$ находится за границами интервала распределения $[-\alpha; +\alpha]$, то эта вероятность равна нулю.

2. В классе распределений результатов наблюдений $p_X(x)$, обладающих определенной дисперсией σ_X^2, найдем такое, которое обращает в максимум энтропию $H = -\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\ln p_X(x)\,dx$ при наличии ограничений $p_X(x) > 0$; $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = 1$; $\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\,d_X = m_X$; $\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x)\,dx = \sigma_X^2$, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)\,dx = \sigma_X^2 + m_X^2$.

Эта задача является также частным случаем изопериметрической и искомая плотность распределения находится методом множителей Лагранжа из условия $d/dp_X(-p_X \ln p_X + \mu_1 p_X + \mu_2 x p_X + \mu_3 x^2 p_X) = 0$, которое после дифференцирования приводится к виду $-\ln p_X - 1 + \mu_1 + \mu_2 \cdot x + \mu_3 x^2 p_X = 0$ или $p_X(x) = e^{-1+\mu_1+\mu_2 \cdot x + \mu_3 x^2}$. Условие $p_X(x) > 0$ вновь выполняется автоматически, а подстановкой найденной плотности распределения в вышеприведенные ограничения получаем множители Лагранжа $-1 + \mu_1 = -\frac{m_X^2}{2\sigma_X^2} - \ln(\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi})$; $\mu_2 = \frac{m_X}{\sigma_X^2}$; $\mu_3 = \frac{1}{2\sigma_X^2}$.

Окончательно выражение для дифференциальной функции распределения результатов наблюдений получается в следующей форме

$$p_X(x) = e^{-\frac{m_X^2}{2\sigma_X^2} - \ln(\sigma_X\sqrt{2\pi}) + \frac{x \cdot m_X}{\sigma_X^2} + \frac{x^2}{2\sigma_X^2}} = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \quad (6.32)$$

где m_X — математическое ожидание и σ_X — среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений.

Учитывая, что при полном исключении систематических погрешностей $x - m_X = \delta$ и что $\sigma_X = \sigma_\delta$, для дифференциальной функции распределения случайной погрешности можно записать уравнение

$$p_\delta(\delta) = \frac{1}{\sigma_\delta \sqrt{2\pi}} e^{-\delta^2 / 2\sigma_\delta^2}. \qquad (6.33)$$

Распределение, описываемое уравнениями (6.32) и (6.33), называется нормальным или распределением Гаусса.

На рис. 21 изображены кривые нормального распределения случайных погрешностей для различных значений среднего квадратического отклонения ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). Из рисунка видно, что по мере увеличения среднего квадратического отклонения распределение все более и более расплывается, вероятность появления больших значений погрешностей возрастает, а вероятность меньших погрешностей сокращается, т. е. увеличивается рассеивание результатов наблюдений.

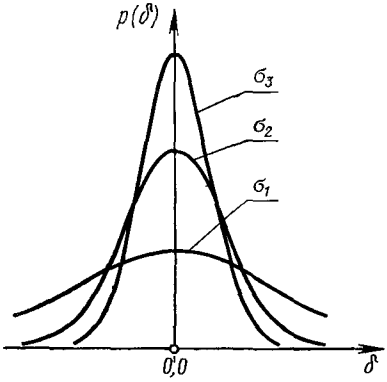


Рис. 21

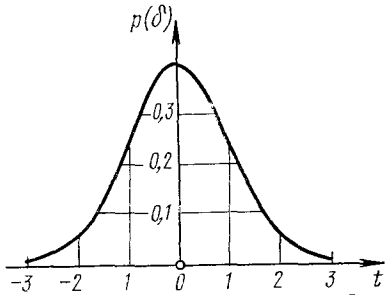


Рис. 22

Вычислим вероятность попадания результата наблюдения в некоторый заданный интервал $(x_1; x_2]$:

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)\, dx = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx.$$

Заменим переменные:

$$\frac{x - m_X}{\sigma_X} = t; \quad \frac{x_1 - m_X}{\sigma_X} = t_1; \quad \frac{x_2 - m_X}{\sigma_X} = t_2, \qquad (6.34)$$

после чего получим следующее выражение для искомой вероятности:

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right]. \qquad (6.35)$$

Интегралы, стоящие в квадратных скобках, не выражаются в элементарных функциях, поэтому их вычисляют с помощью так называемого нормированного нормального распределения с дифференциальной функцией

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \qquad (6.36)$$

график которого изображен на рис. 22. В приложении (табл. 5 и 6) приведены значения дифференциальной функции нормированного нормального распределения, также интегральной функции этого распределения, определяемой как

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \qquad (6.37)$$

С помощью функции $\Phi(z)$ вероятность, определенную по формуле (6.35), находят как

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - Q}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - Q}{\sigma_X}\right). \qquad (6.38)$$

При использовании формулы (6.38) следует иметь в виду тождество

$$\Phi(z) \equiv 1 - \Phi(-z), \qquad (6.39)$$

вытекающее непосредственно из определения функции $\Phi(z)$.

Широкое распространение нормального распределения погрешностей в практике измерений объясняется *центральной предельной теоремой* теории вероятностей, являющейся одной из самых замечательных математических теорем, в разработке которой принимали участие многие крупнейшие математики — А. де Муавр, Р. де Лаплас, К. Ф. Гаусс, П. Л. Чебышев и А. М. Ляпунов.

Центральная предельная теорема утверждает, что распределение случайных погрешностей будет близко в нормальному всякий раз, когда результаты наблюдения формируются под влиянием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных.

3. Предположим, что результаты наблюдений распределены нормально, но их среднее квадратическое отклонение является величиной случайной, изменяющейся от опыта к опыту. Такое предположение более осторожное, чем предположение о неизменности σ_X в течение всего времени измерений. В этом случае, рассуждая таким же образом, как и прежде, легко найти, что энтропия обращается в максимум, если результаты наблюдений имеют распределение Лапласа с плотностью

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{|x-m_X|}{\sigma_X}}, \tag{6.40}$$

где m_X — математическое ожидание; σ_X — среднее квадратическое отклонение результатов наблюдения. Распределением Лапласа следует пользоваться в тех случаях, когда точностные характеристики заранее неизвестны или нестабильны во времени.

Дифференциальная функция распределения случайных погрешностей получается подстановкой $\delta = x - m_X$ и $\sigma_X = \sigma_\delta$ в выражение (6.40).

$$p_\delta(\delta) = \frac{1}{\sigma_\delta\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\cdot\frac{|\delta|}{\sigma_\delta}}. \tag{6.41}$$

Асимметрия распределения равна нулю, поскольку распределение симметрично относительно нуля, а эксцесс в соответствии с формулой (6.23) составляет

$$Ex = \frac{1}{\sigma_\delta^4}\cdot\mu_4[\delta] - 3 = \frac{1}{\sigma_\delta^4}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta^4}{\sigma_\delta\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{|\delta|\cdot\sqrt{2}}{\sigma_\delta}}d\delta - 3 = 3$$

Таким образом, по сравнению с нормальным распределением ($Ex=0$) равномерное распределение является более плосковершинным ($Ex=-1{,}2$), а распределение Лапласа — более островершинным ($Ex=3$).

§ 39. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ИСТИННОГО ЗНАЧЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ И СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЯДА НАБЛЮДЕНИЙ

Мы подошли к решению вопроса о том, как на основании полученной в эксперименте группы результатов наблюдений оценить истинное значение, т. е. найти результат измерений, и как оценить его точность, т. е. меру его приближения к истинному значению.

Эта задача является частным случаем статистической задачи нахождения *оценок параметров* функции распределения случайной величины на основании *выборки* — ряда значений, принимаемых этой величиной в n независимых опытах.

Оцениваемыми параметрами являются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, поскольку только они входят в выражение для дифференциальных функций всех трех рассмотренных выше распределений. В уравнениях (6.32) и (6.40) для нормального распределения и распределения Лапласа эти параметры входят явно, а в уравнения (6.24) и (6.25) для равномерного распределения — не явно, поскольку в соответствии с (6.28):

$$\alpha = \sigma_\delta \cdot \sqrt{3};\ b = m_X + \alpha = m_X + \sigma_X \cdot \sqrt{3};$$

$$a = m_X - \alpha = m_X - \sigma_X \sqrt{3}.$$

Оценку $\hat{a}$ параметра a назовем точечной, если она выражается одним числом. Любая точечная оценка, вычисленная на основании опытных данных, является их функцией и поэтому сама должна представлять собой случайную величину с распределением, зависящим от распределения исходной случайной величины, в том числе и от самого оцениваемого параметра, и от числа опытов n.

К точечным оценкам предъявляется ряд требований, определяющих их пригодность для описания самих параметров.

1. Оценка называется *состоятельной,* если при увеличении числа наблюдений она приближается (сходится по вероятности) к значению оцениваемого параметра.

2. Оценка называется *несмещенной,* если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру.

3. Оценка называется *эффективной*, если ее дисперсия меньше дисперсии любой другой оценки данного параметра.

На практике не всегда удается удовлетворить одновременно все эти требования, однако выбору оценки должен предшествовать ее критический анализ со всех перечисленных выше точек зрения.

Существует несколько методов определения оценок. Наиболее распространен метод максимального правдоподобия, теоретически обоснованный математиком Р. Фишером. Идея метода заключается в следующем. Вся получаемая в результате многократных наблюдений информация об истинном значении измеряемой величины и рассеивании результатов сосредоточена в ряде наблюдений $X_1; X_2; \ldots, X_n$, где n — число наблюдений. Их можно рассматривать как n независимых случайных величин с одной и той же дифференциальной функцией распределения $p_X(x;\ Q;\ \sigma_X)$. Вероятность P_i получения в эксперименте некоторого результата X_i, лежащего в интервале $x_i \pm \Delta x$, где Δx — некоторая малая величина, равная соответствующему элементу вероятности $P_i = p_X(x_i;\ Q;\ \sigma_X) \cdot \Delta x$.

Независимость результатов наблюдений позволяет найти априорную вероятность появления одновременно всех экспериментальных данных, т. е. всего ряда наблюдений $X_1;\ X_2; \ldots; X_n$ как произведение этих вероятностей $P(X_1;\ X_2; \ldots X_n) = \prod_{i=1}^{n} P_i =$

$=\Delta x^n \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i;\ Q;\ \sigma_X)$. Если рассматривать Q и σ_X как неизвестные параметры распределения, то, подставляя различные значения Q и σ_X в эту формулу, мы будем получать различные значения вероятности $P(X_1;\ X_2;\ \ldots\ X_n)$ при каждом фиксированном ряде наблюдений $X_1;\ X_2;\ \ldots;\ X_n$. При некоторых значениях $Q=\hat{Q}(X_1;\ X_2;\ \ldots;\ X_n)$ и $\sigma_X=\hat{\sigma}_X(X_1;\ X_2;\ \ldots;\ X_n)$ вероятность $P(X_1;\ X_2;\ \ldots;\ X_n)$ получения экспериментальных данных достигает наибольшего значения. В соответствии с методом максимального правдоподобия именно эти значения и принимаются в качестве точечных оценок истинного значения и среднего квадратического отклонения результатов наблюдений.

Таким образом, метод максимального правдоподобия сводится к отысканию таких оценок $\hat{Q}$ и σ_X, при которых функция правдоподобия

$$g(X_1;\ X_2;\ \ldots;X_n;\ Q;\ \sigma_X)=\prod_{i=1}^{n} p_X(x_i;\ Q;\ \sigma_X) \tag{6.42}$$

достигает наибольшего значения. Постоянный сомножитель Δx^n не оказывает влияния на решение и поэтому может быть отброшен. Полученные оценки $\hat{Q}$ и $\hat{\sigma}_X$ истинного значения и среднего квадратического отклонения называются оценками максимального правдоподобия.

Для упрощения вычислений иногда бывает удобнее пользоваться логарифмической функцией правдоподобия.

$$L(X_1;\ X_2;\ \ldots;X_n)=\lg g=\sum_{i=1}^{n}\ln p_X(x_i;\ Q;\ \sigma_X). \tag{6.43}$$

Если наибольшее значение функции правдоподобия совпадает с максимальным значением, то оценки получаются из системы уравнений

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial g}{\partial Q}\right)_{Q=\hat{Q};\ \sigma_X=\hat{\sigma}_X}=0;\\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_X}\right)_{Q=\hat{Q};\ \sigma_X=\hat{\sigma}_X}=0;\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\left(\dfrac{\partial L}{\partial Q}\right)_{Q=\hat{Q};\ \sigma_X=\hat{\sigma}_X}=0;\\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial \sigma_X}\right)_{Q=\hat{Q};\ \sigma_X=\hat{\sigma}_X}=0.\end{cases} \tag{6.44}$$

В противном случае необходимо более подробное исследование функции правдоподобия.

Далее определим оценки максимального правдоподобия для трех распределений случайных погрешностей, разобранных в предыдущем параграфе.

1. Результаты наблюдений распределены нормально. В этом случае

$$p_X(x_i;\ Q;\ \sigma_X) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_i-Q)^2}{2\sigma_X^2}},$$

а логарифмическая функция правдоподобия в соответствии с (6.43)

$$L(X_1;\ X_2;\ \ldots;X_n;\ Q;\ \sigma_X) = \sum_{i=1}^{n} \ln p_X(x_i;\ Q;\ \sigma_X) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{(X_i-Q)^2}{2\sigma_X^2} - \ln\sigma_X - \frac{1}{2}\ln(2\pi)\right] = -\frac{1}{2\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Q)^2 -$$

$$- n\ln\sigma_X - \frac{n}{2}\ln(2\pi). \qquad (6.45)$$

Система уравнений (6.44) приводится к виду

$$\left(\frac{\partial L}{\partial Q}\right)_{Q=\hat{Q};\ \sigma_X=\hat{\sigma}_X} = \frac{1}{\hat{\sigma}_X^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{Q}) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \sigma_X}\right)_{Q=\hat{Q};\ \sigma_X=\hat{\sigma}_X} = \frac{1}{\hat{\sigma}_X^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{Q}) - \frac{n}{\hat{\sigma}_X} = 0.$$

Из первого уравнения получаем выражение для оценки истинного значения $\hat{Q}$, а из второго — оценку среднего квадратического отклонения

$$\hat{Q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;\quad \hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{Q})^2. \qquad (6.46)$$

Таким образом, при нормальном распределении случайных погрешностей оценкой максимального правдоподобия для истинного значения является среднее арифметическое из результатов отдельных наблюдений, а оценкой дисперсии — среднее из квадратов отклонений результатов наблюдений от среднего арифметического.

2. Результаты наблюдений распределены по закону Лапласа

$$p_X(x_i;\ Q;\ \sigma_X) = \frac{1}{\sigma_X\cdot\sqrt{2}}\, e^{-\frac{|x_i-Q|}{\sigma_X}\cdot\sqrt{2}}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия

$$L(X_1;\ X_2;\ \ldots;X_n;\ Q;\ \sigma_X) = \sum_{i=1}^{n}\ln p_X(x_i;\ Q;\ \sigma_X) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma_X}\sum_{i=1}^{n}|X_i-Q| - n\ln(\sigma_X\cdot\sqrt{2})$$

не является дифференцируемой по Q, поэтому приходится прибегать к численным методам. Функция правдоподобия достигает наибольшего значения, когда выражение $Y=\sum_{i=1}^{n}|x_i-Q|$ принимает наименьшее значение. Поэтому задача об отыскании оценки истинного значения сводится к определению такого значения $Q=Q(X_1;\ X_2;\ \ldots\ X_n)$, сумма модулей отклонений результатов наблюдений от которого является наименьшей. Задача решается методом последовательных приближений, причем в качестве первого приближения можно принять среднее арифметическое из полученных результатов.

3. В условиях равномерного распределения погрешностей

$$p_X(x;\ Q;\ \sigma_X)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a};\ a\leqslant x\leqslant b;\\ 0;\ x<a \text{ или } x>b,\end{cases}$$

$$\text{причем } a=Q-\sigma_X\cdot\sqrt{3} \text{ и } b=Q+\sigma_X\cdot\sqrt{3}.$$

Если ряд наблюдений $X_1;\ X_2;\ldots;X_n$ расположить в вариационный ряд $X_1^*;\ X_2^*;\ \ldots\ X_n^*$, где каждый последующий член больше предыдущего, то параметры a и b распределения должны отвечать условиям $a\leqslant X_1^*;\ b\geqslant X_n^*$, и поэтому истинное значение параметров a и b должно лежать в заштрихованной области, изображенной на рис. 23.

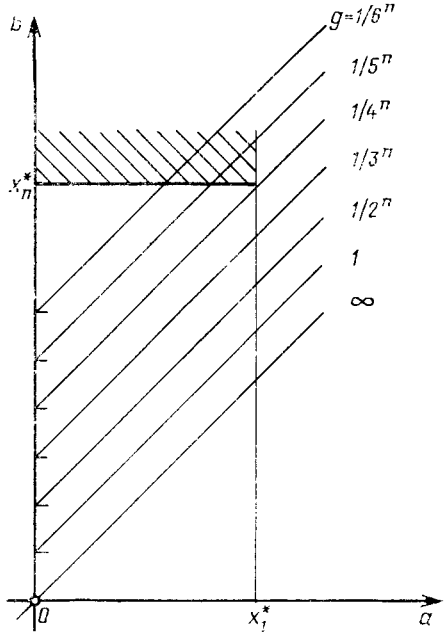


Рис. 23

Путем прямого дифференцирования оценки здесь найти не удается, поэтому поступим следующим образом. Будем искать значения функции правдоподобия

$$g(X_1;\ X_2;\ \ldots;X_n;\ Q;\ \sigma_X)=\frac{1}{(b-a)^n}$$

на соотношениях между оценками $b=a+K$, т. е. на прямых линиях (см. рис. 23), проходящих под углом 45° к оси Oa:

$$K=0;\ b=a;\ g=\infty;$$

$$K=1;\ b=a+1;\ g=1;$$

$$K=2;\ b=a+2;\ g=\frac{1}{2^n};$$

$$K=3;\ b=a+3;\ g=\frac{1}{3^n} \text{ и т. д.}$$

Для допустимой области оцениваемых параметров $a\leqslant X_1^*$ и $b\geqslant X_n^*$ функция правдоподобия оказывается наибольшей в точке пересечения прямых $a=X_1^*$ и $b=X_n^*$, поэтому максимально правдоподобными оценками для параметров распределения являются крайние члены вариационного ряда $\hat{a}=X_1^*$; $\hat{b}=X_n^*$. Исходя из этого оценками для истинного значения и средней квадратической погрешности будут

$$\hat{Q}=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\frac{1}{2}(X_1^*+X_n^*);\ \sigma_X=\frac{\hat{b}-\hat{a}}{2\sqrt{3}}=\frac{X_n^*-X_1^*}{2\sqrt{3}}.$$

Основное достоинство оценок максимального правдоподобия заключается в том, что они являются асимптотически (при $n\to\infty$) несмещенными; асимптотически эффективными; асимптотически нормально распределенными.

Если $\hat{a}$ — оценка максимального правдоподобия для параметра a, то при достаточно большом числе n наблюдений (практически уже при $n>20$—25) эту оценку можно считать нормально распределенной с математическим ожиданием $M[\hat{a}]=a$ и дисперсией $D[\hat{a}]=\{M[-\partial^2L/\partial a^2]\}^{-1}$ при любом распределении результатов наблюдений.

Для наиболее часто встречающегося на практике нормального распределения случайных погрешностей оценки максимального правдоподобия имеют особые обозначения.

Оценкой истинного значения (6.46) является среднее арифметическое $\bar{X}$ из результатов отдельных наблюдений X_i

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i. \tag{6.47}$$

Вторая производная от логарифмической функции преобразования равна $\partial^2L/\partial Q^2=-n/\sigma^2{}_X$, поэтому дисперсия среднего ариф-

метического в n раз меньше дисперсии σ^2_X результатов наблюдений, т. е.

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2_X}{n}; \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}. \tag{6.48}$$

Оценка (6.48) дисперсии результатов наблюдений при малом n является немного смещенной, поэтому точечную оценку дисперсии принято определять как

$$s^2_X = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

а оценку среднего квадратического отклонения результатов наблюдений как

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}. \tag{6.49}$$

Вторая производная от логарифмической функции правдоподобия (6.45)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2_X} = -\frac{3}{\sigma^4_X} \sum_{i=1}^{n} (X_i - Q)^2 + \frac{n}{\sigma^2_X} = -\frac{2n}{\sigma^2_X},$$

поэтому дисперсия оценки s_X среднего квадратического отклонения составляет

$$D[s_X] = \left\{ M\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2_X} \right] \right\}^{-1} = \frac{s^2_X}{2n}; \quad \hat{\sigma}[s_X] = \frac{s_X}{\sqrt{2n}}. \tag{6.50}$$

Последнее соотношение показывает, что относительная погрешность определения среднего квадратического отклонения (в %) по результатам обработки ряда наблюдений достаточно велика

$$\frac{\hat{\sigma}[s_X]}{s_X} \cdot 100 = \frac{100}{\sqrt{2n}}$$

и даже при $n = 50$ достигает 10 %. Для надежного суждения о точности эту погрешность следует увеличить еще минимум в два раза. В табл. 4 помещены формулы для оценок параметров нормального распределения и средних квадратических отклонений этих оценок, которыми впоследствии придется пользоваться особенно часто. С помощью полученных оценок итог измерений можно записать в виде

$$Q = \overline{X}; \quad s_{\overline{X}} = \ldots; \quad n = \ldots, \tag{6.51}$$

что позволяет уже сделать некоторые выводы относительно точности проведенных измерений.

Таблица 4

Оценка	Формула для ее вычисления
Оценка истинного значения — среднее арифметическое ряда наблюдений	$\hat{Q} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
Оценка среднего квадратического отклонения ряда наблюдений	$\hat{\sigma}_X = s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$
Оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметнческого	$s_{\bar{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$
Оценка среднего квадратического отклонения оценки среднего квадратического отклонения ряда наблюдений	$\hat{\sigma}[s_X] = \frac{s_X}{\sqrt{2n}}$

Наряду с методом максимального правдоподобия при определении точечных оценок широко используется метод наименьших квадратов. В соответствии с этим методом среди некоторого класса оценок выбирают ту, которая обладает наименьшей дисперсией, т. е. наиболее эффективную оценку. Анализируя формулу (6.44) легко заметить, что среди всех линейных оценок истинного значения вида $\hat{Q} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, где α_i — некоторые постоянные, именно среднее арифметическое $\bar{X}$ обращает в минимум дисперсию $\sigma^2_{\bar{X}}$. Поэтому для случая нормально распределенных случайных погрешностей оценки, получаемые методом наименьших квадратов, совпадают с оценками максимального правдоподобия.

Пример. Дан ряд наблюдений: $X_1 = 8{,}917$ мм; $X_2 = 8{,}934$ мм; $X_3 = 8{,}922$ мм; $X_4 = 8{,}927$ мм; $X_5 = 8{,}932$ мм.

Случайная погрешность подчиняется распределению Лапласа. Требуется вычислить оценку максимального правдоподобия для истинного значения. В качестве первого приближения принимаем среднее арифметическое и находим сумму модулей отклонений: $\hat{Q}_1 = 8{,}9264$ мм; $Y_1 = 0{,}0276$ мм.

Увеличим оценку на 0,0002 мм: $\hat{Q}_2 = 8{,}9264$ мм; $Y_2 = 0{,}0274$ мм.

Сумма модулей уменьшилась, поэтому увеличим оценку еще на 0,0002 мм: $\hat{Q}_3 = 8{,}9268$ мм; $Y_3 = 0{,}0272$ мм.

Продолжаем увеличивать оценку

$$\hat{Q}_4 = 8{,}9270 \text{ мм}; \quad Y_4 = 0{,}0270 \text{ мм};$$
$$\hat{Q}_5 = 8{,}9272 \text{ мм}; \quad Y_5 = 0{,}0270 \text{ мм};$$
$$\hat{Q}_6 = 8{,}9274 \text{ мм}; \quad Y_6 = 0{,}0274 \text{ мм}.$$

Сумма модулей будет наименьшей при $\hat{Q}_4 < \hat{Q} < \hat{Q}_5$, поэтому принимаем $\hat{Q} = 8{,}9271$ мм; $Y = 0{,}0270$ мм.

Таким образом, оценка метода максимального правдоподобия для истинного значения на 0,0007 мм превышает среднее арифметическое.

Для определения оценки дисперсии результатов наблюдений приравняем нулю производную от логарифмической функции правдоподобия по среднему квадратическому отклонению

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_X} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_X^2} \sum_{i=1}^{n} | x_i - \hat{Q} | - \frac{n}{\sigma_X} = 0,$$

откуда получаем

$$\hat{\sigma}_X = \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{i=1}^{n} | x_i - \hat{Q} | .$$

§ 40. ОЦЕНКА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРВАЛОВ

Смысл оценки параметров с помощью интервалов заключается в нахождении интервалов, называемых доверительными, между границами которых с определенными вероятностями (доверительными) находятся истинные значения оцениваемых параметров.

Вначале остановимся на определении доверительного интервала для среднего арифметического значения измеряемой величины. Предположим, что распределение результатов наблюдений нормально и известна дисперсия σ^2_X. Тогда, полагая в уравнении (6.34) $t_1 = -t_2 = t_P$, найдем вероятность попадания результата наблюдений в интервал $(m_X - t_P\sigma_X;\ m_X + t_P\sigma_X)$. Согласно формулам (6.38) и (6.39) $P\{m_X - t_P\sigma_X < X \leqslant m_X + t_P\sigma_X\} = \Phi(t_P) - \Phi(-t_P) = 2\Phi(t_P) - 1$. Но $P\{m_X - t_P\sigma_X < X \leqslant m_X + t_P\sigma_X\} = P\{X - t_P\sigma_X \leqslant m_X < X + t_P\sigma_X\}$ и, если систематические погрешности исключены $(m_X = Q)$,

$$P\{X - t_P\sigma_X \leqslant Q < X + t_P\sigma_X\} = 2\Phi(t_P) - 1. \qquad (6.52)$$

Это означает, что истинное значение Q измеряемой величины с доверительной вероятностью $P = 2\Phi(t_P) - 1$ находится между границами доверительного интервала $[X - t_P\sigma_X;\ X + t_P\sigma_X]$.

Половина длины доверительного интервала $t_P\sigma_X$ называется доверительной границей случайного отклонения результатов наблюдений, соответствующей доверительной вероятности P. Для определения доверительной границы (при выполнении перечисленных условий) задаются доверительной вероятностью, например $P = 0{,}95$ или $P = 0{,}995$, и по формуле

$$2\Phi(t_P) - 1 = P;$$

$$\Phi(t_P) = \frac{1 + P}{2} \qquad (6.53)$$

определяют соответствующее значение $\Phi(t_P)$ интегральной функции нормированного нормального распределения. Затем по данным табл. 7 приложения находят значение коэффициента t_P и вычисляют доверительное отклонение $t_P\sigma_X$.

Проведение многократных наблюдений позволяет значительно сократить доверительный интервал. Действительно, если результаты наблюдений X_i ($i=1, 2, \ldots, n$) распределены нормально, то нормально распределены и величины X_i/n, а значит и среднее арифметическое $\overline{X}$, являющееся их суммой. Поэтому имеет место равенство

$$P\{\overline{X}-t_P\sigma_{\overline{X}} \leqslant Q < \overline{X}+t_P\sigma_{\overline{X}}\} =$$

$$= P\left\{\overline{X}-t_P\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leqslant Q < \overline{X}+t_P\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t_P)-1, \qquad (6.54)$$

где t_P определяется по заданной доверительной вероятности P.

Полученный доверительный интервал, построенный с помощью среднего арифметического результатов n независимых повторных наблюдений, в $\sqrt{n}$ раз короче интервала, вычисленного по результату одного наблюдения, хотя доверительная вероятность для них одинакова. Это говорит о том, что сходимость измерений растет пропорционально корню квадратному из числа наблюдений.

Половина длины нового доверительного интервала

$$\delta_P = t_P\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \qquad (6.55)$$

называется *доверительной границей погрешности результата измерений,* а итог измерений записывается в виде

$$Q = \overline{X} \pm \delta_P;\ P = \ldots\%. \qquad (6.56)$$

Теперь рассмотрим случай, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна. В этих условиях пользуются отношением

$$t = \frac{\overline{X}-M[X]}{s_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X}-Q}{s_{\overline{X}}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-Q}{s_X}, \qquad (6.57)$$

называемым дробью Стьюдента. Входящие в нее величины $\overline{X}$ и s_X вычисляют на основании опытных данных; они представляют собой точечные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения результатов наблюдений (см. табл. 4).

Плотность распределения этой дроби, впервые предсказанного В. С. Госсетом, писавшим под псевдонимом Стьюдент, и впоследствии доказанного Р. А. Фишером, который связал его с именем Стьюдента, выражается следующим уравнением:

$$S(t;\ k) = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{2}\right)!}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \qquad (6.58)$$

где $S(t;\ k)$ — плотность распределения Стьюдента. Величина k называется числом степеней свободы и равна $n-1$.

Вероятность того, что дробь Стьюдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале $(-t_P;\ +t_P)$, согласно выражению (6.11), вычисляется по формуле

$$P\{-t_P<t\leqslant+t_P\}=\int_{-t_P}^{+t_P}S(t;\ k)\,dt,$$

или, поскольку $S(t;\ k)$ является четной функцией аргумента, t,

$$P\{-t_P<t\leqslant+t_P\}=2\int_{0}^{t_P}S(t;\ k)\,dt.$$

Подставив вместо дроби Стьюдента t ее выражение через $\overline{X}$, Q и $s_{\overline{X}}$ получим окончательно

$$P\left\{-t_P<\frac{\overline{X}-Q}{s_{\overline{X}}}\leqslant t_P\right\}=P\{|\overline{X}-Q|<t_Ps_{\overline{X}}\}=2\int_{0}^{t_P}S(t;\ k)\,dt. \qquad (6.59)$$

Величины t_P, вычисленные по формулам (6.58) и (6.59), были табулированы Р. А. Фишером для различных значений доверительной вероятности P в пределах 0,10—0,99 при $k=n-1=$ $=1,\ 2,\ \ldots,\ 30$. В приложении приведены значения t_P для некоторых, наиболее часто употребляемых доверительных вероятностей P (табл. 8), а также вероятностей появления погрешностей, по абсолютной величине не превышающих $t_Ps_{\overline{X}}$ для $t_P=2$; 2,5; 3 и 3,5 (табл. 9).

Таким образом, с помощью распределения Стьюдента по формуле (6.59) может быть найдена вероятность того, что отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины не превышает $\delta_P=t_Ps_{\overline{X}}$, например $2s_{\overline{X}}$, $3s_{\overline{X}}$ и т. д.

Итог измерений записывается в виде

$$Q=\overline{X}\pm\delta_P;\ P=\ldots\%. \qquad (6.60)$$

Пример. По результатам пяти наблюдений была найдена длина стержня. Итог измерений составляет $L=15{,}785$ мм, $s_{\overline{X}}=0{,}005$ мм, причем существуют достаточно обоснованные предположения о том, что распределение результатов наблюдений было нормальным. Требуется оценить вероятность того, что истинное значение длины стержня отличается от среднего арифметического из пяти наблюдений не больше чем на 0,01 мм.

Из условия задачи следует, что имеются все основания для применения распределения Стьюдента.

Вычисляем значение дроби Стьюдента:

$$t_P=\frac{0{,}010}{s_{\overline{X}}}=\frac{0{,}010}{0{,}005}=2$$

и число степеней свободы: $k=n-1=5-1=4$.

По данным табл. 9 приложения находим значение доверительной вероятности для $t_P=2$ и $k=4$: $P\{|\overline{X}-Q|<0{,}010\}=P\{|\overline{X}-Q|<2s_{\overline{X}}\}=88{,}38\%$.

Для $t_P=3$ эта вероятность составляет: $P\{|\overline{X}-Q|<3s_{\overline{X}}\}=P\{|\overline{X}-Q|<$ $<0{,}015\}=96\ \%$, т. е. несколько меньше 99,73 %, как при нормальном распределении.

Итог измерений удобно записать в виде $L=(15{,}785\pm0{,}010)$ мм; $P=88{,}38\ \%$.

Для $t_P=1$ доверительная вероятность составляет приблизительно 62 %, поэтому итог измерений можно представить также в виде $L=(15{,}785\pm0{,}005)$ мм; $P=62$ % или $L=(15{,}785\pm0{,}015)$ мм; $P=96$ %.

Пример. В условиях предыдущей задачи найти доверительную границу погрешности результата измерений для доверительной вероятности $P=99{,}0$ %. По данным табл. 8 приложения при $k=4$ находим $t_P=4{,}604$, и, следовательно, доверительная граница составляет $\delta_{99{,}0\,\%}=t_{99{,}0\,\%}$; $s_{\bar{X}}=4{,}604\cdot0{,}005=0{,}023$ мм. Итог измерений $L=(15{,}785\pm0{,}023)$ мм; $P=99{,}0$ %.

При $n\to\infty$, практически уже при $n=20$—30, распределение Стьюдента переходит в нормальное распределение и формула (6.58) принимает вид $P\{|\bar{X}-Q|<t_P s_{\bar{X}}\}=2\Phi(t_P)-1$, где $\Phi(t_P)$ — интегральная функция нормированного нормального распределения.

В тех случаях, когда распределение случайных погрешностей не является нормальным, все же часто пользуются распределением Стьюдента с приближением, степень которого остается неизвестной.

Кроме того, на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей можно утверждать, что при достаточно большом числе наблюдений распределение среднего арифметического как суммы случайных величин X_i/n будет сколь угодно близким к нормальному. Тогда, заменяя дисперсию σ^2_X ее точечной оценкой [см. формулу (6.46)], можно для оценки доверительной границы погрешности результата воспользоваться равенством (6.53). Число наблюдений n, при котором это становится возможным, зависит, конечно, от распределения случайных погрешностей.

Формула (6.56) показывает, что итог измерения не есть одно определенное число. В результате измерений мы получаем лишь «полосу значений измеряемой величины с несколько расплывчатыми границами». «Смысл итога измерений, например $L=20{,}00\pm\pm0{,}05$, заключается не в том, что $L=20{,}00$, как для простоты считают и как это чаще всего приходится с неизбежностью принимать для последующего применения и расчетов; смысл в том, что истинное значение лежит где-то в границах от 19,95 до 20,05 и вовсе необязательно, чтобы оно лежало в середине, а не где-нибудь с краю. К тому же нахождение внутри границ имеет некоторую вероятность, меньшую, чем единица, и, следовательно, нахождение вне границ не исключено, хотя и может быть очень маловероятным» *.

Теперь найдем доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратического отклонения результатов наблюдений.

Если распределение результатов наблюдений нормально, то отношение

$$\chi^2_k=\chi^2_{n-1}=\frac{(n-1)s^2_X}{\sigma^2_X} \tag{6.61}$$

* П. М. Тиходеев. «Очерки об исходных измерениях». М.: Машгиз, 1954.

имеет так называемое χ^2 (хи-квадрат) распределение Пирсона с $k=n-1$ степенями свободы. Его дифференциальная функция распределения описывается формулой

$$p_{\chi_k^2}(\xi)=\frac{1}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!\,2^{\frac{1}{2}k}}(\xi)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\xi}, \qquad (6.62)$$

где $k=n-1$ — число степеней свободы распределения, на единицу меньшее числа измерений, на основании которого определяется оценка s_X^2 дисперсии результатов. Кривые плотности χ^2-распределения при различных значениях k, вычисленные по формуле (6.62), представлены на рис. 24.

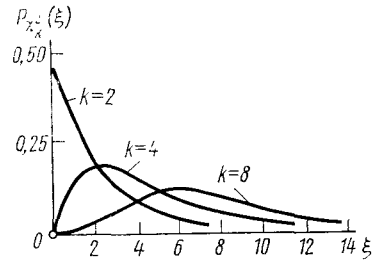


Рис. 24

Поскольку отношение χ_k^2 существенно положительно, то кривая его интегральной функции распределения начинается из нуля при $\chi_k^2=0$ и имеет вид:

$$F(\chi_{kP}^2)=P\left\{\frac{(n-1)\,s_X^2}{\sigma_X^2}\leqslant\chi_{kP}^2\right\}=\frac{1}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!\,2^{\frac{k}{2}}}\int_0^{\chi_{kP}^2}\xi^{\frac{1}{2}k-1}e^{-\frac{1}{2}\xi}d\xi. \qquad (6.63)$$

Значения $\chi^2_{k\,P}$, соответствующие различным вероятностям P того, что отношение (6.61) в данном опыте будет меньше $\chi^2_{k\,P}$, представлены в табл. 10 приложения для различных вероятностей P и чисел k степеней свободы.

Пользуясь этой таблицей, можно найти доверительный интервал для оценки дисперсии результатов наблюдений при заданной доверительной вероятности. Этот интервал строится таким образом, чтобы вероятность выхода дисперсии за его границы не превышала некоторой малой величины q, причем вероятности выхода за обе границы интервала были бы равны между собой и составляли соответственно $q/2$ (рис. 25). Границы $\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q}$ и $\chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q}$ такого доверительного интервала находят из равенства

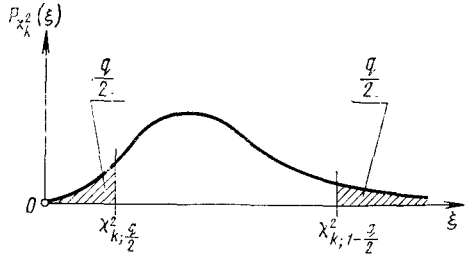


Рис. 25

$$F\left(\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q}\right)=\frac{1}{2}q;\ F\left(\chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q}\right)=1-\frac{1}{2}q. \qquad (6.64)$$

Теперь, зная границы доверительного интервала для отношения χ_k^2, построим доверительный интервал для дисперсии:

$$P\left\{\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q}<\frac{(n-1)\,s_X^2}{\sigma_X^2}\leqslant\chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q}\right\}=$$

$$=P\left\{\frac{1}{\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q}}>\frac{\sigma_X^2}{(n-1)\,s_X^2}\geqslant\frac{1}{\chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q}}\right\}=$$

$$=P\left\{\frac{(n-1)\,s_X^2}{\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q}}>\sigma_X^2\geqslant\frac{(n-1)\,s_X^2}{\chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q}}\right\}=1-q. \qquad (6.65)$$

И соответственно

$$P\left\{\frac{\sqrt{n-1}\,s_X}{\chi_{k;\,\frac{1}{2}q}}>\sigma_X\geqslant\frac{\sqrt{n-1}\,s_X}{\chi_{k;\,1-\frac{1}{2}q}}\right\}=1-q. \qquad (6.65')$$

Полученное равенство означает, что с вероятностью $\alpha=1-q$ истинное значение σ_X среднего квадратического отклонения результатов наблюдений лежит в интервале $(s_{X_1};\ s_{X_2}]$, границы которого равны

$$s_{X_1}=\frac{\sqrt{n-1}\,s_X}{\chi_{k;\,\frac{1}{2}q}};\ s_{X_2}=\frac{\sqrt{n-1}\,s_X}{\chi_{k;\,1-\frac{1}{2}q}}. \qquad (6.66)$$

Пример. Даны результаты двадцати измерений длины l_i, мм, детали:

18,305	18,306	18,306	18,309
18,308	18,309	18,313	18,308
18,312	18,310	18,305	18,307
18,309	18,303	18,307	18,309
18,304	18,308	18,308	18,310

В качестве оценки математического ожидания длины детали принимаем ее среднее арифметическое

$$\bar{l} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} l_i = 10{,}3078 \text{ мм}.$$

Точечная оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений составляет:

$$s_l = \sqrt{\frac{1}{20-1}\sum_{i=1}^{20}(l_i - \bar{l})^2} = 0{,}0025 \text{ мм}.$$

Приняв уровень доверительной вероятности $\alpha = 1 - q = 90\,\% = 0{,}90$, находим для числа степеней свободы $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$ в табл. 10 приложения:

$$\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q} = \chi^2_{19;\,0{,}05} = 10{,}117; \quad \chi_{19;\,0{,}05} = 3{,}18;$$

$$\chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q} = \chi^2_{19;\,0{,}95} = 30{,}144; \quad \chi_{19;\,0{,}95} = 5{,}49.$$

Границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения результатов наблюдений находим по формуле (6.66):

$$s_{l_1} = \frac{\sqrt{20-1}\cdot 0{,}0025}{3{,}18} = 0{,}0034 \text{ мм};$$

$$s_{l_2} = \frac{\sqrt{20-1}\cdot 0{,}0025}{5{,}49} = 0{,}0020 \text{ мм}.$$

Полученные результаты говорят о том, что истинное значение среднего квадратического отклонения результатов наблюдений с вероятностью 90 % лежит в интервале 0,0020—0,0034 мм.

В табл. 10 приложения приведены значения χ_k^2 только при числах степеней свободы от 1 до 30. При $k > 30$ можно пользоваться приближенной формулой

$$\chi_{kP} = \sqrt{k - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} t_P},$$

где t_P определяется из условия $\Phi(t_P) = P$ по табл. 7 приложения, в которой помещены значения интегральной функции нормированного нормального распределения.

Тогда границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения результатов наблюдений при доверительной вероятности $\alpha = 1 - q$ вычисляются по формулам (6.66) при значениях χ_k, равных

$$\begin{cases} \chi_{k;\,\frac{1}{2}q} = \sqrt{k - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} t_{\frac{1}{2}q}}, \\ \chi_{k;\,1-\frac{1}{2}q} = \sqrt{k - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} t_{1-\frac{1}{2}q}}. \end{cases} \tag{6.67}$$

Так, если в условиях предыдущей задачи среднее квадратическое отклонение определено на основании $n=42$ измерений, то для $\alpha=1-q=0{,}90=90\ \%$ из табл. 7 приложения находим:

$$t_{\frac{1}{2}q}=t_{0,05}=-1{,}6449;\ t_{1-\frac{1}{2}q}=t_{0,95}=+1{,}6449.$$

Величины χ_k при $k=n-1=41$ составляют:

$$\chi_{41;\,0,05}=\sqrt{41-\frac{1}{2}}-\frac{1{,}6449}{\sqrt{2}}=5{,}2;$$

$$\chi_{41;\,0,95}=\sqrt{41-\frac{1}{2}}+\frac{1{,}6449}{\sqrt{2}}=7{,}52;$$

границы доверительного интервала равны:

$$s_{l_1}=\frac{\sqrt{42-1}\cdot 0{,}0025}{5{,}2}=0{,}0031\ \text{мм};$$

$$s_{l_2}=\frac{\sqrt{42-1}\cdot 0{,}0025}{7{,}52}=0{,}0021\ \text{мм}.$$

§ 41. ПРОВЕРКА НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

В предыдущих разделах было показано, что сходимость результатов наблюдений можно оценить наиболее полно, если их распределение является нормальным. Поэтому исключительно важную роль при обработке результатов наблюдений играет *проверка нормальности распределения.*

Эта задача представляет собой частный случай более общей проблемы, заключающейся в подборе теоретической функции распределения, в некотором смысле наилучшим образом согласующейся с опытными данными.

При большом числе результатов наблюдений ($n>40$) данная задача решается в следующем порядке.

Весь диапазон полученных результатов наблюдений $X_{max}-X_{min}$ разделяют на r интервалов шириной ΔX_i ($i=1, 2, \ldots, r$) и подсчитывают *частоты* m_i, равные числу результатов, лежащих в каждом i-м интервале, т. е. меньших или равных его правой и больших левой границы.

Отношения

$$P_i^*=\frac{m_i}{n}, \tag{6.68}$$

где n — общее число наблюдений, называются *частостями* и представляют собой статистические оценки вероятностей попадания результата наблюдений в i-й интервал. Распределение частостей

по интервалам образует *статистическое распределение* результатов наблюдений.

Если теперь разделить частость на длину интервала, то получим величины

$$p_i^* = \frac{1}{\Delta X_i} P_i^* = \frac{m_i}{n\Delta X_i}, \qquad (6.69)$$

являющиеся оценками средней плотности распределения в интервале ΔX_i.

Отложим вдоль оси результатов наблюдений (рис. 26) интервалы ΔX_i в порядке возрастания индекса i и на каждом интервале построим прямоугольник с высотой, равной p_i^*. Полученный график называется *гистограммой статистического распределения*. Площадь всех прямоугольников равна единице:

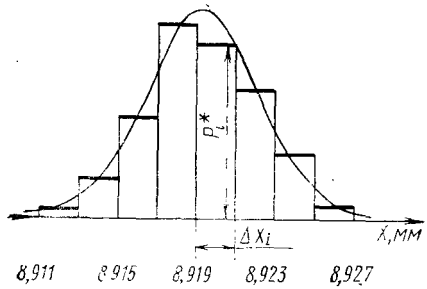


Рис. 26

$$\sum_{i=1}^{r} p_i^* \Delta X_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} m_i = 1.$$

При увеличении числа наблюдений число интервалов можно увеличить. Сами интервалы уменьшаются, и гистограмма все больше приближается к плавной кривой, ограничивающей единичную площадь, — к графику плотности распределения результатов наблюдений.

При построении гистограмм рекомендуется пользоваться следующими правилами:

1. Число r интервалов выбирается в зависимости от числа наблюдений согласно следующим рекомендациям ВНИИМ:

n	r
40—100	7—9
100—500	8—12
500—1000	10—16
1000—10 000	12—22

2. Длины интервалов удобнее выбирать одинаковыми. Однако если распределение крайне неравномерно, то в области максимальной концентрации результатов наблюдений следует выбирать более узкие интервалы.

3. Масштабы по осям гистограммы должны быть такими, чтобы отношение ее высоты к основанию составляло примерно 5 : 8.

Пример. Было выполнено 100 измерений среднего диаметра резьбового калибра. Результаты наблюдений лежат в диапазоне 8,911—8,927 мм, т. е. зона распределения результатов составляет 0,016 мм. Весь диапазон удобно разделить

на восемь равных интервалов через 0,002 мм. В табл. 5 приведены частоты m_i, частости P_i^* и плотности p^* статистического распределения.

Построенная по данным этой таблицы гистограмма изображена на рис. 26.

Таблица 5

i	X_i, мм	X_{i+1}, мм	m_i	P^*_i	p^*_i, мм$^{-1}$
1	8,911	8,913	1	0,01	5
2	8,913	8,915	5	0,05	25
3	8,915	8,917	14	0,14	70
4	8,917	8,919	27	0,27	135
5	8,919	8,921	24	0,24	120
6	8,921	8,923	18	0,18	90
7	8,923	8,925	9	0,09	45
8	8,925	8,927	2	0,02	10

После построения гистограммы надо подобрать теоретическую плавную кривую распределения, которая, выражая все существенные черты статистического распределения, сглаживала бы все случайности, связанные с недостаточным объемом экспериментальных данных. Принципиальный вид теоретической кривой выбирают заранее, проанализировав метод измерения или хотя бы по внешнему виду гистограммы. Тогда определение аналитического вида кривой распределения сводится к выбору таких значений его параметров, при которых достигается наибольшее соответствие между теоретическим и статистическим распределением.

Одним из методов решения этой задачи является метод моментов. При его использовании параметрам теоретического распределения придают такие значения, при которых несколько важнейших моментов совпадают с их статистическими оценками. Так, если статистическое распределение, определяемое гистограммой, приведенной на рис. 26, мы хотим описать кривой нормального распределения, то естественно потребовать, чтобы математическое ожидание и дисперсия последнего совпадали со средним арифметическим и оценкой дисперсий, вычисленным по опытным данным. В предыдущем примере $\bar{X}=8{,}91936$ мм, $s_X=0{,}0028$ мм и уравнение кривой нормального распределения, лучше всего согласующегося со статистическим распределением, должно иметь вид

$$p_X(x)=\frac{1}{0{,}0028\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-8{,}91936}{0{,}0028}\right)^2}.$$

Далее законно возникает вопрос, объясняются ли расхождения между гистограммой и подобранным теоретическим распределением только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они вызваны тем, что результаты наблюдений в действительности распределены иначе.

Для ответа на этот вопрос используют методы проверки статистических гипотез. Идея их применения заключается в следую-

щем. На основании гистограммы, полученной при обработке опытных данных, строится гипотеза, состоящая в том, что результаты наблюдений подчиняются распределению $F_X(x)$ с плотностью $p_X(x)$.

Для того, чтобы принять или опровергнуть эту гипотезу, выбирается некоторая величина U, представляющая собой меру расхождения теоретического и статистического распределений. В качестве меры расхождения можно принять сумму квадратов разностей частостей и теоретических вероятностей попадания результатов наблюдений в каждый интервал, взятых с некоторыми коэффициентами: $U=\sum_{i=1}^{r} c_i(P_i^* - P_i)^2$, где c_i — коэффициенты, называемые весами разрядов; P_i — теоретические вероятности, определяемые как $P_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_X(x)dx$, здесь $p_X(x)$ — предполагаемая плотность распределения.

Мера расхождения U является случайной величиной и, как показал К. Пирсон, независимо от исходного распределения подчиняется χ^2-распределению [см. формулу (6.62)] с k степенями свободы, если все частоты $m_i \geqslant 5$, число измерений стремится к бесконечности, а веса c_i выбираются равными n/P_i. Число степеней свободы распределения $k=r-s$, где r — число разрядов гистограммы статистического распределения, а s — число независимых связей, наложенных на частости P_i^*.

Если проверяется гипотеза о нормальности распределения, то к числу этих связей относится равенство среднего арифметического и точечной оценки дисперсии соответственно математическому ожиданию и дисперсии предполагаемого нормального распределения. Кроме того, всегда требуется, чтобы сумма частостей по всем интервалам была равна единице. Поэтому в данном случае $s=3$.

Мера расхождения U, выбранная по К. Пирсону, обозначается через χ^2_k. Для удобства вычислений ее можно записать в виде

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{P_i}(P_i^* - P_i)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i} = \sum_{i=1}^{r} \chi_i^2, \qquad (6.70)$$

где

$$\chi_i^2 = (m_i - nP_i)^2/nP_i.$$

По табл. 10 приложения можно при заданной доверительной вероятности $\alpha=1-q$ найти тот доверительный интервал $\left(\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q};\ \chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q}\right)$ значений χ_k^2, в который мера расхождения может попасть по чисто случайным причинам.

Если вычисленная по опытным данным мера расхождения χ_k^2 окажется в указанном интервале, то гипотеза принимается. Это, конечно, не значит, что гипотеза верна. Можно лишь утверждать, что она правдоподобна, т. е. не противоречит опытным данным. Если же χ_k^2 выходит за границы доверительного интер-

ала, то гипотеза отвергается как противоречащая опытным данным.

Поскольку проверка гипотезы основывается на опытных данных, то при принятии решения всегда возможны ошибки. Отвергая в действительности верную гипотезу, мы совершаем *ошибку первого рода*. Вероятность ошибки первого рода называется *уровнем значимости* и составляет $q=1-\alpha$. Принимая в действительности неверную гипотезу, мы совершаем ошибку *второго рода*. Вычислить ее вероятность, вообще говоря, невозможно, поскольку для этого нужно рассмотреть все прочие возможные гипотезы, являющиеся альтернативой обсуждаемой гипотезы. Можно лишь утверждать, что при уменьшении ошибки первого рода ошибка второго рода увеличивается, поэтому не имеет смысла брать слишком высокие значения доверительных вероятностей.

Описанная процедура проверки гипотезы о том, что данное статистическое распределение является распределением с плотностью $p_X(x)$, называется *критерием согласия* χ^2.

Проверка нормальности распределения согласно критерию χ^2 сводится к следующему.

1. Данные наблюдений группируют по интервалам, как при построении гистограммы, и подсчитывают частоты m_i. Если в некоторые интервалы попадает меньше пяти наблюдений, то такие интервалы объединяют с соседними. При этом число степеней свободы k, конечно, уменьшается.

2. Вычисляют среднее арифметическое $\bar{X}$ и точечную оценку среднего квадратического отклонения результата наблюдений s_X, которые принимают в качестве параметров теоретического нормального распределения с плотностью $p_X(x)$.

3. Для каждого интервала находят вероятности попадания в них результатов наблюдений либо по общей формуле (6.38), либо приближенно как произведение плотности теоретического распределения в середине интервала на его длину:

$$P_i \approx p_X\left(\frac{X_i+X_{i+1}}{2}\right)\Delta X_i.$$

4. Для каждого интервала вычисляют величины $\chi_i^2 (i=1, 2, \ldots, r)$ и суммируют их по всем i, в результате чего получают меру расхождения χ_k^2.

5. Определяют число степеней свободы $k=r-3$ и, задаваясь уровнем значимости $q=1-\alpha$, находят по табл. 10 приложения значения $\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q}$ и $\chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q}$. Если $\chi^2_{k;\,\frac{1}{2}q} < \chi^2_k \leqslant \chi^2_{k;\,1-\frac{1}{2}q}$, то распределение результатов наблюдений считают нормальным.

Критерий согласия χ^2, построенный на предельном переходе при $n\to\infty$, рекомендуется применять, если общее число наблюдений больше сорока.

Пример. Проверить нормальность распределения табл. 5, для данных которого $\bar{X}=9{,}91936$ мм и $s_X=0{,}0028$ мм. Вычисления удобно свести в таблицу (табл. 6).

Таблица 6

Номер интервала i	Середина интервала X_i	Частота m_i	Отклонение от среднего $X_i-\overline{X}$	Нормированное отклонение от среднего арифметического $t_i=\frac{X_i-\overline{X}}{s_X}$	Плотность нормированного распределения $p(t_i)$	Плотность в серединах интервалов $p(X_i)=\frac{p(t_i)}{s_X}$	Теоретическая частота $nP_i=n\Delta X_i p(X_i)$	Отклонение χ^2_i
1	8,912	1 } 6	−0,00736	−2,53	0,0163	5,8	1,16 } 5,68	0,0180
2	8,914	5	−0,00536	−1,92	0,0632	22,6	4,52	
3	8,916	14	−0,00336	−1,20	0,1942	69,5	13,9	0,0007
4	8,918	27	−0,00136	−0,485	0,3546	126,7	25,34	0,1086
5	8,920	24	+0,00064	+0,229	0,3885	138,8	27,76	0,5092
6	8,922	18	+0,00264	+0,943	0,2558	91,3	18,26	0,0037
7	8,924	9 } 11	+0,00464	+1,66	0,1006	36	7,2 } 8,92	0,4850
8	8,926	2	+0,00664	+2,37	0,0241	8,6	1,72	

$\chi^2_3=1,1252$

Интервал составляет $\Delta X_i=0,002$ мм, плотности нормированного нормального распределения $p(t_i)$ взяты из табл. 5 приложения. Число степеней свободы $k=8-2-3=3$, поскольку четыре интервала были объединены в два. Задаваясь уровнем значимости $q=0,10$, находим в табл. 10 приложения $\chi^2_{3;\,0,05}=0,352$; $\chi^2_{3;\,0,95}=7,815$. Следовательно, распределение опытных данных можно считать нормальным.

При малом числе наблюдений $11<n<50$ нормальность распределения результатов наблюдений проверяется с помощью двух критериев.

Первый критерий основан на вычислении статистики

$$d=\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|\Big/\sqrt{n\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}, \qquad (6.71)$$

квантили распределения которой приведены в табл. 13 приложения. Гипотеза о нормальности распределения на основании первого критерия принимается, если при данном числе наблюдений и выбранном уровне значимости q_1 соблюдается условие $d_{1-q_1/2}<d\leqslant d_{q_1/2}$, где $d_{1-q_1/2}$ и $d_{q_1/2}$ — квантили, выбираемые из табл. 13 приложения.

На основании второго критерия гипотеза о нормальности распределения принимается, если не более m разностей $|X_i-\overline{X}|$ превосходят уровень $z_{\frac{1+\alpha}{2}}\cdot s_X$, где s_X — оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдения; $z_{\frac{1+\alpha}{2}}$ — квантиль интегральной функции нормированного нормального распределения, определяемая по данным табл. 6 приложения при значении

$$\Phi(z_{\frac{1+\alpha}{2}})=\frac{1+\alpha}{2}.$$

Величина α находится при заданном уровне значимости q_2 второго критерия по данным табл. 14 приложения.

Распределение результатов наблюдения считается отличным от нормального, если не выполняется хотя бы один из этих двух критериев. Уровень значимости составного критерия $q \leqslant q_1 + q_2$.

Пример. Проверить гипотезу о нормальности распределения случайных погрешностей по результатам девятнадцати независимых наблюдений длины детали. Результаты наблюдений и необходимые промежуточные расчеты приведены в табл. 7.

Таблица 7

X_i, мм	$\lvert X_i - \overline{X}\rvert$	$(X_i - \overline{X})^2$
18,305	0,0026	0,00000676
08	04	0016
11	34	1156
09	14	0196
04	36	1296
06	16	0256
10	24	0576
03	46	2116
08	04	0016
06	16	0256
12	44	1936
05	26	0676
07	06	0036
08	04	0016
09	14	0196
08	04	0016
07	06	0036
09	14	0196
10	24	0576
$\Sigma X_i = 347{,}845$ мм $\overline{X} = 18{,}3076$ мм	$\Sigma \lvert X_i - \overline{X}\rvert = 0{,}0362$ мм	$\Sigma = 0{,}00010234$ мм²

Вычисляем статистику (6.71) $d = 0{,}0362/\sqrt{19 \cdot 0{,}00010234} = 0{,}823$.

Задаемся уровнем значимости $q_1 = 0{,}02$. Квантилей, соответствующих числу измерений $n = 19$, в табл. 13 приложения нет, поэтому приходится прибегать к интерполяции, взяв из таблицы значения квантилей для тех чисел наблюдений, между которыми находится $n = 19$:

$$n = 16;\ d_{0,01} = 0{,}9137;\ d_{0,99} = 0{,}6829;$$

$$n = 21;\ d_{0,01} = 0{,}9001;\ d_{0,99} = 0{,}6950.$$

Линейная интерполяция дает следующие значения квантилей

$$d_{0,01} = 0{,}9137 - \frac{0{,}9137 - 0{,}9001}{21 - 16} \cdot (19 - 16) = 0{,}9065;$$

$$d_{0,99} = 0{,}6829 + \frac{0{,}6950 - 0{,}6829}{21 - 16} \cdot (19 - 16) = 0{,}6902$$

Условие $d_{0,99} < d \leqslant d_{0,01}$; $0{,}6902 < 0{,}823 \leqslant 0{,}9065$ выполняется, поэтому в со-

ответствии с первым критерием гипотеза о нормальности распределения принимается.

Для проверки по второму критерию в табл. 14 приложения при $n=19$ и $q_2=0{,}02$, находим $\alpha=0{,}99$; $m=1$. В табл. 7 приложения находим значение $z_{\frac{1+\alpha}{2}}=z_{0{,}995}=2{,}575$ и вычисляем среднее квадратическое отклонение результатов наблюдения

$$s_X=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{0{,}00010234}{19-1}}=0{,}0028 \text{ мм.}$$

Поскольку $m=1$, то значение $z_{0{,}995}\cdot s_X=2{,}575\cdot 0{,}00238=0{,}0061$ мм может превзойти только одно из отклонений результатов наблюдений от среднего арифметического. Результаты, приведенные в табл. 6, показывают, что все отклонения $|X_i-\overline{X}|$ меньше 0,0061 мм. Таким образом, и второй критерий говорит о том, что экспериментальные данные при уровне значимости $q\leqslant q_1+q_2=0{,}04$ не противоречат гипотезе о нормальности распределения результатов наблюдений.

При малом числе наблюдений для оценки нормальности можно воспользоваться понятием *статистической функции распределения результатов наблюдений.* Для ее построения полученные в процессе эксперимента результаты группируют в так называемый *вариационный ряд* $X_{(1)}^*$; $X_{(2)}^*$; ...; $X_{(n)}^*$, члены которого располагаются в порядке их возрастания, так что всегда $X_{(1)}^*\leqslant X_{(2)}^*\leqslant\leqslant\ldots\leqslant X_{(n)}^*$. Статистическую функцию распределения $F_n(x_k)$ определяют по формуле

$$F_n(x_k)=\frac{k}{n+1};\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

$F_n(x)$ представляет собой ступенчатую линию, скачки которой соответствуют значениям членов вариационного ряда. Каждый скачок равен $\frac{1}{n+1}$, если все n членов ряда различны. Если же для некоторого k $X_{(k)}=X_{(k+1)},=\ldots=X_{(k+i)}$, то $F_n(x)$ в точке $x=X_{(k)}$ возрастает на $\frac{i}{n+1}$, где i — число равных между собой членов ряда.

Если число наблюдений безгранично увеличивать, то статистическая функция распределения сходится по вероятности к истинной функции $F_X(x)$.

Для проверки нормальности распределения результатов наблюдений по табл. 7 приложения находят значения z_k, соответствующие полученным значениям $F_n(x_k)$ статистической функции распределения: $\Phi(z_k)=F_n(x_k)$. Но переменная z [см. выражение (6.34) и далее] определяется через результаты наблюдений как

$$z_k=\frac{X_k-m_X}{\sigma_X},$$

и если в координатах z; x нанести точки z_k; x_k, то при нормальном распределении они должны расположиться вдоль одной прямой линии. Если же в результате такого построения получится неко-

торая кривая линия, то гипотезу о нормальности распределения придется отвергнуть как противоречащую опытным данным.

Вопрос о том, насколько зависимость $z(x)$ может отклоняться от линейной только из-за случайных причин, решается методами непараметрического статистического оценивания *.

Пример. Даны результаты девятнадцати измерений длины l_i детали в мм. Проверить нормальность распределения результатов наблюдений:

18,305	18,306	18,312	18,308
18,308	18,310	18,305	18,307
18,311	18,303	18,307	18,309
18,309	18,308	18,308	18,310
18,304	18,306	18,309	

Вычисления по изложенной методике сведены в табл. 8.

Таблица 8

X_k, мм	$F_n(x_k)=\Phi(z_k)$	z_k
18,303	0,05	−1,6449
18,304	0,10	−1,2816
18,305	0,20	−0,8416
18,306	0,30	−0,5244
18,307	0,40	−0,2533
18,308	0,60	0,2533
18,309	0,75	0,6745
18,310	0,85	1,0364
18,311	0,90	1,2816
18,312	0,95	1,6449

На рис. 27 представлена зависимость $z_k(X_k)$. Отдельные точки располагаются очень близко к прямой, поэтому распределение результатов наблюдений можно считать нормальным.

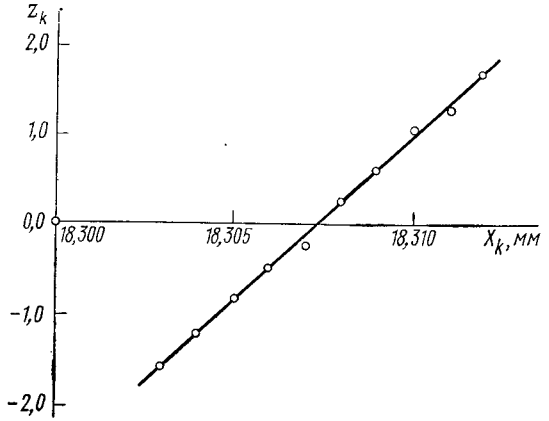


Рис. 27

* Интересующиеся могут обратиться к монографии С. Уилкса «Математическая статистика». М.: Наука, 1967.

§ 42. ОБНАРУЖЕНИЕ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

В начале главы уже было отмечено, что *грубыми называют погрешности, явно превышающие по своему значению погрешности, оправданные условиями проведения эксперимента.* Для их устранения желательно еще перед измерениями определить значение искомой величины приближенно, с тем чтобы в дальнейшем можно было сконцентрировать внимание лишь на уточнении предварительных данных. Если оператор в процессе измерений обнаруживает, что результат одного из наблюдений резко отличается от других, и находит причины этого, то он, конечно, вправе отбросить этот результат и провести повторные измерения. Но необдуманное отбрасывание резко отличающихся от других результатов может привести к существенному искажению характеристик рассеивания ряда измерений, поэтому повторные измерения лучше проводить не взамен сомнительных, а в дополнение к ним.

Особенно остро ставится вопрос об устранении грубых погрешностей при обработке уже имеющегося материала, когда невозможно учесть все обстоятельства, при которых проводили измерения. В этом случае приходится прибегать к чисто статистическим методам.

Вопрос о том, содержит ли данный результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез.

Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения X_i не содержит грубой погрешности, т. е. является одним из значений случайной величины X с законом распределения $F_X(x)$, статистические оценки параметров которого предварительно определены. Сомнительным может быть в первую очередь лишь наибольший $X_{\max}$ или наименьший $X_{\min}$ из результатов наблюдений. Поэтому для проверки гипотезы следует воспользоваться распределениями величин

$$\nu = \frac{X_{\max} - \overline{X}}{s_X} \text{ или } \nu = \frac{\overline{X} - X_{\min}}{s_X}.$$

Функции их распределения определяют методами теории вероятностей. Они совпадают между собой и для нормального распределения результатов наблюдений протабулированы и представлены в табл. 11 приложения. По данным этой таблицы, при заданной доверительной вероятности α или уровне значимости $q = 1 - \alpha$ можно для чисел измерения $n = 3$—25 найти те наибольшие значения ν_α, которые случайная величина ν может еще принять по чисто случайным причинам.

Если вычисленное по опытным данным значение ν окажется меньше ν_α, то гипотеза принимается; в противном случае ее следует отвергнуть как противоречащую данным наблюдений. Тогда результат $X_{\max}$ или соответственно $X_{\min}$ приходится рассматривать как содержащий грубую погрешность и не принимать его во внимание при дальнейшей обработке результатов наблюдений. При этом мы можем, конечно, совершить ошибку первого или второго рода.

Пример. При измерении температуры были получены результаты, представленные во второй графе табл. 9. Требуется определить, не содержит ли результат восьмого наблюдения $t_8 = 20{,}30°$ С грубой погрешности.

Таблица 9

i	t_i, °С	v_i	$v^2_i \cdot 10^4$	v'_i	$(v'_i)^2 \cdot 10^4$
1	20,42	+0,016	2,56	+0,009	0,81
2	20,43	+0,026	2,75	+0,019	3,61
3	20,40	−0,004	0,16	−0,011	1,21
4	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
5	20,42	+0,016	2,56	+0,009	0,81
6	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
7	20,39	−0,014	1,96	−0,021	4,41
8	20,30	−0,104	108,16	—	—
9	20,40	−0,004	0,16	−0,011	1,21
10	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
11	20,42	+0,016	2,56	+0,009	0,81
12	20,41	+0,006	0,36	−0,001	0,01
13	20,39	−0,014	1,96	−0,021	4,41
14	20,39	−0,014	1,96	−0,021	4,41
15	20,40	−0,004	0,16	−0,011	1,21
$\bar{t} = 20{,}404°$ С $\bar{t}' = 20{,}411°$ С			$s_t = 0{,}033°$		$s'_t = 0{,}016°$

Вначале обычными способами находим среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений: $\bar{t} = 20{,}404°$ С; $s_t = 0{,}033°$ С.

Если принять доверительную вероятность $\alpha = 0{,}95$, то, как следует из табл. 11 приложения при $n = 15$, $\nu_{0,95} = 2{,}493$ и, поскольку

$$\nu = \frac{\bar{t} - t_{\min}}{s_t} = \frac{\bar{t} - t_8}{s_t} = \frac{20{,}404 - 20{,}30}{0{,}033} = 3{,}16; \quad \nu > \nu_{0,95},$$

результат $t_8 = 20{,}30°$ С содержит грубую погрешность.

Если отбросить этот результат и повторить вычисления, то среднее арифметическое окажется равным $\bar{t}' = 20{,}411°$ С, а среднее квадратическое отклонение уменьшится до $s'_t = 0{,}016°$ С. Расчет приведен в последних двух графах таблицы.

Глава VII

СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

§ 43. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Систематической погрешностью называется составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величи-

ны. При этом предполагается, что систематические погрешности представляют собой определенную функцию неслучайных факторов, состав которых зависит от физических, конструктивных и технологических особенностей средств измерений, условий их применения, а также индивидуальных качеств наблюдателя. Сложные детерминированные закономерности, которым подчиняются систематические погрешности, определяются либо при создании средств измерений и комплектации измерительной аппаратуры, либо непосредственно при подготовке измерительного эксперимента и в процессе его проведения. Совершенствование методов измерения, использование высококачественных материалов, прогрессивная технология, — все это позволяет на практике устранить систематические погрешности настолько, что при обработке результатов наблюдений с их наличием зачастую не приходится считаться.

В предыдущих параграфах, посвященных случайным погрешностям, было показано, что единственно правильным методом их анализа является математическая статистика. Случайные погрешности измерения изучались только в совокупности, без рассмотрения их фактических значений в каждом опыте. Систематические погрешности приходится изучать в каждом случае отдельно.

Однако в последнее время появились попытки использовать для анализа систематических погрешностей статистические методы, основанные на способах разделения сигналов, применяющихся в теории и технике связи.

Систематические погрешности принято классифицировать в зависимости от причин их возникновения и по характеру их проявления при измерениях.

В зависимости от причин возникновения рассматриваются четыре вида систематических погрешностей:

1. *Погрешности метода или теоретические погрешности,* проистекающие от ошибочности или недостаточной разработки принятой теории метода измерений в целом или от допущенных упрощений при проведении измерений.

Погрешности метода возникают также при экстраполяции свойства, измеренного на ограниченной части некоторого объекта, на весь объект, если последний не обладает однородностью измеряемого свойства. Так, считая диаметр цилиндрического вала равным результату, полученному при измерении в одном сечении и в одном направлении, мы допускаем систематическую погрешность, полностью определяемую отклонениями формы исследуемого вала. При определении плотности вещества по измерениям массы и объема некоторой пробы возникает систематическая погрешность, если проба содержала некоторое количество примесей, а результат измерения принимается за характеристику данного вещества вообще.

К погрешностям метода следует отнести также те погрешности, которые возникают вследствие влияния измерительной аппаратуры на измеряемые свойства объекта. Получаемые при этом

результаты становятся грубо приближенными или даже недействительными, как только аппаратура прекращает взаимодействовать с объектом. Подобные явления возникают, например, при измерении длин, когда измерительное усилие используемых приборов достаточно велико, при регистрации быстропротекающих процессов при недостаточном быстродействии аппаратуры, при измерениях температур жидкостными или газовыми термометрами и так далее.

В некоторых измерениях, связанных с исследованием малых или, наоборот, очень больших объектов, например в физике элементарных частиц и в астрономии, погрешности метода могут иногда настолько исказить сущность исследуемых явлений, что сколько-нибудь объективная интерпретация результатов измерения становится настоящим искусством, доступным лишь ограниченному числу экспериментаторов. В этом отношении интересно определение измерения, встречающееся в квантовой механике, согласно которому под измерением понимается процесс нахождения коррелятивной связи между измеряемым свойством объекта и состоянием взаимодействующей с ним измерительной аппаратуры.

2. *Инструментальные погрешности,* зависящие от погрешностей применяемых средств измерений. Среди инструментальных погрешностей в отдельную группу выделяются *погрешности схемы,* не связанные с неточностью изготовления средств измерения и обязанные своим происхождением самой структурной схеме средств измерений (и, в частности, его кинематической схеме) и свойствам образующих его элементов, *и технологические погрешности,* появляющиеся вследствие несовершенства изготовления элементов. Исследование инструментальных погрешностей является предметом специальной дисциплины — теории точности измерительных устройств.

3. *Погрешности, обусловленные неправильной установкой и взаимным расположением средств измерения, являющихся частью единого комплекса, несогласованностью их характеристик, влиянием внешних температурных, гравитационных, радиационных и других полей, нестабильностью источников питания, а также неправильными манипуляциями операторов.* Сюда относятся погрешности, вызываемые установкой некоторых измерительных приборов без помощи отвеса или уровня, несогласованностью входных и выходных параметров электрических цепей приборов, параллаксом при отсчете по шкале и так далее.

4. *Личные погрешности,* обусловленные индивидуальными особенностями наблюдателя. Такого рода погрешности вызываются, например, запаздыванием или опережением при регистрации сигнала, неправильным отсчетом десятых долей деления шкалы, асимметрией, возникающей при установке штриха посередине между двумя рисками.

По характеру своего поведения в процессе измерения систематические погрешности подразделяются на постоянные и переменные.

Постоянные систематические погрешности возникают, например, при неправильной установке начала отсчета, неправильной градуировке и юстировке средств измерения и остаются постоянными при всех повторных наблюдениях. Поэтому, если уж они возникли, их очень трудно обнаружить в результатах наблюдений.

Среди *переменных* систематических погрешностей принято выделять *прогрессивные,* монотонно возрастающие или убывающие в процессе своего изменения (в функции времени, значения измеряемой величины или параметров внешних условий), и *периодические.*

Прогрессивная погрешность возникает, например, при взвешивании, когда одно из коромысел весов находится ближе к источнику тепла, чем другое, поэтому быстрее нагревается и удлиняется. Это приводит к систематическому сдвигу начала отсчета и к монотонному изменению показаний весов.

Периодическая погрешность присуща измерительным приборам с круговой шкалой, если ось вращения указателя не совпадает с осью шкалы.

Все остальные виды систематических погрешностей принято называть погрешностями, изменяющимися по сложному закону.

В тех случаях, когда при создании средств измерений, необходимых для данной измерительной установки, не удается устранить влияние систематических погрешностей, приходится специально организовывать измерительный процесс и осуществлять математическую обработку результатов. Методы борьбы с систематическими погрешностями заключаются в их обнаружении и последующем исключении путем полной или частичной компенсации. Основные трудности, часто непреодолимые, состоят именно в обнаружении систематических погрешностей, поэтому иногда приходится довольствоваться приближенным их анализом.

§ 44. СПОСОБЫ ОБНАРУЖЕНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Результаты наблюдений, полученные при наличии систематических погрешностей, будем называть неисправленными и в отличие от исправленных снабжать штрихами их обозначения (например, X_1'; X_2' и т. д.). Вычисленные в этих условиях средние арифметические значения и отклонения от них результатов наблюдений будем также называть неисправленными и ставить штрихи у символов этих величин. Таким образом,

$$\overline{X}' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i'; \quad v_i' = X_i' - \overline{X}'. \tag{7.1}$$

Поскольку неисправленные результаты наблюдений включают в себя систематические погрешности, сумму которых для каждого i-го наблюдения будем обозначать через Θ_i, то их математическое ожидание не совпадает с истинным значением измеряемой величины и отличается от него на некоторую величину Θ, называемую

систематической погрешностью неисправленного среднего арифметического. Действительно,

$$M[\overline{X}'] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i'] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i + \Theta_i] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[\Theta_i] = Q + \Theta; \qquad (7.2)$$

$$\Theta = M[\overline{X}'] - Q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Theta_i. \qquad (7.3)$$

Случайные отклонения результатов наблюдений от средних арифметических отличаются от неисправленных отклонений:

$$v_i' - v_i = (X_i' - \overline{X}_i') - (X_i - \overline{X}) = (X_i' - X_i) - (\overline{X}' - \overline{X}) =$$

$$= \Theta_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Theta_i = \Theta_i - \Theta. \qquad (7.4)$$

Если систематические погрешности постоянны, т. е. $\Theta_i = \Theta$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $v_i = v_i'$, и неисправленные отклонения могут быть непосредственно использованы для оценки рассеивания ряда наблюдений. В противном случае необходимо предварительно исправить отдельные результаты измерений, введя в них так называемые *поправки*, равные систематическим погрешностям по величине и обратные им по знаку:

$$q_i = -\Theta_i. \qquad (7.5)$$

Таким образом, для нахождения исправленного среднего арифметического и оценки его рассеивания относительно истинного значения измеряемой величины необходимо обнаружить систематические погрешности и исключить их путем введения поправок или соответствующей каждому конкретному случаю организации самого измерения. Остановимся подробнее на некоторых способах обнаружения систематических погрешностей.

Постоянные систематические погрешности не влияют на значения случайных отклонений результатов наблюдений от средних арифметических, поэтому никакая математическая обработка результатов наблюдений не может привести к их обнаружению. Анализ таких погрешностей возможен только на основании некоторых априорных знаний об этих погрешностях, получаемых, например, при поверке средств измерений. Измеряемая величина при поверке обычно воспроизводится образцовой мерой, действительное значение которой известно. Поэтому разность между средним арифметическим результатов наблюдения и значением меры с точностью, определяемой погрешностью аттестации меры и случайными погрешностями измерения, равна искомой систематической погрешности.

Ценность полученных при поверке результатов определяется

их постоянством в течение некоторого промежутка времени и независимостью от тех изменений внешних условий, которые допустимы при эксплуатации средств измерений с заданной точностью. Тогда полученные при поверке данные могут быть использованы для вычисления поправок, необходимых для исправления результатов наблюдений.

Одним из наиболее действенных способов обнаружения систематических погрешностей в ряде результатов наблюдений является построение графика последовательности неисправленных значений случайных отклонений результатов наблюдений от средних арифметических.

Вначале рассмотрим случай, когда в ряде результатов наблюдений предполагается наличие постоянной систематической погрешности. Для того чтобы удостовериться в этом, исследователь, сделав несколько измерений, заменяет некоторые меры или измерительные приборы, включенные в установку и являющиеся предполагаемыми источниками постоянных систематических погрешностей, другими мерами и измерительными приборами, и проводит еще несколько измерений.

В качестве примера приведем результаты наблюдений и неисправленные отклонения результатов наблюдений, полученные при сравнении индуктивности катушки с индуктивностью одной образцовой катушки при первых четырех наблюдениях и с индуктивностью другой образцовой катушкой при шести последних наблюдениях:

X_i, мГ	v_i', мГ	X_i, мГ	v_i', мГ
50,82	0,00	50,78	−0,04
50,83	+0,01	50,75	−0,05
50,87	+0,05	50,85	+0,01
50,89	+0,07	50,82	0,00
50,78	−0,04	50,81	−0,01

На рис. 28 построен график последовательности неисправленных отклонений результатов наблюдений.

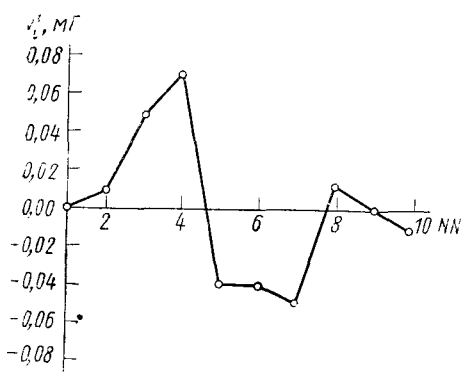


Рис. 28

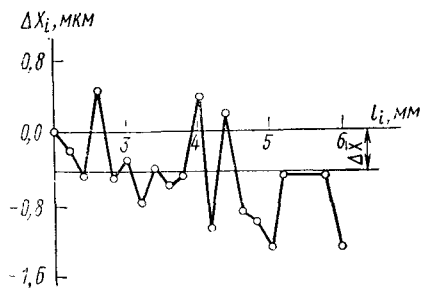


Рис. 29

При замене образцовой катушки отклонения результатов резко меняются. Скачок составляет 0,11 мГ, что намного больше максимального из остальных скачков (0,06 мГ при переходе от 7 к 8-му измерению). Следовательно, какая-то из образцовых катушек индуктивности вносила погрешность в результаты наблюдений, но не ясно, какая.

График лишь обращает внимание наблюдателя на необходимость правильной аттестации образцовых катушек, но не дает никаких сведений о значениях систематических погрешностей.

Окончательно рассматриваемый способ обнаружения постоянных систематических погрешностей можно сформулировать следующим образом:

если неисправленные отклонения результатов наблюдений резко изменяются при изменении условий наблюдений, то данные результаты содержат постоянную систематическую погрешность, зависящую от условий наблюдений.

При прогрессивной систематической погрешности последовательность неисправленных отклонений результатов наблюдений обнаруживает тенденцию к возрастанию или убыванию. На рис. 29 изображена зависимость погрешности измерения от длины измеряемой детали. Несмотря на большие случайные изменения погрешности тенденция к увеличению ее в отрицательном направлении с ростом измеряемой величины явно обнаруживается. Если бы случайные погрешности были невелики, то значения неисправленных отклонений меняли бы свой знак при некотором среднем значении измеряемой величины. Случайные погрешности несколько искажают эту картину, однако, если они даже одного порядка малости с систематическими погрешностями, в последовательности знаков можно заметить некоторую неравномерность: неисправленные отклонения результатов одного знака чаще встречаются в одной половине ряда, чем в другой. В рассматриваемом случае последовательность знаков имеет вид

$$+\,+\,-\,+\,-\,+\,-\,+\,-\,|\,-\,+\,-\,+\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$

В первой половине последовательности знак плюс встречается пять раз, а во второй только два раза, в то время как знак минус встречается чаще во второй половине ряда.

Если же в ряде результатов наблюдений присутствует периодическая систематическая погрешность, то группы знаков плюс и минус в последовательности неисправленных отклонений результатов наблюдений могут периодически сменять друг друга, если, конечно, случайные погрешности не особенно велики.

Обобщая два рассмотренных случая, можно сказать: *если знаки неисправленных отклонений результатов наблюдений чередуются правильно, то данный ряд результатов наблюдений обнаруживает прогрессивную погрешность, если последовательность знаков плюс сменяется последовательностью знаков минус или наоборот, и периодическую погрешность, если группы знаков плюс и минус чередуются.*

По этому признаку можно обнаружить систематические погрешности, если случайные погрешности малы. Однако даже при достаточно больших случайных погрешностях анализ графиков неисправленных отклонений результатов наблюдений позволяет обнаружить весьма слабые тенденции к той или иной форме систематического изменения погрешности. Так, например, рассматривая рис. 29, легко заметить прогрессивную погрешность, составляющую приблизительно 0,8 мкм на длине 4 мм, хотя разброс случайных погрешностей значительно больше (1,5—1,6 мкм).

§ 45. ВВЕДЕНИЕ ПОПРАВОК. НЕИСКЛЮЧЕННАЯ СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Систематические погрешности являются детерминированными величинами, поэтому в принципе всегда могут быть вычислены и исключены из результатов измерений. После исключения систематических погрешностей получаем исправленные средние арифметические и исправленные отклонения результатов наблюдений, которые позволяют оценить степень рассеивания результатов.

Для исправления результатов наблюдений их складывают с поправками, равными систематическим погрешностям по величине и обратными им по знаку. Поправку определяют экспериментально при поверке приборов или в результате специальных исследований, обыкновенно с некоторой ограниченной точностью. Для исправления результата наблюдения его складывают только со средним арифметическим значением поправки:

$$X_i = X_i' + q, \tag{7.6}$$

где X_i; X'_i — соответственно исправленный и неисправленный результаты наблюдений; q — среднее арифметическое значение поправки.

Поправки, определяемые экспериментально, задаются в виде таблицы или графика. Так, на рис. 30 представлена зависимость поправки на депрессию ртути в однокапиллярном образцовом компрессионном манометре ВНИИМ от высоты подъема ртути. График был получен путем многократных наблюдений при давлении $p \leqslant 10^5$ Па путем сравнения положений мениска в капилляре и в широкой трубке, депрессия ртути в которой принималась равной нулю.

Поправка на депрессию меняется с высотой подъема ртути в

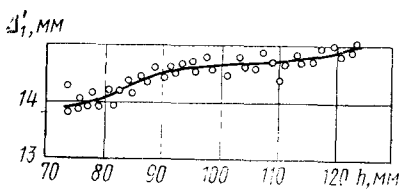


Рис. 30

пределах 13,94—14,90 мм. Среднее квадратическое отклонение результата определения поправки, вычисленное по отклонениям отдельных экспериментальных значений от плавной кривой, составляет при этом 0,16 мм.

Поправки могут задаваться также в виде формул, по которым они вычисляются для каждого конкретного случая. Например, при измерениях и поверках с помощью образцовых грузопоршневых манометров следует вводить поправки к их показаниям на местное значение ускорения свободного падения

$$q_1 = \Delta P_1 = P\left(\frac{g}{9,8066} - 1\right)$$

и на отклонение температуры окружающего воздуха от 20° С, если оно превышает ±5° С: $q_2 = \Delta P_2 = P(\alpha_1 + \alpha_2)(20 - t)$, где P — измеряемое давление, Па; g — ускорение свободного падения в месте измерения; α_1; α_2 — коэффициенты линейного температурного расширения материалов поршня и цилиндра, соответственно; t — температура окружающего воздуха, °С.

Введением поправки устраняется влияние только одной вполне определенной систематической погрешности, поэтому в результаты измерения зачастую приходится вводить очень большое число поправок. При этом вследствие ограниченной точности определения поправок накапливаются случайные погрешности и дисперсия результата измерения увеличивается.

Действительно, при исправлении неисправленного результата X'_i путем введения поправок $q_j \pm s_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ по формуле $X_i = X'_i + \sum_{j=1}^{m} q_j$, дисперсия s^2_X становится равной

$$s^2_X = s^2_{X'} + \sum_{j=1}^{m} s^2_j, \tag{7.7}$$

где s^2_X — оценка дисперсии неисправленных результатов; s^2_j — оценка дисперсии j-й поправки.

Следовательно, где-то должна быть разумная граница тех значений поправок, которые следует вводить в результаты наблюдений для получения более достоверных сведений об истинном значении измеряемой величины. Будем рассуждать следующим образом. Предположим, что, измерив постоянную величину Q (рис. 31), мы получим следующий результат: $Q = \bar{X}' \pm t_P s_{\bar{X}}$, где t_P определяется по заданной доверительной вероятности из таблиц нормального распределения или распределения Стьюдента.

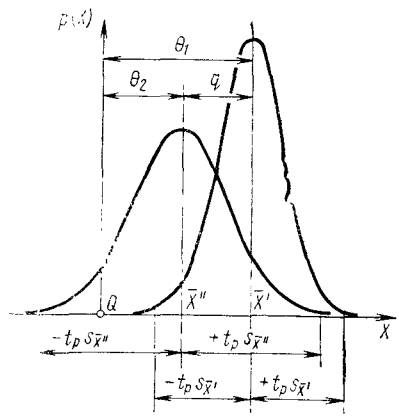


Рис. 31

После введения поправки $q \pm t_P s_q$, где s_q — среднее квадратическое отклонение определения поправки, результат измерения $Q = \bar{X}'' \pm t_P s_{\bar{X}''}$, где $\bar{X}'' = \bar{X}' + q$, $s^2_{\bar{X}''} = s^2_{\bar{X}'} + s^2_q$.
Систематическая погрешность Θ_1 уменьшалась до Θ_2 из-за введения поправки, причем $\Theta_2 = \Theta_1 - q$. Доверительная граница погрешности результата измерения для доверительной вероятности, соответствующей t_P, составляла до введения поправки $\Delta_1 = \Theta_1 + t_P s_{\bar{X}'}$, а после ее введения $\Delta_2 = \Theta_2 + t_P s_{\bar{X}''} = \Theta_1 - q + t_P \sqrt{s^2_{\bar{X}'} + s^2_q}$.
Поправку имеет смысл вводить до тех пор, пока она уменьшает доверительные границы погрешности, т. е. пока имеет место неравенство $\Delta_2 < \Delta_1$. Подставив сюда значения погрешностей Δ_1 и Δ_2, получим $\Theta_1 - q + t_P \sqrt{s^2_{\bar{X}'} + s^2_q} < \Theta_1 + t_P s_{\bar{X}'}$,
и, следовательно,

$$q > t_P s_{\bar{X}'} \left[\sqrt{1 + \frac{s^2_q}{s^2_{\bar{X}'}}} - 1 \right]. \tag{7.8}$$

Если отношение дисперсии поправки к дисперсии неисправленных результатов наблюдений значительно меньше единицы, то полученное выражение можно упростить, воспользовавшись разложением в степенной ряд

$$q > 0{,}5 s^2_q / s_{\bar{X}'}. \tag{7.9}$$

При исчезающе малой дисперсии поправки на основании формулы (7.9) может показаться, что введение любой поправки повышает достоверность результата. Однако следует помнить, что погрешность результата выражается не более чем двумя значащими цифрами, поэтому поправка, если она меньше пяти единиц разряда, следующего за последним десятичным знаком погрешности результата, будет все равно потеряна при округлении, и вводить ее не имеет смысла.

Систематическая погрешность, остающаяся после введения поправок на ее наиболее существенные составляющие, включает в себя ряд элементарных составляющих, называемых неисключенными остатками систематической погрешности. К их числу относятся: погрешности определения поправок; погрешности, зависящие от точности измерения влияющих величин, входящих в формулы для определения поправок; погрешности, связанные с колебаниями влияющих величин (температуры окружающей среды, напряжения источников питания и т. д.) в столь малых пределах, что поправки на них не вводятся.

Для каждого данного измерения элементарные составляющие систематической погрешности имеют вполне определенные значения, но эти значения нам неизвестны. Известно лишь, что в массе однотипных измерений эти составляющие лежат в определенных границах $\pm\Theta_{k\max}$ или имеют определенные средние квадратические отклонения $s_{\Theta k}$. В первом случае для неисключенных остат-

ков следует принять равномерное распределение, во втором — нормальное. Дисперсия суммы неисключенных остатков систематической погрешности определяется как сумма их дисперсий и поэтому с учетом (6.27) и (6.28)

$$D[\Theta] = s_{\Theta}^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m_1}\Theta_{k\max}^2 + \sum_{k=1}^{m_2} s_{\Theta_k}^2, \qquad (7.10)$$

где m_1 — число равномерно распределенных и m_2 — число нормально распределенных элементарных составляющих.

Глава VIII

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИСПРАВЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 46. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ РАВНОРАССЕЯННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Прямыми называются **измерения,** в результате которых искомое значение физической величины находят непосредственно из опытных данных. Прямые измерения осуществляются путем многократных наблюдений. Результаты наблюдений X_1; X_2; ...; X_n называются равнорассеянными (равноточными), если они являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Равнорассеянные результаты получают при измерениях, проводимых одним наблюдателем или группой наблюдателей с помощью одних и тех же методов и средств измерений в неизменных условиях внешней среды.

Обработка результатов наблюдений в соответствии с ГОСТ 8.207—76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений» производят в следующем порядке.

1. Путем введения поправок исключают известные систематические погрешности из результатов наблюдений.

2. Вычисляют среднее арифметическое $\bar{X}$ исправленных результатов наблюдений, принимая его за оценку истинного значения измеряемой величины.

3. Вычисляют оценку s_X среднего квадратического отклонения результатов наблюдения и оценку $s_{\bar{X}}$ среднего квадратического отклонения среднего арифметического.

4. Проверяют гипотезу о нормальности распределения результатов наблюдения. Если число результатов $n>50$, используют кри-

терий Пирсона χ^2; при $15<n<50$ — составной критерий. Уровень значимости выбирается из интервала 0,02—0,10. При $n<15$ нормальность распределения не проверяется.

5. Если результаты наблюдений распределены нормально, то определяют наличие грубых погрешностей и промахов и если последние обнаружены, соответствующие результаты отбраковывают и повторяют вычисления.

6. Вычисляют доверительные границы случайной погрешности при доверительной вероятности $P=0{,}95$, а также при $P=0{,}99$, если измерения в дальнейшем повторить нельзя.

7. Определяют границы неисключенной систематической погрешности результата измерений. В качестве составляющих неисключенной систематической погрешности рассматриваются погрешности метода, погрешности средств измерений (например, пределы допускаемой основной и дополнительных погрешностей, если их случайные составляющие пренебрежимо малы) и погрешности, вызванные другими источниками. При суммировании составляющих неисключенные систематические погрешности средств измерений рассматриваются как случайные величины. Если их распределение неизвестно, то принимается равномерное распределение, и тогда границы неисключенной систематической погрешности результата при числе составляющих $m>4$ определяют как

$$\Theta=\bar{k}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2}, \tag{8.1}$$

где Θ_i — границы отдельных составляющих общим числом m; k — коэффициент, равный 1,1 при доверительной вероятности $P=0{,}95$ и 1,4 при $P=0{,}99$.

8. Вычисляют доверительные границы погрешности результата. Если выполняется условие $\Theta/s_{\bar{X}}<0{,}8$, то систематической погрешностью можно пренебречь и определить доверительные границы погрешности результата как доверительные границы случайной погрешности $\Delta=\delta=t_P\cdot s_{\bar{X}}$ при $P=0{,}95$ (и $P=0{,}99$); если же выполняется условие $\Theta/s_{\bar{X}}>8$, то можно пренебречь случайной погрешностью и тогда $\Delta=\Theta$ при $P=0{,}95$ (и $P=0{,}99$).

Если эти условия не выполняются, то доверительные границы погрешности результата определяют по формуле $\Delta=K\cdot s_\Sigma$, где коэффициент K находят из выражения

$$K=\frac{\delta+\Theta}{s_{\bar{X}}+s_\Theta}, \tag{8.2}$$

а среднее квадратическое общей погрешности результата $s_\Sigma=\sqrt{s_{\bar{X}}^2+s_\Theta^2}$ находят квадратическим суммированием дисперсии случайной $s^2_{\bar{X}}$ и систематической s_Θ погрешности результата, определяемой формулой (7.10). Границы случайной δ и систематической Θ погрешности, входящие в формулу (8.2), необходимо

выбирать при одной и той же доверительной вероятности ($P=0{,}95$ или $P=0{,}99$).

9. Результат измерения записывают в виде $\bar{X} \pm (\Delta;\ P)$, а при отсутствии сведений о виде функции распределения составляющих погрешности и необходимости дальнейшей обработки результатов и анализа погрешностей в виде $\bar{X}$; $s_{\bar{X}}$; n; Θ.

Если полученный при измерениях результат в дальнейшем используется для анализа и сопоставления с другими результатами или является промежуточным для нахождения других величин, то необходимо указать раздельно границы систематической погрешности и среднее квадратическое отклонение случайной погрешности: $\bar{X}$; Θ; P; $s_{\bar{X}}$.

Возможны и другие, более подробные формы записи результатов измерений, регламентируемые ГОСТ 8.011—72 «ГСИ. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений».

Если число результатов наблюдений велико, то вычисление среднего арифметического и среднего квадратического отклонения становится очень трудоемкой операцией. Поэтому при $n>40$ прибегают к группированию данных, как при построении гистограммы, и обработка исправленных результатов производится в следующем порядке.

1. Находят максимальный и минимальный члены ряда и полученный диапазон результатов наблюдений разделяют на r одинаковых интервалов, равных

$$h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{r}.$$

Число интервалов выбирают в зависимости от числа наблюдений (см. § 41).

2. Подсчитывают частоту m_i для каждого интервала и находят середины интервалов $X_i (i=1,\ 2, \ldots,\ r)$. Середину интервала с наибольшей частотой принимают за начало отсчета X_0 («ложный нуль») и вычисляют для каждого интервала

$$\eta_i = \frac{X_i - X_0}{h}. \tag{8.3}$$

3. Вычисляют точечные оценки первых двух начальных моментов [см. выражение (6.17)] сгруппированного распределения величины η. Формулу для оценок получаем, заменив в выражении (6.17) интеграл суммой и элементы вероятностей $p_X(x)dx$ частностями m_i/n:

$$\hat{\alpha}_j'[\eta] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} m_i \eta_i^j;\ j = 1{,}2. \tag{8.4}$$

4. Находят оценки центральных моментов [см. выражение (6.18)] сгруппированного распределения величины η:

$$\hat{\mu}_j'[\eta] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} m_i(\eta_i - \hat{\alpha}_1'[\eta])^j;\ j = 1,2. \tag{8.5}$$

Сравнивая формулы (8.4) и (8.5), получаем следующие выражения для оценок первых двух центральных моментов через оценки начальных моментов:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\mu}_1'[\eta] = 0;\\ &\hat{\mu}_2'[\eta] = \hat{\alpha}_2'[\eta] - (\hat{\alpha}_1'[\eta])^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

5. Учитывая формулу (8.3), из выражений (8.6) получим формулы, по которым вычисляют оценки первого начального и второго центрального моментов результатов измерений:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\alpha}_1'[X] = h\alpha_1'[\eta] + X_0;\\ &\hat{\mu}_2'[X] = h^2\hat{\mu}_2'[\eta]. \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

6. Полученные оценки моментов неизбежно отличаются от моментов несгруппированного распределения, поскольку при группировании предполагается, что все частоты сконцентрированы в серединах интервалов. Оценки [см. выражение (8.7)] оказываются немного смещенными и, если интервалы $h > 0{,}5\sqrt{\hat{\mu}_2[X]}$ и основная часть частот приходится на средние интервалы, для их уточнения вводят так называемые поправки Шеппарда. Исправленные оценки моментов вычисляют следующим образом:

$$\hat{\alpha}_1[X] = \hat{\alpha}_1'[X];\ \hat{\mu}_2[X] = \hat{\mu}_2'[X] - \frac{1}{12}h^2. \tag{8.8}$$

7. Вычисляют точечные оценки истинного значения измеряемой величины и средних квадратических отклонений результатов наблюдений и результата измерений:

$$\bar{X} = \hat{\alpha}_1[X];\ s_X = \sqrt{\hat{\mu}_2[X]};\ s_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}}s_X. \tag{8.9}$$

8. Проверяют нормальность распределения результатов наблюдения.

9. Выявляют наличие грубых погрешностей и промахов.

10. Вычисляют доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины и записывают итог измерений.

Пример. Обработать результаты наблюдений, приведенные в первом примере § 41 (табл. 10).

1. Интервал группирования выбираем равным 0,002 мм, число интервалов — восьми.

2. Частоты m_i приведены в третьей графе таблицы. Наибольшая частота приходится на четвертый интервал, поэтому в качестве «ложного нуля» принимаем $X_0 = X_4 = 8{,}918$ и вычисляем значения η:

Таблица 10

i	X_i, мм	m_i	η_i	η^2_i	$m_i\eta_i$	$m_i\eta^2_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	8,912	1	−3	9	−3	9
2	8,914	5	−2	4	−10	20
3	8,916	14	−1	1	−14	14
4	8,918	27	0	0	0	0
5	8,920	24	1	1	24	24
6	8,922	18	2	4	36	72
7	8,924	9	3	9	27	81
8	8,926	2	4	16	8	32
				Суммы	+68	+252

$$\eta_i = \frac{X_i - 8{,}918}{0{,}002},$$

которые приведены в четвертой графе.

3. Начальные моменты находим по данным, приведенным в последующих графах таблицы, учитывая, что общее число наблюдений $n=100$:

$$\hat{\alpha}_1'[\eta] = 0{,}68;$$

$$\hat{\alpha}_2'[\eta] = 2{,}52.$$

4. По формулам (8.6) вычисляем центральные моменты:

$$\hat{\mu}_1'[\eta] = 0;$$

$$\mu_2'[\eta] = 2{,}52 - 0{,}68^2 = 2{,}0576.$$

5. По формулам (8.7) находим моменты результатов наблюдений:

$$\hat{\alpha}_1'[X] = 0{,}002 \cdot 0{,}68 + 8{,}918 = 8{,}91936 \text{ мм};$$

$$\hat{\mu}_2'[X] = (0{,}002)^2 \cdot 2{,}0576 = 8{,}2304 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2.$$

6. По формулам (8.8) вычисляем исправленные значения моментов:

$$\hat{\alpha}_1[X] = 8{,}91936 \text{ мм};$$

$$\hat{\mu}_2[X] = 8{,}2304 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{12}(0{,}002)^2 = 7{,}8971 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2.$$

7. Таким образом, точечная оценка истинного значения измеряемой величины

$$\overline{X} = \hat{\alpha}_1[X] = 8{,}91936 \text{ мм};$$

среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений

$$s_X = \sqrt{\hat{\mu}_2[X]} = 0{,}0028 \text{ мм};$$

среднее квадратическое отклонение результата измерений

$$s_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_X = 0{,}00028 \text{ мм}.$$

8. Нормальность распределения результатов наблюдений проверена в § 41.

9. Среди результатов наблюдений нет таких, в которых можно было бы подозревать наличие грубых погрешностей.

10. Поскольку распределение результатов нормально и число наблюдений велико, то и точеченая оценка $\bar{X}$ истинного значения измеряемой величины распределена нормально с дисперсией, равной $(0{,}00028)^2 = 0{,}0823 \cdot 10^{-6}$ мм². Поэтому границы доверительного интервала для истинного значения можно найти из уравнения (6.57). Задавшись значением доверительной вероятности, например $P = 0{,}99$, и воспользовавшись формулой (6.57), получим:

$$2\Phi(t_P) - 1 = 0{,}99;$$

$$\Phi(t_P) = 0{,}995; \quad t_P = 2{,}575.$$

Итог измерений составляет, таким образом: $Q = \bar{X} \pm t_P s_{\bar{X}} = (8{,}91936 \pm 0{,}00072)$ мм; $P = 99\ \%$.

В некоторых случаях нас может интересовать не сама измеряемая величина, а другая, связанная с ней функциональной зависимостью. Требуется найти интервальную или точечную оценку ее истинного значения. Решается такая задача следующим образом.

Пусть $S = f(Q)$; $Q = \bar{X} \pm t_P s_{\bar{X}}$ и f — непрерывная дифференцируемая функция в окрестности точки $Q = \bar{X}$.

При проведении точных измерений естественно предположить, что $t_P s_{\bar{X}} \ll X$. Тогда, разлагая $f(Q) = f(\bar{X} \pm t_P s_{\bar{X}})$ в ряд по степеням $t_P s_{\bar{X}} / \bar{X}$ и пренебрегая всеми степенями, кроме первой, получаем следующее выражение:

$$S = f(\bar{X}) \pm t_P s_{\bar{X}} \left(\frac{df}{dQ}\right)_{Q=\bar{X}}.$$

Пример. Измеренный диаметр круга $d = 84{,}75 \pm 0{,}05$ мм. Требуется найти площадь круга $s = \frac{\pi d^2}{4}$

По вышеприведенной формуле

$$S = \frac{\pi \cdot 84{,}75^2}{4} = \frac{\pi \cdot 84{,}75}{2} \cdot 0{,}05 = 56{,}39 \pm 0{,}07 \text{ см}^2.$$

§ 47. СОВМЕСТНАЯ ОБРАБОТКА НЕСКОЛЬКИХ РЯДОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Если многократные наблюдения проводятся в течение длительного периода времени, необходимо учитывать, что изменение параметров средств измерений и внешней среды может вызвать систематические или случайные изменения математических ожиданий и дисперсий результатов наблюдений. Для того чтобы эти изменения не ускользнули от внимания оператора, измерения проводятся часто в несколько серий, причем перед каждой серией измерений иногда заново настраивают измерительную аппаратуру и принимают меры к стабилизации параметров внешней среды.

В этом случае мы получаем k групп по $n_j (j = 1; 2; \ldots, k)$ резуль-

татов наблюдений в каждой. Группы наблюдений называются равнорассеянными, если средние арифметические $\bar{X}_j$ и оценки дисперсии s^2_j во всех группах являются оценками одного и того же истинного значения измеряемой величины и одной и той же дисперсии, равной дисперсии результатов наблюдений.

Равнорассеянность групп наблюдений проверяется методами математической статистики, известными под общим названием дисперсионного анализа.

Предположим, что все N результатов наблюдений равнорассеяны. Тогда $M[X_{ij}]=M[X]$ и $D[X_{ij}]=D[X]$, где X_{ij} — i-й результат в j-й группе. Вычислим групповые средние арифметические $\bar{X}_j$ и общее среднее $\bar{X}$:

$$\overline{X}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij};\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k;$$

$$\overline{X} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\overline{X}_j = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}.$$

Очевидно, что для каждого X_{ij} имеет место тождество $X_{ij}-\bar{X}=$ $=(\bar{X}_j-\bar{X})+(X_{ij}-\bar{X}_j)$.

Возведем в квадрат обе его части и просуммируем их по всем i и j:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_j-\overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_j)^2 +$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_j-\overline{X})(X_{ij}-\overline{X}_j) = \sum_{j=1}^{k}\times n_j(\overline{X}_j-\overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-$$

$$-\overline{X}_j)^2 + 2\sum_{j=1}^{k}\left[(\overline{X}_j-\overline{X})\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_j)\right].$$

Но сумма $\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X}_j)=0$ по определению $\bar{X}_j$ для всех j. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2 = \sum_{j=1}^{k}n_j(\overline{X}_j-\overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_j)^2, \qquad (8.10)$$

т. е. *сумма квадратов отклонений результатов наблюдений от общего среднего равна сумме квадратов отклонений групповых средних от общего среднего и сумме квадратов отклонений результатов от групповых средних.*

Из равенства (8.10) можно получить следующие оценки дисперсии результатов наблюдений:

$$s_{\mathrm{I}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X})^2; \tag{8.11}$$

$$s_{\mathrm{II}}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k} n_j (\overline{X}_j - \overline{X})^2; \tag{8.12}$$

$$s_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X}_j)^2; \; j = 1, 2, \ldots, k; \tag{8.13}$$

$$s_{\mathrm{III}}^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X}_j)^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) s_j^2, \tag{8.14}$$

где s_{I}^2 — общее рассеивание в ряде наблюдений; s_{II}^2 — рассеивание между групповыми средними; s_j^2 — рассеивание внутри каждой j-й группы; s_{III}^2 — среднее рассеивание внутри групп.

Для проверки гипотезы о равнорассеянности наблюдений используется распределение, которое получается следующим образом: если u и v две независимые случайные величины, подчиняющиеся χ^2-распределениям с k_1 и k_2 степенями свободы соответственно, то их отношение $F_{k_1 k_2} = k_2 u / k_1 v$ имеет F-распределение Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы. Плотность этого распределения определяется уравнением

$$p_F(\xi) = \frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)!}{\left(\frac{k_1}{2}\right)! \left(\frac{k_2}{2}\right)!} (k_1)^{\frac{1}{2} k_1} (k_2)^{\frac{1}{2} k_2} \frac{\xi^{\frac{1}{2} k_2 - 1}}{(k_2 \xi + k_1)^{\frac{1}{2}(k_1 + k_2)}},$$

а значения его интегральной функции

$$\alpha = \int_0^{(F_{k_1, k_2})_\alpha} p_F(\xi)\, d(\xi);$$

соответствующие различным значениям F, k_1 и k_2 представлены в табл. 12 приложения.

Значение F-распределения для дисперсионного анализа объясняется тем, что ему подчиняется распределение отношения двух независимых оценок дисперсии $\hat{\sigma}_1^2$ и $\hat{\sigma}_2^2$, вычисленных на основании n_1 и n_2 нормально распределенных результатов наблюдений. В соответствии с формулой (6.61) отношение

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{(n_2 - 1)\, \chi^2_{(n_1 - 1)}}{(n_1 - 1)\, \chi^2_{n_1 - 1}},$$

поэтому оно имеет F-распределение с $(n_1 - 1)$, $(n_2 - 1)$ степенями свободы.

Если при выбранном уровне значимости $q=1-a$ окажется, что

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} < (F_{n_1-1;\, n_2-1})_q, \tag{8.15}$$

где $\hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2$, то говорят, что различие оценок незначимо, и они являются двумя независимыми оценками одной и той же дисперсии. В противном случае приходится признать это различие существенным, имеющим более глубокие причины, нежели просто расхождения, вызванные ограниченностью опытных данных.

Гипотезу о равнорассеянности групп результатов наблюдений проверяют в два этапа.

1. Вначале проверяется гипотеза о равенстве дисперсий s_j^2 во всех группах наблюдений. Для этого их располагают в вариационный ряд в порядке возрастания: $s^2_{(1)}$; s^2_2; ...; $s^2_{(k)}$ и проверяют значимость отношения $s^2_{(k)}/s^2_{(1)}$. Если это отношение незначимо, то незначимы и все остальные. Тогда следует принять исследуемую гипотезу как правдоподобную и считать, что рассеивание результатов наблюдений относительно средних во всех группах одинаково. В противном случае приходится признать распределения в группах с дисперсиями $s^2_{(1)}$ и $s^2_{(k)}$ отличными друг от друга и проверить значимость отношений всех других дисперсий.

2. При равенстве дисперсий в группах проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий во всех группах наблюдений. Если эта гипотеза верна, то s^2_{II} и s^2_{III} являются независимыми точечными оценками одной и той же дисперсии, равной дисперсии результатов наблюдений. Их отношение должно подчиняться F-распределению с $k-1$ и $N-k$ степенями свободы. Если расхождение этих оценок значимо при выбранном уровне значимости, то приходится признать, что при проведении измерений имели место случайные или систематические сдвиги математического ожидания результатов наблюдений, вследствие чего расхождения между средними оказались больше тех, которые могут быть оправданы ограниченностью опытных данных.

Оценка s^2_{I} также может служить оценкой дисперсии результатов измерения, но пара оценок s^2_{I} и s^2_{II}, а также s^2_{I} и s^2_{III} не являются независимыми, поэтому их отношение не может быть исследовано с помощью F-распределения.

При двух сериях наблюдений F-распределением воспользоваться не удается. В этом случае для проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий вычисляется величина

$$t_{1-2} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{(n_1-1)\, s_1^2 + (n_2-1)\, s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}. \tag{8.16}$$

Можно показать, что если результаты наблюдений распределены нормально, то t_{1-2} имеет распределение Стьюдента с n_1+n_2-2 степенями свободы, асимптотически переходящее в нормальное с $M[t_{1-2}]=0$ и $D[t_{1-2}]=1$ при большом числе наблюдений.

Задаваясь определенной доверительной вероятностью P или уровнем значимости $q=1-P$, по табл. 8 приложения найдем соответствующее значение t_P, и если $|t_{1-2}|<t_P$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий принимается.

Распределением Стьюдента пользуются и в том случае, когда проверка равенства дисперсий в группах дала отрицательные результаты. Тогда приходится проверять значимость всех разностей вида $\bar{X}_l-\bar{X}_m$, где l; $m=1, 2, \ldots, k$, поскольку незначимость различия между самым большим и самым малым средним еще ничего не говорит о значимости различий между другими средними. Причиной этого является как раз различие дисперсий в отдельных группах наблюдений.

Если проведенные вычисления показали, что оценки дисперсий s^2_j и средних $\bar{X}_j$ групп наблюдений незначимо отличаются друг от друга, то группы результатов наблюдений считаются равнорассеянными. Их можно объединить в один ряд и обрабатывать по правилам, описанным в предыдущем параграфе. Значимое различие групповых средних говорит о том, что на формирование результата измерений большое влияние оказывает какой-то определенный фактор или группа факторов, и следует попытаться их обнаружить и принять меры к их стабилизации.

В том случае, когда значимо различие дисперсий s^2_j, а средние X_j групп являются оценками одного и того же истинного значения измеряемой величины, группы результатов называются неравнорассеянными (неравноточными). Методы их математической обработки изложены в § 48.

Пример. Даны результаты трех групп наблюдений дециметрового интервала штрихового эталона метра с визированием на штрихи по фотоэлектрическому микроскопу. Каждая группа из пяти наблюдений объединяет результаты наблюдений, полученные в течение 10—15 мин в утренние часы после стабилизации температурного режима. Результаты наблюдений (в мкм) вместе со средними арифметическими для каждой группы представлены в табл. 11.

Таблица 11

Номер наблюдения	Группы наблюдений		
	1	2	3
1	−1,450	−1,460	−1,440
2	−1,490	−1,460	−1,550
3	−1,470	−1,440	−1,430
4	−1,450	−1,430	−1,480
5	−1,450	−1,500	−1,330
$\bar{X}_j$	−1,462	−1,458	−1,460

1. Вычислим оценки дисперсий для каждой группы результатов: $s^2_1 = 320 \cdot 10^{-6}$ мкм²; $s^2_2 = 720 \cdot 10^{-6}$ мкм²; $s^2_3 = 3800 \cdot 10^{-6}$ мкм² и найдем отношения:

$$\frac{s_3^2}{s_1^2} = 11,875; \quad \frac{s_2^2}{s_1^2} = 2,25; \quad \frac{s_3^2}{s_2^2} = 5,278.$$

Эти отношения имеют F-распределение с $k_1=4$ и $k_2=4$ степенями свободы. При уровне значимости $q=5$ %, $\alpha=95$ % из табл. 12 приложения находим: $(F_{4;4})_{0,05}=6,39$. Таким образом, при 5 %-ном уровне значимости можно сделать заключение о равенстве дисперсий в 1-й и 2-й и во 2-й и 3-й группах наблюдений, различие же дисперсий в 1-й и 3-й группах следует признать значимым.

2. Теперь проверим по Стьюденту значимость различий между средними группами результатов наблюдений, для чего по формуле (8.16) вычислим разности:

$$t_{1-2} = \frac{1,462 - 1,458}{\sqrt{4 \cdot 320 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 720 \cdot 10^{-6}}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5(5+5-2)}{5+5}} = 0,278;$$

$$t_{1-3} = \frac{1,462 - 1,460}{\sqrt{4 \cdot 320 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 3800 \cdot 10^{-6}}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5(5+5-2)}{5+5}} = 0,07;$$

$$t_{2-3} = \frac{1,460 - 1,458}{\sqrt{4 \cdot 720 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 3800 \cdot 10^{-6}}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5(5+5-2)}{5+5}} = 0,067.$$

При $q=5$ % из табл. 8 приложения для $P=1-q=95$ % находим для $k=n_1+n_2-2=8$: $t_{0,95}=2,30$, поэтому расхождения средних можно считать незначимыми.

Таким образом, 1-я и 2-я, а также 2-я и 3-я группы измерений являются равнорассеянными, в то время как 1-ю и 3-ю таковыми назвать нельзя.

§ 48. ОБРАБОТКА НЕРАВНОРАССЕЯННЫХ РЯДОВ НАБЛЮДЕНИЙ

В практике исследовательских работ часто встречаются ситуации, когда необходимо найти наиболее достоверное значение величины и оценить его возможные отклонения от истинного значения на основании измерений, проводимых разными наблюдателями с применением разнообразных измерительных средств и методов измерений в различных лабораториях или условиях внешней среды.

Ряды получающихся при этом результатов наблюдений называются неравнорассеянными (неравноточными), если оценки их дисперсий значимо отличаются друг от друга, а средние арифметические являются оценками одного и того же значения измеряемой величины.

Если средние неравнорассеянных рядов наблюдений мало отличаются друг от друга, то говорят о высокой воспроизводимости измерений, которая количественно характеризуется параметрами рассеивания результатов.

Рассмотрим некоторые случаи, приводящие к необходимости обработки результатов неравнорассеянных измерений:

1. Если при точных измерениях необходимо убедиться в отсутствии неисключенных систематических погрешностей, то измерения проводятся несколькими исследователями или группами исследователей. Если средние арифметические полученных рядов наблюдений незначимо отличаются друг от друга и ничто не указывает на наличие систематических погрешностей, то заманчиво объединить все полученные результаты и на основе их математической обработки получить более достоверные сведения об измеряемой величине.

2. Аналогичные измерения были выполнены в разных лабораториях различными методами, и получены отличающиеся друг от друга результаты. Естественно и в этом случае, используя все имеющиеся данные, попытаться получить более достоверные значения измеряемых величин.

3. Измерения, относящиеся к образцовым мерам и измерительным приборам, часто повторяются через некоторое время. В конце концов накапливаются ряды наблюдений и возникает необходимость объединить их. Точность рядов наблюдений различна, с одной стороны, из-за того, что для впервые проводимых измерений характерно большее рассеивание результатов, а с другой стороны, из-за того, что с течением времени средства измерения стареют или заменяются новыми.

Во всех описанных ситуациях приходится прибегать к методам обработки результатов неравнорассеянных рядов наблюдений, задача которых в общем случае заключается в нахождении наиболее достоверного значения измеряемой величины и оценки воспроизводимости измерений.

Основой для расчета служат следующие данные:

1) $\bar{X}_1$; $\bar{X}_2$; ...; $\bar{X}_m$ — средние арифметические m рядов равнорассеянных результатов наблюдений постоянной физической величины Q;

2) σ_1; σ_2; ...; σ_m — средние квадратические отклонения (или их оценки) результатов наблюдений в отдельных рядах;

3) n_1, n_2; ...; n_m — числа наблюдений в каждом ряду;

4) m — число рядов.

Если результаты наблюдений во всех рядах распределены нормально, то нормально распределены и все m средних арифметических $\bar{X}_j$ ($j=1, 2, \ldots, m$) с дисперсиями $\sigma^2_{\bar{X}_j}=\sigma_j^2/n_j$

$$p_{X_j}(x)=\frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\bar{X}_j-Q)^2}{2\sigma^2_{\bar{X}_j}}},$$

где Q — истинное значение измеряемой величины (при условии, что систематические погрешности исключены).

Функция правдоподобия (6.42) в этом случае записывается в виде

$$g(\overline{X}_1;\ \overline{X}_2;\ \ldots,\ \overline{X}_m;\ Q) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \prod\limits_{j=1}^{m} \sigma_{\overline{X}_j}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{(\overline{X}_j - Q)^2}{\sigma^2_{\overline{X}_j}}},$$

а логарифмическая функция правдоподобия (6.43) приобретает форму, несколько отличную от (6.45)

$$L(\overline{X}_1;\ \overline{X}_2;\ \ldots;\overline{X}_m;\ Q) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \frac{(\overline{X}_j - Q)^2}{\sigma^2_{\overline{X}_j}} -$$

$$-\frac{m}{2}\ln(2\pi) - \sum_{j=1}^{m} \ln \sigma_{\overline{X}_j}.$$

Оценку $\hat{Q}$ максимального правдоподобия для истинного значения измеряемой величины находим приравниванием нулю производной от логарифмической функции правдоподобия

$$\left(\frac{\partial L}{\partial Q}\right)_{Q=\hat{Q}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{X}_j - Q}{\sigma^2_{\overline{X}_j}} = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно $\hat{Q}$, находим

$$\hat{Q} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma^2_{\overline{X}_j}} \cdot \overline{X}_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma^2_{\overline{X}_j}}}. \qquad (8.17)$$

Полученная оценка называется средним взвешенным и обозначается через $\overline{X}_0$, а входящие в выражение (8.17) обратные дисперсии отдельных рядов наблюдений выступают при этом как веса отдельных средних арифметических

$$\alpha_j = 1/\sigma^2_{\overline{X}_j} = n_j/\sigma_j^2. \qquad (8.18)$$

Веса характеризуют степень нашего доверия к соответствующим рядам наблюдений. Чем больше число наблюдений в каждом данном ряду и чем меньше дисперсия результатов наблюдений, тем больше степень доверия к полученному при этом среднему арифметическому и с тем большим весом оно будет учтено при определении оценки истинного значения измеряемой величины

$$\overline{X}_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \overline{X}_j / \sum_{j=1}^{m} \alpha_j. \qquad (8.19)$$

Иногда удобно пользоваться безразмерными весовыми коэффициентами

$$a_j = \alpha_j \Big/ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \frac{n_j}{\sigma_j^2} \Big/ \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{\sigma_j^2}, \tag{8.20}$$

тогда выражение для среднего взвешенного приобретает простой вид

$$\overline{X}_0 = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \overline{X}_j. \tag{8.21}$$

В соответствии со свойствами оценок максимального правдоподобия (§ 39) дисперсия среднего взвешенного должна равняться единице, деленной на математическое ожидание второй производной от логарифмической функции правдоподобия

$$\sigma^2_{\overline{X}_0} = \left\{ M \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial Q^2} \right] \right\}^{-1} = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma^2_{\overline{X}_j}}. \tag{8.22}$$

Отсюда следует, что дисперсия среднего взвешенного меньше дисперсии любого из исходных средних арифметических отдельных рядов наблюдений и поэтому при обработке неравнорассеянных рядов наблюдений точность измерений повышается.

Если теоретические дисперсии $\sigma^2_{\overline{X}_j}$ неизвестны, то пользуются их оценками $s^2_{\overline{X}_j}$, с помощью которых определяют веса или весовые коэффициенты.

Доверительная граница погрешности результата измерений $t_P s_{\overline{X}_0}$ при условии, что числа n_j больше $20 \div 30$, может быть определена по интегральной функции нормированного нормального распределения: $P\{|\overline{X}_0 - Q| < t_P s_{\overline{X}_0}\} = 2\Phi(t_P) - 1$.

При малом числе нормально распределенных результатов наблюдений пользуются распределением Стьюдента с числом степеней свободы

$$k = \left[\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s^2_{\overline{X}_j}} \right)^2 \right] \Big/ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j + 1} \cdot \frac{1}{s^4_{\overline{X}_j}} - 2. \tag{8.23}^*$$

Если же об исходных распределениях нет никаких заслуживающих внимания данных, то на основании центральной предельной теоремы можно все-таки предполагать, что распределение среднего взвешенного нормально, поскольку оно является суммой большого числа случайных величин с конечными дисперсиями и математическими ожиданиями.

В заключение отметим, что полученные результаты справедливы не только тогда, когда данными для расчета являются ряды прямых равнорассеянных наблюдений, но и в том случае, если исходные величины являются в свою очередь результатами нерав-

---

* Формулу (8.23) получаем из более общей формулы (8.51) подстановкой $\partial F / \partial Q_j = a_j$.

норассеянных, косвенных или совокупных измерений. Операции определения средних взвешенных во всех этих случаях не меняются, а точность результата повышается.

Пример. Тремя коллективами экспериментаторов с помощью различных методов измерения были получены следующие значения ускорения свободного падения (со средними квадратическими отклонениями результатов измерений): $g=(981{,}9190\pm0{,}0004)$ см·с$^{-2}$; $g=(981{,}9215\pm0{,}0016)$ см·с$^{-2}$; $g=(981{,}923\pm\pm0{,}002)$ см·с$^{-2}$.

Весовые коэффициенты отдельных результатов вычислим по формуле (8.20):

$$a_1=\frac{1}{(0{,}0004)^2}:\left[\frac{1}{(0{,}0004)^2}+\frac{1}{(0{,}0016)^2}+\frac{1}{(0{,}002)^2}\right]=0{,}91;$$

$$a_2=\frac{1}{(0{,}0016)^2}:\left[\frac{1}{(0{,}0004)^2}+\frac{1}{(0{,}0016)^2}+\frac{1}{(0{,}002)^2}\right]=0{,}06;$$

$$a_3=\frac{1}{(0{,}002)^2}:\left[\frac{1}{(0{,}0004)^2}+\frac{1}{(0{,}0016)^2}+\frac{1}{(0{,}002)^2}\right]=0{,}03.$$

Среднее взвешенное в соответствии с уравнением (8.21) составляет: $\bar{X}_0=0{,}91\cdot981{,}9190+0{,}06\cdot981{,}9215+0{,}03\cdot981{,}923=981{,}9193$ см·с$^{-2}$ и его среднее квадратическое отклонение (8.22)

$$s^2_{\bar{X}_0}=\frac{1}{\frac{1}{(0{,}0004)^2}+\frac{1}{(0{,}0016)^2}+\frac{1}{(0{,}002)^2}}=14{,}51\cdot10^{-8}\ \text{см}^2\cdot\text{с}^{-4};$$

$$s_{\bar{X}_0}=0{,}00038\approx0{,}0004\ \text{см}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Несмотря на то, что вес первого результата в десятки раз превышает веса результатов второго и третьего измерений, использование их позволило исправить цифру в четвертом разряде после запятой в значении ускорения свободного падения, хотя точность этого результата (в пределах округления) не изменилась.

§ 49. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При косвенных измерениях значение искомой величины получают на основании известной зависимости, связывающей ее с другими величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Вначале рассмотрим тот простейший случай, когда искомая величина Q_Z определяется как сумма двух величин Q_X и Q_Y:

$$Q_Z=Q_X+Q_Y. \tag{8.24}$$

Поскольку результаты прямых измерений величин Q_X и Q_Y (после исключения систематических погрешностей) включают в себя некоторые случайные погрешности, то формулу косвенного измерения суммы можно переписать в виде

$$\bar{Z}-\lambda_Z=\bar{X}-\lambda_X+\bar{Y}-\lambda_Y, \tag{8.25}$$

где $\bar{X}$, $\bar{Y}$ — средние арифметические (или средние взвешенные), полученные при обработке результатов прямых измерений величин Q_X и Q_Y; λ_X, λ_Y — случайные погрешности средних; $\bar{Z}$, λ_Z — оценка истинного значения косвенно измеряемой величины и его случайная погрешность.

Из уравнения (8.28) непосредственно вытекает справедливость двух следующих равенств:

$$\overline{Z} = \overline{X} + \overline{Y}; \ \lambda_Z = \lambda_X + \lambda_Y, \tag{8.26}$$

т. е. оценкой истинного значения косвенно измеряемой величины должна служить сумма оценок истинных значений исходных величин, случайные погрешности которых складываются.

Математическое ожидание оценки $\overline{Z}$ равно, очевидно, истинному значению искомой величины:

$$M[\overline{Z}] = M[\overline{X} + \overline{Y}] = M[\overline{X}] + M[\overline{Y}] = Q_X + Q_Y = Q_Z,$$

и ее дисперсия составляет:

$$\sigma_{\overline{Z}}^2 = D[\overline{Z}] = D[\lambda_Z] = D[\lambda_X + \lambda_Y] = M[(\lambda_X + \lambda_Y)^2] =$$

$$= M[\lambda_X^2 + \lambda_Y^2 + 2\lambda_X\lambda_Y] = M[\lambda_X^2] + M[\lambda_Y^2] + 2M[\lambda_X\lambda_Y] =$$

$$= \sigma_{\overline{X}}^2 + \sigma_{\overline{Y}}^2 + 2M[\lambda_X\lambda_Y].$$

Входящее в это выражение математическое ожидание произведения случайных погрешностей называется корреляционным моментом и определяет степень «тесноты» линейной зависимости между погрешностями. Вместо корреляционного момента часто пользуются безразмерной величиной, называемой коэффициентом корреляции:

$$r_{\overline{X}\overline{Y}} = \frac{M[\lambda_X\lambda_Y]}{\sigma_{\overline{X}}\sigma_{\overline{Y}}}. \tag{8.27}$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициент корреляции между погрешностями λ_X и λ_Y средних арифметических равен коэффициенту корреляции между погрешностями δ_X и δ_Y результатов отдельных измерений величин Q_X и Q_Y: $r_{\overline{X}\overline{Y}} = r_{XY}$.

С учетом коэффициента корреляции дисперсия результата косвенных измерений, т. е. оценки истинного значения косвенно измеряемой величины,

$$\sigma_{\overline{Z}}^2 = \sigma_{\overline{X}}^2 + \sigma_{\overline{Y}}^2 + 2r_{XY}\sigma_{\overline{X}}\sigma_{\overline{Y}}. \tag{8.28}$$

Если погрешности измерения величин Q_X и Q_Y не коррелированы, то выражение (8.28) упрощается:

$$\sigma_{\overline{Z}}^2 = \sigma_{\overline{X}}^2 + \sigma_{\overline{Y}}^2; \ \sigma_{\overline{Z}} = \sqrt{\sigma_{\overline{X}}^2 + \sigma_{\overline{Y}}^2}. \tag{8.29}$$

В тех случаях, когда теоретические дисперсии распределения результатов прямых измерений неизвестны, определяется оценка $s_{\overline{Z}}^2$ дисперсии результата косвенных измерений через оценки дисперсий $s_{\overline{X}}^2$ и $s_{\overline{Y}}^2$:

$$s_{\overline{Z}}^2 = s_{\overline{X}}^2 + s_{\overline{Y}}^2 + 2\hat{r}_{XY}s_{\overline{X}}s_{\overline{Y}}. \tag{8.30}$$

Оценки коэффициента корреляции $\hat{r}_{XY}$ вычисляют на основании результатов прямых измерений исходных величин:

$$\hat{r}_{XY}=\frac{1}{s_{\bar{X}}s_{\bar{Y}}}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y}), \qquad (8.31)$$

где $m=\min(n_X, n_Y)$ — наименьшее из чисел наблюдений n_X и n_Y.

При положительной корреляции, т. е. когда $r_{XY}>0$, одна из погрешностей имеет тенденцию возрастать при увеличении другой, если же корреляция отрицательна, то $r_{XY}<0$ и погрешность измерения одной величины обнаруживает тенденцию к уменьшению при увеличении погрешности измерения другой величины. Возможные значения коэффициента корреляции лежат в интервале $-1\leqslant r_{XY}\leqslant +1$. Если $r_{XY}=0$, то погрешности измерения некоррелированы.

О наличии корреляции удобно судить по графику, на котором в координатах X, Y изображены пары последовательно получаемых результатов измерения величин Q_X и Q_Y.

На рис 32 изображены случаи совместного распределения результатов измерения при положительной (рис. 32, *а*) и отрицательной (рис. 32, *б*) корреляции. Результаты измерений на рис. 32, *в* некоррелированы.

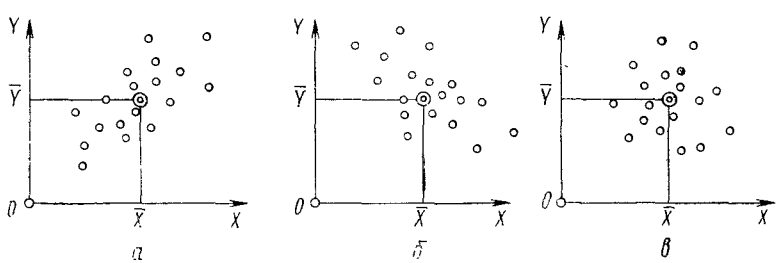


Рис. 32

Чаще всего наличия корреляции следует ожидать в тех случаях, когда обе величины измеряются одновременно однотипными измерительными средствами, причем неуловимые (на данном уровне качества эксперимента) изменения внешних воздействий (электрических, магнитных, температурных и других полей, условий питания и прочее) одновременно заметно влияют на формирование случайных погрешностей их измерения. В некоторых случаях причиной корреляции между результатами измерений может стать сам оператор, поскольку при некоторых исследованиях, связанных с ручным уравновешиванием приборов сравнения (сличением мер на точных весах, в фотометрии), искусство и опыт наблюдателя оказывают значительное влияние на результаты измерений.

В тех же случаях, когда исходные величины измеряют с помощью различных средств измерения в разное время, можно с полным правом ожидать, что результаты, если и будут коррелированы, то очень мало, и коэффициентом корреляции в выражениях (8.28) и (8.30) можно пренебречь.

Распределение результата косвенных измерений будет нормальным, если нормальны распределения результатов прямых измерений. В этих условиях для построения доверительного интервала, накрывающего истинное значение измеряемой величины, следует применить нормированную функцию нормального распределения, если число измерений достаточно велико. Если же объемы рядов прямых измерений недостаточно велики, то можно воспользоваться распределением Стьюдента с некоторым «эффективным» * числом степеней свободы, которое для рассматриваемого случая при независимости погрешностей измерения ($r_{XY}=0$), подсчитывается по формуле

$$k_{\text{эфф}}=\frac{(s^2_{\bar{X}}+s^2_{\bar{Y}})^2}{\dfrac{s^4_{\bar{X}}}{n_X+1}+\dfrac{s^4_{\bar{Y}}}{n_Y+1}}-2=\frac{s^4_{\bar{Z}}}{\dfrac{s^4_{\bar{X}}}{n_X+1}+\dfrac{s^4_{\bar{Y}}}{n_Y+1}}-2, \qquad (8.32)$$

где n_X, n_Y — числа прямых наблюдений величин Q_X и Q_Y.

Если числа наблюдений одинаковы ($n_X=n_Y=n$), то выражение для эффективного числа степеней свободы распределения Стьюдента упрощается:

$$k_{\text{эфф}}=(n+1)\frac{s^4_{\bar{Z}}}{s^4_{\bar{X}}+s^4_{\bar{Y}}}-2. \qquad (8.33)$$

Итоговый результат измерений записываем в виде $Q_Z=\bar{Z}\pm t_P s_{\bar{Z}}$: $P=\ldots$, где t_P определяется из выражения: $P\{|\bar{Z}-Q_Z|<t_P s_{\bar{Z}}\}=$ $=2\Phi(t_P)-1$ или $P\{|\bar{Z}-Q_Z|<t_P s_{\bar{Z}}\}=2\int\limits_0^{t_P} S(tk_{\text{эфф}})dt$.

Рассмотренные выражения можно использовать и в том случае, когда искомая величина является суммой m измеряемых прямыми способами величин:

$$Q_0=\sum_{j=1}^{m} Q_j. \qquad (8.34)$$

К такой формуле приходим при измерении больших величин по частям, например, при измерении длин с помощью концевых мер длины, взвешивании с применением набора гирь, измерении на электрических приборах сравнения с помощью магазинов сопротивлений, емкостей или индуктивностей, измерении объемов жидкостей мерниками меньшей вместимости и так далее. В этих случаях в качестве наиболее достоверной оценки $\hat{Q}_0$ истинного значе-

* См. формулу (8.51).

ния измеряемой величины $\hat{Q}_0$ принимается сумма оценок $\hat{Q}_j$ истинных значений слагаемых:

$$\hat{Q}_0 = \sum_{j=1}^{m} \hat{Q}_j, \tag{8.35}$$

а дисперсию оценки итогового результата находят по формуле

$$\sigma^2_{\hat{Q}_0} = \sum_{j=1}^{m} \sigma^2_{\hat{Q}_j} + \sum_{\substack{k;\, l=1 \\ k \neq l}}^{m} \sigma_{\hat{Q}_k} \sigma_{\hat{Q}_l} r_{kl}, \tag{8.36}$$

где $\sigma^2_{\hat{Q}_j}$ — дисперсия j-го слагаемого; r_{kl} — коэффициент корреляции между случайными погрешностями k-го и l-го слагаемых.

При $m=2$ формула (8.36) вырождается в выражение (8.28): $\sigma^2_{\hat{Q}_0} = \sigma^2_{\hat{Q}_1} + \sigma^2_{\hat{Q}_2} + \sigma_{\hat{Q}_1} \sigma_{\hat{Q}_2} r_{12} + \sigma_{\hat{Q}_1} \sigma_{\hat{Q}_2} r_{21}$.
Из определения (8.27) коэффициента корреляции следует, что $r_{21} = r_{12}$, поэтому $\sigma^2_{\hat{Q}_0} = \sigma^2_{\hat{Q}_1} + \sigma^2_{\hat{Q}_1} + 2\sigma_{\hat{Q}_1} \sigma_{\hat{Q}_2} r_{12}$.

При неизвестных дисперсиях слагаемых в выражение (8.36) следует подставлять их оценки $s^2_{\hat{Q}_j}$, а оценки коэффициентов корреляции вычисляют по формуле $\hat{r}_{kl} = \frac{1}{s_k s_l} \sum_{i=1}^{n} v_{k_i} v_{l_i}$, где n — наименьшее из чисел наблюдения величин Q_k и Q_l.

Если исходные измерения независимы, то все коэффициенты корреляции равны нулю и среднее квадратическое отклонение оценки Q_0 определяют с помощью более простого выражения

$$s_{\hat{Q}_0} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} s^2_{\hat{Q}_j}}. \tag{8.37}$$

Пример. Без учета поправки на теплообмен подъем температуры $\Delta\vartheta$ в калориметре определяют как разность между конечной ϑ^*_f и начальной ϑ^*_i температурами главного периода калориметрического опыта: $\Delta\vartheta = \vartheta^*_f - \vartheta^*_i$. После обработки опытных данных были получены следующие (округленные) результаты с соответствующими средними квадратическими отклонениями:

$$\vartheta_i^* = 25{,}10718\ ^\circ\mathrm{C}; \quad s_i = 0{,}6 \cdot 10^{-4}\ ^\circ\mathrm{C};$$

$$\vartheta_f^* = 27{,}10739\ ^\circ\mathrm{C}; \quad s_f = 0{,}3 \cdot 10^{-4}\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Результат косвенного измерения находим по формуле (8.26) как разность соответствующих средних арифметических: $\overline{\Delta\vartheta} = \overline{\vartheta}^*_f - \overline{\vartheta}^*_i = 27{,}10739 - 25{,}10718 = 2{,}00021\ ^\circ\mathrm{C}$, а среднее квадратическое отклонение результата по формуле (8.30):

$$s_{\overline{\Delta\vartheta}} = \sqrt{s_i^2 + s_f^2},$$

где $s_i = 0{,}6 \cdot 10^{-4}\ ^\circ\mathrm{C}$ — среднее квадратическое отклонение результата измерения начальной температуры и $s_f = 0{,}3 \cdot 10^{-4}\ ^\circ\mathrm{C}$ — среднее квадратическое отклонение результата измерения конечной температуры главного периода калориметрического опыта.

Среднее квадратическое отклонение результата измерения подъема температуры в калориметре составляет, таким образом,

$$s_{\overline{\Delta\vartheta}} = \sqrt{0{,}6^2 \cdot 10^{-8} + 0{,}3^2 \cdot 10^{-8}} = 0{,}7 \cdot 10^{-4}\,°\mathrm{C}.$$

Итог измерения записывается в виде $\Delta\vartheta = (2{,}00021 \pm 0{,}00007)\,°\mathrm{C}$; $P = 68{,}26\,\%$. Здесь мы приняли $t_P = 1$, что при нормальном распределении погрешностей измерений исходных величин и достаточно большом числе их наблюдений соответствует доверительной вероятности 68,26% нахождения подъема температуры в указанных пределах.

Рассмотрим теперь общий случай, когда требуется оценить истинное значение величины Q, которая связана с величинами Q_j ($j = 1, 2, \ldots, m$), измеряемыми прямыми способами, некоторым нелинейным уравнением

$$Q = F(Q_1;\ Q_2;\ \ldots;\ Q_m). \tag{8.38}$$

Найдем такие оценки истинных значений $\hat{Q}_j$ измеряемых прямыми способами величин Q_j, которые, будучи подставлены в уравнение (8.38), давали бы оценку $\hat{Q}$ истинного значения косвенно измеряемой величины Q, обладающую наименьшей дисперсией и, следовательно, наибольшей точностью по сравнению со всеми другими мыслимыми оценками. Поскольку эти оценки связаны с соответствующими случайными погрешностями, то можно записать точное равенство:

$$\hat{Q} - \lambda = F\left[\left(\hat{Q}_1 - \lambda_1\right);\ \left(\hat{Q}_2 - \lambda_2\right);\ \ldots;\ \left(\hat{Q}_m - \lambda_m\right)\right], \tag{8.39}$$

где $\lambda = \hat{Q} - Q$ — случайная погрешность оценки $\hat{Q}$; $\lambda_j = \hat{Q}_j - Q_j$ — случайная погрешность оценок $\hat{Q}_j$.

Вполне естественно (но не всегда оправдано) предположить, что относительные случайные погрешности оценок малы по сравнению с единицей: $\lambda_j/\hat{Q}_j \ll 1$. Тогда уравнение (8.39) можно разложить в m-мерный ряд Тейлора по степеням случайных погрешностей. Ограничимся только первой и второй степенями:

$$\hat{Q} - \lambda = F\left(\hat{Q}_1;\ \hat{Q}_2;\ \ldots;\ \hat{Q}_m\right) - \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)\lambda_j - \frac{1}{2}\sum_{i;\,j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial Q_j}\right)\lambda_i\lambda_j. \tag{8.40}$$

Полученное таким образом равенство сводится к следующим двум:

$$\hat{Q} = F\left(\hat{Q}_1;\ \hat{Q}_2;\ \ldots;\ \hat{Q}_m\right); \tag{8.41}$$

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)\lambda_j + \frac{1}{2}\sum_{i;\,j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \cdot \partial Q_j}\right)\lambda_i\lambda_j, \tag{8.42}$$

т. е. оценку истинного значения косвенно измеряемой величины получают подстановкой оценок истинных значений исходных величин в уравнение (8.38).

Вычислим теперь дисперсию $\sigma^2_{\hat{Q}}$ случайной погрешности λ оценки $\hat{Q}$, пренебрегая произведениями случайных погрешностей по сравнению с самими погрешностями, т. е. отбрасывая в формуле (8.42) вторую сумму:

$$\sigma^2_{\hat{Q}} = D\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)\lambda_j\right] = M\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)\lambda_j\right]^2 = M\left[\sum_{i;\,j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)\lambda_i\lambda_j\right] =$$

$$= \sum_{i;\,j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right) M\,[\lambda_i\lambda_j].$$

Для математических ожиданий произведений $M[\lambda_i\lambda_j]$ случайных погрешностей имеем:

$$M\,[\lambda_i\lambda_j] = \begin{cases} \sigma^2_{\hat{Q}_i} = \sigma^2_{\hat{Q}_j}; & i = j; \\ r_{ij}\,\sigma_{\hat{Q}_i}\sigma_{\hat{Q}_j}; & i \neq j. \end{cases}$$

Поэтому можно записать:

$$\sigma^2_{\hat{Q}} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)^2\sigma^2_{\hat{Q}_j} + \sum_{\substack{i;\,j=1\\ i\neq j}}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right) r_{ij}\sigma_{\hat{Q}_i}\sigma_{\hat{Q}_j}, \tag{8.43}$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции между погрешностями λ_i и λ_j оценок $\hat{Q}_i$ и $\hat{Q}_j$.

Поскольку коэффициенты корреляции r_{ij} не зависят от значений оценок $\hat{Q}_i$ и $\hat{Q}_j$ величин Q_i и Q_j, то из выражения (8.33) следует, что дисперсия оценки $\hat{Q}$ косвенно измеряемой величины Q достигает минимума в том случае, когда из возможных оценок исходных величин выбраны те, дисперсии которых минимальны. Такими оценками для измеряемых прямыми способами величин являются, как мы уже знаем, средние арифметические соответствующих рядов наблюдений.

Таким образом, *в качестве наиболее достоверного значения $\overline{X}_Q$ косвенно измеряемой величины Q следует понимать значение, получаемое подстановкой в формулу (8.38) косвенного измерения средних арифметических $\overline{X}_j$ рядов измерений исходных величин:*

$$\overline{X}_Q = F(\overline{X}_1;\ \overline{X}_2;\ \ldots;\ \overline{X}_m). \tag{8.44}$$

Дисперсия этой оценки определяется из формулы (8.43):

$$\sigma^2_{\overline{X}_Q} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)^2\sigma^2_{\overline{X}_j} + \sum_{\substack{i;\,j=1\\ i\neq j}}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right) r_{ij}\sigma_{\overline{X}_i}\sigma_{\overline{X}_j}, \tag{8.45}$$

причем значения частных производных вычисляются при средних арифметических значениях аргументов $Q_j = \overline{X}_j$.

Произведения частных производных уравнения косвенного измерения на средние квадратические отклонения результатов измерения соответствующих аргументов называются *частными погрешностями косвенного измерения:*

$$E_i = \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)\sigma_{\overline{X}_j}. \tag{8.46}$$

Если случайные погрешности измерения отдельных аргументов попарно некоррелированы ($r_{ij}=0$; i; $j=1, 2, \ldots, m$), то дисперсия результатов равна, на основании формулы (8.45), сумме квадратов частных погрешностей:

$$\sigma^2_{\overline{X}_Q}=\sum_{j=1}^{m} E_j^2. \tag{8.47}$$

В предыдущих параграфах было показано, что если результаты однократных наблюдений свободны от систематических погрешностей, то математическое ожидание среднего арифметического ряда равнорассеянных наблюдений, а также среднее взвешенное равнорассеянных рядов наблюдений равно истинному значению измеряемой величины, т. е. результаты как равнорассеянных, так и неравнорассеянных исправленных наблюдений свободно от систематических погрешностей. Теперь покажем, что математическое ожидание результата косвенных измерений не равно истинному значению измеряемой величины, т. е. что оценка (8.44) является смещенной, если хотя бы одна вторая часть производная уравнения (8.38) отличается от нуля. Это утверждение равносильно тому, что математическое ожидание погрешности результата косвенного измерения, определяемое формулой (8.42), отлично от нуля, т. е. что погрешность результата косвенного измерения наряду со случайной содержит еще и систематическую составляющую.

Если погрешности измерения аргументов некоррелированы, так что $M[\lambda_i\lambda_j]=0$ для $i\neq j$ и $M[\lambda_i\lambda_j]=\sigma^2_{\overline{X}_i}=\sigma^2_{\overline{X}_j}$ для $i=j$, то эта систематическая погрешность определяется как

$$\Theta=M[\lambda]=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)M[\lambda_j]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i;\,j=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i\partial Q_j}M[\lambda_i\lambda_j]=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_j^2}\right)\sigma^2_{\overline{X}_j}. \tag{8.48}$$

Для того, чтобы исключить эту систематическую погрешность, нужно к рассчитанному по формуле (8.44) результату прибавить суммарную поправку q, равную систематической погрешности по величине и обратную ей по знаку.

Окончательный итог косвенного измерения:

$$Q=\overline{X}_Q+q\pm t_P\sigma_{\overline{X}_Q},\ P=\ldots, \tag{8.49}$$

если дисперсии исходных величин известны, и

$$Q=\overline{X}_Q+q\pm t_P s_{\overline{X}_Q},\ P=\ldots, \tag{8.50}$$

если теоретические дисперсии неизвестны. Оценка среднего квадратического отклонения результата $s_{\overline{X}_Q}$ определяется при этом по вышеприведенным формулам подстановкой вместо теоретических дисперсий их оценок $s^2_{\overline{X}_j}$.

Величина t_P в формулах (8.49) и (8.50) вычисляется, как и ранее, для заданной доверительной вероятности $P\{|\bar{X}+q-Q|<t_P s_{\bar{X}_Q}\}$, исходя из закона распределения итогового результата косвенного измерения.

Если функция $F(Q_1; Q_2; \ldots; Q_m)$ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядков в некоторой окрестности средних арифметических рядов измерений аргументов, и результаты прямых измерений аргументов распределены нормально, то по мере уменьшения их относительных средних квадратических отклонений закон распределения результата $\bar{X}_Q$ косвенного измерения асимптотически приближается к нормальному. Поэтому для определения доверительной погрешности можно воспользоваться интегральной функцией нормированного нормального распределения, если число измерений велико.

При малом числе нормально распределенных результатов наблюдений следует использовать распределение Стьюдента с эффективным числом степеней свободы

$$k_{\text{эфф}}=\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)^2 s^2_{\bar{X}_j}\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j+1}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right)^4 s^4_{\bar{X}_j}}-2=\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}E^2_j\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j-1}E^4_j}-2^*, \qquad (8.51)$$

где n_j — число прямых измерений величины Q_j.

Эффективное число степеней свободы обычно получается дробным, поэтому для отыскания величины t_P данные табл. 8 и 9 приложения приходится интерполировать.

Пример. Определить момент инерции круглой платформы на трифилярном подвесе, связанный формулой

$$I=\frac{g\,Rr}{4\pi^2 l}\,mT^2$$

со следующими величинами, измеряемыми прямыми способами: $R=(11{,}50\pm\pm0{,}05)\cdot10^{-2}$ м — радиус платформы; $r=(10{,}00\pm0{,}05)\cdot10^{-2}$ м — радиус верхнего диска подвеса; $l=(233{,}0\pm0{,}2)\cdot10^{-2}$ м — длина нитей подвеса; $m=(125{,}7\pm\pm0{,}1)\cdot10^{-3}$ кг — масса платформы; $T=(2{,}81\pm0{,}01)$ с — период малых колебаний платформы; $g=9{,}81$ м·с$^{-2}$ — ускорение свободного падения; $\pi=3{,}14$ — отношение длины окружности к диаметру. (Все результаты даны с отклонениями, соответствующими $t_P=1$).

Подставляя в исходную формулу средние арифметические значения измеряемых прямыми способами величин и округленные значения постоянных, получим оценку истинного значения момента инерции платформы:

$$\bar{I}=\frac{9{,}82\cdot11{,}50\cdot10{,}00}{4\cdot3{,}14^2\cdot233}\cdot125{,}7\cdot2{,}81^2\cdot10^{-3}=1{,}22\cdot10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2,$$

поскольку результат должен быть округлен — до трех значащих цифр.

Для оценки точности полученного значения вычислим частные производные и частные погрешности косвенных измерений:

---

* Welch B. L. The generalization of «Student's» problem when several different popylation variances are involved. «Biometrika», 34, 1947.

$$E_R = \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right) s_{\bar{R}} = \frac{I}{R} s_{\bar{R}} = \frac{1{,}22 \cdot 10^{-3}}{11{,}50} \cdot 0{,}05 = 0{,}0053 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$E_r = \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right) s_{\bar{r}} = \frac{I}{r} s_{\bar{r}} = \frac{1{,}22 \cdot 10^{-3}}{10{,}00} \cdot 0{,}05 = 0{,}0061 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$E_l = \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right) s_{\bar{l}} = -\frac{I}{l} s_{\bar{l}} = -\frac{1{,}22 \cdot 10^{-3}}{233{,}0} \cdot 0{,}2 = -0{,}0010 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$E_m = \left(\frac{\partial I}{\partial m}\right) s_{\bar{T}} = \frac{I}{m} s_{\bar{m}} = \frac{1{,}22 \cdot 10^{-3}}{125{,}7} \cdot 0{,}1 = 0{,}0010 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$E_T = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right) s_{\bar{T}} = 2\frac{I}{T} s_{\bar{T}} = 2\frac{1{,}22 \cdot 10^{-3}}{2{,}81} \cdot 0{,}01 = 0{,}0087 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таким образом, среднее квадратическое отклонение косвенного измерения момента инерции платформы, рассчитанное по формуле (8.47), составляет

$$s_I = \sqrt{E_R^2 + E_r^2 + E_l^2 + E_m^2 + E_T^2} = 0{,}01 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Окончательно итог косвенного измерения записывается в виде $I = (1{,}22 \pm 0{,}01) \times \times 10^{-3}$ кг·м², где $t_P = 1$.

Теперь по формуле (8.48) следует оценить систематическую погрешность, возникающую при косвенных измерениях:

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_j^2}\right) s^2_{\hat{Q}_j} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial l^2}\right) s_l^2 + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial T^2}\right) s_T^2\right],$$

поскольку вторые производные по остальным аргументам равны нулю. Тогда

$$\Theta = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{l^2} s_l^2 + 2\frac{I}{T^2} s_T^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}22 \cdot 10^{-3}}{233{,}0^2} \cdot 0{,}04 + \frac{2 \cdot 1{,}22 \cdot 10^{-3}}{2{,}81^2} \cdot 0{,}0001\right) =$$

$$= 0{,}0016 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Полученная величина значительно меньше пяти единиц разряда, следующего за последней значащей цифрой погрешности результата. Если эту погрешность учесть путем введения в итог измерения соответствующей поправки, то она все равно пропадет при округлении. Поэтому принимается $\Theta = 0$.

Предположим, что все величины были определены на основании трех измерений, а период колебаний — на основании десяти измерений. Тогда даже при нормальном распределении результатов прямых измерений для оценки вероятности того, что истинное значение момента инерции лежит в интервале $(1{,}21 \div 1{,}23) \times 10^{-3}$ кг·м², приходится использовать распределение Стьюдента с числом степеней свободы, определяемым равенством (8.51):

$$k_{\text{эфф}} = \frac{[0{,}0053^2 + 0{,}0061^2 + 0{,}0010^2 + 0{,}0087^2]^2 \cdot 10^{-12}}{\left[\frac{0{,}0053^4}{3+1} + \frac{0{,}0061^4}{3+1} + \frac{0{,}0010^4}{3+1} + \frac{0{,}0087^4}{10+1}\right] \cdot 10^{-12}} - 2 = 17{,}2.$$

При таком числе степеней свободы интерполяцией данных табл. 8 Приложения находим для $t_P = 1$: $P\{|I - 1{,}22 \cdot 10^{-3}| < 0{,}01 \cdot 10^{-3}\} = 0{,}6665 = 66{,}65\ \%$, т. е. значительно меньше, чем при нормальном распределении результатов (при $k \to \infty$ $P\{|I - 1{,}22 \cdot 10^{-3}| < 0{,}01 \cdot 10^{-3}\} = 68{,}26\%$.

Для доверительной вероятности $P = 95\%$ интерполяцией данных таблицы находим $t_{0,95} = 2{,}108$. Тогда доверительная погрешность составляет $\hat{\delta}_{0,95} =$

$=t_{0,95}\cdot s_{\bar{I}}=2{,}108\cdot 0{,}01\cdot 10^{-3}=0{,}02\cdot 10^{-3}$ кг·м², и итог измерений можно записать в виде $I=(1{,}22\pm 0{,}02)\cdot 10^{-3}$ кг·м²; $P=95$ %, т. е. при расширении полосы значений момента инерции в два раза вероятность нахождения истинного значения внутри этой полосы возрастает до 95 %.

§ 50. КРИТЕРИЙ НИЧТОЖНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Как видно из последнего рассмотренного примера, не все частные погрешности косвенного измерения играют одинаковую роль в формировании итоговой погрешности результата. Частные погрешности измерения длины нитей подвеса и массы платформы значительно меньше остальных частных погрешностей, и, поскольку погрешность результата все равно округляется по крайней мере до двух значащих цифр, они могут не оказать на нее почти никакого влияния.

Если в равенстве $s_{\bar{X}_Q}=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}E_j^2}$ k-я частная погрешность такова, что

$$s_{\bar{X}_Q}<1{,}05\sqrt{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}E_j^2}, \tag{8.52}$$

то этой погрешностью можно пренебречь, поскольку при округлении уже 1,04999... принимается за 1,0.

Возведя обе части неравенства (8.52) в квадрат и приняв во внимание, что $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}E_j^2=s_{\bar{X}_Q}^2-E_k^2$, получим $s_{\bar{X}_Q}^2<1{,}1025(s_{\bar{X}_Q}^2-E_k^2)$, откуда следует, что частными погрешностями, меньшими

$$E_k^2<\frac{0{,}1025}{1{,}1025}s_{\bar{X}_Q}^2;\ E_k<0{,}306s_{\bar{X}_Q}$$

можно пренебречь. Округлив последнее неравенство, получим:

$$E_k<0{,}3s_{\bar{X}_Q};\ E_k<\frac{1}{3}s_{\bar{X}_Q}. \tag{8.53}$$

Эта формула в метрологии называется *критерием ничтожных погрешностей, а сами погрешности, отвечающие условию* (8.53), *называются ничтожными или ничтожно малыми.*

Формула (8.53) легко распространяется на случай нескольких погрешностей и приводит к следующему критерию ничтожности суммы квадратов частных погрешностей E_k; E_{k+1}; ...:

$$\sqrt{E_k^2+E_{k+1}^2+\ldots}<0{,}3s_{\bar{X}_Q}. \tag{8.54}$$

Использование критерия ничтожных погрешностей при решении задачи косвенных измерений позволяет найти те величины, повышение точности измерения которых позволит уменьшить сум-

марную погрешность результата. Очевидно, не имеет смысла повышать точность измерения тех величин, частные погрешности которых и без того ничтожно малы.

Так, в примере с определением момента инерции платформы частные погрешности измерения длины подвеса и массы платформы составляют в сумме

$$\sqrt{E_l^2 + E_m^2} = \sqrt{(0{,}0010)^2 + (0{,}0010)^2} \cdot 10^{-3} = 0{,}0014 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

что значительно меньше трети среднего квадратического отклонения итогового результата ($s_{\bar{X}_Q} = 0{,}010 \cdot 10^{-3}$ кг/м^2). Следовательно, эти погрешности можно не принимать во внимание и сосредоточить все усилия (при необходимости в этом) на повышении точности измерения остальных величин.

§ 51. СОВОКУПНЫЕ И СОВМЕСТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Эти виды измерений характеризуются тем, что значения искомых величин рассчитывают по системе уравнений, связывающих их с некоторыми другими величинами, измеряемыми прямыми или косвенными методами, причем измеряют несколько комбинаций значений этих величин. Каждая комбинация позволяет получить одно уравнение, так что система уравнений, содержащая всю информацию о значениях искомых величин, имеет вид

$$F_i(Q_1;\ Q_2;\ \ldots;\ Q_j;\ \ldots;\ Q_m;\ X_1^{(i)};\ X_2^{(i)};\ \ldots;\ X_r^{(i)};\ \ldots \\ \ldots;\ X_k^{(i)}) = 0; \qquad (8.55)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, где Q_j — значение искомых величин, общим числом m; $X_r^{(i)}$ — полученные в i-м опыте значения k величин, измеряемых прямыми или косвенными методами; F_i — символ функциональной зависимости между величинами в i-м опыте; число опытов равно n.

Если Q_j являются значениями одной и той же величины (например, массами гирь набора), то измерения совокупны; если же Q_j — это значения различных физических величин, то мы имеем дело с совместными измерениями. Такое подразделение носит, конечно, очень условный характер, однако оно имеет место в ГОСТ 16263—70 «Термины и определения».

После подстановки в исходную систему уравнений результатов прямых (или косвенных) измерений и проведения необходимых преобразований получаем ряд уравнений, содержащих лишь искомые величины и числовые коэффициенты:

$$F_i(Q_1;\ Q_2;\ \ldots;\ Q;\ \ldots;\ Q_m) = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8.56)$$

Эти уравнения называются *условными*.

Для того чтобы рассчитать значения искомых величин, достаточно иметь m уравнений, т. е. ровно столько, сколько имеется

неизвестных. Тогда результаты измерений и доверительные границы их погрешностей можно найти методами обработки результатов косвенных измерений. Однако обыкновенно для уменьшения погрешностей результатов делается значительно больше измерений, чем необходимо для определения неизвестных ($n>m$).

Вследствие ограниченной точности определения величин X_r условные уравнения одновременно не обращаются в тождества ни при каких значениях искомых величин. И поскольку определить истинные значения искомых величин мы не можем, задача сводится к нахождению их оценок, представляющих собой наилучшие приближения к истинным значениям.

Предположим, что $\hat{Q}_j$; $j=1, 2, \ldots, m$ — наилучшие приближения к неизвестным Q_j. Если значения этих оценок подставить в условные уравнения, то их правые части будут отличаться от левых. Чтобы получить тождества, придется записать

$$F_i(\hat{Q}_1;\ \hat{Q}_2;\ \ldots;\ \hat{Q}_j;\ \ldots;\ \hat{Q}_m)+v_i=0;\ i=1, 2, \ldots, n, \qquad (8.57)$$

где v_i — величины, называемые остаточными погрешностями условных уравнений. Если в систему условных уравнений подставить истинные значения искомых величин, то остаточные погрешности превратятся в случайные погрешности условных уравнений.

Одним из наиболее общих способов отыскания оценок истинных значений измеряемых величин является *метод наименьших квадратов*. Согласно этому методу оценки $\hat{Q}_j$ выбираются так, чтобы *минимизировать сумму квадратов остаточных погрешностей условных уравнений.*

Сумма квадратов остаточных погрешностей, определенных в соответствии с системой условных уравнений (8.57), составляет $S^2=\sum_{i=1}^{n} v_i^2=\sum_{i=1}^{n} F_i^2(\hat{Q}_1;\ \hat{Q}_2;\ \ldots;\ \hat{Q}_j;\ \ldots;\ \hat{Q}_m)$, и достигает минимума при системе значений Q_j, обращающей в нуль все частные производные от S^2 по искомым величинам:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{Q}_j}\sum_{i=1}^{n} v_i^2=0;\ j=1, 2, \ldots, m.$$

Выражая остаточные погрешности через функции, стоящие в левой части условных уравнений, получим систему из m уравнений с m неизвестными:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial F_i}{\partial \hat{Q}_j}=0;\ j=1, 2, \ldots, m, \qquad (8.58)$$

которая может быть решена относительно оценок $\hat{Q}_j$ искомых величин.

При решении задачи в общем случае, когда условные уравнения нелинейны, а результаты отдельных измерений коррелированы, мы сталкиваемся с рядом подчас непреодолимых трудностей. Поэтому здесь будет рассмотрен лишь частный случай, когда услов-

ные уравнения линейны или приведены к линейному виду известными способами, а результаты измерений величин X_r равнорассеянны и некоррелированы.

Тогда оценки, даваемые методом наименьших квадратов, будут состоятельными и несмещенными, а в случае нормального распределения результатов измерений еще и эффективными.

Пример. Методом совместных измерений сопротивления и температуры требуется определить коэффициенты в температурной формуле для сопротивления резистора $R_t = R_{20} + \alpha(t-20) + \beta(t-20)^2$, где R_t — сопротивление при температуре t °C; R_{20} — сопротивление при температуре 20 °C; α; β — искомые коэффициенты.

Температуру t и сопротивление R_t при этой температуре измеряют прямыми способами, а величины R_{20}, α и β являются искомыми.

Меняя тепловой режим сопротивления, можно получить любое число линейных относительно неизвестных величин условных уравнений вида

$$R_{20} + (t^{(1)} - 20) \cdot \alpha + (t^{(1)} - 20)^2 \cdot \beta = R_t^{(1)};$$

$$R_{20} + (t^{(2)} - 20) \cdot \alpha + (t^{(2)} - 20)^2 \cdot \beta = R_t^{(2)};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_{20} + (t^{(n)} - 20) \cdot \alpha + (t^{(n)} - 20)^2 \cdot \beta = R_t^{(n)}.$$

В любом случае система линейных условных уравнений всегда может быть приведена к виду

$$\begin{cases} a_{11}\hat{Q}_1 + a_{12}\hat{Q}_2 + \ldots + a_{1m}\hat{Q}_m = l_1; \\ a_{21}\hat{Q}_1 + a_{22}\hat{Q}_2 + \ldots + a_{2m}\hat{Q}_m = l_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\hat{Q}_1 + a_{n2}\hat{Q}_2 + \ldots + a_{nm}\hat{Q}_m = l_n, \end{cases} \tag{8.59}$$

где a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ и l_i — коэффициенты, определяемые из системы уравнений (8.55) после ее линеаризации (если она нелинейна) и подстановки значений величин, измеренных прямыми способами.

Знак равенства в условных уравнениях (8.59) будет иметь место, конечно, только в том случае, если к левым частям прибавить значения остаточных погрешностей. Вообще же он имеет чисто формальный характер.

Согласно способу наименьших квадратов оценки $\hat{Q}_j$ искомых величин Q_j нужно вычислить так, чтобы минимизировать сумму квадратов остаточных погрешностей:

$$v_i = l_i = a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \ldots - a_{im}\hat{Q}_m. \tag{8.60}$$

Сумма квадратов остаточных погрешностей составляет

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (l_i - a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \ldots - a_{im}\hat{Q}_m)^2 \tag{8.61}$$

Искомые оценки неизвестных, обращающие в минимум сумму (8.61) квадратов остаточных погрешностей, получаются в ре-

зультате решения системы m линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S^2}{\partial \hat{Q}_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}(l_i - a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \ldots - a_{im}\hat{Q}_m) = 0; \\ \dfrac{\partial S^2}{\partial \hat{Q}_2} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}(l_i - a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \ldots - a_{im}\hat{Q}_m) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial S^2}{\partial \hat{Q}_m} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} a_{im}(l_i - a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \ldots - a_{im}\hat{Q}_m) = 0. \end{cases} \tag{8.62}$$

Полученная система называется *системой нормальных уравнений*. Введя обозначения Гаусса для сумм

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = [a_{ij}^2]; \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = [a_{ij}a_{ik}]; \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ij}l_i = [a_{ij}l_i], \end{aligned}\right\} \tag{8.63}$$

систему нормальных уравнений можно записать в более удобном для решения виде:

$$\begin{cases} [a_{i1}^2]\hat{Q}_1 + [a_{i1}a_{i2}]\hat{Q}_2 + \ldots + [a_{i1}a_{im}]\hat{Q}_m = [a_{i1}l_i]; \\ [a_{i2}a_{i1}]\hat{Q}_1 + [a_{i2}^2]\hat{Q}_2 + \ldots + [a_{i2}a_{im}]\hat{Q}_m = [a_{i2}l_i]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a_{im}a_{i1}]\hat{Q}_1 + [a_{im}a_{i2}]\hat{Q}_2 + \ldots + [a_{im}^2]\hat{Q}_m = [a_{im}l_i]. \end{cases} \tag{8.64}$$

Решения системы нормальных уравнений являются очевидно линейными комбинациями величин l_i:

$$\begin{cases} \hat{Q}_1 = \alpha_{11}l_1 + \alpha_{12}l_2 + \ldots + \alpha_{1n}l_n = [\alpha_{1i}l_i]; \\ \hat{Q}_2 = \alpha_{21}l_1 + \alpha_{22}l_2 + \ldots + \alpha_{2n}l_n = [\alpha_{2i}l_i]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{Q}_m = \alpha_{m1}l_1 + \alpha_{m2}l_2 + \ldots + \alpha_{mn}l_n = [\alpha_{mi}l_i], \end{cases} \tag{8.65}$$

где α_{ij}; $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$ находят, решив систему (8.64).

Сопоставив уравнения (8.60) и (8.62), можно получить следующие равенства, выражающие свойства остаточных погрешностей условных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}v_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}v_i = \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_{im}v_i = 0. \tag{8.66}$$

Эти выражения применяются обычно для проверки правильности определения оценок $\hat{Q}_j$ искомых величин после решения системы нормальных уравнений (8.64).

В последнее время для нахождения оценок способом наименьших квадратов успешно применяются цифровые вычислительные машины. Поэтому точность оценок истинных значений измеряемых величин может быть существенно повышена путем увеличения числа условных уравнений до нескольких десятков или даже сотен, а в некоторых случаях и больше.

Для оценки точности полученной системы предположим, что точность определения коэффициентов a_{ij} системы условных уравнений значительно выше точности определения коэффициентов l_i, поэтому погрешности оценок искомых величин определяются только дисперсиями результатов измерения последних. Поскольку оценки $\hat{Q}_j$ являются линейными комбинациями величин l_i [см. формулу (8.65)], то их дисперсии составляют

$$s^2_{\hat{Q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^2_{ji} s^2_{l_i}. \tag{8.67}$$

Применительно к рассмотренному выше примеру принятое допущение означает, что погрешности измерения температуры ничтожно малы по сравнению с погрешностями измерения сопротивления. Во многих практических случаях сделанное нами предположение, как правило, оправдано. Если же точность определения всех коэффициентов условных уравнений приблизительно одинакова, то для оценки точности решений по формуле (8.65) приходится прибегать к общим, более сложным приемам.

Поскольку при развитии способа наименьших квадратов мы исходили из условия равнорассеянности наблюдений, то все дисперсии под знаком суммы [см. выражение (8.67)] должны быть одинаковы: $s^2_{l_i} = s^2_l = \text{const}$; $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Поэтому среднее квадратическое отклонение оценки $\bar{Q}_j$ составит:

$$s_{\hat{Q}_j} = s_l \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2_{ji}}; \; j = 1, 2, \ldots, m. \tag{8.68}$$

В курсах математической статистики приведено очень простое выражение для дисперсии s^2_l:

$$s_l^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n} v_i^2, \tag{8.69}$$

где остаточные погрешности v_i легко определить по (8.60) после определения оценок $\hat{Q}_j$ по формулам (8.65).

Пример. Определить способом наименьших квадратов параметры A и B зависимости $\Delta = A + BR_z$ погрешности Δ измерения углов, воспроизводимых угловыми мерами, с помощью односекундного гониометра от средней высоты R_z неровностей их поверхностей.

Погрешности Δ измерений и значения средних высот неровностей представлены в табл. 12.

Таблица 12

i	R_z, мкм	Δ''	i	R_z, мкм	Δ''
1	0,072	2,8	7	0,140	3,0
2	0,080	2,6	8	0,140	3,4
3	0,112	3,2	9	0,183	3,7
4	0,120	2,9	10	0,208	4,1
5	0,130	3,1	11	0,241	4,5
6	0,136	3,4	12	0,268	4,8

Систему условных уравнений (8.59) получают подстановкой табличных данных в уравнение исходной зависимости $A+B(R_z)_i=\Delta_i$, $i=1, 2, \ldots, 12$.
Число n уравнений равно, таким образом, двенадцати, число m неизвестных — двум (A и B), а коэффициенты условных уравнений (8.59) составляют: $a_{i1}=1$; $a_{i2}=(R_z)_i$; $l_i=\Delta_i$.
В обозначениях Гаусса система нормальных уравнений (8.64) имеет вид

$$\begin{cases} [a_{i1}^2]\hat{A}+[a_{i1}a_{i2}]\hat{B}=[a_{i1}l_1]; \\ [a_{i1}a_{i2}]\hat{A}+[a_{i2}^2]\hat{B}=[a_{i2}l_i], \end{cases}$$

где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — оценки искомых параметров.

Примеры вычисления коэффициентов системы нормальных уравнений приведены в табл. 13.

Таблица 13

i	a_{i1}	a^2_{i1}	a_{i2}	a^2_{i2}	$a_{i1}a_{i2}$	l_i	$a_{i1}l_i$	$a_{i2}l_i$
1	1	1	0,072	0,005184	0,072	2,8	2,8	0,2016
2	1	1	0,080	0,006400	0,080	2,6	2,6	0,2080
3	1	1	0,112	0,012544	0,112	3,2	3,2	0,3584
4	1	1	0,120	0,014400	0,120	2,9	2,9	0,3480
5	1	1	0,130	0,016900	0,130	3,1	3,1	0,4030
6	1	1	0,136	0,018496	0,136	3,4	3,4	0,2624
7	1	1	0,140	0,019600	0,140	3,0	3,0	0,4200
8	1	1	0,140	0,019600	0,140	3,4	3,4	0,4760
9	1	1	0,183	0,033489	0,183	4,7	4,7	0,6771
10	1	1	0,208	0,043264	0,208	4,1	4,1	0,8528
11	1	1	0,241	0,058081	0,241	4,5	4,5	1,0845
12	1	1	0,268	0,071824	0,268	4,8	4,8	1,2864
Суммы		12		0,319782	1,830		41,5	6,7782

Таким образом, $[a^2_{i1}]=12$; $[a^2_{i2}]=0{,}319782$; $[a_{i1}a_{i2}]=1{,}830$; $[a_{i1}l_i]=41.5$; $[a_{i2}l_i]=6{,}7782$.
Окончательно для системы нормальных уравнений получаем:

$$\begin{cases} 12\hat{A}+1{,}830\hat{B}=41{,}5; \\ 1{,}830\hat{A}+0{,}319782\hat{B}=6{,}7782, \end{cases}$$

откуда находим искомые оценки: $\hat{A}=1{,}7746$; $\hat{B}=11{,}0411$.

В более общем виде решение системы нормальных уравнений должно быть записано в виде:

$$\hat{A} = \frac{[a_{i1}l_i][a_{i2}^2] - [a_{i2}l_i][a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]^2} = \left[\frac{a_{i1}[a_{i2}^2] - a_{i2}[a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]} l_i\right];$$

$$\hat{B} = \frac{[a_{i2}l_i][a_{i1}^2] - [a_{i1}l_i][a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}l_{i2}]^2} = \left[\frac{a_{i2}[a_{i1}^2] - a_{i1}[a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]^2} l_i\right].$$

Сравнивая полученные выражения с формулой (8.65), находим коэффициенты α_{ji}; $j=1, 2$, которые для этого обозначим через $\alpha_{\hat{A}_i}$; $\alpha_{\hat{B}_i}$;

$$\alpha_{\hat{A}_i} = \frac{a_{i1}[a_{i2}^2] - a_{i2}[a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]^2};$$

$$\alpha_{\hat{B}_i} = \frac{[a_{i2}[a_{i1}^2] - a_{i1}[a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]^2}.$$

Тогда $\hat{A}=[\alpha_{A_i} l_i]$; $\hat{B}[\alpha_{B_i} l_i]$.

Значения этих коэффициентов удобно вычислять так, как показано в табл. 14 и 15.

Таблица 14

i	$a_{i1}[a^2_{i2}]$	$a_{i2}[a_{i1}a_{i2}]$	2—3	$\alpha_{\hat{A}_i}$	$\alpha^2_{\hat{A}_i}$
1	2	3	4	5	6
1	0,319782	0,13176	0,188022	0,385	0,148225
2	0,319782	0,14640	0,173382	0,355	0,126025
3	0,319782	0,20496	0,114822	0,236	0,055696
4	0,319782	0,21960	0,100182	0,205	0,042025
5	0,319782	0,23790	0,081882	0,168	0,028224
6	0,319782	0,24888	0,070902	0,145	0,021025
7	0,319782	0,25620	0,063582	0,130	0,016900
8	0,319782	0,25620	0,063582	0,130	0,016900
9	0,319782	0,33489	−0,015108	−0,031	0,000961
10	0,319782	0,38064	−0,060858	−0,125	0,015625
11	0,319782	0,44103	−0,121248	−0,248	0,061504
12	0,319782	0,49044	−0,170658	−0,350	0,122500
Сумма					0,655610

Примечание. Данные графы 4 представляют собой разности данных граф 2 и 3.

Теперь по формуле (8.60) $v_i = l_i - a_{i1}\hat{A} - a_{i2}\hat{B}$ можно вычислить остаточные погрешности, их квадраты и сумму квадратов (табл. 16).

Оценка для дисперсии остаточных погрешностей согласно формуле (8.69) составляет

$$s_l^2 = \frac{1}{12-2}\sum_{i=1}^{12} v_i^2 = \frac{0,286607}{10} = 0,028661; \quad s_l = 0,169.$$

Таблица 15

i	$a_{i2}[a^2_{i1}]$	$a_{i1}[a_{i1}a_{i2}]$	2—3	$a_{\hat{B}_i}$	$a^2_{\hat{B}_i}$
1	2	3	4	5	6
1	0,864	1,830	—0,966	—1,980	3,920400
2	0,960	1,830	—0,870	—1,780	3,168400
3	1,344	1,830	—0,486	—0,994	0,988036
4	1,440	1,830	—0,390	—0,799	0,638401
5	1,560	1,830	—0,270	—0,553	0,305809
6	1,632	1,830	—0,198	—0,406	0,164836
7	1,680	1,830	—0,150	—0,307	0,094249
8	1,680	1,830	—0,150	—0,307	0,094249
9	2,196	1,830	+0,366	+0,750	0,562500
10	2,496	1,830	+0,666	+1,365	1,863225
11	2,892	1,830	+1,062	+2,17	4,708900
12	3,216	1,830	+1,386	+2,84	8,065600
Сумма					24,574605

Примечание. Данные графы 4 представляют собой разности данных граф 2 и 3.

Таблица 16

i	l_i	$a_{i2}\hat{B}$	$a_{i1}\hat{A}$	v_i	v^2_i
1	2,8	0,7949	1,7746	—0,2305	0,052900
2	2,6	0,8832	1,7746	+0,0578	0,003340
3	3,2	1,2365	1,7746	—0,1889	0,035721
4	2,9	1,3248	1,7746	+0,1994	0,039601
5	3,1	1,4352	1,7746	+0,1098	0,012100
6	3,4	1,5014	1,7746	—0,1240	0,015376
7	3,0	1,5456	1,7746	+0,3202	0,102400
8	3,4	1,5456	1,7746	—0,0798	0,006400
9	3,7	2,0203	1,7746	+0,0949	0,009025
10	4,1	2,2923	1,7746	—0,0331	0,001096
11	4,5	2,6606	1,7746	—0,0648	0,004199
12	4,8	2,9587	1,7746	—0,0667	0,004449
Сумма					0,286607

По формуле (8.68) находим оценки среднего квадратического отклонения результатов совместных измерений параметров A и B исходной зависимости:

$$s_{\hat{A}} = s_l \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \alpha^2_{\hat{A}_i}} = 0,137;$$

$$s_{\hat{B}} = s_l \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \alpha^2_{\hat{B}_i}} = 0,84.$$

Значения сумм квадратов коэффициентов $\alpha_{\hat{A}_i}$ и $\alpha_{\hat{B}_i}$ взяты из табл. 14 и 15.

Окончательно результаты измерений записывают в следующем виде:

$$\hat{A} = 1{,}775;\ s_{\hat{A}} = 0{,}137;$$

$$\hat{B} = 11{,}04;\ s_{\hat{B}} = 0{,}84.$$

Методом наименьших квадратов (способом совместных измерений) можно воспользоваться и при исследовании некоторой зависимости $R=f(T)$ между величинами R и T, если ряд значений независимой переменной T воспроизводится искусственно и измеряются соответствующие им значения зависимой переменной R. Результаты измерений состоят при этом из пар значений (T_i; R_i, $i=1, 2, \ldots, n$), причем погрешности измерения величины T настолько меньше погрешностей измерения величины R, что ими можно пренебречь. Метод наименьших квадратов позволяет в этом случае аппроксимировать зависимость, заданную парами значений (T_i, R_i), аналитическим выражением вида $R=a_0f_0(T)+a_1f_1(T)+\ldots+a_mf_m(T)$, где $f_0(T)$; $f_1(T)$; ...; $f_m(T)$ — заданные функции. Коэффициенты a_0; a_1; ...; a_m являются теми неизвестными величинами, оценки значений которых определяют методом совместных измерений. Действительно, полагая $a_{ij}=f_j(T_i)$; $Q_j=a_j$; $l_i=R_i$; $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$, приходим к системе условных уравнений (8.59).

Особого внимания заслуживает случай, когда надо представить зависимость $R(T)$ в виде полинома степени m, и функции $f_j(T)$ имеют вид $f_0(T)=1$; $f_1(T)=T$; ...; $f_m(T)=T^m$. Тогда $R=a_0+a_1T+\ldots+a_mT^m$.

Иллюстрацией к определению полинома, аппроксимирующего зависимость между двумя величинами, заданную парами их значений, может служить приведенный выше пример, где пары значений величин (R_{zi}, Δ_i) представлены в табл. 12. Аппроксимация осуществлялась полиномом $A+BR_z$ первой степени относительно независимой переменной.

Глава IX

СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ. ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 52. СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения выполняются с помощью технических средств, которые имеют нормированные погрешности и называются *средствами измерений*.

Разработка комплексов средств измерений является задачей приборостроения. Метрология же должна дать единую классификационную схему средств измерений и выявить совокупность их параметров, стандартизация которых позволила бы выбрать средства, обеспечивающие получение результата с заданной точностью, прогнозировать точность проводимых с помощью этих средств измерений и установить методы их поверки.

Средства измерений включают в себя меры, измерительные преобразователи, измерительные приборы и вспомогательные средства. Их часто объединяют в более или менее сложные комплексы: измерительные установки и измерительные системы.

Меры. *К мерам относятся средства измерений, предназначенные для воспроизведения физических величин заданного размера.*

Меры, воспроизводящие физические величины лишь одного размера, называются *однозначными.* Некоторые из них, например, меры рефракции или коэффициента преломления, применяются исключительно в виде отдельных мер, поскольку реализация операции сложения воспроизводимых ими величин связана с большими трудностями или вовсе неосуществима. Величины, для которых операция сложения выполняется сравнительно легко, воспроизводятся с помощью многозначных или однозначных мер, объединяемых в наборы или магазины.

Многозначные меры могут воспроизводить ряд размеров физической величины, часто даже непрерывно заполняющих некоторый промежуток между определенными границами. Наиболее распространенными многозначными мерами являются миллиметровая линейка, вариометр и конденсатор переменной емкости.

В наборах и магазинах отдельные меры могут объединяться в различных сочетаниях для воспроизведения некоторых промежуточных или суммарных, но обязательно дискретных размеров величин. В магазинах меры объединены в одно механическое целое, снабженное специальными переключателями, которые связаны с отсчетными устройствами. В противоположность этому набор состоит обычно из нескольких мер, которые могут выполнять свои функции как в отдельности, так и в различных сочетаниях друг с другом (набор концевых мер длины, набор гирь, набор мер добротности и индуктивности и т. д.).

Для воспроизведения производных величин иногда прибегают к физическому осуществлению соответствующих операций над основными или связанными с ними величинами. В качестве примера можно указать на воспроизведение размеров давления с помощью грузопоршневых приборов. Здесь осуществляется операция $p=mg/F$, где мера массы m, помещенная в поле тяжести g Земли, создает силу mg, которая воздействует на поршень площадью F и вызывает под ним давление, равное p.

К однозначным мерам относятся также образцы и образцовые вещества.

Стандартные образцы и образцовые вещества представляют собой специально оформленные тела или пробы вещества определенного и строго регламентированного содержания, одно из свойств которых при определенных условиях является величиной с известным значением. К ним относятся образцы твердости, шероховатости, белой поверхности, а также стандартные образцы, используемые при поверке приборов для определения механических свойств материалов. Образцовые вещества играют большую роль в создании реперных точек при осуществлении шкал. Например, чистый цинк служит для воспроизведения температуры 419,58 °С, золото — 1064,43 °С. Применение образцовых веществ при количественных химических анализах является в настоящее время наиболее эффективным средством повышения их точности.

Действительное значение величины, воспроизводимой мерой, называется *действительным значением меры.* Действительное значение меры получают при ее измерении путем исключения систематических погрешностей и сведения к минимуму параметров случайных погрешностей. Погрешность определения действительного значения называется *погрешностью аттестации меры.*

Указанное на мере значение величины, которому с допустимыми отклоне-

ниями должно быть равно действительное значение меры, является *номинальным* значением меры. Номинальное и действительное значения меры, а также погрешность ее аттестации заносятся в специальные свидетельства, которыми сопровождаются меры. Разность между номинальным и действительным значениями определяет *погрешность меры*, которая зависит от конструкции меры, технологии ее изготовления и условий применения. Погрешность меры постоянна и величина, обратная ей по знаку, является поправкой к номинальному значению меры.

В зависимости от погрешности аттестации меры подразделяются на *разряды* (меры 1, 2-го и т. д. разрядов), а погрешность мер является основой их деления на классы. Меры, которым присвоен тот или иной разряд, применяются для поверки измерительных средств и называются образцовыми. Меры, поделенные на классы, называются рабочими и используются при технических измерениях.

Измерительные преобразователи. Согласно ГОСТ 16263—70 *измерительным преобразователем* называется средство измерений, служащее «для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования, обработки и (или) хранения, но не поддающейся непосредственному восприятию наблюдателем».

Преобразуемая величина называется *входной*, а результат преобразования — *выходной* величиной. Соотношение между ними задается *функцией преобразования* (статической характеристикой). Если в результате преобразования физическая природа величины не изменяется, а функция преобразования является линейной, то преобразователь называется *масштабным или усилителем* (усилители напряжения, измерительные микроскопы, электронные усилители). Слово «усилитель» обычно употребляется с определением, которое приписывается ему в зависимости от рода преобразуемой величины (усилитель напряжения, гидравлический усилитель) или от вида единичных преобразований, происходящих в нем (ламповый усилитель, струйный усилитель). В тех случаях, когда в преобразователе входная величина превращается в другую по физической природе величину, он получает название по видам этих величин (электромеханический, пневмоемкостный и так далее).

Хотя измерительные преобразователи являются конструктивно обособленными элементами, самостоятельного значения для проведения измерений в противовес мерам и измерительным приборам они подчас не имеют. Чаще они являются лишь составными частями более или менее сложных измерительных комплексов и систем автоматического контроля, управления и регулирования.

По месту, занимаемому в приборе, преобразователи подразделяются на:

первичные, к которым подводится непосредственно измеряемая физическая величина;

передающие, на выходе которых образуются величины, удобные для их регистрации и передачи на расстояние;

промежуточные, занимающие в измерительной цепи место после первичных.

Измерительные приборы. К *измерительным приборам* относятся средства измерений, предназначенные для получения измерительной информации о величине, подлежащей измерению, в форме, удобной для восприятия наблюдателем.

Наибольшее распространение получили *приборы прямого действия*, при использовании которых измеряемая величина подвергается ряду последовательных преобразований в одном направлении, т. е. без возвращения к исходной величине. Они состоят из ряда блоков, трансформирующих измеряемую величину в мощный сигнал, под влиянием которого перемещаются подвижные органы отсчетных устройств, предварительно прямо или косвенно проградуированных с помощью мер. К приборам прямого действия относится большинство манометров, термометров, амперметров, вольтметров и т. д.

Значительно бо́льшими точностными возможностями обладают *приборы сравнения*, предназначенные для сравнения измеряемых величин с величинами, значения которых известны.

Сравнение осуществляется с помощью компенсационных или мостовых цепей. *Компенсационные цепи* применяются для сравнения активных величин, т. е. несущих в себе некоторый запас энергии (сил, давлений и моментов сил, элек-

трических напряжений и токов, яркости источников излучения и т. д.). Сравнение проводится путем встречного включения этих величин в единый контур и наблюдения их разностного эффекта. По этому принципу работают такие приборы, как равноплечие и неравноплечие весы (сравнение на рычаге силовых эффектов действия масс), грузопоршневые и грузопружинные манометрические и вакуумметрические приборы (сравнение на поршне силовых эффектов измеряемого давления и мер массы), электрические компенсаторы (сравнение на сопротивлении падений напряжения от измеряемой ЭДС и ЭДС нормального элемента или другого образцового источника), радиационные пирометры (сравнение наблюдателем яркостей свечения объекта и нити накаливания лампы током образцового элемента).

Для сравнения пассивных величин (электрические, гидравлические, пневматические и другие сопротивления) применяются мостовые цепи типа электрических уравновешенных или неуравновешенных мостов. Конечно, пассивные величины могут быть вначале преобразованы в активные или наоборот и сравниваться соответственно в компенсационных или мостовых цепях.

В дифференциальных приборах сравнения эффект сравнения измеряют с помощью прибора прямого действия или другого прибора сравнения. В нулевых приборах этот эффект используется для ручного или автоматического изменения размера величины, служащей для сравнения, или части ее, включенной в цепь сравнения, до тех пор, пока разностный эффект не станет равным нулю. В зависимости от этого говорят о приборах сравнения с ручным уравновешиванием и об автоматических приборах сравнения (автоматических компараторах).

На рис. 33 изображена кинематическая схема пружинного динамометра, являющегося прибором прямого действия. При растяжении кольцевого чувствительного элемента измеряемой силой он деформируется. Линейное перемещение закрепленного на нем шарнира увеличивается рычажно-зубчатым механизмом и преобразуется в угол поворота стрелки, которая отмечает на шкале значение измеряемой силы.

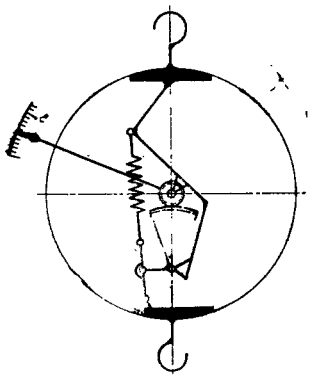


Рис. 33

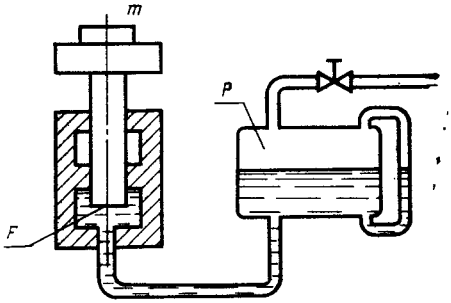


Рис. 34

Схема грузопоршневого манометра, показанного на рис. 34, дает представление о компенсационной цепи сравнения активных величин. Сравнивают измеряемое давление сжатого воздуха, подаваемого через вентиль к разделительной камере, и давление, развиваемое с помощью поршня грузами, которые накладывают на специальную чашу. При равенстве давлений поршень находится в положении равновесия и измеряемое давление определяется как $p=mg/F$, где m — масса грузов на чашке манометра, g — ускорение свободного падения, F — площадь поршня. Таким образом, здесь мы имеем дело с нулевым прибором сравнения ручного уравновешивания.

На рис. 35 приведена схема неуравновешенного электрического моста для измерения температуры с помощью термометра сопротивления R_{n1}. Термометр R_{n2} находится в условиях постоянной температуры и является мерой для сравнения. Мостовая цепь образуется сопротивлениями R_1 и R_2 и термометрами R_{n1} и R_{n2}. Сопротивление R_3 служит для компенсации начальной разности сопротивления термометров. Питание моста осуществляется переменным напряжением вторичной обмотки трансформатора Тр1. Напряжение U_x разбаланса мостовой схемы, пропорциональное отклонению температуры в месте установки термометра R_{n1} от температуры термометра R_{n2}, измеряется автоматическим компенсатором напряжения. Напряжение U_x компенсируется напряжением U_k, снимаемым со вторичной обмотки трансформатора Тр2, первичная обмотка которого включена в цепь питания моста. Разность напряжений $U_x - U_k$ увеличивается и управляет работой реверсивного двигателя Д, направление вращения которого зависит от знака разности $U_x - U_k$. Вращаясь в ту или иную сторону, ротор двигателя изменяет коэффициент трансформации Тр2 так, чтобы $U_x - U_k = 0$. Кроме того, ротор двигателя перемещает указатель У отсчетного устройства, по положению которого судят об измеряемой температуре.

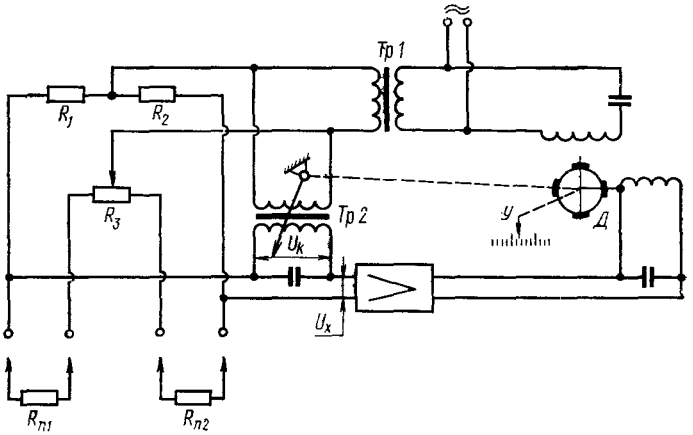


Рис. 35

По способу отсчета значений измеряемых величин приборы подразделяются на *показывающие*, в том числе на *аналоговые и цифровые*, и на *регистрирующие*.

Наибольшее распространение получили аналоговые приборы, отсчетные устройства которых состоят из двух элементов — шкалы и указателя, причем один из них связан с подвижной системой прибора, а другой с корпусом. В цифровых приборах отсчет осуществляется с помощью механических, электронных или других цифровых отсчетных устройств. Цифровые приборы прямого действия применяются наиболее часто в тех случаях, когда измеряемая величина предварительно легко преобразуется в угол поворота некоторого вала (лопастные счетчики) или в последовательность импульсов (регистрация радиоактивных излучений).

По способу записи измеряемой величины регистрирующие приборы делятся на *самопишущие* и *печатающие*. В самопишущих приборах, таких, как барограф или шлейфовый осциллограф, запись показаний представляет собой график или диаграмму. В печатающих приборах информация о значении измеряемой величины выдается в числовой форме на бумажной ленте.

Автоматические приборы сравнения выпускаются чаще всего в виде комбинированных приборов, в которых шкальный или цифровой отсчет сочетается с записью на диаграмме или с печатанием результатов измерений. Нужно отметить, что сам принцип действия автоматических приборов сравнения, основанный на уравновешивании и перемещении указателя с помощью специального двигателя, побуждает делать их регистрирующими. Поэтому указатель таких

приборов может одновременно с показанием и регистрацией выполнять ряд вспомогательных операций, например, включать и выключать контакты управляющих цепей, непосредственно переставлять регулирующие органы и т. п. Кроме того, выходное звено его привода легко связывается с преобразователями «перемещение — код» или «угол поворота — код», в результате чего получаются приборы сравнения с цифровым отсчетом. Выходные данные подобных приборов, будучи представлены в цифровой форме, могут быть использованы непосредственно для ввода их в цифровые вычислительные машины для последующей математической обработки результатов измерения.

Благодаря описанным выше свойствам автоматические приборы сравнения стали основным современным средством измерения, особенно в тех отраслях, где измерения связаны с проведением сложных вычислений с помощью цифровых вычислительных машин.

Вспомогательные средства измерений. К этой группе относятся средства измерений величин, влияющих на метрологические свойства другого средства измерений при его применении или поверке. Показания вспомогательных средств измерений используются для вычисления поправок к результатам измерений (например, термометров для измерения температуры окружающей среды при работе с грузопоршневыми манометрами) или для контроля за поддержанием значений влияющих величин в заданных пределах (например, психрометров для измерения влажности при точных интерференционных измерениях длин).

Комплексные измерительные устройства. Для измерения какой-либо величины или одновременно нескольких величин иногда бывает недостаточно одного измерительного прибора. В этих случаях создают целые комплексы расположенных в одном месте и функционально объединенных друг с другом средств измерений (мер, преобразователей, измерительных приборов и вспомогательных средств), предназначенных для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия наблюдателем. Подобные комплексы называются *измерительными установками.* Измерительная установка, оснащенная образцовыми средствами измерений и предназначенная для поверки других средств измерений, называется *поверочной установкой.*

Измерительные системы отличаются от измерительных установок тем, что они предназначены для выработки сигналов измерительной информации в форме, удобной не только для восприятия наблюдателем, но и для автоматической обработки результатов измерений, передачи на расстояние или использования в автоматических системах управления. Отдельные средства измерений, входящие в измерительную систему, могут быть значительно удалены друг от друга (иногда на многие десятки, сотни и даже миллионы километров) и соединены между собой каналами проводной или беспроводной связи.

§ 53. ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ

В рамках единой измерительной системы информация о значении физических величин передается от одного средства измерения к другому с помощью сигналов.

Наиболее часто в качестве сигналов используются:

сигналы постоянного уровня (постоянные электрические токи и напряжения, давление сжатого воздуха, световой поток);

синусоидальные сигналы (переменный электрический ток или напряжение);

последовательность прямоугольных импульсов (электрических или световых).

Сигнал характеризуется рядом параметров. В первом случае единственным параметром сигнала является его уровень. Синусоидальный сигнал характеризуется своей амплитудой, фазой и частотой, последовательность прямоугольных импульсов — амплитудой, фазой, частотой, шириной импульсов или комбинацией импульсов различного уровня в течение определенного промежутка времени.

Для того, чтобы исходный сигнал стал измерительным, необходимо один из его параметров связать функциональной зависимостью с измеряемой физической величиной. Параметр сигнала, выбранный в качестве такового, называется информативным, а все остальные параметры — неинформативными. Процесс

преобразования исходного сигнала в измерительный, т. е. преобразование одного из параметров исходного сигнала, генерируемого некоторым источником, в информативный параметр, называется модуляцией. В зависимости от вида модуляции измерительные сигналы можно классифицировать следующим образом.

Сигналы постоянного уровня характеризуются лишь одним параметром и поэтому могут быть модулированы только по уровню. Уровень сигнала является при этом мерой измеряемой величины.

Синусоидальные сигналы могут быть модулированы по амплитуде, фазе или частоте. В зависимости от того, который из этих параметров сигнала является мерой измеряемой величины, говорят об амплитудно-модулированных, фазомодулированных или частотно-модулированных сигналах.

Последовательность прямоугольных импульсов может быть модулирована по амплитуде (амплитудно-импульсно модулированные сигналы), по частоте (частотно-импульсно модулированные сигналы), по фазе (фазоимпульсно модулированные сигналы) или по ширине импульсов (широтно-импульсно модулированные сигналы). Сигнал, в котором различным значениям измеряемой величины поставлена в соответствие определенная комбинация импульсов различного уровня, называется кодо-импульсным или цифровым.

В зависимости от характера изменения информативного параметра сигнала по уровню и во времени измерительные сигналы подразделяются на:

непрерывные по уровню или аналоговые, если их информативный параметр может принимать любые значения в заданном диапазоне;

дискретные или квантованные по уровню, если их информативный параметр может принимать лишь некоторое ограниченное число значений в пределах заданного интервала;

непрерывные во времени, если они существуют в течение всего времени измерения и в любой момент может быть выведен на регистрацию;

дискретизированные или квантованные по времени, если они несут информацию о значении измеряемой физической величины лишь в течение некоторых промежутков времени. К этой группе относятся, например, все виды импульсно-модулированных сигналов.

При анализе измерительных сигналов их принято описывать либо функциями времени, либо с помощью спектральных представлений, основанных на преобразованиях Фурье и Лапласа.

§ 54. МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Все средства измерений, независимо от их конкретного исполнения, обладают рядом общих свойств, необходимых для выполнения ими их функционального назначения. Технические характеристики, описывающие эти свойства и оказывающие влияние на результаты и на погрешности измерений, называются метрологическими характеристиками. Перечень важнейших из них регламентируется ГОСТ 8.009—72 «ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений». Комплекс нормируемых метрологических характеристик устанавливается таким образом, чтобы с их помощью можно было оценить погрешность измерений, осуществляемых в известных рабочих условиях эксплуатации посредством отдельных средств измерений или совокупности средств измерений, например, автоматических измерительных систем.

Одной из основных метрологических характеристик измерительных преобразователей является статическая характеристика преобразования (иначе называемая функцией преобразования или градуировочной характеристикой). Она устанавливает зависимость

$y=f(x)$ информативного параметра y выходного сигнала измерительного преобразователя от информативного параметра x входного сигнала.

Статическая характеристика нормируется путем задания в форме уравнения, графика или таблицы некоторой номинальной статической характеристики, которая официально приписывается данному измерительному преобразователю при номинальных значениях неинформативных параметров входного сигнала. Понятие статической характеристики применимо и к измерительным приборам, если под независимой переменной x понимать значение измеряемой величины или информативного параметра входного сигнала, а под зависимой величиной — показание прибора.

Если статическая характеристика преобразования линейна $y=Kx$, то коэффициент K называется чувствительностью измерительного прибора (преобразователя). В противном случае под чувствительностью следует понимать производную от статической характеристики.

Важной характеристикой шкальных измерительных приборов является цена деления, т. е. то изменение измеряемой величины, которому соответствует перемещение указателя на одно деление шкалы. Если чувствительность постоянна в каждой точке диапазона измерения, то шкала называется равномерной. При неравномерной шкале нормируется наименьшая цена деления шкалы измерительных приборов, а также многозначных мер со шкалой. У цифровых приборов шкалы в явном виде нет, и для них вместо цены деления указывается цена единицы младшего разряда числа в показании прибора.

Важнейшей метрологической характеристикой средств измерений является погрешность.

Под абсолютной погрешностью меры понимается алгебраическая разность между ее номинальным $X_н$ и действительным $X_д$ значениями

$$\Delta = X_н - X_д, \tag{9.1}$$

а под абсолютной погрешностью измерительного прибора — разность между его показанием $X_п$ и действительным значением $X_д$ измеряемой величины

$$\Delta = X_п - X_д \tag{9.1'}$$

Абсолютная погрешность измерительного преобразователя может быть выражена в единицах входной или выходной величины. В единицах входной величины абсолютная погрешность преобразователя определяется как разность между значением входной величины X, найденной по действительному значению выходной величины и номинальной статической характеристике преобразователя, и действительным значением $X_д$ входной величины.

$$\Delta = X - X_д \tag{9.1''}$$

Однако в большей степени точность средства измерений ха-

рактеризует *относительная погрешность,* т. е. выраженное в процентах отношение абсолютной погрешности к действительному значению измеряемой или воспроизводимой данным средством измерений величины:

$$\delta = \frac{100\Delta X}{X_д}. \qquad (9.2)$$

Обычно $\delta \ll 1$, поэтому в формулу (9.2) вместо действительного значения часто может быть подставлено номинальное значение меры или показание измерительного прибора.

Если диапазон измерения прибора охватывает и нулевое значение измеряемой величины, то относительная погрешность обращается в бесконечность в соответствующей ему точке шкалы. В этом случае пользуются понятием приведенной *погрешности,* равной отношению абсолютной погрешности измерительного прибора к некоторому нормирующему значению X_N:

$$\gamma = \frac{100\Delta X}{X_N}. \qquad (9.3)$$

В качестве *нормирующего значения* принимается значение, характерное для данного вида измерительного прибора. Это может быть, например, диапазон измерений, верхний предел измерений, длина шкалы и т. д. Правила выбора нормирующего значения приводятся в ГОСТ 8.009—72.

Погрешности измерительных средств принято подразделять на *статические,* имеющие место при измерении постоянных величин после завершения переходных процессов в элементах приборов и преобразователей, *и динамические,* появляющиеся при измерении переменных величин и обусловленные инерционными свойствами средств измерений.

Согласно общей классификации, статические погрешности измерительных средств делятся на *систематические* и *случайные.* Систематические погрешности являются в общем случае функцией измеряемой величины, влияющих величин (температуры, влажности, напряжения питания и пр.) и времени.

В функции измеряемой величины систематические погрешности находят при поверке и аттестации образцовых приборов, например, измерением наперед заданных значений измеряемой величины в нескольких точках шкалы. В результате строится кривая или создается таблица погрешностей, которая используется для определения поправок. Поправка в каждой точке шкалы численно равна систематической погрешности и обратна ей по знаку, поэтому при определении действительного значения измеряемой величины поправку следует прибавить к показанию прибора. Так, если поправка к показанию динамометра 120 Н равна +0,6 Н, то действительное значение измеряемой силы составляет 120+ +0,6=120,6 Н. Удобнее пользоваться поправкой, чем систематической погрешностью, поэтому приборы чаще снабжают кривыми или таблицами поправок.

Систематическую погрешность в функции измеряемой величины можно представить в виде суммы погрешности схемы, определяемой самой структурной схемой средства измерений, и технологических погрешностей, обусловленных погрешностями изготовления его элементов.

Как те, так и другие виды погрешностей можно рассматривать в качестве систематических лишь при измерении постоянной величины с помощью одного экземпляра измерительного прибора. В массе же измерений различных значений физической величины, осуществляемых одним или многими приборами того же типоразмера, эти систематические погрешности приходится относить к классу случайных.

Выделение систематических погрешностей в отдельную группу обусловливается, таким образом, лишь тем, что при поверке измерительных средств они могут быть определены для каждой точки шкалы и исключены из результатов последующих измерений. Именно так и поступают при точных метрологических измерениях.

Между погрешностями схемы и технологическими погрешностями средств измерений существует принципиальная разница. Если первые накладывают свой отпечаток на характер изменения по шкале суммарной погрешности всех средств измерений данного типоразмера, то технологические погрешности индивидуальны для каждого экземпляра, т. е. их значения в одних и тех же точках шкалы различны для различных экземпляров приборов. Этим, конечно, не отрицается возможность существования вероятностных связей между ними как в одной, так и в нескольких точках шкалы, поскольку общность технологического процесса изготовления приборов данного типа, несомненно, создает некоторую общность изменения их технологических погрешностей.

На рис. 36, *а* показано взаимное положение статических характеристик реального $f(Q)$ и идеального $f_0(Q)$ приборов при наличии только погрешностей схемы. Технологические погрешности в большой степени искажают эту картину. Результатом их проявления является:

а) поступательное смещение статической характеристики относительно характеристики идеального прибора и возникновение погрешности, постоянной в каждой точке шкалы; эта погрешность называется *аддитивной* (рис. 36, *б*);

б) поворот статической характеристики и появление погрешности, линейно возрастающей или убывающей с ростом измеряемой величины и называемой *мультипликативной* погрешностью (рис. 36, *в*);

в) *нелинейные искажения* статической характеристики (рис. 36, *г*);

г) появление *погрешности обратного хода,* выражающейся в несовпадении статических характеристик прибора при увеличении и уменьшении измеряемой величины (рис. 36, *д*).

В функции значений влияющих величин систематическую погрешность можно в большинстве случаев рассматривать как прогрессивную, линейно меняющуюся с их изменениями. При технических измерениях, однако, влияющие величины приходится рассматривать как величины, случайно изменяющиеся в некотором интервале. Поэтому и вызываемые ими погрешности становятся случайными.

Случайные погрешности измерительных средств обязаны своим возникновением случайным изменениям параметров составляющих их элементов и случай-

ным погрешностям отсчета (параллакс, погрешность интерполяции положения указателя между штрихами шкалы).

В общем случае их следует рассматривать как случайную функцию времени, измеряемой величины и влияющих величин. В частном случае измерений постоянных величин в нормальной области значений влияющих величин случайную погрешность можно считать одномерной случайной величиной, если ее временные изменения невелики.

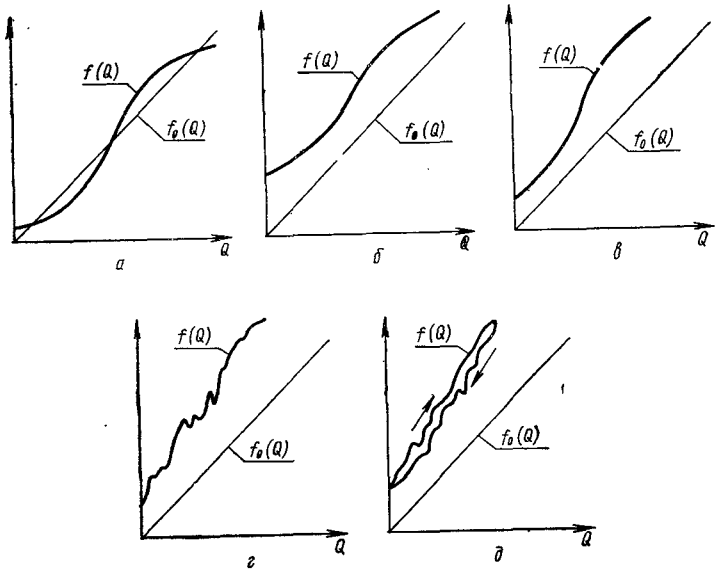


Рис. 36

К числу характеристик погрешности относится также вариация выходного сигнала измерительного преобразователя или вариация показаний измерительного прибора. Согласно ГОСТ 8.009—72 вариацией называется средняя разность между значениями информативного параметра выходного сигнала измерительного преобразователя (или показаний измерительного прибора), соответствующими данной точке диапазона измерений при двух направлениях медленного многократного изменения информативного параметра входного сигнала в процессе подхода к данной точке диапазона. Вариация возникает из-за трения и зазоров в сочленениях подвижных деталей механизмов средств измерений и гистерезисных явлений, свойственных его элементам.

Динамические погрешности обусловливаются инерционными свойствами средств измерений и появляются при измерении переменных во времени величин. Типичным случаем является измерение с регистрацией сигнала, изменяющегося со временем. Если $x(t)$ и $y(t)$ — сигналы на входе и на выходе средства измерений с чувствительностью K, то динамическая погрешность определяется как

$$\zeta_д(t) = \frac{y(t)}{K} - x(t). \qquad (9.4)$$

Для средств измерений, являющихся линейными динамическими системами с сосредоточенными, постоянными во времени параметрами, наиболее общая характеристика динамических свойств — это дифференциальное уравнение. В этом случае уравнение есть линейное с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot x^{(j)}(t), \qquad (9.5)$$

где $y^{(i)}(t)$ и $x^{(j)}(t)$ — i-е и j-е производных входного и выходного сигналов; a_i и b_j — постоянные коэффициенты, n и m — порядок левой и правой частей уравнения, причем $n > m$.

Дифференциальное уравнение является метрологической характеристикой средств измерения, поскольку позволяет при известном сигнале на входе $x(t)$ найти выходной сигнал $y(t)$ и после подстановки их в выражение (9.4) вычислить динамическую погрешность.

Для нормирования динамических свойств средств измерения часто указывают на само дифференциальное уравнение, а другие, производные от него, динамические характеристики, которые более просто находятся экспериментальным путем. Сюда относятся передаточная функция, амплитудная и фазовая частотные характеристики, переходная и импульсная переходная функции.

К числу метрологических характеристик средств измерения относятся и неинформативные параметры выходного сигнала измерительного преобразователя или меры, поскольку они могут оказывать существенное влияние на погрешность средства измерений. Например, непостоянство амплитуды колебаний баланса наручных часов (неинформативный параметр) приводит к изменению частоты его колебаний (информативный параметр).

При восприятии измеряемой величины или измерительного сигнала средство измерений оказывает некоторое воздействие на объект измерения или на источник сигнала. Результатом этого воздействия может быть некоторое изменение измеряемой величины относительно того значения, которое имело место при отсутствии средства измерений. Такое обратное воздействие средства измерений на объект измерений особенно четко просматривается при измерении электрических величин. Так, ЭДС нормального элемента определяется как напряжение на его зажимах в режиме холостого хода. При измерении этого напряжения вольтметром с некоторым конечным входным сопротивлением результат измерения будет зависеть от соотношения между внутренним сопротивлением нормального элемента (его выходное сопротивление) и входным сопротивлением вольтметра. Для оценки возникающей при этом погрешности необходимо знать значения этих сопротивлений, поэтому их следует рассматривать как метрологические характери-

стики меры (нормальный элемент) и измерительного прибора (вольтметр). В более сложных случаях эти сопротивления могут быть комплексными и тогда носят общее название входного и выходного импеданса. Для средств измерения неэлектрических величин под входным импедансом понимается отношение обобщенной силы, действующей на входе измерительного прибора или преобразователя, к обобщенной скорости, действующей во входной цепи. Обобщенная сила и скорость выбираются при этом, как две взаимодействующие величины, одна из которых является измеряемой, а их произведение образует мощность.

Так, для вольтметра измеряемой величиной является напряжение (обобщенная сила), тогда обобщенной скоростью должна быть сила тока. Их отношение и есть сопротивление. При измерении силы пружинным динамометром эта сила является обобщенной силой, а в качестве обобщенной скорости следует рассматривать скорость деформации упругого элемента под действием этой силы. Их отношение образует входной импеданс динамометра. Однако для средств измерений неэлектрических величин импедансы пока еще, как правило, непосредственно не нормируются. Вместо них в научно-технической документации приводятся другие характеристики, описывающие меру воздействия средства измерений на объект измерений, например, измерительное усилие для средств измерений перемещений.

Таким образом, метрологическими характеристиками, описывающими взаимодействие средств измерений друг с другом или с объектом измерений, являются: выходной импеданс мер; входной и выходной импеданс измерительных преобразователей; входной импеданс измерительных приборов.

Влияние внешних воздействий и неинформативных параметров сигналов (влияющих величнн) описывается с помощью метрологических характеристик, называемых функциями влияния. Функция влияния $\Psi(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_q)$ — это зависимость соответствующей метрологической характеристики из числа вышеперечисленных от влияющих величин $\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_q$ (температуры внешней среды, параметров внешних вибраций и т. д.). В большинстве случаев можно ограничиваться набором функций влияния каждой из влияющих величин $\Psi(\xi_1)$; $\Psi(\xi_2)$; ... $\Psi(\xi_q)$, но иногда приходится использовать функции совместного влияния нескольких величин, если изменение одной из влияющих величин приводит к изменению функции влияния другой.

Для средств измерений, не входящих в более сложные комплексы и обладающих точностью, заведомо превышающей требуемую точность измерений, вместо функций влияния указываются наибольшие допустимые изменения метрологических характеристик $\Delta l(\xi)$, вызванные изменениями внешних влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала. Это связано с тем, что при использовании таких средств измерений обычно не вводятся поправки на влияющие величины и специально не рассчитываются границы погрешности.

§ 55. НОРМИРОВАНИЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Под нормированием понимается установление границ на допустимые отклонения реальных метрологических характеристик средств измерений от их номинальных значений. Только посредством нормирования метрологических характеристик можно добиться их взаимозаменяемости и обеспечить единство измерений в государстве. Реальные значения метрологических характеристик определяют при изготовлении средств измерений и затем проверяют периодически во время эксплуатации. Если при этом хотя бы одна из метрологических характеристик выходит за установленные границы, то такое средство измерений либо подвергают регулировке, либо изымают из обращения.

Нормы на значения метрологических характеристик устанавливаются стандартами на отдельные виды средств измерения. При этом делается различие между нормальными и рабочими условиями применения средств измерения.

Нормальными считаются такие условия применения средств измерений, при которых влияющие на процесс измерения величины (температура, влажность, частота и напряжение питания, внешние магнитные поля и т. д.), а также неинформативные параметры входных и или выходных сигналов, находятся в нормальной для данных средств измерений области значений, т. е. в такой области, где их влиянием на метрологические характеристики можно пренебречь. Нормальные области значений влияющих величин указываются в стандартах или технических условиях на средства измерений данного вида в форме номиналов с нормированными отклонениями, например, температура должна составлять (20 ± 2) °С, напряжение питания — (220 В$\pm$10 %) или в форме интервалов значений (влажность 30—80 %).

Рабочая область значений влияющих величин шире нормальной области значений. В ее пределах метрологические характеристики существенно зависят от влияющих величин, однако, их изменения нормируются стандартами на средства измерений в форме функций влияния или наибольших допустимых изменений. За пределами рабочей области метрологические характеристики принимают неопределенные значения.

Для нормальных условий эксплуатации средств измерений должны нормироваться характеристики суммарной погрешности и ее систематической и случайной составляющих, входной импеданс измерительных приборов и преобразователей, выходной импеданс преобразователей, динамические характеристики и неинформативные параметры выходного сигнала.

Суммарная погрешность Δ средств измерений в нормальных условиях эксплуатации называется основной погрешностью и нормируется заданием предела допускаемого значения $\Delta_д$, т. е. того наибольшего значения, при котором средство измерений еще может быть признано годным к применению.

Систематическая составляющая погрешности Δ_c становитс случайной при рассмотрении всего ансамбля средств измерени данного типа. Поэтому она подлежит нормированию путем зада ния предела $\Delta_{сд}$ допускаемой систематической погрешности и е двух числовых характеристик — математического ожидания $M[\Delta_c]$ и среднего квадратического отклонения $\sigma[\Delta_c]$ систематической пс грешности Δ_c средств измерений данного типа.

Случайная составляющая $\overset{\circ}{\Delta}$ погрешности нормируется путем задания предела $\sigma_д[\overset{\circ}{\Delta}]$ среднего квадратического отклонения, по скольку ее математическое ожидание равно нулю.

Вариация b показаний измерительного прибора так же, как и вариация выходного сигнала измерительного преобразователя, нормируются заданием предела $\bar{b}_д$ допускаемого значения вариации средств измерения данного типа.

Все характеристики погрешности могут выражаться в форме абсолютных, относительных или приведенных погрешностей как функции измеряемой величины или информативного параметра входного сигнала в виде формул, графиков или таблиц.

Неинформативные параметры выходного сигнала, а также входной $z_{вх}$ и выходной $z_{вых}$ импедансы нормируются своими номинальными значениями и наибольшими допустимыми отклонениями в единицах нормируемого параметра или в процентах от его номинального значения.

Перечисленные выше метрологические характеристики следует нормировать не только для нормальной, но и для всей рабочей области эксплуатации средств измерений, если их колебания, вызванные изменениями внешних влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала в пределах рабочей области, существенно меньше номинальных значений. В противном случае эти характеристики нормируются только для нормальной области, а в рабочей области нормируются дополнительные погрешности путем задания функций влияния $\Psi(\xi)$ или наибольших допустимых изменений $\Delta l(\xi)$ раздельно для каждого влияющего фактора ξ, а в случае необходимости — и для совместного изменения нескольких факторов. Функции влияния нормируются формулой, числом, таблицей или задаются в виде номинальной функции влияния и предела допускаемых отклонений от нее. Наибольшие допускаемые изменения указываются в виде зоны в единицах данной метрологической характеристики или в процентах от ее значения, нормированного для нормальных условий.

Для различных по назначению и свойствам средств измерений могут нормироваться не все вышеперечисленные метрологические характеристики, а только некоторые из них.

Для средств измерений, используемых только по отдельности, не подлежит нормированию статическая функция преобразования, выходной импеданс и неинформативные параметры выходного сигнала, поскольку эти характеристики не существенны для средств измерения данной группы. Однако для средств измерения,

входящих в сложные измерительные комплексы, эти характеристики описывают эффекты их взаимодействия и поэтому должны нормироваться государственными стандартами. Можно не нормировать и случайную составляющую суммарной погрешности, если она существенно меньше систематической, причем признак существенности должен устанавливаться стандартами технических требований для данного типа средств измерений.

Для используемых по отдельности средств измерений, точность которых заведомо превышает требуемую точность измерений, нормируются только пределы $\Delta_д$ допускаемого значения суммарной погрешности и наибольшие допустимые изменения метрологических характеристик. Если же точность средств измерений соизмерима с требуемой точностью измерений, то необходимо нормировать раздельно характеристики систематической и случайной погрешности и функции влияния. Только с их помощью можно найти суммарную погрешность в рабочих условиях применения средств измерений.

Динамические характеристики нормируются путем задания номинального дифференциального уравнения или передаточной, переходной или импульсной весовой функции для средств измерений, предназначенных для работы в комплексе с другими, например, в измерительных системах, или в форме графиков или таблиц номинальных амплитудно- и фазочастотных характеристик и времени установления показаний для всех прочих средств измерений. Одновременно нормируются наибольшие допустимые отклонения динамических характеристик от номинальных.

§ 56. КЛАССЫ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Класс точности — это обобщенная характеристика средств измерений, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также рядом других свойств, влияющих на точность осуществляемых с их помощью измерений. Классы точности регламентируются стандартами на отдельные виды средств измерения с использованием метрологических характеристик и способов их нормирования, изложенных в предыдущих разделах.

Способы установления классов точности изложены в ГОСТ 8.401—80 «ГСИ. Классы точности средств измерения. Общие требования». Стандарт не распространяется на средства измерений, для которых предусматриваются раздельные нормы на систематическую и случайные составляющие, а также на средства измерений, для которых нормированы номинальные функции влияния, а измерения проводятся без введения поправок на влияющие величины. Классы точности не устанавливаются и на средства измерений, для которых существенное значение имеет динамическая погрешность.

Для остальных средств измерений обозначение классов точно-

сти вводится в зависимости от способов задания пределов допускаемой основной погрешности.

Пределы допускаемой абсолютной основной погрешности могут задаваться либо в виде одночленной формулы

$$\Delta = \pm a, \tag{9.6}$$

либо в виде двухчленной формулы

$$\Delta = \pm (a + bx), \tag{9.7}$$

где Δ и x выражаются одновременно либо в единицах измеряемой или воспроизводимой мерой величины, либо в делениях шкалы измерительного прибора.

Более предпочтительным является задание пределов допускаемых погрешностей в форме приведенной или относительной погрешности.

Пределы допускаемой приведенной основной погрешности нормируются в виде одночленной формулы

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} = \pm p, \tag{9.8}$$

где число p выбирается из ряда $p = 1 \cdot 10^n$; $1{,}5 \cdot 10^n$: $2 \cdot 10^n$; $2{,}5 \cdot 10^n$; $4 \cdot 10^n$; $5 \cdot 10^n$; $6 \cdot 10^n$ ($n = 1$; 0; -1; -2 и т. д.).

Пределы допускаемой относительной основной погрешности могут нормироваться либо одночленной формулой

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \pm q, \tag{9.9}$$

либо двухчленной формулой

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \pm \left[c + d \left(\left| \frac{X_k}{X} \right| - 1 \right) \right], \tag{9.10}$$

где X_k — конечное значение диапазона измерений или диапазона значений воспроизводимой многозначной мерой величины, а постоянные числа q, c и d выбираются из того же ряда, что и число p.

В обоснованных случаях пределы допускаемой абсолютной или относительной погрешности можно нормировать по более сложным формулам или даже в форме графиков или таблиц в зависимости от значения измеряемой, входной или воспроизводимой мерой величины.

Способ задания пределов допускаемой основной погрешности измерительных преобразователей и приборов определяется главным образом зависимостью погрешности от измеряемой или соответственно входной величины.

На рис. 37 приведены виды изменений погрешности в диапазоне измерения (или преобразования) измерительных средств, причем различные кривые в одних и тех же системах координат соответствуют различным экземплярам измерительных средств одного типоразмера.

В образовании погрешности средства измерений (рис. 37, *а*) наибольшую роль играет погрешность схемы. После регулировки зона возможных значений погрешности располагается симметрично относительно нуля. Для средства измерения с кривой погрешностей, изображенной на рис. 37, *б*, важнейшее значение имеет аддитивная погрешность, возможной причиной которой является низкая точность регулировки нуля. Размах случайных блужданий кривой погрешностей невелик, однако наличие аддитивной погрешности резко увеличивает разброс значений погрешностей всей массы приборов по сравнению с разбросом погрешностей одного прибора (преобразователя).

После исключения аддитивной погрешности получаем случай, изображенный на рис. 37, *в*, когда разбросы погрешностей одного

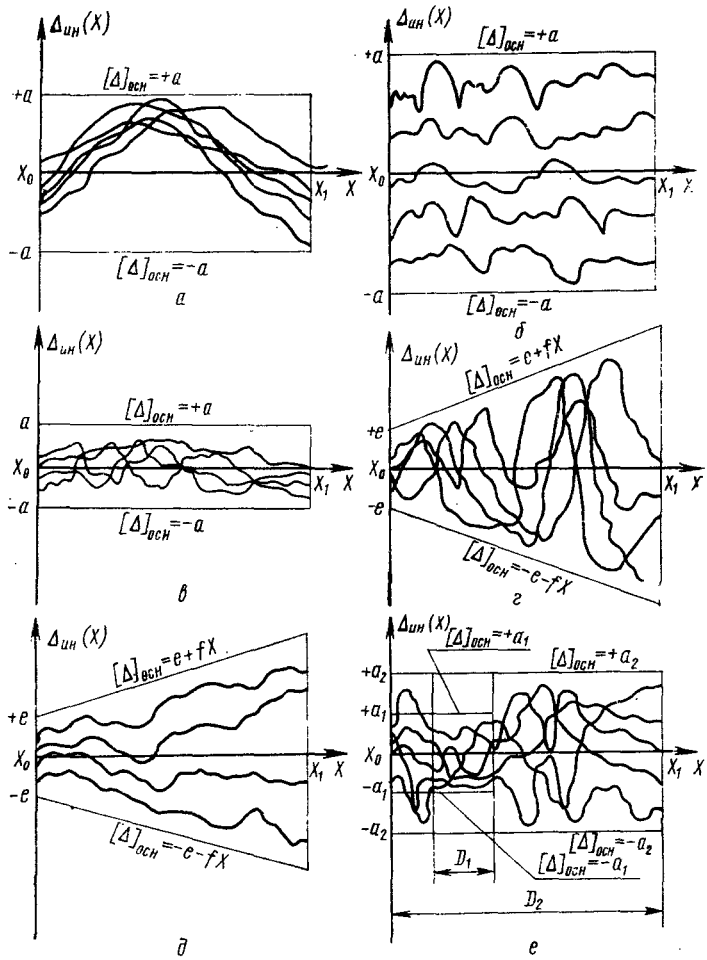


Рис. 37

прибора и всех приборов данного вида приблизительно одинаковы. Для измерительных приборов и преобразователей, погрешность которых изменяется так, как показано на рис. 37, *б*, *в*, вопрос нормирования решается заданием пределов основной абсолютной или приведенной погрешности по одночленным формулам (9.6) или (9.8).

В случае больших погрешностей схемы (см. рис. 37, *а*) основная погрешность также часто нормируется заданием постоянных пределов ее допускаемых значений по формулам (9.6) и (9.8). Этим, однако, сильно затрудняется поверка измерительных приборов, так как при проверке точности в нескольких точках шкалы легко пропустить то значение измеряемой величины, при котором основная погрешность максимальна.

Описанный способ нормирования основной погрешности средств измерения, характер изменения погрешностей которых показан на рис. 37, *а*, *б*, резко занижает фактическую точность, которая может быть существенно повышена путем использования кривых или таблиц поправок.

На рис. 37, *г* изображены кривые погрешностей нескольких приборов (или преобразователей) одного типоразмера, разброс погрешностей которых является функцией измеряемой величины и растет с ее увеличением. Пределы допускаемой основной погрешности такого типа, приборов естественно нормировать двухчленной формулой (9.7) для абсолютной и формулой (9.10) для относительной основных погрешностей.

К такому же способу нормирования приводит анализ кривых погрешностей измерительного прибора (преобразователя) с ярко выраженной мультипликативной погрешностью (см. рис. 37, *д*). Отличие от рассмотренного выше случая состоит лишь в том, что действительную точность прибора с мультипликативной погрешностью можно путем введения поправок значительно повысить по сравнению с нормированной точностью.

На рис. 37, *е* показано такое изменение погрешностей вдоль шкалы прибора, при котором можно выделить некоторый участок диапазона измерения (нормированный участок) с разбросом погрешностей всей массы приборов данного типоразмера, значительно меньшим разброса в остальных точках шкалы. В этом случае устанавливаются постоянные пределы допускаемой основной погрешности $\pm\Delta_1$ и $\pm\Delta_2$, различные для всего диапазона измерения и его нормированного участка.

Таким образом, в настоящее время существуют три способа нормирования основной погрешности измерительных приборов и преобразователей:

а) нормирование заданием пределов допускаемой основной абсолютной или приведенной погрешности $\pm\Delta$ или $\pm\gamma$, постоянных во всем диапазоне измерения или преобразования;

б) нормирование заданием пределов допускаемой основной абсолютной или относительной погрешности $\pm\Delta$ или $\pm\delta$ в функции измеряемой величины по формулам (9.7) или (9.10);

в) нормирование заданием постоянных пределов допускаемой основной погрешности, различных для всего диапазона измерения и одного или нескольких нормированных участков, или различных для разных диапазонов измерения (для многопредельных приборов).

Первый способ широко применяется для нормирования основной погрешности большинства сравнительно узкопредельных стрелочных измерительных приборов, а также для измерительных преобразователей. Остальные два способа отвечают в большей степени условиям измерения, имеющим место при использовании широкопредельных приборов.

Средствам измерений, пределы допускаемой основной погрешности которых задаются относительной погрешностью по одночленной формуле (9.9), присваивают классы точности, выбираемые из ряда чисел p и равные соответствующим пределам в процентах. Так для средства измерений с $\delta=0{,}002$ класс точности обозначается (0,2).

Если пределы допускаемой основной относительной погрешности выражаются двухчленной формулой (9.10), то класс точности обозначается как c/d, где числа c и d выбираются из того же ряда, что и p, но записываются в процентах. Так, измерительный прибор класса точности 0,02/0,01 характеризуется пределами допускаемой основной относительной погрешности

$$\delta=\pm\left[0{,}0002+0{,}0001\left(\left|\frac{X_k}{X}\right|-1\right)\right]=\pm\left[0{,}02+0{,}01\left(\left|\frac{X_k}{X}\right|-1\right)\right]\%.$$

Классы точности средств измерений, для которых пределы допускаемой основной приведенной погрешности нормируются по формуле (9.8), обозначаются одной цифрой, выбираемой из ряда для чисел p и выраженной в процентах. Если, например, $\gamma=\pm0{,}005=\pm0{,}5\ \%$, то класс точности обозначается как 0,5 (без кружка), если нормирующее значение выражается в единицах входной или выходной величины, или как $\overset{0,5}{\vee}$, если нормирующее значение принято равным длине всей шкалы или длине какого-либо ее интервала.

Классы точности обозначаются римскими цифрами или буквами латинского алфавита для средств измерений, пределы допускаемой погрешности которых задаются в форме графиков, таблиц или сложных функций входной, измеряемой или воспроизводимой величины. К буквам при этом допускается присоединять индексы в виде арабской цифры. Чем меньше пределы допускаемой погрешности, тем ближе к началу алфавита должна быть буква и тем меньше цифра. Недостатком такого обозначения класса точности является его чисто условный характер.

Наряду с основной погрешностью для средств измерений, поделенных на классы точности, нормируются и пределы допускаемых дополнительных погрешностей в виде дольного или кратного значения основной погрешности раздельно для каждой влияющей величины.

Пределы допускаемых дополнительных погрешностей могут выражаться в соответствии с ГОСТ 8.401—80 в форме постоянных значений для всей рабочей области влияющей величины или в виде постоянных значений по интервалам рабочей области; отношением предела допускаемой дополнительной погрешности к интервалу значений влияющей величины; путем указания предельной функции влияния, то есть зависимости предела допускаемой дополнительной погрешности от значения соответствующей влияющей величины.

В заключение данного раздела следует отметить, что никакое нормирование погрешностей средств измерений само по себе не может обеспечить единства измерений. Для достижения единства измерений необходима регламентация самих методик проведения измерений, чему посвящен ГОСТ 8.010—72 «Государственная система обеспечения единства измерений. Общие требования к стандартизации и аттестации методик проведения измерений». Последовательное внедрение этого стандарта является важным шагом на пути достижения действительного единства измерений в стране.

§ 57. РЕГУЛИРОВКА И ГРАДУИРОВКА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Используя методы теории точности, всегда можно найти такие допуски на параметры элементов измерительного прибора (или преобразователя), соблюдение которых гарантировало бы и без регулировки их получение с погрешностями, меньшими их допускаемых пределов. Однако во многих случаях эти допуски оказываются настолько малы, что изготовление прибора с заданными пределами допускаемых погрешностей становится технологически неосуществимым. Выйти из положения можно двумя путями: во-первых, расширить допуски на параметры некоторых элементов приборов и ввести в его конструкцию дополнительные *регулировочные узлы,* способные компенсировать влияние отклонений этих параметров от их номинальных значений и, во-вторых, осуществить специальную градуировку измерительного прибора.

Регулировка средств измерений. В большинстве случаев в измерительном приборе (преобразователе) можно найти или предусмотреть такие элементы, вариация параметров которых наиболее заметно сказывается на его систематической погрешности, главным образом погрешности схемы, аддитивной и мультипликативной погрешностях.

В общем случае в конструкции измерительного прибора должны быть предусмотрены два регулировочных узла: *регулировка нуля и регулировка чувствительности.* Регулировкой нуля уменьшают влияние аддитивной погрешности, постоянной для каждой

точки шкалы, а регулировкой чувствительности уменьшают мультипликативные погрешности, меняющиеся линейно с изменением измеряемой величины. При правильной регулировке нуля и чувствительности уменьшается и влияние погрешности схемы прибора. Кроме того, некоторые приборы снабжаются устройствами для *регулировки погрешности схемы* (пружинные манометры).

После регулировки нуля, т. е. устранения аддитивной погрешности, систематическая погрешность обращается в нуль на нижнем пределе измерения, а в диапазоне измерения принимает значения, являющиеся случайной (для всей массы приборов данного типоразмера) функцией $\Delta_c(X)$ измеряемой величины.

Характер случайной функции $\Delta_c(X)$ определяется соотношением ее составляющих. Так, на рис. 38 приведены несколько реализаций систематической погрешности с ярко выраженной мультипликативной составляющей, а на рис. 39 с сильно развитой погрешностью схемы.

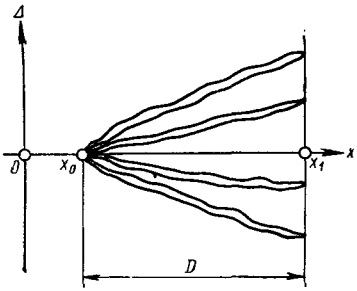


Рис. 38

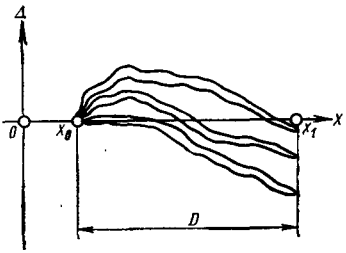


Рис. 39

Более высокими метрологическими характеристиками обладают измерительные приборы, имеющие узел регулировки чувствительности. Наличие такой регулировки позволяет поворачивать статическую характеристику, что открывает большие возможности для снижения погрешности схемы и, главным образом, мультипликативной погрешности. Так, после регулировки приборов, кривые погрешностей которых представлены на рис. 38 и 39, систематическая погрешность уменьшается в несколько раз, особенно при превалирующем влиянии мультипликативной погрешности, что видно из рис. 40, 41, где для наглядности представлено только по одной

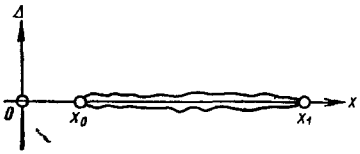


Рис. 40

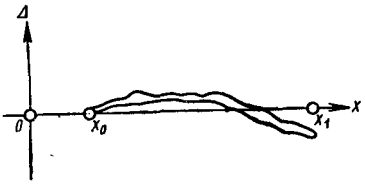


Рис. 41

реализации. Из рисунков видно, что одновременной регулировкой нуля и чувствительности можно свести систематическую погрешность к нулю сразу в нескольких точках (точках регулировки) шкалы. От правильности выбора таких точек зависят значения оставшихся после регулировки систематических погрешностей в других точках шкалы.

Теория регулировки и должна дать ответ на вопрос, какие точки шкалы следует выбрать в качестве точек регулировки. Однако общего решения этой задачи еще не найдено. Трудность решения усугубляется тем, что положение этих точек на шкале определяется не только схемой и конструкцией прибора, но и технологией изготовления его элементов и узлов.

На практике в качестве точек регулировки принимают начальное и конечное, среднее и конечное или начальное, среднее и конечное значения измеряемой величины в диапазоне измерения. При этом значения систематической погрешности близки к минимально возможным, поскольку в действительности точки регулировки часто располагаются близко к началу, середине или концу шкалы.

Таким образом, под регулировкой средств измерения понимается совокупность операций, имеющих целью уменьшить основную погрешность до значений, соответствующих пределам ее допускаемых значений, путем компенсации систематической составляющей погрешности средств измерений, т. е. погрешности схемы, мультипликативной и аддитивной погрешностей.

Градуировка средств измерений. Градуировкой называется процесс нанесения отметок на шкалы средств измерений, а также определение значений измеряемой величины, соответствующих уже нанесенным отметкам, для составления градуировочных кривых или таблиц.

Различают следующие способы градуировки.

1. *Использование типовых (печатных) шкал.* Для подавляющего большинства рабочих и многих образцовых приборов используют типовые (печатные) шкалы, которые изготовляются заранее в соответствии с уравнением статической характеристики идеального прибора. Если статическая характеристика линейна, то шкала оказывается равномерной. При регулировке параметрам элементов прибора экспериментально придают такие значения, при которых погрешность в точках регулировки становится равной нулю.

2. *Индивидуальная градуировка шкал.* Индивидуальную градуировку шкал осуществляют в тех случаях, когда статическая характеристика прибора нелинейна или близка к линейной, но характер изменения систематической погрешности в диапазоне измерения случайным образом меняется от прибора к прибору данного типа (например, вследствие разброса нелинейности характеристик чувствительного элемента) так, что регулировка не позволяет уменьшить основную погрешность до пределов ее допускаемых значений.

Индивидуальную градуировку проводят в следующем порядке.

На предварительно отрегулированном приборе устанавливают циферблат с еще не нанесенными отметками. К измерительному прибору подводят последовательно измеряемые величины нескольких наперед заданных или выбранных значений. На циферблате наносят отметки, соответствующие положениям указателя при этих значениях измеряемой величины, а расстояния между отметками делят на равные части.

При индивидуальной градуировке систематическая погрешность уменьшается во всем диапазоне измерения, а в точках, полученных при градуировке, она достигает значения, равного погрешности обратного хода.

3. *Градуировка условной шкалы.* Условной называется шкала, снабженная некоторыми условными равномерно нанесенными делениями, например, через миллиметр или угловой градус. Градуировка шкалы состоит в определении при помощи образцовых мер или измерительных приборов значений измеряемой величины соответствующих некоторым отметкам, нанесенным на ней. В результате определяют зависимость числа делений шкалы, пройденных указателем, от значений измеряемой величины. Эту зависимость представляют в виде таблицы или графика. Если необходимо избавиться и от погрешности обратного хода, градуировку осуществляют раздельно при прямом и обратном ходе.

§ 58. КАЛИБРОВКА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

По мере продвижения вверх по поверочной схеме от рабочих мер и измерительных приборов к эталонам неизбежно сокращается число мер, различных по номинальному значению. На верхних ступенях поверочной схемы часто имеется мера (эталон) только одного значения. Повышение точности измерительных приборов неизбежно связано с сокращением диапазона измерений по их шкале. Поэтому на некоторой ступени поверочной схемы иногда разность номинальных значений поверяемой и ближайшей к ней по разряду исходной меры превышает диапазон измерения измерительного прибора соответствующей данному разряду точности. В этих случаях поверка осуществляется способом калибровки.

Калибровка — способ поверки измерительных средств, заключающийся в сравнении различных мер, их сочетаний или отметок шкал многозначных мер в различных комбинациях и вычислении по результатам этих сравнений значений отдельных мер или отметок шкалы (или поправок к ним) исходя из известного значения одной из них.

В результате сравнения получают систему уравнений, решив которую находят действительные значения мер. Если число уравнений равно числу поверяемых мер, то действительные значения мер и погрешности их аттестации находят с помощью методов обработки результатов косвенных измерений. Однако для повышения точности аттестации мер стремятся увеличить число уравнений, и тогда действительные значения мер определяют по схеме обработки результатов совокупных измерений.

Для иллюстрации способа калибровки рассмотрим следующий пример

Пример. Граммовые наборы Г-1-1110 и Г-1а-1110, состоящие из гирь массой 500; 200; $\dot{2}00$; 100; 50; 20; $\dot{2}0$; 10; 5; 2; $\dot{2}$; 1 г*, сличают с рабочим эталоном массой в 1 кг по следующей схеме:

а) рабочий эталон 1 кг=1000 г сличают одним из методов точного взвешивания на весах 1-го разряда повышенной точности с гирями массой 500; 200; $\dot{2}00$; 100 г: $1000-(500+200+\dot{2}00+100)=a_1$,
где a_1 — разность между массой рабочего эталона и массой суммы гирь;

б) гири 500 г набора сличают с суммой гирь массой 200; $\dot{2}00$ и 100 г, в результате чего получают уравнение $500-(200+\dot{2}00+100)=a_2$, где a_2 — результат второго сличения;

в) аналогично проводят остальные сличения и получают уравнения:

$$200-(100+50+20+\dot{2}0+10)=a_3;$$

$$\dot{2}00-(100+50+20+\dot{2}0+10)=a_4;$$

$$100-(50+20+\dot{2}0+10)=a_5;$$

$$50-(20+\dot{2}0+10)=a_6;$$

$$20-(10+5+2+\dot{2}+1)=a_7;$$

$$\dot{2}0-(10+5+2+\dot{2}+1)=a_8;$$

$$10-(5+2+\dot{2}+1)=a_9;$$

$$5-(2+\dot{2}+1)=a_{10};$$

$$2-(1+\bar{1})^*=a_{11};$$

$$\dot{2}-(1+\bar{1})=a_{12};$$

$$1-\bar{1}=a_{13}.$$

В результате тринадцати проведенных сличений получили систему из тринадцати уравнений с тринадцатью неизвестными. Решив эту систему, найдем действительные значения масс гирь набора. Погрешности определения действительных значений могут быть вычислены способами обработки результатов косвенных измерений.

§ 59. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Для точных измерений величин в метрологии разработаны приемы использования принципов и средств измерений, применение которых позволяет исключить из результатов измерений ряд систематических погрешностей и тем самым освобождает экспериментатора от необходимости определять многочисленные поправки для их компенсации, а в некоторых случаях вообще является предпосылкой получения сколько-нибудь достоверных результатов. Многие из этих приемов используют при измерении только определенных величин, однако существуют и некоторые общие приемы, названные *методами измерения*.

Наиболее просто реализуется *метод непосредственной оценки*, заключающийся в определении величины непосредственно по от-

* Точкой над номинальным значением гири отмечена вторая гиря набора с тем же номиналом.

счетному устройству измерительного прибора прямого действия, например, взвешивание на циферблатных весах, определение размера детали с помощью микрометра или измерение давления пружинным манометром.

Измерения с помощью этого метода проводятся очень быстро и просто и не требуют высокой квалификации оператора, поскольку не нужно создавать специальные измерительные установки и выполнять какие-либо сложные вычисления. Однако точность измерений чаще всего оказывается невысокой из-за погрешностей, связанных с необходимостью градуировки шкал приборов и воздействием влияющих величин (непостоянство температуры, нестабильность источников питания и пр.).

При проведении наиболее точных измерений предпочтение отдается различным модификациям *метода сравнения с мерой,* при котором измеряемую величину находят сравнением с величиной, воспроизводимой мерой. Результат измерения либо вычисляют как сумму значения используемой для сравнения меры и показания измерительного прибора, либо принимают равным значению меры.

Метод сравнения с мерой, заключающийся в том, что измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, *одновременно воздействуют на измерительный прибор сравнения,* с помощью которого устанавливается соотношение между ними, называется *методом противопоставления.* Примером этого метода является взвешивание груза на равноплечих весах, когда измеряемая масса определяется как сумма массы гирь, ее уравновешивающих, и показания по шкале весов.

Применение метода противопоставления позволяет значительно уменьшить воздействие на результаты измерений влияющих величин, поскольку они более или менее одинаково искажают сигналы измерительной информации как в цепи преобразования измеряемой величины, так и в цепи преобразования величины, воспроизводимой мерой. Отсчетное устройство прибора сравнения реагирует на разность сигналов, вследствие чего эти искажения в некоторой степени компенсируют друг друга.

Разновидностью метода сравнения с мерой является также *нулевой метод измерения,* который состоит в том, что подбором размера воспроизводимой мерой величины или путем ее принудительного изменения эффект воздействия сравниваемых величин на прибор сравнения доводят до нуля. В этом случае компенсация воздействий влияющих величин оказывается более полной, а значение измеряемой величины принимается равным значению меры.

При *дифференциальном методе измерения* на измерительный прибор (не обязательно прибор сравнения) подается непосредственно разность измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой. Этот метод может быть использован, конечно, только в тех случаях, когда просто и точно реализуется операция вычитания величин (длины, перемещения, электрические напряжения

и э.д.с.). Дифференциальный метод не применим при измерении таких величин, как температура или твердость тел.

К разновидностям метода сравнения с мерой относится и *метод замещения*, широко применяемый в практике точных метрологических исследований. Сущность метода заключается в том, что измеряемая величина замещается в измерительной установке некоторой известной величиной, воспроизводимой мерой. Замещение может быть полным или неполным, в зависимости от чего говорят о *методе полного* или *неполного замещения*. При полном замещении показания не изменяются и результат измерения принимается равным значению меры. При неполном замещении для получения значения измеряемой величины к значению меры следует прибавить величину, на которую изменилось показание прибора.

Преимущество метода замещения заключается в последовательном во времени сравнении измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой. Благодаря тому, что обе эти величины включаются одна за другой в одну и ту же часть измерительной цепи прибора, точностные возможности измерений значительно повышаются по сравнению с измерениями, проводящимися с помощью других разновидностей метода сравнения, где несимметрия цепей, в которые включаются сравниваемые величины, приводят к возникновению систематических погрешностей.

Пример. В качестве примера использования метода замещения можно указать на измерение размера детали с помощью рычажного микрометра. Возможны измерения двумя способами.

1. Микровинт перемещают до контакта с измеряемой деталью. Создается такой натяг, при котором стрелка рычажной системы встает против нулевой отметки шкалы. При этом измерительное усилие принимает строго определенное значение, а результат измерения отсчитывается по шкале микрометра.

Это метод непосредственной оценки, поскольку в размерную цепь микрометра включается сразу вся длина измеряемой детали. В результат измерения входят погрешности, определяемые температурным режимом, погрешностью шага микрометрического винта, накопленной на измеряемой длине, неперпендикулярностью торцовых поверхностей винта и пятки к линии измерения, допущенной оператором неточностью при считывании результата со шкалы микрометра и т. д.

2. Подбирается блок концевых мер, размер которого близок к размеру измеряемой детали. По блоку с помощью микрометрического винта настраивают микрометр, в результате чего стрелка рычажной системы устанавливается против нулевой отметки шкалы. Затем при неизменной настройке снимают блок концевых мер и в размерную цепь микрометра включают измеряемую длину исследуемой детали. Результат измерения представляет собой сумму размера блока концевых мер длины и разности размеров блока и детали, которая определяется по отклонению стрелки рычажной системы от нулевого положения.

Описанный метод является методом сравнения с мерой, а именно — методом неполного замещения. При его применении в значительной мере исключаются одновременно все упомянутые выше погрешности.

Способ замещения применяется также при электрических измерениях с помощью мостов переменного тока, условие равновесия которых определяется не только значениями величин, воспроизводимых элементами плеч моста, но также и влиянием паразитных токов, емкостей, индуктивностей и рядом других факторов. Эти

причины вызывают появление погрешностей, которые могут быть исключены, если проводить измерения методом замещения. Для этого вначале мост уравновешивается с включенной в его цепь измеряемой величиной, которая затем замещается известной величиной, и мост уравновешивается вновь. Если при этом никаких изменений ни в мосте, ни во внешних условиях не происходит, то указанные выше погрешности исключаются почти полностью.

Одним из общих методов измерений является *метод совпадений,* представляющий собой разновидность метода сравнения с мерой. При проведении измерений методом совпадений разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов.

По принципу метода совпадений построен нониус, входящий в состав ряда измерительных приборов. Так, например, шкала нониуса штангенциркуля имеет десять делений через 0,9 мм. Когда нулевая отметка шкалы нониуса оказывается между отметками основной шкалы штангенциркуля, это означает, что к целому числу миллиметров необходимо добавить число десятых долей миллиметра, равное порядковому номеру совпадающей отметки нониуса.

Метод совпадений применяется при приеме точных сигналов времени, при измерении частоты вращения и в других случаях.

В рамках перечисленных выше методов измерений в метрологической практике и в общем приборостроении часто применяются специальные приемы для исключения самих источников систематических погрешностей или их компенсации. Рассмотрим наиболее употребительные из этих приемов.

Параметрическая стабилизация очень широко применяется при ответственных измерениях. Этот прием используют для поддержания в заданных пределах температуры и влажности окружающей среды, напряжения или давления питания и других. Наиболее распространены такие способы параметрической стабилизации, как термостатирование приборов, защита от воздействия вибраций, использование эффективных стабилизаторов в цепях электропитания приборов, экранирование приборов для защиты их от воздействия посторонних электрических, магнитных, радиационных и других полей. Применение этих способов иногда позволяет избежать введения в результаты измерения поправок, а в некоторых особенно ответственных случаях является даже предпосылкой получения сколько-нибудь достоверных результатов.

Способ компенсации постоянных и периодических погрешностей по знаку. При реализации этого способа процесс измерения строится таким образом, что постоянная систематическая погрешность входит в результат измерения один раз с одним знаком, а другой раз — с другим. Тогда среднее из двух полученных результатов оказывается свободным от постоянной погрешности.

Применяя этот способ, можно исключить, например, постоянную систематическую погрешность, обусловленную несовпадением оси резьбы и линии измерения при определении шага резьбы на

инструментальном микроскопе (измерение по правым и левым сторонам профиля), или постоянную при данной нагрузке и твердости образца погрешность вследствие неперпендикулярности оси шпинделя к поверхности образца при измерении твердости по Виккерсу (нахождение среднего из двух диагоналей отпечатка). Этим же способом пользуются для исключения периодической погрешности, вызываемой несовпадением оси вращения шкалы с ее геометрическим центром в угломерных измерительных приборах. Эта погрешность зависит от угла поворота шкалы, и результат измерения получают как среднее арифметическое из значений, полученных, при отсчетах по диаметрально расположенным нониусам или микроскопам.

Способ вспомогательных измерений применяется в тех случаях, когда воздействие влияющих величин на результаты измерений вызывает большие погрешности измерений. Тогда идут на заведомое усложнение схемы измерительной установки, включая в нее элементы, воспринимающие значение влияющих величин, автоматически вычисляющие соответствующие поправки и вносящие их в полезные сигналы, которые поступают на отсчетные или регулирующие устройства.

Способ вспомогательных измерений в большой степени относится к инструментальным методам борьбы с систематическими погрешностями, поэтому в рамках настоящего курса не рассматривается.

Вообще следует заметить, что многие из приведенных методов и приемов исключения систематических погрешностей в настоящее время все в большей степени реализуются схемами самих измерительных средств. В результате разработка методологии измерений приобретает все большее значение непосредственно для проектирования измерительной аппаратуры.

Глава X

МЕТРОЛОГИЧЕСКАЯ СЛУЖБА СССР

§ 60. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СИСТЕМА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

Решение важнейших научно-технических и народнохозяйственных задач, в том числе проблемы обеспечения качества продукции, в значительной степени зависит от достижения единства и достоверности измерений в стране.

Как указывалось выше, *под единством измерений понимается такое состояние измерительного дела, при котором результаты всех измерений, проводимых в стране, выражаются в одних и тех же узаконенных единицах измерения и оценка их точности обеспечивается с гарантированной доверительной вероятностью.* Если учесть, что в СССР в настоящее время находятся в эксплуатации сотни миллионов мер и измерительных приборов и что ежедневно проводится не менее 20 миллиардов измерений, то станет понятной вся сложность и настоятельная необходимость работ, направленных на достижение единства измерений.

В применявшихся до недавнего времени сравнительно простых методах измерений погрешность результатов измерений почти полностью определялась погрешностями средств измерений. Поэтому для достижения единства измерений было достаточно обеспечить *единообразие средств измерений, т. е. такое состояние средств измерений, когда они проградуированы в узаконенных единицах измерений, а их метрологические свойства соответствуют нормам.*

При использовании современных сложных методов измерений погрешности средств измерений далеко не определяют суммарную погрешность результатов измерений, поскольку большое значение приобретают погрешности метода измерений, ошибки операторов, неизменность условий проведения измерений и др. Поэтому важно обеспечить не только единообразие средств измерений, но и единство измерений и его достоверность, характеризующую доверие к результатам измерений.

Для решения этой задачи созданы комплексы правил, регламентирующих порядок подготовки, выполнения и обработки результатов измерений (правила законодательной метрологии), а также эталонная база и комплекс образцовых средств измерений, обеспечивающих передачу размера единиц физических величин от эталонов образцовым и рабочим средствам измерений, проводится контроль за выполнением правил законодательной метрологии (метрологический надзор).

Сеть государственных метрологических органов и их деятельность, направленная на обеспечение единства и достоверности измерений в стране, называется Государственной метрологической службой СССР. В Советском Союзе руководство Государственной метрологической службой осуществляется Государственным комитетом СССР по стандартам.

В состав Государственной метрологической службы СССР входят научно-исследовательские метрологические институты со своими филиалами, 15 управлений уполномоченных Госстандарта СССР при советах министров союзных республик с республиканскими центрами метрологии и стандартизации, лаборатории государственного надзора за внедрением и соблюдением стандартов и состоянием измерительной техники, имеющиеся во всех областных центрах страны, и межрайонные отделения этих лабораторий.

Деятельность Государственной метрологической службы направлена на решение научно-технических проблем метрологии и осуществление необходимых законодательных и контрольных функций: установление допущенных к применению единиц физических величин, системы государственных эталонов единиц; создание образцовых средств измерений, методов и средств измерений высшей точности; разработка общесоюзных поверочных схем; определение физических констант и физико-химических свойств веществ и материалов, а также получение стандартных образцов этих свойств; разработка стандартных методов и средств испытания и контроля, требующих высокой точности; разработка теории измерений, методов оценки погрешностей; надзор за приборостроением и эксплуатацией средств измерений, осуществляемый путем государственных испытаний новых средств измерений, систематической поверки мер и измерительных приборов, ревизии состояния измерений на предприятиях и в организациях.

Органам Государственной метрологической службы предоставлено право контролировать соблюдение министерствами и ведомствами правил законодательной метрологии, запрещать серийное производство средств измерений, не утвержденных Госстандартом СССР типов, изымать из обращения средства измерений, не отвечающие установленным требованиям, контролировать качество изготовления и ремонта средств измерений.

Задачи, стоящие перед Государственной метрологической службой, решаются с помощью *Государственной системы обеспечения единства измерений* (ГСИ).

Государственная система обеспечения единства измерений является нормативно-правовой основой метрологического обеспечения научной и практической деятельности в части оценки и обеспечения точности измерений, результаты которых используются государственными органами, предприятиями, организациями и учреждениями СССР. Она представляет собой комплекс нормативно-технических документов, устанавливающих единую номенклатуру, способы представления и оценки метрологических характеристик средств измерений, правила стандартизации и аттестации выполнения измерений, оформления их результатов, требования к проведению государственных испытаний, поверки, ревизии и экспертизы средств измерений.

Государственная система обеспечения единства измерений состоит из комплексов нормативно-технических документов, регламентирующих: единицы физических величин; воспроизведение единиц физических величин с помощью эталонов; передачу размеров единиц физических величин рабочим средствам измерений с необходимой точностью при наименьших затратах; установление норм на метрологические характеристики средств измерений; проведение государственных испытаний средств измерений, их поверки, ревизии экспертизы: проведение стандартизации и аттестации методик выполнения измерений; оформление и представление результатов измерений.

Основными нормативно-техническими документами государственной системы обеспечения единства измерений являются *государственные стандарты.* На основе этих базовых стандартов разрабатываются нормативно-технические документы, конкретизирующие общие требования базовых стандартов к отдельным отраслям народного хозяйства, областям измерений и методикам выполнения измерений.

Под руководством Государственной метрологической службы действуют органы *ведомственных метрологических служб*, создаваемые министерствами и ведомствами для обеспечения метрологического надзора в своей отрасли народного хозяйства. Их основной задачей является обеспечение единства и достоверности измерений в отраслях народного хозяйства путем обеспечения повсеместного соблюдения правил законодательной метрологии, планомерного внедрения методов и средств измерений, отвечающих современным требованиям производства и обеспечивающих выпуск продукции высокого качества, и постоянного контроля за состоянием и правильностью применения средств измерений.

§ 61. ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Все средства измерений, предназначенные для серийного производства, ввоза из-за границы партиями и выпуска в обращение в СССР, подвергаются со стороны органов Государственной метрологической службы обязательным *государственным испытаниям,* под которыми понимается экспертиза технической документации на средства измерений и их экспериментальные исследования для определения степени соответствия установленным нормам, потребностям народного хозяйства и современному уровню развития приборостроения, а также целесообразности их производства. Организация и порядок проведения государственных испытаний средств измерений изложены в ГОСТ 8.001—80.

Государственные испытания вновь разрабатываемых и выпускаемых средств измерений являются эффективным средством обеспечения единства измерений в стране и повышения качества измерительной техники. Цель испытаний — обеспечить высокий технический уровень отечественного приборостроения, соответствие характеристик средств измерений современным требованиям народного хозяйства и мирового рынка, установление оптимальной номенклатуры средств измерений, обеспечивающих потребности народного хозяйства, развития метрологической базы страны, высокую степень унификации и стандартизации средств измерений, а также развитие специализации и кооперирования в их производстве. Проведение государственных испытаний, кроме того, способствует своевременной подготовке метрологической службы страны к обслуживанию средств измерений при выпуске их из производства и в эксплуатации.

Установлены два вида государственных испытаний:

приемочные испытания опытных образцов средств измерений новых типов,

намеченных к серийному производству или импорту в СССР (государственные приемочные испытания);

контрольные испытания образцов из установочной серии и серийно выпускаемых средств измерений (государственные контрольные испытания).

Государственные приемочные испытания проводятся метрологическими органами Госстандарта или, в обоснованных случаях, специальными государственными комиссиями, состоящими из представителей метрологических институтов, организаций-разработчиков, изготовителей и заказчиков или потребителей.

В процессе государственных приемочных испытаний опытных образцов средств измерений проверяется соответствие средства измерений современному техническому уровню, требованиям народного хозяйства, а также требованиям технического задания, проекта технических условий и государственных стандартов. Проверке подлежат также нормированные метрологические характеристики и возможность их контроля при производстве, после ремонта и при эксплуатации, возможность проведения поверки и ремонтопригодность испытуемых средств измерений. При проведении государственных приемочных испытаний образцов из установочной серии проверяют дополнительно метрологическое обеспечение производства и эксплуатации средств измерений.

Государственная приемочная комиссия или соответствующий метрологический орган на основании изучения и анализа представленных на испытание образцов средств измерений и технической документации принимает рекомендацию о целесообразности (или нецелесообразности) выпуска средства измерения данного типа.

Госстандарт СССР рассматривает материалы государственных испытаний и принимает решение об утверждении типа средств измерения к выпуску в обращение в стране. После утверждения тип средств измерения вносится в Государственный реестр средств измерений.

Государственные контрольные испытания проводятся территориальными организациями Госстандарта. Их цель — проверка соответствия выпускаемых из производства или ввозимых из-за границы средств измерений утвержденному Госстандартом СССР типу, требованиям стандартов и технических условий.

Контрольные испытания средств измерений серийного производства проводятся: при выпуске установочной серии, при наличии сведений об ухудшении качества средств измерений, выпускаемых предприятием-изготовителем; при внесении изменений в конструкцию и технологию изготовления средств измерений, влияющих на их нормируемые метрологические характеристики, а также в порядке государственного надзора за качеством выпускаемых средств измерений в сроки, устанавливаемые Госстандартом.

Контрольные испытания проводятся периодически в течение всего времени производства (или импорта) средств измерений данного типа на испытательной базе предприятия-изготовителя. По окончании испытаний составляется акт о контрольных испытаниях, содержащий результаты испытаний, замечания, предложения и выводы. На основании акта контрольных испытаний организация, проводившая их, принимает решение или о разрешении продолжения выпуска в обращение данных средств измерений, или об устранении недостатков, обнаруженных при контрольных испытаниях, или о запрещении их выпуска в обращение.

§ 62. ПОВЕРКА, РЕВИЗИЯ И ЭКСПЕРТИЗА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Система метрологического надзора за средствами измерений представляет собой комплекс правил, положений и требований технического, экономического и правового характера, определяющих организацию и порядок проведения работ по поверке, ревизии и экспертизе средств измерений. Метрологический надзор осуществляется единой метрологической службой страны, руководимой Госстандартом и состоящей из Государственной метрологической службы СССР и ведомственных метрологических служб министерств и ведомств.

Основные положения системы метрологического надзора за средствами измерений, выпускаемыми из производства и ремонта и находящимися в обращении в стране, устанавливаются ГОСТ 8.002—71 «ГСИ. Организация и порядок проведения поверки, ревизии и экспертизы средств измерений», утвержденным взамен действовавших ранее Правил 12—58. Согласно этому стандарту метрологический надзор за средствами измерений должен осуществляться путем проведения поверки, метрологической ревизии и метрологической экспертизы средств измерений.

Важнейшей формой государственного надзора за измерительной техникой является *государственная (и ведомственная) поверка средств измерений,* служащая для установления их метрологической исправности.

Средства измерений подвергаются первичной, периодической, внеочередной и инспекционной поверкам.

Первичная поверка проводится при выпуске средств измерений в обращение из производства или ремонта.

Периодическая поверка проводится при эксплуатации и хранении средств измерений через определенные межповерочные интервалы, установленные с расчетом обеспечения метрологической исправности средств измерений на период между поверками.

Если необходимо удостовериться в исправности средств измерений при проведении работ по корректированию межповерочных интервалов, при повреждении поверительного клейма, пломбы или утраты документов, подтверждающих прохождение средством измерения периодической поверки, а также в ряде других случаев проводится *внеочередная поверка* средств измерений, причем сроки ее проведения назначаются независимо от сроков периодических поверок.

Инспекционная поверка проводится для выявления метрологической исправности средств измерений, находящихся в обращении; при проведении метрологической ревизии в организациях, учреждениях и торговых организациях, на предприятиях, складах и базах снабжения.

Обязательной государственной поверке подлежат:

средства измерений, применяемые органами государственной метрологической службы;

образцовые средства измерений, применяемые в качестве исходных в метрологических органах министерств и ведомств; применяемые в метрологических подразделениях приборостроительных и приборомонтных предприятий при градуировке и поверке средств измерений, выпускаемых в обращение;

средства измерений, применяемые при учете материальных ценностей, взаимных расчетах и торговле;

средства измерений, связанные с охраной здоровья трудящихся и техникой безопасности;

средства измерений, применяемые при государственных испытаниях новых средств измерений и при государственной аттестации качества продукции;

средства измерений, результаты которых используются при регистрации официальных спортивных международных и национальных рекордов.

Так, например, к рабочим средствам измерений, подлежащим обязательной государственной поверке, относятся: весоизмерительные приборы, расходомеры, счетчики электроэнергии, газа, нефтепродуктов и воды, топливо- и маслораздаточные колонки и ряд других приборов, применяемых для учета и в торговле; шумомеры; дозиметры; реитгенометры, сфигманометры и тонометры, наборы пробных очковых стекол, медицинские термометры и другие приборы, служащие для охраны здоровья трудящихся; радиометры, измерители напряженности поля СВЧ, газоанализаторы, скоростемеры и другие измерительные приборы, обеспечивающие безопасность работ, и т. п. Все остальные средства измерений подлежат обязательной ведомственной поверке.

Сроки периодических поверок (межповерочные интервалы) устанавливаются и корректируются метрологическими подразделениями предприятий, организаций и учреждений, эксплуатирующих средства измерений, дифференцированно для различных групп средств измерений на основе систематического анализа статистических данных об их фактической надежности, интенсивности применения и условий эксплуатации, с таким расчетом, чтобы обеспечить метрологическую исправность средств измерений на период между поверками. Начальный

межповерочный интервал устанавливается при государственных испытаниях средств измерений.

Госстандартом установлены предельные сроки поверки для исходных образцовых мер и приборов, а также для ограниченной номенклатуры рабочих средств измерений, служащих для учета материальных ценностей и взаимных расчетов, для отпуска товаров потребителям и для охраны здоровья, т. е. для мер и приборов, требующих постоянного государственного надзора и не находящихся под таким квалифицированным наблюдением, как приборы в промышленности.

Поверка средств измерений должна осуществляться в соответствии с действующими государственными стандартами на поверочные схемы, методы и средства поверки, а до введения их в действие — в соответствии с инструкциями и методическими указаниями Госстандарта. Средства измерений должны поверяться лишь работниками метрологического надзора, прошедшими специальное обучение в учебных заведениях Госстандарта и сдавшими экзамен.

Положительные результаты поверки удостоверяются: а) наложением на средства измерений поверительного клейма установленного образца; б) выдачей свидетельства о поверке. Средства измерений, признанные по результатам поверки непригодными к применению, к дальнейшей эксплуатации не допускаются; при этом поверительные клейма погашаются, а в паспорте или свидетельстве прибора делается соответствующая запись.

Следующей важной формой метрологического надзора за средствами измерений является метрологическая ревизия предприятий, изготовляющих, ремонтирующих и эксплуатирующих средства измерений, а также складов, баз снабжения и торговых организаций, хранящих, комплектующих и продающих средства измерений.

Метрологическая ревизия заключается в поверке состояния средств измерений, выполнения правил их поверки и применения и осуществляется органами Государственной метрологической службы СССР с привлечением по согласованию с соответствующими организациями специалистов базовых отраслевых организаций и предприятий, научно-исследовательских организаций, ведомственных метрологических служб и ведомственных инспекций. Метрологическая ревизия как форма контроля за повсеместным соблюдением единства измерений должна охватывать не только средства измерений, но и контроль за правильностью отражения в действующей документации, регламентирующей производственные процессы и контроль качества продукции, требований к средствам измерений и измерительным процессам; обеспеченностью средствами измерений технологических операций, испытаний и контроля качества продукции; соответствием применяемых методов и средств измерений современным требованиям производства; правильностью выполнения измерительных операций, техническим уровнем вновь выпускаемых средств измерений и того, насколько они удовлетворяют современным требованиям народного хозяйства.

Результаты метрологической ревизии оформляются актом, содержащим конкретные результаты проверки, а также предложения по изъятию средств измерений, признанных непригодными к применению, и предложения, подлежащие выполнению для устранения обнаруженных недостатков, с указанием сроков их выполнения.

На основе обобщения результатов метрологической ревизии соответствующие органы Государственной метрологической службы направляют Госстандарту предложения о совершенствовании парка средств измерений и повышения метрологического обеспечения измерений.

Если возникают спорные вопросы, то по письменному требованию органов суда или прокуратуры, государственного арбитража, милиции, органов народного контроля, а также по письменному заявлению предприятий проводится *метрологическая экспертиза,* осуществляемая лицами — уполномоченными органов Государственной метрологической службы. По результатам экспертизы составляется акт, который утверждается руководителем органа Государственной метрологической службы и вручается заинтересованным сторонам.

В тех случаях, когда метрологическая ревизия или экспертиза, проведенная по заявлению предприятия, организации или учреждения, дает основания предполагать наличие злоупотреблений, в результате которых нанесен материаль-

ный ущерб народному хозяйству или отдельным лицам, руководитель органа Государственной метрологической службы обязан направлять материалы ревизии или экспертизы в следственные органы.

§ 63. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ СССР

Большое значение измерений времени и частоты для различных отраслей народного хозяйства страны, все более возрастающее с научно-техническим прогрессом в этих отраслях, обусловили необходимость создания Государственной службы времени и частоты СССР (ГСВЧ). В состав ГСВЧ СССР входит ряд метрологических подразделений Госстандарта, передающие центры Министерства связи СССР, астрономические обсерватории АН СССР и ряд других организаций. Возглавляет работу Главный метрологический центр ГСВЧ, входящий в состав ВНИИФТРИ.

Для координации деятельности министерств и ведомств по обеспечению народного хозяйства информацией об эталонном времени в 1947 г. при Госстандарте была создана Межведомственная комиссия единой службы времени, возглавляемая Председателем Госстандарта. В состав комиссии входят представители АН СССР и ряда заинтересованных министерств и ведомств (Министерства связи СССР, Министерства путей сообщения СССР, Министерства высшего и среднего специального образования СССР и др.). В круг задач комиссии входит: разрешение вопросов, связанных с передачей сигналов времени; установление сети учреждений, ведущих работу по передаче и приему сигналов времени и хранению шкал времени; координация работ, выполняемых отдельными ведомствами в области службы времени; разрешение вопросов, связанных с исчислением времени по системе часовых поясов и определением, хранением и передачей эталонных частот, а также координация работ отдельных ведомств в области частоты.

Основные задачи ГСВЧ СССР следующие: воспроизведение размеров единиц времени и частоты; формирование и хранение национальной шкалы времени СССР; передача сигналов времени и частоты и метрологический контроль за правильностью этих сигналов; определение соотношения между атомной шкалой времени и шкалой всемирного времени; обеспечение международного единства в области измерений времени и частоты.

Результаты работ ГСВЧ СССР используются при доведении информации о текущем времени до широкого круга пользователей в масштабе страны, для повышения качества радио и телепередач в Единой автоматизированной системе связи СССР, в системах навигации и управления движением самолетов, для достижения синхронной работы генераторов Единой энергетической системы СССР, для увеличения эффективности АСУ благодаря четкому временному взаимодействию ЭВМ, при автоматическом регулировании транспортных потоков.

В число задач ГСВЧ СССР входит и астрономическое определение времени, не утратившее свое значение и после перехода на атомное время. Для этих целей в составе ГСВЧ работает 11 служб времени СССР и участвует 10 служб социалистических стран. С целью обеспечения единства измерений времени и частоты в международном масштабе осуществляется прием и обработка сигналов радиостанций США, Англии и ряда других стран, ведется обмен информацией с Международным бюро мер и весов, Службой движения полюсов, Международным консультативным комитетом по радиосвязи.

Развитие сети передачи сигналов времени и частоты при помощи телевидения, радио и других каналов связи направлено на то, чтобы все объекты промышленности, связи, транспорта в стране функционировали в едином ритме. В целях оптимального решения этой проблемы создается Государственная система единого времени СССР, которая охватывает все находящиеся в эксплуатации часы и хронометрические приборы. Ее верхней ступенью является Государственная служба времени и частоты СССР, а нижней — разнообразные хронометрические системы, снабжающие соответствующие группы потребителей единой информацией о времени, с точностью, определяемой Государственным эталоном времени и частоты.

§ 64. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА СТАНДАРТНЫХ СПРАВОЧНЫХ ДАННЫХ

Государственная служба стандартных справочных данных о свойствах веществ и материалов (ГСССД) является специализированной общегосударственной системой, обеспечивающей на основе единых научных методических и организационных положений определение, сбор, обработку, оценку, хранение и аттестацию данных о физических константах и свойствах веществ и материалов и справочно-информационное обслуживание потребителей этими данными.

В современной науке и технике используется огромное количество разнообразных веществ и материалов, которые обладают различными свойствами, меняющимися в зависимости от условий (давления, температуры, частоты и др.).

Несмотря на большое число экспериментальных и теоретических исследований свойств материалов (их ежегодно публикуется во всем мире до 200 000), трудно получить достоверную информацию о свойствах многих и особенно новых веществ и материалов. В справочниках часто помещают недостаточно проверенные, иногда противоречивые данные. Трудность получения достоверной информации определяется и большим ее объемом. В настоящее время известно около 4 миллионов веществ и материалов и более тысячи свойств при различных внешних условиях и воздействиях.

Организовать оперативное получение достоверной информации о свойствах веществ и материалов призвана Государственная служба стандартных справочных данных, созданная Госстандартом. Основные цели ГСССД изложены в ГОСТ 8.310—78 «ГССД. Основные положения» и ГОСТ 8.344—79 «ГССД. Порядок аттестации данных о физических константах и свойствах веществ и материалов»: обеспечение наиболее эффективного использования веществ и материалов путем исчерпывающей оперативной информации об их свойствах; ускорение получения новых веществ и материалов и определение новых необходимых данных о них с помощью координации соответствующих работ; повышение производительности научного и инженерного труда путем уменьшения затрат на поиск информации; обеспечение соответствующего уровня точности значений физических констант и справочных данных и развитие международного сотрудничества в данной области.

Государственная служба стандартных справочных данных структурно включает 129 головных и базовых организаций в министерствах и ведомствах, в том числе 25 базовых организаций, 25 центров данных в системе АН СССР и союзных республик, и головной методический орган службы — Всесоюзный научно-исследовательский центр по материалам и веществам Госстандарта (ВНИЦ МВ).

Важнейшая задача ГСССД — добиться оперативного и достаточно полного обеспечения работников науки и производства достоверными данными о свойствах веществ и материалов — может быть решена только на базе использования средств механизации и автоматизации процессов обработки и хранения (с учетом пополнения и изменений), поиска, передачи и выдачи информации потребителю.

В ГСССД используются различные формы обслуживания потребителей: выпуск периодических и непериодических изданий в виде справочников, таблиц стандартных справочных данных, обзоров, библиографических указателей и др.; система оперативного ответа на запросы потребителей; система избирательного распространения, в которой поступающая в фонды ГСССД информация рассылается постоянным абонентам ГСССД в соответствии с тематикой их работы.

Государственная служба стандартных справочных данных базируется на ряде основных принципов, из которых важнейшими являются следующие: создание и применение единых критериев достоверности справочных данных; стандартизация и унификация методик измерений свойств материалов и оценки погрешностей измерений; осуществление централизованного методического и организационного руководства работами по получению и сбору достоверных данных; привлечение экспертов и создание сети головных и базовых организаций; стандартизация и унификация форм поступления и выдачи информации.

Значение ГСССД особенно возрастает в настоящее время, когда постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР о научно-техническом прогрессе

перед ГСССД поставлены задачи обеспечения условий рационального выбора и экономного применения материалов и веществ на основе их государственной регистрации.

§ 65. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА СТАНДАРТНЫХ ОБРАЗЦОВ

Составной частью Государственной метрологической службы является Государственная служба стандартных образцов (ГССО).

Цель службы — обеспечение единства измерений химического состава, физических, физико-химических, эксплуатационных и других свойств веществ и материалов.

Стандартные образцы широко используются для градуировки и поверки средств и методов измерений, а также для контроля качества промышленной продукции методом непосредственного сличения. Они применяются в важнейших отраслях промышленности и служат для контроля качества сырья по химическому составу, механическим, теплофизическим, оптическим, электрическим, магнитным, радиоактивным и другим свойствам.

Стандартные образцы веществ и материалов представляют собой меры величин, характеризующих свойства или состав веществ и материалов. Они применяются как при проведении метрологических работ, так и при контроле качества сырья и продукции.

В зависимости от аттестуемой характеристики стандартные образцы веществ и материалов подразделяют на *стандартные образцы свойств и стандартные образцы состава*. Возможна одновременная аттестация стандартных образцов по свойствам и составу.

Стандартные образцы используются в виде вещества (или тела), одно из свойств которого служит для воспроизведения при определенных условиях единицы измерения, коэффициентов или условной шкалы.

Стандартные образцы характеризуются следующими признаками: областью применения и аттестуемым свойством, веществом — носителем свойства, значением аттестуемой величины и метрологическим назначением образца (в качестве образцовой меры различных разрядов или рабочей меры различных классов точности).

При аттестации стандартного образца точность определения свойства стандартного образца устанавливается в зависимости от его назначения. Допускаемые погрешности аттестуемых стандартных образцов свойства, а также разряд стандартного образца (образцовой меры) или класс точности стандартного образца (рабочей меры) устанавливаются соответствующими нормативными документами.

Стандартные образцы классифицируют по следующим признакам:

по разновидности аттестуемой характеристики, по которой аттестуется образец (содержание одного, нескольких или всех компонентов, чистота вещества, фазовый состав);

по аттестуемым объектам;

по методу анализа испытуемых объектов (химический, спектральный, рентгено-спектральный, масс-спектральный, активационный и др.);

по метрологическому назначению (контроль правильности анализов, градуировка средств измерений, поверка средств измерений);

по агрегатному состоянию и технологическим особенностям изготовления материала стандартных образцов.

Каждый образец, положительно аттестованный в качестве стандартного образца свойств веществ и материалов, регистрируется в Государственном реестре стандартных образцов СССР, являющемся составной частью Государственного реестра средств измерений СССР. Стандартные образцы аттестуют как в метрологических органах, так и в ведомственных организациях с последующей экспертизой метрологических органов Государственной метрологической службы.

Аттестованные стандартные образцы снабжают соответствующим свидетельством или наносят на образец клеймо, содержащее значение аттестуемой величины.

Головной организацией в области стандартных образцов, обеспечивающей проведение научных и методических работ в этой области, изучение общих вопросов измерений химического состава и свойств, контроля качества и метрологических аспектов свойств веществ и материалов, является Свердловский филиал ВНИИМ.

КОНТРОЛЬНО-ОБУЧАЮЩИЕ ПРОГРАММЫ

Для закрепления знаний по наиболее сложным разделам курса «Основы метрологии» возможно использование контрольно-обучающих систем типа «Огонек», «Киси», «Буревестник».

Ниже приводится описание двух комплексов программ, которые могут быть реализованы на этих системах или использованы для проведения контрольных работ с машинной или ручной проверкой их результатов.

Каждый комплекс состоит из 12 программ по четыре и по три задачи в каждой. Комбинируя задачи из различных программ в пределах одного комплекса, можно составить большее число вариантов. По результатам решения каждой задачи необходимо дать оценку правильности двух заключений. Таким образом, возможны четыре решения на каждую задачу:

1. А — верно; В — неверно;
2. А — неверно; В — верно;
3. А — верно; В — верно;
4. А — неверно; В — неверно.

Изучающий курс получает карточку с программой и после решения каждой задачи нажимает на табло обучающей машины последовательно клавиши с номером задачи в программе и номером ответа. Оценка выставляется преподавателем в зависимости от числа правильно решенных задач.

При ручном контроле изучающий курс отдает преподавателю карточку с номером программы и номерами ответов на каждую задачу. Имея список правильных ответов для каждой программы, преподаватель может быстро проверить результаты.

КОМПЛЕКС № 1. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ, ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Программа № 1

Задача № 1. Случайная величина X подчиняется гамма-распределению с плотностью $p(x)=\beta^{\alpha}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\beta x}/\Gamma(\alpha)$, где α и β — параметры распределения: $\Gamma(\alpha)$ — гамма функция. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение А. $M[X]=\frac{\alpha}{\beta}$; В. $\sigma[X]=\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$.

Примечания: 1. $\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)$; 2. $\int\limits_0^{\infty} x^m e^{-ax}dx=\Gamma(m+1)/a^{m+1}$.

Задача № 2. Дан ряд наблюдений, распределенных по Лапласу: $x_1=12{,}1540$ мм; $x_2=12{,}1538$ мм; $x_3=12{,}1549$ мм. Найти оценки максимального правдоподобия для истинного значения измеряемой величины и средней квадратической погрешности ряда и дать заключение о правильности утверждений:

А. $\hat{Q}=12{,}15423$ мм; В. $\hat{\sigma}=0{,}00052$ мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения погрешностей получены следующие данные: $n=9$; $\bar{X}=24{,}022$ мм; $\sigma_X=0{,}012$ мм. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{24{,}014\leqslant Q<24{,}030\}=91{,}94\%$; В. $P\{Q<24{,}000\}=5\%$.

Задача № 4. В условиях нормального распределения случайных погрешностей получены следующие данные: $n=4$; $S_{\bar{X}}=0{,}004$ мм. Проверить справедливость следующих утверждений: А. $0{,}018>\sigma_X\geqslant 0{,}006$ при уровне значимости $q=0{,}2$; В. $0{,}5<P\{\sigma_X>0{,}008\}<0{,}7$.

Программа № 2

Задача № 1. Случайная величина x подчиняется χ-распределению с плотностью $p(x)=x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}/2^{\frac{n}{2}-1}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$; $0<x<\infty$, где n — параметр распределения; $\Gamma(y)$ — гамма-функция, $\Gamma(n/2)$ — ее значение при $y=n/2$.
Найти математическое ожидание и дисперсию распределения

А. $M[X]=\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$; В. $=D[X]=n+2\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2$.

Примечания: 1. $\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)$; 2. $\int\limits_0^\infty x^m e^{-r^2x^2}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2r^{m+1}}$.

Задача № 2. Дан ряд наблюдений, распределенных нормально: $x_1=14{,}5610$ мм; $x_2=14{,}5617$ мм; $x_3=14{,}5608$ мм. Найти оценки максимального правдоподобия (ОМП) для истинного значения измеряемой величины и средней квадратической погрешности ряда и дать заключение о правильности утверждений: А. $\hat{Q}=14{,}5612$ мм; В. $\sigma_X=0{,}0005$ мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения погрешностей получены следующие данные: $n=4$; $\bar{X}=13{,}043$ мм, $s_X=0{,}028$ мм. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{13{,}113>Q\geqslant 12{,}973\}=91{,}22\%$; В. $P\{Q>13{,}086\}=2{,}5\%$.

Задача № 4. В условиях нормального распределения случайных погрешностей получены следующие данные: $n=9$; $s_{\bar{X}}=0{,}006$ мм. Проверить справедливость следующих утверждений: А. $0{,}004\leqslant\sigma_X<0{,}010$ при уровне значимости $q=0{,}1$; В. $0{,}4<P\{\sigma_X<0{,}018\}<0{,}5$.

Программа № 3

Задача № 1. Случайная погрешность δ имеет χ^2-распределение с плотностью $p(\delta)=\delta^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\delta}{2}}/2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$; $0<\delta<\infty$, где n — параметр распределения; $\Gamma(y)$ — гамма-функция; $\Gamma(n/2)$ — значение гамма-функции при $y=n/2$. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: А. $M[\delta]=2n$; В. $\sigma[\delta]=\sqrt{n(4n+1)}$.

Примечания: 1. $\Gamma(m+1)=m\cdot\Gamma(m)$. 2. $\int\limits_0^\infty x^m e^{-ax}dx=\Gamma(m+1/a^{m+1}$.

Задача № 2. Дан ряд равномерно распределенных результатов наблюдений: $x_1=103{,}2107$ мм; $x_2=103{,}2118$ мм; $x_3=103{,}2100$ мм. Найти ОМП для истинного значения и средней квадратической погрешности ряда и дать заключение о правильности утверждений: А. $\hat{Q}=103{,}2109$ мм; В. $\hat{\sigma}=0{,}0007$ мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $n=16$; $\bar{X}=94{,}238$ мм; $s_X=0{,}048$ мм. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{Q>94{,}217\}=95\%$; В. $P\{94{,}202\leqslant Q<94{,}274\}=99{,}1\%$.

Задача № 4. При нормальном распределении результатов наблюдений получены следующие данные: $n=16$; $s_{\bar{X}}=0{,}008$ мм. Проверить правильность следующих выводов: А. $0{,}006\leqslant\sigma_X<0{,}013$ при уровне значимости $q=0{,}04$, В. $0{,}05<P\{\sigma_X>0{,}016\}<0{,}1$.

Программа № 4

Задача № 1. Результаты наблюдений подчинены распределению Эрланга с плотностью $p(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}/2a^3$; $0<x<\infty$, где a — параметр распределения.

Найти математическое ожидание результатов наблюдения и дисперсию случайных погрешностей: А. $M[X]=\bar{a}$; В. $D[X]=12a^2$.

Примечание. $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x}\,dx = n!/\alpha^{n+1}$.

Задача № 2. Дан ряд наблюдений, распределенных по Лапласу: $x_1=36{,}7114$ мм; $x_2=36{,}7112$ мм; $x_3=36{,}7128$ мм. Найти ОМП для истинного значения измеряемой величины и средней квадратической погрешности ряда наблюдений. Дать заключение о правильности утверждений: А. $\hat{Q}=36{,}71180$ мм; В. $\hat{\sigma}_X=0{,}00075$ мм.

Задача № 3. Обработка ряда нормально распределенных результатов наблюдений дала следующие данные: $\bar{X}=38{,}464$ мм; $s_X=0{,}049$ мм; $n=6$. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{Q<38{,}536\}=90\%$; В. $P\{38{,}636>Q>38{,}292\}=98{,}28\%$.

Задача № 4. При нормальном распределении результатов наблюдений получены следующие данные: $n=25$; $s_{\bar{X}}=0{,}012$ мм. Проверить правильность следующих выводов: А. $0{,}074>\sigma_X>0{,}051$ при уровне значимости $q=0{,}2$; В. $0{,}4<P\{\sigma_X<0{,}012\}<0{,}5$.

Программа № 5

Задача № 1. Плотность распределения модуля нормально распределенной погрешности описывается выражением $p(\delta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{c}e^{-\delta^2/2c^2}$, $0<\delta<\infty$, где c — параметр распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию этого распределения.

А. $M[\delta]=c\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; В. $D[\delta]=c^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$.

Примечание. $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha^2 x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}$.

Задача № 2. Дан ряд нормально распределенных результатов наблюдений: $x_1=71{,}940$ мм; $x_2=71{,}956$ мм; $x_3=71{,}945$ мм. Дать заключение относительно правильности следующих утверждений относительно ОМП для истинного значения и среднего квадратического отклонения ряда наблюдений: А. $\hat{Q}=71{,}9450$ мм; В. $\hat{\sigma}_X=0{,}00082$ мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения погрешностей получены следующие данные: $n=36$; $s_{\bar{X}}=0{,}015$ мм. Проверить правильность следующих выводов: А. $0{,}076<\sigma_X<0{,}113$ при уровне значимости $q=0{,}10$; В. $0{,}5<P\{\sigma_X>0{,}09\}<0{,}55$.

Задача № 4. Обработка ряда нормально распределенных результатов наблюдений дала следующие данные: $\bar{X}=76{,}386$ мм, $s_X=0{,}015$ мм, $n=9$. Проверить правильность следующих выводов: А. $P\{76{,}376\leqslant Q<76{,}396\}=91{,}94\%$; В. $P\{Q<76{,}365\}=10\%$.

Программа № 6

Задача № 1. Результаты наблюдений подчинены бета-распределению с плотностью $p(x)=6(x-a)(b-x)/(b-a)^3$ в интервале $a<x<b$ и $p(x)=0$ вне этого интервала. Найти математическое ожидание и дисперсию результатов наблюдений: А. $M[X]=(b-a)/2$; В. $D[X]=(b-a)^2/20$.

Задача № 2. Дать заключение относительно правильности следующих утверждений относительно ОМП для истинного значения и среднего квадратического отклонения ряда равномерно распределенных результатов наблюдений (x_i=75,108; 75,116; 75,110 мм): А. $\hat{Q}$=75,1120 мм; В. σ_X=0,0023 мм.

Задача № 3. Обработка ряда нормально распределенных результатов наблюдений дала следующие данные: $\bar{X}$=81,730 мм; s_X=0,008 мм; n=4. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{81,740>Q\geqslant 81,720\}=93,32\%$; В. $P\{Q>81,735\}=15\%$.

Задача № 4. В условиях нормального распределения погрешностей измерения получены следующие данные: n=4; $s_{\bar{X}}$=0,12 мм. Проверить правильность следующих утверждений: А. $0,13<\sigma_X<0,49$ при уровне значимости q=0,10; В. $0,3<P\{\sigma_X<0,24\}<0,5$.

Программа № 7

Задача № 1. Результаты наблюдений подчинены распределению arccos с плотностью $p(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{\delta_0^2-(x-a)^2}}$; $|x-a|<\delta_0$. Найти математическое ожидание результатов наблюдений и дисперсию погрешностей: А. $M[X]=\delta_0$; В. $D[\delta]=a^2+\delta_0^2$.

Примечания.

$$1.\ \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t;\quad 2.\ \int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin t.$$

Задача № 2. Дан ряд наблюдений, распределенных по Лапласу: x_1=41,748 мм; x_2=41,732 мм; x_3=41,766 мм. Проверить правильность следующих утверждений относительно ОМП для истинного значения измеряемой величины и среднего квадратического отклонения ряда наблюдений: А. $\hat{Q}$=41,748 мм; В. $\hat{\sigma}_X$=0,017 мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $\bar{X}$=143,4356 мм; s_X=0,0057 мм; n=8. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{Q>143,4318\}=95\%$; В. $P\{143,4296<Q\leqslant 143,4416\}=98\%$.

Задача № 4. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: n=16; $s_{\bar{X}}$=0,085 мм. Проверить следующие неравенства: А. $0,538>\sigma_X\geqslant 0,248$ при уровне значимости q=0,04; В. $0,5<P\{\sigma_X<0,34\}<0,7$.

Программа № 8

Задача № 1. Результаты наблюдений подчиняются распределению Коши с плотностью $p(x)=b/\pi[b^2+(x-a)^2]$. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: А. $M[X]=a$; В. $\sigma[X]=\infty$.

Примечание.

$$1.\ \int\frac{dt}{b^2+t^2}=\frac{1}{b}\operatorname{arctg} t/b;\quad 2.\ \int\frac{t^2dt}{b^2+t^2}=t-b\cdot\operatorname{arctg} t/b.$$

Задача № 2. Дан ряд равномерно распределенных результатов наблюдений: x_1=0,3482 мм; x_2=0,3488 мм; x_3=0,3481 мм. Найти оценки максимального правдоподобия для истинного значения измеряемой величины и среднего квадратического отклонения ряда наблюдений и оценить правильность следующих суждений: А. $\hat{Q}$=0,34837 мм, В. $\hat{\sigma}_X$=0,00020 мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $\bar{X}$=64,830 мм; s_X=0,008 мм; n=4. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{Q<64,840\}=85\%$; В. $P\{64,844>Q\geqslant 64,816\}=97,5\%$.

Задача № 4. В условиях нормального распределения погрешностей получены следующие данные: $n=6$, $s_{\bar{X}}=0{,}350$ мкм. Проверить правильность следующих утверждений: А. $0{,}214 \leqslant \sigma_X < 0{,}900$ при уровне значимости $q=0{,}04$; В. $0{,}3 < P\{\sigma_X > 0{,}400\} < 0{,}5$.

Программа № 9

Задача № 1. Результаты наблюдений распределены по закону равномерно возрастающей плотности в интервале $a<x<b$: $p(x)=2(x-a)/(b-a)^2$. Определить математическое ожидание результатов наблюдений и среднее квадратическое отклонение: А. $M[X]=(a-2b)/3$; В. $\sigma[X]=(b-a)/4$.

Задача № 2. Дан ряд нормально распределенных результатов наблюдений: $x_1=110{,}448$ мм; $x_2=110{,}454$ мм; $x_3=110{,}436$ мм. Найти оценки максимального правдоподобия для истинного значения и среднего квадратического отклонения и дать суждение о правильности следующих утверждений: А. $\hat{Q}=110{,}4460$ мм; В. $\hat{\sigma}_X=0{,}0092$ мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $\bar{X}=0{,}5372$ мм; $s_X=0{,}0016$ мм; $n=16$. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{Q>0{,}5370\}=70\%$; В. $P\{0{,}5362 \leqslant Q < 0{,}5382\}=97{,}54\%$.

Задача № 4. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $n=10$; $s_{\bar{X}}=22$ мкм. Проверить правильность следующих утверждений: А. $103>\sigma_X \geqslant 55$ при уровне значимости $q=0{,}20$; В. $0{,}3<P\{\sigma_X>80\}<0{,}4$.

Программа № 10

Задача № 1. Если δ_1 и δ_2 — две нормально распределенные погрешности, то $\delta=\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}$ подчиняется распределению Максвелла с плотностью $p(\delta)=\delta e^{-\frac{\delta^2}{2a^2}}/a^2$; $\delta>0$. Определить математическое ожидание и дисперсию:

$$\text{А. } M[\delta]=a\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ \text{В. } D[\delta]=a^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right).$$

Примечания. 1. $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$; 2. $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-a^2x^2}dx=\frac{1}{2a^4}$.

Задача № 2. Дан ряд результатов наблюдений, распределенных по Лапласу: $x_1=10{,}3420$ мм; $x_2=10{,}3410$ мм; $x_3=10{,}3413$ мм. Найти оценки максимального правдоподобия для истинного значения измеряемой величины и среднего квадратического отклонения и дать заключение о правильности суждений: А. $\hat{Q}=10{,}3413$ мм, В. $\sigma_X=0{,}0005$ мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $\bar{X}=1154{,}085$ мм; $s_X=0{,}045$ мм; $n=9$. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{1154{,}130>Q\geqslant 1154{,}040\}=98{,}5\%$; В. $P\{Q>1154{,}098\}=20\%$.

Задача № 4. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $n=25$; $s_{\bar{X}}=0{,}34$ мм. Проверить следующие неравенства: А. $1{,}38<\sigma_X<2{,}24$ при уровне значимости $q=0{,}1$; В. $0{,}8<p\{\sigma_X<1{,}5\}<0{,}85$.

Программа № 11

Задача № 1. Квадрат нормально распределенной погрешности подчиняется распределению с плотностью $p(\delta)=e^{-\delta/a}/\sqrt{\pi a\delta}$; $\delta>0$. Определить математическое ожидание и дисперсию: А. $M[\delta]=a/2$; В. $D[\delta]=3a^2/4$.

Примечания.

$$1.\ \int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\quad 2.\ \int_0^\infty x\sqrt{x}\, e^{-\alpha x} dx = \frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Задача № 2. Дан ряд равномерно распределенных результатов наблюдений: $x_1=9{,}7350$ мм; $x_2=9{,}7310$ мм; $x_3=9{,}7340$ мм. Найти оценки максимального правдоподобия для истинного значения и среднего квадратического отклонения и дать заключение о правильности суждений: А. $\hat{Q}=9{,}7333$ мм; В. $\hat{\sigma}_X=0{,}0021$.

Задача № 3. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $\bar{X}=16{,}7820$ мм; $s_X=0{,}0245$ мм; $n=6$. Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{16{,}7800<Q\leqslant 16{,}7840\}=89{,}8\%$; В. $P\{Q<16{,}7806\}=1\%$.

Задача № 4. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: $n=49$, $s_{\bar{X}}=7{,}5$ мкм.

Проверить следующие неравенства: А. $9{,}9>\sigma_X>6{,}1$ при уровне значимости $q=0{,}02$; В. $0{,}675<p\{\sigma_X>50\}<0{,}68$.

Программа № 12

Задача № 1. Результаты наблюдений распределены по закону равномерно убывающей плотности в интервале $a<x<b$: $p(x)=2(b-x/(b-a)^2$.
Определить математическое ожидание результатов и среднее квадратическое отклонение: А. $M[X]=(2a+b)/3$; В. $\sigma[X]=(b+a)/3\sqrt{2}$.

Задача № 2. Дан ряд нормально распределенных результатов наблюдений: $x_1=100{,}071$ мм, $x_2=100{,}024$ мм, $x_3=100{,}044$ мм. Найти оценки максимального правдоподобия для истинного значения и среднего квадратического отклонения и дать заключение о правильности утверждений: А. $\hat{Q}=100{,}044$ мм; В. $\sigma_X=0{,}019$ мм.

Задача № 3. В условиях нормального распределения погрешностей получены следующие данные: $\bar{X}=51{,}834$ мм; $s_X=0{,}016$ мм; $n=16$.
Проверить правильность следующих утверждений: А. $P\{Q<51{,}855\}=99\%$; В. $P\{51{,}848>Q>51{,}820\}=98\%$.

Задача № 4. При нормальном распределении погрешностей получены следующие данные: $s_{\bar{X}}=1{,}5$ мм; $n=9$. Проверить следующие неравенства: А. $0{,}95\leqslant\sigma_X<3{,}6$ при уравне значимости $q=0{,}20$; В. $0{,}4<p\{\sigma_X>4{,}5\}<0{,}5$.

КОМПЛЕКС № 2. РЯДЫ НАБЛЮДЕНИЙ. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НЕРАВНОРАССЕЯННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Программа № 1

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений:

$$\bar{X}_1=8{,}392;\ s_1=0{,}023;\ n_1=5;$$

$$\bar{X}_2=8{,}364;\ s_2=0{,}032;\ n_2=10.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий в этих группах наблюдений. А. Расхождение средних значимо при $P=80\%$; В. Расхождение дисперсий незначимо при $P=75\%$.

Задача № 2. Считая группы наблюдений из задачи № 1 неравиорассеянными, проверить справедливость утверждений: А. $s_{\bar{X}_0}<0{,}01$; В. $8{,}370\leqslant\bar{X}_0<8{,}380$.

Задача № 3. Измеряется величина Q, связанная с величинами A, B, C зависимостью $Q=A^2\cdot B/C$. Результаты прямых измерений аргументов:

$$\left.\begin{array}{l} A = 10{,}00 \pm 0{,}08;\ n = 5; \\ B = 2{,}00 \pm 0{,}02;\ n = 6; \\ C = 100 \pm 1;\ n = 7. \end{array}\right\} P = 90\ \%.$$

Проверить справедливость следующих неравенств: А. $s_{\bar{X}_Q} > 0{,}020$; В. $P\{|Q - 2{,}000| < 0{,}040\} < 90\ \%$.

Программа № 2

Задача № 1. Даны результаты двух групп измерений величины Q:

$$\left.\begin{array}{l} Q = 13{,}348 \pm 0{,}008;\ n = 16; \\ Q = 13{,}354 \pm 0{,}004;\ n = 8. \end{array}\right\} P = 90\ \%.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей в этих группах: А. Расхождение средних значимо при доверительной вероятности $P = 95\ \%$; В. Различие дисперсий значимо при доверительной вероятности $P = 99\ \%$.

Задача № 2. Считая группы измерений из задачи № 1 неравнорассеянными, проверить справедливость следующих утверждений: А. $s_{\bar{X}_Q} < 0{,}020$; В. $P\{|Q - 13{,}353| < 0{,}040\} < 90\ \%$.

Задача № 3. Косвенно измеряемая величина Q связана с аргументами A и B зависимостью $Q = A \cdot B + B/A$. Результаты измерения аргументов $\bar{X}_A = 0{,}10000$; $\bar{X}_B = 10{,}0$; корреляционная матрица погрешностей *

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}00022; & 0{,}015 \\ 0{,}015; & 1{,}6 \end{pmatrix}.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\bar{X}_Q} > 10$; В. Если бы результаты наблюдений величин A и B были статистически независимы, то имело бы место соотношение $s_{\bar{X}_Q} < 20$.

Программа № 3

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений:

$$\bar{X}_1 = 10{,}000;\ s_1 = 0{,}015;\ n_1 = 10;$$

$$\bar{X}_2 = 9{,}980;\ s_2 = 0{,}009;\ n_2 = 3.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешности рядов наблюдений: А. Различие средних значимо при $P = 90\ \%$; В. Различие дисперсий значимо при $P = 90\ \%$.

Задача № 2. Считая группы наблюдений в задаче № 1 неравнорассеянными, проверить справедливость следующих утверждений: А. $s_{\bar{X}_0} > 0{,}003$; В. $\bar{X}_0 < 9{,}985$.

Задача № 3. Формула косвенного измерения имеет вид $Q = (A + B)/C^2$. Результаты измерения аргументов

$$\left.\begin{array}{l} A = 5{,}00 \pm 0{,}04;\ n = 8; \\ B = 15{,}00 \pm 0{,}06;\ n = 4; \\ C = 10{,}00 \pm 0{,}02;\ n = 7. \end{array}\right\} P = 80\ \%.$$

Проверить правильность следующих неравенств: А. $s_{\bar{X}_Q} > 0{,}001$; В. $P\{|Q - 0{,}2000| < 0{,}0015\} > 80\ \%$.

---

* На главной диагонали корреляционной матрицы стоят дисперсии погрешностей измерения соответствующих величин, а на вспомогательной — их корреляционные моменты.

Программа № 4

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений величины Q:

$$\left.\begin{aligned} Q &= 153{,}48 \pm 0{,}08;\ n_1 = 9; \\ Q &= 153{,}54 \pm 0{,}04;\ n_2 = 13. \end{aligned}\right\} P = 95\ \%.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей в этих группах. А. Расхождение средних незначимо при доверительной вероятности $P=95\ \%$. В. Различие в дисперсиях незначимо при $P=90\ \%$.

Задача № 2. Считая группы наблюдений в задаче № 1 неравнорассеянными, проверить справедливость следующих утверждений: А. $s_{\overline{X}_0} > 0{,}02$; В. $P\{|Q-153{,}526| < 0{,}040\} > 95\ \%$.

Задача № 3. Формула косвенного измерения имеет вид $Q = A/B^2 + A/B$. Результаты измерений аргументов $\overline{X}_A = 2{,}00$; $\overline{X}_B = 1{,}00$; корреляционная матрица погрешностей

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}0064; & -0{,}0030 \\ -0{,}0030; & 0{,}0016 \end{pmatrix}.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_Q} > 0{,}2$; В. Если бы коэффициент корреляции погрешностей измерения величин A и B был равен $+1{,}0$, то имело бы место неравенство: $s_{\overline{X}_Q} < 0{,}05$.

Программа № 5

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений:

$$\overline{X}_1 = 0{,}008;\ s_1 = 0{,}002;\ n_1 = 8;$$

$$\overline{X}_2 = 0{,}005;\ s_2 = 0{,}003;\ n_2 = 13.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей: А. Расхождение средних значимо при $P=98\ \%$. В. Расхождение дисперсий незначимо при $P=75\ \%$.

Задача № 2. Считая группы наблюдений в задаче № 1 неравнорассеянными, проверить справедливость неравенств: А. $s_{\overline{X}_0} < 0{,}5 \cdot 10^{-3}$; В. $\overline{X}_0 < 0{,}007$.

Задача № 3. Формула косвенного измерения имеет вид $Q = C^2/(A+B)$. Результаты измерения аргументов:

$$\left.\begin{aligned} A &= 10{,}000 \pm 0{,}005;\ n = 15; \\ B &= 2{,}500 \pm 0{,}010;\ n = 10 \\ C &= 5{,}000 \pm 0{,}002;\ n = 16. \end{aligned}\right\} P = 95\ \%.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_Q} < 0{,}0020$; В. $P\{|Q-2{,}0000| \leqslant 0{,}0040\} < 95\ \%$.

Программа № 6

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений величины

$$\left.\begin{aligned} Q &= 61{,}35 \pm 0{,}15;\ n_1 = 16; \\ Q &= 61{,}65 \pm 0{,}25;\ n_2 = 3. \end{aligned}\right\} P = 80\ \%.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей этих групп: А. Расхождение средних незначимо при $P=70\ \%$. В. Расхождение в дисперсиях значимо при $P=75\ \%$.

Задача № 2. Считая группы наблюдений в задаче № 1 неравнорассеянными, проверить справедливость следующих утверждений: А. $s_{\overline{X}_0} > 0{,}080$; В. $P\{|Q-61{,}474| < 0{,}114\} \leqslant 80\ \%$.

Задача № 3. Формула косвенного измерения $Q = A/B^3$. Результаты измерения аргументов $\overline{X}_A = 16{,}00$; $\overline{X}_B = 2{,}000$; корреляционная матрица погрешностей

$$K=\begin{pmatrix}0,2400; & -0,0100\\ -0,0100; & 0,0008\end{pmatrix}.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_Q}>0,10$; В. Если бы погрешности измерений величин A и B были независимыми случайными величинами, то имело бы место соотношение $s_{\overline{X}_Q}<0,08$.

Программа № 7

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений:

$$\overline{X}_1=1003,01;\ s_1=0,01;\ n_1=18;$$

$$\overline{X}_2=1003,02;\ s_2=0,05;\ n_2=5.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей: А. Расхождение средних незначимо при доверительной вероятности $P=90$ %. В. Расхождение дисперсий значимо при $P=95$ %.

Задача № 2. Считая группы наблюдений в задаче № 1 неравнорассеянными, проверить справедливость следующих утверждений: А. $s_{\overline{X}_0}<0,003$; В. $\overline{X}_0>1003,015$.

Задача № 3. Формула косвенного измерения $Q=C^2/A\cdot B$. Результаты измерения аргументов:

$$\left.\begin{aligned}A&=2,000\pm0,022;\ n=8;\\ B&=4,000\pm0,030;\ n=16;\\ C&=8,000\pm0,040;\ n=5.\end{aligned}\right\}P=99\ \%.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_Q}<0,04$; В. $P\{|Q-8,000|<0,100\}>99$ %.

Программа № 8

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений величины Q:

$$\left.\begin{aligned}Q&=0,0484\pm0,0024;\ n_1=4;\\ Q&=0,0495\pm0,0008;\ n_2=9.\end{aligned}\right\}P=99\ \%.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей этих двух групп: А. Расхождение средних значимо при $P=98$ %; В. Расхождение дисперсий незначимо при $P=95$ %.

Задача № 2. Считая группы наблюдений в первой задаче неравнорассеянными, проверить справедливость следующих утверждений: А. $s_{\overline{X}_0}>0,00015$; В. $P\{|Q-0,049225|<0,000525\}>99$ %.

Задача № 3. Формула косвенного измерения $Q=A/B+B^2$. Результаты измерения аргументов $\overline{X}_A=16,00$; $\overline{X}_B=4,000$. Корреляционная матрица погрешностей

$$K=\begin{pmatrix}0,076; & -0,12\\ -0,12; & 0,260\end{pmatrix}.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_Q}>2,00$; В. $s_{\overline{X}_Q}<1,0$, если коэффициент корреляции между погрешностями измерения величин A и B равен $-1,0$.

Программа № 9

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений:

$$\overline{X}_1=150,05;\ s_1=0,04;\ n_1=13;$$

$$\overline{X}_2=150,08;\ s_2=0,08;\ n_2=10.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей: А. Расхождение средних незначимо при $P=80$ %. В. Расхождение дисперсий незначимо при $P=90$ %.

Задача № 2. Считая группы наблюдений в задаче № 1 неравнорассеянными, проверить справедливость следующих утверждений: А. $s_{\overline{X}_0}<0{,}008$; В. $\overline{X}_0<$ $<150{,}06$.

Задача № 3. Формула косвенного измерения $Q=A\cdot B\cdot C^2$. Результаты измерения аргументов:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2{,}000 \pm 0{,}008;\ n=18;\\ B &= 2{,}000 \pm 0{,}016;\ n=3;\\ C &= 1{,}000 \pm 0{,}004;\ n=4. \end{aligned}\right\} P=98\ \%.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_0}>0{,}008$; В. $P\{|Q-4{,}000|<0{,}030\}>98$ %.

Программа № 10

Задача № 1. Даны результаты двух групп измерений величины Q:

$$\left.\begin{aligned} Q &= 5{,}375 \pm 0{,}010;\ n_1=13;\\ Q &= 5{,}355 \pm 0{,}015;\ n_2=7. \end{aligned}\right\} P=70\ \%.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий: А. Расхождение средних значимо при $P=70$ %; В. Расхождение дисперсий незначимо при $P=75$ %.

Задача № 2. Считая вышеприведенные группы наблюдений неравнорассеянными, проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_0}<0{,}005$; В. $P\{|Q-5{,}3685|<0{,}012\}<70$ %.

Задача № 3. Формула косвенного измерения $Q=A^3+B/A$. Результаты измерения аргументов: $\overline{X}_A=2{,}0000$ и $\overline{X}_B=4{,}0000$. Корреляционная матрица погрешностей

$$K=\begin{pmatrix} 0{,}0002; & -0{,}0010\\ -0{,}0010; & 0{,}0120 \end{pmatrix}.$$

Проверить неравенства: А. $0{,}10<s_{\overline{X}_Q}<0{,}15$; В. $0{,}05<s_{\overline{X}_Q}<0{,}10$, если погрешности измерения величин A и B — независимые случайные величины.

Программа № 11

Задача № 1. Даны результаты двух групп наблюдений:

$$\overline{X}_1=25{,}002;\ s_1=0{,}012;\ n_1=4;$$

$$\overline{X}_2=25{,}012;\ s_2=0{,}006;\ n_2=12.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей: А. Расхождение средних незначимо при $P=98$ %; В. Расхождение дисперсий незначимо при $P=99$ %.

Задача № 2. Считая вышеприведенные группы наблюдений неравнорассеянными, проверить следующие неравенства: А. $s_{\overline{X}_0}<0{,}002$; В. $\overline{X}_0<25{,}010$.

Задача № 3. Формула косвенного измерения $Q=C^2-A\cdot B$. Результаты измерения аргументов

$$\left.\begin{aligned} A &= 3{,}000 \pm 0{,}006;\ n=10;\\ B &= 5{,}000 \pm 0{,}008;\ n=8;\\ C &= 5{,}000 \pm 0{,}002;\ n=12. \end{aligned}\right\} P=70\ \%.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_Q}>0{,}05$; В. $P\{|Q-10{,}000|<0{,}060\}<90$ %.

Программа № 12

Задача № 1. Даны результаты двух групп измерений величины Q:

$$\left.\begin{array}{l} Q = 108{,}2 \pm 1{,}2;\ n = 25; \\ Q = 110{,}1 \pm 1{,}8;\ n = 9. \end{array}\right\} P = 98\ \%.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей: А. Расхождение средних незначимо при $P=98$ %. В. Расхождение дисперсий значимо при $P=90$ %.

Задача № 2. Считая вышеприведенные группы неравнорассеянными, проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_0} < 0{,}40$; В. $\overline{X}_0 < 109{,}1$.

Задача № 3. Формула косвенного измерения $Q = A \cdot B - B^2$. Результаты измерения аргументов: $\overline{X}_A = 15{,}000$; $\overline{X}_B = 10{,}000$. Корреляционная матрица погрешностей

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}025; & 0{,}035 \\ 0{,}035; & 0{,}075 \end{pmatrix}.$$

Проверить неравенства: А. $s_{\overline{X}_Q} < 0{,}500$; В. Если коэффициент корреляции между погрешностями измерения величин A и B равен единице, то $0{,}1 < s_{\overline{X}_Q} < 0{,}5$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Важнейшие единицы Международной системы СИ

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
1. Основные единицы				
1.1. Длина	L	метр	м	m
1.2. Масса	M	килограмм	кг	kg
1.3. Время	T	секунда	с	s
1.4. Сила электрического тока	I	ампер	А	A
1.5. Термодинамическая температура	Θ	кельвин	К	K
1.6. Количество вещества	N	моль	моль	mol
3.7. Сила света	J	кандела	кд	cd
2. Дополнительные единицы				
1.1. Плоский угол	—	радиан	рад	rad
2.2. Телесный угол	—	стерадиан	ср	sr
3. Производные единицы пространства и времени				
3.1. Площадь	L^2	квадратный метр	м^2	m^2
3.2. Объем, вместимость	L^3	кубический метр	м^3	m^3
3.3. Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	м/с	m/s
3.4. Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	м/с^2	m/s^2

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
3.5. Частота периодического процесса	T^{-1}	герц	Гц	Hz
3.6. Частота вращения	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	s^{-1}
3.7. Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с	rad/s
3.8. Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/$с^2$	rad/s^2
3.9. Волновое число	L^{-1}	метр в минус первой степени	$м^{-1}$	m^{-1}
3.10. Коэффициент затухания	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	s^{-1}
3.11. Коэффициент ослабления	L^{-1}	метр в минус первой степени	$м^{-1}$	m^{-1}
4. Производные единицы механических величин				
4.1. Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	кг/$м^3$	kg/m^3
4.2. Удельный объем	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	$м^3$/кг	m^3/kg
4.3. Момент инерции (динамический момент инерции)	L^2M	килограмм—метр в квадрате	кг·$м^2$	kg·m^2

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
4.4. Момент инерции (второй момент) площади плоской фигуры (осевой, полярный, центробежный)	L^4	метр в четвертой степени	м⁴	m^4
4.5. Момент сопротивления плоской фигуры	L^3	метр в третьей степени	$м^3$	m^3
4.6. Количество движения (импульс)	LMT^{-1}	килограмм—метр в секунду	кг·м/с	kg·m/s
4.7. Момент количества движения (момент импульса)	L^2MT^{-1}	килограмм—метр в квадрате в секунду	кг·м²/с	kg·m²/s
4.8.1. Сила 4.8.2. Вес	LMT^{-2}	ньютон	Н	N
4.9. Удельный вес	$L^{-2}MT^{-2}$	ньютон на кубический метр	Н/м³	N/m³
4.10. Момент силы, момент пары сил	L^2MT^{-2}	ньютон — метр	Н·м	N·m
4.11. Импульс силы	LMT^{-1}	ньютон — секунда	Н·с	N·s
4.12.1. Давление 4.12.2. Напряжение (механическое)	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	Pa
4.13. Поверхностное натяжение	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м	N/m
4.14.1. Работа 4.14.2. Энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
4.15. Мощность	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
4.16. Динамическая вязкость	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль — секунда	Па·с	Pa·s
4.17. Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	м²/с	m²/s
4.18. Массовый расход	MT^{-1}	килограмм в секунду	кг/с	kg/s
4.19. Объемный расход	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	м³/с	m³/s
5. Производные единицы электрических и магнитных величин				
5.1. Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	А/м²	A/m²
5.2. Линейная плотность электрического тока	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	A/m
5.3. Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	C
5.4. Пространственная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м³	C/m³
5.5.1. Поверхностная плотность электрического заряда	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²	C/m²
5.5.2. Поляризованность	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²	C/m²
5.6. Электрический момент диполя	LTI	кулон — метр	Кл·м	C·m
5.7. Поток электрического смещения	TI	кулон	Кл	C

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
5.8. Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²	C/m²
5.9.1. Электрическое напряжение	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	V
5.9.2. Электрический потенциал				
5.9.3. Разность электрических потенциалов				
5.9.4. Электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	V
5.10. Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м	V/m
5.11. Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	F
5.12.1. Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м	F/m
5.12.2. Электрическая постоянная				
5.13. Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	Ω
5.14. Удельное электрическое сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом·метр	Ом·м	Ω·m
5.15. Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	S
5.16. Удельная электрическая проводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	сименс на метр	См/м	S/m
5.17. Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	Wb
5.18. Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Т	T
5.19.1. Магнитодвижущая сила	I	ампер	А	A
5.19.2. Разность магнитных потенциалов				

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
5.20. Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	A/m
5.21.1. Индуктивность 5.21.2. Взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Г	H
5.22.1. Абсолютная магнитная проницаемость 5.22.2. Магнитная постоянная	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Г/м	H/m
5.23.1. Магнитный момент электрического тока 5.23.2. Магнитный момент диполя	L^2I	ампер — квадратный метр	А·м²	A·m²
5.24. Намагниченность	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	A/m
5.25. Магнитное сопротивление	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	ампер на вебер	А/Вб	A/Wb
5.26. Магнитная проводимость	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	вебер на ампер	Вб/А	Wb/A
5.27. Электромагнитная энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
5.28. Активная мощность	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
5.29. Реактивная мощность	L^2MT^{-3}	вар	вар	var
5.30. Полная мощность	L^2MT^{-3}	вольт — ампер	В·А	V·A

Величина		Единица		
			Обозначение	
Наименование	Размерность	Наименование	русское	международное
6. Производные единицы тепловых величин				
6.1.1. Количество теплоты	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
6.1.2. Термодинамический потенциал (внутренняя энергия, энтальпия, изохорно-изотермический потенциал, изобарно-изотермический потенциал)	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
6.1.3. Теплота фазового превращения				
6.1.4. Теплота химической реакции				
6.2.1. Удельное количество теплоты	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг	J/kg
6.2.2. Удельный термодинамический потенциал				
6.2.3. Удельная теплота фазового превращения				
6.2.4. Удельная теплота химической реакции				
6.3. Теплоемкость системы	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	J/K
6.4. Энтропия системы	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	J/K
6.5. Удельная теплоемкость	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм—кельвин	Дж/(кг·К)	J/(kg·k)

Величина		Единица		
			Обозначение	
Наименование	Размерность	Наименование	русское	международное
6.6. Удельная энтропия	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм—кельвин	Дж/(кг·К)	J/(kg·k)
6.7. Удельная газовая постоянная	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм—кельвин	Дж/(кг·К)	J(kg·K)
6.8. Тепловой поток	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
6.9. Поверхностная плотность теплового потока	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м²	W/m²
6.10.1. Коэффициент теплообмена 6.10.2. Коэффициент теплопередачи	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на квадратный метр — кельвин	Вт/(м²·К)	W/(m²·K)
6.11. Температурный градиент	$L^{-1}\Theta$	кельвин на метр	К/м	K/m
6.12. Теплопроводность	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на метр — кельвин	Вт/(м·К)	W/(m·k)
6.13. Температуропроводность	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	м²/с	m²/s
6.14. Температурный коэффициент	Θ^{-1}	кельвин в минус первой степени	К⁻¹	K⁻¹

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
7. Производные единицы величин, выражаемых через количество вещества				
7.1. Молярная масса	MN^{-1}	килограмм на моль	кг/моль	kg/mol
7.2. Молярный объем	L^3N^{-1}	кубический метр на моль	м³/моль	m³/mol
7.3.1. Молярная внутренняя энергия	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль	J/mol
7.3.2. Молярная энтальпия				
7.3.3. Химический потенциал				
7.3.4. Химическое сродство				
7.4.1. Молярная теплоемкость	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль — кельвин	Дж/(моль·К)	J/(mol·K)
7.4.2. Молярная энтропия				
7.5. Молярная концентрация	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	моль/м³	mol/m³
7.6. Скорость химической реакции	$L^{-3}T^{-1}N$	моль на кубический метр в секунду	моль/(м³·с)	mol/(m³/s)
7.7. Удельная адсорбция	$M^{-1}N$	моль на килограмм	моль/кг	mol/kg

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
8. Производные единицы величин физической оптики и световых величин				
8.1. Энергия излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
8.2. Поток излучения	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
8.3.1. Энергетическая освещенность (облученность)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м²	W/m²
8.3.2. Энергетическая светимость (излучательность)				
8.4. Энергетическая экспозиция (лучистая экспозиция)	MT^{-2}	джоуль на квадратный метр	Дж/м²	J/m²
8.5. Энергетическая сила света (сила излучения)	L^2MT^{-3}	ватт на стерадиан	Вт/ср	W/sr
8.6. Энергетическая яркость (лучистость)	MT^{-3}	ватт на стерадиан — квадратный метр	Вт/(ср·м²)	W/(sr·m²)
8.7. Световой поток	J	люмен	лм	lm
8.8. Световая энергия	TJ	люмен — секунда	лм·с	lm·s
8.9. Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	lx
8.10. Светимость	$L^{-2}J$	люмен на квадратный метр	лм/м²	lm/m²

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
8.11. Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	кд/м²	cd/m²
8.12. Световая экспозиция	$L^{-2}TJ$	люкс — секунда	лк·с	lx·s

9. Производные единицы акустических величин

9.1. Звуковое давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	Pa
9.2. Объемная скорость	$L^{3}T^{-1}$	кубический метр в секунду	м³/с	m³/s
9.3. Акустическое сопротивление	$L^{-4}MT^{-1}$	паскаль — секунда на кубический метр	Па·с/м³	Pa·s/m³
9.4. Удельное акустическое сопротивление	$L^{-2}MT^{-1}$	паскаль — секунда на метр	Па·с/м	Pa·s/m
9.5. Механическое сопротивление	MT^{-1}	ньютон — секунда на метр	Н·с/м	N·s/m
9.6. Звуковая энергия	$L^{2}MT^{-2}$	джоуль	Дж	J
9.7.1. Поток звуковой энергии 9.7.2. Звуковая мощность	$L^{2}MT^{-3}$	ватт	Вт	W
9.8. Интенсивность звука	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м²	W/m²
9.9. Плотность звуковой энергии	$L^{-1}MT^{-2}$	джоуль на кубический метр	Дж/м³	J/m³

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
10. Производные единицы величин в области ионизирующих излучений				
10.1. Энергия ионизирующего излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
10.2. Поток энергии ионизирующего излучения	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
10.3.1. Поглощенная доза излучения, керма, показатель поглощенной дозы (поглощенная доза ионизирующего излучения)	L^2T^{-2}	грей	Гр	Gy
10.3.2. Эквивалентная доза излучения	L^2T^{-2}	зиверт	Зв	Sv
10.4.1. Мощность дозы излучения (мощность поглощенной дозы излучения)	L^2T^{-3}	грэй в секунду	Гр/с	Gy/s
10.4.2. Мощность эквивалентной дозы излучения				
10.5. Экспозиционная доза фотонного излучения (экспозиционная доза гамма- и рентгеновского излучений)	$M^{-1}TI$	кулон на килограмм	Кл/кг	C/kg
10.6. Мощность экспозиционной дозы фотонного излучения	$M^{-1}I$	ампер на килограмм	А/кг	A/kg
10.7. Интенсивность излучения	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м²	W/m²
10.8. Активность нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа)	T^{-1}	беккерель	Бк	Bq

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
10.9. Поток ионизирующих частиц или фотонов	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	s^{-1}
10.10. Плотность потока ионизирующих частиц или фотонов	$L^{-2}T^{-1}$	секунда в минус первой степени — метр в минус второй степени	$с^{-1} \cdot м^{-2}$	$s^{-1}m^{-2}$

Таблица 2

Производные единицы СИ, имеющие специальные наименования

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
Частота	T^{-1}	герц	Гц	Hz
Сила, вес	LMT^{-2}	ньютон	Н	N
Давление, механическое напряжение, модуль упругости	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	Pa
Энергия, работа, количество теплоты	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	C
Электрическое напряжение	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	V

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^{4}I^{2}$	фарад	Ф	F
Электрическое сопротивление	$L^{2}MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	Ω
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^{3}I^{2}$	сименс	См	S
Поток магнитной индукции, магнитный поток	$L^{2}MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	Wb
Плотность магнитного потока, магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	T
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^{2}MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	H
Световой поток	J	люмен	лм	lm
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	lx
Активность нуклида в радиоактивном источнике	T^{-1}	беккерель	Бк	Bq
Поглощенная доза излучения, керма, показатель поглощенной дозы	$L^{2}T^{-1}$	грэй	Гр	Gy

Таблица 3

Единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ

Величина	Единица				Примечание
	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ или определение	
		русское	международное		
Масса	тонна	м	t	10^3 кг	
Время	минута час сутки	мин ч сут	min h d	60 с 3600 с 86400 с	Допускается применять и другие единицы — неделя, месяц, год и т. д.
Плоский угол	градус минута секунда	. . . ° . . . ′ . . . ″	. . . ° . . . ′ . . . ″	$\pi/180$ рад $\pi/10800$ рад $\pi/648000$ рад	
Объем, вместимость	литр	л	l	10^{-3} м^3	
Относительные величины	процент промилле миллионная доля	% ‰ млн$^{-1}$	% ‰ ppm	10^{-2} 10^{-3} 10^{-6}	
Логарифмические величины	бел децибел	Б дБ	B dB	1Б$=\lg(P_2/P_1)$ при $P_2/P_1=10$ или 1Б$=2\lg(F_2/F_1)$ при $F_2/F_1=\sqrt{10}$. 0,1 Б	P_1, P_2 — величины типа мощности или энергии; F_1; F_2 — величины типа напряжения или силы тока

Таблица 4

Единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ в специальных областях

Величина	Единица				Область применения
	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ	
		русское	международное		
Длина	астрономическая единица	а. е.	ua	1,49598 10^{11} м (приблизительно)	Астрономия
	световой год	св. год	ly	$9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м (приблизительно)	
	парсек	пк	pc	$3{,}0857 \cdot 10^{6}$ м (приблизительно)	
Оптическая сила	диоптрия	дптр	—	1 $м^{-1}$	Оптика
Площадь	гектар	га	ha	10^{4} $м^{2}$	Сельское и лесное хозяйство
Масса	атомная единица массы	а. е. м.	u	1,66057 10^{-27} кг (приблизительно)	Атомная физика
Плоский угол	град, гон	град	. . . .^{g} (gon)	(π/200) рад	Геодезия
Энергия	электрон-вольт	эВ	eV	1,60219 10^{-19} Дж (приблизительно)	Физика
Полная мощность	вольт-ампер	В·А	V·A		Электротехника
Реактивная мощность	вар	вар	var		

Таблица 5

Дифференциальная функция нормированного нормального распределения

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	t
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	t
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0338	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9

Таблица 6

Интегральная функция нормированного нормального распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
−3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023
−3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00033	0,00034
−3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00042	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
−3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
−3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,0082	0,00085	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
−3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
−2,9	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0017	0,0018	0,0019
−2,8	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
−2,7	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
−2,6	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
−2,5	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062
−2,4	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
−2,3	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
−2,2	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
−2,1	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
−2,0	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
−1,9	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
−1,8	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
−1,7	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
−1,6	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
−1,5	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
−1,4	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
−1,3	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
−1,2	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1057	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
−1,1	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357

Продолжение

z	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
−1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
−0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
−0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
−0,7	0,2148	0,2177	0,2207	0,2236	0,2266	0,2297	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
−0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
−0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
−0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
−0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
−0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
−0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
−0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

Продолжение

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

Продолжение

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Таблица 7

Интегральная функция нормированного нормального распределения. Значения z для различных $\Phi(z)$

$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z
0,0005	−3,2905	0,25	−0,6745	0,50	+0,0000	0,80	+0,8416
0,005	−2,575	0,30	−0,5244	0,55	+0,1257	0,85	+1,0364
0,01	−2,3267	0,35	−0,3853	0,60	+0,2533	0,90	+1,2816
0,05	−1,6449	0,40	−0,2533	0,65	+0,3853	0,95	+1,6449
0,10	−1,2816	0,45	−0,1257	0,70	+0,5244	0,99	+2,3267
0,15	−1,0364	0,50	−0,0000	0,75	+0,6745	0,995	+2,575
0,20	−0,8416					0,9995	+3,2905

Таблица 8

Распределение Стьюдента $P\{|t|<t_P\}=2\int_0^{t_P} S(t;\ k)\,dt$

k	P											
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,707
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

Таблица 9

Распределение Стьюдента.

Значения $P\{|t|<t_P\}=2\int_0^{t_P} S(t;\ k)\,dt$ **для различных** t_P

k	t_P				k	t_P			
	2,0	2,5	3,0	3,5		2,0	2,5	3,0	3,5
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8228	12	0,9314	0,9720	0,9890	0,9956
2	0,8164	0,8764	0,9046	0,9276	13	0,9392	0,9737	0,9898	0,9960
3	0,8606	0,9122	0,9424	0,9606	14	0,9348	0,9740	0,9904	0,9964
4	0,8838	0,9332	0,9600	0,9752	15	0,9360	0,9754	0,9910	0,9968
5	0,8980	0,9454	0,9700	0,9828	16	0,9372	0,9764	0,9916	0,9970
6	0,9076	0,9534	0,9760	0,9872	17	0,9382	0,9770	0,9920	0,9972
7	0,9144	0,9590	0,9800	0,9900	18	0,9392	0,9776	0,9924	0,9974
8	0,9194	0,9630	0,9830	0,9920	19	0,9400	0,9782	0,9926	0,9976
9	0,9234	0,9662	0,9850	0,9932	20	0,9408	0,9788	0,9930	0,9978
10	0,9266	0,9686	0,9866	0,9942	∞	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995
11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950					

Таблица 10

Интегральная функция χ^2 — распределения Пирсона.
Значения $\chi^2_{k;\,P}$ для различных k и P

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141

Продолжение

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,710	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Таблица 11

Значения ν_α при различных числах измерения n

n	$q=1-\alpha$				n	$q=1-\alpha$			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414	14	2,297	2,461	2,602	2,759
4	1,645	1,689	1,710	1,723	15	2,326	2,493	2,638	2,808
5	1,731	1,869	1,917	1,955	16	2,354	2,523	2,670	2,837
6	1,894	1,996	2,067	2,130	17	2,380	2,551	2,701	2,871
7	1,974	2,093	2,182	2,265	18	2,404	2,557	2,728	2,903
8	2,041	2,172	2,273	2,374	19	2,426	2,600	2,754	2,932
9	2,097	2,237	2,349	2,464	20	2,447	2,623	2,778	2,959
10	2,146	2,294	2,414	2,540	21	2,467	2,644	2,801	2,984
11	2,190	2,383	2,470	2,606	22	2,486	2,664	2,823	3,008
12	2,229	2,387	2,519	2,663	23	2,504	2,683	2,843	3,030
13	2,264	2,426	2,562	2,714	24	2,520	2,701	2,862	3,051
					25	2,537	2,717	2,880	3,071

Значения $F_{k_1k_2}$ для различных

k_2	α	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,75	5,83	7,50	8,20	8,58	8,82	8,98	9,10	9,19	9,26	9,32	9,36	9,41
	0,90	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	60,5	60,7
	0,95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	0,75	2,57	3,00	3,15	3,23	3,28	3,31	3,34	3,35	3,37	3,38	3,39	3,39
	0,90	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41
	0,95	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
	0,99	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	0,75	2,02	2,28	2,36	2,39	2,41	2,42	2,43	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45
	0,90	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22
	0,95	10,1	9,55	9,28	9,28	9,10	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
	0,99	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1
4	0,75	1,81	2,00	2,05	2,06	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08
	0,90	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90
	0,95	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
	0,99	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,4
5	0,75	1,69	1,85	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89
	0,90	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27
	0,95	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68
	0,99	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89
6	0,75	1,62	1,76	1,78	1,79	1,79	1,78	1,78	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77
	0,90	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90
	0,95	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
	0,99	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	0,75	1,57	1,70	1,72	1,72	1,71	1,71	1,70	1,70	1,69	1,69	1,69	1,68
	0,90	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67
	0,95	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
	0,99	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	0,75	1,54	1,66	1,67	1,66	1,66	1,65	1,64	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62
	0,90	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50
	0,95	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
	0,99	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	0,75	1,51	1,62	1,63	1,63	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58
	0,90	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38
	0,95	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
	0,99	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	0,75	1,49	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54
	0,90	3,28	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28
	0,95	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
	0,99	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71

Фишера.
доверительных вероятностей α

15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α	k_2
9,49	9,58	9,63	9,67	9,71	9,74	9,76	9,78	9,80	9,82	9,84	9,85	0,75	
61,2	61,7	62,0	62,3	62,5	62,7	62,8	63,0	63,1	63,2	63,3	63,3	0,90	1
246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	2,54	0,95	
3,41	3,43	3,43	3,44	3,45	3,45	3,46	3,47	4,47	3,48	3,48	3,48	0,75	
9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,47	9,48	9,48	9,49	9,49	9,49	0,90	
19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	0,95	2
99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	0,99	
2,46	2,46	2,46	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	0,75	
5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,15	5,14	5,14	5,14	5,14	5,13	0,90	
8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55	8,55	8,54	8,53	8,53	0,95	3
26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2	26,2	26,2	26,1	26,1	0,99	
2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	0,75	
3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,80	3,79	3,78	3,78	3,77	3,76	3,76	0,90	
5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,69	5,66	5,66	5,65	5,64	5,63	0,95	4
14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5	0,99	
1,89	1,88	1,88	1,88	1,88	1,88	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87	0,75	
3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,15	3,14	3,13	3,12	3,12	3,11	3,10	0,90	
4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41	4,40	4,39	4,37	4,36	0,95	5
9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13	9,11	9,08	9,04	9,02	0,99	
1,76	1,76	1,75	1,75	1,75	1,75	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	0,75	
2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,73	2,72	0,90	
3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,74	3,71	3,70	3,69	3,68	3,67	0,95	6
7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,06	6,99	6,97	3,93	6,90	6,88	0,99	
1,68	1,67	1,67	1,66	1,66	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	0,75	
2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,52	2,51	2,50	2,49	2,48	2,48	2,47	0,90	
3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27	3,27	3,25	3,24	3,23	0,95	7
6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75	5,74	5,70	5,67	5,65	0,99	
1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,59	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	0,75	
2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,35	2,34	2,32	2,32	2,31	2,30	2,29	0,90	
3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	3,01	2,97	2,97	2,95	2,94	2,93	0,95	8
5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96	4,95	4,91	4,88	4,86	0,99	
1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54	1,54	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53	0,75	
2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	0,90	
3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,79	2,76	2,75	2,73	2,72	2,71	0,95	9
4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,48	4,42	4,40	4,36	4,33	4,31	9,99	
1,53	1,52	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49	1,49	1,49	1,48	1,48	0,75	
2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,12	2,11	2,09	2,08	2,07	2,06	2,06	0,90	
2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,62	2,59	2,58	2,56	2,55	2,54	0,95	10
4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01	4,00	3,96	3,93	3,91	0,99	

k_2	α	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	0,75	1,47	1,58	1,58	1,57	1,56	1,55	1,54	1,53	1,53	1,52	1,52	1,51
	0,90	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21
	0,95	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
	0,99	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	0,75	1,46	1,56	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49
	0,90	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15
	0,95	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	0,75	1,45	1,54	1,54	1,53	1,52	1,51	1,50	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47
	0,90	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,12	2,10
	0,95	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
	0,99	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	0,75	1,44	1,53	1,53	1,52	1,51	1,50	1,48	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45
	0,90	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,08	2,05
	0,95	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
	0,99	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	0,75	1,43	1,52	1,52	1,51	1,49	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,44	1,44
	0,90	2,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02
	0,95	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
	0,99	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	0,75	1,42	1,51	1,51	1,50	1,48	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44
	0,90	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,01	1,99
	0,95	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
	0,99	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55
17	0,75	1,42	1,51	1,50	1,49	1,47	1,46	1,45	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41
	0,90	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96
	0,95	3,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
	0,99	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46
18	0,75	1,41	1,50	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,43	1,42	1,42	1,41	1,40
	0,90	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,96	1,93
	0,95	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
	0,99	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37
19	0,75	1,41	1,49	1,49	1,47	1,46	1,44	1,43	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40
	0,90	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,94	1,91
	0,95	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
	0,99	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,53	3,43	3,36	3,30
20	0,75	1,40	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,42	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39
	0,90	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,92	1,89
	0,95	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
	0,99	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23
22	0,75	1,40	1,48	1,47	1,45	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,37
	0,90	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,86
	0,95	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
	0,99	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12

15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α	k_2
1,50	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47	1,47	1,46	1,46	1,46	1,45	1,45	0,75	
2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,04	2,03	2,00	2,00	1,99	1,98	1,97	0,90	11
2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,49	2,46	2,45	2,43	2,42	2,40	0,95	
4,25	4,10	4,02	3,94	2,86	3,81	3,78	3,71	3,69	3,66	3,62	3,60	0,99	
1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44	1,43	1,43	1,43	1,42	1,42	0,75	
2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,93	1,92	1,91	1,90	0,90	12
2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,38	2,35	2,34	2,32	2,31	2,30	0,95	
4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47	3,45	3,41	3,38	3,36	0,99	
1,46	1,45	1,44	1,43	1,42	1,42	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40	1,40	0,75	
2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,92	1,90	1,88	1,88	1,86	1,85	1,85	0,90	13
2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,30	2,26	2,25	2,23	2,22	2,21	0,95	
3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,38	3,34	3,27	3,25	3,22	3,19	3,17	0,99	
1,44	1,43	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40	1,39	1,39	1,39	1,38	1,38	0,75	
2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,87	1,86	1,83	1,82	1,80	1,80	1,80	0,90	14
2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,22	2,19	2,18	2,16	2,14	2,13	0,95	
3,66	3,51	3,43	2,35	3,27	3,22	3,18	3,11	3,09	3,06	3,03	3,00	0,99	
1,43	1,41	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	0,75	
1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,83	1,82	1,79	1,79	1,77	1,76	1,76	0,90	15
2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12	2,11	2,10	2,08	2,07	0,95	
3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,08	3,05	2,98	2,96	2,92	2,89	2,87	0,99	
1,31	1,40	1,39	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	1,35	1,35	1,34	1,34	0,75	
1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,79	1,78	1,76	1,75	1,74	1,73	1,72	0,90	16
2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,11	2,07	2,06	2,02	2,02	2,01	0,95	
3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,97	2,93	2,86	2,84	2,81	2,78	2,75	0,99	
1,40	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,35	1,34	1,34	1,34	1,33	1,33	0,75	
1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,76	1,75	1,73	1,72	1,71	1,69	1,69	0,90	17
2,31	1,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,06	2,02	2,01	1,99	1,97	1,96	0,95	
3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,87	2,83	2,76	2,75	2,71	2,68	2,65	0,99	
1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,32	0,75	
1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,74	1,72	1,70	1,69	1,68	1,67	1,66	0,90	18
2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	2,02	1,98	1,97	1,95	1,93	1,92	0,95	
3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,78	2,75	2,68	2,66	2,62	3,59	2,57	0,99	
1,38	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,31	1,31	1,30	0,75	
1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,71	1,70	1,67	1,67	1,65	1,64	1,63	0,90	19
2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,98	1,94	1,93	1,91	1,89	1,88	0,95	
3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,71	2,67	2,60	2,58	2,55	2,51	2,49	0,99	
1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,33	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29	0,75	
1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,69	1,68	1,65	1,64	1,63	1,62	1,61	0,90	20
2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,95	1,91	1,90	1,88	1,86	1,84	0,95	
3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,61	2,54	2,52	2,48	2,44	2,42	0,99	
1,36	1,34	1,33	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,30	1,29	1,29	1,28	0,75	
1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,65	1,64	1,61	1,60	1,59	1,58	1,57	0,90	22
2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,89	1,85	1,84	1,82	1,80	1,78	0,95	
2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,50	2,42	2,40	2,36	2,83	2,31	0,99	

k_2	α	k_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	0,75	1,39	1,47	1,46	1,44	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,38	1,37	1,36
	0,90	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83
	0,95	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18
	0,99	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
26	0,75	1,38	1,46	1,45	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,37	1,37	1,36	1,35
	0,90	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,84	1,81
	0,95	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
	0,99	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
28	0,75	1,38	1,46	1,45	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34
	0,90	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79
	0,95	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
	0,99	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90
30	0,75	1,38	1,45	1,44	1,42	1,41	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,35	1,34
	0,90	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77
	0,95	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
	0,99	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
40	0,75	1,36	1,44	1,42	1,40	1,39	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,32	1,31
	0,90	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,73	1,71
	0,95	4,08	3,23	2,84	2,61	3,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00
	0,99	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66
60	0,75	1,35	1,42	1,41	1,38	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	1,29
	0,90	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,68	1,66
	0,95	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
	0,99	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
120	0,75	1,34	1,40	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26
	0,90	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,62	1,60
	0,95	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83
	0,99	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34
200	0,75	1,33	1,39	1,38	1,36	1,34	1,32	1,31	1,29	1,28	1,27	1,26	1,25
	0,90	2,73	2,33	2,11	1,97	1,88	1,80	1,75	1,70	1,66	1,63	1,60	1,57
	0,95	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
	0,99	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27
∞	0,75	1,32	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,29	1,28	1,27	1,25	1,24	1,24
	0,90	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,57	1,55
	0,95	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75
	0,99	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α	k_2
1,35	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	1,29	1,28	1,28	1,27	1,27	1,26	0,75	
1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,62	1,61	1,58	1,57	1,56	1,54	1,53	0,90	24
2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,84	1,80	1,79	1,77	1,75	1,73	0,95	
2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,40	2,33	2,31	2,27	2,24	2,21	0,99	
1,34	1,32	1,31	1,30	1,29	1,28	1,28	1,26	1,26	1,26	1,25	1,25	0,75	
1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,59	1,58	1,55	1,54	1,53	1,51	1,50	0,90	26
2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,80	1,76	1,75	1,73	1,71	1,69	0,95	
2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,36	2,33	2,25	2,23	2,19	2,16	2,13	0,99	
1,33	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,27	1,26	1,25	1,25	1,24	1,24	0,75	
1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,57	1,56	1,53	1,52	1,50	1,49	1,48	0,90	28
2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,77	1,73	1,71	1,69	1,67	1,65	0,95	
2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,30	2,26	2,19	2,17	2,13	2,09	2,06	0,99	
1,32	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26	1,26	1,25	1,24	1,24	1,23	1,23	0,75	
1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,55	1,54	1,51	1,50	1,48	1,47	1,46	0,90	30
2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,74	1,70	1,68	1,66	1,64	1,62	0,95	
2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,21	2,13	2,11	2,07	2,03	2,01	0,99	
1,30	1,28	1,26	1,25	1,24	1,23	1,22	1,21	1,21	1,20	1,19	1,19	0,75	
1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,48	1,47	1,43	1,42	1,41	1,39	1,38	0,90	40
1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,64	1,59	1,58	1,55	1,53	1,51	0,95	
2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	2,02	1,94	1,92	1,87	1,83	1,80	0,99	
1,27	1,25	1,24	1,22	1,21	1,20	1,19	1,17	1,17	1,16	1,15	1,15	0,75	
1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,41	1,40	1,36	1,35	1,33	1,31	1,29	0,90	60
1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,53	1,48	1,47	1,44	1,41	1,39	0,95	
2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,84	1,75	1,73	1,68	1,63	1,60	0,99	
1,24	1,22	1,21	1,19	1,18	1,17	1,16	1,14	1,13	1,12	1,11	1,10	0,75	
1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,34	1,32	1,27	1,26	1,24	1,21	1,19	0,90	120
1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,46	1,43	1,37	1,35	1,32	1,28	1,25	0,95	
2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,70	1,66	1,56	1,53	1,48	1,42	1,38	0,99	
1,23	1,21	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,11	1,10	1,09	1,08	1,06	0,75	
1,52	1,46	1,42	1,38	1,34	1,31	1,28	1,24	1,22	1,20	1,17	1,14	0,90	200
1,72	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,39	1,32	1,29	1,26	1,22	1,19	0,95	
2,13	1,97	1,89	1,79	1,69	1,63	1,58	1,48	1,44	1,39	1,33	1,28	0,99	
1,22	1,19	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1,09	1,08	1,07	1,04	1,00	0,75	
1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,26	1,24	1,18	1,17	1,13	1,08	1,00	0,90	
1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,32	1,24	1,22	1,17	1,11	1,00	0,95	
2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,52	1,47	1,36	1,32	1,25	1,15	1,00	0,99	

Таблица 13

Квантили распределения статистики d

n	$d_{0,01}$	$d_{0,05}$	$d_{0,10}$	$d_{0,90}$	$d_{0,95}$	$d_{0,99}$
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	9137	8884	8733	7452	7236	6829
21	9001	8768	8631	7495	7304	6950
26	8901	8686	8570	7530	7360	7040
31	8827	8625	8511	7559	7404	7110
36	8769	8578	8468	7583	7440	7167
41	8722	8540	8436	7604	7470	7216
46	8682	8508	8409	7621	7496	7256
51	8648	8481	8385	7636	7518	7291

Таблица 14

Значения m и α, соответствующие различным n и q

n	m	α при уровне значимости q, равном		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11—14	1	0,99	0,98	0,97
15—20	1	0,99	0,99	0,98
21—22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
23—27	2	0,98	0,98	0,97
28—32	2	0,99	0,98	0,97
33—35	2	0,99	0,98	0,98
36—49	2	0,99	0,99	0,98

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тюрин Н. И. Введение в метрологию. М.: Изд-во стандартов, 1985.
2. Менделеев — метролог./Под. ред. В. В. Бойцова. М.: Изд-во стандартов, 1969.
3. Маликов М. Ф.. Основы метрологии. М.: Коммерприбор, 1949.
4. Тиходеев П. М. Очерки об исходных измерениях. М. — Л.; Машгиз, 1954.
5. Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева./Под ред. В. О. Арутюнова, Л.: Энергия, 1967.
6. Широков К. П. Общие вопросы метрологии. М.: Машиностроение, 1967.
7. Бурдун Г. Д. Справочник по международной системе единиц. М.: Изд-во стандартов, 1980.
8. Государственные эталоны и общесоюзные поверочные схемы. М.: Изд-во стандартов, 1978.
9. Долинский Е. Ф. Обработка результатов измерений. М.: Изд-во стандартов, 1973.
10. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Физматгиз, 1962.
11. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М.: Гостехтеориздат, 1955.

12. Уилкс С. Математическая статнстнка. М.: Наука, 1967.
13. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1967.
14. Новицкий А. В. Основы информационной теорин измернтельных устройств. Л.: Энергия, 1968.
15. Карташова А. Н. Достоверность измерений и критерии качества испытаний приборов. М.: Изд-во стандартов, 1967.
16. Суппес П., Зинес Дж. Основы теории измереннй. В сб.: «Психологические измереиия», М.: Мир, 1967.
17. Метрологическая служба СССР. М.: Изд-во стандартов, 1968.
18. Проненко В. И., Якирин Р. В. Метрология в промышленности. Киев: Техніка, 1979.
19. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. М.: Сов. радио, 1976.
20. Государствеиные стандарты СССР иа Государственную систему обеспечения единства измерений.
21. Stille U. Rechnen und Messen in der Physik. Brauenschweig, 1955.
22. Wallot J. Gröbengbichungen. Einheiten und Dimensionen. Leipzig, Barth, 1975.
23. Журналы: «Измерительная техника», «Метрология», «Метрология и измерительная техника», «Metrologia».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. **Предмет и задачи метрологии** 4

§ 1. Метрология — наука об измерениях 4
§ 2. Значение метрологии для научно-технического прогресса и ее роль в народном хозяйстве страны 6
§ 3. Классификация и основные характеристики измерений 7
§ 4. Государственные научные метрологические учреждения СССР . . 11
§ 5. Международные метрологические организации 12
§ 6. Актуальные проблемы современной метрологии 13

Глава II. **Физические величины и их единицы** 15

§ 7. Виды физических величин 15
§ 8. Количественное представление величин 18
§ 9. Основные величины и основные единицы. Системы величин и системы единиц 22
§ 10. Механизм образования производных величин и производных единиц. Понятие о размерностях 23
§ 11. Анализ размерностей и когерентные системы единиц 26
§ 12. Системы единиц физических величин 29
§ 13. Внесистемные единицы 32
§ 14. Относительные и логарифмические величины и единицы . . . 33
§ 15. Естественные системы единиц 33

Глава III. **Международная система единиц (СИ)** 34

§ 16. Установление единой Международной системы единиц . . . 34
§ 17. Основные единицы СИ 36
§ 18. Дополнительные единицы СИ 38
§ 19. Производные единицы СИ 39
§ 20. Кратные и дольные единицы 41

Глава IV. **Эталоны. Эталоны основных единиц Международной системы единиц** 42

§ 21. Общие понятия об эталонах. Классификация эталонов . . . 42
§ 22. Эталон единицы длины — метра 45
§ 23. Эталон единицы массы — килограмма 50
§ 24. Эталон единицы времени и частоты 51
§ 25. Эталон единицы силы электрического тока — ампера 57
§ 26. Эталон единицы температуры — кельвина 59

Глава V. **Передача размера единиц от эталонов образцовым и рабочим средствам измерений. Поверочные схемы** 63

§ 27. Образцовые средства измерений 63
§ 28. Общие сведения о поверочных схемах 65
§ 29. Поверочные схемы для средств измерений линейных и угловых величин 68
§ 30. Поверочная схема для средств измерений времени и частоты . . 71
§ 31. Поверочные схемы для средств измерения механических величин 72
§ 32. Поверочные схемы для средств измерения электрических величин 76
§ 33. Поверочные схемы для средств измерений тепловых величин . . 82
§ 34. Способы поверки средств измерений 84

Глава VI. **Погрешности измерений. Случайные погрешности измерений** 85

§ 35. Погрешности измерений 85
§ 36. Описание случайных погрешностей с помощью функций распределения 90
§ 37. Моменты случайных погрешностей 93
§ 38. Виды распределений результатов наблюдения и случайных погрешностей 97

§ 39. Точечные оценки истинного значения измеряемой величины и среднего квадратического отклонения иа основании ограниченного ряда наблюдений 104
§ 40. Оценка с помощью интервалов 112
§ 41. Проверка нормальности распределения результатов наблюдений 119
§ 42. Обнаружение грубых погрешностей 128
Глава VII. **Систематические погрешности** 129
§ 43. Классификация систематических погрешностей 129
§ 44. Способы обнаружения систематических погрешностей 132
§ 45. Введение поправок. Неисключеиная систематическая погрешность 136

Глава VIII. **Математическая обработка исправленных результатов измерений** 139

§ 46. Обработка результатов прямых равнорассеянных наблюдений . . 139
§ 47. Совместная обработка нескольких рядов наблюдений 144
§ 48. Обработка неравнорассеянных рядов наблюдений 149
§ 49. Обработка результатов косвенных измерений 153
§ 50. Критерий ничтожных погрешностей 163
§ 51. Совокупные и совместные измерения 164

Глава IX. **Средства измерений. Погрешиости средств измерений** . . 172

§ 52. Средства измерений 172
§ 53. Измерительные сигналы 177
§ 54. Метрологические характеристики средств измерений 178
§ 55. Нормирование метрологических характеристик средств измерений 185
§ 56. Классы точности средств измереиий 187
§ 57. Регулировка и градуировка средств измерений 192
§ 58. Калибровка средств измерений 195
§ 59. Общие методы измерений 196

Глава X. **Метрологическая служба СССР** 200

§ 60. Государственная система обеспечения единства измерений . . 200
§ 61. Государственные испытания средств измерений 202
§ 62. Поверка, ревизия и экспертиза средств измерений 203
§ 63. Государственная служба времени и частоты СССР 206
§ 64. Государственная служба стандартных справочных данных . . 207
§ 65. Государственная служба стандартных образцов 208

КОНТРОЛЬНО-ОБУЧАЮЩИЕ ПРОГРАММЫ 209

ПРИЛОЖЕНИЕ 220

Таблица 1. Важнейшие единицы Международной системы СИ . . . 220

Таблица 2. Производные единицы СИ, имеющие специальные наименования 232

Таблица 3. Единицы, допускаемые к применению иаравне с единицами СИ 234

Таблица 4. Единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ в специальных областях 235

Таблица 5. Дифференциальная функция нормированного нормального распределения 236

Таблица 6. Интегральная функцня нормированного нормального распределения 238

Таблица 7. Интегральная функция нормированного нормального распределения. Значения z для различных $\Phi(z)$ 24

Таблица 8. Распределение Стьюдента $P\{|t|<t_p\}=2\int_0^{t_p} S(t;\ k)dt$ . . . 24

Таблица 9. Распределение Стьюдента. Значения $P\{|t|<t_p\}=2\int_0^{t_p} S(t;\ k)dt$ для различных t_p 24

Таблица 10. Интегральная функция χ^2 — распределения Пирсона. Значения $\chi^2_{k;\ P}$ для различных k и P 24

Таблица 11. Значения ν_α при различных числах измерения n . . . 24

Таблица 12. F-распределение Фишера. Значения $F_{k1\,k2}$ для различных доверительных вероятностей α 24

Таблица 13. Квантили распределения статистики d 25

Таблица 14. Значения m и α, соответствующие различным n и q . . . 25

Список литературы 25

Григорий Дмитриевич Бурдун,
Борис Николаевич Марков

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

Редактор *Н. А. Еськова*
Переплет художника *Р. Р. Веллерта*
Технические редакторы *Г. А. Макарова, О. Н. Никитина*
Корректор *Н. Л. Шнайдер*

ИБ № 332

Сдано в наб. 03.01.84. Подп. к печ. 17.06.85. Т-09186. Формат 60×90 1/16. Бумаг типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. 16,0 усл. печ. . 16,0 усл. кр.-отт. 19,37 уч.-изд. л. Тир. 20000. Зак. 547. Изд. № 7402/7. Цена 1 ру

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов,
123840, Москва, ГСП, Новопресненский пер., 3

Великолукская городская типография управления издательств,
полиграфии и книжной торговли Псковского облисполкома,
182100, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12