

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ГЕОДЕЗИИ, АЭРОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

В. Ф. ЕРЕМЕЕВ, М. И. ЮРКИНА

ТЕОРИЯ ВЫСОТ
В ГРАВИТАЦИОННОМ
ПОЛЕ ЗЕМЛИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»
Москва-1972

Ер емее в В. Ф., Ю ркина М. И. Теория высот в гравитационном поле Земли. М., «Недра», 1971, 144 стр.

Книга подготовлена в 1968 г. как Труды ЦНИИГАиК выпуск 191.

Вертикальная рефракция заставила разработать для вывода высот точек земной поверхности особые методы, весьма отличные от применяемых для определения плановых координат. Непосредственная сумма нивелирных превышений из-за уклонений отвеса зависит от пути нивелирного хода и не имеет физического смысла. Соответственные погрешности превосходят требования точности как при развитии обширных астрономо-геодезических сетей, так и при строительстве инженерных сооружений.

Рассмотрены обусловленные земным гравитационным полем особенности вывода высот разными методами (тригонометрическое нивелирование, пространственные геодезические сети, геометрическое, барометрическое и гидростатическое нивелирование) для определения декартовых или геодезических координат в единой системе.

Наиболее подробно рассмотрена обработка геометрического нивелирования. Изложены принципы теории Молоденского. Дан обзор литературы.

Книга рассчитана на инженеров, научных работников в области геодезической гравиметрии и геометрического нивелирования, студентов старших курсов геодезических вузов.

Таблиц 21, иллюстраций 22, список литературы — 325 названий.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В монографии рассмотрены обусловленные земным гравитационным полем особенности вывода высот разными методами (тригонометрическое нивелирование, пространственные геодезические сети, геометрическое, барометрическое и гидростатическое нивелирование) для определения декартовых или геодезических координат в единой системе.

Пространственные геодезические сети, включающие измеренные вертикальные углы и передачу высот дальномерными измерениями сторон со значительными углами наклона, могут обеспечить точность в выводах высот до нескольких сантиметров. Такие сети могут быть полезными при решении инженерных задач и изучении движений земной коры в горных районах. Описаны принципы развития пространственной сети, обработка тригонометрического нивелирования при учете уклонений отвеса, выведены формулы для передачи высот дальномерными измерениями, описаны уравнительные вычисления в пространственных сетях и некоторые особенности их построения.

Наиболее подробно рассмотрена обработка геометрического нивелирования. В связи с задачей вывода высот над отсчетным эллипсоидом описаны принципы использования астрономо-геодезических уклонений отвеса и измерений силы тяжести при обработке нивелирных данных. Описаны основы теории Молоденского, условия выделения нормального гравитационного поля (неоднородная жидкая планета, вращающаяся в гидростатическом равновесии, нормальный сфероид, нормальный эллипсоид); при этом авторы отдают предпочтение полю нормального эллипсоида и постарались обосновать этот выбор, принятый большинством современных геодезистов. Дан вывод формул для нормальной высоты, приложен пример вывода нормальных высот в полигоне геометрического нивелирования. Разность нормальных высот соседних реперов можно считать непосредственно измеренной величиной при уравнительных вычислениях в нивелировке, но на предварительных этапах обработки нивелирных данных (например, при оценках допустимости невязок в полигонах) могут быть полезны величины теоретических невязок, вывод которых описан. Показано преимущество нормальных высот перед ортометрическими, приближенные методы определения которых также рассмотрены. Этот вывод подтвержден оценками на моделях Земли. Даны формулы для динамических высот, указаны возможности их использования в практике геометрического нивелирования (при привязке нивелирных ходов к водоемам).

Рассмотрены систематические ошибки геометрического нивелирования, возникающие из-за нормальной и аномальной кривизны уровенных поверхностей. Показано, что эти ошибки пренебрегаемы даже в обширных сетях. Описаны экспериментальные исследования по установлению частоты гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий. На основе этого анализа даны практические рекомендации о размещении гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий разных классов при разном характере рельефа.

Рассмотрен учет изменений гравитационного поля Земли при выводах о движениях земной коры. Численный расчет показывает, что смещение отвесов относительно земной поверхности на величины $0,1-0,2''$ за несколько десятилетий может привести к изменению превышений на $0,5-1,0$ м при длине линии 1000 км. Такие изменения превышений иногда могут привести к неверному выводу о движении земной коры. Подобные смещения отвесов могут привести к изменениям морского уровня в отдельных районах, к изменениям уровня грунтовых вод, а потому геоморфологические обследования местности не всегда могут подтвердить или опровергнуть вывод о движении земной коры, сделанный по результатам повторной нивелировки (море будет наступать на сушу или отступать от нее, независимо от того, что движется — отвес или грунт).

Описан вывод приливных поправок в результаты геометрического нивелирования. Поскольку величины этих поправок сравнимы с наклонами отдельных блоков земной коры из-за различных причин (изменения атмосферного давления, уровня грунтовых вод, влияния океанического прилива), учет только приливных поправок, как правило, не может повысить точность геометрического нивелирования. Для повышения точ-

ности нивелировки необходимы такие наклономерные наблюдения (изменений угла между отвесом и грунтом) вдоль нивелирной линии, данные которых можно интерполировать.

Описаны выводы высот квазигеоида над отсчетными гравиметрическим и геодезическим эллипсоидами, определение высот точек, расположенных над земной поверхностью и внутри земной коры.

Согласно старым предложениям Фоглера и Гельмерта, рекомендовано при барометрическом нивелировании переходить от разностей атмосферного давления к разностям динамических высот, а затем к нормальным высотам. Такой принцип вычислений используют метеорологи. Принятое геодезистами использование формулы Лапласа и ее упрощенных вариантов ведет к усложнению вычислений и может привести к потере точности, если при барометрическом нивелировании намечено выводить высоты до 0,2—0,3 м.

Аналогичный подход (вывод нормальных высот через динамические) целесообразен при гидростатическом нивелировании (прежде обработку гидростатического нивелирования осложняли условием, что топографические массы между геоидом и исследуемыми точками имеют вид однородной пластины).

Дан обзор литературы по затронутым вопросам. Авторы старались отметить появление идей, важных для современного состояния рассмотренных вопросов или сыгравших заметную роль в прошлом. Однако трудности литературных поисков заставляют их признать, что они не всегда уверены в полноте и правильности приводимых ими сведений.

P R E F A C E

In this book there have been discussed the specificities associated with the Earth's gravitational field which are inherent in the height determination with different methods (triangulated heights, space geodetic networks, spirit levelling, barometric and hydrostatic levelling) for obtaining the Cartesian or geodetic coordinates of unified system.

The space geodetic networks involving the observed vertical angles and height transmission through the distance measurements of sides with considerable inclination angles may provide a height determination to an accuracy of few centimeters. Such networks might be useful in solving the engineering problems and studying the crustal movement in the mountainous areas. The principles for an extension of the space network, for the height determination through a triangulation by taking into account the plumb-line deflections have been described; the formulas for height transmission through the distance measurements are developed; and adjustment computations for the space networks and some features of the establishment thereof are shown.

Processing of the spirit levelling has been discussed in great detail. As the problem of determining the heights above the reference—ellipsoid is concerned the principles for application of the astronomical—geodetic deflections of the vertical and the gravity observations to processing the levelling data are described. The fundamentals of the Molodensky's theory are presented. The conditions for the separation of a normal gravity field (heterogeneous liquid planet rotating in a hydrostatic equilibrium, normal spheroid, normal ellipsoid) are described; here, the authors have preferred the field of a normal ellipsoid and tried to ground this choice adopted by a majority of present—day geodesists. The development of the formulas for a normal height is given and an example of the normal height determination in a spirit levelling polygon is accompanied. The difference in the normal heights of adjacent bench marks might be considered as a directly measured value in adjustment computations for a spirit levelling, but in previous stages of processing the levelling data (for example, in estimation of an allowability of misclosures in polygons) the values of theoretical misclosures may be useful, the determination of these values being described. An advantage of normal heights over orthometrical ones is shown, the approximate methods for determination thereof having also been discussed. This conclusion has been supported by the estimations made with the Earth's model. The formulas for the dynamic heights are given, and the possibilities for their application to the practice of spirit levelling (in connecting the levelling lines to the reservoirs) are indicated.

The systematic errors in spirit levelling caused by the normal and anomalous curvature of level surfaces are discussed. It was shown that these errors are negligible even on the extended networks. The experimental studies for defining the frequency of the gravimetric points along the levelling lines are described. Based on this analysis the practical recommendations for locating the gravimetric points along the levelling lines of different orders for different kinds of relief are given.

A consideration of changes in the Earth's gravity field when drawing the conclusions on the crustal movements is discussed. The numerical calculation indicates that a displacement of the verticals in respect to the Earth surface by $0^{\circ}1-0^{\circ}2$ for the period of several decades would result in change in elevations by 0.5 m—1.0 m, for a length of a line of 1000 kilometers. Such changes in elevations may sometimes lead to a wrong conclusion on the crustal movement.

Similar displacements of the verticals could result in changes in the sea level of some regions, in ground water level and thus the geomorphological examinations of a terrain not always might support or argue against the conclusion on the crustal movement which was drawn from the results of re—levelling (sea will come on land or come back from it irrespective of that which is moving the vertical or land).

The determination of tidal correction to the results of spirit levelling is described. Because the magnitudes of these corrections are comparable with inclinations of some crustal blocks due to different reasons (variation in atmospheric pressure, in ground water level, an influence of ocean tide etc.) an accounting for only tidal corrections, as a rule, could not improve the accuracy of spirit levelling. To improve the levelling accuracy such

inclinometric measurements (observations of changes in angles between the vertical and ground) along the levelling line are needed, the data of those measurements being possible to interpolate.

The determination of the quasigeoidal heights above the reference gravimetric and geodetic ellipsoids, as well as of the heights of points located above the Earth surface and within it are described.

According to the old proposals made by Vogler and Helmert it is recommended in barometric levelling to change — over from the differences in atmospheric pressure to ones in dynamic heights and subsequently to the normal heights. Such a principle for calculations is now used by the meteorologists. The Laplace formula and its simplified alternatives commonly used by the geodesists produces a complication of computations and might result in loss of accuracy if the heights to 0,2—0,3 m are contemplated to be determined in barometric levelling.

Similar approach (determination of normal heights through the dynamic ones) is advisable in hydrostatic levelling (formerly one has complicated the treatment of hydrostatic levelling by the condition that the topographic masses between the geoid and the points under investigation have a form of homogeneous plate).

A review of the literature on the questions under discussion is provided. The authors have tried to appreciate the emergence of ideas to be significant in view of contemporary state of the problems discussed here or having played an important role in the past. However, the difficulties associated with bibliographical searches have made them acknowledge that they were not always confident in the completeness and validity of information involved.

I. ПОНЯТИЕ О ВЫСОТЕ

Положение в пространстве некоторой точки земной поверхности удобно определять в системе ортогональных координат: декартовых x, y, z или криволинейных геодезических H, B, L , связанных с отсчетным эллипсоидом вращения: здесь B — геодезическая широта, L — геодезическая долгота. Высота H равна расстоянию точки до отсчетного эллипсоида, связь которого с Землей известна или может быть определена. Систему координат H, B, L геодезисты используют давно. Этой системой координат уже пользовались французские геодезисты для отсчета высот при обработке материалов известного градусного измерения дуги меридиана между параллелями Дюнкерка и Барселоны (Мешен, Деламбр, 1806—1807). Именно это градусное измерение послужило основой установления метра. По нормальям к эллипсоиду отсчитывал высоты Пуассан (1819). Этой системой пользовался Гаусс (1826 и заметка из научного наследия — Nachlass) при выводе поправки в азимут за высоту наблюдаемой точки над эллипсоидом. Систему координат H, B, L использовали Брунс (1878), Гельмерт (1880, 1884), Слудский (1883, 1888, 1894) и др. Эту систему исследовали Мёле (1943), Мигаль (1949), Молоденский (1954, 1960).

Вывод координат точек земной поверхности в единой системе и определение внешнего гравитационного поля Земли — основные задачи современной геодезии.

Если начало декартовых координат совмещено с центром эллипсоида, ось z направлена по его малой оси к северному полюсу, ось x лежит в плоскости начального геодезического меридиана и ось y — в плоскости меридиана, геодезическая долгота которого равна 90° , то декартовы и геодезические координаты связаны зависимостью

$$\left. \begin{aligned} x &= (N + H) \cos B \cos L \\ y &= (N + H) \cos B \sin L \\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + H \right) \sin B = [(1 - e^2) N + H] \sin B \end{aligned} \right\}, \quad (I.1)$$

где a и b — большая и малая полуоси эллипсоида; e — его эксцентриситет; N — радиус кривизны сечения эллипсоида плоскостью первого вертикала,

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Для ориентировки отсчетного геодезического эллипсоида нужно назначить некоторой точке земной поверхности координаты H, B, L и потребовать, чтобы малая ось этого эллипсоида была параллельна некоторому определенному положению оси вращения Земли и плоскость начального геодезического меридиана была параллельна отвесу в начальной точке счета астрономических долгот (желательно в определенный момент времени). Такие условия ориентирования недавно рекомендованы Международной геодезической ассоциацией (voeux..., 1967). Размеры эллипсоида и ориентировку можно задать произвольно но так, чтобы поверхность эллипсоида была близка к земной поверхности.

При изучении фигуры и гравитационного поля Земли гравиметрическим методом центр отсчетного эллипсоида (нормального эллипсоида) обычно совмещают с центром инерции Земли, малую ось эллипсоида — с осью земного вращения. Размеры геодезического и нормального гравиметрического эллипсоидов желательно иметь одинаковыми для удобства расчетов.

Как правило, если специально не оговорено противное, будем считать Землю твердой и ее гравитационное поле неизменным во времени. Будем считать, что такая Земля вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неизменной оси вращения.

Молоденский (1949—1960) разработал геометрический метод определения фигуры земной поверхности в системе координат H, B, L по линейным и угловым измерениям. Однако точный вывод вертикальных углов затруднен вертикальной рефракцией. Поэтому в точных геодезических работах измерение вертикальных углов заменено астро-

номическими определениями широт и долгот, геометрическим нивелированием и гравиметрической съемкой. Геометрический метод может найти применение и развитие для точных выводов в высокогорных районах (Градилек, 1958—1969) и в спутниковой геодезии (см., например, у Бурши, 1966, где дана обширная библиография).

Согласно теории Молоденского (1945—1960) определения фигуры и гравитационного поля Земли по выполняемым на ней измерениям, в том числе и гравиметрическим, высоту H можно определить как сумму $H = H_Q + \zeta_Q$ нормальной высоты H_Q и высоты ζ_Q квазигеоида над отсчетным геодезическим или нормальным эллипсоидом.

До появления теории Молоденского геодезисты стремились найти высоту H как сумму ортометрической высоты H_G и высоты ζ_G геоида над каким-либо из отсчетных эллипсоидов.

Принято считать, что Гаусс (1828) и вслед за ним Бессель (1837) ввели в геодезию вспомогательную поверхность, впоследствии названную Листингом (1872) геоидом. Эту поверхность Гаусс и Бессель называли фигурой Земли и определили ее как уровенную поверхность, совпадающую с уровнем моря, подверженным действию только земной силы тяжести. Листинг (1872) отметил необходимость перехода к среднему уровню моря.

Однако этой вспомогательной поверхностью пользовались французские геодезисты уже в XVIII веке. В упомянутом градусном измерении базы приведены к уровню моря (Мешен, Деламбр, второй том, 1807, стр. 43). В своем курсе геодезии Пюиссан (1819) называет абсолютным уровнем средний из самого высокого и самого низкого положения воды при приливах. Пюиссан указывает на необходимость проектирования геодезических сетей на продолжение под континентами поверхности спокойного уровня моря.

Приведены к уровню моря и градусные измерения, выполненные в Перу при участии Буге (1748), причем Буге имел в виду, что «уровень моря» — неправильная сложная поверхность и нет какого-либо точного закона, по которому длина ее градуса изменялась бы от места к месту.

Отступления «уровня моря» от геоида в виде астрономо-геодезических уклонений отвеса были обнаружены в геодезической практике также до работ Гаусса. Сам Гаусс ссылается в связи с этим фактом на французские, английские и итальянские градусные измерения. Гаусс предвидел возможность изучения «уровня моря» с помощью обширных астрономо-геодезических сетей.

В учебных руководствах по геодезии геоид определен как средний уровень моря, при выводе которого устранены влияния приливов, ветра и других причин, вызывающих морские течения.

Трудности вычисления поправок в результаты отсчетов на отдельных пунктах наблюдения за уровнем моря для вывода среднего уровня и связи его с Землей весьма значительны. Колебания даже средних сезонных и многолетних уровней моря достигают нескольких дециметров. Теория колебаний уровня моря не разработана (Егоров, 1966, стр. 221). Современные возможности решения этой задачи сомнительны. Такие сомнения высказывает Дудсон (1960). Книга Мамаева (1962). статьи Максимова (1967) и Росситера (1967) и отчеты Зигля (1964, 1968) также отмечают сложности вычисления высот уровней воды на отдельных морях над геоидом Листинга, изучения формы морской поверхности и океанографического нивелирования. Зигль (1964), например, сообщает, что Хела (J. Hela) рассматривает 21 влияние, каждое из которых следует учесть при переходе от возмущенного к невозмущенному среднему уровню моря при береговых наблюдениях. Лисицын (Lisizin, 1965) оценивает свою работу как первую попытку определить средний уровень Мирового океана и свои результаты считает приближенными. Термин геодезистов «средний уровень моря», по мнению Лисицыной, не ясен (the definition of the term «mean sea level» is not unambiguous): средний уровень моря изменяется от одного места к другому, и эти изменения не пренебрегаемы даже для практических целей. Из-за различий в плотности воды уровень поверхности Тихого океана в среднем выше уровня Атлантического океана на 60 см. Нагоны воды ветром вызывают заметные отклонения ее поверхности от уровенной. Уровни физической водной поверхности в глубоких районах океанов Лисицына показала на карте, которую также охарактеризовала как приближенную и предварительную. В некоторых странах Западной Европы высоты отсчитаны от среднего уровня моря в Амстердаме. Этот уровень служит исходным при обработке «единой европейской нивелирной сети» (Réseau Européen unifié du nivellement). По данным Лисицыной, этот уровень лежит на 52 см ниже среднего уровня всей водной поверхности (ошибку этой оценки Лисицына не указала). Средний уровень Средиземного моря у Дарданелльского пролива на 70 см ниже среднего уровня у северного входа в Суэцкий канал. Уровень воды в Балтийском море в среднем на 70—80 см выше уровня в Черном. У Панамского перешейка средний уровень Тихого океана стоит на 22 см выше, чем средний уровень Атлантического.

Таким образом, использовать геоид Листинга как исходную уровенную поверхность практически нельзя: на земной поверхности невозможно указать хотя бы одну точку, через которую проходит эта уровенная поверхность и которую, следовательно, можно было бы принять за начало счета нормальных или ортометрических высот.

Известный в прошлом веке датский геодезист Захариз (1876, немецкий пере-

вод 1878) критикует отсчет высот от среднего уровня моря. Он замечает, что средний уровень моря у пункта наблюдения, расположенного даже в открытом море, только приближенно представляет морскую уровенную поверхность. Высоты, выведенные от такого пункта геометрическим нивелированием, также только приближенно представляют высоты над средним уровнем моря. Он замечает далее, что, строго говоря, все так называемые высоты над средним уровнем моря представляют собой только разности высот некоторой точки и исходного пункта. Исходный пункт лежит более или менее близко к среднему уровню моря, обычно на той уровенной поверхности, к которой стремились ранее приводить базисы триангуляции. Уровенную поверхность начала счета ортометрических высот Брунс (1878) предложил называть геоидом. Геодезисты давно должны были отказаться от определения геоида, данного Листингом, и последовать предложению Брунса. Такое же определение геоида дал Гельмерт (1884, стр. 550). Это определение устраняет трудности отсчета высот. Практически геодезисты так и поступают. Технические вопросы установления нуля отсчета рассмотрены Вемелсфелдером (1960).

Теперь геоидом можно называть уровенную поверхность начала счета нормальных высот. Эта точка должна быть выбрана по возможности близко к среднему уровню моря. В дальнейшем мы будем пользоваться определением Брунса.

В начале счета нормальных или ортометрических высот поверхности квазигеоида и геоида совпадают. Эти поверхности практически совпадают также во всех тех точках, где геоид совпадает с земной (хотя бы водной) поверхностью и, может быть, в отдельных точках внутри континентов. При современной точности морских гравиметрических съемок можно считать, что на морях и океанах квазигеоид совпадает с геоидом. При более точных выводах можно будет принять, что уровень моря, приведенный к какому-то определенному моменту, совпадает с квазигеоидом. Этот уровень может и не совпасть с геоидом. Моменты приведения должны быть близки ко времени съемки. На разных участках моменты приведения могут быть разными, но каждое измерение должно быть редуцировано так, чтобы все измерения силы тяжести представляли одну Землю, одну и ту же водную массу. Таким образом, на морях и океанах высота H земной поверхности над отсчетным эллипсоидом равна высоте квазигеоида. Необходимости знать средний уровень моря не возникает.

Для СССР геоидом служит уровенная поверхность Кронштадтского футштока. Наблюдения за уровнем моря, выполняемые с 1825 г., показывают устойчивость Кронштадтского футштока по высоте и его близость к местному среднему уровню моря (Вировец, 1948).

На разных континентах можно использовать разные геоиды и квазигеоиды. Геометрическим методом спутниковой геодезии можно распространить систему декартовых, а затем и геодезических координат H, B, L на всю Землю. При сгущении сети опорных точек наземными геодезическими методами нужно будет вычислить высоту квазигеоида какой-либо точки как разность выведенной спутниковым методом высоты H и принятой нормальной высоты над местным квазигеоидом. Спутниковый метод позволит также проконтролировать передачу плановых координат B, L и высот H в пределах одного континента.

Теория Молоденского (1960) позволяет определить координаты центра инерции Земли в геодезической системе по астрономо-геодезическим измерениям и мировой гравиметрической съемке и тем самым также связать между собой разные геодезические системы H, B, L . Отсчет нормальных высот от разных квазигеоидов не будет препятствовать и в этом случае распространению единой координатной системы на всю Землю. Этому вопросу посвящена и работа авторов (1968).

На практике возникает также надобность знать разности значений потенциала W силы тяжести Земли в более или менее близких точках. Такие сведения нужны при решении гидротехнических задач и при изучении уровней морей: если бы не было возмущающих влияний (например, разности атмосферных давлений, нагонов воды ветром и др.), вода текла бы всегда от точки с меньшим значением W к точке с большим ее значением, а потенциал на уровне моря был бы постоянным.

Поделив разности потенциалов на некоторое значение силы тяжести, эти разности условно можно выразить в линейной мере и вывести динамические высоты.

Разности потенциалов W силы тяжести можно определить из результатов геодезического нивелирования и измерения силы тяжести вдоль нивелирных линий. Такие разности можно найти косвенно, если вычислить нормальные высоты как разности высот H и высот ζ_Q некоторого квазигеоида.

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫСОТ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЕЙ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ И ДАЛЬНОМЕРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 1. Принципы развития пространственной сети

Координаты H, B, L или x, y, z точек земной поверхности в единой системе можно передавать, используя линейные измерения отрезков между точками сети, измерения горизонтальных углов или направлений и измерения вертикальных углов. В каждой точке сети угловые измерения могут быть выполнены относительно местной системы координат, положение которой определено касательной к силовой линии гравитационного поля и выбором начального горизонтального направления. Включая в пространственную сеть такую точку, нужно поэтому не только определить ее координаты, но и вывести три элемента ориентировки местной координатной системы относительно общей. Каждая новая точка требует, таким образом, вывода шести параметров: координат H, B, L и элементов ориентировки местной системы.

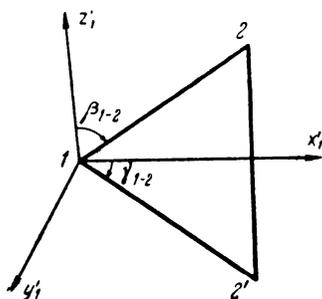


Рис. 1

Рассмотрим, например, три точки $1, 2, 3$ земной поверхности. Положение этих точек и их местные координатные системы определены 18 параметрами. Пусть в каждой из точек измерены вертикальные углы β на две другие точки и относительно некоторого в каждой точке произвольного начального направления измерены горизонтальные направления γ ; расстояние s_{1-2} , астрономический азимут α_{1-2} направления в точке 1 на точку 2 , астрономическая широта φ_1 , астрономическая долгота λ_1 также измерены. Таким образом, всего измерено 16 величин. Координаты H_1, B_1, L_1 (или x_1, y_1, z_1) будем считать заданными. Иллюстрируем возможность вычисления всех параметров, определяющих нашу простран-

ственную сеть (одно измерение у нас избыточно). Прежде всего, воспользовавшись уравнением Лапласа, можно вычислить геодезический азимут направления $1-2$ и определить положение (азимут) начального горизонтального направления в точке 1 (поскольку угол между этим направлением и направлением $1-2$ по условию измерен).

Определим координаты точек 2 и 3 и элементы ориентировки их местных координатных систем относительно системы декартовых координат x_1, y_1, z_1 , совпадающей с местной системой точки 1 . Поскольку ориентировка этой системы относительно общей известна (можно вычислить составляющие уклонения отвеса и геодезический азимут начального горизонтального направления) и известны координаты точки 1 , переход от декартовых координат и элементов ориентировки в системе точки 1 к общей системе можно считать известным. Направляющие косинусы линий s_{1-2} и s_{1-3} относительно местной системы точки 1 легко выразить при помощи рис. 1, на котором точка $2'$ обозначает проекцию точки 2 на плоскость $z_1 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} l'_{1-2} &= \sin \beta_{1-2} \cos \gamma_{1-2} & l'_{1-3} &= \sin \beta_{1-3} \cos \gamma_{1-3} \\ m'_{1-2} &= \sin \beta_{1-2} \sin \gamma_{1-2} & m'_{1-3} &= \sin \beta_{1-3} \sin \gamma_{1-3} \\ n'_{1-2} &= \cos \beta_{1-2} & n'_{1-3} &= \cos \beta_{1-3} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{II.1.1})$$

при этом

$$\left. \begin{aligned} l'_{1-2} &= -l'_{2-1} & l'_{1-3} &= -l'_{3-1} \\ m'_{1-2} &= -m'_{2-1} & m'_{1-3} &= -m'_{3-1} \\ n'_{1-2} &= -n'_{2-1} & n'_{1-3} &= -n'_{3-1} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.1.2})$$

В местных системах точек 2 и 3 направляющие косинусы сторон треугольника можно выразить аналогично

$$\left. \begin{aligned} l''_{2-1} &= \sin \beta_{2-1} \cos \gamma_{2-1} & l''_{2-3} &= \sin \beta_{2-3} \cos \gamma_{2-3} \\ m''_{2-1} &= \sin \beta_{2-1} \sin \gamma_{2-1} & m''_{2-3} &= \sin \beta_{2-3} \sin \gamma_{2-3} \\ n''_{2-1} &= \cos \beta_{2-1} & n''_{2-3} &= \cos \beta_{2-3} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{II.I.3})$$

$$\left. \begin{aligned} l'''_{3-1} &= \sin \beta_{3-1} \cos \gamma_{3-1} & l'''_{3-2} &= \sin \beta_{3-2} \cos \gamma_{3-2} \\ m'''_{3-1} &= \sin \beta_{3-1} \sin \gamma_{3-1} & m'''_{3-2} &= \sin \beta_{3-2} \sin \gamma_{3-2} \\ n'''_{3-1} &= \cos \beta_{3-1} & n'''_{3-2} &= \cos \beta_{3-2} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.I.4})$$

Теперь можно вычислить углы плоского треугольника

$$\left. \begin{aligned} \cos \angle 2-1-3 &= l'_{1-2} l'_{1-3} + m'_{1-2} m'_{1-3} + n'_{1-2} n'_{1-3} \\ \cos \angle 1-2-3 &= l''_{2-1} l''_{2-3} + m''_{2-1} m''_{2-3} + n''_{2-1} n''_{2-3} \\ \cos \angle 2-3-1 &= l'''_{3-1} l'''_{3-2} + m'''_{3-1} m'''_{3-2} + n'''_{3-1} n'''_{3-2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.I.5})$$

и его стороны

$$s_{1-3} = s_{1-2} \frac{\sin \angle 1-2-3}{\sin \angle 2-3-1}, \quad s_{2-3} = s_{1-2} \frac{\sin \angle 2-1-3}{\sin \angle 2-3-1}. \quad (\text{II.I.6})$$

Обозначим направляющие косинусы осей x, y, z координатной системы точки 2 относительно координатных осей точки 1 следующим образом:

$$\begin{aligned} l_{2x} \quad m_{2x} \quad n_{2x}, \\ l_{2y} \quad m_{2y} \quad n_{2y}, \\ l_{2z} \quad m_{2z} \quad n_{2z}. \end{aligned}$$

Эти направляющие косинусы связаны шестью известными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} l_{2x}^2 + m_{2x}^2 + n_{2x}^2 &= 1 \\ l_{2y}^2 + m_{2y}^2 + n_{2y}^2 &= 1 \\ l_{2z}^2 + m_{2z}^2 + n_{2z}^2 &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{II.I.7})$$

$$\left. \begin{aligned} l_{2x} l_{2y} + m_{2x} m_{2y} + n_{2x} n_{2y} &= 0 \\ l_{2x} l_{2z} + m_{2x} m_{2z} + n_{2x} n_{2z} &= 0 \\ l_{2y} l_{2z} + m_{2y} m_{2z} + n_{2y} n_{2z} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{II.I.8})$$

поэтому независимы только три из них.

Уравнения, определяющие искомые направляющие косинусы, получим, выражая известными формулами косинусы углов между направлением отрезка s_{2-1} и осями местной системы

$$\left. \begin{aligned} l_{2x} l'_{2-1} + m_{2x} m'_{2-1} + n_{2x} n'_{2-1} &= l''_{2-1} \\ l_{2y} l'_{2-1} + m_{2y} m'_{2-1} + n_{2y} n'_{2-1} &= m''_{2-1} \\ l_{2z} l'_{2-1} + m_{2z} m'_{2-1} + n_{2z} n'_{2-1} &= n''_{2-1} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.I.9})$$

Пользуясь (II.I.1) и (II.I.6), можно вычислить координаты точек 2 и 3 в системе точки 1 и направляющие косинусы $l'_{2-3} = -l'_{3-2}$, $m'_{2-3} = -m'_{3-2}$, $n'_{2-3} = -n'_{3-2}$. Тогда аналогично (II.I.9) получим

$$\left. \begin{aligned} l_{2x} l'_{2-3} + m_{2x} m'_{2-3} + n_{2x} n'_{2-3} &= l''_{2-3} \\ l_{2y} l'_{2-3} + m_{2y} m'_{2-3} + n_{2y} n'_{2-3} &= m''_{2-3} \\ l_{2z} l'_{2-3} + m_{2z} m'_{2-3} + n_{2z} n'_{2-3} &= n''_{2-3} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.I.10})$$

Добавив к шести уравнениям (II.1.9) и (II.1.10) еще три (II.1.7), получим систему из девяти уравнений с девятью неизвестными, которая распадается на три независимые системы с тремя неизвестными каждая

$$\left. \begin{aligned} l_{2x}l'_{2-1} + m_{2x}m'_{2-1} + n_{2x}n'_{2-1} &= l''_{2-1} \\ l_{2x}l'_{2-3} + m_{2x}m'_{2-3} + n_{2x}n'_{2-3} &= l''_{2-3} \\ l_{2x}^2 + m_{2x}^2 + n_{2x}^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (II.1.11)$$

и аналогично для l_{2y} , m_{2y} , n_{2y} и l_{2z} , m_{2z} , n_{2z} . Решение системы (II.1.11) сводится к решению квадратного уравнения. Направляющие косинусы осей местной системы точки Z можно определить подобным же образом.

В печати появляются сообщения об использовании новой техники для исключения влияния рефракции (Тенгстрём, 1967, 1968; Дайсон, 1967; Брайн, 1969). Наше изложение пока что соответствовало случаю, когда вертикальные углы не искажены вертикальной рефракцией.

Для горных районов Градилек показал возможность и целесообразность определения вертикальной рефракции в сетях тригонометрического нивелирования с большим числом избыточных измерений непосредственно из измерений вертикальных углов. Коэффициент рефракции тогда следует выводить в каждой точке измерения таких углов. В этом случае каждая новая точка сети требует вывода семи параметров при условии, что коэффициенты рефракции известны в остальных точках измерения вертикальных углов.

Нетрудно подсчитать общее число независимых и необходимых параметров, определяющих пространственную сеть из p пунктов. Каждый из p пунктов сети, определенный хотя бы линейной или прямой угловой засечкой, требует вывода трех координат. Для тех q пунктов, на которых измерены вертикальные углы, нужно определить составляющие

$$\xi = \varphi - B \quad \text{и} \quad \eta = (\lambda - L) \cos B \quad (II.1.12)$$

уклонения отвеса и, если новая техника не использована для исключения влияния рефракции, ее коэффициент k постоянный для каждого пункта. Для тех пунктов, на которых измерены горизонтальные направления, нужно определить некоторую величину f , характеризующую положение начального отсчетного направления. Параметр f выводить не нужно, если измерены горизонтальные углы.

Таким образом, при выводе коэффициента k рефракции по обычным геодезическим измерениям всю сеть из p пунктов определяют $3p+3q+r$ независимых необходимых параметров. Если влияние вертикальной рефракции исключено, для этой же цели будет достаточно $3p+2q+r$ параметров. Слагаемое r здесь нужно будет опустить, если измерены не горизонтальные направления, а горизонтальные углы.

В число этих параметров должны входить исходные данные, например значения H , B , L , ξ , η на некотором пункте, астрономический азимут α направления с этого пункта на какой-нибудь другой пункт сети и расстояние между какими-либо пунктами.

В необходимые угловые измерения должны быть включены все те местные системы координат, параметры которых в общей координатной системе необходимы для развития сети.

При развитии сети и включении в нее новых точек необходимо выполнить в общем случае семь дополнительных измерений для определения значений H , B , L и ξ , η , f ; k в каждой новой точке или шесть, если коэффициент k выводить не нужно. При этом в каждой новой точке следует измерить по крайней мере одно горизонтальное направление и три вертикальных угла (из измерений горизонтальных направлений также можно определить составляющие ξ , η уклонения отвеса, если зенитные расстояния направлений отличны от 90° , однако в общем случае такой вывод величин ξ , η менее надежен). Если не определять коэффициент k , в новой точке достаточно измерить два вертикальных угла.

Возможность передавать координаты точек земной поверхности в единой системе, если отвлечься от влияния рефракции, инструментальных, метеорологических и других источников ошибок, путем измерения горизонтальных и вертикальных углов, имея один исходный базис, показана Молоденским (1949).

В этой же работе Молоденского указана возможность передачи астрономических координат и азимута через горизонтальные и вертикальные углы.

Подобные рассуждения и вывод есть у Брунса* (1878, стр. 30), однако в целом работа Брунса противоречива. Цель (определение фигуры земной поверхности) Брунс спутал со средством (излучением геоида). Основную задачу геодезии Брунс видел в определении геоида и предложил определять его высоты над отсчетным эллипсоидом как разности высот H точек земной поверхности, выводимой из линейных, угловых и астрономических измерений, т. е. геометрическим методом, и орто-

* Н. К. Мигаль указал нам искажившую смысл этого вывода неточность в русском переводе (1961) работы Брунса.

метрических высот, выводимых из геометрического нивелирования с использованием значений силы тяжести вдоль его линий и между земной поверхностью и геоидом.

К выводу о возможности передавать геодезические координаты, астрономические координаты и азимуты через горизонтальные и вертикальные углы был близок Виларсо (1868). Однако в заключении о развитии пространственной геодезической сети он считает принципиально необходимым определение астрономических широты и азимута в каждой точке из наблюдений или интерполяции. Виларсо еще раньше Брунса предлагал выводить высоты геоида из разности результатов тригонометрического и геометрического нивелирования.

Молоденский выявил вспомогательную роль астрономических измерений: они служат для локализации влияния боковой рефракции (азимуты) и вертикальной рефракции (широты и долготы).

Горизонтальные и вертикальные углы равноправны в общем случае передачи координат. Вертикальная рефракция препятствует выводу уклонов отвеса из измеренных вертикальных и горизонтальных углов; желательны непосредственные астрономические определения. Более или менее точные пространственные сети удается строить только в горных районах, где астрономические наблюдения на каждом пункте не обязательны.

Формулы для передачи геодезических координат и астрономических координат и азимутов в пространственных сетях, кроме указанных работ Молоденского, можно найти в статьях Хирвонена (1964), Рудского (1965, 1966, 1967) и авторов (1966).

Ниже мы рассмотрим задачи, связанные с непосредственным выводом высот H из дальномерных измерений, одностороннего и двухстороннего тригонометрического нивелирования.

§ 2. Одностороннее тригонометрическое нивелирование

В точке 1 с известными координатами H_1, B_1, L_1 определено геодезическое зенитное расстояние z_{1-2} на точку 2 с известными плановыми геодезическими координатами B_2, L_2 . Нужно найти высоту H_2 точки 2. Выведем для этого точную формулу.

Для решения этой задачи выразим расстояние s_{1-2} между точками и произведение $s_{1-2} \cos z_{1-2}$ через координаты H, B, L .

Как известно, направляющие косинусы $l_{1-2}, m_{1-2}, n_{1-2}$ отрезка s_{1-2} относительно координатных осей декартовой системы и длину s_{1-2} этого отрезка связывают соотношения

$$\left. \begin{aligned} s_{1-2} l_{1-2} &= x_2 - x_1 \\ s_{1-2} m_{1-2} &= y_2 - y_1 \\ s_{1-2} n_{1-2} &= z_2 - z_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.1})$$

Из (I.1) и (II.2.1) следует

$$\left. \begin{aligned} s_{1-2} l_{1-2} &= (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos L_2 - (N_1 + H_1) \cos B_1 \cos L_1 \\ s_{1-2} m_{1-2} &= (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2 - (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_1 \\ s_{1-2} n_{1-2} &= (N_2 + H_2 - N_2 e^2) \sin B_2 - (N_1 + H_1 - N_1 e^2) \sin B_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.2.2})$$

Поскольку

$$l_{1-2}^2 + m_{1-2}^2 + n_{1-2}^2 = 1,$$

возведя каждое из уравнений (II.2.2) в квадрат и сложив, найдем формулу Молоденского (1954)

$$s_{1-2}^2 = (N_1 + H_1)^2 + (N_2 + H_2)^2 - 2(N_1 + H_1)(N_2 + H_2) \cos \psi - \mu (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2 - 2e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) (H_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1), \quad (\text{II.2.3})$$

где

$$\cos \psi = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos (L_2 - L_1), \quad \mu = \frac{a^4 - b^4}{a^4}.$$

Для удобства вычислений выражение (II.2.3) можно представить так:

$$s_{1-2}^2 = 4N_1 N_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \frac{H_1}{N_1}\right) \left(1 + \frac{H_2}{N_2}\right) + (N_2 - N_1 + H_2 - H_1)^2 - \mu (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2 - 2e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) (H_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1), \quad (\text{II.2.4})$$

где

$$\sin^2 \frac{\psi}{2} = \sin^2 \frac{B_2 - B_1}{2} + \cos B_1 \cos B_2 \sin^2 \frac{L_2 - L_1}{2}.$$

Если $H_1 = 0, H_2 = 0$, получим хорду эллипсоида:

$$s_{1-2}^2 = 4N_1 N_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} + (N_2 - N_1)^2 - \mu (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2. \quad (\text{II.2.5})$$

Эта формула также опубликована Молоденским (1954). Или

$$\overline{s_{1-2}^2} = N_1^2 + N_2^2 - 2N_1N_2 \cos \psi - \mu (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2. \quad (11.2.6)$$

Вычтя выражение (11.2.6) из (11.2.3), найдем

$$s_{1-2}^2 - \overline{s_{1-2}^2} = H_2^2 + 2H_2 [N_2 - (N_1 + H_1) \cos \psi - e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \sin B_2] + \\ + 2N_1H_1 + H_1^2 - 2N_2H_1 \cos \psi + 2e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) H_1 \sin B_1. \quad (11.2.7)$$

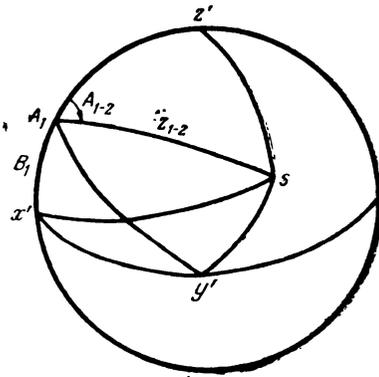


Рис. 2

Выразим теперь произведение $s_{1-2} \cos z_{1-2}$ через координаты точек 1 и 2. Для вывода вспомогательных зависимостей выразим направляющие косинусы l_{12}, m_{12}, n_{12} отрезка s_{12} через зенитное расстояние z_{1-2} направления с точки 1 на точку 2 и через геодезический азимут A_{1-2} этого направления (т. е. геодезический азимут нормальной относительно эллипсоида плоскости, содержащей отрезок s_{1-2} и геодезический зенит точки 1).

Повернем общую систему декартовых координат вокруг оси z на угол, равный геодезической долготе L_1 точки 1. Координаты x', y', z' новой системы связаны с x, y, z такими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos L_1 + y \sin L_1 \\ y' &= -x \sin L_1 + y \cos L_1 \\ z' &= z \end{aligned} \right\}. \quad (11.2.8)$$

Направляющие косинусы в новой системе определены соотношениями

$$\left. \begin{aligned} s_{1-2} l'_{1-2} &= x'_2 - x'_1 \\ s_{1-2} m'_{1-2} &= y'_2 - y'_1 \\ s_{1-2} n'_{1-2} &= z'_2 - z'_1 \end{aligned} \right\}. \quad (11.2.9)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} s_{1-2} l'_{1-2} &= (x_2 - x_1) \cos L_1 + (y_2 - y_1) \sin L_1 \\ s_{1-2} m'_{1-2} &= -(x_2 - x_1) \sin L_1 + (y_2 - y_1) \cos L_1 \\ s_{1-2} n'_{1-2} &= z_2 - z_1 \end{aligned} \right\}. \quad (11.2.10)$$

Из выражений (11.2.1) находим связь новых направляющих косинусов с направляющими косинусами в общей системе декартовых координат

$$\left. \begin{aligned} l'_{1-2} &= l_{1-2} \cos L_1 + m_{1-2} \sin L_1 \\ m'_{1-2} &= m_{1-2} \cos L_1 - l_{1-2} \sin L_1 \\ n'_{1-2} &= n_{1-2} \end{aligned} \right\}. \quad (11.2.11)$$

На сфере единичного радиуса (рис. 2), описанной вокруг точки 1, точкой A_1 отмечен геодезический зенит точки 1, точка s соответствует направлению отрезка s_{1-2} , точки x', y', z' — направлениям координатных осей x', y', z' , $\angle z'A_1s = A_{1-2}$, $\angle x'A_1 = B_1$, $\angle A_1s = z_{1-2}$, $\angle y'A_1z' = 90^\circ$. Из сферического треугольника A_1sx' следует

$$\cos(x's) = l'_{1-2} = \cos B_1 \cos z_{1-2} - \sin B_1 \sin z_{1-2} \cos A_{1-2}, \quad (11.2.12)$$

из треугольника $A_1y's$, в котором $A_1y' = 90^\circ$; получаем

$$\cos(y's) = m'_{1-2} = \sin z_{1-2} \sin A_{1-2} \quad (11.2.13)$$

и из треугольника $A_1z's$ находим

$$\cos(z's) = n'_{1-2} = \sin B_1 \cos z_{1-2} + \cos B_1 \sin z_{1-2} \cos A_{1-2}. \quad (11.2.14)$$

Пользуясь уравнениями (11.2.11), выразим правые части уравнений (11.2.12), (11.2.13), (11.2.14) через направляющие косинусы $l_{1-2}, m_{1-2}, n_{1-2}$ в общей системе координат

$$l_{1-2} \cos L_1 + m_{1-2} \sin L_1 = \cos B_1 \cos z_{1-2} - \sin B_1 \sin z_{1-2} \cos A_{1-2}, \quad (11.2.15)$$

$$-l_{1-2} \sin L_1 + m_{1-2} \cos L_1 = \sin z_{1-2} \sin A_{1-2}, \quad (11.2.16)$$

$$n_{1-2} = \sin B_1 \cos z_{1-2} + \cos B_1 \sin z_{1-2} \cos A_{1-2}. \quad (11.2.17)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} l_{1-2} &= \cos B_1 \cos L_1 \cos z_{1-2} - \sin B_1 \cos L_1 \cos A_{1-2} \sin z_{1-2} - \\ &\quad - \sin L_1 \sin A_{1-2} \sin z_{1-2} \\ m_{1-2} &= \cos B_1 \sin L_1 \cos z_{1-2} - \sin B_1 \sin L_1 \cos A_{1-2} \sin z_{1-2} + \\ &\quad + \cos L_1 \sin A_{1-2} \sin z_{1-2} \\ n_{1-2} &= \sin B_1 \cos z_{1-2} + \cos B_1 \cos A_{1-2} \sin z_{1-2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.18})$$

Направляющие косинусы отрезка в таком виде выражены Хотинном (1957).
Из уравнений (II.2.15) и (II.2.17) находим

$$\cos z_{1-2} = (l_{1-2} \cos L_1 + m_{1-2} \sin L_1) \cos B_1 + n_{1-2} \sin B_1. \quad (\text{II.2.19})$$

Используя (II.2.2), выразим $s_{1-2} \cos z_{1-2}$ через координаты общей геодезической системы

$$s_{1-2} \cos z_{1-2} = (N_2 + H_2) \cos \psi - (N_1 + H_1) - e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \sin B_1. \quad (\text{II.2.20})$$

Из этой формулы находим

$$\begin{aligned} s_{1-2}^2 &= \sec^2 z_{1-2} \cos^2 \psi H_2^2 + 2 \sec^2 z_{1-2} \cos \psi (N_2 \cos \psi - N_1 - H_1 - \varepsilon_{1-2} \sin B_1) H_2 + \\ &+ \sec^2 z_{1-2} [N_2^2 \cos^2 \psi - 2N_2 \cos \psi (N_1 + H_1 + \varepsilon_{1-2} \sin B_1) + (N_1 + H_1)^2 + 2(N_1 + \\ &\quad + H_1) \varepsilon_{1-2} \sin B_1 + \varepsilon_{1-2}^2 \sin^2 B_1], \end{aligned} \quad (\text{II.2.21})$$

где

$$\varepsilon_{1-2} = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1), \quad \varepsilon_{1-2} = -\varepsilon_{2-1}. \quad (\text{II.2.22})$$

Из (II.2.7) и (II.2.21) следует квадратное уравнение

$$(\cos^2 \psi - \cos^2 z_{1-2}) H_2^2 + 2(b - B) H_2 + (c - C) = 0, \quad (\text{II.2.23})$$

где

$$b = \cos \psi (N_2 \cos \psi - N_1 - H_1 - \varepsilon_{1-2} \sin B_1), \quad (\text{II.2.24})$$

$$B = \cos^2 z_{1-2} [-(N_1 + H_1) \cos \psi + N_2 - \varepsilon_{1-2} \sin B_2], \quad (\text{II.2.25})$$

$$\begin{aligned} c &= N_2^2 \cos^2 \psi - 2N_2 \cos \psi (N_1 + H_1 + \varepsilon_{1-2} \sin B_1) + (N_1 + H_1)^2 + 2(N_1 + \\ &\quad + H_1) \varepsilon_{1-2} \sin B_1 + \varepsilon_{1-2}^2 \sin^2 B_1, \end{aligned} \quad (\text{II.2.26})$$

$$C = \cos^2 z_{1-2} [s_{1-2}^2 + 2N_1 H_1 + H_1^2 - 2N_2 H_1 \cos \psi + 2\varepsilon_{1-2} H_1 \sin B_1]. \quad (\text{II.2.27})$$

Решив уравнение (II.2.23), найдем

$$H_2 = \frac{-(b - B) \pm \sqrt{(b - B)^2 - (\cos^2 \psi - \cos^2 z_{1-2})(c - C)}}{\cos^2 \psi - \cos^2 z_{1-2}}. \quad (\text{II.2.28})$$

Зенитные расстояния β относительно астрономического зенита связаны с z , как известно, формулой

$$z = \beta + \xi \cos A + \eta \sin A = \beta + \vartheta, \quad (\text{II.2.29})$$

где A — геодезический азимут направления.

Рассмотрим теперь случай обратного тригонометрического нивелирования: на точку 1 с известными координатами H_1, B_1, L_1 определено геодезическое зенитное расстояние z_{2-1} с точки 2 с известными плановыми геодезическими координатами B_2, L_2 . Нужно найти высоту H_2 точки 2.

Применив формулу (II.2.20) к направлению 2—1 и возведя результат в квадрат, найдем

$$\begin{aligned} s_{1-2}^2 \cos^2 z_{2-1} &= H_2^2 + 2H_2 [N_2 - (N_1 + H_1) \cos \psi + \varepsilon_{2-1} \sin B_2] + (N_1 + H_1)^2 \cos^2 \psi + \\ &+ N_2^2 + \varepsilon_{2-1}^2 \sin^2 B_2 - 2(N_1 + H_1) N_2 \cos \psi - 2(N_1 + H_1) \varepsilon_{2-1} \cos \psi \sin B_2 + \\ &\quad + 2N_2 \varepsilon_{2-1} \sin B_2. \end{aligned} \quad (\text{II.2.30})$$

Из (II.2.7) и (II.2.30) выводим квадратное уравнение

$$\sin^2 z_{2-1} H_2^2 + 2b_1 H_2 + (c_1 - C) = 0, \quad (\text{II.2.31})$$

где

$$b_1 = [N_2 - (N_1 + H_1) \cos \psi - \varepsilon_{1-2} \sin B_2] \sin^2 z_{2-1}, \quad (\text{II.2.32})$$

$$\begin{aligned} c_1 &= N_2^2 - 2(N_1 + H_1) \cos \psi (N_2 - \varepsilon_{1-2} \sin B_2) + (N_1 + H_1)^2 \cos^2 \psi - \\ &\quad - 2N_2 \varepsilon_{1-2} \sin B_2 + \varepsilon_{1-2}^2 \sin^2 B_2. \end{aligned} \quad (\text{II.2.33})$$

В этом случае получаем точную формулу

$$H_2 = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - \sin^2 z_{2-1} (c_1 - C)}}{\sin^2 z_{2-1}}. \quad (\text{II.2.34})$$

Приближенные формулы для передачи высот односторонним тригонометрическим нивелированием были известны французским геодезистам (Мешен, Деламбр, 1807). Такие формулы приводит Пюиссан (1819) со ссылками на более ранние источники.

§ 3. Двустороннее тригонометрическое нивелирование

Рассмотрим две точки: 1 (H_1, B_1, L_1) и 2 (H_2, B_2, L_2) вне отсчетного геодезического эллипсоида, соединяющий их отрезок s_{1-2} , проекции $(0, B_1, L_1)$ и $(0, B_2, L_2)$ этих точек на эллипсоид и отрезок \bar{s}_{1-2} между проекциями. Неизвестную высоту H_2 нужно выразить через измеренные зенитные расстояния β_{1-2} , β_{2-1} и другие известные величины. Спроектировав замкнутый четырехугольник со сторонами H_1 , s_{1-2} , H_2 ,

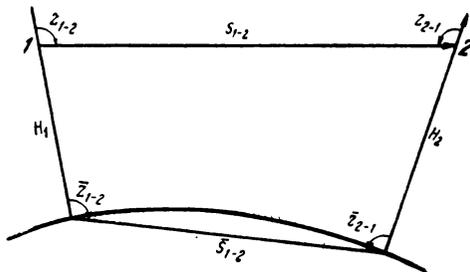


Рис. 3

\bar{s}_{1-2} на направление нормали к эллипсоиду в точке 1, найдем (рис. 3)

$$H_1 + s_{1-2} \cos z_{1-2} = H_2 \cos \psi + \bar{s}_{1-2} \cos \bar{z}_{1-2}, \quad (\text{II.3.1})$$

где z_{1-2} — отсчитанное от геодезического зенита точки 1 геодезическое зенитное расстояние отрезка s_{1-2} в этой точке; \bar{z}_{1-2} — геодезическое зенитное расстояние отрезка \bar{s}_{1-2} при проекции точки 1 на эллипсоид; ψ — угол между координатными линиями H_1 и H_2 .

Поскольку направляющие косинусы первой из них относительно координатных осей x, y, z декартовой системы равны

$$\cos B_1 \cos L_1, \quad \cos B_1 \sin L_1, \quad \sin B_1$$

и такие же направляющие косинусы второй линии H_2 равны

$$\cos B_2 \cos L_2, \quad \cos B_2 \sin L_2, \quad \sin B_2,$$

выводим, как и в предыдущем параграфе,

$$\cos \psi = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos (L_2 - L_1). \quad (\text{II.3.2})$$

Спроектировав те же отрезки H_1 , s_{1-2} , H_2 , \bar{s}_{1-2} на направление нормали к эллипсоиду в точке 2, найдем

$$H_1 \cos \psi - s_{1-2} \cos z_{2-1} = H_2 - \bar{s}_{1-2} \cos \bar{z}_{2-1}. \quad (\text{II.3.3})$$

Образовав разность (II.3.3) и (II.3.1), получим

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 &= \frac{s_{1-2}}{2 \cos^2 \frac{\psi}{2}} (\cos z_{1-2} - \cos z_{2-1}) + \\ &+ \frac{\bar{s}_{1-2}}{2 \cos^2 \frac{\psi}{2}} (\cos \bar{z}_{2-1} - \cos \bar{z}_{1-2}). \end{aligned} \quad (\text{II.3.4})$$

Теперь займемся преобразованием последнего члена этой формулы. Согласно (II.2.20)

$$\bar{s}_{1-2} \cos \bar{z}_{1-2} = N_2 \cos \psi - N_1 - e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \sin B_1. \quad (\text{II.3.5})$$

Таким образом, из (II.3.4) находим

$$H_2 - H_1 = \frac{s_{1-2}}{2 \cos^2 \frac{\psi}{2}} (\cos z_{1-2} - \cos z_{2-1}) - (N_2 - N_1) + \frac{e^2}{2 \cos^2 \frac{\psi}{2}} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) (\sin B_1 + \sin B_2). \quad (\text{II.3.6})$$

Из этой формулы можно вывести такое соотношение:

$$H_2 - H_1 = \frac{s_{1-2}}{2} (\cos z_{1-2} - \cos z_{2-1}) + (N_2 - N_1 + H_2 - H_1) \sin^2 \frac{\psi}{2} - (N_2 - N_1) + \frac{e^2}{2} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) (\sin B_1 + \sin B_2). \quad (\text{II.3.7})$$

Если разность $B_2 - B_1$ мала, два последних больших члена формулы (II.3.7) в сумме образуют малую поправку. Для преобразования этих членов заметим, что

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}, \quad N_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}},$$

$$N_1^2 (1 - e^2 \sin^2 B_1) = N_2^2 (1 - e^2 \sin^2 B_2),$$

$$N_2 - N_1 = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \frac{(N_1 \sin B_1 + N_2 \sin B_2)}{N_1 + N_2},$$

и получим

$$H_2 - H_1 = \frac{s_{1-2}}{2} (\cos z_{1-2} - \cos z_{2-1}) + (N_2 - N_1 + H_2 - H_1) \sin^2 \frac{\psi}{2} - e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \frac{(N_2 - N_1) (\sin B_2 - \sin B_1)}{2 (N_1 + N_2)}. \quad (\text{II.3.8})$$

Использованный нами метод вывода применен впервые Молоденским (1954). Окончательная приближенная формула Молоденского для разности $H_2 - H_1$ высот над отсчетным эллипсоидом содержит два первых члена формулы (II.3.8). Последний член формулы (II.3.8), как уже было сказано, весьма мал. При $B_1 = 45^\circ$, $B_2 = 46^\circ$ (в этом промежутке широт значения N изменяются наиболее быстро) величина этого члена близка к $-0,1$ мм.

Разложив в ряд по степеням разности $\Delta B = B_2 - B_1$, можно выделить главную часть

$$e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \frac{(N_2 - N_1) (\sin B_2 - \sin B_1)}{2 (N_1 + N_2)} \approx \frac{ae^4}{4} \frac{\sin B_1 \cos^3 B_1}{(1 - e^2 \sin^2 B_1)^3} (\Delta B)^3.$$

Второй член формулы (II.3.8) также мал: при $\psi = 1^\circ$, $B_1 = 45^\circ$, $B_2 = 46^\circ$, $H_2 - H_1 = 6000$ м он близок к 3 см (если точки 1 и 2 расположены на одном меридиане, на широте, близкой к 45° , величина этого члена почти не зависит от разности высот).

Подставив в формулу (II.3.8) выражение (II.2.29) и отбросив в ней третий член, получим

$$H_2 - H_1 = \frac{s_{1-2}}{2} (\cos \beta_{1-2} - \cos \beta_{2-1}) - \frac{s_{1-2}}{2} (\vartheta_1 \sin \beta_{1-2} - \vartheta_2 \sin \beta_{2-1}) + (N_2 - N_1 + H_2 - H_1) \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (\text{II.3.9})$$

Как следует из (II.3.9) и (II.2.29), для передачи высот тригонометрическим нивелированием необходимы не только плановые координаты точек, но и их астрономические широты и долготы.

Приближенные формулы для вывода разности высот над отсчетным эллипсоидом из двустороннего тригонометрического нивелирования без учета уклонений отвеса рассмотрены уже в монографии Мешена и Деламбра (1807) и в курсе Пюиссана (1819).

Необходимость учета уклонений отвеса в тригонометрическом нивелировании указана австрийским геодезистом Фуксом (1843). Влияние притяжения гор на укло-

нения отвеса Фукс оценил на модели Земли: шар с радиусом примерно в три раза меньше земного радиуса сечет своей поверхностью сферическую Землю. Радиус этого сечения около 100 км (60 000 туазов). Высота «горы», т. е. выпукло-вогнутой линзы, около 2 км (1000 туазов). Уклонение отвеса у подножья «горы» приблизительно оценено в 25'' (вся масса линзы при оценке сосредоточена в ее центре тяжести). Соображения о необходимости учета уклонений отвеса в тригонометрическом нивелировании развиты также Виларсо (1868). Влияние уклонения отвеса на результаты тригонометрического нивелирования рассмотрено Бейером (1874).

В процесс последовательных приближений при вычислении по формуле (II.3.9) должно входить вычисление по формуле (II.2.3) или (II.2.4), если длина s_{1-2} не измерена. В этом случае двустороннего тригонометрического нивелирования одно измерение избыточно. Составим условное уравнение и выразим поправки в измеренные зенитные расстояния β_{1-2} и β_{2-1} по правилам способа наименьших квадратов.

Выражения Хотина для направляющих косинусов отрезка 2-1 через астрономические координаты φ_2 , λ_2 точки 2 и измеренные азимут α_{2-1} и зенитное расстояние β_{2-1} имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} l_{2-1} &= -\sin \varphi_2 \cos \lambda_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} - \sin \lambda_2 \sin \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} + \\ &\quad + \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 \cos \beta_{2-1}, \\ m_{2-1} &= -\sin \varphi_2 \sin \lambda_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} + \cos \lambda_2 \sin \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} + \\ &\quad + \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \cos \beta_{2-1}, \\ n_{2-1} &= \cos \varphi_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} + \sin \varphi_2 \cos \beta_{2-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3.10})$$

Значения φ_2 , λ_2 по условию известны, азимут α_{2-1} можно вычислить по формуле

$$\alpha_{2-1} = A_{2-1} + \eta_2 \operatorname{tg} B_2 + (\xi_2 \sin A_{2-1} - \eta_2 \cos A_{2-1}) \operatorname{ctg} z_{2-1}, \quad (\text{II.3.11})$$

где геодезический азимут A_{2-1} определен формулой Молоденского (1954)

$$\operatorname{ctg} A_{2-1} = \frac{\sin(B_1 - B_2)}{\cos B_1 \sin(L_1 - L_2)} + \sin B_2 \operatorname{tg} \frac{L_1 - L_2}{2} + \\ + e^2 \frac{(N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \cos B_2}{(N_1 + H_1) \cos B_1 \sin(L_1 - L_2)}. \quad (\text{II.3.12})$$

Измеренные зенитные расстояния β_{1-2} и β_{2-1} нужно уравнивать так, чтобы было выполнено условие:

$$l_{2-1} = l_{1-2}, \quad m_{2-1} = -m_{1-2}, \quad n_{2-1} = -n_{1-2}. \quad (\text{II.3.13})$$

Составив уравнения (II.3.10) для направления 1-2, можно вывести условное уравнение

$$\cos \beta_{1-2} - \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 (\sin \varphi_2 \cos \lambda_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} + \sin \lambda_2 \sin \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} - \\ - \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 \cos \beta_{2-1}) - \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 (\sin \varphi_2 \sin \lambda_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} - \\ - \cos \lambda_2 \sin \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} - \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \cos \beta_{2-1}) + \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta_{2-1} + \\ + \sin \varphi_2 \cos \beta_{2-1}) = 0. \quad (\text{II.3.14})$$

Сохраним обозначения β_{1-2} и β_{2-1} для уравненных значений зенитных расстояний и обозначим через β'_{1-2} и β'_{2-1} измеренные значения. Выразим поправки

$$\left. \begin{aligned} \Delta \beta_{1-2} &= \beta_{1-2} - \beta'_{1-2} \\ \Delta \beta_{2-1} &= \beta_{2-1} - \beta'_{2-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3.15})$$

через известные величины и невязку ω условного уравнения

$$\cos \beta'_{1-2} - \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 (\sin \varphi_2 \cos \lambda_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta'_{2-1} + \sin \lambda_2 \sin \alpha_{2-1} \sin \beta'_{2-1} - \\ - \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 \cos \beta'_{2-1}) - \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 (\sin \varphi_2 \sin \lambda_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta'_{2-1} - \\ - \cos \lambda_2 \sin \alpha_{2-1} \sin \beta'_{2-1} - \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \cos \beta'_{2-1}) + \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \cos \alpha_{2-1} \sin \beta'_{2-1} + \\ + \sin \varphi_2 \cos \beta'_{2-1}) = \omega. \quad (\text{II.3.16})$$

Уравнение (II.3.14) эквивалентно следующему в линейном приближении

$$a_1 \Delta \beta_{1-2} + a_2 \Delta \beta_{2-1} = -\omega, \quad (\text{II.3.17})$$

где

$$a_1 = -\sin \beta'_{1-2},$$

$$a_2 = -\cos \varphi_1 \cos \lambda_1 (\sin \varphi_2 \cos \lambda_2 \cos \alpha_{2-1} \cos \beta'_{2-1} + \sin \lambda_2 \sin \alpha_{2-1} \cos \beta'_{2-1} + \\ + \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 \sin \beta'_{2-1}) - \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 (\sin \varphi_2 \sin \lambda_2 \cos \alpha_{2-1} \cos \beta'_{2-1} - \\ - \cos \lambda_2 \sin \alpha_{2-1} \cos \beta'_{2-1} + \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \sin \beta'_{2-1}) + \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \cos \alpha_{2-1} \cos \beta'_{2-1} - \\ - \sin \varphi_2 \sin \beta'_{2-1}) .$$

Тогда

$$\Delta \beta_{1-2} = \frac{a_1}{\rho_1} k, \quad \Delta \beta_{2-1} = \frac{a^2}{\rho_2} k, \quad (\text{II.3.18})$$

где $k = -\frac{w}{\left[\frac{aa}{\rho} \right]}$; ρ — вес измеренных величин.

Бóльший практический интерес представляет тот случай двустороннего тригонометрического нивелирования, когда в точке I , как и прежде, заданы $B_1, L_1, H_1, \varphi_1, \lambda_1$, а в точке 2 заданы только плановые координаты B_2, L_2 . Если измерены зенитные расстояния β_{1-2} и β_{2-1} , то можно определить высоту H_2 и составляющую ϑ_2 в азимуте A_{2-1} уклонения отвеса в точке 2 . Избыточных измерений теперь нет.

Применив уравнение (II.2.19) к направлению $2-I$ и имея в виду условия (II.3.13), находим

$$\cos (\beta_{2-1} + \vartheta_2) = - (l_{1-2} \cos L_2 + m_{1-2} \sin L_2) \cos B_2 - n_{1-2} \sin B_2. \quad (\text{II.3.19})$$

Значения $l_{1-2}, m_{1-2}, n_{1-2}$ можно выразить с помощью уравнений (II.2.18) через известные величины и азимут A_{1-2} , который неизвестен, поскольку неизвестна высота H_2 . Формула Молоденского для азимута теперь имеет вид

$$\text{ctg } A_{1-2} = \frac{\sin (B_2 - B_1)}{\cos B_2 \sin (L_2 - L_1)} + \sin B_1 \text{tg } \frac{L_2 - L_1}{2} + \\ + e^2 \frac{(N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2) \cos B_1}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin (L_2 - L_1)}. \quad (\text{II.3.20})$$

Таким образом, нашу задачу решают совместно четыре уравнения (II.2.4), (II.3.9), (II.3.19) и (II.3.20), содержащие неизвестные H_2, s_{1-2}, A_{1-2} и ϑ_2 . Их можно решать последовательными приближениями. Положив $H_2 = 0$, можно вычислить s_{1-2} по формуле (II.2.4), A_{1-2} — по (II.3.20), ϑ_2 — по (II.3.19) и H_2 — по формуле (II.3.9). Затем нужно будет повторять вычисления, пока последовательные приближения не будут давать для H_2 одинаковые значения.

Бóльшая простота вывода составляющих ϑ уклонения отвеса и высот вдоль линии тригонометрического нивелирования будет достигнута, если в первых двух точках I и 2 этой линии будут известны координаты H, B, L , а в остальных точках — только плановые геодезические координаты B, L . Пусть три точки $1, 2, 3$ лежат в одной плоскости, проходящей через нормаль к эллипсоиду в точке 2 . Относительно астрономического зенита точки 2 в этой точке измерены зенитные расстояния β_{2-1} и β_{2-3} направлений $2-1$ и $2-3$. Влияние рефракции будем по-прежнему считать исключенным. Этих данных достаточно для вывода составляющей ϑ_2 уклонения отвеса в точке 2 в указанной плоскости и высоты H_3 точки 3 .

Действительно, вычислив s_{1-2} по формуле (II.2.4), можно определить z_{2-1} по формуле (II.2.20), если в ней поменять местами индексы 1 и 2 . Теперь можно вычислить

$$\vartheta_2 = z_{2-1} - \beta_{2-1}. \quad (\text{II.3.21})$$

Для геодезического зенитного расстояния z_{2-3} находим

$$z_{2-3} = \beta_{2-1} + \beta_{2-3} - z_{2-1}. \quad (\text{II.3.22})$$

Высоту точки 3 определяет формула (II.2.28).

¹Последовательно переходя в точки $3, 4$ и т. д., можно, таким образом, передавать составляющие уклонений отвеса и высоты вдоль цепочки тригонометрического нивелирования.

§ 4. Передача высот дальномерными измерениями

Если, как и в случае тригонометрического нивелирования, известны координаты H_1, B_1, L_1 точки 1 и плановые координаты B_2, L_2 точки 2 , то измерение расстояния s_{1-2} дает возможность вычислить высоту H_2 . Квадратным уравнением относительно высоты H_2 являются тогда формулы (II.2.3) или (II.2.4).

Бóльший практический интерес представляет случай, когда с трех твердых то-

чек земной поверхности (H_1, B_1, L_1) , (H_2, B_2, L_2) , (H_3, B_3, L_3) измерены расстояния до некоторой точки C , плановые координаты B_C, L_C и высота H_C которой неизвестны.

Длины сторон плоского треугольника 1—2—3 можно вывести по формулам (II.2.3) или (II.2.4), геодезические азимуты этих сторон — по формуле (II.3.12), геодезические зенитные расстояния — по формуле (II.2.20), направляющие косинусы упомянутых сторон — по формулам (II.2.18).

Из треугольников 1—2— C и 1—3— C нетрудно выразить косинусы углов между направлениями с пункта 1 на пункты 2 и C и с того же пункта на пункты 3 и C :

$$\cos \angle 2-1-C = \frac{s_{1-2}^2 + s_{1-C}^2 - s_{2-C}^2}{2s_{1-C} s_{1-2}}, \quad \cos \angle 3-1-C = \frac{s_{1-3}^2 + s_{1-C}^2 - s_{3-C}^2}{2s_{1-C} s_{1-3}}. \quad (\text{II.4.1})$$

Эти же косинусы можно выразить так:

$$\left. \begin{aligned} \cos \angle 2-1-C &= l_{1-2} l_{1-C} + m_{1-2} m_{1-C} + n_{1-2} n_{1-C} \\ \cos \angle 3-1-C &= l_{1-3} l_{1-C} + m_{1-3} m_{1-C} + n_{1-3} n_{1-C} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.4.2})$$

Поскольку

$$l_{1-C}^2 + m_{1-C}^2 + n_{1-C}^2 = 1,$$

получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными l_{1-C} , m_{1-C} , n_{1-C} , которую можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} l_{1-2} l_{1-C} + m_{1-2} m_{1-C} &= \cos \angle 2-1-C - n_{1-2} n_{1-C} \\ l_{1-3} l_{1-C} + m_{1-3} m_{1-C} &= \cos \angle 3-1-C - n_{1-3} n_{1-C} \\ l_{1-C}^2 + m_{1-C}^2 &= 1 - n_{1-C}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.4.3})$$

Решая первые два уравнения относительно неизвестных l_{1-C} и m_{1-C} , найдем

$$l_{1-C} = \frac{(\cos \angle 2-1-C - n_{1-2} n_{1-C}) m_{1-3} - (\cos \angle 3-1-C - n_{1-3} n_{1-C}) m_{1-2}}{l_{1-2} m_{1-3} - l_{1-3} m_{1-2}}; \quad (\text{II.4.4})$$

$$m_{1-C} = \frac{(\cos \angle 3-1-C - n_{1-3} n_{1-C}) l_{1-2} - (\cos \angle 2-1-C - n_{1-2} n_{1-C}) l_{1-3}}{l_{1-2} m_{1-3} - l_{1-3} m_{1-2}}. \quad (\text{II.4.5})$$

Подставив выражения, полученные для l_{1-C} и m_{1-C} , в третье уравнение системы (II.4.3), найдем квадратное уравнение относительно неизвестного n_{1-C} . После простых, но трудоемких преобразований это квадратное уравнение примет такой вид:

$$\begin{aligned} n_{1-C}^2 &[(l_{1-2} m_{1-3} - l_{1-3} m_{1-2})^2 + (m_{1-2} n_{1-3} - m_{1-3} n_{1-2})^2 + (l_{1-2} n_{1-3} - l_{1-3} n_{1-2})^2] + \\ &+ 2n_{1-C} [(m_{1-2} n_{1-3} - m_{1-3} n_{1-2})(m_{1-3} \cos \angle 2-1-C - m_{1-2} \cos \angle 3-1-C) + \\ &+ (l_{1-2} n_{1-3} - l_{1-3} n_{1-2})(l_{1-3} \cos \angle 2-1-C - l_{1-2} \cos \angle 3-1-C)] + \\ &+ [(m_{1-3} \cos \angle 2-1-C - m_{1-2} \cos \angle 3-1-C)^2 + (l_{1-3} \cos \angle 2-1-C - \\ &- l_{1-2} \cos \angle 3-1-C)^2 - (l_{1-2} m_{1-3} - l_{1-3} m_{1-2})^2] = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.4.6})$$

или

$$an_{1-C}^2 + 2bn_{1-C} + c = 0,$$

откуда

$$n_{1-C} = \frac{1}{a} (-b \pm \sqrt{b^2 - ac}). \quad (\text{II.4.7})$$

Оба полученных значения для n_{1-C} действительны, но одно из них лишнее, так как задача имеет два решения. Второе решение дает как бы зеркальное отображение фигуры 1—2—3— C . Подставив n_{1-C} в формулы (II.4.4) и (II.4.5), определим l_{1-C} и m_{1-C} .

Геодезические координаты определяемой точки C можно вычислить по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} B_C &= \frac{z_1 + s_{1-C} n_{1-C} + N_C e^2 \sin B_C}{\sqrt{(x_1 + s_{1-C} l_{1-C})^2 + (y_1 + s_{1-C} m_{1-C})^2}} \\ \operatorname{tg} L_C &= \frac{y_1 + s_{1-C} m_{1-C}}{x_1 + s_{1-C} l_{1-C}} \\ N_C + H_C &= \frac{x_1 + s_{1-C} l_{1-C}}{\cos B_C \cos L_C} = \frac{y_1 + s_{1-C} m_{1-C}}{\cos B_C \sin L_C} = \frac{z_1 + s_{1-C} n_{1-C} + N_C e^2 \sin B_C}{\sin B_C} \end{aligned} \right\} \text{ (II.4.8)}$$

При вычислении широты B_C придется прибегнуть к последовательным приближениям, сначала пренебрегая членом с e^2 , затем постепенно уточняя этот член. Быстро сходящиеся ряды для перехода от декартовых координат к геодезическим вывел Пик (1966). В таблицах он привел коэффициенты этих рядов для эллипсоидов Красовского и Хейфорда. В статье Пика приведена библиография по этому вопросу (см. также у Бенчини, 1968).

Другое решение этой задачи описано Риннером (1958, 1962), который исследовал точность результатов при фигурах разного вида и описал способ уравнивательных вычислений.

Приближенные формулы при длинах сторон менее 15 км даны Юршанским (1958) и Градилеком (1958).

§ 5. Уравнивательные вычисления в пространственных сетях и тригонометрическом нивелировании

Если число измерений вместе с исходными данными и твердыми значениями превышает указанные выше числа, зависящие от условий развития сети, необходимы уравнивательные вычисления.

В тригонометрическом нивелировании и в общем случае пространственной сети наиболее просты и рациональны уравнивательные вычисления по способу косвенных измерений. Если геодезические координаты, высоты, астрономические координаты точек сети каким-либо образом вычислены на основе выполненных угловых и линейных измерений, то, отбросив избыточные результаты и как-то фиксируя перечисленные величины, нужно вычислить соответствующие фиксированным значениям и выполненным измерениям астрономические зенитные расстояния, горизонтальные углы и длины линий.

Коэффициенты, характеризующие рефракцию, также можно предварительно фиксировать и учесть при выводе уравнений поправок. Из сравнения результатов таких вычислений и непосредственно измеренных величин можно найти поправки в предварительно фиксированные значения, используя правила способа наименьших квадратов. Для упомянутого сравнения необходимы дифференциальные формулы изменения расстояний между точками, горизонтальных углов и зенитных расстояний в зависимости от изменения геодезических координат конечных точек отрезков, астрономических широт и долгот точек, в которых измерены горизонтальные углы и зенитные расстояния.

Выведем дифференциальную формулу астрономического зенитного расстояния. Получим сначала вспомогательную дифференциальную формулу геодезического зенитного расстояния. Поскольку геодезическое зенитное расстояние направления отрезка с точки 1 на точку 2 зависит только от разности долгот точек и не зависит от долготы точки 1, при выводе будем исходить из формулы (II.2.19), положив $L_1=0$, т. е.

$$\cos z_{1-2} = l_{1-2} \cos B_1 + n_{1-2} \sin B_1 \quad \text{(II.5.1)}$$

или

$$s_{1-2} \cos z_{1-2} = (x_2 - x_1) \cos B_1 + (z_2 - z_1) \sin B_1.$$

Дифференцируя эту формулу, найдем

$$\begin{aligned} s_{1-2} \sin z_{1-2} dz_{1-2} &= \cos z_{1-2} ds_{1-2} + [(x_2 - x_1) \sin B_1 - (z_2 - z_1) \cos B_1] dB_1 + \\ &+ (dx_1 - dx_2) \cos B_1 + (dz_1 - dz_2) \sin B_1. \end{aligned} \quad \text{(II.5.2)}$$

Дифференциал ds_{1-2} определим с помощью формул (II.2.9).

Продифференцировав их, находим

$$\left. \begin{aligned} s_{1-2} dl_{1-2} + l_{1-2} ds_{1-2} &= dx_2 - dx_1 \\ s_{1-2} dm_{1-2} + m_{1-2} ds_{1-2} &= dy_2 - dy_1 \\ s_{1-2} dn_{1-2} + n_{1-2} ds_{1-2} &= dz_2 - dz_1 \end{aligned} \right\} \text{ (II.5.3)}$$

Здесь, как в общем случае, мы считаем $L_1 \neq 0$. Умножив первое из этих уравнений на l_{1-2} , второе — на m_{1-2} , третье — на n_{1-2} и сложив, получим

$$ds_{1-2} = (dx_2 - dx_1) l_{1-2} + (dy_2 - dy_1) m_{1-2} + (dz_2 - dz_1) n_{1-2} \quad (\text{II.5.4})$$

или

$$ds_{1-2} = -(l_{1-2} dx_1 + l_{2-1} dx_2) - (m_{1-2} dy_1 + m_{2-1} dy_2) - (n_{1-2} dz_1 + n_{2-1} dz_2). \quad (\text{II.5.5})$$

Как известно (Молоденский, 1954),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= -(M+H) \sin B \cos L, & \frac{\partial x}{\partial L} &= -(N+H) \cos B \sin L, & \frac{\partial x}{\partial H} &= \cos B \cos L \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -(M+H) \sin B \sin L, & \frac{\partial y}{\partial L} &= (N+H) \cos B \cos L, & \frac{\partial y}{\partial H} &= \cos B \sin L \\ \frac{\partial z}{\partial B} &= (M+H) \cos B, & \frac{\partial z}{\partial L} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial H} &= \sin B \end{aligned} \right\}, \quad (\text{II.5.6})$$

поэтому, учитывая (II.2.18), после простых преобразований и упрощений, найдем

$$\begin{aligned} -ds_{1-2} &= (M_1 + H_1) \cos A_{1-2} \sin z_{1-2} dB_1 + (M_2 + H_2) \cos A_{2-1} \sin z_{2-1} dB_2 + \\ &+ (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin A_{1-2} \sin z_{1-2} dL_1 + (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin A_{2-1} \sin z_{2-1} dL_2 + \\ &+ \cos z_{1-2} dH_1 + \cos z_{2-1} dH_2, \end{aligned} \quad (\text{II.5.7})$$

где M — радиус кривизны сечения отсчетного эллипсоида меридиональной плоскостью. Эта дифференциальная формула длины отрезка выведена другим путем Хотиним (1957), впервые составившим уравнения поправок для уравнивания пространственной сети по способу косвенных измерений*. Еще один вариант вывода формулы (II.5.7) предложил Вольф (1962).

Подставив (II.5.7) в (II.5.2), воспользовавшись (I.1), (II.5.6) и соотношением Хотина (1957)

$$(N_1 + H_1) \cos B_1 \sin A_{1-2} \sin z_{1-2} = -(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin A_{2-1} \sin z_{2-1} = \text{const}, \quad (\text{II.5.8})$$

справедливым для произвольных точек отрезка и его продолжения, найдем, освободившись от условия $L_1 = 0$,

$$\begin{aligned} s_{1-2} \sin z_{1-2} dz_{1-2} &= [(N_2 + H_2) \sin B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1) - (N_2 + H_2) \cos B_1 \sin B_2 + \\ &+ e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \cos B_1 - (M_1 + H_1) \cos A_{1-2} \sin z_{1-2} \cos z_{1-2}] dB_1 - \\ &- [(M_2 + H_2) (\sin B_1 \cos B_2 - \cos B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) + \cos A_{2-1} \cos z_{1-2} \sin z_{2-1})] dB_2 + \\ &+ [(N_2 + H_2) (\cos B_1 \cos B_2 \sin(L_2 - L_1) - \cos B_2 \sin A_{2-1} \cos z_{1-2} \sin z_{2-1})] (dL_2 - dL_1) - \\ &- [\sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1) + \cos z_{1-2} \cos z_{2-1}] dH_2 + \\ &+ \sin^2 z_{1-2} dH_1. \end{aligned} \quad (\text{II.5.9})$$

Из формул (II.1.12) и (II.2.29) следует

$$d\beta_{1-2} = dz_{1-2} + \cos A_{1-2} (dB_1 - d\varphi_1) + \cos B_1 \sin A_{1-2} (dL_1 - d\lambda_1). \quad (\text{II.5.10})$$

Используя формулы (II.2.2) и (II.2.18), из (II.5.9) и (II.5.10) теперь можно вывести (влияние рефракции не учтено)

$$\begin{aligned} d\beta_{1-2} &= -\frac{M_1 + H_1}{s_{1-2}} \cos A_{1-2} \cos z_{1-2} dB_1 - \frac{N_1 + H_1}{s_{1-2}} \cos B_1 \sin A_{1-2} \cos z_{1-2} dL_1 + \\ &+ \frac{\sin z_{1-2}}{s_{1-2}} dH_1 + \frac{M_2 + H_2}{s_{1-2} \sin z_{1-2}} [\cos B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) - \sin B_1 \cos B_2 - \\ &- \cos A_{2-1} \cos z_{1-2} \sin z_{2-1}] dB_2 + \frac{N_2 + H_2}{s_{1-2} \sin z_{1-2}} \cos B_2 [\cos B_1 \sin(L_2 - L_1) - \\ &- \sin A_{2-1} \cos z_{1-2} \sin z_{2-1}] dL_2 - \frac{1}{s_{1-2} \sin z_{1-2}} [\cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1) + \\ &+ \sin B_1 \sin B_2 + \cos z_{1-2} \cos z_{2-1}] dH_2 - \cos A_{1-2} d\varphi_1 - \cos B_1 \sin A_{1-2} d\lambda_1. \end{aligned} \quad (\text{II.5.11})$$

* В рукописной записи Хотина (1957) знак ctg прочитан авторами как \cos . Дифференциальная формула Хотина для зенитного расстояния согласуется с формулой авторов, полученной другим путем, а не отличается от нее, как неверно отмечено в нашей статье (1966) из-за указанного недоразумения.

Эту дифференциальную формулу опубликовал Вольф (1963). Хотин (1957) записал соответствующее уравнение поправок так:

$$\beta_{1-2} - (z_{1-2})_0 = dz_{1-2} - \xi_1 \cos A_{1-2} - \eta_1 \sin A_{1-2}, \quad (\text{II.5.12})$$

где $(z_{1-2})_0$ — предварительное значение геодезического зенитного расстояния, вычисляемого по предварительно фиксированным геодезическим координатам.

Дифференциальную формулу астрономического азимута перепишем из работы авторов (1966) без вывода

$$\begin{aligned} d\alpha_{1-2} = & \frac{M_1 + H_1}{s_{1-2} \sin z_{1-2}} \sin A_{1-2} dB_1 - \frac{N_1 + H_1}{s_{1-2} \sin z_{1-2}} \cos B_1 \cos A_{1-2} dL_1 - \\ & - \frac{M_2 + H_2}{s_{1-2} \sin z_{1-2}} [\sin B_1 \sin B_2 \sin A_{1-2} \cos(L_2 - L_1) + \sin B_2 \cos A_{1-2} \sin(L_2 - L_1) + \\ & + \cos B_1 \cos B_2 \sin A_{1-2}] dB_2 - \frac{N_2 + H_2}{s_{1-2} \sin z_{1-2}} \cos B_2 [\sin B_1 \sin A_{1-2} \sin(L_2 - L_1) - \\ & - \cos(L_2 - L_1) \cos A_{1-2}] dL_2 - \frac{e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)}{s_{1-2}^2 \sin^2 z_{1-2}} \cos B_1 \cos B_2 \sin(L_2 - L_1) dH_2 + \\ & + \sin A_{1-2} \operatorname{ctg} z_{1-2} d\varphi_1 + (\sin B_1 - \cos B_1 \cos A_{1-2} \operatorname{ctg} z_{1-2}) d\lambda_1. \end{aligned} \quad (\text{II.5.13})$$

Более ранний, данный Вольфом (1963), вывод этой формулы содержит неточности. Разность уравнений (II.5.13), составленных для двух направлений на одном пункте наблюдения, может служить уравнением поправки горизонтального угла.

Уравнение поправки астрономического азимута Хотин (1957) записал так:

$$\alpha_{1-2} - (A_{1-2})_0 = dA_{1-2} + \xi_1 \sin A_{1-2} \operatorname{ctg} z_{1-2} + \eta_1 (\operatorname{tg} B_1 - \cos A_{1-2} \operatorname{ctg} z_{1-2}), \quad (\text{II.5.14})$$

где $(A_{1-2})_0$ — предварительное значение геодезического азимута.

Для дифференциала dA_{1-2} геодезического азимута в работе 1966 г. мы получили

$$\begin{aligned} dA_{1-2} = & \frac{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin(L_2 - L_1)}{s_{1-2} \sin^2 z_{1-2}} \left(\cos z_{1-2} + \frac{M_1 + H_1}{s_{1-2}} \right) dB_1 + \\ & + \frac{(N_2 + H_2) \cos B_2}{s_{1-2}^2 \sin^2 z_{1-2}} [(N_2 + H_2) \sin B_1 \cos B_2 - (N_2 + H_2) \cos B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) + \\ & + e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \cos B_1 \cos(L_2 - L_1)] (dL_1 - dL_2) - \\ & - \frac{(M_2 + H_2) \cos B_1 \sin(L_2 - L_1)}{s_{1-2}^2 \sin^2 z_{1-2}} [(N_2 + H_2) - e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \sin B_2] dB_2 - \\ & - \frac{e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)}{s_{1-2}^2 \sin^2 z_{1-2}} \cos B_1 \cos B_2 \sin(L_2 - L_1) dH_2. \end{aligned} \quad (\text{II.5.15})$$

Дифференциальные формулы проверены на числовом примере (Юркина, Карачанская, Старостина, 1966).

В общем случае записи уравнений поправок зенитных расстояний в виде (II.5.12) и уравнений поправок горизонтальных углов на основе (II.5.14) будут соответствовать большие по абсолютной величине свободные члены и поправки, чем уравнениями поправок (II.5.11) и полученным на основе (II.5.13).

Следуя многим курсам уравнительных вычислений по способу наименьших квадратов и полагая, что выводимые из уравнения поправки должны быть объяснены только ошибками измерений, в своей работе 1966 г. мы критиковали предложения Хотина (1957) составлять уравнения поправок по формулам (II.5.12) и (II.5.14). Однако числовой пример уравнительных вычислений в пространственном треугольнике показал, что окончательные результаты при использовании формул (II.5.11), (II.5.13) или (II.5.12), (II.5.14) могут оказаться одинаковыми, хотя уравнения Хотина требуют большей относительной точности вычислений. Возражая на нашу критику (см. также Вольф, 1968), в новой заметке Хотин (1967) заботится об уменьшении свободных членов. Требования к точности предварительных значений рассмотрены Гринбергом (1967). Он пришел к выводу, что искажения, вызванные неучетом нелинейности уравнений поправок, в плоских геодезических сетях могут иногда быть соизмеримыми с искажениями от ошибок измерений. Ранее Гельмерт (1907, стр. 171) рекомендовал предварительные значения неизвестных вычислять настолько точно, чтобы поправки из уравнения были минимальными. Результаты Хотина можно также найти в его книге 1969 г.

Обычно результаты вывода плановых координат и результаты вывода высот уравнивают порознь, следуя предложению Брунса (1878).

В дифференциальные уравнения для азимутов поправки высоты входят с малым коэффициентом; этот коэффициент обращается в нуль при сферической отсчетной поверхности.

В уравнения поправок типа (II.5.7) для длин линий поправки высот входят с малыми коэффициентами, если зенитные расстояния близки к 90° . При таких зенитных расстояниях исключаются поправки $d\varphi_1$, $d\lambda_1$ или составляющие ξ_1 , η_1 уклонений отвеса из уравнений поправок для горизонтальных углов (члены $\sin B_1 d\lambda_1$ или $\eta_1 \operatorname{tg} B_1$ исключаются в разности уравнений типа (II.5.13) или (II.5.14), составленных для двух направлений в одной точке наблюдения).

В этом же случае малого отличия зенитных расстояний от 90° неточности плановых координат мало влияют на разности высот [формула (II.3.9)]. Поэтому оправдано решение уравнений типа (II.5.11) или (II.5.12) отдельно от уравнений поправок длин линий и горизонтальных углов при значениях β , близких к 90° . Однако, как уже отмечено выше, определение высот из тригонометрического нивелирования или пространственных сетей наиболее пригодно в горных районах, где зенитные расстояния могут быть весьма отличны от 90° . Раздельное решение уравнений поправок неизбежно несет в себе в горных районах искажения систематического характера как высот пунктов и уклонений отвеса, так и плановых координат. На успех последовательных приближений рассчитывать трудно, если каждое из приближений связано с уравнительными вычислениями, так как при таких вычислениях ошибки (тем более систематического характера) перераспределяются сложным и неизвестным образом. Процесс последовательных приближений в этом случае может не оказаться сходящимся.

Некоторые из условий, возникающие в пространственной сети, аналогичны условиям в плоской сети. А именно, в пространственной сети так же, как в плоской, следует удовлетворить: 1) условия, возникающие в точках измерения горизонтальных углов (условия станции и горизонта), 2) боковые условия, возникающие в сетях с диагоналями, 3) условие равенства суммы уравниваемых значений плоских углов каждой фигуры геометрической сумме углов этой фигуры.

Твердые значения геодезических, астрономических координат, астрономических азимутов и сторон (их длины и направления) должны быть равны выводимым из сети значениям.

Вывод перечисленных условных уравнений в сети с измеренными вертикальными и горизонтальными углами или направлениями при одном базисе, задающем масштаб, рассмотрел Филиппов (1967, 1968). Условные уравнения в сети с измеренными сторонами и зенитными расстояниями рассмотрены Филипповым (1969).

В пространственной сети возникают еще дополнительные, особые условия. Избыточные измерения нужно уравнивать так, чтобы для направляющих косинусов обоих направлений отрезка между точками i и j были удовлетворены уравнения

$$\left. \begin{aligned} l_{i-j} &= -l_{j-i} \\ m_{i-j} &= -m_{j-i} \\ n_{i-j} &= -n_{j-i} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.5.16})$$

Поскольку

$$\left. \begin{aligned} l_{i-j}^2 + m_{i-j}^2 + n_{i-j}^2 &= 1, \\ l_{j-i}^2 + m_{j-i}^2 + n_{j-i}^2 &= 1, \end{aligned} \right\}$$

уравнения (II.5.16) выражают одно условие.

Ко второму виду дополнительных условий приводит требование, чтобы все фигуры сети были замкнутыми. А именно, для каждого треугольника 1—2—3 должно быть

$$x_3 = x_1 + s_{1-3} l_{1-3} = x_2 + s_{2-3} l_{2-3}, \quad (\text{II.5.17})$$

$$y_3 = y_1 + s_{1-3} m_{1-3} = y_2 + s_{2-3} m_{2-3}, \quad (\text{II.5.18})$$

$$z_3 = z_1 + s_{1-3} n_{1-3} = z_2 + s_{2-3} n_{2-3}. \quad (\text{II.5.19})$$

Исключив из этих шести уравнений координаты x_3 , y_3 , z_3 , получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= s_{1-3} l_{1-3} - s_{2-3} l_{2-3} \\ y_2 - y_1 &= s_{1-3} m_{1-3} - s_{2-3} m_{2-3} \\ z_2 - z_1 &= s_{1-3} n_{1-3} - s_{2-3} n_{2-3} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.5.20})$$

Решив первые два уравнения относительно s_{1-3} и s_{2-3} , найдем

$$\left. \begin{aligned} s_{1-3} &= \frac{(x_2 - x_1) m_{2-3} - (y_2 - y_1) l_{2-3}}{l_{1-3} m_{2-3} - l_{2-3} m_{1-3}} \\ s_{2-3} &= \frac{(x_2 - x_1) m_{1-3} - (y_2 - y_1) l_{1-3}}{l_{1-3} m_{2-3} - l_{2-3} m_{1-3}} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.5.21})$$

Подставив эти выражения в третье уравнение (II.5.20), получим зависимость между направляющими косинусами

$$l_{1-2}(m_{1-3}n_{2-3} - m_{2-3}n_{1-3}) + m_{1-2}(l_{2-3}n_{1-3} - l_{1-3}n_{2-3}) + n_{1-2}(l_{1-3}m_{2-3} - l_{2-3}m_{1-3}) = 0, \quad (\text{II.5.22})$$

которая должна быть удовлетворена при уравнивании, хотя бы одна из вершин была определена только прямой засечкой. Оба последних вида условных уравнений в приближенной форме при длинах сторон до 15 км и точности вывода высот около 1 см развернуты Градилеком для случая измерения только вертикальных углов и для случая измерений сторон, горизонтальных и вертикальных углов в пространственном треугольнике (1958, 1960, 1968).

Условные уравнения возникнут также из требования, чтобы все возможные пути передачи приводили к одинаковым значениям соответственно не только координат H , B , L , но также направлений отвеса и коэффициента рефракции.

Рудский (1966) ввел условие угла между взаимными нормальными плоскостями, проходящими через общую сторону примыкающих друг к другу треугольников. Значение этого угла, вычисляемого по уравниваемым элементам одного и другого треугольника, должно оказаться одним и тем же. Это условие раскрыто Филипповым (1968). Условие Рудского будет удовлетворено, если удовлетворены перечисленные выше условия.

Некоторые из других перечисленных нами условий также могут оказаться следствиями остальных.

Даже если плановые координаты считать известными, уравнильные вычисления методом условных наблюдений по правилам способа наименьших квадратов весьма трудны.

Для случая тригонометрического нивелирования Градилек предлагает приближенные упрощенные приемы, поскольку погрешности из-за неправильного влияния рефракции не имеют нормального распределения.

Кабелач (1969) предлагает считать непосредственно измеренными величинами длины линий и плоские углы треугольников. Он рассмотрел условные уравнения в этом случае.

Приближенные упрощенные приемы рассматривали также Конопальцев (1959), Глейнзвик (1960), Альберда (1961) и многие другие.

§ 6. Некоторые особенности построения пространственных сетей

Как отмечено выше, Градилек (1958—1969), используя результаты предшественников по исследованию и повышению точности тригонометрического нивелирования, разработал практический метод создания пространственной сети в высокогорных районах, где геометрическое нивелирование выполнять трудно. Свои предложения Градилек отработал на примере высотных сетей в западной части Высоких Татр.

Из работ предшественников Градилека нужно указать несколько.

В 1950 г. швейцарские геодезисты измерили зенитные расстояния направлений между точками меридионального Сен-Готардского профиля астрономического нивелирования. Вертикальные углы измерены в самой высокой части этого профиля на участке длиной 26,4 км; высоты пунктов изменяются от 1020 до 2780 м. Инструментальная точность измерения вертикального угла оценена в $0''{,}5$ (Кобольд, 1955). На 12 пунктах выведены меридиональные составляющие астрономо-геодезических уклонений отвеса из результатов измерения вертикальных углов (Глейнзвик, 1960). Коэффициент рефракции был принят постоянным и равным 0,1049. Эти выводы сравнены с меридиональными составляющими, полученными как разности астрономических и геодезических широт и проинтерполированными между такими значениями с помощью промежуточного выделения влияния топографических масс (Кобольд, 1957). Эталонные значения изменяются на участке профиля от $-19,0$ до $+7''{,}0$; разности составляющих, выведенных по вертикальным углам, и эталонных, изменяются от $-3,0$ до $+2''{,}4$ при средней квадратической величине $\pm 1''{,}9$.

Анализ точности тригонометрического нивелирования в горах выполнен Пеллиеном (1956).

В 1953—1964 гг. швейцарские геодезисты продолжали работы по тригонометрическому нивелированию в Швейцарских Альпах (Кобольд и Вундерлин, 1967; Вундерлин, 1967). Теперь сеть распространена на площадь около 1000 км². Она состоит из 69 пунктов. Зенитные расстояния примерно 200 сторон длиной не более 28 км и, как правило, менее 10 км измерены в обоих направлениях, зенитные расстояния 24 сторон — в одном направлении, астрономические наблюдения широт, долгот и азимутов выполнены на 28 пунктах, большинство которых имеет высоты от 2000 до 3000 м. Из уравнительных вычислений по вертикальным углам выведены составляющие ξ и η уклонений отвеса и высоты H над отсчетным эллипсоидом со средними квадратическими ошибками $\pm 2''$ и $\pm 2,5$ см соответственно.

Из уравнительных вычислений получена точность вертикального угла $\pm 1''{,}7$. Измерения вертикальных углов начинали не раньше 9 ч утра и заканчивали их не

позднее 16 ч дня. Коэффициент рефракции принят постоянным в отдельных частях этой сети.

В 1951 г. с 14 по 25 августа Хофман (1955) выполнил наблюдения сети тригонометрического нивелирования в долине Изара на площади в 60 км^2 с высотами пунктов от 785 до 1736 м. Зенитные расстояния 22 сторон измерены в прямом и обратном направлениях, зенитное расстояние одной стороны из-за неблагоприятных условий погоды удалось измерить только в одном направлении. Максимальная длина стороны равна 12 км. Измерительная точность вертикальных углов (каждый угол измерен 18 раз) оценена в $0''{,}5$. При выводе высот над эллипсоидом с точностью, близкой к $\pm 1 \text{ см}$ (такая цель была поставлена и достигнута Хофманом), влияние такой ошибки измерения вертикальных углов оказалось вторым по величине после влияния вертикальной рефракции. При стороне $s=2 \text{ км}$ эта ошибка вызывает ошибку высоты $\pm 0{,}5 \text{ см}$ и, влияя пропорционально длине стороны, при $s=10 \text{ км}$ вызывает ошибку высоты $\pm 2{,}4 \text{ см}$. Поэтому влияния всех остальных ошибок Хофман стремился ограничить 1 мм. В частности, плановые координаты из специальной триангуляции выведены с точностью $\pm 1{,}6 \text{ см}$. Почти все направления проходят высоко над грунтом, для коэффициента рефракции получено неожиданно большое значение $0{,}2012 \pm 0{,}0032$. Наблюдения вертикальных углов выполнены с 10 до 14 ч дня. Направления, более близкие к земной поверхности, наблюдали с обеих сторон одновременно. Сравнение показало, что разности высот, выведенные из одновременных наблюдений, отличаются от выведенных из неодновременных наблюдений не более, чем на точность тригонометрического нивелирования. Автор считает одновременность наблюдений ненужной, если погода устойчива.

В части сети наблюдения повторены 12—13 июня 1952 г. Средние значения коэффициента рефракции в этой части сети изменились с 0,1870 до 0,1423. Соответствующая разность высот оказалась меньше 0,9 см.

Уклонения отвеса учтены при обработке сети в разных вариантах. В одном из пунктов составляющие уклонения отвеса приняты равными нулю и в остальных пунктах выведены по вертикальным углам с точностью $\pm 1''{,}3$ для меридиональной составляющей и $\pm 0''{,}7$ для составляющей в первом вертикале. Измерения пяти астрономических широт, в общем, подтвердили эти выводы.

Средняя квадратическая ошибка разности высот перед уравниванием оценена Хофманом в $\pm 1{,}2 \text{ см}$.

В указанной работе Глейнвик сообщает об использовании пространственной сети для контрольных измерений плотины. Были измерены горизонтальные и вертикальные углы в 12 треугольниках.

Зенитные расстояния сторон этих треугольников измерены с точностью около $\pm 1''{,}7$ (наибольшая сторона имеет длину 387,2 м, наименьшая — 52,3 м). Коэффициент вертикальной рефракции принят равным 0,12. Составляющие уклонений отвеса, выведенные по вертикальным углам и полученные по контрольным астрономическим определениям, сопоставлены в табл. 1, где приведены также высоты и их ошибки.

Т а б л и ц а 1

№ точки	η_{β}	ξ_{α}	η_{β}	η_{α}	Высоты над эллипсоидом, м	Средние квадратические ошибки высоты, мм
1	+0'' ,6	+0'' ,1	+0'' ,9	+1'' ,5	1398	0,62
2	+1 ,2	-0 ,2	+3 ,2	+4 ,4	1377	0,36
3	+3 ,0		+5 ,5		1449	0,56
4	+1 ,5	+0 ,8	+6 ,4	+4 ,4	1440	0,53
5	+1 ,9	+0 ,8	+5 ,9	+6 ,5	1361	0,68
6	0	0	0	0	1434	0

Влияние вертикальной рефракции на измеренное зенитное расстояние Градилик представлял формулой Райхенедера (1937)

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} k_{ij} \frac{\psi_{ij}}{\sin \beta_{ij}}. \quad (\text{II.6.1})$$

При уравнивании сети тригонометрического нивелирования с большим числом избыточных измерений оказалось возможным определить на каждом пункте сети составляющие уклонений отвеса и значение коэффициента рефракции. Уклонения отвеса влияют на зенитные расстояния в зависимости от азимута направления, коэффициенты k в основном зависят от положения пункта (в долине, на горном пике со снежным покрытием или без него), если визирный луч на всем своем протяжении проходит достаточно высоко над земной поверхностью. Высота визирного луча над почвой, по мнению Градилика, должна быть не меньше 12—15 м. Он вы-

полнял измерения вертикальных углов с сигналов такой высоты или с острых пиков. Малая зависимость влияния рефракции от азимута в подобных условиях установлена ранее в исследованиях Брокса (1939), Изотова и Пеллинина (1955). Измеряя зенитные расстояния направлений с пункта Hoher Sonnblick ($H=3106$ м) главного Альпийского хребта, Брокс обнаружил устойчивость коэффициента рефракции для разных направлений в пределах 0,007.

В уравнении (11.5.11) нужно справа учесть влияние поправки dk_1 некоторого предварительно принятого коэффициента рефракции в пункте 1.

Расстояния между пунктами сети, по мнению Градилека, не должны превышать 12—15 км. Для визирной цели им выбран после нескольких проб цилиндр, окрашенный сверху и снизу черной горизонтальной полосой, в середине — белой полосой. Диаметр цилиндра равен 21—26 см, высота равна 30—40 см.

Ошибка измеренного вертикального угла не превосходила 1"; среднюю ошибку измерений Градилек оценил в $\pm 0,3-0",5$. Он стремился наблюдать в условиях хорошей видимости.

Точность сети тригонометрического нивелирования улучшают равномерно распределенные в ней пункты с известными высотами, например выведенными из геометрического нивелирования. Такие пункты удобнее ставить в долинах. Наиболее благоприятны условия в сети с такими пунктами и сторонами длиной 5—7 км, перемежающимися с более длинными. Длина сторон, связывающих пункты геометрического и тригонометрического нивелирования, не должна превосходить 4 км (как правило, эти стороны имеют большой угол наклона). На краях сети желательны астрономические определения широты и долготы, так как при малой разности азимутов крайних направлений влияние рефракции нельзя отделить от влияния уклонения отвеса. Астрономические наблюдения полезны также в долинных пунктах.

Вспомогательные величины Градилек выводил с такой точностью, чтобы не вызвать искажений зенитных расстояний больше $0",1$. Влияние ошибки Δs стороны на ошибку Δh превышения возрастает с уменьшением зенитного расстояния: при ошибке Δh превышения в $\pm 0,5$ см и $\beta=85^\circ$ ошибку Δs стороны Градилек допускал в ± 5 см, при $\beta=45^\circ$, по его мнению, необходима точность $\Delta s \leq \pm 0,5$ см. При $d\beta = \pm 0",1$ и $s=10$ км должно быть $dk = \pm 0,0006$.

Если зенитные расстояния значительно отличаются от 90° , центрировку инструментов и вывод эксцентриситета тригонометрических знаков необходимо выполнять с особой тщательностью. Длины сторон с большими наклонами при этом полезно вывести из дальномерных измерений. При точности дальномерных измерений $1:5 \times 10^5$ и наклонах 16° , как указывает Градилек и нетрудно проверить по дифференциальным формулам, высоту можно передать точнее, чем измеряя вертикальный угол с ошибкой $1",3$. Поскольку ошибки длин сторон и измерения вертикальных углов влияют особенно неблагоприятно при передачах высот от долинных пунктов на вершины, такие передачи при углах наклона больше 10° Градилек советует делать дальномерными измерениями. Точность дальномерных передач высоты возрастает с увеличением угла наклона.

В созданной для изучения движений земной коры сети из 15 пунктов общей протяженностью ~ 30 км с высотами от 760 до 2180 м при 57 визированиях, с тремя высотами, определенными геометрическим нивелированием на краях сети, Градилек получил высоты пунктов с точностью $\pm 1-3$ см. Эта точность установлена из сравнения с контрольными высотами, выведенными из геометрического нивелирования. Указанную сеть Градилек наблюдал и обрабатывал несколько раз в 1958—1962 гг. По сравнению с результатами первого года наблюдений, которые охарактеризованы как предвзятые, коэффициенты k рефракции в 1959 г. изменились на величины до 0,05. Значения вертикальных углов, измеренных при разных условиях наблюдений, отличались даже на $9"$. Достигающие $10"$ компоненты уклонения отвеса изменились не более чем на $1"$, высоты семи пунктов изменились в среднем на $4,3$ см (после исключения одного пункта, в котором высота изменилась на 13 см, среднее изменение высот составило 3 см. Это сравнительно большое изменение высоты Градилек объясняет неблагоприятными условиями визирования в 1958 г. Контрольные дальномерные измерения подтвердили точность тригонометрического нивелирования 1958—1959 гг., близкую к ± 2 см.

Разности между измеренными и вычисленными астрономическими широтами в шести пунктах в среднем составили $3"$.

Градилек полагает, что нет необходимости ограничивать период наблюдений вертикальных углов периодом минимума рефракции, наблюдения возможно производить даже рано утром, вечером или ночью, лишь бы условие равного влияния рефракции по всем визирным лучам пункта наблюдения выполнялось наилучшим образом.

В 1961—1962 гг. Градилек повторил наблюдения в части этой пространственной сети. Измеренные четыре стороны, 19 горизонтальных направлений и 27 вертикальных углов уравнены методом косвенных измерений в декартовых координатах (система уравнений содержала 23 неизвестных). Точность измерений соответственно: $1: \pm 4 \cdot 10^5$; $\pm 1",2$; $\pm 1"$. Этим измерениям приданы веса 1,6; 1; 0,5. В число неизвестных входили шесть коэффициентов рефракции, два компонента уклонения отвеса в одной точке (в остальных пяти точках компоненты уклонений отвеса были выве-

дены по астрономическим наблюдениям) и 15 координат. В этой части сети были лишь короткие стороны, и отделить влияние рефракции на вертикальные углы от влияния уклонений отвеса Градилеку не удалось.

Выведенные из уравнивания коэффициенты рефракции и их ошибки имеют значения: $0,159 \pm 0,036$; $0,114 \pm 0,027$; $0,127 \pm 0,027$; $0,090 \pm 0,024$; $0,177 \pm 0,150$; $0,144 \pm 0,028$. Ошибки высот в среднем оказались близки к $\pm 1,5$ см, плановых координат — к $\pm 1,0$ см.

При длинах сторон пространственной сети 2—3 км Градилек (1969) считает возможным выводить плановые координаты и высоты с точностью 1—1,5 см, при сторонах 5—6 км — с точностью 2—3 см.

Описанные работы Градилека, по его мнению, подтвердили правильность соображений о нецелесообразности устанавливать для всей сети некоторое постоянное значение коэффициента рефракции. Коэффициенты рефракции на пунктах со снежным покровом и на пунктах, расположенных в долинах, отличались на 50—60% от коэффициентов на остальных пунктах. На пунктах со сходными условиями коэффициенты рефракции иногда отличались на 0,02.

Таким образом, даже в высоких горах ошибки, связанные с вертикальной рефракцией, значительно превосходят все другие ошибки.

Градилек (1969) повторил уравнивательные вычисления швейцарской пространственной сети, определив коэффициент рефракции для каждого пункта. Это привело к заметному уменьшению средней квадратической ошибки вертикального угла после уравнивания, а именно, для двух частей швейцарской сети при постоянном коэффициенте рефракции такая ошибка оказалась равной $\pm 1'',7$ и $\pm 2'',2$, при различных коэффициентах: $\pm 1'',2$ и $\pm 1'',3$ соответственно, средняя квадратическая ошибка измерения вертикальных углов в швейцарской сети оценена в $\pm 0'',3$.

III. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ

§ 7. Общий принцип определения высоты над отсчетным эллипсоидом из геометрического и астрономического нивелирования.

Теоретическая невязка полигона геометрического нивелирования

При геометрическом нивелировании, как известно, нивелир должен быть установлен таким образом, чтобы его визирная ось совпала с касательной к уровенной поверхности $w = \text{const}$ земного гравитационного поля и, следовательно, была бы перпендикулярна направлению силы тяжести. В двух точках земной поверхности вблизи нивелира ставят вертикально рейки. Полученную с одной установки нивелира разность отсчетов по рейкам называют нивелирным превышением. Эту величину будем обозначать через Δh_w . Проекция dl элементарного расстояния между рейками на координатную поверхность $H = \text{const}$ соответствует элементарное нивелирное превышение dh_w .

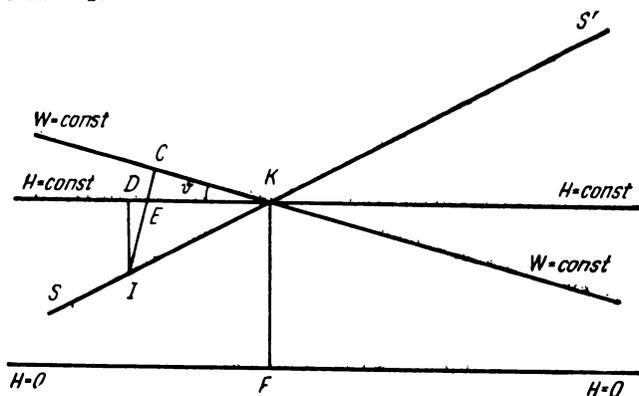


Рис. 4

На рис. 4 показано сечение земной поверхности SS' , уровенной поверхности $w = \text{const}$ земного гравитационного поля, координатной поверхности $H = \text{const}$ и отсчетного эллипсоида ($H = 0$) плоскостью, проходящей через нормаль FK к отсчетному эллипсоиду в некоторой точке K земной поверхности.

Приращение $DI = dH$ высоты H в точке K при смещении

$$DK = dl = (M + H) \cos A dB + (N + H) \cos B \cdot \sin A dL \quad (\text{III.7.1})$$

вдоль сечения координатной поверхности $H = \text{const}$ можно связать с элементарным превышением $CI = dh_w$, выводимым из геометрического нивелирования, и уклонением

$$\vartheta = \xi \cos A + \eta \sin A$$

отвеса в азимуте A относительно нормали FK к отсчетному эллипсоиду. Поскольку

$$\angle EID = \vartheta + \frac{d\vartheta}{dl} dl = \vartheta',$$

$$DI \sec \vartheta' = EI,$$

$$CE = (DK - DE) \sin \vartheta = (DK - DI \tg \vartheta') \sin \vartheta,$$

находим

$$CI = EI + CE = dh_w = \sec \vartheta' dH + (dl - \tg \vartheta' \cdot dH) \sin \vartheta$$

и, пренебрегая членами, содержащими квадраты уклонения отвеса, т. е. допуская относительную ошибку меньше $1 : 9 \cdot 10^6$, получаем

$$\Delta H = \Delta h_w - (\xi \cos A + \eta \sin A) [(M + H) \cos AdB + (N + H) \cos B \sin AdL]. \quad (111.7.2)$$

Таким образом, приращение высот точек земной поверхности над отсчетным эллипсоидом можно получить из результатов геометрического и астрономического нивелирования. Для этого к неисправленному нивелирному превышению нужно добавить поправочный член, учитывающий изменение ориентировки местных координатных систем от станции к станции. Последний член формулы (111.7.2) как корректирующий результаты геометрического нивелирования (путем сведения местных координатных систем к общей ориентировке) охарактеризован Молоденским (1949,

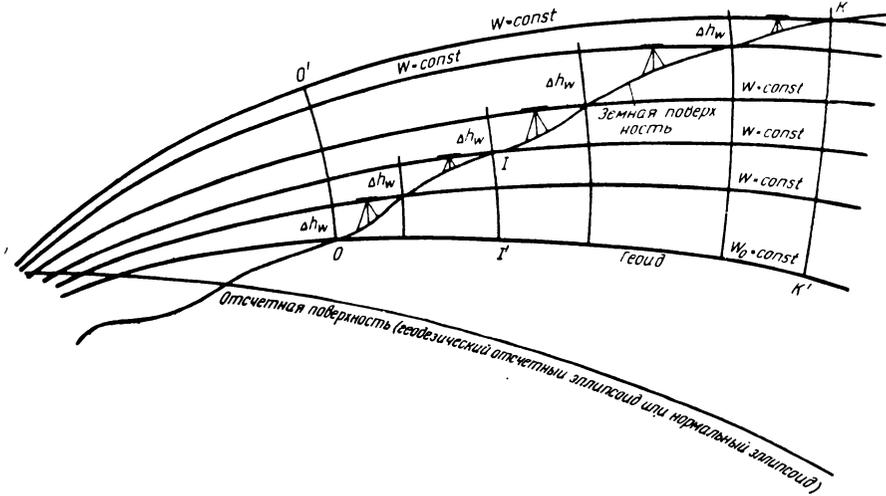


Рис. 5

1950). Формулу (111.7.2) можно рассматривать как обобщение обычной формулы астрономического нивелирования

$$\Delta \zeta_G = - (\xi_G \cos A + \eta_G \sin A) (M \cos AdB + N \sin AdL), \quad (111.7.3)$$

где ξ_G и η_G — составляющие уклонения отвеса на геоиде.

Разность высот над отсчетным эллипсоидом двух пунктов K и I , удаленных один от другого на конечное расстояние, можно выразить так:

$$H(K) - H(I) = \int_{(IK)} dh_w - \int_{(IK)} (\xi \cos A + \eta \sin A) [(M + H) \cos AdB + (N + H) \cos B \sin AdL]. \quad (111.7.4)$$

Оба интеграла следует вычислять по одной и той же ходовой линии, так как каждый из интегралов в отдельности зависит от пути нивелировки. На замкнутом контуре в общем случае каждый из этих интегралов в отдельности может не быть равным нулю. Численное значение первого интеграла в этом случае принято называть теоретической невязкой нивелирного полигона.

Таким образом,

$$\oint dh_w = \oint (\xi \cos A + \eta \sin A) [(M + H) \cos AdB + (N + H) \cos B \sin AdL].$$

Ниже будет получено другое выражение для теоретической невязки полигона геометрического нивелирования, которое будет более удобным для вычислений.

Появление теоретической невязки поясняет рис. 5. На этом рисунке показана земная поверхность, исходный пункт O нивелировки и уровенные поверхности $W = \text{const}$ земного гравитационного поля.

Как известно, сложная форма уровенных поверхностей и их непараллельность вызваны распределением плотности внутри Земли, ее формой и влиянием центробежной силы. Даже если бы земная поверхность была правильной — сфероидальной и слои разной плотности внутри нее были разделены сфероидальными поверхностями, то и в этом случае уровенные поверхности не были бы взаимно параллельными. Угол между ними менялся бы медленно и плавно. Вообразим теперь, что такое правильное (нормальное) строение Земли в каком-либо месте внутри нее (например, вблизи ее поверхности) нарушено, например увеличена плотность массы за счет уменьшения плотности в другом месте. Тогда потенциал земного притяжения должен измениться по величине, а сила тяжести — и по направлению. В этом случае уровенные поверхности должны также изменить свою форму, иначе сила тяжести не была бы к ним

перпендикулярна. Уровенные поверхности поднимутся главным образом над тем местом, где произошло увеличение плотности. Такие смещения уровенных поверхностей будут убывать с увеличением высоты, поэтому изменятся также углы между уровенными поверхностями. Подобные нарушения в распределении плотности встречаются повсюду, и форма уровенных поверхностей сложна.

Пусть в идеальном случае отсутствия рефракции нивелир можно установить так, чтобы отсчет по передней рейке был равен нулю. Тогда отсчет по задней рейке будет равен превышению Δh_w нуля передней рейки над нулем задней. Просуммировав нивелирные превышения Δh_w от исходного пункта O до некоторой точки K земной поверхности, можно получить высоту, часто называемую измеренной. Если же превышения суммировать от точки I до точки K , то будет получена разность измеренных высот. Таким образом, измеренная высота, которую обозначим H_i , определена формулой

$$H_i(K) = \sum_{(OK)} \Delta h_w \quad (\text{III.7.5})$$

или в пределе интегралом

$$H_i(K) = \int_{(OK)} dh_w. \quad (\text{III.7.6})$$

Измеренная высота складывается из длин Δh_w отдельных отрезков силовых линий между уровенными поверхностями, которые пересекают земную поверхность в точках установки нивелирных реек вдоль линии нивелирования. В зависимости сумм таких отрезков силовых линий от пути нивелирования можно убедиться следующим образом. Если нивелирование выполнять двумя путями (см. рис. 5): 1) от исходного пункта O до точки O' , затем по уровенной поверхности до точки K и 2) от точки O по геоиду до точки K' и затем до точки K , то в первом случае измеренная высота будет равна длине отрезка OO' силовой линии точки O , а во втором — длине отрезка KK' силовой линии точки K . Но так как отрезок OO' в общем случае не равен отрезку KK' , то измеренные высоты точки K , если идти разными путями, будут различны. Каждому пути может соответствовать свое значение измеренной высоты. Различия этих значений могут превосходить ошибки нивелирования. Таким образом, измеренные высоты не образуют единой системы высот. Теоретическая невязка $\oint dh_w$ полигона $OK'KO'O$ равна разности $KK' - OO'$, теоретическая невязка полигона $OO'KK'O$ имеет ту же абсолютную величину, но противоположный знак, т. е. равна разности $OO' - KK'$. Конечно, геометрическое нивелирование мы предполагаем безошибочным: нет ошибок инструментального характера и ошибок, вызванных рефракцией.

В некоторых случаях можно приближенно принять, что уровенные поверхности представляют собой ряд параллельных плоскостей или ряд концентрических сфер (например, если рассматривать результаты нивелировки невысокой точности, выполненной на небольшой площади). В этих случаях измеренные высоты, какими бы путями ни идти по земной поверхности к конечной точке, были бы, очевидно, одними и теми же. Если нужно учитывать земное сжатие и одну из уровенных поверхностей внешнего поля или уровенную поверхность, ограничивающую земную массу, принять за нормальный сфероид или эллипсоид, то уровенные поверхности уже нельзя считать параллельными и, следовательно, измеренные высоты должны зависеть от пути нивелировки.

Бретон (д'Шамп) (1848) критикует более ранние работы, в которых теория нивелирования построена в предположении, что уровенные поверхности суть сферы с центром в центре Земли. Бретон обращает внимание на необходимость учета непараллельности уровенных поверхностей, но имеет в виду пока только эллипсоидальную Землю.

Зависимость суммы превышений при геометрическом нивелировании от пути и существование теоретической невязки нивелирного полигона, по-видимому, впервые указаны Вандом (1871, стр. 130).

Понятие о теоретической невязке полигона геометрического нивелирования подробно освещено уже у Захариев (1873, 1876). Его подход к выводу высот H над отсчетной (пока еще уровенной сфероидальной) поверхностью соответствует описанному. Корректирующий член формулы (III.7.4) также указан Захариев (1873). Поводом для этой работы была невязка в 1,186 м полигона геометрического нивелирования, пересекавшего Альпы у Симплон и Сен-Готарда. Рассмотрев модель неметричного горного хребта с уклоном отвеса до 45°,5 (расчет сделан в нескольких вариантах), как и швейцарские геодезисты (Хирш и Плантамур, 1873), в статье (1873 г.) Захариев пришел к выводу о возможности теоретической невязки такой величины. Критика этой работы дана Гельмертом (1882). При сравнении исследований Захариев и Гельмерта нужно иметь в виду, что в отличие от Захариев Гельмерт отсчитывает высоты от геоида. На модели Захариев Гельмерт оценил теоретическую невязку нивелирного полигона, один раз пересекающего Альпы, в ~0,1 м. Современные измерения, в общем, подтверждают оценку Гельмерта. В швейцарской нивелировке позднее был обнаружен просчет (Ессен, 1957).

Формулу (III.7.4) также рассмотрел Гельмерт (1884, стр. 515). Аналогичные соображения, но в менее ясной форме изложены в § 7 работы Бауернфайнда (1872).

Описанный путь вывода высот H , насколько известно авторам, никогда практически использован не был: между астрономическими пунктами триангуляции расстояние, как правило, не меньше нескольких десятков километров. Формальная интерполяция уклонений отвеса между такими пунктами дает результат низкой точности. Практические преимущества использования значений силы тяжести вдоль нивелирных линий при обработке нивелирования были ясны уже Гельмерту (1884).

§ 8. Вывод разности потенциалов.

Связь с гравиметрическим методом определения фигуры Земли

Элементарное изменение dW потенциала силы тяжести определено формулой

$$dW = -gdh_w, \quad (\text{III.8.1})$$

если направление ускорения g силы тяжести противоположно элементарному перемещению dh_w материальной точки с массой, равной единице. Формула (III. 8.1) следует из определения силового потенциала как функции, производная от которой по некоторому направлению равна силе, действующей по этому направлению. В дальнейшем вместо «ускорение силы тяжести», как это принято в геодезической литературе, будем говорить «сила тяжести».

Суммируя элементарные изменения потенциала вдоль линии геометрического нивелирования, получим разность потенциалов в крайних точках. Например, в случае, изображенном на рис. 5,

$$W(K) - W(O) = W(K) - W_0 = - \int_{(OK)} gdh_w, \quad (\text{III.8.2})$$

где $W(O) = W_0$ — значение потенциала W силы тяжести на геоиде; $W(K)$ — значение потенциала W на уровенной поверхности точки K ; g — значение силы тяжести, измеренное на земной поверхности в точках хода геометрического нивелирования.

Как видно из формулы (III. 8.2), из геометрического нивелирования и измерений силы тяжести вдоль его линии можно вывести потенциал $W(K)$ в любой точке K земной поверхности с той же точностью, с какой известна постоянная величина $W(O)$ (значения g и dh_w мы по-прежнему считаем безошибочными)

$$W(K) = W_0 - \int_{(OK)} gdh_w. \quad (\text{III.8.3})$$

Разность потенциалов в некоторых двух точках I и K , а следовательно, и интеграл $\int_{(IK)} gdh_w$ зависят не от пути интегрирования, а только от положения точек

I и K . Если каждая из этих точек меняет свое положение, оставаясь на одной и той же уровенной поверхности, то разность потенциалов в конечных точках, очевидно, также не будет изменяться, так как при перемещении массы по уровенной поверхности работа равна нулю (направление действующей силы перпендикулярно перемещению и $dh_w = 0$).

Впервые, по-видимому, Ванд (1871) предложил вычислять разности значений потенциала силы тяжести, используя результаты геометрического нивелирования и измерений силы тяжести вдоль нивелирного хода.

Ранее Гаусс (1825) предложил считать высоты, приписывая некоторое постоянное значение каждой уровенной поверхности земного потенциала. Для вывода таких значений Гаусс предлагал использовать барометрическое нивелирование.

Из уравнения (III. 8.1) для каждой двух близких уровенных поверхностей следует (Томсон и Тэт, 1867, стр. 244—245).

$$-\Delta W = g_1(\Delta h_w)_1 = g_2(\Delta h_w)_2 = g_3(\Delta h_w)_3 = \dots = g_n(\Delta h_w)_n = \text{const}, \quad (\text{III.8.4})$$

где ΔW — разность потенциалов силы тяжести на этих поверхностях; Δh_w — кратчайшие линейные расстояния между ними в разных точках (1, 2, 3, ..., n); g_n — средние значения силы тяжести на расстояниях $(\Delta h_w)_n$.

Таким образом, действительные кратчайшие расстояния между каждыми двумя близкими уровенными поверхностями изменяются с перемещением по ним обратно пропорционально изменению силы тяжести.

Такие изменения расстояний Δh_w сравнимы с точностью геометрического нивелирования. Это иллюстрирует следующий пример. Если бы можно было выполнить нивелирование от полюса до экватора по уровенной поверхности, то каждое превышение и их сумма были бы равны нулю. В гравитационном поле уровенного земного эллипсоида сила тяжести на полюсе \sim в 1,0053 раза больше силы тяжести на экваторе. Поэтому высота $(\Delta h_w)_n$ уровенной поверхности над геоидом на полюсе \sim в 1,0053 раза меньше, чем под экватором. Если на полюсе $(\Delta h_w)_n = 100$ м, то на экваторе $(\Delta h_w)_n = 100,53$ м. По инструкции (1966) же находим ошибку m_1 нивелирования I класса при длине L хода 10 000 км

$$m_1 = \pm \sqrt{0,25L + 0,0025L^2} \approx 0,5 \text{ м.}$$

В реальных условиях поправки за силу тяжести могут значительно превосходить точность геометрического нивелирования.

Из формулы (III. 8.4) следует важное свойство уровенных поверхностей земного гравитационного поля: так как значение g силы тяжести не может быть вблизи Земли неограниченно большой величиной, расстояния Δh_0 не могут обратиться в нуль. Две уровенные поверхности с различными значениями потенциала не могут поэтому ни касаться, ни пересекаться. Как показал Пицетти (1913), до некоторого определенного расстояния от земной поверхности уровенные поверхности земного потенциала силы тяжести замкнуты и каждая из них имеет единственную общую точку с радиусом, проведенным из центра инерции Земли. Вблизи земной поверхности центробежная сила составляет весьма малую долю силы земного притяжения, с удалением же от оси вращения Земли центробежная сила и ее потенциал возрастают, а сила притяжения и ее потенциал убывают с удалением от центра инерции Земли, и на весьма удаленных расстояниях центробежная сила может быть больше силы притяжения. Здесь уровенные поверхности потенциала силы тяжести перестают быть замкнутыми. Однако эта область весьма далека от Земли и не представляет трудностей для геодезистов. Свойства земного гравитационного поля исследовали Брунс (1878), Гельмерт (1884), Марусси (1951), Хотин (1957, 1969), Ольберг (1967). Предложенные Гауссом высоты условны. Такими высотами могут быть геопотенциальные отметки, выражаемые в единицах работы, или динамические высоты, выражаемые в линейной мере. Вывод этих величин будет описан ниже.

Мы переходим к описанию вывода высот H как сумм

$$H = H_Q + \zeta_Q$$

нормальных высот * H_Q и высот квазигеоида ζ_Q (метод Молоденского). Кратко мы расскажем также о выводе высот H как сумм

$$H = H_G + \zeta_G$$

ортометрических высот H_G и высот геоида ζ_G старым методом. Высоты H_Q (или H_G) представляют наиболее неправильную (гипсометрическую) часть высот H над отсчетным эллипсоидом. Другую более гладкую часть высот H можно определить гравиметрическим методом (через аномалии силы тяжести) или астрономическим (астрономо-гравиметрическим) нивелированием. Основы теории вывода высот геоида гравиметрическим методом развиты Стоксом (1849), получившим формулу для высоты ζ_G геоида. В своих работах (1945, 1948, 1960) Молоденский развил теорию вывода высот ζ_Q квазигеоида по аномалиям силы тяжести. Метод астрономического нивелирования — вывода высот геоида над отсчетным геодезическим эллипсоидом — описан Виларсо (1871). Молоденский (1937, 1939, 1950, 1960) указал возможность использования гравиметрических данных при астрономическом нивелировании со значительным расстоянием между астрономическими пунктами астрономо-геодезической сети, развил метод астрономо-гравиметрического нивелирования.

Теория Молоденского позволяет определить фигуру земной поверхности по геодезическим измерениям на ней практически точно; как нормальные высоты, так и высоты квазигеоида над эллипсоидом можно определить строго и просто. В старых методах, кроме таких измерений, необходимы те или иные предположения о внутреннем строении Земли. Поэтому и высоты геоида и ортометрические высоты получаются искаженными.

При изучении фигуры Земли гравитационное поле удобно представлять как сумму нормального и аномального полей. Аномальное поле должно быть настолько мало, чтобы можно было его достаточно точно определить в линейном приближении и пренебречь квадратами аномалий потенциала (т. е. квадратами значений возмущающего потенциала), их производными и произведениями этих величин. Связанные с нормальным полем вычисления должны быть простыми. Пусть такое нормальное поле задает нормальный потенциал U .

Изложим вывод Молоденского (1945) одной из основных формул его теории. Эта формула связывает нормальные высоты H_Q , возмущающий потенциал T и высоты ζ_Q квазигеоида.

Разложим нормальный потенциал U в ряд Тейлора:

$$U(B, L, H) = U(B_0, L_0, H_Q) + \frac{\partial U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial H_Q} \zeta_Q + \frac{\partial U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial B_0} \Delta B + \\ + \frac{\partial U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial L_0} \Delta L + \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{2\partial H_Q^2} \zeta_Q^2 + \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial B_0} \zeta_Q \Delta B +$$

* Впервые нормальные высоты введены Молоденским (1945). Их определяет равенство (3.21) на стр. 39. Тогда они еще не имели названия и были обозначены через q . В работе Молоденского 1948 г. нормальные высоты были названы вспомогательными. Свое современное название эти высоты, по предложению Молоденского, получили в работе Еремеева (1951 г.).

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{2\partial B_0^2} (\Delta B)^2 + \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial L_0} \zeta_Q \Delta L + \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{2\partial L_0^2} (\Delta L)^2 + \\
& + \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial B_0 \partial L_0} \Delta B \Delta L + \dots \quad (III.8.5)
\end{aligned}$$

При определении нормального потенциала U сходимость ряда (III. 8.5) не должна вызывать сомнений. Поэтому высоты элементов массы, создающей нормальное поле, не могут быть больше высот H земной поверхности: все производные от нормального потенциала в (III. 8.5) должны быть вычислены в поле, внешнем относительно таких элементов массы. Точнее, между точками (B, L, H) и (B_0, L_0, H_Q) не может быть элементов массы, создающей нормальное поле. Выполнение этого условия необходимо также при определении величины ζ_Q . Если оно выполнено, величина ζ_Q может быть определена хорошо разработанными методами математической физики: решением уравнения Лапласа относительно $T=W-U$ при некоторых условиях на земной поверхности и в бесконечности.

Здесь B_0 и L_0 обозначают некоторое приближенное значение координат B и L соответственно. Геодезические работы развиваются последовательными приближениями и неизбежно содержат ошибки. При использовании гравиметрического метода определения фигуры Земли центр отсчетного эллипсоида должен быть совмещен с центром инерции Земли. Однако соответственный вывод координат B, L связан с трудностями, так как положение центра инерции Земли относительно ее поверхности заранее неизвестно. С помощью последних членов формулы (II. 2.5) выразим влияние ошибок плановых координат и влияние смещения центра отсчетного эллипсоида.

Возмущающий потенциал $T(B, L, H)$ можно теперь записать так, используя (III. 8.3):

$$\begin{aligned}
T(B, L, H) &= W(B, L, H) - U(B, L, H) = \\
&= W_0 - \int gdh_w - U(B_0, L_0, H_Q) - \frac{\partial U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial H_Q} \zeta_Q - \frac{\partial U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial B_0} \Delta B - \\
&- \frac{\partial U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial L_0} \Delta L - \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{2\partial H_Q^2} \zeta_Q^2 - \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial B_0} \zeta_Q \Delta B - \\
&- \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{2\partial B_0^2} (\Delta B)^2 - \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial L_0} \zeta_Q \Delta L - \\
&- \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{2\partial L_0^2} (\Delta L)^2 - \frac{\partial^2 U(B_0, L_0, H_Q)}{\partial B_0 \partial L_0} \Delta B \Delta L + \dots \quad (III.8.6)
\end{aligned}$$

Если нормальный потенциал обусловлен телом вращения и

$$\frac{\partial U}{\partial L} = 0,$$

Формулу (III. 8.6) можно упростить:

$$\begin{aligned}
T(B, L, H) &= W(B, L, H) - U(B, H) = \\
&= W_0 - \int gdh_w - U(B_0, H_Q) - \frac{\partial U(B_0, H_Q)}{\partial H_Q} \zeta_Q - \frac{\partial U(B_0, H_Q)}{\partial B_0} \Delta B - \\
&- \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial H_Q^2} \zeta_Q^2 - \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial B_0} \zeta_Q \Delta B - \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial B_0^2} (\Delta B)^2 + \dots \quad (III.8.7)
\end{aligned}$$

В самом простом случае потенциал U может быть обусловлен урванным эллипсоидом вращения.

Нормальную высоту H_Q Молоденский определил при помощи уравнения

$$-\int gdh_w = U(B_0, H_Q) - U(B_0, 0) = U(B_0, H_Q) - U_0. \quad (III.8.8)$$

Физический смысл этого уравнения простой. Оно означает, что при выводе нормальной высоты H_Q по заданной разности $\int gdh_w$ потенциалов гравитационное поле Земли мы полагаем нормальным. При условии (III. 8.8) из (III. 8.7) находим

$$\begin{aligned}
T(B, L, H) &= W_0 - U_0 - \frac{\partial U(B_0, H_Q)}{\partial H_Q} \zeta_Q - \frac{\partial U(B_0, H_Q)}{\partial B_0} \Delta B - \\
&- \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial H_Q^2} \zeta_Q^2 - \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial B_0} \zeta_Q \Delta B - \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial B_0^2} (\Delta B)^2 + \dots \quad (III.8.9)
\end{aligned}$$

Имея в виду, что уравнение (III. 8.8) точно определяет нормальную высоту H_Q , и зависимость

$$\frac{\partial U(B_0, H_Q)}{\partial H_Q} = -\gamma(B_0, H_Q) \cos(-\gamma, H_Q)^3, \quad (\text{III.8.10})$$

из (III. 8.9) находим

$$\begin{aligned} \gamma(B_0, H_Q) \cos(-\gamma, H_Q) \zeta_Q &= T(B, L, H) - W_0 + U_0 - \\ &- \gamma(B_0, H_Q) \sin(-\gamma, H_Q) M\Delta B + \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial H_Q^2} \zeta_Q^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial B_0} \zeta_Q \Delta B + \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial B_0^2} (\Delta B)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.8.11})$$

Основные принципы определения нормального поля описаны в следующем параграфе. Там дан вывод формул для основных элементов нормального поля, как правило, хорошо известных. Некоторые из этих формул мы используем здесь для оценки членов формулы (III. 8.11). А именно, с помощью формулы Гаусса (III. 9.83) замечаем, что $\cos(-\gamma, H_Q)$ отличается от единицы не более чем на $0,4 \cdot 10^{-10}$ и при $\zeta_Q = 100$ м соответствующая погрешность в ζ_Q будет меньше $0,4 \cdot 10^{-5}$ мм. Поэтому находим

$$\begin{aligned} \zeta_Q &= \frac{1}{\gamma(B_0, H_Q)} [T(B, L, H) - W_0 + U_0] - \sin(-\gamma, H_Q) M\Delta B + \\ &+ \frac{1}{\gamma(B_0, H_Q)} \left[\frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial H_Q^2} \zeta_Q^2 + \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial B_0} \zeta_Q \Delta B + \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial B_0^2} (\Delta B)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{III.8.12})$$

Оценим четыре последних члена в уравнении (III. 8.12) справа. Пусть $B = 45^\circ$, $\Delta B = 10''$, т. е. $M\Delta B \approx 300$ м, тогда

$$|\sin(-\gamma, H_Q) M\Delta B| < 2,5 \text{ мм.} \quad (\text{III.8.13})$$

При оценке следующего члена можно приближенно принять

$$U \approx \frac{fE}{R},$$

где f — гравитационная постоянная; E — масса Земли; R — ее средний радиус. Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial H_Q} \approx \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{fE}{R^2} \approx -\gamma$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial H_Q^2} \approx \frac{2fE}{R^3} \approx +\frac{2\gamma}{R}. \quad (\text{III.8.14})$$

Таким образом,

$$\left| \frac{1}{\gamma(B_0, H_Q)} \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2\partial H_Q^2} \zeta_Q^2 \right| \approx \left| \frac{\zeta_Q^2}{R} \right| < 2 \text{ мм,} \quad (\text{III.8.15})$$

поскольку по современным данным $\zeta_Q < 100$ м.

При оценке предпоследнего члена приближенно примем

$$\frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{\partial H_Q \partial B_0} \approx -\frac{\partial \gamma}{\partial B_0} \quad (\text{III.8.16})$$

и согласно (III. 9.76), (III. 9.68), (III. 9.69) найдем

$$\left| \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{\gamma(B_0, H_Q) \partial H_Q \partial B_0} \zeta_Q \Delta B \right| < 0,025 \text{ мм.} \quad (\text{III.8.17})$$

Последний член в уравнении (III. 8.12) оценим с помощью (III. 9.81) и (III. 9.68):

$$\left| \frac{(\Delta B)^2}{2\gamma(B_0, H_Q)} \cdot \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{\partial B_0^2} \right| < 0,00012 \text{ мм.} \quad (\text{III.8.18})$$

Рассмотренные члены формулы (III. 8.12) не имеют практического значения. Аналогичная оценка в случае уровня эллипсоида (тогда $\frac{\partial u}{\partial L} \neq 0$) для формулы (III. 8.6) привела бы к подобным результатам: члены с производными от U , кроме члена с $\frac{\partial u}{\partial H_Q}$, также не имели бы практического значения. Поэтому можно принять

$$\xi_Q = \frac{1}{\gamma(B_0, H_Q)} [T(B, L, H) - W_0 + U_0]. \quad (\text{III. 8.19})$$

Высота ξ_Q квазигеоида имеет смысл аномалии высоты. Откладывая в точках (B_0, L_0) от поверхности эллипсоида по нормальям к нему высоты ξ_Q , можно построить квазигеоид. Об определении значений ξ_Q скажем кратко ниже.

Из определения возмущающего потенциала как разности $T = W - U$ для точки земной поверхности S следует

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \frac{\partial W}{\partial H} - \frac{\partial U}{\partial H} \approx -g + \gamma', \quad (\text{III. 8.20})$$

где γ' — нормальное значение силы тяжести в точке поверхности S . Даже при уклонении отвеса в $1'$ погрешность равенства $\frac{\partial W}{\partial H} \approx -g$ меньше $0,05$ *мгал*. Если касательная к силовой линии нормального поля не совпадает с направлением H нормали к эллипсоиду, то равенство $\frac{\partial U}{\partial H} = -\gamma'$ будет содержать относительную погрешность в половину квадрата соответственного угла. Из уравнения (III. 8.20) следует

$$\frac{\partial T}{\partial H} = -g + \gamma + \xi_Q \frac{\partial \gamma}{\partial H} + \Delta B \frac{\partial \gamma}{\partial B}, \quad (\text{III. 8.21})$$

где γ — нормальная сила тяжести в точке (B_0, L_0, H_Q) ; градиенты $\frac{\partial \gamma}{\partial H}$ и $\frac{\partial \gamma}{\partial B}$ нужно вычислять в ней же. Разность $g - \gamma$ принято называть аномалией силы тяжести в свободном воздухе.

Из уравнений (III. 8.19) и (III. 8.21) следует

$$\frac{\partial T}{\partial H} = -g + \gamma + \frac{1}{\gamma(B_0, H_Q)} \frac{\partial \gamma}{\partial H} [T(B, L, H) - W_0 + U_0] + \Delta B \frac{\partial \gamma}{\partial B}. \quad (\text{III. 8.22})$$

Влияние последнего члена весьма мало. При $M\Delta B = 300$ м этот член не больше $0,25$ *мгал*.

При определении гравитационного поля и фигуры Земли по измерениям силы тяжести условие (III. 8.22) для возмущающего потенциала T на земной поверхности — граничное условие — должно быть удовлетворено.

Для сравнения с описанными оценками укажем на оценку Двудита (1966) не учитываемых при геодезических выводах влияний изменений в атмосфере на высоты квазигеоида, аномалии силы тяжести и уклонения отвеса: перечисленные влияния по этой оценке имеют порядок 1 см, $0,01$ *мгал* и нескольких тысячных секунды дуги соответственно. Влиянию атмосферы на гравитационное поле посвятил также свою статью Кабелач (1969).

§ 9. Выбор нормального поля

а) Возможности установления нормального поля как поля неоднородной жидкости, вращающейся в гидростатическом равновесии. Нормальное поле иногда стремятся определить как поле неоднородной жидкости, вращающейся в гидростатическом равновесии как твердое тело вокруг некоторой неподвижной оси с постоянной малой угловой скоростью ω . Распределение плотности должно соответствовать данным о плотности внутри Земли (см., например, Паньков и Жарков, 1967), масса жидкости должна быть равна массе Земли. Такой выбор нормального поля облегчил бы всестороннее геофизическое изучение Земли, так как каждый элемент аномального гравитационного поля соответствовал бы нарушению гидростатического равновесия. Если бы гидростатическое равновесие не было нарушено, нормальные высоты были бы равны высотам над поверхностью жидкости.

Задав плотность δ жидкости в функции некоторого радиуса и зная фигуры уровенных поверхностей, т. е. границы плотностей, можно было бы вычислить нормальный потенциал по простой формуле

$$U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + f \int \frac{\delta d\tau}{r}, \quad (\text{III. 9.1.})$$

где $d\tau$ — элемент объема; r — расстояние между исследуемой точкой и элементом $d\tau$; f — гравитационная постоянная. Трудности определения такого нормального поля связаны с трудностями определения фигур упомянутых уровенных поверхностей. Эта задача сведена к решению уравнения

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + f \int \frac{\delta d\tau}{r} = \text{const.} \quad (\text{III.9.2})$$

Постоянное правой части необходимо последовательно изменять от его значения в центре инерции фигуры до значения на ее поверхности.

Предположив, что внешняя поверхность такой жидкости и поверхности раздела плотностей суть эллипсоиды вращения, Клеро (1743) показал справедливость такого предположения с относительной погрешностью порядка квадрата земного сжатия или отношения центробежной силы к силе тяжести на экваторе. Большей точности теория Клеро дать не может. Он составил интегро-дифференциальное уравнение, которое определяет сжатия последовательных слоев, если известны их плотности в зависимости от расстояния до центра инерции. При современной точности геометрического нивелирования точность теории Клеро недостаточна.

Результаты Лапласа (ан VII—1799, 1825; Тиссеран, 1891) в решении этой задачи связаны с представлением потенциала притяжения рядом

$$V = \sum_0^{\infty} \frac{A_n P_n(\cos \vartheta)}{\rho^{n+1}}, \quad (\text{III.9.3})$$

где P_n — полиномы Лежандра — функции геоцентрического полярного расстояния ϑ фиксированной точки; ρ — ее расстояние от начала координат; A_n — постоянные коэффициенты, зависящие от распределения плотности. Эти коэффициенты определены фигурой внешней уровенной поверхности и массой притягивающего тела. Их называют стоксовыми постоянными. Величины этих коэффициентов не изменяются, если при перераспределении массы тела не изменяется фигура внешней уровенной поверхности. Сходимость ряда (III. 9.3) сомнительна, когда радиус-вектор фиксированной точки может быть меньше радиуса-вектора притягивающего элемента массы.

Ляпунов достиг крупных успехов в создании теории вращения однородной и неоднородной жидкости, все частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. Работы Ляпунова более полны и строги, чем почти одновременные работы на эту же тему Пуанкаре (Лихтенштейн, 1933). В работе 1903 г. задачу определения формы уровенных поверхностей неоднородной жидкости Ляпунов свел к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, решение которого разложением по степеням малого параметра привел к решению последовательности более простых интегро-дифференциальных уравнений. Упомянутым малым параметром у Ляпунова служит соотношение

$$\kappa = \frac{\omega^2 A^3}{fE},$$

где E — масса жидкости; A — радиус сферы с объемом, равным объему жидкости.

Первое из этих более простых уравнений аналогично уравнению Клеро. Разрешимость каждого уравнения доказана Ляпуновым в работе 1904 г. Решение задачи единственно. В результате можно получить высоты каждой уровенной поверхности над сферой, объем которой равен объему, ограниченному этой уровенной поверхностью. Плотность должна быть задана как функция радиуса такой сферы. Абсолютную и равномерную сходимость рядов, представляющих решение задачи, Ляпунов доказал для случая $\kappa < 1 : 500$ (у поверхности Земли, как известно, $\kappa \approx 1 : 288$). Эти ряды сходятся, вероятно, в некоторых пределах и при $\kappa > 1 : 500$. Плотность жидкости в центре инерции конечна, с увеличением расстояния от центра плотность убывает. Ее изменение может быть разрывным, число разрывов не ограничено.

В лекции «О форме небесных тел», прочитанной Ляпуновым в Новороссийском университете в сентябре 1918 г. и опубликованной в 1930 г., критически изложена история вопроса и освещены работы самого Ляпунова. В частности, Ляпунов критиковал использование ряда (III. 9.2) в случаях его сомнительной сходимости.

Методы, разработанные Ляпуновым в случае однородной жидкости, имеют значение также для решения задач, связанных с неоднородной жидкостью. В частности, Ляпунов отыскивал ряды фигур равновесия вблизи жидких однородных эллипсоидов равновесия. Этот ряд может соответствовать малым изменениям угловой скорости вращения (заключительная работа опубликована в 1927 г. после смерти Ляпунова).

Продолжая работы Ляпунова по теории вращения в гидростатическом равновесии однородной и неоднородной жидкости, Лихтенштейн (1933) исследовал, имеются ли вблизи фигуры равновесия неоднородной жидкости другие фигуры равновесия, которые соответствуют малому изменению угловой скорости вращения и образуют линейный ряд фигур. На этот вопрос получен утвердительный ответ. Лихтенштейн со-

ставил и исследовал нелинейное интегро-дифференциальное уравнение этой задачи, определяющее расстояние между соответственными точками исходной и искомой фигур. Единственное решение уравнения Лихтенштейна определяет искомую производную фигуру равновесия. Свою теорию Лихтенштейн применил к Земле, приняв за исходную фигуру равновесия сферу, внутри которой concentрически расположены сферические слои равной плотности.

Макке, Ренерт, Ригер, Фосс (1964) составили нелинейное интегральное уравнение для потенциала силы тяжести Земли, состоящей из однородных ядра и мантии и вращающейся к гидростатическому равновесию. Значения массы, момента инерции и радиуса земного ядра были заданы. Эти авторы считали исходной фигурой сферу с concentрическими слоями равной плотности внутри нее и искали производную фигуру при условии, чтобы потенциальная энергия системы была минимальна. Подобный подход ранее был изучен Ляпуновым (1908). Авторы искали решение задачи путем разложения по степеням отношения k центробежной силы к силе притяжения на экваторе исходной сферы. Нелинейное интегральное уравнение удалось таким образом привести к решению последовательности линейных интегральных уравнений. Получено два приближения (нулевое и первое), в которых учтены члены порядка k . Фосс (1965, 1966) распространил метод на случай произвольного числа слоев постоянной плотности, хотя бы неограниченного. Нулевое, первое и второе приближения Фосс рассмотрел подробно. Как и следовало ожидать, оказалось, что теория Клеро соответствует первому приближению. Второе приближение Фосса соответствует относительной погрешности порядка $(1:300)^3$. Поскольку неизвестным уравнения в работах Макке, Фосса и др. является полная величина потенциала силы тяжести, второе приближение может соответствовать ошибке в радиусе-векторе поверхности жидкости порядка нескольких дециметров. Для геодезических целей такая точность еще недостаточна. Второе приближение Фосса связано с решением трех интегральных уравнений.

Таким образом, определение нормального поля как гравитационного поля неоднородной жидкости, вращающейся в гидростатическом равновесии, связано пока с большими теоретическими и практическими трудностями.

При решении чисто геодезических задач нормальное поле служит полем сравнения; в окончательное решение это поле не входит.

Поэтому вовсе не обязательно связывать выбор нормального поля с фигурой равновесия неоднородной жидкости. Тем более нецелесообразно принимать за нормальное гравитационное поле фигуры равновесия с распределением плотности, не соответствующим внутреннему строению Земли. В этом случае преодоление больших вычислительных трудностей ничем не оправдано, так как не может привести к ценным для геофизики результатам.

Установление нормального поля как поля неоднородной жидкости связано еще с одним существенным недостатком. А именно, при совместном использовании гравиметрических и геодезических материалов в этом случае придется иметь дело с двумя разными отсчетными поверхностями: геодезическим эллипсоидом и фигурой жидкости.

б) Нормальное поле как поле уровенного эллипсоида. Если для установления нормального поля воспользоваться теорией Пицетти (1894, 1913) гравитационного поля уровенного нормального эллипсоида, то при совместном использовании угловых и линейных измерений и материалов гравиметрических съемок будет удобнее использовать систему координат H, B, L . За отсчетную поверхность при обработке гравиметрических материалов можно выбрать эллипсоид вращения, близкий к геодезическому эллипсоиду или совпадающий с ним.

Теория Пицетти была развита в последующие годы в специальной криволинейной системе координат, которую мы опишем (см. также, например, у Гобсона, 1931). В этой системе получены замкнутые формулы для основных элементов такого нормального поля. Связь этой криволинейной системы с системой геодезических координат H, B, L выражена также замкнутыми формулами. Изложим вывод формул для основных элементов нормального поля уровенного эллипсоида по Молоденскому (1945, 1960).

Итак, пусть нормальное гравитационное поле определено телом, вращающимся вместе с Землей; одной из внешних уровенных поверхностей этого тела пусть будет сжатый эллипсоид вращения. Такое тело иногда называют нормальной Землей. Нормальная Земля равномерно вращается вокруг малой полуоси b уровенного эллипсоида

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (111.9.4)$$

с угловой скоростью ω . Фигура уровенной поверхности — эллипсоида с полуосями a, b , масса E внутри него и угловая скорость ω вращения эллипсоида, как заметил Стокс (1849), определяют нормальное поле как на поверхности уровенного эллипсоида, так и во внешнем пространстве.

Потенциал U силы тяжести нормальной Земли на поверхности эллипсоида

(III.9.4) пусть равен U_0 . Следовательно, нормальный потенциал V притяжения на этой поверхности равен

$$V_0 = U_0 - \frac{\omega^2}{2} (x_0^2 + y_0^2). \quad (\text{III.9.5})$$

Функция V вне поверхности эллипсоида удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

и на бесконечности регулярна, т. е.

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho V) = fE. \quad (\text{III.9.6})$$

Из решения внешней первой граничной задачи можно найти потенциал V вне эллипсоида (III.9.4), так чтобы удовлетворить граничные условия (III.9.5) и (III.9.6). Добавив в функцию V потенциал центробежной силы, получим потенциал U силы тяжести.

Упомянутая выше криволинейная система координат u, v, w связана с декартовыми координатами соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x &= c \sin u \cos v \operatorname{ch} w \\ y &= c \sin u \sin v \operatorname{ch} w \\ z &= c \cos u \operatorname{sh} w \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III.9.7})$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; v — долгота. На поверхности нормального эллипсоида $w = w_0$. Тогда, если

$$\operatorname{ch} w_0 = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{sh} w_0 = \frac{b}{c}, \quad (\text{III.9.8})$$

на этой поверхности имеем

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \sin u \cos v \\ y_0 &= a \sin u \sin v \\ z_0 &= b \cos u \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.9.9})$$

Из уравнений (III.9.7) и (III.9.8) следует, что поверхности $w = \text{const}$ суть софокусные эллипсоиды вращения с большими полуосями $c \operatorname{sh} w$, малыми полуосями $c \operatorname{sh} w$ и фокусным расстоянием $2c$. С удалением от центра инерции Земли сжатие этих эллипсоидов уменьшается.

На поверхности $u = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} x &= a' \cos v \operatorname{ch} w; \\ y &= a' \sin v \operatorname{ch} w; \\ z &= b' \operatorname{sh} w. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, поверхность $u = \text{const}$ представляет собой однополостный гиперболоид вращения с полуосями $a' = c \sin u$, $b' = c \cos u$. Меридиональные сечения гиперболоидов $u = \text{const}$ плоскостями $v = \text{const}$ — суть гиперболы; расстояние от центра до фокусов этих гипербол равно $\sqrt{c^2(\sin^2 u + \cos^2 u)} = c$. Таким образом, все меридиональные эллипсы и гиперболы софокусны.

Из уравнений (III.9.7) следует

$$\frac{x^2 + y^2}{\operatorname{ch}^2 w} + \frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 w} = c^2,$$

что приводит к биквадратному уравнению относительно $\operatorname{sh} w$ и следующему выражению $\operatorname{sh}^2 w$ через декартовы координаты:

$$\operatorname{sh}^2 w = \frac{\rho^2 - c^2 + \sqrt{(\rho^2 - c^2)^2 + 4c^2 z^2}}{2c^2}, \quad (\text{III.9.10})$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Аналогичное выражение для u теперь вывести просто, а именно, последняя из формул (III.9.7) дает

$$\cos u = \frac{z}{c \operatorname{sh} w}. \quad (\text{III.9.11})$$

С помощью формул (I.1) можно выразить u и w через H и B .

Образовав частные производные от декартовых координат по криволинейным

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= c \cos u \cos v \operatorname{ch} w, & \frac{\partial x}{\partial v} &= -c \sin u \sin v \operatorname{ch} w, & \frac{\partial x}{\partial w} &= c \sin u \cos v \operatorname{sh} w, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= c \cos u \sin v \operatorname{ch} w, & \frac{\partial y}{\partial v} &= c \sin u \cos v \operatorname{ch} w, & \frac{\partial y}{\partial w} &= c \sin u \sin v \operatorname{sh} w, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= -c \sin u \operatorname{sh} w, & \frac{\partial z}{\partial v} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial w} &= c \cos u \operatorname{ch} w, \end{aligned}$$

нетрудно убедиться, что условия ортогональности координатных линий системы u, v, w

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

удовлетворены и коэффициенты h_1, h_2, h_3 Ламе определены простыми формулами

$$\left. \begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u) \\ h_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w \\ h_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9.12})$$

Таким образом, дифференциал длины определен квадратичной формой

$$ds^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u) (du)^2 + c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w (dv)^2 + c^2 (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u) (dw)^2, \quad (\text{III.9.13})$$

а оператор Лапласа

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right\}$$

в рассматриваемой системе криволинейных координат приводит к такой записи уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} c^2 \sin u \operatorname{ch} w (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u) \Delta V &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\sin u \operatorname{ch} w \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u}{\sin u \operatorname{ch} w} \frac{\partial V}{\partial v} \right) &+ \frac{\partial}{\partial w} \left(\sin u \operatorname{ch} w \frac{\partial V}{\partial w} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.9.14})$$

или, поскольку нормальная Земля и ее гравитационное поле симметричны относительно оси вращения,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\sin u \operatorname{ch} w \frac{dV}{du} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\sin u \operatorname{ch} w \frac{dV}{dw} \right) = 0. \quad (\text{III.9.15})$$

Из уравнений (II.3.7) следует для поверхности нормального эллипсоида

$$x_0^2 + y_0^2 = c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0 \quad (\text{III.9.16})$$

и граничное условие (III.9.5) можно записать так:

$$V_0 = U_0 - \frac{\omega^2}{2} c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0. \quad (\text{III.9.17})$$

Первая граничная задача может иметь, как известно, не больше одного решения. Поэтому достаточно найти гармоническую и регулярную на бесконечности функцию, которая на нормальном эллипсоиде $w = w_0$ равна V_0 . Поскольку граничное условие (III.3.17) и уравнение (III.3.15) не зависят от v , Молоденский (1945) искал решение в виде суммы

$$V = \sum B_n \varphi_n(u) \psi_n(w), \quad (\text{III.9.18})$$

где B_n — постоянные коэффициенты, а произведение $\varphi_n(u) \psi_n(w)$ должно удовлетворять уравнению (III.9.15), т. е.

$$\psi_n(w) \operatorname{ch} w \frac{d}{du} \left(\sin u \frac{d\varphi_n(u)}{du} \right) + \varphi_n(u) \sin u \frac{d}{dw} \left(\operatorname{ch} w \frac{d\psi_n(w)}{dw} \right) = 0 \quad (\text{III.9.19})$$

или

$$-\frac{1}{\varphi_n(u) \sin u} \frac{d}{du} \left(\sin u \frac{d\varphi_n(u)}{du} \right)' = \frac{1}{\psi_n(w) \operatorname{ch} w} \frac{d}{dw} \left(\operatorname{ch} w \frac{d\psi_n(w)}{dw} \right) = k. \quad (\text{III.9.20})$$

Левая часть полученного равенства не зависит от ω , а правая — от u . Следовательно, обе равны одной и той же постоянной k . Из (III.9.20) следуют два уравнения:

$$\frac{d^2\varphi_n(u)}{du^2} + \operatorname{ctg} u \frac{d\varphi_n(u)}{du} + k\varphi_n(u) = 0, \quad (\text{III.9.21})$$

$$\frac{d^2\psi_n(\omega)}{d\omega^2} + \operatorname{th} \omega \frac{d\psi_n(\omega)}{d\omega} - k\psi_n(\omega) = 0. \quad (\text{III.9.22})$$

Первое из них при $k=n(n+1)$ представляет собой дифференциальное уравнение Лежандра, общее решение которого при целом положительном n имеет вид

$$\varphi_n(u) = C'_n P_n(\cos u) + D'_n Q_n(\cos u), \quad (\text{III.9.23})$$

где C'_n и D'_n — произвольные постоянные; $P_n(\cos u)$, $Q_n(\cos u)$ — функции Лежандра соответственно первого и второго рода. Поскольку $Q_n(\cos u)$ при $u \rightarrow 0$ достигает неограниченно больших значений, следует принять

$$\varphi_n(u) = P_n(\cos u). \quad (\text{III.9.24})$$

Тогда функция $\psi_n(\omega)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\psi_n(\omega)}{d\omega^2} + \operatorname{th} \omega \frac{d\psi_n(\omega)}{d\omega} - n(n+1)\psi_n(\omega) = 0 \quad (\text{III.9.25})$$

и быть регулярной на бесконечности. Таким образом, должно быть

$$V = \sum B_n P_n(\cos u) \psi_n(\omega). \quad (\text{III.9.26})$$

Из уравнения (III.9.17), поскольку

$$\sin^2 u = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2(\cos u),$$

следует, что в правую часть выражения (III.9.26) могут входить только полиномы Лежандра нулевого и второго порядков.

При $t = \operatorname{ish} \omega$ из (II.9.25) находим уравнение

$$(t^2 - 1) \frac{d^2\psi_n}{dt^2} + 2t \frac{d\psi_n}{dt} - n(n+1)\psi_n = 0, \quad (\text{III.9.27})$$

т. е. снова дифференциальное уравнение Лежандра, из общего решения которого

$$\psi_n = C''_n P_n(t) + D''_n Q_n(t)$$

нужно выделить решения

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= C''_0 + \frac{D''_0}{2} \ln \frac{t+1}{t-1}, \\ \psi_2 &= C''_2 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{D''_2}{2} \frac{3t^2 - 1}{2} \ln \frac{t+1}{t-1} - \frac{3}{2} t D''_2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.9.28})$$

Потенциал V притяжения эллипсоида составит

$$V = C_1 + C_2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \operatorname{sh} \omega + P_2(\cos u) \left[\frac{C_3}{2} (3 \operatorname{sh}^2 \omega + 1) + \frac{C_4}{2} (3 \operatorname{sh}^2 \omega + 1) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \operatorname{sh} \omega - \frac{3}{2} C_4 \operatorname{sh} \omega \right], \quad (\text{III.9.29})$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= B_0 C''_0, & C_2 &= -B_0 D''_0 t, \\ C_3 &= -B_2 C''_2, & C_4 &= B_2 D''_2 t. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{\operatorname{sh} \omega \rightarrow \infty} [(3 \operatorname{sh}^2 \omega + 1) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \operatorname{sh} \omega - 3 \operatorname{sh} \omega] = \frac{4}{15} \lim_{\operatorname{sh} \omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \omega} = 0, \quad (\text{III.9.30})$$

из условия ограниченности V следует

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Из (III.9.7) находим

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \sin^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 \omega. \quad (\text{III.9.31})$$

Теперь условие (III.9.6) нетрудно использовать для определения C_2 .
А именно, при $u=0$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{fE}{\rho} = \lim_{\text{sh } \omega \rightarrow \infty} \frac{fE}{c \text{ sh } \omega} = \lim_{\text{sh } \omega \rightarrow \infty} \left[C_2 \text{ arc ctg sh } \omega + \frac{2C_4}{15} \cdot \frac{1}{\text{sh}^3 \omega} \right]$$

и

$$C_2 = \frac{fE}{c}.$$

Остается определить C_4 . При $\omega = \omega_0$, как мы условились, потенциал силы тяжести постояен и равен U_0 . Поэтому, имея в виду (III.9.8), находим

$$U_0 = \frac{\omega^2}{2} a^2 \sin^2 u + \frac{fE}{c} \text{ arc tg } \frac{c}{b} + \left(\frac{3}{2} \cos^2 u - \frac{1}{2} \right) \frac{C_4}{2} \times \\ \times \left[\left(\frac{3b^2}{c^2} + 1 \right) \text{ arc tg } \frac{c}{b} - 3 \frac{b}{c} \right].$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\sin^2 u$, получаем условие для определения C_4 :

$$C_4 = \frac{2\omega^2 a^2}{3 \left[\left(\frac{3b^2}{c^2} + 1 \right) \text{ arc tg } \frac{c}{b} - 3 \frac{b}{c} \right]} = \frac{2\omega^2 a^2}{m}.$$

Кстати, выразим U_0 через fE , b , c , ω :

$$U_0 = \frac{fE}{c} \text{ arc tg } \frac{c}{b} + \frac{\omega^2 a^2}{3}. \quad (\text{III.9.32})$$

Таким образом, потенциал притяжения нормального эллипсоида равен согласно (III.9.29)

$$V = \frac{fE}{c} \text{ arc ctg sh } \omega + \frac{\omega^2 a^2}{3m} [(3 \text{ sh}^2 \omega + 1) \text{ arc ctg sh } \omega - 3 \text{ sh } \omega] P_2(\cos u). \quad (\text{III.9.33})$$

Для потенциала силы тяжести нормального эллипсоида находим

$$U = V + \frac{\omega^2}{2} c^2 \sin^2 u \text{ ch}^2 \omega = \frac{fE}{c} \text{ arc ctg sh } \omega + \frac{\omega^2}{3} c^2 \text{ ch}^2 \omega + P_2(\cos u) \times \\ \times \left\{ \frac{\omega^2 a^2}{3m} [(3 \text{ sh}^2 \omega + 1) \text{ arc ctg sh } \omega - 3 \text{ sh } \omega] - \frac{\omega^2}{3} c^2 \text{ ch}^2 \omega \right\}. \quad (\text{III.9.34})$$

Ламберт (1960, 1961) и Капуто (1967) приводят вывод общей формулы для коэффициентов при полиномах Лежандра в разложении нормального потенциала силы тяжести эллипсоида в сферической системе координат. Они использовали криволинейные координатные системы, отличные от описанной. Ранее сходящийся ряд для представления потенциала притяжения V разложением по полиномам Лежандра во внешнем относительно эллипсоида пространстве получил Минео (1949).

Нормальную силу тяжести вне эллипсоида определяет формула

$$\gamma^2 = \left(-\frac{\partial U}{h_3 \partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{h_1 \partial u} \right)^2. \quad (\text{III.9.35})$$

Из (III.9.34) находим

$$c^2 (\text{ch}^2 \omega - \sin^2 u) \gamma^2 = \left(\frac{fE}{c} \right)^2 \frac{1}{\text{ch}^2 \omega} + 2\omega^2 \left(\frac{fE}{c} \right) \left\{ \cos^2 u \times \right. \\ \times \left\{ -\frac{a^2}{m \text{ ch}^2 \omega} [3 \text{ sh } \omega \text{ ch}^2 \omega \text{ arc ctg sh } \omega - 3 \text{ sh}^2 \omega - 2] + c^2 \text{ sh } \omega \right\} + \\ + \frac{a^2}{3m \text{ ch}^2 \omega} [3 \text{ sh } \omega \text{ ch}^2 \omega \text{ arc ctg sh } \omega - 3 \text{ sh}^2 \omega - 2] - c^2 \text{ sh } \omega \left\} + \omega^4 \left\{ \cos^4 u \left\{ \frac{a^4}{m^2 \text{ ch}^2 \omega} \times \right. \right. \right. \\ \times [(3 \text{ sh}^4 \omega + 2 \text{ sh}^2 \omega - 1) (\text{arc ctg sh } \omega)^2 - 6 \text{ sh } \omega \text{ ch}^2 \omega \text{ arc ctg sh } \omega + 3 \text{ sh}^2 \omega + 4] + \frac{2a^2 c^2}{m} \times \\ \times [\text{ch}^2 \omega \text{ arc ctg sh } \omega - \text{sh } \omega] - c^4 \text{ ch}^2 \omega \left\} + \cos^2 u \left\{ \frac{a^4}{3m^2 \text{ ch}^2 \omega} [3 \text{ ch}^2 \omega (3 \text{ sh}^4 \omega + \right. \right. \\ \left. \left. + 1) (\text{arc ctg sh } \omega)^2 - 6 \text{ sh } \omega (3 \text{ sh}^4 \omega + 2 \text{ sh}^2 \omega - 1) \text{ arc ctg sh } \omega + 9 \text{ sh}^4 \omega + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \text{ sh}^2 \omega - 8] + \frac{2a^2 c^2}{3m} [3 (\text{sh}^4 \omega - 1) \text{ arc ctg sh } \omega - 3 \text{ sh}^2 \omega + \text{sh } \omega] + c^4 \text{ ch}^2 \omega (2 - \text{ch}^2 \omega) \right\} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a^4}{9m^2 \operatorname{ch}^2 \omega} [9 \operatorname{sh}^2 \omega \operatorname{ch}^4 \omega (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \operatorname{sh} \omega)^2 - 6 \operatorname{sh} \omega (3 \operatorname{sh}^4 \omega + 5 \operatorname{sh}^2 \omega + 2) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \operatorname{sh} \omega + \\
& + 9 \operatorname{sh}^4 \omega + 12 \operatorname{sh}^2 \omega + 4] + \frac{2a^2 c^2 \operatorname{sh} \omega}{3m} [-3 \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch}^2 \omega \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \operatorname{sh} \omega + 3 \operatorname{sh}^2 \omega + 2] + \\
& + c^4 \operatorname{sh}^2 \omega \operatorname{ch}^2 \omega \}; \quad (III.9.36)
\end{aligned}$$

Формулы для γ в другом виде ранее получены Ламбертом (1961) и Капуто (1964, 1967); быстро сходящиеся ряды для составляющих силы притяжения уровня эллипсоида вывел Андреев (1966).

Наибольшее практическое значение имеет выражение для нормальной силы тяжести на поверхности нормального эллипсоида. В этом случае $\frac{\partial U}{\partial u} = 0$ и

$$\begin{aligned}
\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}} \left\{ \frac{fE}{a} - \frac{2}{3} \omega^2 ab + \frac{4}{3} \omega^2 \times \right. \\
\left. \times \frac{ac}{m} P_2(\cos u) \left(1 - \frac{b}{c} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b} \right) \right\}. \quad (III.9.37)
\end{aligned}$$

Отсюда следуют выражения для нормальной силы тяжести на полюсе и экваторе нормального эллипсоида через fE , a , b , c , ω :

$$\gamma_p = \frac{fE}{a^2} - \frac{2}{3} \omega^2 b + \frac{4}{3} \omega^2 \frac{c}{m} \left(1 - \frac{b}{c} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b} \right), \quad (III.9.38)$$

$$\gamma_e = \frac{fE}{ab} - \frac{2}{3} \omega^2 a - \frac{2}{3} \omega^2 \frac{ac}{bm} \left(1 - \frac{b}{c} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b} \right) \quad (III.9.39)$$

и такая формула для γ_0 :

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_p \cos^2 u + b\gamma_e \sin^2 u}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}.$$

Из последней формулы (1.1) и (III.9.11) для поверхности нормального эллипсоида находим

$$\operatorname{tg} u = \frac{a}{b \operatorname{tg} B},$$

следовательно, в этом случае u является дополнением до 90° приведенной широты. Тогда

$$\gamma_0 = \frac{\gamma_p b \sin^2 B + \gamma_e a \cos^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}. \quad (III.9.40)$$

Мы получили формулу Сомильяна (1933), которая выражает точный закон изменения силы тяжести на уровне эллипсоида.

Из выражений (III.9.38) и (III.9.39) находим

$$\frac{1}{3} a\gamma_p + \frac{2}{3} b\gamma_e = \frac{fE}{a} - \frac{2}{3} \omega^2 ab, \quad (III.9.41)$$

$$a\gamma_p - b\gamma_e = 2\omega^2 \frac{ac}{m} \left(1 - \frac{b}{c} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b} \right). \quad (III.9.42)$$

Из (III.9.42) нетрудно выразить часто используемый параметр

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = -\alpha + 2 \frac{cq}{am} \left(1 - \frac{b}{c} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b} \right), \quad (III.9.43)$$

где

$$q = \frac{a\omega^2}{\gamma_e},$$

и привести формулу для γ_0 к такому виду:

$$\gamma_0 = \gamma_e \frac{1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta) \sin^2 B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \gamma_e \frac{1 + \varepsilon \sin^2 B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (III.9.44)$$

Выразим разность (С—А) полярного и экваториального моментов инерции нормальной Земли через fE , a , b , ω^2 . Эта разность зависит от коэффициента A_2 в раз-

ложении вида (III.9.3) потенциала притяжения нормальной Земли. Коэффициенты A_n определены формулой

$$A_n = f \int_V \delta \rho^n P_n d\tau. \quad (\text{III.9.45})$$

Поэтому

$$A_0 = f \int_V \delta d\tau = fE.$$

Для тела вращения

$$\int_V \delta x^2 d\tau = \int_V \delta y^2 d\tau$$

и

$$\begin{aligned} A_2 &= f \int_V \delta \rho^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) d\tau = f \int_V \delta \rho^2 \left[\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \right] d\tau = \\ &= f \int_V \delta \left[z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right] d\tau = f(A - C), \end{aligned} \quad (\text{III.9.46})$$

поскольку

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_V \rho (x^2 + z^2) d\tau = \int_V \rho (y^2 + z^2) d\tau \\ C &= \int_V \rho (x^2 + y^2) d\tau \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.9.47})$$

Согласно формуле Грина, примененной к поверхности нормального эллипсоида и объему внутри него, находим

$$\begin{aligned} - \int_V \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} \Delta U d\tau &= - \int_S \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} \frac{dU}{dH} dS + \\ &+ U_0 \int_S \frac{d}{dH} \left(\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} \right) dS. \end{aligned} \quad (\text{III.9.48})$$

Вычислим последний интеграл справа, имея в виду формулы (I.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dH} \left(\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} \right) &= x \cos B \cos L + y \cos B \sin L - \\ &- 2z \sin B = N \cos^2 B - 2 \frac{b^2}{a^2} N \sin^2 B, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dH} \left(\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} \right) dS &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 B - 2b^2 \sin^2 B) MN^2 \cos B dB dL = \\ &= \frac{2\pi}{c^5} a^2 b^2 \int_{-1}^{+1} \frac{a^2 - (a^2 + 2b^2)x^2}{\left(\frac{a^2}{c^2} - x^2 \right)^{5/2}} dx = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.9.49})$$

Внутри нормального эллипсоида нормальный потенциал силы тяжести удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi f \delta + 2\omega^2. \quad (\text{III.9.50})$$

Из уравнений (III.9.47)–(III.9.50) следует

$$4\pi f (C - A) - 2\omega^2 \int_V \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} d\tau = \int_S \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} \gamma_0 dS. \quad (\text{III.9.51})$$

Из (III.9.7) и (III.9.12) находим

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 du dv dw = \frac{c^3}{3} [1 + 3 \operatorname{sh}^2 w + 2P_2(\cos u)] \sin u \operatorname{ch} w du dv dw. \quad (\text{III.9.52})$$

Из (III.9.12), (III.9.37) и (III.9.42) получаем

$$\gamma_0 dS = \left[fM - \frac{2}{3} \omega^2 a^2 b + \frac{2}{3} a (a\gamma_p - b\gamma_e) P_2(\cos u) \right] \sin u \, du \, dv. \quad (\text{III.9.53})$$

После подстановки выражений (III.9.52), (III.9.53) в формулу (III.9.51), имея в виду равенство

$$\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} = \frac{c^2}{3} [1 - (1 + 3 \operatorname{sh}^2 \omega) P_2(\cos u)],$$

интегрируя и используя при этом ортогональность полигонов Лежандра, находим

$$f(C - A) = \frac{fEc^2}{3} - \frac{4}{45} \omega^2 \frac{a^2 c^3}{m}. \quad (\text{III.9.54})$$

Эта формула уже есть у Пицетти (1913).

Параметры fE и $f(C-A)$ реальной Земли можно наиболее надежно определить по движению искусственных спутников Земли; угловая скорость ω вращения Земли хорошо известна из астрономических наблюдений. Поэтому параметры fE , $f(C-A)$, ω нормального поля стремятся задать равными их значениям для реальной Земли. Для полной характеристики нормального поля необходим еще один параметр. Определяя нормальное поле, кроме перечисленных величин, задают обычно значения потенциала силы тяжести на нормальном эллипсоиде, экваториальную постоянную формулы для нормальной силы тяжести или большую полуось отсчетного эллипсоида, т. е. значения U_0 , γ_e или a . Выведенные в этом параграфе формулы устанавливают связь параметров fE , $f(C-A)$, ω , U_0 , γ_e , a между собой и с основными элементами нормального поля.

Используя формулу Брунса (1878)

$$\left(\frac{\partial g}{\partial n} \right) = -2\omega^2 - 2gH_K + 4\pi f\delta, \quad (\text{III.9.55})$$

где n — внешняя нормаль к уровенной поверхности; H_K — ее средняя кривизна, на поверхности нормального эллипсоида находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H_0} \right) &= -2\omega^2 - \gamma_0 \left(\frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0} \right) = \\ &= -2\omega^2 - \frac{2\gamma_0}{a} \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}{1 - e^2} \left[1 - \frac{e^2}{2} (1 + \sin^2 B) \right] \end{aligned}$$

или согласно (III.9.44) выводим точную формулу

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 &= \frac{2\gamma_e}{a} \frac{1 + q - \frac{e^2}{2} - e^2 q}{1 - e^2} \left(1 + \right. \\ &\left. + \frac{\varepsilon - \frac{e^2}{2} - \frac{\varepsilon e^2}{2}}{1 + q - \frac{e^2}{2} - e^2 q} \sin^2 B - \frac{\varepsilon e^2 \sin^4 B}{2 \left(1 + q - \frac{e^2}{2} - e^2 q \right)} \right), \end{aligned}$$

в которой $\sin^2 B$ и $\sin^4 B$ можно заменить на $\cos 2B$ и $\cos^2 2B$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 &= \frac{2\gamma_e}{a} \frac{1 + q - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{2} \varepsilon - e^2 q - \frac{3}{8} \varepsilon e^2}{1 - e^2} \left(1 + \right. \\ &\left. + \frac{e^2 - 2\varepsilon - 2\varepsilon e^2}{4 \left(1 + q - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{2} \varepsilon - e^2 q - \frac{3}{8} \varepsilon e^2 \right)} \cos 2B - \right. \\ &\left. - \frac{\varepsilon e^2 \cos^2 2B}{8 \left(1 + q - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{2} \varepsilon - e^2 q - \frac{3}{8} \varepsilon e^2 \right)} \right). \quad (\text{III.9.56}) \end{aligned}$$

Используя ряд

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{b} = \frac{c}{b} - \frac{1}{3} \frac{c^3}{b^3} + \frac{1}{5} \frac{c^5}{b^5} - \frac{1}{7} \frac{c^7}{b^7} + \dots, \quad (\text{III.9.57})$$

сходящийся при $\left(\frac{c}{b}\right)^2 < 1$, можно вывести формулы, более удобные в практическом использовании. С относительной погрешностью порядка куба земного сжатия α справедливо

$$\frac{c}{bm} \left(1 - \frac{b}{c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b}\right) = \frac{5}{4} \left(1 + \frac{18}{35} \alpha + \frac{25}{49} \alpha^2\right), \quad (\text{III.9.58})$$

с относительной погрешностью порядка четвертой степени земного сжатия имеем

$$\frac{b^2}{c^2 m} = \frac{15}{4} \frac{b^5}{c^5} \left(1 + \frac{12}{7} \alpha + \frac{130}{49} \alpha^2 + \frac{42\,604}{11\,319} \alpha^3\right). \quad (\text{III.9.59})$$

Используя эти зависимости, можно найти с относительной погрешностью порядка четвертой степени земного сжатия:

$$\gamma_p = \frac{fE}{a^2} \left[1 + \frac{a^3 \omega^2}{fE} \left(1 - \frac{\alpha}{7} - \frac{\alpha^2}{147}\right)\right], \quad (\text{III.9.60})$$

$$\gamma_e = \frac{fE}{a^2} \left[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 - \frac{3}{2} \frac{a^3 \omega^2}{fE} \left(1 + \frac{2}{7} \alpha + \frac{125}{441} \alpha^2\right)\right], \quad (\text{III.9.61})$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \frac{fE}{a^2} & \left[1 + \alpha (1 - \sin^2 B) + \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 B - \frac{1}{2} \sin^4 B\right) + \alpha^3 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 B - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \sin^4 B\right) - \frac{3}{2} \frac{a^3 \omega^2}{fE} \left(1 - \frac{5}{3} \sin^2 B + \alpha \left(\frac{2}{7} + \frac{31}{21} \sin^2 B - \frac{5}{3} \sin^4 B\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha^2 \left(\frac{125}{441} - \frac{173}{294} \sin^2 B + \frac{59}{21} \sin^4 B - \frac{5}{2} \sin^6 B\right)\right)\right], \quad (\text{III.9.62}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(C-A) = \frac{2}{3} fE \alpha & \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) a^2 - \frac{\omega^2 a^5}{3} \left(1 - \frac{9}{7} \alpha + \right. \\ & \left. + \frac{25}{49} \alpha^2 - \frac{593}{11\,319} \alpha^3\right), \quad (\text{III.9.63}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 = -\frac{2fE}{a^3} & \left[1 + 2\alpha - 3\alpha \sin^2 B + \frac{7}{2} \alpha^2 - \frac{11}{2} \alpha^2 \sin^2 B + 2\alpha^2 \sin^4 B + \right. \\ & \left. + \frac{11}{2} \alpha^3 - \frac{19}{2} \alpha^3 \sin^2 B + 4\alpha^3 \sin^4 B - \frac{a^3 \omega^2}{2fE} \left(1 - 5 \sin^2 B + \frac{27}{7} \alpha - \frac{46}{7} \alpha \sin^2 B + \right. \right. \\ & \left. \left. + 5\alpha \sin^4 B + \frac{1825}{294} \alpha^2 - \frac{615}{49} \alpha^2 \sin^2 B + \frac{85}{14} \alpha^2 \sin^4 B\right)\right]. \quad (\text{III.9.64}) \end{aligned}$$

Из (III.9.63) следует зависимость, которую можно использовать для определения сжатия α по fE , $f(C-A)$, a и ω последовательными приближениями:

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{f(C-A)}{fE a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2fE} + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\omega^2 a^3 \alpha}{14fE} \left(9 - \frac{25}{7} \alpha + \frac{593}{1617} \alpha^2\right). \quad (\text{III.9.65})$$

Из уравнения (III.9.39) с относительной погрешностью порядка четвертой степени земного сжатия следует

$$fE = a^2 e (1 - \alpha) + \frac{3}{2} a^3 \omega^2 \left(1 - \frac{5}{7} \alpha - \frac{1}{441} \alpha^2\right). \quad (\text{III.9.66})$$

Пользуясь этой зависимостью, из (III.9.60), (III.9.62), (III.9.63), (III.9.64) с той же относительной погрешностью можно вывести для определения γ_p , γ_0 , $f(C-A)$ и $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0$ по γ_e , a , ω и α :

$$\gamma_p = \gamma_e \left[1 - \alpha + \frac{5}{2} q \left(1 - \frac{17}{35} \alpha - \frac{1}{245} \alpha^2\right)\right], \quad (\text{III.9.67})$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \gamma_e & \left[1 - \alpha \sin^2 B + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin^2 B - \frac{1}{2} \alpha^2 \sin^4 B + \frac{1}{2} \alpha^3 \sin^4 B - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \alpha^3 \sin^6 B + \frac{5}{2} q \left(\sin^2 B - \frac{52}{35} \alpha \sin^2 B + \alpha \sin^4 B + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{118}{245} \alpha^2 \sin^2 B - \frac{139}{70} \alpha^2 \sin^4 B + \frac{3}{2} \alpha^2 \sin^6 B\right)\right], \quad (\text{III.9.68}) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 = -\frac{2}{a} \gamma_e \left[1 + \alpha - 3\alpha \sin^2 B + \frac{3}{2} \alpha^2 - \frac{5}{2} \alpha^2 \sin^2 B + 2\alpha^2 \sin^4 B + \right. \\ \left. + 2\alpha^3 - 4\alpha^3 \sin^2 B + 2\alpha^3 \sin^4 B + q \left(1 + \frac{5}{2} \sin^2 B - \frac{17}{14} \alpha \sin^2 B - \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{2} \alpha \sin^4 B + \frac{243}{196} \alpha^2 \sin^2 B - \frac{1}{28} \alpha^2 \sin^4 B \right) \right], \quad (111.9.69)$$

$$f(C-A) = \frac{2}{3} a^4 \gamma_e \alpha \left(1 - \frac{3}{2} \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right) + a^5 \omega^2 \left(-\frac{1}{3} + \right. \\ \left. + \frac{10}{7} \alpha - \frac{407}{294} \alpha^2 + \frac{8429}{22638} \alpha^3 \right). \quad (111.9.70)$$

Международный астрономический союз в решении на двенадцатой генеральной ассамблее в Гамбурге (Proceedings..., 1966) рекомендовал нормальным полем Земли считать поле уровня эллипсоида и установил:

$$a = 6\,378\,160 \text{ м}, \\ fE = 398\,603 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2, \\ J_2 = \frac{f(C-A)}{fEa^2} = 0,0010827.$$

Аналогичное решение принято Международным геодезическим и геофизическим союзом (vieux, resolutions, 1967). Масса Земли включает массу атмосферы, доля которой близка к 0,000 001 общей массы.

Угловая скорость вращения Земли известна с высокой степенью точности; можно принять

$$\omega = 0,000072921151 \text{ сек}^{-1}.$$

Этой системе постоянных соответствует

$$\alpha = 1:298,24717,$$

согласно (111.9.62) в галах

$$\gamma_0 = 978,031846 (1 + 0,005279 \sin^2 B + 0,000023 \sin^4 B) \quad (111.9.71)$$

и согласно (111.9.64) в миллигалах на 1 м высоты

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 = -0,308778 (1 - 0,0014219 \sin^2 B - 0,0000065 \sin^4 B). \quad (111.9.72)$$

Коэффициент при $\sin^6 B$ в формуле для γ_0 равен $127 \cdot 10^{-9}$, т.е. пренебрегаемо мал.

Если за основные постоянные принять большую полуось и сжатие эллипсоида Красовского

$$a = 6\,378\,245 \text{ м}, \\ 1:\alpha = 298,3$$

и экваториальную постоянную формулы для нормальной силы тяжести Гельмерта (эту формулу принято называть формулой 1901—1909 гг.)

$$\gamma_e = 978,030 \text{ гал},$$

то при $\omega = 0,000072\,921\,151 \text{ сек}^{-1}$ получаем по (111.9.68) в галах

$$\gamma_0 = 978,03000 (1 + 0,005280 \sin^2 B + 0,000023 \sin^4 B), \quad (111.9.73)$$

и по (111.9.69) в миллигалах на 1 м высоты

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 = -0,308\,774 (1 - 0,001\,4196 \sin^2 B - 0,000\,0065 \sin^4 B). \quad (111.9.74)$$

Если же принять $a = 6\,378\,245 \text{ м}$, $\alpha = 1:298,3$, $fE = 398\,603 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2$, то

$$\gamma_0 = 978,00500 (1 + 0,005280 \sin^2 B + 0,000023 \sin^4 B). \quad (111.9.75)$$

В зарубежных работах пока что, как правило, использована формула Кассиниса (1930)

$$\gamma_0 = 978,049 (1 + 0,0052\,884 \sin^2 B - 0,000\,0059 \sin^2 2B),$$

соответствующая эллипсоиду Хейфорда ($a = 6\,378\,388 \text{ м}$, $\alpha = 1:297$) и $\omega = 0,000\,072\,921\,15 \text{ сек}^{-1}$. Экваториальная постоянная установлена здесь по более ранним выводам Хейсканена. В принятой форме записи формула Кассиниса выглядит так:

$$\gamma_0 = 978,049 (1 + 0,0052\,648 \sin^2 B + 0,000\,0236 \sin^4 B).$$

Зависимость производной

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 = -k_1$$

от широты характеризует табл. 2, рассчитанная по формуле (111.9.74).

Т а б л и ц а 2

<i>B</i>	κ_1	<i>B</i>	κ_1	<i>B</i>	κ_1
0°	+0,30877	30°	+0,30866	60°	+0,30844
5	0,30877	35	0,30863	65	0,30841
10	0,30876	40	0,30859	70	0,30838
15	0,30874	45	0,30855	75	0,30836
20	0,30872	50	0,30852	80	0,30835
25	0,30870	55	0,30848	85	0,30834
30	0,30866	60	0,30844	90	0,30833

Вблизи земной поверхности для вывода γ можно пользоваться не формулой (111.9.36) (или подобной по сложности формулой Капуто), а рядом

$$\gamma = \gamma_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 H + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2}\right)_0 H^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \gamma}{\partial H^3}\right)_0 H^3 + \dots \quad (111.9.76)$$

Кривизна силовой линии нормального поля не влияет на выводы с такой точностью.

Влияние двух последних членов мало (меньше 10 *мгал* и меньше 0,02 *мгал* соответственно при $H < 10$ км). Поэтому коэффициенты этих членов можно вычислять приближенно. Для сферической Земли имеем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2} \approx \frac{3fE}{\rho^4} \approx \frac{3\gamma_e}{\rho^2} \approx 0,0724 \quad (111.9.77)$$

$$\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \gamma}{\partial H^3} \approx -\frac{4fE}{\rho^5} = -\frac{4\gamma}{\rho^3} \approx -0,0000152$$

при $\rho = R_{ср} = 6371$ км, $\gamma_e = 978$ 030 *мгал*, если в соответственных членах высота H выражена в километрах и значение нормальной силы тяжести γ выражено в миллигалах.

Потенциал силы тяжести вблизи Земли также можно представить рядом

$$U = U_0 + \left(\frac{dU}{dH}\right)_0 H + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dH^2}\right)_0 H^2 + \dots \quad (111.9.78)$$

Коэффициенты при H и H^2 в (111.9.76) и (111.9.78) следует вычислять для поверхности нормального эллипсоида. Раскрывая значения этих коэффициентов в уравнении (111.9.78), получаем

$$U = U_0 - \gamma_0 H - \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 + \dots \quad (111.9.79)$$

Для производной от U по широте находим

$$\frac{\partial U}{\partial B} = -\frac{\partial \gamma_0}{\partial B} H - \frac{H^2}{2} \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 + \dots \quad (111.9.80)$$

и далее

$$\frac{\partial^2 U}{\partial B^2} = -\frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial B^2} H - \frac{H^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial B^2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 + \dots \quad (111.9.81)$$

Формула (111.9.80) позволяет определить угол ϵ между направлением нормальной силы тяжести и нормалью к эллипсоиду:

$$\begin{aligned} \epsilon &= [-\gamma(B, H), H] \approx -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{M \partial B} \approx \frac{H}{\gamma M} \frac{\partial \gamma_0}{\partial B} \approx \\ &\approx \frac{H}{M} \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha \omega^2}{\gamma_e} - \alpha \right) \sin 2B. \end{aligned} \quad (111.9.82)$$

Эта формула позволяет оценить погрешность ряда (III.9.76) из-за кривизны силовой линии нормального поля. Сравнив с точным соотношением

$$\gamma^2 = \left(-\frac{\partial U}{\partial H} \right)^2 + \left[-\frac{\partial U}{(M+H)\partial B} \right]^2,$$

первый член которого определен формулой (III.9.76), убеждаемся, что влияние второго члена на нормальную силу тяжести в земных условиях не превзойдет 0,00004 мгал.

Второй член справа в (III.9.80) отброшен из-за его малости: влияние этого члена на ϵ не больше 0'',004. При выводе удержанного в (III.9.82) члена допущена относительная погрешность порядка квадрата земного сжатия. Подставив численные значения, приближенно найдем

$$\epsilon \approx 0'', 17H \sin 2B, \quad (\text{III.9.83})$$

где H должно быть выражено в километрах.

Вектор направления нормальной силы тяжести в северном полушарии отклонен к югу от нормали к эллипсоиду.

Формула (III.9.83) впервые выведена Гауссом (1853) для эллипсоидальной земной поверхности, которую он, по всей вероятности, считал уровенной.

Геодезистам нет нужды знать распределение массы внутри нормальной Земли. Гравитационное поле нормального эллипсоида может быть объяснено неограниченно большим количеством способов распределения притягивающей массы. Одно из самых простых распределений такой массы можно получить, поместив в центр эллипсоида материальную точку с массой E и распределив на поверхности эллипсоида двойной слой с плотностью μ , удовлетворяющей неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \left(V_0 - \frac{fE}{\rho_0} \right) - \frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{d}{dH} \frac{1}{r} dS, \quad (\text{III.9.84})$$

где ρ_0 — значение радиуса-вектора для поверхности эллипсоида; r — расстояние между фиксированной точкой этой поверхности и элементом dS .

Пацетти (1894) объяснял нормальное поле уровенного эллипсоида, заполняя его однородной по плотности массой и добавляя эллиптический материальный слой. Подобный прием (однородный эллипсоид и поверхностную обкладку отрицательной плотности) использовал для этой же цели Ламберт (1961). Объемное распределение притягивающей массы внутри эллипсоида предлагает Моритц (1968).

Если иметь в виду условие о сходимости ряда (III.8.5), материальный слой нужно строить на некоторой поверхности внутри земной. Установив форму такой вспомогательной поверхности s и ее положение внутри нормального эллипсоида, можно определить плотность ν простого слоя, распределенного на поверхности s , из решения интегрального уравнения типа Фредгольма первого рода

$$\int \frac{\nu}{r} ds = V_0 - \frac{fE}{\rho_0},$$

где r — расстояние между элементом ds и фиксированной точкой на поверхности нормального эллипсоида.

Нормальное поле как поле жидкости, вращающейся в гидростатическом равновесии, для геодезистов не имеет преимуществ по сравнению с полем эллипсоида. В случае гидростатического вращения жидкости нормальное поле не может быть ближе к гравитационному полю реальной Земли, чем поле эллипсоида, так как главные отличия нормального поля от действительного обусловлены значительными коэффициентами при основных полиномах Лежандра третьего и других первых нечетных порядков, секториальными и тессеральными членами в разложении потенциала притяжения. Этих членов, согласно Лихтенштейну (1928), не может быть в поле жидкости. Даже коэффициент при основном полиноме Лежандра второго порядка в таком разложении для жидкости, по всей вероятности, отличен от этого коэффициента реальной Земли из-за нарушений гидростатического равновесия.

Леваллуа (1967) предлагает включить в нормальное поле Земли поле уровенного эллипсоида и притяжение топографических масс с их изостатической компенсацией. В этом случае возрастает влияние трех из последних четырех членов справа в формуле (III.8.12). А именно, если допустить, что влияние топографических масс на уклонение отвеса равно I' , то

$$| \sin(-\gamma_t, H_Q) M\Delta B | < 9 \text{ см},$$

если $\frac{\partial \gamma_t}{M\partial B_0} = 0,03 \text{ мгал/м}$; тогда

$$\left| \frac{\partial^2 U_t(B_0, H_Q)}{\gamma_t(B_0, H_Q) \partial H_Q \partial B_0} \zeta_Q \Delta B \right| < 0,9 \text{ мм};$$

если же

$$\frac{\partial^2 U}{M^2 \partial B_0^2} = 0,03 \text{ мгал/м},$$

то

$$\left| \frac{1}{\gamma(B_0, H_Q)} \frac{\partial^2 U(B_0, H_Q)}{2 \partial B_0^2} (\Delta B)^2 \right| < 1,4 \text{ мм}.$$

Влияние трех последних членов формулы (111.8.13) останется малым при таком усложнении нормального поля, влияние же второго члена, содержащего $\sin(-\gamma, H_Q)$, не пренебрегаемо. Таким образом, усложнение нормального поля приводит к усложнению гравиметрического метода определения фигуры Земли и вывода величины ζ_Q . Вычисление нормальной силы тяжести, а следовательно, и нормальных высот также весьма усложняется. Сходимость ряда (111.8.5) в этом случае может быть сомнительной.

в) Нормальное поле как поле нормального сфероида. Стокс (1849), Брунс (1878) и Гельмерт (1884) устанавливали нормальное поле по первым двум или трем членам ряда (111.9.3) с четными полиномами Лежандра. Например,

$$U_s = \frac{A_0}{\rho} + \frac{A_2 P_2(\cos \vartheta)}{\rho^3} + \frac{A_4 P_4(\cos \vartheta)}{\rho^5} + \frac{\omega^2}{3} \rho^2 (1 - P_2(\cos \vartheta)). \quad (111.9.85)$$

Последний член здесь представляет потенциал центробежной силы, начало координат совмещено с центром инерции массы, который лежит на оси вращения в экваториальной плоскости тела — плоскости его симметрии.

Приравнивая выражение (111.9.85) постоянной, можно получить уравнения уровенных поверхностей такого нормального потенциала U_s . Одну из этих поверхностей можно принять за отсчетную, на ней $U_s = U_0$. Эту уровенную поверхность нормального потенциала принято называть отсчетным нормальным сфероидом. Задавая постоянные значения нормального потенциала

$$U_s = U_0, \quad U_s = U_1, \dots, \quad U_s = U_n, \dots,$$

где $U_0 > U_1 > U_2 > \dots > U_n$, и, последовательно фиксируя значение геоцентрического полярного расстояния, можно определить форму отсчетного нормального сфероида и других уровенных поверхностей при $U_s < U_0$ таким образом определенного нормального потенциала. Иногда эти поверхности называют нормальными сфероидами. Из формулы (111.9.85) можно вывести любой элемент такого нормального поля. Например, дифференцированием формулы (111.9.85) можно вывести составляющие силы тяжести и вторые производные потенциала. Значения A_0 , A_2 и A_4 стремились выбирать по возможности близкими к соответственным значениям земного поля. Такое нормальное поле не следует связывать с полем жидкости, вращающейся в гидростатическом равновесии, так как сходимость ряда (111.9.3), как указано, сомнительна; из него выделены только первые члены, а коэффициенты A_2 , A_4 и некоторые из следующих, если они введены в нормальный потенциал, могут не соответствовать гидростатическому равновесию. Однако теория Гельмерта (1884, 1910) связывает установление нормального поля по формуле (111.9.85) с распределением плотности внутри Земли при гидростатическом равновесии: измерительных данных в то время было мало.

По формуле (111.9.45) можно выразить коэффициент A_4 через моменты инерции аналогично выражению коэффициента A_2 :

$$I = \int_{\tau} \delta x^4 d\tau, \quad G = \int_{\tau} \delta z^4 d\tau, \quad F = \int_{\tau} \delta x^2 z^2 d\tau. \quad (111.9.86)$$

Для тела вращения

$$\int_{\tau} \delta x^2 z^2 d\tau = \int_{\tau} \delta y^2 z^2 d\tau,$$

$$\int_{\tau} \delta x^2 y^2 d\tau = \frac{1}{3} \int_{\tau} \delta x^4 d\tau = \frac{1}{3} \int_{\tau} \delta y^4 d\tau$$

$$A^4 = f \int_{\tau} \delta \rho^4 \left(\frac{35}{8} \cos^4 \vartheta - \frac{15}{4} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{8} \right) d\tau = f \int_{\tau} \delta \rho^4 \left(\frac{35}{8} \cos^4 \vartheta - \right.$$

$$-\frac{15}{4} \cos^2 \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) + \frac{3}{8} [(\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta)^2] d\tau = \int_{\tau}^{\tau} \delta \left[\frac{35}{8} z^4 - \frac{15}{4} z^2 (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{8} (x^2 + y^2 + z^2)^2 \right] d\tau = f(I + G - 6F). \quad (111.9.87)$$

Раскрыв значения A_0, A_2, A_4 , вместо (111.9.85) можно написать

$$U_s = \frac{fE}{\rho} + \frac{f(A-C)}{\rho^3} P_2(\cos \vartheta) + \frac{f(I+G-6F)}{\rho^5} P_4(\cos \vartheta) + \frac{\omega^2}{3} \rho^3 [1 - P_2(\cos \vartheta)] \quad (111.9.88)$$

или

$$U_s = \frac{fE}{\rho} \left\{ 1 - \frac{(C-A)}{a^2 E} \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) + \frac{\omega^2 a^3}{3fE} \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \times \right. \\ \left. \times (1 - P_2(\cos \vartheta)) - \frac{6F - I - G}{a^4 E} \left(\frac{a}{\rho} \right)^4 P_4(\cos \vartheta) \right\}, \quad (111.9.89)$$

что соответствует рекомендации 7-й комиссии Международного астрономического союза (Хагихара, 1962; см. также материалы 11-й генеральной ассамблеи этого союза — Proceedings..., 1962, стр. 173—174) представлять разложение потенциала земного притяжения в виде

$$V = \frac{fE}{\rho} \left\{ 1 - \sum_0^{\infty} J_n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n P_n(\cos \vartheta) + \text{тессеральные члены} \right\}. \quad (111.9.90)$$

В формуле (111.9.89) a обозначает большую полуось отсчетного нормального сфероиды, в формуле (111.9.90) — отсчетного эллипсоида. Второй и третий члены в фигурных скобках в (111.9.89) имеют порядок земного сжатия, последний член — порядок квадрата земного сжатия.

Задав значение $U_s = U_0$, по (111.9.89) в соответствии с обозначениями в (111.9.90) последовательными приближениями можно вычислить радиус-вектор ρ_s отсчетного нормального сфероиды

$$\rho_s = \frac{fE}{U_0} \left\{ 1 - J_2 \left(\frac{a}{\rho_s} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) + \frac{\omega^2 a^3}{3fE} \left(\frac{\rho_s}{a} \right)^3 \times \right. \\ \left. \times (1 - P_2(\cos \vartheta)) - J_4 \left(\frac{a}{\rho_s} \right)^4 P_4(\cos \vartheta) \right\}. \quad (111.9.91)$$

Нормальное значение силы тяжести на нормальном сфероиде определено формулой

$$\gamma_s^2 = \left(-\frac{\partial U_s}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_s}^2 + \left(\frac{\partial U_s}{\rho_s d\vartheta} \right)_{\rho=\rho_s}^2. \quad (111.9.92)$$

Для значения силы тяжести на поверхности нормального сфероиды Гельмерт (1901, 1910) вывел приближенно (формула 1901—1909 гг.)

$$\gamma_s = \gamma_e \left(1 + b \sin^2 B - \frac{1}{4} b_4 \sin^2 2B \right) = \gamma_e (1 + b_2 \sin^2 B + b_4 \sin^4 B), \quad (111.9.93)$$

где $b = b_2 + b_4$, $\gamma = 978,030$ гала, $b = 0,005 302$, $b^2 = 0,005 274$, $b_4 = 0,000 028$.

Экваториальная постоянная γ_e и коэффициент b выведены по выполненным к тому времени измерениям силы тяжести. Для вывода коэффициента при $\sin^2 2B$ использованы данные о распределении плотности внутри Земли при ее вращении в гидростатическом равновесии.

Сжатие α_s нормального сфероиды Гельмерт вычислял так:

$$\alpha_s = \left(\frac{5}{2} \frac{a\omega^2}{\gamma_e} - b \right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a\omega^2}{\gamma_e} + \frac{\alpha_s}{21} + \frac{a\omega^2}{21\gamma_e} \right) + \frac{2}{21} b_4. \quad (111.9.94)$$

Приняв $a = 6 378 200$ м, $q = \frac{a\omega^2}{\gamma_e} = 0,003 4678$, Гельмерт получил $\alpha_s = 1 : 298,2$.

Нетрудно вывести сжатие α нормального эллипсоида, соответствующее численному значению коэффициента b_2 Гельмерта.

Из (111.9.68) выводим уравнение

$$\alpha = -0,005274 + \frac{5}{2} q + \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{5}{2} q \left(\frac{118}{245} \alpha^2 - \frac{52}{35} \alpha \right) \quad (111.9.95)$$

и последовательными приближениями находим $a=1:297,799$ при $a=6\,378\,245$ м, $\gamma_e=978,030$ гал, $\omega=0,000\,072\,921\,151$ сек⁻¹, $q=0,003\,467\,802$.

Разности $\gamma_0-\gamma_s$ значений нормальной силы тяжести по формуле Гельмерта 1901—1909 гг. и формуле (111.9.73) составляют в миллигалах:

B	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\gamma_0-\gamma_s$	0	+0,1	+0,5	+1,1	+1,5	+1,7	+1,6	+1,4	+1,1	+1,1

Эти величины значительны в сравнении с точностью современных измерений, поэтому в странах социалистического содружества следовало бы использовать для вывода нормальной силы тяжести формулу (111.9.73), а не формулу Гельмерта.

Для радиуса-вектора нормального сфероида Гельмерт вывел приближенно

$$\rho_s = a \{ 1 - [\alpha_s (1 + b - \alpha_s) + d] \cos^2 \vartheta + [\alpha_s (b - \alpha_s) + d] \cos^4 \vartheta \}, \quad (111.9.96)$$

где

$$d = \frac{1}{3} (7\alpha_s^2 - 4\alpha_s b + b_4).$$

Максимальное поднятие нормального сфероида над эллипсоидом с такими же значениями полуосей, как и сфероида, Гельмерт оценил в $\frac{1}{12} a \left(\frac{1}{2} \alpha_s^2 + \alpha_s b - b_4 \right)$.

Большой интерес теперь представляют разности полуосей сфероида и эллипсоида при одинаковом значении потенциала U_0 на этих поверхностях. Приняв $iE = 398\,603 \cdot 10^9$ м³/сек², большую полуось эллипсоида $a=6\,378\,160$ м, $J_2=0,001\,0827$, $J_4=-1,6 \cdot 10^{-6}$ (последнее близко к значениям, выводимым теперь по движению искусственных спутников), находим такие разности в метрах:

B	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\rho_s-\rho$	-1,9	-1,4	-0,1	+1,4	+1,9	+1,6	-0,1	-2,4	-4,2	-5,0

Эти величины также не пренебрегаемы.

Для вертикального градиента силы тяжести на поверхности нормального сфероида Гельмерт (1884, 1910) приближенно получил

$$\left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial H_s} \right)_0 = -\frac{2}{a} \gamma_s (1 + \alpha + q - 2\alpha \sin^2 B).$$

Если нормальное поле задано как поле нормального сфероида, при вычислении высот H необходимо учесть высоты отсчетного нормального сфероида над отсчетным эллипсоидом.

Гравитационное поле нормального сфероида теперь в практике почти не употребляется, оно приобретает исторический интерес. Только формула Гельмерта (111.9.93) еще находит применение в странах, использующих эллипсоид Красовского как отсчетный, так как принято считать соответствующее этой формуле земное сжатие близким к сжатию эллипсоида Красовского. При современной точности измерений и выводов такое допущение уже не справедливо.

§ 10. Формулы для нормальной высоты, разности нормальных высот, теоретической невязки нивелирного полигона. Некоторые практические указания

Как заметил Велкоборский (1967), точное уравнение для нормальной высоты можно вывести из формулы (11.2.8), определяющей эту высоту, и выражения (111.9.34) для нормального потенциала. Для этого в (111.9.34) нужно подставить выражения (111.9.10) и (111.9.11), в которых в свою очередь радиус-вектор ρ и координата z представлены по формулам (1.1) через геодезическую широту и высоту. Такое уравнение сложно и неудобно для вычислений.

Более просто нормальную высоту можно вывести непосредственно из (111.8.8). Изложим выводы формул для нормальной высоты, разности нормальных высот и теоретической невязки нивелирного полигона по работам Еремеева (1951, 1965).

Согласно определению потенциальной функции, для вывода нормальной высоты $H_Q(K)$ точки K земной поверхности получаем

$$\begin{aligned} - \int_{(OK)} g dh_w &= U [B_0(K), H_Q(K)] - U_0 = \int_{(O'K)} dU = \\ &= - \int_0^{H_Q(K)} \gamma \cos(-\gamma, H) dH_Q, \end{aligned} \quad (\text{III.10.1})$$

где O' — точка поверхности нормального эллипсоида; H — высота над этой поверхностью. Пользуясь (III.9.83) и опуская обозначение K для упрощения записи, находим

$$- \int_{(OK)} g dh_w = - \int_0^{H_Q} \gamma \cos \varepsilon dH_Q \approx - \int_0^{H_Q} \gamma \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) dH_Q = - \gamma_m H_Q + \frac{1}{2} \int_0^{H_Q} \gamma \varepsilon^2 dH_Q.$$

Таким образом,

$$H_Q \approx \frac{1}{\gamma_m} \int_{(OK)} g dh_w + \frac{1}{2\gamma_m} \int_0^{H_Q} \gamma \varepsilon^2 dH_Q. \quad (\text{III.10.2})$$

Здесь γ_m обозначает среднее интегральное значение нормальной силы тяжести по высоте от поверхности нормального эллипсоида до высоты, равной H_Q , т. е.

$$\gamma_m(K) = \frac{1}{H_Q(K)} \int_0^{H_Q(K)} \gamma dH_Q. \quad (\text{III.10.3})$$

Последний член справа в (III.10.2) весьма мал и его можно отбросить. Действительно, этот член равен

$$\frac{1}{2\gamma_m} \int_0^{H_Q} \gamma \varepsilon^2 dH_Q \approx \frac{1}{6} (0'', 17 \sin 2B)^2 H_Q^3,$$

где H_Q должно быть выражено в километрах, и не может быть больше 0,0001 км даже при $H_Q = 10$ км.

Таким образом, находим основную формулу для нормальной высоты

$$H_Q = \frac{1}{\gamma_m} \int_{(OK)} g dh_w. \quad (\text{III.10.4})$$

Как видно из (III.10.1) и (III.10.4), нормальная высота не зависит от пути нивелирования. Для точек одной и той же уровенной поверхности, если они лежат на одной и той же параллели, нормальные высоты равны; если же они лежат на одном и том же меридиане, — различны.

Среднее значение γ_m нормальной силы тяжести по высоте, исходя из формулы (III.9.76), можно представить так:

$$\gamma_m = \gamma_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 H + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2} \right)_0 H^2 + \dots \quad (\text{III.10.5})$$

Формулы (III.10.4) и (III.10.5) приводят к уравнению относительно нормальной высоты H_Q

$$H_Q = \left[\gamma_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 H_Q + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2} \right)_0 H_Q^2 + \dots \right]^{-1} \int_{(OK)} g dh_w, \quad (\text{III.10.6})$$

которое можно решить последовательными приближениями.

Однако практически таких приближений, как правило, не потребуется, так как при последовательном вычислении нормальных высот от начала их счета будет известна приближенная высота

$$H_p(K) = H_Q(I) + \int_{(IK)} dh_w = H_Q(I) + h_w(IK), \quad (\text{III.10.7})$$

близкая к нормальной высоте $H_Q(K)$ точки K . Вычисления по (III.10.6) практически не удобны.

Определим разность нормальных высот в двух точках I и K земной поверхности. Пусть линия нивелирования OK включает в себе более короткую линию нивелирова-

ния OI : это всегда можно предположить, поскольку нас интересует только часть IK этой линии. Выразим разность нормальных высот так:

$$\begin{aligned} H_Q(K) - H_Q(I) &= \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(OK)} g dh_w - \frac{1}{\gamma_m(I)} \int_{(OI)} g dh_w = \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(OI)} g dh_w + \\ &+ \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} g dh_w - \frac{1}{\gamma_m(I)} \int_{(OI)} g dh_w = \frac{\gamma_m(I) - \gamma_m(K)}{\gamma_m(I) \gamma_m(K)} \int_{(OI)} g dh_w + \\ &+ \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} g dh_w = \frac{\gamma_m(I) - \gamma_m(K)}{\gamma_m(K)} H_Q(I) + \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} g dh_w. \end{aligned} \quad (111.10.8)$$

Для практических вычислений удобнее ввести в формулу аномалии силы тяжести. Получим такую формулу. При

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 = -k_1, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2} \right)_0 = k_2 \quad (111.10.9)$$

преобразуем первый член формулы (111.10.8), используя (111.10.5):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_m(I) - \gamma_m(K)}{\gamma_m(K)} H_Q(I) &\approx \frac{H_Q(I)}{\gamma_m(K)} \left\{ \gamma_0(I) - \gamma_0(K) - \right. \\ &\left. - \frac{k_1}{2} [H_Q(I) - H_Q(K)] + \frac{k_2}{3} [H_Q^2(I) - H_Q^2(K)] \right\}. \end{aligned} \quad (111.10.10)$$

Наибольший из отброшенных в уравнении (111.10.5) членов согласно оценке (111.9.77) может изменить величину γ_m при $H=10$ км на 0,004 мгал и вызвать погрешность в (111.10.10) не больше 0,04 мм.

Преобразуем теперь второй член формулы (111.10.8)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} g dh_w &= \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} (g - \gamma + \gamma - \gamma_m(K) + \gamma_m(K)) dh_w = \\ &= \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} (g - \gamma) dh_w + \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} (\gamma - \gamma_m(K)) dh_w + \int_{(IK)} dh_w, \end{aligned} \quad (111.10.11)$$

выбирая γ так, чтобы разность $g - \gamma$ была близка к смешанной аномалии силы тяжести, т. е. вычисляя значение γ по (111.9.76) при $H = H_p \approx H_Q$ (значения γ в первом и втором членах формулы (111.10.11) должны совпадать).

Раскроем второй член в (111.10.11), пользуясь (111.9.76) и (111.10.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} [\gamma - \gamma_m(K)] dh_w &= \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w - \frac{k_1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} \left(H_Q(I) + h_w - \right. \\ &\left. - \frac{H_Q(K)}{2} \right) dh_w + \frac{k_2}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} \left[(H_Q(I) + h_w)^2 - \frac{H_Q^2(K)}{3} \right] dh_w. \end{aligned} \quad (111.10.12)$$

Здесь мы пренебрегли зависимостью коэффициента k_1 , т. е. градиента $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0$, от широты B .

Если допустить ошибку 1 мм в вычислении нормальной высоты при $H=6$ км за счет только ошибки в величине γ_m , то, как следует из (111.10.4), значение γ_m в этой формуле можно вычислять с ошибкой 0,17 мгал. Если эту ошибку отнести целиком к влиянию неточности коэффициента k_1 , то

$$\delta k_1 = 0,00006.$$

Из табл. 2 для коэффициента k_1 следует, что при нашем условии коэффициент k_1 можно считать постоянным внутри полосы с разностью широт около 10° . При меньших высотах разность широт в полосе может быть больше в обратной зависимости от высоты. При высотах до 1 км и точности их вывода $\pm 0,2$ мм можно принять $\Delta \gamma_m = 0,2$ мгал и, допустив $\delta k_1 = 0,0004$, сохранять коэффициент k_1 постоянным для всей Земли.

Учет изменений коэффициента k_1 при высоте H во втором члене уравнения (111.10.12) мало изменил бы результат. Пусть в наименее благоприятном случае расстояние $IK = 20$ км $\approx 0,2$ (как правило, расстояние между реперами значительно мень-

ше) и линия IK расположена на широте 45° . Тогда вычисление рассматриваемого члена при двух значениях коэффициента k_1 , соответствующих концам линии, привело бы при $H=6$ км и $\int dh_w = 6$ км к разности превышения в $\sim 0,05$ мм.

Принтегрируем два последних члена в уравнении (III.10.12):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} [\gamma - \gamma_m(K)] dh_w &= \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w + \frac{k_1}{2\gamma_m(K)} \{H_Q(K) [H_p(K) - \\ &- H_Q(I)] - [H_p(K) - H_Q(I)]^2 - 2H_Q(I) [H_p(K) - H_Q(I)]\} + \frac{k_2}{3\gamma_m(K)} \{3H_Q^2(I) \times \\ &\times [H_p(K) - H_Q(I)] + 3H_Q(I) [H_p(K) - H_Q(I)]^2 + [H_p(K) - H_Q(I)]^3 - \\ &- H_Q^2(K) [H_p(K) - H_Q(I)]\}. \end{aligned} \quad (III.10.13)$$

Из (III.10.8), (III.10.10), (III.10.11) и (III.10.13) находим

$$\begin{aligned} H_Q(K) - H_Q(I) &= \int_{(IK)} dh_w + \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w + \\ &+ \frac{H_Q(I)}{\gamma_m(K)} [\gamma_0(I) - \gamma_0(K)] + \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} (g - \gamma) dh_w + \delta, \end{aligned} \quad (III.10.14)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{k_1}{2\gamma_m(K)} [H_Q(K) H_p(K) - H_p^2(K)] + \\ &+ \frac{k_2}{3\gamma_m(K)} [H_p^3(K) - H_Q^2(K) H_p(K)]. \end{aligned} \quad (III.10.15)$$

Если в первом приближении принять $H_Q(K) = H_p(K)$, то $\delta = 0$. При $H = 6$ км, $H_Q(K) = H_p(K) = 10$ см находим $\delta = 0,1$ мм. Таким образом, поправка δ весьма мала и ею можно пренебречь в практических вычислениях: заметные систематические искажения из-за этой поправки маловероятны.

Аналогичный результат можно получить, выбрав значение γ так, чтобы разность $g - \gamma$ была равна смешанной аномалии силы тяжести. И в этом случае алгебраическая сумма

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} [\gamma - \gamma_m(K)] dh_w - \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w + \\ &+ \frac{\gamma_m(I) - \gamma_m(K)}{\gamma_m(K)} H_Q(I) - \frac{\gamma_0(I) - \gamma_0(K)}{\gamma_m(K)} H_Q(I) \end{aligned}$$

близка к нулю и ее величина в самых неблагоприятных условиях пренебрегаема. Представив величину Δ проще

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} [(\gamma - \gamma_0) - (\gamma_m(K) - \gamma_0(K))] dh_w + \\ &+ \frac{H_Q(I)}{\gamma_m(K)} [(\gamma_m(I) - \gamma_m(K)) - (\gamma_0(I) - \gamma_0(K))] \end{aligned}$$

и преобразовав, найдем

$$\begin{aligned} \Delta &= - \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} k_1 \left[H_Q - \frac{1}{2} H_Q(K) \right] dh_w + \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} k_2 \left[H_Q^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} H_Q^2(K) \right] dh_w - \frac{H_Q(I)}{\gamma_m(K)} \left\{ \frac{k_1}{2} [H_Q(I) - H_Q(K)] - \frac{k_2}{3} [H_Q^2(I) - H_Q^2(K)] \right\}. \end{aligned}$$

Интегралы в первом и втором членах легко вычислить, заменив элементарное нивелирное превышение dh_w на приращение dH_Q нормальной высоты. Зависимость между dh_w и dH_Q можно вывести из формулы (II.2.8), определяющей нормальную высоту. Поскольку ошибка ΔB широты пренебрегаема при выводе высоты квазигеоида по формуле (III.8.19) и мало влияет на точность граничного условия (III.8.22) для возмущающего потенциала, примем $\Delta B = 0$. Тогда

$$-g dh_w = \frac{\partial U(B, H_Q)}{\partial B} dB + \frac{\partial U(B, H_Q)}{\partial H_Q} dH_Q.$$

Используя (III.9.82), находим

$$gdh_w = \gamma(B, H_Q) dH_Q + H_Q \frac{\partial \gamma_0}{\partial B} dB.$$

и

$$dH_Q = dh_w + \frac{g - \gamma}{\gamma} gh_w - \frac{H_Q}{\gamma} \frac{\partial \gamma_0}{\partial B} dB. \quad (III.10.16)$$

Замена элементарного нивелирного превышения dh_w на приращение dH_Q в первом интеграле согласно (III.10.16) требует учета интегралов

$$I_1 = \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} k_1 \left[H_Q - \frac{1}{2} H_Q(K) \right] \frac{H_Q}{\gamma} \frac{\partial \gamma_0}{\partial B} dB,$$

$$I_2 = \frac{1}{\gamma_m(K)} \int_{(IK)} k_1 \left[H_Q - \frac{1}{2} H_Q(K) \right] \frac{g - \gamma}{\gamma} dh_w.$$

Первый из них при нивелировании по параллели равен нулю. Оценим этот интеграл при нивелировании по меридиану, допустив

$$H_Q = H_Q(I) - H_Q(I) \frac{B - B_I}{B_K - B_I},$$

следовательно, $H_Q(K) = 0$. Примем для градиента $\frac{\partial \gamma_0}{\partial B}$ его максимальную величину $0,01 \gamma_e$. Тогда

$$I_1 = \frac{0,01 k_1}{\gamma_m(K)} \frac{H_Q^2(I)}{(B_K - B_I)^2} \int_{(IK)} (B_K - B)^2 dB;$$

при $H_Q(I) = 10$ км, $B_K - B_I = 10'$ находим $I_1 = 0,3$ мм.

Если же $H_Q = H_Q^0(I) = H_Q(K) = 10$ км, то при тех же остальных условиях выведем $I_1 = 0,5$ мм.

Для оценки интеграла I_2 примем $g - \gamma = \text{const}$. Тогда

$$I_2 \approx \frac{k_1 (g - \gamma)}{\gamma^2} \int_{(IK)} \left[H_Q - \frac{1}{2} H_Q(K) \right] dH_Q = \frac{k_1 (g - \gamma)}{2\gamma^2} H_Q(I) [H_Q(K) - H_Q(I)]$$

и при $g - \gamma = 200$ мгал, $H_Q(K) = 0$, $H_Q(I) = 10$ км выводим $I_2 = -3$ мм.

Замена величины dh_w на приращение dH_Q во втором интеграле формулы для Δ приводит к еще меньшим погрешностям. Выполнив такую замену и проинтегрировав, найдем

$$\Delta = 0$$

с точностью до суммы $I_1 + I_2$. На практике интегралами I_1 и I_2 можно пренебрегать, поскольку их величина много меньше ошибок нивелировки. Если бы потребовался учет этих величин при особо аккуратных и точных выводах высот, были бы необходимы соответственные малые уточнения величины γ в предпоследнем члене формулы (III.10.14), так как при таком подходе к вычислению нормальных высот эта величина должна быть выведена по нормальной высоте и потому требует последовательных приближений. Сумма $I_1 + I_2$ теперь заменяет поправку δ .

Если нивелирная линия замкнута, из (III.10.14) можно вывести теоретическую невязку

Из (III.10.16) следует

$$\oint dh_w = - \frac{1}{\gamma_m(K)} \oint [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w - \frac{1}{\gamma_m(K)} \oint (g - \gamma) dh_w, \quad (III.10.17)$$

где точка K является произвольной.

Теперь нетрудно вывести простые практические формулы для разности ΔH_Q нормальных высот в настолько близких точках, что превышение Δh_w между ними можно считать элементарным.

$$\Delta H_Q = \Delta h_w + \frac{1}{\gamma_m} (g - \gamma)_m \Delta h_w - \frac{H_m}{\gamma_m} \Delta \gamma_0, \quad (III.10.18)$$

где $(g - \gamma)_m$ — среднее из аномалий силы тяжести в соседних точках n и $n+1$; $\Delta \gamma_0$ — приращение нормальной силы тяжести γ_0 при переходе от точки n к точке $n+1$; γ_m —

среднее из средних значений нормальной силы тяжести вдоль нормальных высот этих точек,

$$H_m = H_Q(n) + \frac{1}{2} \Delta h_w.$$

Формулу (111.10.18) можно использовать для вывода разности нормальных высот и при сравнительно больших расстояниях между реперами, если известен профиль нивелирной линии (хотя бы снятый с карты). Порядок таких вычислений описан авторами (1955). Суммируя последовательно от точки I до точки K , находим

$$\begin{aligned} H_Q(K) - H_Q(I) &= \sum_{(IK)} \Delta h_w - \sum_{(IK)} \frac{H_m}{\gamma_m} [\gamma_0(n+1) - \gamma_0(n)] + \\ &+ \sum_{(IK)} \frac{(g-\gamma)_m}{\gamma_m} \Delta h_w. \end{aligned} \quad (111.10.19)$$

Если гравитационное поле Земли совпадает с нормальным (т. е. $g-\gamma=0$), нивелирная линия лежит на уровне поверхности (т. е. $\Sigma h_w=0$), точки I и K расположены на одном меридиане, то при $IK=1^\circ$ согласно (111.9.73) находим $\gamma_0(K) - \gamma_0(I) \approx 90$ *мгал* и, положив $H_Q(I) = 5$ *км*, по (111.10.19) выводим разность нормальных высот $H_Q(I) - H_Q(K) \approx 45$ *см*. Эта разность пропорциональна высоте точек и может иметь значение даже при малых высотах. При гидротехнических работах такие разности нужно принимать во внимание. Наш расчет характеризует возможные поправки за переход от измеренных высот к нормальным.

Применив формулу (111.10.19) к замкнутой нивелирной линии, выводим формулу для теоретической невязки, удобную для вычислений

$$\sum \Delta h_w = \sum \frac{H_m}{\gamma_m} \Delta \gamma_0 - \sum \frac{(g-\gamma)_m}{\gamma_m} \Delta h_w. \quad (111.10.20)$$

Эту формулу целесообразно использовать при одновременном вычислении нормальных высот. Если же такая цель не преследуется, вывод теоретической невязки можно несколько упростить (Гельмерт, 1883, 1884), не затрудняя себя вычислением значений нормальной силы тяжести. Действительно, поскольку для замкнутой нивелирной линии

$$\oint g dh_w = 0,$$

имеем

$$\oint g dh_w = \oint (g - g_0 + g_0) dh_w = g_0 \oint dh_w + \oint (g - g_0) dh_w = 0$$

и

$$\oint dh_w = \frac{1}{g_0} \oint (g_0 - g) dh_w, \quad (111.10.21)$$

где g_0 — некоторое фиксированное значение, близкое к значениям силы тяжести на нивелирном полигоне.

При достаточной частоте и точности измерений силы тяжести вдоль нивелирной линии теоретическую невязку можно вычислить с высокой точностью даже при низкой точности измеренных превышений.

Действительно, пусть

$$dh_w = dh - \delta h,$$

где δh — ошибки элементарных нивелирных превышений dh_w . Теоретическую невязку представим теперь так:

$$\oint dh_w = -\frac{1}{\gamma_m(K)} \oint (g - \gamma) dh_w - \frac{1}{\gamma_m(K)} \oint (\gamma - \gamma_m(K)) dh_w.$$

Подставив сюда выражение dh_w , найдем

$$\oint dh_w = -\frac{1}{\gamma_m(K)} \oint (g - \gamma) dh - \frac{1}{\gamma_m(K)} \oint (\gamma - \gamma_m(K)) dh - \frac{1}{\gamma_m(K)} \oint (g - \gamma_m(K)) \delta h.$$

Допустим, что ошибки δh в сумме равны 1 *м*, $g - \gamma_m(K) = 1000$ *мгал*, тогда последний член этой формулы равен 1 *мм*.

Нормальные высоты изменяются при переходе к новой отсчетной системе (новой нормальной формуле силы тяжести) и к новой системе исходных гравиметрических пунктов. Если в результате изменения экваториальной постоянной нормальной формулы и сжатия отсчетного уровенного эллипсоида, среднее интегральное значение γ_m

нормальной силы тяжести изменилось на $\Delta\gamma_m$ и δ обозначает поправку системы исходных гравиметрических пунктов, то

$$\Delta H_Q = -\frac{\Delta\gamma_m}{\gamma_m} H_Q + \frac{\delta}{\gamma_m} H_i.$$

Таким образом, соответственные пересчеты системы нормальных высот весьма просты.

С помощью первого члена последней формулы нетрудно оценить погрешность в нормальной высоте из-за неточного вычисления нормальной силы тяжести. Если в соответствии с погрешностью формулы Гельмерта (1901—1909) относительно формулы (III.9.73) $\Delta\gamma_m = 2$ *мгал*, то при $H_Q = 1$ *км* погрешность ΔH_Q равна 2 *мм*. Эта погрешность возрастает пропорционально высоте.

Поправка за непараллельность уровней поверхностей нормального потенциала ($g - \gamma = 0$), как это следует из (III.10.19), зависит от протяженности и направления нивелирной линии, а также от высоты ее точек. Если нивелирная линия расположена в направлении меридиана, эта поправка будет наибольшей, а если в направлении параллели — равна нулю. Влияние нормального гравитационного поля охарактеризовано выше. При оценке влияния аномалий силы тяжести важно отметить следующее.

Неверно было бы думать, что поправка $\sum \frac{(g - \gamma)_m}{\gamma_m} \Delta h_w$ в разность измеренных высот при переходе к разности нормальных высот [см. (III.10.19)] всегда мала и пренебрегаема в холмистых и равнинных районах. Может оказаться, что аномалии $g - \gamma$ и нивелирные превышения будут одного знака. Тогда сумма $\sum \frac{(g - \gamma)_m}{\gamma_m} \Delta h_w$ может быть

значительной и при малых высотах точек земной поверхности вдоль нивелирной линии. Если, например, абсолютные величины аномалий близки к 50 *мгал*, сумма абсолютных величин превышений достигает 2 *км* (при большом протяжении нивелирной линии по пересеченной местности это возможно) и знаки согласуются, то сумма $\sum \frac{(g - \gamma)_m}{\gamma_m}$ достигнет величины около 10 *см*. Таким образом, не только в горных, но и в равнинных районах вычислять нормальные высоты нужно аккуратно, чтобы не увеличивать невязки в нивелирных полигонах.

Два последних члена в правой части формулы (III.10.19) независимы между собой и каждый из них, как было отмечено выше, может иметь величину, с которой на практике необходимо считаться, а значит и учитывать ее.

Из многочисленных вычислений нормальных высот выяснилась их близость к измеренным высотам, а следовательно, удобство их практического использования (см., например, Еремеев и Звонов, 1953). Это свойство нормальных высот нашло также подтверждение при опытных проверках других способов вывода высот. Такие проверки указаны в следующем параграфе.

Для вычисления значений γ_0 следовало бы составлять таблицы по формуле (III.9.73). Как было указано, формула (III.9.93), выведенная Гельмертом, дает значения γ_0 , отличные от вычисленных по формуле (III.9.73), на величину до 2 *мгал*. По формуле (III.9.93) составлены подобные таблицы (Буланже, Михайлов, Парийский, 1949).

При вычислениях по формулам (III.10.19) или (III.10.20) с ошибкой порядка 1 *мм* нужно нивелирную линию разбить на части с изменениями широт около 2° и высот около 1 *км*, установив в каждой части среднее γ_m с точностью в три или четыре значащие цифры. Таким образом, вывод этой величины можно упростить и принимать ее постоянной для больших отрезков нивелирных линий или даже для нивелирной линии целиком. Тогда

$$\gamma_m = \gamma_0(B_{cp}) - \frac{1}{2} K_1 H_{cp},$$

где γ_0 должно быть вычислено по аргументу B_{cp} — средней широты отрезка линии или всей линии (в целых градусах); H_{cp} — средняя высота реперов этой линии (в метрах, с округлением до целых тысяч). Даже четыре значащие цифры в среднем значении γ_m обеспечат вывод этого среднего с точностью 50 *мгал*, что достаточно при выводе разности нормальных высот с точностью 0,1 *мм*.

Вычисление нормальных высот по формуле (III.10.19) иллюстрировано примером из работы Еремеева и Звонова (1953). В таблицах примера показана точность, с которой должны быть взяты или вычислены отдельные члены или множители формулы (III.10.19). При выводе поправок за силу тяжести при современной точности геометрического нивелирования ее достаточно измерять с точностью ± 1 *мгал*, определяя плановое положение гравиметрических пунктов с точностью ± 500 *м* (подробнее о требованиях к гравиметрической съемке вдоль нивелирных линий сказано ниже).

Если значения силы тяжести в соседних точках n и $n+1$, которым соответствует превышение h_w , не измерены, их можно снять с гравиметрической карты, составленной в редукции Буге, или с топографической. Ошибка интерполяции значений силы тяжести между гравиметрическими пунктами бывает, как правило, на таких картах меньше, чем на картах аномалий ($g-\gamma$). Использование гравиметрических карт в редукции Буге или топографической может привести в горных и холмистых районах к заметному уменьшению (в два или три раза) ошибки интерполяции силы тяжести по сравнению с непосредственным использованием карт аномалий ($g-\gamma$). Косвенную интерполяцию аномалий ($g-\gamma$) через аномалии Буге нужно применять и при интерполяции силы тяжести между пунктами ее измерения.

Аномалию Δg_B силы тяжести с редукцией Буге определяет формула

$$\Delta g_B = (g - \gamma) - kH_Q, \quad (111.10.22)$$

где

$$k = 2\pi fD;$$

здесь D — плотность топографической массы. При $D=2,67 \text{ г/см}^3$ имеем $k=0,1118 \text{ мгал/м}$; при $D=2,3 \text{ г/см}^3$ имеем $k=0,0963 \text{ мгал/м}$. Хойницкий (1960) предлагает принять $k=0,1$, тогда $D=2,39$. При таком значении коэффициента k удобно вычисление по формуле (111.10.22) и обратный переход от аномалий Δg_B к аномалиям ($g-\gamma$)

$$g - \gamma = \Delta g_B + kH_Q, \quad (111.10.21)$$

хотя точность интерполяции будет выше, если принятая плотность D будет соответствовать действительности.

Последние члены этих формул определяют влияние на силу тяжести неограниченного плоского однородного слоя толщиной H_Q . Основное влияние на силу тяжести оказывает вертикальный столб этого слоя, расположенный под гравиметрическим пунктом или точкой, для которой значение силы тяжести нужно проинтерполировать. Уменьшение ошибки интерполяции силы тяжести при использовании формулы (111.10.23) происходит из-за удаления из гравитационного поля влияния ближайших аномальных масс — масс топографии, возвышающихся над уровнем моря. Такое удаление нельзя выполнить точно с помощью формулы (111.10.22): в разных гравиметрических пунктах, если их высоты H_Q различны, бывает удалена разная топографическая масса и в результате оказывается, что нет такой Земли, какой бы соответствовала гравиметрическая карта с редукцией, вычисленной по формуле (111.10.22). Однако эти искажающие эффекты в равнинных и холмистых районах не существенны.

В первом приближении вместо высот H_Q в (111.10.22) и (111.10.23) можно использовать высоты H_i или H_p . При обратном переходе по формуле (111.10.23) следует использовать именно то значение коэффициента k , которое было принято при составлении гравиметрической карты.

При топографической редукции силы тяжести указанных искажающих эффектов не возникает или они уменьшены. Эта редукция учитывает влияние на силу тяжести или всех топографических, как правило, однородных по плотности масс Земли, или только влияние топографических масс некоторой области, хотя бы заключенных внутри кругового цилиндра, ось которого совпадает с высотой гравиметрического пункта. Именно в этом последнем случае разным гравиметрическим пунктам может соответствовать разная остаточная земная масса. Однако такой остаточный эффект, как правило, пренебрегаем.

Такую топографическую редукцию силы тяжести вычисляют по формуле

$$\Delta g_T = (g - \gamma) - kH_Q + \Delta g_p, \quad (111.10.24)$$

если нужно учесть влияние близких к гравиметрическому пункту топографических масс, расположенных внутри окружности радиусом 30—166,7 км. Последнее число обозначает внешний радиус зоны O Хейфорда, палетку которого для численного интегрирования при вычислении поправки Δg_p , как правило, использовали раньше, при ручном счете. Поправка Δg_p за рельеф местности в формуле (111.10.24) учитывает отступление формы земной поверхности от плоскости, ограниченность области учета топографической массы и отличие отчетной поверхности от плоскости. Последние два влияния при радиусе учета топографической массы, близком к 166,7 км, составляют не более нескольких миллигалов. В горной местности поправка Δg_p может достигать нескольких десятков миллигалов. Способы численного интегрирования для вывода поправки Δg_p описаны в курсах теории фигуры Земли и гравиметрии и в большом числе специальных работ. Некоторые детали вычисления по формуле (111.10.24) приведены Юркиной (1954). Как недавно выяснено Г. А. Алексашиной, формулы, пригодные для вычисления поправки за рельеф на электронных вычислительных машинах, по-ви-

димому, впервые вывел астроном Петерс (1845, 1855), работавший тогда в Пулковской обсерватории.

Из (111.10.24) следует

$$g - \gamma = \Delta g_T + kH_Q - \Delta g_p. \quad (111.10.25)$$

Интерполяция аномалий ($g - \gamma$) по формуле (111.10.23) рекомендована Гельмертом (1901), по формуле (111.10.25) — Хильферкером (1910). Интерполяцию по формуле (111.10.23) описал и исследовал Молоденский (1939). Шмидт (1963) использовал формулу (111.10.25) при выводе геопотенциальных отметок (см. § 6) в земле Баден-Вюртемберг. В детально исследованном им районе поправка Δg_p была не более 5,5 *мгал*. При расстояниях между точками, в которых поправки Δg_p были вычислены, в 4—5 км ошибка линейной интерполяции поправки за рельеф оказалась равной $\pm 1,2$ *мгал*. Точность линейной интерполяции поправок Δg_p исследована также Шмидтом на моделях Земли.

Юркина и Кроткова (1965) использовали формулу (111.10.25) при вычислении нормальных высот нивелирного хода с высотами до 3300 м. Этот способ интерполяции аномалий ($g - \gamma$) силы тяжести очень трудоемок. К нему следует прибегать только при недостаточном количестве гравиметрических пунктов вдоль нивелирной линии. Хотя интерполяция аномалий ($g - \gamma$) силы тяжести по формуле (111.10.25) требует весьма большого объема вычислительных работ, улучшение результатов по сравнению с использованием формулы (111.10.23) всегда будет сомнительным из-за невозможности учесть влияние неправильностей в распределении плотности внутри земной коры (на отдельных участках плотность может значительно отличаться от средней). Разности между измеренными значениями силы тяжести и проинтерполированными по формуле (111.10.25) при вычислениях в только что упомянутой работе на трех реперах оказались равными —5,1; +4,0 и —3,5 *мгал*. Поэтому при измерении силы тяжести вдоль нивелирного хода необходимо определять по возможности большое число гравиметрических пунктов, тем более, что определение их высот в данном случае не представляет никаких трудностей.

Из (111.10.17) и (111.10.20) следует формула, пригодная для контроля на замкнутых нивелирных линиях:

$$\sum \frac{H_m}{\gamma_m} [\gamma_0(n+1) - \gamma_0(n)] = - \frac{1}{\gamma_m(K)} \sum \left\{ \frac{1}{2} [\gamma_0(n) + \gamma_0(n+1)] - \gamma_0(K) \right\} \Delta h_w. \quad (111.10.26)$$

Если расстояние между реперами значительно, нивелирный ход имеет точки поворотов, а профиль нивелирного хода — точки перегибов, необходимо вычислять рассматриваемые поправки в превышения между всеми особыми точками хода, т. е. реперами, точками поворотов и перегибов.

Измеренные превышения между такими точками можно определять по нивелирным журналам. Необходимость выбора вспомогательных точек перегибов и поворотов нужно устанавливать в зависимости от конкретных условий района и требуемой точности. Обработка вспомогательных точек при вычислении нормальных высот ничем не отличается от обработки реперов.

В приложенном примере аномалии ($g - \gamma$) силы тяжести сняты с карты аномалий Δg_B Буге. Схема нивелирного полигона наложена на такую карту. Нормальная сила тяжести в примере вычислена по формуле Гельмерта.

При уравнивательных вычислениях сети нивелирных линий разность нормальных высот двух соседних узловых точек можно считать непосредственно измеренной величиной. Такая разность может быть искажена только ошибками измерений и влиянием рефракции. Сеть полигонов геометрического нивелирования должна быть уравнена так, чтобы невязки полигонов, которые могут обнаружиться при их замыкании, были равны нулю и нормальные высоты узловых точек имели одно и то же значение при подходе к ним по всем возможным путям.

Теоретические невязки нивелирных полигонов нужно вычислять только при оценке допустимости полученных невязок. Для уравнивательных вычислений теоретические невязки не нужны.

Обзор работ, посвященных вычислению нормальных высот и некоторым другим близким к этому вопросам, дан Еремеевым ранее (1964, 1965).

Теперь нормальные высоты высоко оценены и приняты не только в СССР (Бровар и др., 1961; Закатов, 1964; Макаров, 1968), но и в ряде зарубежных стран: Чехословакия (Бурша, 1958, 1959, 1960; Викутил, 1959, 1964; Круис, 1960; Руководство по геометрическому нивелированию Бёма и Свободы, 1960), Польше (Бокун, 1958; Бокун и Хойницкий, 1958; Выжыковски, 1962), Германской Демократической Республике (Мюллер, 1960; Шиллер, 1960; Шнайдер, 1960; Вайдауэр, 1963; Шмидт, 1964), Венгрии (Биро, 1962; Варга, 1966; Курс геодезии Хомороди, 1966), Румынии (Тирон и Струцу, 1960; Ботез 1969), Югославии (Живкович, 1965; Чукич, 1966). В известном геодезическом руководстве Йордана — Эггерта — Кнайсля (ФРГ) теория Молоден-

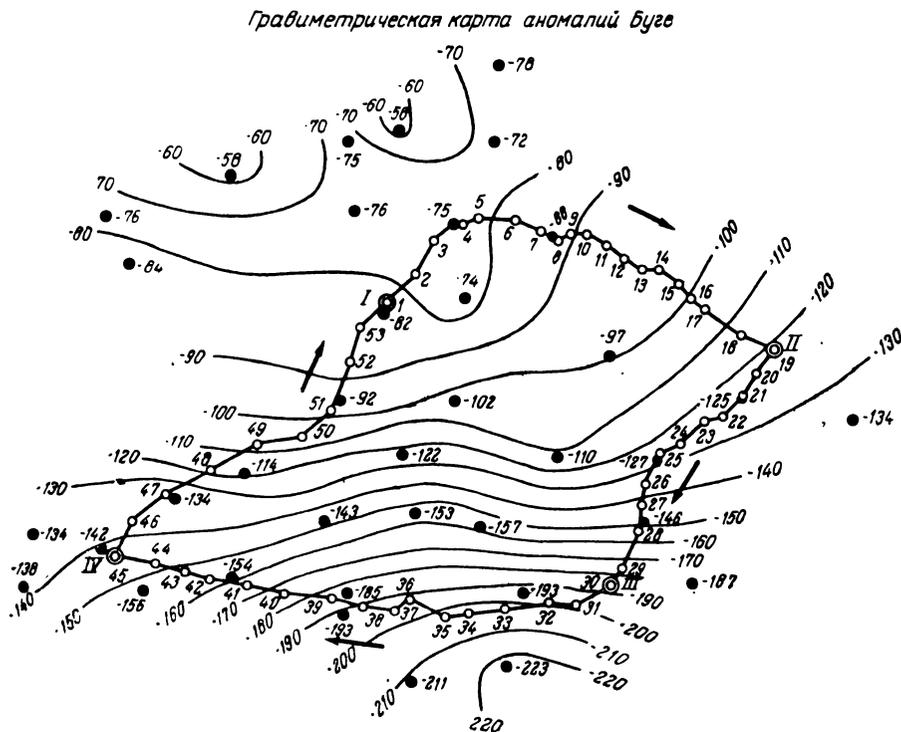
ского представлена в изложении австрийского геодезиста Ледерштегера (1956—1969). Мы указали работы, посвященные введению нормальных высот в практику той или иной страны. Описание номограмм Викутила (1959) для вычисления нормальных высот в немецком изложении дал Шнайдер (1961).

Юнг (1961) в докладе на пленарном заседании Германской геодезической комиссии (ФРГ) в Мюнхене 20—23.10.1959 г. высоко оценил нормальные высоты и предложил, хотя и в несколько осторожной форме, как «возможный прогресс» ввести их в геодезическую практику ФРГ. Описание нормальных высот «для практиков» в западногерманском геодезическом журнале дано Витке (1965).

Отношение к нормальным высотам в Международном геодезическом и геофизическом союзе за последние годы значительно изменилось. Бэшлин — автор официального отчета, представленного XI генеральной ассамблее этого союза в Торонто (1957 г.) и опубликованного в 1960 г., — совсем не упоминает о нормальной высоте (в тот период Бэшлин был секретарем секции нивелирования Международной геодезической ассоциации). Автор официального отчета XIII генеральной ассамблеи Международного геодезического и геофизического союза в Беркли (1963) Симонсен уже хорошо знаком с нормальными высотами. Более того, для выражения высот в линейной мере Симонсен пользуется только нормальными высотами. В работах 1965 и 1966 гг. Симонсен снова уделяет нормальным высотам много внимания. В частности, он детально исследует изменения нормальных высот при переходе от нормальной формулы Гельмерта к нормальной формуле Кассиниса.

Пример вычисления разностей нормальных высот в полигоне геометрического нивелирования

(Высоты, их разности и поправки к ним даны в метрах, значения силы тяжести и ее аномалий — в миллигалах)



№ узло- вых точек и реперов	Геодези- ческая широта B		H _p	H _m	h _ш	Δg _Б	kH	(g-γ)	(g-γ) m	γ ₀	γ ₀ (n+1)- -γ ₀ (n)	$\frac{1}{\gamma_m} (5) \cdot (9)$	$\frac{1}{\gamma_m} (4) \cdot (11)$	(12)-(13)	
	1	2													3
1	43°38',0		465												
2	43 43 ,5		473		+8,6275	-82	+52	-30	-28	980 492,3	+8,3	-0,0002	+0,0040	-0,0042	
3	43 48 ,4		481		+7,6885	-78	+53	-25	-24	500,6	+7,3	-0,0002	+0,0036	-0,0038	
4	43 51 ,2		501		+40,2323	-76	+54	-22	-21	507,9	+4,3	-0,0009	+0,0022	-0,0031	
5	43 52 ,3		551		+59,7446	-78	+58	-20	-16	512,2	+1,6	-0,0010	+0,0009	-0,0019	
6	43 52 ,6		620		+76,5746	-78	+65	-13	-10	513,8	+0,5	-0,0008	+0,0003	-0,0011	
7	43 50 ,7		696		+77,8267	-82	+74	-8	-6	514,3	-2,9	-0,0005	-0,0021	+0,0016	
8	43 49 ,2		770		+69,4264	-85	+82	-3	0	511,4	-2,2	0,0000	-0,0017	+0,0017	
9	43 50 ,4		836		+62,1691	-88	+90	+2	+5	509,2	+18	+0,0003	+0,0015	-0,0012	
10	43 50 ,3		890		+46,6302	-89	+97	+8	+10	511,0	-0,2	+0,0005	-0,0002	+0,0007	
11	43 48 ,5		914		+53,5442	-91	+102	+11	+14	510,9	-2,7	+0,0008	-0,0026	+0,0034	
12	43 46 ,2		967		+28,3678	-92	+108	+16	+16	508,1	-3,5	+0,0005	-0,0035	+0,0040	
13	43 44 ,4		996		+19,2237	-94	+111	+17	+17	504,6	-2,7	+0,0003	-0,0028	+0,0031	
14	43 44 ,2		1006		-19,0473	-96	+113	+17	+16	501,9	-0,3	-0,0003	-0,0003	0,0000	
15	43 42 ,3		996		-22,3876	-97	+111	+14	+12	501,6	-2,8	-0,0003	-0,0028	+0,0025	
16	43 40 ,4		973		-46,7841	-99	+109	+10	+6	498,8	-2,9	-0,0003	-0,0028	+0,0025	
			927		-36,8040	-101	+104	+3	-1	495,9	-3,1	0,0000	-0,0029	+0,0029	

Линия I-II

17	43 38 , 3	890	850	-81,0582	-105	+100	-5	-14	492,8	-6,4	+0,0012	-0,0055	+0,0067
18	43 34 , 1	809	780	-59,2726	-114	+90	-24	-30	486,4	-3,2	+0,0018	-0,0025	+0,0043
II 19	43°32', 0	750			-120	+84	-36		980 183,2				
Σ				+284,7018							+0,0009	-0,0172	+0,0181

$$\gamma_m = 980\,400 H_Q(11) - H_Q(1) = \Sigma h_w + \Sigma [(12) - (13)] = +284,7199$$

Линия II—III

II 19	43°32', 0	750	757	+14,2519	-120	+84	-36	-36	980 483,2	-5,6	-0,0005	-0,0043	+0,0038
20	43 28 , 3	764	826	+122,9354	-122	+85	-37	-31	477,6	-6,1	-0,0039	-0,0051	+0,0012
21	43 24 , 2	887	1012	+248,9424	-124	+99	-25	-12	471,5	-4,8	-0,0030	-0,0050	+0,0020
22	43 21 , 0	1136	1140	+9,5392	-125	+127	+2	+3	466,7	-1,1	0,0000	-0,0013	+0,0013
23	43 20 , 3	1145	1061	-168,6467	-124	+128	+4	-6	465,6	-5,4	+0,0010	-0,0058	+0,0068
24	43 16 , 7	977	856	-242,9686	-125	+109	-16	-30	460,2	-3,1	+0,0074	-0,0027	+0,0101
25	43 14 , 6	734	714	-39,2353	-125	+82	-43	-50	457,1	-6,7	+0,0020	-0,0049	+0,0069
26	43 10 , 2	694	666	-55,9627	-135	+78	-57	-64	450,4	-5,8	+0,0037	-0,0039	+0,0076
27	43 06 , 3	638	632	-12,9617	-141	+71	-70	-76	444,6	-6,4	+0,0010	-0,0041	+0,0051
28	43 02 , 1	625	656	+60,2844	-152	+70	-82	-90	438,2	-8,8	-0,0055	-0,0059	+0,0004
29	42 56 , 2	686	728	+83,1024	-176	+77	-99	-99	429,4	-4,8	-0,0084	-0,0036	-0,0048

№ узло- вых то- чек и ре- перов	Геодези- ческая широта В	H_p	H_m	h_w	Δg_B	ΔH	$(g-\gamma)$	$(g-\gamma)_m$	γ_0	$\gamma_0^{(n+1)} -$ $-\gamma_0^{(n)}$	$\frac{1}{\gamma_m} (5)-(9)$	$\frac{1}{\gamma_m} (4)-(11)$	$(12)-(13)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
III 30	42°53',0	769		+19,2807	-185	+86	-99		980 424,6		-0,0062	-0,0466	+0,0404
Σ													

$$\gamma_m = 980\,300 \quad H_Q(111) - H_Q(11) = +19,3211$$

Линия III—IV

III 30	42°53',0	769	756	-24,7020	-185	+86	-99	-107	980 424,6	-4,3	+0,0027	-0,0033	+0,0060
31	42 50 ,2	744	746	+2,7946	-198	+83	-115	-115	420,3	-0,1	-0,0003	-0,0001	-0,0002
32	42 50 ,1	747	763	+32,1430	-199	+84	-115	-115	420,2	-1,7	-0,0038	-0,0013	-0,0025
33	42 49 ,0	779	768	-21,0910	-202	+87	-115	-116	418,5	-1,3	+0,0025	-0,0010	+0,0035
34	42 48 ,1	758	771	+25,5375	-202	+85	-117	-115	417,2	+0,1	-0,0030	+0,0001	-0,0031
35	42 48 ,2	784	786	+4,2701	-201	+88	-113	-108	417,3	+3,3	-0,0005	+0,0026	-0,0031
36	42 50 ,4	788	780	-16,9402	-191	+88	-103	-106	420,6	-3,4	+0,0018	-0,0027	+0,0045
37	42 48 ,1	771	755	-32,2830	-194	+86	-108	-108	417,2	+1,6	+0,0036	+0,0012	+0,0024
38	42 49 ,2	739	724	-29,1988	-190	+83	-107	-106	418,8	+1,6	+0,0032	+0,0012	+0,0020
39	42 50 ,3	709	700	-17,7777	-185	+79	-106	-102	420,4	+1,3	+0,0019	+0,0009	+0,0010
40	42 51 ,1	692	692	-0,6742	-175	+77	-98	-92	421,7	+1,7	+0,0001	+0,0012	-0,0011
41	42 52 ,2	691	688	-6,6046	-164	+77	-87	-84	423,4	+1,6	+0,0006	+0,0011	-0,0005

42	42 53, 3	684	694	+18, 5358	-157	+76	-81	-77	425, 0	+1, 2	-0, 0015	+0, 0008	-0, 0023
43	42 54, 1	703	709	+12, 2238	-152	+79	-73	-70	426, 2	+1, 4	-0, 0009	+0, 0010	-0, 0019
44	42 55, 0	715	700	-29, 8587	-148	+80	-68	-68	427, 6	+1, 5	-0, 0021	+0, 0011	+0, 0010
IV 45	42°56', 0	685		-83, 6254	-144	+77	-67	-68	980 429, 1		+0, 0085	+0, 0028	+0, 0057
Σ													

$$H_Q(IV) - H_Q(III) = -83, 6197$$

$$\gamma_m = 980 300$$

Линия IV—I

IV 45	42°56', 0	685	660	-48, 9028	-144	+77	-67	-67	980 429, 1	+9, 3	+0, 0033	+0, 0063	-0, 0030
46	43 02, 2	636	618	-35, 7854	-138	+71	-67	-66	438, 4	+5, 8	+0, 0024	+0, 0037	-0, 0013
47	43 06, 1	601	586	-28, 7580	-132	+67	-65	-60	444, 2	+6, 4	+0, 0018	+0, 0038	-0, 0020
48	43 10, 3	572	562	-20, 3820	-118	+64	-54	-50	450, 6	+5, 7	+0, 0010	+0, 0033	-0, 0023
49	43 14, 1	551	540	-22, 7631	-108	+62	-46	-47	456, 3	+3, 1	+0, 0011	+0, 0017	-0, 0006
50	43 16, 1	529	520	-17, 6323	-107	+59	-48	-45	459, 4	+6, 1	+0, 0008	+0, 0032	-0, 0024
51	43 20, 2	511	500	-22, 6910	-99	+57	-42	-38	465, 5	+11, 9	+0, 0009	+0, 0061	-0, 0052
52	43 28, 1	488	480	-17, 0150	-88	+55	-33	-32	477, 4	+9, 4	+0, 0006	+0, 0046	-0, 0040
53	43 34, 3	471	468	-6, 5681	-85	+53	-32	-31	486, 8	+5, 5	+0, 0002	+0, 0026	-0, 0024
I 1	43°38', 0	465		-220, 4977	-82	+52	-30	-31	980 492, 3		+0, 0121	+0, 0353	-0, 0232
Σ													

$$H_Q(I) - H_Q(IV) = -220, 5209$$

$$\gamma_m = 980 400$$

$$\text{Невязка полигона } W = \sum [H_Q(N+1) - H_Q(N)] = -0, 0996,$$

где N —номер узловой точки

§ 11. О вычислении ортометрических высот

Определяя высоту H как сумму $H_G + \zeta_G$, ортометрическую высоту H_G точки земной поверхности над геоидом следовало бы отсчитывать по нормали к отсчетному эллипсоиду. Однако ортометрической высотой принято называть отрезок силовой линии земного гравитационного поля между земной поверхностью и геоидом (Бейер, 1861; Витштайн, 1873; Брунс, 1878; Виларсо, 1880; Гельмерт, 1884 и др.). Термины «ортометрическая высота» и «ортометрическая поправка» введены Гулье (1887). Ортометрическую поправку вводят в измеренные высоты для вывода ортометрических высот. В геодезической литературе на немецком языке ортометрические высоты часто называют «Meereshöhe» или «Seehöhe».

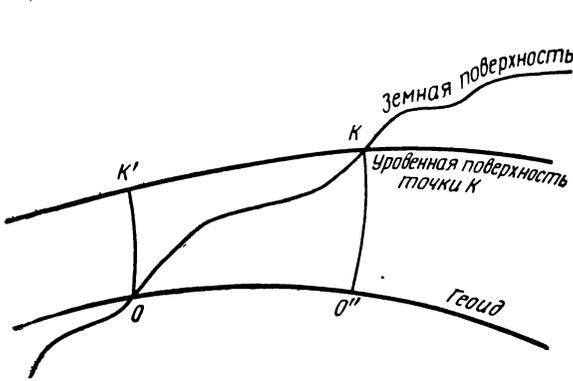


Рис. 6

равенства приращений потенциала при перемещениях: 1) внутри Земли по силовой линии точки K земной поверхности от точки O'' геоида до точки K (см. рис. 6) и 2) по земной поверхности от исходной точки O геоида до той же точки K находим

$$\int_{(O''K)} g' dh'_w = \int_{(OK)} g dh_w = g_m H_G \quad (111.11.1)$$

и выводим основную формулу ортометрической высоты точки K

$$H_G(K) = \frac{1}{g_m} \int_{(OK)} g dh_w, \quad (111.11.2)$$

где

$$g_m = \frac{1}{H_G(K)} \int_{(O''K)} g' dh'_w = \frac{1}{H_G(K)} \int_0^{H_G(K)} g' dh'_w. \quad (111.11.3)$$

В таком виде формула для ортометрической высоты уже приведена Брунсом (1878).

Штрихом в формулах (111.11.1) и (111.11.3) отмечены значения силы тяжести и элементарные расстояния между уровенными поверхностями внутри Земли.

Если точки O и O'' лежат не на геоиде, а на произвольной уровенной поверхности, соотношение (111.11.1) определяет расстояние между уровенной поверхностью точек O и O'' и уровенной поверхностью точки K по силовой линии точки K .

Применив формулу (111.11.1) для двух разных расстояний к разным силовым линиям, найдем

$$H_G(I) g_m(I) = H_G(K) g_m(K),$$

откуда, составив производную пропорцию, выведем формулу для разности расстояний между геоидом и другой уровенной поверхностью

$$H_G(K) - H_G(I) = \frac{g_m(I) - g_m(K)}{g_m(I)} H_G(K).$$

Из (111.11.2) следует независимость ортометрических высот от пути нивелирования. Для точек одной и той же уровенной поверхности ортометрические высоты могут быть различны в такой же степени, как различны величины g_m . Среднее значение g_m силы тяжести нельзя точно вычислить, так как эта величина сложно зависит от притяжения аномальных масс, расположенных вне и внутри геоида. Для того чтобы точно вычислить среднее g_m , необходимо знать плотности внешних масс в каждой

Разница между указанными определениями ортометрической высоты не имеет практического значения. Даже если допустить возможность горизонтального градиента силы тяжести в $0,3$ мгал/м (горизонтальные градиенты в $0,1$ мгал/м встречаются в горах не часто) и угол между направлениями силовой линии гравитационного поля и нормалью к эллипсоиду в $1'$, разность длин указанных отрезков не превысит 5 мм при $H_G = 10$ км и $0,05$ мм при $H_G = 1$ км. Поэтому будем пользоваться давно принятым определением. Тогда из

точке вне геоида, а аномалию вертикального градиента силы тяжести, вызванную внутренними аномальными массами, нужно знать в каждой точке силовой линии от земной поверхности до геоида. Без данных о распределении массы внутри Земли эти величины установить нельзя. Пока что такие данные бывают только гипотетическими.

Все трудности вывода значений g_m можно было бы устранить следующим абстрактно мыслимым приемом: если в точке K пробурить скважину вдоль силовой линии до геоида, опустить в нее гравиметр и измерить силу тяжести на различных глубинах до поверхности геоида, то из этих измерений силы тяжести легко и точно можно было бы получить величину g_m как среднее из измеренных величин, не интересуясь распределением плотностей внутри земной массы. Такой способ точного определения величины g_m в реальных условиях, конечно, не применим и описан лишь для пояснения физического смысла значения g_m .

Таким образом, точный вывод величины H_G практически невозможен. Это обстоятельство отмечено уже Гельмертом (1884, стр. 502), Пицетти (стр. 206 статьи в энциклопедии 1906—1925 гг.) и многими современными геодезистами. Высоты, определяемые как ортометрические, получаются искаженными и на самом деле ортометрическими не являются.

Напротив, расстояние между уровнями поверхностями можно вычислить точно, если это расстояние измерять по отрезку силовой линии, проходящему вне притягивающих масс, например по отрезку OK' на рис. 6. Мы можем определить длину отрезка OK' , но не можем определить длину отрезка OK . Для вывода расстояния между уровнями поверхностями вокруг соответственной точки земной поверхности (например, точки O на рис. 6) необходимо выполнить гравиметрическую съемку и использовать теорию Молоденского (1948, 1960) [см. у Бровара (1963) и Стойнова (1966)] для вывода значений силы тяжести вдоль определяемого отрезка силовой линии. Тогда

$$OK' = \frac{1}{g_m(OK')} \int_{(OK)} g dh_w.$$

Как следует из выражений (111.10.4) и (111.11.2), квазигеоид практически совпадает с геоидом в точках, где среднее значение g_m силы тяжести равно среднему значению γ_m нормальной силы тяжести. Квазигеоид будет также практически совпадать с геоидом на океанах и всюду, где потенциал на поверхности Земли равен значению потенциала на поверхности океана.

Из (111.11.2) следует почти полная независимость ортометрических высот от принятой системы измерений силы тяжести. Действительно, для главного члена влияния на точность ортометрической высоты поправки δ принятой системы силы тяжести легко находим

$$\frac{1}{g_m + \delta} \int_{(OK)} (g + \delta) dh_w - \frac{1}{g_m} \int_{(OK)} g dh_w \approx -\frac{\delta}{g_m} [H_G(K) - H_I(K)]. \quad (111.11.4)$$

Из (111.10.4) и (111.11.2) следует

$$g_m H_G(K) = \gamma_m H_Q(K)$$

и

$$H_G(K) = H_Q(K) + \frac{\gamma_m - g_m}{g_m} H_Q(K) = H_Q(K) + \frac{\gamma_m - g_m}{\gamma_m} H_G(K). \quad (111.11.5)$$

Последний член в формуле (111.11.5) определяет отличие ортометрических высот от нормальных, или, другими словами, на сколько квазигеоид отстает от геоида. Для оценки порядка максимального численного различия нормальных и ортометрических высот положим, что разность $(g_m - \gamma_m)$ равна наибольшей известной аномалии силы тяжести, т. е. 700 *мгал* (Михайлов, 1939), и $H_Q = 9$ км (высота Джомолунгмы). Тогда разность высот геоида и квазигеоида будет близка к 6,5 м. Такое большое расхождение между геоидом и квазигеоидом едва ли будет обнаружено на Земле. Если $g_m - \gamma_m = 300$ *мгал*, $H_Q = 4$ км, то разность высот геоида и квазигеоида составит 1,2 м, что вполне реально для горных районов. И для равнинного или холмистого района при $g_m - \gamma_m = 50$ *мгал* и $H_Q = 500$ м находим $\zeta_G - \zeta_Q = 2,5$ см.

Формула для разности ортометрических высот вытекает из (111.11.5):

$$H_G(K) - H_G(I) = H_Q(K) - H_Q(I) + \left[\frac{g_m(I) - \gamma_m(I)}{g_m(I)} H_Q(I) - \frac{g_m(K) - \gamma_m(K)}{g_m(K)} H_Q(K) \right]. \quad (111.11.6)$$

Сравнение формул (111.10.18) и (111.11.6) показывает, что при выводе ортометрических высот аномалии силы тяжести нужно знать гораздо точнее, чем при выводе нормальных высот: в формуле для нормальных высот аномалия $(g - \gamma)$ умножена на

разность h_w измеренных высот, а в формуле для ортометрических высот аномалия $(g_m - \gamma_m)$ умножена на высоту H репера. Например, при выводе ортометрической высоты с точностью 0,1 мм при $H=1$ км точность аномалии $(g_m - \gamma_m)$ должна быть близка к 0,1 мгал.

Сравнение формул (III.10.18) и (III.11.6) показывает также, что при выводе ортометрических высот нужны все те данные, которые требуются при вычислении нормальных, а кроме этих данных при вычислении ортометрических высот нужно вывести значение g_m .

Практические рекомендации о приближенном вычислении ортометрических высот и средних значений g_m высказаны Гельмертом (1890, 1900—1901), Галле (1914), Нитхаммером (1932, 1939), Мадером (1954), Ледерштегером (1955), Бэшлином (1956) и др.

Стало традиционным считать при таких вычислениях топографические массы однородными по плотности и вертикальный градиент силы тяжести равным его нормальному значению $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0$. Силу тяжести g' внутри Земли в точке K_i тогда можно представить, согласно Нитхаммеру (1932), так:

$$g'(K_i) = g(K) - 2\pi f D (H_G(K) - H') + \Delta g_p(K) + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 (H_G(K) - H') - 2\pi f D (H_G(K) - H') - \Delta g'_p. \quad (III.11.7)$$

Первый член $g(K)$ этой формулы обозначает значение силы тяжести, измеренное или проинтерполированное в точке K , для которой нужно вычислить ортометрическую высоту. Второй член $-2\pi f D (H_G(K) - H')$ служит для исключения из силы тяжести $g(K)$ влияния неограниченного плоского однородного слоя толщиной $H_G(K) - H'$. Этот слой заключен между горизонтальными плоскостями точки K и некоторой точки K_i ее силовой линии с высотой H' над геоидом. Член $\Delta g_p(K)$ обозначает поправку за рельеф земной поверхности в точке K . Такая поправка как бы срезает и удаляет в бесконечность все те топографические массы с плотностью D , которые возвышаются над горизонтальной плоскостью точки K , а выемки, расположенные под этой плоскостью, такая редукция как бы засыпает веществом с плотностью D . Если бы массы земной топографии над уровнем точки K_i и в действительности имели плотность D , после учета второго и третьего членов формулы (III.11.7) гравиметрический пункт в точке K оказался бы в пустоте на высоте $H_G(K) - H'$ над грунтом. Сумма первых четырех членов формулы (III.11.7) должна была бы при дополнительном условии, что вертикальный градиент силы тяжести равен его нормальному значению и величина этого вертикального градиента не изменяется вдоль отрезка $H_G(K) - H'$, определить силу тяжести на уровне точки K_i . Учет пятого члена $-2\pi f D (H_G(K) - H')$, равного по величине второму члену, возвращает плоский слой с толщиной $H_G(K) - H'$ на его прежнее место. Наконец, последний член $-\Delta g'_p$ формулы (III.11.7) восстанавливает рельеф земной поверхности. Из-за разного расположения точек K и K_i относительно неправильностей рельефа земной поверхности (отклонений ее от плоскости), как правило, $\Delta g_p(K) \neq \Delta g'_p$. В общем случае вычисленное по формуле (III.11.7) значение $g'(K_i)$ не совпадает с тем, какое было бы получено в точке K_i из измерений не только из-за отклонений вертикального градиента от его нормального значения, но и из-за неоднородностей земной коры, расположение и аномалии плотностей которых, как правило, неизвестны и не могут быть учтены при вычислениях притяжений слоев и поправок $\Delta g_p(K)$, $\Delta g'_p$.

Подставив (III.11.7) под знак интеграла в (III.11.3) и выполнив интегрирование, найдем

$$g_m = g(K) - 2\pi f D H_G(K) + \Delta g_p(K) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 H_G(K) - \frac{1}{H_G(K)} \int_0^{H_G(K)} \Delta g'_p dh_w. \quad (III.11.8)$$

Влияние неоднородностей земной коры на вывод среднего g_m может достигнуть нескольких десятков миллигалов и исказить ортометрические высоты на несколько сантиметров. Аномалии вертикального градиента силы тяжести в горах часто составляют 0,03 мгал/м, тогда при $H=2000$ м погрешность четвертого члена в (III.11.8) будет равна 30 мгал; соответственная погрешность ортометрической высоты достигнет 6 см. Нитхаммер упустил из виду возможное влияние аномалий вертикального градиента силы тяжести и в своей работе (1932) даже не упомянул такой погрешности. Он полагал, что его рекомендации позволяют вывести истинную ортометрическую высоту (wahre Meereshöhe).

Даже при однородной по плотности топографической массе и использовании современных вычислительных машин вычисление поправок Δg_p и последнего члена в (III.11.8) весьма трудоемко, так как требует выборки высот местности с топографических карт по той или иной определенной схеме. Нитхаммер (1932) составил графики и таблицы для вывода среднего интегрального

$$\overline{\Delta g_p} = \frac{1}{H_G(K)} \int_0^{H_G(K)} \Delta g_p' dh_w \quad (\text{III.11.9})$$

из поправок за рельеф вдоль отрезка KK_i силовой линии исследуемой точки. Эти вспомогательные средства позволяют вывести $\overline{\Delta g_p}$ по высоте исследуемой точки и средним высотам в отделениях палетки, ограниченных концентрическими окружностями и их радиусами.

Для интерполяции силы тяжести на земной поверхности между гравиметрическими пунктами Нитхаммер предложил использовать формулу (III.10.25). Он вычислил высоты двадцати реперов хода Biasca—Bernardino—Reichenau. Для точки с наибольшей высотой $H=2060$ м поправка в превышение относительно исходного пункта Reichenau с высотой $H=600$ м составила 19 см.

В работе 1939 г. Нитхаммер предложил уточнить вывод среднего интегрального Δg_p путем учета рельефа Земли до окружности радиусом 188 км и учета сферичности отсчетной поверхности до расстояния 42 км.

Для практических вычислений производственного характера рекомендации Нитхаммера никогда использованы не были. Такой способ применен только для отдельных исследований высоты вычислений. Например, Мадер (1954) при анализе материалов 237-километрового нивелирного хода с 293 реперами в высокой части австрийских Альп вычислял приближенные ортометрические высоты, применяя формулу, сходную с (III.11.8). Вывод Δg_p Мадер заменил вычислением поправки за рельеф в средней точке высоты или полагал величину Δg_p равной среднему арифметическому из поправок за рельеф в точках земной поверхности и геоида. Вместо неограниченного слоя Мадер использует цилиндр с радиусом основания в 30 км, ось цилиндра совпадает с нормалью H исследуемой точки. Такая замена привела при $H=2500$ м к изменению ортометрической высоты на 16 мм (ортометрическая поправка оказалась близка к 28 см). При использовании нормального вертикального градиента силы тяжести замена неограниченного плоского слоя цилиндром едва ли приведет к более правдоподобным значениям среднего g_m .

Ледерштегер (1955) и Бэшлин (1956) рассматривают вывод среднего значения g_m с дополнительным учетом изостатической компенсации топографической массы: при выводе силы тяжести внутри Земли можно не перемещать топографическую массу в бесконечность, а распределить ее внутри Земли по той или иной схеме. Бэшлин предполагал изостатическое перемещение всей топографической массы Земли. На заключительном этапе вычислений среднего g_m нужно возратить топографическую массу на ее прежнее место. В этом случае влияния второго и пятого членов формулы (III.11.7) должны быть, как правило, неодинаковыми и с большим основанием можно использовать нормальный вертикальный градиент $\left(\frac{\partial y}{\partial H}\right)_0$ силы тяжести. Если бы строение Земли соответствовало принятой схеме (например, Пратта при глубине компенсации 80 км, как у Бэшлина), можно было бы учесть влияние аномальной массы. Однако, как известно, во многих районах строение земной коры весьма далеко от схем изостатической компенсации.

Галле (1914) вычислял среднее Δg_p из поправок за рельеф по их значениям в трех точках силовой линии: на земной поверхности, на середине ортометрической высоты и на геоиде. Для четырех альпийских пунктов с высотами от 2169 до 2957 м разность среднего интегрального, вычисленного по методу Нитхаммера (1932), и среднего из поправок за рельеф в пяти точках, расположенных на равных расстояниях вдоль силовой линии, не превосходила у Нитхаммера (1939) 0,5 мгал. Для этих вычислений были использованы одни и те же средние высоты в отделениях палетки.

Красовский (1942) полагал величину Δg_p равной поправке за рельеф в средней точке ортометрической высоты.

Доре (1942—1943), следуя Ати (1930), предложил при вычислении среднего g_m учитывать изменение плотности земной коры по формуле

$$D = D_n + a(1 - e^{-bx}),$$

где D_n — поверхностная плотность; x — глубина; a и b — коэффициенты; e — основание натуральных логарифмов.

При практических вычислениях ортометрических высот последний член формулы (III.11.8) никогда не учитывали. Результаты таких вычислений принято называть высотами Гельмерта. При выводе этих высот топографическая масса в каждой точке принята за однородный плоский слой с толщиной, равной высоте точки. Описывая

такой вычислительный прием, обычно ссылаются на работу Гельмерта (1890). В этой работе проанализированы измерения силы тяжести, выполненные Штерпекком (1888—1889) в 40 точках вдоль геометрического нивелирования в Тирольских Альпах. Эти результаты подтвердили прежние выводы на моделях Земли, что поправки в измеренные высоты за аномалии силы тяжести могут быть значительными. А именно, по измеренным значениям силы тяжести теоретическая невязка полигона нивелирования длиной 356 км оказалась равной 0,024 м, тогда как нормальное поле силы тяжести объясняет около 0,007 м этой величины. Измеренная высота пункта Stilfserjoch над уровнем Адриатического моря уменьшилась на 0,3 м в основном из-за влияния аномалий силы тяжести. Когда измеренные значения силы тяжести использованы не были, вместо этой величины было получено 0,011 м. Гельмерт вычислил высоту репера в пункте Stilfserjoch над уровнем пункта Sigmundskron (Bahnhof) вдоль силовой линии первого пункта. Расстояние между указанными точками около 100 км, измеренная высота первого пункта над вторым оказалась равной 2514 м. В значении силы тяжести, измеренной на первом пункте, Гельмерт ввел поправку за рельеф местности, удалил притяжение плоского слоя толщиной 2514 м при плотности $D=2,4 \text{ г/см}^3$ и привел значение силы тяжести на середину высоты при нормальном значении вертикального градиента $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0$ (притяжение однородного плоского слоя на точку в середине его высоты равно нулю). Отличие полученного таким образом превышения от измеренного составило $\frac{1}{5}$ м. Гельмерт обратил внимание на ненадежность этого результата: при плотности $D=2,6 \text{ г/см}^3$ указанное отличие оказалось равным $\frac{1}{4}$ м.

В описываемой работе Гельмерт указывает на возможность вычислять среднее значение g_m силы тяжести вдоль некоторой высоты H по формуле

$$g_m = g \left(1 + \kappa \frac{H}{R} \right), \quad (III.11.10)$$

где

$$\kappa = 1 - \frac{3}{2} \frac{D}{D_m}; \quad (III.11.11)$$

Здесь D_m — средняя плотность Земли.

Эта формула соответствует системе высот, которую стало принятым называть именем Гельмерта. Высоты Гельмерта могут отличаться от высот Нитхаммера в горах на несколько сантиметров, вполне возможны отличия до 15 см (например, при $H=3 \text{ км}$ $\Delta g_p - \Delta g_g = 50 \text{ мгал}$).

До перехода к системе нормальных высот в СССР был принят способ Гельмерта.

В работе 1900—1901 гг. Гельмерт изложил соображения об учете при выводе среднего g_m влияния топографии Земли на точки земной поверхности и точки силовых линий внутри притягивающих масс. Эти соображения и были развиты Нитхаммером.

Как следует из нашего описания, высоты Нитхаммера, высоты Гельмерта и другие приближенные ортометрические высоты не имеют строгой логической связи ни со значениями возмущающего потенциала, ни с высотами геоида, ни с какой-либо другой вспомогательной поверхностью. Отличия высот Нитхаммера и Гельмерта от истинных ортометрических могут значительно превосходить точность геометрического нивелирования.

За последние годы, до признания теории Молоденского на Западе, там предложено множество систем высот, также не связанных с возмущающим потенциалом и какой-либо определенной вспомогательной поверхностью. Такие высоты основаны на произвольном выборе значения g_c в формуле

$$H_c(K) = \frac{1}{g_c} \int_{(OK)} g dh_w. \quad (III.11.12)$$

Высоты H_c представляют результаты нивелирования в цифрах, не зависящих от пути ходов и более или менее близких к измеренным высотам. Некоторые из таких систем описаны Ледерштегером (1954, 1956—1969), Рамзайером (1954), Бэшлином (1960), Бодемюллером (1963) и Юркиной (1957). Работа Бодемюллера подготовлена как доклад XIII генеральной ассамблее Международного геодезического и геофизического союза в Беркли (Калифорния, США).

Хотя эти многочисленные системы и выражены в метрической мере, они не являются высотами в прямом смысле этого слова, так как точно не выражают расстояние точек земной поверхности от какой-либо отсчетной. Эти высоты нельзя использовать для редуцирования геодезических сетей на отсчетный эллипсоид.

Из таких систем упомянем высоты Виньяля (1944), определяемые формулой

$$H_V(K) = \frac{1}{\gamma_V} \int_{(OK)} g dh_w, \quad (III.11.13)$$

где γ_V — среднее из значений нормальной силы тяжести вдоль силовой линии реального гравитационного поля Земли между точками K и O'' (см. рис. 6).

С 1957 г. эта система официально принята во Франции. Высоты H_V близки к нормальным. Если $\zeta_G = 100$ м, знаменатели в (111.11.13) и (111.10.4) отличаются на ~ 30 мгал и при $H = 1$ км отличие нормальной высоты от высоты Виньяля достигает 3 см. В книге Виньяля и Симонсена (1962) значение γ_V в (111.11.13) определено как арифметическое среднее из значений нормальной силы тяжести в точках K и O'' . Практически величину γ_V вычисляют упрощенно, полагая

$$\gamma_V = \gamma_0 - 0,1543H \quad (111.11.14)$$

и не определяя, какая именно высота H стоит справа, или определяя эту высоту как измеренную высоту H_i .

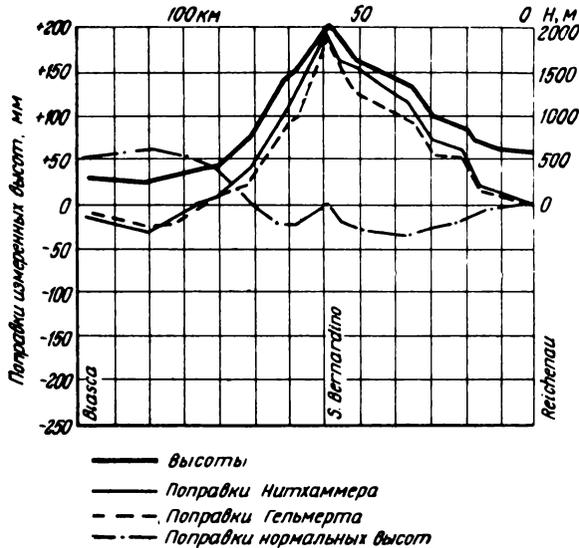


Рис. 7

За рубежом выполнено несколько проверок близости высот той или иной системы к измеренным. В таких исследованиях, как правило, речь идет и о высотах Виньяля (111.11.13), но для вывода знаменателя использована формула (111.11.14), где H — измеренная высота. Вычисленные так высоты ближе к нормальным высотам, чем к высотам Виньяля, поэтому эти оценки интересны и мы их опишем. Пьери (1962) исследовал вычисление геопотенциальных отметок, приближенных нормальных и еще некоторых типа (111.11.12) на материалах итальянского геометрического нивелирования с измерениями силы тяжести в среднем через 3 км, а в аномальных районах со сложным рельефом — через 1 км. Измеренные высоты, приведенные в таблицах Пьери, изменяются от нескольких до 980 м. Наиболее близкими к измеренным, в общем, оказались нормальные высоты. Ледерштегер (1954) на материалах нивелирного хода, исследованного Нитхаммером, обнаружил большую близость между приближенными нормальными высотами и измеренными, чем между измеренными и приближенными ортометрическими. Ледерштегер отметил простоту вычислений нормальных высот и полагал (1956), что из всех высот типа (111.11.12) нормальные высоты наиболее подходят для практического использования.

По материалам этого нивелирного хода Рамзайер (1955) построил график (рис. 7). Не было сомнений и у Юнга (1961) в практическом преимуществе нормальных высот перед высотами Гельмерта.

Бодемюллер (1963) исследовал 341 отрезок нивелирных ходов (каждый отрезок имеет длину 5 км, максимальный наклон достигает 10%) и пришел к выводу, что высоты Гельмерта наименее пригодны для практики. Приближенно вычисленные высоты Виньяля (т. е. приближенные нормальные), по его мнению, предпочтительнее и заслуживают наибольшего внимания. Бодемюллер даже не различает нормальные высоты и высоты Виньяля и употребляет название «высоты Виньяля—Молоденского». Отмечая их предпочтительность перед всеми другими системами, Бодемюллер указывает, что в сумме с высотами квазигеоида, точно определенными, эти высоты определяют высоты H точек над отсчетным эллипсоидом. Однако такое название несправедливо: высоты Виньяля определены иначе, чем нормальные высоты. С разно-

Таблица 3

Поправки, мм		Число поправок высот		Поправки, мм		Число поправок высот	
от	до	Гельмерта	нормальных	от	до	Гельмерта	нормальных
-13,0	-12,5	—	5	-2,5	-2,0	43	9
—	—	—	—	-2,0	-1,5	62	38
-10,0	-9,5	—	—	-1,5	-1,0	33	57
-9,5	-9,0	5	5	-1,0	-0,5	85	142
-9,0	-8,5	5	—	-0,5	0,0	450	370
-8,5	-8,0	—	—	0,0	+0,5	109	147
-8,0	-7,5	—	—	+0,5	+1,0	52	38
-7,5	-7,0	—	—	+1,0	+1,5	33	28
-7,0	-6,5	—	5	+1,5	+2,0	14	33
-6,5	-6,0	5	—	+2,0	+2,5	—	19
-6,0	-5,5	—	—	+2,5	+3,0	5	5
-5,5	-5,0	5	—	+3,0	+3,5	9	—
-5,0	-4,5	5	—	+3,5	+4,0	—	14
-4,5	-4,0	5	9	+4,0	+4,5	—	—
-4,0	-3,5	14	9	+4,5	+5,0	—	5
-3,5	-3,0	19	28	+5,0	+5,5	9	5
-3,0	-2,5	33	24	+5,5	+6,0	—	5

стями высот нормальных и высот Виньяля необходимо считаться при точных выводах (теория не должна ухудшать результаты измерений). Сходные выводы сделал Фудзи (1969) по японским материалам.

Этим выводам о рациональности практического использования нормальных высот несколько противоречит ученик Бодемюллера Кекк (1965) в своей диссертации. Кекк

Таблица 4

Поправки, мм		Число линий с поправками высот	
о	до	Гельмерта	нормальных
0	5	19	28
6	10	25	27
11	15	12	21
16	20	13	8
21	25	7	2
26	30	8	4
31	35	6	3
36	40	2	—
41	45	—	1
46	50	3	1

от измеренных высот к высотам Гельмерта, на смену которым и пришли нормальные высоты.

Неблагоприятное распределение поправок нормальных высот Кекк правильно объяснил тем обстоятельством, что на исследованных отрезках нивелировки аномалии силы тяжести в редукции Буге оказались положительными (чаще они бывают отрицательными), т. е. оказались большие разности между измеренными и нормальными значениями силы тяжести. Переход от нормальной формулы Гельмерта к нормальной формуле Кассиниса улучшил распределение поправок нормальных высот. Кекк отметил, что поправки нормальных высот более благоприятно распределились в горах, чем в районах с меньшими высотами. Это подтверждает оценка Ледерштегера (1956). В книге (1956—1969) Ледерштегер пришел к выводу, что для больших областей и в особенности для горных стран следует предпочесть нормальные высоты.

Интересна также подобная табличка Рамзайера (1955), составленная по материалам 40-километровых линий в земле Баден-Вюртемберг (табл. 4).

Для отдельных небольших районов можно достигнуть большей близости между высотами H_c какой-либо системы и измеренными, подбирая специально знаменатель

g_c в формуле (III.11.12). Однако, в общем, для всей Земли едва ли можно достигнуть большей близости к измеренным высотам, чем имеют нормальные высоты H_Q .

Приближенные ортометрические высоты ранее использовали как промежуточное звено при вычислении теоретических невязок нивелирных полигонов. Такую формулу можно получить, выразив в формуле (III.11.6) нормальные высоты через измеренные. При таких вычислениях на каждом репере можно использовать только одно и то же значение $g_m \approx g_c$. Если это условие не выполнено и на каком-нибудь из реперов при обработке примыкающих друг к другу звеньев приняты разные значения g_c , то даже при сравнительно малой высоте $H = 500$ м и $g_c' - g_c'' = 100$ мгал теоретическая невязка будет искажена на 50 мм. Если же значения g_m взяты грубо приближенно, но каждое из них одинаково в конце звена и начале следующего, теоретическая невязка может быть выведена точно.

Пока измерения силы тяжести вдоль нивелирных ходов были связаны с преодолением практических трудностей, приближенное вычисление ортометрических высот, как правило, заменяли вычислением таких величин

$$H_\gamma(K) = \frac{1}{\gamma_V} \int_{(OK)} \gamma dh_w, \quad (III.11.15)$$

где γ — нормальные значения силы тяжести вдоль нивелирного хода. При этом приближении принимали $\gamma_V = \gamma_0 = 0,154$ Н.

Величины H_γ зависят от пути и поэтому в общем случае на замкнутом полигоне

$$\oint \gamma dh_w \neq 0.$$

Величины H_γ называют сфероидическими или нормальными ортометрическими высотами. Теперь они имеют только историческое значение. Вычисление ортометрических высот по (III.11.15) раскритиковал еще Гельмерт (1884).

§ 12. Динамические высоты и геопотенциальные отметки. Их применение в практике геометрического нивелирования

Поверхности равных значений высот H , нормальных высот H_Q и потенциала W в общем случае не совпадают и не параллельны. Если уровень воды в некотором водоеме не совпадает с геоидом, то, даже если вода находится в покое, отдельные точки уровня воды имеют, как отмечено выше, разные нормальные и разные ортометрические высоты. Вода течет от точек с меньшими значениями потенциала W силы тяжести к точкам с большими значениями этого потенциала. Поэтому в гидротехнических работах и при изучении уровней морей, как отмечено в разделе 1, рациональнее пользоваться не высотами H или H_Q , а разностями

$$W(I) - W(K) = \int_{(IK)} g dh_w, \quad (III.12.1)$$

которые определяют положение уровенной поверхности точки I относительно уровенной поверхности точки K , или, если точка I лежит на геоиде,

$$C(K) = W_0 - W(K) = \int_{(OK)} g dh_w. \quad (III.12.2)$$

Величину $C(K)$ принято называть геопотенциальной отметкой (cote geopotentielle, geopotential number, geopotentielle Kote). Геопотенциальные отметки выражают произведением килогалов на метры, поэтому их численные выражения близки к соответственным высотам в метрах. Как было упомянуто, этот способ счета высот введен Гауссом (1825). Такой же способ предлагал Ванд (1871).

Для практического удобства вместо разностей C Гельмерт (1873) предложил использовать редуцированные разности уровней

$$H_d(K) = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_{(OK)} g dh_w = \frac{C(K)}{\gamma_{45^\circ}}, \quad (III.12.3)$$

которые имеют размерность длины.

Шейсон (Cheysson), по свидетельству Лаллемана (1889), назвал эти разности динамическими отметками (cotes dynamiques). В советской геодезической литературе величины H_d принято называть динамическими высотами, хотя такой термин в той же мере условен, как определение величин H_c по (III.11.12) как высот. В немецкой геодезической литературе величины H_d иногда бывают названы Arbeitshöhen. Как следует из (III.12.3), динамическая высота не зависит от пути нивелирования и сохраняет постоянное значение на каждой уровенной поверхности. Для обработки астрономо-геодезических сетей такие высоты, как и величины H_c , не пригодны. По существу, высоты H_d суть частный вид высот H_c .

Согласно нормальной формуле (III.9.71) силы тяжести, соответствующей системе постоянных Международного астрономического союза, $\gamma_{45^\circ} = 980\,618,75$ *мгал*, согласно нормальной формуле (III.9.73), соответствующей экваториальной постоянной γ_e Гельмерта, сжатию и полюси эллипсоида Красовского, $\gamma_{45^\circ} = 980\,617,67$ *мгал*, согласно нормальной формуле Гельмерта 1901—1909 гг. $\gamma_{45^\circ} = 980\,617,91$ *мгал* и согласно формуле Кассиниса $\gamma_{45^\circ} = 980\,629,39$ *мгал*. Таким образом, динамические высоты первых трех систем постоянных различаются не больше $\frac{2,84}{980\,620} \approx 1 : 350\,000$ их величины.

Для практических вычислений геопотенциальной отметки представим ее в виде

$$C(K) = \int_{(OK)} (g - \gamma) dh_w + \int_{(OK)} (\gamma - \gamma_m(K)) dh_w + \gamma_m(K) \int_{(OK)} dh_w. \quad (\text{III.12.4})$$

Второй интеграл этой формулы преобразуем с помощью (III.10.13), приняв $H_Q(I) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{(OK)} [\gamma - \gamma_m(K)] dh_w &= \int_{(OK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w + \frac{k_1}{2} [H_Q(K) H_p(K) - H_p^2(K)] + \\ &+ \frac{k_2}{3} [H_p^2(K) - H_Q^2(K)] H_p(K). \end{aligned}$$

Допустив при $H = 6$ км, $H_Q(K) - H_p(K) = 10$ см в соответственной динамической высоте ошибку в 0,1 мм, последними двумя членами можно пренебречь. Таким образом, с высокой точностью

$$\int_{(OK)} [\gamma - \gamma_m(K)] dh_w = \int_{(OK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w. \quad (\text{III.12.5})$$

Поэтому можно принять

$$C(K) = \gamma_m(K) \int_{(OK)} dh_w + \int_{(OK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w + \int_{(OK)} (g - \gamma) dh_w. \quad (\text{III.12.6})$$

Введем практическую формулу для разности геопотенциальных отметок. Используя равенства

$$\int_{(OI)} [\gamma - \gamma_m(I)] dh_w = \int_{(OI)} [\gamma_0 - \gamma_0(I)] dh_w$$

и (III.12.5), раскроем

$$\begin{aligned} \int_{(IK)} [\gamma - \gamma_m(K)] dh_w &= \int_{(IK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w + \{[\gamma_m(K) - \gamma_m(I)] - \\ &- [\gamma_0(K) - \gamma_0(I)]\} \int_{(OI)} dh_w, \end{aligned}$$

или по (III.10.13) с указанной погрешностью

$$\begin{aligned} \int_{(IK)} [\gamma - \gamma_m(K)] dh_w &\approx \int_{(IK)} [\gamma_0 - \gamma_0(K)] dh_w - \frac{k_1}{2} H_Q(I) [H_p(K) - H_Q(I)] + \\ &+ \frac{k_2}{3} H_Q(I) [H_p^2(K) - H_Q^2(I)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} C(K) - C(I) &= \int_{(IK)} g dh_w = \gamma_m(K) \int_{(IK)} dh_w + \int_{(IK)} [\gamma - \gamma_m(K)] dh_w + \int_{(IK)} (g - \gamma) dh_w \approx \\ &\approx \gamma_m(K) \int_{(IK)} dh_w + \int_{(IK)} (\gamma_0 - \gamma_0(K)) dh_w + \int_{(IK)} (g - \gamma) dh_w - \\ &- \frac{k_1}{2} H_i(I) [H_i(K) - H_i(I)] + \frac{k_2}{3} H_i(I) [H_i^2(K) - H_i^2(I)]. \quad (\text{III.12.7}) \end{aligned}$$

Здесь высоты H_Q и H_p мы заменили измеренными, имея в виду, что при точных выводах необходимы последовательные приближения. В равнинных районах погрешность такой замены в соответственной динамической высоте не превзойдет, как правило, 1 мм.

Если известны нормальные высоты $H_Q(I)$ и $H_Q(K)$ и средние значения $\gamma_m(I)$, $\gamma_m(K)$ нормальной силы тяжести по высоте в точках I и K , то можно просто вычислить разность геопотенциальных отметок

$$\begin{aligned} C(K) - C(I) &= \gamma_m(K) H_Q(K) - \gamma_m(I) H_Q(I) = H_Q(K) [\gamma_m(K) - \gamma_m(I)] + \\ &+ \gamma_m(I) [H_Q(K) - H_Q(I)] = H_Q(I) [\gamma_m(K) - \gamma_m(I)] + \\ &+ \gamma_m(K) [H_Q(K) - H_Q(I)]. \quad (\text{III.12.8}) \end{aligned}$$

Так же прост обратный переход:

$$H_Q(K) - H_Q(I) = \frac{1}{\gamma_m(I)} [C(K) - C(I)] + \frac{\gamma_m(I) - \gamma_m(K)}{\gamma_m(K) \gamma_m(I)} C(K). \quad (111.12.9)$$

Для замкнутого нивелирного полигона, состоящего из звеньев IK , формула (111.12.8) приводит к такому соотношению, которое можно использовать как контрольное

$$\Sigma H_Q(K) [\gamma_m(K) - \gamma_m(I)] + \Sigma \gamma_m(I) [H_Q(K) - H_Q(I)] = 0. \quad (111.12.10)$$

Применив (111.12.9) к замкнутому полигону, аналогично находим

$$\sum \frac{C(K) - C(I)}{\gamma_m(I)} + \sum \frac{\gamma_m(I) - \gamma_m(K)}{\gamma_m(I)} H_Q(K) = 0. \quad (111.12.11)$$

Формулу для динамической высоты можно представить так:

$$H_d = H_Q + \frac{\gamma_m - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_Q = \frac{\gamma_m}{\gamma_{45^\circ}} H_Q = H_Q + \frac{\gamma_m - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_m} H_d. \quad (111.12.12)$$

Таким образом, динамические высоты отличаются от нормальных на $\frac{\gamma_m - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_m}$

своей величины. Наибольшие отличия между этими высотами могут быть в районе экватора, где сила тяжести убывает как с уменьшением широты до 0° , так и с увеличением высоты. При $\gamma_m - \gamma_{45^\circ} = 3$ гал разность нормальной и динамической высот будет близка к 1 : 325 высоты, т. е. при $H_d = 3$ км эта разность близка к 9 м, а при $H_d = 1$ км — к 3 м. Разности между измеренными и динамическими высотами подобны этим. Можно избежать больших величин таких разностей, введя местные динамические высоты (Гельмерт, 1873)

$$H'_d(K) = \frac{1}{\gamma'_{(OK)}} \int g dh_w = \frac{C(K)}{\gamma'}, \quad (111.12.13)$$

где постоянное γ' следует установить по возможности близким к силе тяжести в районе работ.

Переход от динамических высот H_d к местным динамическим H'_d прост: нужно динамические высоты H_d умножить на отношение $\frac{\gamma_{45^\circ}}{\gamma'}$, или, умножив динамические высоты на отношение $\frac{\gamma_{45^\circ} - \gamma'}{\gamma'}$, вывести местные динамические высоты по формуле

$$H'_d = H_d + \frac{\gamma_{45^\circ} - \gamma'}{\gamma'} H_d. \quad (111.12.14)$$

Против практического применения динамических высот обычно возражают, указывая на их большие отличия от высот измеренных и связанные с этим неудобства. Указанный прием перехода к местным динамическим высотам устраняет такие возражения.

Для разности динамических высот находим

$$\begin{aligned} H_d(K) - H_d(I) &= \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} [\gamma_m(K) H_Q(K) - \gamma_m(I) H_Q(I)] = \frac{H_Q(K)}{\gamma_{45^\circ}} [(\gamma_m(K) - \gamma_m(I)) + \\ &+ \frac{\gamma_m(I)}{\gamma_{45^\circ}} [H_Q(K) - H_Q(I)]] = H_Q(K) - H_Q(I) + \\ &+ \left[\frac{\gamma_{45^\circ} - \gamma_m(I)}{\gamma_{45^\circ}} H_Q(I) - \frac{\gamma_{45^\circ} - \gamma_m(K)}{\gamma_{45^\circ}} H_Q(K) \right]. \end{aligned} \quad (111.12.15)$$

Для перехода от нормальных высот к динамическим ранее Еремеев (1951) составил таблицы коэффициента

$$q = 1 - \frac{\gamma_m}{\gamma_{45^\circ}}$$

по аргументам высоты H_Q и широты B , используя формулу Гельмерта 1901—1909 гг. Таблица вычислена по формуле

$$q \approx 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_{45^\circ}} + \frac{0,3086}{2\gamma_{45^\circ}} H_Q,$$

где высота H_Q выражена в метрах. Тогда

$$H_d = H_Q - qH_Q.$$

Из (III.12.12) легко выразить разность нормальных высот двух точек одной уровенной поверхности. Из равенства динамических высот северной и южной точек следует

$$\left. \begin{aligned} H_d &= H_Q(N) + \frac{\gamma_m(N) - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_Q(N) = H_Q(S) + \frac{\gamma_m(S) - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_Q(S) \\ H_Q(S) - H_Q(N) &= \frac{\gamma_m(N) - \gamma_m(S)}{980,6} H_Q \end{aligned} \right\}, \quad (III.12.16)$$

если в первом приближении принять $H_Q(N) \approx H_Q(S) = H_Q$ и $\gamma_{45^\circ} = 980,6$ гал. По (III.12.16) вычислены разности нормальных высот уровня воды в южной и северной

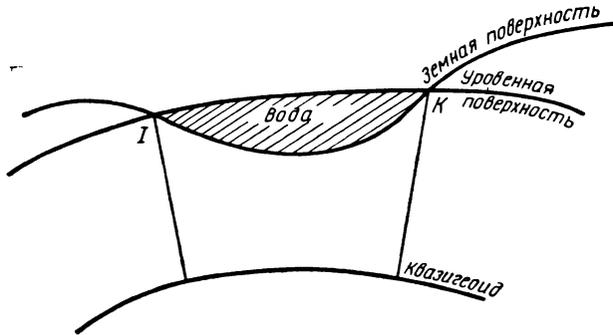


Рис. 8

частях некоторых водоемов (табл. 5). Рядом указаны средние квадратические ошибки геометрического нивелирования I класса (Инструкция, 1966) для линий вдоль берегов.

Из таблицы видно, что даже в равнинных районах (Рыбинское водохранилище) разности нормальных высот на уровне водоема могут быть сравнимы с ошибками нивелирования, а в горах разности нормальных высот на таком уровне могут значительно превосходить ошибки нивелирования I и II классов.

Таблица 5

Водоем	$H_Q(S) - H_Q(N)$, мм	Средняя квадратич. ошибка нивелиро- вания, мм	Протяжен- ность нивелирной линии, км	Протяжен- ность водоема по широте, км	H_Q^* , м
Рыбинское водохрани- лище	8,4	± 10	155	110	100
Озеро Севан	87	± 6	85	50	1902
Озеро Каракуль	88	± 3	35	25	3914
Байкал	175	± 34	625	480	455
Хубсугул	166	± 9	130	120	1645

* По Атласу СССР (Москва, 1962).

Иногда точность геометрического нивелирования проверяют, привязываясь к уровню водоема. В этом случае необходимо от нормальных высот перейти к динамическим. Иначе нельзя проверить, происходит ли расхождение нормальных высот в удаленных точках уровня воды от ошибок нивелировки или такое расхождение действительно существует.

Если точные нормальные высоты точек I и K уровенной поверхности соответственно равны $H_Q(I)$ и $H_Q(K)$ (см. рис. 8), а соответственные средние значения нормальной силы тяжести суть $\gamma_m(I)$, $\gamma_m(K)$, то согласно (III.10.3).

$$\gamma_m(I) H_Q(I) = \gamma_m(K) H_Q(K).$$

Образовав производную пропорцию, находим

$$H_Q(K) - H_Q(I) = \frac{\gamma_m(I) - \gamma_m(K)}{\gamma_m(K)} H_Q(I). \quad (\text{III.12.17})$$

Практически безразлично, какую из высот ($H_Q(I)$ или $H_Q(K)$) взять множителем и какое среднее ($\gamma_m(K)$ или $\gamma_m(I)$) взять знаменателем справа в (III.12.17). Если $\bar{H}_Q(I)$ и $\bar{H}_Q(K)$ — нормальные высоты, полученные из измерений, то разность

$$[\bar{H}_Q(K) - \bar{H}_Q(I)] - [H_Q(K) - H_Q(I)] = \delta \quad (\text{III.12.18})$$

возникает из-за ошибок инструментального характера, рефракции и несовпадения среднего уровня водоема с урвненной поверхностью. Пользуясь (III.12.12) или указанной таблицей, по \bar{H}_Q выводим измеренные динамические высоты \bar{H}_d . Если бы H_Q были безошибочными, то $\bar{H}_d(I) = \bar{H}_d(K) = H_d(I) = H_d(K)$, где H_d — точные динамические высоты.

Очевидно, практически

$$\bar{H}_Q(I) - H_Q(I) \approx \bar{H}_d(I) - H_d(I),$$

$$\bar{H}_Q(K) - H_Q(K) \approx \bar{H}_d(K) - H_d(K).$$

Поэтому с достаточной точностью

$$\bar{H}_d(K) - \bar{H}_d(I) = \delta$$

и

$$\bar{H}_Q(K) - \bar{H}_Q(I) = \frac{\gamma_m(I) - \gamma_m(K)}{\gamma_m} H_Q + \delta. \quad (\text{III.12.19})$$

Международная геодезическая ассоциация на 10-й генеральной ассамблее в Риме в 1954 г. рекомендовала выводить геопотенциальные отметки вдоль нивелирных линий по крайней мере вдоль основных нивелирных линий. Обработку — уравнивание нивелирных результатов международного характера, в частности, европейской нивелирной сети, — эта ассамблея рекомендовала проводить в геопотенциальных отметках (см. Voeux et résolutions, 1955 и, например, у Кнейсла, 1955), оставляя вывод приближенных ортометрических высот на усмотрение каждого государства (нормальные высоты были в то время Международной геодезической ассоциации еще неизвестны).

Позднее, проанализировав уравнительные вычисления, Виньяль и Симонсен (1962) пришли к выводу, что окончательная высота репера будет практически та же, независимо от того, как уравнена сеть — в системе нормальных высот или в системе геопотенциальных отметок. На наш взгляд, этот вывод очевиден. Он подтвержден Симонсеном (1963) в уже упомянутом официальном отчете Международной геодезической ассоциации. В этом отчете, в частности, Симонсен обсуждает практические пути совместного уравнивания нивелирных данных, вычисленных в системе нормальных высот или геопотенциальных отметок. В связи с этой задачей им описан опыт Флорентийского военного географического института, где в 1957 г. двумя путями был урвнен один из нивелирных полигонов Италии с периметром около 820 км. Нормальные высоты реперов этого полигона были вычислены: 1) по урвненным геопотенциальным отметкам, 2) путем уравнивания в системе нормальных высот. Разности высот при этом не превысили 0,11 мм, а у большинства точек они много меньше. При вычислении нормальных значений силы тяжести в точках, внешних по отношению к нормальному эллипсоиду квадратичный член не учтен, а коэффициент линейного члена принят постоянным. Неучетом квадратичного члена вполне можно объяснить указанные расхождения. Однако эти разности не существенны. Заметна корреляция кривой разностей с кривой аномалий $g - \gamma$ силы тяжести на земной поверхности и с профилем высот, изменяющихся от 33 до 2758 и 2097 м.

Расхождения результатов уравнительных вычислений в геопотенциальных отметках от результатов уравнивания нормальных высот, по мнению Симонсена, в общем случае не превзойдут 0,2 мм.

Марусси (1951, 1961) и вслед за ним Хотин (1957, 1969) развивают теорию земного гравитационного поля, в которой использованы только такие физические и геометрические величины, которые можно непосредственно измерять. В качестве систем координат, внутренне связанных с внешним гравитационным полем, Марусси и Хотин используют местную декартову систему (т. е. оси, направленные на север, восток и зенит в некоторой точке земной поверхности) и поверхности равных значений астрономической широты, астрономической долготы и потенциала силы тяжести (или динамической высоты). Как заметил Марусси, эта теория стремится к локальному описанию земного гравитационного поля: к выводу зависимостей, в том числе дифференциальных, между элементами поля в некоторой точке. В частности, Марусси (1961)

привел следующее интересное выражение главного члена приращения $W - W_0$ потенциала силы тяжести при смещении на отрезок s некоторой пространственной кривой (силовой линии или оптического луча)

$$W - W_0 = -sg_0 \cos z_0 + \frac{s^2 g_0}{2} \left[\bar{\gamma} \sin z_0 - k_\alpha \sin^2 z_0 - \sin 2z_0 \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \ln g + \left(k_1 + k_2 + \frac{2\omega^2}{g} \right) \cos^2 z \right] + \frac{s^3 g}{6} \left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} + \dots \right) + \dots$$

Здесь z — зенитное расстояние касательной к кривой s ; α — ее азимут; $\bar{\gamma}$ — первая кривизна отрезка s ; k_α — кривизна нормального сечения уровенной поверхности плоскостью, касательной к отрезку s ; k_1, k_2 — кривизны нормальных северного и восточного сечений. Дифференциал ds_α определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s_1} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial s_2},$$

где s_1 и s_2 — направления на север и восток соответственно.

§ 13. Оценка некоторых погрешностей вывода разностей высот и потенциалов

1. Описывая вывод высот H из геометрического нивелирования в § 7, мы полагаем, что разность отсчетов по задней и передней рейкам равна элементарному превышению нуля передней рейки над нулем задней. Это было бы верно, однако, только в том случае, когда отсчетная поверхность плоская. Из-за кривизны отсчетного эллипсоида возникает погрешность, которую мы и намерены оценить. Пусть в точке (B_0, L_0, H_0) установки нивелира и точках (B_1, L_1, H_1) , (B_2, L_2, H_2) установки реек уклонения отвеса равны нулю, h_1, h_2 — отсчеты по задней и передней рейкам, h_0 — высота визирной оси нивелира над точкой O (рис. 9). Высоту H_1 точки I и плановые координаты всех трех точек считаем известными.

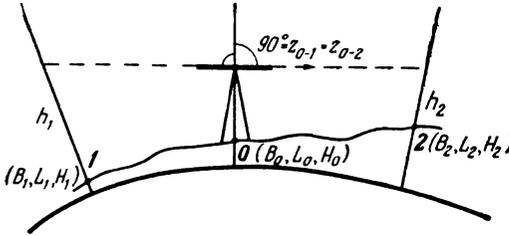


Рис. 9

Обозначим $H_1 + h_1 = \bar{H}_1$, $H_2 + h_2 = \bar{H}_2$, $H_0 + h_0 = \bar{H}_0$. Применяя формулу (11.2.20) к точкам I и O , O и 2 , для частного случая $z_{0-1} = z_{0-2} = 90^\circ$ находим

$$(N_2 + \bar{H}_2) \cos \psi_{0-2} = N_0 + \bar{H}_0 + e^2 (N_2 \sin B_2 - N_0 \sin B_0) \sin B_0,$$

$$(N_1 + \bar{H}_1) \cos \psi_{0-1} = N_0 + \bar{H}_0 + e^2 (N_1 \sin B_1 - N_0 \sin B_0) \sin B_0$$

и в разности

$$[(N_2 + \bar{H}_2) - (N_1 + \bar{H}_1)] \cos \psi_{0-2} + (N_1 + \bar{H}_1) [\cos \psi_{0-2} - \cos \psi_{0-1}] = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \sin B_0.$$

Отсюда выводим формулу для разности высот

$$(\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \cos \psi_{0-2} = -(N_2 - N_1) \cos \psi_{0-2} - (N_1 + \bar{H}_1) (\cos \psi_{0-2} - \cos \psi_{0-1}) + e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \sin B_0$$

и далее

$$H_2 - H_1 = -(h_2 - h_1) - \frac{1}{\cos \psi_{0-2}} \left\{ (N_2 - N_1) \cos \psi_{0-2} + (N_1 + \bar{H}_1) \times \right. \\ \times \left[(\sin B_2 - \sin B_1) \sin B_0 + (\cos B_2 - \cos B_1) \cos (L_2 - L_1) \cos B_0 - 2 \sin \left(\frac{L_1 + L_2}{2} - L_0 \right) \times \right. \\ \left. \left. \times \sin \frac{L_2 - L_1}{2} \cos B_0 \cos B_1 \right] - e^2 [(N_2 - N_1) \sin B_2 + N_1 (\sin B_2 - \sin B_1)] \sin B_0 \right\}. \quad (\text{III.13.1})$$

Мы получили точную формулу для вычисления разности высот точек 2 и 1 по отсчетам на рейках. Последний член представляет обычно пренебрегаемую погреш-

ность. Эта погрешность равна, очевидно, нулю, если нивелирный ход идет по параллели $B_1=B_2$ и расстояния от нивелира до рек одинаковы $\left(\frac{L_1+L_2}{2}-L_0=0\right)$.

Вдоль меридиана $L_0=L_1=L_2$, $\cos \psi_{0-2}=\cos (B_2-B_0)$, поэтому

$$H_2-H_1=-\left(h_2-h_1\right)-\frac{1}{\cos \left(B_2-B_0\right)}\left[\left(N_2-N_1\right) \cos \left(B_2-B_0\right)+\left(N_1+\bar{H}_1\right) \times\right. \\ \left.\times\left[\cos \left(B_2-B_0\right)-\cos \left(B_0-B_1\right)\right]-e^2\left[\left(N_2-N_1\right) \sin B_2+\right.\right. \\ \left.\left.+N_1\left(\sin B_2-\sin B_1\right)\right] \sin B_0\right]. \quad (111.13.2)$$

Примем теперь $B_2-B_0=B_0-B_1$, что с высокой степенью точности соответствует равенству расстояний от нивелира до рек. Тогда для меридионального хода найдем

$$H_2-H_1=-\left(h_2-h_1\right)-\frac{1}{\cos \left(B_2-B_0\right)}\left[\left(N_2-N_1\right) \cos \left(B_2-B_0\right)-\right. \\ \left.-e^2\left[\left(N_2-N_1\right) \sin B_2+N_1\left(\sin B_2-\sin B_1\right)\right] \sin B_0\right]. \quad (111.13.3)$$

Согласно выводу формулы (11.3.8), имеем

$$N_2-N_1=e^2\left(N_2 \sin B_2-N_1 \sin B_1\right) \frac{\left(N_1 \sin B_1+N_2 \sin B_2\right)}{N_1+N_2}.$$

Поэтому

$$H_2-H_1=-\left(h_2-h_1\right)+e^2\left[\left(N_2-N_1\right) \sin B_2+N_1\left(\sin B_2-\sin B_1\right)\right] \left[\frac{\sin B_0}{\cos \left(B_2-B_0\right)}-\right. \\ \left.-\frac{N_1 \sin B_1+N_2 \sin B_2}{N_1+N_2}\right]. \quad (111.13.4)$$

Выделим главный член погрешности — последнего члена в (111.13.3), разложив его по степеням $\Delta B=B_0-B_1=B_2-B_0$. Имеем

$$\frac{dN}{dB}=\frac{ae^2 \sin B \cos B}{\left(1-e^2 \sin ^2 B\right)^{3/2}},$$

$$\frac{d^2 N}{dB^2}=\frac{ae^2}{\left(1-e^2 \sin ^2 B\right)^{5/2}}\left(1-2 \sin ^2 B+2e^2 \sin ^2 B-e^2 \sin ^4 B\right),$$

$$\frac{d^3 N}{dB^3}=\frac{ae^2 \sin B \cos B}{\left(1-e^2 \sin ^2 B\right)^{7/2}}\left(-4+9e^2-10e^2 \sin ^2 B+6e^4 \sin ^2 B-e^4 \sin ^4 B\right).$$

Сохранив в рядах члены порядка $e^2(\Delta B)^3$ и бóльшие, найдем

$$\delta=-\frac{1}{\cos \left(B_2-B_0\right)}\left\{\left(N_2-N_1\right)\left[\cos \left(B_2-B_0\right)-e^2 \sin B_0 \sin B_2\right]-\right. \\ \left.-e^2 N_1\left(\sin B_2-\sin B_1\right) \sin B_0\right\} \approx+ae^2(\Delta B)^3 \sin 2B_1. \quad (111.13.5)$$

Пусть $\Delta B=1''$, 5, что соответствует расстоянию между нивелиром и рейкой ~ 48 м. Тогда при $B_1=45^\circ$

$$\delta=1,8 \cdot 10^{-8} \text{ мм.}$$

Суммарная погрешность в нивелирном ходе от экватора $B_1=0$ до полюса составляет при $\Delta B=1''$, 5

$$D=ae^2(\Delta B)^3 \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(2B_1+4k\Delta B\right)=ae^2(\Delta B)^3 \sin 2\left[B_1+(n-1)\Delta B\right] \sin 2n\Delta B \operatorname{cosec} 2\Delta B= \\ =0,0012 \text{ мм,} \quad (111.13.6)$$

где $n=\frac{90 \cdot 60 \cdot 60''}{3''}=108000$ (Градштейн и Рыжик, 1963, стр. 43).

Если расстояния от нивелира до рек не равны, рассматриваемый эффект быстро возрастает. Разложив (111.13.2) в ряды по степеням $\Delta B_1=B_0-B_1$, $\Delta B_2=B_2-B_0$ и сохранив в преобразованиях члены с (ΔB_1^2) , (ΔB_2^2) и бóльшие, найдем для главного члена погрешности

$$\delta=-\frac{1}{\cos \left(B_2-B_0\right)}\left\{\left(N_2-N_1\right)\left[\cos \left(B_2-B_0\right)-e^2 \sin B_0 \sin B_2\right]+N_1\left[\cos \left(B_2-B_0\right)-\right.\right. \\ \left.\left.-\cos \left(B_0-B_1\right)-e^2\left(\sin B_2-\sin B_1\right) \sin B_0\right]\right\} \approx \frac{a\left[\left(\Delta B_1^2\right)-\left(\Delta B_2^2\right)\right]}{2}. \quad (111.13.7)$$

При $\Delta B_1 = 1''{,}5$, $\Delta B_2 = 0''{,}8$, находим $\delta = 0{,}13$ мм.

Похожая, но как будто менее точная оценка выполнена голландским геодезистом Оудемансом (1874).

2. Выводя разность потенциалов, мы принимали

$$\Delta W = -g \Delta h_w.$$

Оценим погрешность этого соотношения. На рис. 10 показаны нивелир и две рейки, установленные в точках 1 и 2 земной поверхности; h_1 и h_2 снова обозначают отсчеты по рейкам. На рис. 10 показано также сечение уровенной поверхности, касательной к которой является визирная линия. В точках P_1 и P_2 эта уровенная поверх-

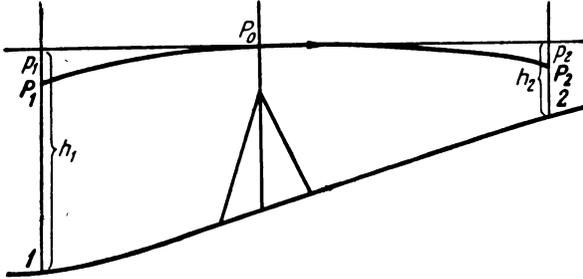


Рис. 10

ность пересекает рейки, p_1 и p_2 — понижения этой поверхности на рейках относительно горизонта. Поскольку точки P_1 и P_2 принадлежат одной уровенной поверхности, значения потенциала в них одинаковы. Пусть W_1 и W_2 обозначают значения потенциала в точках 1 и 2. Тогда, ограничиваясь учетом первых двух членов ряда Тейлора,

$$W_1 + (h_1 - p_1) \left(\frac{dW}{dH} \right)_1 + \frac{1}{2} (h_1 - p_1)^2 \left(\frac{d^2W}{dH^2} \right)_1 = W_2 + (h_2 - p_2) \left(\frac{dW}{dH} \right)_2 + \frac{1}{2} (h_2 - p_2)^2 \left(\frac{d^2W}{dH^2} \right)_2 \quad (III.13.8)$$

или

$$W_2 - W_1 = (h_2 - p_2) g_2 - (h_1 - p_1) g_1 + \frac{1}{2} (h_2 - p_2)^2 \left(\frac{dg}{dH} \right)_2 - \frac{1}{2} (h_1 - p_1)^2 \left(\frac{dg}{dH} \right)_1, \quad (III.13.9)$$

где g_1 , g_2 — сила тяжести в точках 1 и 2. Чтобы выделить главный член и проще оценить погрешность, преобразуем

$$W_2 - W_1 = \frac{1}{2} (h_2 - h_1) (g_1 + g_2) + \frac{1}{2} (h_1 + h_2) (g_2 - g_1) - \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (g_1 + g_2) - \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (g_2 - g_1) + \frac{1}{2} (h_2 - p_2)^2 \left[\left(\frac{dg}{dH} \right)_2 - \left(\frac{dg}{dH} \right)_1 \right] + \frac{1}{2} [(h_2 - p_2)^2 - (h_1 - p_1)^2] \left(\frac{dg}{dH} \right)_1. \quad (III.13.10)$$

Первый член справа представляет главную величину разности $W_2 - W_1$. В нормальном гравитационном поле вдоль меридиана при $B_2 - B_1 = 3''$, $B_1 = 45^\circ$, т. е.

$$g_2 - g_1 = \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial B} (B_2 - B_1) \approx 0{,}078 \text{ мгал},$$

для второго члена справа находим, завышая при $\frac{1}{2} (h_1 + h_2) = 3$ м и пересчете в линейную меру делением на γ_e

$$\frac{1}{2} (h_1 + h_2) (g_2 - g_1) = \sim 2{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ мм.}$$

Если нивелирный ход проложен от экватора до полюса, $\frac{1}{2}(h_1+h_2)=2$ м, $\gamma_2-\gamma_1=$
 $=0,0053 \gamma_e$, для рассматриваемого члена находим

$$\frac{1}{2\gamma}(h_1+h_2)(\gamma_2-\gamma_1) \approx 10,6 \text{ мм.}$$

В реальном гравитационном поле изредка, в горах, встречаются горизонтальные градиенты силы тяжести порядка 0,1 мгал/м. Тогда при расстоянии между рейками в 100 м

$$g_2 - g_1 = 10 \text{ мгал}$$

и при $\frac{1}{2}(h_1+h_2)=3$ м получаем

$$\frac{1}{2\gamma}(h_1+h_2)(g_2-g_1) = 0,03 \text{ мм.}$$

В реальном гравитационном поле такое аномальное влияние имеет, в общем, случайный характер, хотя на отдельных участках погрешности могут накапливаться. Если, например, нужно выполнить нивелировку вдоль склона горы с изменением аномалий силы тяжести на 600 мгал, то в сумме, сохраняя

$$\frac{1}{2}(h_1+h_2) = 3 \text{ м,}$$

$$\frac{1}{2\gamma}(h_1+h_2)(g_2-g_1) = 1,8 \text{ мм.}$$

Ошибки измерений, как правило, превзойдут эту погрешность.

Перейдем к оценке значений p_1 , p_2 и их разности. Точку P_0 пересечения вертикальной и визирной осей нивелира примем за начало вспомогательной системы координат. Приняв визирную ось нивелира за ось абсцисс S и направление вертикальной оси к центру Земли за ось ординат P , можно выразить понижение p урванной поверхности относительно горизонта

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \right)_0 s^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 p}{ds^3} \right)_0 s^3 + \dots \quad (III.13.11)$$

и разность p_2-p_1 понижений при $s=l$ и $s=-l$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{d^3 p}{ds^3} \right)_0 l^3 + \dots \quad (III.13.12)$$

Согласно определению радиуса кривизны, можно выразить радиус кривизны сечения $P_1 P_0 P_2$ рассматриваемой урванной поверхности в точке P_0 при $s=0$

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \right)_{s=0} \quad (III.13.13)$$

Поэтому

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{3} \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} l^3 + \dots \quad (III.13.14)$$

Пусть кривая $P_1 P_0 P_2$ — главное сечение урванной поверхности с азимутом, равным нулю; тогда, по Брунсу (1878),

$$\frac{g}{\rho} = - \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \quad (III.13.15)$$

и

$$p_2 - p_1 = - \frac{1}{3} l^3 \left(\frac{1}{g^2} \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^3 W}{\partial s^3} \right) + \dots \quad (III.13.16)$$

Оценим разность p_2-p_1 в меридиональной плоскости нормального гравитационного поля, приняв исследуемую урвленную поверхность за эллиптическую.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial B} \frac{1}{M} = - \frac{3}{2} \frac{(1-e^2 \sin^2 B)^{1/2}}{a(1-e^2)} e^2 \sin 2B, \quad (III.13.17)$$

находим при $l=1''_5$ М, $B=45^\circ$ в пересчете в линейную меру $p_2-p_1 \approx 9 \cdot 10^{-9}$ мм.

Для нивелирного хода от экватора ($B_1=0$) до полюса находим для третьего члена (III.13.10) также в нормальном поле при $\Delta B=1''$,5

$$-\Sigma(p_2 - p_1) \gamma_0 \approx \frac{1}{2} \gamma_e a e^2 (\Delta B)^3 \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2B_1 + 4k\Delta B) = 6 \cdot 10^{-4} \text{ мм.} \quad (\text{III.13.18})$$

Для оценки разности $p_2 - p_1$ в реальном поле, как следует из (III.13.16), необходимо иметь третьи производные потенциала. Эти величины еще нельзя получить из измерений. Даже измерений вторых производных в близко расположенных точках описано мало. Для ориентировочной оценки величины $\frac{\partial^3 W}{\partial s^3}$ по таким данным можно использовать наблюдательные материалы доклада Мельцера (1967) генеральной ассамблеи Международного геодезического и геофизического союза в Люцерне (секция V физической геодезии). Для точек, расположенных на высоте около 330 м и на расстоянии 50 м, разность вертикального градиента достигла у Мельцера 0,025 мгал/м, т. е.

$$\frac{\partial^3 W}{\partial s^3} = 0,0005 \text{ мгал/м}^2;$$

полагая также

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0,1 \text{ мгал/м},$$

согласно (III.13.16) находим при $l=1''$,5

$$|p_2 - p_1| \approx 0,02 \text{ мм},$$

что и составляет влияние третьего члена в (III.13.10) в линейной мере. Такие влияния также имеют тенденцию компенсироваться. В горных районах значения $\frac{\partial^3 W}{\partial s^3}$ могут значительно возрасти, но там, как правило, расстояния от нивелира до рейки меньше, чем на равнинах, а, как следует из (III.13.16), разность $p_2 - p_1$ изменяется пропорционально кубу этого расстояния.

Если расстояния l_1 и l_2 от нивелира до реек не равны, главный член разности $p_2 - p_1$ составляет

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \right)_0 (l_1^2 - l_2^2) = -\frac{1}{2} (l_1^2 - l_2^2) \frac{1}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}.$$

При $l_1=200$ м и $l_2=20$ м в нормальном поле находим

$$p_2 - p_1 \approx 0,3 \text{ мм}$$

и в реальном возможно при тех же l_1 и l_2 и $\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0,1$ мгал/м

$$p_2 - p_1 \approx 2 \text{ мм}.$$

Таким образом, погрешность снова быстро возрастает.

Переходим к оценке четвертого члена справа в (III.13.10). Понижение ρ урвеной поверхности у рейки выразим из (III.13.11) и (III.13.13)

$$\rho \approx \frac{1}{2} \frac{l^2}{\rho},$$

т. е. при $l=50$ м и $\rho=M$ (случай нормального поля)

$$\rho = 0,2 \text{ мм}$$

Тогда при $g_2 - g_1 = \gamma_2 - \gamma_1 = 0,078$ мгал

$$\frac{1}{2\gamma_e} (p_1 + p_2) (g_2 - g_1) = 8 \cdot 10^{-9} \text{ мм},$$

а в нивелирном ходе от экватора до полюса при $l=50$ м

$$\frac{1}{2\gamma_e} (p_1 + p_2) (\gamma_2 - \gamma_1) \sim 0,011 \text{ мм}.$$

В реальном поле изредка бывает

$$\frac{1}{2\gamma_e} (p_1 + p_2) (g_2 - g_1) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ мм},$$

а, как правило, значительно меньше.

Для пятого члена справа в (III.13.10) находим в нормальном поле при $h_2=3$ м, $B=45^\circ$, $B_2 - B_1=3''$

$$\frac{1}{2\gamma_e} (h_2 - p_2)^2 \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_2 - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_1 \right] \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ мм}$$

и в соответственной сумме от экватора до полюса $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ мм.

Даже если в реальном поле изредка возможно

$$\left(\frac{dg}{dH}\right)_2 - \left(\frac{dg}{dH}\right)_1 = 0,2 \text{ мгал/м},$$

то

$$\frac{1}{2\gamma_e} (h_2 - p_2)^2 \left[\left(\frac{dg}{dH}\right)_2 - \left(\frac{dg}{dH}\right)_1 \right] = 9 \cdot 10^{-4} \text{ мм.}$$

Наконец, для оценки последнего члена в (III.13.10) в нормальном поле находим при $h_2^2 - h_1^2 = 9 \text{ м}^2$

$$\frac{1}{2\gamma_e} \left[(h_2^2 - h_1^2) \frac{dg}{dH} \right] \approx 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

В реальном поле этот член имеет тот же порядок. Как в нормальном, так и в реальном поле эти влияния будут иметь тенденцию компенсироваться.

Таким образом, погрешности из-за пренебрежения членами ряда Тейлора с производными от потенциала W первого порядка значительно превосходят погрешность из-за неучета членов этого ряда с производными от потенциала второго порядка.

Оценка следующих членов ряда Тейлора в (III.13.8) привела бы вследствие сходимости этого ряда к еще меньшим погрешностям.

Итак, при современной точности выводов, вычисляя разность потенциалов при равных расстояниях от нивелира до реек, в формуле (III.13.10) можно ограничиться первым главным членом.

Оценку точности вывода разности потенциалов по первому члену в (III.13.10) выполнили Брунс (1878) и Гельмерт (1884).

Практически разность потенциалов выводят не на нивелирной станции, а между реперами или, если расстояние между ними велико и рельеф сложен, между вспомогательными точками на расстоянии около 1 км (в горах) или нескольких километров (на равнинах). В этом случае погрешности отбрасываемых в (III.13.10) членов возрастают. Допустимое расстояние между такими вспомогательными точками оценивают как правило, эмпирически.

§ 14. О частоте гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий

Требования к точности средней аномалии $(g-\gamma)_m$ силы тяжести при вычислении нормальных высот, как следует из (III.10.19), обусловлены дифференциальным соотношением

$$dH_Q = \frac{\Delta h_w}{\gamma_m} d(g-\gamma)_m, \quad (\text{III.14.1})$$

если исходная нормальная высота и нивелирное превышение безошибочны.

Таким образом, при $dH_Q = 0,2 \text{ мм}$ и $\Delta h_w = 100 \text{ м}$ должно быть $d(g-\gamma)_m = 2 \text{ мгал}$. Отсюда следует, что в горах при возрастании Δh_w требования к числу и точности гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий должны возрастать.

Вопрос о необходимой частоте гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий рассмотрен в современной геодезической литературе. Одна из первых оценок выполнена Пеллинеом (1960). При оценке точности вывода суммы

$$\sigma = \sum_{(IK)} \frac{(g-\gamma)_m}{\gamma_m} \Delta h_w \quad (\text{III.14.2})$$

в (III.10.19), Пеллинен предполагал линию нивелирования разбитой на n одинаковых по длине участков так, чтобы в середине каждого участка находился гравиметрический пункт. Если ошибки интерполяции аномалий $(g-\gamma)$ силы тяжести независимы, ошибку нормальной высоты можно выразить так:

$$\delta H_Q = \frac{\delta g}{\gamma_m} \text{tg } \beta \sqrt{Ls}, \quad (\text{III.14.3})$$

где δg — средняя квадратическая ошибка интерполяции аномалий силы тяжести; $\text{tg } \beta$ — средний квадратический уклон участков; s — их длина; $L = ns$. Представив, как это принято, ошибку δg в виде

$$\delta g = k \sqrt{s}, \quad (\text{III.14.4})$$

где k — коэффициент, зависящий от рельефа и геологического строения района, Пеллинен потребовал, чтобы случайная средняя квадратическая ошибка нормальной вы-

соты из-за недостаточной гравиметрической изученности нивелирной линии была в 2 раза меньше влияния остальных случайных ошибок нивелирования, выражаемых обычной формулой

$$m = \pm \eta \sqrt{L}. \quad (\text{III.14.5})$$

Из сопоставления приведенных формул тогда следует

$$s < \frac{\eta}{2} \frac{\gamma_m}{k} \text{ctg } \beta. \quad (\text{III.14.6})$$

По данным Пеллинена, в нивелировании вдоль железных дорог $\text{tg } \beta \leq 0,014$, по тропам и грунтовым дорогам в горах $\text{tg } \beta$ достигает 0,03. Приняв для равнинного района $k=1$ и $\text{tg } \beta=0,005$, Пеллинен пришел к выводу, что даже в нивелировании I класса расстояние между гравиметрическими пунктами может достигать 50 км. Таким образом было подтверждено мнение, высказанное в работе Еремсева и Звонова (1953), о достаточности для обработки нивелирования материалов гравиметрической съемки обычной в то время плотности 1 пункт на 1000 км². Дифференцировав горные районы на средневысотные и высокогорные, Пеллинен пришел к следующим требованиям к частоте гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий (в табл. 6 указаны расстояния между гравиметрическими пунктами в километрах и принятые Пеллиненом значения $\text{tg } \beta$ и k , если s выражено также в километрах).

Т а б л и ц а 6

Тип района	k	$\text{tg } \beta$	$\eta = \pm 0,5$	$\eta = \pm 1,0$	$\eta = \pm 3,0$
Высокогорный	3	0,03	3	6	17
Средневысотный	2	0,01	12	25	75
Равнинный	1	0,005	50	100	300

Оценок коэффициента k в горах известно мало. Такие оценки выполнены, как правило, в равнинных районах и по редкой съемке (Молоденский и др., 1960). Значения коэффициента k , принятые Пеллиненом для гор, взяты приблизительно, но они соответствуют позднее опубликованным выводам Турма (1962) по съемке с расстоянием $s=1,7$ км между гравиметрическими пунктами. У Турма получилось в низменном районе $k=1,0$ и в горах (до 1000 м высоты) $k=4,5$ для аномалий ($g-\gamma$) силы тяжести с редукцией только в свободном воздухе. Как указано выше, при косвенной интерполяции аномалий ($g-\gamma$) через аномалии Δg с редукцией Буге можно уменьшить ошибку интерполяции в 2—3 раза или, по мнению Турма, даже в 4 раза. Коэффициенты k могут, естественно, различаться в разных горных районах. Степени таких различий еще не ясны.

В уже упомянутом отчете Бэшлина (1960) высказано пожелание, чтобы квадрат ошибки высоты из-за силы тяжести не превосходил десятой доли квадрата общей ошибки собственно нивелирования. В таком случае следовало бы подставить в (III.14.6) величину $\frac{\eta}{\sqrt{10}}$ вместо $\frac{\eta}{2}$ и уменьшить расстояния, указанные в табл. 6,

в 1,5 раза. Рассмотрев несколько примеров, Бэшлин пришел к выводу, что среднюю квадратическую километровую ошибку μ высоты из-за недостаточно точного учета силы тяжести можно принять равной $\pm 0,1$ мм.

В соответствии с рекомендациями Бэшлина, Рамзайер (1963) советует принимать при специальных измерениях силы тяжести вдоль нивелирной линии $\mu = \pm 0,1$ мм и при интерполяции аномалий силы тяжести по гравиметрической карте в холмистых и горных районах устанавливать $\mu = \pm 0,2$ мм. Многие геодезисты теперь ориентируются на точность вычисления поправки за силу тяжести, соответствующую $\mu = \pm 0,1$ мм. Тогда согласно подходу Пеллинена в нивелировании I класса расстояние между гравиметрическими пунктами в высоких горах должно быть около 1 км и в горах с высотой до 1000 м порядка 5 км.

По материалам детальных съемок равнинных районов (1 пункт на 3—4 км²) Говорова (1955) определяла ошибки представителя гравиметрических пунктов для участков площадью 25, 100, 400 и 900 км² и вывела

$$\delta g = k's = 0,27s.$$

Тогда, согласно пожеланию Бэшлина, если s выражено в километрах,

$$s^{3/2} < \frac{\eta}{\sqrt{10}} \frac{\gamma_m \text{ctg } \beta}{k' 10^6}$$

и, допустив в средневысотном и высокогорном районах увеличение коэффициента k' в 2 и 3 раза, вместо таблицы Пеллинена получаем табл. 7.

Тип района	k'	$\text{tg } \beta$	$\eta = \pm 0,5$	$\eta = \pm 1,0$	$\eta = \pm 3,0$
Высокогорный	0,81	0,03	3	5	11
Средневысотный	0,54	0,01	9	15	31
Равнинный	0,27	0,005	24	38	79

Таким образом, формула Говоровой приводит к несколько бóльшим требованиям к частоте гравиметрических пунктов на равнинах; однако эти требования по-прежнему невысокие и, как правило, не требуют специальных гравиметрических работ.

Метод Пеллинина для оценки необходимой частоты гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий развил Сафонов (1967).

Как и Пеллинин, полагая $\delta g = 3 \sqrt{s}$ для гор, Сафонов рассчитал предельное превышение, при котором не требуется определять промежуточные гравиметрические пункты.

Действительно, из (III. 14.2) следует в миллиметрах

$$(\Delta h_w)_{\max} = \frac{\gamma \mu}{3}.$$

Если принять $\mu = \frac{\eta}{2}$, то для нивелирования I класса находим, как и у Сафонова, $(\Delta h_w)_{\max} \approx 85$ м и для нивелирования II класса при $\eta = 1,0$ мм получаем $(\Delta h_w)_{\max} \approx 170$ м (так же, как число Сафонова). Тогда при $\mu = 0,1$ мм должно быть $(\Delta h_w)_{\max} \approx 30$ м.

Еще раньше Бокун (1958), ориентируясь на высокое качество современного польского нивелирования I класса, рекомендовал принять μ от $\pm 0,05$ до $\pm 0,10$ мм. Имея в виду линейную интерполяцию аномалий ($g - \gamma$) силы тяжести в свободном воздухе, Бокун рекомендует расстояния между гравиметрическими пунктами в горах не делать больше 1,5–2 км, в предгорных районах — 2–3 км и в низменных районах — 4–6 км, определяя эти пункты в характерных точках нивелирных профилей со средней ошибкой порядка $\pm 1,0 - \pm 1,5$ мгал. Геодезическую широту (для вычисления нормальной силы тяжести γ) Бокун советует снимать с карты масштаба 1 : 100 000 с точностью 3" и выводить значение γ с ошибкой $\pm 0,08$ мгал.

Тирон и Струцу (1960), основываясь на оценках типа (III. 14.1), рекомендуют ставить гравиметрические пункты на нивелирных линиях в точках изменения наклона не реже 5–6 км и при $h = 150$ м уменьшать расстояния между пунктами изменений силы тяжести до 1 км. Именно такое расстояние Тирон и Струцу рекомендуют выдерживать вдоль нивелирных линий I класса в горах и высокогорье; вдоль нивелирных линий II класса они советуют измерять силу тяжести через 3 км. Тирон и Струцу ориентируются на точность поправки в превышение, равную $\pm 0,1$ мм.

Еще более жесткие требования Джаксона (1963), которые он приводит без пояснений: определять силу тяжести в горах не реже чем через 0,5 км и в равнинах не реже чем через 3 км.

Рамзайер (1963, 1965) эмпирически исследовал точность вывода геопотенциальных отметок в зависимости от частоты гравиметрических пунктов на линиях геометрического нивелирования высокогорного, холмистого и равнинного районов. В качестве высокогорного он обработал материалы швейцарского нивелирного полигона Castione — St. Gotthard — Reichenau — S. Bernardino — Castione длиной 279 км с высотами от 240 до 2060 м и расстояниями между гравиметрическими пунктами от 0,2 до 0,95 км (в среднем 0,5 км). Материалы этого нивелирного полигона опубликованы (Gravimetermessungen..., 1959). Швейцарские геодезисты начали измерения силы тяжести на этом полигоне в 1953 г.; в то время была не ясна необходимая частота гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий и этот полигон определен как опытный. Значения силы тяжести на земной поверхности Рамзайер представил суммой двух слагаемых, выделив часть, зависимую от высоты H_i на швейцарском полигоне в виде

$$g' = 12,3 H_i^{0,50} \text{ мгал} \quad (\text{III.14.7})$$

и в Шварцвальде — в виде

$$g' = (2,75 H_i^{0,67} - 50) \text{ мгал}. \quad (\text{III.14.8})$$

На исследованных полигонах были искусственно образованы участки s с постоянным расстоянием между гравиметрическими пунктами 0,5 км. Результаты вывода геопотенциальных отметок на этих отрезках послужили эталонами. Затем расстояния s между условными гравиметрическими пунктами были увеличены в Швейцарии до s , равного 1, 2, 4, 6, 8, 10 км, и в Шварцвальде до s , равного 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16,

20 км. Разности геопотенциальных отметок, выведенных по удлиненным участкам и эталонным, послужили основой для оценок. Поскольку такие разности зависят не только от длины, но и от положения отрезков, выполнены варианты с последовательными смещениями отрезков. При обработке программы счета была предусмотрена возможность выбора самого благоприятного и самого неблагоприятного случая. Рамзайер сделал вывод, что в случае $\mu = \pm 0,2$ мм в высокогорном полигоне возможно допустить расстояние между гравиметрическими пунктами в 4 км, в шварцвальдском — 12 км, что хорошо согласуется с таблицей Пеллинина. При увеличении этих расстояний ошибки на крутых склонах быстро возрастают. Так, при $s=10$ км на участке от S. Bernardino до Mesocco длиной 28,5 км ошибка составила 5,7 мм при средней квадратической $0,2 \sqrt{28,5} = 1,1$ мм; при $s=16$ км на спуске с высокого Шварцвальда в долину Рейна на участке длиной 48 км ошибка оказалась равной 5 мм при средней квадратической $0,2 \sqrt{48} = 1,4$ мм. Окончательный вывод для расстояний между гравиметрическими пунктами на нивелирных линиях сформулирован так (табл. 8).

Таблица 8

Тип района	s, км
Равнина	15—25
Холмистая местность	10—15
Горы средней высоты	5—10
Высокие горы	
плоскогорье	6—10
средняя пересеченность	3—6
крутые склоны	2—3

Рамзайер рекомендует ставить гравиметрические пункты в точках изменения направления хода и перегибов местности, уменьшать расстояния между гравиметрическими пунктами при увеличении наклонов.

Исследование Рамзайера выполнено обстоятельно (кроме указанных ему принадлежит ряд более ранних публикаций на эту же тему) и представляет большой интерес и практическую ценность. К сожалению, не ясна точность интерполяции остаточной части силы тяжести [после выделения из силы тяжести члена (111. 14.7) или (111. 14.8)]. Едва ли линейная интерполяция такой остаточной части будет более точна, чем линейная интерполяция аномалий силы тяжести в редукции Буге. Выделение доли силы тяжести по (111. 14.7) или (111. 14.8) требует специальной обработки гравиметрических измерений, довольно обременительной. Поэтому такое выделение нельзя рекомендовать для практики. Оценка Рамзайера имеет еще один недостаток, а именно: функции (111. 14.7) и (111. 14.8) использованы с одними и теми же коэффициентами при всех расстояниях между гравиметрическими пунктами.

В диссертации, выполненной под руководством Рамзайера, Шмид (1963) исследовал точность вычисления геопотенциальных отметок по гравиметрическим картам земли Баден-Вюртемберг. Шмид пришел к выводу о необходимости иметь в горах средней высоты при $\mu=0,1$ мм расстояние $s=2,8$ км и при более сложном рельефе при $\Delta h_{\text{в}} \approx 80$ м на 1 км и $\mu=0,2$ мм расстояние $s=1$ км.

Бернатцки (1963) оценивал эмпирически требования к размещению гравиметрических пунктов на трех ходах I класса Германской Демократической Республики общей длиной 976 км. Расстояния между гравиметрическими пунктами на этих же ходах составляли: на равнинах с высотами до 100 м — в среднем 4,4 км, с высотами до 250 м — в среднем 2,7 км, в холмистой местности с высотами от 250 до 500 м — в среднем 1,0 км и в горах средней высоты с высотами от 500 до 1000 м — в среднем 0,75 км. Отмечая, как и Рамзайер, необходимость совмещать гравиметрические пункты с особыми точками местности, Бернатцки советует ограничить превы-

Таблица 9

Тип района	Высота, м	Расстояния между гравиметрическими пунктами, км			h_{max} , м
		минимальные	средние	максимальные	
Равнина	От 0 до 100	7	18	40	50
Низменность	От 100 до 250	4	8	14	
Холмистая местность	От 250 до 500	2,5	4,5	7	100
Горы средней высоты	От 500 до 1000	1,7	2,8	4	150

шения, в которые должны быть вычислены поправки за силу тяжести, величинами h_{max} , указанными в табл. 9, где приведены выводы Бернатцки о расстояниях между гравиметрическими пунктами.

Такому размещению гравиметрических пунктов по результату Бернатцки соответствует ошибка высоты от 0,1 до 0,2 мм на каждом интервале между этими пунктами. Таким образом, завышенные по сравнению с выводами Пеллине и Рамзайера рекомендации Бокуна и Бернатцки о частоте гравиметрических пунктов на нивелирных линиях сочетаются с повышением точности превышений. Совет Бернатцки об ограничении максимального превышения полезен, но его классификация местности по высотам иногда может привести к недоразумению, так как та часть поправки измеренных превышений за силу тяжести, которая зависит от аномальности гравитационного поля и аномалий силы тяжести, определена величинами превышений, а не высот. Именно для вычисления этой части поправки за силу тяжести необходима гравиметрическая съемка вдоль нивелирных линий.

При оценке необходимой частоты гравиметрических пунктов вдоль нивелирных линий Леваллуа (1964) приблизительно выразил ошибку высоты через разность вертикальных градиентов и разность горизонтальных градиентов силы тяжести на концах участка. Задав весьма ориентировочно значения таких разностей, Леваллуа пришел к выводу о необходимости определять силу тяжести в горах (наклоны 0,08—0,1) через 0,95—0,85 км, в холмистой местности (наклоны 0,04—0,07) через 2—1,5 км, на равнинах (наклоны 0,01—0,03) через 9—5 км. При этом Леваллуа ориентировался на максимальную ошибку вывода поправки за силу тяжести на участке 0,2 мм и превышение Δh_w порядка 100 м. Для разностей вертикальных и горизонтальных градиентов соответственно при этом принято: в горах 0,1 и 0,025, в холмистой местности 0,06 и 0,01, для равнины 0,03 и 0,0025; все числа выражают изменения в миллигалах на 1 м. Приведенные горизонтальные градиенты силы тяжести соответствуют изменениям уклонений отвеса в горах 5" на 1 км, в холмистой местности 2" на 1 км и на равнине 0",5 на 1 км.

Доклады Рамзайера и Леваллуа о частоте гравиметрических пунктов вдоль ходов геометрического нивелирования были обсуждены на заседании секции 11 нивелирования и движений земной коры Международной геодезической ассоциации на ее XIII генеральной ассамблее в Беркли в 1963 г. (см. отчет секретаря этой секции Кайера, 1964). Валецэйн заметил в дискуссии, что в оценке Леваллуа ошибка из-за недостаточности гравиметрических пунктов на равнинах и в горах составляет разные доли инструментальной нивелирной ошибки. Действительно, пересчитав на принятую у нас ошибку нивелировки I класса $\eta=0,5$ мм, найдем доли ошибки из-за недостатка гравиметрических пунктов на равнинах $0,2 : 0,5 \sqrt{9} \approx 0,13$ и в горах $0,2 : 0,5 = 0,4$. Такие отношения, по мнению Валецэйна, должны приводить к одинаковым цифрам, т. е., согласно Валецэйну, расстояния между гравиметрическими пунктами на равнинах следовало бы в таблице Леваллуа увеличить.

Критикуя оценку Леваллуа, Рамзайер заметил, что высоты, как правило, не изменяются пропорционально расстоянию из-за частого изменения угла наклона, особенно в горах средней высоты. Этого обстоятельства оценка, выполненная Леваллуа, не учитывает. В высоких горах угол наклона меняется реже, поэтому обе оценки (Рамзайера и Леваллуа) ближе.

Варга (1966) анализирует точность вычисления нормальных высот в зависимости от числа гравиметрических пунктов на трех нивелирных полигонах Венгрии с измерениями силы тяжести через 0,5 км. При $\mu = \pm 0,05$ мм Варга рекомендует определять гравиметрические пункты в соответствии с табл. 10.

Т а б л и ц а 10

Тип местности	Горная	Холмистая	Равнинная
Расстояния между гравиметрическими пунктами, км	1	3	25
Средние превышения, м	75	40	20
Точность измерения силы тяжести, мгал	$\pm 0,5$	$\pm 1,0$	$\pm 2,0$

Исследованный Варга горный нивелирный полигон имел высоты 500—1000 м. В горах на геологических неоднородностях он рекомендует сгущать измерения до 1 пункта на 300—500 м.

В докладе XIV генеральной ассамблее Международной геодезической ассоциации венгерский геодезист Биро (1967), по существу, повторил результат Варга, ссылаясь при этом только на дифференциальное соотношение (111. 14.1). Рекомендации Биро представлены в табл. 11.

Большую программу измерений силы тяжести вдоль нивелирных линий уже выполняю итальянские геодезисты. Сальвьони (1966) и Манферти (1968) сообщают

Таблица 11

Тип района	Равнина	Холмистая местность	Горы
$H, м$	100	150—300	900
$\Delta h_w, м$	<2	<60	<100
$\beta, \%$	<1	1—5	5
$s, км$	25	0,5—9 в среднем 3	1 и до 0,3—0,5

об измерении силы тяжести не реже чем через 3 км и на более аномальных и наклонных участках нивелирных линий — через 1 км.

Юркина и Кроткова (1965) оценили точность вычисления аномальной части поправки за переход к нормальным высотам на материалах высокогорного нивелирного хода 11 класса с максимальной высотой на перевале около 3300 м и, как упомянуто в § 4, точность интерполяции аномалий ($g-\gamma$) по формуле (III. 10.25). Поскольку расстояния между реперами довольно велики, по карте и нивелирным журналам были выбраны промежуточные вспомогательные точки, игравшие роль реперов при выводе нормальных высот. Эти точки совпадают с характерными точками местности. Максимальное превышение между ними равно 49 м при среднем квадратическом значении этой величины ± 27 м. Сила тяжести была измерена только на реперах. Чтобы уточнить интерполяцию аномалий ($g-\gamma$), поправки Δg_p за рельеф были вычислены примерно через 1 км, в частности, на поворотах хода.

Основные характеристики материалов и хода указаны в табл. 12.

Таблица 12

Номер репера	Расстояние от начального пункта (по карте), км	Высота, м	Число вспомогательных точек	Число промежуточных поправок за рельеф	$\operatorname{tg} \beta$ при $s=1$ км	Среднее квадратич. величина превышения между вспомогательными точками, м
1248	0	1742	9	3	0,016	± 33
546	7,4	1972	7	4	0,034	41
87	12,5	2298	25	1	0,295	24
570	14,1	2924	18	1	0,462	21
296	15,1	3317	43	3	0,148	25
123	18,8	2289	17	3	0,021	27
177	26,9	1862				

Ошибки собственно нивелирования

$$m_{11} = \pm \sqrt{1,44L + 0,0256L^2} \quad (\text{III. 14.9})$$

вычислены по средним значениям случайных и систематических ошибок на 1 км хода для большого числа нивелирных линий, выполненных в 1949—1957 гг. в СССР общей длиной около 14 000 км (Энтин, 1960). Для более или менее правдоподобной оценки этих ошибок снятые с карты расстояния увеличены настолько, чтобы наклон нивелирной линии не превосходил 0,04. Поэтому при выводе ошибки m_{11} расстояние между реперами 87 и 570 увеличено в 7,5 раза, расстояние между реперами 570 и 296 — в 11,5 раза, расстояние между реперами 296 и 123 — в 5 раз.

Для сравнения интерполяция аномалий ($g-\gamma$) выполнена также по формуле (III. 10.23), т. е. только через аномалии в редукции Буге, без поправок за рельеф. Поправки за рельеф между вычисленными значениями проинтерполированы линейно. Среднее квадратическое расхождение между средними из аномалий ($g-\gamma$), вычисленными по формулам (III. 10.23) и (III. 10.25) в соседних точках, равно ± 3 мгал при максимальном 6 мгал. Вычисления выполнены в нескольких вариантах.

Вариант № 1 (основной) — использованы все гравиметрические пункты, все вспомогательные точки, все промежуточные поправки за рельеф; интерполяция аномалий силы тяжести выполнена по формуле (III. 10.25).

Вариант № 2 — использованы все вспомогательные точки, все гравиметрические пункты; интерполяция аномалий силы тяжести выполнена по формуле (III. 10.23).

Во всех остальных вариантах интерполяция выполнена по формуле (III. 10.25).

Вариант № 3 — использованы вспомогательные точки через одну, все гравиметрические пункты и все промежуточные поправки за рельеф (в этом случае среднее квадратическое значение превышения равно ± 51 м, максимальное 93 м).

Вариант № 4 — использованы вспомогательные точки через три, все гравиметрические пункты и все промежуточные поправки за рельеф (среднее квадратическое значение превышения равно ± 97 м, максимальное 175 м).

Вариант № 5 — использованы вспомогательные точки примерно через семь, все гравиметрические пункты и все промежуточные поправки за рельеф (среднее квадратическое значение превышения равно ± 178 м, максимальное 259 м).

Вариант № 6 — использованы гравиметрические пункты через один, все вспомогательные точки, все промежуточные поправки за рельеф, в том числе вычисленные на неиспользованных гравиметрических пунктах.

Вариант № 7 — использованы все гравиметрические пункты, все вспомогательные точки, промежуточные поправки за рельеф через одну.

Результаты вычислений приведены в табл. 13, где указаны также нормальные высоты, выведенные по формуле (III. 10.19) в предположении, что нормальная и измеренная высоты репера 1248 одинаковы.

Таблица 13

Номер репера	Измеренная высота	Нормальная высота (вариант № 1)	Влияние последнего члена формулы (III. 10.19)	Ошибка собственно нивелирования	Разности вариантов					
					№ 2 и № 1	№ 3 и № 1	№ 4 и № 1	№ 5 и № 1	№ 6 и № 1	№ 7 и № 1
В метрах				В миллиметрах						
1248	1741,5	1741,5	0	0	0	0	0	0	0	0
546	1971,301	1971,286	-0,015	3,5	+0,9	+0,2	+0,1	+0,4	+1,0	+0,3
87	2297,859	2297,833	-0,023	4,7	+2,4	+0,3	+0,5	+0,8	+1,7	-0,1
570	2922,425	2922,426	+0,007	7,2	+1,5	+0,5	+0,7	+0,7	+0,7	-1,1
296	3317,463	3317,505	+0,047	9,2	+1,5	+0,4	+0,6	+0,6	-0,2	-1,1
123	2288,992	2288,964	-0,026	12,4	+5,0	+0,1	+0,4	+0,6	-2,6	0
177	1861,298	1861,261	-0,024	13,8	+4,5	-0,1	+0,1	+0,4	-3,4	0

При разных способах интерполяции силы тяжести разности нормальных высот приближаются к точности собственно нивелирования (см. в таблице сравнение вариантов № 1 и 2). Существенно изменяются результаты и при использовании гравиметрических пунктов через один (сравнение вариантов № 1 и 6). Ошибка 1,1 мм на репере 570 соответствует $\mu = \pm 0,2$ мм. Поэтому можно сделать вывод о недостаточности гравиметрических пунктов на этом высокогорном нивелирном ходе. В условиях такого хода гравиметрические пункты следовало бы поставить по крайней мере через 1 км. Тогда интерполяцию аномалий силы тяжести можно было бы выполнить по менее трудоемкому методу (III. 10.23).

Уменьшение числа вспомогательных точек меньше сказывается на точности результатов (сравнение вариантов № 3, 4 и 5 с вариантом № 1). Однако, чтобы исключить дополнительные ошибки, число их следует брать таким же, как в вариантах № 1 и 2. Дополнительный вычислительный труд при этом невелик.

Недостаток гравиметрических измерений на этом высокогорном нивелирном ходе заставил обратиться при продолжении и уточнении описанных оценок к австрийским и швейцарским нивелирным линиям и измерениям силы тяжести вдоль них. Продолжение таких оценок казалось полезным, так как описанные выше результаты, несмотря на их согласованность, вызывают некоторые неясности и сомнения.

На многих реперах австрийского геометрического нивелирования определена сила тяжести. Согласно сообщению Мадера (1954), вдоль 5000 км линий точного нивелирования сила тяжести измерена в среднем через 0,5 км. На упомянутом выше 237-километровом замкнутом полигоне в высокой части австрийских Альп гравиметрические пункты расположены на участках с наименьшими наклонами через 0,8—1 км (наибольшее расстояние между гравиметрическими пунктами равно 2,57 км), на более наклонных — через 0,5 км, на наиболее наклонных — через 0,3 км и плотнее (наименьшее расстояние между гравиметрическими пунктами составляет 0,17 км). Мадер (1954) опубликовал вычисленные им приближенные ортометрические высоты реперов этого полигона, их координаты и значения силы тяжести, измеренные гравиметром на реперах.

В табл. 14 приведены выписанные у Мадера исходные данные на той части австрийского нивелирного полигона, уклон которой наибольший. Расстояния s между реперами, аномалии ($g-\gamma$) и Δg_B силы тяжести вычислены сотрудниками ЦНИИГАиК Е. Е. Карачанской и А. Б. Старостиной. Все остальные вычисления на австрийской и швейцарском нивелирных полигонах выполнены ими же. Расстояния s выведены по плановым координатам реперов и могут не соответствовать длинам соответствующих участков нивелирного хода, проложенного по серпантину горной дороги. Величины s должны быть меньше фактических расстояний. В частности, они не достигают указанной Мадером максимальной величины 2,57 км. Для швейцарского полигона опубликованы также только приближенные ортометрические высоты.

Профили австрийского и швейцарского нивелирных ходов даны на рис. 11 и 12. Значения нормальной силы тяжести на швейцарском полигоне мы снимали с плана этого полигона, опубликованного Рамзайером (1963). Соответственные погрешности исключены или ослаблены в вычисленных нами разностях $H_N - H_I$ высот.

Результаты оценки точности нормальных высот в зависимости от частоты гравиметрических пунктов на упомянутой части австрийского полигона даны в табл. 15. Разности приближенных ортометрических высот на соседних реперах приняты равными превышениям Δh_{10} . Это возможно, поскольку последний член формулы

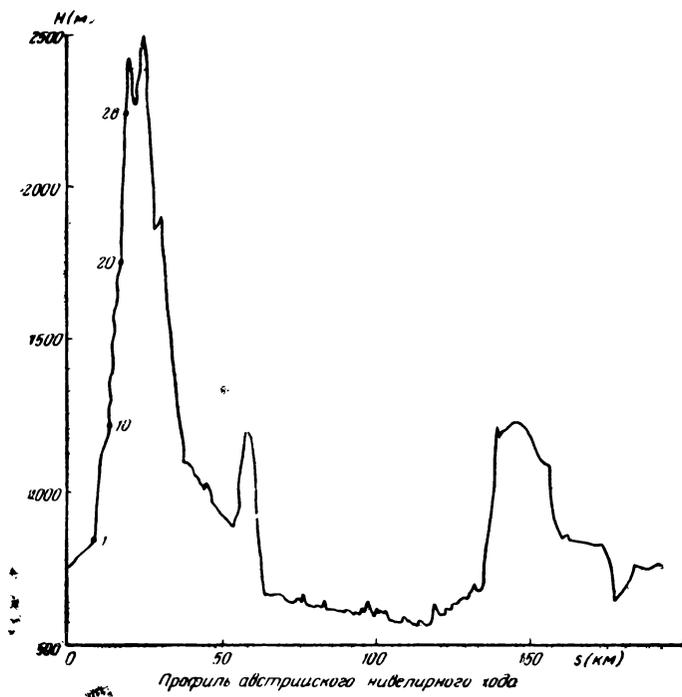


Рис. 11

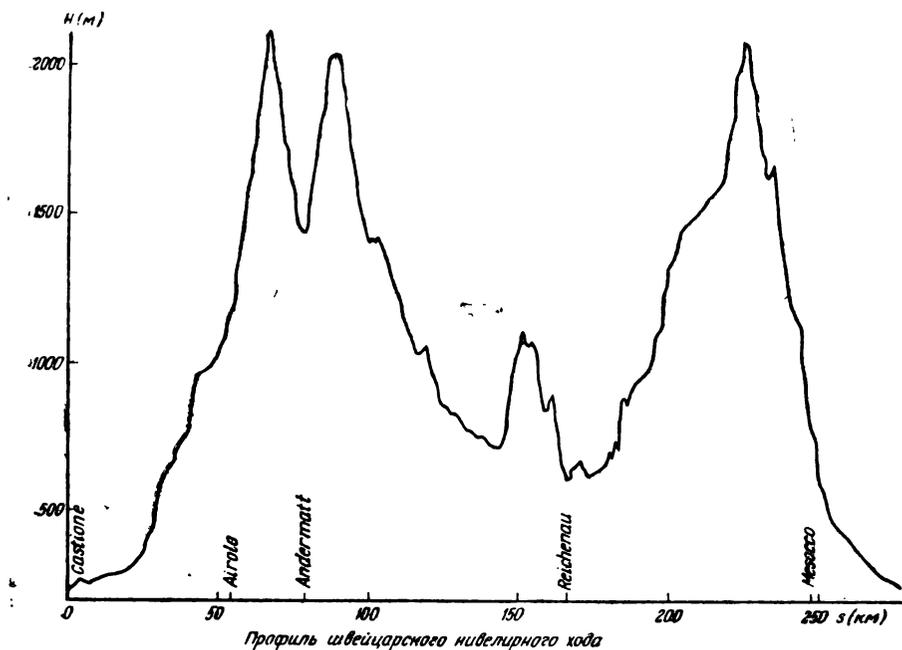


Рис. 12

(III. 10.19) — поправочный (см., например, табл. 13) и при его вычислении достаточно точность в три или четыре значащие цифры. Полные значения нормальных высот по австрийским и швейцарским материалам не выведены, а в разности значений нормальных высот при том или ином числе гравиметрических пунктов первый член в (III. 10.19) справа исключается.

За точные значения нормальных высот H_I приняты значения высот, соответствующие всем гравиметрическим пунктам. Остальные варианты нормальных высот соответствуют использованию различных частей гравиметрических пунктов.

Высоты H_{II} соответствуют $s_{cp} \approx 1$ км (на австрийском полигоне $s_{max} = 2,57$ км; по данным Мадера, $s_{min} = 0,4$ км, $s_{cp} = 1,0$ км; на швейцарском полигоне $s_{max} = 1,4$ км, $s_{min} = 0,6$ км, $s_{cp} = 0,9$ км).

Высоты H_{III} соответствуют $s_{cp} \approx 2$ км (на австрийском полигоне $s_{max} = 2,57$ км; по данным Мадера, $s_{min} = 1,4$ км, $s_{cp} = 2$ км; на швейцарском полигоне $s_{max} = 2,4$ км, $s_{min} = 1,6$ км, $s_{cp} = 2$ км).

Высоты H_{IV} соответствуют $s_{cp} \approx 4$ км (на австрийском полигоне $s_{max} = 4,7$ км, $s_{min} = 2,8$ км, $s_{cp} = 3,9$ км; на швейцарском полигоне $s_{max} = 4,4$ км, $s_{min} = 3,4$ км, $s_{cp} = 4,0$ км).

Разрядка гравиметрических пунктов, соответствующая высотам H_V и H_{VI} , выполнена только на австрийском полигоне. Высоты H_V соответствуют $s_{cp} = 6,1$ км ($s_{max} = 6,6$ км, $s_{min} = 4,9$ км). Высоты H_{VI} соответствуют $s_{cp} = 7,8$ км ($s_{max} = 9,0$ км, $s_{min} = 6,5$ км).

Если гравиметрический пункт на некотором репере C не использован в выводе нормальных высот, величина аномалии $g - \gamma$ силы тяжести на этом репере выведена косвенной интерполяцией через аномалии Δg_B Буге на ближайших использованных гравиметрических пунктах A и B . При этом вычисления выполнены по формулам

$$\Delta g_B(C) = \Delta g_B(A) + [\Delta g_B(B) - \Delta g_B(A)] \frac{s_{AC}}{s_{AB}}; \quad (III.14.10)$$

$$(g - \gamma)_C = \Delta g_B(C) + 0,1118 H_p(C). \quad (III.14.11)$$

Ошибки m_I соответствуют точности геометрического нивелирования I класса (Инструкция, 1966), т. е.

$$m_I = \pm \sqrt{0,25L + 0,0025L^2}; \quad (III.14.12)$$

ошибки m_{II} вычислены по формуле (III. 14.9) и ошибки m_2 получены по формуле

$$m_2 = \pm 0,2 \sqrt{L} \quad (III.14.13)$$

согласно указанной выше рекомендации Бэшлина (1960). В табл. 15 кроме перечисленных указаны также варианты этих ошибок, при вычислении которых по формулам (III. 14.12), (III. 14.9) и (III. 14.13) использованы расстояния s между реперами, увеличенные настолько, чтобы наклон нивелирной линии не превосходил 0,04. Такие ошибки отмечены штрихом.

Таким образом, разности $H_N - H_I$ на нивелирной линии I класса должны быть много меньше m_I' . Желательно их иметь меньше m_I , чтобы точность нивелирования горного района соответствовала точности нивелирования в равнинном районе такого же реального протяжения. Отношение $m_I' : (H_N - H_I)$ должно быть не больше трех. Аналогичные соотношения должны существовать между разностями $H_N - H_I$ и ошибками m_{II} и m_I' на нивелирных линиях II класса. Для линий II класса разности $H_N - H_I$ должны быть безусловно не больше m_{II}' , но желательно иметь их меньше m_2 . Для линий I класса разности $H_N - H_I$ должны быть не больше 0,5 m_I' и желательно меньше 0,5 m_I . Для линий II класса разности $H_N - H_I$ должны быть не больше m_I' и желательно меньше m_I .

При таких соотношениях между разностями $H_N - H_I$ и ошибками недостаток гравиметрических пунктов заметно не увеличит ошибки собственно нивелирования.

Сравнение разностей $H_N - H_I$ и ошибок выполнено как для всего австрийского полигона, так и для отдельных частей этого полигона. Сравнение для отдельных частей было выделено, поскольку на длинных линиях заметно преобладание систематических ошибок. Наибольшую долю от ошибок собственно нивелирования ошибки из-за недостаточности гравиметрических пунктов могут составлять в начале линий. Были выделены характерные части австрийского полигона: наибольший подъем, наиболее высокая часть, предгорье*.

* Результаты этих оценок хранятся в библиотеке ЦНИИГАиК.

Таблица 14

<i>H, м</i>	<i>B</i>	<i>L</i>	Измеренная сила тяжести, <i>мгал</i>	<i>s, км</i>	(<i>g</i> — γ)	Δg_B
834,93381	47°12',8	12°50',1	980 481,48	0,52	—77,1	—170,4
839,99408	12,5	50,2	480,11	0,52	—76,4	—170,3
868,73409	12,2	50,3	472,31	0,70	—74,9	—172,0
933,14772	11,8	50,2	454,90	0,35	—71,8	—176,1
984,22678	11,6	50,1	442,87	0,63	—67,8	—177,8
1041,79281	11,3	49,8	429,40	0,52	—63,0	—179,5
1081,10322	11,0	49,7	424,20	0,63	—55,7	—176,6
1135,24261	10,7	49,4	416,30	1,10	—46,5	—173,4
1150,60155	10,1	49,1	412,94	0,52	—44,2	—172,8
1213,79616	09,8	49,2	401,17	0,52	—36,0	—171,7
1268,75256	09,5	49,1	392,68	0,17	—27,1	—169,0
1303,67505	09,4	49,1	385,00	0,42	—23,9	—169,7
1359,84556	09,2	48,9	378,19	0,42	—13,1	—165,1
1400,37204	09,0	48,9	371,08	0,35	—7,4	—164,0
1473,78793	09,0	49,0	359,06	0,00	+3,3	—161,5
1529,32231	09,2	49,1	349,61	0,35	+10,6	—160,4
1574,77433	08,9	49,2	341,85	0,52	+17,3	—158,8
1632,66661	08,6	49,3	330,01	0,52	+23,7	—158,8
1698,48430	08,4	48,9	316,60	0,58	+31,0	—158,9
1756,40091	08,1	48,8	305,77	0,52	+38,5	—157,9
1816,57364	08,0	48,8	293,95	0,17	+45,4	—157,7
1845,80688	07,9	48,7	288,13	0,17	+48,8	—157,6
1914,52024	07,6	48,7	276,04	0,52	+58,3	—155,7
1969,85272	07,4	48,8	266,97	0,35	+66,7	—153,5
2021,60979	07,5	48,9	256,69	0,17	+72,2	—153,8
2117,35903	07,6	49,1	238,91	0,30	+83,7	—153,0
2194,72870	07,6	49,3	223,56	0,24	92,3	—153,1
2241,49680	47°07',5	12°49',5	980 217,21	0,30	+100,5	—150,1

Таблица 15

<i>H_G</i>	<i>H_{II}—H_I</i>	<i>H_{III}—H_I</i>	<i>H_{IV}—H_I</i>	<i>m_I</i>	<i>m_{II}</i>	<i>m₂</i>	<i>m'_I</i>	<i>m'_{II}</i>	<i>m'₂</i>	$\frac{h_w}{s}, \%$
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
835	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0
840	0,00	0,00	0,00	0,4	0,9	0,1	0,4	0,9	0,1	5,5
869	—0,01	—0,05	+0,01	0,5	1,2	0,2	0,5	1,3	0,2	9,2
933	—0,01	—0,11	+0,18	0,6	1,6	0,3	0,8	2,1	0,3	14,6
984	+0,01	—0,05	+0,45	0,7	1,7	0,3	1,0	2,5	0,4	9,1
1042	+0,02	+0,15	+0,83	0,8	2,0	0,3	1,2	2,9	0,5	7,6
1081	+0,02	+0,29	+1,04	0,9	2,2	0,4	1,3	3,3	0,5	8,6
1135	+0,02	+0,35	+1,14	1,0	2,4	0,4	1,5	3,6	0,6	1,4
1151	+0,02	+0,36	+1,17	1,1	2,8	0,4	1,6	3,9	0,6	12,2
1214	+0,05	+0,47	+1,43	1,2	2,9	0,5	1,7	4,2	0,7	10,6
1269	+0,07	+0,52	+1,65	1,3	3,0	0,5	1,8	4,6	0,7	20,5
1304	+0,09	+0,54	+1,79	1,3	3,1	0,5	1,9	4,7	0,7	13,4
1360	+0,11	+0,57	+1,98	1,3	3,2	0,5	2,0	5,0	0,7	11,6
1400	+0,08	+0,55	+2,04	1,4	3,3	0,5	2,1	5,3	0,8	
1474	—0,04	+0,46	+2,07	1,4	3,3	0,6	2,1	5,3	0,8	
1529	—0,15	+0,36	+2,05	1,4	3,4	0,6	2,2	5,5	0,8	15,9
1575	—0,20	+0,32	+2,03	1,5	3,6	0,6	2,2	5,8	0,8	8,7
1633	—0,20	+0,33	+2,07	1,5	3,7	0,6	2,3	6,1	0,9	11,1
1698	—0,20	+0,36	+2,19	1,5	3,8	0,6	2,4	6,4	0,9	11,3
1756	—0,20	+0,39	+2,35	1,5	3,9	0,6	2,5	6,7	0,9	11,1
1817	—0,21	+0,40	+2,53	1,6	4,0	0,6	2,7	7,0	1,0	35,4
1846	—0,21	+0,40	+2,63	1,6	4,1	0,6	2,8	7,1	1,0	17,2
1915	—0,21	+0,41	+2,83	1,7	4,2	0,6	2,8	7,4	1,0	13,2
1970	—0,24	+0,40	+2,93	1,7	4,3	0,6	2,9	7,7	1,1	15,8
2022	—0,27	+0,39	+3,00	1,7	4,3	0,6	3,0	7,9	1,1	30,4
2117	—0,24	+0,44	+3,17	1,7	4,4	0,7	3,1	8,4	1,1	31,9
2195	—0,16	+0,53	+3,32	1,8	4,4	0,7	3,3	8,7	1,2	32,2
2242	—0,12	+0,57	+3,37	1,8	4,5	0,7	3,4	8,9	1,2	15,6

По описанным оценкам можно сделать вывод, что вдоль горных линий геометрического нивелирования I класса в условиях, близких к рассмотренным, желательно определять гравиметрические пункты через 1 км; вдоль горных линий геометрического нивелирования II класса в таких же условиях можно определять гравиметрические пункты через 2 км. По материалам швейцарского нивелирного полигона можно даже допустить в нивелировании II класса расстояние между гравиметрическими пунктами в 4 км, что подтверждает вывод Рамзайера. Однако данные по австрийскому полигону противоречат этому выводу.

Вдоль нивелирных линий I и II классов горных и предгорных районов следует определять гравиметрические пункты с точностью около 1 *мал*. На основе изложенного отделом теоретической геодезии ЦНИИГАиК рекомендованы следующие расстояния между такими пунктами (Δh обозначает в табл. 16 превышение на пятикилометровом участке также в километрах).

Т а б л и ц а 16

Пределы величины Δh , км	Свыше 1	1	0,5	0,4	0,3	0,2
I класс	—	—	1	2	2	
II класс	1	2—3	4	4	6	

Поправку за силу тяжести и переход к нормальным высотам нужно вычислять и для линий III класса, если они проложены в горах при $\Delta h > 0,25$. Для этой цели можно, как правило, использовать гравиметрическую съемку с расстоянием между пунктами до 10 км. При $\Delta h > 1$ может оказаться необходимой специальная гравиметрическая съемка.

§ 15. Исследование формул для высот на моделях Земли

Как отмечено, ортометрическую высоту практически нельзя вычислить точно. Однако без специального исследования не ясен важный в научном и практическом отношении вопрос о величине ошибок ортометрических высот при выводе их без учета аномалий вертикального градиента силы тяжести, вызванного влиянием внутренних аномальных масс, а также без точного знания плотностей внешних масс, т. е. не ясен вопрос о точности формул для ортометрических высот, применяемых на практике.

Поскольку исходный материал (нивелирные превышения, значения силы тяжести вдоль нивелирных линий) неизбежно обременен ошибками измерений, а истинные значения высот неизвестны, из обработки измерений не всегда можно судить о точности исследуемых формул и преимуществе той или иной формулы. Для выяснения этих важных вопросов приходится использовать искусственные схемы (модели Земли).

Использование моделей в геодезии оказалось весьма плодотворным. Этот способ дает возможность численно оценить исследуемые величины и благодаря своей наглядности позволяет лучше выяснить разные обстоятельства.

Все формулы, определяющие фигуру Земли и основанные на теории потенциала, остаются справедливыми при различных предположениях о внутреннем строении и форме Земли. Поэтому такие формулы можно применить к модели Земли.

Сравнение истинных величин, вычисленных непосредственно по параметрам модели и полученных по формулам, которые составляют предмет исследования, дает критерий правильности последних. Наибольший эффект от оценок на моделях может быть достигнут, если модель достаточно полно отражает реальные условия своей формой и размерами, своими аномальными массами, аномалиями силы тяжести, отклонениями отвеса, высотами квазигеоида и т. д. В противном случае результаты могут быть искажены в масштабе и даже не иметь ценности.

Многочисленные примеры применения моделей можно найти в работах геодезистов, особенно немецких, второй половины прошлого века. Первоначально геодезисты использовали модели для оценки разного рода аномальных влияний. Об оценке на модели Земли отклонений отвеса австрийским геодезистом Фуксом (1843) мы уже упоминали. Упомянули и об оценке невязки полигона геометрического нивелирования датским геодезистом Захарием (1873). Фоглер (1873) оценил на модели Земли влияние неоднородностей земной коры на кривизны силовых линий и на несимметричность вертикальных сечений уровенной поверхности на нивелирной станции. Модель Фоглера такая: в плоский слой наполовину погружен шар. И слой и шар однородны по плотности. Радиус шара равен 3710 м (полумили). Таким образом, эта модель приближенно представляет плоскую Землю с одиночной изостатически не компенсированной горой. Мы упоминали уже о продолжении оценок Захарием, предпринятых Гельмертом (1882). Гельмерт (1883) исследовал также влияние неоднородной горы (с шаровым или цилиндрическим дефектом плотности) на аномалии силы тяжести, а через них на нивелирование и невязки нивелирного полигона. Похожие оценки выполнил Хаупт (1883). В книге Гельмерта (1884) описаны разнообразные оценки на моделях, а именно: Гельмерт оценил влияние континентов, внутренних аномалий

в распределении плотности и различных форм рельефа (горных хребтов, долин и отдельных гор) на элементы земного гравитационного поля: положение уровенных поверхностей, их отступления от параллельности и радиусы кривизны, уклонения отвеса, силу тяжести. Для этого он рассчитывал потенциалы притяжения и составляющие силы притяжения от однородных шара, полушара, призмы и цилиндра. Расчеты выполнены для внешних точек этих тел и в некоторых случаях — для внутренних. Гельмерт установил таким образом, что влияния аномалии силы тяжести могут заметно превосходить точность геометрического нивелирования. Однако точность вычисления ортометрических высот Гельмерт не оценивал, хотя, как было указано, принципиальная невозможность их строгого определения ему была ясна.

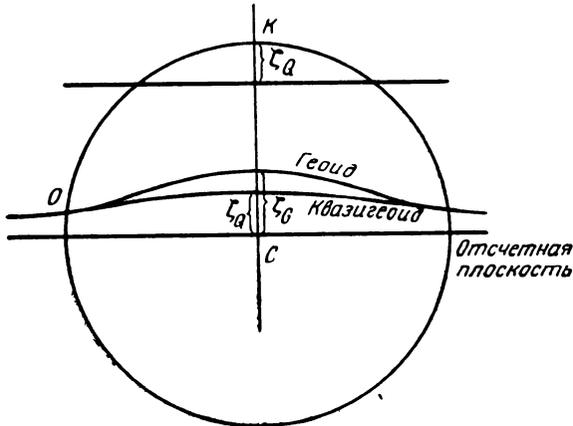


Рис. 13

Вывод Гельмерта о необходимости учитывать аномалии силы тяжести при обработке геометрического нивелирования недавно подтвердил Кекк (1965) на моделях Земли, сложенных из отдельных однородных по плотности кубиков. Такие модели удобны для использования электронных вычислительных машин.

Из современных оценок на моделях можно еще упомянуть оценки Лягрюля (1962) влияния топографических масс на высоты квазигеоида над геоидом. Оценив притяжение конуса и параболоида вращения, Лягрюля пришел к выводу, что такие влияния можно приблизительно оценить в $10 H^2$ мм, если H — высота горы в километрах.

Для возможно полного исследования формул, определяющих высоты, ранее (Еремеев, 1951) использованы три модели Земли, каждая из которых позволяет вычислить истинные высоты точек поверхности модели, «измеренные» высоты (которые получились бы путем измерений нивелирных превышений на поверхности модели), а также значения силы тяжести и ее аномалий. Затем вычислены ортометрические и нормальные высоты и проведено сравнение с истинными значениями высот. Такое сравнение позволяет получить надежный контроль рабочих формул и методики вывода нивелирных высот.

Приближенные значения ортометрических высот вычислены по способу Гельмерта (1890), в котором предполагается, что внешние массы представляют собой плоский слой, и по способу Нитхаммера (1932), упрощенному Красовским (1942).

Подобное использование моделей (для проверки формул теории фигуры Земли) авторы нашли лишь у Михайлова (1937).

Модель № 1 (шар). Модель № 1 представляет одиночную гору на поверхности плоской Земли. Аномальное поле создано шаром постоянной плотности, наполовину погруженным в Землю, без вытеснения ее массы. Радиус этого шара $r_0=6$ км, плотность постоянна и равна $\mu=3$. Центр шара расположен на отсчетной плоскости.

Так как поверхность горы составляет незначительную часть поверхности Земли, то поверхность Земли можно было бы считать плоской и принять нормальное поле силы тяжести однородным, т. е. $\gamma = \text{const}$. В этом случае уровенные поверхности нормального потенциала будут представлять собой параллельные плоскости, одна из которых и является отсчетной.

Профиль нивелировки выбран от уровня моря (точки O , см. рис. 13) до вершины горы (точки K) в вертикальной плоскости, проходящей через точки O и K . Аномалии силы тяжести и уклонения отвеса вдоль линии нивелирования выражены простыми формулами

$$(g - \gamma) = - \frac{\partial T}{\partial H} = - \frac{\partial T}{\partial r_0} \cos(r_0, H) = \Delta g_0 \frac{H}{r_0}, \quad (\text{III.15.1})$$

$$\xi = \frac{\Delta g_0 l}{\gamma r_0}, \quad (\text{III.15.2})$$

где H — длина нормали к отсчетной плоскости; Δg_0 — аномалия силы тяжести в вершине модели (в точке K); l — проекция расстояния между центром шара (точкой C) и текущей точкой профиля на отсчетную плоскость. Принято $\gamma = 1004,3068$ гал, что соответствует притяжению шара постоянной плотности $\mu_0 = 6$ и радиуса $R = 6000$ км. Принятым нами параметрам соответствует

$$\Delta g_0 = 502,1534 \text{ мгал} \left(\frac{\Delta g_0}{\gamma_0} = \frac{1}{2000} \right).$$

«Измеренные» высоты вычислены следующим образом. Элементарное нивелирное превышение dh_w , которое было бы получено из измерений, определяет формула (111. 7.4) астрономического нивелирования земной поверхности

$$dh_w = dH + \xi dl.$$

Запись этой формулы соответствует движению от уровня моря модели к ее вершине; в этом случае dl отрицательно.

Используя (111. 15.2), получаем

$$H_i(K) = \int_{(OK)} dH + \frac{\Delta g_0}{\gamma r_0} \int_{(OK)} l dl = H(K) - \zeta_0 - \frac{\Delta g_0}{2\gamma} r_0 \cos^2 \text{arc sin} \frac{\zeta_0}{r_0} \approx H(K) - \zeta_0 - \frac{\Delta g_0 r_0}{2\gamma} = 5995,5 \text{ м}, \quad (111.15.3)$$

где $\zeta_0 = \frac{\Delta g_0 r_0}{\gamma} = 3 \text{ м}$ обозначает высоту геоида в начальной точке O . Отброшенные члены имеют порядок 0,0002 мм.

Для вывода нормальной высоты воспользуемся формулой (111. 10.14) и пренебрежем в ней поправкой δ . Поскольку в нашем случае $\gamma = \text{const}$, то

$$H_Q(K) = H_i(K) + \frac{1}{\gamma} \int_{(OK)} (g - \gamma) dh_w. \quad (111.15.4)$$

Подставляя сюда $(g - \gamma)$ из (111. 15.1) и вычисляя $H_i(K)$ на основе (111. 15.3), получаем два выражения для нормальной высоты:

$$H_Q(K) \approx H_i(K) + \frac{\Delta g_0 r_0}{2\gamma};$$

$$H_Q(K) = H(K) - \frac{\Delta g_0 r_0}{\gamma} = 5997 \text{ м},$$

последнее из которых совпадает с выражением для нормальной высоты точки K через потенциал аномальной массы в этой точке. Здесь при выводе допущена погрешность порядка 0,5 мм.

Вычислим теперь ортометрическую высоту. Формула для ортометрической высоты в рассматриваемом случае примет вид

$$H_G(K) = H_Q(K) - \frac{\Delta g_m}{\gamma} H_G(K), \quad (111.15.5)$$

где в соответствии с нашим условием под Δg_m можно понимать аномалию силы тяжести на середине высоты $H(k)$. Вычислим эту величину. Сила тяжести в точке K равна $\gamma + \Delta g_0$. Влияние внешних масс достаточно точно определено нормальной составляющей притяжения полушара в точке K

$$2\pi f \mu \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) r_0 = \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \Delta g_0. \quad (111.15.6)$$

Редукция $\frac{\gamma H_G}{R}$ в свободном воздухе в нашем случае равна нулю, так как в однородном поле силы тяжести следует считать $R = \infty$.

Притяжение сегмента E шара с высотой $\frac{r_0}{2}$ определено в точке M (рис. 14)

выражением

$$\Delta g_1 = \pi f \mu \left(\frac{7}{3} - \sqrt{3} \right) r_0 = \frac{\Delta g_0}{4} (7 - 3\sqrt{3}). \quad (111.15.7)$$

Притяжение шарового слоя D в этой точке равно

$$\Delta g_2 = \pi \mu \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{5} - \sqrt{3} \right) r_0 = \Delta g_0 \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{4} \sqrt{3} \right). \quad (\text{III.15.8})$$

Таким образом, получим силу тяжести в средней точке M

$$g_m = \gamma + \frac{\Delta g_0}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{5} - 3) \quad (\text{III.15.9})$$

и приближенную среднюю аномалию вдоль ортометрической высоты

$$\Delta g_m \approx \frac{\Delta g_0}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{5} - 3) = 0,3251 \Delta g_0. \quad (\text{III.15.10})$$

Следовательно, последний член в (III.15.5) равен приближенно

$$\frac{\Delta g_m}{\gamma} H(K) \approx 0,3251 \frac{\Delta g_0}{\gamma} r_0 \approx 0,975 \text{ м},$$

и ортометрическая высота приближенно составляет

$$H_G(K) \approx 5997,000 \text{ м} - 0,975 \text{ м} = 5996,025 \text{ м}.$$

Точное значение Δg_m средней аномалии силы тяжести, вычисленное как интегральное среднее на участке от точки K до центра шара, равно

$$\Delta g_m = \frac{1}{r_0} \int_{(CK)} \Delta g dH = \frac{\Delta g_0}{2},$$

а значение последнего члена в (III.15.5)

$$\frac{\Delta g_m}{\gamma} H(K) = \frac{\Delta g_0}{2\gamma} r_0 = 1,5 \text{ м}$$

с погрешностью от замены $H_G(K)$ на $H(K)$ в 0,5 мм.

Итак, по формуле (III.15.5) через точное значение средней аномалии силы тяжести получаем ортометрическую высоту

$$H_G(K) = 5997 \text{ м} - 1,5 \text{ м} = 5995,5 \text{ м}.$$

Непосредственное вычисление ортометрической высоты через потенциал возмущающих масс на геоиде (приблизительно в центре шара) дает

$$H_G(K) = r_0 - \frac{3}{2} \frac{\Delta g_0 r_0}{\gamma} = 5995,5 \text{ м},$$

что совпадает со значением, вычисленным по формуле (III.15.5).

Таким образом, на этом примере ошибка ортометрической высоты, вычисленной по способу Нитхаммера — Красовского, получается равной: 5996,025 м — 5995,5 м = 0,525 м.

Вычислим теперь среднюю аномалию Δg_m силы тяжести по способу Гельмерта. В этом случае

$$\Delta g_m \approx \Delta g_0 - 2\pi f \mu r_0 = - \frac{\Delta g_0}{2}.$$

Тогда

$$H_G(K) = 5997 \text{ м} + 1,5 \text{ м} = 5998,5 \text{ м}.$$

Ошибка способа Гельмерта равна 3 м.

Модель № 2 (конус). Модель № 2 с незначительными изменениями, заимствованная из работы Еремеева 1950 г., представляет собой конус с закругленной вершиной, расположенный на отсчетной сфере (рис. 15), где $\gamma_0 = 980,166 \text{ гал}$, радиус отсчетной сферы $R = 6371,26 \text{ км}$. Аномальными массами служат два шара, центры которых расположены на оси конуса; один находится над отсчетной сферой, другой — под ней. Внешний шар имеет радиус $b = 2 \text{ км}$, а внутренний $a = 4 \text{ км}$, оба шара касаются отсчетной сферы. Массы шаров таковы, что в вершине модели вызываемые ими аномалии силы тяжести соответственно равны $\Delta g_2 = 200$ и $\Delta g_1 = 300 \text{ мгал}$. Высота точки K в вершине конуса над отсчетной сферой равна $H(K) = H_0$.

Профиль нивелирования выбран от подножия конуса вдоль его образующей до вершины. Этот профиль усложнен по сравнению с профилем модели, рассмотренной в работе 1950 г. В табл. 17 помещены высоты H точек профиля над отсчетной сферой

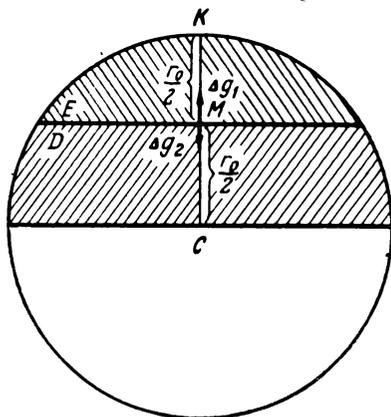


Рис. 14

Таблица 17

№ п/п	t	H	$g-y$	ξ	ΔH	Δh_w
1	2	3	4	5	6	7
0	0	0				
1	100	17	4,7	6,8	17	16,1661
2	200	33	4,7	6,9	16	15,9966
3	300	50	4,8	6,9	17	16,9965
4	400	67	4,9	7,0	17	16,9965
5	500	83	5,0	7,0	16	15,9966
6	600	100	5,1	7,1	17	16,9966
7	700	117	5,2	7,1	17	16,9966
8	800	133	5,2	7,2	16	15,9965
9	900	150	5,3	7,2	17	16,9965
10	1000	167	5,4	7,3	17	16,9965
11	1100	183	5,5	7,4	16	15,9964
12	1200	200	5,6	7,4	17	16,9964
13	1300	217	5,7	7,5	17	16,9964
14	1400	233	5,8	7,5	16	15,9964
15	1500	250	5,9	7,6	17	16,9963
16	1600	267	6,0	7,7	17	16,9963
17	1700	283	6,1	7,7	16	15,9963
18	1800	300	6,2	7,8	17	16,9962
19	1900	317	6,3	7,8	17	16,9962
20	2000	333	6,4	7,9	16	15,9962
21	2100	350	6,5	8,0	17	16,9961
22	2200	367	6,7	8,0	17	16,9961
23	2300	383	6,8	8,1	16	15,9961
24	2400	400	6,9	8,2	17	16,9960
25	2500	417	7,0	8,2	17	16,9960
26	2600	433	7,1	8,3	16	15,9960
27	2700	450	7,3	8,4	17	16,9959
28	2800	467	7,4	8,4	17	16,9959
29	2900	483	7,5	8,5	16	15,9959
30	3000	500	7,7	8,6	17	16,9958
31	3100	517	7,8	8,6	17	16,9958
32	3200	533	7,9	8,7	16	15,9958
33	3300	550	8,1	8,8	17	16,9957
34	3400	567	8,2	8,9	17	16,9957
35	3500	583	8,3	8,9	16	15,9957
36	3600	600	8,5	9,0	17	16,9956
37	3700	617	8,7	9,1	17	16,9956
38	3800	633	8,8	9,2	16	15,9955
39	3900	650	9,0	9,2	17	16,9955
40	4000	667	9,1	9,3	17	16,9955
41	4100	683	9,3	9,4	16	15,9954
42	4200	700	9,5	9,5	17	16,9954
43	4300	717	9,6	9,6	17	16,9954
44	4400	733	9,8	9,6	16	15,9954
45	4500	750	10,0	9,7	17	16,9953
46	4600	767	10,1	9,8	17	16,9952
47	4700	783	10,3	9,9	16	15,9952
48	4800	800	10,5	10,0	17	16,9952
49	4900	817	10,7	10,1	17	16,9951
50	5000	833	10,9	10,2	16	15,9950
51	5100	850	11,1	10,3	17	16,9950
52	5200	867	11,3	10,3	17	16,9950
53	5300	883	11,5	10,4	16	15,9950
54	5400	900	11,7	10,5	17	16,9949
55	5500	917	11,9	10,6	17	16,9949
56	5600	933	12,1	10,7	16	15,9948
57	5700	950	12,4	10,8	17	16,9948
58	5800	967	12,6	10,9	17	16,9947
59	5900	983	12,8	11,0	16	15,9947
60	6000	1000	13,1	11,1	17	16,9946
61	6100	1017	13,3	11,2	17	16,9946
62	6200	1033	13,5	11,3	16	15,9945
63	6300	1050	13,8	11,4	17	16,9945
			14,1	11,5	17	16,9944

1	2	3	4	5	6	7
64	6 400	1067				
65	6 500	1083	14,3	11,6	16	15,9944
66	6 600	1100	14,6	11,7	17	16,9943
67	6 700	1117	14,9	11,8	17	16,9943
68	6 800	1133	15,1	12,0	16	15,9942
69	6 900	1150	15,4	12,1	17	16,9941
70	7 000	1167	15,7	12,2	17	16,9941
71	7 100	1183	16,0	12,3	16	15,9940
72	7 200	1200	16,3	12,4	17	16,9940
73	7 300	1217	16,6	12,5	17	16,9939
74	7 400	1233	16,9	12,7	16	15,9938
75	7 500	1250	17,2	12,8	17	16,9938
76	7 600	1267	17,6	12,9	17	16,9938
77	7 700	1283	17,8	13,0	16	15,9937
78	7 800	1300	18,2	13,1	17	16,9936
79	7 900	1317	18,5	13,3	17	16,9936
80	8 000	1333	18,9	13,4	16	15,9935
81	8 100	1350	19,2	13,5	17	16,9935
82	8 200	1367	19,6	13,7	17	16,9934
83	8 300	1383	20,0	13,8	16	15,9933
84	8 400	1400	20,4	13,9	17	16,9933
85	8 500	1417	20,8	14,1	17	16,9932
86	8 600	1433	21,2	14,2	16	15,9931
87	8 700	1450	21,6	14,3	17	16,9931
88	8 800	1467	22,0	14,5	17	16,9930
89	8 900	1483	22,4	14,6	16	15,9929
90	9 000	1500	22,9	14,8	17	16,9928
91	9 100	1517	23,3	14,9	17	16,9928
92	9 200	1533	23,8	15,1	16	15,9927
93	9 300	1550	24,3	15,2	17	16,9926
94	9 400	1567	24,8	15,4	17	16,9925
95	9 500	1583	25,3	15,5	16	15,9925
96	9 600	1600	25,8	15,7	17	16,9924
97	9 700	1620	26,3	15,8	20	19,9923
98	9 800	1640	26,8	16,0	20	19,9922
99	9 900	1660	27,4	16,1	20	19,9922
100	10 000	1680	28,0	16,3	20	19,9921
101	10 100	1700	28,5	16,5	20	19,9920
102	10 200	1714	29,1	16,6	14	13,9920
103	10 300	1729	29,7	16,8	15	14,9919
104	10 400	1743	30,3	17,0	14	13,9918
105	10 500	1757	30,9	17,1	14	13,9917
106	10 600	1771	31,5	17,3	14	13,9916
107	10 700	1786	32,2	17,5	15	14,9915
108	10 800	1800	32,8	17,7	14	13,9914
109	10 900	1814	33,5	17,9	14	13,9913
110	11 000	1829	34,2	18,0	15	14,9913
111	11 100	1843	34,9	18,2	14	13,9912
112	11 200	1857	35,6	18,4	14	13,9911
113	11 300	1871	36,3	18,6	14	13,9910
114	11 400	1886	37,1	18,8	15	14,9909
115	11 500	1900	37,8	19,0	14	13,9908
116	11 600	1914	38,6	19,2	14	13,9907
117	11 700	1929	39,4	19,4	15	14,9906
118	11 800	1943	40,2	19,6	14	13,9905
119	11 900	1957	41,0	19,8	14	13,9904
120	12 000	1971	41,9	20,0	14	13,9903
121	12 100	1986	42,8	20,2	15	14,9902
122	12 200	2000	43,7	20,5	14	13,9901
123	12 300	2017	44,6	20,7	17	16,9900
124	12 400	2033	45,5	20,9	16	15,9899
125	12 500	2050	46,5	21,1	17	16,9898
126	12 600	2067	47,5	21,3	17	16,9897
127	12 700	2083	48,6	21,5	16	15,9896
128	12 800	2100	49,6	21,8	17	16,9894
129	12 900	2112	50,7	22,0	12	11,9893
			51,8	22,2	13	12,9892

1	2	3	4	5	6	7
130	13 000	2125				
131	13 100	2138	52,9	22,5	13	12,9891
132	13 200	2150	54,0	22,7	12	11,9890
133	13 300	2162	55,2	23,0	12	11,9888
134	13 400	2175	56,4	23,2	13	12,9888
135	13 500	2188	57,6	23,5	13	12,9886
I 136	13 600	2200	58,9	23,7	12	11,9885
137	13 700	2211	60,1	24,0	11	10,9884
138	13 800	2222	61,5	24,2	11	10,9883
139	13 900	2233	62,8	24,5	11	10,9881
140	14 000	2244	64,2	24,7	11	10,9880
141	14 100	2256	65,6	25,0	12	11,9879
142	14 200	2267	67,0	25,3	11	10,9877
143	14 300	2278	68,5	25,6	11	10,9876
144	14 400	2289	70,0	25,8	11	10,9875
145	14 500	2300	71,6	26,1	11	10,9874
146	14 600	2310	73,1	26,4	10	9,9872
147	14 700	2320	74,8	26,7	10	9,9871
148	14 800	2330	76,4	27,0	10	9,9869
149	14 900	2340	78,0	27,3	10	9,9868
150	15 000	2350	79,8	27,5	10	9,9867
151	15 100	2360	81,6	27,8	10	9,9865
152	15 200	2370	83,4	28,1	10	9,9864
153	15 300	2380	85,2	28,4	10	9,9862
154	15 400	2390	87,2	28,7	10	9,9861
155	15 500	2400	89,2	29,0	10	9,9859
156	15 600	2412	91,2	29,3	12	11,9858
157	15 700	2425	93,3	29,6	13	12,9856
158	15 800	2438	95,5	29,9	13	12,9855
159	15 900	2450	97,6	30,2	12	11,9854
160	16 000	2462	99,8	30,5	12	11,9852
161	16 100	2475	102,1	30,8	13	12,9851
162	16 200	2488	104,4	31,1	13	12,9849
163	16 300	2500	106,8	31,4	12	11,9848
164	16 400	2517	109,2	31,7	17	16,9846
165	16 500	2533	111,7	32,0	16	15,9845
166	16 600	2550	114,2	32,2	17	16,9844
167	16 700	2567	116,8	32,5	17	16,9842
168	16 800	2583	119,4	32,8	16	15,9841
169	16 900	2600	122,1	33,0	17	16,9840
170	17 000	2617	124,9	33,3	17	16,9839
171	17 100	2633	127,6	33,6	16	15,9837
172	17 200	2650	130,5	33,8	17	16,9835
173	17 300	2667	133,4	34,1	17	16,9835
174	17 400	2683	136,4	34,3	16	15,9834
II 175	17 500	2700	139,4	34,6	17	16,9832
176	17 600	2725	142,5	34,8	25	24,9831
177	17 700	2750	145,5	35,0	25	24,9830
178	17 800	2775	148,7	35,2	25	24,9829
179	17 900	2800	151,8	35,3	25	24,9829
180	18 000	2825	155,1	35,5	25	24,9828
181	18 100	2850	158,3	35,6	25	24,9827
182	18 200	2875	161,7	35,8	25	24,9826
183	18 300	2900	165,0	35,9	25	24,9826
184	18 400	2925	168,4	36,0	25	24,9826
185	18 500	2950	171,8	36,1	25	24,9825
186	18 600	2975	175,3	36,2	25	24,9824
III 187	18 700	3000	178,8	36,3	25	24,9824
188	18 800	3033	182,3	36,4	33	32,9824
189	18 900	3067	185,8	36,4	34	33,9824
190	19 000	3100	189,2	36,4	33	32,9824
191	19 100	3120	192,8	36,4	20	19,9824
192	19 200	3140	196,7	36,5	20	19,9823
193	19 300	3160	200,4	36,5	20	19,9823
194	19 400	3180	204,3	36,6	20	19,9823
195	19 500	3200	208,1	36,7	20	19,9822
			212,0	36,7	20	19,9822

1	2	3	4	5	6	7
196	19 600	3220	215,9	36,7	20	19,9822
197	19 700	3240	219,9	36,8	20	19,9822
198	19 800	3260	224,0	36,8	20	19,9822
199	19 900	3280	228,1	36,8	20	19,9822
200	20 000	3300	232,2	36,8	20	19,9822
201	20 100	3320	236,4	36,8	20	19,9822
202	20 200	3340	240,6	36,7	20	19,9822
203	20 300	3360	244,8	36,7	20	19,9822
204	20 400	3380	249,1	36,7	20	19,9822
205	20 500	3400	253,4	36,6	20	19,9823
206	20 600	3420	257,8	36,6	20	19,9823
207	20 700	3440	262,3	36,5	20	19,9823
208	20 800	3460	266,8	36,5	20	19,9823
209	20 900	3480	271,4	36,4	20	19,9824
210	21 000	3500	276,1	36,3	17	16,9824
211	21 100	3517	281,0	36,3	16	15,9824
212	21 200	3533	285,9	36,2	17	16,9824
213	21 300	3550	291,0	36,2	17	16,9824
214	21 400	3567	296,2	36,1	16	15,9825
215	21 500	3583	301,5	36,1	17	16,9825
216	21 600	3600	307,1	36,0	17	16,9826
217	21 700	3617	312,7	35,9	16	15,9826
218	21 800	3633	318,5	35,8	17	16,9826
219	21 900	3650	324,6	35,8	17	16,9826
220	22 000	3667	330,8	35,6	16	15,9827
221	22 100	3683	337,3	35,5	17	16,9828
222	22 200	3700	344,1	35,4	17	16,9828
223	22 300	3717	351,0	35,2	16	15,9829
224	22 400	3733	358,3	34,9	17	16,9831
225	22 500	3750	366,0	34,7	17	16,9832
226	22 600	3767	373,9	34,3	16	15,9834
227	22 700	3783	382,2	33,9	17	16,9836
228	22 800	3800	390,8	33,4	17	16,9838
229	22 900	3817	399,5	32,8	16	15,9841
230	23 000	3833	408,5	32,1	17	16,9844
231	23 100	3850	417,8	31,3	17	16,9848
232	23 200	3867	427,0	30,2	16	15,9854
233	23 300	3883	436,2	29,0	17	16,9859
234	23 400	3900	445,4	27,7	17	16,9866
235	23 500	3917	454,1	26,1	16	15,9874
236	23 600	3933	462,3	24,3	17	16,9882
237	23 700	3950	470,1	22,3	17	16,9892
238	23 800	3967	476,8	20,1	16	15,9903
239	23 900	3983	482,5	17,7	17	16,9914
240	24 000	4000	488,1	15,2	8	7,9926
241	24 100	4008	493,2	12,6	9	8,9939
242	24 200	4017	497,3	10,0	8	7,9952
243	24 300	4025	499,8	7,2	8	7,9965
244	24 400	4033	500,6	4,3	9	8,9979
245	24 500	4042	500,0	1,4	8	7,9993
IV 246	24 600	4050				

(в этих точках при нивелировании должны были бы стоять рейки): для точек, расположенных посредине между указанными, даны значения аномалий $g-\gamma$ силы тяжести, отклонения отвеса ξ относительно нормали N к отсчетной сфере и соответствующие приращения ΔH и Δh_w (в точках, для которых даны $g-\gamma$ и ξ , при нивелировании должен бы стоять нивелир). Линейные величины даны в таблице в метрах, аномалии силы тяжести — в миллигалах, отклонения отвеса — в секундах.

Измеренное превышение Δh_w определено формулой

$$\Delta h_w = \Delta H - \xi \Delta l,$$

где l — проекция на отсчетную сферу расстояния между исходной точкой и текущей ($\Delta l = 100$ м). Аномалии $g-\gamma$ силы тяжести, отклонения ξ отвеса, нормальные N_Q и

ортометрические H_G высоты вычислены непосредственно через притяжение и потенциал аномальных масс по формулам работы 1950 г.:

$$g - \gamma \approx \frac{\Delta g_1 (H_0 + a)^2 (H + a)}{[L^2 + (H + a)^2]^{3/2}} + \frac{\Delta g_2 (H_0 - b)^2 (H - b)}{[L^2 + (H - b)^2]^{3/2}}, \quad (\text{III.15.11})$$

где L обозначает расстояние от оси конуса,

$$\gamma \xi \approx \frac{\Delta g_1 (H_0 + a)^2 L}{[L^2 + (H + a)^2]^{3/2}} + \frac{\Delta g_2 (H_0 - b)^2 L}{[L^2 + (H - b)^2]^{3/2}}, \quad (\text{III.15.12})$$

$$H_Q = H - \zeta_Q \approx H - \frac{\Delta g_1 (H_0 + a)^2}{\gamma [L^2 + (H + a)^2]^{1/2}} - \frac{\Delta g_2 (H_0 - b)^2}{\gamma [L^2 + (H - b)^2]^{1/2}}, \quad (\text{III.15.13})$$

$$H_G = H - \zeta_G \approx H - \frac{\Delta g_1 (H_0 + a)^2}{\gamma_0 [L^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{\Delta g_2 (H_0 - b)^2}{\gamma_0 [L^2 + b^2]^{3/2}}. \quad (\text{III.15.14})$$

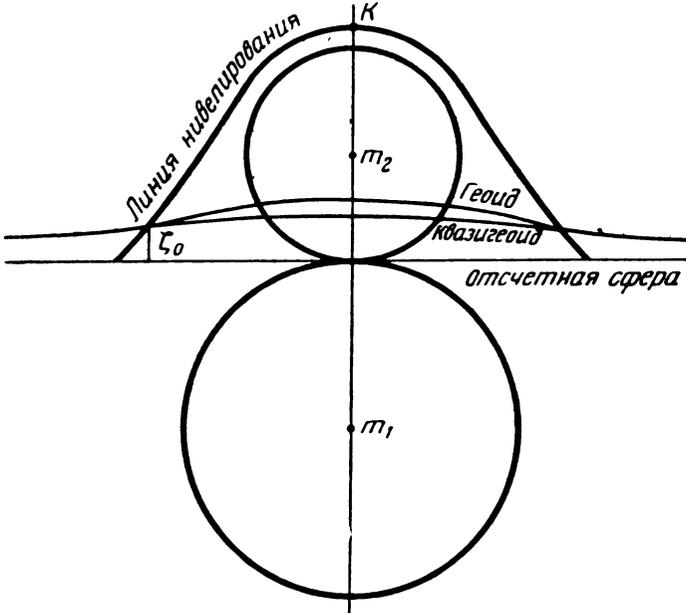


Рис. 15

Эти формулы записаны для плоской отсчетной поверхности.

Значения H_Q и H_G через «измеренные» высоты вычислены для четырех точек — «реперов», номера которых в табл. 17 отмечены римскими цифрами.

Так как начальная точка нивелирования (в табл. 16 ее порядковый номер условно обозначен нулем) находится на уровне моря, а не на отсчетной сфере, то первое значение Δh_w изменено на высоту уровня моря $\zeta_0 = 0,8306$ м над этой сферой и равно $\Delta H - \xi \Delta l - \zeta_0$.

Суммируя нивелирные превышения Δh_w от уровня моря, находим

$$H_i (\text{I}) = 2198,306 \text{ м}, \quad H_i (\text{III}) = 2997,545 \text{ м},$$

$$H_i (\text{II}) = 2697,753 \text{ м}, \quad H_i (\text{IV}) = 4046,644 \text{ м}.$$

Нормальные высоты реперов вычислены по формуле (III.10.14). Так как поправка за непараллельность уровней поверхностей нормального поля для рассматриваемого примера также равна нулю, эта формула принимает вид

$$H_Q (K) - H_Q (I) = \int_{(IK)} dh_w + \frac{1}{\gamma_m (K)} \int_{(IK)} (g - \gamma) dh_w \quad (\text{III.15.15})$$

По таблице для каждого репера получаем:

$$\frac{1}{\gamma_m(I)} \sum_0^I (g - \gamma) \Delta h_w = 0,044 \text{ м},$$

$$\frac{1}{\gamma_m(II)} \sum_0^{II} (g - \gamma) \Delta h_w = 0,094 \text{ м},$$

$$\frac{1}{\gamma_m(III)} \sum_0^{III} (g - \gamma) \Delta h_w = 0,143 \text{ м},$$

$$\frac{1}{\gamma_m(IV)} \sum_0^{IV} (g - \gamma) \Delta h_w = 0,470 \text{ м}.$$

По формуле (111.15.15) находим нормальные высоты

$$H_Q(I) = 2198,350 \text{ м},$$

$$H_Q(II) = 2697,847 \text{ м},$$

$$H_Q(III) = 2997,688 \text{ м},$$

$$H_Q(IV) = 4047,114 \text{ м}.$$

Точные их значения, вычисленные непосредственно через потенциал аномальных масс по формуле (111.15.13), равны при $\gamma = 980166 - 0,3086 H$:

$$H_Q(I) = 2198,350 \text{ м},$$

$$H_Q(II) = 2697,846 \text{ м},$$

$$H_Q(III) = 2997,688 \text{ м},$$

$$H_Q(IV) = 4047,114 \text{ м}.$$

Как видим, нормальные высоты, вычисленные по (111.15.15), согласуются с точными значениями.

Формулу для ортометрической высоты, учитывая изменение нормальной силы тяжести с высотой, можно записать согласно (111.11.6), если $H_G(I) = 0$,

$$H_G(K) = H_Q(K) - \frac{\Delta g_m}{\gamma_m(K)} H_G(K). \quad (111.15.16)$$

Высоты реперов I, II, III расположены вне внешней притягивающей массы, поэтому вычисление Δg_m для них как интегрального среднего по высоте не представляет труда. На репере IV, совпадающем с вершиной модели, влияние притяжения внутреннего шара на Δg_m учесть также нетрудно, а соответствующее влияние внешнего шара близко к нулю, так как центр его расположен вблизи середины высоты этой точки. Результаты вычисления ортометрических высот по формуле (111.15.16), в которой Δg_m определено как интегральное среднее по высоте, приведены в табл. 18.

Таблица 18

№ пункта	Δg_m , мгал	Поправка $\frac{\Delta g_m}{\gamma_m} H_i$, м	Нормальная высота, м	Ортометрическая высота по формуле (III. 15. 16), м	Точное значение ортометрической высоты, м
I	54,1	0,121	2198,350	2198,229	2198,229
II	144,1	0,397	2697,847	2697,450	2697,450
III	198,8	0,608	2997,688	2997,080	2997,080
IV	604,6	2,495	4047,114	4044,619	4044,618

Вычислим ортометрическую высоту по способу Нитхаммера—Красовского для вершин модели — репера IV. Вычитаем из аномалии силы тяжести в этой точке притяжение внешней массы — внешнего шара. Результат можно принять равным $\Delta g_m = 300$ мгал. Следовательно, $\frac{\Delta g_m}{\gamma_m} H_i = 1,240$ м и ортометрическая высота получается равной 4045,874 м. Таким образом, погрешность этого способа в данном случае составляет 1,256 м.

По способу Гельмерта для той же точки IV находим

$$\Delta g_m = \Delta g_1 + \Delta g_2 - 2\pi f\mu H_{IV} = -38,26 \text{ мгал},$$

где

$$\pi f\mu = \frac{3\Delta g_1 (H_{IV} - b)^2}{4b^3},$$

и

$$H_G(IV) = 4047,272 \text{ м},$$

т. е. погрешность равна +2,654 м.

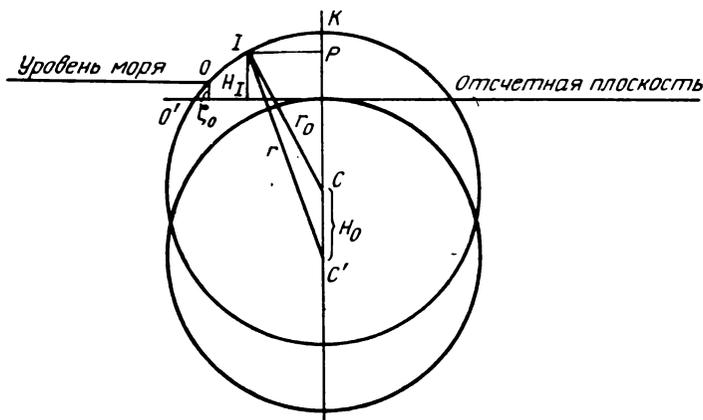


Рис. 16

Модель № 3 (изостатически компенсированная). Два одинаковых однородных шара с радиусом $r_0=30$ км и плотностью $\mu_1=+3$ и $\mu_2=-3$ смещены один относительно другого на расстояние $H_0=3$ км. Шар, имеющий положительную плотность, выступает над отсчетной плоскостью, образуя гору высотой $H_0=3$ км; второй шар с отрицательной плотностью целиком находится под отсчетной плоскостью (рис. 16). Сумма аномальных масс, очевидно, равна нулю, так как нижний шар с отрицательной массой компенсирует шар с положительной массой. Можно считать, что в этой модели в схематической форме осуществляется полная изостатическая компенсация. Нормальная сила тяжести принята равной $\gamma=979,77$ гал.

«Земную» поверхность представляет выступающая часть поверхности верхнего шара и далее отсчетная плоскость. Для всей «земной» поверхности притяжение обоих шаров различно и аномалии силы тяжести отличны от нуля. Их величина определена формулой

$$(g - \gamma)_I = \frac{fm}{r_0^3} y - \frac{fm(r_0 + H_I)}{(r_0^2 + H_0^2 + 2H_0y)^{3/2}},$$

где m — масса шара; $y=r_0-H_0+H_I$ (см. рис. 16). В точке K

$$H(K) = H_0, \quad y = r_0 \text{ и } (g - \gamma)_K = \Delta g_0 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{H_0}{r_0}\right)^2} \right],$$

где

$$\Delta g_0 = \frac{fm}{r_0^2}.$$

Приведем числовые значения: $\Delta g_0=2514,54$ мгал, $(g - \gamma)_K=436,41$ мгал. В точке O'

$$H = 0, \quad y = r_0 - H_0, \quad (g - \gamma)_{O'} = \frac{fm}{r_0^3} (r_0 - H_0) - \frac{fmr_0}{[r_0^2 + H_0^2 + 2(r_0 - H_0)H_0]^{3/2}} = 326,06 \text{ мгал}.$$

Измеренная высота точки K определена формулой

$$H_i(K) = H_0 - \zeta_0 - \int_0^{x_0} \xi dx, \quad (\text{III.15.17})$$

где x — расстояние текущей точки поверхности выступающего шара от оси модели KCC' , x_0 — расстояние для точки O — исходного пункта нивелирования. Высоту ζ_0 геоида (уровня моря) в точке O определим непосредственно через потенциал притяжения аномальных масс:

$$\zeta_0 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{fm}{r_0} - \frac{fm}{r} \right) = \frac{fm}{\gamma r_0} - \frac{fm}{\gamma \sqrt{r_0^2 + 2r_0 H_0 - H_0^2 + 2H_0 \zeta_0}}.$$

Второе приближение по этой формуле дает

$$\zeta_0 = 6,415 \text{ м.}$$

Для уклонения отвеса имеем

$$\xi = \frac{fm}{\gamma} \left(\frac{x}{r_0^3} - \frac{x}{(r_0^2 + H_0^2 + 2H_0 y)^{3/2}} \right).$$

Подставив это выражение в формулу (III.15.17) и выполнив интегрирование, получим

$$\begin{aligned} H_i(K) &= H_0 - \zeta_0 - \frac{\Delta g_0}{\gamma} (H_0 - \zeta_0) \left(1 - \frac{H_0 - \zeta_0}{2r_0} \right) + \\ &+ \frac{\Delta g_0 r_0^2}{\gamma H_0^2} \left[\frac{r_0^2 + H_0 r_0 + H_0^2}{r_0 + H_0} - \frac{r_0^2 + H_0 r_0 + H_0 \zeta_0}{(r_0^2 - H_0^2 + 2H_0 r_0 + 2H_0 \zeta_0)^{1/2}} \right] = \\ &= (H_0 - \zeta_0) \left\{ 1 - \frac{\Delta g_0}{2\gamma} \frac{2r_0 - H_0 + \zeta_0}{r_0} + \frac{2\Delta g_0}{\gamma} \frac{r_0^3}{(r_0 + H_0)^3} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1 - \frac{H_0 - \zeta_0}{r_0}}{2(r_0^2 + H_0^2 + H_0 r_0)} \frac{(r_0 + H_0)^2}{(r_0 + H_0)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{1 - \frac{2H_0(H_0 - \zeta_0)}{(r_0 + H_0)^2} + \left(1 - \frac{H_0(H_0 - \zeta_0)}{r_0^2 + H_0^2 + H_0 r_0} \right) \sqrt{1 - \frac{2H_0(H_0 - \zeta_0)}{(r_0 + H_0)^2}}}{1} \right] \right\}, \end{aligned}$$

откуда после подстановки численных значений следует

$$H_i(K) = 2991,837 \text{ м.}$$

Для вычисления нормальной высоты точки K воспользуемся формулой (III.15.4). Последний член этой формулы преобразуем:

$$\frac{1}{\gamma} \int_{(OK)} (g - \gamma) dh_w \approx \frac{1}{\gamma} \int_0^H (g - \gamma) dH - \frac{\zeta_0}{\gamma} (g - \gamma)_O,$$

и далее

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^H (g - \gamma) dH = \frac{fm}{\gamma} \int_{r_0 - H_0}^{r_0} \left[\frac{y}{r_0^3} - \frac{y + H_0}{(r_0^2 + H_0^2 + 2H_0 y)^{3/2}} \right] dy.$$

В результате интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_{(OK)} (g - \gamma) dh_w &= \frac{\Delta g_0 H_0}{\gamma} \left(1 - \frac{H_0}{2r_0} \right) - \frac{\Delta g_0}{\gamma} \frac{r_0^2}{2H_0^2} \times \\ &\times \left[(r_0 + H_0) - \sqrt{(r_0 + H_0)^2 - 2H_0^2} + (r_0^2 + H_0^2) \left(\frac{1}{r_0 + H_0} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(r_0 + H_0)^2 - 2H_0^2}} \right] + \frac{\Delta g_0}{\gamma} r_0^2 \left(\frac{1}{r_0 + H_0} - \frac{1}{\sqrt{(r_0 + H_0)^2 - 2H_0^2}} \right) - \frac{\zeta_0}{\gamma} (g - \gamma)_{O'}$$

Подставив числовые значения, находим

$$\frac{1}{\gamma} \int_{(OK)} (g - \gamma) dh_w = 1,164 \text{ м.}$$

Следовательно, формула (111.15.4) для нормальной высоты дает

$$H_Q(K) = 2991,837 \text{ м} + 1,164 \text{ м} = 2993,001 \text{ м.}$$

Определим теперь для вершины модели нормальную и ортометрическую высоты непосредственно через потенциал аномальной массы. Для этого вычислим высоту $\zeta_Q(K)$ квазигеоида и высоту $\zeta_G(K)$ геоида в точке K . Поскольку возмущающий потенциал в вершине модели равен

$$T(K) = \frac{fm}{r_0} - \frac{fm}{r_0 + H_0} = \frac{\Delta g_0 r_0 H_0}{r_0 + H_0},$$

для высоты квазигеоида имеем

$$\zeta_Q(K) = \frac{T(K)}{\gamma} = \frac{\Delta g_0 r_0 H_0}{\gamma (r_0 + H_0)} = 6,999 \text{ м}$$

и для нормальной высоты

$$H_Q(K) = H_0 - \zeta_Q(K) = 2993,001 \text{ м},$$

что совпадает с полученным выше результатом.

Для возмущающего потенциала в точке, расположенной на высоте $\zeta_G(K)$ над отсчетной поверхностью на оси модели, имеем

$$\begin{aligned} T_0(K) &= \frac{2}{3} \pi f \mu [3r_0^2 - (r_0 - H_0 + \zeta_G(K))^2] - \frac{fm}{(r_0 + \zeta_G(K))} \approx \\ &\approx \Delta g_0 r_0 \left[\frac{H_0}{r_0} - \frac{H_0^2}{2r_0^2} + \frac{H_0 \zeta_G(K)}{r_0^2} \right] \end{aligned}$$

и для высоты $\zeta_G(K)$ геоида получаем

$$\zeta_G(K) = \frac{\Delta g_0}{\gamma} r_0 \left(\frac{H_0}{r_0} - \frac{H_0^2}{2r_0^2} + \frac{H_0 \zeta_G(K)}{r_0^2} \right).$$

Путем последовательных приближений вычислено

$$\zeta_G(K) = 7,316 \text{ м};$$

следовательно, ортометрическая высота равна

$$H_G(K) = H_0 - \zeta_G(K) = 2992,684 \text{ м.}$$

Вычислим среднюю аномалию Δg_m силы тяжести вдоль ортометрической высоты вершины модели. Общее выражение для аномалии силы тяжести в некоторой точке P этой ортометрической высоты имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta g &= \frac{4}{3} \pi f \mu (r_0 - H_0 + H_P) - \frac{4}{3} \pi f \mu \frac{r_0^3}{(r_0 + H_P)^2} = \\ &= \Delta g_0 \left[1 - \frac{H_0 - H_P}{r_0} - \frac{r_0^2}{(r_0 + H_P)^2} \right]. \end{aligned}$$

Величину $\Delta g_m(K)$ вычислим по формуле

$$\Delta g_m(K) = \frac{1}{H_G(K)} \int_{\zeta_G(K)}^{H_0} \Delta g dh \approx \Delta g_0 \left[\frac{H_0}{r_0 + H_0} - \frac{H_0}{2r_0} + \frac{3\zeta_G(K)}{2r_0} \right].$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\Delta g_m(K) = 103,79 \text{ мгал}$$

и в соответствии с формулой (III.15.5) находим ортометрическую высоту точки K

$$H_G(K) = 2993,001 \text{ м} - 0,317 \text{ м} = 2992,684 \text{ м},$$

что совпадает с непосредственно вычисленным значением.

Вычислим теперь ортометрическую высоту по способу Нитхаммера—Красовского. Исключая из аномалии $(g-\gamma)_K$ силы тяжести в точке K притяжение Δg^I внешних масс (т. е. сегмента верхнего шара высотой H_0), находим $(g-\gamma)_K - \Delta g^I$. Эту аномалию следует считать отнесенной и к точке, лежащей на высоте $\frac{1}{2}H_0$. Теперь восстанавливаем внешние массы, расположенные выше средней точки (т. е. учитываем притяжение Δg^{II} сегмента верхнего шара с высотой $\frac{H_0}{2}$ на точку, лежащую в центре основания сегмента). Получаем $(g-\gamma)_K - \Delta g^I - \Delta g^{II}$. Наконец, учитываем притяжение Δg^{III} внешних масс, расположенных ниже средней точки (сферического слоя с высотой $\frac{H_0}{2}$), и получаем

$$\Delta g_m = \sim (g-\gamma)_K - \Delta g^I - \Delta g^{II} + \Delta g^{III}. \quad (\text{III.15.18})$$

Ниже приведены аналитические и числовые выражения для слагаемых последней формулы:

$$\begin{aligned} \Delta g^I &= \frac{\Delta g_0}{2} \frac{H_0}{r_0} \left(3 - \frac{\sqrt{2} \sqrt{H_0}}{\sqrt{r_0}} \right) = 320,95 \text{ мгал}, \\ \Delta g^{II} &= \frac{3}{4} \Delta g_0 \frac{H_0}{r_0} - \Delta g_0 \frac{H_0}{r_0} \frac{1}{\left(2 - \frac{H_0}{r_0} \right)^2} \left[\frac{H_0^2}{2r_0^2} - \frac{3}{2} \frac{H_0}{r_0} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 - \frac{H_0}{4r_0} \right) \sqrt{\frac{H_0}{r_0} - \frac{H_0^2}{4r_0^2}} \right] = 156,28 \text{ мгал}, \\ \Delta g^{III} &= \frac{3}{4} \Delta g_0 \frac{H_0}{r_0} - \Delta g_0 \frac{H_0}{r_0} \frac{1}{\left(2 - \frac{H_0}{r_0} \right)^2} \times \\ &\quad \times \left[2 \left(1 - \frac{H_0}{4r_0} \right) \sqrt{\frac{H_0}{r_0} - \frac{H_0^2}{4r_0^2}} - \sqrt{\frac{2H_0}{r_0} - \frac{3}{4} \frac{H_0^2}{r_0^2}} \right] = 176,74 \text{ мгал}. \end{aligned}$$

Таким образом, средняя аномалия Δg_m силы тяжести, вычисленная по способу Нитхаммера—Красовского в согласии с формулой (III.15.18), получилась равной 135,92 мгал, а поправка $-\frac{\Delta g_m}{\gamma} H_t(K) = -0,415 \text{ м}$. В этом случае ортометрическая высота по формуле (III.15.5) получается следующей:

$$H_G(K) = 2993,001 \text{ м} - 0,415 \text{ м} = 2992,586 \text{ м}.$$

Расхождение с непосредственно вычисленной точной ортометрической высотой составляет $-0,098 \text{ м}$.

Вычислим теперь среднюю аномалию Δg_m силы тяжести приближенно по способу Гельмерта (1890), т. е. примем, что внешние массы, заключенные между исследуемой точкой физической поверхности и геоидом, имеют вид плоского слоя и внутренние аномальные массы отсутствуют. В этом случае Δg_m определится выражением

$$\Delta g_m = (g-\gamma)_K - 2\pi f \mu H_0$$

или

$$\Delta g_m = (g-\gamma)_K - \frac{3}{2} \frac{\Delta g_0}{r} H_0.$$

Используя полученные выше значения, находим

$$\Delta g_m = 59,2 \text{ мгал}.$$

С этим значением средней аномалии Δg_m по формуле (III.15.5) определяем ортометрическую высоту

$$H_G(K) = 2992,820 \text{ м}.$$

Расхождение с точной величиной составляет $+0,136 \text{ м}$.

Результаты вычислений и выводы. Сводка результатов всех вычислений высот в метрах для описанных моделей дана в табл. 19. Из этой таблицы видно, что нормальные высоты во всех случаях по формуле (III.10.14) можно вычислить точно. Ортометрические высоты, вычисленные по способу Нитхаммера—Красовского, получаются со значительными ошибками даже в том случае, когда плотность и положение внешних масс точно известны. В реальных условиях ошибки этого способа вычисления ортометрических высот могут быть еще больше. Другие способы вывода ортометрических высот (Нитхаммера, Мадера, Бэшлина) связаны с ошибками такого же порядка. В среднем ошибки способа Гельмерта должны быть еще больше.

Если на отрезке силовой линии от геоида до определяемой точки средняя аномалия Δg_m силы тяжести известна точно, ортометрическая высота совпадает с ее значением, вычисленным через потенциал аномальных масс.

Из результатов работы сделаны следующие выводы:

1. Нельзя провести достаточно точно вычисление ортометрических высот без знания распределения плотностей внешних масс и учета аномалий вертикального градиента силы тяжести, т. е. в тех условиях, с которыми приходится практически иметь дело; даже если известны положение и плотности всех внешних возмущающих масс, ошибки вычисления ортометрических высот могут в реальных условиях достигать нескольких дециметров.

Таблица 19

Модель	Измеренная высота H_i , м	Точные величины, вычисленные непосредственно через потенциал аномальных масс, м		Разности между вычислительными и точными значениями, м			
		нормальная высота H_G	ортометрическая высота H_G	нормальная высота по формуле (III. 10. 14)	ортометрическая высота по способу Нитхаммера—Красовского	ортометрическая высота по способу Гельмерта	ортометрическая высота по формуле (III. 11. 6), когда все аномальные массы известны
№ 1	5995,500	5997,000	5995,500	0,000	+0,525	+3,000	0,000
№ 2 I	2198,306	2198,350	2198,229	0,000	—	—	—
II	2697,753	2697,846	2697,450	+0,001	—	—	—
III	2997,545	2997,688	2997,080	0,000	—	—	—
IV	4046,644	4047,114	4044,618	0,000	+1,256	+2,654	+0,001
№ 3	2991,837	2993,001	2992,684	0,000	-0,098	+0,136	0,000

2. Нормальные высоты можно вычислить с высокой точностью, если точно измерены превышения и известны аномалии силы тяжести вдоль линии нивелирования (это замечание относится к вычислению всех видов высот).

3. При определении ортометрических высот вычисление нормальных высот является промежуточным и притом наиболее легким этапом [сравните формулы (III.10.14) и (III.11.6)].

4. Вычисление нормальных высот дает возможность подсчитать теоретические невязки в нивелирных полигонах точно и просто.

Выполненная работа подтвердила практическую и теоретическую целесообразность введения нормальных высот в геодезию наравне с динамическими высотами или геопотенциальными отметками, применение которых целесообразно в гидротехнических задачах. Вычисление же ортометрических высот нецелесообразно.

§ 16. Об определении движений земной коры

Характеризуя современные задачи изучения фигуры Земли, Молоденский (1958) обратил внимание на необходимость различать собственно вертикальные смещения точек земной поверхности и смещения уровенных поверхностей, горизонтальные смещения этих точек и изменения направлений отвеса.

Однако при обсуждении результатов повторного геометрического нивелирования, повторных триангуляционных работ, повторных астрономических определений широт и долгот такого различия, как правило, не делают. Изменения высот реперов геометрического нивелирования в современных работах объясняют вертикальными движениями реперов, изменения в астрономических долготах — горизонтальными смещениями астрономических пунктов (дрифтом континентов). Возможность изменения разностей долгот европейских и американских станций не только из-за смещений континентов, а также из-за изменения направлений отвеса допущена у Стойко (1959, 1962, 1966), Роббинса (1962) и в некоторых других работах.

Рассмотрим влияние вековых изменений гравитационного поля на выводы вертикальных движений земной коры из повторного геометрического нивелирования.

Смещение отвеса (изменение его направления) относительно земной поверхности

на угол θ в направлении хода геометрического нивелирования может быть истолковано как смещение точек по высоте. На рис. 17 показаны две рейки AA' , BB' и нивелир O . Элементарное превышение h точки A земной поверхности над точкой B той же поверхности при первоначальном положении отвеса $OO' \perp A'B'$ равно

$$h = B' - A',$$

где A' и B' — отсчеты по рейкам.

Если отвес, как упомянуто, сместится на угол θ и $OO'' \perp A''B''$, элементарное превышение точки A над точкой B при $A'O = B'O = l$ будет равно

$$h + \delta h = (B' - \varepsilon) - (A' + \varepsilon) = B' - A' - 2\varepsilon, \quad (III.16.1)$$

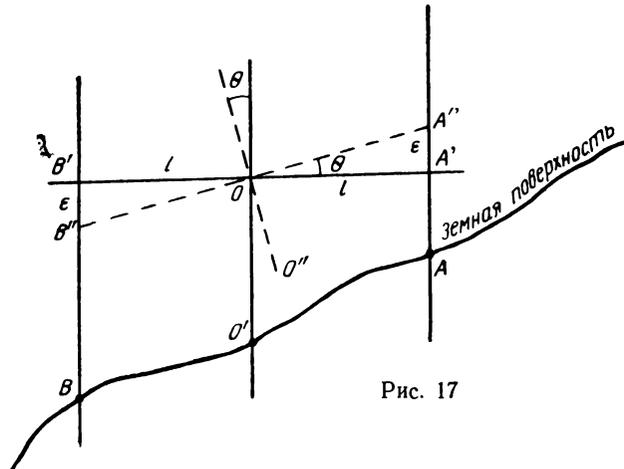


Рис. 17

где

$$\varepsilon = l \operatorname{tg} \theta \approx \theta l.$$

В нивелирном ходе с N постановками нивелира полное изменение превышения между конечной и начальной точками составит

$$\Delta = 2\varepsilon N = 2\theta l N = \theta L. \quad (III.16.2)$$

Мы приняли направление хода неизменным, смещение отвеса вдоль всего хода постоянным и расстояние l от нивелира до реек одинаковым. Если, например, длина L хода равна 1000 км, то при $\theta = 0'',1$ имеем $\Delta = 0,5$ м. Такое изменение высот получено при абсолютной неподвижности исследуемых точек.

Выведенная величина Δ много больше ошибок точного нивелирования. При средней квадратической случайной ошибке $\eta = \pm 0,5$ мм и систематической $\sigma = \pm 0,05$ мм на 1 км нивелирной линии для ошибки m нивелирования в нашем случае получаем

$$m = \pm \sqrt{0,25L + 0,0025L^2} \approx \pm 50 \text{ мм.}$$

Изменения превышений часто можно объяснить весьма малыми изменениями в положении отвеса — порядка $0,1-0'',2$ или нескольких сотых долей секунды. Например, по оценке Мещерского (1968), высота Мары относительно Краснодарска за 1895—1962 гг. изменилась на $\sim 0,8$ м. В этом случае $L \approx 900$ км, и такое изменение превышения можно объяснить изменением в положении отвеса в направлении хода на $\sim 0'',2$.

По оценке Матцковой (1965), высота Аральска относительно Кандагача за 35 лет изменилась на 0,3 м. В этом случае $L = 500$ км, и могло бы быть $\theta \approx 0'',1$.

Фиалков (1965) сообщает об изменении Δh превышений на нивелирных ходах Западной Сибири. В таблице, взятой у Фиалкова, к длинам L нивелирных ходов в километрах и числу T лет, протекших между нивелировками, мы добавили значения угла θ , которые могли бы объяснить изменения Δh превышений, выраженных в метрах (табл. 20).

Такие примеры можно было бы продолжить.

На необходимость считаться со смещениями геоида — «геометрической поверхности Земли» — при изучении движений земной коры указывал Бессель (1837, стр. 270). Соображения Фоглера (1873, стр. 31) близки к изложенным выше, но не содержат численной оценки. Очень краткие замечания по этому же поводу есть и у Гельмерта (1884, стр. 450 и 549).

Возможность смещений отвеса за несколько десятков лет на величину порядка $0,1-0'',2$, необходимую, как следует из нашего расчета, для объяснения часто наблюдаемых изменений превышений, астрономы пока что отрицать не могут. Если

Таблица 20

Нивелирный ход	L	T	Δh	θ
Челябинск — Ачинск	2021	35	+0,73	0",07
Новосибирск—Семипалатинск	670	23	+0,24	0",07
Курган—Иргиз	1056	12	+0,18	0",04
Омск — Павлодар	424	20	+0,23	0",11

считать равновероятными изменения горизонтальных и вертикальных составляющих силы тяжести, то изменениям уклонений отвеса $0,1-0",2$ должны соответствовать изменения силы тяжести $0,5-1$ *мгал*. Таких изменений за несколько десятков лет гравиметристы также пока что не отрицают. Смещения отвеса едва ли могут быть постоянными на линиях геометрического нивелирования большого протяжения: более вероятны смещения отвеса, медленно изменяющиеся вдоль линий нивелирования.

У астрономов нет единого мнения об изменении астрономических координат. По вычислениям Стойко (1966) за 40 лет (1925—1964) астрономические долготы изменялись в год (в тысячных долях секунды дуги) на $+4\pm 1$ в Гринвиче, -8 ± 3 в Ленинграде, -9 ± 2 в Москве, $+6\pm 2$ в Париже (указаны средние квадратические ошибки по оценке Стойко). Обсуждая результаты международных долготных определений, Стойко (1966) приводит следующие данные о разностях долгот между третьим определением и первым и вторым определениями (в среднем, секунды времени):

Япония — Северная Америка — $0^s,0273$;

Северная Америка — Европа $+0,0251$;

Европа — Северная Америка $+0,0142$.

Куликов (1962) приводит еще большие изменения разностей астрономических долгот.

Н. Стойко (1962) сообщает об изменении широт за 60 лет по отношению к среднему полюсу эпохи: в Гейтерсбурге — на $+0",200$; в Мицузаве — на $-0",185$; в Юкайа — на $+0",160$. Из-за недостатка данных ему не удалось исключить движение полюса и получить более или менее надежные указания на изменения в положении отвеса в меридиональной плоскости какой-либо станции.

Щеглов (1968) и Марковиц (1966) критикуют результаты Стойко и другие более старые выводы, в основном долготные. По мнению Щеглова и Марковица, ошибки астрономических определений, особенно старых, слишком велики, чтобы на их основе можно было судить об изменении астрономических координат. Но возможности таких изменений они не отвергают. (Щеглов и Марковиц предлагают усовершенствование программы наблюдений).

Из изложенного следует необходимость включения высокоточных повторных астрономических определений и повторных геодезических связей в программу работ по изучению вертикальных движений земной коры. Повторные геодезические (лучше спутниковые) связи необходимы для исключения влияния смещений исследуемых точек из изменений астрономических координат. Такие связи должны быть межконтинентальными, поскольку есть подозрения на дрейф континентов.

Если и будут зафиксированы изменения разностей геодезических и астрономических широт и долгот, то едва ли можно будет получить уверенную оценку влияния таких изменений на выводы о вертикальных движениях. По всей вероятности, будет не ясно, какие точки и отвесы можно считать неподвижными и какие — сместившимися. Однако суждение о пределах, в которых может быть заключена поправка, вывести можно.

Например, в самом простом случае связи двух точек A и B пусть их взаимное положение, выведенное из повторных геодезических связей, осталось неизменным, а изменение направления отвеса, выведенное из повторных астрономических наблюдений, равно θ . В таком случае численная величина рассматриваемой поправки в изменение разности высот, полученная из повторного нивелирования длиной L в окрестности точки B , заключена между нулем (если предположить, что смещение отвеса произошло в точке A) и произведением θL (если отнести смещение отвеса к точке B и считать его постоянным вдоль всей указанной нивелирной линии).

При изменении разностей астрономических и геодезических координат наибольшую величину поправки будет характеризовать такое изменение, истолкованное как смещение θ отвеса в одной из точек, если вторую точку и отвес в ней считать неподвижными.

Вывод о существовании вертикальных движений, если основываться только на результатах измерений, можно сделать лишь на основе совместной обработки результатов повторного нивелирования и данных о смещении отвеса относительно земной поверхности. Возникающие при этом требования к точности лежат на пределе наших современных технических возможностей.

Также предстает большой интерес аналогичные, но более простые работы на ограниченной территории, если районы, в которых можно подозревать движения зем-

ной коры или изменения гравитационного поля, будут геодезически хорошо связаны с районами, где подобные изменения или движения менее вероятны.

В последнее время получили развитие наблюдения наклонов грунта с помощью наклономеров, непрерывно фиксирующих изменение угла между отвесом и грунтом. Эти наблюдения в принципе непосредственно сравнимы с результатами повторного нивелирования, которое также фиксирует изменение угла между отвесом и грунтом, только не непрерывно. Нивелир с двумя рейками, установленными на твердых основаниях, также можно использовать как наклономерную установку. Так используют нивелиры при наблюдениях за устойчивостью инженерных сооружений. Йонес (1968) использовал как наклономер нивелир Zeiss Ni 2 в наблюдениях у Этны. По изменению превышения между основаниями реек можно вывести изменение угла между отвесом и грунтом. Для этого изменение превышения нужно поделить на расстояние между рейками. Точности геометрического нивелирования $\pm 0,3-0,5$ мм на 1 км соответствует точность вывода изменения в угле между отвесом и грунтом $\pm 0,03-0,05$, если расстояние между рейками равно 100 м. Эта точность не зависит от промежутка времени между определениями превышений. Указанная точность геометрического нивелирования достигнута в рядовых полевых работах I класса в СССР и за рубежом (Кашин, 1968). В стационарных условиях точность вывода превышения из геометрического нивелирования может быть повышена.

Точность непрерывных наклономеров за короткие промежутки времени может быть много выше. Однако результаты длительного непрерывного наклономерного наблюдения искажены смещениями нуля. Поэтому большой интерес представляет совместное использование непрерывных наклономеров и повторного нивелирования. Особенно полезны сопоставления результатов этих видов наблюдений в тех местах, где непрерывные наклономеры указывают на значительные наклоны грунта (до $10''$ и более). Изменению угла между отвесом и грунтом на $10''$ соответствует изменение превышения между основаниями реек в 5 мм при расстоянии между ними 100 м. Такие большие изменения следует интерпретировать как смещения грунта, так как подобных изменений астрономических координат, т. е. поворотов отвеса относительно некоторых фиксированных направлений, не бывает. Если реален наклон грунта, фиксируемый непрерывным наклономером внутри Земли (в штольне), то сравнительное повторное нивелирование должно его подтвердить и на земной поверхности. Пока что авторам не известен ни один случай согласованности между наблюдениями непрерывных наклономеров и результатами повторного нивелирования. Об отсутствии согласованности между такими данными сообщения были (например, Бончковский, 1965; Дамбара, 1965). Представительность непрерывных наклономерных наблюдений почти всегда сомнительна. Повторные астрономические наблюдения и повторные геодезические связи при выводах о вертикальных движениях из повторного геометрического нивелирования должны играть роль, аналогичную роли гравиметрических пунктов при вычислении нормальных высот.

Изложенные соображения соответствуют постоянству значений силы тяжести. Учет их изменений внесет новые условия в рассматриваемые зависимости. Перераспределение веществ разной плотности под исследуемыми точками может вызвать изменение силы тяжести и без изменения формы земной поверхности: изменятся нормальные высоты и высоты квазигеоида, но сумма этих величин в каждой точке сохранится неизменной. Практически, как правило, влияния перераспределения плотностей и движений земной коры будут сложно накладываться друг на друга.

Результаты повторного нивелирования при повторных геодезических связях и астрономических определениях целесообразно обрабатывать по методике венгерского геодезиста Бендефи (1965, 1966): для каждой пары исследуемых реперов нужно выводить разности измеренных неуровненных превышений. Эти разности, как отмечено, сопоставимы с наблюдениями непрерывных наклономеров. В дополнение к картам изменений высот над средним уровнем моря (называемых картами современных вертикальных движений земной коры) полезно составлять карты изменений наклонов между реперами за год или за больший отрезок времени. Такое предложение сделал Йонес (1968). При этом будут исключены изменение уровня моря и систематические ошибки геометрического нивелирования при передаче высоты к исследуемым реперам.

Методы, предлагаемые Бендефи, вытекают из более ранних соображений Изотова (1963) о необходимости иметь в виду возможные движения начала счета высот при выводах о движениях земной коры. Изотов отметил, что в настоящее время по данным повторного нивелирования можно изучать только относительные движения. Значение W_0 потенциала силы тяжести в исходной точке нивелирования пока что можно вывести со сравнительно невысокой точностью, как и расстояние от упомянутой точки до центра масс Земли. Тем более ненадежен вывод изменений этого расстояния. Таких попыток пока что и не было.

Отмечая, что рассмотренная поправка, даже при смещении отвеса в несколько сотых долей секунды, сравнима с выводимыми обычно вертикальными движениями земной коры, авторы ни в коем случае не хотят умалить значимость результатов, получаемых без учета этой поправки. Прежде всего это замечание касается движений береговой линии: вода будет наступать на сушу или отступать от нее при изменении угла между отвесом и грунтом, независимо от того, движется отвес или грунт. Поэтому геоморфологические обследования местности иногда могут подтвердить

непосредственные выводы из геометрического нивелирования о движениях земной коры, даже если смещался отвес, а не кора. Возможность смещений отвеса относительно земной поверхности следует иметь в виду также при обработке повторных триангуляций, выполняемых для изучения горизонтальных движений земной коры, особенно при значительных наклонах визирных лучей.

§ 17. Приливные поправки геометрического нивелирования и влияния колебаний отвеса

Поскольку разница в притяжениях Луны и Солнца в разных местах Земли и соответственная ее деформация превосходят точность некоторых геодезических измерений, геодезисты должны вводить поправки в такие измерения за приливные влияния. Эти поправки могут иметь значение при обработке гравиметрических измерений и нивелирования.

Рассмотрим принцип вычисления приливных поправок в результаты нивелирования для твердой Земли. На рис. 18 показаны точка K земной поверхности, которую считаем сферической с радиусом R , центр инерции Земли — точка O и притягивающее небесное тело — пусть Солнце с массой M_{\odot} . Из-за влияния этого тела в точке K изменяется потенциал силы тяжести на $\frac{fM_{\odot}}{\rho}$ и возникают вертикальная составляющая $\frac{fM_{\odot}}{\rho^2} \cos z$ и горизонтальная составляющая $\frac{fM_{\odot}}{\rho^2} \sin z$ притяжения тела M_{\odot} .

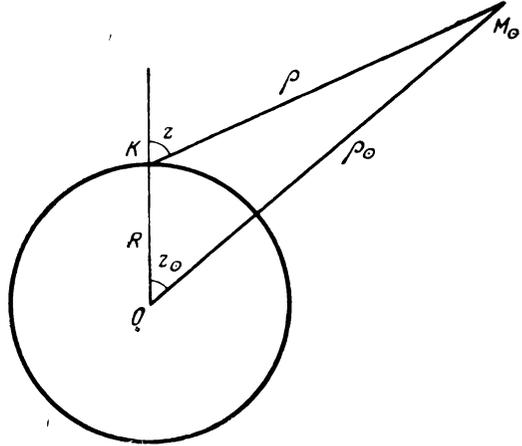


Рис. 18

Возмущающие эффекты в гравитационном поле Земли возникают из-за неравенства компонент возмущающей силы приходящихся на соответственные направления компонент равнодействующей притяжения отдельных частей твердой Земли массой M_{\odot} . Равнодействующая приложена к центру инерции Земли. Поэтому возмущающие вертикальную и горизонтальную силы можно определить так (рис. 18):

$$\left. \begin{aligned} \delta g_{\odot} &= fM_{\odot} \left(\frac{\cos z_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} - \frac{\cos z}{\rho^2} \right) \\ \gamma \theta_{\odot} &= fM_{\odot} \left(\frac{\sin z}{\rho^2} - \frac{\sin z_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (111.17.1)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \rho_{\odot} \sin z_{\odot} &= \rho \sin z, \\ \rho_{\odot} \cos z_{\odot} &= \rho \cos z + R, \\ \rho^2 &= \rho_{\odot}^2 + R^2 - 2\rho_{\odot} R \cos z_{\odot}, \end{aligned}$$

сохранив члены порядка $\frac{R}{\rho_{\odot}}$, находим

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_{\odot}} &= 1 - \frac{\rho}{\rho_{\odot}} \cos z_{\odot}, \\ \sin z &= \sin z_{\odot} + \frac{R}{\rho_{\odot}} \sin z_{\odot} \cos z_{\odot}, \\ \cos z &= \cos z_{\odot} - \frac{R}{\rho_{\odot}} \sin^2 z_{\odot} \end{aligned}$$

и

$$\delta g_{\odot} = \frac{\gamma M_{\odot} R^3}{\rho_{\odot}^3 E} (1 - 3 \cos^2 z_{\odot}),$$

$$\theta_{\odot} = \frac{3}{2} \frac{M_{\odot} R^3}{\rho_{\odot}^3 E} \sin 2z_{\odot}.$$

Мы исключили гравитационную постоянную, имея в виду выражение для среднего значения γ нормальной силы тяжести

$$\gamma = \frac{fE}{R^2}.$$

Вертикальная и горизонтальная возмущающие силы от притяжения Луны и Солнца имеют потенциал

$$W_t = \frac{fM_{\odot}}{2} \frac{R^2}{\rho_{\odot}^3} (3 \cos^2 z_{\odot} - 1) + \frac{fM_{\odot}}{2} \frac{R^2}{\rho_{\odot}^3} (3 \cos^2 z_{\odot} - 1). \quad (111.17.2)$$

Для влияния Луны и Солнца на смещение θ отвеса в направлении нивелирования в азимуте A получаем

$$\theta = \frac{3}{2} \frac{R^3}{E} \left[\frac{M_{\odot}}{\rho_{\odot}^3} \sin 2z_{\odot} \cos (A - A_{\odot}) + \frac{M_{\odot}}{\rho_{\odot}^3} \sin 2z_{\odot} \cos (A - A_{\odot}) \right]. \quad (111.17.3)$$

Подставив численные величины, Мелькиор (1966) вычислил

$$206 \, 265'' \cdot \theta = 0'',0078 \sin 2z_{\odot} \cos (A - A_{\odot}) + 0'',0173 \sin 2z_{\odot} \cos (A - A_{\odot}), \quad (111.17.4)$$

пренебрегая изменением расстояний ρ_{\odot} и ρ_{\odot} , и для смещения ζ_t уровневой поверхности в сантиметрах он получил

$$\zeta_t = \frac{W_t}{g} = 26,7 \left(\cos 2z_{\odot} + \frac{1}{3} \right) + 12,3 \left(\cos 2z_{\odot} + \frac{1}{3} \right).$$

Изложенный метод вывода возмущающих эффектов принадлежит Петерсу (1845). Петерс вывел формулу для влияния Луны и Солнца на уклонение отвеса.

Шумахер (1830) в письме Гауссу указал, что инструменты регистрируют разность приливных влияний на точку наблюдений и центр инерции Земли.

Поправка в нивелирное превышение составит

$$\delta h = +0,038 \cdot 10^{-6} s \sin 2z_{\odot} \cos (A - A_{\odot}) + 0,084 \cdot 10^{-6} s \sin 2z_{\odot} \cos (A - A_{\odot}), \quad (111.17.5)$$

где s — расстояние между исследуемыми точками. Эта поправка удаляет влияние Луны и Солнца из гравитационного поля Земли, как бы перемещая их на неограниченно большое расстояние от Земли.

Формула (111.17.5) к реальной Земле непосредственно неприменима, так как реальная Земля из-за притяжений Луны и Солнца испытывает приливные деформации. Если бы Земля была идеально эластичной, нивелировщики не заметили бы ее приливных деформаций и приливного колебания отвеса, так как в таком случае угол между отвесом и грунтом оставался бы неизменным. Суммарный эффект от приливного колебания отвеса и деформации земной коры приближенно оценивают, умножая результат (111.17.5) на 0,7 или 0,8. Этот коэффициент выведен из сопоставления результатов наблюдения с теоретическими расчетами. В некоторых районах этот коэффициент заметно отличается от указанных, изменяясь от 0,4 до 1,0 (Мелькиор, 1966). Кроме того, действительные приливные колебания отвеса, как правило, смещены относительно теоретических по фазе. Морские и океанские приливы, особенно вблизи берегов, еще более осложняют учет приливных поправок нивелировки. Отвесы смещаются из-за гравитационного притяжения смещенных водных масс, возникают дополнительные деформации земной коры под влиянием периодически возникающей нагрузки таких водных масс и изменений атмосферного давления; эти деформации коры вызывают вариации потенциала силы тяжести и соответственные колебания отвесов. Как справедливо заметил Дарвин (1882) еще в прошлом веке, все эти влияния едва ли когда-нибудь удастся разделить и вычислить или измерить каждое. Если максимальная полная амплитуда приливного колебания отвеса вдали от берегов близка к $0'',04$, то на береговых станциях полная амплитуда иногда составляет $0'',1$ и фазы колебаний значительно отличаются от расчетных (Мелькиор, 1966). Пример колебаний отвеса с амплитудой $0'',07$, со смещением фазы в 141° на берегу Англии описал Леннон (1961).

Приливная поправка в отдельное нивелирное превышение пренебрегаема, ее мак-

симильная величина при $s=1$ км равна 0,12 мм (максимальное приливное изменение силы тяжести близко к 0,2 *мгал*).

На длинных нивелирных линиях приливные поправки могут складываться (особенно влияние Солнца) и их сумма может стать заметной, не превышая, однако, по оценке Гельмерта (1884), для удаленных друг от друга пунктов Средней Европы 2 см. Эту оценку подтвердил Симонсен (1965), оценив возможную приливную поправку гипотетической нивелирной линии Фредерисия — Женева в ~ 2 см. Для иллюстрации наибольшего влияния приливного эффекта Гельмерт рассмотрел 1000-километровую линию, нивелирование на которой в направлении с востока на запад выполнено в летние месяцы по отдельным участкам, а именно: в утренние часы (до полудня) в направлении на запад, после полудня — в обратном направлении. Тогда сумма допущенных превышений может отличаться от суммы послеполуденных из-за притяжения Солнца на величину до 8,7 см.

В одновременных прямом и обратном ходах приливные влияния не исключаются.

Руне (1950) обращает внимание на возможность накопления приливных влияний Луны, а именно: если нивелировать утром и вечером в одном и том же направлении и азимут и зенитное расстояние Луны утром равны 0° и 45° , то вечером эти величины составят 180° и $90^\circ + 45^\circ$. Таким образом, утренние влияния Луны сложатся с вечерними и могут составить 0,075 мм на 1 км хода. Если нивелировать по 5 км ежедневно, то за 5 дней влияние Луны достигнет 1,8 мм и может быть больше соответственного накопления случайных ошибок. При работе днем в пасмурную погоду, как отмечает Руне, возможно накопление совместных влияний Луны и Солнца.

Вычисления по формуле (111.175) очень трудоемки. Без электронных вычислительных машин едва ли теперь есть смысл ими заниматься, хотя ранее для облегчения работы Куккамьяки (1949), Енсен (1950), Мэлоун (1952), Ньюгод (1954), Штайнберг (1966), Выжыковски (1968) разработали номограммы для вывода компонентов приливных колебаний отвеса относительно грунта в плоскостях меридиана и первого вертикала по часовому углу и склонению Луны и Солнца и широте места.

Енсен (1950) предлагает упрощенную формулу для приливной поправки сразу в сумму превышений на более или менее длинном участке нивелирной линии (аргументами служат широта места, время начала и конца работы и склонение небесного тела также в начале и конце работы).

Куккамьяки вычислил приливные поправки в прямой и обратный ходы меридиональной нивелирной линии длиной 68 км и линии вдоль параллели длиной 79 км. Средняя величина поправки на 1 км линии составила 0,033 мм, средняя величина поправки на 1 км арифметического среднего из прямого и обратного ходов оказалась равной 0,028 мм.

Штайнберг также вычислил приливные поправки в прямой и обратный ходы двух нивелирных линий. Первая имеет длину ~ 200 км и проложена в меридиональном направлении, вторая образует полигон длиной около 300 км. На участках меридионального направления приливные поправки оказались заметно больше, чем на остальных, однако на полигоне сумма их достигла только 0,34 мм, средняя величина поправки на 1 км линии составила 0,034 мм, причем на влияние Луны пришлось 0,023 мм, и среднее значение поправки на 1 км линии в арифметическое среднее из прямого и обратного ходов оказалось равным 0,029 мм, т. е. результаты Куккамьяки подтверждены. Штайнберг сделал вывод, что меридиональные участки нивелирной сети ГДР содержат систематические ошибки 0,030—0,035 мм на 1 км и, поскольку протяженность страны по меридиану близка к 500 км, высоты южных реперов искажены относительно северных на 15—17 мм.

Симонсен (1950) сообщает о приливных поправках в датскую нивелировку длиной около 125 км: влияние Луны оценено в 2,6 мм, влияние Солнца — в 0,08 мм.

Выжыковски (1967—1968) вычислил приливные поправки в линии польского геометрического нивелирования у Млавы и Замоща на предполагаемых экспериментальных полигонах по исследованиям движений земной коры. Длина линий 150 и 130 км. Приливная поправка достигла 0,044 мм на 1 км и для линий длиной 97 км составила 2,88 мм, т. е. 58% случайной ошибки, вычисленной по формуле $\pm 0,5\sqrt{L}$ мм. В среднем для меридиональных секций приливные поправки составляют 0,03—0,04 мм на 1 км. Учет приливных поправок не изменил случайную среднюю квадратическую ошибку ($\pm 0,50$ мм на 1 км), а среднюю систематическую ошибку уменьшил с $\pm 0,059$ до $\pm 0,054$ мм на 1 км.

Как Штайнберг, Выжыковски (1967) указывает на возможное искажение высот южных реперов Польши относительно северных: учет приливных поправок должен привести к увеличению отметок южных реперов на $\sim 17,5$ мм.

Примеры вычислений, упрощенные формулы и номограммы Штайнберга приводят Колмогоровы (1968).

Много разных подробностей о выводе приливных поправок нивелировки можно найти у Симонсена (1965, 1966).

Реальные условия нивелирования осложнены также изменениями угла между отвесом и грунтом из-за тепловых влияний, и, как отмечено, изменениями деформаций коры вследствие изменений нагрузок, например из-за изменений атмосферного давления, разливов рек и других явлений.

Поэтому дальнейшее совершенствование теории и практики геометрического нивелирования требует использования наклонномерных наблюдений, представительность которых должна быть установлена эмпирически, а влияния сил инерции на наклонномерные результаты по возможности исключены. Во время нивелирования Мелькиор советует наблюдать наклонмеры, например горизонтальные маятники, ориентируя их перпендикулярно направлению хода. Чувствительность таких инструментов близка к 0",0003, однако инструментальный трудноопределимый дрейф до 0",003 в день затрудняет их геодезическое использование. Кроме того, эти инструменты требуют длительной стабилизации, необходимо изучение представительности наклонномерных наблюдений. Точность 0,02—0",03 в определении изменений угла между отвесом и грунтом уже была бы полезной для геометрического нивелирования. Поэтому даже стационарные нивелиры могут быть полезными. Наклонномерные данные нужно интерполировать между наклонномерными станциями и с их помощью, не «удаляя» Луну и Солнце в бесконечность, привести измерения к одному моменту времени, к одной отсчетной системе. Уже теперь такие поправки были бы полезны при наблюдениях за движением земной коры на специальных полигонах и при специальных работах, например при нивелировании для современных физических устройств (Мелькиор сообщает о требованиях к точности нивелирования в таком случае до ±0,05 мм на расстоянии 200 м).

Таблица 21

L	θ	L	θ
50 км	0",004	500 м	0",050
20	0",011	100	0",068
10	0",017	50	0",075
5	0",025	10	0",093
2	0",034	1	0",120
1	0",042	0,1	0",145

Приливные поправки гравиметрических измерений теперь соответствуют удалению влияния Луны и Солнца. Однако и эти геодезические измерения в принципе возможно приводить к одному моменту времени.

Наиболее прост учет притяжения водных масс при изменении уровней воды. Техника расчета на основе закона Ньютона описана, например, Герке (1954), Мелькиором (1966), Кабелачем (1967). Возмущение θ_x отвеса в некотором горизонтальном направлении x можно представить интегралом

$$\theta_x = f \int_M \frac{1}{r^2} \cos(x, r) dm;$$

здесь r — расстояние между исследуемой точкой и элементом dm возмущающей массы; (x, r) — угол между направлением x и отрезком r . Интегрирование распространено на всю возмущающую массу. Этот интеграл всегда можно определить численно.

Результаты подобных расчетов описал Шульц (1940, 1963). Указывая как на пример на р. Парану, уровень воды в которой изменяется на величину до 7 м, Шульц советует учитывать изменение уровней воды в подобных случаях при точном нивелировании.

на расстояниях при ширине реки

1 км	500 м
2	1000
10	2000
30	3000
40	4000
50	5000,

если уровень воды изменяется на 5 м.

Подъем воды в обширных болотистых областях Северной Аргентины на 1 м может, по расчету Шульца, сместить уровенную поверхность в центре области почти на 5 мм. Даже обильные снегопады в высоких горах могут повлиять на результаты точной нивелировки у их подножия.

Подобные расчеты Герке (1954) касаются приливов и отливов моря. Если нивелирование направлено к берегу моря, то при приливе воды визирная линия отклонится от положения $A'B'$ при среднем уровне моря и займет положение $A''B''$. Превышение точки A над точкой B будет тогда преуменьшено на $\delta h = 2l\theta$ (рис. 19). При высоте прилива 4 м, ширине и длине приливной полосы воды 50 км Герке вычислил (табл. 21) возмущения θ отвеса (L — расстояние нивелира от приливной полосы воды).

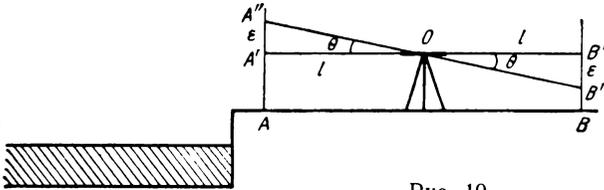


Рис. 19

IV. ПРИНЦИПЫ ВЫВОДА ВЫСОТЫ КВАЗИГЕОИДА И ПОЛНОЙ ВЫСОТЫ НАД ЭЛЛИПСОИДОМ

§ 18. Высоты квазигеоида над гравиметрическим эллипсоидом

Определение дополнений нормальной высоты до полной высоты над отсчетным эллипсоидом составляет одну из главных практических задач геодезической гравиметрии. Расскажем сначала о выводе таких дополнений относительно отсчетного гравиметрического, т. е. нормального, эллипсоида. Согласно (III.8.19) эта задача сведена к выводу возмущающего потенциала T и значения W_0 потенциала силы тяжести Земли в исходном пункте нивелирования.

Молоденский (1948) предложил определять возмущающий потенциал T как потенциал простого слоя, распределенного на земной поверхности S

$$T = \int \frac{\varphi}{r} dS, \quad (\text{IV.18.1})$$

где φ — плотность такого слоя на элементе dS ; r — расстояние между фиксированной точкой, в которой нужно вычислить T , и элементом dS . Возмущающий потенциал можно представить в виде (IV.18.1) только при условии, что оси вращения нормальной и реальной Земли совпадают и их скорости вращения одинаковы. Тогда потенциал центробежной силы будет из возмущающего потенциала исключен. Возмущающий потенциал станет гармонической функцией и для его определения можно использовать решение задачи математической физики, называемой задачей с косо́й производной.

Чтобы установить связь между плотностью φ и аномалиями $g - \gamma$ силы тяжести, продифференцируем возмущающий потенциал по нормали H . Имея в виду разрыв непрерывности производной от потенциала простого слоя, для внешнего предельного положения фиксируемой точки на слое находим

$$\frac{\partial T}{\partial H} = - \int \frac{\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial H} dS - 2\pi\varphi \cos \alpha, \quad (\text{IV.18.2})$$

где α — угол между нормалью H и внешней нормалью к земной поверхности. Сравнив эту формулу с (III.8.22), можно вывести интегральное уравнение относительно плотности φ простого слоя:

$$- \int \frac{\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial H} dS - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \left[\int \frac{\varphi}{r} dS - W_0 + U_0 \right] - 2\pi\varphi \cos \alpha = - (g - \gamma). \quad (\text{IV.18.3})$$

Подинтегральное выражение первого интеграла справа при $r \rightarrow 0$ неограниченно возрастает. Этот сингулярный интеграл определяют как предел

$$\int \frac{\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial H} dS = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{S-\sigma} \frac{\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial H} dS, \quad (\text{IV.18.4})$$

где σ — та часть земной поверхности, которую выделяет сфера с центром в фиксированной точке.

Молоденский (1945) предложил еще один путь определения возмущающего потенциала T , который более ясно приводит к совместному определению элементов аномальной части гравитационного поля Земли и величины W_0 . Этот путь основан на использовании формулы Грина

$$\int_D (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1) d\tau = \int_S \left(U_1 \frac{dU_2}{dn} - U_2 \frac{dU_1}{dn} \right) dS, \quad (\text{IV.18.5})$$

связывающей значения правильных в некотором объеме D и на его границе S функций U_1 и U_2 . Здесь n обозначает направление внешней нормали к поверхности S ; $d\tau$ — элемент объема D ; Δ — оператор Лапласа, т. е. в декартовых координатах, например, для U_1

$$\Delta U_1 = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}. \quad (\text{IV.18.6})$$

Пусть $U_1 = W$, $U_2 = \frac{1}{r}$. Здесь r — расстояние от некоторой точки вне S до некоторой точки объема D . Внутри поверхности S

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_1 &= \Delta W = -4\pi\mu_1 + 2\omega^2 \\ \Delta U_2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{IV.18.7})$$

где μ_1 — плотность в элементе $d\tau$. Функция μ_1 может быть кусочно — непрерывно дифференцируемой в объеме D (см.; например, Курант, 1964, стр. 247).

Подставив (IV.18.7) в (IV.18.5), найдем

$$4\pi \int_D \frac{\mu_1}{r} d\tau - 2\omega^2 \int_D \frac{1}{r} d\tau = \int_S W \frac{d}{dn} \frac{1}{r} dS - \int_S \frac{1}{r} \frac{dW}{dn} dS \quad (\text{IV.18.8})$$

или, обозначив потенциал притяжения Земли через

$$V_1 = \int_D \frac{\mu_1}{r} d\tau, \quad (\text{IV.18.9})$$

получаем

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} \int_S W \frac{d}{dn} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{dW}{dn} dS + \frac{\omega^2}{2\pi} \int_D \frac{1}{r} d\tau. \quad (\text{IV.18.10})$$

Положив теперь в (IV.18.5)

$$\begin{aligned} U_1 &= U, \\ U_2 &= \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

и имея в виду

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_1 &= \Delta U = -4\pi\mu + 2\omega^2 \\ \Delta U_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.18.11})$$

и уже введенное условие, что поверхность S включает в себя всю массу нормальной Земли (см. § 8), находим

$$4\pi \int_D \frac{\mu}{r} d\tau - 2\omega^2 \int_D \frac{d\tau}{r} = \int_S U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} dS - \int_S \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} dS \quad (\text{IV.18.12})$$

или, обозначив потенциал притяжения нормальной Земли через

$$V = \int_D \frac{\mu}{r} d\tau, \quad (\text{IV.18.13})$$

получаем

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_S U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} dS + \frac{\omega^2}{2\pi} \int_D \frac{1}{r} d\tau. \quad (\text{IV.18.14})$$

Вводя возмущающий потенциал

$$T = W - U = V_1 - V, \quad (\text{IV.18.15})$$

что снова справедливо при условии совпадения осей и скоростей вращения реальной и нормальной Земли, образовав разность выражений (IV.18.10) и (IV.18.14), находим интегро-дифференциальное уравнение для T .

$$T = \frac{1}{4\pi} \int_S T \frac{d}{dn} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{dT}{dn} dS. \quad (\text{IV.18.16})$$

Как указано Молоденским, эту формулу можно записать также в виде

$$T = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{dT}{dn} - (T - \bar{T}) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right] dS, \quad (IV.18.17)$$

где чертой отмечено значение возмущающего потенциала в точке пересечения поверхности S радиусом-вектором исследуемой точки. Уравнение (IV.18.17) позволяет определять возмущающий потенциал вне Земли и его внешние предельные значения на земной поверхности.

Производные $\frac{dT}{dn}$ и $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ можно выразить при помощи формулы Молоденского

$$\frac{dT}{dn} = \left[\frac{\partial F}{\partial H} \sec^2 \alpha - \bar{D}(F, H) \right] \cos \alpha, \quad (IV.18.18)$$

где в нашем случае

$$\begin{aligned} \bar{D}(F, H) = & \frac{1}{(M+H)^2} \left(\frac{\partial F}{\partial B} + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial B} \right) \frac{\partial H}{\partial B} + \\ & + \frac{1}{(N+H)^2 \cos^2 B} \left(\frac{\partial F}{\partial L} + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial L} \right) \frac{\partial H}{\partial L}. \end{aligned} \quad (IV.18.19)$$

Воспользовавшись интегральной зависимостью (Молоденский, 1945)

$$\begin{aligned} & \int_S \left\{ \frac{1}{r} \bar{D}(T, H) - (T - \bar{T}) \bar{D}\left(\frac{1}{r}, H\right) \right\} \cos \alpha dS = \\ & = - \int_S \left\{ \frac{T - \bar{T}}{r} \Delta_2 H + 2(T - \bar{T}) \bar{D}\left(\frac{1}{r}, H\right) \right\} \cos \alpha dS, \end{aligned} \quad (IV.18.20)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2 H = & \frac{1}{(M+H)(N+H) \cos B} \left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{(N+H) \cos B}{M+H} \frac{\partial H}{\partial B} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{(N+H) \cos B}{M+H} \frac{\partial H}{\partial B} \right) \frac{\partial H}{\partial B} + \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{M+H}{(N+H) \cos B} \frac{\partial H}{\partial L} \right) + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{M+H}{(N+H) \cos B} \frac{\partial H}{\partial L} \right) \frac{\partial H}{\partial L} \right], \end{aligned} \quad (IV.18.21)$$

можно вывести формулу Молоденского, выражающую возмущающий потенциал T во внешней точке или внешнее предельное значение T на поверхности S через значения T и $\frac{\partial T}{\partial H}$ на S :

$$\begin{aligned} T = & -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial H} - (T - \bar{T}) \frac{\partial}{\partial H} \frac{1}{r} \right) \sec^2 \alpha + \right. \\ & \left. + (T - \bar{T}) \left(\frac{1}{r} \Delta_2 H + 2\bar{D}\left(\frac{1}{r}, H\right) \right) \right] \cos \alpha dS. \end{aligned} \quad (IV.18.22)$$

Снова используя соотношение (IV.18.18), множитель при \bar{T} Молоденский преобразовал так:

$$\begin{aligned} & \int_S \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial H} \sec^2 \alpha - 2\bar{D}\left(\frac{1}{r}, H\right) - \frac{1}{r} \Delta_2 H \right] \cos \alpha dS = \\ & = \int_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{dn} dS - \int_S \left[\bar{D}\left(\frac{1}{r}, H\right) + \frac{1}{r} \Delta_2 H \right] \cos \alpha dS. \end{aligned} \quad (IV.18.23)$$

Из формулы (IV.18.22) Молоденский (1945) вывел интегральное уравнение для возмущающего потенциала на земной поверхности. Для такого перехода нужно заметить, что первый интеграл справа в (IV.18.23) есть интеграл Гаусса для поверхности

S , его внешнее предельное значение на S равно нулю. Второй интеграл справа в (IV.18.23) равен нулю на основании интегральной зависимости, установленной Молоденским

$$\int_S \bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) \cos \alpha dS = - \int_S \frac{1}{r} \Delta_2 H \cos \alpha dS. \quad (IV.18.24)$$

Члены справа в (IV.18.22), содержащие T , также на основании (IV.18.18) запишем так:

$$\begin{aligned} \int_S T \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial H} \sec^2 \alpha - \frac{1}{r} \Delta_2 H - 2\bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) \right] \cos \alpha dS = \\ = \int_S T \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS - \int_S T \left[\bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) + \frac{1}{r} \Delta_2 H \right] \cos \alpha dS. \end{aligned} \quad (IV.18.25)$$

Первый интеграл правой части здесь определяет потенциал двойного слоя с плотностью T . Внешнее предельное значение такого потенциала на поверхности S можно выразить через прямое

$$\left[\int_S T \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS \right]_e = \left[\int_S T \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS \right]_0 + 2\pi T. \quad (IV.18.26)$$

Согласно значению символа \bar{D}

$$T \bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) + \frac{1}{r} \bar{D}(T, H) = \bar{D} \left(\frac{T}{r}, H \right).$$

Поэтому, пользуясь опять (IV.18.24), интеграл в (IV.18.25), содержащий $T \bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right)$, можно представить как сумму потенциалов простых слоев с плотностями $T \Delta_2 H \cos \alpha$ и $\bar{D}(T, H) \cos \alpha$. Интеграл в (IV.18.25), содержащий $\Delta_2 H$, и интеграл в (IV.18.22), содержащий $\frac{\partial T}{\partial H}$, непосредственно выражают потенциалы простых слоев с плотностями $-T \Delta_2 H \cos \alpha$ и $-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial T}{\partial H} \sec \alpha$.

Внешние предельные и прямые значения интегралов, которые можно интегрировать как потенциалы простых слоев, совпадают. Перенеся влево член $\frac{1}{2} T$, возникающий как следствие (IV.18.26) в правой части (IV.18.22), и умножая на два, находим упомянутое интегральное уравнение для возмущающего потенциала на земной поверхности:

$$\begin{aligned} T = - \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial H} \sec \alpha - T \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial H} \sec \alpha - \frac{1}{r} \Delta_2 H \cos \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) \cos \alpha \right) \right] dS. \end{aligned} \quad (IV.18.27)$$

Производную $\frac{\partial T}{\partial H}$ мы выразили ранее через аномалию силы тяжести и T [формула (III.8.22)]. Согласно выводу формул (IV.18.3) и (IV.18.27), значение γ здесь должно быть вычислено относительно нормального эллипсоида. Поскольку связь такого эллипсоида с Землей следует считать неизвестной и неизвестны широты относительно этого эллипсоида (по крайней мере, на первом этапе выводов), при вычислении γ нужно использовать широты относительно геодезического эллипсоида, более или менее произвольно ориентированного относительно Земли. Формула (III.8.22) отражает это обстоятельство через ее последний член и вводит при подстановке в (IV.18.3), (IV.18.22) и (IV.18.27) неизвестные элементы ориентировки геодезической системы координат. Из-за малости упомянутого члена с ΔB этот член пока, как правило, не имеет практического значения.

Уравнения (IV.18.3) и (IV.18.27) возможно решить численно путем последовательных приближений. Такое решение будет единственным при условии совмещения центра масс Земли с центром нормального эллипсоида.

Задача численного решения уравнений (IV.18.3), (IV.18.27) и возникающих при других путях определения возмущающего потенциала на земной поверхности (например, Бровар, 1964; Остач, 1968; Бровар и Остач, 1968) уже отражена в обширной как отечественной, так и зарубежной литературе. По мнению авторов, весьма полезно при таких вычислениях промежуточное использование несингулярных интегралов.

Вычислив с той или иной точностью плотность φ , по (IV.18.1) можно найти возмущающий потенциал, по (III.8.19) — высоту квазигеоида и, продифференцировав (IV.18.1), можно вывести составляющие отклонения отвеса от нормали к гравиметрическому эллипсоиду

$$\left. \begin{aligned} \xi_g &\approx -\frac{\partial W}{g(M+H)\partial B} \approx -\frac{\partial T}{g(M+H)\partial B} - \frac{\partial U}{\partial(M+H)\partial B} \approx \\ &\approx \frac{1}{(M+H)g} \int \frac{\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial B} dS + 0'', 17H \sin 2B \\ \eta_g &\approx -\frac{\partial T}{g(N+H)\cos B\partial L} \approx \frac{1}{(N+H)g\cos B} \int \frac{\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial L} dS \end{aligned} \right\} \quad (IV.18.28)$$

[см. (III.9.83)]. Эти обычно употребляемые формулы имеют весьма высокую точность (порядка квадрата отклонения отвеса). Более обстоятельный и точный вывод дан Велкоборским (1969).

В последних частях равенств (IV.18.28) мы приняли, что исследуемая точка, для которой нужно вывести отклонение отвеса, лежит не на земной поверхности, а на некоторой высоте над ней. Такую высоту всегда можно выбрать настолько малой, что значения отклонения отвеса на этой высоте и на земной поверхности будут практически равны. Однако пока эта высота не равна нулю, соответственный интеграл остается обыкновенным.

Если на земной поверхности определены значения возмущающего потенциала T , отклонение отвеса можно вывести во внешней точке непосредственно, продифференцировав формулу (IV.18.22) по координатам этой точки.

Формулы для отклонения отвеса в точке, принадлежащей земной поверхности, вывел Стойнов (1966).

Наибольшее развитие и практическое применение находят те методы выводов возмущающего потенциала, высот квазигеоида и отклонений отвеса, которые основаны на условии $H_Q = 0$, вводимом после определения аномалий $g-\gamma$ силы тяжести на земной поверхности. Такое упрощение может привести к значительной погрешности гравиметрического отклонения отвеса в горном районе (вполне возможны ошибки в $10''$ и более). В равнинных же районах точность такого пути удовлетворяет, как правило, практические потребности. Тогда при дополнительной относительной погрешности порядка земного сжатия возмущающий потенциал определен формулой Стокса (1849), обобщенной Броваром (1958),

$$T = \frac{R}{4\pi} \int (g - \gamma) [S(\psi) - 1] d\omega + 2(W_0 - U_0), \quad (IV.18.29)$$

где функция Стокса

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad (IV.18.30)$$

R — средний радиус Земли; $d\omega$ — элемент поверхности сферы с единичным радиусом; ψ — угловое расстояние между фиксированной и текущей точками.

Гравиметрические отклонения отвеса можно вывести дифференцированием (IV.18.29) и (IV.18.30) по координатам исследуемой точки как по параметру. Такую возможность впервые заметил Венинг-Мейнес (1928).

Для вывода величины W_0 несобходимы астрономо-геодезические материалы.

До появления работ Молоденского формула (IV.18.29) интерпретировали как определяющую возмущающий потенциал на регуляризованном геоиде, хотя неизбежные погрешности необходимых приведений силы тяжести были давно ясны (Пицетти, 1906—1925, стр. 223), а именно: из значений силы тяжести следовало удалить притяжение всех внешних топографических масс со всеми их аномалиями плотностей, редуцировать в остаточном гравитационном поле значения силы тяжести на неизвестную поверхность регуляризованного геоида и, вычислив значения возмущающего потенциала на регуляризованном геоиде, его высот, отклонений отвеса на нем на основе формулы (IV.18.29), восстановить влияние удаленных топографических масс на определяемые величины для вывода высот ζ_G геоида и соответственных отклонений отвеса внутри притягивающих масс. Строго последовательно такие вычисления, насколько известно авторам, никогда не были выполнены. Без гипотез о внутреннем

строении Земли их выполнить нельзя. Несоответствия плотности, принятой при вычислениях, и фактической плотности земной коры особенно сильно могут исказить уклонения отвеса.

Филиппов (1965) развил теорию Мигалья (1949) определения внешней уровневой поверхности без введения нормального гравитационного поля для случая определения реальной земной поверхности. Как показал Филиппов, при таком подходе к изучению фигуры Земли вместо нормальных высот можно использовать любые значения H_ϕ , удовлетворяющие условию, чтобы разности $H - H_\phi$ имели порядок $R \alpha^2$, где α — земное сжатие. Применение теории Мигалья к изучению фигуры Земли не ведет к упрощению этой задачи и не имеет практических преимуществ.

§ 19. Высоты квазигеоида над отсчетным геодезическим эллипсоидом

Ранее мы вывели

$$dH = dh_w - (\xi \cos A + \eta \sin A) [(M + H) \cos AdB + (N + H) \cos B \sin AdL], \quad (111.7.2)$$

$$dH_Q = dh_w + \frac{g - \gamma}{\gamma} dh_w - \frac{H_Q}{\gamma} \frac{\partial \gamma_0}{\partial B} dB, \quad (111.10.16)$$

а поскольку $H = H_Q + \zeta_Q$ и $dH = dH_Q + d\zeta_Q$, из этих формул находим

$$d\zeta_Q = dH - dH_Q = -(\xi \cos A + \eta \sin A) \cdot [(M + H) \cos AdB + (N + H) \cos B \sin AdL] - \frac{g - \gamma}{\gamma} dh_w + \frac{H_Q}{\gamma} \frac{\partial \gamma_0}{\partial B} dB. \quad (1V.19.1)$$

Мы получили формулу Молоденского (1949—1950), отметившего, что dH_Q и $d\zeta_Q$, каждое в отдельности, зависят от силы тяжести, сумма же $dH_Q + d\zeta_Q = dH$ от нее не зависит: фигура земной поверхности определена только геометрическими элементами, тогда как фигура квазигеоида связана с гравитационным полем.

По аналогии с (111.7.3) и (111.7.2) формулу (1V.19.1) можно считать формулой астрономического нивелирования квазигеоида. Нормальные высоты связывают и строго согласовывают формулы (111.7.2) и (1V.19.1). Поэтому выбор между ними принципиально безразличен, его определяют лишь практические соображения.

Формуле (1V.19.1) соответствует

$$\zeta_Q(K) - \zeta_Q(I) = - \int_{(IK)} (\xi \cos A + \eta \sin A) \cdot [(M + H) \cos AdB + (N + H) \cos B \sin AdL] - \int_{(IK)} \frac{g - \gamma}{\gamma} dh_w + \int_{(IK)} \frac{H_Q}{\gamma} \frac{\partial \gamma_0}{\partial B} dB. \quad (1V.19.2)$$

Как и в (111.7.4), все интегралы в этой формуле должны быть вычислены по одной и той же ходовой линии.

Последний интеграл в формуле (1V.19.2) вывести весьма просто. Если вдоль ходовой линии выполнена гравиметрическая съемка, так же просто определить предпоследний интеграл; практически его вычисление почти одинаково с вычислением последнего члена в (111.10.19). Вывод же первого члена формулы (1V.19.2) представляет затруднения, так как астрономо-геодезические уклонения отвеса известны только в астрономических пунктах триангуляции, т. е. через 70—100 км. Формальная (линейная) интерполяция таких уклонений отвеса между астрономическими пунктами дает результат низкой точности. Эту точность можно повысить, используя гравиметрическую съемку некоторой области σ , содержащей в себе пару астрономических пунктов. Астрономо-геодезическое уклонение отвеса в азимуте направления с точки K на точку I можно тогда представить в виде суммы

$$\vartheta = \vartheta_g(\sigma) + \vartheta_g(\Sigma) - \frac{d\Delta}{dl}, \quad (1V.19.3)$$

где $\vartheta_g(\sigma)$ — та часть гравиметрического уклонения отвеса, которую объясняют аномалии силы тяжести в области σ (или значения плотности ρ в этой области, или значения возмущающего потенциала в ней); $\vartheta_g(\Sigma)$ — дополнение части $\vartheta_g(\sigma)$ до полного гравиметрического уклонения отвеса; Δ — высота гравиметрического отсчетного эллипсоида над геодезическим отсчетным эллипсоидом; dl — согласно (111.7.1) элементарное смещение на поверхности отсчетного геодезического эллипсоида в направлении с точки I на точку K . Если радиус области σ достаточно велик и астрономические пункты расположены в ее центральной части, то остаточная часть $\vartheta_g(\Sigma)$ гравиметрического уклонения отвеса меняется между этими пунктами медленно и плавно, и эту величину можно линейно интерполировать с высокой точностью. Так же

очень медленно и плавно меняется угол между нормальными к геодезическому и гравиметрическому отсчетным эллипсоидам, определяемый производной $\frac{d\Delta}{dl}$. Поскольку величину $\vartheta_g(\sigma)$ можно вычислить в астрономических пунктах, для них каждая часть равенства

$$\vartheta - \vartheta_g(\sigma) = \vartheta_g(\Sigma) - \frac{d\Delta}{dl} = D \quad (\text{IV.19.4})$$

известна. Для некоторой точки J' прямой, соединяющей астрономические пункты I и K , находим

$$D(J') = D(I) + \frac{IJ'}{IK} [D(K) - D(I)]. \quad (\text{IV.19.5})$$

Величины $\vartheta_g(\Sigma)$ и $\frac{d\Delta}{dl}$ должны также меняться настолько медленно, чтобы их сумму D можно было отнести к точке J земной поверхности, расположенной на одной нормали H с точкой J' , т. е. можно было принять $D(J) = D(J')$. Вычислив $\vartheta_g(\sigma, J)$ находим

$$\vartheta(J) = \vartheta_g(\sigma, J) + D(J). \quad (\text{IV.19.6})$$

Определив

$$\Delta\zeta_Q(I - K) = -l [\vartheta(I) + \vartheta(K)] \quad (\text{IV.19.7})$$

как результат приближенного астрономического нивелирования между пунктами I и K , величину

$$-\int_{(IK)} \vartheta(J) dl - \int_{(IK)} \frac{g-\gamma}{\gamma} dh_w + \int_{(IK)} \frac{H_Q}{\gamma} \frac{\partial\gamma_0}{\partial B} dB - \Delta\zeta_Q(I - K) = \delta \quad (\text{IV.19.8})$$

можно назвать гравиметрической поправкой такого результата; l обозначает здесь половину проекции расстояния между точками I и K на эллипсоид.

Такой путь вычислений по формуле (IV.19.2) практически еще не был применен. На практике обычно используют метод, вытекающий из условия $H_Q = 0$, вводимого, как было отмечено, после вычисления аномалий $g-\gamma$. Этот метод детально разработан Молоденским (1937, 1939, 1945, 1950, 1960). Соответствующую приближенную высоту квазигеоида также можно определить как относительно геодезического отсчетного эллипсоида, так и относительно нормального (гравиметрического) эллипсоида, относя измерения на Земле аномалии силы тяжести к самой определяемой поверхности или, что соответствует такой точности выводов, непосредственно на отсчетную сферу. Обозначим через N_g такую приближенную высоту квазигеоида над гравиметрическим эллипсоидом. Тогда

$$\zeta_Q(K) - \zeta_Q(I) \approx N_g(\sigma, K) - N_g(\sigma, I) + \int_{(IK)} \left[\frac{dN_g(\Sigma)}{dl} + \frac{d\Delta}{dl} \right] dl, \quad (\text{IV.19.9})$$

где согласно (IV.18.29) и (III.8.19) можно принять

$$N_g(\Sigma) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\Sigma} (g-\gamma) [S(\Psi) - 1] \cos BdB dL + \frac{2(W_0 - U_0)}{\gamma}. \quad (\text{IV.19.10})$$

Координаты границы областей σ и Σ и элемент площади $\cos BdBdL$ не зависят от положения фиксированной точки вне области Σ . Смещая фиксированную точку по направлению l и дифференцируя величину $N_g(\Sigma)$ по соответственной координате фиксированной точки как по параметру, найдем

$$\frac{dN_g(\Sigma)}{dl} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\Sigma} (g-\gamma) \frac{dS(\Psi)}{d\Psi} \cdot \cos A \cos BdBdL, \quad (\text{IV.19.11})$$

отсчитывая азимут A от направления l , или

$$\frac{dN_g(\Sigma)}{dl} = -\vartheta_g(\Sigma). \quad (\text{IV.19.12})$$

Поэтому из (IV.19.4) следует

$$\frac{dN_g(\Sigma)}{dl} + \frac{d\Delta}{dl} = -\vartheta + \vartheta_g(\sigma) = -D.$$

Отсчитывая расстояния l от середины между астрономическими пунктами и обозначая $IK = 2l_0$, находим

$$D(J) = \frac{l_0 + l}{2l_0} D(K) + \frac{l_0 - l}{2l_0} D(I) \quad (\text{IV.19.13})$$

(точки J и J' теперь совпадают) и

$$\zeta(K) - \zeta(I) \approx N_g(\sigma, K) - N_g(\sigma, I) - I_0 [D(I) + D(K)] = -I_0 [\vartheta(I) + \vartheta(K)] + \{N_g(\sigma, K) - N_g(\sigma, I) + I_0 [\vartheta_g(\sigma, I) + \vartheta_g(\sigma, K)]\}. \quad (\text{IV.19.14})$$

Член в фигурных скобках определяет гравиметрическую поправку. Усложнив выкладки, Молоденский (1960) вывел аналогичную формулу для общего случая ($H_Q \neq 0$). Тогда вместо величин $N_g(\sigma)$ нужно ввести влияния $\zeta_Q(\sigma)$ аномалий силы тяжести в области σ на высоты квазигеоида, а величины $\vartheta_g(\sigma)$ должны обозначать влияния таких аномалий на уклонения отвеса в точках земной поверхности.

Для вывода гравиметрической поправки рассчитано несколько палеток и разработаны программы на электронных вычислительных машинах (Пеллинен и др., 1964). Остач (1969) рассмотрел случай, когда область σ состоит из двух кругов, ограниченных окружностями, каждая из которых описана вокруг астрономического пункта.

Астрономо-гравиметрическое нивелирование входит теперь в программу развития астрономо-геодезических сетей. Вычислив разность результатов тригонометрического и астрономического или астрономо-гравиметрического нивелирования

$$[H(K) - H(I)] - [\zeta(K) - \zeta(I)] = H_Q(K) - H_Q(I),$$

как рассмотрели Изотов и Пеллинен (1955), можно перейти к нормальным высотам. Такие выводы могут оказаться рациональными при составлении гипсометрических карт горных районов.

Впервые методика астрономического нивелирования высот геоида, что формально соответствует уже упомянутому условию $H_Q=0$, разработана Виларсо (1871), имевшим в виду редуцирование базисов астрономо-геодезических сетей не к уровню моря, а к отсчетному геодезическому эллипсоиду. Слудский (1867) обнаружил свойство уклонений отвеса, выражаемое формулой

$$\frac{\partial^2 W}{\cos B \, dB \, dL} = \frac{d\xi}{\cos B \, dL} = \frac{d\eta}{dB} \quad (\text{IV.19.15})$$

и используемое в астрономическом и астрономо-гравиметрическом нивелировании. Первые опыты астрономического нивелирования выполнены Гельмертом (1880). Астрономическое нивелирование применено для детального изучения фигуры Земли в Средней Азии (Померанцев, 1897), в Гарце (Гельмерт, 1900—1901, 1913; Галле, 1914), в Швейцарии по Сен-Готардскому профилю (Нитхаммер, 1939; Кобольд, 1955, 1957; Глейнсвик, 1960), продолженному в Западной Германии (Штрауб, 1963). Авторы перечисленных работ стремились к выводу высот геоида и встретились с теми же трудностями, которые возникают при выводе ортометрических высот. Поэтому то в работах Гельмерта, Галле и Нитхаммера и уделено много внимания выводу среднего из значения силы тяжести вдоль силовой линии от земной поверхности до геоида.

При астрономическом нивелировании в горах может оказаться весьма полезной интерполяция уклонений отвеса с помощью тригонометрического нивелирования (Пеллинен, 1956; Глейнсвик, 1960). Пеллинен отметил бесспорность такой методики астрономического нивелирования, когда его линия проходит по горам вдоль государственной границы или вблизи берега моря.

В связи с определением фигуры геоида рассмотрены поправки $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ в астрономические координаты для приведения их на геоид (Пицетти, 1895, 1913). Эти поправки

$$\gamma \Delta\varphi = \frac{dW}{(M+H) \, dB} - \left(\frac{dW}{MdB} \right)_0,$$

$$\gamma \cos B \Delta\lambda = \frac{dW}{(N+H) \cos B \, dL} - \left(\frac{dW}{N \cos B dL} \right)_0,$$

где индекс нуль обозначает производную на геоиде, можно представить в виде

$$\gamma \Delta\varphi \approx \int_0^H \frac{d^2 W}{MdBdH} \, dH = - \int_0^H \frac{dg}{MdB} \, dH = - \left(\frac{dg}{MdB} \right)_{\text{cp}} H,$$

$$\gamma \cos B \Delta\lambda \approx \int_0^H \frac{d^2 W}{N \cos B dL dH} \, dH = - \int_0^H \frac{dg}{N \cos B dL} \, dH = - \left(\frac{dg}{N \cos B dL} \right)_{\text{cp}} H.$$

Таким образом, для определения кривизны силовой линии между земной поверхностью и геоидом следовало бы пробурить земную кору до геоида и, опуская в скважину варнометр, измерять производные от силы тяжести по горизонтальным направлениям. Этот пример хорошо иллюстрирует ненадежность таких поправок в астрономические координаты: производные от силы тяжести сильно подвержены местным влияниям, на них заметно действует даже масса человеческого тела.

§ 20. Вывод потенциала силы тяжести в исходном пункте нивелирования и координат центра инерции Земли в геодезической системе

Если на земной поверхности выполнена гравиметрическая съемка и построены астрономо-геодезические сети, можно вывести потенциал силы тяжести в исходном пункте нивелирования и координаты центра инерции Земли в геодезической системе. Для такого вывода необходимы соотношения между взаимным положением центров геодезического и гравиметрического эллипсоидов и разностями высот квазигеоида, геодезических широт и долгот относительно таких эллипсоидов. Будем считать размеры эллипсоидов одинаковыми. Такое условие всегда легко выполнить. Указанные соотношения впервые выведены Слудским (1894), позднее их неоднократно преобразовывали и уточняли. Например, Молоденский (1954, 1960) учел даже непараллельность малых осей и начальных меридианов таких эллипсоидов. Обозначив высоты квазигеоида, широты и долготы относительно геодезического эллипсоида через ζ_g, B_g, L_g и относительно гравиметрического (нормального) эллипсоида через ζ_n, B_n, L_n , в линейном приближении имеем

$$\zeta_g - \zeta_n = x_0 \cos B \cos L + y_0 \cos B \sin L + z_0 \sin B, \quad (IV.20.1)$$

$$(M + H)(B_n - B_g) = x_0 \sin B \cos L + y_0 \sin B \sin L - z_0 \cos B, \quad (IV.20.2)$$

$$(N + H)(L_n - L_g) \cos B = x_0 \sin L - y_0 \cos L. \quad (IV.20.3)$$

В нашем случае малые оси эллипсоидов и начальные меридианы параллельны. Такое условие можно поставить при ориентировке геодезического эллипсоида.

Подставим в (111.8.22) вместо $\Delta B = B_n - B_g$ значение этой разности из (IV.20.2), имея в виду

$$\frac{d\gamma}{dB} \approx 2\beta\gamma_e \sin B \cos B,$$

где β обозначает числовой коэффициент в формуле типа (111.9.73), значения полиномов Лежандра

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta,$$

$$P_3(\cos \vartheta) = \frac{5}{2} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \cos \vartheta,$$

$$P_1^1(\cos \vartheta) = -\sin \vartheta,$$

$$P_2^1(\cos \vartheta) = -3 \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$P_3^1(\cos \vartheta) = -\frac{3}{2} \sin \vartheta (5 \cos^2 \vartheta - 1),$$

(здесь $\vartheta = 90^\circ - B$), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial H} = & -g + \gamma + \frac{1}{\gamma(B_0, H_Q)} \frac{\partial \gamma}{\partial H} [T(B, L, H) - W_0 + U_0] - \\ & - \frac{2\beta\gamma_e}{R} \left\{ x_0 \cos L \left[\frac{2}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} P_1^1(\cos \vartheta) \right] + y_0 \sin L \left[\frac{2}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{5} P_1^1(\cos \vartheta) \right] - \frac{2}{5} z_0 [P_3(\cos \vartheta) - P_1(\cos \vartheta)] \right\}. \quad (IV.20.4) \end{aligned}$$

Подставив теперь (IV.20.4) в (IV.18.27), найдем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_S T \left[\frac{\partial}{\partial H} \frac{1}{r} \sec \alpha - \frac{\Delta_2 H}{r} \cos \alpha - 2\bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) \cos \alpha \right] dS - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{T}{r} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \sec \alpha dS + \frac{W_0 - U_0}{2\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \sec \alpha dS + \\ & + \frac{\beta\gamma_e}{\pi R} \left\{ x_0 \int_S \frac{1}{r} \cos L \left[\frac{2}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} P_1^1(\cos \vartheta) \right] \sec \alpha dS + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y_0 \int_S \frac{1}{r} \sin L \left[\frac{2}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} P_1^1(\cos \vartheta) \right] \sec \alpha dS - \frac{2}{5} z_0 \int_S \frac{1}{r} [P_3(\cos \vartheta) - \\
& - P_1(\cos \vartheta)] \sec \alpha dS \Big\} - T = \frac{-1}{2\pi} \int_S \frac{1}{r} (g - \gamma) \sec \alpha dS. \quad (IV.20.5)
\end{aligned}$$

Выполнив такую же подстановку в (IV.18.22), имея в виду (III.8.19) и (IV.20.1), выведем уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S (T - \bar{T}) \left[\frac{\partial}{\partial H} \frac{1}{r} \sec \alpha - \frac{\Delta_2 H}{r} \cos \alpha - 2\bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) \cos \alpha \right] dS - \\
& - \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \frac{1}{r} \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \sec \alpha dS + \frac{W_0 - U_0}{\gamma} \left[\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \sec \alpha dS - \right. \\
& - 1 \Big] + x_0 \left\{ \cos \bar{B} \cos \bar{L} + \frac{\beta}{2\pi R} \int_S \frac{1}{r} \cos L \left[\frac{2}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} P_1^1(\cos \vartheta) \right] \sec \alpha dS \right\} + \\
& + y_0 \left\{ \cos \bar{B} \sin \bar{L} + \frac{\beta}{2\pi R} \int_S \frac{1}{r} \sin L \left[\frac{2}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} P_1^1(\cos \vartheta) \right] \sec \alpha dS \right\} + \\
& + z_0 \left\{ \sin \bar{B} - \frac{\beta}{5\pi R} \int_S \frac{1}{r} [P_3(\cos \vartheta) - P_1(\cos \vartheta)] \sec \alpha dS \right\} = \zeta_g - \\
& - \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \frac{1}{r} (g - \gamma) \sec \alpha dS. \quad (IV.20.6)
\end{aligned}$$

Продифференцировав (IV.18.22) по координатам фиксированной точки, подставив снова (IV.20.4) и имея в виду (III.9.82), (IV.20.2) и (IV.20.3), выведем уравнения

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \frac{\partial}{\partial B} \left[(T - \bar{T}) \left(\frac{\partial}{\partial H} \frac{1}{r} \sec^2 \alpha - \frac{\Delta_2 H}{r} - 2\bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) \right) \right] \cos \alpha dS + \\
& + \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial B} \cdot \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \sec \alpha dS - \frac{W_0 - U_0}{4\pi\gamma} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial B} \cdot \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \sec \alpha dS - \\
& - x_0 \left\{ \sin \bar{B} \cos \bar{L} + \frac{\beta}{\pi R} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial B} \cos L \left[\frac{1}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{10} P_1^1(\cos \vartheta) \right] \sec \alpha dS \right\} - \\
& - y_0 \left\{ \sin \bar{B} \sin \bar{L} + \frac{\beta}{\pi R} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial B} \sin L \left[\frac{1}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{10} P_1^1(\cos \vartheta) \right] \sec \alpha dS \right\} + \\
& + z_0 \left\{ \cos \bar{B} + \frac{\beta}{5\pi R} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial B} [P_3(\cos \vartheta) - P_1(\cos \vartheta)] \sec \alpha dS \right\} = (B_g - \varphi) (\bar{M} + \bar{H}) + \\
& + \frac{\bar{H}\beta}{M} \sin 2\bar{B} + \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial B} (g - \gamma) \sec \alpha dS \quad (IV.20.7)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \frac{\partial}{\partial L} \left[(T - \bar{T}) \left(\frac{\partial}{\partial H} \frac{1}{r} \sec^2 \alpha - \frac{\Delta_2 H}{r} - 2\bar{D} \left(\frac{1}{r}, H \right) \right) \right] \cos \alpha dS + \\
& + \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial L} \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial v} \sec \alpha dS - \frac{W_0 - U_0}{4\pi\gamma} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial L} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \sec \alpha dS -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_0 \left\{ \cos \bar{B} \sin \bar{L} + \frac{\beta}{\pi R} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial L} \cos L \left[\frac{1}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{10} P_1^1(\cos \vartheta) \right] \sec \alpha dS \right\} + \\
& + y_0 \left\{ \cos \bar{B} \cos \bar{L} - \frac{\beta}{\pi R} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial L} \sin L \left[\frac{1}{15} P_3^1(\cos \vartheta) + \frac{1}{10} P_1^1(\cos \vartheta) \right] \sec \alpha dS \right\} + \\
& + \frac{z_0 \beta}{5\pi R} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial L} [P_3(\cos \vartheta) - P_1(\cos \vartheta)] \sec \alpha dS = (L_g - \lambda) (\bar{N} + \bar{H}) \cos^2 \bar{B} + \\
& + \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial L} (g - \gamma) \sec \alpha dS. \tag{IV.20.8}
\end{aligned}$$

Чертой здесь отмечены значения в фиксированной точке.

Уравнение (IV.20.5) и уравнения (IV.20.6), (IV.20.7) и (IV.20.8) образуют систему, описывающую определение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли с погрешностью порядка квадрата земного сжатия. При решении должно быть выполнено условие, что в возмущающем потенциале отсутствует гармоника первой степени. Эту систему уравнений можно обобщить на случай нескольких систем геодезических координат. Правые части уравнений содержат известные величины. Высоты ζ_g могут быть определены астрономическим или астрономо-гравиметрическим нивелированием. Уравнения (IV.20.6), (IV.20.7) или (IV.20.8) должны быть составлены для точек, в которых известны высоты квазигеоида над геодезическим эллипсоидом, астрономические широты или долготы. Вся земная поверхность должна быть покрыта гравиметрической съемкой или влияние дальних зон должно быть учтено с помощью данных о земном гравитационном поле, получаемых из наблюдений за искусственными спутниками Земли.

Последние члены правых частей уравнений (IV.20.6), (IV.20.7) и (IV.20.8) можно вычислить весьма точно, если известно (например, по топографической карте) взаимное расположение фиксированных исследуемых точек и близких к ним гравиметрических пунктов. Планоые координаты исследуемых точек и близких к ним гравиметрических пунктов могут содержать одинаковые ошибки.

В выводах мы пользовались формулой (IV.18.22) или интегральным уравнением (IV.18.27), имея в виду, что для определения T следует решить уравнение (IV.18.27), а при вычислении высоты квазигеоида и уклошений отвеса удобнее брать фиксированную точку на некоторой высоте над земной поверхностью (хотя бы на высоте в один или несколько метров), чтобы не затруднять себя вычислением сингулярных интегралов.

При определении параметров W_0 , x_0 , y_0 , z_0 практически, возможно, будет удобнее пользоваться интегральным уравнением (IV.18.3), прибегая к последовательным приближениям. Мы выбрали интегральное уравнение для возмущающего потенциала, поскольку такой путь нагляднее и удобнее при пояснении принципов вывода.

Как уравнение (IV.18.3), так и уравнение (IV.18.27) не линейны относительно возмущающего потенциала (интегрирование должно быть выполнено по земной поверхности, а высоту квазигеоида нужно еще определить), однако в первом приближении нелинейные члены можно отбросить, допустив погрешность не больше 1 : 3000 определяемого элемента аномального поля.

Мигаль (1949) первым предложил уравнения для вывода по гравиметрическим и астрономо-геодезическим материалам неизвестных параметров гравиметрического метода. В его решении нормальное гравитационное поле не использовано.

§ 21. Вывод полных высот над эллипсоидом внутренних и внешних точек Земли

Бурша (1959), обсуждая переход к системе нормальных высот в Чехословакии, останавливается на трудностях вывода нормальных высот внутренних точек Земли.

Высоты внутренних точек над отсчетным эллипсоидом целесообразно определять через высоты соответственных точек земной поверхности, т. е. (рис. 20).

$$H(K_i) = H_Q(K) + \zeta_Q(K) - KK_i = H_Q(K) + \zeta_Q(K) - \frac{W_i - W_s}{g_m(KK_i)}, \tag{IV.21.1}$$

где W_s — значение потенциала силы тяжести на земной поверхности в точке K ; W_i — то же внутри Земли в точке K_i ; $g_m(KK_i)$ — среднее из значений силы тяжести вдоль отрезка KK_i . Здесь $\zeta_Q(K)$ может обозначать как высоту над геодезическим эллипсоидом, так и высоту над гравиметрическим эллипсоидом.

Величина W_i известна, если точка K_i доступна, например находится в туннеле, вдоль которого выполнено нивелирование и измерена сила тяжести. Член $\frac{W_i - W_s}{g_m(KK_i)}$, как

правило, можно определить точнее, чем ортометрические высоты, если сила тяжести известна для обоих концов отрезка KK_i .

Определение высот внешних точек по значениям потенциала силы тяжести и координатам B и L не представляет принципиальных трудностей, так как теория Мол

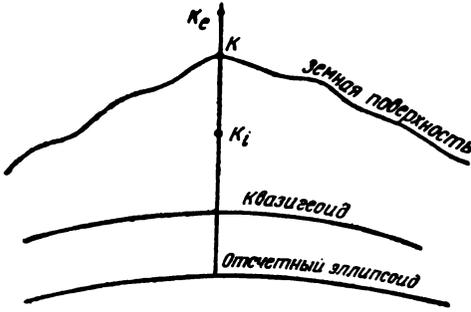


Рис. 20

лоденского позволяет вычислять значения силы тяжести во внешних точках по наземным гравиметрическим измерениям (Бровар, 1963; Стойнов, 1966). Для этого нужно про дифференцировать (IV.18.1) или (IV.18.27) по высоте и вывести значение g с помощью (III.8.22).

Высоту некоторой точки K_e над отсчетным эллипсоидом можно представить простой формулой

$$H(K_e) = H_Q(K) + \zeta_Q(K) + \frac{W_s - W_e}{g_m(KK_e)}, \quad (IV.21.2)$$

где W_e — значение потенциала силы тяжести в точке K_e ; $g_m(KK_e)$ — среднее из значений силы тяжести на отрезке KK_e .

Применяя формулу (IV.21.2) при неизменном W_e и изменяемых плановых координатах B и L , можно построить карту высот соответствующих уровневых поверхностей гравитационного поля Земли над отсчетным геодезическим эллипсоидом. Формулу (IV.21.2) можно использовать также для вывода потенциала W_e по заданной высоте $H(K_e)$. Пик (1970) предлагает считать для внешней точки

$$H_Q(K_e) = \frac{1}{\gamma_m} [W_0 - W(K_e)].$$

V. БАРОМЕТРИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ

Теория барометрического нивелирования развита для атмосферы в статическом равновесии. В этом случае удовлетворены уравнения в каждой точке (x, y, z) газа (или жидкости)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu X \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu Z \end{aligned} \right\} \quad (V.1)$$

где p — давление; μ — плотность вещества; X, Y, Z — проекции на оси декартовых координат x, y, z силы, действующей на единицу массы.

В этом случае величины $\mu X, \mu Y, \mu Z$ суть частные производные по x, y, z от одной и той же функции p . Следовательно,

$$dp = \mu (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (V.2)$$

есть полный дифференциал. Если действующей силой является сила тяжести, то

$$dp = \mu dW. \quad (V.3)$$

При равновесии уровенные поверхности потенциала W силы тяжести совпадают с поверхностями равного давления p , с поверхностями равной плотности μ и с поверхностями равной температуры T . Эти выводы уже есть у Эйлера (1757). Если бы атмосфера Земли находилась в статическом равновесии, на геоиде атмосферное давление и плотность воздуха при $T = \text{const}$ были бы постоянными.

Как следует из (V.3), разность давлений в двух точках I и K жидкости или газа, однородных по плотности ($\mu = \text{const}$), определена разностью потенциалов силы тяжести в этих точках

$$p(I) - p(K) = \mu [W(I) - W(K)] \quad (V.4)$$

или разностью геопотенциальных отметок

$$p(I) - p(K) = \mu [C(K) - C(I)]. \quad (V.5)$$

Если плотность в разных точках различна, но условия равновесия выполнены, то разность потенциалов в точках I и K определена интегралом

$$\int_{(IK)} \frac{dp}{\mu} = W(K) - W(I). \quad (V.6)$$

Как известно, плотность μ влажного воздуха, виртуальная температура T_v влажного воздуха и давление p связаны зависимостью

$$\mu = \frac{\kappa p}{r T_v}, \quad (V.7)$$

где κ — масса одного моля сухого воздуха; r — газовая постоянная.

Из (V.3) и (V.7) следует

$$\frac{dp}{p} = \frac{\kappa}{r T_v} dW = \frac{\kappa dW}{r(1+cq)T} = - \frac{\kappa \gamma_{45^\circ} dH_d}{r(1+cq)T}, \quad (V.8)$$

где T — истинная температура; q — удельная влажность; c — постоянная.

Проинтегрировав от точки I по ее вертикали до уровенной поверхности точки K , выводим при постоянной температуре T и постоянной удельной влажности

$$\ln \frac{p(K)}{p(I)} = \frac{\kappa}{r(1+cq)T} [W(K) - W(I)],$$

т. е.

$$W(K) - W(I) = \frac{r(1+cq)T}{\kappa} \ln \frac{p(K)}{p(I)}, \quad (\text{V.9})$$

или в геопотенциальных отметках

$$C(I) - C(K) = \frac{r(1+cq)T}{\kappa} \ln \frac{p(K)}{p(I)} \quad (\text{V.10})$$

и в динамических высотах

$$H_d(I) - H_d(K) = \frac{r(1+cq)T}{\gamma_{45^\circ} \kappa} \ln \frac{p(K)}{p(I)}. \quad (\text{V.11})$$

В вычислениях берут обычно среднее из наблюдаемых значений температуры и удельной влажности.

Если известны законы изменения температуры T и удельной влажности q как функций динамической высоты, т. е.

$$T = f_1(H_d), \quad q = f_2(H_d),$$

при известном значении $H_d(I)$ можно вывести хотя бы численно такое значение $H_d(K)$, которое удовлетворит уравнению

$$-\frac{r}{\kappa \gamma_{45^\circ}} \ln \frac{p(K)}{p(I)} = \int_{(IK)} \frac{dH_d}{(1+c f_2) f_1}. \quad (\text{V.12})$$

При некоторых таких простейших законах интегрирование можно выполнить в квадратурах. Например, Бейер (1856) представил закон изменения температуры от высоты квадратным уравнением

$$T = a_1 + b_1 H_d + c_1 H_d^2.$$

Тогда при постоянной влажности

$$\ln \frac{p(K)}{p(I)} = -\frac{\kappa \gamma_{45^\circ}}{r(1+cq)} \int_{H_d(I)}^{H_d(K)} \frac{dH_d}{(a_1 + b_1 H_d + c_1 H_d^2)} \quad (\text{V.13})$$

интеграл справа имеет несколько простых выражений в квадратурах (в зависимости от величин коэффициентов a_1 , b_1 и c_1).

Если $c_1 = 0$, то

$$\ln \frac{p(K)}{p(I)} = \frac{\gamma_{45^\circ} \kappa}{r(1+cq)} \frac{1}{b_1} \ln \frac{a_1 + b_1 H_d(I)}{a_1 + b_1 H_d(K)}, \quad (\text{V.14})$$

откуда нетрудно вывести $H_d(K)$. Савич (1865) представлял изменения температуры такими же законами.

Менделеев (Протокол..., 1875) предложил считать температуру пропорциональной давлению, т. е.

$$T = a + bp.$$

Тогда при постоянной влажности

$$\left. \begin{aligned} \int_{(IK)} (a + bp) \frac{dp}{p} &= -\frac{\kappa \gamma_{45^\circ}}{r(1+cq)} [H_d(K) - H_d(I)] \\ H_d(K) - H_d(I) &= -\frac{r(1+cq)}{\gamma_{45^\circ} \kappa} \left\{ a \ln \frac{p(K)}{p(I)} + b [p(K) - p(I)] \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.15})$$

Определяя атмосферное давление ртутным барометром, нужно иметь в виду зависимость веса ртути от силы тяжести в месте измерения. Составляя для таких измерений уравнение для вывода высот, Менделеев (1876) исключил силу тяжести, приравняв массу столба ртути массе столба уравновешивающего ее воздуха, т. е.

$$dp = \mu_p g dZ = -\mu g dh_w$$

$$dh_w = - \frac{\mu_p}{\mu} dZ, \quad (V.16)$$

где dZ — дифференциал высоты ртутного столба; μ_p — плотность ртути; dh_w — элементарное расстояние между уровнями поверхностями.

При интегрировании уравнения (V.16) можно вывести сумму упомянутых элементарных расстояний. Такая сумма может быть равна расстоянию между уровнями поверхностями некоторых точек в какой-либо из них, но может также оказаться зависимой от пути интегрирования и потерять физический смысл.

Если при интегрировании в (V.8) сделать замену

$$dW = -gdh_w \quad (V.17)$$

и принимать во внимание действительную силу тяжести (Жилин, 1966), то, как у Менделеева в (V.16), можно выводить сумму элементарных расстояний между уровнями поверхностями.

Если допустить, что приливная деформация атмосферы совпадает с приливной деформацией ζ_t уровней поверхностей потенциала силы тяжести, то смещению ζ_t будет соответствовать изменение ΔZ высоты уравновешивающего ртутного столба

$$\Delta Z = \frac{\mu \zeta_t}{\mu_p},$$

т. е. при максимальном $\zeta_t = 0,8$ м находим $\Delta Z = 0,08$ мм.

Теория атмосферных приливов еще не совершенна и численная оценка, отражающая реальные условия, затруднительна (Дикий, 1969). Как показывают наблюдения, разность между максимальным и минимальным давлениями в течение суток из-за приливных и температурных влияний при устойчивом давлении может достигать 2 мм рт. ст. Чисто гравитационные приливные влияния выделить в результатах наблюдений весьма трудно. Пока что более или менее уверенно из наблюдений выделен полусуточный приливный эффект Луны $l_2 \sin(2\theta + L_2)$, где θ — местное лунное время, L_2 — фаза.

Максимальная амплитуда (в тропиках) l_2 близка к 0,07 мм (см., например, у Уилкса, 1949 и Чэпмена, 1951); с возрастанием широты места амплитуда l_2 убывает. Гравитационный приливный потенциал Солнца в 2,2 раза меньше.

Суточные вариации давления должны быть учтены в программе точного барометрического нивелирования.

Использованный нами принцип вывода, как было упомянуто, предложен Гауссом (1825) и указан Фоглером (1880) и Гельмертом (1884, стр. 609). Возможность влияния аномалий силы тяжести на результаты барометрического нивелирования отмечена Фуком (1843). Метеорологи пользуются описанным принципом (Матвеев, 1965, стр. 51). Выводы формул согласно этому принципу были даны авторами также в работе 1955 г. История вопроса в XIX веке, и ранее освещена подробно Рюльманом (1870), который привел обширную библиографию.

При выводе барометрических формул обычно делают замену (V.17) и, интегрируя в (V.8), как Лаплас (1805, chapitre IV, pp. 289—293), считают силу тяжести обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра Земли, т. е. полагают

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2H}{R} \right),$$

где g_0 — сила тяжести, соответствующая $H=0$. Принято считать $g_0 = \gamma_0$. Гаусс (1815) опубликовал таблицы для вывода высот из барометрического нивелирования в соответствии с формулой Лапласа. Принцип Лапласа или еще менее точные принципы использованы во всех известных авторам современных советских и зарубежных геодезических учебниках и инструкциях по барометрическому нивелированию. При этом получаются формулы более громоздкие и менее точные, чем, например, (V.11). Соответственные погрешности практически пренебрегаемы при обычных полевых работах. При точности $\pm 0,5$ м и разности высот 2000 м силу тяжести достаточно знать с относительной точностью 1:10 000, т. е. с ошибкой ± 100 мгал, но при повышении точности барометрического нивелирования до 0,2—0,3 м с аномалиями силы тяжести необходимо считаться, т. е. выводить динамические высоты на основе (V.11), (V.12), (V.13) или (V.15) и переходить от динамических высот к нормальным для сравнения с результатами геометрического нивелирования. Динамические высоты необходимо использовать в работе метеорологических станций и при некоторых специальных выводах (например, при приведении показаний барометров к уровню моря).

VI. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ

Нивелирование с помощью сообщающихся сосудов, т. е. гидростатическое нивелирование, выполняют для передачи высот через большие водные пространства.

Пусть гидростатическим нивелированием нужно передать высоту от точки I к точке K (рис. 21). Если жидкость в приборе находится в гидростатическом равновесии и атмосферное давление в точках I' и K' одинаково, поверхность жидкости в трубах совпадает с одной и той же уровенной поверхностью. Поэтому при выпол-

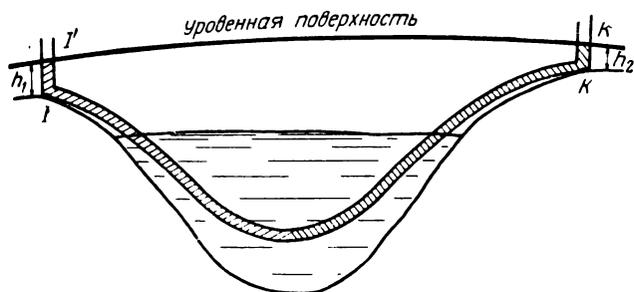


Рис. 21

нении гидростатического нивелирования принимают все меры к тому, чтобы равновесие жидкости было достигнуто. Как отмечено в разделе V, равновесие возможно и в том случае, если температура жидкости в разных частях прибора различна, однако необходимо, чтобы в точках, где равны динамические высоты, температура также была одинакова. Тогда

$$W(I') - h_2 g_m(K) - W(I') + h_1 g_m(I) = W(K) - W(I), \quad (VI.1)$$

где $W(I')$ — значение потенциала силы тяжести на уровенной поверхности $I'K'$; $g_m(I)$, $g_m(K)$ — средние из значений силы тяжести на отрезках $I'I' = h_1$ и $K'K = h_2$ соответственно. Из (VI.1) определяем

$$H_d(K) - H_d(I) = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} [h_2 g_m(K) - h_1 g_m(I)]. \quad (VI.2)$$

Для вычислений и оценки точности формулу (VI.2) удобнее записать так:

$$H_d(K) - H_d(I) = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \{ (h_2 - h_1) g_m(K) + h_1 [g_m(K) - g_m(I)] \}. \quad (VI.3)$$

Последний член может иметь значение при аномальном гравитационном поле и значительных расстояниях между точками I и K (в современных работах такое расстояние уже достигало 18 км). Обычно (например, Шель, 1956), следуя Юнгу (1941), стремятся вывести разность ортометрических высот исследуемых точек. Обработку гидростатического нивелирования Юнг осложнил условием, что топографические массы между геоидом и исследуемыми точками имеют вид однородной пластины.

Изложенный принцип вывода был описан авторами в работе 1955 г.

Если атмосферное давление в точках I и K различно, в один из отсчетов нужно ввести поправку за приведение к одинаковому давлению. Так, если давление $p(I)$ в точке I больше давления $p(K)$ в точке K , отсчет h_2 нужно уменьшить на

$$\Delta h_2 = \frac{p(I) - p(K)}{\mu(K) g(K)},$$

где $\mu(K)$ — плотность жидкости в точке K ; $g(K)$ — сила тяжести в этой точке.

Приливные и другие поправки за изменение угла между отвесами и грунтом по профилю гидростатического нивелирования следует учитывать так же, как и в геометрическом нивелировании. В частности, номограммы Ньюеда (1954) рассчитаны для вывода приливных поправок в датское гидростатическое нивелирование. Эти поправки могут иметь значение, так как точность гидростатического нивелирования может быть выше точности геометрического.

ЛИТЕРАТУРА

Андреев В. Д. К решению проблемы Стокса для уровенной поверхности, заданной в форме сфероида. «Прикладная математика и механика», 1966, т. 30, № 2, 410—413.

Бончковский В. Ф. Сопоставление вековых ходов наклонов земной поверхности по данным геологии, геодезии и геофизики. В сб. «Современные движения земной коры», № 2, Институт физики и астрономии. АН Эст. ССР, Тарту, 1965, 55—61.

Бровар В. В. О выводе и исследовании формулы Стокса. Тр. МИИГАиК, 1958, № 33, 15—17.

Бровар В. В. Вычисление возмущающего потенциала и его производных над Землей. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1963, № 3, 57—63.

Бровар В. В. Фундаментальные гармонические функции с особенностью на отрезке и решение внешних краевых задач. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1964, № 3, 51—61.

Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. М., Геодезиздат, 1961, 256 стр.

Бровар В. В., Остаф О. М. Исследование двух способов решения задачи Дирихле. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1968, № 3, 85—89.

Буланже Ю. Д., Михайлов А. А., Парийский Н. Н. Формулы и таблицы для обработки гравиметрических наблюдений. Под ред. А. А. Михайлова. М., Геодезиздат, 1949.

Вировец А. М. Уравнивание основной нивелирной сети СССР. Сб. научн.-техн. и производств. статей по геодезии, картографии, топографии, аэросъемке и гравиметрии ГУГК, 1948, вып. 17, 36—44.

Говорова Л. А. К вопросу об ошибках представительства и интерполяции аномалий силы тяжести. Сб. рефератов ЦНИИГАиК, М., 1955, вып. 4, 13—16.

Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963.

Гринберг Г. М. Некоторые вопросы уравнивания триангуляции. Автореферат диссертации на соискание уч. степени канд. техн. наук. М., МИИГАиК, 1967.

Дзулит П. Д. Влияние атмосферных масс на гравитационное поле Земли. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, № 5, 5—14.

Дикий Л. А. Теория колебаний земной атмосферы. Л., Гидрометеорологическое издательство, 1969.

Егоров Н. И. Физическая океанография. Л., Гидрометеорологическое издательство, 1966.

Еремеев В. Ф. Применение способа моделей к исследованию формул, определяющих фигуру Земли. Тр. ЦНИИГАиК, 1950, вып. 75, 11—77.

Еремеев В. Ф. Теория ортометрических, динамических и нормальных высот. Тр. ЦНИИГАиК, 1951, вып. 86, 11—51.

Еремеев В. Ф. Несколько замечаний о вычислении нивелирных высот в зарубежных странах. «Геодезия и картография», 1964, № 1, 52—60.

Еремеев В. Ф. К вопросу об определении нормальных высот. Тр. ЦНИИГАиК, 1965, вып. 157, 69—84.

Еремеев В. Ф. (Yeremeyev V. F.). On the problem of determining normal heights. *Studia geophysica et geodaetica*, 1965, 9, N 1, 1—13.

Еремеев В. Ф., Звонов В. И. О системе высот нивелирной сети СССР. Тр. ЦНИИГАиК, 1953, вып. 96, 3—26.

Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Динамические высоты и их применение. Сборник статей по геодезии ГУГК МВД СССР, 1955, вып. 10, 23—38.

Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Некоторые вопросы обработки пространственных сетей. Тр. ЦНИИГАиК, 1966, вып. 171, 3—35.

Еремеев В. Ф., Юркина М. И. (Yeremeyev V. F., Yurkina M. I.). On the evaluation of space networks. *Studia geophysica et geodaetica*, 1966, 10, N 1, 1—14.

Еремеев В. Ф., Юркина М. И. (Yeremeyev V. F., Yurkina M. I.). On the grade measurements. Bulletin géodésique, 1968, N 89, 315—324.

Еремеев В. Ф., Юркина М. И. (Yeremeyev V. F., Yurkina M. I.). Evaluation of non-linear terms in Molodensky's integral equation for disturbing potential. Bulletin géodésique, 1968, N 89, 325—331.

Жилин Ю. А. Опыт барометрического нивелирования в горном районе Средней Азии. «Разведочная геофизика», 1966, № 14, 78—86.

Закатов П. С. Курс высшей геодезии (сфероидическая геодезия, теоретическая геодезия и основы гравиметрии), изд. 3-е, доп. и испр. М., изд-во «Недра», 1964, 504 стр.

Изотов А. А. О геодезических методах изучения движений земной коры. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1963, № 1, 3—9.

Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследования земной рефракции и методов геодезического нивелирования. Тр. ЦНИИГАиК, 1955, вып. 102, 176 стр.

Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов, изд. 5-е, испр. и доп. М., изд-во «Недра», 1966.

Кашин Л. А. О развитии высокоточной нивелирной сети СССР и повторном нивелировании. Сб. «Современные движения земной коры», № 3, 1968, 38—43.

Колмогоров В. Г., Колмогорова П. П. Об учете приливных поправок при изучении современных вертикальных движений земной поверхности. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1968, № 3, 90—97.

Конопальцев И. М. Вычисление высот и уклонов отвесных линий из тригонометрического нивелирования. Тр. МИИГАиК, 1959, вып. 36, 19—46.

Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии, ч. II. М., Геодезиздат, 1942.

Куликов К. А. Изменяемость широт и долгот. М., Гостехиздат, 1962.

Ляпунов А. М. (Liapounoff). Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes. Зап. императорской Академии наук по физ.-мат. отд. 8-я серия, 1903, 14, № 7, 1—37. Изд. на русском яз. в кн.: А. М. Ляпунов «Избранные труды». Изд-во АН СССР, 1948, 251—300 и в Собр. соч., т. III, М., 1959.

Ляпунов А. М. (Liapounoff). Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes. Зап. императорской Академии наук по физ.-мат. отд., 8-я серия, 1904, 15, № 10, 1—66. Издано на русском языке в Собр. соч., т. III, М., 1959.

Ляпунов А. М. (Liapounoff). Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation. Зап. императорской Академии наук по физ.-мат. отд., 8-я серия, 1908, 22, № 5, 1—140. Издано на русском языке в Собр. соч., т. III, М., 1959.

Ляпунов А. М. (Liapounoff). Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Leningrad. Partie 1-re 1925, 224 pp., partie 2-me 1927, 225—437.

Изд. на русском яз. в Собр. соч., т. V, М., 1965.

Ляпунов А. М. О форме небесных тел. Изв. АН СССР, VII серия, отд. физ.-мат. наук, 1930, № 1, 25—41.

Опубликовано также в Собр. соч., т. III, М., 1959.

Макаров Н. П. Геодезическая гравиметрия. М., изд-во «Недра», 1968.

Максимов И. В. Уровенная поверхность океана и циркуляция вод в полярных зонах Земли. Проблемы Арктики и Антарктики, 1967, вып. 27, 169—183.

Мамаев О. И. Нулевая динамическая поверхность Мирового океана. Изд-во Московского университета, 1962.

Матвеев Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. Л., Гидрометеорологическое издательство, 1965.

Матцкова В. А. О периоде современных движений и качественной характеристике кривой скорости движений. В сб. «Современные движения земной коры», № 2, Институт физики и астрономии АН Эст. ССР, Тарту, 1965, 233—239.

Менделеев Д. И. О барометрическом нивелировании и применении для него высотомера. (Сумма, которая может быть вырвана от продажи этого сочинения, назначается автором на устройство большого аэростата и вообще на изучение метеорологических явлений в верхних слоях атмосферы). С.-Петербург, 1876. Опубликовано также в Сочинениях, 1946, т. VII, 51—193.

Мещерский И. Н. Многократные повторные нивелирования по трассе Красноводск—Чарджоу. В сб. «Современные движения земной коры», М., 1968, № 4, 167—176.

Мигаль Н. К. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научные записки Львовского политехнического института, 1949, вып. 15, серия геодезическая, № 1, 3—66.

Михайлов А. А. О применении формулы Стокса и редукциях силы тяжести. Доклады советских делегатов VIII и IX конференциям Балтийской геодезической комиссии. Издание Главного управления государственной съемки и картографии. М., 1937, 23—40.

Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. Второе перераб. и доп. изд. Редбюро ГУГК при СНК СССР, М., 1939.

Молоденский М. С. Определение фигуры геоида при совместном использовании астрономо-геодезических уклонений отвеса и карты аномалий силы тяжести. Тр. ЦНИИГАиК, 1937, вып. 17, 9—32.

Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Тр. ЦНИИГАиК, 1945, вып. 42, 107 стр. На немецком яз. в кн.: «Grundbegriffe der geodätischen Gravimetrie» VEB Verlag Technik, Berlin, 1958, 6—147.

Молоденский М. С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз. 1948, 12, № 3, 193—211. На немецком яз. в кн.: «Grundbegriffe der geodätischen Gravimetrie», VEB Verlag Technik, Berlin, 1958, 148—172.

Молоденский М. С. Изучение фигуры Земли геометрическим (астрономо-геодезическим) методом. Сб. научно-техн. и производств. статей по геодезии, картографии, топографии, аэросъемке и гравиметрии ГУГК, 1949, вып. 27, 3—11; Тр. ЦНИИГАиК, 1950, вып. 75, 3—10.

Молоденский М. С. К постановке астрономо-гравиметрического нивелирования в СССР. Тр. ЦНИИГАиК, 1950, вып. 75, 78—84.

Молоденский М. С. Новый метод решения геодезических задач. Тр. ЦНИИГАиК, 1954, вып. 103, 3—21.

Молоденский М. С. Современные задачи изучения фигуры Земли. «Геодезия и картография», 1958, № 7, 3—5.

Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131, 251 стр. Издано на английском языке Israel program for scientific translations, Jerusalem, 1962.

Молоденский М. С., Лозинская А. М. Астрономо-гравиметрическое нивелирование по 51-й и 55-й параллелям от 30-го до 56-го меридиана. Сб. ЦНИИГАиК, 1939, вып. 3, М., Редбюро ГУГК при СНК СССР, 10—26.

Остач О. М. Применение метода функций Грина к определению возмущающего потенциала Земли. «Геодезия и картография», 1968, № 9, 13—19.

Остач О. М. К методике астрономо-гравиметрического нивелирования. Международная геодезическая ассоциация. Симпозиум по физической геодезии. Прага, 22—27 сентября 1969 г.

Паньков В. Л., Жарков В. Н. О распределении плотности в недрах Земли. Сб. статей «Земные приливы и внутреннее строение Земли» под ред. Н. Н. Парийского. Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта АН СССР, М., изд-во «Наука», 1967, 44—61.

Пеллинен Л. П. Перспективы применения геодезического нивелирования в горных районах. «Геодезия и картография», 1956, № 6, 10—18.

Пеллинен Л. П. Требования к гравиметрической съемке, связанные с обработкой астрономо-геодезических и нивелирных сетей. Тр. ЦНИИГАиК, 1960, № 139, 3—44.

Пеллинен Л. П., Таранов В. А., Шабанова А. И. Вычисление гравиметрических высот квазигеоида и уклонений отвесных линий на ЭВМ Урал-1. «Геодезия и картография», 1964, № 12, 9—13.

Померанцев О. Фигуре геоида в районе Ферганской области. Записки военно-топографического отдела Главного штаба, 1897, 54, 76—120.

Протокол 30-го заседания Физического общества при императорском С.-Петербургском университете. Журнал русского химического общества и физического общества, 1875, т. VII, вып. 8, часть физическая, отдел первый, 259—265. Выписка из этого протокола опубликована в Сочинениях Д. И. Менделеева, т. VII, 1946, 15—20.

Рудский В. И. Передача астрономических координат с одного пункта на другой. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка» 1965, вып. 2, 47—51.

Рудский В. И. Некоторое обобщение формул передачи астрономических координат и азимута. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, вып. 4, 47—51.

Рудский В. И. Совместное уравнивание горизонтальных углов и зенитных расстояний. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, № 5, 72—84 (опечатки исправлены в этом же издании 1968 г., № 7, 102).

Рудский В. И. К вопросу о передаче астрономических координат и азимута. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1967, № 6, 83—86.

Савич А. Н. О барометрическом нивелировании. Записки императорской Академии наук, 1865, т. 6, кн. 2, 261—271.

Сафонов Г. Д. О необходимой частоте гравиметрических пунктов по линиям нивелирования 1—2 класса в горных районах. «Геодезия и картография», 1967, № 6, 15—17.

Слудский Ф. А. О разности долгот Москвы и Подольска. Математический сборник, 1867, т. 2, вып. 4, 297—301.

Слудский Ф. А. (Sloudsky Th.). Problème principal de la haute géodésie. Bulletin de la société impériale des naturalistes de Moscou, 1883, 58, N 3, 175—219.

Слудский Ф. А. Общая теория фигуры Земли. М., Математический сборник, 1888, 13, № 4; отдельное издание Московского университета, 1888, переиздано в книге 134

- Ф. А. Слудский. «Избранные геодезические труды». М., изд-во «Недра», 1967, 93—145.
- Слудский Ф. А. Лекции по высшей геодезии. М., университетская типография, 1894.
- Стойнов В. П. К вопросу об определении уклонения отвеса на основе теории Молоденского. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1966, № 3, 75—87.
- Стойнов В. П. Методы определения внешнего гравитационного поля Земли на основе теории Молоденского. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. М., МИИГАиК, 1966.
- Фиалков Д. Н. Достоверность вертикальных движений земной коры Западной Сибири. Сб. «Современные движения земной коры», № 2. Институт физики и астрономии АН Эст. ССР, Тарту, 1965, 309—314.
- Филиппов А. Е. Некоторое обобщение формул, определяющих фигуру физической поверхности Земли. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1965, № 2, 54—73.
- Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1967, № 6, 98—104.
- Филиппов А. Е. Координатные условные уравнения в сети пространственной триангуляции. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1968, № 7, 61—68.
- Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной триангуляции. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1968, № 7, 69—81.
- Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной трилатерации. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 9, 61—70.
- Фудзи Йоитиро. Mutual comparison of dynamic, orthometric and normal height. Сокути гаккайси. Journal of the geodetic society of Japan, 1969, 14, № 1, 17—24.
- Щеглов В. П. Некоторые итоги и новые аспекты решения проблемы движения континентов астрономическими методами. Сб. «Современные движения земной коры». М., 1968, № 3, 86—103.
- Энтин И. И. Анализ результатов нивелирования I и II классов. Тр. ЦНИИГАиК, 1960, № 135, 3—24.
- Юркина М. И. Методы исследования фигуры Земли в горном районе. Тр. ЦНИИГАиК, 1954, вып. 103, 65—117.
- Юркина М. И. Теория фигуры Земли за рубежом. «Геодезия и картография», 1957, № 7, 56—64.
- Юркина М. И., Карачанская Е. Е., Старостина А. Б. Пример проверки дифференциальных формул расстояния, астрономических и геодезических азимутов и зенитных расстояний. Тр. ЦНИИГАиК, 1966, вып. 171, 75—83.
- Юркина М. И., Кроткова Э. И. О поправках за силу тяжести при нивелировании в высокогорном районе. «Геодезия и картография», 1965, № 10, 3—7.
- Юршанский З. М. Определение высот пунктов методом линейных пространственных засечек. Тр. НИИГАиК, 1958, т. XI, 45—58.
- Alberda R. J. E. Vertical angles, deviations of the vertical and adjustment. Netherlands geodetic commission, publication on geodesy, new series, volume 1, number 1, 1961 (Rijkscommissie voor geodesie, Kanaalweg 4, Delft, Netherlands), 36 pp.
- Athi L. F. Density, porosity and compaction of sedimentary rocks. Bulletin of the American association of petroleum geologists, 1930, 14, N 1, 1—24.
- Baeschlin Carl Fridolin. Ergänzung zur Berechnung der mittleren Schwere in einer Lotlinie nach Th. Niethammer, unter Berücksichtigung der Isostasie. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch — naturwissenschaftliche Klasse, vorgelegt am 4. März 1955. München, 1956, 109—122.
- Baeschlin C. F. Rapport spécial sur le nivellement et la pesanteur. Bulletin géodésique, 1960, N 57, 245—298.
- Baeyer J.—J. Ueber eine neue Formel zum Höhenmessen mit dem Barometer. Annalen der Physik und Chemie, 1856, Bd. 174 (98), N 7, 371—396.
- Baeyer J. J. Ueber die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mittel — europäischen Gradmessung. Berlin, Druck und Verlag von Georg Reimer, 1861.
- Baeyer. Ueber den Einfluss localer Lothablenkungen auf das Nivellement. Astronomische Nachrichten, 1874, 84, N 1993, 1—16.
- Bauernfeind Carl Max. Geodaetische Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung. Abhandlungen der koeniglichen bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch — physikalische Klasse, Band XI, Abhandlung 2, München, 1872.
- Bencini Piero. Sur calcolo di trasformazione delle coordinate dal sistema geocentrico al sistema geografico. Bolletino di geodesia e scienze affini, 1968, 27, N 3, 357—367.
- Bendefy L. Grundlegende Probleme der Erforschung der rezenten Erdkrustenbewegung. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 1965, 74, N 6, 484—495.
- Bendefy L. A method for the elimination of the reference point and of the two

different network — adjustments in investigations of recent crustal movements. Proceedings of the second International Symposium on recent crustal movements. Annales Academiae scientiarum fennicae. Series A III. Geologica — geographica, 90. Helsinki, 1966. 47—55.

Bernatzky C. Zur Frage der gravimetrischen Punktabstände auf Nivellementslinien zur Erforschung vertikaler Erdkrustenbewegungen. Vermessungstechnik, 1963, 11, N 8, 295—300.

Bessel. Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen. Astronomische Nachrichten, 1837, 14, NN 329—331, 269—311.

Biró Péter. A normálmagasság gyakorlati meghatározása. Geodézia és kartográfia, 1962, 14, N 1, 1—6; N 2, 84—89.

Biró P. On the needed density of gravimetric stations in geodetic nets. Presented to the XIVth General Assembly of the International union of geodesy and geophysics, Lucerne, Switzerland, September 1967.

Bodenmüller Helmut. Höhen von Helmert, Vignal und mittlere Höhen. Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B. N 104, Deutsche Beiträge zur Vorlage bei der XIII. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik vom 19. bis 31. August 1963 in Berkeley — Kalifornien. München, 1963, 1—36.

Böhm Josef, Svoboda Jaroslav. Geometrická nivelace. Praha, 1960, Státní nakladatelství technické literatury, 286 str.

Bokun Jerzy. Przygotowanie i opracowanie materialow grawimetrycznych dla potrzeb polskiej sieci astronomiczno — geodezyjnej i sieci niwelacji precyzyjnej I klasu. Prace instytutu geodezji i kartografii, 1958, t. VI, N 1 (13), 3—86, Warszawa.

Bokun Jerzy, Chojnicki Tadeusz. Tablice do obliczania w systemie wysokości normalnych poprawki nivelacyjnej ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych. Prace instytutu geodezji i kartografii, 1958, 6, N 1, 136—157. Warszawa.

Botez M. Geodezie. vol. I. Editura didactică și pedagogică, Bucuresti, 1969, 362 pp.

Bouguer. Relation abrégée du voyage fait au Pérou par messieurs de l'Académie royale des sciences. Histoire de l'Académie royale des sciences. Année M. DCCXLIV. Avec les mémoires de mathématique et de physique pour la même année. A. Paris de l'imprimerie royale. M DCCXLVIII, 249—297.

Brein Rudolf. Determining atmospheric refraction from the dispersion of light. Informations relative to cartography and geodesy. Series II: German contributions in foreign languages, N 23. Verlag des Instituts für angewandte Geodäsie, Frankfurt am Main, 1969, 15 S.

Breton (de Champ) P. Traité du nivellement comprenant la théorie et la pratique du nivellement ordinaire. Paris, Librairie scientifique — industrielle de L. Mathias, 1848, 299 pp.

Brocks K. Vertikaler Temperaturgradient und terrestrische Refraktion, insbesondere im Hochgebirge. Veröffentlichungen des Meteorologischen Instituts der Universität Berlin, Band III, Heft 4, 1939, 80 S.

Bruns Heinrich. Die Figur der Erde. Ein Beitrag zur Europäischen Gradmessung. Publikation des königlichen Preussischen geodätischen Institutes. Berlin, 1878, 49 S. Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei. Русский перевод Н. И. Идельсона опубликован в книге Стокс, Брунс, Пуанкаре, Венинг — Мейнес. «Статьи о силе тяжести и фигуре Земли». М., Геодезиздат 1961. (Русский перевод содержит неточности, искажающие смысл).

Burša Milan. K současnému stavu teorie výškových soustav. Geodetický a kartografický obzor, 1958, 4, N 1, 2—10.

Burša Milan. Převod československých nivelačních základů do soustavy normálních výšek. Sborník vězkmuných prací I. ědice vězkmuného ústavu geodetického, topografického a kartografického, svazek I, Praha 1959, 41—56.

Burša Milan. K patnáctému výročí Moloděnského teorie tvaru Země. Geodetický a kartografický obzor, 1960, 6, N 11, 201—204.

Burša Milan. Fundamentals of the theory of geometric satellite geodesy. Práce geofyzikálního ústavu československé akademie věd, Geofyzikální sborník 1966, N 241.

Cahierre L., Secrétaire de la section II, XIII^{ème} Assemblée générale—Berkeley. Comptes rendus des séances de la section II, nivellement et mouvements de l'écorce terrestre. Bulletin géodésique, 1964, N 71, 7—30.

Caputo Michele. Some space gravity formulas and the dimensions and the mass of the Earth. Pure and applied geophysics, 1964/I, vol. 57, 66—82.

Caputo Michele. The gravity field of the Earth from classical and modern methods. International geophysics series, Academic Press, vol. 10, New York, London, 1967.

Cassinis Gino. Sur l'adoption d'une formule internationale pour la pesanteur normale. Bulletin géodésique, 1930, N 26, 40—49.

Chapman Sydney. Atmospheric tides and oscillations. Compendium of meteorology. Edited by Thomas F. Malone. American meteorological Society. Boston, Massachusetts, 1951, 510—530.

Chojnicki Tadeusz. Hipsograficzna metoda sporządzania mapy grawimetrycz-

nej anomalii Faye'a w terenach górzystych. Prace institutu geodezji i kartografii, Warszawa, 1960, 7, N 2 (16), 103—126.

Clairaut A. Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique. Paris, 1743, Русский перевод Н. С. Яхонтовой 1947 г., изд-во АН СССР.

Courant R. Partial differential equations. New York—London, 1962. Русский перевод Т. Д. Вентцель под ред. О. А. Олейник «Уравнения с частными производными». М., изд-во «Мир», 1964.

Čukić Dragoljub. Prilog ispitivanju visina. Geodetski list, 1966, 20 N 7—9, 143—156.

Dambara Takeshi. Comparison of the result of the water — tube tiltmeter with that of the first order levelling at Aburatsubo. Journal of the geodetic Society of Japan, 1965, 11, N 3—4, 107—113.

Darwin G. H. On variations in the vertical due to elasticity of the Earth's surface. The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science, 1882, 14, fifth series, N 40, 409—427.

Doodson A. T. Mean sea level and geodesy. Bulletin géodésique, 1960, N 55, 69—88.

Dore Paolo. Criterii per la determinazione delle quote ortometriche e dinamiche in una livellazione di alta precisione. Memorie della r. accademia delle scienze dell'istituto di Bologna, 1942—43, serie IX, t. X, pp. 21—29.

Dyson J. Correction for atmospheric refraction in surveying and alignment. Nature, 1967, 216, N 5117, 782.

Fuchs Wilhelm. Ueber den Einfluss der Gestalt des Terrains auf die Resultate barometrischer und trigonometrischer Höhenmessungen, so wie auf die Bestimmung der geographischen Lage eines Punktes auf der Oberfläche der Erde. Wien, 1843. Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold. 68 S.

Galle A. Das Geoid im Harz. Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Institutes, neue Folge, N 61, Berlin, 1914, 101 S.

Gauss. Beobachtungen und Berechnungen der Pallas, des Winter — Solstitiums von 1814; des Kometen von 1815 und Tafeln fürs Höhenmessen mit dem Barometer, vom Hrn. Prof. und Ritter Gauss, in Göttingen, aus Briefen desselben. Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1818. Berlin, 1815, 167—173.

Gauss an Olbers, Göttingen, 1825, Februar 25. Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke im Auftrage der Nachkommen herausgegeben von C. Schilling, zweiter Band. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss, zweite Abteilung. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1909.

Gauss an Olbers, Göttingen, 14 Mai 1826, Carl Friedrich Gauss Werke, neunter Band, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig, 1903, 320—322.

Gauss Carl Friedrich. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector. Göttingen, bei Vandenhoeck und Ruprecht, 1828.

Gauss an J. J. Baeyer. Göttingen, 22 Junius 1853. Carl Friedrich Gauss Werke, neunter Band. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig, 1903, 99—102.

Gauss Carl Friedrich. Geodätische Linie. Nachlass. Reduction des astronomischen Azimuthes auf das geodätische. Carl Friedrich Gauss Werke, neunter Band, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig, 1903, S. 95.

Gerke Karl. Untersuchung über periodische Lotstörungen im Tidegebiet. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1954, 79, N 9, 294—299.

Gleinsvik Paul. Studien über die Ermittlung der Geoidform und die Bestimmung von Meereshöhen aus Höhenwinkeln. Dissertationsdruckerei Leemann AG, Zürich, 1960. Die Mitteilungen aus dem Geodätischen Institut an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, N 7, 131 S.

Goulier. Sur les nivellements de précision. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1887, 105, 270—273, 306—309.

Gravimeter messungen in den Jahren 1953 bis 1957. Schweizerische Geodätische Kommission, 25. Band der Astronomisch—Geodätischen Arbeiten in der Schweiz, 1959, Bern.

Hagihara Y. Recommendations on notation of the Earth potential. The astronomical journal, 1962, 67, N 1, 108.

Haupt. Der Einfluss von Mittelgebirgen und von besonders schweren Massen im Erdinnern auf den Gang der Niveauflächen und die Ergebnisse geometrischer Nivellements. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1883, 12, N 11, 288—299.

Helmert F. R. Zur Theorie des geometrischen Nivellierens. Astronomische Nachrichten, 1873, 81, N 1939, 297—300.

Helmert F. R. Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I. Teil: Die mathematischen Theorien, 1880; II. Teil: Die physikalischen Theorien, 1884, Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Helmert F. R. Der Einfluss der Lothablenkung bei einem Gebirgrücken auf die Ergebnisse geometrischer Nivellements. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1882, 11, N 9, 233—243; N 10, 249—255.

Helmert F. R. Fortgesetzte Untersuchung über den Einfluss von Localanziehungen auf die Ergebnisse geometrischer Nivellements. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1883, 12, N 1, 18—30.

Helmert F. R. Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen in geodätischer und geologischer Beziehung. Veröffentlichung des königlich-preussischen geodätischen Institutes und Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Berlin, 1890. Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei, 52 S.

Helmert F. R. Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf die Lotkrümmung. Sitzungsberichte der königlich-preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1900, N 42, 963—982; 1901, N 39—40, 958—975.

Helmert F. R. Der normale Theil der Schwerkraft im Meeresniveau. Sitzungsberichte der königlichen preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1901, erster Halbband, N 14, 328—336.

Helmert F. R. Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente. B. G. Teubner, Leipzig — Berlin, 1907, zweite Auflage, 578 S.

Helmert F. R. Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin. Band VI, Teil I, Teilband II, Heft 2, 85—177, 1910.

Helmert F. R. Die Bestimmung des Geoids im Gebiet des Harzes. Sitzungsberichte der königlich-preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1913, N 28, 550—560.

Hilfiker J. Das Nivellements-polygon am Simplon. Im Buch: Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, herausgegeben von der Schweizerischen geodätischen Kommission. 12. Band Schwerebestimmungen in den Jahren 1900—1907. Zürich. Kommissionsverlag von Beer und Co., 1910, 376—403.

Hirsch A., Plantamour E. Nivellement de précision de la Suisse exécuté par la Commission géodésique fédérale sous la direction de A. Hirsch et E. Plantamour, quatrième livraison. Genève, Bale, Lyon. H. Georg, Libraire — éditeur, 1873.

Hirvonen R. A. Praktische Rechenformeln für die dreidimensionale Geodäsie. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1964, 89, N 5, 145—151.

Hobson E. W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge, at the University press, 1931 (Есть русский перевод С. В. Фомина, Изд. иностр. лит. М., 1952, 476 стр.).

Hofmann Walter. Studien zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge. Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch — naturwissenschaftliche Klasse, Neue Folge, München, 1955, Heft 70, 86 S.

Homoródi Lajos. Felsőgeodézia. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó, 614 l.

Hotine Martin. Metrical properties of the Earth's gravitational field. Association internationale de géodésie. Toronto assembly. Study group N 1, 1957, 29 pp.

Hotine Martin. Geodetic coordinate systems. Association internationale de géodésie. Toronto assembly. Study group N 1, 1957, 24 pp.

Hotine Martin. Note on the paper «On the evaluation of space networks». Studia geophysica et geodaetica, 1967, 11, N 1, 99—100.

Hotine Martin. Mathematical geodesy. ESSA Monograph 2, U. S. Department of commerce. Washington, 1969, 416 + XIV pp.

Hradilek Ludvik. Bestimmung der relativen Lotabweichungen und des Refraktionskoeffizienten beim Ausgleich trigonometrisch gemessener Höhennetze. Studia geophysica et geodaetica, 1958, 2, N 2, 101—121; 1959, 3, N 4, 334—359; 1960, 4, N 3, 217—232.

Hradilek Ludvik. Höhenbestimmung aus elektrooptisch gemessenen Längen. Studia geophysica et geodaetica, 1958, 2, N 3, 206—212; 1962, 6, N 4, 317—330.

Hradilek Ludvik. Zjednodušená metoda určení výšek, tížnicových odchylek a refrakčního koeficientu při vyrovnání trigonometricky zaměřených výškových sítí. Prace Geofyzikálního ústavu československé akademie věd, N 101, Geofyzikalni sbornik, 1959, Praha, 1960, 65—84.

Hradilek Ludvik. Räumliche Ausgleich eines geodätischen Netzes mit gemessenen Winkeln und Längen. Studia geophysica et geodaetica, 1960, 4, N 1, 1—5.

Hradilek Ludvik. Untersuchung der Abhängigkeit der Lichtbrechung von den meteorologischen Bedingungen auf dem Beobachtungsstandpunkt. Studia geophysica et geodaetica, 1961, 5, N 4, 302—311.

Hradilek Ludvik. Theoretische Begründung der Methode für die Refraktions- und Lotabweichungsbestimmung auf jedem Punkte eines trigonometrischen Höhennetzes. Studia geophysica et geodaetica, 1963, 7, N 2, 118—125.

Hradilek Ludvik. Space triangulation in the western part of the high Tatras. Studia geophysica et geodaetica, 1963, 7, N 4, 330—336.

Hradilek L. Prostorová triangulace a její využití v praxi. Geodeticky a kartograficky obzor, 1963, 9, N 9, 237—240.

Hradilek L. Trigonometric levelling and spatial triangulation in mountain regions. Bulletin géodésique, 1968, N 87, 33—52.

Hradilek Ludvik. Spatial triangulation in mountain regions. Acta. Universitatis Carolinae, 1968, Geographica, N 1, 29—40.

Hradilek L. Estimation of refraction from vertical angles. International association of geodesy. Symposium on electronic distance measuring and atmospheric refraction (Boulder, Colorado, USA, June 23—27, 1969), 4 pp.

Jackson J. E. Height and geopotential. Survey review, 1963, 17, N 128, 96—97.

Jensen Henry. Formulas for the astronomical correction to the precise levelling. Bulletin géodésique, 1950, N 17, 267—277. A printer's error is indicated in the Simonsen's book (1965).

Jessen Axel. Präzisionsnivellement and Schweremessung. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 1957, 55, N 8, 225—227.

Jones L. Utilisation des nivellements pour l'étude des mouvements du sol. Bulletin géodésique, 1968, N 87, 81—85.

Jung F. R. Höhensysteme und Höhenreduktionen. Veröffentlichungen der Deutschen geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1961, Reihe A, N 38, 49—64.

Jung F. Rudolf. Hydrostatisches Nivellement und orthometrische Korrektion. Allgemeine Vermessungs—Nachrichten, 1941, 53, N 16, 266—269.

Kabelač Josef. Vliv vodní hmoty na tíhové pole. Geodetický a kartografický obzor, 1967, 13, N 6, 145—147.

Kabelač J. Adjustment of a spatial network independently of the plumb—line. International Association of geodesy. Symposium on physical geodesy, Prague, September, 22—27, 1969, 5 pp.

Kabelač J. Vliv atmosféry na tíhové zrychlení. Geodetický a kartografický obzor, 1969, 15 (57), N 2, 34—35.

Keck Lothar. Studien über die Nichtparallelität der Niveauflächen der Erde und die Schwerekorrektion geometrischer Nivellements. Von der Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Hochschule Darmstadt zur Erlangung der Würde eines Doctor—Ingenieurs genehmigte Dissertation. Darmstadt, 1965, 106 S.

Kneissl M. Die Bildung eines einheitlichen europäischen Nivellementsnetzes. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1955, 80, N 9, 278—297.

Kobold F. Höhenwinkelmessung, Lotabweichungen und Meereshöhen. Bulletin géodésique, 1955, N 37, 33—35.

Kobold F. Die astronomischen Nivellemente in der Schweiz. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1957, 82, N 4, 97—103; N 5, 152—160.

Kobold F., Wunderlin N. Deviations of the vertical and form of the geoid in the Swiss Alps. U. G. G. I., Association Internationale de Géodésie, XIV^{ème} Assemblée Générale, Lucerne (25 Septembre — 5 Octobre 1967), Résumé des communications.

Kruis Bedřich. Převor československé jednotné nivelační sítě z výškového systému jaderského do výškového systému baltského. Edice výzkumného ústavu geodetického, topografického a kartografického, svazek V. Sborník výzkumných prací II, Praha, 1960, 67—75.

Kukkamäki T. J. Tidal correction of the levelling. Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja, Helsinki, 1949, N 36, 143—152.

Lagrula Jean. Sur l'évaluation numérique des différences entre les altitudes orthométriques et normales. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, 1962, 255, N 4, 747—748.

Lallemand Charles. Nivellement de haute précision. Troisième partie de livre Durand—Claye Ch.—Léon, Pelletan André, Lallemand Charles. Lever des plans et nivellement. Paris, Librairie polytechnique, Baudry et C^{ie}, Libraires—éditeurs, 1889.

Lambert Walter D. Note on the paper of A. H. Cook «The external gravity field of a rotating spheroid to the order of e^3 ». The geophysical journal of the royal astronomical society, 1960, 3, N 3, 360—366.

Lambert Walter D. The gravity field of an ellipsoid of revolution as a level surface. Suomalaisen tiedeakatemia toimituksia, sarja A, III. Geologica—geographica, N 57, Helsinki, 1961, 42 pp.

Laplace P. S. Traité de mécanique céleste, tome second, an VII—1799; tome quatrième, 1805; tome cinquième, 1825. Paris.

Ledersteger K. Die einheitliche Begründung der metrischen Höhendefinitionen. Bulletin géodésique, 1954, N 32, 107—145.

Ledersteger K. Der Schwereverlauf in den Lotlinien und die Berechnung der wahren Geoidschwere. Professori Weikko A. Heiskaselle hänen 60—vuotispäivänään omistettu juhlaulkaisu. Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja, Helsinki, 1955, N 46, 109—124.

Ledersteger K. Die Minimalsysteme der metrischen Reduktion. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 1956, 44, N 2, 43—50.

Ledersteger Karl. Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung). Jordan—Eggert—Kneissl. Handbuch der Vermessungskunde. Zehnte, völlig neu bearbeitete und neu gegliederte Ausgabe, Bd. V. Stuttgart, 1956—1969. 871 S.

Lennon G. W. The deviation of the vertical at Bidston in response to the attraction of ocean tides. The geophysical journal of the royal astronomical society, 1961, 6, N 1, 64—84.

Levallois J.—J. Sur la fréquence des mesures de pesanteur dans les nivellements. Bulletin géodésique, 1964, N 74, 317—325.

Levallois J.—J. Quelques remarques sur l'emploi des modèles terrestres en gravimétrie théorique. Institut géographique national, 12 pp. Rapport établi à l'occasion de la 14^e assemblée générale de l'Association internationale de géodésie. Lucerne, 1967, 25.IX.—7.X., section V.

Lichtenstein Leon. Über eine Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Mathematische Zeitschrift, 1928, 28, N 4, 635—640.

Lichtenstein Leon. Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Dritte Abhandlung: Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde. Mathematische Zeitschrift, 1933, 36, N 3—4, 481—562.

Lichtenstein Leon. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin. Verlag von Julius Springer, 1933. Русский перевод В. К. Абалакина под ред. Г. Н. Дубошина опубликован изд-ом «Наука», М., 1965.

Lisitzin Eugénie. The mean sea level of the World Ocean. Societas scientiarum fennica. Commentationes physico — mathematicae. Helsinki — Helsingfors, 1965, 30, N 7, 35 pp.

Listing Johann Benedict. Über unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde. Separatabdruck aus den Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, in der Dietrich'schen Verlagsbuchhandlung, 1872.

Macke W., Rennert P., Rieger F., Voss K. Über die Gestalt und das Schwerefeld der Erde. Zeitschrift für Geophysik, 1964, 30, N 1, 21—28.

Mader Karl. Die orthometrische Schwerekorrektur des Präzisions — Nivellements in den Hohen Tauern. Sonderheft 15 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen. Veröffentlichung der Abteilung «Erdmessung» des Bundesamtes für Eich — und Vermessungswesen in Wien, 1954.

Mader Karl. Application a des nivellements étendus dans les Alpes Autrichiennes de corrections basées sur la gravité réellement mesurée. Supplément au Bulletin géodésique N 34, 477—480, 1954.

Malone A. B. A nomogram for the computation of tidal deviations of the vertical. Geophysics, 1952, 17, N 3, 615—619.

Mälzer H. Measurements of small gravity profiles for the study of equipotential surfaces. Presented to the XIV—th general assembly of the International union of geodesy and geophysics, Lucerne, Switzerland, September, 1967.

Manferti Oreste. La sezione italiana della rete europea di livellazione. Bollettino di geodesia e scienze affini, 1968, 27, N 1, 99—108.

Markowitz Wm. Astronomical programs for the study of continental drift. Proceedings of the second international symposium on recent crustal movements. Annales academiæ scientiarum fennicæ, series A III, Geologica — geographica, 90. Helsinki, 1966, 241—245.

Marussi Antonio. Fondamenti di geodesia intrinseca. Pubblicazioni della commissione geodetica italiana, terza serie, 1951, memorie N 7, Milano, 45 pp.

Marussi Antonio. Intrinsic coordinates in practical geodesy. The Earth today. A collection of papers dedicated to sir Harold Jeffreys by some of his students and colleagues on the occasion of his 70th birthday. London, 1961, 83—89.

Méchain, Delambre. Base du système métrique décimal, ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes. t. 1, 1806, t. 2, 1807, Paris. Baudouin, imprimeur de l'Institut national.

Melchior Paul. The Earth tides. Oxford — London — Edinburgh — New-York — Paris — Frankfurt. Pergamon press, 1966. 458 pp. Русский перевод 1968. М., «Мир».

Mineo Massimo. Sviluppo rigorosa in serie del potenziale newtoniano terrestre. Bollettino della Unione matematica italiana. Bologna, 1949, gruppo IV, serie III, anno IV, N 4, 391—394.

Möhle Alfred. Die Verwendung von geographischen Koordinaten in der Theorie allgemeiner Flächen. Inaugural — Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften genehmigt von der Landwirtschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich — Wilhelms Universität, Bonn, 1943, 52 S.

Moritz H. Über das Geodätische Bezugssystem 1967. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1968, 93, N 3, 81—88.

Moritz H. Mass distributions for the equipotential ellipsoid. Bollettino di geofisica teorica ed applicata, Trieste, 1968, 10, N 37, 59—65.

Müller K. Das Quasigeoid und die Normalhöhen. Vermessungstechnik, 1960, 8, N 2, 36—40; N 3, 63—65.

Niethammer Th. Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Veröffentlichung des Schweizerischen geodätischen Kommission. Druck von Emil Birkhäuser und Cie., Basel, 1932, 51 S.

Niethammer Th. Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard. Astronomisch — geodätische Arbeiten in der Schweiz, herausgegeben von der Schweizerischen geodätischen Kommission, 1939, Band XX, Bern.

Nygård K. Calculation by nomograms of the astronomical correction to precise levelling. Geodætisk Instituts Skrifter, 3 Raekke, Bind XX. København, 1954.

Olberg M. Über die Bedeutung des Laplace — Operators der Feldstärke auf einer Äquipotentialfläche. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 1967, 76, N 1, 43—48.

Oudemans J. A. C. Über den Schlussfehler wegen der sphäroidischen Gestalt der Erde. Astronomische Nachrichten, 1874, 83, N 1970, 21—24.

Peters C. A. F. Von den kleinen Ablenkungen der Lothlinie und des Niveau's, welche durch die Anziehungen der Sonne, des Mondes und einiger terrestrischen Gegenstände hervorgebracht werden. Bulletin de la classe physico — mathématique de l'Académie impériale des sciences de Saint — Petersburg, 1845, N 62, tome 111, N 14, 212—223.

Peters C. A. F. Von den kleinen Ablenkungen der Lothlinie und des Niveaus, welche durch die Anziehungen der Sonne, des Mondes und einiger terrestrischen Gegenstände hervorgebracht werden. Astronomische Nachrichten, 1845, 22, N 507, 33—42.

Peters C. A. F. Die Länge des einfachen Sekundenpendels auf dem Schlosse Guldenstein, aus den unter der Direction von Schumacher ausgeführten Beobachtungen abgeleitet. Astronomische Nachrichten, 1855, 40, N 937—945, 1—152.

Pick Miloš. Transformation rechtwinkliger räumlicher Koordinaten in geodätische. Práce geofyzikálního ústavu československé Akademie věd, Geofyzikální sborník, XIV, 1966, N 240, 13—24.

Pick Miloš. Generalization of the system of normal heights. International association of geodesy. Symposium on physical geodesy. Prague, september 22—27, 1969, 3 pp.

Pieri Lamberto. Quote geopotenziali, quote dinamiche, quote di uso tecnico. Atti della Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, classe di scienze fisiche, anno 250, Rendiconti, 1962, serie XI, tomo IX, Bologna, 16 pp.

Pizzetti Paolo. Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide, supposto ellissoidico. Atti della reale Accademia dei Lincei, 1894, anno CCXC1, serie quinta, Rendiconti, classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. 111, 1° semestre, 166—172.

Pizzetti P. Sur la réduction des latitudes et des longitudes astronomiques au niveau de la mer. Astronomische Nachrichten, 1895, 138, N 3310, 353—358.

Pizzetti Paolo. Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti. Pisa 1913. русский перевод А. А. Михайлова издан Государственным технико-теоретическим издательством в 1933 г. М.—Л.

Pizzetti P. Höhere Geodäsie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Des sechsten Bandes erster Teil. Geodäsie und Geophysik. Leipzig. Verlag und Druck von B. G. Teubner, 1906—1925, 117—243.

Proceedings of the eleventh general assembly, Berkeley, 1961. Transactions of the International astronomical union, 1962, vol. XI B, Academic press, London, New York. Proceedings of the twelfth general assembly, Hamburg, 1964. Transactions of the International astronomical union, 1966. Vol. XII B, Academic press, London, New York.

Puissant L. Traité de géodésie, ou exposition des méthodes trigonométriques et astronomiques, applicables soit à la mesure de la Terre, soit à la confection des canevas des cartes et des plans topographiques. Deuxième édition. Paris, 1819, t. 1, pp. 376, t. 2, pp. 360. Supplément au traité de géodésie, 1827, 108 pp.

Ramsayer Karl. Vergleich verschiedener Schwerereduktionen von Nivellements. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1954, 79, N 5, 140—150.

Ramsayer K. Grundlagen der Höhenmessung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1955, 80, N 12, 421—432, eine Berichtigung in Zeitschrift für Vermessungswesen, 1956, 81, N 3, 115.

Ramsayer Karl. Über den zulässigen Abstand der Schwerpunkte bei der Bestimmung geopotentieller Koten im Hochgebirge, Mittelgebirge und Flachland. Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1963, Reihe A, N 44.

Ramsayer K. The admissible distances of the gravity points for the determination of geopotential numbers in high mountains, medium high mountains and flat countries. Bulletin géodésique, 1965, N 76, 145—154.

Reicheneder Karl. Eine Formel zur trigonometrischen Höhenmessung bei grossen Höhenunterschieden und Zielweiten. Allgemeine Vermessungen — Nachrichten, 1937, 49, N 17, 281—286.

Rinner Karl. Geometrie mit Raumstrecken. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1958, 83, N 3, 91—105.

Rinner K. Über die Genauigkeit des räumlichen Bogenschnittes. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1962, 87, N 10, 361—374.

Robbins A. R. Diskussion. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Bergbau, Huttenwesen und Montangeologie, 1962, N 2, 1. Internationales Symposium über rezente Erdkrustenbewegungen, 404—405.

Rossiter J. R. An analysis of annual sea level variations in European waters. The geophysical journal of the Royal astronomical society, 1967, 12, N 3, 259—299.

Rühlmann Richard. Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1870, 133 S.

Rune G. A. Report on levelling and Moon — Sun diurnal oscillation of the vertical. Bulletin géodésique, 1950, N 18, 448—449.

Salvioni Guido. Anomalie di Faye e Bouguer su lunghi lineamenti (anda-

menti pressochè meridiani e paralleli). Bollettino di geodesia e scienze affini, 1966, N 1, 81—88.

Scheel Günter. Systematische Fehler des hydrostatischen Nivellements und Verfahren zu ihrer Ausschaltung. Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission bei der bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1956, Reihe B, N 27, 73 S. Verlag des Instituts für angewandte Geodäsie. Frankfurt am Main.

Schiller O. Zur Einführung des Systems der Normalhöhen. Vermessungstechnik, 1960, 8, N 4, 89.

Schmid Dieter. Untersuchungen über die Verwendbarkeit von Schwerekarten zur Berechnung geopotentieller Knoten. Veröffentlichung der Deutschen geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1963, Reihe C, N 64, München, 88 S.

Schmidt Tankred. Verwendung von Normalhöhen im Markscheidewesen. Freiburger Forschungshefte. Leipzig, 1964, A330, 67—71.

Schneider E. Die Normalhöhen in der Praxis. Vermessungstechnik, 1960, 8, N 4, 90—94.

Schneider Erich. Die Normalhöhen — Theorie und Praxis. Arbeiten aus dem Geodätischen und Kartographischen Dienst, 1960, Bd. 1, 27—43, Berlin.

Schneider. Graphische Ermittlung der Schwerekorrekturen bei Nivellements in der CSSR. Vermessungstechnik, 1961, 9, N 11, 348—349.

Schulz Wilhelm. Zu dem Artikel «Zusammenhänge zwischen Grundwasser und Feineinwägung». Allgemeine Vermessung — Nachrichten, 1940, 52, N 17, 279—280.

Schulz W. Geoid, Lotabweichung und Feinnivellement. Vermessungstechnik, 1963, 11, N 2, 67—69.

Schumacher H. Ch. an K. F. Gauss N 382, Copenhagen, 1830, Mai 7. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, Bd. 11, S. 249, Hrsg. von C. A. F. Peters, Altona, 1860.

Sigl R. Some remarks on the work of special study group N 22 from 1961 to 1963. Travaux de l'Association Internationale de géodésie, 1964, 22, 105—129.

Sigl R. Activity of the special study group N 22. Comparison in space for heights of mean sea level, determination of secular movements between land and sea. Travaux de l'Association internationale de géodésie. Paris, t. 23, 1968, 109—133.

Simonsen Ove. Report on the astronomical diurnal correction in the new Danish precise level network. Bulletin géodésique, 1950, N 18, 450—451.

Simonsen O. Report for the period Sept. 1960—July 1963 on R. E. U. N. (Réseau Européen unifié de nivellement). International association of geodesy, section 11, permanent commission N 2. Submitted to the XIII General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics held in Berkeley, U. S. A., August 1963. Reproduced by the Danish Geodetic Institute, Copenhagen, Denmark, 1963, 124 p.

Simonsen Ove. Global aspect of the astronomical correction for levelling of high precision when considering the definition of levelling datum. Reproduced by the Danish geodetic institute. Copenhagen, 1965, 233 pp.

Simonsen O. Is the levelling datum for a continental levelling network so stable that it would permit the determination of secular movements as accurate as modern precise levellings may be observed? Bulletin géodésique, 1966, N 79, 39—69.

Somigliana Carlo. Les expressions finies de la pesanteur normale. Bulletin géodésique, 1933, N 38, 178—187.

Steinberg J. Verbesserung der Nivellementsergebnisse hoher Genauigkeit durch Anbringen einer Gezeitenkorrektur. Vermessungstechnik, 1966, 14, N 3, 104—109.

Sterneck Robert von. Untersuchungen über den Einfluss der Schwerstörungen auf die Ergebnisse des Nivellements. Mitteilungen der kaiserl. königl. militär — geographischen Institutes, Wien, 1888, 8. Band, 69—143.

Sterneck Robert von. Fortsetzung der Untersuchungen über den Einfluss der Schwerstörungen auf die Ergebnisse des Nivellements. Mitteilungen des kaiserl. und königl. Militär — geographischen Institutes, 1889, 9. Band, 47—113.

Stokes George Gabriel. On attractions, and on Clairaut's theorem. Cambridge and Dublin mathematical Journal, 1849, vol. IV, p. 194—219. Reprinted in mathematical and physical papers, Cambridge, at University press, 1883, vol. 2, pp. 104—130.

Stokes George Gabriel. On the variation of gravity at the surface of the Earth. Transactions of the Cambridge philosophical Society, 1849, vol. 8, part 5, 672—695, reprinted in Mathematical and physical papers, Cambridge, 1883 vol. 2, 131—171.

Русский перевод Н. С. Самойловой — Яхонтовой опубликован в книге: Стокс, Брунс, Пуанкаре, Венинг-Мейнес «Статьи о силе тяжести и фигуре Земли», М., Геодезиздат, 1961.

Stoyko A. Sur la variation des longitudes entre l'Amérique du Nord et l'Europe. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1959, 248, 190—193.

Stoyko A. Le service international de l'heure et le déplacement des continents. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Bergbau, Hüttenwesen und Montangeologie, 1962, N 2. I. Internationales Symposium über rezente Erdkrustenbewegungen, 403—404.

Stoyko A. La troisième opération internationale des longitudes, Juillet 1957 — Décembre 1959. Annals of the International geophysical year, 1966, vol. 42, 369 pp.

Stoyko A., Stoyko N. Détermination du mouvement de l'écorce terrestre d'après les observations astronomiques. Proceedings of the second international symposium on recent crustal movements. Annales academiae scientiarum fennicae, Series A III Geologica — geographica, 90. Helsinki, 1966, 379—384.

Stoyko N. La variation des latitudes et leur relation avec le mouvement de l'écorce terrestre. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Bergbau, Hüttenwesen und Montangeologie, 1962, N 2, 1. Internationales Symposium über rezente Erdkrustenbewegungen, 406—407.

Straub Gerhard. Breitenbestimmungen und Geoidstudien im Meridian des St. Gotthard. Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, München, 1963, N 65, 102 S.

Tengström Erik. Elimination of refraction at vertical angle measurements, using lasers of different wavelengths. Proceedings of the international symposium «Figure of the Earth and refraction». Vienna, March 14th—17th, 1967. Sonderheft 25 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, Vienna 1967, 292—303.

Tengström E. I. A. G. — Conferences on «The normal spheroid and the figure of the Earth» (SSG 16), and on «Recent research on atmospheric refraction for geodetic purposes» (SSG 23), held in Vienna (March 14—17, 1967). Bulletin géodésique, 1968, N 87, 23—31.

Tiron M., Struțu C. Considerațiuni privind calculul înaltimilor ortometrice, normale și dinamice. Revista de geodezie și organizarea teritoriului, 1960, N 4, 25—41.

Tisserand F. Traité de mécanique céleste. Tome II: Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation. Paris, 1891, 552 pp.

Thurm H. Punktdichte der gravimetrischen Landesaufnahme und Genauigkeit der Freiluftanomalien in Abhängigkeit von den Genauigkeitsanforderungen geodätischer Messungen. Vermessungstechnik, 1962, 10, N 7, 187—191.

Varga Magdolna. Szinterzési hálózatokhoz szükséges gravimetriai mérések pontsűrűsége. Epítőipari és közlekedési műszaki egyetem tudományos közleményei, 1966, 12, N 2, 177—188, 6, 10, 14, 19, 23.

Velkoborský Petr. Řešení Moloděnského okrajové úlohy metodou postupných aproximací. Geofyzikální ústav Československé akademie věd, Praha, 1967, 66 str.

Velkoborský Petr. On the solution of the Molodenskii boundary value problem using successive approximations. Studia geophysica et geodaetica, 1969, 13, N 3, 259—266.

Vening—Meinesz F. A. A formula expressing the deflection of the plumb—line in the gravity anomalies and some formulae for the gravity—field and the gravity—potential outside the geoid. Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam. Proceedings of the section of sciences, 1928, v. 31, N 3, 315—331.

Vignal Jean. Sur un système d'altitudes dynamiques rectifiées. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1944, 219, N 18, 439—441.

Vignal Jean, Simonsen Ove. Identité des corrections de pesanteur appliquées aux altitudes dans les pays de l'Europe de l'est et en France. Reproduit par Robert Anthonen. Copenhagen, 1962, 27 pp.

Villarceau Yvon. Nouveau théorème sur les attractions locales. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1868, 67, N 26, 1275—1281.

Villarceau Yvon. Nouvelle détermination de la vraie figure de la Terre ou de la surface de niveau, n'exigeant pas l'emploi des nivellements proprement dits. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1871, 73, N 14, 808—824.

Villarceau. Note sur les altitudes. Comptes rendus des séances de la commission permanente de l'Association géodésique internationale pour la mesure des degrés en Europe réunie à Genève du 16 au 20 septembre 1879. Berlin, 1880. Verlag von Georg Reimer. Druck von P. Stankiewicz' Buchdruckerei, pp. 22—24, 55—57.

Voeux et résolutions adoptés à la X-e Assemblée générale de l'Association internationale de géodésie. Rome, septembre, 1954. Bulletin géodésique, 1955, N 35, 86—105.

Voeux, résolutions. XIV-ème Assemblée générale, Suisse, 25 septembre — 7 octobre — 7 octobre 1967. Union géodésique et géophysique internationale, Association internationale de géodésie. Bulletin géodésique, 1967, N 86, 365—391.

Vogler Chr. August. Über Ziele und Hülfsmittel geometrischer Präzisions—Nivellements. München. Literarisch—artistische Anstalt (Th. Riedel) vormalis der Cotta'schen Buchhandlung, 1873. 103 S.

Vogler Ch. August. Graphische Barometerläfeln zur Bestimmung von Höhenunterschieden durch eine blosse Subtraktion von Dr. Ch. August Vogler entworfen von Hugo Feld. Braunschweig. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1880.

Voss K. Über die Gestalt und das Schwerefeld der Erde. Zeitschrift für Geophysik, 1965, 31, N 6, 313—326; 1966, 32, N 4, 216—231.

Vykutíl Josef. Výpočet tíhových korekcí nivelace v baltském výškovém systému. Geodetický a kartografický obzor, 1959, N 8, 145—149.

Vykutíl J. Zum Problem der Gebrauchshöhen. Vermessungstechnik, 1964, 12, N 7, 253—257.

Wand Theodor. Die Principien der mathematischen Physik und Potentialtheorie, 1871, Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 184 S.

Weidauer W. Vereinfachung der Berechnung der Normalhöhenreduktion. Vermessungstechnik, 1963, 11, N 1, 14—16.

Wemelsfelder Pieter Jacobus. Meereshöhe, Nivellementsöhe, Pegelnull. Die Küste. Archiv für Forschung und Technik an der Nord- und Ostsee, 1960, 8, 89—107.

Wilkes M. V. Oscillations of the Earth's atmosphere. Cambridge, at the University press, 1949, 74 pp.

Wittke. Höhensysteme. Formelsammlung. 41 Abschnitt. Vermessungstechnische Rundschau, 1965, 27, N 11, 427—430; N 12, 465—467.

Wittstein. Ueber den Schlussfehler grosser Nivellements. Astronomische Nachrichten, 1873, 81, N 1939, 291—298.

Wolf H. Die Grundgleichungen der Dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1963, 88, N 6, 225—233.

Wolf Helmut. Erwiderung auf den Artikel «On the evaluation of space networks», Studia geophysica et geodaetica, 1968, 12, N 3, 327—328.

Wunderlin N. Lotabweichungen, Geoid und Meereshöhen in den Schweizer Alpen. Astronomisch — geodätische Arbeiten in der Schweiz herausgegeben von der Schweizerischen Geodätischen Kommission, Band 26, 1967, 147 S.

Wyrzykowski Tadeusz. Porównanie poziomów dwu dawnych sieci niwelacji precyzyjnej na obszarze Polski z poziomem obecnej sieci. Prace instytutu geodezji i kartografii, 1962, 9, N 1, 87—118.

Wyrzykowski Tadeusz. Analysis of results obtained from introducing, by reason of diurnal changes in the plumb — line direction, a correction into surveys of precise levelling. Communications to be presented at the fourteenth general assembly of the Association of geodesy of the International Union of geodesy and geophysics, Lucerne 25. IX—7. X, 1967, 8 pp, Warsaw, 1967.

Wyrzykowski Tadeusz. Poprawka niwelacyjna ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu spowodowane przez Księżyc i Słońce. Prace instytutu geodezji i kartografii, 1968, tom 15, zeszyt 3/36, 3—41.

Zachariae G. Beiträge zur Theorie des Schlussfehlers geometrischer Nivellementspolygone. Astronomische Nachrichten, 1873, 80, N 1916, 305—318.

Zachariae. Georg Carl Christian. De geodætiske Hovedpunkter, 1876. Die geodätische Hauptpunkte und ihre Coordinaten. Autorisierte deutsche Ausgabe mit Anmerkungen und Zusätzen von Lamp, Berlin, 1878, Verlag von Robert Oppenheim 331 S.

Zivković Aleksandar. Izbor ne elipsoidnog visinskog sistema. Zbornik geodetskog instituta, 1965, N 6, 33—34. Univerzitet u Beogradu.

