

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
МИНИСТЕРСТВА ГЕОЛОГИИ И ОХРАНЫ НЕДР СССР

ТРУДЫ

ЦЕНТРАЛЬНОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
ИНСТИТУТА ГЕОДЕЗИИ, АЭРОСЪЕМКИ
И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 145

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ

Издательство геодезической литературы

Москва 1962

Редактор **П. Ф. Шокин**
Редактор изд-ва **В. И. Васильева**

Техн. редактор **В. С. Сунгуров**
Корректоры: **А. В. Сергеева, К. С. Торопцева**

Т—05800 Подп. к печати 18/V 1962 г. Формат бумаги $70 \times 108\frac{1}{16}$ д. л.
Печат. листов 9,5 + 1 вклейка Тираж 1200 экз. Заказ № 499
Цена 80 коп. + 10 коп. переплет

Фабрика № 5 ГУГК

*М. С. Молоденский В. Ф. Еремеев
М. И. Юркина*

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЯДА СТОКСА И НЕКОТОРЫЕ ПОПЫТКИ УТОЧНЕНИЯ ЕГО ТЕОРИИ

Внешнее гравитационное поле Земли определяется обычно с помощью ряда Стокса, т. е. с помощью известных соотношений между коэффициентами разложения по сферическим функциям аномалий на физической поверхности и возмущающего потенциала

$$T_n = \frac{Rg_n}{n-1}.$$

Принято считать, что эти выражения имеют относительную погрешность порядка сжатия Земли. Но это справедливо лишь для регуляризированной Земли и только в том случае, если аномалии силы тяжести точно заданы на поверхности регуляризованного геоида. Как известно, регуляризацию Земли достаточно точно осуществить невозможно; поэтому в реальных условиях точность ряда Стокса может заметным образом снизиться. Заранее можно сказать, что при очень больших значениях номера гармоники не может быть простой связи между коэффициентами разложения аномалий, заданных на поверхности Земли, и стоксовыми постоянными, характеризующими внешнее гравитационное поле Земли. В этом можно убедиться не только путем анализа формул, точно определяющих внешнее гравитационное поле, но и путем рассмотрения простейших примеров. Пусть, например, все аномальные массы приводятся к простому слою, находящемуся на поверхности отсчетной сферы, и плотность этого слоя выражается одной сферической гармоникой порядка n . В таком случае

$$T = \frac{Y_n}{\rho^{n+1}} \quad \text{и} \quad g - \gamma = (n-1) \frac{Y_n}{\rho^{n+2}}.$$

Если значения $g - \gamma$ вычислить на поверхности, для которой $\frac{1}{\rho} = Y_m$, то формальное разложение аномалий по сферическим функциям будет содержать гармоники до порядка $(n+2) m + n$. Внешнее же гравитационное поле в этом случае содержит единственную гармонику порядка n . Если аномальные массы расположены вне отсчетной сферы, то подобного рода эффект проявится в еще большей степени.

Таким образом, аномальные массы, которые во внешнем поле должны давать гармоники только высокого порядка, в разложении аномалий, заданных на физической поверхности, скажутся на гармониках низкого порядка и при обычном способе расчета внешнего поля дадут погрешность в определении даже первых членов.

Для первоначальной оценки значения этого довольно сложного эффекта можно воспользоваться методом моделей. В основу вычислений положена модель, подробно описанная Еремеевым (1950), а также Молоденским и др. (1960): однородный шар опоясан по экватору тором, наполовину погруженным в шар, причем предполагается, что масса шара

не вытеснена тором. Для уменьшения углов наклона с обеих сторон тора между тором и сферой с помощью конических поверхностей сделаны «настилы». Наклон «настила» относительно отсчетной сферы близок $1/6$.

Поскольку массы отсчетной сферы и нашей модели одинаковы, разложение по сферическим функциям возмущающего потенциала $(T_e)_\rho$ вне притягивающих масс в данном случае начинается со второго порядка. Из выражения для потенциала притяжения материальной окружности при $R < \rho$ получаем

$$(\zeta_e)_\rho = \frac{(T_e)_\rho}{\gamma_\rho} = \sum_{n=2}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta), \quad (1)$$

где n принимает четные значения,

$$A_n = \frac{2\pi f \bar{\mu}}{\gamma_0} P_n(\cos 90^\circ), \quad n \neq 0, \quad (2)$$

f — гравитационная постоянная, $\bar{\mu}$ — линейная плотность материальной окружности, совпадающей с осевой линией тора. В системе CGS $\lg f \bar{\mu} = 5,3540$, $\gamma_0 = 1004,31$ гл, радиус отсчетной сферы $R = 6000$ км.

Коэффициенты A даны в первом столбце табл. 1.

Таблица 1

(Все значения даны в метрах)

n	A	A_{ζ_e}	A_ζ	$\Delta_1 A_\zeta$	$A_\zeta + \Delta_1 A_\zeta$	$\Delta_2 A_\zeta$	$A_\zeta + \Delta_1 A_\zeta + \Delta_2 A_\zeta$
0	0,00	0,00	+1,68	-1,39	+0,29	-0,11	+0,18
2	-7,07	-7,07	-3,28	-3,45	-6,73	-0,27	-7,00
4	+5,30	+5,28	+3,61	+1,55	+5,16	+0,12	+5,28
6	-4,42	-4,37	-3,20	-1,11	-4,31	-0,09	-4,40
8	+3,87	+3,76	+2,87	+0,90	+3,77	+0,07	+3,84
10	-3,48	-3,33	-2,61	-0,78	-3,39	-0,06	-3,45
12	+3,19	+2,99	+2,41	+0,68	+3,09	+0,05	+3,14
14	-2,96	-2,73	-2,24	-0,62	-2,86	-0,05	-2,91
16	+2,78	+2,55	+2,10	+0,57	+2,67	+0,04	+2,71

Значения аномалий на физической поверхности $g - \gamma$ и высот ζ_e квазигеоида разложены по четным полиномам Лежандра до 16 порядка включительно. При этом $g - \gamma$ и ζ_e представлены в виде суммы

$$g - \gamma = \overline{(g - \gamma)} + \Delta g_{\text{ост}}, \quad (3)$$

$$\zeta_e = \overline{\zeta_e} + \zeta_{\text{ост}}. \quad (4)$$

В областях $B > 10^\circ$ и $B < -10^\circ$ значения $\overline{g - \gamma}$ и $\overline{\zeta_e}$ совпадают с $g - \gamma$ и ζ_e соответственно. В область $+10^\circ > B > -10^\circ$ значения $g - \gamma$ и ζ_e графически экстраполированы из областей $B > 10^\circ$ и $B < -10^\circ$. Коэффициенты $A_{\overline{g - \gamma}}$ и $A_{\overline{\zeta_e}}$ разложения $\overline{g - \gamma}$ и $\overline{\zeta_e}$ по четным полиномам Лежандра вычислены по второму способу Неймана при помощи

таблиц Прея (1922). Значения $\overline{g-\gamma}$ и $\overline{\zeta_e}$ для корней полинома Лежандра 17-го порядка проинтерполированы по таблице, приведенной в приложении. Эти значения на экваторе сняты с графиков, использованных для экстраполяции. Таким образом, основой для вычисления коэффициентов разложения по второму способу Неймана послужили следующие значения (табл. 2).

Таблица 2

Полярные расстояния	$\overline{g-\gamma}$, мгЛ	$\overline{\zeta_e}$, м
$\vartheta_1 = 180^\circ - \vartheta_{17} = 7^\circ 52' 21''$	-0,18	-4,11
$\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_{16} = 18\ 04\ 14$	-0,22	-3,95
$\vartheta_3 = 180^\circ - \vartheta_{15} = 28\ 19\ 44$	-0,29	-3,65
$\vartheta_4 = 180^\circ - \vartheta_{14} = 38\ 36\ 02$	-0,41	-3,19
$\vartheta_5 = 180^\circ - \vartheta_{13} = 48\ 52\ 39$	-0,58	-2,51
$\vartheta_6 = 180^\circ - \vartheta_{12} = 59\ 09\ 24$	-0,84	-1,49
$\vartheta_7 = 180^\circ - \vartheta_{11} = 69\ 26\ 14$	-1,24	+0,10
$\vartheta_8 = 180^\circ - \vartheta_{10} = 79\ 43\ 07$	-1,97	+3,04
$\vartheta_9 = 90^\circ 00' 00''$	-2,70	+4,50

Коэффициенты $A_{\overline{g-\gamma}}$ и $A_{\overline{\zeta_e}}$ даны в табл. 3 и 4. Для значений ϑ , кратных 5° , по этим коэффициентам вычислены $\overline{g-\gamma}$ и $\overline{\zeta_e}$, которые в точках $\vartheta_1 - \vartheta_{17}$ совпадают с $\overline{g-\gamma}$ и $\overline{\zeta_e}$ (табл. 5).

Таблица 3

(Все значения даны в миллигалах)

n	$A_{\overline{g-\gamma}}$	$A_{\Delta g_{\text{ост}}}$	$A_{g-\zeta} = A_{\overline{g-\gamma}} + A_{\Delta g_{\text{ост}}}$	A_{G_1}	A_{G_2}	$A_{\overline{g-\gamma}} + A_{G_1} + A_{G_2}$
0	-1,093	+0,811	-0,282	+0,232	+0,018	-0,032
2	+1,480	-2,029	-0,549	-0,578	-0,045	-1,172
4	-0,931	+2,745	+1,814	+0,777	+0,061	+2,652
6	+0,636	-3,314	-2,678	-0,929	-0,074	-3,681
8	-0,447	+3,806	+3,359	+1,057	+0,084	+4,500
10	+0,318	-4,25	-3,93	-1,17	-0,09	-5,19
12	-0,231	+4,66	+4,43	+1,26	+0,10	+5,79
14	+0,178	-5,06	-4,88	-1,35	-0,11	-6,34
16	-0,145	+5,42	+5,28	+1,43	+0,11	+6,82

В пределах точности вычислений значения $\overline{g-\gamma}$ и $\overline{\zeta_e}$ совпали с исходными значениями $\overline{g-\gamma}$ и $\overline{\zeta_e}$, это выяснено по графикам, построенным по данным табл. 5.

Таблица 4
(Все значения даны в метрах)

n	$A_{\zeta_e}^-$	$A_{\Delta\zeta_{\text{ост}}}^-$	$A_{\zeta_e} = A_{\zeta_e}^- + A_{\Delta\zeta_{\text{ост}}}^-$
0	-0,60	+0,60	0,00
2	-5,57	-1,50	-7,07
4	+3,29	+1,99	+5,28
6	-2,04	-2,33	-4,37
8	+1,19	+2,57	+3,76
10	-0,60	-2,73	-3,33
12	+0,18	+2,81	+2,99
14	+0,11	-2,84	-2,73
16	-0,27	+2,82	+2,55

Таблица 5

ϑ	$\overline{g-\gamma}$, МГЛ	$\overline{\zeta_e}$, М
0	-0,23	-4,30
5	-0,20	-4,20
10	-0,17	-4,04
15	-0,18	-3,96
20	-0,24	-3,94
25	-0,28	-3,81
30	-0,30	-3,56
35	-0,34	-3,33
40	-0,44	-3,13
45	-0,53	-2,85
50	-0,60	-2,40
55	-0,70	-1,89
60	-0,87	-1,41
65	-1,07	-0,79
70	-1,26	+0,24
75	-1,55	+1,67
80	-2,00	+3,11
85	-2,48	+3,96
90	-2,70	+4,50

Коэффициенты разложений $\Delta g_{\text{ост}}$ и $\zeta_{\text{ост}}$ (табл. 3 и 4) вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} (A_{\Delta g_{\text{ост}}})_n &= (2n+1) \int_{\vartheta=80^\circ}^{\vartheta=90^\circ} \Delta g_{\text{ост}} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= (2n+1) \Sigma (\Delta g_{\text{ост}})_{\text{ср}} P_n(\cos \vartheta_{\text{ср}}) \sin \vartheta_{\text{ср}} \Delta \vartheta, \\ (A_{\zeta_{\text{ост}}})_n &= (2n+1) \int_{\vartheta=80^\circ}^{\vartheta=90^\circ} \zeta_{\text{ост}} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= (2n+1) \Sigma (\zeta_{\text{ост}})_{\text{ср}} P_n(\cos \vartheta_{\text{ср}}) \sin \vartheta_{\text{ср}} \Delta \vartheta. \end{aligned}$$

Ширина полосок, т. е. $\Delta \vartheta$, обусловлена интервалами между вычисленными значениями $g-\gamma$ и ζ_e в таблице приложения и постепенно увеличивается от 10" (на экваторе) до 30'. Точность численного интегрирования можно полагать достаточной, так как увеличение ширины полосок вдвое не изменило численных значений коэффициентов. Коэффициенты A_{ζ} (третий столбец табл. 1) получены на основе формального использования ряда Стокса

$$A_{\zeta} = \frac{R A_{(g-\gamma)}}{\gamma n - 1}.$$

Бросается в глаза значительное несоответствие между этими коэффициентами и коэффициентами A и A_{ζ_e} (см. табл. 1). Особенно ясно это показано в табл. 6, где даны отношения коэффициентов $A_{\zeta_e} : A$ и

$A_{\zeta} : A$, т. е. отношения чисел второго и третьего столбцов табл. 1 к числам первого столбца этой таблицы.

Т а б л и ц а 6

n	$A_{\zeta_e} : A$	$A_{\zeta} : A$	$(A_{\zeta} + \Delta_1 A_{\zeta}) : A$	$(A_{\zeta} + \Delta_1 A + \Delta_2 A) : A$
2	1,000	0,464	0,952	0,990
4	0,996	0,681	0,974	0,996
6	0,989	0,724	0,976	0,995
8	0,972	0,742	0,974	0,992
10	0,957	0,750	0,974	0,991
12	0,937	0,755	0,969	0,984
14	0,922	0,757	0,966	0,983
16	0,917	0,755	0,960	0,975

Эти расхождения можно объяснить только высокими гармониками в формальном разложении аномалий $g - \gamma$ и высот H точек физической поверхности по сферическим функциям.

Действительно, внешнее гравитационное поле в сферической системе координат в самом общем случае точно представляется стоксовыми постоянными, т. е. интегралами вида

$$J_n = \int \delta Y_n \rho^n d\tau,$$

где Y_n — произвольная сферическая функция порядка n , δ — плотность аномальных масс, ρ — расстояние элемента объема $d\tau$ от начала координат.

Если внешнее поле представить притяжением простого слоя плотности φ на физической поверхности S , то

$$J_n = \int \varphi Y_n \rho^n dS. \quad (5)$$

При решении уравнения, определяющего φ , введена вспомогательная функция χ , связанная с φ соотношением (Молоденский и др., 1960)

$$\chi = \frac{\rho^2}{R^2} \varphi \sec \alpha,$$

где R — радиус отсчетной сферы, α — угол наклона элементов поверхности S . Следовательно,

$$J_n = \int R^2 \chi Y_n \rho^n d\omega, \quad (6)$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла.

Функция χ была представлена в виде суммы

$$\chi = \sum_0^{\infty} \chi_n,$$

причем χ_0 соответствует стоксову приближению, плотность χ_1 — члену T_1 в возмущающем потенциале и члену G_1 в аномалии

$$T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint G_1 [S(\cos \psi) - 1] \sin \psi \, d\psi \, dA,$$

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint \frac{H - H_0}{r_0^3} (g - \gamma) \sin \psi \, d\psi \, dA.$$

Здесь r_0 — проекция расстояния между исследуемой и текущей точками на отсчетную поверхность, H_0 — значение H в исследуемой точке.

Основная часть поправки к полю аномалий представляется членом G_1 . Поправка второго приближения имеет вид

$$T_2 = \frac{R}{4\pi} \iint G_2 \left[S(\cos \varphi) - 1 \right] \sin \psi \, d\psi \, dA - \frac{R^2}{2} \iint \frac{(H - H_0)^2}{r_0^3} \chi_0 \sin \psi \, d\psi \, dA,$$

где

$$G_2 = R^2 \iint \frac{H - H_0}{r_0^3} \chi_1 \sin \psi \, d\psi \, dA - \frac{3R}{4} \iint \frac{(H - H_0)^2}{r_0^3} \chi_0 \sin \psi \, d\psi \, dA +$$

$$+ 2\pi \chi_0 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$\chi_m = \frac{3}{4\pi R} T_m + \frac{1}{2\pi} G_m, \text{ если } m < 2.$$

Прибавляя к выражению G_1 интеграл

$$\frac{(g - \gamma)_0 H_0 R^2}{2\pi} \iint \frac{1}{r_0^3} \sin \psi \, d\psi \, dA,$$

где $(g - \gamma)_0$ — значение $(g - \gamma)$ в исследуемой точке, и вычитая это же выражение, найдем

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint \frac{1}{r_0^3} [H(g - \gamma) - H_0(g - \gamma)_0] \, d\omega - \frac{H_0 R^2}{2\pi} \iint \frac{1}{r_0^3} [(g - \gamma) - (g - \gamma)_0] \, d\omega.$$

Введем две функции, гармонические вне отсчетной сферы и регулярные на бесконечности,

$$\Sigma_1 = \sum_0^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} [H(g - \gamma)]_n,$$

$$\Sigma_2 = \sum_0^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} (g - \gamma)_n,$$

совпадающие на отсчетной сфере с функциями $H(g - \gamma)$ и $(g - \gamma)$. На основе формулы Молоденского (1945)

$$\frac{\partial U_0}{\partial \gamma} + \frac{U_0}{R} = \frac{R^2}{2\pi} \iint \frac{U - U_0}{r_0^3} \, d\omega,$$

где U — любая гармоническая вне поверхности сферы и регулярная на бесконечности функция, γ — направление внешней нормали к сфере, находим

$$G_1 = - \sum_0^{\infty} \frac{n}{R} [H(g - \gamma)]_n + H_0 \sum_0^{\infty} \frac{n}{R} (g - \gamma)_n.$$

Таким образом, высокие порядки разложения значений $g - \gamma$, входящие с множителем $\frac{n}{R}$, должны заметным образом повлиять даже на первые члены разложения G_1 . Первая сумма, входящая в G_1 , несущественна для низких гармоник. Следовательно, в низких гармониках основной эффект связан с учетом аномалий вертикального градиента силы тяжести при аналитическом продолжении аномалий силы тяжести к поверхности отсчетной сферы. В высоких гармониках и следующих приближениях задача сильно усложняется.

Описанные результаты исследования точности ряда Стокса находятся в полном согласии с более ранними вычислениями высот квазигеоида и геоида на экваторе и полюсе этой же модели (Молоденский и др., 1960). Погрешность интегральной формулы Стокса на полюсе модели, т.е. вдали от области с большими аномалиями силы тяжести и большими наклонами, оказалась тогда больше возможного отклонения квазигеоида от геоида Листинга. Если бы первые члены ряда Стокса были точны, то погрешности интегральной формулы Стокса носили бы чисто локальный характер и не могли бы характеризоваться величинами одного знака для большой площади.

Значения G_1 и G_2 для нашей модели даны в приложении в таблицах и на графиках. Второй член правой части выражения G_2 и соответственно второй член выражения T_2 оказались пренебрежимо малыми. Учет величины G_1 существенно уменьшил погрешности вычислений по интегральной формуле Стокса: расхождение между вычисленным и точным значением на экваторе уменьшилось от $-5,42$ до $-0,49$ м, на полюсе — от $+2,76$ до $+0,24$ м. Второе приближение уменьшило эти расхождения до $-0,10$ м и $+0,04$ м соответственно. Коэффициенты A_{G_1} и A_{G_2} разложения значений G_1 и G_2 по сферическим функциям (табл. 3) при помощи поправок

$$\Delta_1 A_\gamma = \frac{R}{\gamma} \frac{A_{G_1}}{n-1}$$

$$\Delta_2 A_\gamma = \frac{R}{\gamma} \frac{A_{G_2}}{n-1}$$

также существенно улучшили результат формального использования ряда Стокса (табл. 1 и 6).

Авторы ряда статей при помощи бесконечных рядов сферических функций ищут решение задач, как правило, решенных ранее при помощи замкнутых интегральных формул. Так, например, С. В. Громов (1956—1959) и Хирвонен (1960) исходят из ряда

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{\rho^{n+1}}.$$

Не может быть сомнений в том, что указанный ряд представляет потенциал притяжения Земли вне сферы, заключающей внутри себя все притягивающие массы. Более того, можно допустить сходимость этого ряда до границы притягивающих масс и справедливость формул, использованных Громовым и Хирвоненом,

$$T = \sum_2^{\infty} \frac{Y_n}{\rho^{n+1}}, \quad (7)$$

$$g - \gamma = \sum_2^{\infty} (n-1) \frac{Y_n}{\rho^{n+2}}. \quad (8)$$

Если граничные условия (значения $g - \gamma$) заданы на сфере, то $\rho = 1$ (выражаем ρ в долях радиуса Земли) и из (8) сразу следует соотношение Стокса

$$Y_n = \frac{(g - \gamma)_n}{n - 1}.$$

Отсюда получаются формула Стокса и обобщенная формула Стокса, выведенная Пицетти (1913).

Но если считаться с основным фактом, для учета которого Громов и Хирвонен предприняли пересмотр теории Стокса, то функцию $g - \gamma$ нужно считать известной только в точках поверхности S и граничное условие нужно написать так:

$$(g - \gamma)_S = \sum_2^{\infty} (n - 1) \frac{Y_n}{\rho_S^{n+2}}. \quad (9)$$

При больших значениях n , очевидно,

$$\rho_S = \sum_{l=0}^{-n-2} x_l$$

существенно зависит от формы поверхности, т. е. от координат ϑ и λ . Погрешность от замены ρ_S^{n+2} на 1 является величиной порядка $\frac{H}{R}$ только при малых значениях n . Именно поэтому мы не можем согласиться ни с Громовым, ни с Хирвоненом, отождествляющими относительную погрешность выражения $\rho_S^n = 1$ с погрешностью порядка сжатия Земли или $\frac{H}{R}$. Нельзя также согласиться с Граф-Хантером (1958—1960), который считает не заслуживающим рассмотрения процесс перехода от реальной Земли к сильно сглаженной, фиксируя все свое внимание на задаче определения фигуры Земли по крайевым значениям на поверхности, кривизны и наклоны которой ничтожны.

Для определения Y_n из условия (9) применение аппарата сферических функций безнадежно. Сферическая функция порядка n в разложении $(g - \gamma)_S$, например, по геоцентрическим координатам ϑ и λ выражается бесконечным рядом, так как слагаемые в правой части (9) не ортогональны между собой

$$\begin{aligned} A_{km} &= \frac{2k+1}{2\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int (g - \gamma)_S P_k^m(\vartheta) \cos m\lambda d\omega = \\ &= \frac{2k+1}{2\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int \sum_2^{\infty} (n-1) Y_n \sum_0^{\infty} x_l P_k^m(\vartheta) \cos m\lambda d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[T_S]_k \neq \frac{Y_k}{\rho^{k+1}}$$

и

$$[(g - \gamma)_S]_k \neq (k-1) \frac{Y_k}{\rho^{k+2}},$$

и соотношения между гармониками в разложениях потенциала T_S и аномалий $(g - \gamma)_S$ установить не удастся.

В условии разрешимости основного интегрального уравнения [формула (V.10, 18) в монографии Молоденского и др. (1960)] первый ин-

тегральный член имеет тот же порядок, что и второй. Поэтому формула V.10.19 (там же) верна только в стоковом приближении и погрешность ее значительно больше, чем $\frac{H}{R}$.

Обе части выражения (8) Хирвонен умножает на $\frac{1}{4\pi} \frac{2m+1}{m-1} \rho^{m+2} P_m d\omega$ и интегрирует по сфере, получая при этом

$$\frac{1}{4\pi} \frac{2m+1}{m-1} \int (g - \gamma) \rho^{m+2} P_m d\omega = A_m, \quad A_m P_m = Y_m,$$

что верно только в условиях теории Стокса, когда радиусы-векторы всех текущих точек одинаковы.

Аналогичное «упрощение» вводят Утила [формула (13) его книги, 1960] и Громов.

Все дальнейшие выкладки Громова и Хирвонена должны повторять теорию Стокса. Естественно, что в результате первый получает формулу Стокса, а второй — обобщенную формулу Стокса. Смысл величин, входящих в эту формулу, должен быть совершенно тот же, что у Пицетти.

Выражение (160) книги Хирвонена является интегральным уравнением, полученным впервые Малкиным (1934) и опубликованным им в немецком журнале в 1935 г. Это уравнение справедливо для регуляризированной Земли, близкой к сферической.

Теория, развиваемая Бьерхаммаром (1961), по существу не отличается от построений Громова и Хирвонена. В статье (1961) им поставлен интересный вопрос об аналитическом выражении функции Грина для определения возмущающего потенциала T в точках физической поверхности S или во внешнем пространстве по аномалиям $g - \gamma$ силы тяжести на S . Для функции Грина k этой задачи ранее (1959) он получил интегральное уравнение

$$\int_{S_i} k(\bar{r}_i, \bar{r}_0) \frac{\partial \left(\frac{1}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} \right)}{\partial \bar{r}_j} dS_i + \frac{2}{r_j} \int_{S_i} \frac{k(\bar{r}_i, \bar{r}_0)}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} dS_i = - \frac{1}{|\bar{r}_j - \bar{r}_0|}, \quad (10)$$

которое предлагал решать численно. Это предложение рассмотрено в критическом обзоре Юркиной, Макарова и Еремеева (1960). Здесь обозначено: \bar{r}_0 — радиус-вектор исследуемой точки, в которой следует определить

$$T(r_0) = \int_{S_j} k(\bar{r}_j, \bar{r}_0) \Delta g(r_j) dS_j, \quad (11)$$

\bar{r}_i, \bar{r}_j — радиусы-векторы текущих точек, n — внешняя нормаль к физической поверхности. Величину, обратную расстоянию $|\bar{r}_i - \bar{r}_j|$ между текущими точками, и функцию Грина $k(\bar{r}_j, \bar{r}_0)$ Бьерхаммар представляет рядами

$$\frac{1}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} = \frac{4\pi}{r_j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r_i}{r_j} \right)^n Y_{nm}(\vartheta_j, \lambda_j) Y_{nm}(\vartheta_i, \lambda_i), \quad (12)$$

$$k(\bar{r}_j, \bar{r}_0) = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{nm} \left(\frac{r_j}{r_0} \right)^n Y_{nm}(\vartheta_j, \lambda_j). \quad (13)$$

Эти ряды сходятся во всех точках поверхности S только тогда, когда S — сфера. Здесь имеем точно такую же ситуацию, какую мы рассмот-

рели в связи с работами Громова и Хирвонена. Величину $\left(\frac{r_j}{r_0}\right)^n$ можно заменить на единицу только ценой возврата к теории Стокса. Но если этого не делать, то ряд (13) становится бесполезным. Но Бьерхаммар интегрирует в (10) так, как будто поверхность Земли сферическая, и поэтому получает стоксово соотношение между коэффициентами a_{nm} и b_{nm} при разложении величин $k(\bar{r}_j, \bar{r}_0)$ и $\frac{1}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|}$ [выражение (10) рассматриваемой статьи]. Выражение (14) той же статьи равносильно обобщенной функции Стокса и не выражает функцию Грина в общем случае. Точно так же выражения (15), (39), (36) и (40) имеют точность стоксова приближения.

Схожую ситуацию мы находим в работах, авторы которых начинают с составления интегрального (или интегро-дифференциального) уравнения по краевым значениям, заданным на поверхности Земли. В целях упрощения Леваллуа (1958), Бьерхаммар (1960a, 1960b), Тенгстрем (1958) пренебрегают наклонами земной поверхности. Бьерхаммар даже считает, что без этого упрощения нельзя составить линейное интегральное уравнение для T , хотя такое уравнение получено Молоденским еще в 1945 г. (немецкий перевод 1958 г.). В это уравнение входят не только наклоны, но и кривизны земной поверхности. Это показывает, насколько опасно отбрасывать те или иные члены на предварительных этапах вывода. Интегральное уравнение, опубликованное Леваллуа и Бьерхаммаром, получается из интегро-дифференциального уравнения Молоденского, составленного также в 1945 г., если в уравнении Молоденского отбросить член $\frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{r} D(T, q) \cos \alpha dS$. Здесь через $D(T, q)$ обозначен оператор, который в любой криволинейной системе координат q, q_1 и q_2 имеет значение

$$D(T, q) = \frac{h_0}{h_1^2} \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{\partial q}{\partial q_1} + \frac{h_0}{h_2^2} \frac{\partial T}{\partial q_2} \frac{\partial q}{\partial q_2}.$$

В геодезической системе координат q — нормальная высота. Приняты следующие обозначения: h_0, h_1, h_2 — коэффициенты Ламе, r — расстояние между исследуемой и текущей точками.

Оценим влияние этого члена на возмущающий потенциал на простой модели: в вершине конуса, расположенного своим основанием на отсчетной плоскости. Аномальное поле пусть будет обусловлено точечной массой, расположенной на пересечении оси конуса с отсчетной плоскостью. Высота конуса равна $H_0 = 4$ км. Аномальная масса такова, что вызываемая ею аномалия силы тяжести в вершине конуса достигает $\Delta g_0 = 250$ мгл, а следовательно, возмущающий потенциал в вершине равен 10^5 единиц CGS. Если нормальное значение силы тяжести принять равным 1000 гал, то высота квазигеоида для вершины конуса будет равна 1 м. В системе цилиндрических координат (высота h над отсчетной плоскостью, расстояние r_0 от оси конуса и азимут A этого расстояния, отсчитываемый от некоторого фиксированного направления) $h_0 = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = r_0$. Тогда на поверхности конуса

$$h = H_0 - r_0 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$r = r_0 \sec \alpha,$$

$$D(T, h) = \frac{\Delta g_0 H_0^2 r_0 \operatorname{tg} \alpha}{(r_0^2 \sec^2 \alpha - 2H_0 r_0 \operatorname{tg} \alpha + H_0^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{r} D(T, h) \cos \alpha dS = \Delta g_0 H_0^2 \sin \alpha \int_0^{H_0 \operatorname{ctg} \alpha} \frac{r_0 dr_0}{(r_0^2 \sec^2 \alpha - 2H_0 r_0 \operatorname{tg} \alpha + H_0^2)^{3/2}} =$$

$$= \Delta g_0 H_0 \sin \alpha.$$

При $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$ для этого члена получаем соответственно $0,100 \cdot 10^5$, $0,196 \cdot 10^5$ и $0,371 \cdot 10^5$ единиц CGS. Таким образом, оказывается, что местные влияния, которыми, как правило, объясняются главные части в значениях уклонений отвеса, при помощи уравнения Леваллуа и Бьерхаммара можно определить только с относительной ошибкой порядка наклона местности вблизи исследуемой точки. В наших случаях погрешности составляют от 10 до 40% определяемой величины.

Удивительно, что авторы вместо анализа возможности упрощения уже известного точного интегрального уравнения предпочитают насаждать упрощающие предположения в процессе повторения вывода. Совокупность этих упрощений сводит на нет то уточнение первоначальной постановки задачи, которое отличает ее от задачи, решенной еще Стоксом. Не удивительно, что отбрасывание неудобных для вычисления членов возвращает авторов к интегральному уравнению Гельмерта или Малкина, решением которых является формула Стокса. Характерно также, что оценка отбрасываемых членов ориентируется на точность определения высоты геоида, Хейсканен (1958—1960), Тенгстрем (1958), а не на точность определения из того же уравнения уклонения отвесной линии. Кажется странным, что геодезисты, не жалеющие сил на повышение точности измерений и уравнивания на десятые доли секунды, легко мирятся с относительными погрешностями в уклонении отвеса порядка наклона топографической поверхности. Не правильнее было бы стать на другую крайнюю точку зрения и при этих оценках исходить из точности современных гравиметров, позволяющих получать уклонение отвеса с точностью порядка $0'',01$ (при точности измерения в $0,07$ мгл)? Теория может и обязана обеспечить ту точность, которая не обесценивает результаты измерений.

Большую осторожность в этом отношении проявляет Арнольд (1957—1960). Однако в его построениях нет полной последовательности. Уклонения отвеса и возмущающий потенциал Арнольд определяет на поверхности Земли, но далее приводит к поверхности геоида. Вряд ли это следует понимать так, что Арнольд отдает предпочтение обработке триангуляции старым методом развертывания. Но тогда трудно понять, зачем нужно выполнять промежуточное сложное и неопределенное приведение к геоиду вместо простого и точного непосредственного приведения к эллипсоиду. Кроме того, Арнольд предпочитает считать известными в каждой точке не только аномалии силы тяжести, но и уклонения отвеса. Незначительное упрощение вычислений не может оправдать увеличения объема необходимых астрономических работ и снижения точности, поскольку точность астрономических определений ниже относительной точности современных гравиметров.

Авторы выражают благодарность за помощь в вычислениях на разных этапах работы Е. Е. Карачанской, Э. И. Кротковой, Р. Я. Кунегинной, Р. А. Некрасовой, З. А. Новиковой, А. Б. Старостиной.

ЛИТЕРАТУРА

- Громов С. В. Метод Слудского в применении к вопросу определения фигуры квазигеоида. Вестник Ленинградского университета, 1956, № 19, стр. 174—185.
- Громов С. В. Определение фигуры Земли без привлечения понятия о нормальной планете сравнения. Вестник Ленинградского университета, 1957, № 19, стр. 145—152.
- Громов С. В. Некоторые вопросы теории фигуры Земли как развитие идей Ф. А. Слудского. Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 273, стр. 208—249.
- Громов С. В. К вопросу о совместном определении массы и фигуры Земли по астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным. Вестник Ленинградского университета, 1959, № 1, стр. 111—118.
- Еремеев В. Ф. Применение способа моделей к исследованию формул, определяющих фигуру Земли. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 75. М., Геодезиздат, 1950.
- Еремеев В. Ф. О точности формул Стокса и Молоденского. Доклад, представленный XII ассамблее МГГС в Хельсинки, 1960. Сборник рефератов ЦНИИГАиК, 1960, № 18, стр. 19—44.
- Кузиванов В. А. Об аналитическом продолжении потенциала во внутреннюю область. Известия АН СССР, серия геофизическая, 1956, № 12, стр. 1419—1426.
- Малкин Н. Р. Об определении фигуры геоида регуляризованной и нерегуляризованной Земли. Астрономический журнал, 1934, т. 11, № 5, стр. 497—503.
- Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 42. М., Геодезиздат, 1945.
- Молоденский М. С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. Известия АН СССР, серия географическая и геофизическая, 1948, т. 12, № 3.
- Молоденский М. С. Примечание к реферату статьи Громова (1956). Реферативный журнал «Астрономия и геодезия», 1958, № 9, 6159.
- Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 131. М., Геодезиздат, 1960.
- Тирон И. М. Исследование точности формул Стокса и Венинг Мейнеса. Труды ЦНИИГАиК, 1960, № 139, 21—44.
- Юркина М. И., Еремеев В. Ф., Макаров Н. П. Об одном итоге XI Генеральной ассамблеи МГГС в Торонто. «Геодезия и картография», 1959, № 4.
- Юркина М. И., Макаров Н. П., Еремеев В. Ф. О современном состоянии теории изучения фигуры физической поверхности Земли. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 139. М., Геодезиздат, 1960.
- Arnold K. Die Co-Geoide der Freiluftreduktion. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 1957, 66, N3, 181—198.
- Arnold K. Betrachtungen zur Bestimmung der gravimetrischen Lotabweichungen aus Freiluftanomalien der Schwere. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 1958, 67, N2, 97—134.
- Arnold K. Zur Theorie der gravimetrischen Verbesserung astronomischer Nivellements. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 1958, 67, N3.
- Arnold K. Zur Bestimmung der Geoidundulationen aus Freiluftanomalien. Veröff. Geod. Inst. in Potsdam, 1959, N12.
- Arnold K. Strenge Theorie der absoluten Lotabweichungen als Funktionen der Freiluftanomalien der Schwere. Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts in Potsdam, 1959, N13.
- Arnold K. Zur strengen Theorie der Figur der Erde. Gerl. Beiträge zur Geophysik, 1959, 68, N5, 257—262.
- Arnold K. Numerische Beispiele zur strengen Theorie der Figur der Erde. Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts in Potsdam, 1960, N16.
- Arnold K. Relationen zwischen neueren Verfahren der Theorie der Figur der Erde. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 1960, 69, 3, 140—149.
- Bjerhammar Arne. A general method for an explicit determination of the shape of the Earth from gravimetric data. Kungl. tekniska högskolans handlingar, 1959, N149.
- Bjerhammar Arne. Über die Bestimmung der Gestalt der Erde. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 1960a, 48, N6, 177—180.
- Bjerhammar Arne. A comparison of the accuracy of the linear integral equations obtained by the aid of Green's formula and single layer potentials. Communications from the Royal institute of technology to the twelfth general assembly of the IUGG in Helsinki, 1960b.
- Bjerhammar Arne. On the gravity field of the Earth. Annales academiae scientiarum fennicae. Series A III, Geologica — Geographica, 1961, 61.
- Graaff-Hunter J. de. Tactics of progressive geodesy. Bull. géod., 1958, N47/48.
- Graaff-Hunter J. de. Report of study group N8. Bull. géod., 1958, N50.
- Graaff-Hunter J. de. The shape of the Earth's surface expressed in terms of gravity at ground level. Bulletin géodésique, 1960, 56, 191—200.

Graaff-Hunter J. de. Selected events in the progress of determining Earth-shape. Bolletino di geodesia e scienze affini. Fascicolo in onore del prof. Gino Cassinis, 1960, 19, N4, 617—629.

Heiskanen W. A. Gravimetric computation of the undulations of the geoid, and the deflections of the vertical. Travaux de l'Association internationale de géodésie, 1958, 20, fascicule 5 (Géode), 49—86.

Heiskanen W. A. Achievements and limitations of the gravimetric method in geodesy. Symposium über die Bedeutung der Gravimetrie für die Geodäsie. Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1959, Reihe A, N32.

Heiskanen W. A. Provisional report on gravimetric computation of the geoid and of the gravity anomaly field and related quantities in higher elevations. (Доклад XII ассамблее МГГС в Хельсинки, 1960a).

Heiskanen W. A. The latest achievements of physical geodesy. Journal of geophysical research, 1960b, 65, 9, 2827—2836.

Hirvonen R. A. New theory of the gravimetric geodesy. Suomalaisen tiedeakateman toimituksia. Annales academiae scientiarum fennicae. Sarja A. III Geologica-Geographica, 56, Helsinki, 1960.

Levallois Jean-Jacques. Sur une équation intégrale très générale de la gravimétrie. Bull. géod., 1958, N50.

Malkin N. Über die Bestimmung der Figur der Erde. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 1935, 45, 1—2, 133—147.

Molodenski M. S. Grundbegriffe der geodätischen Gravimetrie. VEB Verlag Technik. Berlin, 1958.

Pizzetti Paolo. Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti. Pisa, 1913.

Prey Adalbert. Darstellung der Höhen — und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922, Bd. 11.

Tallqvist H. J. Sechsstellige Tafeln der 16 ersten Kugelfunktionen $P_n(x)$. Acta societatis scientiarum fennicae, 1937, N2, N4.

Tengström Erik. Determination of the Earth's gravity field and its level surfaces. Meddelande från geodetiska institutionen vid Uppsala Universitet, 1958, N4.

Uotila Urho A. Investigations on the gravity field and shape of the Earth. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy N33, Helsinki, 1960.

*M. S. Molodensky, V. F. Eremeev,
M. I. Yourkina*

AN EVALUATION OF ACCURACY OF STOKES' SERIES AND OF SOME ATTEMPTS TO IMPROVE HIS THEORY Abstract

Five different variants of expanding the disturbing potential in terms of spherical functions were carried out for an Earth model in the shape of a sphere girded along the equator with a tor, the said tor being covered on both sides with «deckings» (the greatest inclination angle of the model surface is near 10°):

- 1) On the basis of a given distribution of anomalous masses correct values of the coefficients (A) were calculated.
- 2) By formally referring to the sphere of reference the quasigeoidal heights at points on the model surface (coefficients A_{ζ_e}).
- 3) By formally referring to the sphere the gravity anomalies and by formally applying the Stokes series (coefficients A_{ζ}).
- 4) By introducing corrections $\Delta_1 A_{\zeta}$ to the coefficients A_{ζ} of the third variant to account for corrections G_1 of first approximation obtainable by solving numerically the integral equation of Molodensky.
- 5) By introducing corrections $\Delta_2 A_{\zeta}$ to the coefficients $A_{\zeta} + \Delta_1 A_{\zeta}$ of the fourth variant to account for corrections G_2 of second approximation of numerical solution of the same equation.

A marked discrepancy between the first and the third variants was brought to light (see tables 1 and 6). A conclusion was drawn on unfitness of the current practical method of calculating coefficients of the disturbing potential on the base of gravity measurements. To obtain an acceptable accuracy it is necessary to make use of the theory of investigating the external gravitational field and the shape of Earth's physical surface.

In connection with the results of the described computations some attempts by Gromov and Hirvonen of improving accuracy of the Stokes theory are investigated. It is shown

that the way proposed by the said authors can not lead to an improvement of the accuracy of the Stokes theory, whereas the proposal made by Bjerhammar in relation to determining Green's function can only give the same approximation as the Stokes formula.

Taking instead of the real Earth its model, as proposed by de Graaff Hunter, we are faced with the same difficulties as in the case of application of the Stokes theory to the real Earth.

The integral equation for the disturbing potential developed by Levallois and Bjerhammar is affected by an error of an order of the slope of Earth's physical surface.

Значения высот H , аномалий силы тяжести $g-\gamma$, высот квазигеоида ζ_e и поправок G_1 и G_2 для модели

$90^\circ - \delta$	$g-\gamma$, мгЛ	ζ_e , м	H , м	G_1 , мгЛ	G_2 , мгЛ
1	2	3	4	5	6
0°00"	+744,64	+26,35	+6000,00	-152,06	0,00
0 10	+743,74	+26,35	+5992,94	-148,64	+0,18
0 20	+741,09	+26,35	+5971,72	-138,42	+0,82
0 30	+736,63	+26,35	+5936,14	-117,03	+1,49
0 40	+730,14	+26,35	+5887,75	-75,16	-0,94
0 50	+720,33	+26,34	+5837,69	-51,03	-2,02
1 00	+707,19	+26,32	+5787,65	-33,57	-2,48
1 10	+690,98	+26,29	+5737,61	-19,56	-2,54
1 20	+672,09	+26,24	+5687,63	-7,94	-2,54
1 30	+650,91	+26,19	+5637,64	+2,13	-2,42
1 40	+627,84	+26,13	+5587,66	+10,73	-2,24
1 50	+603,36	+26,06	+5537,69	+18,22	-2,04
2 00	+577,87	+25,99	+5487,74	+24,65	-1,82
2 10	+551,77	+25,90	+5437,84	+30,10	-1,64
2 20	+525,46	+25,82	+5387,92	+34,82	-1,44
2 30	+499,21	+25,72	+5338,02	+38,82	-1,24
2 40	+473,31	+25,62	+5288,13	+42,22	-1,06
2 50	+447,98	+25,52	+5238,26	+45,02	-0,88
3 00	+423,38	+25,42	+5188,39	+47,33	-0,62
3 10	+399,64	+25,31	+5138,54	+49,17	-0,50
3 20	+376,88	+25,20	+5088,72	+50,63	-0,37
3 30	+355,15	+25,10	+5038,90	+51,78	-0,23
3 40	+334,47	+24,98	+4989,10	+52,62	-0,09
3 50	+314,87	+24,87	+4939,31	+53,21	+0,04
4 00	+296,32	+24,76	+4889,54	+53,58	+0,13
4 10	+278,83	+24,65	+4839,82	+53,69	+0,29
4 20	+262,35	+24,54	+4790,09	+53,70	+0,39
4 30	+246,86	+24,43	+4740,36	+53,56	+0,50
4 40	+232,30	+24,32	+4690,66	+53,31	+0,58
4 50	+218,65	+24,21	+4640,96	+53,00	+0,68
5 00	+205,83	+24,10	+4591,28	+52,57	+0,73
5 10	+193,82	+24,00	+4541,62	+52,08	+0,81
5 20	+182,56	+23,89	+4491,97	+51,54	+0,88
5 30	+172,01	+23,79	+4442,33	+50,96	+0,96
5 40	+162,12	+23,68	+4392,70	+50,37	+1,02
5 50	+152,85	+23,58	+4343,10	+49,73	+1,09
6 00	+144,16	+23,48	+4293,53	+49,07	+1,16
6 10	+136,01	+23,38	+4243,96	+48,39	+1,24
6 20	+128,37	+23,28	+4194,39	+47,72	+1,28
6 30	+121,19	+23,19	+4144,85	+46,99	+1,29
6 40	+114,46	+23,09	+4095,32	+46,30	+1,36
6 50	+108,14	+23,00	+4045,81	+45,60	+1,41
7 00	+102,19	+22,90	+3996,31	+44,91	+1,46
7 10	+96,61	+22,81	+3946,83	+44,23	+1,50
7 20	+91,35	+22,72	+3897,36	+43,53	+1,55
7 30	+86,39	+22,63	+3847,93	+42,84	+1,56
7 40	+81,74	+22,55	+3798,49	+42,17	+1,60
7 50	+77,34	+22,46	+3749,06	+41,50	+1,63
8 00	+73,20	+22,38	+3699,64	+40,88	+1,68
8 10	+69,29	+22,29	+3650,23	+40,24	+1,70
8 20	+65,60	+22,21	+3600,86	+39,60	+1,72
8 30	+62,11	+22,13	+3551,50	+39,00	+1,75
8 40	+58,82	+22,05	+3502,15	+38,41	+1,79
8 50	+55,71	+21,97	+3452,81	+37,82	+1,82
9 00	+52,75	+21,89	+3403,49	+37,23	+1,84
9 10	+49,97	+21,82	+3354,19	+36,66	+1,86
9 20	+47,32	+21,74	+3304,90	+36,12	+1,88
9 30	+44,81	+21,67	+3255,64	+35,58	+1,91
9 40	+42,44	+21,59	+3206,38	+35,05	+1,93

1	2	3	4	5	6
0° 9'50"	+ 40,18	+21,52	3157,14	+34,57	+1,96
10 00	+ 38,04	+21,45	3107,91	+34,04	+1,98
10 30	+ 32,23	+21,24	2960,30	+32,57	+2,00
11 00	+ 27,23	+21,04	2812,82	+31,23	+2,08
12	+ 19,14	+20,66	2518,31	+28,73	+2,21
13	+ 13,00	+20,31	2224,31	+26,57	+2,32
14	+ 8,27	+19,98	1930,87	+24,64	+2,38
15	+ 4,59	+19,68	1637,96	+23,05	+2,51
16	+ 1,69	+19,39	1345,57	+21,51	+2,58
17	- 0,62	+19,12	1053,73	+20,20	+2,74
18	- 2,47	+18,86	762,41	+18,98	+2,92
19	- 3,96	+18,62	471,65	+17,85	+3,22
20	- 5,16	+18,38	181,42	+16,61	+3,82
21	- 5,77	+18,16	0,00	+15,11	+3,58
22	- 5,72	+17,96		+13,68	+2,54
23	- 5,67	+17,75		+12,40	+2,01
24	- 5,62	+17,56		+11,26	+1,68
25	- 5,57	+17,38		+10,26	+1,43
26	- 5,53	+17,20		+ 9,44	+1,24
27	- 5,49	+17,03		+ 8,71	+1,10
28	- 5,44	+16,87		+ 8,06	+0,98
29	- 5,40	+16,71		+ 7,48	+0,88
30	- 5,37	+16,56		+ 6,95	+0,80
31	- 5,33	+16,41		+ 6,48	+0,73
32	- 5,29	+16,27		+ 6,06	+0,67
33	- 5,26	+16,13			
34	- 5,23	+15,99		+ 5,35	+0,57
35	- 5,19	+15,86			
36	- 5,16	+15,74		+ 4,77	+0,49
37	- 5,13	+15,61			
38	- 5,10	+15,49		+ 4,26	+0,43
39	- 5,07	+15,38			
40	- 5,04	+15,26		+ 3,83	+0,38
41	- 5,01	+15,15			
42	- 4,99	+15,04		+ 3,47	+0,34
43	- 4,96	+14,94			
44	- 4,93	+14,83		+ 3,16	+0,30
45	- 4,91	+14,73			
46	- 4,88	+14,63		+ 2,88	+0,28
47	- 4,86	+14,54			
48	- 4,84	+14,44		+ 2,64	+0,25
49	- 4,81	+14,35			
50	- 4,79	+14,26		+ 2,43	+0,23
51	- 4,77	+14,17			
52	- 4,75	+14,08		+ 2,24	+0,21
53	- 4,72	+14,00			
54	- 4,70	+13,91		+ 2,08	+0,19
55	- 4,68	+13,83			
56	- 4,66	+13,75		+ 1,93	+0,18
57	- 4,64	+13,67			
58	- 4,62	+13,59		+ 1,80	+0,16
59	- 4,60	+13,51			
60	- 4,58	+13,44		+ 1,68	+0,16
1°10'	- 4,41	+12,75		+ 1,23	+0,11
1 20	- 4,26	+12,14		+ 0,94	+0,08
1 30	- 4,13	+11,62		+ 0,74	+0,06
1 40	- 4,01	+11,14		+ 0,60	+0,05
1 50	- 3,90	+10,71		+ 0,50	+0,04
2 00	- 3,80	+10,32		+ 0,42	+0,04
2 10	- 3,71	+ 9,96		+ 0,36	
2 20	- 3,63	+ 9,63		+ 0,31	
2 30	- 3,55	+ 9,32		+ 0,27	
2 40	- 3,48	+ 9,03		+ 0,23	
2 50	- 3,41	+ 8,76		+ 0,21	
3 00	- 3,34	+ 8,50		+ 0,18	+0,02
3 10	- 3,28	+ 8,26			

1	2	3	4	5	6
3°20'	-3,23	+8,03			
3 30	-3,17	+7,82		+0,14	
3 40	-3,12	+7,61			
3 50	-3,07	+7,41			
4 00	-3,02	+7,22		+0,10	+0,01
4 30	-2,89	+6,69		+0,08	0,00
5 00	-2,77	+6,21		+0,07	
5 30	-2,66	+5,79			
6 00	-2,57	+5,40		+0,04	
6 30	-2,48	+5,05			
7 00	-2,40	+4,73		+0,03	
7 30	-2,32	+4,42			
8 00	-2,25	+4,14		+0,03	
8 30	-2,18	+3,87			
9 00	-2,12	+3,62		+0,02	
9 30	-2,06	+3,38			
10 00	-2,00	+3,16		+0,02	
11	-1,90	+2,74			
12	-1,80	+2,36		+0,01	
13	-1,72	+2,02			
14	-1,64	+1,70		+0,01	
15	-1,56	+1,41			
16	-1,49	+1,12		+0,01	
17	-1,43	+0,88			
18	-1,37	+0,64			
19	-1,31	+0,42			
20	-1,26	+0,20		+0,00	
25	-1,04	-0,69			
30	-0,86	-1,40		0,00	
35	-0,72	-1,96			
40	-0,60	-2,42		0,00	
45	-0,51	-2,80			
50	-0,43	-3,12		0,00	
55	-0,36	-3,38			
60	-0,31	-3,59		0,00	
65	-0,26	-3,77			
70	-0,23	-3,91		0,00	
75	-0,20	-4,01			
80	-0,18	-4,08		0,00	
85	-0,17	-4,13			
90	-0,17	-4,14		0,00	

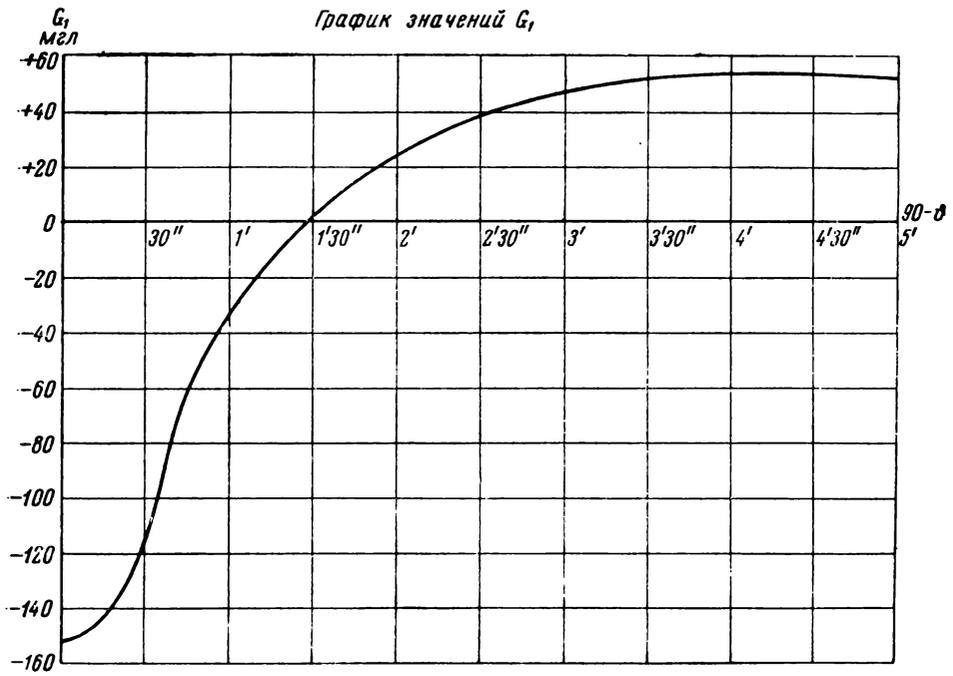


Рис. 1

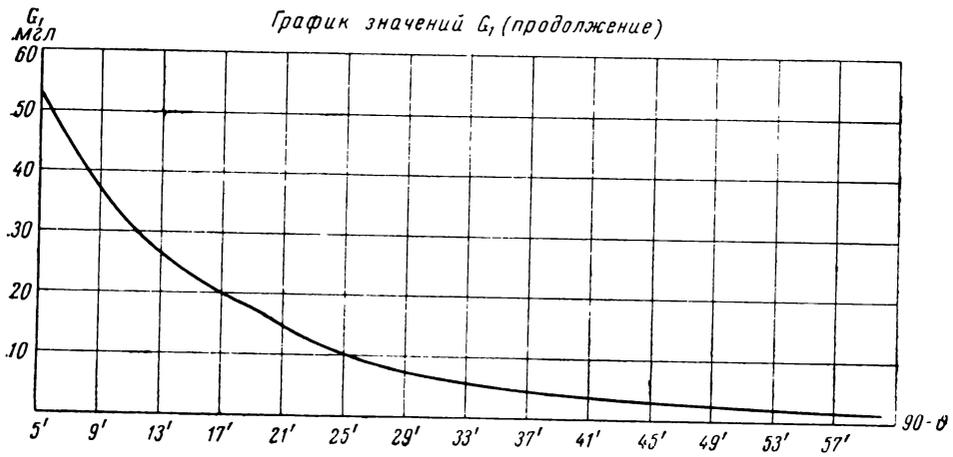


Рис. 2

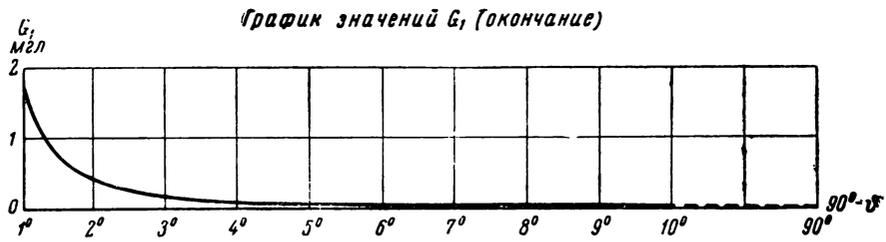


Рис. 3

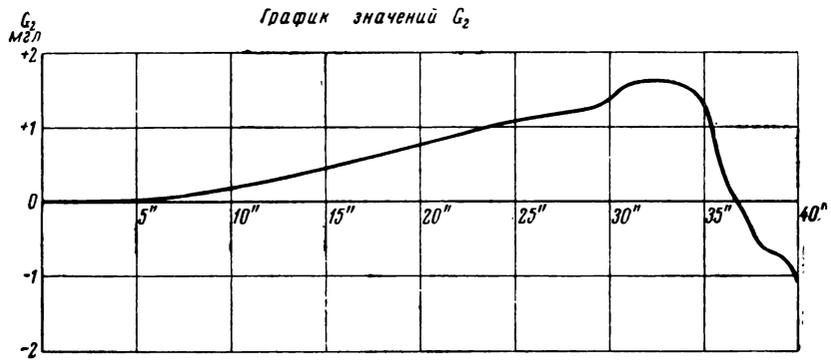


Рис. 4

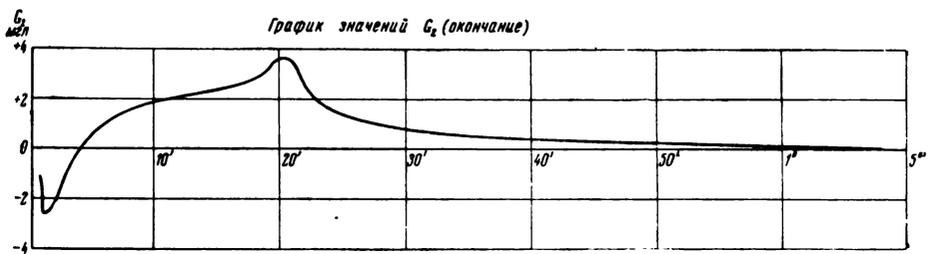


Рис. 5

Л. П. Пеллинен

ВЛИЯНИЕ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ МАСС НА ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

В настоящей статье рассматриваются вопросы практического вычисления характеристик внешнего гравитационного поля Земли по измерениям силы тяжести на ее физической поверхности. Наибольшие затруднения при таком вычислении связаны с учетом влияния топографических масс, и этому вопросу в статье уделено основное внимание. Изложение ведется исходя из разработанной М. С. Молоденским теории изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Все выкладки даны с погрешностью порядка сжатия. При этом условии отсчетную поверхность, которой является поверхность уровенного эллипсоида, можно принимать за сферу и пренебрегать членами порядка $\frac{H}{R}$ (H — нормальная высота, R — радиус отсчетной поверхности).

I. Формулы Молоденского (первое приближение)

Будем исходить из формул Молоденского для вычисления возмущающего потенциала, высот квазигеоида и уклонений отвеса. Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением «гравиметрических» членов этих формул, которые можно определить без привлечения астрономо-геодезических данных. В первом приближении, которым будем ограничиваться в настоящей статье, возмущающий потенциал на физической поверхности Земли получают по формуле [3]

$$\bar{T} = \frac{R}{4\pi} \int (\Delta g + G_1) S(\cos \psi) d\omega, \quad (I.1)$$

где ψ — угол между радиусами-векторами исследуемой и текущей точек;

$R^2 d\omega$ — элемент отсчетной сферы, по которой выполняется интегрирование;

$S(\cos \psi)$ — функция Стокса.

В отличие от формулы Стокса в (I.1) вошла поправка

$$G_1 = R^2 \int \frac{h\chi^{(0)}}{r_0^3} d\omega, \quad (I.2)$$

где $h = H - H_0$ — разность нормальных высот текущей и исследуемой точек;

$$r_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2};$$

$\chi^{(0)}$ — вспомогательная функция, которую применительно к (I.1) можно записать в виде

$$\chi^{(0)} = \frac{\Delta g}{2\pi} + \frac{3}{16\pi^2} \int \Delta g S(\cos \psi) d\omega. \quad (I.3)$$

В работе Молоденского, Еремеева и Юркиной, опубликованной в настоящем выпуске Трудов (стр. 3), поправка G_1 представлена в виде

$$G_1 = g' + g'' = -H_0 R^2 \int \frac{\chi^{(0)} - \chi_0^{(0)}}{r_0^3} d\omega + R^2 \int \frac{H\chi^{(0)} - H_0\chi_0^{(0)}}{r_0^3} d\omega; \quad (I.4)$$

через $\chi_0^{(0)}$ обозначено значение $\chi^{(0)}$ в исследуемой точке.

При вычислении g' имеет значение лишь область, непосредственно примыкающая к исследуемой точке, в которой второй член в (I.3) меняется весьма медленно, и можно принять $\chi^{(0)} - \chi_0^{(0)} = \frac{\Delta g - \Delta g_0}{2\pi}$. Отсюда в соответствии с известной формулой для вычисления вертикального градиента получается

$$g' = -H_0 \frac{d\Delta g}{dH}. \quad (I.5)$$

Значение вертикального градиента относится к исследуемой точке. Величину $H\chi^{(0)}$ в упомянутой работе рассматривают как значение гармонической функции $\Phi = \Sigma \frac{k^{n+1}}{r^{n+1}} [H\chi^{(0)}]_n$ на отсчетной сфере, а следовательно, на основе формулы Молоденского [1945]

$$g'' = -\Sigma_0^n \frac{n}{R} [H\chi^{(0)}]_n, \quad (I.6)$$

где $[H\chi^{(0)}]_n$ — n -ый член разложения $H\chi^{(0)}$ по сферическим функциям*.

При общих исследованиях фигуры Земли выгодно представить в виде разложения по сферическим функциям

$$\bar{T} = R \Sigma_{n=2}^{\infty} \left[\frac{g - \gamma - H \frac{d(g-\gamma)}{dH}}{n-1} \right]_n - \frac{2\pi n}{(n-1)R} [H\chi^{(0)}]_n. \quad (I.7)$$

Формулу для вычисления возмущающего потенциала во внешнем пространстве дадим для наиболее простого, но практически важного случая, когда исследуемая точка удалена от начала координат дальше любой точки физической поверхности. Выгодно в этом случае представить T в виде разложения по сферическим функциям [1]

$$T = \Sigma T_n = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \Sigma_{k>0}^n (\alpha_{nk} \cos kL + \beta_{nk} \sin kL) P_{nk}(\sin B)**, \quad (I.8)$$

где α_{nk} и β_{nk} — стоксовы постоянные, определяемые по формулам

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{nk} &= \varepsilon \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_{\tau} r^n P_{nk}(\sin B) \cos kL f \delta d\tau \\ \beta_{nk} &= \varepsilon \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_{\tau} r^n P_{nk}(\sin B) \sin kL f \delta d\tau \end{aligned} \right\}, \quad (I.9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 \quad \text{при } n=0 \\ \varepsilon &= 2 \quad \text{при } n>0 \end{aligned}$$

* В упомянутой работе Молоденского и др. величины g' и g'' отличаются от принятых здесь на $\sim \frac{\Sigma [H(g-\gamma)]_n}{R} = H_0 \frac{\Sigma (g-\gamma)^n}{R}$. Принятая нами запись лучше соответствует формуле (I.5).

** Формула (I.8) применима и в более общем случае, если используемый в ней ряд можно аналитически продолжить до границы притягивающих масс.

В формуле (I.9) ρ — радиус-вектор текущей точки объема Земли; $f\delta$ — произведение гравитационной постоянной на плотность аномальных масс; интегрирование ведется по всему объему Земли. Постоянные α_{00} , α_{10} , α_{11} и β_{11} , характеризующие массу Земли и положение центра инерции Земли в принятой системе координат, не могут быть определены только по гравиметрическим данным. Что касается других величин (α_{nk} и β_{nk}), то, согласно упомянутой работе Молоденского и др. [3], следует применять формулы:

$$\alpha_{nk} = \varepsilon \frac{(n-k)!}{(n+k)!} R^2 \int_S \rho^n (\chi^{(0)} + \chi^{(1)}) P_{nk}(\sin B) \cos kL d\omega;$$

$$\beta_{nk} = \varepsilon \frac{(n-k)!}{(n+k)!} R^2 \int_S \rho^n (\chi^{(0)} + \chi^{(1)}) P_{nk}(\sin B) \sin kL d\omega;$$

$$\rho = R + H; \quad \chi^{(1)} = \frac{G_1}{2\pi} + \frac{3}{16\pi^2} \int G_1 S(\cos \psi) d\omega.$$

В тех случаях, когда необходимо знать коэффициенты α_{nk} и β_{nk} разложения лишь низких порядков, можно заменить

$$\rho^n = R^n + nR^{n-1} \cdot H.$$

При выводах с точностью порядка сжатия α такая замена возможна лишь при n , удовлетворяющих условию

$$\frac{n^2 H^2}{R^2} < \alpha,$$

или, если положить $\frac{H}{R} < 0,001$, то при значениях n , соответствующих неравенству

$$n < 1000 \sqrt{\alpha} \approx 60.$$

Указанный предел охватывает круг значений n , при которых целесообразно пользоваться разложением по сферическим функциям. Представим

$$\alpha_{nk} = \alpha_{nk}^{\circ} + \delta\alpha_{nk},$$

где с принятой точностью

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{nk}^{\circ} &= \varepsilon \frac{(n-k)!}{(n+k)!} R^{n+2} \int (\chi^{(0)} + \chi^{(1)}) P_{nk}(\sin B) \cos kL d\omega \\ \delta\alpha_{nk} &= \varepsilon n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} R^{n+1} \int H \chi^{(0)} P_{nk}(\sin B) \cos kL d\omega \end{aligned} \right\} \quad (I.10)$$

Аналогичным образом разделим β_{nk} на β_{nk}° и $\delta\beta_{nk}$. Коэффициенты α_{nk}° и β_{nk}° соответствуют по форме стоксову приближению. В этом случае общий член разложения T_n (при $n > 2$) имеет вид

$$T_n' = \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}} \frac{(g - \gamma + G_1)_n}{n-1}.$$

Коэффициенты $\delta\alpha_{nk}$ и $\delta\beta_{nk}$ соответствует поправке к T_n' вида

$$\delta T_n = \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} \frac{4\pi}{2n+1} n [H\chi^{(0)}]_n.$$

Суммируя T_n' и δT_n и подставляя

$$(G_1)_n = - \left[H \frac{d(g-\gamma)}{dH} \right]_n - \frac{2\pi n}{R} [H\chi^{(0)}]_n,$$

получаем

$$T_n = \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}} \left\{ \frac{[g-\gamma - H \frac{d(g-\gamma)}{dH}]_n}{n-1} - \frac{6\pi n}{(n-1)(2n+1)} \frac{[H\chi^{(0)}]_n}{R} \right\}. \quad (1.11)$$

Последним членом при точности выводов, принятой нами, можно пренебречь. Таким образом, из двух членов, входящих в G_1 , на T_n оказывает влияние лишь член g' . Влияние члена g'' , имевшее уже второстепенное значение при представлении низших членов разложения \bar{T}_n , стало пренебрегаемым. Формулы Молоденского для вычисления высот квази-геоида и уклонений отвеса (первое приближение) будут приведены в начале раздела V.

II. Оценка систематического влияния топографических масс на характеристики внешнего гравитационного поля Земли

Будем называть систематическими такие влияния, которые войдут в низшие члены разложения по сферическим функциям возмущающего потенциала на физической поверхности Земли и во внешнем пространстве. Поэтому ограничимся оценкой величин, входящих в формулы предыдущего раздела (1.7) и (1.11), причем только в первые их члены.

Применяя метод косвенной интерполяции, представим Δg в виде

$$\Delta g = \Delta g'' + kH + \Delta g_p, \quad (1.11)$$

где $\Delta g''$ — аномалия Буге; kH — редукция Буге; Δg_p — поправка за рельеф. Наиболее быстро меняющейся в горных районах частью аномалий является член kH . Поэтому при оценке величины $-H \frac{\partial \Delta g}{\partial H}$ ограничимся исследованием влияния только этого члена, которое назовем g'_p . Согласно (1.4) имеем

$$g'_p = \frac{kH_0 R^2}{2\pi} \int \frac{H_0 - H}{r_0^3} d\omega. \quad (1.2)$$

Функция $\frac{H_0 - H}{r_0^3}$ быстро убывает с расстоянием, и при вычислении (1.2) достаточно ограничиться радиусом интегрирования \bar{r}_0 не более нескольких десятков километров. Отсчетную поверхность при этом можно принять за плоскость.

Заменив

$$R^2 d\omega = r_0 dr_0 dA$$

и обозначив

$$\tilde{H}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(r_0) dA,$$

получаем

$$g'_p = kH_0 \int_0^{\bar{r}_0} \frac{H_0 - \tilde{H}(r_0)}{r_0^2} dr_0. \quad (1.3)$$

При разложении g_p' по сферическим функциям выгодно сначала получить средние значения g_p' для достаточно больших площадок σ , а именно найти

$$\bar{g}_p' = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} k H_0 \left[\int_0^{\bar{r}_0} \frac{H_0 - \tilde{H}(r_0)}{r_0^2} dr_0 \right] d\omega. \quad (11.4)$$

Поставим требование, чтобы радиус области σ был значительно больше \bar{r}_0 , и оценим значение \bar{g}_p' в том случае, когда рельеф в пределах области σ может быть представлен в виде системы налагающихся один на другой синусоидальных хребтов.

Представим уравнение каждого хребта в окрестностях исследуемой точки в виде

$$\delta H_i = \Delta_i \sin c_i (x_i + r_0 \cos A_i), \quad (11.5)$$

где x_i — координата исследуемой точки по оси, перпендикулярной хребту, Δ_i — амплитуда хребта, λ_i — длина волны,

$$c_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}.$$

Отсюда

$$\delta \tilde{H}_i(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta H_i(r_0) dA = \Delta_i \sin c_i x_i J_0(c_i r_0),$$

где $J_0(c_i r_0)$ — нулевая функция Бесселя;

$$H_0 - \tilde{H}(r_0) = \Sigma \Delta_i \sin c_i x_i [1 - J_0(c_i r_0)]. \quad (11.6)$$

В среднем по области имеем

$$\bar{g}_p' = \frac{k}{\sigma} \int_{\sigma} \Sigma \Delta_i \sin c_i x_i \left[\int_0^{\bar{r}_0} \frac{\Sigma \Delta_i \sin c_i x_i [1 - J_0(c_i r_0)]}{r_0^2} dr_0 \right] d\omega.$$

При протяженности области σ значительно большей, чем длины любых волн рельефа λ_i , имеем

$$\begin{aligned} \bar{g}_p' &\approx \frac{k}{\sigma} \int_{\sigma} \Sigma \Delta_i^2 \sin^2 c_i x_i \left[\int_0^{\bar{r}_0} \frac{1 - J_0(c_i r_0)}{r_0^2} dr_0 \right] d\omega = \\ &= \frac{k}{2} \Sigma \Delta_i^2 c_i \left| \frac{J_0(c_i r_0) - 1}{c_i r_0} + J_1(c_i r_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(c_i r_0) \right|_{r_0=0}^{r_0=\bar{r}_0}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Функция в прямых скобках очень быстро стремится к единице с возрастанием r_0 . Поэтому для волн рельефа, меньших r_0 , получаем после замены $c_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$

$$\bar{g}_p' \approx k\pi \Sigma \frac{\Delta_i^2}{\lambda_i}. \quad (11.8)$$

Пользуясь этой формулой, можно подсчитать ориентировочно средние величины g_p' в горных районах. Достаточно оценить по топографическим и гипсометрическим картам амплитуду и длины волн рельефа.

Можно, однако, предложить еще более удобный и точный способ расчета. Определим по карте средние значения квадратов разностей высот точек, расположенных на различных расстояниях r_0 одна от другой. Нетрудно убедиться, что в случае, когда рельеф местности может быть представлен уравнением вида

$$H = \Sigma \Delta_i \sin c_i (x_i + r_0 \cos A_i),$$

а длины волн рельефа значительно меньше простираения области σ , то в среднем по области имеем

$$\overline{[H_c - \bar{H}(r_0)]^2} = \Sigma \Delta_i^2 [1 - J_0(c_i r_0)] = \varepsilon(r_0). \quad (\text{II.9})$$

Отсюда, согласно (II.7), получаем

$$\bar{g}_p' \approx \frac{k}{2} \int_0^{\bar{r}_0} \frac{\varepsilon(r_0)}{r_0^2} dr_0. \quad (\text{II.10})$$

Используя эту формулу, нет необходимости отыскивать отдельные амплитуды и длины волн рельефа.

Оценим теперь среднее значение поправки за рельеф, входящей в (I.2). С достаточной для приближенных расчетов точностью примем

$$\begin{aligned} \Delta g_p &= -\frac{k}{2\pi} \int_0^{\bar{r}_0} \int_0^{2\pi} \int_{H_0}^H r_0 \frac{H - H_0}{r^3} dr_0 dA dH = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\bar{r}_0} \int_0^{2\pi} r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) dr_0 dA \approx \\ &\approx -\frac{k}{4\pi} \int_0^{\bar{r}_0} \int_0^{2\pi} \frac{(H - H_0)^2}{r_0^2} dr_0 dA. \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Сравнивая с (II.8) и (II.9), в среднем по области σ получаем

$$\overline{\Delta g_p} = \frac{1}{\sigma} \int \Delta g_p d\sigma = -\frac{k}{2} \int_0^{\bar{r}_0} \frac{\varepsilon(r_0)}{r_0^2} dr_0 = -\bar{g}_p'. \quad (\text{II.12})$$

Таким образом, среднее влияние топографических масс \bar{g}_p' будет положительным и в первом приближении равно по абсолютной величине средней поправки за рельеф Δg_p в аномалии силы тяжести. Из суммы $g - \gamma + g' = g - \gamma - H \frac{\partial \Delta g}{\partial H}$,

взятой в среднем для большого участка, член g_p' выпадет и получим

$$\overline{g - \gamma - H \frac{\partial \Delta g}{\partial H}} = \overline{\Delta g'' + kH + \Delta g_p + g_p' + g_1''} = \overline{\Delta g'' + kH + g_1''},$$

где g_1'' — влияние аномалий Буге на g' , которое во много раз меньше всей величины g' . Следовательно, при разложении возмущающего потенциала по сферическим функциям можно пользоваться в первом приближении рядом Стокса, полагая при $n \geq 2$

$$T_n = \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}} \frac{[\Delta g'' + kH]_n}{n-1} = \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}} \frac{[(g - \gamma) - \Delta g_p]_n}{n-1}. \quad (\text{II.13})$$

При нахождении \bar{T}_n на физической поверхности полагаем $R = \rho$.

Можно дать простую геометрическую интерпретацию полученной формуле*. Построим сглаженную физическую поверхность таким обра-

* На эту интерпретацию указал автору М. С. Молоденский.

зом, чтобы она прошла через все гравиметрические и астрономо-геодезические пункты. Удалим топографические массы, выступающие над новой поверхностью, и заполним понижения реальной физической поверхности. Тогда при вычислении T_n будет более подходящим, чем до сглаживания стоксово приближение, чему и соответствует (II.13). Член $(-\Delta g_p)$ будет иметь смысл поправки в аномалии силы тяжести за перемещение масс при сглаживании физической поверхности. Соответствующие редукции должны быть введены в возмущающий потенциал и отклонения отвеса. Редукции будут минимальными (в особенности в возмущающий потенциал), если средние высоты сглаженной поверхности близки к средним высотам реальной физической поверхности. В тех случаях, когда высоты пунктов наблюдений систематически отличаются от высот местности, можно провести сглаженную поверхность систематически выше или ниже первоначального ее положения. Все выводы при этом останутся в силе. В тех случаях, когда интервалы между пунктами наблюдений больше длин волн рельефа, главным образом влияющих на g_p' , можно пользоваться формулой (II.13). При наличии более плотной гравиметрической съемки необходимо и после сглаживания применять формулы Молоденского первого и последующих приближений.

В следующем разделе будут приведены результаты некоторых подсчетов, которые показывают порядок величин \bar{g}_p' и дают статистическую характеристику влияния рельефа в горных районах.

III. Численная оценка влияния топографических масс на G_1

Пример 1. Для ряда горных районов различными авторами получены поправки за рельеф в гравиметрические пункты. Используя эти данные, мы подсчитали средние поправки \bar{g}_p' для нескольких высокогорных районов (табл. 1).

Таблица 1

Район	\bar{g}_p' , мгл
Большой Кавказ	+16
Средняя Азия	+17
Швейцария	+20
Итальянские Альпы	+22
Гималаи	+19

Выбирались пункты непосредственно на высокогорных участках. Как видно, для всех пяти районов величины \bar{g}_p' очень близки, и такого же порядка величины можно предполагать в других высокогорных районах с молодой складчатостью. Отметим, что на плоскогорьях поправки за рельеф значительно меньше: на Памире — порядка 5—8 мгл, еще меньше в Армении. Поправки порядка 5 мгл характерны для средневысотных районов (с максимальными высотами до 2 км), примыкающих к рассматриваемым высокогорным участкам.

Пример 2. Для двух районов (Большой Кавказ, Карпаты) В. А. Тарановым по формуле (II.10) были проведены статистические подсчеты величин \bar{g}_p' . В каждом из районов были выбраны участки, типичные для данных районов. На эти участки накладывали квадратную палетку и подсчитывали разности высот между узлами

палетки, лежащими на одних прямых, как в направлении главного простирания Карпат и Кавказа, так и в поперечном направлении. Для подсчета величин ϵ , в зависимости от величин r_0 , использовались карты различных масштабов. Найденные значения ϵ в единицах 10^4 м^2 приведены в табл. 2.

Таблица 2

а) Карпаты

$r_0, \text{ км}$	3	6	12	18	24
Масштаб карты	Болеe высокий район				
1: 500 000	4,0	8,3			
1: 1 000 000		8,4	14,7	18,8	18,1
	Менее высокий район				
1: 1 000 000		3,7	7,0	9,9	11,5

б) Кавказ

$r_0, \text{ км}$	0,3	0,6	1,2	1,5	1,8	2,4	3,0
Масштаб карты							
1: 100 000	1,3	3,5	9,5	—	16,3	21,4	—
1: 500 000	—	—	—	12,7	—	—	20,2

в) Кавказ

$r_0, \text{ км}$	9	18	36
Масштаб карты			
Карта средних высот участков $5' \times 7,5'$	16	38	96

Как видно из табл. 2, различие в масштабах карт мало отразилось на результатах подсчетов. Бóльшее влияние оказало предварительное осреднение аномалий по участкам $5' \times 7,5'$. В этом случае на Кавказе влияние большой короткопериодической волны рельефа выпадает из подсчетов, и результаты их характеризуют лишь влияние более длинных волн. Поэтому, чтобы получить суммарное значение ϵ , прибавим к найденным величинам значение $\epsilon = 20 \cdot 10^4 \text{ м}^2$ при $r_0 = 3,0 \text{ км}$, в которое вошло влияние короткопериодических волн.

Наибольшее влияние на \bar{g}'_p в районе на Кавказе оказывает зона в пределах $3,0 \text{ км}$ от гравиметрического пункта. При этом в пределах $1,2 \text{ км}$ ϵ аппроксимируется формулой $\epsilon = 0,07r_0^{1,4} \text{ км}^2$. Принимая эту формулу для значений $r_0 < 1,2 \text{ км}$, после интегрирования получаем влияние зоны

до 1,2 км	10,6	мгл
1,2—3,0 „	4,4	„
3—36 „	6,5	„
$\bar{g}'_p =$		21,5 мгл

Более дальние зоны дают очень малое влияние. Результаты подсчетов согласуются с непосредственной оценкой средних поправок за рельеф, приведенных в табл. 1.

Для района Карпат в ближайших зонах была принята вместо ϵ функция с тем же показателем при r_0 , что и на Кавказе. В результате численного интегрирования получено для высокого района $\bar{g}_p' = 3,7$ мгл, для более умеренного по колебаниям высот участка $\bar{g}_p' = 1,0$ мгл.

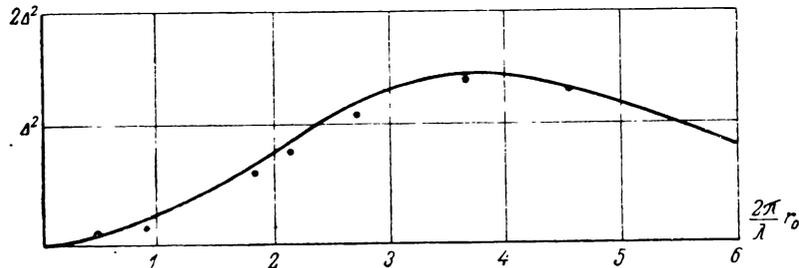


Рис. 1

Если бы рельеф в пределах области интегрирования при вычислении \bar{g}_p' выражался одной синусоидальной волной, то ϵ (рис. 1) аппроксимировалось бы уравнением

$$\epsilon = \Delta^2 \left[1 - J_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_0 \right) \right].$$

Оказывается, что это уравнение хорошо согласуется с результатами, приведенными для района Кавказа при $r_0 = 3$ км, если принять $\lambda = \frac{2\pi}{1,5}$ км ≈ 4 км, $\Delta^2 = 0,154$ км². Разность высот вершин и точек в долинах равна $2\Delta = 0,8$ км.

Соответствующие наблюдения значения отмечены на графике точками. Принимая найденные параметры, по формуле (II.8) получаем $\bar{g}_p' = 14$ мгл, что находится в хорошем согласии с ранее найденным влиянием зоны радиусом 3 км.

Полученная волна рельефа имеет основное значение при вычислении по формулам Молоденского и при получении поправок за рельеф. Конечно, следовало бы провести исследования и на других участках и в других высокогорных районах, однако качественные выводы можно сделать исходя из полученного одного результата. В соответствии с длиной главной волны рельефа следует ставить требования к масштабу используемых топографических карт при подсчете влияния масс рельефа и к частоте гравиметрических пунктов вблизи исследуемых точек в горах, достаточной для полноценного использования формул Молоденского после того, как влияние топографии удалено. Если рельеф сглаживать таким образом, чтобы сохранить главную волну рельефа, то принятая в вычислениях физическая поверхность будет иметь наклоны α до 32° ($\text{tg } \alpha = 0,6$).

На Карпатах прослеживается волна рельефа длиной около 25 км и амплитудой $\Delta \approx 0,35$ км, однако на нее накладывается более короткая волна с меньшей амплитудой, которую по использованным картам не удалось четко выявить.

Пример 3. Результаты подсчетов, приведенные выше, нами были использованы для приближенной оценки влияния топографических масс

Таблица 3

Границы трапеций по долготе	Границы трапеций по широте					
	+75°	+45°	+15°	-15°	-45°	-75°
+ 15°	1,0 — 0,6	1,6 0,5	— — —	— 0,3 —	— — —	— — —
	— — 0,2	1,6 — —	0,2 0,8 0,1	0,2 0,2 —	— — —	— — —
+ 45°	— — —	3,7 0,1 1,2	4,4 1,6 0,1	— — —	— — —	— — —
	— — —	3,0 2,4 —	0,4 — —	0,4 — —	— — —	— — —
	— 0,2 —	0,8 3,3 0,1	— — —	— — —	— — —	— — —
	— — —	7,6 3,5 —	— — —	— — —	— — —	— — —
+ 75°	— — 0,8	7,9 7,7 —	0,2 — —	— — —	— — —	— — —
	— — 5,7	6,8 9,4 0,3	— — —	— — —	— — —	— — —
+105°	0,2 — 3,4	4,7 11,0 2,9	0,2 1,1 —	— — —	— — —	— — —
	— 1,2 1,4	1,1 1,5 0,2	0,2 0,6 0,4	— — —	— — —	— — 0,4
	— 1,6 0,4	0,2 0,4 0,4	0,6 1,6 0,2	— — —	— — —	— — 0,7
	0,4 1,0 0,4	0,6 0,4 —	0,1 0,2 —	— — —	— — —	— — 0,2
+135°	1,0 2,0 0,4	1,3 0,1 —	— 1,6 0,4	— — —	— — —	— — —
	0,2 1,4 —	— — —	— — 0,4	— 0,1 0,2	— — —	— — —
+165°	0,5 0,8 0,4	— — —	— — 0,1	— — —	— — —	— — —
	0,2 0,2 —	— — —	— — —	— — 0,8	— — —	— — —
	1,0 — —	— — —	— — —	— — 0,1	— — —	— — —
	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
-165°	0,2 0,6 0,1	— — 0,2	— — —	— — —	— — —	— — —
	1,2 1,6 —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
	0,6 2,2 —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
-135°	0,2 3,2 1,0	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
	— 0,4 3,4	2,6 0,4 —	— — —	— — —	— — —	— — —
	— — 0,8	3,2 0,8 0,2	— — —	— — —	— — —	— — —
-105°	— — —	— 0,2 2,8	— — —	— — —	— — —	— — —
	— — —	— — 0,8	0,7 — —	— — —	— — —	— — —
	— — —	0,1 — —	1,3 2,8 3,2	— — —	— — —	— — —
- 75°	0,8 — —	— — 0,2	2,4 0,8 2,2	5,6 5,6 1,4	1,5 — 0,8	— — —
	0,4 0,2 —	— — —	0,4 0,2 —	0,9 — —	— — 1,5	— — —
	0,4 — —	— — —	— — —	— 0,1 —	— — —	— — —
- 45°	1,0 — —	— — —	— — —	0,2 — —	— — —	— — —
	1,0 — —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
	0,1 — —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
- 15°	— — —	0,2 0,8 —	— — —	— — —	— — —	— — —
	— 0,2 0,2	1,4 — —	— — —	— — —	— — —	— — —
+ 15°	0,2 0,6 2,0	0,8 — —	0,3 — —	— — —	— — —	— — —

на ошибки коэффициентов разложения возмущающего потенциала по сферическим функциям. Как видно из формулы (II.13), для этого необходимо получить коэффициенты разложения поправки за рельеф. Так как по нашим подсчетам средние поправки за рельеф имеют один порядок для районов с одинаковым характером складчатости, мы смогли при ориентировочной оценке приписывать необследованным однотипным районам те же средние величины поправок. В результате были выделены на поверхности суши две группы участков, одним из которых была приписана поправка 15 мгл, а другим 5 мгл. Для всей остальной поверхности Земли поправки принимались равными нулю. В табл. 3 даны средние значения поправок g'_p , оцененные по трапециям $10^\circ \times 10^\circ$, принятым Джеффрисом (1941, 1943). Принимая и дальше порядок вычислений Джеффриса, нами были получены коэффициенты разложения до третьего порядка, указанные в табл. 4. Для наглядности даны коэффициенты при нормированных сферических функциях, которые связаны с обычными сферическими функциями соотношением

$$\bar{P}_{nk} = P_{nk} \sqrt{(2n+1) \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \epsilon}; \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon = 1 \text{ при } k=0 \\ \epsilon = 2 \text{ при } k>0 \end{array} \right\}. \quad (\text{III.1})$$

В табл. 5 приведены для сравнения коэффициенты разложения силы тяжести по сферическим функциям, полученные Каула [8]. Как видно, систематические погрешности его коэффициентов при использовании их для получения возмущающего потенциала при помощи ряда Стокса составляют в среднем 16%, что значительно больше обычно предполагаемой ошибки ряда Стокса.

Таблица 4

n	k	A_{nk} , мгл	B_{nk} , мгл
0	0	+0,39	—
1	0	+0,24	—
1	1	+0,08	+0,18
2	0	-0,07	—
2	1	-0,00	+0,32
2	2	-0,28	+0,03
3	0	-0,21	—
3	1	-0,05	+0,06
3	2	-0,28	+0,19
3	3	-0,07	-0,14

Среднее
квадратическое
значение $\pm 0,18$ мгл

Таблица 5

n	k	A_{nk} , мгл	B_{nk} , мгл
0	0	. . .	—
1	0	0	—
1	1	0	0
2	0	. . .	—
2	1	0	0
2	2	+0,70	-0,62
3	0	-0,61	—
3	1	+1,03	+1,48
3	2	+0,57	+0,29
3	3	+1,91	+1,85

Среднее
квадратическое
значение $\pm 1,15$ мгл

(без членов $A_{0,0}$ и $A_{2,0}$)

Полученный нами результат сходен с результатом исследований на модели сферического тора в статье Молоденского, Еремеева и Юркиной в настоящем сборнике трудов ЦНИИГАиК (см. стр. 3).

IV. Выделение влияния топографических масс из аномалий силы тяжести

Учет влияния рельефа является причиной серьезных затруднений при определении высот квазигеоида и уклонов отвеса по измерениям силы тяжести на физической поверхности Земли. Естественно поэтому полностью исключить влияние топографических масс из аномалий силы тяжести и оперировать в остаточном гравитационном поле, а в дальнейшем прибавить влияние топографии к найденным величинам. В том случае, когда достаточно выделить влияние небольшого топографического массива [5], такой прием достаточно прост. Вычисление влияния топографии, однако, становится громоздкой операцией, если речь идет об удалении влияния всех топографических масс выше уровня моря, например при общем исследовании фигуры Земли. Возникающие трудности можно ослабить, применив порядок вычислений, описанный в разделе V. Для применения предлагаемых в нем формул следует представить топографическую редукцию аномалий силы тяжести в несколько необычном виде, что будет сделано ниже.

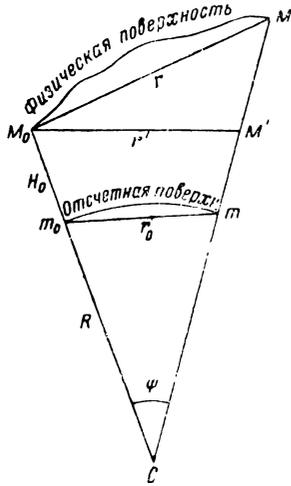


Рис. 2

Представим влияние топографических масс на аномалии силы тяжести в виде суммы двух членов

$$g_p = -\frac{3}{2} \frac{T_p}{\rho_0} - \left(\frac{\partial T_p}{\partial \rho_0} + \frac{T_p}{2\rho_0} \right). \quad (IV.1)$$

Здесь T_p — влияние топографических масс на возмущающий потенциал; $\rho_0 = M_0 C = R + H_0$ (рис. 2).

Имеем

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial T_p}{\partial \rho_0} + \frac{T_p}{2\rho_0} \right) = \\ & = -\frac{f\delta}{2\rho_0} \int_{\omega}^{\rho} \int_R^{\rho} \frac{\rho'^2 - \rho_0^2}{r'^3} \rho'^2 d\omega d\rho', \quad (IV.2) \end{aligned}$$

где $\rho' = CM'$ — радиус-вектор текущей точки M' внутри топографических масс, r' — расстояние точки M' от исследуемой M_0 ; δ — плотность топографических масс.

Выделим в (IV.2) влияние сферического слоя толщиной H_0 . Оно равно

$$2\pi f\delta H_0 \left(1 - \frac{H_0}{\rho_0} + \frac{H_0^2}{3\rho_0^2} \right).$$

Остается найти интеграл

$$-\frac{f\delta}{2\rho_0} \int_{\omega}^h \int_{\delta}^h \frac{\rho'^2 - \rho_0^2}{r'^3} \rho'^2 d\omega dh.$$

Заменяем

$$\rho'^2 - \rho_0^2 = 2h\rho_0 \left(1 + \frac{h}{2\rho_0}\right); \quad \rho'^2 = \rho_0^2 \left(1 + \frac{2h}{\rho_0} + \frac{h^2}{\rho_0^2}\right);$$

$$r'^2 = \bar{r}'^2 + \bar{r}_0^2 \frac{h}{\rho_0}; \quad \bar{r}_0 = 2\rho_0 \sin \frac{\psi}{2} = \frac{\rho_0}{R} r_0; \quad \bar{r}'^2 = \bar{r}_0^2 + h^2;$$

где $h = \rho' - \rho_0$.

Отсюда

$$-\frac{f\delta}{2\rho_0} \int_{\omega}^{\rho} \int_R^{\rho} \frac{\rho'^2 - \rho_0^2}{r'^3} \rho'^2 d\omega dh = 2\pi f\delta H_0 \left(1 - \frac{H_0}{\rho_0} + \frac{H_0^2}{3\rho_0^2}\right) -$$

$$-f\delta \rho_0^2 \int_{\omega}^h \int_0^h \frac{hd\omega dh}{r'^3} - f\delta \rho_0 \int_{\omega}^h \int_0^h \frac{h^2}{r'^3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{h^2}{r'^2}\right) d\omega dh. \quad (IV.3)$$

Второй член формулы (IV.3), который назовем Δg_p , по формальной записи согласуется с формулой (II.11) для поправки за рельеф (за отклонение рельефа от высоты исследуемой точки), если при ее получении пренебрегать кривизной Земли. Так как под интеграл входит множитель \bar{r}'^{-3} , то и по существу основную часть этого члена составляет поправка за рельеф. Разница состоит в том, что, учитывая эту поправку, интегрирование распространяют лишь на ближайшие окрестности гравиметрического пункта (в радиусе не более 200 км) и иногда даже добавляют дополнительный член за ограничение радиуса интегрирования. В нашем же случае интегрирование должно распространяться, строго говоря, на всю поверхность Земли, а практически в высокогорных районах на зону радиусом 1000 км и более. Чтобы оценить, как влияет ограничение радиуса интегрирования, примем, что высоты неучтенной поверхности равны нулю. Этот предельный случай типичен, поскольку такое значение H имеет на поверхности океанов и, по существу, в равнинных районах. Заменяя с достаточной точностью $r = r_0$, получаем

$$0 < f\delta \rho_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\psi_0}^{\pi} \int_0^h \frac{h \sin \psi d\alpha d\psi dh}{r'^3} < \frac{\pi f\delta H_0^2}{r_{\psi_0}}.$$

При $H_0 = 5$ км и $r_{\psi_0} = 500$ км получаем верхний предел, равный 2,5 мгл. Такой величиной мы пренебрегать уже не можем. Требования к точности определения высот H в дальних зонах весьма невелики. Интегрирование можно проводить с осреднением высот по крупным участкам. Применительно к дальнейшему изложению выгодно представить

$$\delta g_p = -f\delta \rho_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\psi_0}^{\pi} \int_0^h \frac{h \sin \psi d\alpha d\psi dh}{r'^3} = -\frac{\pi f\delta H_0^2}{r_{\psi_0}} +$$

$$+ f\delta \frac{H_0}{2R} \int_{u_0}^1 \int_0^{2\pi} \frac{H du d\alpha}{u^2} - \frac{f\delta}{4R} \int_{u_0}^1 \int_0^{2\pi} \frac{H^2 du d\alpha}{u^2}, \quad (IV.4)$$

где $u = \sin \frac{\psi}{2}$.

Третий член в (IV.3) имеет порядок $\Delta g_p \frac{H}{R}$, а последующие незаписанные члены — еще более высокий. Всеми ими можно пренебречь. С той же погрешностью $\frac{H}{R}$ можно заменить ρ_0 на R и отбросить в первом члене множитель в скобках. Таким образом,

$$g_p = 2\pi f\delta H_0 - \frac{3}{2} \frac{T_p}{R} + \Delta g_p. \quad (\text{IV.5})$$

Аномалия силы тяжести после удаления топографических масс (полная топографическая аномалия) будет равна

$$\tilde{\Delta}g'' = g - \gamma - g_p = \Delta g'' + \frac{3}{2} \frac{T_p}{R} - \varepsilon g_p. \quad (\text{IV.6})$$

В этой формуле $\Delta g''$ — неполная топографическая аномалия, равная разности аномалии Буге и поправки за рельеф в некоторой ближайшей зоне. Поправку за рельеф εg_p в дальних зонах целесообразно выделить по причинам, которые будут разъяснены в дальнейшем.

V. Выделение влияния топографических масс при вычислении высот квазигеоида и уклонений отвеса

При вычислении высот квазигеоида и уклонения отвеса целесообразно выделять влияние топографических масс только из гравиметрической их части. Если ограничиваться формулами первого приближения, то речь будет идти о величинах [3]:

$$\bar{\zeta} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int (g - \gamma + G_1) S(\cos \psi) d\omega; \quad (\text{V.1})$$

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int (g - \gamma + G_1) \frac{dS}{d\psi} \cos A d\omega - \left(g - \gamma + \frac{2\gamma\zeta}{R} \right) \frac{dH}{R dB}; \quad (\text{V.2})$$

$$\bar{\eta} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int (g - \gamma + G_1) \frac{dS}{d\psi} \sin A d\omega - \left(g - \gamma + \frac{2\gamma\zeta}{R} \right) \frac{dH}{R \cos B dL}. \quad (\text{V.3})$$

Представим $\bar{\zeta}$ (и соответственно $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$) в виде суммы влияния топографических $\bar{\zeta}_p$ масс и влияния остаточных аномальных ζ_a масс. Величину ζ_a можно получить по формуле (V.1), подставив в нее вместо $(g - \gamma + G_1)$ величину $(\tilde{\Delta}g'' + G_1'')$, где

$$G_1'' \approx \frac{R^2}{2\pi} \int \frac{\bar{H} - \bar{H}_0}{r_0^3} \tilde{\Delta}g'' d\omega. \quad (\text{V.4})$$

Высоты \bar{H} и \bar{H}_0 относятся к сглаженной физической поверхности, о полезности перехода к которой уже говорилось ранее. Действительно, проведенное в разделе III статистическое исследование рельефа в районе Кавказа показало, что наиболее важные при использовании формул Молоденского волны рельефа могут иметь длины порядка нескольких км. Гравиметрические пункты в высокогорных районах, как правило, отстоят один от другого значительно дальше и расположены преимущественно в горных долинах. Это схематически показано на рис. 3. После удаления топографических масс более уверенно выполняется интерполяция аномалий $\tilde{\Delta}g''$ не по реальной физической поверхности, а по сглаженной поверхности, не имеющей значительных уклонов и проходящей через гравиметрические пункты.

В случае очень редкой гравиметрической съемки при сглаживании физической поверхности следует исходить из зависимости изменений топографических аномалий от изменений высот, осредненных по тем или иным площадкам. Эта зависимость объясняется изостатической компенсацией. Она слабо выражена при малых размерах участков, но с увеличением их размеров проявляется все отчетливее и, по-видимому, наиболее четко для трапеций со сторонами порядка 100—200 км.

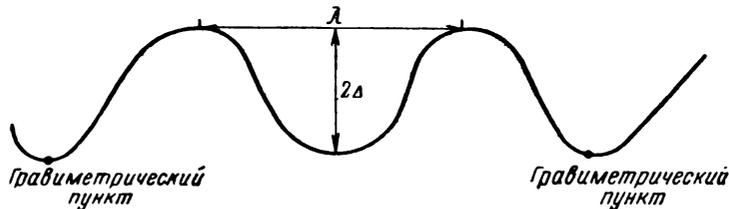


Рис. 3

Начиная с этого расстояния, следует применять метод косвенной интерполяции топографических аномалий через сглаженные высоты рельефа, подобно тому, как при меньших расстояниях следует интерполировать аномалии в свободном воздухе через топографические аномалии и обычные высоты.

Дальнейшее осреднение высот приведет к систематическим ошибкам интерполяции силы тяжести. Конечно, вопрос о размерах участков и коэффициентах корреляции топографических аномалий и осредненных высот должен быть предметом специального статистического исследования. При более плотной съемке размеры площадок должны соответствовать средним расстояниям между гравиметрическими пунктами, однако основная волна длиной порядка нескольких километров, как правило, будет при осреднении исключена.

В соответствии с (I.4) основную часть G_1'' составит член

$$g_a' = -\frac{\bar{H}_0 R^2}{2\pi} \int \frac{\tilde{\Delta g}'' - \tilde{\Delta g}_0''}{r_0^3} d\omega = -\bar{H}_0 \frac{d\tilde{\Delta g}''}{dH}. \quad (\text{V.5})$$

По данным Бодемюллера [6], производная $\frac{d\tilde{\Delta g}''}{dH}$ в несколько раз меньше $\frac{d\Delta g}{dH}$.

Если представить

$$\tilde{\Delta g}'' = \Delta g''' - c\bar{H},$$

где c — коэффициент корреляции $\tilde{\Delta g}''$ и \bar{H} , а $\Delta g'''$ — остаточная аномалия, то главную часть в g_a' даст член $c\bar{H}$.

В тех же обозначениях, что и в формуле (V.4), имеем для указанного влияния

$$g_a' \approx -\frac{c\bar{H}_0 R^2}{2\pi} \int \frac{1}{r_0^3} (\bar{H}_0 - \bar{H}) d\omega. \quad (\text{V.6})$$

Как бы тщательно ни были удалены топографические массы с принятием некоторой их средней плотности, нет никакой уверенности, что в результате этого исключаются систематические ошибки интерполяции, связанные с преимущественным расположением гравиметрических пунктов в долинах. Местные отличия фактических значений средних плотно-

стей отдельных горных хребтов, систематическое различие плотностей под хребтами и горными долинами, наличие подземной складчатости короткого периода — все это делает выводы как местных, так и общих исследований фигуры Земли неуверенными, пока расстояние между пунктами наземной съемки больше, чем половина волны рельефа. Выходом из положения при общих исследованиях фигуры Земли является аэрогравиметрическая съемка в горах, которая будет отнесена к гладкой «физической поверхности», расположенной выше уровня гор. При детальнейших местных исследованиях в горах придется проводить съемку сгущения вблизи исследуемых точек с равномерным распределением гравиметрических пунктов по высоте.

Остается найти влияние топографических масс

$$\bar{\zeta}_p = \frac{\bar{T}_p - \bar{T}_{p_0} - \bar{T}_{p_1}}{\gamma}.$$

Величина \bar{T}_p равна полному влиянию топографических масс на возмущающий потенциал в точках физической поверхности; \bar{T}_{p_0} и \bar{T}_{p_1} — нулевой и первый член в формальном разложении \bar{T}_p по сферическим функциям.

Выделяя, как и в разделе IV, влияние сферического слоя, толщиной H_0 , с точностью $\frac{H}{R}$ получаем

$$\bar{T}_p = 4\pi f\delta H_0 R + f\delta R^2 \int_{\omega} \ln \frac{r+h}{r_0} d\omega. \quad (V.7)$$

Разложив $\ln \frac{r+h}{r_0}$ в ряд по степеням $\frac{h}{r_0}$ и представив

$$4\pi f\delta H_0 R = f\delta R^2 \int_{\omega} \frac{H_0}{r_0} d\omega,$$

находим

$$\bar{T}_p = \bar{T}_p^{\circ} + \Delta\bar{T}_p, \quad (V.8)$$

где

$$\bar{T}_p^{\circ} = f\delta R^2 \int_{\omega} \frac{H}{r_0} d\omega; \quad (V.9)$$

$$\Delta\bar{T}_p = f\delta R^2 \int_{\omega} \left(-\frac{1}{6} \frac{h^3}{r_0^3} + \frac{3}{40} \frac{h^5}{r_0^5} \right) d\omega. \quad (V.10)$$

Величина \bar{T}_p° обусловлена влиянием на потенциал топографически масс, сконденсированных на поверхности $H_0 = \text{const}$, проходящей через исследуемую точку, а $\Delta\bar{T}_p$ — разность потенциалов топографически масс до и после конденсации.

Величину $f\delta H$ в (IV.9) можно рассматривать как плотность простого слоя на поверхности сферы. Введем новую функцию g_p° , связанную с $f\delta H$, интегральным уравнением

$$g_p^{\circ} = 2\pi f\delta H - \frac{3}{2} f\delta R \int_{\omega} \frac{H}{r_0} d\omega = 2\pi f\delta H - \frac{3}{2} \frac{\bar{T}_p^{\circ}}{R}. \quad (V.11)$$

В результате решения этого уравнения получаем

$$T_p^{\circ} = \frac{R}{4\pi} \int g_p^{\circ} S(\cos \psi) d\omega + \bar{T}_{p_0} + \bar{T}_{p_1}. \quad (V.12)$$

Подставляя (V.8) в (V.6) и учитывая (V.12), найдем

$$\bar{\zeta}_p = \frac{R}{4\pi\gamma} \int g_p^\circ S(\cos \psi) d\omega - \frac{\Delta\bar{T}_{p0} + \Delta\bar{T}_{p1} + \Delta\bar{T}_p}{\gamma}.$$

Суммируя $\bar{\zeta}_a$ и $\bar{\zeta}_p$, получаем

$$\bar{\zeta} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta\tilde{g}'' + G_1'' + g_p^\circ) S(\cos \psi) d\omega + \frac{\Delta\bar{T}_p - \Delta\bar{T}_{p1} - \Delta\bar{T}_{p0}}{\gamma}.$$

Заменяем

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{g}'' + G_1'' + g_p^\circ &= \Delta g'' + \frac{3}{2} \frac{\Delta T_p}{R} - \delta g_p + G_1'' + 2\pi f \delta H \approx \\ &\approx \Delta g'' + 2\pi f \delta H + \frac{3}{2} \frac{\Delta T_p}{R} + (g_a' - \delta g_p). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta g'' + 2\pi f \delta H + \frac{3}{2} \frac{\Delta T_p}{R} + g_a' - \delta g_p) S(\cos \psi) d\omega + \\ &+ \frac{\Delta T_p - \Delta T_{p1} - \Delta T_{p0}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

Дадим оценку второстепенных членов. Согласно (V.6).

$$g_a' \approx -\frac{c\bar{H}_0}{2\pi} R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \frac{\bar{H}_0 - \bar{H}}{r_0^3} \sin \psi d\alpha d\psi - \frac{c\bar{H}_0^2}{2r_{\psi_0}} - \frac{c\bar{H}_0}{\delta\pi R_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\bar{H} d\alpha du}{u^2}.$$

Первый член в этой формуле определяет влияние на g_a' некоторой ближайшей зоны радиуса ψ_0 . Этот член значительно меньше поправки за рельеф за счет той же зоны, так как $\bar{H}_0 - \bar{H}$ изменяется более плавно, чем $H_0 - H$. Во втором члене при наличии общей изостатической компенсации рельефа можно принять $c\bar{H}_0 = c\bar{H} = 2\pi f \delta H_0$.

В таком случае указанный член почти компенсирует главный член поправки δg_p , равный $-\frac{\pi f \delta H_0^2}{r_{\psi_0}}$, и оцененный выше. Остающиеся члены поправок g_a' и δg_p имеют второстепенное значение и пренебрегаемы, если в область интегрирования, ограниченную радиусом ψ_0 , полностью входит горный район, в котором расположена исследуемая точка.

Член $\frac{\Delta\bar{T}_p}{\gamma}$ в самом худшем случае не превышает нескольких дециметров. Чтобы показать это, подсчитаем его величину для вершины конической горы. Имеем

$$\frac{\Delta\bar{T}_p}{\gamma} = -\frac{\pi f \delta R^2}{3} \int_0^{\psi_0} \kappa^3 \sin \psi d\psi + \frac{\pi f \delta R^2}{3} H_0^3 \int_{\psi_0}^{\pi} \frac{\sin \psi d\psi}{r_0^3},$$

где ψ_0 — сферическое расстояние от вершины до подошвы горы. В пределах поверхности горы $\kappa = -\frac{H_0}{r_0} = \text{const}$, вне горы $H = 0$. Отсюда

$$\frac{\Delta\bar{T}_p}{\gamma} \approx \frac{2\pi f \delta H_0^3}{r_0 \gamma} \approx 0,1 \frac{H_0^3 \kappa_m}{r_{0\kappa m}} \text{ м.}$$

При $H_0 = 5$ км, $r_0 = 25$ км; $\frac{\Delta T_p}{\gamma} = 0,5$ м. Совсем пренебрегаемым будут нулевой и первый член в разложении ΔT_p по сферическим функциям. Таким образом, членом $\frac{\Delta T_p - \Delta T_{p1} - \Delta T_{p0}}{\gamma}$ и тем более членом $\frac{\Delta T_p}{R}$ можно в большинстве случаев пренебречь.

В результате для вычисления $\bar{\zeta}$ в большинстве случаев вполне достаточно формула

$$\bar{\zeta} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta g'' + 2\pi f \delta H) S(\cos \psi) d\omega. \quad (\text{V.14})$$

Эта формула может быть представлена рядом Стокса

$$\bar{\zeta} = \frac{R}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\Delta g'' + 2\pi f \delta H)_n}{n-1}. \quad (\text{V.15})$$

Данный результат идентичен с выводом, представленным формулой (II.12) и полученным иным путем. Опущенные члены более строгой формулы (V.13) характеризуют погрешность приближенных формул (II.12), (V.14) и (V.15).

В заключение приведем формулу для гравиметрического уклонения отвеса в азимуте некоторого элемента dl в соответствии с работой Молоденского и др. [3]

$$\bar{\varphi} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial(\bar{\zeta}\gamma)}{\partial l} - \left(\frac{g-\gamma}{\gamma} + \frac{2\bar{\zeta}}{R} \right) \frac{d\bar{H}}{dl} + \frac{H}{\gamma} \frac{d\gamma}{dl}. \quad (\text{V.16})$$

Производная $\frac{d\bar{H}}{dl}$ должна браться по сглаженной физической поверхности, по которой выполняют интерполяцию аномалий силы тяжести. Разделив $\bar{\varphi}$ аналогично $\bar{\zeta}$ на $\bar{\varphi}_a$ и $\bar{\varphi}_p$ и выделив отдельно член $\frac{H}{\gamma} \frac{d\gamma}{dl}$, согласно (V.1) получим

$$\bar{\varphi}_a = -\frac{R}{4\pi\gamma} \int (\bar{\Delta}g'' + G_1'') \frac{dS}{d\psi} \frac{d\psi}{dl} d\omega - \left[\frac{\bar{\Delta}g''}{\gamma} + \frac{2(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_p)}{R} \right] \frac{d\bar{H}}{dl}.$$

Для вычисления $\bar{\varphi}_p$ применим формулу

$$\bar{\varphi}_p = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial(\bar{T}_p^\circ - \bar{T}_{p1}^\circ)}{\partial l} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial(\Delta T_p - \Delta T_{p1})}{\partial l} - \left[\frac{g_p^\circ}{\gamma} + \frac{2\bar{\zeta}_p}{R} \right] \frac{d\bar{H}}{dl}.$$

Суммируя $\bar{\varphi}_a$ и $\bar{\varphi}_p$ и подставляя

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial(\bar{T}_p^\circ - T_{p1}^\circ)}{\partial l} = -\frac{R}{4\pi\gamma} \int g_p^\circ \frac{dS}{d\psi} \frac{d\psi}{dl} d\omega,$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & -\frac{R}{4\pi\gamma} \int (\bar{\Delta}g'' + G_1'' + g_p^\circ) \frac{dS}{d\psi} \frac{d\psi}{dl} d\omega - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial(\Delta T_p - \Delta T_{p1})}{\partial l} - \\ & - \left[\frac{\bar{\Delta}g'' + g_p^\circ}{\gamma} + \frac{2\bar{\zeta}}{R} \right] \frac{d\bar{H}}{dl} + \frac{H}{\gamma} \frac{d\gamma}{dl}. \end{aligned}$$

Подставив

$$\bar{\Delta}g'' + g_p^\circ = \Delta g'' + \frac{3}{2} \frac{\Delta T_p}{R} - \delta g_p + 2\pi f \delta H$$

и заменив $G_1'' \approx g_a'$, имеем

$$\bar{\varphi} = -\frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta g'' + 2\pi f\delta H + \frac{3}{2} \frac{\Delta T_p}{R} + g_a' - \delta g_p) \frac{dS}{d\psi} \frac{d\psi}{dl} d\omega + \Delta\varphi_p -$$

$$- \left[\frac{\Delta g'' + 2\pi f\delta H - \delta g_p}{\gamma} + \frac{3}{2} \frac{\Delta T_p}{R\gamma} + \frac{2\bar{\zeta}}{R} \right] \frac{d\bar{H}}{dl} + \frac{H}{\gamma} \frac{d\gamma}{dl}, \quad (V.17)$$

где

$$\Delta\varphi_p = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Delta T_p}{\partial l} = -f\delta \frac{R^2}{\gamma} \int \frac{1}{r_0} \left(\frac{h^3}{2r_0^3} - \frac{3}{8} \frac{h^5}{r_0^5} + \dots \right) d\omega. \quad (V.18)$$

Поправка $\Delta\varphi_p$ равна разности влияний топографических масс на уклонение отвеса до и после конденсации. Она достигает заметных величин в горных районах. Производной ΔT_p можно пренебречь. Пренебрегая другими второстепенными членами, которые были уже оценены нами выше, имеем

$$\bar{\varphi} = -\frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta g'' + 2\pi f\delta H) \frac{dS}{d\psi} \frac{d\psi}{dl} d\omega + \Delta\varphi_p -$$

$$- \left[\frac{\Delta g'' + 2\pi f\delta H}{\gamma} + \frac{2\bar{\zeta}}{R} \right] \frac{d\bar{H}}{dl} + \frac{H}{\gamma} \frac{d\gamma}{dl}. \quad (V.19)$$

Формула (V.19) без предпоследнего члена уже применялась в работе [4] и дала хорошие результаты. Правда, там ей давалась интерпретация как формулы для метода конденсации при полном сглаживании физической поверхности до поверхности уровня. В данной работе подобного ограничения нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жонгололович И. Д. Потенциал земного притяжения. Бюлет. ин-та теор. астр. Т. VI, № 8 (81), 1957.
2. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 42. М., Геодиздат, 1945.
3. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 131 М., Геодиздат, 1960.
4. Пеллинен Л. П. Исследование уклонений отвеса и вывод фигуры квазигеоида на Кавказе. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 86. М., Геодиздат, 1951.
5. Юркина М. И. Методы исследования фигуры Земли в горном районе. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 103. М., Геодиздат, 1954.
6. Bodemüller H. Beitrag zur Messung und Auswertung verticaler Schweregradienten. „Z. Vermessungswesen“, 1960, № 4.
7. Jeffreys H. The determination of the Earth's gravitational field. M. N. R. A. S. Geoph. Suppl. 1941, № 5; 1943, № 3.
8. Kaula D. C. Statistical and harmonic analysis of gravity. Journ. Geoph. Res. 1959, № 12.

**INFLUENCE OF TOPOGRAPHIC MASSES UPON THE DEDUCTION OF
CHARACTERISTICS OF EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD**

Abstract

The systematic terrain effect upon the correction G_1 to gravity anomalies in the first-approximation formulae of Molodensky for quasigeoidal heights and plumb-line deflections was calculated. It is shown that, for large areas, this effect is upon the average equal to the mean terrain reduction. A tentative expansion of terrain reduction in terms of spherical harmonics up to the third order has been carried out, from which it is evident that the Stokes series in its usual form is subject to a mean error about 15–20%.

A method of calculating quasigeoidal heights and plumb-line deflections with the aid of Molodensky formulae under elimination of the effect of topographic masses from gravity anomalies is described. After the masses of topography had been removed a smoothed surface passing through astronomical and gravity stations was considered as representing the physical surface of the Earth. Thus it has been practically rendered possible to use the first-approximation formulae of Molodensky, and in many cases also the «zero-approximation» formulae analogous to the formulae of Stokes and Vening-Meinesz. The effect of the restored masses of topography was then added to the quantities found; the said effect was expressed as the effect of topography condensed on the normal equipotential surface passing through the point under investigation, plus a correction for condensation. Following some transformations, the resulting formulae (14.5) and (18.5) were obtained which differ in their «zero-approximation» (15.5) and (19.5) from traditional formulae in that they contain terrain reductions added to free-air anomalies. Moreover, in the computation of plumb-line deflections directly in mountain regions a correction for differing effects of topography before and after its condensation is to be introduced.

Л. П. Пеллинен, Л. А. Говорова

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АСТРОНОМО-ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ В СССР

Введение

В 1947 г. предприятием № 7 ГУГК были начаты работы по проложению линий астрономо-гравиметрического нивелирования повышенной точности, которые должны обеспечить определение высот квази-геоида на территории СССР со средней ошибкой не более 3 м, если не учитывать влияния ошибок геодезических координат. Вдоль указанных линий для вывода астрономо-геодезических уклонений отвеса в меридиане и первом вертикале через каждые 40—50 км располагаются астрономические пункты, широты и долготы которых измеряются с ошибкой порядка $\pm 0''{,}3$ (по внутренней сходимости). Вокруг астрономических пунктов в радиусе 50 км выполняют при помощи гравиметров съемку сгущения, дополнительную к общей гравиметрической съемке СССР, с плотностью один пункт на 1000 км². Благодаря этому предполагаемая точность вывода гравиметрических уклонений отвеса должна была составить $\pm 0{,}4—0''{,}5$ (без учета дальних зон, не имеющих значения при астрономо-гравиметрическом нивелировании).

В настоящее время накопился достаточный материал для того, чтобы оценить порядок ошибок нивелирования и выяснить их причины. Широкие возможности для суждения о точности нивелирования и для разделения влияния ошибок гравиметрических и астрономических данных появились после того, как ряд съемок сгущения был перекрыт детальными гравиметрическими съемками, выполненными в геологоразведочных целях. Наконец, в 1960 г. предприятие № 7 по заданию ЦНИИГАиК выполнило опытную работу по испытанию новой схемы астрономо-гравиметрического нивелирования, разработанной для районов, где имеются гравиразведочные съемки с сечением 5 мгл. Эта работа показала, что путем повышения точности определения силы тяжести и высот на пунктах съемок сгущения можно добиться точности вывода гравиметрических уклонений отвеса порядка 0,1—0''{,}2 и благодаря этому увеличить расстояние между соседними астрономическими пунктами.

В результате опытной работы получены дополнительные данные, позволяющие судить о точности гравиразведочных работ и об ошибках астрономических определений.

Задача настоящей статьи — дать анализ всех накопившихся данных и разработать рекомендации по дальнейшему проведению астрономо-гравиметрического нивелирования.

§ 1. Анализ камеральной обработки астрономо-гравиметрического нивелирования

Точность гравиметрических определений

Для определения точности съемок сгущения пункты этих съемок в тех районах, где они были перекрыты гравиразведочными работами, наносили на карты изоаномал Буге двухмиллигального сечения, состав-

ленные по данным гравirazведки. Путем интерполяции между изоаномалами определялись аномалии нанесенных пунктов, которые сравнивались с измеренными значениями. По разностям аномалий выявлены систематические и случайные ошибки (табл. 1).

Таблица 1

Годы выполнения съемок сгущения	Число астрономических пунктов	Случайные расхождения, мгл	Систематические расхождения, мгл	Средние случайные расхождения, мгл	Средние систематические расхождения, мгл
1	2	3	4	5	6
1947 — 1949	14	1,3—4,5	до 4,5	$\pm 2,7$	$\pm 2,5$
1950 — 1952	12	0,5—5,2	5,1	2,3	2,3
1954 — 1955	16	1,1—2,2	3,3	1,8	1,6
1956	9	0,9—3,6	2,1	2,3	1,0
1957	10	0,7—3,4	2,7	2,0	1,5

Показатели точности несколько повысились, начиная с 1954 г., когда в работах стали применять более точные гравиметры СН-3 и ГАК, улучшились связи исходных пунктов съемок сгущения с гравиметровыми пунктами высшего класса. Случайные расхождения характеризуют ошибки съемок сгущения, поскольку соответствующие ошибки гравиметрической карты, составленной по данным гравirazведки, лежат в пределах 0,7—1,0 мгл. Систематические расхождения в тех же пределах также могут объясняться ошибками гравirazведочных работ. Полученные результаты удовлетворительны и, как будет показано далее, достаточны для обеспечения вывода гравиметрических уклонений отвеса с требуемой точностью.

Точность гравиметрических уклонений отвеса

Материалы гравirazведки были также использованы для определения точности вывода гравиметрических уклонений отвеса. Для 3

Таблица 2

Год выполнения съемки сгущения	Число астрономических пунктов	Средние квадратические ошибки		
		m_{ξ}	m_{η}	m_{ζ}
1948—1949	10	$\pm 0",37$	$\pm 0",26$	$\pm 0",32$
1950—1951— —1953	18	0,29	0,36	0,33
после 1953	29	0,30	0,34	0,32

пунктов независимо вычислено влияние аномалий на уклонение отвеса области в радиусе 50 км по картам изоаномал Буге, составленным п

съемкам сгущения и по более поздним гравиразведочным съемкам с сечением изоаномал через 2 *мл*. Точность съемок такого сечения выше, чем точность съемок сгущения (это подтверждают результаты опытной работы, описанные дальше), и поэтому разности уклонений отвеса, найденные по обеим съемкам, характеризуют в основном точность уклонений, полученных по съемкам сгущения. Указанные разности приведены в табл. 2.

В среднем по всем пунктам получаем ошибку гравиметрического уклонения отвеса в любом направлении, равную

$$m_{\varphi} = \left(\frac{1}{2} m_{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_{\eta}^2 \right)^{1/2} = \pm 0,32 \pm 0'',03.$$

Ошибка m_{φ} оказалась меньшей, чем ожидалось при постановке астрономо-гравиметрического нивелирования.

Интересно, что точность уклонений отвеса оказалась удовлетворительной даже для первых лет работы, когда наблюдались большие систематические ошибки съемок. Как видно, последние слабо повлияли на точность уклонений отвеса.

Суммарные ошибки гравиметрических уклонений отвеса и астрономических определений

Гравиметрические уклонения отвеса по линиям астрономо-гравиметрического нивелирования, выполненные в 1947—1957 гг., вычислены методом численного интегрирования при помощи палеток в соответствии с Наставлением по астрономо-гравиметрическому нивелированию [3]. Для 137 астрономических пунктов вычисления проведены с учетом влияния аномалий ближних зон в радиусе 50 км по материалам съемок сгущения и для 72 пунктов—по материалам гравиразведки. Применялся метод косвенной интерполяции аномалий, а именно—при учете влияния ближних зон ($R=50$ км) использовались карты аномалий Буге и топографические карты, а при учете влияния дальних зон (до 1000 км)—карты аномалий в свободном воздухе.

Для контроля точности астрономо-гравиметрического нивелирования образованы остаточные уклонения—разности астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса $\xi_a - \xi_{г}$ и $\eta_a - \eta_{г}$. Эти разности включают в себя влияние ошибок астрономических определений, ошибки учета влияния ближайших зон по карте аномалий Буге, ошибки учета влияния рельефа, влияние неучтенных зон на гравиметрическое уклонение отвеса и влияние различия ориентировки и сжатия геодезического и гравиметрического эллипсоидов.

Если образовать разности остаточных уклонений $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ на соседних астрономических пунктах, то из них в основном исключатся последние два влияния и эти вторичные разности будут лучше характеризовать точность астрономо-гравиметрического нивелирования, чем первичные разности.

По вторичным разностям, применяя формулу двойных измерений, получены средние квадратические ошибки уклонений отвеса по всему материалу как отдельно по составляющим ξ и η , так и в целом по обеим составляющим (величины m_{φ}). В табл. 3 приведена сводка результатов.

При использовании съемок сгущения в среднем по обеим составляющим получено $\pm 0'',63 \pm 0'',04$, а при использовании данных гравиразведки $\pm 0'',51 \pm 0'',04$. Расхождение ошибок в основном объяснимо погрешностью учета влияния ближайших зон по карте изоаномал Буге при использовании съемок сгущения ($\pm 0'',3$).

Наряду с оценкой точности по всем вторичным разностям гравиразведки вычислены величины m_{ϑ} , m_{ξ} и m_{η} с разделением материалов

Т а б л и ц а 3

По материалам съемок сгущения				По материалам гравиразведки			
год	число пунктов	m_{ξ}	m_{η}	год	число пунктов	m_{ξ}	m_{η}
1947—1948	11	$\pm 0",87$	$\pm 0",65$	1947—1948	9	$\pm 0",49$	$\pm 0",51$
1950—1952	29	0 ,66	0 ,77	1953—1955	15	0 ,51	0 ,48
1953—1955	57	0 ,47	0 ,70	1956	18	0 ,48	0 ,48
1956	8	0 ,30	0 ,86	1957	18	0 ,61	0 ,42
1957	32	0 ,65	0 ,49	1960	12	0 ,36	0 ,71
Всего	137	$\pm 0",58 \pm 0",06$	$\pm 0",68 \pm 0",06$	Всего	72	$\pm 0",51 \pm 0",06$	$\pm 0",51 \pm 0",06$

на две части: сначала по вторичным разностям, образованным между пунктами, входящими в одну и ту же базисную сеть, и затем по разностям, оставшимся после исключения базисных. Средние значения ошибок для этих вариантов даны в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Средние квадратические ошибки, полученные по материалам					
число разностей	съемки сгущения		гравиразведки		
	m_{ξ}	m_{η}	число разностей	m_{ξ}	m_{η}
По разностям между базисными пунктами					
27	$\pm 0,50 \pm 0",07$	$\pm 0,45 \pm 0",07$	19	$\pm 0,36 \pm 0",06$	$\pm 0,34 \pm 0",06$
	$m_{\vartheta} = \pm 0,48 \pm 0",05$		$m_{\vartheta} = \pm 0,35 \pm 0",04$		
После исключения разностей между базисными пунктами					
99	$\pm 0,61 \pm 0",07$	$\pm 0,73 \pm 0",07$	42	$\pm 0,55 \pm 0",06$	$\pm 0,58 \pm 0",06$
	$m_{\vartheta} = \pm 0,67 \pm 0",05$		$m_{\vartheta} = \pm 0,57 \pm 0",04$		

В первом случае ввиду близости базисных пунктов практически полностью исключаются ошибки учета влияния дальних зон. Кроме того, поскольку астроопределения на обоих пунктах каждой базисной сети обычно выполняются в один сезон одним и тем же наблюдателем и инструментом, частично выпадают систематические ошибки астрономических определений. Как видно, ошибки m_{ϑ} , вычисленные по разностям между базисными пунктами при использовании съемок сгущения, составляют $\pm 0",48$, а при использовании данных гравиразведки $\pm 0",35$.

Если исключить величины этих ошибок из средних ошибок, найденных по оставшимся вторичным разностям (нижняя часть табл. 4), то получим систематическую часть погрешности вывода уклонения отвеса, которая как по данным съемок сгущения, так и по геофизическим съемкам приблизительно равна $\pm 0",45$. Случайную погрешность, равную $\pm 0",35$, найденную по данным гравиразведки в основном можно

объяснить случайными ошибками астрономических координат. Что касается систематической погрешности, равной $\pm 0''{,}45$, то она, по-видимому, также в основном определяется погрешностями астрономических определений. Это будет показано в следующих разделах статьи.

§ 2. Обработка астрономо-гравиметрического нивелирования на опытном участке

Характеристика опытного участка и схемы съемки сгущения

В предыдущем разделе были сделаны важные выводы о точности астрономо-гравиметрического нивелирования. Прежде чем, основываясь на этих выводах, рекомендовать какие-либо изменения в схеме нивелирования, было решено провести опытные работы на участке, который находится в центре Европейской части СССР вдали от гор, так что принципиальные ошибки формулы Венинг Мейнеса, используемой при обработке нивелирования, должны быть минимальными. В районе опытного участка выполнена гравиметрическая съемка с сечением изоаномал через 1—2 *мгл*, которая отличается хорошим качеством. Это позволило получить с удовлетворительной точностью влияние дальних зон и иметь уверенные суждения о точности гравиметрических съемок сгущения. Гравиметрические съемки сгущения проводились лишь в радиусе 10 *км* вокруг астрономических пунктов с таким расчетом, чтобы влияние центральной зоны было получено со средней ошибкой не грубее $\pm 0''{,}10$. Предполагалось, что рекомендуемая схема может быть типовой при наличии гравиразведочной съемки с сечением изоаномал через 5 *мгл*, которая обеспечивает вывод влияния дальних зон (если не считать с систематическими ошибками съемки) с ошибкой $\pm 0''{,}07$. На самом деле влияние дальних зон в опытных работах учитывалось еще точнее по данным съемки с сечением 1—2 *мгл*.

Расчет схемы съемки сгущения был сделан, исходя из простейших соображений, а именно: 1) влияние ошибок определения аномалий в гравиметрических пунктах на уклонение отвеса приблизительно равно влиянию ошибки интерполяции силы тяжести; 2) каждый пункт находится в центре трапеции, ограниченной концентрическими окружностями и радиальными линиями и близкой по форме к квадрату; 3) влияние $\delta\vartheta$ чистой ошибки интерполяции силы тяжести в каждой трапеции на $\vartheta = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{1/2}}{2}$ приблизительно одинаково (принцип «участков равных влияний»).

Для трапеции, ограниченной окружностями радиусов r_i и r_{i-1} , величина $\delta\vartheta_i$ равна:

$$\delta\vartheta_i = \frac{\rho''}{\pi\gamma\sqrt{8}} \delta g_i \Delta\alpha_k \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}, \quad (1)$$

где δg_i — чистая ошибка интерполяции, которую при малых r можно принять равной $\delta g_i = 0,2 (r_i - r_{i-1})$ *мгл*, (r — в *км*)*;

$\Delta\alpha_k$ — угол между радиальными линиями, ограничивающими трапецию.

* В работе [2] показано, что ошибка δg пропорциональна расстоянию S между гравиметрическими пунктами и для нескольких участков в среднем равна $0,15 S$ *мгл* (где S — в *км*). В расчетах, для осторожности, вместо 0,15 принят коэффициент 0,2.

Если форма трапеции близка к квадрату, то $\Delta\alpha_k = \frac{2(r_i - r_{i-1})}{r_i + r_{i-1}}$; таким образом, в пределах кольца между радиусами r_i и r_{i-1} должны находиться n_i отделений

$$n_i = \frac{2\pi}{\Delta\alpha_k} = \frac{\pi(r_i + r_{i-1})}{r_i - r_{i-1}}.$$

Подставляя в (1) δg_i и $\Delta\alpha_k$, имеем

$$\delta\vartheta_i = \frac{\rho''}{\pi\sqrt{2}} 0,2 \frac{(r_i - r_{i-1})^2}{r_i + r_{i-1}} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}. \quad (2)$$

В табл. 5 подобраны следующие значения радиусов r и величин r

Таблица 5

$r_i, \text{ км}$	n_i	$\delta\vartheta_i$
10	9	0",0075
5	7	0,0077
2	5	0,0081
0,5		

В сумме по всем отделениям имеем: $\delta\vartheta = (\sum (\delta\vartheta_i)^2)^{1/2} = \pm 0",036$. К этому должно быть добавлено влияние центрального круга, которое согласно [4], равно $\delta\vartheta_1'' = \pm 0,15 \delta g_1$, где δg_1 — ошибка интерполяции силы тяжести внутри центрального круга. Эта ошибка несколько меньше ошибки $\delta g_2 = \pm 0,3 \text{ мгл}$ в пределах первого кольца, т.е. $\delta\vartheta_1 < \pm 0",15 \cdot 0,3 = \pm 0",045$.

Таким образом, влияние внутренних зон равно $\pm 0",06$. Ошибки определения аномалий гравиметрических пунктов будут приблизительно равны чистым ошибкам интерполяции во включающих их трапециях, если принять допуски к ошибкам определения силы тяжести, высот и координат, указанные в табл. 6.

Таблица 6

$r, \text{ км}$	$m_g, \text{ мгл}$	$m_H, \text{ м}$	$m_{\varphi, \lambda}, \text{ м}$
10	$\pm 0,5$	$\pm 3,0$	± 100
5	0,3	1,5	50
2	0,2	0,5	30
0,5			

Ошибки даны по отношению к местному исходному гравиметрическому пункту или астрономическому. При выполнении работ пункты были расположены на средних радиусах зон 1,25, 3, 5 и 7,5 км. Один гравиметрический пункт был совмещен с астрономическим. При рекомендуемой схеме съемки сгущения колебания разностей астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса практически целиком определяются погрешностями астрономических определений. Длины сторон нивелирования должны быть установлены в зависимости от последних. На опытном участке было решено пока не ставить дополнительных астро-

номических определений и ограничиться имеющимися базисными (за исключением пункта 8), которые расположены на расстоянии 200 км один от другого. Характеристика точности астрономических определений дана в табл. 7. По внутренней сходимости ошибки m_{ξ} составляют в среднем $\pm 0''{,}2$, а $m_{\eta} = \pm 0''{,}25$. Таким образом, выбранный участок типичен для первой классной триангуляции СССР.

Т а б л и ц а 7

Номера астрономических пунктов	Расстояния между астрономическими пунктами, км	Год определения	Наблюдатель	Средние квадратические ошибки	
				$m_{\varphi, \xi}$	$\frac{m_{\lambda}}{m_{\eta}}$
1	2	3	4	5	6
1	14	1926	Мельников	$\pm 0''{,}10$	—
2	205	1927	Мазаев	0 ,14	$\pm 0''{,}30$ 0 ,19
3	69	1940	Волков	0 ,28	0 ,45 0 ,29
4	11	1951	Рахубовский	0 ,21	0 ,45 0 ,29
5	99	1951	„	0 ,29	0 ,46 0 ,30
6	27	1929	Мазаев	0 ,09	0 ,30 0 ,19
7	110	1929	„	0 ,10	0 ,30 0 ,19
8	76	1930	Трофименко	0 ,30	0 ,60 0 ,39
9	18	1930	Долгов	0 ,25	0 ,32 0 ,19
10		1948	Петкач	0 ,09	0 ,32 0 ,21
Дополнительные пункты					
11	25	1940	Волков	0 ,24	0 ,45 0 ,29
12		1940	„	0 ,16	0 ,46 0 ,30

Примечание. Скобками отмечены базисные пункты.

Опорные пункты съемок сгущения определены с ошибкой порядка $\pm 0{,}5$ мгл.

Полевые работы производились в январе 1960 г. бригадами под руководством инженеров А. Ф. Сафонова и А. А. Головичера. Обработка полевого материала и составление карт изоаномал Буге выполнены под руководством инженера Е. П. Громовой. Оценка точности полевого материала и вычисление уклонов отвесных линий выполнены в ЦНИИГАиК.

Оценка точности гравиметрической съемки

Для оценки точности гравиметрической съемки пункты сгущения наносили на карты изоаномал Буге, составленные по материалам гра-

виразведки. Интерполированные значения аномалий сравнивали с измеренными.

По результатам сравнения аномалий получены и приведены в табл. 8 средние квадратические разности аномалий для I, II и III зон съемки сгущения и в целом для всех зон.

Данные таблицы показывают, что систематические разности малы и лежат в пределах точности опорных сетей гравirazведки и съемки сгущения ($\pm 0,5$ мгл для каждой съемки). Случайные расхождения включают в себя полную ошибку интерполяции гравirazведочной съемки и ошибки определения аномалий в пунктах съемки сгущения. Как видно, они оказались меньше, чем допускалось только для последнего источника ошибок (см. табл. 6). Это характеризует высокую точность работы, проведенной предприятием № 7, и хорошее качество съемок, выполненных геофизиками.

Таблица 8

Номера астрономических пунктов	Число гравиметрических пунктов	Систематическая разность, мгл	Средняя квадратическая разность для зон, мгл			Средняя квадратическая разность по всем зонам, мгл
			I	II	III	
1	2	3	4	5	6	7
1	23	+0,4	$\pm 0,29$	$\pm 0,64$	$\pm 0,44$	$\pm 0,48$
2	23	+0,2	0,18	0,31	0,44	0,34
3	23	-0,5	0,40	0,39	0,60	0,48
4	21	-1,0	0,62	0,60	0,38	0,54
5	20	-0,9	0,36	0,50	0,36	0,41
6	23	-0,6	0,38	0,50	0,43	0,44
7	23	-1,0	0,26	0,51	0,52	0,46
8	23	0,0	0,38	0,34	0,39	0,38
9	23	-0,2	0,22	0,31	0,54	0,40
10	23	+0,8	0,32	0,40	0,48	0,40
	По 225 пунктам среднее квадратическое значение	$\pm 0,7$	$\pm 0,36$	$\pm 0,46$	$\pm 0,46$	$\pm 0,44$

Вычисление гравиметрических уклонений отвеса на опытном участке

Влияние аномалий на уклонение отвеса центральной зоны (0—5 км) получено независимо по картам изоаномал Буге (с сечением через 1 мгл), составленным по материалам съемок сгущения и по материалам детальных геофизических съемок. Применялась точечная палетка с 24 точками, рассчитанная В. Ф. Еремеевым [3].

При вычислении по материалам съемки сгущения для более детального учета аномалий центральной зоны применялась также палетка, рассчитанная для кольцевых зон (от I до VI) и разделенная на 96 от-

делений. Средняя аномалия каждого отделения определялась с номинальной точностью 0,1 мгл.

Влияние рельефа местности центральной зоны вычислялось по топографическим картам масштаба 1 : 100 000 с использованием палетки с 96 отделениями; средняя высота отделений или высота точек определялась с точностью $\pm 2-3$ м. Те же вычисления проведены по карте масштаба 1 : 500 000 палеткой с 24 точками.

Влияние аномалий в зонах от I до VII вычислено по картам изоаномал Буге, составленным по материалам гравirazведки, с сечением 2 мгл. Влияние I, II и III зоны, кроме того, вычислено по материалам съемки сгущения. Соответственно влияние рельефа получено по гипсометрическим картам масштаба 1 : 500 000.

Для учета влияния аномалий дальних зон (с IX по XXVI) использовались различные карты аномалий в свободном воздухе, составленные по методу косвенной интерполяции аномалий силы тяжести.

Сопоставление результатов вычисления влияния аномалий и рельефа на уклонение отвеса, полученных по разным материалам

Наибольший интерес представляет сопоставление результатов вычисления влияния аномалий Буге по данным съемок сгущения и гравirazведки (радиус съемки 10 км). Эти разности даны в табл. 9.

Таблица 9

Номера астрономических пунктов	Зона 0—10 км					
	по материалам съемки сгущения		по материалам гравirazведки		разность	
	ξ	η	ξ	η	ξ	η
1	-0",29	-0",33	-0",21	-0",17	-0",08	-0",16
2	-0,35	+0,50	-0,34	+0,59	-0,01	-0,09
3	-0,62	-0,40	-0,55	-0,39	-0,07	-0,01
4	+1,46	+1,21	+1,51	+1,45	-0,05	-0,24
5	+1,16	+0,88	+1,24	+0,82	-0,08	+0,06
6	+0,12	-0,05	-0,11	+0,01	+0,23	-0,06
7	-0,24	+0,24	-0,27	+0,19	+0,03	+0,05
8	+0,42	-0,24	+0,40	-0,18	+0,02	-0,06
9	-0,08	-0,08	-0,05	-0,12	-0,03	+0,04
10	0,00	+0,07	+0,04	+0,01	-0,04	+0,06

$$m_{\xi} = \pm 0",10$$

При учете центральной зоны (0—5 км) по данным гравirazведки использована палетка с 24 точками, по съемке сгущения — палетка с 96 отделениями. Специальные вычисления показали, что если вместо палетки с 96 отделениями использовать палетку с 24 точками, то расхождения практически не изменяются.

Если учесть, что только погрешность вычисления по данным гравirazведки может составлять величину порядка 0,06—0",10, то полученный результат $\pm 0",10$ можно считать вполне удовлетворительным.

Величина, характеризующая влияние рельефа, — существенный источник ошибок только при использовании мелкомасштабных карт. Так, по данным табл. 10 расхождение вычислений по картам масштабов 1 : 100 000 и 1 : 500 000 составляет в среднем $\pm 0''{,}14$.

Таблица 10

Номера астрономических пунктов	Влияние рельефа на центральную зону			Разности	
	полученное по 24 точкам; карта 1 : 100 000	полученное по 24 точкам; карта 1 : 500 000	полученное по 96 отделениям; карта 1 : 100 000	1—II	1—III
	I	II	III		
1	+0'',01 -0'',03	-0'',04 -0'',05	0'',00 0'',00	+0'',05 +0'',02	+0'',01 -0'',03
2	+0 ,08 +0 ,11	+0 ,08 +0 ,07	+0 ,10 +0 ,12	0 ,00 +0 ,04	-0 ,02 -0 ,01
3	-0 ,05 -0 ,38	-0 ,13 -0 ,29	-0 ,10 -0 ,20	+0 ,08 -0 ,09	+0 ,05 -0 ,18
4	+0 ,15 -0 ,28	+0 ,28 -0 ,44	+0 ,13 -0 ,24	-0 ,13 +0 ,16	+0 ,02 -0 ,04
5	-0 ,06 -0 ,09	+0 ,07 -0 ,04	0 ,00 -0 ,14	-0 ,13 -0 ,05	-0 ,06 +0 ,05
6	-0 ,02 +0 ,04	-0 ,18 +0 ,12	-0 ,18 +0 ,03	+0 ,16 -0 ,08	+0 ,16 +0 ,01
7	-0 ,06 +0 ,10	-0 ,19 -0 ,10	-0 ,02 +0 ,17	+0 ,13 +0 ,20	-0 ,04 -0 ,07
8	-0 ,17 +0 ,28	-0 ,16 +0 ,08	-0 ,14 +0 ,21	-0 ,01 +0 ,20	-0 ,03 +0 ,07
9	+0 ,25 -0 ,26	0 ,00 -0 ,05	+0 ,25 -0 ,14	+0 ,25 -0 ,21	0 ,00 -0 ,12
10	-0 ,06 -0 ,12	-0 ,29 -0 ,08	-0 ,07 +0 ,04	+0 ,23 -0 ,04	+0 ,01 -0 ,16

Поэтому в работе при учете центральной зоны пользовались картами масштаба 1 : 100 000; общую оценку точности учета рельефа получить затруднительно. Априори по данным табл. 13 следующего раздела она равна $\pm 0''{,}08$. На эту погрешность накладываются ошибки вычислений. Судя по результатам вычислений в две руки влияния рельефа в радиусе 100 км, средняя квадратическая ошибка вычисления оказалась равной $\pm 0''{,}05$.

Остается подсчитать ошибки учета зон с радиусом, большим 10 км, при работе с гравиметрическими картами. Опытный полигон нивелирования расположен в районе, покрытом съемкой с плотностью один пункт на 4—10 км². В этих условиях влияние ошибок интерполяции на вывод уклонения отвеса будет меньше 0'',01 и основное значение имеют плохо изученные систематические ошибки гравиметрических съемок и ошибки вычислений. Влияние систематических ошибок на уклонение отвеса можно подсчитать по формуле $\delta\delta = \pm 0''{,}15 \delta g$ [4], если участки с постоянными ошибками приблизительно равны, а между участками ошибки меняются случайным образом. При больших размерах таких участков вырез центральной зоны, радиусом 10 км, мало уменьшит систематическое влияние и указанную формулу можно рассматривать, как пригодную для расчета точности. Как было показано выше, для систематической ошибки съемки δg можно принять значение $\pm 0,5$ мгл. Таким образом, $\delta\delta = \pm 0''{,}08$. Ошибки вычислений, судя по расхождению результатов, вычисленных в две руки, будут меньше 0'',03. Таким образом, ошибка

местного гравиметрического уклонения отвеса, случайно меняющаяся от одного до другого астрономического пункта, не превышает

$$\delta = \sqrt{(0,10)^2 + (0,08)^2 + (0,05)^2 + (0,08)^2 + (0,03)^2} = \pm 0'',16.$$

Принципиальные погрешности формул Венинг Мейнеса в первом приближении равны влиянию поправок за рельеф δg_p в аномалии силы тяжести на уклонение отвеса (стр. 23). Эти поправки в районе исследований не превышают 0,1 *мгЛ*, а их влияние на уклонение отвеса равно в среднем $0'',15\delta g_p$, т. е. меньше $0'',02$.

Таким образом, общая погрешность практически останется в пределах $0'',16$. Указанная точность достаточна для проведения опытного исследования.

Сравнение астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвесных линий

Таблица II

Номера астрономических пунктов	Остаточные уклонения при учете аномалий до 2000 км		После снятия систематической части		Разность между соседними пунктами	
	$\xi_a - \xi_{гр}$	$\eta_a - \eta_{гр}$	$\xi_a - \xi_{гр}$	$\eta_a - \eta_{гр}$	$\xi_a - \xi_{гр}$	$\eta_a - \eta_{гр}$
1	2	3	4	5	6	7
1	-0'',16	-0'',74	-0'',25	+0'',11	+0'',23	+0'',24
2	-0 ,39	-0 ,98	-0 ,48	-0 ,13	-1 ,25	-1 ,48
3	+0 ,86	+0 ,50	+0 ,77	+1 ,35	+0 ,83	+1 ,37
4	+0 ,03	-0 ,87	-0 ,06	-0 ,02	+0 ,20	+0 ,84
5	+0 ,23	-1 ,71	+0 ,14	-0 ,86	+0 ,02	-1 ,54
6	+0 ,21	-0 ,17	+0 ,12	+0 ,68	-0 ,11	+0 ,31
7	+0 ,32	-0 ,48	+0 ,23	+0 ,37	+0 ,71	+1 ,30
8	-0 ,39	-1 ,78	-0 ,48	-0 ,93	-0 ,60	-0 ,85
9	+0 ,21	-0 ,93	+0 ,12	-0 ,08	+0 ,26	+0 ,37
10	-0 ,05	-1 ,30	-0 ,14	-0 ,45		
Среднее из 10 пунктов	+0'',09	-0'',85	$\pm 0'',37$	$\pm 0'',69$	$\pm 0'',43$	$\pm 0'',73$
Дополнительные пункты						
11	+0'',30	+0'',93	+0 ,21	+1'',78		
12	+0 ,01	+0 ,90	-0 ,08	+1 ,75		

В табл. 11 даны результаты сравнений астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса для пунктов опытного участка. Как указывалось выше, влияние дальних зон учтено до 2000 км.

Данные табл. 11 показывают, что остаточные уклонения отвесных линий после исключения систематической части меняются от пункта к пункту без скачков, что подтверждает правильность гравиметрических карт, использованных при обработке. Однако исключением является пункт 3, для которого вторичная разность $\eta_{\sigma} - \eta_{\Gamma P}$ достигает $1''{,}4$. Причиной появления столь большой разности может быть только ошибка определения долготы указанного астрономического пункта. Для контроля остаточных уклонений на пункте 3 нами вычислены гравиметрические уклонения отвеса для пунктов соседней базисной сети 11 и 12, где φ и λ определены в тот же сезон и тем же наблюдателем, что и пункт 3 (табл. 7).

Остаточные уклонения для пунктов 11 и 12 имеют одинаковую по знаку и близкую по величине ошибку долготы, превышающую $1''{,}5$, что указывает на систематический характер погрешности долготных определений. Долготы этих трех пунктов должны быть повторены.

По данным табл. 11 для пунктов 1—10 были найдены средние квадратические ошибки m_{ξ} , m_{η} и m_{φ} , значение которых приведено в табл. 12.

Т а б л и ц а 12

Средние квадратические ошибки	По отклонениям остаточных уклонений от среднего	По колебаниям уклонений между соседними пунктами	По колебаниям уклонений между базисными пунктами
m_{ξ}	$\pm 0''{,}37$	$\pm 0''{,}43$	$\pm 0''{,}15$
m_{η}	0 ,69	0 ,73	0 ,35
m_{φ}	0 ,55	0 ,60	0 ,27

Как видно, величины m_{ξ} и m_{η} , найденные по отклонениям остаточных уклонений от общего среднего и по колебаниям уклонений между соседними пунктами, хорошо согласуются одна с другой. Они равны практически систематическим ошибкам астрономических определений, постоянным для соседних пунктов Лапласа в базисных сетях. Это видно из оценки величин m_{ξ} и m_{η} по колебаниям остаточных уклонений между пунктами Лапласа в базисных сетях ($\pm 0''{,}15$, $\pm 0''{,}35$). Найденные ошибки характеризуют главным образом случайные погрешности астрономических определений. Таким образом, материалы опытных работ подтверждают выводы, сделанные в § 1.

§ 3. Целесообразные изменения схемы астрономо-гравиметрического нивелирования

Как известно [4], [5], погрешность передачи высоты квазигеода по вытянутой линии астрономо-гравиметрического нивелирования длиной L со средним расстоянием S между гравиметрическими пунктами равна

$$m_{\xi} = \frac{m''_{\varphi}}{\rho''} \sqrt{S} \left(\frac{L}{2} + \frac{R}{4} \sin \frac{2L}{R} \right)^{1/2},$$

где $m''_{\text{ф}}$ — средняя квадратическая ошибка вывода разности астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса, если эту ошибку определять по колебаниям разностей уклонений отвеса между соседними астрономическими пунктами. Удобнее записать ошибку m_{ζ} в виде

$$m_{\zeta} = \frac{\varepsilon''}{\rho''} \left(\frac{L}{2} + \frac{R}{4} \sin \frac{2L}{R} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где $\varepsilon'' = m''_{\text{ф}} \sqrt{S}$ — ошибка на 1 км хода нивелирования, выраженная в секундах дуги. Расчеты, выполненные Л. П. Пеллиным [5], показали, что для основных линий астрономо-гравиметрического нивелирования достаточно потребовать, чтобы соблюдалось условие

$$\varepsilon'' < 5''.$$

Этому требованию удовлетворяет действующая схема нивелирования, при которой $m_{\text{ф}} = 0'',6 - 0'',7$, $S = 50$ км, $\varepsilon'' = 4-5''$.

Как известно, действующая схема рассчитана на общую гравиметрическую съемку с плотностью 1 пункт на 1000 км². Желательно, учитывая современные технические возможности гравиметров и астрономических инструментов, а также ведущиеся повсеместно в равнинных районах детальные геофизические съемки, уменьшить объем дополнительных астрономических и гравиметрических работ. Рассмотрим, используя выводы, полученные в предыдущих разделах, каковы перспективы для этого.

Представим разность ϑ_a астрономо-геодезических и ϑ_g местных гравиметрических уклонений отвеса в виде

$$\vartheta_a - \vartheta_g = \vartheta_a - \vartheta_g^{\text{Б}} - \vartheta_g^{\text{Р}} - \vartheta_g^{\text{С.В.}}, \quad (4)$$

где $\vartheta_g^{\text{Б}}$ — часть гравиметрического уклонения отвеса, учитываемая по карте аномалий Буге; $\vartheta_g^{\text{Р}}$ — часть гравиметрического уклонения отвеса, учитываемая по топографической карте; $\vartheta_g^{\text{С.В.}}$ — влияние более дальних зон, учитываемое по карте аномалий в свободном воздухе. Выше было показано, что по результатам детальных геофизических съемок при минимальном объеме дополнительных работ возможно получить $\vartheta_g^{\text{Б}}$ значительно точнее, чем $(\vartheta_a - \vartheta_g^{\text{Р}} - \vartheta_g^{\text{С.В.}})$. Выяснилось, что при достаточно точном вычислении $\vartheta_g^{\text{Б}}$ величина $m''_{\text{ф}}$ порядка $\pm 0'',55$; при этом сюда входит погрешность порядка $\pm 0'',35$, имеющая случайный характер, и погрешность $\pm 0'',45$, имеющая систематический характер для близко расположенных один к другому пунктов (пункт Лапласа в базисных сетях). Рассмотрим, каковы возможные причины этих погрешностей. Погрешности вычисления $\vartheta_g^{\text{Р}}$ можно получить, исходя из допустимых предельных ошибок высот на топографических картах масштаба 1 : 100 000 (табл. 13). Полагая, что средние ошибки высот m_h будут меньше в два раза, можно получить по следующей формуле ожидаемые ошибки вычисления влияния рельефа

$$m_g^{\text{Р}} = 0'',15 (0,309 - 0,096) m_h \approx 0'',03 m_h. \quad (5)$$

В скобках дана разность высотных коэффициентов редукций в свободном воздухе и Буге в мгл/м.

Для районов с еще большими уклонами четких допусков к высотам не установлено, и здесь уверенное вычисление уклонений отвеса можно вести только создав специальную топографическую съемку вблизи астрономических пунктов. При пользовании топографическими картами более мелких масштабов (1 : 300 000—1 : 500 000) даже в результате вычисле-

ний для равнинных районов вносится, как было показано, дополнительная погрешность порядка $\pm 0'',14$.

Ошибка учета влияния рельефа в обжитых районах почти полностью входит в случайную часть ошибки $m''_{\text{ф}}$. В необжитых районах, где применялось барометрическое нивелирование, допустимы систематические

Таблица 13

Тип района	Равнинный	Всхолмленный	Горный
углы наклона	до 2°	2— 5°	5— 7°
Обжитые районы			
Предельная ошибка высот, м	± 5	± 10	± 15
m_{g^p}	$\pm 0'',08$	$\pm 0'',15$	$\pm 0'',22$
Необжитые районы			
Предельная ошибка высот, м	$\pm 7,5$	± 15	$\pm 22,5$
m_{g^p}	$\pm 0'',11$	$\pm 0'',22$	$\pm 0'',35$

ошибки высот до 5 м. Известны, однако, случаи еще больших ошибок. Полагая соответствующую погрешность равной в среднем 3—5 м, имеем по формуле (5) для систематического влияния $\pm 0,10 - 0'',15$. Для обжитых районов она будет в три раза меньше.

Ошибки $m_{g^{\text{с.в.}}}$ вычисления влияния дальних зон по карте аномалий в свободном воздухе заметны лишь при использовании данных общей гравиметрической маятниковой съемки. Так, при действующей схеме астрономо-гравиметрического нивелирования, когда съемки сгущения ведутся в радиусе 50 км, они равны, согласно [4],

$$m_{g^{\text{с.в.}}} = \pm 0'',034 \delta g = \pm 0'',25 \div 0'',35,$$

где δg — полная ошибка интерполяции для общей маятниковой съемки, равная $\pm 7 - 10$ мгл. При использовании детальных гравиметрических съемок средние ошибки опорной сети лежат обычно в пределах $\pm 1,0$ мгл, что дает погрешность гравиметрического уклонения отвеса в $\pm 0'',15$. Если вырезать центральную зону радиусом 15 км и провести в ней съемку сгущения, опираясь на местный исходный пункт, то остаточная погрешность, действующая как систематическая, не превысит $\pm 0'',10$.

Мы не делали расчета принципиальных погрешностей формулы Веннинга Мейнеса, связанных с тем, что при вычислении по ней физическую поверхность Земли принимают за ровную. Эти погрешности в будущем должны устраняться из вычислений путем перехода к формуле Молоденского. Они, однако, имеют значение при анализе точности проделанных ранее вычислений. Ориентировочный подсчет указанной ошибки можно делать, исходя из формулы, о которой говорилось в предыдущем разделе,

$$\delta \vartheta = 0'',15 \delta g_p,$$

где δg_p — поправка за рельеф.

В высокогорных районах $\delta g_p \sim 20$ мгл, в средневысотных горных 1—5 мгл; в равнинных районах поправка за рельеф практически пренебрегаема.

Приведенная погрешность в основном входит в случайную часть m_{φ} . В систематическую часть войдет погрешность, связанная с тем, что поправки за рельеф имеют преимущественно положительный знак и увеличиваются с увеличением высоты местности. Это, однако, имеет заметное значение лишь при вычислении местных гравиметрических уклонений отвеса вблизи гор и, следовательно, не отразится на оценке точности выполненного астрономо-гравиметрического нивелирования.

Можно считать, что все астрономические пункты, использованные при анализе точности, находятся в обжитых районах, причем примерно $\frac{2}{3}$ пунктов в равнинных, а $\frac{1}{3}$ — в всхолмленных. Во всех случаях, за исключением опытного полигона, при вычислениях использовались топографические карты масштаба 1 : 300 000—1 : 500 000. Таким образом, величину m_g^p можно принять равной $0'',2$. Эта ошибка носит чисто случайный характер. Так же случайный характер имеет влияние принципиальных ошибок формулы Венинг Мейнеса, которые не превышают $0'',1$. Случайные ошибки вычисления гравиметрических уклонений отвеса по карте аномалий Буге составляют при использовании съемок сгущения $\pm 0'',3$, а при использовании двухмиллигальной съемки — не более $\pm 0'',1$. Значит, на долю случайного влияния ошибок астрономических определений приходится $0,25-0'',3$. Это вполне согласуется с оценкой точности их определений по внутренней сходимости.

Что касается систематических ошибок уклонений отвеса, то помимо ошибок астрономических определений имеют значение лишь ошибки вычисления влияния дальних зон по картам аномалий в свободном воздухе. В большинстве астрономических пунктов нами использовались карты, составленные по данным общей маятниковой съемки и дающие погрешность порядка $\pm 0'',3$. Указанная величина значительно меньше суммарной систематической ошибки в $\pm 0'',45$, так что на долю ошибок астрономических определений остается $\pm 0'',4$.

Потребуем, чтобы ошибки m_g^B не превышали $0'',2$. Такая точность будет достаточна, чтобы заметно не увеличить суммарную ошибку m_{φ} и проконтролировать точность астрономических определений. Для этого при наличии съемки с сечением через 10 мгл (один пункт на 200 км²) необходимо провести съемку сгущения в радиусе 15 км. Влияние внешних зон на m_g^B будет равно

$$m_g^B = \pm 0'',034 \delta g,$$

где δg — ошибка интерполяции по гравиметрической карте, составленной на основании данных гравиразведки. Величина δg не превышает 3—4 мгл, а поэтому $m_g^B \leq \pm 0,10 - 0'',15$. Чтобы влияние внутренних зон также не превышало $\pm 0,10 - 0'',15$, необходимо провести гравиметрическую съемку сгущения по приведенной в табл. 14 схеме.

Таблица 14

Зоны	Граничные радиусы зон, км	Средние радиусы зон, км	Число пунктов в зоне	Средние квадратические ошибки определения		
				высоты, м	силы тяжести, мгл	координаты, м
II	15	10	8	± 3	$\pm 0,6$	± 150
I	5	3	6	1	0,3	50

Расчет выполнен тем же методом, что и в предыдущем разделе, в предположении $\delta g = 0,2S$ мгл (S — в км). Ошибки высот и силы тяжести

сти подобраны таким образом, чтобы погрешности аномалий за их счет были в два раза меньше чистой ошибки интерполяции. Для более надежного учета влияния центральной зоны число пунктов в I зоне увеличено с 4 (по расчету) до 6.

При наличии гравirazведочной съемки плотностью один пункт на 100 км^2 (пятимиллигальной) можно не выполнять работ во II зоне, а при двухмиллигальной совсем не выполнять дополнительных работ.

Рекомендуемая схема проверена на опытном полигоне, описанном в § 2. По картам изоаномал Буге, составленным по материалам съемок сгущения, выбраны аномалии Буге в пунктах I зоны, а для выборки пунктов II зоны была использована двухмиллигальная карта. По выбранной аномалиям построена новая карта и по ней вычислены гравиметрические уклонения в радиусе 10 км и сопоставлены с полученными в § 2. Среднее квадратическое расхождение по 10 пунктам оказалось равным $\pm 0'',06$. Выбранный для испытания схемы район является средним по характеру аномальности. Погрешности вычислений в более аномальных районах могут оказаться лишь в 2—2,5 раза большими. Таким образом, рекомендуемая схема пригодна для работы во всех условиях. Принимая порядок различных ошибок, как указано выше, получим данные, приведенные в табл. 15.

Таблица 15

Ошибки	m_a	m_g^B	m_g^P	$m_g^{с.в.}$	m_g
Случайная часть	$\pm 0'',3$	$\pm 0'',2$	$\pm 0,1-0'',2$	—	$\pm 0'',4$
Систематическая часть	$\pm 0,4$	—	$\pm 0,1-0,15$	$\pm 0,1$ ($\pm 0,3$)	$\pm 0,4$ ($\pm 0,5$)

Ошибки вычисления влияния дальних зон рассчитаны в двух вариантах: с использованием детальных съемок и, в скобках, с использованием общей гравиметрической съемки.

Наиболее рационально образовать, как предлагает М. С. Молоденский [4], гнезда астрономических пунктов, расположенных рядом и надежно связанных геодезически, и при вычислении заменить гнездо одним эквивалентным пунктом. В исполненных рядах триангуляции гнезда по два астрономических пункта уже имеются на базисных сетях; достаточно выполнить еще одно определение в середине ряда, чтобы получить цепочку пар астрономических пунктов с расстоянием S между парами 100 км. При вычислении m_g в эквивалентном пункте следует уменьшить в $1/\sqrt{2}$ влияние случайных ошибок, а систематические ошибки оставить неизменными. Оказывается, что в тех случаях, когда влияние дальних зон учитывается по данным детальных съемок $m_g = \pm 0'',5$, километровая ошибка нивелирования ϵ равна $5''$. При учете влияния дальних зон по данным общей съемки $m_g = 0'',6$, $\epsilon = 6''$. Чтобы получить $\epsilon = 5''$, необходимо в этом случае уменьшить S до 70 км.

При работе по рассмотренной схеме астрономо-гравиметрического нивелирования придется выполнить лишь по одному новому астрономическому определению в звене, если не считать возможных случаев повторения сомнительных пунктов, съемку сгущения в звене придется выполнить вокруг 4 пунктов.

Необходимо, однако, иметь в виду, что в труднодоступных районах стоимость съемки сгущения вокруг одного астрономического пункта бу-

дет выше стоимости астрономических определений на этом пункте. Рассмотрим поэтому еще один вариант построения, когда съемки сгущения выполняются лишь вокруг двух астрономических пунктов в базисной сети, но зато астрономические определения на этих пунктах либо повторяются заново, либо выполняются по увеличенной программе, если прежних астрономических определений не было. Есть основания считать систематические ошибки новых определений значительно меньшими, чем у прежних. При этом условии можно увеличить расстояние между группами астрономических пунктов до 200 км. При работах по астрономо-гравиметрическому нивелированию в указанном варианте желательнее сначала выполнить гравиметрическую съемку сгущения и вычислять остаточные отклонения отвеса, используя уже имеющиеся данные астрономических определений. Возможно, что в ряде мест старые определения будут достаточно точны и тогда отпадет необходимость улучшения астрономических координат путем дополнительных определений.

В горных районах и вблизи морских и сухопутных границ целесообразно сохранить прежнюю схему нивелирования. При этом в районах гравиразведочных работ можно полностью отказаться от дополнительных съемок сгущения, если пункты детальной съемки расположены не реже, чем через 10 км. При наличии съемки один пункт на 200 км² можно не выполнять пункты III зоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Говорова Л. А. Анализ и обработка материалов гравиметровых съемок. Составление новых и исправление ранее составленных листов карта масштаба 1:500 000. Сборник рефератов ЦНИИГАиК. Вып. 8, 1957.
2. Говорова Л. А. Об ошибках интерполяции аномалии силы тяжести и о точности гравиметрических отклонений отвесных линий. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 139, М., Геозидздат, 1960.
3. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Наставление по астрономо-гравиметрическому нивелированию. Сборник рефератов ЦНИИГАиК. Вып. 16, 1959.
4. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 131, М., Геозидздат, 1960.
5. Пеллинен Л. П. Требования к гравиметрической съемке, связанные с обработкой астрономо-геодезических и нивелирных сетей. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 139, М., Геозидздат, 1960.

L. P. Pellinen, L. A. Govorova

AN ESTIMATE OF ACCURACY OF ASTRO — GRAVIMETRIC LEVELLING IN THE USSR

Abstract

The accuracy of computing gravimetric and astro-geodetic plumb-line deflections at points of astro-gravimetric levelling in the USSR is investigated. Use has been made of gravimetric extension surveys carried out by the Establishment N7, as well as of detailed surveys conducted by geophysical organizations from 1947 to 1957, and of experimental work of 1960. It is shown that variations of discrepancies between astro-geodetic and gravimetric plumb-line deflections (residual deflections) are due chiefly to errors in astronomical coordinates. The accidental and systematic parts of their effect upon the plumb-line deflection are $\pm 0",35$ and $\pm 0",45$, respectively, and both are of the same magnitude for deflection components along the meridian and the prime vertical. According to data of extension surveys carried out by the Establishment N 7, the gravimetric plumb-line deflections are determined with an error of $\pm 0",3$. A new scheme of extension survey is recommended for those regions where detailed geophysical surveys are available.

Е. М. Орлова

О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ДАЛЬНИХ ЗОН НА ВЫСОТУ КВАЗИГЕОИДА С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ СТОКСА ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ K И Q

Высоту квазигеоида можно вычислить на основе численного решения Молоденским его интегрального уравнения для плотности простого слоя на физической поверхности, заменяющего притяжение всех аномальных масс (Труды ЦНИИГАиК. Вып. 131. М., Геодиздат, 1960),

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int (G_0 + G_1 + G_2 + \dots) S(\cos \psi) d\omega - \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int (G_0 + G_1 + G_2 + \dots) d\omega -$$

$$- \frac{R^2}{2} \int \frac{(H - H_0)^2}{r_0^3} \chi_0 d\omega - \frac{R^2}{2} \int \frac{(H - H_0)^2}{r_0^3} \chi_1 d\omega \dots \quad (1)$$

Здесь обозначено:

$G_0 = g - \gamma$, G_1 , G_2 и т. д. — аномалии на физической поверхности и поправки к ним из первого, второго и т. д. приближений;

γ_0 — среднее значение силы тяжести на поверхности Земли;

H — высота текущей точки;

H_0 — высота точки, для которой вычисляют ζ ;

r_0 — расстояние между проекциями этих точек на отсчетную сферу;

R — радиус Земли;

ω — телесный угол с вершиной в центре сферы (угол видимости элемента физической поверхности);

ψ — угловое расстояние от исследуемой точки;

$S(\cos \psi)$ — функция Стокса;

$\chi = \frac{c^2}{R^2} \varphi \operatorname{seca}$ — вспомогательная функция, зависящая от поверхностной плотности φ ;

χ_0 , χ_1 , χ_2 и т. д. — значения этой функции из нулевого, первого, второго и т. д. приближений;

ρ — радиус-вектор точки физической поверхности;

α — угол наклона ее элемента относительно отсчетной поверхности.

Если при вычислении влияния аномалий и поправок к ним $\Delta g = G_0 + G_1 + G_2 + \dots$ в дальних зонах пользоваться разложением G_0 , G_1 , G_2, \dots по сферическим функциям и функцию Стокса в дальних зонах представлять при помощи коэффициентов K или Q , то первый член формулы (1) можно записать в виде

$$\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g [S(\cos \psi) - S_\infty(\cos \psi)] \sin \psi d\psi dA +$$

$$+ \frac{R}{2\gamma_0} \sum_{r=n=0}^{\infty} K_r(S_\infty) \Delta g_n$$

или

$$\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g S(\cos \psi) \sin \psi d\psi dA + \frac{R}{2\gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n Q_n, \quad (2)$$

где

$$\Delta g_n = \sum_{n=0}^n \sum_{m=0}^{m=n} (A_{nm} \cos mL + B_{nm} \sin mL) P_{nm}(\cos \psi),$$

$$S_{\infty}(\cos \psi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2r+1}{2} K_r(S_{\infty}) P_r(\cos \psi).$$

Здесь $P_r(\cos \psi)$ — полиномы Лежандра; A — азимут направления на текущую точку (М. С. Молоденский. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 42, 1945; В. Ф. Еремеев и М. И. Юркина. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 121, 1957; Молоденский и др. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 131, 1960).

Выделим из ζ_0 влияние дальних зон, удерживая при этом в $S(\cos \psi)$ только члены до порядка m включительно:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \zeta &= \frac{R}{2\gamma_0} \sum_0^m \Delta g_n Q_n \\ \Delta \zeta &= \frac{R}{2\gamma_0} \sum_0^m K_r(S_m) \Delta g_n - \frac{R}{2\gamma_0} \int_0^{\psi_0} \Delta g S_m(\cos \psi) \sin \psi d\psi \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Известно, что разложение по коэффициентам K сходится быстрее, чем разложение по коэффициентам Q . Необходимо выяснить, насколько точнее можно вычислить влияние дальних зон по коэффициентам K , какова сходимость приближений, сколько гармоник надо удержать для получения результата с заданной точностью. Для такого исследования необходимо задать некоторое распределение аномалий, вычислить влияние дальних зон по коэффициентам K и Q и сравнить результаты с точным значением этого влияния.

В нашем исследовании аномалии на поверхности сферы были заданы функциями:

$$\begin{aligned} \Delta g_1 &= \sin 3\psi, \quad \Delta g_2 = \sin 4\psi, \quad \Delta g_3 = \sin 5\psi, \quad \Delta g_4 = \sin 6\psi, \quad \Delta g_5 = \\ &= \sin 7\psi, \quad \Delta g_6 = \sin 8\psi, \quad \Delta g_7 = \sum_{q=3}^8 \sin q\psi. \end{aligned}$$

Эти функции, как известно, по полиномам Лежандра можно разложить только в бесконечные ряды. Таким образом, пользуясь только гармониками низших порядков, можно проводить исследование в более общем виде, чем для функций, представленных конечными рядами. Если учесть все члены конечного ряда, то результаты по коэффициентам K и Q будут одинаковы. Разложение аномалий по полиномам Лежандра нами выполнено до гармоник восьмого порядка ($m=8$).

Вычислено влияние зоны от ψ_0 до π на полюс сферы. Точное значение влияния дальних зон в нашем случае будет

$$\int_{\psi_0}^{\pi} \Delta g S(\cos \psi) \sin \psi d\psi.$$

Множитель $\frac{R}{2r_0}$ опущен (также и при вычислении по коэффициентам K и Q), так как речь идет только о сравнении полученных значений. Вычисления по этой формуле особых трудностей не вызывают за исключением интегралов типа

$$\int_{\psi_0}^{\pi} \sin q\psi \sin 2\psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) d\psi.$$

Интегрированием по частям выделим из таких интегралов

$$\int_{\psi_0}^{\pi} \frac{\cos \frac{\psi}{2} \left(\frac{1}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right)}{\sin \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)} \left[\frac{\sin (q-2)\psi}{2(q-2)} - \frac{\sin (q+2)\psi}{2(q+2)} \right] d\psi.$$

Затем разлагаем $\sin (q-2)\psi$ и $\sin (q+2)\psi$ в конечные ряды по степеням $\sin \frac{\psi}{2}$ по известной формуле

$$\begin{aligned} \sin 2lx = & (-1)^{l-1} \cos x \left\{ 2^{2l-1} \sin^{2l-1} x - \frac{2l-2}{1!} 2^{2l-3} \sin^{2l-3} x + \right. \\ & \left. + \frac{(2l-3)(2l-4)}{2!} 2^{2l-5} \sin^{2l-5} x - \frac{(2l-4)(2l-5)(2l-6)}{3!} 2^{2l-7} \sin^{2l-7} x + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Далее выносим за скобки $\sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}$ и после преобразований получаем подынтегральное выражение в виде суммы произведений степеней $\sin \frac{\psi}{2}$ на числовые коэффициенты, т. е. в виде, уже удобном для интегрирования. Опуская промежуточные выкладки, приведем лишь формулы точных значений влияния дальних зон для аномалий, заданных нашими функциями:

$$\begin{aligned} \int_{\psi_0}^{\pi} \sin 3\psi S(\cos \psi) \sin \psi d\psi = & \ln \left(\sin \frac{\psi_0}{2} + \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \right) \left(\frac{3}{4} \sin 4\psi_0 - \frac{3}{20} \sin 5\psi_0 \right) + \\ & + \frac{4}{5} \sin \psi_0 - \frac{1}{4} \sin 2\psi_0 + \frac{1}{10} \sin 3\psi_0 + \frac{1}{8} \sin 4\psi_0 - \frac{11}{50} \sin 5\psi_0 + \frac{6}{5} \cos \frac{\psi_0}{2} + \\ & + \frac{11}{10} \cos \frac{3\psi_0}{2} - \frac{13}{50} \cos \frac{5\psi_0}{2} - \frac{1}{10} \cos \frac{7\psi_0}{2} + \frac{3}{10} \cos \frac{9\psi_0}{2}, \\ \int_{\psi_0}^{\pi} \sin 4\psi S(\cos \psi) \sin \psi d\psi = & \ln \left(\sin \frac{\psi_0}{2} + \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \right) \left(\frac{3}{8} \sin 2\psi_0 - \frac{1}{8} \sin 6\psi_0 \right) + \\ & + \frac{1}{4} (\pi - \psi_0) + \frac{9}{16} \sin 2\psi_0 - \frac{1}{6} \sin 3\psi_0 + \frac{1}{16} \sin 4\psi_0 + \frac{1}{10} \sin 5\psi_0 - \frac{3}{10} \sin 6\psi_0 - \\ & - \frac{1}{2} \cos \frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{6} \cos \frac{3\psi_0}{2} + \frac{13}{20} \cos \frac{5\psi_0}{2} - \frac{5}{28} \cos \frac{7\psi_0}{2} - \frac{1}{12} \cos \frac{9\psi_0}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{11\psi_0}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\psi_0}^{\pi} \sin 5\psi S(\cos \psi) \sin \psi d\psi &= \ln \left(\sin \frac{\psi_0}{2} + \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \right) \left(\frac{1}{4} \sin 3\psi_0 - \frac{3}{28} \sin 7\psi_0 \right) - \\
&- \frac{2}{7} \sin \psi_0 + \frac{17}{42} \sin 3\psi_0 - \frac{1}{8} \sin 4\psi_0 + \frac{3}{70} \sin 5\psi_0 + \frac{1}{12} \sin 6\psi_0 - \frac{8}{49} \sin 7\psi_0 + \\
&+ \frac{2}{7} \cos \frac{\psi_0}{2} - \frac{2}{21} \cos \frac{3\psi_0}{2} + \frac{2}{35} \cos \frac{5\psi_0}{2} + \frac{45}{98} \cos \frac{7\psi_0}{2} - \frac{17}{126} \cos \frac{9\psi_0}{2} - \\
&- \frac{1}{14} \cos \frac{11\psi_0}{2} + \frac{3}{14} \cos \frac{13\psi_0}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\psi_0}^{\pi} \sin 6\psi S(\cos \psi) \sin \psi d\psi &= \ln \left(\sin \frac{\psi_0}{2} + \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \right) \left(\frac{3}{16} \sin 4\psi_0 - \frac{3}{32} \sin 8\psi_0 \right) + \\
&+ \frac{3}{32} (\pi - \psi_0) - \frac{3}{32} \sin 2\psi_0 + \frac{5}{16} \sin 4\psi_0 - \frac{1}{10} \sin 5\psi_0 + \frac{1}{32} \sin 6\psi_0 + \frac{1}{14} \sin 7\psi_0 - \\
&- \frac{37}{256} \sin 8\psi_0 - \frac{3}{16} \cos \frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{16} \cos \frac{3\psi_0}{2} - \frac{3}{80} \cos \frac{5\psi_0}{2} + \frac{3}{112} \cos \frac{7\psi_0}{2} + \\
&+ \frac{17}{48} \cos \frac{9\psi_0}{2} - \frac{19}{176} \cos \frac{11\psi_0}{2} - \frac{1}{16} \cos \frac{13\psi_0}{2} + \frac{3}{16} \cos \frac{15\psi_0}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\psi_0}^{\pi} \sin 7\psi S(\cos \psi) \sin \psi d\psi &= \ln \left(\sin \frac{\psi_0}{2} + \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \right) \left(\frac{3}{20} \sin 5\psi_0 - \frac{1}{12} \sin 9\psi_0 \right) - \\
&- \frac{2}{15} \sin \psi_0 - \frac{2}{45} \sin 3\psi_0 + \frac{19}{75} \sin 5\psi_0 - \frac{1}{12} \sin 6\psi_0 + \frac{1}{42} \sin 7\psi_0 + \frac{1}{16} \sin 8\psi_0 - \\
&- \frac{7}{54} \sin 9\psi_0 + \frac{2}{15} \cos \frac{\psi_0}{2} - \frac{2}{45} \cos \frac{3\psi_0}{2} + \frac{2}{75} \cos \frac{5\psi_0}{2} - \frac{2}{105} \cos \frac{7\psi_0}{2} + \\
&+ \frac{2}{135} \cos \frac{9\psi_0}{2} + \frac{19}{66} \cos \frac{11\psi_0}{2} - \frac{7}{78} \cos \frac{13\psi_0}{2} - \frac{1}{18} \cos \frac{15\psi_0}{2} + \\
&+ \frac{1}{6} \cos \frac{17\psi_0}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\psi_0}^{\pi} \sin 8\psi S(\cos \psi) \sin \psi d\psi &= \ln \left(\sin \frac{\psi_0}{2} + \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \right) \left(\frac{1}{8} \sin 6\psi_0 - \frac{3}{40} \sin 10\psi_0 \right) + \\
&+ \frac{1}{20} (\pi - \psi_0) - \frac{1}{20} \sin 2\psi_0 - \frac{1}{40} \sin 4\psi_0 + \frac{51}{240} \sin 6\psi_0 - \frac{1}{14} \sin 7\psi_0 + \\
&+ \frac{3}{160} \sin 8\psi_0 + \frac{1}{18} \sin 9\psi_0 - \frac{47}{400} \sin 10\psi_0 - \frac{1}{10} \cos \frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{30} \cos \frac{3\psi_0}{2} - \\
&- \frac{1}{50} \cos \frac{5\psi_0}{2} + \frac{1}{70} \cos \frac{7\psi_0}{2} - \frac{1}{90} \cos \frac{9\psi_0}{2} + \frac{1}{110} \cos \frac{11\psi_0}{2} + \frac{63}{260} \cos \frac{13\psi_0}{2} - \\
&- \frac{23}{300} \cos \frac{15\psi_0}{2} - \frac{1}{20} \cos \frac{17\psi_0}{2} + \frac{3}{20} \cos \frac{19\psi_0}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\psi_0}^{\pi} \sum_{q=3}^8 \sin q\psi S(\cos \psi) \sin \psi d\psi = \ln \left(\sin \frac{\psi_0}{2} + \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \right) \left(\frac{3}{4} \sin \psi_0 + \frac{3}{8} \sin 2\psi_0 + \right. \\
& + \frac{1}{4} \sin 3\psi_0 + \frac{3}{16} \sin 4\psi_0 - \frac{3}{28} \sin 7\psi_0 - \frac{3}{32} \sin 8\psi_0 - \frac{1}{12} \sin 9\psi_0 - \frac{3}{40} \sin 10\psi_0 \left. \right) + \\
& + \frac{63}{160} (\pi - \psi_0) + \frac{8}{21} \sin \psi_0 + \frac{27}{160} \sin 2\psi_0 + \frac{37}{126} \sin 3\psi_0 + \frac{7}{20} \sin 4\psi_0 + \\
& + \frac{8}{105} \sin 5\psi_0 + \frac{9}{160} \sin 6\psi_0 - \frac{41}{294} \sin 7\psi_0 - \frac{81}{1280} \sin 8\psi_0 - \frac{2}{27} \sin 9\psi_0 - \\
& - \frac{47}{400} \sin 10\psi_0 + \frac{1397}{1680} \cos \frac{\psi_0}{2} + \frac{6163}{5040} \cos \frac{3\psi_0}{2} + \frac{3497}{8400} \cos \frac{5\psi_0}{2} + \frac{2383}{11760} \cos \frac{7\psi_0}{2} + \\
& + \frac{6647}{15120} \cos \frac{9\psi_0}{2} + \frac{6793}{18480} \cos \frac{11\psi_0}{2} + \frac{6647}{21840} \cos \frac{13\psi_0}{2} + \frac{199}{3600} \cos \frac{15\psi_0}{2} + \\
& + \frac{7}{60} \cos \frac{17\psi_0}{2} + \frac{3}{20} \cos \frac{19\psi_0}{2}.
\end{aligned}$$

По этим формулам для $\sin \frac{\psi_0}{2} = 0,1$, $\sin \frac{\psi_0}{2} = 0,2$ и $\sin \frac{\psi_0}{2} = 0,3$, т. е. для радиусов r учета влияния дальних зон соответственно 1274, 2548 и 3823 км, вычислены и приведены в табл. 1 точные значения влияния дальних зон.

Т а б л и ц а 1

Радиус учета аномалий r , км	Исследуемая функция						
	$\Delta g_1 = \sin 3\psi$	$\Delta g_2 = \sin 4\psi$	$\Delta g_3 = \sin 5\psi$	$\Delta g_4 = \sin 6\psi$	$\Delta g_5 = \sin 7\psi$	$\Delta g_6 = \sin 8\psi$	$\Delta g_7 = \sum_{q=3}^8 \sin q\psi$
1274	+2,09852	+0,90593	+0,49140	+0,27193	+0,13269	+0,03611	+3,93657
2548	+1,78111	+0,53123	+0,09416	-0,11195	-0,20451	-0,22695	+1,86309
3823	+1,57009	+0,33567	-0,04110	-0,15769	-0,15368	-0,09552	+1,45778

Вычислим теперь влияние дальних зон по коэффициентам Q и K . Для нашего случая формулы (3) примут вид:

$$\Delta \zeta = \sum_{n=2}^8 A_n Q_n \quad \text{и}$$

$$\Delta \zeta = \sum_{n=2}^8 A_n K_n (S_8) - \int_0^{\psi_0} \Delta g S_8 (\cos \psi) \sin \psi d\psi,$$

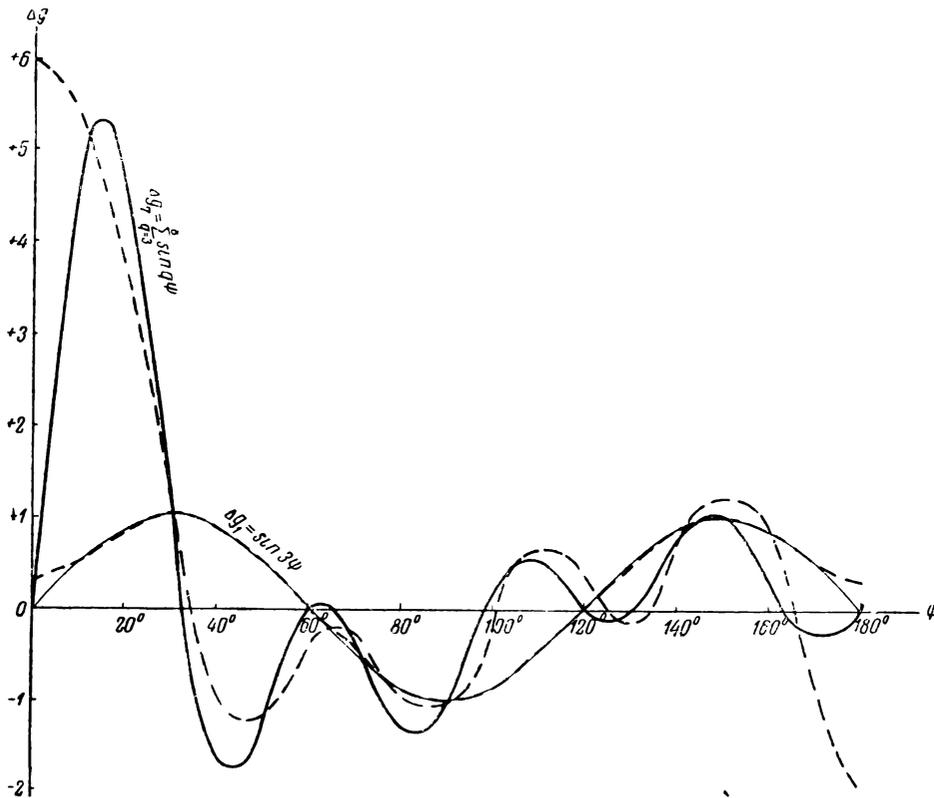
где

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \Delta g P_n (\cos \psi) \sin \psi d\psi.$$

Коэффициенты A будут содержать интегралы типа

$$\int_0^{\pi} \sin q\psi \sin \psi \cos p\psi d\psi = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin(p+q-1)\psi}{p+q-1} + \frac{\sin(p+1-q)\psi}{p+1-q} - \frac{\sin(p+q+1)\psi}{p+q+1} - \frac{\sin(q+1-p)\psi}{q+1-p} \right\} \Big|_0^{\pi}, \quad (4)$$

где $p \leq q$ и принимает только четные или нечетные значения в зависимости от того — четное или нечетное q . Эти интегралы не равны нулю только при $p = q - 1$ и $p = q + 1$. Поэтому разложение $\sin q\psi$ по полиномам Лежандра будет начинаться с $(q-1)$ -ой гармоники и содержать или одни четные, или одни нечетные гармоники.



На рисунке показаны графики самой простой и самой сложной из выбранных нами функций $\Delta g_1 = \sin 3\psi$ и $\Delta g_7 = \sum_{q=3}^8 \sin q\psi$ (сплошные линии), а также графики их выражений через сферические функции (пунктирные линии). Наименее точно сферические функции представляют Δg в полюсах сферы. В табл. 2 приведены коэффициенты разложения наших функций по полиномам Лежандра.

В табл. 3 выписаны коэффициенты Q и K для указанных выше радиусов учета влияния дальних зон.

Таблица 2

Коэффициенты разложения по полиномам Лежандра	$\Delta g_1 =$	$\Delta g_2 =$	$\Delta g_3 =$	$\Delta g_4 =$	$\Delta g_5 =$	$\Delta g_6 =$	$\Delta g_7 = \sum_{q=3}^8 \sin q\phi$
	$= \sin 3\phi$	$= \sin 4\phi$	$= \sin 5\phi$	$= \sin 6\phi$	$= \sin 7\phi$	$= \sin 8\phi$	
A_2	+1,472622						+1,472622
A_3		+1,718059					+1,718059
A_4	-0,828350		+1,932815				+1,104465
A_5		-0,944931		+2,126098			+1,181167
A_6	-0,209387		-1,046939		+2,303271		+1,046942
A_7		-0,241601		-1,138981		+2,467790	+1,087208
A_8	-0,102680		-0,268924		-1,223613		-1,595219

Таблица 3

№ по пор.	Значения коэффициента Q при $r, км$			№ по пор.	Значения коэффициента K при $r, км$		
	1274	2548	3823		1274	2548	3823
				0	-0,25552	-0,40402	-0,52768
				1	-0,25439	-0,39910	-0,51681
2	+1,53388	+1,17224	+1,02795	2	+1,74786	+1,61050	+1,50400
3	+0,54340	+0,23215	+0,14595	3	+0,75118	+0,62436	+0,53304
4	+0,22249	-0,02767	-0,05375	4	+0,42220	+0,30849	+0,23471
5	+0,07094	-0,11189	-0,08582	5	+0,26085	+0,16213	+0,10647
6	-0,01153	-0,12554	-0,06302	6	+0,16706	+0,08444	+0,04584
7	-0,05855	-0,10687	-0,02768	7	+0,10740	+0,04120	+0,01729
8	-0,08474	-0,07456	+0,00157	8	+0,06749	+0,01729	+0,00488

При вычислении интегралов $\int_0^{\psi_0} \Delta g S_m(\cos \psi) \sin \psi d\psi$ использована

формула (4), в которой теперь верхним пределом интегрирования является ψ_0 . Приведем результаты вычислений влияния дальних зон с помощью коэффициентов Q (табл. 4) и K (табл. 5) и сравним их с точными значениями этих величин. В последних двух таблицах под каждым значением выписана его относительная ошибка.

Как видно из табл. 4 и 5, первые гармоники могут иметь ошибку порядка определяемой величины. Поэтому при использовании как коэффициентов K , так и коэффициентов Q нельзя ограничиваться одной гармоникой. Сходимость следующих приближений по коэффициентам K значительно выше. Чем сложнее функция Δg , тем предпочтительнее применять для вычисления влияния дальних зон коэффициенты K . В нашем случае, например, при вычислении до гармоник 8-го порядка (при $\sin \frac{\psi_0}{2} = 0,3$) по коэффициентам K точность повысилась

для функции	$\Delta g_1 = \sin 3\psi$	в	7	раз
„	„	$\Delta g_2 = \sin 4\psi$	„	60 „
„	„	$\Delta g_3 = \sin 5\psi$	„	45 „
„	„	$\Delta g_4 = \sin 6\psi$	„	73 „
„	„	$\Delta g_5 = \sin 7\psi$	„	55 „
„	„	$\Delta g_6 = \sin 8\psi$	„	48 „
„	„	$\Delta g_7 = \sum_{q=3}^8 \sin q\psi$	„	110 „

По точности седьмая и восьмая гармоники, вычисленные по коэффициентам Q , примерно соответствуют пятой гармонике, вычисленной по коэффициентам K . С уменьшением ψ_0 , как и следовало ожидать, влияние дальних зон вычисляется все с меньшей точностью. Но и здесь по коэффициентам K результаты получаются в несколько раз точнее, чем по Q . Чтобы получить большую точность по первым гармоникам при помощи коэффициентов K , нужно, вероятно, уменьшить значение m . Конечно, все выводы сделаны при условии, что коэффициенты разложения аномалий по сферическим функциям не содержат ошибок.

Работа выполнена по предложению Молоденского под руководством М. И. Юркиной.

Таблица 4

Влияние дальних зон, вычисленное по коэффициентам Q

№ гар- моник	$\Delta g_1 =$ $= \sin 3\psi$	$\Delta g_2 =$ $= \sin 4\psi$	$\Delta g_3 =$ $= \sin 5\psi$	$\Delta g_4 =$ $= \sin 6\psi$	$\Delta g_5 =$ $= \sin 7\psi$	$\Delta g_6 =$ $= \sin 8\psi$	$\Delta g_7 = \sum_{q=3}^8 \sin q\psi$
$\sin \frac{\psi_0}{2} = 0,1$							
2	+2,25882 1 : 13						+2,25882 1 : 2
3		+0,93359 1 : 33					+3,19242 1 : 5
4	+2,07453 1 : 87		+0,43003 1 : 8				+3,43815 1 : 8
5		+0,86656 1 : 23		+0,15082 1 : 2			+3,52194 1 : 9
6	+2,07694 1 : 97		+0,44210 1 : 10		-0,02656 1 : 0,83		+3,50987 1 : 9
7		+0,880706 1 : 36		+0,21751 1 : 5		-0,14449 1 : 0,20	+3,44622 1 : 8
8	+2,08564 1 : 163		+0,46489 1 : 19		+0,077132 1 : 2		+3,58140 1 : 11
$\sin \frac{\psi_0}{2} = 0,2$							
2	+1,72627 1 : 32						+1,72627 1 : 11
3		+0,39885 1 : 4					+2,12511 1 : 7
4	+1,74919 1 : 56		-0,05348 1 : 0,64				+2,09455 1 : 8
5		+0,50458 1 : 20		+0,23789 1 : 0,89			+1,96239 1 : 19
6	+1,77547 1 : 316		+0,07795 1 : 6		-0,28915 1 : 2		+1,83096 1 : 58
7		+0,52040 1 : 636		-0,11617 1 : 27		-0,26373 1 : 6	+1,71477 1 : 13
8	+1,78313 1 : 880		+0,09800 1 : 25		-0,19792 1 : 31		+1,83371 1 : 64
$\sin \frac{\psi_0}{2} = 0,3$							
2	+1,51378 1 : 28						+1,51378 1 : 26
3		+0,25075 1 : 4					+1,76453 1 : 5
4	+1,55831 1 : 133		-0,10389 1 : 0,65				+1,70517 1 : 6
5		+0,33184 1 : 88		-0,18246 1 : 6			+1,60378 1 : 10
6	+1,57150 1 : 1114		-0,03791 1 : 13		-0,14515 1 : 18		+1,53782 1 : 18
7		+0,33853 1 : 118		-0,15094 1 : 24		-0,06831 1 : 4	+1,50773 1 : 29
8	+1,57134 1 : 1256		-0,03833 1 : 15		-0,14707 1 : 23		+1,50522 1 : 31

Т а б л и ц а 5

Влияние дальних зон, вычисленное по коэффициентам K

№ гар- моник	$\Delta g_1 =$ $= \sin 3\phi$	$\Delta g_2 =$ $= \sin 4\phi$	$\Delta g_3 =$ $= \sin 5\phi$	$\Delta g_4 =$ $= \sin 6\phi$	$\Delta g_5 =$ $= \sin 7\phi$	$\Delta g_6 =$ $= \sin 8\phi$	$\Delta g_7 = \sum_{q=3}^8 \sin q\phi$
$\sin \frac{\phi_0}{2} = 0,1$							
2	+2,49071 1 : 5						+1,76063 1 : 2
3		+1,18264 1 : 3					+3,05120 1 : 4
4	+2,14098 1 : 49		+0,68689 1 : 3				+3,51750 1 : 9
5		+0,93615 1 : 30		+0,40521 1 : 2			+3,82561 1 : 35
6	+2,10600 1 : 280		+0,51098 1 : 25		+0,21955 1 : 2		+4,00051 1 : 62
7		+0,91020 1 : 212		+0,28288 1 : 25		+0,08767 1 : 0,70	+4,11728 1 : 22
8	+2,09907 1 : 3820		+0,49283 1 : 343		+0,13696 1 : 31		+4,00961 1 : 54
$\sin \frac{\phi_0}{2} = 0,2$							
2	+2,05597 1 : 6						+0,15814 1 : 1
3		+0,69475 1 : 3					+1,23081 1 : 3
4	+1,80044 1 : 92		+0,18694 1 : 1				+1,57153 1 : 6
5		+0,54155 1 : 51		-0,06405 1 : 2			+1,76303 1 : 19
6	+1,78276 1 : 1080		+0,09854 1 : 21		-0,18395 1 : 10		+1,85143 1 : 160
7		+0,53159 1 : 1475		-0,11098 1 : 115		-0,22172 1 : 43	+1,89623 1 : 56
8	+1,78098 1 : 13710		+0,09389 1 : 349		-0,20511 1 : 342		+1,86865 1 : 336
$\sin \frac{\phi_0}{2} = 0,3$							
2	+1,77459 1 : 8						+0,09841 1 : 1
3		+0,44050 1 : 3					+1,01420 1 : 3
4	+1,58017 1 : 157		+0,00815 1 : 0,83				+1,27344 1 : 8
5		+0,33990 1 : 80		-0,13791 1 : 8			+1,39919 1 : 25
6	+1,57057 1 : 4110		-0,03984 1 : 33		-0,14783 1 : 26		+1,44719 1 : 138
7		+0,33572 1 : 7000		-0,15760 1 : 1750		-0,09502 1 : 193	+1,46599 1 : 177
8	+1,57007 1 : 8260		-0,04116 1 : 673		-0,15380 1 : 1260		+1,45820 1 : 3420

E. M. Orlova

ABOUT ACCURACY OBTAINABLE IN COMPUTING THE INFLUENCE OF DISTANT ZONES UPON THE QUASIGEOIDAL HEIGHT BY EXPANDING THE STOKES FUNCTION IN SERIES OF COEFFICIENTS K AND Q

Abstract

Using, as an example, an anomalous field determined by functions of different complexity, a comparison is made between two methods of computing the influence of distant zones upon the quasigeoidal height. Both methods are based on an expansion of the Stokes function in series of spherical functions with the aid of coefficients K and Q. A comparison of the results with the rigorous values has shown that the influence of distant zones can be determined from coefficients K at least several times as accurately as from coefficients Q. The convergence of K approximations is also much better. The advantage of using the coefficients K is revealed the clearer the more complex is the field of anomalies.

В. А. Таранов

ЗАВИСИМОСТЬ АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ОТ ВЫСОТЫ ПРИ ВЫВОДЕ СРЕДНИХ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БОЛЬШИХ ПЛОЩАДЕЙ

При общих исследованиях гравитационного поля и фигуры Земли возникает задача определения средних аномалий силы тяжести в свободном воздухе для больших площадей по дискретным и зачастую неравномерно распределенным гравиметрическим наблюдениям.

Задача эта не нова. Подобного рода вопросы решались в СССР, например, Б. В. Дубовским в 1938 г. (см. М. С. Молоденский [1]), И. Д. Жонголовичем [3] в 1952 г. и за рубежом — Джеффрисом в 1941 г. [5], Уотила в 1960 г. [6], Каула в 1958—1959 гг. [4] и др. Несмотря на увеличение гравиметрической изученности мира, этот вопрос остро стоит и в настоящее время, так как имеющиеся наблюдения неравномерно распределены как по площади, так и по высоте.

Цель данной статьи — осветить опыт решения этой задачи в ЦНИИГАиК и сравнить методы, принятые другими авторами, с нашей методикой осреднения аномалий.

Очевидно, что при определении средних гравиметрических характеристик для больших площадей необходимо учитывать зависимость аномалии силы тяжести от рельефа местности. Известно, что в пределах небольших участков, порядка трапеции $1^\circ \times 1^\circ$, хороший результат дает косвенная интерполяция аномалий в свободном воздухе Δg через редукцию Буге. В пределах таких участков коэффициент зависимости Δg от высоты или глубины равен коэффициенту редукции Буге*.

При увеличении площади участков, по которым проводится осреднение, зависимость аномалий от высоты и глубины ослабляется. Лучше всего эта зависимость может быть определена статистическим путем.

И. Д. Жонголович учитывал зависимость аномалий от высоты (глубины) при переходе от одноградусных трапеций к трапециям $10^\circ \times 10^\circ$ следующим образом. Для каждой трапеции $1^\circ \times 1^\circ$, при наличии в ней гравиметрических пунктов (или при достаточном количестве наблюдений для выбранного диапазона высот в трапеции $1^\circ \times 1^\circ$), были составлены уравнения типа

$$\Delta g_i = a + kH_i,$$

где H_i — средняя высота, а Δg_i — средняя аномалия трапеции $1^\circ \times 1^\circ$. Далее из решения таких уравнений по способу наименьших квадратов им были получены отдельно для каждой трапеции $10^\circ \times 10^\circ$ коэффициенты зависимости аномалий от высоты k и глубины b^{**} . Среднее значение коэффициента $k = 0,046$ мгл/м (из 75 значений), а $b = 0,020$ мгл/м (из 68 значений).

* Практически коэффициент зависимости аномалии в свободном воздухе от высоты в горных районах для трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ по нашим данным близок к 0,10 мгл/м.

** Обозначения коэффициентов зависимости k и b приняты автором.

Аналогичные исследования Джеффриса (1941 г.), но по материалам меньшего объема, дали в среднем $k = 0,046$ мгл/м и $b = 0,022$ мгл/м.

Недостатком примененного Джеффрисом и Жонгловичем способа приведения аномалий к средней высоте трапеции $10^\circ \times 10^\circ$ является то, что коэффициенты зависимости аномалий от высоты эмпирически определялись отдельно для каждой десятиградусной трапеции, независимо от качества и количества имеющегося материала наблюдений, и получались наиболее неуверенно в плохо изученных трапециях, т. е. как раз там, где точные значения коэффициентов наиболее необходимы.

В Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэро-съемки и картографии пошли по другому пути, полагая, что лучше считать коэффициенты зависимости аномалии от высоты и глубины постоянными для всех однотипных десятиградусных трапеций и определять их только по хорошо изученным трапециям.

Для определения средних значений коэффициентов k и b при осреднении данных на трапециях $1^\circ \times 1^\circ$, входящих в трапецию $10^\circ \times 10^\circ$, нами были выбраны хорошо изученные районы с большим диапазоном изменения высот или глубин и приблизительно равные по площади трапециям $10^\circ \times 10^\circ$. Для каждого из этих районов графически была определена зависимость аномалий в свободном воздухе от высоты или глубины. Таких определений на суше было сделано 14, на море — 12. Средний коэффициент оказался равным $0,070 \pm 0,006$ мгл/м для трапеций на материковых частях и $0,025 \pm 0,004$ мгл/м для трапеций на морских поверхностях. Эти коэффициенты принимались как постоянные для приведения аномалий к средней высоте или глубине трапеций $10^\circ \times 10^\circ$.

Чтобы свести к минимуму ошибки, связанные с учетом рельефа при различной плотности съемки и с изменением зависимости аномалии с высотой при различной степени осреднения, в дальнейшем переход от трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ к трапециям $10^\circ \times 10^\circ$ стали выполнять в три этапа (второй, третий и четвертый этапы в принятом ниже обозначении) с применением на каждом этапе своего коэффициента зависимости аномалии от высоты или глубины.

Вычисления средних аномалий в свободном воздухе и коэффициентов k (или b) проводились в такой последовательности:

1 этап — определение характеристик трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ по аномалиям гравиметрических пунктов с применением метода косвенной интерполяции через аномалии в редукции Буге ($\sigma = 2,3$ г/см³);

2 этап — переход от аномалий трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ к аномалиям трапеций $2^\circ \times 2^\circ$;

3 этап — переход от трапеций $2^\circ \times 2^\circ$ к трапециям $4^\circ \times 4^\circ$;

4 этап — переход от трапеций $4^\circ \times 4^\circ$ к трапециям $10^\circ \times 10^\circ$.

Вычисления средних аномалий для материковых трапеций на 2,3 и 4 этапах осреднения выполняли по формуле

$$\Delta g = \Delta g_{\text{ср}} + k_i (\bar{H} - H_{\text{ср}}),$$

где $\Delta g_{\text{ср}}$, $H_{\text{ср}}$ — среднее значение аномалии в свободном воздухе и средняя высота на трапециях, имеющих гравиметрические наблюдения;

\bar{H} — средняя высота всей трапеции*;

k_i — коэффициент зависимости аномалии в свободном воздухе от высоты для данного этапа осреднения.

* При выводе \bar{H} высоты трапеций, не имеющих гравиметрических наблюдений, не учитывались.

Средние аномалии для морских трапеций вычисляли по формуле

$$\Delta g = \Delta g_{\text{ср}} + b_i(\bar{P} - P_{\text{ср}}),$$

где \bar{P} и $P_{\text{ср}}$ — соответствующие глубины, а b_i — коэффициент зависимости аномалии в свободном воздухе от глубины для данного (i -вого) этапа осреднения.

Коэффициенты k_i и b_i были вычислены по способу наименьших квадратов. Так, например, при переходе от трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ к трапециям $2^\circ \times 2^\circ$ применялись формулы

$$k_2 = \frac{[\Delta g \cdot h]}{[h \cdot h]} \quad \text{и} \quad b_2 = \frac{[\Delta g \cdot p]}{[p \cdot p]},$$

где Δg — значение аномалии в трапеции $1^\circ \times 1^\circ$, а h и p — отклонение высоты или глубины гравиметрически изученной трапеции $1^\circ \times 1^\circ$ от высоты или глубины трапеции $2^\circ \times 2^\circ$, полученной как среднее из высот или глубин трапеций $1^\circ \times 1^\circ$, имеющих гравиметрические наблюдения.

Аналогичные формулы применялись и на других этапах осреднения.

Для вычисления коэффициентов k или b использовали районы, достаточно хорошо изученные в гравиметрическом отношении, с большим диапазоном изменения высоты или глубины.

Таких районов на суше было выбрано семь, для моря — восемь. Полученные результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1
Коэффициенты зависимости аномалии силы тяжести
в свободном воздухе от высоты k_i и глубины b_i

Этапы последова- тельного осреднения аномалий	Площади трапеций, по которым проведено осреднение	k_i , мгл/м	b_i , мгл/м
1	$1^\circ \times 1^\circ$	$+0,094 \pm 0,004$	$(-0,0686)$
2	$2^\circ \times 2^\circ$	$+0,054 \pm 0,004$	$-0,019 \pm 0,003$
3	$4^\circ \times 4^\circ$	$+0,026 \pm 0,004$	$-0,010 \pm 0,002$
4	$10^\circ \times 10^\circ$	$+0,0124 \pm 0,0015$	$-0,010 \pm 0,002$

В большинстве морских районов, из-за плохого знания глубин, коэффициент b_i принимался равным нулю и аномалия трапеции $1^\circ \times 1^\circ$ определялась как среднее из аномалий гравиметрических пунктов, входящих в эту одноградусную трапецию, и лишь в отдельных случаях, при достаточно хорошем знании глубин, применялся коэффициент $b_1 = 0,0686$, т. е. численно равный коэффициенту редукции Буге на море.

Для сравнения остановимся на результатах статистического анализа зависимости аномалии в свободном воздухе от рельефа, проведенного американским геофизиком Каула в 1958—1959 гг. [4].

Им установлен средний коэффициент зависимости разностей аномалий $\delta \Delta g$ и высот δh нескольких пар соседних трапеций, равный $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial h}\right)_{\text{ср}} = +0,028$ мгл/м для трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ и $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial h}\right)_{\text{ср}} = +0,0094$ мгл/м — для трапеций $5^\circ \times 5^\circ$.

Эти коэффициенты для трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ и $5^\circ \times 5^\circ$ приблизительно соответствуют коэффициентам зависимости аномалий от высоты и глубины при переходе соответственно от трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ к трапециям $5^\circ \times 5^\circ$ и от трапеций $5^\circ \times 5^\circ$ к десятиградусным трапециям. Коэффициент получен общим для суши и моря при условии, что глубины умножаются на коэффициент 0,62 (за разность средней плотности суши и моря).

Как легко убедиться, коэффициенты Каула согласуются с коэффициентами, полученными в ЦНИИГАиК. Как и следовало ожидать, первый коэффициент Каула $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial h}\right)_{\text{cp}} = +0,028$ меньше коэффициента, полученного нами при переходе от трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ к трапециям $2^\circ \times 2^\circ$ и несколько больше нашего коэффициента для перехода от трапеции $2^\circ \times 2^\circ$ к трапециям $4^\circ \times 4^\circ$; а второй коэффициент Каула $\left(\frac{\partial \Delta g}{\Delta h}\right)_{\text{cp}} = 0,0094$ соответственно несколько меньше коэффициента, полученного в ЦНИИГАиК для перехода от трапеций $4^\circ \times 4^\circ$ к трапециям $10^\circ \times 10^\circ$.

Установленная выше зависимость относится к аномалиям в свободном воздухе. Как известно, эти аномалии используются в формуле Стокса при определении возмущающего потенциала и высот квази-геоида.

При уточнении теории Стокса М. С. Молоденским [1], [2] разработана строгая теория и дана наиболее целесообразная методика, по которой решение ведется методом последовательных приближений с любой заданной точностью. При этом формула Стокса является нулевым приближением. В первом приближении также можно пользоваться формулой Стокса, но в аномалии силы тяжести в свободном воздухе Δg , отнесенные к сфере, должна быть введена поправка G_1 , имеющая вид

$$G_1 = R^2 \int \frac{H - H_0}{r_0^3} \chi_0 d\omega.$$

Как показали специальные исследования, поставленные в ЦНИИГАиК в 1959—1960 гг., в среднем для больших участков основную часть поправки G_1 составляет поправка за рельеф, вводимая в аномалию силы тяжести за отклонение высот физической поверхности Земли в окрестностях гравиметрического пункта от его высоты.

Таблица 2

Коэффициенты k'_i ; зависимости аномалии $\Delta g'$ от высоты для различных трапеций осреднения в *мг/л/м*

Район исследований	k'_1	k'_2	k'_3	k'_4
	для трапеций $1^\circ \times 1^\circ$	для трапеций $2^\circ \times 2^\circ$	для трапеций $4^\circ \times 4^\circ$	для трапеций $10^\circ \times 10^\circ$
Кавказ	0,115	0,058	0,034	0,016
Средняя Азия	0,106	0,056	0,030	0,017
Альпы	0,112	0,062	0,032	—
Среднее значение k'_i	0,111	0,059	0,032	0,0165
Среднее значение k_i	0,094	0,054	0,026	0,0124

Таким образом, оказалось необходимо применять вместо аномалий в свободном воздухе средние аномалии в свободном воздухе с поправкой за рельеф. Для краткости обозначим этот тип аномалии через $\Delta g'$.

Практически на первом этапе применялся метод косвенной интерполяции не через аномалии Буге, как ранее, а через аномалии в неполной топографической редукции.

В связи с применением нового вида аномалий $\Delta g'$ изменилась и корреляционная связь аномалии с высотой для различных площадей осреднения.

Коэффициенты зависимости аномалий $\Delta g'$ от высоты приведены в табл. 2.

Коэффициент k_1' для перехода от аномалий $\Delta g'$ гравиметрических пунктов к аномалии трапеции $1^\circ \times 1^\circ$ получился в среднем 0,111 мгл/м, что приблизительно соответствует плотности 2,67 промежуточного слоя при косвенной интерполяции через аномалии в неполной топографической редукции. Величина этого коэффициента оказалась большей, чем для аномалий в свободном воздухе ($k_1 = 0,094$).

Как видно из табл. 2, с переходом к новому виду аномалий коэффициенты k_i' увеличились для всех этапов осреднения.

Средние аномалии трапеций на всех этапах осреднения вычислялись по формулам, аналогичным приведенным ранее, заменяя в них Δg на $\Delta g'$ и k на k' .

Таким образом, если в пределах небольших трапеций порядка $1^\circ \times 1^\circ$ хороший результат дает интерполирование через топографические аномалии, то на последующих этапах осреднения зависимость аномалии от рельефа ослабевает, что, по-видимому, связано с изостатической компенсацией, но полностью не исчезает и составляет при переходе к трапециям $10^\circ \times 10^\circ$ приблизительно 10—15% от коэффициента Буге, применяющегося на первом этапе осреднения.

Работа выполнена под руководством Л. П. Пеллинен.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Молоденский. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 42. М., Геодезиздат, 1945.
2. М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 131. М., Геодезиздат, 1960.
3. И. Д. Жонголович. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Труды Института теоретической астрономии. Вып. III, 1952.
4. W. Kaula. Statistical and harmonic analysis of gravity. Journ. of geoph. Res. Vol. 64, № 12, 1959.
5. H. Jeffreys. The determination of the Earth's gravitational field. M. N. R. A. S. Geoph. Suppl. 1941, 1943.
6. U. Uotila. Investigations on the gravity field and Shape of the Earth. Publ. of the Isost. Ins. № 33, 1960.

Taranov V. A.

DEDUCING RELATION BETWEEN GRAVITY ANOMALY AND ELEVATION TO OBTAIN MEAN GRAVIMETRIC DATA FOR LARGE AREAS Abstract

A research method and the results of an investigation are described that has been carried out at the Central Scientific Research Institute of Geodesy, Aerial Surveying and Cartography with the view to establish relations between gravity anomalies, and elevation and depth in order to obtain mean gravimetric data for squares $10^\circ \times 10^\circ$; a comparison is also made with similar investigations of Jongolovich, Jeffreys, and Kaula.

A relation was obtained showing the influence of elevation and depth upon two kinds of gravity anomalies (free-air anomalies — Δg , and free-air anomalies with terrain correction — $\Delta g'$) at four successive stages of averaging the anomalies, viz.: 1) for squares $1^\circ \times 1^\circ$, 2) for squares $2^\circ \times 2^\circ$, 3) for squares $4^\circ \times 4^\circ$ and 4) for squares $10^\circ \times 10^\circ$.

For every stage the following coefficients were obtained that characterize the dependence of anomalies Δg and $\Delta g'$ upon elevation (k_i and k'_i) and depth (b_i):

Successive stages of averaging the anomalies	Obtaining anomalies for squares	$mgal/m$ k_i	$mgal/m$ b_i	$mgal/m$ k'_i
I stage	$1^\circ \times 1^\circ$	$+0,094 \pm 0,004$	$(-0,0686)$	$+0,111 \pm 0,003$
II stage	$2^\circ \times 2^\circ$	$+0,054 \pm 0,004$	$-0,019 \pm 0,003$	$+0,059 \pm 0,002$
III stage	$4^\circ \times 4^\circ$	$+0,026 \pm 0,004$	$-0,010 \pm 0,002$	$+0,032 \pm 0,002$
IV stage	$10^\circ \times 10^\circ$	$+0,0124 \pm 0,0015$	$-0,010 \pm 0,002$	$+0,0165$

Within the areas $1 \times 1^\circ$ the obtained coefficient that shows the relation existing between anomalies and elevation approaches the coefficient of Bouguer reduction. As the areas being averaged increase, the influence of terrain upon gravity anomalies becomes weaker but does not completely disappear, and for areas $10 \times 10^\circ$ makes up about 10—15 per cent of the Bouguer coefficient.

А. И. Шабанова

**ВЫЧИСЛЕНИЕ НА ЭЦВМ «УРАЛ-1» ХАРАКТЕРИСТИК
ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
РАЗЛОЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ
ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ**

В течение 1960 г. в лаборатории геодезических вычислений ЦНИИГАиК были составлены и опробованы программы вычисления на электронной цифровой вычислительной машине (ЭЦВМ) «Урал-1» коэффициентов разложения аномалий силы тяжести по сферическим функциям и вычисления аномалий силы тяжести, высот квазигеоида и уклонений отвеса по заданному разложению. В последних двух случаях применялись соответственно формулы Стокса и Венинг Мейнеса.

Программа для вычисления коэффициентов разложения составлена на фиксированное значение порядка разложения, а именно на $n_0 = 16$. В программе для вычисления значений функций в различных точках сферы предусмотрена возможность счета при любом порядке разложения, но не большем $n_0 = 16$. Такое ограничение вполне удовлетворяет требованиям практики и вместе с тем позволяет решать задачи, используя только оперативную память машины.

Для решения обеих задач, как и для многих других в области гравиметрии, необходимо вычисление элементарных сферических функций, поэтому была составлена стандартная программа (СП) их вычисления, т. е. такая программа, которая без каких-либо изменений в качестве отдельного блока может входить в другие программы.

Ниже приведено краткое описание указанных программ.

Стандартная программа вычисления элементарных сферических функций

Амплитуда колебания значений сферических функций высокого порядка очень велика, а это значительно осложняет их вычисление и работу с ними на машинах типа «Урал-1», работающих в режиме фиксированной запятой. Поэтому оказалось выгодным перейти от обычных сферических функций $P_{n,k}(x)$ к нормированным $\bar{P}_{n,k}(x)$, связанным с $P_{n,k}(x)$ следующим соотношением:

$$P_{n,k}(x) = \sqrt{\frac{1}{\delta(2n+1)} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!}} \bar{P}_{n,k}(x), \quad (1)$$

$$x = \sin B = \cos \vartheta,$$

где

$$\delta = 1 \text{ при } k = 0 \text{ и } \delta = 2 \text{ при } k > 0,$$

B — широта точки, в которой вычисляется значение функции,
 ϑ — полярное расстояние этой точки.

При таком нормировании среднее квадратическое значение сферической функции по всей поверхности сферы будет равно единице.

Известная рекуррентная формула для вычисления сферических функций примет вид

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n,k}(\sin B) = \sin B \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{n^2 - k^2}} \bar{P}_{n-1,k}(\sin B) - \\ - \sqrt{\frac{2n+1}{2n-3} \frac{(n-1)^2 - k^2}{n^2 - k^2}} \bar{P}_{n-2,k}(\sin B). \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{00}(\sin B) &= 1 \\ \bar{P}_{11}(\sin B) &= \sqrt{3} \cos B \\ \bar{P}_{kk}(\sin B) &= \cos B \sqrt{\frac{2k+1}{2k}} \bar{P}_{k-1,k-1}(\sin B) \text{ при } k > 1 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

получим необходимый набор формул для вычисления любой сферической функции.

Исходными данными для работы по программе являются синус и косинус широты, порядок разложения n_0 , фиксированное значение второго индекса k и старший адрес ячейки магнитного барабана получаемой таблицы значений $\bar{P}_{n,k}(x)$. По такой информации СП вычисляет таблицу значений $\bar{P}_{n,k}(x)$ в масштабе 100 при изменении $n = k \div n_0$ и помещает на указанное место в оперативной памяти машины. До следующего обращения к СП таблица должна быть полностью использована в решаемой задаче, так как новая таблица значений $\bar{P}_{n,k+1}(x)$ запишется на то же место. Программа занимает 210 восьмеричных ячеек, работает в режиме фиксированной запятой.

Для вычисления таблицы $\bar{P}_{n,k}(x)$ на фиксированное значение широты при разных порядка разложения n_0 требуется следующее время:

n_0	3	8	16
t мин.	0,3	1,2	4,3

Вычисление коэффициентов разложения аномалий силы тяжести по сферическим функциям до 16 порядка

Коэффициенты разложения вычислялись по несколько измененному II способу Неймана [2]. Значения аппроксимируемой функции задавались в точках пересечения 17 параллелей и 36 меридианов. Строго по способу Неймана количество меридианов должно быть равным 32. Такое отступление приводит к несколько избыточному числу исходных данных, но зато упрощает их подготовку.

Широты параллелей, на которых задаются значения аномалий силы тяжести, выбираются под условием, чтобы косинусы их полярных расстояний ϑ служили корнями уравнения

$$P_{n_0+1}(\cos \vartheta) = 0, \quad (4)$$

где $n_0 = 16$ — порядок разложения.

Формулы для вычисления коэффициентов разложения при указанных выше условиях и применении нормированных сферических функций примут вид

$$\left. \begin{aligned} a_{n,k} &= \sum_{i=1}^{17} \tilde{a}_i C_k^i \bar{P}_{n,k}(\sin B_i) \\ b_{n,k} &= \sum_{i=1}^{17} \tilde{a}_i S_k^i \bar{P}_{n,k}(\sin B_i) \\ C_k^i &= \sum_{m=0}^{35} \Delta g(B_i; m\lambda_0) \cos km\lambda_0 \\ S_k^i &= \sum_{m=0}^{35} \Delta g(B_i; m\lambda_0) \sin km\lambda_0 \\ k &= 0 \div n_0 \\ n &= k \div n_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь $\Delta g(B_i, m\lambda_0)$ — заданные значения аномалий силы тяжести,

$$\tilde{a}_i = \frac{1}{72} a_i,$$

где a_i — весовые коэффициенты, точные значения которых взяты нами из [2].

Исходные данные, необходимые для работы по этой программе, делятся на две части. Первая часть зависит от широт выбранных параллелей и содержит значения $\sin B_i$, $\cos B_i$, \tilde{a}_i , а также значения синусов углов, кратных 10° , от 0 до 90° . Введение последних сильно упрощает вычисление значений $\cos km\lambda_0$ и $\sin km\lambda_0$. Эти величины вводятся в оперативную память машины по полным ячейкам. Вторая часть исходных данных — заданная система аномалий силы тяжести $\Delta g(B_i; m\lambda_0)$. Поскольку эти величины обычно имеют не более трех-четырёх цифр, то с целью более экономного использования оперативной памяти машины они вводятся по неполным ячейкам.

В результате работы данной программы на печать выводятся сначала коэффициенты $a_{n,k}$ при $k=0$, потом при $k=1$ и т. д. до $k=n_0$. Затем, в том же порядке, печатаются коэффициенты $b_{n,k}$. На решение этой задачи, имея в виду двойной счет, требуется около пяти часов машинного времени. Для сравнения укажем, что при счете на настольных машинах на эту работу требуется четыре технико-месяца.

Вычисление значений аномалии силы тяжести, высот квазигеоида и уклонений отвеса в заданных точках сферы

Для вычисления аномалии силы тяжести в точке сферы с координатами B, L по заданному разложению используют формулу

$$\Delta g(B, L) = \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{k=0}^n (a_{n,k} \cos kL + b_{n,k} \sin kL) \bar{P}_{n,k}(\sin B). \quad (6)$$

При вычислении таблицы значений Δg для точек сферы, отличающихся по широте на величину ΔB и по долготе на величину ΔL , можно значительно уменьшить объем вычислений, представив (6) в виде

$$\Delta g(B, L) = \sum_{k=0}^{n_0} A_k \cos kL + B_k \sin kL, \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \sum_{n=k}^{n_0} a_{n,k} \bar{P}_{n,k}(\sin B) \\ B_k &= \sum_{n=k}^{n_0} b_{n,k} \bar{P}_{n,k}(\sin B) \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Вместо уклонений отвеса ξ и η вычислялись их произведения соответственно на радиусы кривизны меридиана M и первого вертикала N .

Вычисление высот квазигеоида ζ , а также величин $M\xi$ и $N\eta$ сводится к вычислению по формуле (7), если величины A_k и B_k положить равными:

$$\left. \begin{aligned} &\text{при вычислении } \zeta \\ A_k &= \sum_{n=k}^{n_0} Q_n a_{n,k} \bar{P}_{n,k}(\sin B) \\ B_k &= \sum_{n=k}^{n_0} Q_n b_{n,k} \bar{P}_{n,k}(\sin B) \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{при вычислении } M\xi \\ A_k &= \sum_{n=k}^{n_0} Q_n a_{n,k} [-\bar{P}'_{n,k}(\sin B)] \\ B_k &= \sum_{n=k}^{n_0} Q_n b_{n,k} [-\bar{P}'_{n,k}(\sin B)] \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{при вычислении } N\eta \\ A_k &= -\frac{k}{\cos B} \sum_{n=k}^{n_0} Q_n b_{n,k} \bar{P}_{n,k}(\sin B) \\ B_k &= \frac{k}{\cos B} \sum_{n=k}^{n_0} Q_n a_{n,k} \bar{P}_{n,k}(\sin B) \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где $Q = \frac{R}{\gamma(n-1)}$, причем $Q_0 = Q_1 = 0$,

R — радиус Земли,

γ — нормальная сила тяжести.

Для вычисления производных от сферических функций использовалась формула, приведенная И. Д. Жонголовичем [1]. После замены обычных сферических функций нормированными эта формула примет вид

$$\begin{aligned} \bar{P}'_{n,k}(\sin B) &= (n+k) \sec B \sqrt{\frac{n-k}{n+k} \cdot \frac{2n+1}{2n-1}} \bar{P}_{n-1,k}(\sin B) - \\ &- n \operatorname{tg} B \cdot \bar{P}_{n,k}(\sin B). \end{aligned} \quad (12)$$

Исходными данными для работы программы служат n_0 , ΔB , ΔL , L_0 , B_0 и a' — старший адрес таблицы $\bar{P}'_{n,k}(x)$, определяющий ее положение в оперативной памяти машины. Кроме того, в оперативную память машины должны быть введены таблицы коэффициентов $a_{n,k}$, $b_{n,k}$ и Q_n . Вычисление той или иной из четырех указанных выше величин определяется соответствующим положением ключей на пульте управления машины.

Значения функции вычисляются одновременно для восьми точек, одной в каждом квадранте сферы и печатаются в следующем порядке:

$$\begin{aligned} & \text{широта } B_i, \\ & \text{долгота } L_i, \\ & F(B_i, L_i), \\ & F[B_i, (180^\circ - L_i)], \\ & F[B_i, (180^\circ + L_i)], \\ & F[B_i, (360^\circ - L_i)]. \end{aligned}$$

Через интервал в таком же порядке печатаются значения вычисляемой функции в точках с широтой, равной минус B_i . В случае необходимости, при помощи ключа на пульте управления, вычисления для южного полушария можно не выполнять.

Работа по программе выполняется в режиме фиксированной записи. Результаты счета печатаются в следующих масштабах:

$$\begin{aligned} \Delta g & \text{ — в масштабе } 10^3 \\ \zeta & \text{ — „ „ } 10^4 \\ M\xi \text{ и } N\eta & \text{ — „ „ } 10^6 \end{aligned}$$

По данной программе успешно произведен большой объем вычислений. Так, например, вычисление аномалий силы тяжести и высот квазигеоида по разложениям до восьмого порядка в точках сферы, отстоящих одна от другой на 10° по широте и долготе на машине «Урал-1», при условии двух просчетов, производится за пять часов. При счете на настольных машинах на такую же работу требуется около шести технико-месяцев. При увеличении порядка разложения или при сгущении вычисляемой таблицы разница во времени счета еще более увеличится в пользу ЭЦВМ «Урал-1».

Программа предусматривает возможность вычисления не только таблиц, но и значений функций в какой-либо определенной точке сферы.

При соответствующем изменении коэффициентов Q_n по данной программе можно вычислять влияние дальних зон на высоты квазигеоида и уклонения отвеса, а также характеристики гравитационного поля Земли во внешнем пространстве.

Комплекс составленных программ может быть использован не только для вычисления указанных величин, но и для разложения по сферическим функциям или вычисления по заданному разложению любых других функций географических координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Жонголович. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды Института теоретической астрономии. Вып. VI. М.-Л., 1956.
2. Prey Adalbert. Darstellung der Höhen—und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung, Abhandlungen der gessellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922, Bd. 11.

Calculation of Earth's gravitational field characteristics with the aid of the electronic Digital Computer „Ural 1“ under utilization of Gravity Anomalies Expansion in series of spherical Functions

Abstract

During 1960 the following calculation programs were compiled and tested at the Central Scientific Research Institute of Geodesy, Aerial Surveying and Cartography (TsNIIGAiK);

- 1) A standard program for calculating spherical functions.
- 2) A program for computing the coefficients of a gravity anomalies expansion in series of spherical functions up to an order $n_0 = 16$.

The calculations are carried out according to the slightly modified second method of Neumann.

- 3) A program for calculating, from an expansion available, gravity anomalies, quasigeoidal heights, and plumb-line deflections in some given points on a sphere. The calculations of quasigeoidal heights and plumb-line deflections are made according to the formulas of Stokes and Vening-Meinesz, respectively.

The described method of calculation is effective in all cases when the expansion available has been brought up to an order $n_0 \leq 16$.

It is possible to adapt the given program for calculating the influence of distant zones upon quasigeoidal heights and plumb-line deflections, as well as for determining the characteristics of Earth's gravitational field in outer space.

The described set of calculation programs may be used for expanding any desired function of geographical coordinates in series of spherical harmonics, as well as for computing this function from a given expansion.

М. Е. Хейфец

НОВЫЙ МАЯТНИКОВЫЙ ПРИБОР ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ ЦНИИГАиК

Введение

В последние годы стало очевидным, что гравиметрическая съемка, независимо от того, при помощи каких приборов она выполняется, должна базироваться на сети надежно определенных маятниковых пунктов. Эта сеть, являясь опорной, одновременно служит для эталонирования гравиметров и общего контроля съемки.

Разрыв в точности гравиметровых и маятниковых определений бесспорно начал сокращаться; само возникновение этого разрыва вряд ли является закономерным: когда применение гравиметров стало массовым, внимание к маятниковым работам было ослаблено и попыток серьезного усовершенствования маятникового метода почти не предпринималось. Но расцвет гравиметровой техники — это только отражение общего технического прогресса, который одновременно предоставляет совершенно новые возможности для повышения точности, а следовательно, и для сокращения продолжительности маятниковых измерений. Эти возможности пока еще не использованы в надлежащей мере даже для того, чтобы исследовать перспективность маятникового метода и вскрыть все его резервы.

Но независимо от особенностей маятникового метода принципиально нельзя согласиться с тем, чтобы такие высокоточные и важные измерения как гравиметрические выполнялись с применением лишь одного метода или приборов одинакового типа. В таком случае измерения становятся фактически бесконтрольными, их погрешности маскируются, результатам приписываются незаслуженно высокие оценки, что в конечном итоге приносит значительный вред, когда данные съемки используются в ее многочисленных приложениях. Но иных методов относительного измерения силы тяжести, кроме маятниковых и гравиметровых, пока не существует. Поэтому повышение точности маятниковых измерений, по меньшей мере, до уровня, при котором возможно проводить сопоставление с гравиметровыми — весьма важная задача. Впрочем, никто не доказал, что невозможно и большее, а именно: полное использование естественных преимуществ маятникового метода — стабильности маятников и ненадобности выполнения специального эталонирования.

Приведенные выше соображения о недопустимости монополизации методов и аппаратуры для гравиметрических работ были подтверждены результатами сопоставления съемок, выполненных приборами различных типов. Однако вскрылись противоречия не только при сопоставлении данных маятниковых и гравиметровых работ, но и в результатах работ, выполненных одинаковыми методами, но с применением различных приборов. Таким образом, даже противники маятникового метода согласились с тем, что разработка маятниковых приборов соответствующей точности принесла бы большую пользу, а поэтому в течение последних лет в разных странах предпринимаются многочисленные попытки модернизации маятниковых приборов на базе достижений современной техники.

Наиболее известны приборы фирмы «Галф» с цельнокварцевыми маятниками (США), Кембриджский прибор с инварными маятниками (Англия), недавно опубликовано сообщение об изготовлении в Италии нового прибора с молибденовыми маятниками, интенсивные исследования маятникового метода ведутся в Японии, ГДР, Польше и ряде других государств. Затраченные усилия несомненно оправдали себя, и точность маятниковых измерений удалось заметно повысить, но все же точность современных гравиметров остается на порядок выше точности маятниковых приборов. Кроме того, зафиксированы случаи систематических расхождений результатов измерений, полученных по маятниковым приборам различных типов, и иногда эти расхождения коррелируют с силой тяжести, что никогда раньше не обнаруживалось.

Все это указывает на необходимость нового тщательного исследования маятникового метода и разработки новой маятниковой аппаратуры. На базе устаревшей техники нельзя ответить на вопрос о том, имеются ли какие-нибудь реальные шансы на применение маятников для относительно точных измерений в будущем.

Очевидно, что создание маятникового прибора, который по своей точности был бы сравним с гравиметрами, — столь же трудная задача, как и создание в свое время высокоточных гравиметров. Для решения ее требуются такие же затраты времени, энергии и средств. Конечно, эти затраты окупятся, как они окупались при создании гравиметров, но исследования должны вестись в определенной последовательности, и вопрос о принципиальных возможностях метода должен быть первым вопросом программы исследований.

Гравиметрическая лаборатория Центрального научно-исследовательского института геодезии, аэросъемки и картографии в течение ряда лет ведет исследования в области усовершенствования маятникового метода. Ей удалось создать кварцево-металлические маятники, отличающиеся высокой стабильностью, кварцевые экспедиционные хронометры и некоторые другие приборы, применение которых существенно повышает точность измерений. Естественно, что лаборатория занялась разработкой прибора, назначение которого заключается в том, чтобы выяснить возможности маятникового метода на основе практического исследования при выполнении измерений на пунктах базисных линий для эталонирования гравиметров, а также по данным лабораторных исследований. При создании такого прибора, хотя он и должен быть транспортабельным, еще не возникает необходимости реализовать все те требования, которые обычно предъявляются к экспедиционному прибору. Это облегчает решение основной задачи, достаточно трудной самой по себе.

В числе первоочередных вопросов, возникающих в процессе исследования, основным является вопрос о стабильности маятников и возможности такой их изоляции от влияния внешней среды, при которой становится возможным реализовать эту стабильность. Должна быть разработана методика наблюдений соответствующей точности. Нельзя полностью полагаться на известные приемы и методы, так как новый уровень точности измерений превосходит уровень, предусмотренный теорией, разработанной до настоящего времени. Дальнейшее же совершенствование теории в свою очередь требует накопления новых фактов, без которых развитие теории немыслимо.

Таким образом, стабильность маятников, их поведение во время наблюдений и в процессе транспортировки, зависимость их точности от влияния внешних условий — основные характеристики, которые надо определить, используя возможности, предоставляемые новой техникой.

Изготовленный опытный образец маятникового прибора действительно позволил ответить на ряд поставленных вопросов.

Ниже дается описание этого прибора и приводятся результаты наиболее важных лабораторных испытаний и первых измерений на нескольких гравиметрических пунктах. Эти результаты пока еще не многочисленны, но они позволяют надеяться, что вполне современный маятниковый прибор может быть и будет создан.

В разработке прибора, его исследованиях и полевых испытаниях принимал участие весь коллектив гравиметрической лаборатории. Особенно большую помощь в изготовлении и исследовании прибора оказал инженер Ю. А. Сливин, ставший соавтором этой разработки. Конструирование и изготовление прибора осуществлены научно-исследовательскими мастерскими ЦНИИГАиК, возглавляемыми конструктором Г. Г. Гордоном и главным инженером С. П. Шокиным. Ведущим конструктором прибора была А. И. Иванова. Сборку и юстировку прибора производил механик Н. А. Севастьянов в бригаде Ю. Н. Голикова при непосредственном участии Ю. А. Сливина. Активное участие в исследовании прибора принимали В. П. Терехов, В. Н. Орехов, Н. А. Гусев, М. И. Данилин, М. А. Бондарчук и др.

Всем им автор выражает глубокую благодарность.

I. Основные особенности прибора

Принципиальные особенности прибора заключаются в следующем.

1. Применены полусекундные кварцево-металлические маятники, разработанные лабораторией в 1949—1952 гг. Эти маятники отличаются высокой стабильностью и слабо реагируют на изменения температуры и магнитного поля Земли. Они были испытаны как в лабораторных, так и в самых разнообразных экспедиционных условиях.

2. Для получения максимального числа независимых результатов при минимальном числе маятников было решено изготовить два двухмаятниковых штатива.

3. Чтобы исключить остаточное влияние температуры на маятники, главным образом влияние температурного последействия и динамические эффекты, штативы были термостатированы, в результате чего маятники находятся при одной и той же температуре как в процессе наблюдений, так и при перевозке приборов.

Не было необходимости строить особенно сложные термостаты. Коэффициент термостатирования, оказавшийся равным $1/25^*$, был достаточным для создания удовлетворительного температурного режима.

4. Прибор сконструирован таким образом, что маятники перевозятся в самом штативе. Это необходимо не только для использования термостата, но и одновременно позволяет свести к минимуму влияние одного из важнейших источников ошибок маятникового метода — непостоянства положения лезвия ножа маятника на опорной площадке, а также загрязнение поверхностей лезвия и площадки при подвеске маятников. Кроме того, штативы оборудованы специальными центрировочными приспособлениями, обеспечивающими возвращение лезвия ножа маятника к своему постоянному месту на опорной площадке при каждом дезарретировании маятников.

5. Колебания маятников записываются на фотографическую пленку шириной 190 мм. Фоторегистратор и оптическая система прибора устроены таким образом, что обеспечивают определение периода колебания с

* В [5] ошибочно указано, что коэффициент термостатирования равен $1/30$.

точностью $1 \cdot 10^{-8}$ сек. за один час наблюдений. Амплитуда определяется по фотопленке с точностью 2—3".

6. На пленке одновременно записываются колебания двух действительных и фиктивного маятников, образуемого по методу Венинг Мейнеса. Подобная запись упрощает обработку наблюдений и дает материал для любопытных сопоставлений. Применение метода Венинг Мейнеса уменьшает влияние сотрясений и вибраций прибора и снижает требования к определению сокачания штатива.

7. В комплект аппаратуры маятникового прибора включен разработанный лабораторией транспортабельный кварцевый хронометр со стабильностью хода порядка $1 \cdot 10^{-8}$.

8. В этот комплект включено устройство, позволяющее регулировать влажность воздуха внутри штатива; для измерения ее в штативе имеется высокочувствительный гигрометр, сохраняющий свои постоянные в течение длительного времени.

9. Для нивелирования агатовых площадок применяется специально разработанный автоколлимационный уровень с искусственным горизонтом. Этот прибор устанавливается на верхней крышке маятникового штатива, в которой прорезано и застеклено отверстие для наблюдения изображения сетки нитей, отражаемого от вспомогательной агатовой площадки. Последняя заделана в опорную плиту штатива таким образом, что ее отражающая поверхность находится в одной плоскости с рабочими поверхностями основных площадок.

10. Контроль температуры внутри штатива осуществляется при помощи двух термометров: ртутного и электрического интегрального термометра сопротивления. Точность отсчета по обоим термометрам равна $0,02$.

Чтобы своевременно предупредить наблюдателя о возможных нарушениях температурного режима внутри штатива, устроена аварийная звуковая сигнализация, которая автоматически включается, когда температура выходит за пределы заданного интервала.

11. В отдельном пульте управления смонтированы блок питания, приборы для контроля за температурой, регулятор накала осветительных ламп, блок управления работой фоторегистраторов, аварийная сигнализация.

12. Для измерения давления воздуха применяются два ртутных барометра инспекторского типа.

Другие особенности приборов выяснятся в дальнейшем изложении, когда будет дано детальное описание всей аппаратуры. Здесь необходимо сделать лишь следующее замечание.

Современный маятниковый прибор, конечно, должен быть вакуумным, но степень вакуумирования должна оставаться постоянной в течение всего времени работы прибора в рейсе и на опорном пункте. Систематическая откачка воздуха из штатива нарушает его герметизацию и термостатирование. Создание вакуумного прибора, связанное с разработкой дистанционного управления маятниками, хотя и вполне осуществимо, но требует определенного времени; оно затормозило бы решение ряда задач принципиальной важности, которое может быть достигнуто на первых порах и без применения вакуумного прибора. Поэтому первый образец было решено делать невакуумным.

При дальнейшем усовершенствовании прибора, кроме создания вакуума, возникнут еще и другие задачи, такие, например, как разработка новых типов маятников, системы их подвеса, фотоэлектрической регистрации колебаний и т. д. Решение их — дело недалекого будущего.

II. Описание прибора

В комплект аппаратуры (рис. 1), изготовленной в мастерских ЦНИИГАиК в 1958 г., вошли два двухмаятниковых штатива 1, фоторегистратор колебаний маятников 3, пульт управления приборами 4, кварцевый хронометр 5, подставка штатива 2, осушающее устройство (на рис. не показано) и автоколлимационный уровень (на рис. не показан).

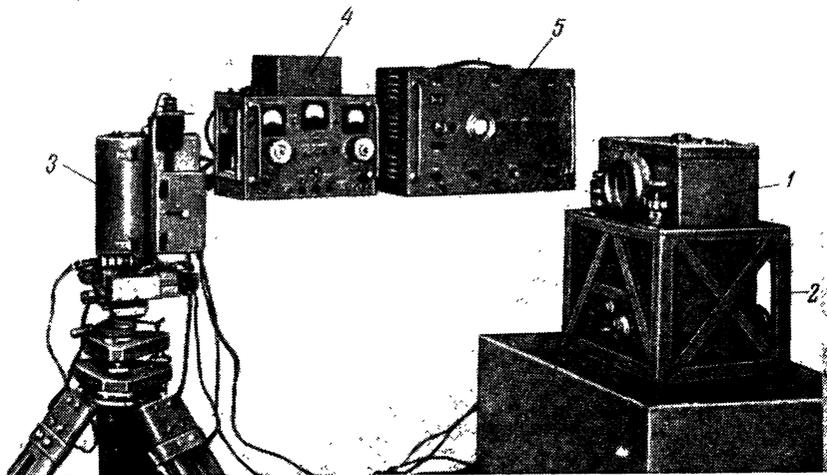


Рис. 1

Номера штативов 5801 и 5802 для краткости будем в дальнейшем обозначать соответственно 1 и 2. Каждому штативу придан отдельный фоторегистратор; остальные перечисленные приборы одновременно обслуживают оба штатива.

Маятниковый штатив

Штатив имеет форму прямого параллелепипеда со слегка закругленными ребрами (рис. 2)*.

Основная деталь штатива — массивная бронзовая плита (1—3), в которую запрессованы агатовые площадки. С плитой прочно связаны выступы из винипласта (1—2), к которым крепятся латунные приливы (5—2) для подъемных винтов (4—2). Такая конструкция имеет целью вывести подъемные винты в плоскость агатовых площадок для повышения устойчивости и уменьшения сокачания штатива. Крепление штатива к подставке производится при помощи зажимных гаек (6—2).

Рукоятки управления маятниками выведены на переднюю стенку штатива. Арретирование и центрирование маятников производится при помощи рукоятки (8—2), зажим чечевиц маятников на время перевозок — специальным устройством, приводимым в движение рукояткой (9—2), пуск осуществляется при помощи собачки и пускового устройства (7—2). Начальная амплитуда маятникам задается винтами (10—2).

Объектив (3—2) диаметром 110 мм и с фокусным расстоянием 1130 мм крепится в специальной оправе к передней стенке прибора.

* В дальнейшем изложении отдельные детали прибора обозначаются двумя числами, разделенными черточкой: первое число указывает номер детали на данном рисунке, а второе — номер рисунка.

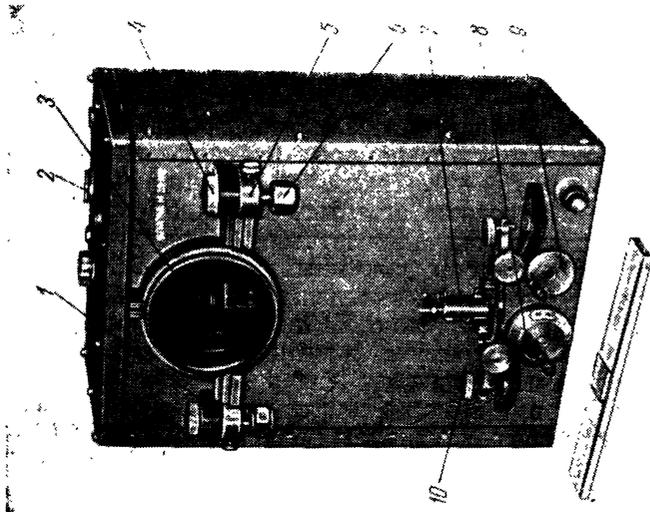


Рис. 2

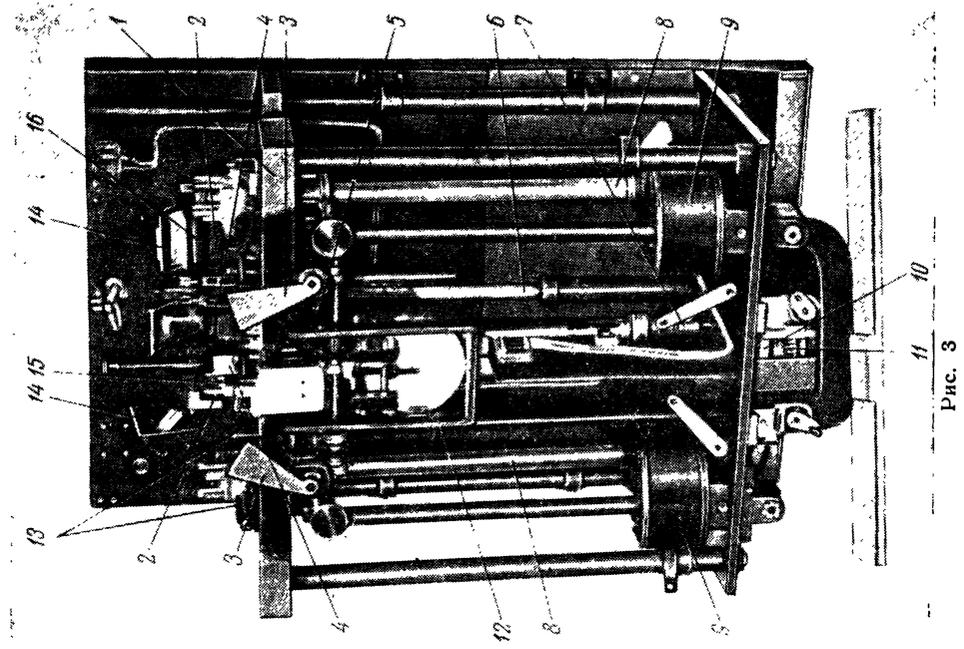


Рис. 3

Основным средством нивелировки, как указывалось, является описанный ниже автоколлимационный уровень. Он устанавливается над окошечком в верхней крышке штатива (2—2). Но для грубой установки штатива на основной его плите крепятся еще два уровня (рис. 15—3 и 16—3). Оси уровней параллельны плоскости агатовых площадок; кроме того, ось одного уровня (16—3) параллельна прямой, соединяющей центры двух подъемных винтов, а ось второго — перпендикулярна этой прямой. Над уровнями имеются зеркала (14—3), плоскости которых ориентируются таким образом, чтобы через объектив можно было сделать отсчет по уровням.

На бронзовой плите установлен оптический мостик, состоящий из четырех зеркал: одна пара зеркал (2—3) служит для получения изображения действительных маятников, а вторая (4—3) — для получения изображения фиктивного маятника.

На рис. 3 видны также гигрометр (12), приспособления для зажима маятников (9), секторы, при помощи которых центрируются маятники (3), ртутный термометр (6), кварцево-металлические маятники (8).

Арретир

Арретирующая плата (5—3), общая для двух маятников, в центральной части крепится к вертикальной стойке (7—3), опирающейся через подшпильник на лекало (10—3). Последнее соединено с червячной шестерней (11—3), которая поворачивается при помощи рукоятки (8—2).

В арретированном положении лезвие маятникового ножа поднято над площадкой на 2,5 мм. В дезарретированном положении маятников арретирующие вилки находятся ниже плоскости площадок на 2,5 мм. Специальный блокирующий механизм не позволяет поворачивать рукоятку (8—2) против часовой стрелки. Повторение цикла арретирования и дезарретирования маятников происходит через 40 оборотов рукоятки.

Центрирующее устройство

С рукояткой арретира связан механизм, корректирующий посадку маятников в направлении лезвия ножа. Коррекция происходит в тот мо-

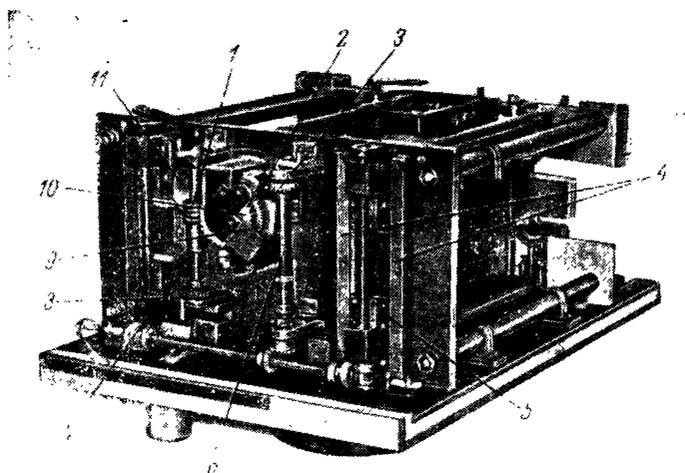


Рис. 4

мент, когда лезвия ножей маятников находятся на 1 мм выше агатовой площадки. В этом положении приостанавливается движение маятников

и центрирование происходит следующим образом. При вращении рукоятки (8—2), соединенной с червяком (1—4), вращательное движение передается секторам (3—3). В момент центрирования эти секторы с двух сторон приводят в поступательное движение два штифта (13—3), оси которых параллельны лезвиям ножей, и производят с их помощью центрирование маятников. При этом один из штифтов остается некоторое время в фиксированном положении, а второй — сдвигает маятник до упора ножа (торцом) в первый штифт; далее штифты возвращаются в исходное положение, при котором они размещаются на расстоянии 5 мм от ножа маятника.

Зажимное устройство

При перевозке штатива и хранении маятников в нерабочем положении их чечевицы удерживаются специальными зажимами. Контакт между маятниками и зажимами осуществляется по конической поверхности чечевицы (сверху и снизу). В проекции на горизонтальную плоскость

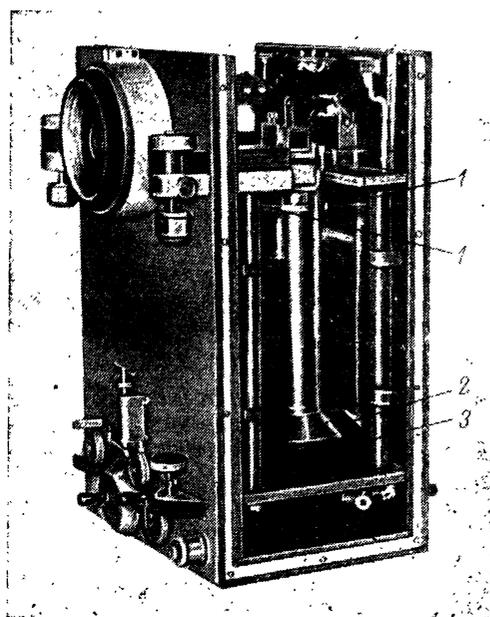


Рис. 5

чечевица охватывается зажимами с двух сторон, на дуге около 90° с каждой стороны. С зажимами (2—5), (3—5) скреплены амортизаторы из микропористой резины, поверхность которых, соприкасающаяся с маятниками, оклеена замшей. Одновременно с зажимами к верхнему инварному кольцу маятника подводятся два пружинящих упора (1—5), слегка придерживающих маятник.

Действие зажимного устройства легко представить по рис. 4. При вращении рукоятки (9—2), соединенной с осью (6—4), происходит поступательное движение пластинки (5—4) вдоль направляющих (4—4). С этой пластинкой скреплены зажимы с амортизаторами.

Зажим блокирован арретиром. Зажим можно привести в действие только при арретированных маятниках, в противном случае рычаг (2—4) сцепляется с шестерней (3—4), что делает невозможным вращение рукоятки зажимного устройства. Наоборот, при зажатых маятниках нельзя их дезарретировать, так как фиксатор (7—4) останавливает шестерню (8—4), посаженную на ось червяка (1—4).

Гигрометр

Фотографии гигрометра даны на рис. 6 и 7. Основной его частью является мембрана (1—6) из животной пленки, натянутая на кольцо (11—6). В центре мембраны укреплен пяточок (10—6), в который входит разводной шплинт (2—6). Последний миниатюрной цепочкой (1—7) соединяется с рычагом (5—7), который может поворачиваться вокруг оси (4—6). Трение оси в центрах (3—7) может регулироваться стопорами (2—7). Под действием пружины (3—6) рычаг создает на мембране усилие тяги в 10—12 г. Рычаг скреплен с оправой зеркала (9—6).

При изменении влажности меняется натяжение мембраны и соответственно — положение зеркала; это положение фиксируется при помощи светового луча, отражаемого подвижным зеркалом по отношению к лучу,

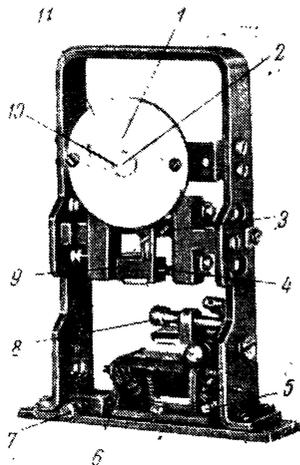


Рис. 6

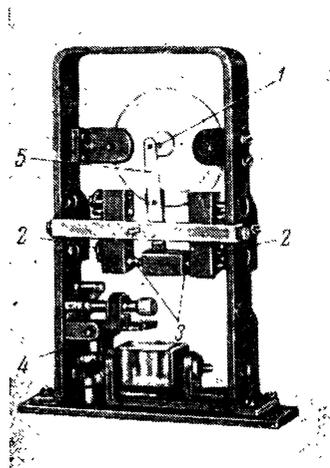


Рис. 7

получаемому от неподвижного зеркала (4—7). Неподвижное зеркало имеет исправительные винты (8—6) для корректирования по азимуту и (5—6) — для корректирования по высоте. Этими винтами пользуются только при эталонировании гигрометра. После эталонирования блики от подвижного и неподвижного зеркал могут регулироваться только одновременно по азимуту — при помощи исправительных винтов (7—6) и по высоте — (6—6).

Блики от гигрометра записываются на ту же пленку, на которой ведется запись колебаний маятников.

Результаты исследования и эталонирования будут приведены ниже.

Термометры

Интегральный термометр сопротивления (ИТС) собран по мостовой схеме. Два медных плеча намотаны на текстолитовый стержень и помещены в оправу из дюралюминия. Два других плеча — манганиновые. Цена наименьшего деления реохорда около $0^{\circ},15$. Так как схема подобных термометров неоднократно публиковалась, то нет необходимости останавливаться на ней более подробно.

Кроме ИТС, для контроля температуры в штативе помещен ртутный психрометрический термометр с ценой деления $0^{\circ},2$. Оправой ртутного термометра служит латунный цилиндр. Конструкция термометра и отсчетного устройства аналогичны подобным устройствам в маятниковом приборе Сорокина и в более подробном описании не нуждаются.

До установки в штатив ртутный термометр был исследован в Бюро поверки приборов Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР.

Термостат и электрическая схема штатива

Обмотка печи термостата маятникового штатива состоит из шести различных секций по числу стенок штатива.

Сопротивление секций подбиралось экспериментальным путем. Обмотки каждой секции намотаны на текстолитовые пластины манганино-

вым проводом таким образом, чтобы они равномерно распределялись по всей поверхности секции. Чтобы исключить возможность появления нежелательных магнитных полей, обмотка печи выполнена бифилярно.

Провод печи непосредственно прилегает к внутренним стенкам штатива, изготовленным из красной меди. Эти стенки способствуют уменьшению температурных градиентов внутри прибора и вообще улучшают в нем термический режим. Между обмоткой печи и наружными стенками штатива помещен слой пенопласта толщиной около 20 мм.

Все секции печи подключаются к источнику тока параллельно. Общий вывод сделан на задней стенке штатива. Датчиком температуры служит контактный ртутный термометр, клеммы которого также выведены на заднюю стенку штатива. Температура контактирования 35°, но в случае необходимости термометр может быть заменен. В приборе установлен запасной термометр, который в аварийном случае может быть включен вместо основного простым переключением тумблера на пульте управления.

Для исключения возможности перегрева или, наоборот, охлаждения прибора устроена звуковая сигнализация, датчиками которой являются упомянутый аварийный термометр и третий специальный термометр. В схему сигнализации включен также зуммер. Если температура внутри штатива понижается на 0°,3 прогив номинальной или повышается на 5°, то раздается аварийный сигнал.

Питание термостата осуществляется либо от источника электрического тока постоянного напряжения 24 в, либо от переменного 120 или 220 в. Мощность, потребляемая каждым штативом, около 125 вт.

Ток, идущий через контактный термометр, не превышает 100 мкА. Электрическая схема прибора дана на рис. 8.

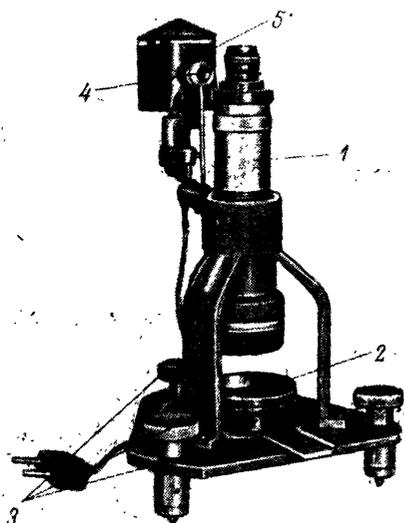


Рис. 9

Поскольку коэффициент отражения от агата и от поверхности нигрола мал, установлен достаточно мощный источник света — лампочка СЦ-61. Лампочка заключена в защитный кожух (5—9). Система линз (4—9) служит конденсором.

Процесс нивелирования при помощи автоколлимационного уровня заключается в следующем. Установив уровень на крышку маятникового

Фоторегистратор

Фоторегистратор, предназначенный для записи на фотопленку (шириной 190 мм) колебаний маятников и определения их периодов и некоторых поправок достаточно подробно описан в [1], и здесь можно на нем не останавливаться.

Автоколлимационный уровень

Искусственный горизонт образуется нигролом или другой жидкостью в сосуде (2—9). При помощи автоколлимационной трубы (1—9) можно наблюдать отраженные сетки нитей в искусственном горизонте.

Поскольку коэффициент отражения от агата и от поверхности нигрола мал, установлен достаточно мощный источник света — лампочка СЦ-61. Лампочка заключена в защитный кожух (5—9). Система линз (4—9) служит конденсором.

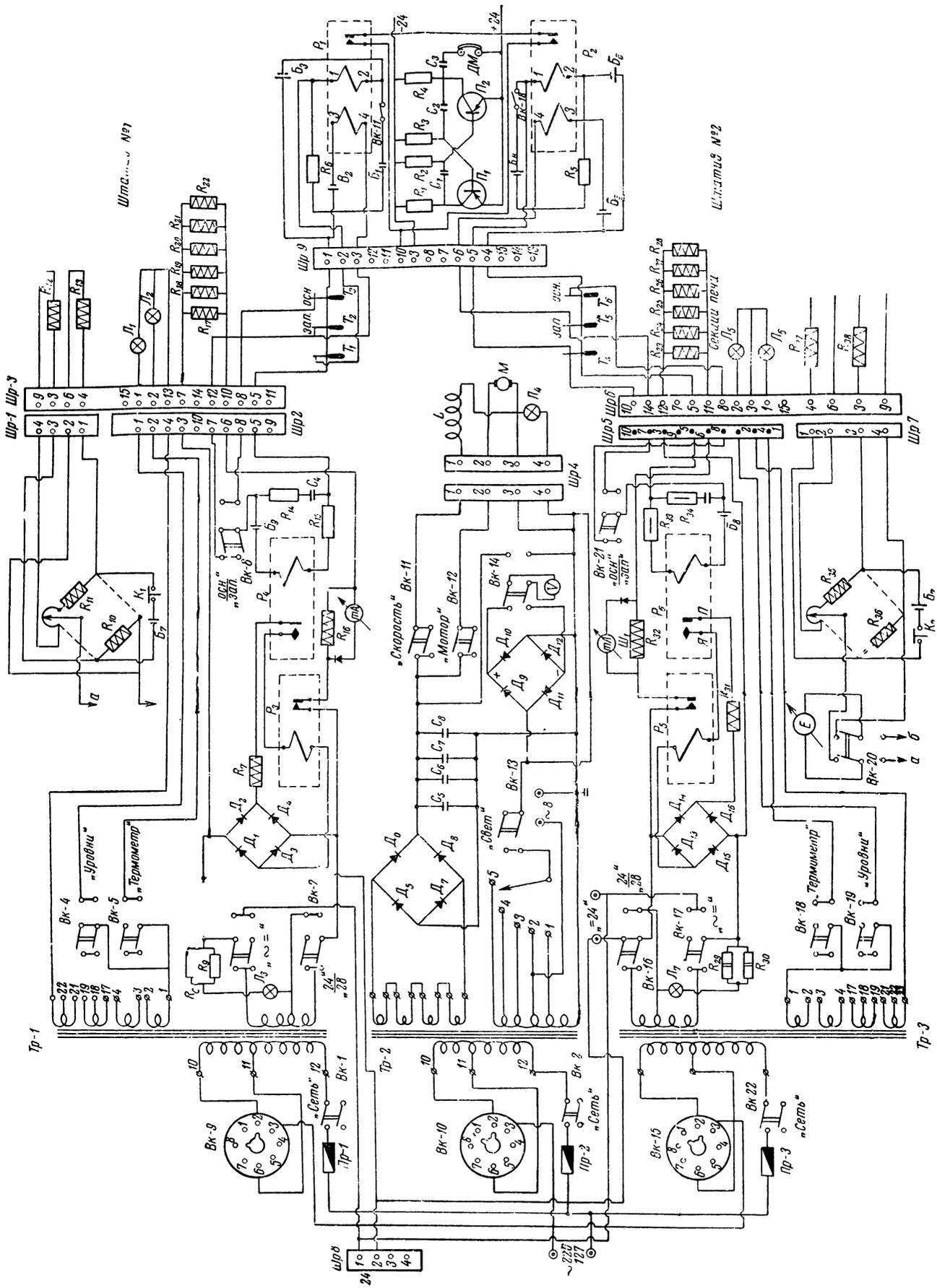


Рис. 8

штатива над окошком (2—2), действуют исправительными винтами (3—9) и совмещают отраженное от агатовой площадки изображение сетки нитей с прямым изображением этой сетки. Затем, установив сосуд с нигролом под трубой, совмещают отраженное от поверхности нигрола изображение сетки с упомянутым прямым изображением, действуя подъемными винтами маятникового штатива. В этом положении плоскости агатовых площадок будут горизонтальными.

Кварцевый хронометр

Этот прибор описан в [2]. В него внесены незначительные изменения. Характеристика его хода будет приведена ниже.

Вспомогательные устройства

К вспомогательным устройствам, входящим в комплект аппаратуры, относятся: эксикатор, состоящий из воздуходувки и баллона с осушающим веществом (алюмогель или др.), позволяющий регулировать влажность внутри штатива; блок питания маятникового прибора; пульт управления комплектом приборов, конструктивно объединенный с блоком питания; приспособление для проявления пленок на дневном свете; раздвижная тренога для фоторегистратора, необходимость применения которой иногда возникает; укладочные и транспортировочные ящики, от конструкции которых зависит поведение приборов в процессе перевозок.

III. Маятники

Кварцево-металлические маятники (рис. 10) были разработаны по предложению автора в период 1949—1952 гг. и за истекшие годы нашли достаточно широкое применение на практике. Стержни этих маятников изготовлены из плавленого кварца, что обеспечивает стабильность приведенной длины маятников и малую чувствительность к изменениям температуры. Чечевицы изготовлены из латуни, но крепление их к стержням производится близко от центра тяжести чечевиц, и поэтому термическое расширение латуни почти не влияет на период колебаний маятника. В то же время применение латунной чечевицы позволяет сохранить обычную форму, размеры и вес полусекундных маятников, обычную величину барометрического коэффициента и коэффициента затухания, а также практическую нечувствительность маятников к влиянию магнитного поля Земли.

Головка (стремя) маятника изготовлена из инвара, но так как масса ее не велика и расположена вблизи оси вращения, то ее магнитный момент (если он не чрезмерно велик) не может влиять заметно на период колебания.

Первоначально идея составного маятника вызвала серьезные возражения, но после того, как она была поддержана такими опытными приборостроителями, как Г. Г. Гордон и С. П. Шокин, принявшими в дальнейшем активное участие в разработке конструкции и технологии изготовления маятников, удалось сделать первые опытные образцы, сразу подтвердившие жизнеспособность новой конструкции. С течением времени эта конструкция видоизменялась и в последней модификации маятник имеет вид, схематически изображенный на рис. 10.

Кварцевый стержень (7) на концах имеет конические утолщения, которые при помощи разрезных инварных полуколец (6) туго закрепляются сверху в инварном стремени (4), а снизу — в инварной втулке (8). Полукольца (6) удерживаются при помощи резьбовых колец (5), выполненных также из инвара. Втулка (8) наглухо ввертывается в латунную хромированную чечевицу (9) и контрится в ней штифтами (11). Меняя

положение опорного торца (10) втулки по отношению к центру тяжести чечевицы, можно менять величину и даже знак температурного коэффициента маятника. В стремя туго запрессован агатовый нож (12) обычного типа. Сверху к стремени привинчиваются две оправы (3) из инвара,

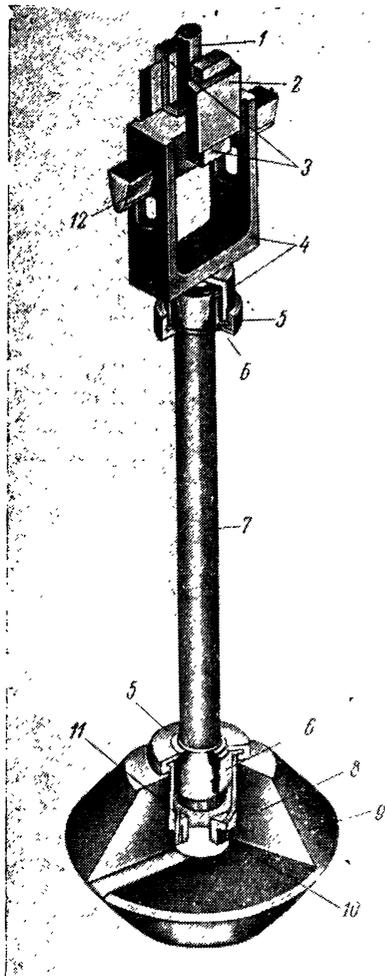


Рис. 10

несущие зеркала (2). Эти зеркала вклеиваются в оправы оптическим воском. Между оправы зеркал в стремя ввинчивается грузик (1) для точной регулировки периода колебаний маятника. Кварцевый стержень металлизирован, все детали маятника подвергаются специальной термической обработке.

До выпуска маятника из мастерской он проходит два основных испытания. Прежде всего проверяется его механическая прочность и поведение для тех случаев, когда в промежутках между наблюдениями он транспортируется в неблагоприятных условиях. Для этого, определив период колебания, помещают маятник на вибратор, на котором он в течение нескольких часов подвергается вибрации с перегрузкой, достигающей пятикратного веса. Маятник признается годным, если контрольное определение не обнаруживает изменений периода, больших, чем ошибки измерений. Как правило, это условие легко обеспечивается, и маятники почти не приходится браковать.

Второе испытание — более тяжелое и заключается в том, что, определив период колебаний при температуре $15-20^\circ$, маятник охлаждают в холодильнике до температуры -30° , причем понижение температуры происходит со скоростью не менее 10° в час. При температуре -30° маятник выдерживают в течение нескольких часов, а затем также быстро нагре-

вают до исходной температуры. После соответствующей отстойки определяют период колебания. Далее маятник нагревают до $+45-+50^\circ$, выдерживают при этой температуре в течение нескольких часов, понижают температуру до исходной и опять определяют его период.

В результате быстрого нагрева или охлаждения многие маятники обнаруживают изменение периода типа гистерезиса. Чаще всего охлаждение маятника вызывает уменьшение его периода против первоначального, а нагрев — увеличение. Ряд маятников имеет нулевой или очень малый гистерезис. Установлено, что величину гистерезиса можно несколько уменьшить надлежащей механической или дополнительной термической обработкой.

Величина гистерезиса является основной характеристикой пригодности маятника. Для прецизионных работ допускаются только такие маят-

ники, у которых гистерезис не превышает 5×10^{-7} сек. Исследование на гистерезис проводится не менее двух раз, причем температурные толчки на понижение обязательно чередуются с толчками на повышение; в противном случае, т. е. если провести два толчка подряд в одну сторону, можно прийти к неправильному заключению о качестве маятника, так как второй толчок дает в этом случае преуменьшенный эффект.

Гистерезис при температурных толчках малой интенсивности проверяется тогда, когда определяются температурные коэффициенты маятников.

Наличие гистерезиса для кварцево-металлических маятников побудило провести аналогичное исследование для металлических маятников. По литературным данным металлические маятники, хотя и обнаруживают этот эффект, но лишь в малой степени. Однако, когда исследование было проведено по той же программе, по которой исследуются кварцево-металлические маятники, то обнаружилось, что для них гистерезис не меньше, чем для последних.

Определение температурных коэффициентов маятников показало, что величины статических коэффициентов всех изготовленных маятников лежат в пределах от 2,0 до $3,5 \times 10^{-7}$ сек/град. В среднем они в 20 раз меньше соответствующих коэффициентов латунных маятников. Квадратичные коэффициенты во всех случаях оказывались равными нулю, хотя программа определения была достаточно обширной и обеспечивала их уверенный вывод, если бы эти коэффициенты имели ощутимую величину. Обычная программа исследования температурных статических коэффициентов заключается в том, что определяют по несколько значений периодов каждого маятника для следующих температур и в следующем порядке: 20, 30, 40, 40, 30, 20, 10, 0, 0, 10 и 20°. Эта программа дает надежный контроль измерений и позволяет судить об остаточном влиянии гистерезиса.

Динамические коэффициенты определялись при непрерывном изменении температуры с заданной скоростью от 20 до 40°, от 40 до 20°, от 20 до 0° и от 0 до 20°. Эти определения делались независимо от статических, но сразу же по завершении наблюдений для определения последних и без каких-либо перестановок аппаратуры. Каждая температурная точка проходила таким образом в двух направлениях — сверху и снизу. При исходной температуре, равной 20°, наблюдения велись трижды в строго статическом режиме.

Значения динамических коэффициентов оказались весьма интересными. При понижающейся температуре они для всех кварцево-металлических маятников, независимо от штатива и термометра, равны нулю; для повышающейся температуры, опять-таки для всех маятников, штативов и термометров, они приблизительно равны $10 \cdot 10^{-7}$ сек/град/час при скорости увеличения температуры на 1° в час. Убедительного объяснения этой особенности динамических коэффициентов пока не существует.

Средние квадратические ошибки статических коэффициентов, вычисленные по способу наименьших квадратов, не превышают $2 \cdot 10^{-8}$ сек/град, а динамических — $1 \cdot 10^{-7}$ сек/град/час.

Барометрические коэффициенты определялись при температуре 20° и давлении воздуха 750, 25, 75, 150, 400, 750 мм рт. стб. Коэффициенты оказались одинаковыми для всех маятников. Правда, все барометрические исследования выполнялись при помощи единственного штатива, хорошо сохранявшего вакуум, но вряд ли эти коэффициенты могут значительно изменяться при перевеске маятников со штатива на штатив, особенно, если учесть, что все применяемые штативы были однотипными. Что касается маятников, которые используются в высокоточном приборе,

описываемом в данной работе, то для них будет проведено специальное определение на своих штативах.

Порядок величины барометрических коэффициентов в единицах 10^{-7} сек. выведен из следующих данных, приведенных для одного из комплектов маятников (в среднем для комплекта):

$$A = 660,8 \pm 4,9; B = 105,9 \pm 5,8; A' = 713,8 \pm 2,1.$$

Здесь коэффициенты даны для формул:

$$S_{\rho} = S_0 + A\rho + B\sqrt{\rho},$$

$$S_{\rho} = S'_0 + A'\rho,$$

$$A' = A + \frac{B}{2},$$

где S_{ρ} — период маятника при плотности воздуха, равной ρ ; S_0 или S'_0 — период маятника при $\rho = 0$; A' — эквивалентный барометрический коэффициент при $\rho = 1$, которым практически можно пользоваться в любом равнинном районе или при измерениях силы тяжести на море.

Ошибки приведенных коэффициентов также вычислены по способу наименьших квадратов.

Повторные определения температурных и барометрических коэффициентов, которые выполнены для некоторых маятников через несколько лет после первоначальных, убеждают в стабильности этих постоянных.

Стабильность приведенных длин маятников и точность результатов измерения силы, как уже отмечалось выше, проверялись в самых разнообразных условиях. Так, например, в период 1951—1953 гг. при помощи кварцево-металлических маятников было определено 12 гравиметрических пунктов первого класса. Результаты этой работы опубликованы в [4]. Они показали, что даже в случае применения обычных штативов кварцево-металлические маятники могут обеспечить точность порядка 0,5 мгл.

В период 1955—1956 гг. один из комплектов маятников применялся в тяжелых экспедиционных условиях, и при его помощи было определено около 240 пунктов. В табл. 1 показано, как вели себя маятники в процессе работ этой экспедиции. В ней даются периоды этих маятников, полученные при возвращениях на опорный пункт. Так как периоды маятников, одновременно качающихся в одной паре, связаны влиянием сокачания, то, кроме индивидуальных значений этих периодов, даются среднепарные результаты, более независимые между собой. Приводятся также средний период комплекта.

Таблица 1

Периоды маятников на опорном пункте (в 10^{-7} сек.)

Даты	Периоды маятников				Среднепарные значения периодов		Общее среднее по комплекту
	65	66	67	68	$\frac{65+66}{2}$	$\frac{67+68}{2}$	
Сентябрь, 1955	5060 765	5060 760	5060 774	5060 773	5060 762	5060 774	5060 768
Ноябрь, 1955	768	760	778	771	764	774	769
Июль, 1956	767	759	774	770	763	772	768
Ноябрь, 1956	766	767	780	772	766	776	771

Аналогично вели себя и другие применявшиеся кварцево-металлические маятники.

Анализ результатов измерений, полученных в подобных экспедициях с применением обычной аппаратуры и методов работ, привел к заключению, что если в достаточной мере изолировать маятники от влияния внешней среды, более тщательно продумать конструкцию прибора и способы измерений, то можно получить результаты более высокой точности.

IV. Результаты некоторых лабораторных исследований

Система «нож-площадка»

Одна из основных характеристик маятникового прибора — постоянство периода маятника при небольших перемещениях последнего относительно агатовой площадки. Известно, что для маятников посредственного качества перевеска маятников на другие площадки вызывает изменение периода порядка многих десятков и даже сотен единиц седьмого знака секунды. Лезвия ножей кварцево-металлических маятников обрабатываются столь тщательно, что перевеска маятников даже на другие хорошие штативы не меняет периодов более чем 10×10^{-7} сек.

При обработке опорных площадок их поверхность проверяется при помощи пробного стекла по кольцам Ньютона. Первоначально шлифовка площадок производится с точностью порядка $1/4$ кольца, но с течением времени постепенная деформация основной плиты штатива вызывает соответствующую деформацию опорной площадки и снижает качество поверхности до одного кольца и даже более. Однако проверка поверхности по кольцам Ньютона является, с гравиметрической точки зрения, довольно грубым контролем. Нередко на «худших» площадках маятники ведут себя лучше, чем на «лучших». В этом отношении оптический метод исследования вообще мало убедителен. Поэтому лучшим способом исследования всей системы «нож-площадка» является прямое определение стабильности маятника на площадке, в частности при изменении его положения на этой площадке.

С указанной целью было проведено следующее исследование. Первоначально определены периоды маятников на своих обычных местах; затем маятники были смещены на 1,5 мм вдоль своих площадок влево и их периоды определены на новых местах; наконец, определены периоды при смещении маятников на 1,5 мм вправо от нормального места. Полученные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Зависимость периодов колебания маятников от положения ножей на опорных площадках (в 10^{-7} сек.)

Положение маятников	Штатив 1			Штатив 2		
	периоды маятников					
	65	66	средний период	67	68	средний период
Влево	5046 897	5046 902	5046 900	5046 876	5046 881	5046 878
Нормальное	901	899	900	878	874	876
Вправо	904	904	904	879	876	878

Как видим, зависимость периодов от места повески маятников довольно слабая. Можно рассчитывать, что если точность работы центри-

ровочного устройства обеспечивает постоянство посадки маятников порядка 0,1 мм, то соответствующая ошибка в периодах должна иметь порядок немногих единиц восьмого знака секунды.

Что касается постоянства посадки в направлении, перпендикулярном оси вращения, то оно обеспечивается конструкцией арретирующей вилки и не ниже точности посадки в продольном направлении.

Термостат

Исследование термостата имело целью определить распределение температуры внутри прибора, время, необходимое для установления в термостате стационарного режима, коэффициент термостатирования и потребляемую мощность.

Распределение температуры в термостатированном объеме исследовано при помощи нескольких термопар, расстояние между спаями которых составляло 12 см. Оказалось, что максимальные температурные градиенты на длину термопары в любом направлении не превышают $0^{\circ},25$, причем наиболее нагретой оказалась центральная часть штатива. Разность значений температуры на уровне ножей и уровне центра тяжести чечевиц почти равна нулю, так что если бы длина термопар была равна длине маятников, то можно было бы прийти к неправильному заключению о распределении температуры внутри штатива. Учитывая, что температура термостатирования значительно выше температуры окружающей среды, нет оснований считать, что температурные градиенты внутри прибора могут заметно меняться от пункта к пункту, а так как температурные коэффициенты маятников малы, то с указанным распределением температуры вполне можно было примириться. Необходимо еще иметь в виду, что прибор предназначается для измерений высокой точности, которые всегда будут производиться в достаточно приспособленных помещениях, где можно регулировать и наружную температуру. Поэтому не имело смысла, улучшая термостат, утяжелять и усложнять прибор. Указанная выше величина коэффициента термостатирования в достаточной мере исключает возможность проявления температурного последствия и необходимость введения трудно учитываемых динамических поправок.

При длительных перевозках в условиях низких температур улучшение температурного режима достигается увеличением мощности источников питания термостата.

Что касается времени на установление в термостате стационарного режима, то оказалось, что оно равно приблизительно 12 часам. Однако для полного прогрева маятников необходимо еще дополнительно затратить не менее двух суток. Поскольку в рейсах термостат не выключается, то прогрев аппаратуры производится лишь один раз за все время работ экспедиции.

Гигрометры

Исследование гигрометров, выполнявшееся для определения и контроля постоянства их масштабных коэффициентов, оказалось весьма затруднительным. Гигростат, используемый Научно-исследовательским институтом гидрометеорологического приборостроения, не обеспечивал необходимой для маятникового прибора точности регистрации и достаточной величины интервала изменения влажности. Вообще определение постоянных гигрометров вне маятникового штатива чревато опасностью изменения уже определенного нуля при установке гигрометра в штатив. Поэтому пришлось изготовить приспособления, позволяющие проводить исследование гигрометра внутри самого маятникового штатива. Для этой цели верхняя и боковые стенки штативов были заменены подоб-

ными им, но изготовленными таким образом, что на них размещаются два психрометра Ассмана большой модели. Заводные вентиляторы были выведены на верхнюю крышку. Увлажнение шариков термометров производилось через хлорвиниловые трубочки, выведенные на боковые стенки, а регулирование влажности производилось при помощи осушающего устройства, а также увеличением или уменьшением количества влаги, подводимой к смоченным шарикам термометров. Регистрация показаний при исследовании гигрометров производилась визуально по шкале фоторегистратора.

Многочисленные исследования значительного числа гигрометров, проведенные в лаборатории, выявили следующие их особенности.

Гигрометры обладают весьма большой чувствительностью, практически безынерционны и в течение длительного времени сохраняют постоянство нуля даже в условиях длительных перевозок. Основным же недостатком их заключается в наличии довольно большого гистерезиса. Показания гигрометра зависят от знака изменения влажности и образуют характерную петлю при перемене знака на обратный. Для различных гигрометров размер петли меняется от 3 до 6 и более процентов относительной влажности. Как правило, гистерезис пропорционален чувствительности гигрометра, что лишает возможности его исключения применением комбинации нескольких гигрометров.

Чтобы исключить влияние гистерезиса на результаты измерения плотности воздуха внутри маятникового штатива, была разработана следующая методика определения постоянных гигрометра и его применения.

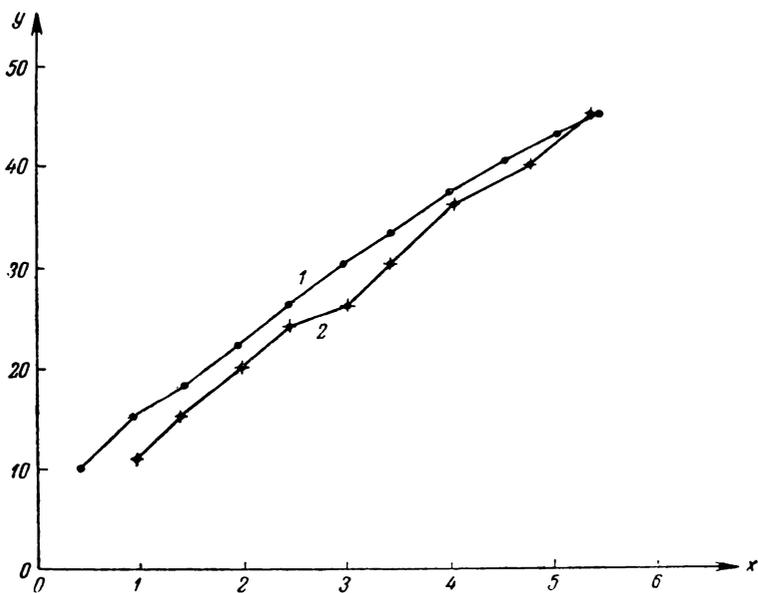


Рис. 11

Когда гигрометр исследуют, берут отсчеты, первоначально изменяя влажность только в одном направлении — обычно увеличивая ее; затем делают обратный ход, но понижая влажность и достигнув заданного значения, отсчет не берут, а продолжают влажность понижать еще на 5—10%. Затем повышают влажность до заданного значения, и только тогда производят отсчет. После этого снова понижают влажность, переходят

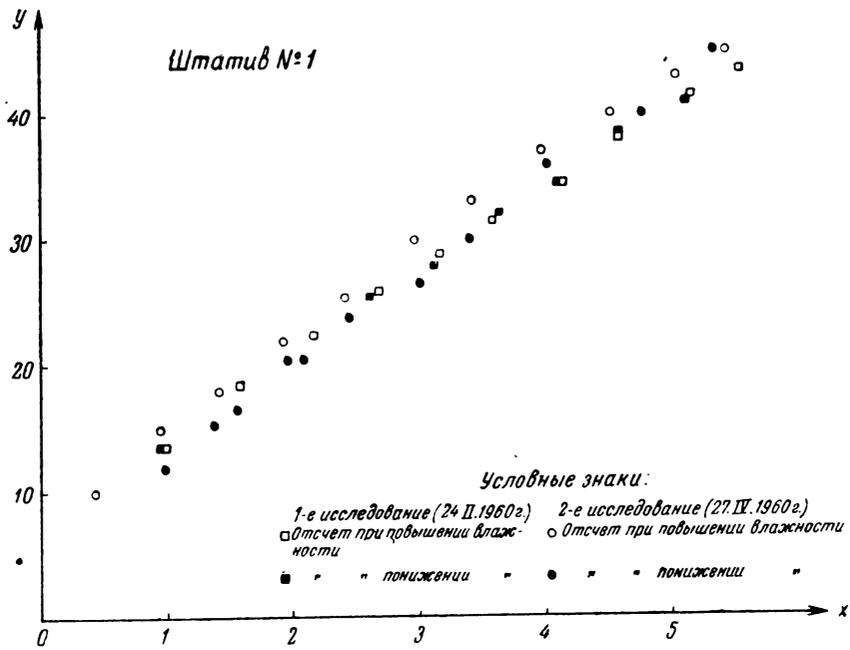


Рис. 12

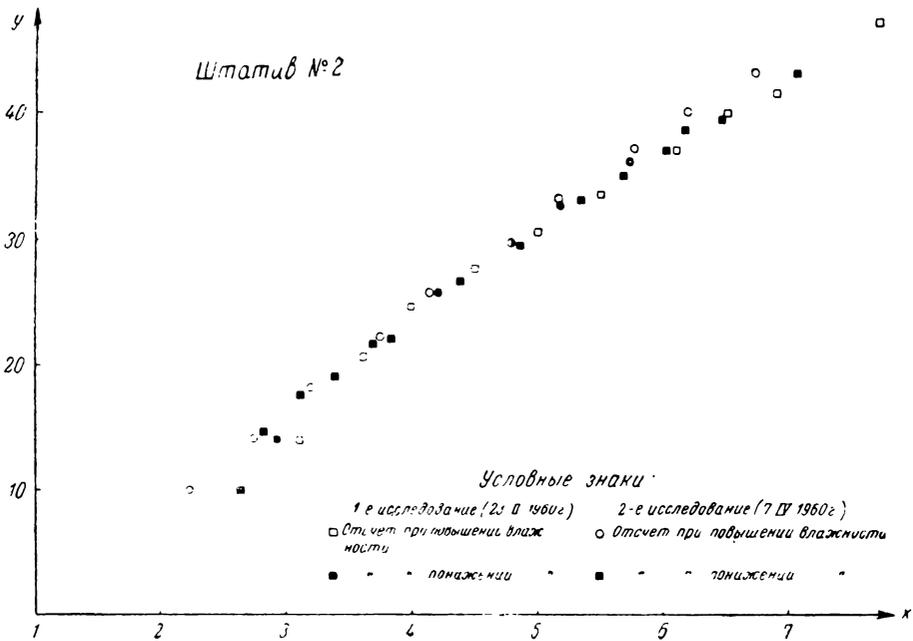


Рис. 13

через новое заданное значение и возвращаются к нему опять со стороны более низкой влажности и т. д. Таким образом, при исследовании отсчеты берут только при одном и том же знаке изменения влажности, что сводит почти к нулю ошибку от гистерезисов.

При измерениях силы тяжести лучше всего также работать всегда при одном и том же знаке изменения влажности, прибегая, когда это необходимо, к небольшому искусственному увлажнению воздуха. Опыт показал, что лучше работать именно при повышении, а не при понижении влажности, так как в первом случае в широком диапазоне отсчеты меняются линейно, в то время как при понижении влажности наблюдается заметная кривизна графика отсчетов и некоторое ухудшение сходимости.

На рис. 11 представлен характерный график изменения отсчетов гигрометра при изменении влажности первоначально в сторону повышения от 10 до 45 % (кривая 1), а затем — понижения от 45 до 10 % (кривая 2). По оси ординат отложено значение влажности, полученное в среднем по двум психрометрам, а по оси абсцисс — отсчеты по шкале фоторегистратора (в см).

На рис. 12 и 13 приведены результаты исследования гигрометров обоих маятниковых штативов, разделенные промежутком времени в $1\frac{1}{2}$ месяца, в течение которого был произведен ряд перевозок на автомашине. Хотя исследование выполнено по описанной выше методике, все же некоторое остаточное влияние гистерезиса еще ощущается. Впрочем, оно не велико и практического значения не имеет. Графики показывают, что за $1\frac{1}{2}$ месяца гигрометры хорошо сохранили свои параметры.

Следует отметить, что показания гигрометров в некоторой степени зависят от температуры. Поэтому исследование гигрометров производится в термокамере при рабочей температуре в маятниковом приборе.

Гигрометры позволили изучить характер изменения влажности внутри штативов при изменении влажности наружного воздуха. Оказалось, что она меняется весьма медленно даже при большой разности с наружной. Однажды маятниковый штатив был вынесен из термокамеры, где влажность была 37 %, а влажность внутри штатива — 34 %, и установлен во дворе, где шел мелкий морозящий дождь. В этих условиях потребовалось $3\frac{1}{2}$ часа для того, чтобы влажность внутри штатива возросла с 37 до 51 %. Этот эксперимент лишней раз подтверждает, насколько прежде неправильной была практика определения влажности воздуха при помощи психрометров, размещенных вне маятникового штатива.

Интегральные термометры сопротивления (ИТС)

Схема включения ИТС показана на общей электрической схеме прибора (см. рис. 8). Здесь приведем только графики, характеризующие результаты их исследования и чувствительность термометров. На рис. 14 дан график ИТС для штатива № 1, на рис. 15 — для штатива № 2. Наблюдения выполнялись как при повышении, так и при понижении температуры. Соответствующие точки на графике расположились поэтому парами. Контрольное определение постоянных, выполненное спустя год после первого, не обнаружило никаких изменений; результаты его не приводятся.

Кварцевый хронометр

На рис. 16 представлен ход кварцевого хронометра при выполнении связей гравиметрических пунктов. Недостатком хронометра является большое значение его хода; оно затрудняло производство сличений и снижало их точность. Кроме того, точность определения хода снижалась вследствие влияния помех, прорывавшихся через кабель, при помощи ко-

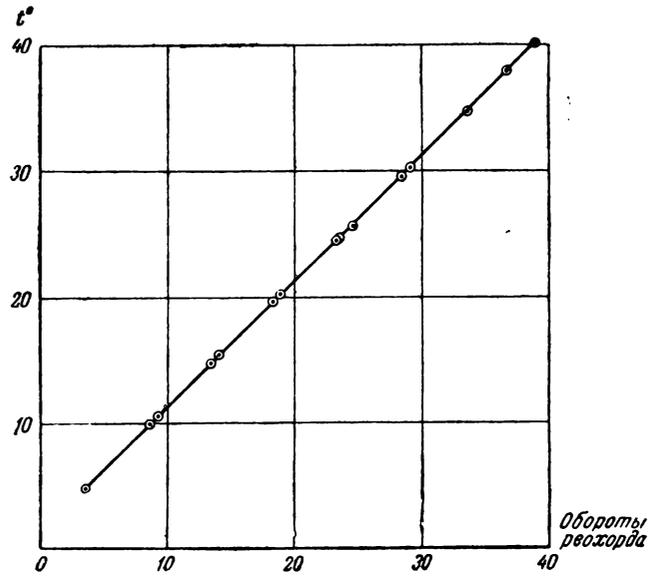


Рис. 14

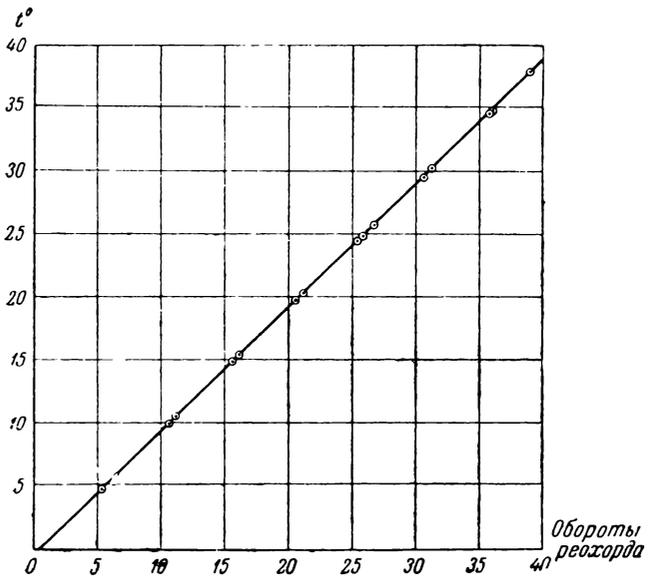


Рис. 15

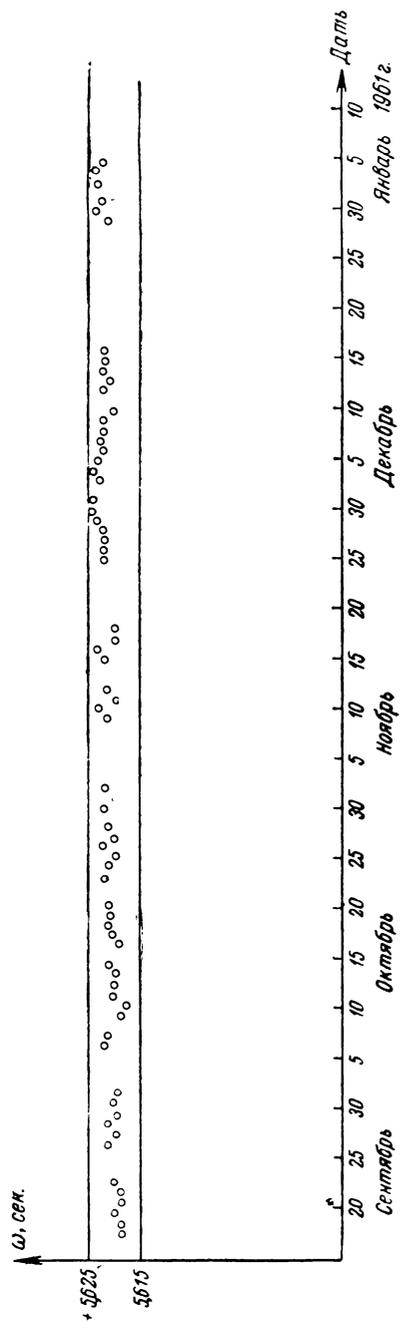


Рис. 16

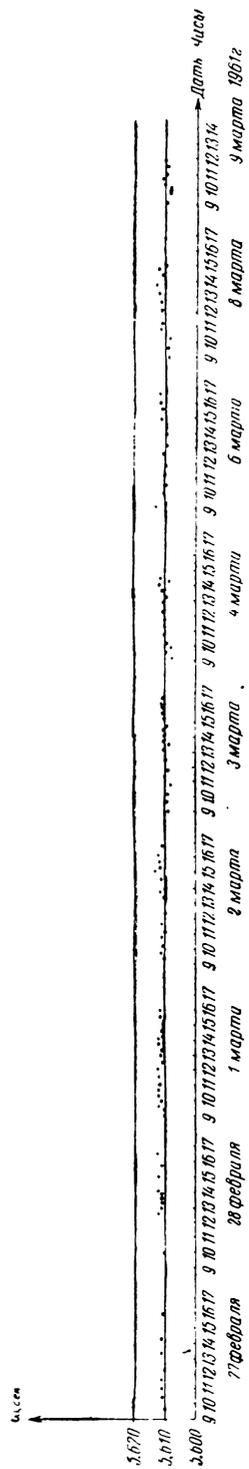


Рис. 17

того эталонная частота от кварцевых часов различных служб времени подавалась к экспедиционному хронометру. Таким образом, разброс точек на рис. 16 в основном зависит от точности сличений, а не от поведения самого хронометра. Тем не менее график достаточно убедительно демонстрирует высокую стабильность хронометра с точки зрения применения его в гравиметрических целях.

Так как продолжительность одной серии наблюдений с маятниковым прибором составляет один час, то естественно было выявить поведение хронометра и за более короткие промежутки времени. Для этого хронометр специально исследовали на Службе времени ЦНИИГАиК. Конечно, в данном случае большая величина хода хронометра также затрудняла сличения. Чтобы повысить их точность, сравнения производили на частоте 10 кгц, используя выход соответствующего каскада делителей. Из эталонной и исследуемой частоты образовывали на экране электронного осциллографа фигуру Лиссажу и измерения производили в соответствии с изложенным в работе [2]. В программу 8-часового исследования было включено: определение хода рабочего секундомера (15 минут), сличение кварцевого хронометра с эталонными часами (15 минут), повторное определение хода секундомера, повторное сличение хронометра с часами и т. д. ежедневно в течение восьми дней. При вычислении хода хронометра вводилась поправка за ход секундомера. На рис. 17 положение каждой точки соответствует суточному ходу хронометра, определенному за 15 минут и выраженному в секундах.

Осредняя по два смежных значения этого хода, получаем часовое значение суточного хода и аналогичным способом — двухчасовое и восьмичасовое значения суточного хода. Далее можно вычислить средние квадратические отклонения 15-минутного, часового, двухчасового и восьмичасового ходов от соответствующего среднего значения за восемь суток исследования; аналогичным способом, используя разности смежных значений, можно вычислить соответствующие вариации суточного хода.

Результаты всех вычислений сведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Результаты исследования кварцевого хронометра на Службе времени ЦНИИГАиК

Значение суточного хода	Средняя квадратическая величина	
	отклонения	вариации
15 — минутные	$\pm 0,0012$ сек.	$\pm 0,0011$ сек.
Часовые	12	13
Двухчасовые	10	12
Восьмичасовые	2	2

По-видимому, короткопериодические колебания суточного хода хронометра хорошо компенсируются при промежутках времени, превышающих два часа, а при промежутках времени, меньших этого интервала, они характеризуются величиной порядка $\pm 0,001$ сек. Этим колебаниям хода соответствует средняя квадратическая ошибка определения периода за один час наблюдений порядка $\pm 0,5 \cdot 10^{-8}$ сек, что является вполне удовлетворительным. Но поскольку продолжительность наблюдений на пункте не менее суток, то ошибки, вносимые колебаниями хода хронометра, вообще становятся пренебрегаемо малыми.

Влияние магнитного поля Земли

Так как в кварцево-металлических маятниках содержится небольшое количество инвара, то возникает необходимость проверки влияния магнитного поля Земли на период колебания этих маятников. Для указанной цели было проведено соответствующее исследование непосредственно перед началом работы по выполнению дальних гравиметрических связей (август—сентябрь, 1960).

Наблюдения маятников велись с применением катушки Гельмгольца, посредством которой напряженность магнитного поля изменялась в пределах от нуля до двойного значения этого поля в Москве. Наблюдения выполнялись в такой последовательности: при нормальном поле (ток в катушке выключен), при нулевом поле, при нормальном поле, при двойном поле и заключительные наблюдения при нормальном поле. При

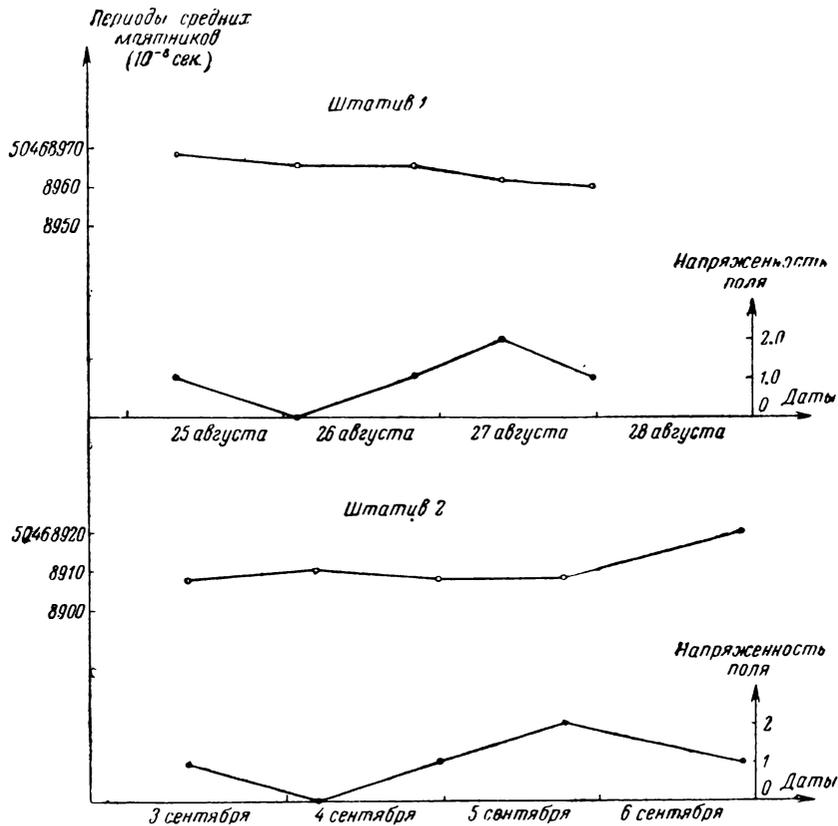


Рис. 18

каждом новом значении магнитного поля выполнялось по пять интервалов наблюдений. Под интервалом понимается следующая совокупность наблюдений: определение периода колебания первого маятника, непосредственное определение периода среднего маятника и определение периода второго маятника. Основными считались средние периоды для пары маятников данного штатива, полученные непосредственным измерением. Результаты исследования приведены на графике (рис. 18), по горизонтальной оси которого отложены даты наблюдений, по вертикальной оси слева — периоды среднего маятника данного штатива, справа — напряженность магнитного поля Земли,

причем за единицу принято ее нормальное значение для Москвы. Верхние кривые — графики периодов, нижние — графики напряженности магнитного поля.

Графики показывают, что для штатива 1 никакой корреляции периодов с напряженностью поля вообще не обнаруживается, но замечается некоторое систематическое уменьшение периодов маятников за время исследования. Подобный эффект небольших систематических изменений периодов в процессе магнитных исследований маятников был замечен также и в 1952 г.

Для штатива 2 можно заподозрить некоторую зависимость периодов от поля, но довольно слабую. Наибольшее отклонение, равное $1 \cdot 10^{-7}$ сек., получили периоды маятников при заключительных наблюдениях в нормальном поле. Это отклонение вряд ли может иметь практическое значение.

Зависимость периодов маятников от положения секторов зажимного устройства

Секторы зажимного устройства, охватывающие чечевицы маятников при перевозке штатива, освобождают маятники при их рабочем положении и отодвигаются от чечевиц на расстояние около 25 мм с каждой стороны. Расстояние это достаточно мало, и поэтому можно опасаться изменения периодов маятников за счет изменения аэродинамических эффектов, если на опорном и определяемом пунктах расстояния между поверхностями секторов и поверхностями чечевиц не одинаковы. Возникает необходимость определить, с какой точностью требуется обеспечить постоянство этого расстояния.

Соответствующее исследование было проведено на штативе 2. Первоначально был определен период среднего маятника штатива в нормальном положении секторов зажимного устройства, когда они были отдалены от поверхности чечевиц на максимальное расстояние, равное 25 мм. Затем секторы были приближены к чечевицам на 2 мм (чему соответствует один оборот рукоятки зажимного устройства) и проведено новое определение периода. Далее секторы приближались к чечевицам на 4, 6, 8 и 10 мм, считая от начального максимального расстояния, и каждый раз снова определялся период колебания среднего маятника. В наибольшем приближении к маятнику секторы находились на расстоянии 15 мм от поверхности чечевиц. Больше приближение было уже рискованным, да в нем не было и особой необходимости, так как исследование не преследовало цели определить какие-либо поправки к периоду.

Результаты этого исследования приведены на графике (рис. 19), по оси абсцисс которого нанесены положения зажимных секторов по отношению к расстоянию максимального удаления их (в мм), а по оси ординат — соответствующие периоды. Так как в каждой точке проводилось только однократное определение периода, то точность его не особенно велика (средняя квадратическая ошибка определения периода, вычисленная по уклонениям отдельных точек от прямой, оказалась равной $\pm 6 \cdot 10^{-8}$), но общий итог исследования получился весьма убедительным. Перемещение секторов на 1 мм изменяет период колебания маятников на $12 \cdot 10^{-8}$ сек., что является весьма большой величиной. Чтобы при обычных наблюдениях ошибка не превышала $0,5 \cdot 10^{-8}$ сек., необходимо обеспечивать постоянство положения секторов с точностью порядка 0,05 мм, чему соответствует поворот рукоятки зажимного устройства на 9° . Точность механических деталей, вероятно, достаточна для этого. Систематические изменения положения секторов, происходящие от постепенного износа деталей, могут проявиться в плавном измене-

нии периодов, учитываемом по наблюдениям маятников на опорном пункте.

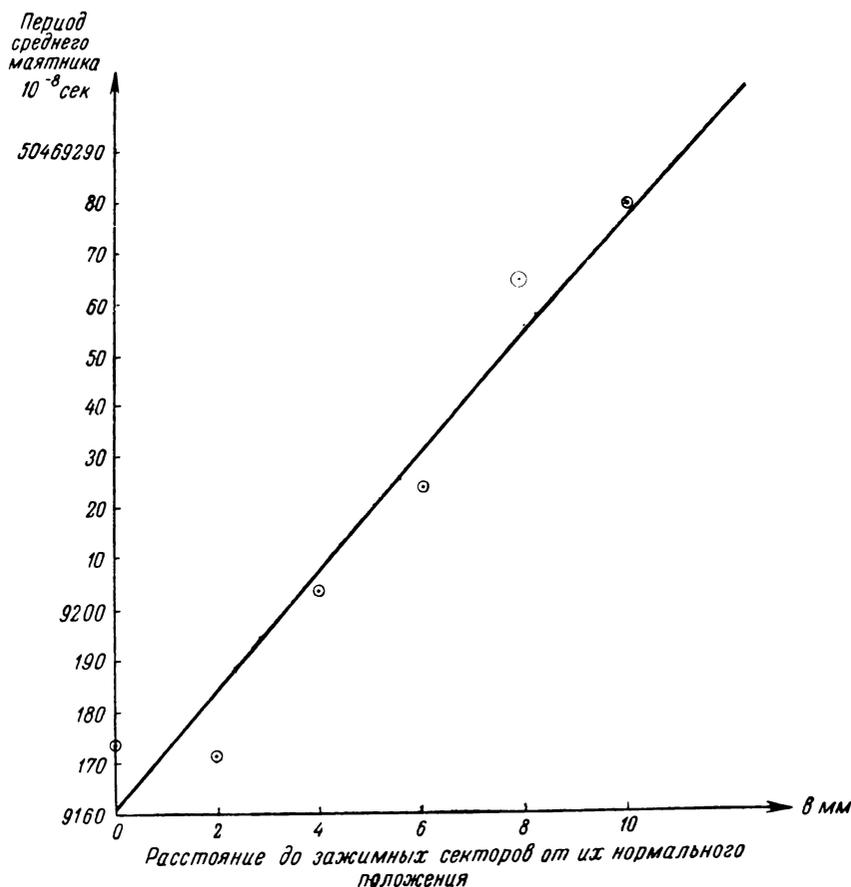


Рис. 19

Таким образом, нельзя ожидать, что обнаруженная зависимость периодов от положения зажимных секторов заметно снижает точность измерений силы тяжести, но проведенное исследование показывает, что этот источник погрешностей необходимо постоянно иметь в виду.

Кроме описанных наиболее существенных исследований, прибор и отдельные его узлы были подвергнуты многим другим исследованиям и испытаниям, на которых здесь не останавливаемся, так как их можно считать обычными испытаниями нового прибора.

V. Методика наблюдений маятников

В результате всех выполненных исследований была установлена определенная методика наблюдений, обработки материалов и оценки точности измерений. Не останавливаясь на подробном обосновании этой методики, поскольку она в дальнейшем несомненно будет изменяться вследствие накопления опыта работ и дальнейшего усовершенствования прибора, в данной работе излагаем кратко ту методику, которая была применена при выполнении первых практических измерений. Эта методика сложилась в 1959 г., когда, наряду с лабораторными исследованиями

прибора, практиковались пробные измерения в нескольких пунктах Москвы.

На основании многочисленных определений периодов колебаний маятников, выполненных в 1959 г., было установлено, что точность периода зависит от способа его определения по фотопленке.

Во-первых, запись периодов на фотопленке позволяет сопоставить методы исключения влияния сокачания штатива, предложенные Шмелем и Венинг Мейнесом. Как уже неоднократно отмечалось рядом исследователей, метод Венинг Мейнеса оказался значительно более точным. В частности, одной из причин, определяющей относительно невысокую точность метода Шмеля, является практическая невозможность определения с необходимой точностью коэффициента сокачания в основном вследствие влияния микросейсм и вибраций опорного столба.

Многочисленные эксперименты, проведенные нами, в сущности лишь повторили, но с другой, более высокой точностью наблюдений, подобные же эксперименты, неоднократно выполнявшиеся другими авторами. Несмотря на значительное повышение точности и улучшение условий наблюдений, общие выводы по вопросу о точности учета сокачания штатива и о методах работы не изменились.

Способы определения периодов колебания маятников по фотопленке, применявшиеся при исследовании данного прибора, описаны в работе [1]. Используя эти способы, в 1959 г. было установлено, что при точности непосредственных измерений периодов $1 \cdot 10^{-8}$ сек. точность периодов, полученных из серий часовой продолжительности (разделенных арретированием) после введения всех поправок снижается до $\pm 5 \cdot 10^{-8}$ сек.

Во-вторых, так как точность и стабильность хронометра и различных поправок, вводимых в наблюдаемый период, побуждали стремиться к более точному значению определяемого периода, а именно — порядка $1 \cdot 10^{-8}$ сек., было решено составить программу наблюдений таким образом, чтобы в окончательном результате на пункте осреднялись 15—20 периодов. Набор значительного числа наблюдений на пункте был важен не только для снижения случайной ошибки. Надо было еще выявить характер поведения маятников на каждом пункте, выснить, не коррелируют ли периоды с изменением внешних условий, изучить поведение различных узлов сложного прибора. Кроме того, возник еще один методический вопрос о выборе целесообразной модификации метода Венинг Мейнеса. Как известно, помимо непосредственного определения среднего периода пары маятников, качающихся в противоположных фазах с равными амплитудами, возможен другой способ наблюдений, при котором одному из маятников задают нулевую амплитуду и определяют период второго, качающегося маятника.

Априори ясно, что в последней модификации точность наблюдений должна быть несколько ниже, чем в предшествующей; прежде всего потому, что если одному из маятников задается нулевая амплитуда, то фиктивный маятник качается с амплитудой, равной амплитуде качающегося маятника, т. е. вдвое меньшей, чем в случае парного качания обоих маятников. Точность же определения периода по фотозаписи пропорциональна величине амплитуде записи. Далее, столь же ясно, что когда маятники качаются с равными амплитудами в противоположных фазах, то сводится к минимуму влияние сокачания, от которого существенно зависит точность определения периода. Но одновременное качание обоих маятников пары лишает возможности отдельного определения периодов, что ухудшает контроль и оценку точности измерений. Поэтому сделать выбор между обеими модификациями метода Венинг Мейнеса только на основании априорных соображений затруднительно. Более того, чтобы

провести правильную обработку наблюдений при парных качаниях, необходимо знать разность индивидуальных периодов обоих маятников пары, а следовательно, необходимы определения периодов отдельных маятников.

Так как теоретически обе модификации наблюдений равноценны, то возникает вопрос об опытном их сравнении. Поэтому программу парных наблюдений на пункте необходимо было дополнить достаточным количеством определений периодов отдельных маятников, причем объем наблюдений должен быть таким, чтобы результаты измерений по обоим методам были сопоставимы.

Уже в 1959 г. был накоплен довольно обширный материал, показавший, что наблюдения парных и одиночных маятников, несмотря на применение в обоих случаях метода Венинг Мейнеса, не вполне равноценны не только в смысле величины случайных ошибок, но и в смысле некоторых систематических влияний. Здесь не будем останавливаться на этих результатах, как имеющих лишь предварительное значение, но они выявили необходимость сопоставления обоих методов, что и было проведено в 1960 г. Это нашло отражение в программе наблюдений на пунктах.

Так как при перевозке приборов могли происходить относительно большие изменения температуры наружного воздуха, которые, хотя и в небольшой степени, могли повлиять на температуру маятников, то после приезда на пункт и установки приборов им давалась отстойка в течение суток, чтобы полностью восстановить термическое равновесие внутри термостатов. Далее наблюдения выполняли в такой последовательности:

1. Начальные наблюдения трех полных интервалов.
2. Наблюдения 10—15 периодов среднего маятника прибора парным методом.
3. Заключительные наблюдения трех полных интервалов.

Под полным интервалом подразумеваются наблюдения трех периодов (период первого маятника, период среднего маятника, определяемый по методу парных качаний, и период второго маятника). Наблюдения полного интервала позволяют сопоставить непосредственно определяемый период среднего маятника с его же значением, полученным из наблюдений периодов отдельных маятников пары, причем оба этих значения относятся к одному и тому же моменту времени, так что результат сопоставления практически не зависит от внешних условий. Таких сопоставлений можно получить не менее шести на пункте.

При наблюдении одиночных маятников принимаются все меры к тому, чтобы начальная амплитуда спокойного маятника с максимальной точностью была действительно нулевой. Это обеспечивает возможность определения коэффициента сокачания штатива. Первоначально для определения сокачания выполнялись специальные наблюдения. Тогда коэффициенты сокачания определялись в следующем порядке: до начала определения периодов — один раз при спокойном первом маятнике и один раз при спокойном втором маятнике, а затем такие же определения после окончания наблюдений. Таким образом обеспечивалась возможность не только определения среднего значения сокачания в данной плоскости и его неизменности в течение наблюдений, но и разности сокачаний для каждого маятника пары. Предварительное определение сокачания имеет то преимущество, что позволяет своевременно обнаружить неудачную установку прибора или даже неудачный выбор места для наблюдений. Однако, учитывая большие затраты времени на самое измерение сокачания, обработку пленок и вычисления, а также и то, что неблагоприятная установка приборов происходит весьма редко, было решено

отказаться от предварительных и заключительных специальных измерений и совместить определение коэффициента сокачания с определением периодов отдельных маятников пары.

Применяя метод Венинг Мейнеса при измерениях высшего класса точности, нельзя ослаблять внимания к сокачанию штатива, особенно же к равенству сокачаний для обоих маятников, так как при неравенстве соответствующих коэффициентов горизонтальные ускорения лезвий ножей маятников могут не исключаться частично или даже полностью.

Независимо от того, определялись ли периоды маятников методом парных или одиночных качаний, действительным маятникам всегда задавалась одна и та же начальная амплитуда, равная $18'$. Отклонение от этой величины редко превосходило $0',5$. Средняя амплитуда маятников всегда была очень близкой к $14'$, а средняя амплитуда фиктивного маятника при парных, т. е. основных наблюдениях, мало отличалась от $28'$. Начальная разность фаз пушенных маятников при парных наблюдениях не превосходила 2° и мало изменялась в течение наблюдений благодаря изохронности маятников.

Предметом постоянных забот наблюдателей была влажность воздуха внутри штатива. В 1959 г. стремились наблюдать при возможно меньшей влажности, поэтому воздух осушали до 3—5%. Однако, как оказалось, при такой малой влажности происходило довольно быстрое ее увеличение; приходилось дополнительно осушать воздух между отдельными сериями наблюдений, что не только нарушало температурный режим приборов, но и способствовало засасыванию внутрь штатива некоторого количества пыли. Поэтому в 1960 г. воздух осушался уже в значительно меньшей степени, примерно до 25%, и влажность менялась при этом столь медленно, что в процессе выполнения всей программы наблюдений уже не возникало необходимости дополнительного осушения. Но как выяснилось, при таком значении влажности возможно как повышение, так и понижение ее; хотя эти изменения и были очень малыми, но имели разные знаки, то, следовательно, они были нежелательными. В последнее время решили не задавать определенных значений начальной влажности, а в зависимости от влажности воздуха в помещении регулировать ее так, чтобы в течение всех наблюдений на пункте всегда было только плавное ее повышение.

Из всего сказанного видно, сколько времени и труда было потрачено, чтобы выявить такую маленькую поправку, как поправку за влажность воздуха, которая является источником некоторой неопределенности результатов. Неопределенность эта может быть исключена только при создании вакуумных приборов.

Давление воздуха при наблюдениях всегда измерялось при помощи двух ртутных барометров «инспекторского» типа. Эти барометры систематически проверялись по прецизионному барометру-манометру завода «Метприбор», имеющемуся в гравиметрической лаборатории.

Несмотря на высокую стабильность рабочего кварцевого хронометра, во избежание всяких неожиданностей этот хронометр систематически сличали с эталонными часами различных Служб времени. При выполнении гравиметрических связей сличения производились не реже двух раз в день.

В тех случаях, когда наблюдения велись на двух маятниковых штативах, моменты начала и окончания наблюдений на обоих штативах согласовывались с точностью до немногих секунд. Это облегчало контроль поведения маятников, так как соответствующие разности средних периодов

освобождались от таких погрешностей, как погрешность измерения давления воздуха, колебаний хода хронометра и т. п.

Регистрация гражданского времени наблюдений позволяла с достаточной точностью вводить поправки за влияние лунно-солнечных приливов.

В процессе наблюдений систематически измеряли температуру внутри термостатов. Температура регистрировалась вместе с давлением воздуха в начале и конце каждой серии наблюдений. В последнее время, когда окончательно убедились в достаточно хорошей работе термостата, температуру и давление воздуха стали отсчитывать в средний момент каждой часовой серии наблюдений.

При транспортировке приборов систематически контролировалась температура внутри термостатов.

VI. Обработка материалов наблюдений

Редуцированный к стандартным условиям период маятника вычисляли по формуле

$$S_0 = S + \Delta r + \Delta a + \Delta t + \Delta \rho + \Delta u + \Delta m. \quad (1)$$

В формуле (1) S — наблюдаемое значение периода, определенное по фотопленке. Способ определения периода описан в работе [1]. Единственное непринципиальное отличие способа, примененного в 1960 г., от указанного заключается в том, что было наложено ограничение на величину разности $y_2 - y_1$. Для повышения точности измерений стали требовать, чтобы эта разность не превышала 0,1—0,2 мм. Но число пар треугольников уменьшили для каждого периода с трех до одного; контроль же определения осуществляли по сходимости результатов измерений, выполненных «в две руки». Оценка точности, выполненная по соответствующей разности двойных измерений, показала, что средняя квадратическая ошибка среднего результата меньше $\pm 1 \cdot 10^{-8}$ сек, т. е. не более, чем при определении по трем треугольникам, но объем и трудоемкость обработки уменьшились.

Разумеется, что найденный период также контролируется по сходимости с другими значениями периода, найденными на данном пункте.

Второе слагаемое формулы (1) — Δr — поправка за неизохронность пары маятников, вычисляемая при одиночных качаниях по формуле

$$\Delta r = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a^2} - 1 \right) (S_2 - S_1), \quad (2)$$

а при парных качаниях — по формуле

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{a_1^2 - a_2^2}{a^2} (S_2 - S_1). \quad (3)$$

В этих формулах a_1 , a_2 и a — амплитуды соответственно первого, второго и фиктивного маятников, а S_1 и S_2 — непосредственно измеренные периоды первого и второго маятников: предполагается, что в случае одиночных качаний маятник 1 качается с большой амплитудой.

На возможность применения подобных формул указал еще Венинг Мейнес, но практически ими редко пользовались потому, что для строгого их применения необходимо записывать амплитуды всех маятников комплекта, что не позволяла оптическая система прежних приборов. Эти формулы, по сравнению с обычно применяемыми, значительно упрощают вычисления, так как нет необходимости знать разности фаз маятников пары.

Когда периоды маятников хорошо уравнены, как это было в нашем случае, поправкой за неизохронность можно пренебречь.

Третье слагаемое формулы (1) — Δa — поправка за амплитуду, значение которой вычисляют по формуле:

$$\Delta a = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a^2} \right) \Delta a, \quad (4)$$

где

$$\Delta a_1 = \frac{1}{16} S a_1^2, \quad \Delta a_2 = \frac{1}{16} S a_2^2; \quad \Delta a = \frac{1}{16} S a^2. \quad (5)$$

Величины Δa_1 , Δa_2 и Δa — поправки за амплитуду, вычисляемые по общеизвестным формулам по аргументам амплитуды первого, второго и фиктивного маятников.

Если маятники хорошо уравнены и удовлетворительно соблюдаются условия начальных пусков, то при парных качаниях вторым членом формулы (4) можно пренебречь, в результате чего поправка за амплитуду будет равна среднему арифметическому из поправок за амплитуду обоих действительных маятников.

Опыт показал, что поправкой за затухание маятников при вычислении поправки за амплитуду также можно пренебречь, поскольку она от пункта к пункту практически не меняется.

Для измерения амплитуды с достаточной точностью приходится применять инструментальный микроскоп, а следовательно, пользоваться палетками, облегчающими вычисление поправок, и весь процесс определения поправок становится довольно трудоемким. Облегчается он только благодаря внимательному отношению к начальным условиям пуска маятников.

Специальным исследованием установлено, что комплект маятников, примененный в приборе, не требовал никаких дополнительных поправок за влияние конечной величины радиуса кривизны лезвия опорного ножа. Тем не менее постоянство амплитуды колебания маятников на всех пунктах выдерживалось достаточно хорошо.

Амплитуды маятников измерялись по фото пленке и выражались в миллиметрах. Для перевода их в угловую меру необходимо учитывать, что фокусное расстояние объектива равно 1130 мм.

Слагаемое Δt [формула (1)] — поправка за температуру маятников — вычисляется по формуле

$$\Delta t = -\alpha (t - 35^\circ), \quad (6)$$

где α — эквивалентный температурный коэффициент данного маятника, t — температура маятников, а 35° — принятое стандартное значение температуры. Значения температурных коэффициентов всех применявшихся в 1960 г. маятников приведены в табл. 4.

Таблица 4

Температурные коэффициенты маятников	
№ маятника	α (10^{-8} , сек/град)
65	$-29,6 \pm 0,5$
66	$-32,1 \pm 1,2$
67	$-29,4 \pm 0,8$
89	$-34,0 \pm 1,1$
94	$-32,7 \pm 0,9$

Температурные коэффициенты соответствующих средних маятников для случая парных качаний получены как среднее арифметическое из значений коэффициентов действительных маятников.

Температурная поправка (6) отличается от аналогичной поправки, применявшейся для других приборов и маятников. Эта поправка не содержит квадратичного члена благодаря особенности кварцево-металлических маятников, а динамического члена — ввиду наличия термостата, исключающего необходимость введения этой неуверенной поправки.

Барометрическая поправка $\Delta\rho$ в формуле (1) равна

$$\Delta\rho = A'(1 - \rho), \quad (7)$$

где $A' = A + \frac{B}{2}$ — эквивалентный барометрический коэффициент маятников, а $\rho = \frac{B - \frac{3}{8}f}{760 \left(1 + \frac{t}{273}\right)}$ — плотность воздуха под колпаком прибора;

она вычислялась по показаниям барометров, электрического термометра и гигрометра.

Барометрические коэффициенты следует считать приближенными, так как они определялись для другого штатива. Существенного значения это не должно иметь, поскольку в 1960 г. все измерения выполнялись в малом интервале изменения плотности воздуха.

Всем маятникам было приписано одинаковое значение барометрического коэффициента, равное $712,8 \cdot 10^{-7}$ сек.

Так как от одного наблюдения на опорном пункте до повторного хода хронометра практически не менялся, то его вообще можно было не вводить. Однако, чтобы иметь возможность сопоставить периоды, определенные в разное время, поправка за ход Δu вводилась по обычной формуле; при этом для всех наблюдений, выполненных в данном рейсе, принималось одинаковое осредненное значение хода, выведенное по сравнениям с эталонными часами Служб времени.

Поправка Δm за лунно-солнечные приливы определялась по специальным графикам, составленным в Московском институте инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии под руководством доц. П. Ф. Шокина [6].

При вычислении приращений силы тяжести за исходные значения периодов всегда принимались средние арифметические из значений, полученных на опорном пункте непосредственно до и после наблюдений на данном определяемом пункте. Никаких интерполяций, уравниваний или других вычислений исходных периодов на основании каких-либо произвольных гипотез о поведении маятников в рейсе не производилось. Обработку наблюдений парных и одиночных качаний выполняли раздельно и независимо один от другого. Так же независимо обрабатывались наблюдения на различных штативах.

Результаты наблюдений одиночных качаний обрабатывали с учетом восьмого десятичного знака секунды в периоде маятника; при вычислении результатов парных качаний, начиная с пункта G_2 , стали удерживать и девятый знак. Все вычисления выполнены в две руки.

VII. Оценка точности

Как указано выше, приращение периода среднего маятника на определяемом пункте по отношению к опорному вычисляли по формуле

$$\Delta S = S - \frac{S_0' + S_0''}{2}, \quad (8)$$

где S_0' и S_0'' — соответственно средние значения периодов этого маятника при наблюдениях на опорном пункте в начале и конце рейса,

S — среднее значение периода этого маятника на определяемом пункте.

Обозначая через \bar{m}_1 , \bar{m}_2 и \bar{m}_s соответствующие средние квадратические ошибки этих периодов, через $m_{\Delta S}$ — среднюю квадратическую ошибку приращения периода ΔS , а через σ — величину

$$\sigma = \frac{1}{2}(S_0'' - S_0'), \quad (9)$$

найдем

$$m_{\Delta S}^2 = \sigma^2 + \bar{m}_s^2 + \frac{1}{4}(\bar{m}_1^2 + \bar{m}_2^2). \quad (10)$$

Но ошибка \bar{m}_s определения среднего периода для данного штатива на любом пункте номера k равна

$$\bar{m}_s^2 = m_k^2 + \mu^2 + \lambda^2, \quad (11)$$

где m_k — ошибка этого периода, зависящая от совокупности ошибок измерений на фотопленках, случайных изменений длин маятников на данном пункте от одной серии наблюдений к другой и вводимых в период поправок, также изменяющихся от одной серии наблюдений к другой случайным образом; иначе говоря, m_k — случайная ошибка периода;

μ — полусистематическая ошибка определения периода, постоянно действующая в ряде наблюдений, выполненных на данном пункте, но меняющаяся случайным образом от одного пункта к другому или от одной эпохи наблюдений на данном пункте к другой;

λ — систематическая ошибка, присущая данному штативу, но действующая случайным образом на разных пунктах.

На основании (1) ошибку μ можно представить в виде

$$\mu^2 = m_{\rho}^2 + A^2 m_{\rho}^2 + m_{\alpha}^2 t^2 + \alpha^2 m_t^2 + m_u^2 + m_a^2 + m_r^2, \quad (12)$$

где α и A — соответственно величины эквивалентных температурных и барометрических коэффициентов среднего маятника штатива; m_{α} и m_A — средние квадратические ошибки этих коэффициентов; t — средняя температура маятников; ρ — средняя плотность воздуха внутри штатива; m_t и m_{ρ} — систематическая часть ошибок измерения температуры маятников и плотности воздуха на данном пункте (обусловленная, например, изменением нулей барометров и гигрометра и т. д.); m_u — систематическая часть ошибки на данном пункте, зависящая от неточности определения и вариаций хода хронометра; m_r — систематическая часть ошибки определения на данном пункте поправки за неизохронность (например, результат изменения трудно определяемой разности периодов маятников на этом пункте); m_a — систематическая часть ошибки определения поправки за амплитуду (которая может быть следствием неучтенного изменения затухания маятников или неточного совмещения плоскости фотопленки с фокальной плоскостью объектива и т. д.).

Ошибка λ , очевидно, не может быть определена, если применяется один штатив и вычисляется при наличии в приборе нескольких штативов.

Ошибка поправки за действие земных приливов, пользуясь только результатами гравиметрических наблюдений, вообще оценить невозможно. В дальнейшем эту последнюю ошибку будем полагать равной нулю.

Переходя от ошибки периода в данном пункте к ошибке прираще-
ния периода между опорным и определяемым пунктами, можем на-
писать

$$m^2_{\Delta s} = \sigma^2 + \lambda^2 + \frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2) + m_s^2 + m_A^2(\rho - \rho_0)^2 + \\ + m^2_{\alpha}(t - t_0)^2 + \frac{3}{2}[A^2 m^2_{\rho} + \alpha^2 m_t^2 + m_u^2 + m_r^2 + m_a^2]. \quad (13)$$

В формуле (13) индексы «о» сопровождают значения плотности
воздуха и температуры маятников, относящиеся к наблюдениям на
опорном пункте.

Коэффициент $3/2$, на который умножаются квадраты небольших
ошибок в последнем члене формулы (13), указывает на то, что мы счи-
таем влияние этих ошибок меняющимся от наблюдения на одном пунк-
те к наблюдению на другом пункте, или при повторных наблюдениях,
случайным образом. Не исключено, однако, что некоторые из этих оши-
бок могут быть почти постоянными на данном пункте независимо от
времени наблюдений. Так, может зависеть от пункта средняя ампли-
туда колебания маятников, особенности приема эталонной частоты на
пункте могут вызвать систематическую ошибку хода и т. п. Поэтому,
по крайней мере для первого периода работ с прибором, лучше заме-
нить коэффициент $3/2$ коэффициентом 2.

Тогда, переходя от ошибок приращений периодов в единицах
 10^{-8} сек., к ошибкам приращения силы тяжести в *мгЛ*, будем иметь
окончательно

$$m^2_{\Delta g} = 0,039^2 [\sigma^2 + \lambda^2 + \frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2) + m_s^2 + m_A^2(\rho - \rho_0)^2 + \\ + m^2_{\alpha}(t - t_0)^2 + 2A^2 m^2_{\rho} + 2\alpha^2 m_t^2 + 2m_u^2 + 2m_a^2 + 2m_r^2]. \quad (14)$$

Если наблюдаются одиночные маятники, которые, как уже упоми-
налось, дают менее точный результат, считаем необходимым добавить
в квадратных скобках формулы (14) еще один член λ'^2

$$\lambda' = \frac{1}{2} [(S_k - S_0)' - (S_k - S_0)''], \quad (15)$$

где λ' — полуразность приращений периодов, полученных по обоим
маятникам штатива, отражающая псевдение отдельных маятников в
рейсе. Кроме того, для случая одиночных маятников величину σ должны
находить иначе, чем для случая парных наблюдений, и поэтому введем
вместо σ величину σ' . С этими замечаниями для случая одиночных на-
блюдений формула (14) примет вид

$$m^2_{\Delta g} = 0,039^2 [\sigma'^2 + \lambda^2 + \lambda'^2 + \frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2) + m_s^2 + m_A^2(\rho - \rho_0)^2 + \\ + m^2_{\alpha}(t - t_0)^2 + 2A^2 m^2_{\rho} + 2\alpha^2 m_t^2 + 2m_u^2 + 2m_a^2 + 2m_r^2]. \quad (16)$$

Перейдем к рассмотрению способов определения ошибок, входящих
в формулы (14) и (16). Будем иметь в виду, что впредь, применяя эти
формулы, мы всегда оцениваем точность приращения силы тяжести,
полученного при помощи маятников, качающихся на одном данном
штативе.

Под σ мы разумеем систематическую ошибку, обусловленную изме-
нением приведенной длины маятника в рейсе. Конечно, для парных
качаний нельзя предложить никакого иного способа ее определения,

кроме формулы (9). Для случая одиночных наблюдений можно привлечь данные по каждому из маятников, и тогда лучше σ' определять по формуле

$$\sigma'^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{S'_{o_1} - S''_{o_1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{S'_{o_2} - S''_{o_2}}{2} \right)^2 \right], \quad (17)$$

где S_{o_1} и S_{o_2} — соответственно периоды первого и второго маятников, а индексы ' и '' относятся к первому и второму наблюдению на опорном пункте.

Это отличается от методики, примененной Зверевым и Парийским, принявшими для характеристики систематического изменения периодов среднего маятника среднюю арифметическую величину изменения по обоим маятникам. Полагаем, что применение среднего квадратического связано с меньшим риском приписать результату незаслуженно высокую оценку.

Величину λ находим по формуле

$$\lambda = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \left[(S_n - S_0)' - (S_n - S_0)'' \right], \quad (18)$$

в которой S_n и S_0 — соответственно периоды среднего маятника прибора на определяемом и опорном пунктах, а индексы ' и '' относятся к первому и второму штативам.

Ошибки m_1 , m_2 и m_s находим по сходимости на соответствующем пункте периодов, исправленных всеми поправками. Для этой цели применяется обычная формула

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{n(n-1)}}, \quad (19)$$

где v — уклонение периода от общего среднего на пункте, а n — общее количество периодов по данному ряду наблюдений на пункте.

Величины α , A , m_α и m_A известны по данным соответствующих лабораторных исследований. Округляя и несколько преувеличивая ошибки, примем

$$\alpha = 25 \times 10^{-8} \text{ сек/град}, \quad A = 7128 \times 10^{-8} \text{ сек}; \quad m_\alpha = \pm 1 \times 10^{-8} \text{ сек/град}, \\ m_A = \pm 50 \times 10^{-8} \text{ сек}.$$

Ошибка отсчета температуры m_t принята равной $\pm 0,02$. Эта ошибка должна правильно характеризовать температуру маятников, так как изменения температуры внутри термостата малы; что касается температуры воздуха, то, возможно, что точность ее определения несколько ниже, поскольку внутри термостата имеются хотя небольшие, но все же ощутимые температурные градиенты. Но наличие этих градиентов вызывает постоянную ошибку в значении температуры воздуха, поскольку же эта ошибка невелика, а измерения силы тяжести производятся относительным методом, то она не может ощутимо сказаться на результате.

Номинальная точность отсчета по барометрам 0,05 мм; фактическая — несколько ниже, но в среднем по двум барометрам даже предельная ошибка измерения плотности воздуха не превышает $2 \cdot 10^{-4}$. Точно так же влияние ошибки в определении влажности воздуха по гигрометрам не может превышать $2 \cdot 10^{-4}$. Суммарную ошибку единичного измерения плотности воздуха можно положить равной $3 \cdot 10^{-4}$. Но так как на пункте выполняется не менее 16 измерений плотности, то средняя плотность воздуха измеряется не грубее $1 \cdot 10^{-4}$.

Не поддаются пока должной оценке ошибки барометрических коэффициентов маятников, возникшие от того, что коэффициенты, с которыми выполнены вычисления, определены на другом штативе.

Оценка точности поправки за амплитуду колебания маятников была выполнена сопоставлением соответствующих вычислений в «две руки». Оказалось, что при парных наблюдениях средняя квадратическая ошибка средней поправки за амплитуду, вводимой в отдельное наблюдаемое значение периода, в среднем из результатов вычислений в две руки равна $0,23 \cdot 10^{-8}$ сек. При одиночных качаниях для отдельного маятника она возрастает до $0,30 \cdot 10^{-8}$ сек. В дальнейшем для упрощения расчетов примем с округлением и некоторым преувеличением, что ошибка m_a во всех случаях равна $\pm 0,5 \cdot 10^{-8}$ сек.

Что касается поправки за неизохронность, то практически она не вводилась, так как всегда была меньше $1 \cdot 10^{-8}$ сек. Поэтому можем только несколько преувеличить ошибку m_r , если также примем ее равной $\pm 0,5 \cdot 10^{-8}$ сек.

Чтобы определить среднюю квадратическую ошибку, зависящую от определения и вариаций хода хронометра, всегда поступали следующим образом. Хронометр систематически сличали с эталонными часами и по результатам этих сличений строили график, образец которого показан на рис. 16. Через точки графика проводили уравнивающую прямую. Среднее квадратическое значение отклонения указанных точек от прямой считалось мерой ошибок определения хода. Фактически такая оценка преувеличивает значение ошибок, но ввиду высокого качества хронометра даже эта завышенная ошибка весьма мала.

После того как выполнена оценка измерений по каждому штативу, делается оценка среднего результата по обоим штативам. Эта оценка может быть выполнена двояко: 1) на основании формул (14) и (16), рассматривая суммарные ошибки как априорные, и 2) по фактической сходимости результатов измерений по обоим штативам. Сопоставление ошибок, полученных в двух вариантах, представляет интерес как с точки зрения проверки принятой методики оценки точности, так и с точки зрения выявления источников систематических ошибок.

Все то, что говорилось выше по оценке точности, очевидно, не исчерпывает всех возможных источников погрешностей. Могут быть такие источники ошибок, которые можно вскрыть только наблюдениями в другое время или другими приборами. Когда речь идет об измерениях высшего класса точности, такие повторные наблюдения обязательны. Особый интерес представляет сопоставление результатов измерений, выполненных маятниками и гравиметрами; это сопоставление должно быть проведено везде, где это возможно.

VIII. Результаты выполнения внутригородских связей*

После того как прибор был отъюстирован, исследован в лаборатории и опробован в отношении его транспортабельности, было решено провести связь нескольких гравиметрических пунктов в пределах города Москвы, чтобы в первом приближении оценить точность результатов работы с ним.

В этой предварительной связи не могли участвовать оба штатива, так как штатив 2 еще не был готов. Но для проверки идей, положенных в основу конструкции, первоначально можно было ограничиться только одним прибором. Хотя выполненная таким образом работа имела лишь предварительный характер, она дала интересный результат, который

* Предварительные данные об этих связях опубликованы в работе [5].

приведем здесь, не останавливаясь подробно на всех особенностях и обстоятельствах его обеспечения.

В первую очередь, в декабре 1959 г. — январе 1960 г. была сделана опытная связь двух пунктов: *O* и *A*. По завершении этой связи были окончательно устранены некоторые небольшие дефекты в аппаратуре, в частности, произведено новое уравнивание периодов маятников. В течение марта и апреля 1960 г. связь пунктов *A* и *O* была повторена вновь и сделаны связи пунктов *O* и *B*, а также *O* и *V*. Наблюдения на пунктах выполнялись в такой последовательности: *O—A—O*; *O—A—O—B—O—V—O*. Программа наблюдений на каждом пункте была описана выше.

Пункты *O*, *A*, *B* и *V* были связаны между собой также при помощи группы из шести-восьми гравиметров, причем было выполнено по три рейса.

В табл. 5 приведены средние значения периодов среднего маятника штатива при каждом наблюдении на опорном пункте *O*; они получены методом парных качаний. Средние квадратические ошибки периодов вычислены по уклонениям от соответствующих средних [по формуле (19)].

Таблица 5

Периоды среднего маятника прибора на опорном пункте *O*

Даты	Периоды и их ошибки в 10^{-3} сек.	Примечание
23—25 декабря, 1959	5046 9601 $\pm 1,0$	} Периоды до уравнивания
15—20 января, 1960	9596 $\pm 1,0$	
4—8 марта, 1960	8844 $\pm 1,0$	} Периоды после уравнивания
19—23 марта „	8844 $\pm 1,0$	
26—30 марта „	8842 $\pm 0,9$	
2—8 апреля „	8850 $\pm 0,9$	

Данные табл. 5 указывают на достаточно хорошее поведение маятников. Среднее квадратическое колебание периода от одного наблюдения на опорном пункте до другого, вычисленное при $n = 6$ и $k = 2$ по формуле

$$\delta_s = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{n - k}},$$

составляет всего лишь $\pm 3,5 \cdot 10^{-8}$ сек.

Если, как это надлежит делать при работах высшего класса точности, каждый определяемый пункт непосредственно привязывать к опорному, выполняя всякий раз наблюдения в порядке: опорный пункт — определяемый — опорный, то ожидаемую ошибку измерения приращенной силы тяжести можно вычислить по формуле

$$m_{\Delta g} = \pm 0,039 \sqrt{\frac{3}{2} \delta_s^2},$$

где δ_s — ошибка определения периода на пункте, которую будем считать одинаковой для всех пунктов.

В нашем случае получаем

$$m_{\Delta g} = \pm 0,17 \text{ мгл.}$$

Применяя же комплект из четырех маятников, т. е. два штатива, можно рассчитывать на получение точности порядка $\pm 0,1$ мгл.

Произведем теперь сопоставление ожидаемой ошибки с полученной фактически; последнюю можно определить двумя способами: по внутренней сходимости измерений на основании формул предыдущей главы и сопоставлением полученных нами результатов с результатами, полученными при помощи гравиметров.

Все данные для указанных сопоставлений приведены в табл. 6, содержащей сводку выполненных измерений и их средних квадратических ошибок.

В столбцах «Приращения силы тяжести по маятникам и по гравиметрам» под чертой приводятся средние квадратические значения средних квадратических ошибок связей по маятникам и по гравиметрам. Под чертой в столбце «Разности» дается среднее квадратическое расхождение маятниковых и гравиметровых результатов.

Рассматривая табл. 6, замечаем, что сходимость измерений во всех случаях выше ожидаемой. Учитывая, что применялся только один штатив, констатируем, что ошибка, вычисленная по внутренней сходимости, меньше предвычисленной по сходимости измерений на опорном пункте. Заметно лучше ожидаемого сходятся между собой результаты маятниковых и гравиметровых связей. Наконец, лучше ожидаемого сходятся результаты повторных измерений на пункте А, разделенных промежутком времени свыше двух месяцев.

Таблица 6

Сводка результатов внутригородских связей

Дата	Названия связей	Приращения силы тяжести, мгл		Разности, мгл
		по маятникам	по гравиметрам	
Январь	A—O	—43,44 $\pm 0,11$	—43,45 $\pm 0,08$	+0,01
Март	A—O	—43,55 $\pm 0,05$	—43,45 $\pm 0,08$	—0,10
Март	B—O	—12,60 $\pm 0,05$	—12,62 $\pm 0,07$	+0,02
Апрель	B—O	— 3,42 $\pm 0,16$	— 3,60 $\pm 0,08$	+0,18
Среднее квадратическое		$\pm 0,10$	$\pm 0,08$	$\pm 0,10$

Несмотря на малочисленность накопленных данных, стало очевидным, что прибор дает обнадеживающие результаты и что следующее его испытание надо провести уже на дальних связях. Для этого прежде всего требовалось ввести в строй второй штатив, что удалось сделать осенью 1960 г.

Однако, прежде чем перейти к описанию результатов дальних связей, необходимо остановиться еще на одном любопытном обстоятельстве, вскрывшемся при выполнении описанных опытных связей.

По причинам, на которых останавливались выше, основным методом измерения следует считать метод парных качаний. Но в программу изме-

рений входили, хотя в значительно меньшем объеме, и наблюдения по методу одиночных качаний. Поэтому можно провести сопоставление последних со всеми описанными выше результатами. Такое сопоставление сделано в табл. 7.

Из табл. 7 ясно видно систематическое расхождение результатов одиночных и парных качаний, причем это расхождение подтверждается точно таким же расхождением одиночных качаний и гравиметровых измерений. Очевидно, что такое расхождение могло возникнуть только потому, что при одиночных качаниях периоды маятников искажены какой-

Таблица 7

Сопоставление результатов, полученных при одиночных качаниях, с результатами, полученными при парных качаниях и по гравиметрам

Связи пунктов	Результаты по маятникам		Разности одиночных и парных качаний, мгл	Разности одиночных качаний и гравиметровых измерений, мгл
	одиночные качания, мгл	парные качания, мгл		
A—O	—43,64	—43,44	—0,20	—0,19
A—O	—43,59	—43,55	—0,04	—0,14
B—O	—12,82	—12,60	—0,22	—0,20
B—O	— 3,68	— 3,42	—0,26	—0,08
Среднее арифметическое			—0,18	—0,15

то систематической ошибкой. Эта ошибка очень опасна, так как она может проявиться на любом пункте. К счастью, результаты парных качаний, по-видимому, свободны от подобной ошибки.

К сопоставлению результатов одиночных и парных качаний мы еще возвратимся.

IX. Первая дальняя связь

Приведенная длина маятников при аккуратном их хранении, как известно, почти не изменяется с течением времени. Поэтому отличие результатов дальней и ближних связей может возникнуть только вследствие различия условий перевозок. Обеспечение надлежащих условий при перевозке весьма важное дело. Естественно было при первом ответственном испытании маятников создать достаточно трудные условия, максимально приближающиеся к экспедиционным. Разумеется, что здесь нельзя переходить каких-то определенных границ с тем, чтобы не вызвать прямого повреждения аппаратуры.

Первый дальний пункт, на котором были выполнены наблюдения, находится на расстоянии нескольких сот километров от Москвы. Для транспортировки приборов было решено применить автомобильный транспорт, а именно — грузовую автомашину. Такая же машина была использована и при внутригородских связях, когда продолжительность переездов не превышала 30 мин., а при дальних связях каждый переезд на пункт Г или обратно требовал затраты двух дней.

Предварительно, до начала опорных наблюдений, приборы были испытаны в поездке на меньшее расстояние: были определены периоды маятников, затем вся аппаратура была погружена на автомашину и совершен переезд на пункт, находящийся на расстоянии 100 км от Москвы. Однако наблюдения на этом пункте не производились, и приборы

были тотчас же возвращены на той же машине в Москву, где были проведены контрольные наблюдения. Оказалось, что вся аппаратура хорошо перенесла переезд, и заключительные наблюдения были уже проведены по полной программе опорных наблюдений для определения пункта Г.

Связь с пунктом Г проведена в сентябре и октябре 1960 г. В процессе подготовки этой связи был отъюстирован и исследован штатив 2 и снова улучшена синхронность маятников штатива 1.

Таблица 8

Условия наблюдений на пунктах (штатив 1)

Названия пунктов	Дата	Число наблюдённых периодов	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Сокачение штатива (10^{-7} сек.)			
								прямое	обратное	среднее	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
			Основные наблюдения Парные качания								
O_1	1960 г. 17—20 сентября	19	9,29	34°,79	752,96	4,24	5,620	33	36	34	
O_2	10—15 октября	15	9,36	34,89	740,00	3,86	5,620	39	35	37	
Среднее			9,32	34,84	746,48	4,05	5,620	36	36	36	
Γ_1	28 сентября — 1 октября	20	9,38	34,89	755,16	4,04	5,620	36	37	36	
Разности											
$\Gamma_1 - O$			+0,06	+0,05	+8,68	-0,01	0,000	0	+1	0	
			Одиночные качания								
O_1	18—20 сентября	9	9,22	34,80	752,39	4,28	5,620	То же, что и при парных качаниях			
O_2	10—15 октября	12	9,28	34,84	741,36	3,85	5,620				
Среднее			9,25	34,82	746,88	4,06	5,620				
Γ_1	28 сентября— 2 октября	12	9,14	34,89	756,79	4,03	5,620				
Разности											
$\Gamma_1 - O$			-0,11	+0,07	+9,91	-0,03	0,000				

Наблюдения проведены в последовательности: $O_1 - \Gamma - O_2$. Сравнения барометров с контрольным барометром-манометром выполнены до и после всех наблюдений. Проверка хода рабочего кварцевого хронометра производилась систематически на обоих пунктах по несколько раз в день.

Неудачные записи маятников бывали довольно редкими, но так как они вскрывались только при проявлении пленок, то иногда поэтому происходили некоторые нарушения в установленной последовательности чередования одиночных и парных качаний. Однако объем наблюдений не

был меньшим, чем указывалось выше; наоборот, увеличение объема наблюдений практиковалось всегда, когда возникали какие-либо сомнения в качестве обработки пленки.

При перевозке приборы были установлены на специальном столике в кузове автомашины. Единственной амортизацией служили авиационные «лорды», при помощи которых упаковочные ящики крепились к указанному столику. В дальнейшем выяснилось, что такое крепление неудачно. В отдельных случаях «лорды» не ослабляют, а усиливают толчки и удары. И действительно, в описываемом рейсе маятники перенесли перевозку хуже, чем ожидалось.

Таблица 9

Условия наблюдений на пунктах (штатив 2)

Названия пунктов	Дата	Число наблюдений периодов	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Сокачание штатива (10 ⁻⁷ сек)			
								прямое	обратное	среднее	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
			Основные наблюдения								
			Парные качания								
O_1	1960 г. 17—20 сентября	20	9,48	34,58	753,40	3,84	5,620	42	43	42	
O_2	8—16 октября	16	9,36	34,68	740,97	3,74	5,620	48	48	48	
Среднее			9,42	34,63	747,18	3,79	5,620	45	46	45	
Γ_1	28 сентября— 1 октября	20	9,49	34,81	755,22	3,99	5,620	36	34	35	
Разности											
Γ_1-O			+0,07	+ 0,18	+8,04	+0,20	0,000	-9	-12	-10	
			Одиночные качания								
O_1	17—20 сентября	12	9,41	34,58	752,91	3,83	5,620	То же, что и при парных качаниях			
O_2	8—16 октября	13	9,30	34,61	743,38	3,70	5,620				
Среднее			9,36	34,60	748,14	3,76	5,620				
Γ_1	28 сентября— 2 октября	12	9,43	34,81	756,83	3,99	5,620				
Разности											
Γ_1-O			+0,07	+ 0,21	+8,69	+0,23	0,000				

Табл. 1 и 2 в приложении содержат полностью все данные об основных наблюдениях (т. е. по методу парных качаний) на опорном пункте O_1 до выезда на пункт Γ . Под чертой внизу этих таблиц даются соответствующие средние арифметические на пункте, ошибка M среднего периода на пункте, вычисленная по отклонениям от него отдель-

ных значений периода, а также ошибка m одного периода, полученного из часовой серии наблюдений, т. е. одного табличного значения.

Аналогичные сведения для пункта Γ и заключительных наблюдений в пункте O_2 даются в табл. 3, 4, 5 и 6 приложения.

Так как на пункте O нельзя было установить одновременно оба штатива на основной столб, пришлось штатив 2 поместить на другом столбе, который ниже основного на 40 см. Поэтому периоды маятников штатива 2 редуцированы к периодам маятников штатива 1 поправкой $+3,2 \cdot 10^{-8}$ сек. «за свободный воздух». Эта редукция приведена в таблицах.

На пункте Γ периоды маятников обоих штативов редуцированы к основному столбу этого пункта; эта редукция также показана в таблицах. Окончательные значения периодов приведены в нижних строках перечисленных таблиц.

В табл. 13, 14, 15, 16, 17 и 18 приложения даются аналогичные сведения для наблюдений, выполненных по методу одиночных качаний. В этих таблицах приводятся периоды каждого маятника в отдельности, средние периоды для каждого из этих маятников на пункте и средние периоды на пункте среднего маятника по штативу. Ошибка этого среднего вычислена по формуле.

$$m = \pm \frac{1}{2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2}, \quad (20)$$

где m_1 и m_2 — ошибки средних периодов каждого маятника в отдельности.

Осредненные данные об условиях наблюдений на пунктах и все сведения, необходимые для оценки точности результатов, приведены в табл. 8 и 9.

В трех последних столбцах указанных таблиц даются средние значения сокачания штатива соответственно: прямое — с первого маятника на второй, обратное — со второго на первый и среднее значение коэффициента сокачания.

Обобщенные (средние) результаты всех наблюдений в пунктах O и Γ приведены в табл. 10.

В этой таблице средние периоды, помещенные в последнем столбце, получены как средние из значений периодов по первому и второму штативам, а ошибки этих общих средних периодов получены по формуле (20), где под m_1 и m_2 подразумеваются соответственно ошибки средних периодов по отдельным штативам.

Осредняя результаты наблюдений в пунктах O_1 и O_2 для средних данных, вычисляем две ошибки. Первая ошибка, подписанная непосредственно под средним периодом, вычислена как полуразность периодов, наблюденных в O_1 и O_2 ; она характеризует в основном изменение маятника за время, протекшее между этими наблюдениями. Вторая ошибка, подписанная строчкой ниже, вычислена по формуле (20), где m_1 и m_2 обозначают ошибки средних периодов, полученных соответственно в O_1 и O_2 . Эту последнюю ошибку можно характеризовать как ожидаемую ошибку определения среднего периода на опорном пункте в случае неизменности длин маятников, а первую ошибку — как фактически получаемую.

Как видим, фактическая ошибка в десять раз превосходит ожидаемую, и это дает право говорить, что за время переездов в пункт Γ_1 и обратно произошло изменение периодов маятников. Пусть эти изменения не велики (соответственно $14 \cdot 10^{-8}$ сек. и $16 \cdot 10^{-8}$ сек.), но они в десять раз больше ошибки определения периодов.

Любопытно отметить, что изменения периодов на обоих штативах имеют разный знак, так что общий средний период из всех четырех

маятников изменился лишь на $1,2 \cdot 10^{-8}$ сек. при ожидаемой ошибке $\pm 0,5 \cdot 10^{-8}$ сек. и фактической $\pm 5,2 \cdot 10^{-8}$ сек. Фактической ошибкой общего среднего периода теперь называется величина, вычисляемая по формуле (20), но в которой m_1 и m_2 — фактические ошибки определения среднего периода на опорном пункте по каждому штативу.

Таблица 10

Средние значения периодов маятников и приращений периодов $\Gamma_1 - O$ (в 10^{-8} сек.)

Основные измерения

Парные качания

Названия пунктов	Периоды средних маятников		
	штатив 1	штатив 2	среднее
O_1	5046 8758,0 $\pm 1,0$	5046 8943,3 $\pm 0,8$	5046 8850,6 $\pm 0,6$
O_2	8744,1 $\pm 0,8$	8959,4 $\pm 1,1$	8851,8 $\pm 0,7$
Среднее	5046 8751,0 $\pm 7,0$ $\pm 0,6$	5046 8951,4 $\pm 8,0$ $\pm 0,7$	5046 8851,2 $\pm 5,3$ $\pm 0,5$
Γ_1	5045 9263,4 $\pm 0,7$	5045 9468,1 $\pm 0,7$	5045 9365,8 $\pm 0,5$
Приращения периодов	-9487, 6 $\pm 7, 9$	-9483, 3 $\pm 8, 9$	-9485, 4 $\pm 6, 0$
Приращения силы тяжести мгл	+369,15 $\pm 0,30$	+368,97 $\pm 0,34$	+369,06 $\pm 0,23$

Несмотря на то, что изменения периодов по каждому штативу имеют разные знаки и, следовательно, можно ожидать значительные расхождения между приращениями периодов по обоим штативам, фактическое расхождение оказалось всего лишь $4,3 \cdot 10^{-8}$ сек. Это можно объяснить только тем, что в обоих штативах изменения периодов происходили пропорционально времени (или, точнее, числу переездов). Действительно, если выписать в табличку разности периодов по обоим штативам, то получим:

для пункта $O_1 + 185,3 \cdot 10^{-8}$ сек.

„ „ $\Gamma_1 + 204,7$ „ „

„ „ $O_2 + 215,3$ „ „

Это подтверждает предположение о характере поведения маятников при переездах.

Оценка точности приращений периодов выполнена применительно к формуле (14). Оценка общего среднего по данным обоих приборов снова делается по формуле (20), где под m_1 и m_2 подразумеваются ошибки приращений периодов по отдельным штативам.

При изготовлении прибора ставилось целью — обеспечить при помощи одного четырехмаятникового комплекта точность измерения силы тяжести порядка $\pm 0,25$ мгл. Первая связь с другим городом подтвердила, что поставленная цель достигнута, хотя точность этой связи оказалась ниже, чем точность выполненных ранее внутригородских связей. Чтобы проанализировать, за счет каких источников погрешностей произошло снижение точности, и вообще выявить меру относительного влияния различных источников ошибок, в табл. 11 приведены величины соответствующих ошибок, вычисленные по формуле (14).

В предпоследней строке таблицы даны суммарные ошибки приращений периодов, причем в ее правом столбце эта ошибка относится к среднему результату, полученному по обоим штативам. В последней строке соответствующие ошибки выражены в мгл.

Таблица 11

Оценка точности измерений по внутренней сходимости результатов и данным исследования приборов

Основные измерения

Парные качания

№ по пор.	Ошибки	Единицы измерений	Штатив 1	Штатив 2	Среднее
1	σ^2	10^{-16} сек. ²	48,30	64,80	56,55
2	λ^2	"	9,24	9,24	9,24
3	$\frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2)$	"	0,41	0,46	0,44
4	m_s^2	"	0,49	0,49	0,49
5	$m_A^2 (\rho - \rho_0)^2$	"	0,03	0,19	0,11
6	$m_x^2 (t - t_0)^2$	"	0,00	0,02	0,01
7	$2A^2 m_\rho^2$	"	1,02	1,02	1,02
8	$2\alpha^2 m_t^2$	"	0,35	0,45	0,40
9	$2m_u^2$	"	0,68	0,68	0,68
10	$2m_c^2$	"	0,50	0,50	0,50
11	$2m_r^2$	"	0,50	0,50	0,50
	Сумма	10^{-16} сек. ²	61,52	78,35	69,94
	m_{Δ_s}	10^{-8} сек.	$\pm 7,84$	$\pm 8,85$	$\pm 5,91$
	m_{Δ_g}	мгл	$\pm 0,30$	$\pm 0,34$	$\pm 0,23$

Таблица наглядно показывает, что решающее значение для точности измерений имеет поведение маятников в рейсе (ошибки σ и λ) по сравнению с чем все прочие ошибки исчезающе малы. Наибольшей из остальных ошибок оказалась ошибка от определения плотности воздуха. Наименьшей ошибкой оказалась ошибка от неточности температурных

коэффициентов прибора, которая еще недавно играла столь видную роль при маятниковых определениях.

При наблюдениях на других пунктах может получить большое значение ошибка от неточности барометрических коэффициентов прибора, о чем говорилось выше.

Переходим к изложению результатов, полученных при одиночных качаниях.

Таблица 12

Средние значения периодов маятников и приращений периодов Γ_1-O (в 10^{-8} сек.)

Одиночные качания

Названия пунктов	Штативы						Общее среднее
	1			2			
	маятники						
	65	67	среднее	89	94	среднее	
O_1	5046 8751 ± 7	5046 8764 ± 3	5046 8758 ± 4	5046 8888 ± 4	5046 9014 ± 3	5046 8951 ± 2	5046 8854 ± 2
O_2	8744 ± 7	8744 ± 4	8744 ± 4	8922 ± 3	9001 ± 3	8962 ± 2	8852 ± 2
Среднее	8748 ± 4 ± 5	8754 ± 10 ± 2	8751 ± 5 ± 3	8905 ± 17 ± 2	9008 ± 6 ± 2	8956 ± 9 ± 1	8854 ± 5 ± 2
Γ_1	5045 9264 ± 3	5045 9271 ± 2	5045 9268 ± 2	5045 9446 ± 4	5045 9493 ± 1	5045 9470 ± 2	5045 9369 ± 1
Приращения периодов	-9484	-9483	-9484 ± 9	-9459	-9515	-9487 ± 31	-9486 ± 16
Приращения силы тяжести, <i>мгЛ</i>	+368,9	+368,9	+368,9 $\pm 0,3$	+367,9	+370,1	+369,0 $\pm 1,2$	+369,0 $\pm 0,6$

В табл. 12 приведены средние периоды маятников, а в табл. 13 — обусловленные отдельными источниками средние квадратические ошибки.

Оценка результатов, приведенных в табл. 12 и 13, выполнена аналогично тому, как это сделано в табл. 10 и 11, но ошибка за изменение периодов между наблюдениями на пунктах O_1 и O_2 вычислена по отдельным маятникам.

Кроме того, в отличие от табл. 10, значения периодов округлены до восьмого знака секунды, а силы тяжести — до десятых долей *мгЛ*.

Сопоставляя данные табл. 13 с данными табл. 11 для парных качаний, видим, что квадраты ошибок, зависящих от стабильности маятников и неточности определения периодов, резко возросли. Прежде всего обращает внимание очень большая величина ошибки для второго штатива,

хотя среднее значение приращения силы тяжести по этому штативу мало отличается от значения, полученного по первому штативу; почти вдвое

Таблица 13

Оценка точности измерений по внутренней сходимости результатов
и данным исследования приборов

Одиночные качания

№ по пор.	Ошибки	Единицы измерения	Штативы		Среднее
			1	2	
1	σ^2	10^{-16} сек. ²	56,12	165,62	110,87
2	λ^2	"	0,25,	784,00	392,12
3	λ^2	"	4,50	4,50	4,50
4	$\frac{1}{4} (m_1^2 + m_2^2)$	"	8,00	2,00	5,00
5	m_s^2	"	4,00	4,00	4,00
6	$m_A^2 (\rho - \rho_0)^2$	"	0,05	0,24	0,14
7	$m_\alpha^2 (t - t_0)^2$	"	0,00	0,02	0,01
8	$2A^2 m_\rho^2$	"	1,02	1,02	1,02
9	$2\alpha^2 m_t^2$	"	0,35	0,45	0,40
10	$2m_u^2$	"	0,68	0,68	0,68
11	$2m_a^2$	"	0,50	0,50	0,50
12	$2m_r^2$	"	0,50	0,50	0,50
	Сумма	10^{-16} сек. ²	75,97	963,53	519,74
	m_{Δ_s}	10^{-8} сек.	$\pm 8,71$	$\pm 31,04$	$\pm 16,12$
	m_{Δ_g}	мгЛ	$\pm 0,34$	$\pm 1,21$	$\pm 0,63$

увеличился квадрат ошибки от изменения периодов между наблюдениями на пунктах O_1 и O_2 (в основном опять за счет второго штатива); ошибка измерения периода на определяемом и опорном пунктах увеличилась в три раза. Все остальные ошибки, не зависящие от способа наблюдений, понятно, практически не изменились.

Совершенно очевидно, что столь значительное снижение точности результатов нельзя объяснить тем, что при одиночных качаниях несколько уменьшена программа наблюдений (менее, чем в два раза). Наоборот, потому и уменьшили эту программу, что еще до начала дальних связей установили неравноценность методов и что одиночным качаниям присущи некоторые систематические ошибки, характер которых пока не вполне понятен.

Сопоставить результаты наших измерений с результатами, полученными по гравиметрам, пока не удалось, так как пункт Г при помощи гравиметров окончательно еще не определен.

X. Вторая дальняя связь

Снижение точности результатов связи с пунктом Г по сравнению с точностью измерений при выполнении внутригородских связей показало, что необходимо уделить большее внимание перевозке приборов. В самом деле, точность наблюдений на пункте практически не изменилась или даже возросла, как это следует из сопоставления данных табл. 5 и 10. Только ошибки σ и λ (табл. 11), существенно зависящие от условий перевозки, фактически определили точность связи.

Что касается выбора пункта для второй связи, то очевидно, что с точки зрения выяснения точности прибора лучше всего было провести повторную связь с тем же пунктом Г.

Было решено снова осуществить переезд на грузовой автомашине, но принять особые меры предосторожности и обеспечить наилучшие условия для приборов в пути. На этот раз оба прибора были установлены на ватные подушки.

Таблица 14

Условия наблюдений на пунктах O и Γ_2 (штатив 1)

Названия пунктов	Дата	Число наблюдений периодов	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Сокачание штатива (10^{-7} сек.)		
								прямое	обратное	среднее
Основные наблюдения Парные качания										
O_3	1960 г. 11—12 ноября	13	9,25	34°,84	748,44	3,43	5,620	46	46	46
O_4	4—8 декабря	16	9,26	34,83	738,06	3,18	5,620	34	35	34
Γ_2	Среднее		9,26	34,84	743,25	3,30	5,620	40	40	40
Разности	28—30 ноября	18	9,39	34,83	748,30	2,80	5,626	37	36	36
Γ_2-O			+0,13	-0,01	+5,05	-0,50	0,006	-3	-4	-4
Одиночные качания										
O_3	11—12 ноября	12	9,18	34,83	749,28	3,37	5,620	То же, что и при парных качаниях		
O_4	4—8 декабря	10	9,27	34,84	738,77	3,20	5,620			
Γ_2	Среднее		9,22	34,84	744,02	3,28	5,620			
Разности	27—30 ноября	15	9,22	34,83	749,08	2,81	5,626			
Γ_2-O			0,00	-0,01	+5,06	-0,47	0,006			

Наряду с улучшением условий перевозки следовало еще проанализировать, насколько удачно были подобраны маятники для прибора и заменить те, которые хуже перенесли переезд. В этом отношении вызывал подозрение маятник 89 (штатив 2), изменивший в процессе выполнения первой связи свой период на $34 \cdot 10^{-8}$ сек. Маятник этот был изъят из комплекта и заменен маятником 66.

В методике наблюдений особых изменений не было.
 Все данные об условиях наблюдений при второй связи приводятся в табл. 14 и 15.

Обобщенные (средние) результаты наблюдений на пунктах приведены в табл. 16, составленной совершенно аналогично табл. 10.

Т а б л и ц а 15

Условия наблюдения на пунктах (штатив 2)

Названия	Дата	Число на- блюдений периодов	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее В—3/8f, мм	Среднее 3/8f, мм	Суточный ход, сек.	Сокачение штатива (10 ⁻⁷ сек.)		
								пря- мое	обрат- ное	сред- нее
Основные наблюдения П а р н ы е к а ч а н и я										
O ₃	Ноябрь, 16—18	15	9,47	35°,14	758,78	3,73	5,620	44	42	43
O ₄	Декабрь, 4—8	18	9,45	35,08	736,72	3,66	5,620	57	51	54
	Среднее		9,46	35,11	747,75	3,70	5,620	50	46	48
Г ₂	Ноябрь, 28—30	17	9,36	35,09	747,77	3,24	5,626	39	38	38
Разности Г ₂ —O			-0,10	-0,02	+0,02	-0,46	+0,006	-11	-8	-10
О д и н о ч н ы е к а ч а н и я										
O ₃	Ноябрь, 16—18	12	9,40	35,14	757,24	3,73	5,620	То же, что и при парных качаниях		
O ₄	Декабрь, 4—8	13	9,27	35,09	739,63	3,70	5,620			
	Среднее		9,34	35,12	748,44	3,72	5,620			
Г ₂	Ноябрь, 27—30	14	9,23	35,10	749,08	3,27	5,626			
Разности Г ₂ —O			-0,11	-0,02	+0,64	-0,45	+0,006			

Подробные материалы всех наблюдений по основному методу на пунктах O₃, Г₂ и O₄ даны в табл. 7, 8, 9, 10, 11 и 12 приложения, а по методу одиночных качаний — в табл. 19, 20, 21, 22, 23 и 24 этого же приложения.

Обращает внимание хорошая сходимость как наблюдений по каждому прибору в отдельности, так и результатов, полученных по обоим приборам. Средняя квадратическая ошибка среднего результата уменьшилась против первой связи в три раза и сравнялась с ошибками, полученными при внутригородских связях.

В табл. 17, которая аналогична табл. 11, приведены все данные по оценке точности выполненной связи по внутренней сходимости измерений и данным исследования приборов.

Сопоставление с табл. 11 показывает, что хотя и теперь основными ошибками, определяющими точность результата, являются ошибки, зависящие от поведения маятников, но в данном случае все ошибки имеют уже одинаковый порядок величины.

Таким образом, улучшение условий перевозки, а также замена маятника вполне себя оправдали.

Т а б л и ц а 16

Средние значения периодов маятников и приращений периодов $\Gamma_2 - O$
(в 10^{-8} сек.)

Основные измерения

П а р н ы е к а ч а н и я

Названия пунктов	Периоды средних маятников (в 10^{-8} сек.)		
	штатив 1	штатив 2	среднее
O_3	5046 8740,6 $\pm 0,8$	5046 8983,6 $\pm 0,6$	5046 8862,1 $\pm 0,5$
O_4	8737,1 $\pm 0,9$	8985,1 $\pm 1,1$	8861,1 $\pm 0,7$
Среднее	5046 8738,8 $\pm 1,8$ $\pm 0,6$	5046 8984,4 $\pm 0,8$ $\pm 0,6$	5046 8861,5 $\pm 1,0$ $\pm 0,4$
Γ_2	5045 9259,1 $\pm 0,8$	5045 9502,8 $\pm 0,5$	5045 9381,0 $\pm 0,5$
Приращения периодов	-9479, 7 $\pm 2, 8$	-9481, 6 $\pm 2, 5$	-9480, 6 $\pm 1, 9$
Приращения силы тяжести <i>мгг</i>	+ 368,84 $\pm 0,11$	+ 368,92 $\pm 0,10$	+ 368,88 $\pm 0,08$

Приведем в табл. 18 и 19 результаты, полученные по методу одиночных качаний, и оценку их точности.

Снова замечаем, что снижение точности результатов при одиночных качаниях не соответствует объему наблюдений. При второй поездке в пункт Г объем наблюдений по обоим методам был почти одинаков, но точность их оказалась существенно различной. Если при наблюдениях по основному методу втрое повышается точность результата против первой связи, то по первому методу точность, по крайней мере вычисляемая формально, возросла незначительно.

При предшествующей дальней связи основным фактором, определившим величину ошибки результата, была относительно плохая сходимость приращений периодов по обоим маятникам второго штатива; во второй связи точность определена в основном относительно плохой сходимостью периодов маятников этого же штатива в пунктах O_3 и O_4 , а также расхождением приращений, полученных по обоим штативам. Обратим, однако, внимание на особенность поведения маятников второго штатива. Во второй связи так же, как и в первой, периоды обоих

маятников, хотя и изменились на значительную величину, но снова с разными знаками (маятник 66 уменьшил период на $29 \cdot 10^{-8}$ сек., а маятник 94 ровно на столько же увеличил). В первой связи маятник 89 увеличил период на $34 \cdot 10^{-8}$ сек., а маятник 94 уменьшил период на $13 \cdot 10^{-8}$.

Если при оценке точности поступать так, как обычно поступают, применяя метод Зверева и Парийского, т. е. учитывая ошибку σ не по изменениям периодов отдельных маятников, а по средним маятникам штативов, то получилась бы весьма высокая оценка результата.

Таблица 17

Оценка точности измерений по внутренней сходимости результатов и данным исследования приборов ($\Gamma_2 - O$)

Основные измерения

Парные качания

№ по пор.	Ошибки	Единицы измерений	Штативы		Среднее
			1	2	
1	c^2	10^{-16} сек ²	1,75	0,75	1,25
2	λ^2	"	1,80	1,80	1,80
3	$\frac{1}{4} (m_1^2 + m_2^2)$	"	0,36	0,39	0,38
4	m_s^2	"	0,64	0,25	0,44
5	$m_A^2 (\rho - \rho_0)^2$	"	0,05	0,00	0,02
6	$m_\alpha^2 (t - t_0)^2$	"	0,00	0,00	0,00
7	$2A^2 m_\rho^2$	"	1,02	1,02	1,02
8	$2a^2 m_t^2$	"	0,35	0,42	0,38
9	$2m_u^2$	"	0,68	0,68	0,68
10	$2m_a^2$	"	0,50	0,50	0,50
11	$2m_r^2$	"	0,50	0,50	0,50
	Сумма	10^{-16} сек. ²	7,65	6,31	6,97
	m_{Δ_s}	10^{-8} сек.	$\pm 2,77$	$\pm 2,51$	$\pm 1,87$
	m_{Δ_g}	мгл	$\pm 0,11$	$\pm 0,10$	$\pm 0,07$

В наших наблюдениях во всех случаях применен метод Вининг Мейнеса в той или иной модификации. Естественно было ожидать, что ошибки, связанные с влиянием сокачания, не будут иметь значения. Но на основании приведенных материалов можно утверждать, что и при применении метода Вининг Мейнеса, если пользоваться той его модификацией, которую называем методом одиночных качаний, ряд погрешностей, связанных с сокачанием штатива, влиянием вибраций, микросейсм и вообще с особенностями данного места наблюдений и его устойчивостью, учитывается столь же недостаточно, как и при применении метода Шмеля.

Любопытно, как компенсируют друг друга изменения периодов маятников на обоих штативах. Если вычислить период среднего маятника

всего четырехмаятникового комплекта, то в первой связи (по основному методу) он увеличился от O_1 до O_2 всего лишь на $1,2 \cdot 10^{-8}$ сек. Во второй связи он уменьшился на $1,0 \cdot 10^{-8}$ сек. По методу одиночных качаний отмечаем уменьшение периода среднего маятника комплекта в первой связи на $2 \cdot 10^{-8}$ сек. и во второй связи снова уменьшение на $6 \cdot 10^{-8}$ сек.

Т а б л и ц а 18

Средние значения периодов маятников и приращений периодов $\Gamma_2 - O$ (в 10^{-8} сек.)

Одиночные качания

Названия пунктов	Штативы						Общее среднее
	1			2			
	маятники						
	65	67	среднее	66	94	среднее	
O_3	5046 8735 ± 8	5046 8742 ± 1	5046 8738 ± 3	5046 9006 ± 4	5046 8971 ± 2	5046 8989 ± 2	5046 8864 ± 2
O_4	8731 ± 2	8727 ± 4	8729 ± 2	8977 ± 3	9000 ± 3	8988 ± 2	8858 ± 1
Среднее	8733 ± 2 ± 4	8734 ± 8 ± 2	8734 ± 4 ± 2	8992 ± 14 ± 2	8986 ± 14 ± 2	8988 ± 10 ± 1	8861 ± 5 ± 1
Γ_2	5045 9276 ± 4	5045 9262 ± 1	5045 9269 ± 2	5045 9507 ± 2	5045 9512 ± 1	5045 9510 ± 1	5045 9390 ± 1
Приращения периодов	- 9457	- 9472	- 9464 ± 15	- 9485	- 9474	- 9480 ± 19	- 9472 ± 17
Приращения силы тяжести, мгл	+367,9	+368,4	+368,2 $\pm 0,6$	+368,9	+368,5	+368,7 $\pm 0,8$	+368,4 $\pm 0,7$

Анализируя материалы первой связи, составляли разности средних периодов для обоих штативов по каждому пункту. Составив аналогичные разности по основному методу наблюдений для второй связи, имеем:

для пункта O_3 $+243,0 \cdot 10^{-8}$ сек.

„ „ Γ_2 $+243,7$ „

„ „ O_4 $+248,0$ „

Таким образом, по основным наблюдениям получен результат достаточно высокой точности.

Оценка точности измерений по внутренней сходимости результатов и данным исследования приборов ($\Gamma_2 - O$)

Одиночные качания

№ по пор.	Ошибки	Единицы измерений	Штативы		Среднее
			1	2	
1	σ^2	10^{-16} сек.	30,12	210,25	120,18
2	λ^2	"	56,25	30,25	43,25
3	λ^2	"	128,00	128,00	128,00
4	$\frac{1}{4} (m_1^2 + m_2^2)$	"	3,25	2,00	2,62
5 ¹	m_s^2	"	4,00	1,00	2,50
6	$m_A^2 (\sigma - \rho_0)^2$	"	0,09	0,00	0,04
7	$m_\alpha^2 (t - t_0)^2$	"	0,00	0,00	0,00
8	$2A^2 m_\rho^2$	"	1,02	1,02	1,02
9	$2a^2 m_t^2$	"	0,35	0,42	0,38
10	$2m_u^2$	"	0,68	0,68	0,68
11	$2m_a^2$	"	0,50	0,50	0,50
12	$2m_r^2$	"	0,50	0,50	0,50
	Сумма	10^{-16} сек. ²	224,76	376,62	299,67
	$m_{\Delta s}$	10^{-8} сек.	$\pm 14,99$	$\pm 19,36$	$\pm 17,31$
	$m_{\Delta g}$	мгЛ	$\pm 0,58$	$\pm 0,75$	$\pm 0,67$

XI. Заключение

Переходя к общим итогам выполненной работы, оговорим, что все последующие выводы будем делать на основании тех результатов, которые получены по основному методу наблюдений (парных качаний). Чтобы не возвращаться к вопросу об одиночных качаниях, приведем две таблицы, которые достаточно убедительно показывают преимущества парных качаний перед одиночными.

В табл. 20 даются для каждого пункта средние квадратические ошибки определения периода из одной часовой серии наблюдений по каждому штативу и пункту наблюдений, а также соответствующие средние квадратические величины по всему материалу.

Разумеется, в этой таблице речь идет не об определении периода пленке, а о точности периода, исправленного всеми поправками. Следует учесть, что при основном методе наблюдений сразу получаем период среднего маятника штатива; точность периода этого маятника, полученного при одиночных качаниях, составит $\frac{\pm 9,0}{\sqrt{2}} = \pm 6,4 \cdot 10^{-8}$ сек., но все же эта точность остается вдвое меньшей, чем при определении по основному методу наблюдений; кроме того, для получения среднего периода

такой пониженной точности необходимо затратить вдвое больше времени и труда.

Т а б л и ц а 20

Ошибка определения периода из часовой серии наблюдений (10^{-8} сек.)

Название пункта	Основной метод			Одиночные качания		
	штативы		среднее	штативы		среднее
	1	2		1	2	
O ₁	±4,3	±3,8	±4,0	±11,4	±9,8	±10,6
Г ₁	3,1	3,2	3,2	6,1	6,7	6,4
O ₂	3,4	4,8	4,1	14,6	8,0	11,3
O ₃	2,7	2,2	2,4	13,5	7,6	10,6
Г ₂	3,1	2,2	2,6	5,7	5,1	5,4
O ₄	3,7	4,4	4,0	6,1	7,5	6,8
Средние квадратические значения	±3,4	±3,6	±3,5	±10,2	±7,6	±9,0

Сопоставим средние периоды средних маятников обоих штативов, полученные по обоим методам на всех пунктах (табл. 21).

Т а б л и ц а 21

Сопоставление средних периодов, определенных методами парных и одиночных качаний (в 10^{-8} сек.)

Пункты	Штатив 1			Штатив 2		
	парные качания	одиночные качания	разность	парные качания	одиночные качания	разность
O ₁	5046 8758	5046 8758	0	5046 8943	5046 8951	—8
Г ₁	9263	9268	— 5	9468	9470	—2
O ₂	8744	8744	0	8959	8962	—3
O ₃	8741	8738	+ 3	8984	8989	—5
Г ₂	9259	9269	—10	9503	9510	—7
O ₄	8737	8729	+ 8	8985	8988	—3
Среднее арифметическое			— 1			—5

Систематический характер расхождения по штативу 2 не вызывает сомнений.

Всего изложенного достаточно, чтобы обосновать наше решение — получать основные результаты методом парных качаний, оставляя метод одиночных качаний только для контроля разностей периодов маятников, которые необходимо знать со сравнительно небольшой точностью для учета поправки за неизохронность.

Общие результаты испытания маятникового прибора, выполненного в 1960 г., приводятся в табл. 22.

Видим, что точность, полученная при внутригородских связях, оказалась весьма близкой к точности связей, выполненных при помощи гравиметров. Разности гравиметровых и маятниковых измерений лежат в пределах случайных ошибок, и средняя квадратическая величина этих разностей ($\pm 0,10$ мгл) даже несколько меньше ожидаемой величины ($\pm 0,13$ мгл). Это свидетельствует о том, что при переездах небольшой дальности можно получить высокую точность, применяя только один маятниковый штатив. Но, очевидно, что в любых условиях работать с одним штативом нежелательно и необходимо иметь комплект штативов (не менее трех-четырех).

Первая перевозка приборов в пункт Г вызвала некоторое снижение точности, но принятие специальных мер позволило вновь повысить точность до прежнего уровня.

Таблица 22

Результаты испытания высокоточного маятникового прибора (ВМП)

Дата	Названия связей	Приращение силы тяжести (мгл)				Разности, (мгл)	
		по ВМП			по гравиметрам	по штативам	по гравиметрам и ВМП
		штатив 1	штатив 2	среднее			
А. Внутригородские связи							
1960 г.							
Январь	А—О	— 43,44 ± 0,11	—	—	—43,45 ± 0,08		+0,01
Март	А—О	— 43,55 ± 0,05			—43,45 ± 0,08		—0,10
Март	Б—О	— 12,60 ± 0,05			—12,62 ± 0,07		+0,02
Апрель	В—О	— 3,42 ± 0,16	—	—	— 3,60 ± 0,08		+0,18
	Средняя квадратическая	± 0,10			± 0,08		± 0,10
Б. Дальние связи							
Сентябрь, 1960	Г ₁ —О	+369,15 ± 0,30	+368,97 ± 0,34	+369,06 ± 0,23		+0,18	
Ноябрь, 1960	Г ₂ —О	+368,84 ± 0,11	+368,92 ± 0,10	+368,88 ± 0,08		—0,08	
	Среднее	+369,00 ± 0,16	+368,94 ± 0,18	+368,97 ± 0,12 ± 0,06		+0,06	

Рассматривая результаты связей с пунктом Г, замечаем, что сходимость определений по разным штативам и связям выше, чем можно ожидать по внутренней сходимости измерений. Средняя квадратическая ошибка приращения силы тяжести, полученного из одной штативосвязи, но вычисленного по внутренней сходимости измерений каждым штативом, составляет $\pm 0,25$ мгл. Если же считать результаты всех четырех штативосвязей независимыми и по их сходимости оценить точность одной штативосвязи, то получим значение, равное $\pm 0,13$ мгл. Средняя квадратическая ошибка общего среднего результата связей с пунктом Г, вычисленная по внутренней сходимости, равна $\pm 0,12$ мгл, а из сходимости отдельных штативосвязей — $\pm 0,06$ мгл. Средние результаты пер-

вой связи отличаются от средних результатов по второй связи всего лишь на 0,18 мгл, что заметно меньше, чем можно было ожидать по внутренней сходимости. Все это, по-видимому, объясняется тем, что предложенная методика оценки точности дает несколько преувеличенную ошибку. Но лучше стремиться к тому, чтобы не занижить эту ошибку, считая последнее особенно опасным. Возможно, что в формуле (14) коэффициенты 2 надо заменить коэффициентами $3/2$, что следует вовсе исключить ошибку λ и т. д. Но имея в виду влияния систематических ошибок, предпочтительно пока пользоваться приведенной формулой, а вопрос о ее пересмотре поставить тогда, когда накопится больший материал для суждения о действительной величине систематических ошибок новой аппаратуры.

Для строгой оценки точности так же, как для суждения о всех возможностях, предоставляемых новым прибором, накоплено еще мало материалов. Но ряд важных выводов можно уже делать с полной определенностью. Переходим к этим выводам.

1. Маятниковый метод измерения силы тяжести обнаруживает значительные резервы точности, которые могут быть вскрыты и реализованы при помощи современной измерительной и электронной техники.

2. Несмотря на то, что первый комплект аппаратуры, созданный гравиметрической лабораторией ЦНИИГАиК при помощи мастерских института, имеет еще много недостатков, он уже позволяет получать результаты производственной ценности, обеспечивая точность связей порядка $\pm 0,2$ мгл.

3. Наряду с увеличением точности (по сравнению с приборами прежних конструкций) во много раз уменьшается объем работ и время, затрачиваемое на определение пункта.

4. Одним из основных недостатков прибора является необходимость измерения плотности воздуха для введения барометрической поправки, даже в равнинных районах это осложняет работу. В горных же районах это обстоятельство может привести к заметным систематическим погрешностям.

5. Другой недостаток прибора — относительно большая трудоемкость обработки материалов; приходится затрачивать больше времени на камеральные работы, чем на сами наблюдения.

6. Кроме того, к числу недостатков можно отнести и то, что комплект прибора состоит только из двух штативов и четырех маятников. Обеспечение результатов гарантированной точности требует расширения комплекта до трех-четырех штативов и шести-восьми маятников.

7. Точность измерений весьма существенно зависит от качества кварцевых хронометров, используемых в работе. Необходима разработка транспортабельных экономичных кварцевых хронометров со стабильностью хода порядка $\pm 0,5 \cdot 10^{-8}$.

8. Для дальнейшего повышения надежности результатов измерений необходимо разработать такую конструкцию прибора, которая позволила бы выполнять наблюдения в постоянном вакууме, желательного порядка не ниже $1 \cdot 10^{-2}$ мм. Современные технические возможности позволяют это осуществить.

9. Необходимо разработать фотоэлектрический метод регистрации периодов колебания маятников, что во много раз уменьшит объем камеральных работ, сократит продолжительность наблюдений на пункте и, в свою очередь, будет способствовать повышению точности измерений.

10. В связи с резким повышением точности маятниковых измерений необходимо разработать новые конструкции маятников, которые будут больше соответствовать современной технике и методике работ.

11. Наш опыт, так же как и опыт высокоточных маятниковых измерений за рубежом, свидетельствует о чрезвычайно большом значении надлежащей перевозке приборов. Гравиметрические экспедиции, выполняющие высокоточные измерения, должны иметь специально приспособленный транспорт (автомобили, самолеты и др.)

12. Программу наблюдений с приборами устанавливают в зависимости от тех конкретных задач, решение которых преследуется при постановке работы. Но во всех случаях должно быть общим правилом, что наблюдения любым комплектом приборов должны быть через некоторое время и не менее одного раза повторены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сливин Ю. А., Хейфец М. Е. Метод точного определения периодов колебания маятников. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 139, М., Геодиздат, 1960.
2. Геренбург Л. А., Сливин Ю. А., Хейфец М. Е. Экспедиционный кварцевый хронометр гравиметрической лаборатории ЦНИИГАиК. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 139. М., Геодиздат, 1960.
3. Хейфец М. Е. Кварцево-металлические маятники. Тезисы докладов XI Генеральной ассамблеи международного геодезического и геофизического Союза. М., изд. Академии наук СССР, 1957.
4. Хейфец М. Е. Работы с кварцевыми маятниками ЦНИИГАиК. Сборник рефератов. Вып. 4. М., 1955.
5. Heifetz M. E. A high precision pendulum apparatus. Bulletin géodésique, № 60, Paris, 1961.
6. Шокин П. Ф. Графики поправок за приливные изменения силы тяжести на 1960 и 1961 годы. М., изд. МИИГАиК, 1959.

M. E. Heifetz

A HIGH PRECISION PENDULUM APPARATUS DESIGNED BY THE GRAVIMETRICAL LABORATORY OF TSNIIGAIK

Abstract

The test model of a new pendulum apparatus designed by the Gravimetical Laboratory of the Central Scientific Research Institute of Geodesy, Aerial Surveying and Cartography, and built at the Experimental workshop of Institute is described. The apparatus is intended for gravity measurements at stations of the fundamental gravimetric net of the USSR, and for laboratory investigations of the possibility to considerably rise the accuracy of pendulum measurements.

The apparatus is based on the following principles:

- 1) It is provided with quartz-and-metal pendulums designed by the Gravimetical Laboratory in 1949—1952, which pendulums are distinguished by their high stability and little sensitivity to changes of temperature and of the Earth's magnetic field.
- 2) To obtain the greatest possible number of independent results with the least possible number of pendulums, two two-pendulum cases were constructed.
- 3) For eliminating the residual effect of temperature upon the pendulums and, particularly, the after-effect of temperature and the dynamic effects, the two cases were thermostated so that the temperature inside the case remains unchanged during the observation as well as during the transport of the apparatus.
- 4) In order to reduce to a minimum one of the most important sources of errors inherent in the pendulum method, namely, the displacements of the knife on the agate plate, the pendulums are transported in their cases while a centering device makes the knives return to their respective positions on the plates at every clamping of the apparatus.
- 5) Oscillations of the pendulums are recorded on photographic film. A special construction of the registering device makes it possible to determine the oscillation period with an accuracy of 1×10^{-8} sec. after an hour of observation. The amplitude is determined from its registration on the film with an accuracy of 2—3".
- 6) The two real and one fictitious (combined) pendulums (the latter being obtained after the method of Vening Meinesz) are simultaneously registered on the photo film. This simplifies the treatment of observations and provides data for interesting comparison.
- 7) A special device enables a wide range humidity control inside the case.
- 8) A highly sensitive hygrometer for measuring humidity is provided; the said hygrometer is able to conserve its constants unchanged during a long period of time.

9) Levelling of the agate plates is secured by means of a specially designed' autocol-
limation level with an artificial horizon, and does not necessitate the removing of the
pendulums from their respective places.

10) The temperature control inside the case is secured by means of two thermo-
meters — a mercury thermometer, and an electric resistance thermometer.

11) There is provided a special sound alarm device to inform the operator of eventual
disturbance of the temperature regime of the pendulums.

12) The set of accessories includes a portable crystal clock with a rate of an order of
 1×10^{-8} , which was built at the abovementioned Laboratory.

13) The apparatus is operated from a special control panel.

After the first such apparatus had been built its testing was undertaken in 1960. For
this purpose three stations A, B and C chosen within the boundaries of the City of Moscow
were gravimetrically connected with a control point O by means of the apparatus and
then by means of gravimeters. The connection between A and O was repeated. Then a pen-
dulum connection with a remote station D was established twice by means of the two appa-
ratuses. The resulting data derived from all these connections are given in the table 22.

In the table, under the first horizontal line the mean square values of the mean square
errors of the corresponding connections are given. The errors of the mean values of long-
distance connections shown under the second horizontal line were calculated from internal
agreement of the obtained results. Two errors were calculated for the total mean value.
The first error ($\pm 0,12$) was calculated on the base of internal agreement of measurements
made with each individual apparatus separately; the second error was determined using
deviations of single measurements from a total mean value, the measurements being made
with each apparatus during each set of observation separately.

It has not yet been possible to undertake a comparison between long-distance connec-
tions established with the apparatus and the corresponding gravimeter measurements.

The further improvement of the apparatus must proceed in the direction of designing
a vacuum case for it, and of elaborating photo electrical registration of pendulum oscilla-
tions.

Приложение Таблица 1
Результаты основных наблюдений на пункте O_1 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10^{-8} сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г., сентябрь							
1	17	23 ^h 00 ^m	9,37	34°,79	752,94	4,05	5,620	5046 8761
2	18	2 48	9,35	78	53,14	4,08		763
3	18	12 40	9,50	79	53,81	4,16		764
4	18	16 30	9,44	79	53,31	4,16		761
5	18	18 55	9,46	79	53,48	4,16		765
6	18	22 05	9,36	79	53,42	4,20		761
7	18	23 30	9,25	79	53,52	4,20		755
8	19	1 50	9,31	78	53,40	4,24		758
9	19	3 10	9,23	78	53,40	4,26		748
10	19	4 45	9,17	78	53,35	4,24		757
11	19	6 15	9,06	78	53,36	4,27		756
12	19	7 25	9,29	78	53,19	4,26		758
13	19	8 37	9,15	78	53,18	4,26		762
14	19	10 40	9,34	79	53,08	4,29		756
15	19	12 07	9,44	80	52,62	4,28		755
16	19	13 20	9,08	82	52,44	4,31		754
17	19	16 25	8,95	85	51,32	4,37		758
18	19	22 05	9,37	82	51,28	4,37		758
19	20	11 00	9,42	79	51,96	4,37		752
Среднее			9,29	34,79	752,96	4,24	5,620	5046 8758,0

Средняя квадратическая ошибка среднего периода $M = \pm 1,0$
 Средняя квадратическая ошибка одного измерения $m = \pm 4,3$

Таблица 2

Результаты основных наблюдений на пункте O_1 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10^{-8} сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г., сентябрь							
1	17	23 ^h 00 ^m	9,70	34°,52	753,35	3,63	5,620	5046 8938
2	18	2 48	9,26	54	53,51	3,70		940
3	18	10 00	9,71	52	54,33	3,72		944
4	18	12 40	9,34	54	54,21	3,76		941
5	18	16 30	9,59	54	53,72	3,76		939
6	18	18 55	9,49	54	53,92	3,75		936
7	18	22 05	9,48	58	53,80	3,82		938
8	18	23 30	9,74	58	53,88	3,82		936
9	19	1 50	9,67	58	53,76	3,86		938
10	19	3 10	9,38	60	53,78	3,87		933
11	19	4 45	9,57	60	53,71	3,88		939
12	19	6 15	9,08	60	53,76	3,88		941
13	19	7 25	9,36	60	53,58	3,88		944
14	19	8 37	9,32	62	53,58	3,88		942
15	19	10 40	9,41	54	53,50	3,87		942
16	19	12 07	9,70	57	53,04	3,88		936
17	19	13 20	9,39	63	52,82	3,92		942
18	19	16 25	9,31	67	51,74	4,00		951
19	19	22 05	9,47	65	51,66	4,00		940
20	20	11 10	9,59	58	52,38	3,96		942
Среднее			9,48	34,58	753,40	3,84	5,620	5046 8940,1

Редукция к штативу 1 $+ 3,2$
 Значение окончательного периода 5046 8943,3

Таблица 3

Результаты основных наблюдений на пункте Г₁ по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10 ⁻⁸ сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г., сентябрь							
1	28	13 ^h 00 ^m	9,34	34°,89	751,64	4,18	5,620	5045 9264
2	28	16 50	9,48	89	51,42	4,18		267
3	28	21 50	9,74	88	51,34	4,18		260
4	29	10 55	9,34	90	51,92	4,18		263
5	29	12 05	9,26	91	52,24	4,15		264
6	29	13 25	9,39	91	52,35	4,18		262
7	29	15 15	9,31	91	52,31	4,17		262
8	29	16 30	9,19	91	52,34	4,14		260
9	29	17 40	9,32	89	52,55	4,12		260
10	30	10 30	9,53	88	54,58	4,00		270
11	30	11 45	9,44	88	54,98	4,00		268
12	30	12 55	9,21	89	55,50	3,97		266
13	30	14 10	9,33	89	56,12	3,96		266
14	30	15 20	9,47	89	56,52	3,94		264
15	30	16 40	9,14	89	57,10	3,94		264
16	30	17 50	9,52	89	57,53	3,96		264
17	30	19 05	9,25	89	58,00	3,98		264
18	30	21 35	9,49	89	58,84	3,96		264
19	Октябрь, 1	10 30	9,56	89	61,93	3,90		271
20	1	21 00	9,36	88	64,06	3,79		264
Среднее:			9,38	34,89	755,16	4,04	5,620	5045 9264,4 $M = \pm 0,7$ $m = \pm 3,1$ - 1,0

Редукция к основному столбу
Окончательное значение периода

5045 9264,4
 $M = \pm 0,7$
 $m = \pm 3,1$
- 1,0
5045 9263,4

Таблица 4

Результаты основных наблюдений на пункте Г₁ по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10 ⁻⁸ сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г., сентябрь							
1	28	13 ^h 00 ^m	9,31	34°,80	751,68	4,13	5,620	5045 9466
2	28	16 50	44	82	1,48	12		466
3	29	21 50	70	82	1,40	13		467
4	29	10 55	64	82	2,00	10		468
5	29	12 05	46	82	2,30	09		476
6	29	13 25	59	82	2,45	08		469
7	29	15 15	50	82	2,38	10		466
8	29	16 30	59	83	2,38	10		472
9	29	17 40	51	83	2,62	05		462
10	30	10 30	42	78	4,63	3,95		469
11	30	11 45	56	80	5,04	94		470
12	30	12 55	55	80	5,54	93		470
13	30	14 10	52	80	6,17	90		470
14	30	15 20	56	80	6,56	89		468
15	30	16 40	36	82	7,13	91		468
16	30	17 50	40	82	7,56	94		468
17	30	19 05	41	82	8,04	94		466
18	30	21 35	52	82	8,90	91		468
19	Октябрь, 1	10 30	42	82	61,97	86	474	
20	1	21 00	25	82	4,07	79	472	
Среднее:			9,49	34,81	755,22	3,99	5,620	5045 9469,1 $M = \pm 0,7$ $m = \pm 3,2$ - 1,0

Редукция к основному столбу
Окончательное значение периода

5045 9469,1
 $M = \pm 0,7$
 $m = \pm 3,2$
- 1,0
5045 9468,1

Таблица 5

Результаты основных наблюдений на пункте O_2 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10^{-8} сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г октябрь							
1	10	16 ^h 25 ^m	9,47	34°,80	742,84	3,60	5,620	5046 8750
2	11	12 20	9,38	79	42,13	64		747
3	11	14 50	9,59	80	41,95	69		750
4	11	16 00	9,79	82	42,08	72		748
5	12	9 50	9,28	99	38,81	84		742
6	12	11 10	9,35	35,01	38,02	89		745
7	12	12 35	9,26	03	37,35	92		743
8	12	13 45	9,42	03	36,75	94		744
9	12	14 55	9,14	03	36,46	94		743
10	12	16 10	8,94	04	36,44	96		740
11	13	9 45	9,40	34,82	40,45	89		744
12	13	12 20	9,44	83	39,36	94		740
13	14	9 25	9,02	79	40,62	94		740
14	14	12 15	9,45	83	41,59	96		742
15	15	9 00	9,42	80	45,12	96		744
	Среднее:		9,36	34,89	740,00	3,86	5,620	5046 8744,1 $M = \pm 0,8$ $m = \pm 3,4$

Таблица 6

Результаты основных наблюдений на пункте O_2 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10^{-8} сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г. октябрь							
1	8	13 ^h 05 ^m	9,52	34°,60	747,88	3,70	5,620	5046 8962
2	10	16 25	34	56	42,93	49		954
3	11	12 20	20	67	42,16	60		949
4	11	14 50	59	71	42,01	62		953
5	11	16 00	59	71	42,16	64		950
6	12	9 50	26	72	39,06	73		953
7	12	11 10	18	74	38,14	76		952
8	12	12 35	16	77	37,48	79		961
9	12	13 45	40	78	36,86	82		958
10	12	14 55	50	82	36,56	84		962
11	12	16 10	21	82	36,54	86		957
12	13	9 45	44	58	40,48	83		960
13	13	15 06	27	67	37,62	92		954
14	14	11 55	17	61	41,46	82		957
15	14	15 45	49	63	42,00	85		962
16	16	11 10	46	56	52,19	50		956
	Среднее:		9,36	34,68	740,97	3,74	5,620	5046 8956,2 $M = \pm 1,1$ $m = \pm 4,8$ + 3,2 5046 8959,4

Редукция к штативу 1
Окончательное значение периода

Таблица 7

Результаты основных наблюдений на пункте O_3 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10^{-8} сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г. ноябрь							
1	11	9 ^h 50 ^m	9,51	34°,79	746,53	3,32	5,620	5046 8740
2	11	13 50	8,86	82	45,78	34		743
3	11	17 30	9,51	82	45,87	37		745
4	11	21 45	9,16	85	46,85	46		740
5	11	22 56	9,12	85	47,26	45		740
6	12	0 16	9,11	86	47,55	48		738
7	12	1 36	9,32	86	47,71	51		739
8	12	3 00	9,39	85	48,05	49		743
9	12	4 25	9,34	85	48,33	48		737
10	12	5 43	9,15	85	48,58	48		738
11	12	10 53	9,23	84	51,14	40		742
12	12	15 23	9,34	85	52,30	37		744
13	12	19 30	9,23	86	53,80	46		739
	Среднее:		9,25	34,84	748,44	3,43	5,620	5046 8740,6 $M = \pm 0,8$ $m = \pm 2,7$

Таблица 8

Результаты основных наблюдений на пункте O_3 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10^{-8} сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г. ноябрь							
1	16	17 ^h 40 ^m	9,42	35°,12	751,46	3,70	5,620	5046 8984
2	17	9 50	9,30	13	58,24	84		8984
3	17	13 36	9,58	13	58,84	77		8982
4	17	15 55	9,44	13	59,30	74		8985
5	17	17 05	9,51	13	59,42	72		8983
6	17	18 05	9,41	13	59,82	73		8984
7	17	19 15	9,50	13	59,98	72		8986
8	17	20 26	9,32	13	60,08	72		8983
9	17	21 36	9,38	13	60,12	72		8987
10	17	22 46	9,50	13	59,84	72		8985
11	18	0 02	9,62	13	59,93	72		8984
12	18	1 20	9,53	13	59,84	73		8982
13	18	8 40	9,50	13	59,19	70		8986
14	18	12 15	9,34	18	58,44	68		8978
15	18	16 00	9,73	18	57,23	67		8981
	Среднее:		9,47	35,14	758,78	3,73	5,620	5046 8983,6 $M = \pm 0,6$ $m = \pm 2,2$

Таблица 9

Результаты основных наблюдений на пункте Г₂ по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее В-3/8f, мм	Среднее 3/8f, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10 ⁻⁸ сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г. ноябрь							
1	28	0 ^h 50 ^m	9,24	34°,86	747,54	2,92	5,626	5045 9258
2	28	10 50	9,40	83	47,96	2,92		9257
3	28	15 38	9,55	83	47,94	2,90		9262
4	28	16 55	9,41	82	48,03	2,88		9258
5	28	20 50	9,50	85	48,18	2,88		9265
6	28	23 30	9,38	84	48,12	2,87		9258
7	29	9 20	9,42	80	47,20	2,76		9261
8	29	10 32	9,45	82	47,53	2,74		9262
9	29	11 45	9,36	85	47,58	2,76		9258
10	29	13 37	9,39	82	47,62	2,78		9261
11	29	14 58	9,27	83	47,72	2,80		9256
12	29	17 25	9,30	83	47,58	2,80		9256
13	29	18 35	9,47	83	47,60	2,80		9262
14	29	19 55	9,39	83	47,47	2,82		9259
15	29	22 45	9,48	83	47,29	2,82		9257
16	30	9 00	9,36	79	50,34	2,60		9260
17	30	12 04	9,24	82	51,20	2,66		9263
18	30	16 40	9,41	82	52,44	2,76		9269
Среднее:			9,39	34,83	748,30	2,80	5,626	5045 9260,1 M = ± 0,8 m = ± 3,1 — 1,0 5045 9259,1

Редукция к основному столбу
Окончательное значение периода

Таблица 10

Результаты основных наблюдений на пункте Г₂ по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее В-3/8f, мм	Среднее 3/8f, мм	Суточный ход, сек.	Периоды среднего маятника (10 ⁻⁸ сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г. ноябрь							
1	28	0 ^h 50 ^m	9,19	35°,13	747,10	3,34	5,626	5045 9503,0
2	28	10 50	9,33	09	47,52	3,36		9501,2
3	28	15 38	9,05	09	47,50	3,34		9502,8
4	28	16 55	9,19	09	47,58	3,34		9500,6
5	28	20 50	9,08	11	47,74	3,32		9504,8
6	28	23 30	9,03	09	47,69	3,30		9500,4
7	29	9 20	9,52	07	46,78	3,17		9502,2
8	29	10 32	9,58	07	47,10	3,18		9503,9
9	29	11 45	9,37	06	47,16	3,20		9503,4
10	29	13 37	9,37	08	47,18	3,21		9506,2
11	29	14 58	9,39	07	47,30	3,22		9504,8
12	29	16 15	9,48	09	47,34	3,23		9506,6
13	29	17 25	9,41	09	47,15	3,24		9501,9
14	29	18 35	9,56	07	47,18	3,24		9502,4
15	29	22 42	9,44	09	46,92	3,18		9504,9
16	30	12 04	9,56	11	50,77	3,08		9508,4
17	30	16 40	9,51	11	52,04	3,16		9506,6
Среднее:			9,36	35,09	747,77	3,24	5,626	5045 9503,8 M = ± 0,5 m = ± 2,2 — 1,0 5045 9502,8

Редукция к основному столбу
Окончательное значение периода

Таблица 11

Результаты основных наблюдений на пункте O_4 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный хол., сек.	Периоды среднего маятника (10^{-8} сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г. декабрь							
1	4	12 ^h 00 ^m	9,21	34°,83	736,90	3,16	5,620	5046 8739,8
2	5	12 20	9,16	89	12,17	16		735,9
3	5	17 15	8,90	85	29,24	20		733,2
4	5	18 35	9,28	86	29,96	22		736,6
5	5	19 50	9,30	85	30,64	22		737,2
6	5	21 10	9,34	84	31,51	17		735,0
7	6	10 20	9,40	78	38,80	04		742,5
8	6	12 00	9,10	78	39,27	05		728,5
9	6	13 35	9,16	79	39,82	03		742,9
10	6	14 50	9,17	79	40,32	04		740,4
11	6	16 00	9,27	80	40,82	07		739,6
12	7	9 20	9,33	84	44,20	32		736,8
13	7	12 00	9,26	86	44,72	30		737,0
14	7	15 50	9,59	82	45,34	24		739,6
15	7	19 30	9,44	83	45,89	28		736,4
16	8	14 40	9,31	83	46,31	30		732,8
Среднее:			9,26	34 ,83	738,06	3,18	5,620	5046 8737,1 $M = \pm 0,9$ $m = \pm 3,7$

Таблица 12

Результаты основных наблюдений на пункте O_4 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный хол., сек.	Периоды среднего маятника (10^{-8} сек.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1960 г. декабрь							
1	4	12 ^h 00 ^m	9,26	35°,05	736,44	3,60	5,620	5046 8984,1
2	4	16 35	9,38	09	32,50	56		985,0
3	5	12 20	9,21	12	24,68	66		978,7
4	5	15 45	9,35	12	27,26	71		976,0
5	5	17 15	9,45	11	28,71	74		981,0
6	5	18 35	9,58	10	29,44	74		980,4
7	5	19 50	9,41	11	30,14	72		974,6
8	5	21 10	9,31	10	31,00	68		978,2
9	6	10 20	9,61	04	38,34	52		989,8
10	6	12 00	9,49	04	38,80	52		986,6
11	6	13 35	9,36	04	39,33	52		985,2
12	6	14 50	9,80	04	39,84	52		986,6
13	6	16 00	9,51	04	40,36	53		987,8
14	7	9 20	9,47	10	43,72	80		977,8
15	7	12 00	9,31	11	44,24	78		977,8
16	7	15 50	9,66	07	44,86	72		983,0
17	7	19 30	9,33	09	45,42	76		981,9
18	8	14 40	9,65	09	45,83	78		979,6
Среднее:			9,45	35 ,08	736,72	3,66	5,620	5046 8981,9 $M = \pm 1,1$ $m = \pm 4,4$ + 3,2 5046 8985,1

Редукция к штативу 1
Окончательное значение периода

Таблица 13

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_1 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10^{-8} сек.)		
								65	67	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. сентябрь									
1	18	4 ^h 02 ^m	9,02	34°,78	753,24	4,10	5,620	5046 8768		
2	18	8 40	9,26	79	53,93	10		8733		
3	18	11 20	8,96	79	53,94	14			5046 8772	
4	19	14 44	9,22	85	51,98	34		8763		
5	19	19 10	9,33	82	51,39	40			8762	
6	19	20 45	9,44	82	51,48	37			8759	
7	20	8 35	9,49	79	51,50	37		8752		
8	20	9 55	9,22	79	51,86	38		8740		
9	20	12 25	9,02	79	52,22	33			8762	
Среднее:			9,22	34 ,80	752,39	4,28	5,620	5046 8751	5046 8764	5046 8758
								$M = \pm 7$	± 3	± 4
								$m = \pm 15$	± 6	± 8

Таблица 14

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_1 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10^{-8} сек.)		
								89	94	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. сентябрь									
1	17	21 ^h 40 ^m	9,12	34°,52	753,28	3,61	5,620	5046 8873		
2	18	0 15	9,53	54	53,29	67			5046 9012	
3	18	1 22	9,44	54	53,46	68			9008	
4	18	4 02	9,26	54	53,63	70		8874		
5	18	8 40	9,31	52	54,32	72		8888		
6	18	11 20	9,36	54	54,30	74			9024	
7	19	14 44	9,45	65	52,29	96		8882		
8	19	19 10	9,47	65	51,80	4,00			9004	
9	19	20 45	9,26	65	51,82	00			9009	
10	20	8 35	9,36	60	51,88	01		8902		
11	20	9 55	9,42	58	52,26	3,98		8892		
12	20	12 25	8,98	58	52,64	93			9010	
Среднее:			9,41	34 ,58	752,91	3,83	5,620	5046 8885	5046 9011	5046 8948
								$M = \pm 4$	± 3	± 2
								$m = \pm 12$	± 7	± 7

Гедукция к штативу 1

Окончательные значения периодов

+ 3

5046 8888

+ 3

9014

+ 3

8951

Таблица 15

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте Г₁ по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее В-3/8f, мм	Среднее 3/8f, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10 ⁻⁸ сек.)		
								65	67	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1960 г. сентябрь										
1	28	11 ^h 45 ^m	8,76	34°,90	751,75	4,18	5,620		5045 9272	
2	28	14 10	9,26	89	51,44	18		5045 9267		
3	28	15 30	8,95	91	51,36	19		9265		
4	28	18 05	9,37	89	51,45	18			9262	
5	28	19 40	9,10	89	51,32	20			9276	
6	29	9 40	9,04	89	51,66	18		9252		
7	30	20 15	9,14	89	58,42	3,95		9264		
октябрь										
8	1	8 00	9,25	88	61,02	90			9274	
9	1	9 15	9,16	88	61,48	90			9273	
10	1	11 50	9,14	89	62,26	90		9272		
11	1	19 40	9,07	88	63,84	80		9271		
12	2	10 10	9,41	89	65,43	81			9274	
Среднее:			9,14	34,89	756,79	4,03	5,620	5045 9265	9272	9268
								M = ± 3	± 2	± 2
								m = ± 7	± 5	± 4
								— 1	— 1	— 1
Редукция к основному столбу								5045 9264	9271	9268
Окончательные значения периодов										

Таблица 16

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте Г₁ по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее В-3/8f, мм	Среднее 3/8f, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10 ⁻⁸ сек.)		
								89	94	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1960 г. сентябрь										
1	28	11 ^h 45 ^m	9,61	34°,80	751,80	4,12	5,620		5045 9492	
2	28	14 10	9,52	80	51,50	13		5045 9446		
3	28	15 30	9,68	82	51,44	13		9446		
4	28	18 05	9,50	82	51,50	13			9498	
5	29	19 40	9,34	82	51,38	13			9497	
6	30	9 40	9,31	80	51,73	10		9457		
7	30	20 15	9,18	82	58,44	3,92		9434		
октябрь										
8	1	8 00	9,63	80	61,06	88			9494	
9	1	9 15	9,57	80	61,51	87			9494	
10	1	11 50	9,39	82	62,26	90		9443		
11	1	19 40	9,06	82	63,83	81		9458		
12	2	10 10	9,39	83	65,45	80			9491	
Среднее:			9,43	34,81	756,83	3,99	5,620	5045 9447	9494	9471
								M = ± 2	± 1	± 2
								m = ± 9	± 3	± 5
								— 1	— 1	— 1
Редукция к основному столбу								5045 9446	9493	9470
Окончательные значения периодов										

Таблица 17

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_2 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, м.м.	Средняя температура	Среднее $V-\frac{3}{8}f$, м.м.	Среднее $\frac{3}{8}f$, м.м.	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10^{-8} сек.)		
								65	67	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. октябрь									
1	10	15 ^h 10 ^m	9,42	34°,80	742,92	3,57	5,620		5046 8755	
2	11	9 47	8,96	94	42,17	65		5046 8772		
3	11	11 10	9,19	84	42,28	64		8760		
4	11	13 40	9,54	79	41,90	68			8752	
5	13	11 00	9,46	82	40,06	92		8732		
6	13	13 50	9,72	86	37,83	95			8743	
7	13	15 06	8,78	86	37,52	4,00			8728	
8	14	10 40	9,05	82	41,08	3,95		8728		
9	14	11 55	9,18	83	41,34	96		8735		
10	14	14 30	9,39	85	41,84	97			8741	
11	14	15 45	9,40	85	41,87	99			8743	
12	15	11 25	9,22	82	45,51	96		8740		
Среднее:			9,28	34 ,84	741,36	3,85	5,620	5046 8744 $M = \pm 7$ $m = \pm 18$	8744 ± 4 ± 10	8744 ± 4 ± 10

Таблица 18

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_2 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, м.м.	Средняя температура	Среднее $V-\frac{3}{8}f$, м.м.	Среднее $\frac{3}{8}f$, м.м.	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10^{-8} сек.)		
								89	94	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. октябрь									
1	8	14 ^h 15 ^m	9,09	34°,60	747,92	3,63	5,620		5046 8998	
2	10	15 10	9,32	56	43,01	46			9010	
3	11	9 47	9,39	61	42,26	55		5046 8907		
4	11	11 10	9,63	62	42,36	56		8912		
5	11	13 40	8,98	69	41,97	60			9002	
6	13	13 50	8,97	67	37,86	90			9000	
7	14	9 25	9,34	58	40,75	80		8920		
8	14	10 40	9,13	60	41,20	80		8920		
9	14	13 15	9,16	62	41,73	82			8985	
10	14	14 30	9,46	63	41,98	83			8995	
11	15	9 00	9,57	62	45,30	78		8925		
12	15	10 15	9,34	62	45,60	78		8928		
13	16	12 20	9,49	56	51,94	56			8998	
Среднее:			9,30	34 ,61	743,38	3,70	5,620	5046 8919 $M = \pm 3$ $m = \pm 8$	8998 ± 3 ± 8	8958 ± 2 ± 6
Редукция к штативу 1								+ 3	+ 3	+ 3
Окончательные значения периодов								5046 8922	9001	8962

Таблица 19

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_3 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8l$, мм	Среднее $3/8l$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10 ⁻⁸ сек.)		
								65	67	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. ноябрь									
1	11	8 ^h 30 ^m	9,40	34°,79	746,54	3,33	5,620	5046 8726		
2	11	11 10	8,94	79	46,36	32			5046 8743	
3	11	12 30	8,98	80	46,00	32			8746	
4	11	15 05	9,36	82	45,70	38		8768		
5	11	16 20	9,16	82	45,72	36		8746		
6	11	18 45	9,60	82	46,16	37			8743	
7	12	9 30	8,96	84	50,62	42		8721		
8	12	12 14	9,07	85	51,68	34			8736	
9	12	14 00	9,20	85	52,10	32			8744	
10	12	16 52	9,22	86	52,83	42		8725		
11	12	18 10	9,32	86	53,30	43		8723		
12	12	20 52	8,98	86	54,35	48			8740	
Среднее:			9,18	34,83	749,28	3,37	5,620	5046 8735 $M = \pm 8$ $m = \pm 19$	8742 ± 1 ± 2	8738 ± 3 ± 9

Таблица 20

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_3 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8l$, мм	Среднее $3/8l$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10 ⁻⁸ сек.)		
								66	94	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. ноябрь									
1	16	16 ^h 30 ^m	9,34	35°,11	751,10	3,63	5,620	5046 9017		
2	16	18 55	9,44	15	51,90	78			5046 8972	
3	17	7 40	9,31	00	57,32	84			8976	
4	17	11 00	9,24	13	58,49	83		9009		
5	17	12 20	9,56	13	58,56	82		9014		
6	17	14 45	9,25	13	59,02	76			8972	
7	18	2 30	9,25	14	59,74	73		9005		
8	18	9 50	9,56	14	59,14	68			8978	
9	18	11 00	9,42	16	58,92	68			8969	
10	18	13 30	9,57	18	57,94	68		8994		
11	18	14 45	9,35	18	57,58	68		9000		
12	18	17 10	9,45	18	57,13	67			8961	
Среднее:			9,40	35,14	757,24	3,73	5,620	5046 9006 $M = \pm 4$ $m = \pm 9$	8971 ± 2 ± 6	8989 ± 2 ± 6

Таблица 23

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_4 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10^{-8} сек.)		
								65	67	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. декабрь									
1	4	10 ^h 50 ^m	8,97	34°,84	738,21	3,11	5,620		5046 8721	
2	4	13 30	9,22	85	35,88	12		5046 8721		
3	4	15 05	9,36	86	35,20	10		8730		
4	5	11 05	9,14	88	24,88	15			8716	
5	5	13 50	9,45	86	26,20	17		8738		
6	7	13 20	9,01	84	44,87	26			8734	
7	7	14 35	9,41	82	44,87	24			8730	
8	7	16 57	9,43	83	45,48	26		8728		
9	7	18 10	9,46	83	45,74	26		8736		
10	8	13 30	9,23	83	46,42	29			8731	
Среднее:			9,27	34,84	738,77	3,20	5,620	5046 8731	8727	8729
								$M = \pm 2$	± 4	± 2
								$m = \pm 5$	± 7	± 4

Таблица 24

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_4 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $B-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10^{-8} сек.)		
								66	94	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. декабрь									
1	4	10 ^h 50 ^m	9,31	35°,09	737,71	3,61	5,620		5046 8986	
2	4	15 05	9,36	07	34,77	53		5046 8981		
3	4	18 00	8,95	11	31,82	55			8992	
4	5	11 05	9,13	11	24,40	64			8995	
5	5	13 50	8,76	11	25,67	70		8965		
6	7	10 45	9,16	11	44,06	82		8984		
7	7	13 20	9,64	10	44,38	74			9006	
8	7	14 35	9,60	08	44,39	72			9003	
9	7	16 57	9,11	07	45,01	73		8965		
10	7	18 10	9,50	09	45,26	74		8975		
11	7	12 15	9,45	10	46,45	78			8991	
12	8	13 30	9,23	09	45,94	78			9001	
13	8	15 58	9,26	09	45,30	78		8976		
Среднее:			9,27	35,09	739,63	3,70	5,620	5046 8974	8997	8985
								$M = \pm 3$	± 3	± 2
								$m = \pm 8$	± 7	± 6
Редукция к штативу 1								$+ 3$	$+ 3$	$+ 3$
Окончательные значения периодов								5046 8977	9000	8988

Таблица 23

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_4 по штативу 1

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10^{-8} сек.)		
								65	67	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. декабрь									
1	4	10 ^h 50 ^m	8,97	34°,84	738,21	3,11	5,620		5046 8721	
2	4	13 30	9,22	85	35,88	12		5046 8721		
3	4	15 05	9,36	86	35,20	10		8730		
4	5	11 05	9,14	88	24,88	15			8716	
5	5	13 50	9,45	86	26,20	17		8738		
6	7	13 20	9,01	84	44,87	26			8734	
7	7	14 35	9,41	82	44,87	24			8730	
8	7	16 57	9,43	83	45,48	26		8728		
9	7	18 10	9,46	83	45,74	26		8736		
10	8	13 30	9,23	83	46,42	29			8731	
Среднее:			9,27	34,84	738,77	3,20	5,620	5046 8731	8727	8729
								$M = \pm 2$	± 4	± 2
								$m = \pm 5$	± 7	± 4

Таблица 24

Результаты наблюдений при одиночных качаниях на пункте O_4 по штативу 2

№ по пор.	Дата	Время	Средняя амплитуда, мм	Средняя температура	Среднее $V-3/8f$, мм	Среднее $3/8f$, мм	Суточный ход, сек.	Периоды маятников (10^{-8} сек.)		
								66	94	среднее
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1960 г. декабрь									
1	4	10 ^h 50 ^m	9,31	35°,09	737,71	3,61	5,620		5046 8986	
2	4	15 05	9,36	07	34,77	53		5046 8981		
3	4	18 00	8,95	11	31,82	55			8992	
4	5	11 05	9,13	11	24,40	64			8995	
5	5	13 50	8,76	11	25,67	70		8965		
6	7	10 45	9,16	11	44,06	82		8984		
7	7	13 20	9,64	10	44,38	74			9006	
8	7	14 35	9,60	08	44,39	72			9003	
9	7	16 57	9,11	07	45,01	73		8965		
10	7	18 10	9,50	09	45,26	74		8975		
11	7	12 15	9,45	10	46,45	78			8991	
12	8	13 30	9,23	09	45,94	78			9001	
13	8	15 58	9,26	09	45,30	78		8976		
Среднее:			9,27	35,09	739,63	3,70	5,620	5046 8974	8997	8985
								$M = \pm 3$	± 3	± 2
								$m = \pm 8$	± 7	± 6
Редукция к штативу 1								$+ 3$	$+ 3$	$+ 3$
Окончательные значения периодов								5046 8977	9000	8988

СОДЕРЖАНИЕ

М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина. Оценка точности ряда Стокса и некоторые попытки уточнения его теории	3
Л. П. Пеллинен. Влияние топографических масс на вывод характеристик гравитационного поля Земли	23
Л. П. Пеллинен и Л. А. Говорова. Оценка точности астрономо-гравиметрического нивелирования в СССР	43
Е. М. Орлова. О точности вычисления влияния дальних зон на высоту квазигеоида с помощью разложения функции Стокса по коэффициентам K и Q	61
В. А. Таранов. Зависимость аномалии силы тяжести от высоты при выводе средних гравиметрических характеристик больших площадей	71
А. И. Шабанова. Вычисление на ЭЦВМ «Урал-1» характеристик гравитационного поля с использованием разложения аномалий силы тяжести по сферическим функциям	77
М. Е. Хейфец. Новый маятниковый прибор гравиметрической лаборатории ЦНИИГАиК	83