

Т Р У Д Ы  
ЦЕНТРАЛЬНОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО  
ИНСТИТУТА ГЕОДЕЗИИ, АЭРОСЪЕМКИ  
И КАРТОГРАФИИ

ВЫПУСК 42

М. С. МОЛОДЕНСКИЙ

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение . . . . .	5
--------------------	---

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ

#### Глава I. Взаимная связь элементов гравитационного поля регуляризированной Земли

§ 1. Некоторые соотношения между значениями гармонической функции и ее производных . . . . .	10
§ 2. Основные задачи гравиметрии для регуляризированной Земли . . . . .	13
§ 3. Нормальный потенциал силы тяжести . . . . .	16
§ 4. Формулы Сомильяна и Клеро . . . . .	19

#### Глава II. Геонд нерегуляризированной Земли

§ 5. Формула Моисеева . . . . .	22
§ 6. Формула Малкина . . . . .	24
§ 7. Сравнение формул Моисеева и Малкина . . . . .	24
§ 8. Формула Молоденского . . . . .	25
§ 9. Сравнение прямого метода решения („нерегуляризированной Земли“) с методом конденсации . . . . .	26
§ 10. Выводы . . . . .	28

#### Глава III. Фигура реальной Земли

§ 11. Редукции на геонд. Сравнение методов, изложенных в гл. I и II . . . . .	28
§ 12. Переход в формуле Грина к производным по направлениям координатных линий . . . . .	33
§ 13. Переход к интегрированию по поверхности $S$ (известной формы) . . . . .	37
§ 14. Вывод линейного интегрального уравнения для $\zeta$ . . . . .	42

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ

#### Глава IV. Задачи, требующие использования мировой гравиметрической съемки

§ 15. Введение. Критика выводов де Грааф Хентера . . . . .	47
§ 16. Общая характеристика земного гравитационного поля . . . . .	49
§ 17. Метод исследования погрешностей, возникающих из-за отсутствия мировой гравиметрической съемки . . . . .	52

§ 18. Улучшение сходимости ряда Стокса после выделения центральной зоны . . . . .	54
§ 19. Оценка предельного влияния дальних зон . . . . .	56
§ 20. Оценка среднего квадратического влияния дальних зон . . . . .	59

**Глава V. Задачи, разрешаемые при наличии только местной гравиметрической съемки**

§ 21. Идея астрономо-гравиметрического способа развития опорной геодезической сети . . . . .	62
§ 22. Оценка предельной ошибки, связанной с ограничением радиуса интеграции . . . . .	63
§ 23. Оценка предельной ошибки для астрономо-гравиметрического нивелирования . . . . .	67
§ 24. Верхний предел накопления систематических ошибок в гравиметрических поправках при астрономо-гравиметрическом нивелировании . . . . .	69
§ 25. Два типа астрономо-геодезических уклонений отвеса и связь между ними . . . . .	71
§ 26. Исправление результатов астрономо-гравиметрического нивелирования . . . . .	79

**Глава VI. Интерполяция силы тяжести и суждение о точности гравиметрических выводов**

§ 27. Ошибка представительства и ошибка интерполяции силы тяжести . . . . .	84
§ 28. Точность определения гравиметрических уклонений отвеса в условиях равномерной площадной съемки . . . . .	86
§ 29. Пример Московской аномалии . . . . .	94

**Глава VII. Вывод вспомогательных формул к главе IV**

§ 30. Вывод исходных формул . . . . .	96
§ 31. Частный случай применения формулы (7.10) . . . . .	98
§ 32. Разложение функции Стокса по полиномам Лежандра в интервале изменения $\cos \psi$ от $-1$ до $\cos \psi_0$ . . . . .	100
§ 33. Формулы Стокса и Венянг Мейнесса в преобразованной форме . . . . .	105
Литература . . . . .	107

## ВВЕДЕНИЕ

Термин „геодезическая гравиметрия“ впервые появился в тех же „Трудах ЦНИИГАиК“, где публикуется и настоящая работа. Это наименование достаточно точно характеризует основное содержание старейшего раздела науки о гравитационном поле Земли, получившего свое развитие в классических исследованиях Клеро, Стокса, Брунса, Пуанкаре, Гельмерта, Пицетти, Венинг Мейнеса, Прея, де Грааф Хейтера и др. выдающихся математиков и геодезистов. В работах названных ученых развита стройная теория „физической геодезии“, устанавливающая связь между объектами геодезического и физического исследования — фигурой геоида и силой тяжести.

Наиболее благоприятную почву для развития и претворения в практику эта теория нашла на нашей родине. Этому способствовало:

- 1) плановое проведение общей гравиметрической съемки Союза, начатое в 1932 г. по постановлению Совета Труда и Оборона;
- 2) большая протяженность нашей страны, которая приводит к невозможности ее геодезического изучения трафаретными, старыми способами;

- 3) неотложные задачи быстрейшего картографирования тех районов, которые до последнего времени являлись малообжитыми и начали бурно развиваться за последние годы.

Совокупность этих причин привела к тому, что физическая геодезия прочно вросла у нас в геодезическую практику. Работы проф. Ф. Н. Красовского убедительно доказали, что гравиметрические работы являются неотъемлемой частью в общей системе основных геодезических работ. Далее работы автора настоящей статьи, проф. И. А. Казанского и научного сотрудника ЦНИИГАиК Б. В. Дубовского теоретически и на большом опытном материале доказали возможность эффективного практического использования гравиметрической съемки для астрономо-гравиметрического нивелирования и при развитии опорной сети для топографических съемок путем исправления астрономических координат гравиметрическими поправками. Разработанные при этом методы использованы для целей градусных измерений при выводе элементов размера и ориентировки нового эллипсоида триангуляции СССР. Строгий метод обработки триангуляции путем проектирования измеренных геодезических элементов на эллипсоид, разработанный проф. Ф. Н. Красовским, практически не осуществим без привлечения гравиметрических данных.

Таким образом классические методы „физической геодезии“ впервые получили прочную практическую базу, и тесная связь с практикой незамедлительно повысила в СССР интерес к теории и направила ее на новые пути исследования. Именно в силу этой причины в настоящей работе нам приходится чаще всего ссылаться на исследования соотечественников.

Объектом исследования геодезической гравиметрии является изучение взаимных связей между фигурой Земли и различными элементами земного гравитационного поля, которые можно измерять на ее поверхности. При этом, конечно, большую роль играет вопрос о той точности, с которой в заданных конкретных условиях один из элементов гравитационного поля может быть получен по известным другим элементам.

Основным направлением, к которому относятся результаты всех геодезических измерений, является направление вектора силы тяжести в соответствующих точках физической поверхности Земли. Оно определяется из астрономических наблюдений. Одним из наиболее важных видов геодезических работ являются нивелировки, дающие представление о значении потенциала силы тяжести на поверхности Земли. При отношении результатов измерений на эллипсоид для их математической обработки необходимо знать истинную фигуру Земли, чтобы получить расстояние от места наблюдения до эллипсоида и направление нормали к эллипсоиду, которое может быть задано в форме уклонения отвесной линии. Если к этим элементам добавить еще напряженность поля силы тяжести, то мы исчерпаем перечень тех основных гравитационных элементов, с которыми в первую очередь приходится иметь дело геодезистам. Далее можно было бы добавить известные элементы, определяемые гравитационным вариометром, и, с еще большим основанием, неопределяемую пока из наблюдений вторую вертикальную производную от потенциальной функции.

Таким образом первым и наиболее трудным вопросом геодезической гравиметрии является установление соотношений между фигурой Земли, потенциалом и силой тяжести. Ему посвящена первая часть настоящей работы. Мы считаем, что читатель знаком с основными относящимися сюда исследованиями, и ограничиваемся краткими напоминаниями, так как целью нашего изложения является не обзор проделанных ранее работ, а изложение полученных нами результатов. Меньше всего нового читатель найдет в главе I, в которой излагается теория взаимной связи элементов гравитационного поля регуляризированной Земли. Это естественно, поскольку этот вопрос является и наиболее простым, и наиболее старым. Однако, повидимому, этот вопрос нам удалось изложить с единой точки зрения, более строго и просто, чем где бы то ни было из известных нам работ.

Включение этой главы вызвано не только ее связью с последующими, но и тем, что в некоторых из ранее известных выводов обнаружены весьма существенные ошибки, которые в нашем изложении, конечно, исправлены. Это относится к выводу формул Малкина и Каландро, определяющих силу тяжести и высоту геоида через уклонение отвесной линии. При составлении этой главы внимательно изучены работы Н. Р. Малкина. Нами избран более прямой и простой метод исследования, не требующий применения бесконечных рядов.

От простейшего случая регуляризированной Земли в главе II мы переходим к проблеме геоида нерегуляризированной Земли. Решение проблемы Стокса для нерегуляризированной Земли привело у различных исследователей к различным результатам, кратко изложенным в этой главе. Открывшаяся в связи с этим дискуссия не выяснила, какой результат можно считать более точным и в каком отношении все они находятся к формуле Стокса.

В настоящей главе исправлена одна неточность в исследованиях проф. Н. Д. Моисеева и показано, что при надлежащей трактовке вопроса получается полное согласие между исследованиями Стокса и результатами, полученными Моисеевым, Малкиным и Молоденским. Обращено внимание на то, что при элементарной трактовке формула Стокса в горных районах может дать неприемлемые результаты, особенно если приведение силы тяжести к уровню моря производится с нормальным значением ее вертикального градиента.

В следующей, III главе прежде всего рассматривается основной комплекс представлений, в который входят тесно между собой связанные понятия о высоте точек поверхности Земли над уровнем моря, о редукции силы тяжести и астрономических координат к уровню геоида и связь этих вопросов с геологическим строением земной коры. Обычная трактовка этих вопросов разбивает единую проблему на частные, в связи с чем теряется глубина понимания отдельных вопросов и возникают неоправданные усложнения.

Изложенный в главе II метод, основанный на исследовании фигуры геоида нерегуляризированной Земли, при применении его к указанным выше взаимосвязанным вопросам вносит неопределенность, которая может быть сведена к невозможности достаточно точного вычисления редукции Прея и производных от нее. Это связано с тем, что без знания геологического строения верхних (лежащих выше геоида) областей земной коры нельзя строго определить фигуру геоида через элементы гравитационного поля, наблюдаемые на поверхности Земли. Зато на физической поверхности Земли, где производятся все геодезические измерения, связь между потенциалом, силой тяжести, углом отбеса и фигурой Земли может быть достаточно строго установлена и притом не прибегая к каким-либо геологическим сведениям.

Очень важно отметить еще то, что, кроме перечисленных здесь, нет необходимости привлекать к решению задачи какие-либо другие элементы (например, не входит вторая радиальная производная от потенциальной функции). Установление такой связи принципиально дает все, что может интересовать геодезиста при обработке триангуляции или при решении других практических задач. Геоид, как промежуточная поверхность редукции геодезических измерений, при таком подходе к вопросу исключается, в связи с чем отпадают связанные с ним неопределенности. Нами получено довольно сложное линейное интегральное уравнение типа Фредгольма, дающее ответ на поставленную здесь задачу; впрочем, оно всегда может быть разрешено численными методами.

Дальнейшее исследование этого уравнения может идти по нескольким направлениям:

- 1) можно упростить его путем отбрасывания малых членов, не имеющих практического значения;
- 2) из полученного уравнения можно исходить при исследовании погрешностей применяемых в настоящее время упрощенных методов решения задачи;
- 3) с его помощью можно изучать вопросы о редукциях, причем строгое отправка уравнение обеспечит согласованность в постановке вопроса о редукции различных элементов.

Этими тремя главами исчерпывается содержание первой части, посвященной вопросам применения теории потенциала к решению задач геодезической гравиметрии. Во второй части, естественно, встает задача исследования основных ошибок, возникающих вследствие отступления фактических данных о земном гравитационном поле от требований теории. Требования эти, как известно, сводятся к тому, что потенциал и сила тяжести должны быть известны в каждой точке на всей поверхности Земли. Из наблюдений же мы получаем значения силы тяжести в дискретных точках, причем еще небольшая часть всей поверхности Земли изучена в гравиметрическом отношении. Последнее обстоятельство приводит к тому, что наиболее важные задачи оказываются пока неразрешимыми.

В первую очередь это относится к такой фундаментальной задаче, как установление взаимной связи изолированных систем градусных измерений. При ориентировании триангуляционных сетей по астрономо-гравиметрическим данным при современном положении они оказываются отнесенными не к общему эллипсоиду, а к неизвестной поверхности, степень отклонения которой от эллипсоида вращения заранее неизвестна.

Предельные и средние величины возможных отклонений (по высоте и в угле между нормальными) оказалось возможным оценить, используя соответственно среднее квадратическое значение аномалий силы тяжести на земной поверхности и разложение этих аномалий по сферическим функциям.

Исследованию этих вопросов посвящена глава IV, в которой впервые излагается несколько громоздкий, но достаточно строгий, по нашему мнению, метод решения этой задачи. Простое решение, ранее данное де Грааф Хентером, основано на недоразумении.

Мы пришли к выводу, что практически вполне приемлемая точность решения указанной задачи может быть обеспечена в том случае, когда в разложении аномалий по сферическим функциям определены первые 10 коэффициентов. Разработанный здесь метод окажется полезным не только для оценки возможного влияния аномалий в дальних зонах на вывод уклонений отвеса и высот геоида, но и для достаточно точного учета этого влияния, если указанные 10 коэффициентов определены.

Помимо разобранных задач, в которых использование материалов мировой гравиметрической съемки неизбежно, большое практическое значение получили задачи другого рода (глава V), которые могут решаться при наличии только местной гравиметрической съемки. Это те задачи, решение которых приводит к интегрированию аномалий, умноженных на функции, которые очень быстро убывают с удалением от исследуемого пункта. К их числу относится в первую очередь задача интерполирования астрономо-геодезических уклонений отвеса. На ее решении основано астрономо-гравиметрическое нивелирование и развитие опорной сети для топографических съемок путем подсчета гравиметрических поправок в астрономические координаты для перевода их в геодезические.

Главным практическим вопросом подобных задач является установление таких минимальных размеров области местной съемки, которые еще могут обеспечить желаемую точность результатов. Этому посвящена первая половина V главы. Во второй половине ее выяснена необходимость учета весьма существенной систематической поправки в результаты астрономо-гравиметрического нивелирования, охватывающего большую территорию. Эта поправка должна вводиться, если триангуляция обработана методом развертывания геодезических линий с геоида на эллипсоид с сохранением их длин. Полученные выводы применены к конкретным случаям, взятым из обработки градусных измерений и из материалов астрономо-гравиметрического нивелирования. Поправочные члены получились большими, но учитываются очень уверенно. Результаты этого исследования представляют интерес и с другой стороны. Они устанавливают связь между геодезическими координатами, получаемыми при вычислении триангуляции двумя методами — методом проектирования и методом развертывания. Таким образом можно совершить переход от одной из указанных систем координат к другой (конечно, при этом получается только главный член, так как ряд второстепенных эффектов не учитывался).

Мы уже отметили, что вторым основным фактором, нарушающим соответствие между требованиями теории и данными, получаемыми из наблюдений, является неизбежная дискретность точек, в которых сила тяжести определяется непосредственным наблюдением.

Таким образом встает задача интерполяции силы тяжести, от степени успеха разрешения которой весьма существенно зависит точность результативных гравиметрических выводов. Эти вопросы отражены в последней главе. Нами в одной из более ранних работ было указано, что при небольшом по сравнению с глубиной компенсации расстоянии между пунктами применение для интерполяции гипотезы изостазии вносит ничем неоправданные усложнения задачи. Поэтому, имея в виду плотность гравиметрической съемки СССР, ошибка интерполяции изостатических аномалий не исследовалась. Рассмотрены только аномалии

в свободном воздухе и Буге. Приведенные рассуждения освещают принципиальную сторону тех расчетов, которые должны выполняться при проектировании размещения гравиметрических пунктов, и точности определения аномалий силы тяжести в них для решения тех или иных геодезических задач.

Метод де Грааф Хентера, основанный на рассмотрении „ошибки представительства“, дополнен расчетами о влиянии аномалий в ближайших окрестностях астрономического пункта, так как этот пробел в исследованиях де Грааф Хентера не позволял решать до конца соответствующие задачи. Для случая, когда пункты гравиметрической съемки равномерно размещены по площади, как это имеет место в съемке СССР, получено простое соотношение между точностью вывода уклонения отвеса и ошибкой представительства площадки, соответствующей единичному пункту. Эти простые исследования, может быть недостаточно строгие, восполняют пробел в важном техническом вопросе, который ранее приходилось решать интуитивно.

Указанными шестью главами исчерпывается содержание настоящей работы. Мы видим, что в них преимущественно рассматривается принципиальная сторона дела и вовсе не затронуты вопросы техники соответствующих вычислений, которые в настоящее время очень обстоятельно разработаны, хотя еще не опубликованы.

Ряд важных вопросов геодезической гравиметрии здесь не отражен или отражен частично, так как соответствующие работы нами или опубликованы, или не закончены. Сюда относится теория астрономо-гравиметрического нивелирования, вопросы применения гравиметрии для развития основы топографических съемок, методика вывода уклонений отвеса в горных районах, разработка научных требований к распределению и точности гравиметрических пунктов разных классов и другие.

При составлении настоящей работы из научного архива ЦНИИГАиК использованы нами (конечно, с соответствующими оговорками в тексте) числовые материалы из отчетов научных сотрудников ЦНИИГАиК Б. В. Дубовского, А. М. Лозинской и В. Ф. Еремеева.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ**

Глава I.

**ВЗАИМНАЯ СВЯЗЬ ЭЛЕМЕНТОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ  
РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ**

**§ 1. Некоторые соотношения между значениями гармонической функции и ее производных**

При изучении ряда работ, в которых устанавливается связь между различными элементами гравитационного поля, в большинстве выводов (приводимых далее в исправленном виде) нами обнаружен ряд ошибок. Кроме того, оказалось возможным всю проблему изложить с одной общей точки зрения и чрезвычайно упростить вычисления, связанные с выводом основных формул.

Учитывая известные соображения, которые приводятся при выводе формулы Стокса, мы будем считать в настоящей главе краевые условия отнесенными к сфере, а эффект вращения Земли исключенным.

В основу последующих выводов кладем известное преобразование Грина

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - (U - U_0) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma, \quad (1.1)$$

где  $U$  — гармоническая вне поверхности сферы  $\sigma$  и регулярная на бесконечности функция,

$n$  — направление внешней нормали к сфере,

$r$  — расстояние от точки  $M$ , для которой определяется значение  $U$ , до элемента поверхности сферы  $d\sigma$ .

В (1.1) мы намеренно изменили обычное написание формулы Грина, введя вместо  $U$  под знак интеграла разность  $U - U_0$ , понимая под  $U_0$  значение  $U$  в точке пересечения сферы с радиусом-вектором точки  $M$ . При такой записи формула (1.1) сохраняет свое написание при переходе  $M$  на сферу перемещением по прямой к ее центру, так как устраняется скачок непрерывности потенциала двойного слоя, плотность которого в точке разрыва непрерывности обращается в нуль. Действительно, учитывая постоянство  $U_0$  относительно интеграции по  $\sigma$  и значения интеграла Гаусса ( $-4\pi$ , когда  $M$  вне  $\sigma$ , и  $-2\pi$ , когда  $M$  на  $\sigma$ ), можем вернуться от (1.1) к обычной записи.

Чтобы облегчить предельный переход к сфере после дифференцирования, к которому нам далее придется прибегнуть, произведем по-

добное же преобразование и в первом члене, содержащем  $\frac{1}{r}$ :

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n} \right) - (U - U_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] d\sigma - \frac{R^2}{\rho} \frac{\partial U_0}{\partial \rho} \quad (1.2)$$

Здесь  $R$  — радиус сферы,

$\rho$  — расстояние точки  $M$  от центра этой сферы,

$\frac{\partial U_0}{\partial n}$  — значение  $\frac{\partial U}{\partial n}$  в точке пересечения сферы с радиусом-вектором

$\rho$  точки  $M$ .

Для проверки равенства (1.2) учтем, что производная  $\frac{\partial U_0}{\partial n}$  при интег-

рировании по  $\sigma$  должна рассматриваться как постоянная и

$$\int_{\sigma} \frac{1}{r} d\sigma = \frac{4\pi R^2}{\rho},$$

так как левую часть можно рассматривать как потенциал, развиваемый на точку  $M$  массами, равномерно распределенными на поверхности сферы и имеющими плотность, равную единице.

$\frac{1}{r}$  можно выразить через  $\rho$ ,  $R$  и  $\psi$ :

$$\frac{1}{r} = (\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi)^{-\frac{1}{2}},$$

где  $\psi$  — угол между радиусом-вектором  $\rho$  точки  $M$  и направлением от  $R$  к переменному элементу поверхности  $d\sigma$ .

Образует производные от  $\frac{1}{r}$ :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = - (R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \psi)^{-\frac{3}{2}} (R - \rho \cos \psi),$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} = - (R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \psi)^{-\frac{3}{2}} (\rho - R \cos \psi),$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial \rho} = \frac{\cos \psi}{r^3} + \frac{3}{r^3} (R - \rho \cos \psi)(\rho - R \cos \psi).$$

Для положения точки  $M$  на поверхности сферы берем предельное значение предыдущих выражений при  $\rho$ , стремящемся к  $R$ :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} = -\frac{1}{2rR}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial \rho} = \frac{1}{r^3} + \frac{1}{4R^2 r} = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{2R} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n},$$

при чем в последних формулах под  $r$  понимается, конечно, расстояние между двумя точками сферы:

$$r = 2R \sin \frac{\psi}{2}.$$

Берем производную по  $\rho$  от обеих частей (1.2)

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} \left( \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n} \right) - (U - U_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial \rho} \right] d\sigma + \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial U_0}{\partial n} \quad (1.4)$$

Когда точка  $M$  переходит на поверхность сферы, первый интегральный член, на основании (1.3), можно рассматривать как потенциал двойного слоя, который сохраняет непрерывность, так как плотность его в предельной точке равна нулю.

Второй интеграл является несобственным и имеет смысл, если значение  $U$  на поверхности сферы можно дважды дифференцировать и разложить в ряд Тэйлора вблизи значения  $U = U_0$ :

$$U = U_0 + (a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha) r + (a_2 \cos^2 \alpha + b_2 \sin^2 \alpha + c_2 \sin 2\alpha) r^2 \dots$$

Тогда при интегрировании по азимуту  $\alpha$  останутся члены порядка не ниже  $r^2$ .

Образуем функцию

$$F = \frac{\partial U(M)}{\partial \rho} + \frac{1}{2R} U(M)$$

и найдем ее предельное значение, когда  $\rho$  стремится к  $R$ , используя при этом равенства (1.2) и (1.4).

Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial n} + \frac{1}{2R} U_0 = & \frac{-1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} + \frac{1}{2Rr} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n} \right) - \right. \\ & \left. - (U - U_0) \left( \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial \rho} + \frac{1}{2R} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} \right) \right] d\sigma + \frac{\partial U_0}{\partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial n}. \end{aligned}$$

На основании (1.3) заключаем, что первый интеграл обращается в нуль, и

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial \rho} + \frac{1}{2R} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} = \frac{1}{r^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} + \frac{1}{R} U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{U - U_0}{r^3} d\sigma. \quad (1.5)$$

Эта формула решает задачу, обратную внешней сферической задаче Неймана. Она определяет значение нормальной производной для гармонической функции, заданной на поверхности сферы.

Применим формулу (1.5) к функции  $\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}$ , которая, как известно,

также является гармонической и регулярной на бесконечности.

Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial U}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}.$$

Следовательно, вместо (1.5) получим в этом случае

$$\left( \frac{\partial U_0}{\partial \rho} + R \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho^2} \right) + \frac{\partial U_0}{\partial \rho} = \frac{R}{2\pi} \int \frac{\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n}}{r^3} d\sigma,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho^2} = -\frac{2}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \rho} + \frac{R}{2\pi} \int \frac{\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n}}{r^3} d\sigma. \quad (1.6)$$

Эта формула позволяет определить вторую радиальную производную гармонической функции по значениям первой производной, заданным на сфере.

Теперь перейдем к соответствующим задачам гравиметрии.

## § 2. Основные задачи гравиметрии для регуляризированной Земли

Обозначим высоту геоида — расстояние от геоида до поверхности относимости — через  $\zeta$ , а значение потенциала на геоиде через  $C$ . При перемещении единицы массы с геоида на сферу по радиальному направлению производится работа  $\gamma \zeta$  (с точностью до  $\zeta^2$ , если под  $\gamma$  понимать нормальное значение силы тяжести на сфере). Поэтому потенциал регуляризированной Земли на сфере равен

$$V = C + \gamma \zeta,$$

а нормальный потенциал равен  $C$  (как обычно, мы понимаем под поверхностью относимости такую сферу, на которой все массы Земли, будучи сосредоточенными в ее центре, развивают тот же потенциал, что и массы регуляризированной Земли на поверхности геоида).

Следовательно, возмущающий потенциал  $U$  на поверхности сферы определяется так (формула Брунса):

$$U = C + \gamma \zeta - C = \gamma \zeta. \quad (1.7)$$

Точно так же, если сила тяжести на поверхности геоида регуляризированной Земли равна  $g_0$ , то нормальное значение силы тяжести на той же поверхности равно

$$\gamma - \frac{2\gamma \zeta}{R}$$

(приведение в свободном воздухе), и аномалия силы тяжести (которую можем считать отнесенной к сфере) равна

$$-\frac{\partial U}{\partial n} = g_0 - \left( \gamma - \frac{2\gamma \zeta}{R} \right) = \Delta g + \frac{2\gamma \zeta}{R}. \quad (1.8)$$

Подставляя эти значения в (1.1), получаем:

$$U(M) = + \frac{1}{4\pi} \int \left[ \frac{1}{r} \left( \Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R} \right) - \gamma(\zeta - \zeta_0) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right] d\sigma.$$

Как указывалось, интеграл справа не терпит разрыва непрерывности при переходе  $M$  на поверхность сферы, а потому после предельного перехода получаем

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int \left[ \frac{1}{r} \left( \Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R} \right) - \gamma\zeta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right] d\sigma$$

или, с помощью (1.3) и (1.7),

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{\Delta g}{r} d\sigma + \frac{3}{4\pi R} \int \frac{\zeta}{r} d\sigma. \quad (1.9)$$

Мы получили интегральное уравнение, решение которого приводит к известной формуле Стокса.

Подставляя (1.7) и (1.8) в (1.5), получаем формулу

$$\Delta g + \frac{\gamma\zeta}{R} + \frac{\gamma}{2\pi} \int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} d\sigma = 0, \quad (1.10)$$

которая определяет аномалию силы тяжести через высоты геоида.

Точно так же (1.6) дает

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \frac{2\Delta g_0}{R} + \frac{4\gamma\zeta}{R^2} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} d\sigma - \frac{\gamma}{\pi R} \int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} d\sigma.$$

Исключая отсюда последний интеграл с помощью (1.10), получаем формулу

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \frac{4\Delta g}{R} + \frac{6\gamma\zeta}{R^2} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} d\sigma, \quad (1.11)$$

которая определяет вторую радиальную производную потенциала через аномалии силы тяжести на поверхности сферы (высота геоида входит сюда очень слабо).

Формулу Каландро, которая дает интегральную связь между уклоном отвеса и высотой геоида, можно получить из самых элементарных соображений. Данную точку на сфере возьмем за полюс, а положение любой другой определим ее угловым расстоянием  $\psi$  от первой и азимутом  $\alpha$ , отсчитанным от любого фиксированного направления. Тогда

$\frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \psi}$  есть составляющая уклонения отвеса в направлении  $\psi$ , а

$$\int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} d\psi = \zeta_\pi - \zeta_0,$$

где  $\zeta_0$  — высота геоида для данной точки, а  $\zeta_\pi$  — для ее антипода.

Умножая обе части последнего равенства на  $d\alpha$  и интегрируя по  $\alpha$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , получаем:

$$\zeta_\pi - \zeta_0 = \frac{1}{2\pi R^2} \int \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \psi \operatorname{cosec} d\sigma. \quad (1.12)$$

Полученная формула соответствует идее астрономического нивелирования, при котором высоты геоида получаются с точностью до произвольной постоянной. Для исключения этой постоянной привлечем обычное условие

$$\int_{\sigma} \zeta d\sigma = 0.$$

Путем интегрирования по частям это условие выразим через уклонение отвеса:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\sigma} \zeta d\sigma = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \zeta \sin \psi d\psi = \int_0^{2\pi} d\alpha \left[ \zeta_{\pi} + \zeta_0 + \int_0^{\pi} \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \cos \psi d\psi \right] = \\ &= 2\pi (\zeta_{\pi} + \zeta_0) + \frac{1}{R^2} \int \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \psi d\sigma. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\zeta_{\pi} + \zeta_0 = -\frac{1}{2\pi R^2} \int \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \psi d\sigma. \quad (1.13)$$

Исключая из (1.12) и (1.13)  $\zeta_{\pi}$ , получаем формулу, которая имеет тот же смысл, что и формула Каландро, но значительно проще ее:

$$\zeta_0 = -\frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\sigma. \quad (1.14)$$

Поскольку исходные предпосылки вывода последней формулы можно отнести к  $\Delta g$  и  $\frac{\partial \Delta g}{\partial \psi}$ , по аналогии с (1.14) имеем:

$$\Delta g = -\frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{\partial \Delta g}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\sigma. \quad (1.15)$$

Формулу, обратную формуле Венинг Мейнеса, т. е. определяющую аномалию силы тяжести через уклонения отвеса, заданные на поверхности сферы, легко получить из (1.10) путем интегрирования по частям.

Действительно, вместо (1.10) можем написать

$$\begin{aligned} \Delta g &= -\frac{\gamma}{2\pi} \int (\zeta - \zeta_0) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{2R^3} \right) d\sigma = \\ &= +\frac{\gamma}{2\pi} \int d\alpha \int (\zeta - \zeta_0) \left( d \frac{1}{r} + \frac{1}{4R^3} dr^2 \right), \end{aligned} \quad (1.16)$$

а после интегрирования по частям получаем:

$$\Delta g = \frac{3\gamma}{2R} (\zeta_{\pi} - \zeta_0) - \frac{\gamma}{2\pi} \int \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{r}{4R^3} \right) d\sigma.$$

Подобным же путем можно получить все другие формулы, связывающие какой-либо один элемент гравитационного поля с любым другим, заданным на всей сфере. Мы ограничились разбором тех формул, которые имеют сравнительно большие шансы на их применение. Вывод формулы Венинг Мейнеса мы опускаем, так как он общеизвестен.

### § 3. Нормальный потенциал силы тяжести

Изложим решение проблемы Стокса для случая, когда заданной ровной поверхностью является сжатый эллипсоид вращения. Уравнение этого эллипсоида в декартовых координатах, отнесенное к его центру, зададим следующим образом:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1.17)$$

где  $a$  — большая полуось и  $b$  — малая полуось эллипсоида. Кроме уравнения поверхности уровня, мы должны считать заданными массу планеты  $M$  и угловую скорость вращения  $\omega$ .

Уравнение эллипсоида (1.17) в криволинейных координатах удобно выражается через параметры  $u$  и  $v$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin u \sin v, \\ y &= a \sin u \cos v, \\ z &= b \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты произвольной точки эллипсоида, причем параметр  $v$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , а  $u$  — от 0 до  $\pi$ .

$u$  представляет собой дополнение до  $90^\circ$  приведенной широты, а  $v$  — долготу. Если мы в (1.18)  $a$  и  $b$  будем рассматривать как переменные величины, зависящие от параметра  $w$

$$\left. \begin{aligned} a &= c \operatorname{ch} w, \\ b &= c \operatorname{sh} w, \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

то при постоянном  $w = w_0$  получим уравнение эллипсоида (1.17).

Для этого нужно  $c$  и  $w_0$  определить так:

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2, \\ \operatorname{th} w_0 &= \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Считая  $w$  третьим переменным параметром, мы переходим от декартовых координат  $x, y, z$  к криволинейным  $u, v, w$ .

Формулы перехода получают из (1.18) и (1.19):

$$\left. \begin{aligned} x &= c \sin u \sin v \operatorname{ch} w, \\ y &= c \sin u \cos v \operatorname{ch} w, \\ z &= c \cos u \operatorname{sh} w. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Заметим, что поверхность  $v = \operatorname{const.}$  является плоскостью;  $w = \operatorname{const.}$  — эллипсоидом;  $u = \operatorname{const.}$  — гиперboloидом вращения. Все эллипсоиды и гиперboloиды софокусны.

Образует частные производные от декартовых координат по криволинейным:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = c \cos u \sin v \operatorname{ch} w; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = c \sin u \cos v \operatorname{ch} w; \quad \frac{\partial x}{\partial w} = c \sin u \sin v \operatorname{sh} w;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = c \cos u \cos v \operatorname{ch} w; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -c \sin u \sin v \operatorname{ch} w; \quad \frac{\partial y}{\partial w} = c \sin u \cos v \operatorname{sh} w;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -c \sin u \operatorname{sh} w; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial w} = c \cos u \operatorname{ch} w.$$

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial w} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u), \\ h_2^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w, \\ h_3^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u) \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Из первой группы уравнений заключаем, что координатные поверхности образуют взаимно ортогональную систему. Следовательно, дифференциал длины линии определится из квадратичной формы:

$$ds^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 dv^2 + h_3^2 dw^2, \quad (1.24)$$

а оператор Лапласа выразится известной формулой:

$$\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial w} \right) \right\} \quad (1.25)$$

Используя значения  $h_1, h_2, h_3$  из (1.23) получаем уравнение Лапласа в наших координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( \sin u \operatorname{ch} w \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u}{\sin u \operatorname{ch} w} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial w} \left( \sin u \operatorname{ch} w \frac{\partial U}{\partial w} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Теперь, когда подготовлены все необходимые формулы для избранной криволинейной координатной системы, перейдем к решению интересующей нас задачи.

На поверхности эллипсоида (1.17) потенциал силы тяжести  $W$  по условию постояен и, положим, равен  $W_0$ . Следовательно, потенциал тяготения равен

$$U_0 = W_0 - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)_0.$$

Из (1.21) получаем

$$(x^2 + y^2)_0 = c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0, \quad (1.27)$$

где индекс 0 всюду относится к поверхности исходного эллипсоида  $w = w_0$ .

Следовательно, в криволинейных координатах

$$U_0 = W_0 - \frac{1}{2} \omega^2 c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0. \quad (1.28)$$

Функция  $U$  вне поверхности  $w = w_0$  является гармонической, а на бесконечности — регулярной. На поверхности  $w = w_0$  она принимает значение  $U_0$ , определяемое равенством (1.28).

Таким образом нужно решить внешнюю задачу Дирихле при задании краевых условий (1.28) на поверхности эллипсоида. Тогда мы определим потенциал тяготения в любой точке вне исходного эллипсоида. Добавив к нему известный потенциал центробежной силы, получим потенциал силы тяжести. Дифференцируя последний по  $w$ , поделив на  $h_3$  и осуществив после этого предельный переход к поверхности  $w = w_0$ , получим силу тяжести на эллипсоиде (1.17). Таков в основных чертах путь решения задачи.

Задача Дирихле, как известно, имеет единственное решение. Поэтому достаточно найти гармоническую и регулярную на бесконечности функцию, которая на поверхности  $w = w_0$  принимает значения (1.28).

Поскольку краевое условие (1.28) не зависит от  $v$ , будем искать решение задачи в виде суммы частных решений вида

$$A_n \varphi_n(u) \psi_n(w), \quad (1.29)$$

при чем каждое частное решение должно удовлетворять уравнению Лапласа (1.26):

$$\psi_n(w) \operatorname{ch} w \frac{d}{dw} \left( \sin u \frac{d\varphi_n(u)}{du} \right) + \varphi_n(u) \sin u \frac{d}{dw} \left( \operatorname{ch} w \frac{d\psi_n(w)}{dw} \right) = 0.$$

Это уравнение после разделения переменных примет вид:

$$-\frac{1}{\varphi_n(u) \sin u} \frac{d}{du} \left( \sin u \frac{d\varphi_n(u)}{du} \right) = \frac{1}{\psi_n(w) \operatorname{ch} w} \frac{d}{dw} \left( \operatorname{ch} w \frac{d\psi_n(w)}{dw} \right) = k.$$

Левая часть равенства не зависит от  $w$ , а правая от  $u$ . Следовательно, обе равны одной и той же постоянной  $k$ , выбор которой зависит от нас.

В развернутой форме получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_n}{du^2} + \operatorname{ctg} u \frac{d\varphi_n}{du} + k \varphi_n &= 0, \\ \frac{d^2 \psi_n}{dw^2} + \operatorname{th} w \frac{d\psi_n}{dw} - k \psi_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) при  $k = n(n+1)$  представляет собою дифференциальное уравнение Лежандра, которому удовлетворяют функции Лежандра  $P_n(\cos u)$  первого и  $Q_n(\cos u)$  второго рода.

Следовательно, мы можем принять

$$\varphi_n(u) = P_n(\cos u),$$

а за частное решение уравнения Лапласа

$$A_n \psi_n(w) P_n(\cos u). \quad (1.31)$$

Теперь  $\psi_n(w)$  должно удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2 \psi_n}{dw^2} + \operatorname{th} w \frac{d\psi_n}{dw} - n(n+1) \psi_n = 0, \quad (1.32)$$

а частное решение (1.31) должно быть регулярным на бесконечности.

Функция  $\psi_n(w)$ , удовлетворяющая всем поставленным условиям, будет определена в конце.

Теперь мы можем положить:

$$U = \sum A_n P_n(\cos u) \psi_n(w). \quad (1.33)$$

Чтобы удовлетворить краевым значениям, нужно коэффициенты  $A_n$  определить так, чтобы при  $w = w_0$  (1.33) приводилось к (1.28), т. е.

$$U_0 = \sum A_n P_n(\cos u) \psi_n(w_0) = W_0 = \frac{1}{2} \omega^2 c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0.$$

Поскольку

$$\sin^2 u = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2(\cos u),$$

убеждаемся, что в правую часть (1.33) входят только полиномы Лежандра нулевого и второго порядка. Поэтому все  $A_n$ , кроме  $A_0$  и  $A_2$ , равны нулю.

Чтобы перейти к потенциалу силы тяжести, нужно к  $U$  добавить потенциал центробежной силы (1.27).

$$W = A_0 \psi_0(w) + A_2 \psi_2(w) P_2(\cos u) + \frac{\omega^2}{2} c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w. \quad (1.34)$$

Таково решение поставленной задачи. При соответствующем выборе  $\psi_n(w)$  оно удовлетворяет всем поставленным условиям и, как указывалось, является единственным.

#### § 4. Формулы Соммильяна и Клеро

Чтобы из (1.34) получить значение силы тяжести, достаточно  $W$  продифференцировать по направлению нормали к поверхности уровня, т. е. к эллипсоиду (1.17), и положить затем  $w = w_0$ . Учитывая еще (1.24), получим:

$$\gamma = \left( -\frac{\partial W}{\partial n} \right)_0 = \left( -\frac{1}{h_3} \frac{\partial W}{\partial w} \right)_0 = \frac{-1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}} \left[ A_0 \psi'_0(w_0) + A_2 \psi'_2(w_0) P_2(\cos u) + \omega^2 a b \sin^2 u \right] \quad (1.35)$$

Отсюда видно, что закон изменения силы тяжести на эллипсоиде можно представить формулой

$$\gamma = \frac{A \cos^2 u + B \sin^2 u}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}},$$

где  $A$  и  $B$  постоянные, подлежащие определению.

Полагая  $u = \frac{\pi}{2}$ , получим силу тяжести на экваторе

$$\gamma_e = \frac{B}{\operatorname{sh} w_0} = \frac{Bc}{b},$$

а при  $u = 0$  — на полюсе

$$\gamma_p = \frac{A}{\operatorname{ch} w_0} = \frac{Ac}{a}.$$

Поэтому через  $\gamma_e$  и  $\gamma_p$  можно  $\gamma$  представить так:

$$\gamma = \frac{\gamma_p a \cos^2 u + \gamma_e b \sin^2 u}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}} \quad (1.36)$$

Если перейти к географической широте  $\varphi$ , получим:

$$\gamma = \frac{\gamma_e a \cos^2 \varphi + \gamma_p b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

Мы получили формулу Соммильяна. Эта формула выражает точный закон изменения силы тяжести на поверхности уровня, имеющей форму сжатого эллипсоида вращения.

$\gamma_e$  и  $\gamma_p$  в этой формуле можно выразить через  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $M$  (это следует из теоремы Стокса). С другой стороны,  $M$  является функцией  $\gamma_e$ ,  $\gamma_p$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$  (это следует из формулы Гаусса). Следовательно, должна существовать функциональная зависимость между  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma_e$  и  $\gamma_p$ . Для установления этой зависимости (формулы Клеро) вернемся к (1.35).

Полагая  $u = 0$  и  $u = \frac{\pi}{2}$ , из (1.35) получим  $\gamma_p$  и  $\gamma_e$ :

$$\gamma_p = -\frac{1}{c \operatorname{ch} w_0} \left[ A_0 \psi'_0(w_0) + A_2 \psi'_2(w_0) \right],$$

$$\gamma_e = -\frac{1}{c \operatorname{sh} w_0} \left[ A_0 \psi'_0(w_0) - \frac{1}{2} A_2 \psi'_2(w_0) + \omega^2 ab \right]$$

Исключим  $W_0$ , входящее в эти равенства через  $A_0$ , причем примем во внимание (20.1):

$$\gamma_p a - \gamma_e b = \omega^2 ab - \frac{3}{2} A_2 \psi'_2(w_0).$$

$A_2$  определяем из (1.33)

$$A_2 = \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{1}{\psi_2(w_0)}.$$

Следовательно,

$$\gamma_p a - \gamma_e b = \omega^2 ab \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{a}{b} \frac{\psi'_2(w_0)}{\psi_2(w_0)} \right]. \quad (1.37)$$

Остается определить функцию  $\psi_2(w)$ . Для этого получаем общий интеграл уравнения (1.32) при  $n=2$ :

$$\psi_2(w) = C_1 \left( \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 w + \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ C_2 \left[ \left( \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 w + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} w) - \frac{3}{2} \operatorname{sh} w \right]. \quad (1.38)$$

Исследуем поведение функции  $\psi_2(w)$  на бесконечности. Функция при  $C_1$  возрастает как  $\operatorname{sh}^2 w$ , т. е. пропорционально квадрату расстояния. Функция при  $C_2$  при  $\operatorname{sh} w > 1$  разлагается в ряд

$$\frac{a}{\operatorname{sh}^3 w} + \dots$$

Следовательно, эта функция убывает и на бесконечности безусловно регулярна. Поэтому, чтобы частное решение (1.29) было регулярно на бесконечности, нужно положить  $C_1 = 0$ .

Тогда

$$\frac{\psi'_2(w)}{\psi_2(w)} = \frac{3 \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} w) - 3 \operatorname{ch} w + \frac{1}{\operatorname{ch} w}}{\left( \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 w + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} w) - \frac{3}{2} \operatorname{sh} w}.$$

Следовательно,

$$\gamma_p a - \gamma_e b = \omega^2 ab \left[ 1 + \frac{3e' + 2e'^3 - 3(1 + e'^2) \operatorname{arctg} e'}{(3 + e'^2) \operatorname{arctg} e' - 3e'} \right], \quad (1.39)$$

где  $e' = \frac{1}{\operatorname{sh} w_0} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$  представляет собой так называемый второй эксцентриситет.

Это соотношение позволяет, зная  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$  и  $\gamma_e$ , получить  $\gamma_p$ , а, следовательно, по (1.36)  $\gamma$  для любой точки эллипсоида. Оно представляет собою точное выражение теоремы Клеро для поверхности уровня, имеющей форму сжатого эллипсоида вращения. Разложение его в ряд приводит к обычной формулировке теоремы Клеро:

$$\frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_p} + \frac{a - b}{a} = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} \quad (1.40)$$

В заключение заметим, что решение (1.38) уравнения (1.32) можно получить из таких соображений. Путем замены переменной

$$x = \frac{\pi}{2} - wi$$

уравнение (1.32) приводится к уравнению Лежандра.

Следовательно,

$$\psi_n(w) = C_1 P_n(\sin iw) + C_2 Q_n(\sin iw).$$

Требование регулярности на бесконечности приводит к тому, что  $C_1$  нужно положить равным нулю. При  $n = 2$

$$Q_2(z) = P_2(z) \operatorname{arcth} z - \frac{3}{2} z,$$

если  $z$  комплексное переменное, не лежащее на отрезке действительной оси от  $-1$  до  $+1$ .

В нашем случае

$$z = \sin wi = i \operatorname{sh} w,$$

$$\operatorname{arcth} z = -i \operatorname{arcctg}(\operatorname{sh} w),$$

и, следовательно,

$$\varphi_2(w) = C_2 Q_2(z) = C_2 \left[ \left( \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 w + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arcctg}(\operatorname{sh} w) - \frac{3}{2} \operatorname{sh} w \right] i,$$

что совпадает со вторым членом в (1.38).

## Глава II

### ГЕОИД НЕРЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ

Стокс доказал, что форма внешней поверхности уровня, заключающей в себе все притягающие массы, при известной общей массе и скорости вращения Земли однозначно определяет величину силы тяжести в любой точке вне этой поверхности или на ней. Однозначность решения обратной задачи не доказана. Можно только отметить, что до настоящего времени известно единственное решение, именно—решение Стокса. В последнее время иными методами оно было получено Пицетти [1] (сведением проблемы к задаче Дирихле), Джеффрисом [2] (уравнение, основанное на применении формулы Грина), Моисеевым [3] (линейное интегральное уравнение, полученное сведением проблемы к внешней и внутренней задаче Неймана), Кошляковым [4] (построение функции Грина для смешанной задачи теории потенциала), Малкиным [5] и Молоденским [6] (линейное интегральное уравнение, полученное в результате применения теоремы Шаля), Идельсоном и Малкиным [7] (метод Дини, тот же, что у Пицетти), де Грааф Хентером [8] (применение формул Грина, компенсированный геоид).

Другой путь решения той же задачи—определения фигуры геоида из распределения силы тяжести по земной поверхности—впервые наме-

чен Джеффрисом [2]. Но Джеффрис имел целью только обосновать применение редукции в свободном воздухе. Задача определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли в полном объеме была впервые поставлена и решена Н. Д. Моисеевым [3]. Позднее Малкин [5] и Молоденский [6] также получили формулы для определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли, отличные от формулы Моисеева. В связи с этим на страницах „Астрономического журнала“ между Малкиным и Моисеевым возникла дискуссия [9, 10].

Мы ниже покажем, что все перечисленные формулы становятся идентичными, если исправить одно место в выводе Моисеева, а результаты по ним вполне согласуются со строгим толкованием формулы Стокса и не приводят к каким-либо неожиданностям (утверждение Малкина [10], что поправка за деконденсацию должна вводиться в двойном размере и с обратным знаком, неосновательно).

### § 5. Формула Моисеева

Принципиальная сторона подхода Н. Д. Моисеева [3] к решению задачи определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли в кратких словах такова. Поверхность сферы относимости разграничивает все массы Земли на внешние относительно этой сферы и внутренние. Допустим, что для поверхности сферы известны значения радиальных градиентов потенциала отдельно от внешних масс (схема  $e$ , потенциал  $\Pi_e$ , радиальный градиент  $\delta_e$ ) и отдельно от аномалий внутренних масс (схема  $i$ ,  $\Pi_i$ ,  $\delta_i$ ). Тогда из раздельного решения внешней и внутренней задачи Неймана определяются соответственно значения потенциальной функции, обусловленные внешними и отдельно внутренними массами. Суммируя оба решения, получаем аномальное значение потенциальной функции от всех масс Земли и, по теореме Брунса, высоту геоида  $\zeta$ .

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы выразить  $\delta_e$  и  $\delta_i$  через  $\zeta$  и величины, которые можно считать известными из наблюдений. В качестве известных величин Моисеев исходит из „смешанных“ аномалий Прея ( $-\Delta^P$ ) и Буге ( $-\Delta^B$ ), понимая под этими величинами их точные значения: аномалия Прея есть разность между значением силы тяжести на поверхности геоида (реальная Земля, схема  $e+i$ ) и нормальным значением на поверхности сферы относимости; аномалия Буге представляет собой значение той же разности после удаления всех масс, расположенных вне геоида. Таким образом, величина  $\Delta^P_B = \Delta^P - \Delta^B$  представляет собой радиальный градиент потенциала масс, расположенных вне геоида.

Для  $\delta_e$  на поверхности сферы Моисеев пользуется соотношением (в его статье [3] формула 4.6):

$$\delta_e(\Sigma) = \Delta^P - \Delta^B + 2\pi k^2 \mu_e \zeta.$$

Последний член этой формулы учитывает притяжение слоя плотностью  $\mu_e$ , расположенного между геоидом и сферой. Это соотношение, как уже заметил Малкин, неточно. В дальнейшем выводе я заменяю его более точным:

$$\delta_e(\Sigma) = \Delta^P - \Delta^B + 4\pi k^2 \mu_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \zeta_n}{2n+1}. \quad (2.1)$$

Здесь последний член представляет собой точное значение притяжения конденсированного слоя масс, расположенных между геоидом и сферой, на внутреннюю точку сферы (таким образом погрешность нашего выражения порядка  $\zeta^2$ ).

Подобным же образом меняется выражение для  $\delta_i$ :

$$\delta_i(\Sigma) = \Delta^B + 4\pi k^2 \mu_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \zeta_n}{2n+1} - \frac{2\zeta}{R}. \quad (2.2)$$

Разлагая  $\delta_e(\Sigma)$  и  $\delta_i(\Sigma)$  в ряд сферических функций, получаем для аномалии потенциала схемы  $e$  и схемы  $i$  следующие выражения:

$$\Pi_e(\Sigma) = \Pi_e(0) + R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta_e)_n}{n} \quad (\text{решение внутренней задачи Неймана})$$

$$\Pi_i(\Sigma) = -R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta_i)_n}{n+1} \quad (\text{решение внешней задачи Неймана}).$$

Теперь по теореме Брунса получаем:

$$\zeta = \frac{\Pi_e(\Sigma) + \Pi_i(\Sigma)}{\gamma} = \frac{(\Pi_i + \Pi_e)_0}{\gamma} + \frac{R}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n} - \frac{(\Delta^B)_n}{n+1} + \frac{2\gamma}{R} \frac{\zeta_n}{n+1} \right]. \quad (2.3)$$

Отсюда при  $n=0$

$$\zeta_0 = \frac{(\Pi_i + \Pi_e)_0}{\gamma}$$

и при  $n \neq 0$

$$\frac{n-1}{n+1} \zeta_n = \frac{R}{\gamma} \left[ \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n} - \frac{(\Delta^B)_n}{n+1} \right]. \quad (2.4)$$

Заметим, что Салтыков [12], решая уравнение Моисеева, получил более сложное и, как показано, менее точное (и грубо неверное при малых значениях  $n$ ) соотношение:

$$\zeta_n = \frac{R}{2\pi\gamma} \frac{4\pi}{2n^2 - 2n - 3\mu'} \left[ (\Delta^P - \Delta^B)_n - n\Delta^B_n \right].$$

Как и при любом другом методе решения, здесь необходимо, чтобы выполнялось дополнительное условие — обращалась в 0 функция первого порядка в разложении аномалий:

$$(\Delta^P - \frac{3}{2}\Delta^B)_1 = 0.$$

Тогда при  $n > 1$  будем иметь:

$$\frac{\gamma}{R} \zeta_n = \frac{(\Delta^P - 2\Delta^B)_n}{n-1} + \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n(n-1)}. \quad (2.5)$$

и, суммируя  $\zeta_n$  от 0 до  $\infty$ , получаем исправленное решение уравнения Моисеева:

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta^P - 2\Delta^B) S(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta^P - \Delta^B) F(\psi) d\sigma, \quad (2.6)$$

где  $S(\psi)$  — функция Стокса

$$F(\psi) = \sum_2^{\infty} \left( \frac{2n+1}{n-1} - \frac{2n+1}{n} \right) P_n(\cos\psi) = \\ = (1 - 3\cos\psi) \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos\psi. \quad (2.7)$$

## § 6. Формула Малкина [5]

В основу этого вывода кладется известная теорема Шаля. Геоид делит массу Земли на внутреннюю и внешнюю, лежащую вне геоида. Потенциал, создаваемый вне геоида всеми внутренними массами, по теореме Шаля определится через значение силы тяжести на поверхности уровня реальной Земли. Прибавляя сюда потенциал от всех внешних масс, получим результирующий потенциал от всех масс реальной Земли. Далее обычным способом, выделяя нормальные значения, переходим к „смешанным“ аномалиям силы тяжести и к аномалии потенциальной функции. Интегральное уравнение получается вначале отнесенным к поверхности геоида, а затем преобразуется к поверхности сферы.

Результат, в обозначениях Моисеева, получается следующий:

$$\zeta = 2\zeta_e + \frac{R}{2\pi\gamma} \int \frac{-\Delta^P}{r} d\sigma + \frac{3R}{4\pi} \int \frac{\zeta d\sigma}{r},$$

где  $\zeta_e$  — смещение уровневой поверхности от притяжения масс, находящихся вне геоида.

Переходя к сферическим функциям, получаем соотношение:

$$\zeta_n = 2(\zeta_e)_n - \frac{2R}{\gamma} \frac{(\Delta^P)_n}{2n+1} + \frac{3}{2n+1} \zeta_n$$

или

$$\zeta_n \frac{n-1}{2n+1} = (\zeta_e)_n - \frac{R}{\gamma} \frac{(\Delta^P)_n}{2n+1}.$$

Условие, накладываемое на сферические функции первого порядка:

$$(\zeta_e)_1 = \frac{R}{3\gamma} (\Delta^P)_1,$$

кроме того,

$$+\zeta_0 = -(\zeta_e)_0 + \frac{R}{\gamma} (\Delta^P)_0.$$

При  $n \neq 1$  имеем

$$\zeta_n = \frac{2n+1}{n-1} (\zeta_e)_n - \frac{R}{\gamma} \frac{(\Delta^P)_n}{n-1}. \quad (2.8)$$

Суммируя все  $\zeta_n$  от  $n=0$  до  $n=\infty$ , получаем:

$$\zeta = \zeta_0 + 2\zeta_e - 2(\zeta_e)_1 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left( -\Delta^P + \frac{3\gamma\zeta_e}{R} \right) S(\psi) d\sigma - 2(\zeta_e)_0 \quad (2.9)$$

## § 7. Сравнение формул Моисеева и Малкина

Для этого, очевидно, нужно установить связь между величинами  $\zeta_e$  (Малкин) и  $\Delta^P - \Delta^B$  (Моисеев), так как различие формул сводится к тому, что, кроме аномалий Прейя, у Малкина еще считается известным потенциал, вызываемый внешними массами, а у Моисеева — радиальный градиент этого потенциала на внутренней точке.

Решая внутреннюю задачу Неймана при заданных значениях  $\Delta^P - \Delta^B$ , очевидно, получим соотношение

$$(\zeta_e)_n = \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n} \cdot \frac{R}{\gamma} \quad \text{при } n \neq 0. \quad (2.10)$$

Теперь основное соотношение между сферическими функциями (2.8), получающееся из формулы Малкина, после исключения  $(\zeta_e)_n$  приведет к такому виду:

$$\zeta_n = \frac{R}{\gamma} \frac{2n+1}{n(n-1)} (\Delta^P - \Delta^B)_n - \frac{R}{\gamma} \frac{(\Delta^P)_n}{n-1} = \frac{R}{\gamma} \left[ \frac{(\Delta^P - 2\Delta^B)_n}{n-1} + \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n(n-1)} \right],$$

что в точности совпадает с результатами Моисеева, см. формулу (2.5).

Последнее соотношение можно записать также и в ином виде, исключая  $\Delta^P$ :

$$\zeta_n = (\zeta_e)_n + \frac{R}{\gamma} \frac{(-\Delta^B)_n + \frac{2\gamma}{R} (\zeta_e)_n}{n-1} \quad (2.11)$$

или, суммируя по всем значениям  $n$ , кроме  $n=1$ , получим в интегральной форме:

$$\zeta = \zeta_e - (\zeta_e)_1 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left( -\Delta^B + \frac{2\gamma}{R} \zeta_e \right) \left( S(\psi) - \frac{1}{2} \right) d\sigma, \quad (2.12)$$

где  $S(\psi)$  — функция Стокса.

Это решение, очевидно, можно интерпретировать следующими операциями:

1) Все массы, находящиеся вне геоида, убираются. В связи с этим в наблюдаемые значения силы тяжести вводится точная поправка Буге (с учетом рельефа всей Земли). Заметим, что редуцирование силы тяжести к поверхности геоида должно производиться с учетом аномалий вертикального градиента силы тяжести, при чем вычисление этих аномалий должно выполняться по карте изоаномал Буге. (Здесь, повидимому, неизбежен процесс последовательных приближений). Таким образом будет получено  $-\Delta^B$ .

2) Редуцирование силы тяжести производится на поверхность уровня, соответствующую деформированному геоиду после удаления наружных масс (поправка  $\frac{2\gamma}{R} \zeta_e$ ).

3) С полученными таким образом аномалиями Буге на деформированном геоиде вычисляются высоты геоида Буге по формуле Стокса.

4) После этого учитывается поправка  $\zeta_e - (\zeta_e)_1$  за деформацию геоида в результате удаления внешних масс (переход от регуляризированной к реальной Земле).

Здесь мы, исходя из последней формулы, получили совокупность операций, подобную той, которая указана де Грааф Хентером при использовании изостатических аномалий (роль „геоида Буге“ там играет „компенсированный геоид“). В сущности говоря, все это вытекает непосредственно из строгого толкования формулы Стокса.

Изложенная выше программа действий для определения высот геоида приведена нами только для характеристики формул. Очевидно, с практической стороны она нерациональна. Если определять фигуру геоида подобным методом, то лучше пользоваться методом инверсии или конденсации.

## § 8. Формула Молоденского [6]

Формула Молоденского от разобранных выше формул по существу, конечно, отличаться не может. Отличие может быть только по форме. А это отличие заключается в том, что она ближе по своей форме к классической формуле Стокса, нежели формулы Малкина и Моисеева.

В выводе Молоденского наиболее важным является то, что он обратил внимание на необходимость учета аномалий вертикального градиента силы тяжести и делает попытку более точного вычисления аномалий Проя.

Формулы Молоденского опубликованы в таком виде:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{-\Delta^P + P}{r} d\sigma + \frac{3}{4\pi R} \int \frac{\zeta}{r} d\sigma, \text{ где } -\Delta^P + P = g - \gamma + 2\gamma \int \frac{dR}{\rho} + Q; \quad Q = 4\pi k^2 \int \mu_e \left( \frac{R^2}{R^2} \frac{r}{r} - 1 \right) dR \quad (2.13)$$

Заметим, что решение этого уравнения, данное автором в таком виде:

$$\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int (-\Delta^P + P) S(\psi) d\sigma, \quad (2.14)$$

строго говоря, неверно, хотя степень приближения этого решения к точному практически, вероятно, достаточна (упрощение допущено в поправке за деконденсацию в сферических зонах).

Для плоскости имеем строгое решение

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{\Delta g_0 + H \left( \frac{dg}{dz} \right)_m + 4\pi k^2 \mu_e r \left( \operatorname{arsh} \frac{H}{r} - \frac{H}{r} \right)}{r} d\sigma.$$

Формулу (2.14) нетрудно уточнить.

Основное соотношение между сферическими функциями (2.5) легко приводится к такому виду:

$$\zeta_n = \frac{R \left( \Delta^P - 2\Delta^B + \frac{\gamma \zeta_e}{R} \right)_n}{\gamma (n-1)},$$

которому соответствует следующая интегральная формула:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left[ \Delta^P - 2\Delta^B + \frac{\gamma \zeta_e}{R} \right] \left[ S(\psi) - \frac{1}{2} \right] d\sigma. \quad (2.15)$$

Для практических целей, если составить специальные таблицы, эта форма, вероятно, окажется наиболее удобной.

### § 9. Сравнение прямого метода решения („нерегуляризированной Земли“) с методом конденсации

Итак, формулы Моисеева, Малкина и Молоденского приводят к общему соотношению между сферическими функциями:

$$\frac{\gamma}{R} \zeta_n = \frac{(\Delta^P - 2\Delta^B)_n}{n-1} + \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n(n-1)},$$

при чем

$$\frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n} = \frac{\gamma}{R} (\zeta_e)_n.$$

Введем величины:

$(\Delta^P)_e$  — радиальный градиент притяжения конденсированных внешних масс на внутреннюю точку;

$(\zeta_e)_e$  — смещение уровневой поверхности от конденсированных внешних масс.

Очевидно, что

$$(\Delta^P_B)^c_n = 4\pi k^2 \mu_e \cdot \frac{n H_n}{2n+1}.$$

Преобразуем  $\zeta_n$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{R} (n-1) \zeta_n = & (-\Delta^P)_n + 4\pi k^2 \mu_e H_n + \left[ \Delta^P_B - (\Delta^P_B)^c \right]_n + \\ & + \left[ (n-1)(\zeta_e - \zeta_e^c)_n + 2(\zeta_e - \zeta_e^c)_n \right] \cdot \frac{\gamma}{R}. \end{aligned}$$

Суммируя все значения  $\zeta_n$  от  $n=0$  до  $n=\infty$  ( $\zeta_1=0$ ),

получим, переходя к интегральной форме:

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta_e - \zeta_e^c - (\zeta_e - \zeta_e^c)_1 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left[ -\Delta^P + 4\pi k^2 \mu_e H + \right. \\ \left. + \Delta^P_B - (\Delta^P_B)^c + \frac{2(\zeta_e - \zeta_e^c)\gamma}{R} \right] \left( S(\psi) - \frac{1}{2} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Пользуясь формулой Брунса, получаем:

$$-\Delta^P + 4\pi k^2 \mu_e H = \Delta g_0 + H \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial z} \right)_m,$$

причем  $\frac{1}{2\gamma} \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial z} \right)_m$  — среднее значение аномалии средней кривизны на

участке  $H$ , от поверхности геоида до физической поверхности Земли.

Теперь имеем окончательно:

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta_e - \zeta_e^c - (\zeta_e - \zeta_e^c)_1 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left[ \Delta g_0 + H \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial z} \right)_m + \Delta^P_B - (\Delta^P_B)^c + \right. \\ \left. + \frac{2(\zeta_e - \zeta_e^c)\gamma}{R} \right] \left( S(\psi) - \frac{1}{2} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Это решение сводится к следующим операциям:

1) В аномалию Фая вводится поправка за аномалию вертикального градиента силы тяжести  $H \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial z} \right)_m$  и за конденсацию внешних масс  $\Delta^P_B - (\Delta^P_B)^c$ .

2) Редуцирование силы тяжести производится к поверхности геоида, деформированного в результате конденсации наружных масс

$$\left( \text{член } \frac{2(\zeta_e - \zeta_e^c)\gamma}{R} \right).$$

3) С исправленными после указанных операций аномалиями вычисляются высоты геоида по формуле Стокса.

4) В окончательный результат вводится поправка за конденсацию внешних масс  $[\zeta_e - \zeta_e^c - (\zeta_e - \zeta_e^c)_1]$ .

Последняя поправка, вопреки замечаниям Малкина, вводится с ее естественным знаком [10].

Полученный результат совпадает с точкой зрения А. А. Михайлова [11].

## § 10. В ы в о д ы

Из разбора формул, выведенных для нерегуляризированной Земли, и их сравнения с формулой Стокса мы приходим к следующим выводам:

1) Все эти формулы, после исправления формулы Моисеева, оказываются между собой тождественными при строгом толковании входящих в них величин (например,  $\Delta^p$ ,  $\Delta^p$  в у Моисеева,  $\Delta^p$ ,  $\zeta_e$  — у Малкина).

2) Они приводят к процессу вычислений высот геоида, который можно интерпретировать той или иной формой регуляризации Земли. Этот процесс складывается из следующих основных операций:

а) вычисление аномалий силы тяжести, соответствующих данному методу регуляризации;

б) приведение силы тяжести к уровню геоида регуляризированной Земли;

в) вычисление высот регуляризованного геоида по формуле Стокса и, наконец,

г) исправление результата поправкой, учитывающей изменение высоты геоида вследствие регуляризации Земли.

3) Регуляризация Земли, которая должна предшествовать применению формулы Стокса, может выполняться любым методом: конденсацией наружных масс на поверхность геоида, простым их удалением методом инверсии, распределением наружных масс между поверхностью геоида и „изостатической поверхностью“. Если правильно получено значение силы тяжести на поверхности геоида регуляризированной Земли, то формула Стокса определит форму этого геоида. Если после этого правильно будут учтены деформации геоида, возникшие в результате регуляризации, то конечный результат — фигура геоида реальной Земли — должен получиться одним и тем же, независимо от выбора пути решения этой задачи.

4) При исследовании фигуры геоида в горных районах учет аномалий вертикального градиента силы тяжести является обязательным. Вычисление этой поправки должно производиться на основе фактического распределения аномалий силы тяжести. Замена фактического материала какой-либо гипотезой, напр., изостатической, иногда может ухудшить результат (например, в Крыму).

## Глава III

### ФИГУРА РЕАЛЬНОЙ ЗЕМЛИ

#### § 11. Редукции на геоид. Сравнение методов, изложенных в гл. I и II

Ни один из вопросов теоретической и прикладной гравиметрии не привлекал к себе такого внимания, как вопрос о редукции силы тяжести к уровню моря. Этому вопросу посвящены сотни работ, трактующих его с разнообразных точек зрения. К способу редукции силы тяжести геодезисты, геологи и геофизики предъявляют разнообразные требования, вытекающие из особенностей разрешаемых ими задач. В связи с этим предложено значительное число методов редукции, каждый из которых обладает известными преимуществами и недостатками, более или менее существенными в условиях той или иной конкретной задачи. При оценке этих методов приходится принимать во внимание целый ряд обстоятельств, начиная с соображений теоретического порядка и кончая чисто практическими мотивами, связанными, например, с современной точностью гравиметрических пунктов, их распределением, с объемом вычислительных работ и пр. Мы не имеем возможности освещать

титель этот вопрос всесторонне и в дальнейшем будем исключительно иметь в виду ту сторону его, которая связана с задачей изучения формы и размеров Земли.

При таком ограниченном подходе рассматриваемый вопрос становится частью проблемы Стокса, и с принципиальной стороны его решение полностью должно вытекать из решения этой общей проблемы. Но путь решения может быть выбран далеко не единственным образом, и этот выбор должен быть подчинен соображениям, вытекающим из современных технических, производственных и вычислительных возможностей.

Возможны два пути для уяснения принципиальной стороны вопроса о редукции силы тяжести. Первый путь, являвшийся до последнего времени главным и почти единственным, берет свое начало от Стокса. Он характерен тем, что с самого начала условия задачи упрощаются тем, что вместо реальной Земли рассматривается Земля, у которой массы, лежащие вне геоида, тем или иным способом перемещены во внутрь геоида или на его поверхность. Тогда всюду вне геоида потенциал становится функцией регулярной. Таким образом, исходным объектом исследования является регуляризованная Земля, а способ регуляризации определяет метод редуцирования силы тяжести к уровню моря. Можно сказать иначе: заданным здесь можно считать метод редукции, а исследованию подлежат связь редуцированных значений силы тяжести с формой геоида, вывод необходимых добавочных поправок, учитывающих начальное упрощение задачи, достоверность результата.

Второй путь, впервые намеченный Джеффрисом в 1932 г. и развитый в работах советских ученых, изложенный нами во II главе, характерен тем, что рассматривается реальная Земля, без предварительной регуляризации ее. Идя по этому пути, можно не задаваться заранее определенным типом редукции и даже не считать этот вопрос отдельным и самостоятельным. Те операции, которые нужно выполнить с измеренными значениями силы тяжести, чтобы получить высоту геоида или отклонение отвеса, или другой какой-либо элемент гравитационного поля Земли, при такой постановке вопроса должны вытекать из построения исходных уравнений и их последующих преобразований. Этот путь позволяет глубже понять существо проблемы и выявить такие поправочные члены, которые иначе могут остаться незамеченными.

Но при более внимательном рассмотрении обсуждаемого вопроса обнаруживаются такие моменты, в результате учета которых грань между проблемами „регуляризованной“ и „нерегуляризованной“ Земли значительно стирается и выявляются слабые стороны второго, казалось бы, лучшего метода.

К построению уравнений, определяющих фигуру геоида нерегуляризованной Земли, привело стремление к уточнению формулы Стокса. Проведенный нами в предыдущей главе анализ этих уравнений показывает, что они могут быть интерпретированы той или иной формой регуляризации Земли. При такой интерпретации регуляризация входит как промежуточная стадия вывода, а все связанные с ней обстоятельства должны последовательно учитываться как в стадии перехода от реальной к регуляризованной Земле, так и при обратном переходе. Чтобы конкретизировать и сократить дальнейшие рассуждения, перечислим и отметим буквами последовательность тех операций, которые должны выполняться при регуляризации конденсацией масс на поверхность геоида:

А. Переход от реальной к регуляризованной Земле, в результате которого должны быть получены значения ускорения силы тяжести на внешней урвеной поверхности регуляризованной Земли.

Сюда входят следующие операции:

а) в измеренные значения силы тяжести, относящиеся к точкам физической поверхности Земли, вводятся поправки, учитывающие изменения в результате конденсации;

б) определяется смещение геоида вследствие конденсации масс, чтобы получить расстояние точек физической поверхности Земли от поверхности геоида регуляризированной Земли;

в) располагая предыдущими данными, устанавливаются значения силы тяжести на уровне поверхности (геоиде) регуляризированной Земли.

Б. Определение формы геоида регуляризированной Земли по формуле Стокса.

В. Возращение к геоиду реальной Земли (путем учета ранее полученных деформаций геоида вследствие конденсации масс).

Сколько-нибудь строгое выполнение указанных операций связано с большими принципиальными (и тем более практическими) трудностями, которые мы кратко отметим в последовательности перечисленных операций. Прежде всего, для выполнения операций „Аа“ и „Аб“ нужно знать:

1) плотность в каждой точке для всех масс, которые находятся вне геоида;

2) действительную форму физической поверхности Земли и регуляризованного геоида.

Допустим, что первое нам известно, а второе в этой задаче или пренебрегаемо, или учитывается последовательными приближениями. Тогда можно перейти к операции „Ав“. Эта операция не возникла бы, если бы решалась краевая задача с заданием краевых условий на физической поверхности Земли. Следовательно, указанная краевая задача и операция „Ав“ эквивалентны и одинаково трудны. Операция „Ав“ должна привести к построению такой совокупности краевых значений на уровне поверхности, которая для внешнего пространства определит те же значения потенциала, что и исходные краевые значения на поверхности Земли. Эту задачу можно пытаться решать методом аналитического продолжения потенциала из внешнего пространства в ту область, которую до регуляризации занимали внешние притягивающие массы. Однако, приемлемых способов решения этой задачи неизвестно. Можно только предполагать возможность ее решения последовательными приближениями, заранее мирясь с медленной сходимостью этого процесса в горных районах Земли. Сама возможность аналитического продолжения не вызывала бы особых сомнений, если бы притяжение масс, подвергнутых конденсации, было учтено полностью, а для этого опять необходимо знать плотность притягивающих масс в каждой точке вне геоида. Однако и здесь приходится ограничиваться принятием некоторой постоянной средней плотности не только для облегчения вычислений, но и потому, что с нужной полнотой геологическое строение даже интересующих нас поверхностных слоев земной коры известно только для отдельных, и притом небольших, районов. Но в этом случае возможность аналитического продолжения потенциала становится более чем сомнительной. Все это приводит к большому осложнению проблемы и вносит в нее значительную неопределенность.

Может показаться, что указанные осложнения вызываются тем, что уравнения, выведенные для нерегуляризированной Земли, здесь интерпретируются посредством промежуточной регуляризации. Казалось бы, что структура уравнений, построенных для нерегуляризированной Земли, снимает наиболее трудную операцию „Ав“. Однако кажущееся упрощение задачи обусловлено тем, что в эти уравнения входит сила тяжести в точках поверхности геоида. Считая ее известной, мы предполагаем операцию „Ав“ уже выполненной, чем и вызывается кажущаяся простота уравнений. На самом деле сила тяжести на поверхности реальной Земли весьма сложно связана с измеренными значениями силы тяжести и геологическим строением земной коры. Редукция Прера в ее простейшей форме, когда не учитывается аномалия второй вертикальной производной потенциала, явно не достигает цели, как это следует из рассмотрения про-

стейших примеров. Даже предполагая  $\frac{\partial g}{\partial z}$  известным (измеренным) вбли-

зи поверхности Земли, мы должны с большой осторожностью пользо-  
ваться этой величиной для редукиции (вследствие прерывности вторых  
производных потенциальной функции, сильной подверженности их местным  
возмущениям, учитывая возможность расходимости ряда, выражающего  
разложение редукиции, и пр.). Если мы можем в крайнем случае считать  
известными плотности внешних масс, то никак не можем отнести это  
и к внутренним массам. А в таком случае, чтобы при редукировании  
силы тяжести учесть аномалии плотностей внутри геоида, вряд ли можно  
обойтись без промежуточной регуляризации, которая позволит или ис-

пользовать измеренное значение  $\frac{\partial g}{\partial z}$  (если бы такое измерение оказалось

возможным, но и в этом случае—после соответствующих исправлений и  
с большой осторожностью), или перейти к указанной ранее операции „Ав“.

Таким образом, указанные осложнения присущи самой рассматри-  
ваемой проблеме и сохраняются при любой трактовке уравнений, выве-  
денных для определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли.  
В той постановке вопроса, с которой мы начали, они проявляются только  
в менее завуалированной форме.

Нельзя не согласиться с изложенными затруднениями, но может  
показаться, что они носят более теоретический, чем практический ха-  
рактер, так что игнорирование их не приведет на практике к заметным  
ошибкам. С этим в известной степени можно согласиться, когда речь  
идет об исследовании фигуры геоида в местах равнинных. В горных  
же районах ограничение обычной формой редукиции Проя означает пре-  
небрежение основным фактором, уточняющим элементарную трактовку  
теории Стокса. Тогда не будут иметь особого смысла и все дальней-  
шие уточнения, достигаемые в теории нерегуляризированной Земли.

При более детальном подходе к рассматриваемой проблеме обна-  
руживаются новые трудности. Обычно принимают, что известны высоты  
мест наблюдения—точек физической поверхности Земли—относительно  
геоида. Однако, из нивелирных работ, проводимых на поверхности  
Земли, непосредственно получают только величины  $dH$ —элементарные  
превышения двух соседних точек, измеренные с одной установки ниве-  
лира, относительно поверхности уровня, проходящей через нивелир.  
Чтобы получить элементарное превышение рассматриваемых точек отно-  
сительно геоида, необходимо было бы учесть искривление силовой  
линии от поверхности Земли до геоида. Если вдоль нивелирного хода  
всюду измерено ускорение силы тяжести  $g$ , то, как известно, этими  
данными определяется только разность потенциалов

$$W_B - W_A = - \int_A^B g dH$$

Пусть точка  $A$  находится одновременно и на поверхности геоида,  
и на поверхности Земли (океана), а предыдущий интеграл берется по  
замкнутому контуру—по кривой  $AB$ , целиком лежащей на поверхности  
Земли, затем по силовой линии  $BC$ , до точки геоида  $C$  и, наконец, по  
поверхности геоида от  $C$  до  $A$ .

Тогда

$$W_B - W_A = - \int_A^B g dH = - \int_C^B g dH = - g_m H, \quad (3.1)$$

где  $H$ —длина дуги  $BC$  (или высота  $B$  над уровнем геоида), а  $g_m$ —значение  $g$  в некоторой неизвестной точке линии  $BC$ .

Последнюю величину ( $g_m$ ) можно было бы точно вычислить только в том случае, если бы столько же точно мы умели вычислять редукцию Прея для любой точки силовой линии  $BC$ . Следовательно, вычисление ортометрической поправки в высоту содержит в себе тот же элемент неопределенности, который был отмечен для уравнений, определяющих геоид нерегуляризированной Земли.

Заметим, что при вычислении ортометрической поправки в высоту обычно предполагают:

1) что плотность слоя земной коры выше геоида известна во всех точках (или предполагается постоянной известной величиной);

2) игнорируется аномалия второй вертикальной производной потенциала. Кроме того, делаются и другие необязательные предположения, которые служат только для упрощения задачи (например, пренебрегают поправкой за рельеф, предполагают линейность изменения  $g$  с высотой и пр.). Обычно второе предположение не формулируется, хотя и принципиально и практически оно наиболее существенно.

При таком упрощенном подходе к вычислению ортометрической поправки вычисленные подобным способом ортометрические высоты будут являться функцией не только положения точки, но и пути интегрирования, а, следовательно, вряд ли удовлетворительно будет достигаться основная цель введения этих поправок. Таким образом, обычные ортометрические высоты при строгом решении задачи не могут считаться отсчитанными от поверхности геоида.

Обратимся к третьей задаче, которую приходится решать при обработке геодезических измерений, именно к редукции на поверхность геоида направления вертикали. Дифференцируя (3.1) по направлению касательной к поверхности относимости, получим:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_C = - \int_C^B \frac{\partial g}{\partial x} dH,$$

где  $g$ —опять значение ускорения силы тяжести в переменной точке силовой линии внутри притягивающих масс. Рассматриваемая величина пропорциональна производной по горизонтальным направлениям от ортометрической поправки в высоту, а, следовательно, неопределенность и неточность решения предыдущей задачи здесь войдут в усиленном виде: изменение плотности внешних масс и вариации второй вертикальной производной потенциала приведут здесь к погрешностям, которые могут быть много больше тех значений, которые можно получить с помощью элементарной теории.

Таким образом, во всех задачах, связанных как с уточненным определением фигуры Земли, так и с редукцией измеренных геодезических элементов (базисов, астрономических координат, горизонтальных направлений и пр.) на геоид или референц-эллипсоид, мы сталкиваемся с общей неопределенностью и неточностью, возникающей при продолжении силы тяжести во внутрь масс, лежащих между геоидом и физической поверхностью Земли. Даже после регуляризации Земли, сопровождаемой учетом истинных плотностей всех масс, задача остается очень сложной, поскольку необходимо учитывать эффект изменения притяжения неизвестных внутренних масс.

Все указанные затруднения вполне закономерны: они связаны с тем, что невозможно определить форму геоида, располагая только результатами геодезических измерений на поверхности Земли. Это следует из очевидного утверждения, что можно указать такие конфигурации масс,

которые будут создавать одинаковые поля тяготения вне физической поверхности Земли, но будут развивать различный потенциал на отдельных участках геоида.

Учитывая изложенные затруднения, должна представлять интерес попытка исключения геоида, как основной поверхности редукции всех геодезических измерений.

Если удастся определить форму физической поверхности Земли и потенциал вне этой поверхности, располагая только данными, получаемыми из наблюдений на этой поверхности, то все производственные и основные научные геодезические задачи могут быть решены без привлечения каких-либо гипотез. Такое решение окажется последовательным и свободным от тех темных мест, которые возникают при выборе геоида в качестве основной редукционной поверхности.

Учитывая изложенные соображения, в дальнейших построениях мы будем исходить только из тех величин, которые можно считать известными из измерений, выполненных на поверхности Земли. Следовательно, заданными из наблюдений нужно принимать только значения потенциала силы тяжести и его градиента  $g$  на поверхности Земли. Значения тех же величин в точках, занятых притягивающими массами, неопределимы, поскольку мы не привлекаем к решению задачи какие-либо геологические сведения. Поэтому краевые условия задачи должны задаваться на поверхности Земли.

## § 12. Переход в формуле Грина к производным по направлениям координатных линий

Для облегчения чтения формул, которые будут выводиться при дальнейшем изложении, мы составим таблицу основных обозначений, которые будут употребляться в этой главе. Далее в тексте эти обозначения будут пояснены более подробно. Нам придется иметь дело с величинами, заданными на трех поверхностях:

1) на поверхности Земли  $S'$ , форма которой неизвестна и подлежит определению;

2) на вспомогательной поверхности  $S$ , которую, как увидим, можно будет считать известной;

3) на поверхности относимости  $S_0$ , которая является поверхностью уровня нормального потенциала. Кроме того, некоторые величины будут относиться к исследуемой точке („ауфпункту“). Одни и те же величины будут обозначаться одинаковыми буквами, а индекс укажет, к какой поверхности они отнесены. Надстрочные штрихи будут отмечать, что данная величина относится к поверхности  $S'$  и зависит от неизвестной формы поверхности Земли; надстрочная черта, как правило, будет обозначать функции, относящиеся к элементу соответствующей поверхности интегрирования и зависящие от переменных интеграции.

Таким образом, получим следующую таблицу:

Обозначаемый элемент	Его обозначение			
	в исследуемой точке	в переменной точке		
		на $S'$	на $S$	на $S_0$
1. Криволинейные координаты	$q, q_1, q_2$	$\bar{q}', q'_1, q'_2$	$\bar{q}, q_1, q_2$	$q=0; q_1, q_2$
2. Астрономические (или геодезические) криволинейные координаты	$q^0, q^0_2$	$q^0_1, q^0_2$	—	—
3. Коэффициенты первой квадратичной формы	—	$h', h'_1, h'_2$	$h, h_1, h_2$	$h^0, h^0_1, h^0_2$

Обозначаемый элемент	Его обозначение			
	в исследуемой точке	в переменной точке		
		на $S'$	на $S$	на $S_0$
4. Потенциал силы тяжести реальной Земли . . . . .	$W$	$\bar{W}$	—	—
5. Потенциал притяжения реальной Земли . . . . .	$V'$	$\bar{V}'$	—	—
6. Ускорение силы тяжести реальной Земли . . . . .	$g$	$\bar{g}$	—	—
7. Нормальный потенциал силы тяжести . . . . .	$U'$	$\bar{U}'$	$\bar{U}$	const.
8. Его градиент . . . . .	$-\gamma'$	$-\bar{\gamma}'$	$-\bar{\gamma}$	$-\gamma_0$
9. Возмущающий потенциал . . . . .	$T$	$\bar{T}$	—	—
10. Расстояние между исследуемой и переменной точками . . . . .	$r=0$	$r'$	$r$	$r_0$

Наше дальнейшее изложение будет исходить из формулы Грина, с помощью которой Джеффрис [2] доказал необходимость применения редукции в свободном воздухе при исследовании фигуры геоида. Но Джеффрис ограничился только выводами качественного порядка. С рассуждениями Джеффриса у нас общим будет то, что мы также будем интегрирование в формуле Грина вести по поверхности Земли, но интегрироваться будем наиболее точным результатом, которого сможем достигнуть. Наша главная задача будет заключаться в том, чтобы исключить неопределенность, связанную с редукциями на геоид, и построить уравнение, связывающее фигуру реальной Земли с такими функциями, численное значение которых получается из геодезических измерений на поверхности Земли.

В примечании к одной из работ [19] Н. Р. Малкина без вывода приведено уравнение, которое решает сходную задачу. Это уравнение определяет «фигуру физической поверхности Земли по силе тяжести, используемой там, где она наблюдается без всяких редукций». Но в это уравнение входит вторая производная от потенциала по направлению нормали к физической поверхности Земли. Интегрирование по поверхности Земли искомого функции входит дважды. Таким образом, уравнение это относится к очень сложному, неизученному типу и связывает интересующий нас элемент с функциями, которые из наблюдений получить невозможно. Конечно, практической ценности оно иметь не может.

Итак, будем исходить из формулы Грина, примененной к потенциалу  $W$  силы тяжести реальной Земли, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ .

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} - (\bar{W} - W) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r'} \right] dS' + 2\omega^2 \int_{S'} \frac{d\tau}{r_\tau} \quad (3.2)$$

$r_\tau$  — расстояние от исследуемой точки до элемента объема  $d\tau$ .

Как было указано в I главе на стр. 10, при таком написании формулы Грина исследуемая точка может находиться и на поверхности  $S'$  и вне этой поверхности.

Аналогичное этому уравнение можно составить и для нормального потенциала, взяв для него ту же поверхность интегрирования  $S'$ . Тогда вторые интегралы справа будут одинаковы. Образовав разность и вводя

возмущающий потенциал  $T$  (потенциал центробежной силы из него исключается), получим:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} - (\bar{T} - T) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r'} \right] dS'. \quad (3.3)$$

Напомним, что здесь  $r'$  означает расстояние от исследуемой точки до элемента поверхности  $dS'$ , а производные берутся по направлению внешней нормали к физической поверхности Земли. Последнюю мы можем считать сглаженной настолько, чтобы в каждой точке она имела определенные конечные кривизны.

Если бы поверхность  $S'$  была известна, то написанное преобразование можно было бы рассматривать как интегральное уравнение, которое могло бы служить для определения  $\frac{\partial T}{\partial n}$  по заданным значениям  $T$  или

для решения обратной задачи. В наших условиях его нужно рассматривать как уравнение относительно неизвестной поверхности  $S'$ .

Мы ставим своей целью показать, что уравнение (3.3) можно привести к линейному интегральному уравнению типа Фредгольма, которое определит форму поверхности  $S'$ .

Введем в рассмотрение криволинейную ортогональную систему координат  $q, q_1, q_2$ . Для определенности будем считать ее эллиптической, имея в виду получить достаточное приближение к фигуре Земли, но при желании под  $q, q_1, q_2$  можно понимать любые взаимноортогональные координаты. Пусть  $q = \text{const.}$  есть уравнение эллипсоида в этих координатах, а  $q_1 = \text{const.}$  и  $q_2 = \text{const.}$  — уравнения однополостного и двуполостного гиперболоидов. Наконец, пусть искомого уравнение физической поверхности Земли выражается так:

$$q = \bar{q}'(q_1, q_2), \quad (3.4)$$

где  $\bar{q}'$  — неизвестная функция  $q_1$  и  $q_2$ .

Пусть в этой системе координат квадрат элемента дуги выражается так:

$$dl^2 = h^2 dq^2 + h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2. \quad (3.5)$$

Следовательно, через прямоугольные декартовы координаты  $x, y, z$  коэффициенты  $h, h_1$  и  $h_2$  определяются известным образом:

$$\left. \begin{aligned} h^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q} \right)^2, \\ h_1^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2, \\ h_2^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Рассмотрим произвольную кривую на поверхности Земли. Очевидно, дифференциалы ее координат должны удовлетворять уравнению (3.4):

$$dq = \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} dq_2. \quad (3.7)$$

Назовем проекции дифференциала дуги  $dl$  этой кривой на направления координатных линий в данной точке через  $dl_0, dl_1, dl_2$ . Тогда из (3.5) получим

$$\begin{aligned} dl_0 &= h dq, \\ dl_1 &= h_1 dq_1, \\ dl_2 &= h_2 dq_2, \end{aligned}$$

и, следовательно, через эти проекции уравнение (3.7) выразится следующим образом:

$$\frac{dl_0}{h} - \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} \frac{dl_1}{h_1} - \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \frac{dl_2}{h_2} = 0. \quad (3.8)$$

Направление  $n$  нормали к поверхности Земли перпендикулярно к элементу  $dl$ , так как он расположен на поверхности Земли. Поэтому

$$\cos(qn) dl_0 + \cos(q_1 n) dl_1 + \cos(q_2 n) dl_2 = 0$$

(3.8) представляет собой уравнение элемента касательной плоскости к поверхности Земли. Поэтому косинусы углов нормали  $n$  к поверхности Земли с направлениями координатных линий в данной точке соответственно равны:

$$\begin{aligned} \cos(qn) &= \frac{1}{Mh}, \\ \cos(q_1 n) &= -\frac{1}{Mh_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1}, \\ \cos(q_2 n) &= -\frac{1}{Mh_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$M^2 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \right)^2.$$

Составим выражение для производной по направлению нормали к поверхности Земли от какой-либо функции криволинейных координат  $F(q, q_1, q_2)$ . Пусть проекции элемента нормали  $dn$  на направления координатных линий соответственно будут  $dn_0, dn_1$  и  $dn_2$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} dn_0 &= \cos(qn) dn = h dq, \\ dn_1 &= \cos(q_1 n) dn = h_1 dq_1, \\ dn_2 &= \cos(q_2 n) dn = h_2 dq_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n} dn &= \frac{\partial F}{\partial n_0} dn_0 + \frac{\partial F}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial F}{\partial n_2} dn_2 = \\ &= \left[ \frac{\partial F}{\partial n_0} \cos(qn) + \frac{\partial F}{\partial n_1} \cos(q_1 n) + \frac{\partial F}{\partial n_2} \cos(q_2 n) \right] dn = \\ &= \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial q} \cos(qn) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \cos(q_1 n) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \cos(q_2 n) \right] dn. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.9), получим

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \left( \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{h}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} - \frac{h}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \right) \cos(qn) \quad (3.11)$$

Рассмотрим элемент поверхности Земли  $dS'$ , заключенный между координатными линиями  $q_1$  и  $q_1 + dq_1$ ,  $q_2$  и  $q_2 + dq_2$ . Из (3.5) следует

$$dS' \cos(qn) = h_1 h_2 dq_1 dq_2 \quad (3.12)$$

Теперь из (3.11) и (3.12) получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS' = \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{h}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} - \frac{h}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2, \quad (3.13)$$

Для сокращения дальнейших записей введем дифференциальный оператор  $D(F\bar{q})$ , определив его следующим образом:

$$D(F, \bar{q}) = \frac{h}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} + \frac{h}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2}. \quad (3.14)$$

Тогда (3.13) напишется короче:

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS' = \left[ \frac{\partial F}{\partial \nu} - D(F, \bar{q}') \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2 \quad (3.15)$$

так как в соответствии с (3.5)

$$\frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial \nu}, \quad (3.16)$$

где  $\partial \nu$  есть линейный элемент внешней нормали к поверхности  $q = \text{const.}$  в точке с координатами  $\bar{q}', q_1, q_2$ .

Возвращаясь к формуле Грина (3.3) и принимая во внимание (3.15), получаем:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} - (\bar{T} - T) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r'} D(\bar{T}, \bar{q}') + \right. \\ \left. + (\bar{T} - T) D\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h_1' h_2' dq_1 dq_2 \quad (3.17)$$

Таким образом от производных по нормали к физической поверхности Земли мы перешли к производным по направлениям координатных линий.

### § 13. Переход к интегрированию по поверхности $S$ (известной формы)

В уравнении (3.17) интегрирование ведется по поверхности Земли  $S'$ , форма которой нам неизвестна и подлежит определению. Теперь мы намерены перейти к такой новой поверхности  $S$ , форму которой можем считать известной.

В уравнении (3.17), кроме формы поверхности  $S'$ , неизвестными являются также функция  $\bar{q}'(q_1, q_2)$ ,  $\bar{T}$ ,  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu}$ , а также  $r'$ ,  $h_1'$ ,  $h_2'$ , которые зависят от  $\bar{q}'$ .

Прежде всего от  $\bar{q}'$  мы перейдем к новой неизвестной  $q$ , которая, как увидим, мала по сравнению с  $\bar{q}'$ . Функция  $\bar{q}'$  определена равенством (3.4), причем координата  $q$  отсчитывается от эллипсоида, уравнение которого таково:

$$q = 0.$$

Введем в рассмотрение нормальный потенциал  $U(q, q_1, q_2)$ , определяемый теми условиями, что для него эллипсоид  $q = 0$  является внешней поверхностью уровня, заключающей в себе массу, равную массе реальной Земли. Угловую скорость вращения, как и для реальной Земли, примем равной  $\omega$  (тогда, как мы видели, в возмущающий потенциал не входит потенциал центробежной силы). Поставленные условия, согласно теореме Стокса, определяют единственную функцию. Для случая сжатого эллипсоида вращения решение соответствующей задачи изложено во второй половине первой главы.

Как мы уже выяснили ранее, высоты точек поверхности Земли ни над эллипсоидом, ни над уровнем моря, вообще говоря, нельзя считать известными. Известны только потенциал (с точностью до аддитивной постоянной) и величина его градиента — ускорение силы тяжести. Известная величина — потенциал — является функцией трех неизвестных координат  $q'$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ . Последние две координаты приходится считать неизвестными вследствие наличия уклонения отвесной линии.

Определим углы между направлением силовой линии, проходящей через данную точку поверхности Земли, и направлениями координатных линий в этой точке.

Путем рассуждений, аналогичных приведенным при выводе формул (3.9), получим:

$$\cos(qg) : \cos(q_1g) : \cos(q_2g) = \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial q} : \frac{1}{h_1} \frac{\partial W}{\partial q_1} : \frac{1}{h_2} \frac{\partial W}{\partial q_2}.$$

Очевидно, что:

$$\left( \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 = g^2,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести в данной точке.

Таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \cos(qg) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial v}, \\ \cos(q_1g) &= -\frac{1}{gh_1} \frac{\partial W}{\partial q_1}, \\ \cos(q_2g) &= -\frac{1}{gh_2} \frac{\partial W}{\partial q_2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

и аналогично

$$\left. \begin{aligned} \cos(q\gamma) &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial v}, \\ \cos(q_1\gamma) &= -\frac{1}{\gamma h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}, \\ \cos(q_2\gamma) &= -\frac{1}{\gamma h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Положим

$$\bar{q}' = \bar{q} + \frac{\zeta}{h'},$$

где  $\zeta$  новая неизвестная функция, а  $\bar{q}$  будет определено ниже. Пусть из астрономических наблюдений для положения данной точки мы получили координаты  $q^0_1$  и  $q^0_2$ , которые должны быть исправлены поправками  $\delta q_1$  и  $\delta q_2$  за уклонение отвесной линии, чтобы получить истинные координаты  $q_1$  и  $q_2$ , так что

$$q_1 = q^0_1 + \delta q_1,$$

$$q_2 = q^0_2 + \delta q_2.$$

Значение нормального потенциала в данной точке можно представить так:

$$U(\bar{q}', q_1, q_2) = U(\bar{q}, q^0_1, q^0_2) + \frac{\partial U}{\partial v} \zeta + \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 \quad (3.20)$$

Функция  $\bar{q}$  нами еще не определена; выберем ее так, чтобы выполнялось условие:

$$U(\bar{q}, q_1^0, q_2^0) = \bar{W}(q_1, q_2) = W(\bar{q}', q_1, q_2). \quad (3.21)$$

Это условие выражает, что по известному в данном месте (из наблюдений) потенциалу реальной Земли, зная астрономические координаты этого места, мы вычисляем координату  $\bar{q}$  так, как если бы возмущения потенциала и направления силовой линии не было. Очевидно, такое вычисление соответствует естественному первому приближению, когда возмущающие члены не учитываются.

Так как функциональная зависимость  $U$  от всех трех координат известна, при чем  $q_1^0$  и  $q_2^0$  получаются, как сказано, из астрономических наблюдений, а правая часть (потенциал) — из нивелирных и гравиметрических работ, мы из последнего уравнения можем определить  $q$ . Поэтому эту функцию в дальнейшем будем считать известной.

Вспомним определение возмущающего потенциала:

$$T(q, q_1, q_2) = W(q, q_1, q_2) - U(q, q_1, q_2). \quad (3.22)$$

Используя (3.20) и (3.21), получаем:

$$T(\bar{q}', q_1, q_2) = -\frac{\partial U}{\partial v} \zeta - \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2,$$

а с помощью (3.19)

$$T(\bar{q}', q_1, q_2) = \bar{T} = \gamma \left[ \zeta \cos(q\gamma) + h_1 \delta q_1 \cos(q_1\gamma) + h_2 \delta q_2 \cos(q_2\gamma) \right] \quad (3.23)$$

На поверхности  $q=0$ ; очевидно,  $\cos(q\gamma) = 1$  и  $\cos(q_1\gamma) = \cos(q_2\gamma) = 0$ . Для эллипсоида вращения в любой точке пространства  $\cos(q_2\gamma) = 0$ , а  $\cos(q_1\gamma)$  есть величина порядка нормального искривления силовой линии с высотой. Как известно, это искривление менее  $10^{-9}$  на 1 метр, т. е. при любых условиях менее  $10^{-5}$ . Множители же  $h_1 \delta q_1$  и  $h_2 \delta q_2$  представляя собой линейные погрешности в горизонтальных координатах, вызванные уклонением отвеса, и, следовательно, порядок их близок к порядку  $\zeta$ .

Поэтому совершенно спокойно мы можем принять, что

$$T(\bar{q}', q_1, q_2) = \gamma(\bar{q}, q_1^0, q_2^0) \zeta,$$

или короче

$$\bar{T} = \gamma \zeta \quad (3.24)$$

Подставим это выражение для  $\bar{T}$  в (3.17) и примем во внимание (3.18) и (3.19). Получим:

$$\begin{aligned} \gamma \zeta = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{1}{r'} \left( g \cos(qg) - \gamma' \cos(q\gamma) \right) + (\bar{\gamma} \bar{\zeta} - \gamma \zeta) \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r'} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r'} D(\bar{T}, \bar{q}') - (\bar{\gamma} \bar{\zeta} - \gamma \zeta) D\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Пренебрегая величинами порядка  $\zeta^2$ , произведения  $\zeta$  на уклонение отвеса и квадрата уклонения отвеса, можно это уравнение значительно упростить.

Прежде всего  $\cos(qg)$  и тем более  $\cos(q\gamma)$  отличаются от единицы на величину порядка квадрата уклонения отвеса и, следовательно, могут быть заменены единицей.

Далее, при  $\frac{1}{r'}$  или ее производных всюду входят множители порядка

или  $\zeta$ , или аномалии  $g-\gamma$ . Конечно,  $\frac{1}{r}$  зависит от  $\zeta$  и от  $\bar{\zeta}$  в переменной точке; от  $\delta q_1$  и  $\delta q_2$ ;  $\delta \bar{q}_1$  и  $\delta \bar{q}_2$ ; при разложении  $\frac{1}{r}$  в ряд Тэйлора по степеням  $\bar{\zeta} - \zeta, \zeta, \delta \bar{q}_1 - \delta q_1, \delta \bar{q}_2 - \delta q_2$ , все члены разложения, кроме первого, можно в соответствии со сделанным замечанием не учитывать, так как они будут умножаться на величины порядка  $\zeta$  и дадут члены второго порядка малости. Следовательно, мы можем теперь вместо  $\frac{1}{r}$  подставить первый член разложения  $\frac{1}{r}$ , который от всех перечисленных малых величин не зависит и, следовательно, известен, поскольку для любой точки с координатами  $q^0_1$  и  $q^0_2$  третья координата  $\bar{q}$  определена (3.21).

На том же основании в третьем и четвертом члене можем  $q'$  заменить на  $\bar{q}$ , а  $h'_1$  и  $h'_2$  на  $h_1$  и  $h_2$ .

Теперь вместо формулы (3.25) получаем;

$$\gamma \zeta = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{g - \bar{\gamma}}{r} + (\bar{\gamma} \bar{\zeta} - \gamma \zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} D(\bar{\gamma} \bar{\zeta}, \bar{q}) - (\bar{\gamma} \bar{\zeta} - \gamma \zeta) D\left(\frac{1}{r}, \bar{q}\right) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2 \quad (3.26)$$

В точках поверхности  $S'$   $g$  получено из наблюдений, но  $\gamma'$  неизвестно. Остается установить зависимость  $\gamma'$  от  $\zeta$ .

Очевидно,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'\left(\bar{q} + \frac{\zeta}{h}, q^0_1 + \delta q_1, q^0_2 + \delta q_2\right) &= \bar{\gamma}(q, q^0_1, q^0_2) + \zeta \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \nu} + \\ &+ \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial q_2} \delta q_2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Два последние члена очень малы (из них второй для эллипсоида вращения равен нулю, так как в этом случае  $\bar{\gamma}$  не зависит от долготы). Поэтому, беря вместо радиусов кривизны координатной поверхности  $q$  средний радиус Земли  $R$  и принимая во внимание (3.18), можем написать приближенные соотношения:

$$h_1 \delta q_1 \approx -\frac{R}{\gamma_0} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial q_1} = -\frac{R}{\gamma_0} \frac{\partial(\bar{\gamma} \zeta)}{h_1 \partial q_1} \quad (3.28)$$

и аналогично для  $h_2 \delta q_2$ . Используя эти равенства, получаем:

$$\bar{\gamma}' = \bar{\gamma} + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \nu} \zeta - D\left(\bar{\gamma} \zeta, \frac{(\bar{\gamma} - \gamma_0) \cdot R}{\gamma_0 h}\right) \quad (3.29)$$

и после подстановки в (3.26) имеем:

$$\begin{aligned} \gamma \zeta &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{g - \bar{\gamma} - \zeta \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \nu}}{r} + (\bar{\gamma} \zeta - \gamma \zeta) \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} - D\left(\frac{1}{r}, \bar{q}\right) \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{r} D\left(\bar{\gamma} \zeta, \bar{q} + \frac{R}{\gamma_0 h} (\bar{\gamma} - \gamma_0)\right) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

На основании (3.15), поскольку  $T = \gamma\zeta$  вычисляется для точек поверхности  $S$  и интеграл Гаусса равен  $-2\pi$ , получаем:

$$\gamma\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[ \frac{\bar{g} - \bar{\gamma} - \bar{\zeta} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \nu}}{r} + \bar{\gamma} \bar{\zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} - D\left(\frac{1}{r}, \bar{q}\right) \right) + \right. \quad (3.31)$$

$$\left. + \frac{1}{r} D\left(\bar{\gamma} \bar{\zeta}, \bar{q} + \frac{R}{\gamma_0 h} (\gamma - \gamma_0)\right) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2.$$

В этом уравнении единственной неизвестной функцией является  $\zeta$ . Все элементы неопределенности, которые входили в связи с интегрированием по неизвестной поверхности, здесь выявлены и сведены к этой неизвестной функции, которая должна удовлетворять уравнению (3.31).

Заметим, что  $r$  связано той же функциональной зависимостью с координатами  $\bar{q}$ ,  $q^0_1$ ,  $q^0_2$ , какой  $r'$  связано с  $q'$ ,  $q'_1$ ,  $q'_2$ . С этой точки зрения можно сказать, что мы построили новую поверхность  $S$  и перешли к интегрированию по этой поверхности.

Поверхность  $S$  определяется функцией  $\bar{q}$  ( $q^0_1$ ,  $q^0_2$ ); ее можно считать известной, так как равенством (3.21) она однозначно связана с потенциалом  $\bar{W}$ , который получается из нивелировок и гравиметрических наблюдений;  $q^0_1$  и  $q^0_2$  могут определяться из астрономических наблюдений.

Уравнение (3.31) является интегро-дифференциальным. Далее мы покажем, что оно может быть приведено к линейному интегральному уравнению типа Фредгольма с несимметричным ядром. Если окажется, что это уравнение имеет решение и притом единственное, то из этого будет следовать, что фигура реальной Земли может быть определена из совокупности гравиметрических, нивелирных и астрономических работ, при чем никаких других результатов наблюдений для решения этой задачи не требуется.

Все наше рассуждение шло в предположении, что нам известны только астрономические координаты; но с таким же успехом под  $q^0_1$  и  $q^0_2$  можно понимать геодезические координаты. Тогда  $\delta q_1$  и  $\delta q_2$  будут представлять собой разности между геодезическими и истинными координатами и будут зависеть от элементов размера и ориентировки референц-эллипсоида.

Формула (3.21), определяющая  $q$ , сохранит свое написание, но изменит смысл, ибо  $q^0_1$  и  $q^0_2$  теперь будут геодезическими координатами. Вычисление высот по ней с успехом может исключить обычные ортометрические поправки в высоту. Формула (3.24), конечно, не изменится. Вместо (3.28) получим:

$$\left. \begin{aligned} h_1 \delta q_1 &= -R \frac{\partial N}{h_1 \partial q_1}, \\ h_2 \delta q_2 &= -R \frac{\partial N}{h_2 \partial q_2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

где  $N$  — расстояние от нашей поверхности относимости  $q=0$  до геодезического референц-эллипсоида. Поэтому вместо (3.29) будем иметь:

$$\bar{\gamma}' = \bar{\gamma} + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \nu} \bar{\zeta} - \frac{R}{h} D(\bar{N}, \bar{\gamma}). \quad (3.33)$$

Следовательно, в (3.31) под знак интеграла вместо члена

$$\frac{1}{r} D \left( \bar{\gamma} \bar{\zeta}, \bar{q} + \frac{R}{\gamma_0 h} (\gamma - \gamma_0) \right)$$

мы должны включить следующий член

$$\frac{1}{r} D(\bar{N}, \bar{\gamma}) \frac{R}{h} \quad (3.34)$$

Интересно отметить, что рассматриваемый поправочный член внесет в  $\bar{g}$  сферическую гармонику третьего порядка; если угол между эллипсоидами в какой-либо точке Земли может достигать  $10'$ , то соответствующая ошибка в  $\zeta$  может превысить 0,6 метра.

Как видно из приведенных рассуждений, этот член получается потому, что нормальное значение силы тяжести вычисляется по аргументу систематически неверной (геодезической) широты. Различие в системе геодезических координат отдельных континентов может, с этой точки зрения, внести новые эффекты, влияние которых на уклонение отвесной линии должно быть исследовано, так как оно может оказаться более существенным, чем влияние на  $\zeta$ .

#### § 14. Вывод линейного интегрального уравнения для $\zeta$ .

Чтобы перейти от интегро-дифференциального уравнения (3.31) к линейному интегральному уравнению, нужно из (3.31) исключить производные от  $\bar{\gamma} \bar{\zeta}$  по координатам  $q_1$  и  $q_2$ .

Чтобы сократить написание формул, мы будем исходить из неразвернутого (и притом вполне точного) уравнения (3.17) для возмущающего потенциала  $T$  и уже после необходимых преобразований перейдем к единственной неизвестной функции  $\zeta$  подобно тому, как мы выполнили это в предыдущем случае.

Итак, исходное уравнение будет таково:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial v} - (\bar{T} - T) \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r'} D(\bar{T}, \bar{q}') + \right. \\ \left. + (\bar{T} - T) D\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2 \quad (3.35)$$

Входящий в него оператор  $D$  включает дифференцирование по направлениям, параллельным координатной поверхности  $q$ .

Чтобы была возможность преобразования оператора  $D$  интегрированием по частям по переменным  $q_1$  или  $q_2$ , нужно рассматривать  $\bar{T}$  и  $\frac{1}{r'}$  как функцию только этих двух координат, перейдя к производным по направлениям, параллельным поверхности  $S'$ . В частности, условимся символом  $\frac{d\bar{T}}{dq_1}$  обозначать дифференцирование  $\bar{T}$  по  $q_1$  при условии  $q = \bar{q}'(q_1, q_2)$  и  $q_2 = \text{const.}$ , т. е. дифференцирование по направлению касательной к поверхности  $S'$  в плоскости  $q_2 = \text{const.}$  Тогда получим следующее тождество:

$$\frac{d\bar{T}}{dq_1} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_1} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} \frac{\partial q'}{\partial q_1} \quad (3.36)$$

и аналогичные выражения для производных по второй координате и для функции  $\frac{1}{r'}$ .

По аналогии с (3.14) определим оператор  $\bar{D}(\bar{T}, \bar{q}')$ :

$$\bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') = \frac{h}{h_1^2} \frac{d\bar{T}}{dq_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} + \frac{h}{h_2^2} \frac{d\bar{T}}{dq_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \quad (3.37)$$

Тождество (3.36) устанавливает связь между оператором и  $D(\bar{T}, \bar{q}')$  и  $\bar{D}(\bar{T}, \bar{q}')$ :

$$D(\bar{T}, \bar{q}') = \bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} D(\bar{q}', \bar{q}') \quad (3.38)$$

Теперь вместо (3.15) получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS' = \left[ \frac{\partial F}{\partial v} \left( 1 + h D(\bar{q}', \bar{q}') \right) - \bar{D}(F, \bar{q}') \right] h_1' h_2' dq_1 dq_2 \quad (3.39)$$

Заметим, что из (3.9) и (3.14) следует, что

$$1 + h D(\bar{q}', \bar{q}') = \sec^2(q, n) \quad (3.40)$$

Поэтому для  $\frac{\partial F}{\partial n}$  напомним другое выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS' = \left[ \frac{\partial F}{\partial v} \sec^2(q, n) - \bar{D}(F, \bar{q}') \right] h_1' h_2' dq_1 dq_2 \quad (3.41)$$

Возвращаясь теперь к формуле Грина и используя формулу (3.39)

для  $T$  и  $\frac{1}{r'}$ , можем представить ее в криволинейных координатах в следующем виде:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \left( \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial v} - (\bar{T} - T) \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) \left( 1 + h D(\bar{q}', \bar{q}') \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r'} \bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') + (\bar{T} - T) \bar{D} \left( \frac{1}{r'}, \bar{q}' \right) \right] h_1' h_2' dq_1 dq_2 \quad (3.42)$$

Напомним, что  $\bar{T}$  и  $\frac{1}{r'}$  при дифференцировании по  $q_1$  и  $q_2$  теперь

считаются функциями только этих переменных; дифференцируются значения указанных функций на поверхности Земли.

Введем в рассмотрение второй дифференциальный оператор, определив его следующим образом:

$$\Delta_2 F = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h h_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) \right] \frac{1}{h_1 h_2} \quad (3.43)$$

Очевидно

$$\Delta_2 F = h \Delta F - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{h_1 h_2}{h} \frac{\partial F}{\partial q} \right), \quad (3.44)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Последнее соотношение следует из известного выражения для оператора Лапласа в криволинейных координатах:

$$\Delta F = \frac{1}{h h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{h_1 h_2}{h} \frac{\partial F}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h h_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) \right]$$

Принимая во внимание определение операторов  $\bar{D}$  (3.37) и  $\Delta_2$  (3.44), убеждаемся в справедливости тождества

$$\Delta_2(F\Phi) = F\Delta_2\Phi + \Phi\Delta_2F + 2\bar{D}(F, \Phi). \quad (3.45)$$

Пользуясь интегрированием по частям, преобразуем интеграл

$$\iint_S \bar{D}(F, \Phi) h_1 h_2 dq_1 dq_2,$$

взятый по всем значениям  $q_1$  и  $q_2$  замкнутой поверхности  $S$ .

Получим:

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{D}(F, \Phi) h_1 h_2 dq_1 dq_2 &= \int dq_2 \int \left( \frac{h h_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} dq_1 + \\ &+ \int dq_1 \int \left( \frac{h h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} dq_2 = - \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h h_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) dq_1 dq_2 - \\ &- \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) dq_1 dq_2 = - \iint_S \Phi \Delta_2 F h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{D}(F, \Phi) h_1 h_2 dq_1 dq_2 &= - \iint_S \Phi \Delta_2 F h_1 h_2 dq_1 dq_2 = \\ &= - \iint_S F \Delta_2 \Phi h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Теперь в (3.42) перейдем от оператора  $\bar{D}$  к оператору  $\Delta_2$ . В соответствии с (3.37) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} \bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') - (\bar{T} - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) &= \bar{D}\left(\frac{\bar{T} - T}{r'}, \bar{q}'\right) - \\ &- 2(\bar{T} - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Умножая обе стороны последнего равенства на  $h'_1 h'_2 dq_1 dq_2$ , интегрируя по всем значениям  $q_1$  и  $q_2$  и принимая во внимание (3.46), получим:

$$\begin{aligned} \iint \left[ \frac{1}{r'} \bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') - (\bar{T} - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2 &= \\ = - \iint \left[ \frac{\bar{T} - T}{r'} \Delta_2 \bar{q}' + 2(\bar{T} - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

С помощью этого равенства из (3.42) получаем:

$$\begin{aligned} T = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} - (\bar{T} - T) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'} \right) \sec^2(\nu n) + \right. \\ \left. + (\bar{T} - T) \left( \frac{1}{r'} \Delta_2 \bar{q}' + 2\bar{D}\left(\bar{q}', \frac{1}{r'}\right) \right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Таким образом производные возмущающего потенциала исключены. Уравнение (3.49) точное. Принимая во внимание, что  $T$  есть величина порядка  $\zeta$ , а  $\frac{\partial T}{\partial v}$  — порядка аномалии силы тяжести, можем, как и ранее,

$\frac{1}{r}$  заменить на  $\frac{1}{r}$ ,  $\bar{b}'$  на  $\bar{b}$ ,  $h'_1$  и  $h'_2$  на  $h_1$  и  $h_2$ ,  $\sec^2(vn')$  на  $\sec^2(vn)$ ,

допуская ошибку порядка  $\zeta^2$ , квадрата уклонения отвесной линии и т. д.

Далее используем готовые формулы:

$$T = \gamma \zeta, \quad (3.24)$$

$$-\frac{\partial \bar{T}}{\partial v} = g - \bar{\gamma}' = g - \bar{\gamma} - \zeta \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial v} + \frac{R}{h} D(N, \gamma) \quad (3.33)$$

и вместо (3.49) получим:

$$\begin{aligned} \gamma \zeta = & \frac{1}{4\pi} \iint \left[ \frac{1}{r} \left( g - \bar{\gamma} - \zeta \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial v} + \frac{R}{h} D(N, \gamma) \right) \sec^2(nv) + \right. \\ & \left. + (\bar{\gamma} \bar{\zeta} - \gamma \zeta) \left( \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r} \sec^2(nv) - \frac{1}{r} \Delta_2 \bar{q} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \bar{D} \left( \bar{q}, \frac{1}{r} \right) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Множитель при  $\gamma \zeta$  в правой части этого уравнения можно преобразовать. На основании (3.41) получаем:

$$\begin{aligned} \iint_S \left( \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r} \sec^2(nv) - 2 \bar{D} \left( \bar{q}, \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta_2 \bar{q} \right) h_1 h_2 dq_1 dq_2 = \\ \int_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \iint_S \left( \bar{D} \left( \bar{q}, \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \Delta_2 \bar{q} \right) h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

Первый интеграл справа есть интеграл Гаусса для поверхности  $S$ ; поскольку нас интересует значение  $\zeta$  на поверхности  $S$ , он равен  $-2\pi$ ; второй интеграл равен нулю на основании (3.46). Таким образом в

правой части (3.50) получаем  $\frac{1}{2} \gamma \zeta$ , перенося этот член влево и умножая на 2, получаем:

$$\begin{aligned} \gamma \zeta = & \frac{1}{2\pi} \iint \frac{1}{r} \left( g - \bar{\gamma} - \zeta \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial v} + \frac{R}{h} D(N, \gamma) \right) \sec^2(nv) h_1 h_2 dq_1 dq_2 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint \bar{\gamma} \bar{\zeta} \left( \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r} \sec^2(nv) - 2 \bar{D} \left( \bar{q}, \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta_2 \bar{q} \right) h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Второй интеграл является несобственным (ядро обращается в  $\infty$  при  $r=0$ ); однако, неопределенность легко раскрывается обычными приемами.

Таким образом, мы получили линейное интегральное уравнение типа Фредгольма с несимметричным ядром; все входящие в него функции, кроме  $\zeta$ , известны. Нахождение  $\zeta$  сводится к решению этого уравнения.

Мы оставляем в стороне вопрос о существовании решения уравнения (3.51); этот вопрос достаточно сложен и, если удастся его разрешить, мы надеемся вернуться к нему в одной из следующих работ. По аналогии с проблемой Стокса можно думать, что при некоторых условиях (близких к тем, которые рассмотрены во второй главе) решение должно существовать. Но в таком случае это решение всегда может быть получено численными методами, например, последовательными приближениями; хорошее первое приближение дает формула Стокса. Тогда следующие задачи, связанные с уравнением (3.51), будут относиться к технике его численного решения. Принципиальных трудностей, конечно, здесь нет, но практическая трудность существенна: решение этого уравнения требует большого труда вычислителей. В целях экономии этого труда уравнение (3.50) было бы желательно упростить без существенного ущерба для его точности.

Очень возможно, что при решении последовательными приближениями проще окажется исходить из интегро-дифференциального уравнения (3.31), так как приближенные значения уклонений отвеса легко получить по формуле Венинг Мейнеса (а в СССР везде, где позволяет наличие гравиметрического материала, это уже выполнено). В той части области интегрирования, которая значительно удалена от исследуемого пункта, подинтегральное выражение можно весьма сильно упростить и привести к такому виду, который не затруднит вычислителя; некоторые упрощения возможны и вблизи исследуемого пункта.

Несколько вариантов упрощенных уравнений нами получено, но изложение этого вопроса не входит в план настоящей работы, поскольку вопросы техники вычислений здесь не рассматриваются.

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ

## Глава IV.

### ЗАДАЧИ, ТРЕБУЮЩИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИРОВОЙ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

#### § 15. Введение. Критика выводов де Грааф-Хентера

Хорошо известно, что наиболее важные для геодезистов элементы, именно отклонения отвесной линии и возвышения геоида относительно эллипсоида, по результатам гравиметрических наблюдений определяются только в том случае, если известно ускорение силы тяжести  $g$  во всех точках Земли. Очевидно, что измерения  $g$  могут выполняться только в отдельных, более или менее удаленных друг от друга точках. Это приводит к необходимости получать силу тяжести для промежуточных точек путем интерполирования или предполагать ее неизменность на соответствующих площадках. Такое предположение вносит в результат большие ошибки; исследование их отнесено нами в последнюю главу. Ошибки эти носят случайный характер и легко могут быть снижены путем увеличения числа и повышения точности определения пунктов местной съемки; сейчас их рассматривать не будем. Значительно сложнее обстоит дело со вторым, пока неизбежным нарушением требования теории, вытекающим из незавершенности мировой гравиметрической съемки.

Для некоторых задач это обстоятельство не существенно, как это будет показано в следующей главе. Но в наиболее важных случаях оно мешает получить полноценное решение и значительно снижает эффективность гравиметрического метода. Особенно это относится к вопросам определения размеров и ориентировки общего земного эллипсоида или, другими словами, к задаче отнесения изолированных триангуляционных сетей к общей отсчетной поверхности, что позволило бы установить связь между ними.

В этих случаях игнорирование или неправильный учет аномалий в неизученных областях приводят к ошибкам, которые почти постоянны внутри небольшого района и систематически меняются при большой протяженности исследуемых территорий. Эти ошибки накладываются на так называемые региональные и континентальные волны геоида. Наиболее сильно они входят, естественно, в поднятия и опускания геоида. Несколько слабее, но существенно сказываются на отклонении отвесной линии; с ними можно почти не считаться при подсчете относительных отклонений отвесной линии, т. е. разностей отклонений отвеса для пунктов, расстояние между которыми мало по сравнению с расстоянием до

гравиметрически неизученных областей; наконец, их влияние практически неощутимо при гравиметрическом интерполировании уклонений отвеса. Это связано с тем обстоятельством, что при интегрировании аномалия умножается на некоторую функцию, которая в различных задачах по-разному убывает с удалением учитываемых аномалий от исследуемого пункта.

В первом случае это убывание происходит пропорционально первой степени расстояния, а во втором, третьем и четвертом соответственно пропорционально второй, третьей и четвертой степени расстояния. Поэтому задачи двух последних типов, как это будет показано далее, не требуют наличия мировой гравиметрической съемки, и их исследование отнесено в следующую главу.

Что же касается задач первых двух типов, то единственное известное нам их исследование проведено де Грааф-Хентером [8]. Введенная де Грааф-Хентером числовая характеристика поля аномалий, „ошибка представительства“, оказалась очень полезным средством для анализа точности гравиметрических выводов уклонения отвеса и высот геоида. Но по самому ее определению, ошибка представительства достаточно надежное средство для ориентировочной оценки точности в тех областях, где имеются „представляющие“ гравиметрические пункты, и вовсе непригодное, если этих пунктов нет. Поэтому, выводы де Грааф-Хентера, по крайней мере ориентировочно, верны там, где они связываются с наличием общей мировой или местной съемки, и принципиально неверны, когда делаются заключения об ошибках, возникающих при отсутствии пунктов общей мировой съемки.

Действительно, чтобы оценить среднюю ошибку, возникающую от пренебрежения влиянием аномалий за пределами области интеграции, одной величины — ошибки представительства для всей Земли (по де Грааф-Хентеру, 113 мг) явно недостаточно. При очень большом значении этой величины влияние дальних зон может быть малым (волны аномалий большой амплитуды, но короткопериодические) и при малом значении — очень большим (например, эффект трехосности Земли, который может за пределами  $\psi^0 = 20^\circ$  дать поправку в уклонение отвеса более 5").

На самом деле, де Грааф-Хентер мог дать какую-то оценку влияния дальних зон только потому, что исходил из определенной разбивки поверхности Земли (на 1654 части) для размещения пунктов мировой съемки. Но если бы он разбил Землю, например, на  $1654 \times 4$  участка, то все его оценки влияния дальних зон уменьшались бы в 2 раза. Действительно, в выводе неявно предполагалось, что в каждом отсеке имеется по одному пункту с ошибкой представительства  $\pm 113$  мг., а теперь нужно будет допустить, что в том же отсеке имеется 4 пункта с той же ошибкой, что равносильно одному пункту с ошибкой  $\pm 56$  мг.

Тот же результат получится, если рассуждать по-другому. От разбивки каждого отсека на 4 части при суммировании квадратов влияний отсеков число слагаемых увеличится в 4 раза, величина каждого слагаемого уменьшится в 16 раз, следовательно, сумма (квадрат ошибки) уменьшится в 4 раза, а сама ошибка — в 2 раза.

Таким образом, никакой оценки влияния дальних зон де Грааф-Хентером не дано, и метод применения ошибки представительства дать этой оценки не может.

Выводы де Грааф-Хентера в отношении точности вывода уклонений отвеса справедливы только при такой их формулировке:

Вероятная ошибка  $\xi$  при наличии 134-х местных и 1654-х пунктов общей мировой съемки  $= \pm 0',352$ , если центральная зона радиуса 8,75 мили учтена безошибочно. Если мировая съемка на значительной площади Земли отсутствует, никаких заключений о точности вывода так называемого „абсолютного“ уклонения отвеса, исходя из рассмотренной ошибки представительства, сделать нельзя.

Добавим, что по нашим подсчетам вероятная ошибка зоны от 0 до 8,75 мили, если там нет дополнительной местной съемки, составит около  $\pm 1''$ ,7.

Оценка точности  $\zeta$  делается только в предположении наличия мировой съемки, поэтому оценки вероятных ошибок  $\pm 10,4$  м (1654 пункта мировой съемки) и  $\pm 7,0$  м (добавление к мировой 84 пунктов местной съемки) должны быть ориентировочно верны.

## § 16. Общая характеристика земного гравитационного поля

Чтобы получить верные выводы о влиянии поля аномалий за пределами области их интеграции на уклонение отвеса и высоту геоида, надо прежде всего иметь фактический материал, характеризующий (хотя бы ориентировочно) общее распределение силы тяжести на земной поверхности. Конечно, какая-то одна универсальная величина нужного материала для суждения дать не может. Попытка де Грааф Хентера получить оценку точности вывода  $\xi$  и  $\eta$ , исходя только из ошибки представительства для всей Земли, конечно, не могла увенчаться успехом, так как одному и тому же среднему квадратическому колебанию аномалий может соответствовать различная периодичность и быстрота их изменения; а последнее обстоятельство имеет решающее значение. И действительно, мы уже показали, что соответствующая часть выводов де Грааф Хентера основана на недоразумении.

Поэтому в качестве общей характеристики поля аномалий силы тяжести по всей Земле в целом мы берем разложение аномалий в ряд по сферическим функциям. Вследствие того, что большие области Земли вовсе лишены наблюдений, коэффициенты этого разложения получаются, конечно, с малой (и вообще говоря неизвестной) точностью, но для общих суждений этот материал надо полагать достаточным.

Излагаемая ниже работа по разложению аномалий в ряд сферических функций выполнена в ЦНИИГАиК Дубовским в 1937 г. Для этой работы им использовано около 7200 гравиметрических пунктов по СССР и около 7000 пунктов в других государствах (повторные наблюдения в это число не вошли). Явно нехарактерные для данной площади аномалии (например, на изолированных островах, часть береговых и др.) при этом отбрасывались. Для территории СССР средние аномалии получены очень уверенно по картам аномалий масштаба 1:1 000 000 и 1:10 000 000.

Разложение аномалий проведено по способу Неймана, используя при этом вспомогательный табличный материал, опубликованный Преєм. Выбор этого метода диктовался наличием подробных таблиц, позволяющих объем всей работы свести до минимума. Вычисления настолько просты, что основная часть их была выполнена вычислительной фабрикой.

Применение таблиц Прея, рассчитанных на разложение до 16 порядка, обязывает получить средние аномалии для точек пересечения 17 параллелей ( $\varphi = 0^\circ; \pm 10^\circ 17'; \pm 20^\circ 34'; \pm 30^\circ 52'; \pm 41^\circ 17'; \pm 51^\circ 24'; 61^\circ 40'; \pm 71^\circ 56'; \pm 82^\circ 08'$ ) и 32-х меридианов (впрочем, число меридианов можно взять и иным). Всего нужно знать 512 средних значений аномалий, однако из фактических данных удалось образовать только 192 значения (около 38%). Следовательно, оставшимся 62% точек надо приписать какие-то „гипотетические“ аномалии. Эти гипотетические аномалии были получены в 2-х вариантах: 1) полагаем аномалию в свободном воздухе равной нулю; 2) подобно Хирвонену, полагаем изостатические аномалии по Пратту при глубине компенсации 113,7 км равной нулю (следовательно, аномалия в свободном воздухе принята равной изостатической редукции с обратным знаком). Для аномалий второго варианта использованы вычисления Прея [22].

Из сравнения гипотетических аномалий с наблюдаемыми на 192 площадках, после выделения средних разностей, получили ошибку гипотетической аномалии второго варианта  $\pm 34$  мгл (изостазия). Средняя разность между аномалиями, выведенными из наблюдений и из второй гипотезы, получилась равной 20 мгл.

В табл. „а“ и „б“ даны коэффициенты разложения аномалий по сферическим функциям до 6-го порядка соответственно для первой и второй гипотез. Эти коэффициенты соответствуют записи разложения в такой форме:

$$\Delta g = \sum_n \sum_m (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta),$$

$$\vartheta = 90^\circ - \varphi,$$

где  $P_n^m(\cos \vartheta)$  — присоединенные функции Лежандра.

Таблица „а“

$n$	$A_n^0$	$A_n^1$	$A_n^2$	$A_n^3$	$A_n^4$	$A_n^5$	$A_n^6$
0	+7,32						
1	+0,391	-0,370					
2	-7,87	+0,830	+2,12				
3	-0,543	+1,805	-0,0421	+0,142			
4	+2,16	+0,755	+0,326	+0,157	-0,00429		
5	-2,58	+1,28	+0,402	-0,0633	-0,0141	-0,00205	
6	-0,707	+0,0811	+0,250	+0,00120	-0,00234	-0,0000268	+0,000158

$n$	$B_n^0$	$B_n^1$	$B_n^2$	$B_n^3$	$B_n^4$	$B_n^5$	$B_n^6$
0	0						
1	0	+2,00					
2	0	-0,719	-1,69				
3	0	-2,96	-0,252	+0,457			
4	0	+1,04	+0,060	-0,117	+0,0212		
5	0	+1,09	+0,0707	+0,0410	-0,00431	-0,00239	
6	0	+0,229	-0,139	+0,0393	-0,00351	-0,00383	+0,0000039

Таблица „б“

$n$	$A_n^0$	$A_n^1$	$A_n^2$	$A_n^3$	$A_n^4$	$A_n^5$	$A_n^6$
0	+14,9						
1	-4,80	-1,70					
2	-6,28	+0,632	+2,61				
3	+1,30	+1,44	+0,375	+0,110			
4	+8,97	+0,159	+0,285	+0,128	-0,0158		
5	-5,96	+0,934	+0,323	-0,0494	-0,00763	-0,000523	
6	+3,32	+0,387	-0,243	-0,0176	-0,00150	-0,000337	+0,000188

$n$	$B_n^0$	$B_n^1$	$B_n^2$	$B_n^3$	$B_n^4$	$B_n^5$	$B_n^6$
0	0						
1	0	+0,550					
2	0	-0,739	-1,407				
3	0	-1,859	-0,334	+0,465			
4	0	+0,528	+0,00594	-0,103	+0,0186		
5	0	+0,666	-0,167	+0,0192	-0,00272	-0,00101	
6	0	+0,0799	+0,181	+0,0433	-0,00578	-0,00356	+0,000119

При рассмотрении коэффициентов разложений по обоим вариантам обращаем внимание на то, что порядок величины одноименных коэффициентов и их знак, как правило, получают сходными и довольно близкими. Это обстоятельство позволяет надеяться, что, несмотря на указанную условность этих разложений, выводы из них, по крайней мере в отношении порядка величин, должны быть близки к действительности. Особенно убедительно это проявляется при следующих сравнениях. Определим по первому и второму варианту разложения среднее квадратическое значение сферической функции порядка  $n$  в аномалии и высоте геоида.

Порядок сферической функции	Среднее квадратическое значение для поверхности Земли			
	Аномалии		Высоты геоида	
	Вариант		Вариант	
	I	II	I	II
2	± 5,5 мгл	± 4,4 мгл	± 35 м	± 34 м
3	4,8 "	4,3 "	16 "	14 "
4	4,0 "	4,4 "	9 "	10 "
5	4,6 "	3,6 "	8 "	6 "
6	5,8 "	5,9 "	8 "	8 "

Следовательно, дальнейшие выводы, основанные на средних значениях, получатся практически одинаковыми, если исходить из первого или второго варианта. В дальнейшем изложении используются числовые данные второго варианта.

В 1942 г. опубликована очень интересная статья Джеффриса [20], который определил часть коэффициентов в разложении аномалий до третьего порядка и оценил ошибки вывода этих коэффициентов.

В качестве исходного материала им взяты значения аномалий силы тяжести с редукцией в свободном воздухе для площадок размером  $1^\circ \times 1^\circ$ . Из этих данных получены средние значения для 139 квадратов размером  $10^\circ \times 10^\circ$  и, путем дальнейшего объединения, для 32 квадратов размером  $30^\circ \times 30^\circ$ . Каждому квадрату присвоены соответствующие веса, которые установлены Джеффрисом после тщательного обсуждения исходных материалов. Сначала последовательными пробными вычислениями проводился отбор тех коэффициентов, которые могут быть определены с ошибкой, меньшей их величины; только эти коэффициенты далее и определялись.

В результате Джеффрисом получена следующая формула для распределения силы тяжести (в Потсдамской системе):

$$979\,772,5 \pm 1,9 + (3439,9 \pm 5,0) P_3 + 5,3 P_4 + (4,0 \pm 1,4) P_2^2 \cos 2\lambda + (1,30 \pm 0,68) P_3^2 \cos 2\lambda + (4,2 \pm 2,4) P_1^3 \cos \lambda + (0,46 \pm 0,26) P_3^3 \sin 3\lambda,$$

которой соответствует сжатие  $1:296,17 \pm 0,68$  и разность полуосей экваториального эллипса 26 м.

В разложениях Дубовского аномалии отнесены к формуле Гельмерта 1901—1909 гг.

Учтя это обстоятельство, сравним коэффициенты при одинаковых членах.

	$A_0^0$	$A_2^0$	$A_2^2$	$A_3^1$	$A_3^2$	$B_3^3$	$\frac{1}{a}$
Джеффрис	$+ 17,6$ $\pm 1,9$	$- 14,5$ $\pm 5,0$	$+ 4,0$ $\pm 1,4$	$+ 4,2$ $\pm 2,4$	$+ 1,30$ $\pm 0,68$	$+ 0,46$ $\pm 0,26$	296,2 $\pm 0,68$
Дубовской а)	$+ 7,3$	$- 7,9$	$+ 2,1$	$+ 1,8$	$- 0,04$	$+ 0,46$	297,1
б)	$+ 14,9$	$- 6,3$	$+ 2,6$	$+ 1,4$	$+ 0,38$	$+ 0,46$	297,3

Как следовало ожидать, три различные гипотезы дают несколько различные результаты (разложение Джеффриса соответствует предположению, что гравиметрически изученные районы характеризуют гравитационное поле Земли в целом, т. е. аномалии можно экстраполировать).

Соответствие между собой этих трех вариантов удовлетворительно, особенно с точки зрения порядка величин коэффициентов. Но именно только порядок величины коэффициентов имеет значение для надежности наших последующих выводов.

### § 17. Метод исследования погрешностей, возникающих из-за отсутствия мировой гравиметрической съемки

Когда учитываются аномалии только до сферического расстояния  $\psi_0$  от исследуемого пункта, принято говорить, что учитываются местные волны геоида. Это означает, что результат интегрирования остальных аномалий от  $\psi_0$  до  $\pi$  даст функцию, которая с перемещением исследуемого пункта будет меняться более плавно, т. е. даст волны большего периода. Понятие о волнах связано с возможностью разложения высот геоида в ряд Пуанкаре-Стокса, составленный из сферических гармоник разных порядков. „Местным“ волнам соответствуют гармоники высоких порядков.

Известно, что ряд Стокса сходится очень медленно, так как в разложении функции Стокса по полиномам Лежандра

$$S(\psi) = \sum_2^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi \quad (41)$$

при увеличении  $n$  коэффициент при  $P_n(\cos \psi)$  почти не убывает, стремясь в пределе к 2.

Это связано с тем, что при  $\psi=0$  функции  $S(\psi) = \infty$ .

Когда местные волны  $\zeta_0$  учитываются отдельно (интегрированием аномалий до  $\psi_0$ ), то остаток  $\Delta\zeta$ , соответствующий общим волнам, опреде-

ляет собою ту отсчетную поверхность, к которой отнесены значения  $\zeta_0$ . Предполагая при решении какой-либо задачи, что  $\zeta_0$  отсчитано от сфероида, мы делаем ошибку, равную  $\Delta\zeta$ .

Очевидно, что  $\Delta\zeta$  также можно представить в виде ряда сферических гармоник.

Как сказано, гармоники высших порядков, вошедшие в  $\zeta_0$ , почти исключены из  $\Delta\zeta$ , т. е. ряд для  $\Delta\zeta$  сходится быстрее, чем ряд для  $\zeta$ . Если бы оказалось, что ряд для  $\Delta\zeta$  сходится достаточно быстро, то имелся бы смысл исследовать эту функцию разложением ее в ряд сферических гармоник; мало того, имелся бы смысл учитывать и  $\Delta\zeta$ , когда аномалии известны, с помощью подобного ряда.

В связи с этим появляется желание путем некоторого изменения смысла величины  $\Delta\zeta$  получить для нее наиболее быстро сходящийся ряд. Когда мы обрываем интегрирование на расстоянии  $\psi_0$ , то можно считать, что  $\Delta\zeta$  определено формулой

$$\Delta\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g S_2(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha, \quad (4.2)$$

в которой интегрирование ведется по всей сфере, но  $S_2(\psi)$  — разрывная функция, равная 0 при  $\psi < \psi_0$  и равная  $S(\psi)$  при  $\psi \geq \psi_0$ . Значения  $S_2(\psi)$  при  $\psi \geq \psi_0$  мы менять не можем, но при  $\psi < \psi_0$  мы можем установить вид этой функции по своему усмотрению; например, мы можем устранить разрыв непрерывности  $S_2(\psi)$  в точке  $\psi_0$  или также устранить разрыв непрерывности ее первых производных, т. е. принять меры к тому, чтобы разложение  $S_2(\psi)$  по полиномам Лежандра, зависящим от  $\cos(\psi)$ , сходилось быстрее; это приведет к повышению сходимости  $\Delta\zeta$  по сферическим гармоникам. Конечно, при этом надо соответственным образом изменить определение  $\zeta_0$ , положив

$$\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} S_1(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha, \quad (4.3)$$

где

$$S_1(\psi) = S(\psi) - S_2(\psi).$$

Теперь интегрирование не будет резко обрываться на расстоянии  $\psi_0$ , так как  $S_1(\psi)$  при приближении  $\psi$  к  $\psi_0$  будет плавно стремиться к 0.

Таким образом, уравнение для  $\Delta\zeta$  (4.2) можно рассматривать как уравнение той неизвестной, но вполне определенной отсчетной поверхности, к которой фактически будут отнесены высоты геоида  $\zeta_0$  и отклонения отвеса, если интегрирование аномалий ведется всегда точно до  $\psi_0$ . Если  $S_2(\psi)$  разложить в бесконечный ряд полиномов Лежандра, зависящих от  $\cos(\psi)$ , то после почленного интегрирования уравнение этой поверхности будет разложено в ряд, составленный из сферических функций, причем сходимость этого ряда может быть очень сильно повышена по сравнению со сходимостью ряда Стокса.

Чем быстрее будет сходимость этого ряда, чем быстрее будут убывать его коэффициенты, тем глаже будет отсчетная поверхность  $\Delta\zeta$ . Чтобы достигнуть этого, не нужно заранее стеснять разложение  $S_2(\psi)$  заданием значений этой функции в области  $\psi < \psi_0$ , а принимать во внимание только ее значения при  $\psi \geq \psi_0$ , которые должны совпадать со значениями функции Стокса. Когда такое разложение в интервале от  $\psi_0$  до  $\pi$  будет выполнено, его можно будет аналитически продолжить в интервал от  $\psi_0$  до 0 и полученные значения приписать функции  $S_1(\psi)$ .

Таким образом, речь идет о том, чтобы в разложении функции Стокса произвести такую перегруппировку членов, при которой вновь образованный ряд будет значительно быстрее сходиться в интересующем

нас интервале от  $\psi_0$  до  $\pi$  (и, конечно, медленнее в интервале от 0 до  $\psi_0$ , но последнее для нас безразлично).

Очевидно, сходимость нового ряда будет улучшаться с увеличением  $\psi_0$ , т. е. с увеличением сферического радиуса, внутри которого учитываются аномалии. Далее можно оценить предельную ошибку, которая может иметь место, если в этом разложении мы удержим только члены порядка  $m$ . Если с практической точки зрения с такой ошибкой можно мириться, то мы можем величину  $S_2(\psi)$  заменить ее приближением порядка  $m$ , которое назовем  $S_m(\psi)$ . Тогда получим

$$S_1(\psi) = S(\psi) - S_m(\psi),$$

причем замена в интервале  $0 - \psi_0$  функции Стокса  $S(\psi)$  на функцию  $S(\psi) - S_m(\psi)$  хотя мало изменит результат при вычислении  $\zeta_0$ , но изменит его в лучшую сторону в том смысле, что отсчетная поверхность  $\Delta\zeta$  будет наиболее гладкой и наиболее легко определяемой путем разложения на сферические гармоники.

Далее, зная порядок величины коэффициентов в разложении по сферическим функциям аномалий, можно без труда подсчитать соответствующие средние значения высот отсчетной поверхности  $\Delta\zeta$  и ее наклонов (последнее соответствует оценке погрешности вывода уклонения отвеса). Таково общее направление исследования, которое будет проведено ниже.

### § 18. Улучшение сходимости ряда Стокса после выделения центральной зоны

С осуществлением изложенного выше метода исследования связаны хотя и несложные, но утомительные вычисления, в ходе которых читатель легко может потерять основную линию исследования. Чтобы избежать этого, наиболее длинные преобразования мы вынесли в приложение, на которое, по мере надобности, будем ссылаться.

В соответствии с изложенным в предыдущем разделе планом исследования, первая наша задача заключается в том, чтобы разложить функцию Стокса  $S(\psi)$  по полиномам Лежандра в интервале изменения  $\psi$  от  $\psi_0$  до  $\pi$ . Введем новую переменную  $x$ , связанную с  $y = \cos \psi$  линейной зависимостью и принимающую на концах интервала  $\psi_0 - \pi$  значения  $+1$  и  $-1$ .

Для этого достаточно положить

$$y = kx + k - 1,$$

где

$$k = \frac{1 + \cos \psi_0}{2} = \cos^2 \frac{\psi_0}{2}.$$

Функцию Стокса, выраженную через  $y$ , будем обозначать символом  $S(y)$ ; переходя от  $y$  к  $x$ , получим функцию  $S(kx + k - 1)$ , заданную в интервале изменения  $x$  от  $-1$  до  $+1$ .

Ограничиваясь приближением порядка  $m$ , разлагаем  $S(y)$  в ряд по полиномам Лежандра, зависящим от  $x$ , и получаем (см. приложение, формула 7.18)

$$S_m(kx + k - 1) = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{2} K_n(S) P_n(x),$$

причем коэффициенты  $K_n(S)$  в функции  $k = \cos^2 \frac{\psi_0}{2}$  и  $t = \sin \frac{\psi_0}{2}$  даны формулами (7.21).

Нетрудно далее оценить погрешность приближения порядка  $m$  к функции  $S(kx + k - 1)$ , характеризуя его величиной  $R_m(S)$ , равной

интегральному среднему квадратическому значению разности  $S(kx + k - 1) - S_m(kx + k - 1)$  во всем интервале изменения  $x$  от  $-1$  до  $+1$ .

Соответствующие результаты даются формулами (7.22) и (7.24) приложения.

С помощью полученных формул можно рассчитать таблицы, которые наглядно показывают, насколько улучшается сходимость ряда Стокса после выделения зоны сферического радиуса  $\psi_0$ .

Результаты вычислений представлены таблицей на этой стр. Для четырех значений  $t$  (0,01; 0,1; 0,2; 0,3) вычислены коэффициенты  $K_n(S)$  и ошибки  $R_n(S)$  соответствующих приближений для  $n$  от 0 до 7. Для сравнения приведены значения тех же величин для  $t=0$ .

Так как  $t = \sin \frac{\psi_0}{2} = \frac{r}{2R}$ , где  $r$  — расстояние по прямой от ауф-пункта до границы выделенной зоны, этим значениям  $t$  соответствуют значения  $r$  соответственно 127,4, 1274, 2548 и 3822 км.

$n$	$t=0$ $r=0$		$t=0,01$ $r=127,4$ км.		$t=0,1$ $r=1274$		$t=0,2$ $r=2548$		$t=0,3$ $r=3822$	
	$K_n(S)$	$R_n(S)$	$K_n(S)$	$R_n(S)$	$K_n(S)$	$R_n(S)$	$K_n(S)$	$R_n(S)$	$K_n(S)$	$R_n(S)$
0	0	$\infty$	-0,0423	3,956	-0,4806	2,098	-0,9292	1,656	-1,2169	1,563
1	0	$\infty$	-0,0423	3,955	-0,4870	2,056	-0,9828	1,420	-1,4007	0,986
2	2	$\infty$	+1,9583	2,461	+1,5613	1,085	+1,1650	0,566	+0,8401	0,301
3	1	$\infty$	+0,9591	2,008	+0,6253	0,703	+0,3695	0,285	+0,2089	0,119
4	$\frac{2}{3}$	$\infty$	+0,6264	1,887	+0,3361	0,490	+0,1588	0,157	+0,0712	0,053
5	$\frac{1}{2}$	$\infty$	+0,4603	1,726	+0,2049	0,343	+0,0774	0,091	+0,0276	0,026
6	$\frac{2}{5}$	$\infty$	+0,3608	1,599	+0,1322	0,260	+0,0405	0,055	+0,0116	0,017
7	$\frac{1}{3}$	$\infty$	+0,2946	1,494	+0,0894	0,194	+0,0222	0,035	+0,0051	0,012

Коэффициенты  $K_n(S)$  убывают тем быстрее, чем больше  $t$ . Чтобы лучше проследить это, составим отношения этих коэффициентов при данном значении  $t$  к их величине при  $t=0$ ; получим:

$n$	$t=0,01$	$t=0,1$	$t=0,2$	$t=0,3$
2	0,979	0,781	0,582	0,420
3	0,959	0,625	0,370	0,209
4	0,940	0,504	0,238	0,107
5	0,921	0,410	0,155	0,055
6	0,902	0,330	0,101	0,029
7	0,884	0,268	0,067	0,015

Между строчками выписано отношение последующего числа к предыдущему. Мы видим, что отношения  $\frac{K_n(t)}{K_n(0)}$  с увеличением  $n$  убывают почти точно в геометрической прогрессии с знаменателем  $(1-t)^2$ . Мы убеждаемся в том, что выделение центральной зоны существенно улучшает сходимость ряда Стокса.

С возрастом  $t$  быстро убывает средняя квадратическая ошибка приближения  $R_n(S)$ . Седьмое приближение при  $t=0,1$  дает худший результат, чем четвертое при  $t=0,2$ , а это последнее дает ошибку, лежащую между вторым и третьим приближением для  $t=0,3$ .

## § 19. Оценка предельного влияния дальних зон

Теперь мы можем произвести оценку предельного влияния дальних зон на гравиметрические выводы высоты геоида и отклонения отвесной линии.

Будем исходить из известного неравенства Шварца

$$\int_{\sigma} \varphi \psi d\sigma \leq \left( \int_{\sigma} \varphi^2 d\sigma \int_{\sigma} \psi^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}},$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — две действительные функции действительного переменного, заданные в области  $\sigma$ .

Знак равенства соответствует только тому случаю, когда  $\varphi = C\psi$ , где  $C$  — некоторая постоянная.

Применяя это неравенство к поправке в высоту геоида, обусловленной влиянием дальних зон за пределами  $\psi_0 = \arccos k$ , если учитываются аномалии до порядка  $n$  в сферических функциях, получаем:

$$\Delta\zeta = \frac{k}{4\pi\gamma} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Delta g (S - S_n) dx d\alpha \leq \frac{k}{\gamma} R_n \overline{\Delta g},$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} (S - S_n)^2 dx = 2\pi 2R_n^2,$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Delta g^2 dx d\alpha = 4\pi \overline{\Delta g^2},$$

где  $\overline{\Delta g}$  — среднее квадратическое значение аномалии с редукцией в свободном воздухе.  $R_n$  определено ранее (формула (7.22) и таблица на стр. 55).

Чтобы получить результат для уклонений отвеса, нужно вывести некоторые вспомогательные формулы.

Используя дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

и формулу (7.18), путем интегрирования по частям получаем:

$$J_n^1 = \int_{-1}^{+1} (2S' - S'_n) S'_n (1-x^2) dx = \sum_1^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} K_n^2,$$

$$J_n'' - J_{n-1}'' = \int_{-1}^{+1} (2S' - S'_n) S'_n (1+x) dx - \int_{-1}^{+1} (2S' - S'_{n-1}) S'_{n-1} (1+x) dx =$$

$$= 2 \left[ (S'_n - S'_{n-1}) (2S - S_n - S_{n-1}) \right]_{x=-1}^{x=1},$$

причем

$$(S_n)_{x=1} = \sum_1^n \frac{2n+1}{2} K_n,$$

$$(S'_n)_{x=1} = \sum_1^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} K_n.$$

Из простых, но довольно длинных вычислений получаем:

$$J_0 = \int_{2 \arcsin t}^{\pi} \left( \frac{dS}{d\psi} \right)^2 \sin \psi d\psi = \frac{1}{2t^2} + \frac{6}{t} - 12 \ln^2 t - 26 \ln t +$$

$$+ (12 - 36t^4 + 24t^6) \ln(t+t^2) + (48t^2 + 56t^3 - 168t^4 - 48t^5 +$$

$$+ 112t^6) \ln(t+t^2) + 34 \ln \frac{1+t}{2} - 24t + 56t^2 + \frac{392}{3} t^3 - 176t^4 - 112t^5 +$$

$$+ \frac{400}{3} t^6 + 24 \left( \frac{\pi^2}{12} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n^2} \right).$$

Применяя теперь неравенство Шварца к  $\Delta \xi$  (или безразлично  $\Delta \eta$ ), получаем:

$$\Delta \xi = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g \frac{d(S-S_n)}{d\psi} \cos \alpha d\sigma \leq 0''',210 \overline{\Delta g} D_n,$$

где

$$D_n^2 = k J_0 - 2k^2 \bar{J}_n,$$

$$\bar{J}_n = \frac{1}{2} J_n' + \frac{1-k}{k} J_n''.$$

Проще всего  $\bar{J}_n$  вычисляется с помощью соотношения

$$\bar{J}_n - \bar{J}_{n-1} = (S'_n - S'_{n-1}) \left[ K_n + \frac{2(1-k)}{k} (2S - S_n - S_{n-1}) \right]_{x=1}.$$

Используя таблицу значений  $K_n$  и  $R_n$  на стр. 55, получаем следующую таблицу предельных значений  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$  при  $\Delta g = 1$  мгл:

n	$\Delta \xi$ (в метрах)			$\Delta \xi'', \Delta \eta''$		
	$\psi_0 = 11^\circ,5$	23°,1	34°,9	11°,5	23°,1	34°,9
0	13,50	10,33	9,25	2'',51	1'',54	1'',09
2	6,98	3,53	1,78	2,06	0,97	0,53
3	4,52	1,78	0,70	1,78	0,70	0,30
4	3,15	0,98	0,31	1,56	0,50	0,17
5	2,21	0,57	0,15	1,36	0,36	0,10
6	1,67	0,34	0,10	1,18	0,26	0,06
7	1,25	0,22	0,07	1,02	0,18	0,03

Таким образом, первая строчка этой таблички характеризует предельную величину полного влияния дальних зон на гравиметрические выводы высоты геоида и уклонения отвеса при среднем квадратическом значении аномалии в этих зонах в 1 миллигал. Этот предел может достигаться только в том случае, например для  $\Delta\xi$ , если

$$\Delta g = \frac{\overline{\Delta g}}{\sqrt{\pi J_0}} \cdot \frac{dS}{d\psi} \cos \alpha.$$

Последующие строки таблицы определяют предельные величины поправок для тех случаев, когда учтено влияние сферических функций до порядка  $n$  включительно.

Эта таблица показывает, что влияние дальних зон на вывод уклонения отвеса может быть значительным. Распространенное мнение о малой величине этого влияния, основанное на быстром убывании функции Венинг Мейнеса вблизи начала координат, не подтверждается.

Следует еще остановиться на вопросе о том, как следует понимать здесь  $\Delta g$ .

Поскольку речь идет о влиянии дальних зон, под  $\overline{\Delta g}$  можно понимать среднее квадратическое значение аномалий, уже осредненных на площадках значительного размера, причем выбор величины площадки окажется существенным. Такое осреднение сводится к гашению гармоник высокого порядка в аномалиях  $\Delta g$ . Каким же порядком сферических функций можно ограничиться, устанавливая значения  $\overline{\Delta g}$ ? Можно здесь рассуждать таким образом. Пусть предельная ошибка, вычисленная описанными приемами для  $\zeta$ ,  $\xi$  или  $\eta$ , будет  $E(n, \psi_0) \overline{\Delta g}$ , где  $E(n, \psi_0)$  — одно из чисел последней таблицы.

Пусть  $n$  — наименьшее число, удовлетворяющее условию

$$E(n, \psi_0) \overline{\Delta g} < \varepsilon,$$

причем  $\varepsilon$  есть величина, которой можно пренебречь, а  $\overline{\Delta g}$  пока понимается как среднее квадратическое значение не осредненной аномалии. Тогда с ошибкой, много меньшей, чем  $\varepsilon$ , т. е. по нашему допущению вполне пренебрегаемой, для дальних зон функцию  $S(\psi)$  можно заменить ее приближением порядка  $n$   $S_n(\psi)$ , а потому в тех же зонах учет аномалий порядка выше  $n$  становится ненужным. Следовательно, под  $\Delta g$  нужно понимать  $\overline{\Delta g}_n$ , где  $\Delta g_n$  есть  $n$ -ое приближение к  $\Delta g$ , полученное путем учета первых  $n$  сферических функций в разложении  $\Delta g$ .

Поэтому теперь можно ограничиться меньшим значением  $n$ , определяя его из условия

$$E(n, \psi_0) \overline{\Delta g}_n < \varepsilon.$$

В приведенных нами двух примерах разложения аномалий по сферическим функциям среднее квадратическое значение каждой из первых сферических функций получилось около 5 мгл. Для функций высоких порядков оно должно убывать. Поэтому для ориентировочных суждений можно предположить, что

$$\overline{\Delta g}_n < 5 \sqrt{n}.$$

Например:

$\psi_0$	$n$	$\Delta \zeta$	$\Delta \xi$ и $\Delta \eta$
34°,9	6	< 1,2 м	< 0'',7
23°,1	6	< 4,1	< 3'',2

## § 20. Оценка среднего квадратического влияния дальних зон

Пределы, о которых шла речь, являются наивысшими, которые могут иметь место при заданном виде функций  $S(\varphi)$  и заданной величине  $\Delta g$ , но при наиболее неблагоприятном распределении аномалий. Фактически влияние дальних зон должно быть во много раз меньше. Но для суждения о средней величине этого влияния одной величины  $\Delta g$  недостаточно — неизбежно придется задаться законом распределения аномалий по земной поверхности. Для целей ориентировочных суждений по этому вопросу используем приведенное в § 16 разложение.

Прежде всего оценим среднее квадратическое значение уклонения отвеса для всей Земли, обусловленное первыми сферическими функциями в разложении аномалий.

Дифференцируя ряд Стокса, имеем:

$$\xi_n = \frac{1}{\gamma \sin^2 \vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{\partial g_n}{\partial \vartheta},$$

$$\eta_n = \frac{1}{\gamma \sin^2 \vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{\partial g_n}{\partial \vartheta} \operatorname{cosec} \vartheta.$$

Мы желаем получить

$$\xi_n^2 = \frac{1}{4\pi} \int \xi_n^2 d\tau; \quad \eta_n^2 = \frac{1}{4\pi} \int \eta_n^2 d\tau.$$

Из формулы

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x),$$

дифференцируя ее  $m$  раз, определяем  $\frac{P_n^m}{\sin^2 \vartheta}$ :

$$\frac{P_n^m}{\sin^2 \vartheta} = (2n-1)P_{n-1}^{m-1} + (2n-5)P_{n-3}^{m-1} + \dots$$

Теперь легко получаем интегральные формулы:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n^{m2}}{\sin^2 \vartheta} dx = 2(2n-1) \frac{(n+m-2)!}{(n-m)!} + 2(2n-5) \frac{(n+m-4)!}{(n-m-2)!} + \dots = C_n^m$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n^m P_l^m}{\sin^2 \vartheta} dx = \begin{cases} C_l^m, & \text{если } n-l \text{ четное число, } l < n, \\ 0, & \text{если } n-l \text{ нечетное число.} \end{cases}$$

Далее, исходя из дифференциального уравнения для присоединенных функций Лежандра

$$(x^2-1)P_n^{m''} + 2xP_n^{m'} = n(n+1)P_n^m - \frac{m^2 P_n^m}{1-x^2}$$

и используя полученные выше интегральные формулы, имеем:

$$\int_{-1}^{+1} \left( \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \right)^2 dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} - m^2 C_n^m,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dP_n^{m1}}{d\vartheta} \cdot \frac{dP_n^m}{d\vartheta} dx = \begin{cases} -m^2 C_l^m, & \text{если } n-l \text{ четное число, } l < n. \\ 0, & \text{если } n-l \text{ нечетное число.} \end{cases}$$

Выполнив расчет по всем этим формулам и присоединяя ранее полученные данные, получаем таблицу, характеризующую поле аномалий силы тяжести до 6-го порядка включительно.

n	Влияние аномалий порядка n				$\overline{\Delta g_n}$	$\overline{\zeta_n}$	$\overline{\xi_n}$	$\overline{\eta_n}$
	$\Delta g$	$\zeta$	$\xi$	$\eta$				
2	$\pm 5,4$ мгл	$\pm 34,3$ м	$\pm 1'',76$	$\pm 2'',17$	$\pm 5,4$ мгл	$\pm 34,3$ м	$\pm 1,76$	$\pm 2,17$
3	4,3	14,0	0,91	1,30	7,9	37,0	1,98	2,53
4	4,4	9,6	1,12	0,83	8,3	33,2	2,30	2,69
5	3,6	5,8	0,87	0,58	9,0	39,6	2,47	2,76
6	5,9	7,7	0,98	1,28	10,8	40,4	2,62	3,01

Цифры последней строчки правой половины таблицы определяют нижние пределы: среднее квадратическое значение высоты геоида не менее  $\pm 40$  м, а отклонения отвеса не менее  $\pm 3''$ .

Теперь можем оценить порядок средних квадратических величин поправок, которые должны учитывать поле аномалий силы тяжести за пределами области интеграции по формуле (7.25):

$$\Delta \zeta = \frac{R}{2\gamma} \sum_2^m g_n K_n = \frac{R}{\gamma} \sum_2^m M_n \frac{g_n}{n-1},$$

где

$$M_n = \frac{n-1}{2} K_n (S_m).$$

Соответствующие формулы для  $\xi$  и  $\eta$  получаются из последних формул дифференцированием.

Внося множители  $M_n$  в соответствующие числа предыдущей таблицы, получаем следующее:

**Средние величины поправок  $\zeta$ ,  $\xi$  и  $\eta$ , обусловленные влиянием аномалий за пределами радиуса интеграции  $\psi_0$**

n	$\psi_0$	$\Delta \zeta^m$				$\Delta \xi''$				$\Delta \eta''$			
		0°	11°,5	23°,1	34°,9	0°	11°,5	23°,1	34°,9	0°	11°,5	23°,1	34°,9

Влияние аномалий, выражаемых сферическими функциями порядка от 2 до n

2	34,3	30,3	27,4	25,1	1'',76	1'',51	1'',37	1'',25	2'',17	1'',86	1'',68	1'',55
3	37,0	31,9	28,5	26,0	1,98	1,65	1,46	1,32	2,53	2,08	1,84	1,67
4	39,2	32,4	28,8	26,1	2,30	1,78	1,53	1,35	2,69	2,14	1,87	1,68
5	39,6	32,6	28,8	26,1	2,47	1,82	1,54	1,36	2,76	2,16	1,87	1,68
6	40,4	32,7	28,8	26,1	2,62	1,85	1,55	1,36	3,01	2,20	1,88	1,68

Влияние аномалий, выражаемых сферическими функциями порядка от 4 до n

4	9,6	5,7	3,7	2,6	1,12	0,66	0,44	0,31	0,83	0,49	0,32	0,23
5	11,2	6,3	4,0	2,7	1,42	0,78	0,49	0,33	1,01	0,56	0,35	0,24
6	13,6	6,9	4,1	2,7	1,72	0,85	0,50	0,33	1,63	0,72	0,39	0,25

Первая половина таблицы (аномалии учитываются, начиная со 2-го порядка) соответствует обычному случаю, когда поверхностью относимости является эллипсоид. Вторая половина той же таблицы характеризует результаты, получающиеся на хорошо подобранной поверхности третьего порядка в сферических функциях.

Эта таблица наглядно показывает эффект, получающийся в результате убыстрения сходимости функции Стокса. Уже при  $\psi_0 = 11^\circ,5$  заметно значительное ослабление в быстроте прироста поправок с увеличением  $n$  по сравнению с тем, что имело место при  $\psi_0 = 0$ .

Для  $\psi_0 = 23^\circ,1$  и  $34^\circ,9$  это обстоятельство проявляется с еще большей четкостью.

Принимая во внимание результаты, полученные при исследовании предельных ошибок, можно прийти к таким заключениям.

Если непосредственным интегрированием учитываются аномалии до сферического расстояния в  $34^\circ,9$  или  $23^\circ,1$  от аэропункта, то среднее квадратическое влияние всех дальних зон выражается величинами:

	$34^\circ,9$	$23^\circ,1$
по $\zeta$	$\frac{26}{\text{м}}$	$\frac{29}{\text{м}}$
$\xi$	$1'',4$	$1'',6$
$\eta$	$1'',7$	$1'',9$

Предельные ошибки от замены функции Стокса шестым приближением к ней при этом получаются соответственно:

	$34^\circ,9$	$23^\circ,1$
по $\zeta$	$\frac{1,2}{\text{м}}$	$\frac{4,1}{\text{м}}$
$\xi$ и $\eta$	$0'',7$	$3'',2$

При тех же предельных ошибках (за счет упрощения функции Стокса) среднее квадратическое влияние аномалий от 4-го до 6-го порядка при учете дальних зон определяется величинами

	$34^\circ,9$	$23^\circ,1$
по $\zeta$	$\frac{3}{\text{м}}$	$\frac{4}{\text{м}}$
$\xi$ и $\eta$	$0'',3$	$0'',4$

Если можно пренебречь этими величинами, то при учете дальних зон достаточно принять во внимание сферические функции только 2-го и 3-го порядка в аномалии. Для этого необходимо определить 10 входящих в них коэффициентов. Такую задачу можно считать выполнимой.

В заключение подчеркиваем, что достоверность полученных числовых выводов зависит от того, насколько верно получен порядок величины коэффициентов разложения аномалий по сферическим функциям. Приведенное выше сравнение двух вариантов разложения Дубовского с вариантом Джеффриса позволяет надеяться, что в данном вопросе степень неопределенности не очень велика. Во всяком случае пока нет другого, более достоверного материала для характеристики влияния дальних зон на гравиметрические выводы.

Изложенная методика, основанная на убыстрении сходимости ряда Стокса, можно думать, окажется полезной в практических работах для учета влияния дальних зон при массовых вычислениях. Упрощая вычислительные работы, этот способ позволяет просто исправить результаты, если коэффициенты, входящие в первые сферические функции разложения аномалий, будут определены заново более уверенно.

Но если даже влияние дальних зон не учитывать, имеет смысл в центральной зоне видоизменить функцию Стокса изложенным приемом, поскольку после этого высоты геоида и отклонения отвеса будут соответствовать наиболее простой поверхности относимости, которая практически легче всего может быть определена.

## ЗАДАЧИ, РАЗРЕШАЕМЫЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЛЬКО МЕСТНОЙ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

### § 21. Идея астрономо-гравиметрического способа развития опорной геодезической сети

Гравиметрический вывод уклонений отвеса и особенно высот геоида осложнен тем, что гравиметрической съемкой охвачена сравнительно небольшая часть всей поверхности Земли. В лучшем случае при подобных выводах удастся учесть аномалии до расстояния в 1000—1500 км от исследуемого пункта. Но и тогда за счет неучтенных аномалий в уклонения отвеса войдет ошибка свыше  $\pm 2''$ , а в высоту геоида более  $\pm 30$  м (в обоих случаях имеются в виду средние ошибки). Для близких пунктов эти ошибки почти постоянны: их изменение от пункта к пункту происходит медленно и плавно.

Правильный характер изменения эффекта дальних аномалий позволяет интерполировать его и в некоторых задачах исключать путем привлечения дополнительных данных. Такими данными являются астрономо-геодезические уклонения отвесной линии.

При совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических материалов желательно исключить влияние неизвестных дальних аномалий настолько полно, чтобы с ним можно было не считаться. Вместе с тем, область учитываемых аномалий, внутри которой должны быть выполнены гравиметрические работы, желательно ограничить минимальными размерами.

Чем в большей степени требуется исключить влияние дальних аномалий, тем в большей области, естественно, аномалии должны учитываться. Существует связь между радиусом учитываемой области и соответствующей остаточной ошибкой, обусловленной всеми неучтенными аномалиями. Установление этой связи является основным принципиальным вопросом астрономо-гравиметрического нивелирования и астрономо-гравиметрического способа развития опорной сети картографических съемок.

Для решения указанного вопроса достаточно оценить предельную ошибку того или иного вывода в зависимости от радиуса той области, внутри которой оказалось возможным учесть аномалии.

Но для этой предельной ошибки желательно дать возможно тесную оценку, чтобы, с одной стороны, не преувеличивать ошибку результата, а с другой—без нужды не требовать выполнения лишних гравиметрических работ. С последней точки зрения уточнение предельной ошибки имеет большое практическое значение.

Полученную нами ранее предельную ошибку интерполирования уклонения отвеса („Труды ЦНИИГАиК“, вып. 17) в результате более тщательной оценки можно значительно снизить. Точно так же мы получим более точно величину соответствующей ошибки для астрономо-гравиметрического нивелирования и оценим верхний предел накопления рассматриваемых ошибок при передаче высоты геоида на значительное расстояние.

Напомним принципиальную сторону вывода интерполированных уклонений отвеса и гравиметрических поправок в астрономическое нивелирование. Это необходимо для уточнения прежних расчетов.

Астрономо-геодезические уклонения отвеса считаются заданными в нескольких точках области  $\sigma$ . Если речь идет об интерполяции по площади, то число таких точек (с известными обеими составляющими) должно быть не менее трех. При интерполяции по прямой достаточно

иметь две точки—на концах отрезка. При наличии большего числа точек будем располагать дополнительными данными, которые позволят снизить случайную часть ошибки результата.

За границу области  $\sigma$  возьмем стороны выпуклого многоугольника, каждая из вершин которого совпадает с одним из астрономических пунктов триангуляции (в случае двух пунктов  $A$  и  $B$  областью  $\sigma$  будет являться отрезок  $AB$ ).

Всю поверхность Земли делим на две области:

1) область  $\Sigma$ , в каждой точке которой можем считать аномалию силы тяжести известной;

2) область  $\Sigma'$ , к которой относим всю остальную часть поверхности Земли. Для дальнейших выводов необходимо предположить, что область  $\sigma$  целиком заключена в области  $\Sigma$ . Основная наша задача заключается в том, чтобы при заданных размерах  $\sigma$  определить минимальные размеры области  $\Sigma$  при заданной точности интерполяции уклонений отвеса.

Астрономо-геодезическое уклонение отвеса  $\vartheta_a(K)$  в любой точке  $K$  области  $\sigma$  можем представить, как сумму

$$\vartheta_a(K) = \vartheta_g(K) + \Delta\vartheta(K)$$

гравиметрического уклонения отвеса  $\vartheta_g(K)$  и  $\Delta\vartheta(K)$ , где  $\Delta\vartheta(K)$  есть угол между референц-эллипсоидом, принятым при обработке триангуляции, и эллипсоидом, положенным в основу при вычислении аномалий силы тяжести. Это равенство можно понимать либо как векторное, либо как скалярное для соответствующих составляющих произвольного, но всюду одинакового направления.

Точно так же гравиметрическое уклонение отвеса представим в виде суммы:

$$\vartheta_g(K) = \vartheta_g(\Sigma, K) + \vartheta_\sigma(\Sigma', K),$$

где первое слагаемое определяется только аномалиями в области  $\Sigma$  (и, следовательно, считается известным), а второе зависит от неизвестных аномалий в области  $\Sigma'$ .

Таким образом:

$$\vartheta_a(K) - \vartheta_g(\Sigma, K) = \vartheta_g(\Sigma', K) + \Delta\vartheta(K), \quad (5.1)$$

причем левая сторона равенства известна, если точка  $K$  совпадает с астрономо-геодезическим пунктом. Она может считаться известной и в любом промежуточном пункте, если ее изменение настолько правильно, что окажется возможной интерполяция с заранее установленной точностью. Поскольку угол между эллипсоидами  $\Delta\vartheta(K)$  меняется по известному закону (очень медленно и плавно), задача сводится к выбору границы между областями  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  в функции размеров области  $\sigma$  и допустимой ошибки интерполяции.

Изложенные соображения передают основную идею астрономо-гравиметрического способа развития опорной сети для картографических съемок.

## § 22. Оценка предельной ошибки, связанной с ограничением радиуса интеграции

Возьмем точку  $O$  в центральной части области  $\sigma$ .

Граница областей  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  должна быть настолько удалена от границы  $\sigma$  и  $\Sigma$ , чтобы минимальное расстояние от точки  $O$  до первой границы было больше максимального расстояния от той же точки  $O$  до второй границы (как увидим далее, из соображений точности интерполяции отношение этих расстояний должно быть около двух).

При этом условии  $\vartheta_g(K\Sigma')$  можно разложить в ряд:

$$\vartheta_g(K\Sigma') = \vartheta_g(O\Sigma') + \frac{\partial \vartheta_g(O\Sigma')}{\partial x} x + \frac{\partial \vartheta_g(O\Sigma')}{\partial y} y + \dots, \quad (5.2)$$

и этот ряд будет абсолютно сходиться во всей области  $\sigma$ . Здесь  $x$  и  $y$  — прямоугольные координаты точки  $K$  при начале координат в  $O$ .

Написанные члены разложения, линейные относительно координат, полностью учитываются линейной интерполяцией. Ошибка интерполяции величины  $\delta_g(K\Sigma')$  определится величиной последующих членов, зависящих от вторых и высших степеней координат. Очевидно, их исследование (в случае линейной интерполяции) должно определить границу между областями  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , т. е. ту границу, до которой должны учитываться аномалии силы тяжести. Если в качестве интерполяционной функции избрать функцию второго порядка, то ошибка интерполирования определилась бы членами третьего и более высокого порядка. Но нет смысла в подобном усложнении интерполяции, так как при решении такой задачи число неизвестных удваивается, и надежность их определения сильно понижается. С практической точки зрения лучше вместо этого область  $\sigma$  разбить на части, что также приведет к уменьшению области  $\Sigma$ . Поэтому нет нужды дальнейшие выводы усложнять учетом сферических членов, которые, как известно, в формуле Венинг Мейнеса мало сказываются при интегрировании даже до расстояния в 1000 км и имеют ничтожную величину в формулах для вторых производных от уклонения отвеса.

По этой причине мы можем исходить из предельного вида формулы Стокса (случай плоского поля аномалий бесконечного простираия):

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{\Delta g}{r} d\sigma$$

и пользоваться соотношениями:

$$\frac{\partial^n \zeta}{\partial x^n} = (-1)^n \frac{n!}{2\pi\gamma} \int \Delta g \frac{P_n(\cos \alpha)}{r^{n+1}} d\sigma, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^{n+1} \zeta}{\partial x^n \partial y} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{2\pi\gamma} \int \Delta g \frac{P'_{n+1}(\cos \alpha) \sin \alpha}{r^{n+2}} d\sigma, \quad (5.4)$$

понимая под  $\alpha$  угол между осью  $x$  и направлением радиуса-вектора  $r$ , проведенного к элементу плоскости  $d\sigma$ .

Таким образом, члены второго порядка (сумму их назовем  $\delta_2$ ) в разложении (5.2) при интерполяции составляющей уклонения отвеса по  $x$  можно представить так:

$$\begin{aligned} \delta_2 = & \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} xy + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^2 \partial x} \frac{y^2}{2} = - \frac{3x^2}{2\pi\gamma} \int_{\Sigma'} \frac{\Delta g P_3(\cos \alpha)}{r^4} d\sigma - \\ & - \frac{xy}{\pi\gamma} \int_{\Sigma'} \frac{\Delta g P'_3(\cos \alpha) \sin \alpha}{r^4} d\sigma - \frac{y^2}{2\pi\gamma} \int_{\Sigma'} \frac{\Delta g P'_3(\sin \alpha) \cos \alpha}{r^4} d\sigma, \end{aligned}$$

или, если  $R$  — минимальное расстояние от  $O$  до границы  $\Sigma$  и  $\Sigma'$

$$\delta_2 \leq \left| \frac{1}{4\pi\gamma} \int_R^\infty d \left( \frac{1}{r^2} \right) \int_0^{2\pi} \Delta g \left[ 3x^2 P_3(\cos \alpha) + 2xy P'_3(\cos \alpha) \sin \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + y^2 P'_3(\sin \alpha) \cos \alpha \right] d\alpha \right|.$$

Оценим предельную величину результата интегрирования по  $\alpha$ , пользуясь неравенством Шварца.

Прежде всего убеждаемся, что

$$\int_0^{2\pi} P_3(\cos \alpha) P_3'(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} P_3'(\cos \alpha) P_3'(\sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = 0$$

Следовательно, на основании неравенства Шварца

$$I = \int_0^{2\pi} \Delta g \left[ 3x^2 P_3(\cos \alpha) + 2xy P_3'(\cos \alpha) \sin \alpha + y^2 P_3'(\sin \alpha) \cos \alpha \right] d\alpha \leq$$

$$\leq \left\{ \int_0^{2\pi} \Delta g^2 d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ 9x^4 P_3^2(\cos \alpha) + 4x^2 y^2 P_3'^2(\cos \alpha) \sin^2 \alpha + \right. \right.$$

$$\left. \left. + y^4 P_3'^2(\sin \alpha) \cos^2 \alpha + 6x^2 y^2 P_3(\cos \alpha) P_3'(\sin \alpha) \cos \alpha \right] d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее получаем:

$$\int_0^{2\pi} P_3^2(\cos \alpha) d\alpha = \frac{17}{32} \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} P_3'^2(\cos \alpha) \sin^2 \alpha d\alpha = \int_0^{2\pi} \left( \frac{dP_3(\cos \alpha)}{d\alpha} \right)^2 d\alpha = \frac{117}{32} \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} P_3'^2(\sin \alpha) \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{117}{32} \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} P_3(\cos \alpha) P_3'(\sin \alpha) \cos \alpha d\alpha = -\frac{33}{32} \pi.$$

Подставляя эти значения в предыдущее неравенство, имеем:

$$I \leq \left[ \int_0^{2\pi} \Delta g^2 d\alpha \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{9\pi}{32} (17x^4 + 30x^2y^2 + 13y^4) \right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \frac{3\sqrt{17}\pi}{8} (x^2 + y^2) \Delta g_m, \quad (5.5)$$

где

$$\Delta g_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g^2 d\alpha.$$

Поэтому

$$\left| \delta_2 \right| < \frac{3\sqrt{17}}{16} \frac{x^2 + y^2}{r} \int_0^R \Delta g_m d\left( \frac{1}{r^2} \right) < \frac{3\sqrt{17}}{16} \frac{x^2 + y^2}{R^2} \frac{\Delta g_m}{r}. \quad (5.6)$$

В неравенстве (5.5)  $\Delta g_m$  представляет собой среднее квадратическое значение колебания аномалии на окружности радиуса  $r$  (с центром в  $O$ ).  $\Delta g_m$  при буквальном понимании (5.6) должно бы пониматься как максимальное значение  $\Delta g_m$ . Однако, поскольку  $\Delta g_m$  множится на  $\frac{1}{r^3}$ , интеграл в (5.6) убывает чрезвычайно быстро, и его величина определяется почти исключительно аномалиями вблизи его нижнего предела. Поэтому под  $\Delta g_m$  можно понимать среднее квадратическое значение колебания аномалии вблизи границы областей  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ .

Выражая  $\delta_2$  в секундах, получаем вместо (5.6)

$$\left| \delta_2 \right| < 0'',16 \frac{x^2 + y^2}{R^2} \Delta g_m, \quad (5.7)$$

или

$$\left| \delta_2 \right| < 0'',16 \frac{\Delta g_m}{\rho^2},$$

где  $\rho$  — отношение радиусов областей  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , а  $\Delta g_m$  выражено в миллигалах.

Мы не будем оценивать предельную величину членов третьего и следующих порядков в разложении (5.2): заранее можно ожидать, что они окажутся малы. В этом мы убедимся, когда перейдем к соответствующим расчетам для астрономо-гравиметрического нивелирования. Влияние этих членов, как увидим, будет учтено в формуле

$$\delta < \frac{0'',16}{\rho^2 - 1} \Delta g_m. \quad (5.8)$$

Эта формула дает предельную ошибку разложения (5.2), т. е. она определяет предельную величину полного изменения на участке  $\tau$  тех нелинейных членов, которые при развитии опорной астрономо-геодезической сети изложенным способом дадут систематическую часть деформации этой сети. Эта величина ( $\delta$ ) распределится в области  $\tau$  по-разному, в зависимости от расположения опорных пунктов. Например, если все опорные пункты расположены на контуре  $\tau$ , то это значение ( $\delta$ ) явится предельным для центра  $\tau$ , убывая от центра пропорционально квадрату расстояния (таким образом во всех остальных точках оно будет значительно меньше).

В качестве примера применения формулы (5.8) рассмотрим тот случай, когда области  $\tau$  соответствует лист карты масштаба 1 : 200 000, т. е. радиус этой области  $\approx 50$  км. Можно принять из осторожности, что  $\Delta g_m$  будет тогда приблизительно равно двойной ошибке представления контура  $\Sigma$ , т. е.

$$\Delta g_m \approx 1,1 \sqrt{2\pi \cdot 50 \rho} \approx 20 \sqrt{\rho} \text{ мгл.}$$

Задаваясь предельной величиной  $\delta < 1''$ , 2, получаем

$$\rho^2 - 1 = 2,6 \sqrt{\rho}, \quad \rho \approx 2,1,$$

т. е. гравиметрическая съемка должна от центра листа распространяться не менее, чем на 100 км.

При оценке  $\Delta g_m$  в конкретных случаях надежнее пользоваться гравиметрической картой. Достаточно ограничиться довольно грубой оценкой.

Когда съемочный участок  $\tau$ , внутри которого интерполируются отклонения отвеса, велик, то соответственно очень большими окажутся и размеры той области, которая должна быть заполнена местной гравиметрической съемкой. В этом случае для более благоприятного решения

вопроса можно привлечь дополнительные данные. Такими данными являются результаты большого опыта, накопленного в ЦНИИГАиК при вычислении гравиметрических уклонений отвеса более чем для 500 пунктов. Некоторые итоги этого опыта, в интересующей нас сейчас части, отображены на картах, где в изолиниях через  $0''$ , 2 представлена та часть уклонения отвеса, которая вызывается аномалиями силы тяжести внутри кольца с внутренним радиусом 300 км и внешним 1000 км. Мы видим, что влияние этого кольца не очень велико и меняется от места к месту довольно плавно. С известным основанием можно ожидать, что и в неизученных районах, сходных по рельефу, общая картина существенно не изменится. В таком случае по этой карте можно судить о порядке величины погрешности, которую можно предполагать, если местная съемка не распространяется далее 300 км от границ съемочного участка.

Сравним формулу (5.8) с формулой (10) в моей статье, помещенной в 17-м вып. „Трудов ЦНИИГАиК“:

$$\delta < 0'', 12 \frac{\Delta g_{\max}}{\rho^2} \quad (5.9)$$

(обозначения в ней приведены в соответствие с обозначениями настоящей статьи);  $\Delta g_{\max}$  есть полуразность между максимальным и минимальным значением аномалии на границе  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ .

Как видим, разница в коэффициентах той и другой формулы не существенная. При учете членов выше второго порядка в (5.9) также появился бы делитель  $\rho^2 - 1$  вместо  $\rho^2$ . Следовательно, различие сводится в основном к тому, что вместо  $\Delta g_{\max}$  теперь входит  $\Delta g_m$ , т. е. вместо максимального колебания аномалии входит среднее квадратическое колебание на контуре, которое в 2—3 раза менее первого. Следовательно, формула (5.8) дает значительно более тесную оценку ( $\delta$ ), чем (5.9).

### § 23. Оценка предельной ошибки для астрономо-гравиметрического нивелирования

Обратимся к исследованию гравиметрической поправки астрономического нивелирования. Как известно, эта поправка получается из рассмотрения того случая, когда уклонение отвеса интерполируется между двумя астрономо-геодезическими пунктами  $A$  и  $B$ , и областью  $\sigma$  является отрезок  $AB$ . Интегрирование интерполированного уклонения отвеса в пределах от  $A$  до  $B$  приводит к следующему выражению [16] для гравиметрической поправки:

$$\Delta \zeta_g(\Sigma) = \zeta(B, \Sigma) - \zeta(A, \Sigma) - l \left[ \frac{\partial \zeta(A, \Sigma)}{\partial l} + \frac{\partial \zeta(B, \Sigma)}{\partial l} \right]. \quad (5.10)$$

Ошибка этой величины в той ее части, которая зависит от размеров области  $\Sigma$ , очевидно, равна

$$\Delta \zeta_g(\Sigma') = \zeta(B, \Sigma') - \zeta(A, \Sigma') - l \left[ \frac{\partial \zeta(A, \Sigma')}{\partial l} + \frac{\partial \zeta(B, \Sigma')}{\partial l} \right]. \quad (5.11)$$

Поскольку отрезок  $AB$  целиком расположен в области  $\Sigma$ , каждый из членов правой части (5.11) можно разложить в ряд для оценки максимальной величины  $\Delta \zeta_g(\Sigma')$ .

$$\zeta(B, \Sigma') = \zeta(O, \Sigma') + l \frac{\partial \zeta(O, \Sigma')}{\partial l} + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} + \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \dots$$

$$\zeta(A, \Sigma') = \zeta(O, \Sigma') - l \frac{\partial \zeta(O, \Sigma')}{\partial l} + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} - \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \dots$$

$$l \frac{\partial^2 \zeta(B, \Sigma')}{\partial l^2} = l \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} + l^2 \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} + \frac{l^3}{2!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \dots$$

$$l \frac{\partial^2 \zeta(A, \Sigma')}{\partial l^2} = l \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} - l^2 \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} + \frac{l^3}{2!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} - \dots$$

С помощью этих равенств из (5.11) получаем равномерно сходящийся ряд для  $\Delta \zeta_g(\Sigma')$ :

$$\Delta \zeta_g(\Sigma') = -2 \left[ \frac{2l^3}{3!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \frac{4l^5}{5!} \frac{\partial^5 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^5} + \frac{6l^7}{7!} \frac{\partial^7 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^7} + \dots \right] \quad (5.12)$$

Подставляя значения производных из (5.3), получаем:

$$\left| \Delta \zeta_g(\Sigma') \right| = \left| \frac{1}{\pi \gamma} \int_{\Sigma'} \Delta g \left[ \frac{2l^3}{r^3} P_3(\cos \alpha) + \right. \right. \quad (5.13)$$

$$\left. \left. + \frac{4l^5}{r^5} P_5(\cos \alpha) + \dots \right] d\sigma \right| < \left| \int_R^\infty J dr \right|,$$

где

$$J = \frac{1}{\pi \gamma} \int_0^{2\pi} \Delta g \left[ \frac{2l^3}{r^3} P_3(\cos \alpha) + \frac{4l^5}{r^5} P_5(\cos \alpha) + \frac{6l^7}{r^7} P_7(\cos \alpha) + \dots \right] d\alpha.$$

Очевидно,

$$\left| \pi \gamma J \right| \leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{2l^3}{r^3} P_3(\cos \alpha) d\alpha \right| + \left| \int_0^{2\pi} \Delta g \frac{4l^5}{r^5} P_5(\cos \alpha) d\alpha \right| + \dots$$

Теперь применим к каждому члену неравенство Шварца и получим

$$\left| \pi \gamma J \right| < \left[ \int_0^{2\pi} \Delta g^2 d\alpha \right]^{1/2} \left\{ \frac{2l^3}{r^3} \left[ \int_0^{2\pi} P_3^2(\cos \alpha) d\alpha \right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4l^5}{r^5} \left[ \int_0^{2\pi} P_5^2(\cos \alpha) d\alpha \right]^{1/2} + \dots \right\}.$$

Примем во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} P_3^2(\cos \alpha) d\alpha = \frac{34}{64} \pi > \int_0^{2\pi} P_5^2(\cos \alpha) d\alpha > \int_0^{2\pi} P_7^2(\cos \alpha) d\alpha > \dots$$

Получаем:

$$\left| J \right| < \sqrt{\frac{17}{16} \frac{\Delta g_m}{\gamma} \left( \frac{2l^3}{r^3} + \frac{4l^5}{r^5} + \frac{6l^7}{r^7} + \dots \right)}.$$

Возвращаясь к (5.13) и используя последнее неравенство, после интегрирования по  $r$  получаем:

$$\Delta \zeta_g(\Sigma') < \sqrt{\frac{17}{16} \frac{\Delta g_m}{\gamma} l \left( \frac{l^2}{R^2} + \frac{l^4}{R^4} + \frac{l^6}{R^6} + \dots \right)} = \sqrt{\frac{17}{16} \frac{\Delta g_m}{\gamma} \frac{l}{\rho^2 - 1}}, \quad (5.14)$$

где

$$\rho = \frac{R}{l}.$$

Здесь под  $\overline{\Delta g_m}$  можно, как и ранее, понимать среднюю квадратическую аномалию вблизи контура  $\Sigma$ .

Поделим обе части (5.14) на  $2l$  (т. е. на длину отрезка  $AB$ ),  $\Delta g_m$  выразим в миллигалах, а угловые величины в дуговых секундах. Получим:

$$\left| \frac{\Delta \zeta_g(\Sigma')}{2l} \right| < 0''{,}11 \frac{\overline{\Delta g_m}}{\rho^2 - 1}. \quad (5.15)$$

При астрономо-гравиметрическом нивелировании по астрономическим пунктам, отстоящим друг от друга на 70 км, и при использовании рассчитанной ранее [16] эллиптической палетки

$$\begin{aligned} \rho &= 3, \\ R &= 105, \end{aligned}$$

$$\overline{\Delta g_m} \approx 0,55 \sqrt{2\pi \cdot 105} \approx 15 \text{ мгл}$$

где 0,55 — коэффициент, входящий в формулу ошибки представительства.

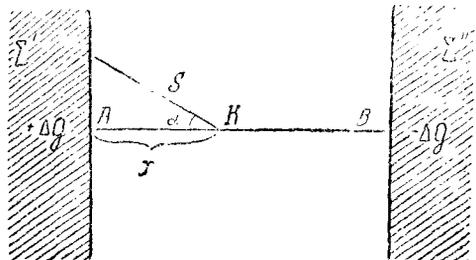
Поэтому средняя ошибка (5.15), обусловленная неучтенными зонами, безусловно менее  $\pm 0''{,}2$ . В конкретных условиях заданной пары пунктов значение на контуре  $\Sigma$  величины  $\Delta g_m$  можно получить с карты. Соответствующая предельная ошибка (5.15) в этих условиях, вероятно, будет близка к  $\pm 0''{,}2$ ,  $\pm 0''{,}3$  (а не к  $\pm 1''{,}0$ , как предполагалось ранее при более грубой оценке предельной ошибки). С этой точки зрения вполне можно вместо  $\rho = 3$  вести интегрирование при  $\rho = 2$ .

#### § 24. Верхний предел накопления систематических ошибок в гравиметрических поправках при астрономо-гравиметрическом нивелировании

Формула (5.15) определяет предельную величину влияния неучтенных аномалий на вывод превышения геоида на одном звене линии астрономо-гравиметрического нивелирования. Возникает вопрос о допустимых пределах этой величины. Это, конечно, зависит от характера ее изменения — будут ли рассматриваемые ошибки накапливаться быстро и систематически, или на разных звеньях войдут с разными знаками и взаимно погасятся.

Наибольшего систематического накопления ошибок можно ожидать в том случае, когда ходовая линия нивелирования приближается или удаляется от большой области значительных аномалий одного знака. Эффект накопления систематических ошибок мы усилим, если предположим, что аномальные области расположены полосами бесконечной длины, перпендикулярными к линии нивелирования, причем в каждой полосе предположим аномалию постоянной и равной ее максимальному значению. Когда линия нивелирования пересекает такую полосу, то вызываемые ею ошибки после прохождения середины полосы будут действовать в другую сторону и постепенно будут погашаться. Таким образом, заметный остаточный эффект дадут те полосы, которые не пересекаются линией нивелирования, а расположены на ее концах.

Следовательно, наиболее неблагоприятным случаем будет, например, тот, когда на одном конце  $A$  ходовой линии такая полоса положительных анома-



Черт. 3

лий имеет бесконечное простираение влево, а на конце  $B$  полюса отрицательных аномалий — бесконечное простираение вправо. Мы можем считать, что от краев полюсов точки  $A$  и  $B$  удалены на расстояние  $\rho l = R$ , где  $R$  — радиус той области  $\Sigma$ , аномалии в которой учитываются палеткой. Посмотрим, какое накопление ошибок рассмотренного типа (ошибок за счет ограничения области интеграции  $\Sigma$ ) может получиться в условиях данной схемы.

Возьмем на линии  $AB$  точку  $K$  на расстоянии  $x$  от левой вертикальной линии. Вычислим  $\Delta z_g(\Sigma')$  с помощью формулы (5.13), ограничиваясь учетом только первого члена, который, как мы видели, имеет доминирующее значение. Получим

$$\Delta z_g(\Sigma') = \frac{2 \Delta g l^3}{\pi \gamma} \int_{\Sigma'} \frac{P_3(\cos \alpha)}{r^3} d\sigma = \frac{2 \Delta g l^3}{\pi \gamma} \int_0^{\infty + \frac{\pi}{2}} \int_{S - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{P_3(\cos \alpha)}{r^3} dr d\alpha, \quad (5.16)$$

где  $S$  — расстояние от  $K$  до левой вертикальной линии по направлению  $\alpha$ . Очевидно

$$S = x \sec \alpha.$$

Интегрируя по  $r$ , получаем:

$$\Delta z_g(\Sigma') = \frac{\Delta g l^3}{\pi \gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{S^2} P_3(\cos \alpha) d\alpha = \frac{\Delta g l^3}{\pi \gamma x^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha P_3(\cos \alpha) d\alpha.$$

Последний интеграл в правой части равен  $\frac{2}{3}$ .

Поэтому

$$\Delta z_g(\Sigma') = \frac{2 \Delta g l^3}{3 \pi \gamma x^2}.$$

Ошибка в среднем наклоне профиля геоида на одном звене

$$\frac{\Delta z_g(\Sigma')}{2l} = \frac{\Delta g l^2}{3 \pi \gamma x^2}$$

даст ошибку в превышении на дифференциале длины  $dx$

$$\frac{\Delta g l^2}{3 \pi \gamma x^2} dx.$$

Полная величина накопления этих ошибок от  $A$  до  $B$  получится

$$\delta z_g = \int_{\rho l}^{2lN} \frac{\Delta g l^2}{3 \pi \gamma} \frac{dx}{x^2},$$

где  $N$  — общее число звеньев нивелирования.

Выполнив интегрирование, получаем:

$$\delta z_g = \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2N} \right) \frac{\Delta g l}{3 \pi \gamma},$$

или

$$\delta z_g < \frac{\Delta g l}{3 \pi \gamma \rho},$$

так как  $2N \gg \rho$ .

Таковую же ошибку внесет область  $\Sigma''$ , расположенная справа.

Поэтому

$$\left| \delta \zeta \right| < \frac{2(\Delta g)l}{3\pi\gamma\rho},$$

или, в числах, выражая  $\Delta g$  в миллигалах, а  $l$  и  $\zeta$  — в одинаковой мере

$$\left| \delta \zeta \right| < 2 \cdot 10^{-7} \frac{(\Delta g)}{\rho} l. \quad (5.17)$$

Например, при  $\Delta g = 50$  мгл,  $\rho = 2$  и  $l = 100$  км получаем:

$$\left| \delta \zeta \right| < 0,5 \text{ метра.}$$

Эту оценку можно считать верхним пределом накопления систематических ошибок за счет ограничения области интеграции на каждом звене радиусом  $\rho l$ . Отсюда видно, что значение  $\rho = 2$  не приводит к такому накоплению ошибок, которое можно было бы считать чрезмерным. Следовательно, увеличенная ошибка на каждом звене по формуле (5.15) не опасно, так как увеличенная ошибка все же остается значительно меньше тех случайных ошибок, которые обусловлены в первую очередь малой плотностью гравиметрических станций вблизи астропунктов (среднее значение последних близко к  $\pm 1''$ ).

Мы приходим к выводу, что при выполнении астрономо-гравиметрического нивелирования аномалии силы тяжести достаточно знать в полосе шириной  $4l$ . Например, при расстоянии между астрономическими пунктами в 100 км достаточно иметь гравиметрическую съемку на 100 км в каждую сторону от ходовой линии. Увеличение ширины полосы на точности нивелирования заметно не скажется. Как увидим далее, для повышения точности необходимо сгущение сети гравиметрических пунктов вокруг каждого из астропунктов до расстояния в 15—20 км. Такое мероприятие может повысить точность по меньшей мере в 2-3 раза по сравнению с тем, что мы имеем сейчас в условиях равномерной общей гравиметрической съемки СССР.

Приведенные здесь рассуждения относятся также к влиянию тех систематических ошибок в аномалиях больших областей, которые могут возникнуть вследствие ошибок определения опорных пунктов. На результатах астрономо-гравиметрического нивелирования они скажутся ничтожно.

## § 25. Два типа астрономо-геодезических уклонений отвеса и связь между ними

Мы видели, что при астрономо-гравиметрическом нивелировании гравиметрическая поправка не вносит в результат заметной систематической ошибки. Иначе может обстоять дело в отношении астрономо-геодезических данных, существенным образом используемых при решении этой задачи в форме астрономо-геодезических уклонений отвеса. Для уяснения этого вопроса нам придется несколько уклониться в сторону от основной линии изложения и более внимательно отнестись к смыслу астрономо-геодезических уклонений отвеса, соответствующих двум основным методам обработки триангуляции.

Начнем с того, что определим расстояние между двумя близкими по форме и положению эллипсоидами; далее, от расстояния перейдем к углу между нормальными.

Это расстояние  $h$  является некоторой функцией положения точки на эллипсоиде и, с достаточным приближением, линейной функцией разностей элементов этих эллипсоидов. Зависимость же  $h$  от широты и долготы может быть представлена сферическими функциями до 2-го порядка включительно. Именно, сферической функции нулевого порядка

будет соответствовать поправка объема исходного эллипсоида. Три элемента поправок ориентировки определяются сферической функцией 1-го порядка; поправка сжатия и два элемента трехосности определяются 3-мя первыми коэффициентами функции 2-го порядка.

Формула для  $h$  получена в двух различных вариантах проф. Ф. Н. Красовским [14] и де Грааф Хентером [15], а много ранее — Слудским [18]. Ф. Н. Красовский, крупнейший специалист по вопросам градусных измерений, с полным основанием приписывает ей роль исходной формулы нового метода градусных измерений. Формулы Красовского и де Грааф Хентера относятся к двухосному эллипсоиду. Однако при выводе элементов эллипсоида и в ряде других исследований с фактором трехосности следует считаться, особенно если мы желаем получить наилучшие элементы не только для той территории, для которой фигура геоида исследована, но и для тех огромных территорий, которые геодезически пока еще не освещены.

Поэтому начнем наше изложение с вывода формулы для взаимного расстояния двухосного и трехосного эллипсоида. Возьмем прямоугольную систему координат с началом в центре исходного (двухосного) эллипсоида. Ось  $z$  совместим с его малой осью, предполагая ее параллельность оси вращения Земли. Ось  $x$  предположим совмещенной с большой осью экваториального эллипса и от нее будем отсчитывать долготы  $\omega$ ; геодезическую широту точек на этом эллипсоиде назовем  $B$ , геоцентрическую  $\Phi$ . Очевидно, в этой системе координат уравнения двухосного и трехосного эллипсоидов запишутся так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(x - \bar{x}_0)^2}{(a + \Delta a)^2} + \frac{(y - \bar{y}_0)^2}{(a + \Delta c)^2} + \frac{(z - \bar{z}_0)^2}{(b + \Delta b)^2} = 1, \quad (5.18)$$

где  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  — координаты центра нового эллипсоида,  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  — поправки его полуосей.

Пусть  $l, m, n$  — направляющие косинусы радиуса-вектора, соединяющего точку  $x, y, z$  на исходном эллипсоиде с началом координат; тогда

$$\begin{aligned} x &= l\rho & l &= \cos \Phi \cos \omega \\ y &= m\rho & m &= \cos \Phi \sin \omega \\ z &= n\rho & n &= \sin \Phi \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\frac{l^2 + m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Радиус-вектор, имеющий направление  $(l, m, n)$  встречает искомый эллипсоид в точке  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , причем

$$\begin{aligned} \bar{x} &= l(\rho + \Delta\rho), \\ \bar{y} &= m(\rho + \Delta\rho), \\ \bar{z} &= n(\rho + \Delta\rho), \end{aligned}$$

где  $\Delta\rho$  — расстояние между обоими эллипсоидами, отсчитанное вдоль радиуса-вектора.

Подстановка в уравнение (5.18) дает

$$\frac{(l\rho + l\Delta\rho - \bar{x}_0)^2}{(a + \Delta a)^2} + \frac{(m\rho + m\Delta\rho - \bar{y}_0)^2}{(a + \Delta c)^2} + \frac{(n\rho + n\Delta\rho - \bar{z}_0)^2}{(b + \Delta b)^2} = 1.$$

Ограничиваясь представлением результата линейной функции от  $\Delta\rho, x_0, y_0, z_0, \Delta a, \Delta b, \Delta c$  и принимая во внимание (5.18) и (5.19),

получаем

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{l \rho}{a^2} \bar{x}_0 + \frac{m \rho}{a^2} \bar{y}_0 + \frac{n \rho}{b^2} \bar{z}_0 + \frac{l^2 \rho^2}{a^2} \frac{\Delta a}{a} + \frac{m^2 \rho^2}{a^2} \frac{\Delta c}{c} + \frac{n^2 \rho^2}{b^2} \frac{\Delta b}{b} \quad (5.20)$$

Очевидно, отброшенные члены второго и высших порядков дадут ничтожный эффект, даже если в качестве исходного принять эллипсоид Бесселя (именно — погрешность порядка 1:10 000 от величины поправок полюсей и ориентировки).

С той же степенью приближения, порядка квадрата сжатия, имеем:

$$\frac{\rho}{a} = 1 - z \sin^2 B \dots; \quad \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 l = \cos B \cos \omega \dots;$$

$$\frac{\rho}{b} = 1 + z \cos^2 B \dots; \quad \left(\frac{\rho}{b}\right)^2 m = \cos B \sin \omega \dots;$$

$$B - \Phi = z \sin 2B \dots;$$

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^3 l^2 = \cos^2 B \cos^2 \omega + \frac{z}{4} \sin^2 2B \cos^2 \omega \dots;$$

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^3 m^2 = \cos^2 B \sin^2 \omega + \frac{z}{4} \sin^2 2B \sin^2 \omega \dots; \quad \left(\frac{\rho}{b}\right)^2 n = \sin B \dots;$$

$$\left(\frac{\rho}{b}\right)^3 n^2 = \sin^2 B - \frac{z}{4} \sin^2 2B \dots;$$

$$\Delta \rho = h \cos (\Phi - B) = h \dots$$

Поэтому уравнение (5.20) запишется в следующем виде:

$$h = \cos B \cos \omega \bar{x}_0 + \cos B \sin \omega \bar{y}_0 + \sin B \bar{z}_0 + \left( \frac{\Delta a - \Delta c}{2} \cos 2\omega + \frac{\Delta a + \Delta c - 2\Delta b}{2} \right) \left( \cos^2 B + \frac{z}{4} \sin^2 2B \right) + \Delta b.$$

Переходя к обычному счету долгот, получаем

$$h = \cos B \cos L x_0 + \cos B \sin L y_0 + \sin B z_0 + \left[ \frac{\Delta a - \Delta c}{2} \cos 2(L - L_0) + \frac{\Delta a + \Delta c - 2\Delta b}{2} \right] \left( \cos^2 B + \frac{z}{4} \sin^2 2B \right) + \Delta b, \quad (5.21)$$

где  $L_0$  — долгота наибольшего меридиана трехосного эллипсоида,  $x_0, y_0, z_0$  — координаты центра искомого эллипсоида в системе координат с обычным счетом долгот.

Из (5.21) получаем обычным способом проекцию угла между эллипсоидами на направления меридиана и первого вертикала:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= -\frac{1}{M} \frac{\partial h}{\partial B} = \sin B \cos L \frac{x_0}{M} + \sin B \sin L \frac{y_0}{M} - \cos B \frac{z_0}{M} + \\ &+ \sin 2B \left[ \frac{\Delta a - \Delta c}{2M} \cos 2(L - L_0) + \frac{\Delta a + \Delta c - 2\Delta b}{2M} \right] (1 - a \cos 2B), \\ \Delta \eta &= -\frac{1}{N} \sec B \frac{\partial h}{\partial L} = \sin L \frac{x_0}{N} - \cos L \frac{y_0}{N} + \\ &+ \frac{\Delta a - \Delta c}{N} \sin 2(L - L_0) \cos^2 B (1 + a \sin^2 B). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь  $M$  и  $N$  — радиусы кривизны меридиана и сечения эллипсоида плоскостью первого вертикала. Следует отметить, что формула (5.21) по написанию похожа на формулу де Грааф Хентера, если отбросить член, зависящий от трехосности. Отличие заключается в том, что здесь входят не приведенные, а геодезические широты. Замена геодезических координат приведенными только понижает точность формул, внося ошибки порядка сжатия.

Формула (5.21) содержит в общем случае семь неизвестных  $x_0, y_0, z_0, \Delta a, \Delta b, \Delta c, L_0$ . Определив тем или иным способом все или часть этих неизвестных, мы получаем возможность по формулам (5.22) для любой точки получить поправки к геодезическим координатам  $B$  и  $L$  для перечисления их в систему координат на новом эллипсоиде с новыми исходными данными:

$$\begin{aligned} B' &= B - \Delta\xi, \\ L' &= L - \sec B \Delta\eta. \end{aligned}$$

Необходимо подчеркнуть, что такой способ перечисления должен применяться только в том случае, если триангуляция обработана методом проектирования. Эти формулы непригодны, если триангуляция вычислена методом „развертывания“.

Мы здесь подошли к очень важному вопросу о связи между координатами, получаемыми тем и другим методом. Для выяснения практической важности этого вопроса при исследовании фигуры геоида остановимся на одном примере. Чтобы яснее подчеркнуть принципиальную сторону дальнейших рассуждений и не отвлекать внимания на вычисления, не имеющие принципиального значения, пример этот по возможности упростим.

Пусть элементы размеров референц-эллипсоида безошибочны. Допустим также, что волнистости геоида отсутствуют. Тогда возвышения геоида над эллипсоидом будут обусловлены только ошибками ориентировки референц-эллипсоида. То же относится и к уклонениям отвесной линии.

Пусть ряд триангуляции от исходного пункта идет в меридиональном направлении. Тогда для этой дуги из (5.21) и (5.22) получим:

$$\begin{aligned} h &= \cos(B_0 - B) h_0 + \sin(B_0 - B) M_0 \Delta\xi_0, \\ \Delta\xi &= \sin(B_0 - B) \frac{h_0}{M_0} + \cos(B_0 - B) \Delta\xi_0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Применим теперь к нашей схеме обычные приемы вычисления триангуляции (развертыванием). Очевидно, для  $\Delta\xi$  мы получим

$$\Delta\xi = \Delta\xi_0, \quad (5.24)$$

так как при методе развертывания широты, при откладывании на двух равных эллипсоидах вдоль меридиана одной и той же дуги, изменятся и здесь и там на одинаковые величины (с точностью до величин порядка  $\alpha \Delta\xi$ ), независимо от длины дуги  $S$ . Если теперь мы определим  $h$ , применяя обычные формулы астрономического нивелирования, то получим:

$$h = h_0 - M \int_{B_0}^B \Delta\xi dB = h_0 + (B_0 - B) M \Delta\xi_0. \quad (5.25)$$

Сравнивая (5.23) с (5.24) и (5.25), мы приходим к противоречию, которое особенно велико при больших протяженностях дуг градусных измерений, как это видно из следующей таблички:

$B_0 - B$	$h$		$\Delta \xi$	
	по (5.23)	по (5.25)	по (5.23)	по (5.25)
$90^\circ$	$M_0 \Delta \xi_0$	$h_0 + \frac{\pi}{2} M \Delta \xi_0$	$\frac{h_0}{M}$	$\Delta \xi_0$
$180$	$-h_0$	$h_0 + \pi M \Delta \xi_0$	$-\Delta \xi_0$	$\Delta \xi_0$
$360$	$+h_0$	$h_0 + 2\pi M \Delta \xi_0$	$+\Delta \xi_0$	$\Delta \xi_0$

Отсюда приходится заключить, что при большом удалении от исходного пункта ошибки элементов ориентировки, если триангуляция обработана по методу развертывания, сказываются на выводе высот геоида в совершенно искаженном виде, вплоть до перемены знака отдельных слагаемых. Следовательно, классическая формула астрономического нивелирования

$$z = - \int (\xi dB + \eta \cos B dL) \quad (5.26)$$

при исследовании фигуры геоида на большой территории требует внесения дополнительных поправочных членов.

Разобранный пример помогает уяснить причину получившихся противоречий. Действительно, в формулах (5.23)  $\Delta \xi$  понимается как меридиональная составляющая угла между двумя эллипсоидами, в то время как  $\Delta \xi$  формулы (5.24) соответствует понятию о меридиональной составляющей уклонения отвеса при обычной обработке триангуляции по методу развертывания. Обычно эти понятия не разграничивались, и уклонение отвеса всегда определялось как угол между нормалью к эллипсоиду и геоиду. Это положение лежит в основе вывода формулы (5.26). Но верно оно только в том случае, если уклонения отвеса выведены из обработки триангуляции по методу проектирования. Применение же формулы (5.26) к обычным уклонениям отвеса, если исследуемая территория велика, приводит к противоречию, которое иллюстрировано приведенной выше табличкой.

Уклонения отвеса, полученные методом развертывания, следовало бы называть „смешанными“ уклонениями отвеса, чтобы подчеркнуть тот факт, что они получены, как разность координат точек, не лежащих на одной нормали к эллипсоиду. Использование их для построения фигуры геоида на большой территории без дополнительных поправок недопустимо.

Перейдем к вопросу о том, как с достаточной точностью получить эти поправки. Очевидно, для этого необходимо: 1) учитывать волнистости геоида; 2) знать путь, по которому производилась укладка звеньев при вычислении триангуляции; 3) учитывать эти поправки до уравнивания триангуляции, так как после уравнивания эти систематические ошибки перераспределяются между звеньями очень сложным и, вообще говоря, неизвестным образом. Если приходится оперировать с уравненными данными, то можно ограничиться приближенными поправками, вычисленными по некоторой средней ходовой линии. К счастью, в триангуляции СССР вдали от Пулкова, где эти поправки велики, последние трудности отпадают, так как триангуляция идет там цепью в долготном направлении.

Допуская в поправке отвесительную ошибку порядка сжатия, решим эту задачу на сфере.

Рассмотрим дугу градусных измерений длиной  $S$ , начинающуюся от исходного пункта. Эта длина получена на геоиде. Если ее спроектировать на сферу, получим:

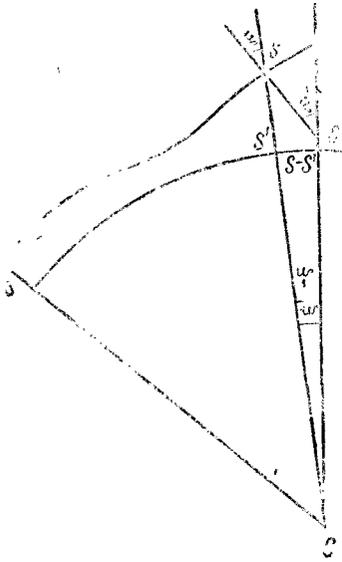
$$S' = \int_0^S \frac{dS}{1 + \xi} = S - \int_0^S \xi dS. \quad (5.27)$$

Здесь радиус сферы принят за единицу, и все линейные величины выражены в долях радиуса сферы;  $\zeta$  — расстояние между геоидом и референц-эллипсоидом.

Обозначим через  $\xi$  проекцию истинного уклонения отвеса на направление дуги  $S$ , через  $\xi'$  — проекцию „смешанного“ уклонения отвеса, полученную из вычислений по методу разворачивания.

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{d\zeta}{dS}, \\ \xi' - \xi &= S - S^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$



Черт. 4

как это видно из чертежа. Действительно, рассмотрим сечение геоида нормальной плоскостью в азимуте ходовой линии. Здесь  $\xi'$  есть угол между нормалью к геоиду на расстоянии  $S$  от исходного пункта, считая по поверхности геоида, и нормалью к сфере в точке, лежащей на том же расстоянии  $S$  от исходного пункта, считая по поверхности сферы.

Пусть мы имеем еще величины  $h$ , полученные обычным способом по формуле

$$h = h_0 + \int_0^S \xi' dS. \quad (5.29)$$

Следовательно,

$$\xi' = \frac{dh}{dS}. \quad (5.30)$$

С помощью (5.28) и (5.30) получаем из (5.27):

$$\xi' - \xi = \frac{dh}{dS} - \frac{d\zeta}{dS} = \int_0^S \zeta dS. \quad (5.31)$$

Это уравнение путем дифференцирования по  $S$  приводится к простому дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\zeta}{dS^2} + \zeta = -\frac{d^2h}{dS^2}. \quad (5.32)$$

Полагая  $\zeta - h = y$ , получим:

$$\frac{d^2y}{dS^2} = -(y + h).$$

Соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d^2y}{dS^2} + y = 0$$

имеет решение

$$y = A \sin S + B \cos S. \quad (5.33)$$

Варируя произвольные постоянные обычным способом, приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dS} \sin S + \frac{dB}{dS} \cos S &= 0, \\ \frac{dA}{dS} \cos S - \frac{dB}{dS} \sin S &= -h, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$A = A_0 - \int_0^S h \cos l dl,$$

$$B = B_0 + \int_0^S h \sin l dl$$

и после подстановки в (5.33)

$$\zeta - h = A_0 \sin S + B_0 \cos S + \int_0^S h \sin(l - S) dl. \quad (5.34)$$

Определим постоянные интегрирования из начальных условий:

при  $S=0$ ,  $\zeta = \zeta_0$  и  $h = h_0$ , поэтому

$$B_0 = \zeta_0 - h_0.$$

Для определения  $A_0$  дифференцируем (5.34) по  $S$

$$\zeta - \zeta' = A_0 \cos S - B_0 \sin S - \int_0^S h \cos(l - S) dl. \quad (5.35)$$

При  $S=0$ ,  $\zeta = \zeta_0$  и  $\zeta' = \zeta'_0$ , поэтому

$$A_0 = \zeta_0 - \zeta'_0.$$

После подстановки значений  $A_0$  и  $B_0$  в (5.34) и (5.35) получаем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= h + (\zeta_0 - \zeta'_0) \sin S + (\zeta_0 - h_0) \cos S + \int_0^S h \sin(l - S) dl, \\ \zeta &= \zeta' + (\zeta_0 - \zeta'_0) \cos S - (\zeta_0 - h_0) \sin S - \int_0^S h \cos(l - S) dl. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Формулы (5.36) устанавливают взаимную связь между уравнениями градусных измерений, соответствующими двум методам обработки триангуляции (метод проектирования и метод развертывания).

Для перехода от координат, полученных методом развертывания, к соответствующим координатам метода проектирования, интегрируя по частям в правой части (5.36), получим:

$$\zeta - \zeta' = (\zeta_0 - \zeta'_0) \cos S - \zeta_0 \sin S + \int_0^S \zeta' \sin(l - \zeta) dl. \quad (5.37)$$

Формула (5.36) дает поправку в проекцию уклонения отвеса на направление ходовой линии развертывания триангуляции (или, что то же, в длину геодезической линии) в функции величин  $h$  неисправленных высот геоида. Формула (5.37) дает ту же величину в функции  $\zeta'$  — „смешанных“ уклонений отвеса, т. е. уклонений отвеса, вычисленных по методу развертывания.

Высоты геоида  $\zeta$  через величины  $h$  определяются формулой (5.36), а через  $\zeta'$  формулой:

$$\zeta = \zeta_0 \cos S + (\zeta_0 - \zeta'_0) \sin S + \int_0^S \zeta' \cos(l - S) dl \quad (5.38)$$

(вместо обычной  $\zeta = \zeta_0 + \int_0^S \zeta' dl$ ).

Для обратного перехода — от элементов, полученных методом проектирования, к соответствующим элементам метода развертывания — мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 + (\zeta - \zeta_0) + \int_0^S dl \int_0^S \zeta dl, \\ \zeta' &= \zeta'_0 + (\xi - \xi_0) + \int_0^S \zeta dS. \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Все эти формулы имеют относительную точность порядка сжатия.

Рассмотрим следующий пример. Для случая перехода от эллипсоида Бесселя к новому эллипсоиду СССР (но с ориентировкой  $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$  в Пулково) вычислим по ним поправки в уклонения отвеса в первом вертикале для параллели с широтой  $52^\circ 30'$ , соответствующие двум методам обработки триангуляции. Значения, соответствующие методу развертывания, сравним с теми, которые были получены А. А. Изотовым прямым путем, с помощью обычных уравнений градусных измерений.

При этом предположим, что развертывание триангуляции на эллипсоид Бесселя производилось вдоль параллели  $52^\circ 30'$  с запада на восток, начиная от меридиана Пулково.

В этом случае:

$$\zeta = \cos B \cos L x_0 + \sin B z_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B + \Delta b,$$

так как  $y_0 = 0$ . Кроме того,  $\eta_0 = \eta'_0$  и  $\eta = -\sin L x_0$ .

Следовательно:

$$\zeta' = \sin L x_0 + \int_0^L \left[ \cos B \cos L x_0 + \sin B z_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B + \Delta b \right] \cos BdL.$$

так как

$$dS = \cos BdL.$$

Выполнив интегрирование, получим  $\zeta'$  (в метрах):

$$\zeta' = -x_0 \sin^2 B \sin L + L \cos B \left[ \sin B z_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B + \Delta b \right]. \quad (5.40)$$

Для перевода в секунды дуги следует поделить на радиус кривизны в первом вертикале для широты  $52^\circ 30'$  и на  $\sin 1''$ .

Результаты вычислений для 19 астрономических пунктов, лежащих вблизи этой параллели, приведены ниже. Положение пункта по его номеру можно найти на карте, помещенной между стр. 78 и 79.

№ пункта	L от Пулково	$\zeta$	$\zeta'$	$\zeta'$ по Изотову	Расхождение
1	2	3	4	5	6
38	-0 27,9	+0'',10	+0'',12	0'',12	0,00
47	5 32,1	-1,3	-1,41	-1,41	0,00
110	8 50,7	-1,96	-2,26	-2,25	+0,01
168	13 06,4	-2,89	-3,34	-3,33	+0,01
170	16 49,7	-3,69	-4,28	-4,26	+0,02
235	21 47,8	-4,73	-5,50	-5,47	+0,03
268	27 49,7	-5,95	-6,96	-6,92	+0,04
298	31 17,3	-6,62	-7,77	-7,74	+0,03
303	34 59,3	-7,31	-8,63	-8,62	+0,01
328	40 02,1	-8,19	-9,75	-9,74	+0,01
529	45 26,9	-9,03	-10,91	-10,90	+0,01
533	50 23,8	-9,82	-11,92	-11,89	+0,03
539	55 08,9	-10,45	-12,84	-12,83	+0,01
427	72 50,9	-12,17	-15,78	-15,78	0,00
432	77 17,4	-12,43	-16,39	-16,47	-0,08
439	83 14,7	-12,65	-17,13	-17,24	-0,11
448	88 51,1	-12,74	-17,73	-17,82	-0,09
453	95 51,0	-12,67	-18,36	-18,44	-0,08
558	99 35,0	-12,56	-18,64	-18,64	-0,20

Полученные в последнем столбце расхождения могут зависеть от того, что вычисление коэффициентов уравнений градусных измерений А. А. Изотовым выполнялось последовательным исключением  $\xi$  и  $\eta$  по ходовой линии, не совпадающей с параллелью  $52^{\circ}30'$ . Мы видим, что различие между  $\eta$  и  $\eta'$  велико и надежно устанавливается рассмотренным способом. Следовательно, обсуждавшиеся здесь систематические поправки должны учитываться при астрономо-гравиметрическом нивелировании.

## § 26. Исправление результатов астрономо-гравиметрического нивелирования

Для иллюстрации разобранной методики вывода высот геоида по материалам большой астрономо-геодезической сети обратимся к рассмотрению результатов астрономо-гравиметрического нивелирования по СССР, полученных в 1939 и 1943 гг. в ЦНИИГАиК.

В 1939 г. астрономо-гравиметрическое нивелирование было выполнено Б. В. Дубовским на эллипсоиде Бесселя, являвшемся тогда референц-эллипсоидом государственной триангуляции СССР. Триангуляционная сеть обрабатывалась по методу „развертывания“. Рассмотренные выше поправки, исправляющие результат от систематических ошибок, не вводились.

В 1943 г. астрономо-гравиметрическое нивелирование было повторено заново. Основное назначение этой работы заключалось в том, чтобы вычислить высоты базисов над новым референц-эллипсоидом СССР, а также, чтобы получить положение эллипсоида по высоте в исходном пункте триангуляции. Эта работа была проведена на основе дополненного и, главное, заново целиком переработанного гравиметрического материала (переработка производилась в связи с составлением нового каталога гравиметрических пунктов СССР). Для вычисления ориентировки нового эллипсоида астрономо-геодезические уклонения отвеса А. А. Изотовым были перечислены с эллипсоида Бесселя на новый эллипсоид триангуляции СССР ( $1:\alpha = 298,3$ ;  $\alpha = 6378\,245$ ), ориентированный по астрономическим данным в Пулкове. Высота геоида в 1943 г. вычислялась на основе этих уклонений отвеса, т. е. относительно нового эллипсоида с ориентировкой  $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ , в Пулкове.

Вся сеть астрономо-гравиметрического нивелирования уравнивалась методом последовательных приближений. Прежде всего уравнивание велось для узловых точек полигонов. Веса звеньям придавались обратно пропорциональные квадратам их длин. В тех случаях, когда встречались звенья астрономического нивелирования (не обеспеченные гравиметрической съемкой), вся невязка разверстывалась между этими звеньями.

Таким образом, нивелирование 1943 г. было произведено, по сравнению с 1939 годом, насколько возможно, независимо: на разных эллипсоидах, с другой разбивкой всей сети на полигоны, по вновь переработанным гравиметрическим материалам, вновь составленным картам изоаномалий, уравнивание результатов нивелирования проведено иным методом. Поэтому очень интересно сравнить между собой результаты той и другой работы. Для этого мы выбрали профиль геоида по параллели  $52^{\circ}30'$  от меридиана Пулкова до меридиана  $100^{\circ}$  от Пулкова. В дальнейшем будем предполагать, что „развертывание“ триангуляции при ее вычислении велось с запада на восток, вдоль этой параллели. Это допущение в западной части параллели незаконно, но там малы поправки; в восточной же части оно близко к истине.

Формулы (5.36) выведены для дуги большого круга. В нашем же случае, как мы допустили, триангуляция развертывалась вдоль параллели. Вообразим себе конус с вершиной в центре сферы, секущий сферу по данной параллели. Развернем этот конус на плоскость. При

развертывании высоты геоида сохраняются, условия вывода исходного дифференциального уравнения (5.32) не нарушатся, следовательно, окончательная формула остается справедливой, если  $S=L \cos B_0$  ( $L$ —долгота,  $B$ —широта).

Следовательно, для дуги параллели формула (5.36) запишется в таком виде:

$$\begin{aligned} \zeta &= h + (\eta_0 - \eta'_0) \sin(L \cos B_0) + (\zeta_0 - h_0) \cos(L \cos B_0) + \\ &+ \int_0^L h \sin[(l - L) \cos B_0] \cos B_0 dl, \\ \eta &= \eta' + (\eta_0 - \eta'_0) \cos(L \cos B_0) - (\zeta_0 - h_0) \sin(L \cos B_0) - \\ &- \int_0^L h \cos[(l - L) \cos B_0] \cos B_0 dl, \end{aligned}$$

где  $B_0$ —значение широты на этой параллели, а счет долгот ведется от точки с заданными значениями  $\eta_0 - \eta'_0$ ,  $\zeta_0 - h_0$ .

Мы примем в начальной точке профиля  $\eta_0 = \eta'_0$  и  $\zeta_0 = h_0$ , так как накопление ошибок от Пулково до этой точки очень мало.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= h + \int_0^L h \sin[(l - L) \cos B_0] \cos B_0 dl, \\ \eta &= \eta' - \int_0^L h \cos[(l - L) \cos B_0] \cos B_0 dl. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Снятые с карты 1939 г. значения величин  $h$  вдоль параллели с широтой  $52^\circ 30'$ , отнесенные к эллипсоиду Бесселя, помещены в таблице на этой стр. (2-й столбец). Значения  $h$ , заключенные в скобки, получены приближенно (экстраполяцией), так как в этих местах ряд триангуляции уходит от параллели  $52^\circ 30'$  к северу. Чтобы точнее выполнить интеграцию, основную часть  $h$  представим в аналитическом виде, совершив переход к эллипсоиду Ф. Н. Красовского

Тогда

$$h = \Delta \zeta + h'_k,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \zeta &= \cos B \cos L x_0 + \cos B \sin L y_0 + \sin B z_0 + \\ &+ (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B + \Delta b, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= -450,8 \text{ м}, \\ y_0 &= 0, \\ z_0 &= -663,8 \text{ м}, \\ \Delta a &= +868,0 \text{ „}, \\ \Delta b &= +784,4 \text{ „}. \end{aligned}$$

Таким образом получим:

$L$	$h$	$\Delta \zeta$	$h'_k$
0°	+ 8,9	+ 6,91	+ 2,0
10	+ 8,2	+ 11,98	- 2,9
20	+ 12,3	+ 23,46	- 11,2
30	+ 24,5	+ 43,68	- 19,2
40	+ 40,0	+ 71,13	- 31,1
50	+ 61,8	+ 104,94	- 43,1
60	(+ 98,5)	+ 144,12	(- 45,6)
70	(+ 147,9)	+ 187,48	(- 39,6)
80	+ 208,9	+ 233,70	- 24,8
90	+ 279,4	+ 281,34	- 1,9
100	+ 350,0	+ 328,98	+ 21,0

Возвращаясь к формуле (5,41) и интегрируя первый член, получим:

$$\zeta = \int_0^L h' \sin \left[ (l - L) \cos B_0 \right] \cos B_0 dl + \frac{x_0 \cos^3 B_0}{\sin^2 B_0} (\cos L - 1) + \left[ \cos (l \cos B_0) - 1 \right] \left( \sin B_0 z_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B_0 + \Delta b \right). \quad (5.43)$$

Первое слагаемое получаем численным интегрированием. Результаты представлены следующей таблицей:

**Исправленные высоты геоида вдоль параллели 52°30' по результатам астрономо-гравиметрического нивелирования 1939 и 1942 гг.**

$L$	$(\zeta - h)_1$	$(\zeta - h)_2$	$\zeta - h$	$\zeta_5$	$(\zeta_k)_{1939}$	$h_{1943}$	$(\zeta - h)_{1943}$	$(\zeta)_{1943}$
0°	0,00	0,00	0,00	+ 8,9	+ 2,0	+ 2,3	0,00	+ 2,3
10	- 0,02	0,00	- 0,02	+ 8,2	- 2,9	- 2,3	0,00	- 2,3
20	- 0,24	+ 0,05	- 0,19	+ 12,1	- 11,4	- 11,1	+ 0,04	- 11,1
30	- 0,67	+ 0,25	- 0,42	+ 24,1	- 19,6	- 16,0	+ 0,19	- 15,8
40	- 1,61	+ 0,65	- 0,96	+ 39,0	- 32,1	- 28,0	+ 0,54	- 27,5
50	- 3,32	+ 1,40	- 1,92	+ 59,9	- 45,0	- 38,9	+ 1,20	- 37,7
60	- 6,25	+ 2,60	- 3,65	+ 84,9	(- 49,2)	(- 37,0)	+ 2,25	(- 35,8)
70	- 10,66	+ 4,26	- 6,40	+ 141,5	(- 46,0)	(- 39,0)	+ 3,71	(- 35,3)
80	- 17,08	+ 6,28	- 10,80	+ 191,1	- 35,6	- 33,8	+ 5,54	- 28,3
90	- 25,96	+ 8,50	- 17,46	+ 261,9	- 19,4	- 20,3	+ 7,68	- 12,6
100	- 37,77	+ 10,64	- 27,13	+ 322,9	- 6,1	- 11,2	+ 9,96	- 1,2

В последних трех столбцах даны: значения  $h$ , полученные в 1943 г.; поправка в  $h$ ; высота геоида—по результатам 1943 г.

Для контроля можем воспользоваться формулой (5.39)

$$\zeta = h - \int_0^S dS \int_0^S \zeta dS$$

или для облегчения численной интеграции

$$\zeta = h - \int_0^S dS \int_0^S \Delta \zeta dS - \int_0^S dS \int_0^S \zeta_k dS,$$

причем

$$\int_0^S dS \int_0^S \Delta \zeta dS = \cos^2 B_0 \left[ x_0 (1 - \cos L) \cos B_0 + \frac{L^2}{2} (\sin B_0 z_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B_0 + \Delta b) \right].$$

Результаты вычислений приведены ниже:

$L$	$-\int_0^S dS \int_0^S \Delta \zeta dS$	$-\int_0^S dS \int_0^S \zeta_{\kappa} dS$	$\zeta - h$	Расхождение в поправке
0°	0,00	0,00	0,00	0,00 м
10	- 0,04	0,00	- 0,04	- 0,02
20	- 0,22	+ 0,05	- 0,17	+ 0,02
30	- 0,67	+ 0,22	- 0,45	- 0,03
40	- 1,61	+ 0,63	- 0,98	- 0,02
50	- 3,36	+ 1,40	- 1,96	- 0,04
60	- 6,31	+ 2,66	- 3,65	0,00
70	- 10,88	+ 4,45	- 6,43	- 0,03
80	- 17,57	+ 6,74	- 10,83	- 0,03
90	- 26,91	+ 9,42	- 17,49	- 0,03
100	- 39,41	+ 12,32	- 27,09	+ 0,04

Таким образом в пределах точности численной интеграции поправки совпадают.

Рассчитаем теперь величину ожидаемой ошибки определения высот геоида астрономо-гравиметрическим нивелированием (формулу, выведенную нами ранее в вып. 17-м „Трудов ЦНИИГАиК“, можно теперь уточнить).

Если представить превышение на звене в таком виде

$$\Delta \zeta = l \left[ \vartheta_a(A) - \vartheta_g(A \Sigma) + \vartheta_a(B) - \vartheta_g(B \Sigma) \right] + \\ + \frac{1}{2 \pi \gamma R} \int \Delta g \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) d\sigma,$$

то нетрудно убедиться, что основная часть ошибки, нарастающая от звена к звену, определяется первым членом. Ошибка за счет второго члена мала и притом в значительной степени погашается при суммировании по звеньям. Если звенья расположены по параллели (или по меридиану, или вдоль одной дуги большого круга), то для соседних звеньев  $\vartheta_a(B) = \vartheta_a(A)$  и  $\vartheta_g(B \Sigma) \approx \vartheta_g(A \Sigma)$ . Поэтому при оценке точности можно перегруппировать слагаемые между звеньями, считая условно каждый астропункт отнесенным к середине нового звена:

$$\Sigma \Delta \zeta = l \left[ \vartheta_a(1) - \vartheta_g(1, \Sigma_1) \right] + 2l \left[ \vartheta_a(2) - \vartheta_g(2, \Sigma_2) \right] + \dots + \\ + \frac{1}{2 \pi \gamma R} \int \Delta g \left( \frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_n} \right) d\sigma.$$

Но ошибку каждого из множителей, стоящих в квадратных скобках, в условиях гравиметрической съемки СССР можно оценить величиной около  $\pm 1''{,}4$ , как это будет установлено в следующей главе.

Следовательно, ошибку в  $\zeta$  можно оценить так:

$$\delta\zeta = \pm \left[ \nu(2l)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sin 1''{,}4,$$

или, считая звенья равными, а длину линии нивелирования обозначая через  $S$ , получим:

$$\delta\zeta = \pm \sqrt{2lS} \sin 1''{,}4. \quad (5.44)$$

Для параллели с широтой  $52^{\circ}30'$  можно считать в среднем, что мы имеем дело с двумя цепочками астропунктов, поэтому величину (5.44) нужно поделить приблизительно на  $\sqrt{2}$ . Следующая табличка содержит сопоставление результатов 1939 и 1943 гг. В первой строке указаны долготы (от Пулково). Во второй — помещены разности между результатами 1943 и 1939 гг. после отнесения их к общему референц-эллипсоиду, но без учета тех поправок, о которых выше шла речь. Третья строка содержит разности результатов после внесения всех поправок. В четвертой строке приведены высоты геоида по данным 1943 г. для соответствующих долгот параллели  $52^{\circ}30'$  при ориентировке эллипсоида под условием  $\zeta = \eta = 0$  в Пулкове. Высоты геоида по нашим результатам относительно нового эллипсоида триангуляции СССР представлены на карто-схеме. Последняя строка дает приближенную оценку средней квадратической ошибки вывода высоты геоида для разных долгот. Эта ошибка вычислена по формуле (5.44), т. е. в предположении, что превышения по всем звеньям получены астрономо-гравиметрическим нивелированием.

$L$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$50^{\circ}$
$h_{1943} - h_{1939}$	+ 0,3	+ 0,6	+ 0,1	+ 3,2	+ 3,1	+ 4,2 м
$\zeta_{1943} - \zeta_{1939}$	+ 0,3	+ 0,6	+ 0,3	+ 3,8	+ 4,6	+ 7,3
$\zeta_{1943}$	+ 2,3	- 2,3	- 11,1	- 15,8	- 27,5	- 37,7
$\delta\zeta$	$\pm$	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2

$L$	$60^{\circ}$	$70^{\circ}$	$80^{\circ}$	$90^{\circ}$	$100^{\circ}$
$h_{1943} - h_{1939}$	(+ 8,6)	(+ 0,6)	(- 9,0)	(- 18,4)	(- 32,2) м
$\zeta_{1943} - \zeta_{1939}$	(+ 13,4)	(+ 10,7)	(+ 7,3)	(+ 6,8)	(+ 4,9)
$\zeta_{1943}$	(- 35,8)	(- 35,3)	(- 28,3)	(- 12,6)	(- 1,2)
$\delta\zeta$	—	—	—	—	—

Как видим, основные расхождения между результатами 1939 и 1943 гг. возникли на участках  $20^{\circ} - 30^{\circ}$  (Урал) и  $40^{\circ} - 50^{\circ}$  (долгота Омска). Восточнее  $L = 60^{\circ}$  большинство звеньев не обеспечено гравиметрической съемкой; геодезические данные также несколько сомнительны; эти результаты надо считать предварительными и в таблице они заключены в скобки.

Как видим, поправка, рассмотренная нами здесь, существенно исправляет результат; без учета ее было бы вопиющее противоречие между результатами вычислений 1939 и 1943 гг. Величина этой поправки в данном случае оказалась порядка определяемой величины  $\zeta$ . Однако мы видели, что получается она достаточно точно, так как выражается интегральной формулой, а при интегрировании случайные ошибки заметно погашаются.

## ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И СУЖДЕНИЕ О ТОЧНОСТИ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ

### § 27. Ошибка представительства и ошибка интерполяции силы тяжести

Для определения гравиметрических уклонений отвеса и высот геоида нужно знать распределение аномалий силы тяжести для области, на которую распространяют интегрирование. Однако, выполняя гравиметрическую съемку, мы получаем аномалии силы тяжести в отдельных пунктах. Обычно по этим отдельным пунктам съемки строят карту изоаномал и по карте получают значение аномалии для любой точки области интегрирования. Затем производят интегрирование тем или иным численным методом. Чтобы оценить точность получаемых таким образом гравиметрических уклонений отвеса, необходимо оценить ошибку аномалий, снятых с карты, т. е. среднюю квадратическую разность между истинными значениями аномалий и принятыми при интегрировании. Эту величину будем называть „полной ошибкой интерполяции силы тяжести“. Она складывается из двух частей: с одной стороны, в нее входит ошибка наблюдения пунктов, по которым построена карта изоаномал; с другой стороны — погрешности из-за предположения о плавном (линейном) изменении силы тяжести между пунктами, на которых производились измерения аномалий (последнюю величину будем называть „чистой ошибкой интерполяции“). Термины „полная ошибка интерполяции“ и „чистая ошибка интерполяции“ введены нами по аналогии с терминами „полная“ и „чистая“ ошибка представительства, введенными де Грааф Хентером.

Численное значение ошибки интерполяции определяется следующим образом. В исследуемом районе отбрасывается часть гравиметрических пунктов (напр.  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$  и т. д.), и по оставшимся пунктам строится карта изоаномал. По этой карте, интерполяцией между изолиниями, определяются аномалии в местах отброшенных пунктов и сравниваются с наблюдаемыми аномалиями этих пунктов. Из получаемых таким образом разностей определяется ошибка интерполяции для данной плотности съемки.

В 1937 г. А. М. Лозинская в ЦНИИГАиК определила ошибку интерполяции для района от  $27^\circ$  до  $42^\circ$  по долготе и от  $48^\circ$  до  $56^\circ$  по широте. Для сравнения ею определена для того же района ошибка представительства тем же способом, который применялся де Грааф Хентером. Получились следующие результаты:

#### А. Полная ошибка интерполяции

Плотность съемки относит. нормальной	Аномалии с редукцией в свободном воздухе		Аномалии с редукцией Буге	
	Число точек	Ошибка интер- поляции	Число точек	Ошибка интер- поляции
$\frac{1}{4}$	1167	$10,7 \pm 0,9$	842	$11,6 \pm 1,9$
$\frac{1}{8}$			626	$13,5 \pm 2,2$

## Б. Ошибка представительства

Размеры прямо- уголь- ника	Плотн. съемки относит. нормаль- ной	Аномалии в своб. воздухе			Аномалии Буге		
		Число площ.	Ошибка предста- вительства		Число площ.	Ошибка предста- вительства	
			полная	чистая		полная	чистая
2 × 2	1/4	408	10,1 ± 1,5	9,2	162	10,6 ± 1,6	9,9
2 × 4	1/8	186	12,4 ± 2,5	11,8			
2 × 6	1/12	118	13,2 ± 2,7	12,7	42	15,1 ± 2,4	14,6
4 × 4	1/16	92	13,3 ± 2,5	12,8			
4 × 8	1/32	37	15,1 ± 4,0	14,6			
6 × 6	1/36	30	15,4 ± 3,7	14,9	16	16,0 ± 3,5	15,6
4 × 12	1/48	23	15,2 ± 4,1	14,7			
8 × 8	1/64	7	15,8 ± 5,6	15,4	4	16,3 ± 4,3	15,9

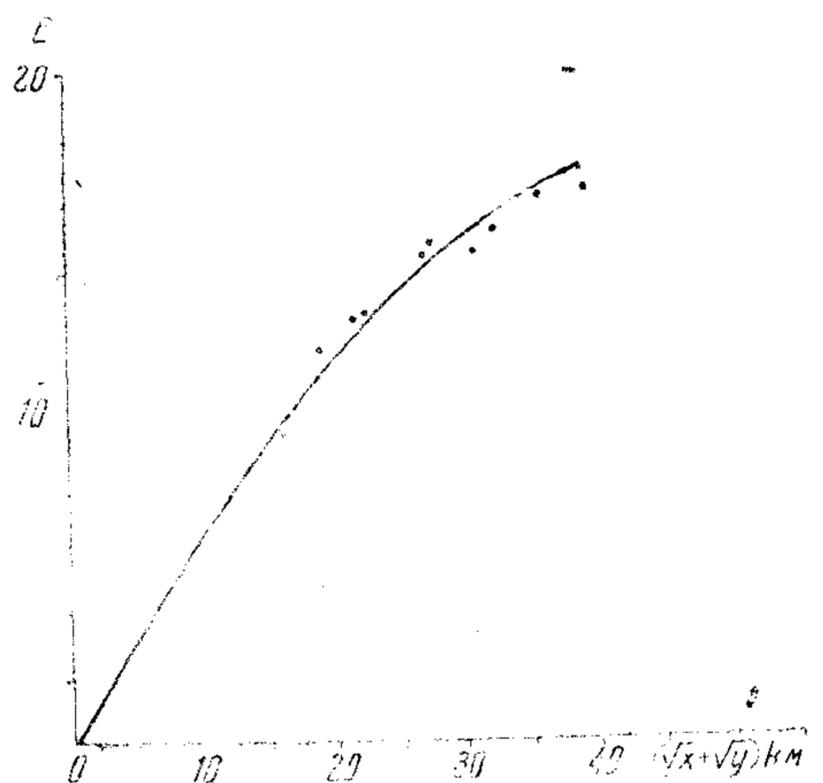
В первом столбце за единицу принято среднее расстояние между гравиметрическими пунктами.

Если, следуя де Грааф Хентеру, чистую ошибку представительства представить формулой  $E = C(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ , то  $C$  получается равным 0,54, если  $x$  и  $y$  выражены в километрах (у де Грааф Хентера  $C = 0,55$ ). Совпадение это случайно, так как рельеф Индии несравнимо сложнее рельефа исследованных здесь районов, и следовало бы ожидать в условиях Индии большей величины ошибки представительства. Повидимому, увеличение ошибки представительства в Индии вследствие большей сложности рельефа компенсировалось применением изостатических редуций.

Строя кривую чистой ошибки представительства в зависимости от размера прямоугольников (в функции  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ), мы, кроме эмпирически полученных точек (которые все лежат вправо от нормальной плотности съемки), имеем еще одну добавочную точку в начале координат. Проводя по всем этим точкам плавную кривую, определяем искомую ошибку представительства для нужной нам плотности (черт. 6)

Сравнивая две предыдущие таблицы, приходим к довольно неожиданному результату. Именно: несмотря на то, что метод интерполяции в какой-то мере учитывает изменения аномалий (по крайней мере плавную часть этого изменения), ошибка интерполяции все же получилась не меньше, чем ошибка представительства. В пределах точности определения этих ошибок оба результата можно считать одинаковыми. Это обстоятельство указывает на то, что в аномалиях правильно меняющаяся часть имеет значительно меньший градиент, чем быстро колеблющаяся часть, которая не поддается интерполяции при рассмотренных расстояниях между пунктами. Изучение районов, заснятых вариометрами, где можно считать известной аномалию в любой точке, подтверждает это.

К сожалению, вариометрические работы производились почти исключительно в специфических районах (главным образом в нефтеносных). Кроме того, материала так мало,



Черт. 6

что рискованно полученные по этим районам выводы обобщать и принимать за типичные для обычных районов.

Несмотря на указанную некоторую условность выводов, основанных на анализе вариометрических работ, мы попытались все же по картам изоаномал, составленным на основании работ с вариометром, оценить ошибку представительства для малых площадок. В следующей таблице представлены результаты оценки ошибки представительства для квадратов размером  $8 \times 8$  и  $16 \times 16$  километров для некоторых нефтеносных районов.

**Ошибки представительства по материалам вариометрической съемки в нефтеносных районах**

Р а й о н	Размер квадрата в километрах	
	$8 \times 8$ км	$16 \times 16$ км
Стерлитамакско-Мелеузовский район . . . . .	2,4 1,7 1,8	1,9
Чусовской район . . . . .	2,5 1,1	
Туркменнефть (к югу от Нефтедага) . . . . .	4,3 3,5	
Район Каировка-Желтое (Востокнефть) . . . . .	2,1 4,0 2,2 4,7 2,5	5,9
Ромны (Черниговская область) . . . . .	4,9 4,5 4,0 1,8	4,8
Башкирия . . . . .	0,9 1,1 2,2 2,5	2,6

Средние квадратические величины ошибок представительства получились соответственно  $\pm 3,0$  и  $\pm 4,2$ , а по формуле  $0,54 (\sqrt{x} + \sqrt{y})$  — значения  $\pm 3,1$  и  $\pm 4,3$ .

Следовательно, мы имеем основания утверждать, что эмпирическая формула де Грааф Хентера с коэффициентом 0,54 достаточно близко характеризует величину ошибки представительства также и при расстоянии между пунктами в 8 и 16 км.

### § 28. Точность определения гравиметрических уклонений отвеса в условиях равномерной площадной съемки

Полученные результаты позволяют оценить точность определения уклонения отвеса, которая должна получаться, если пользоваться результатами общей гравиметрической съемки СССР.

Для ближайших зон, оказывающих основное влияние на точность вывода уклонения отвеса, можно воспользоваться предельной формой формулы Венинг Мейнеса для плоскости:

$$\xi'' = \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \iint \frac{\Delta g}{r} \cos \alpha \, dr \, d\alpha$$

или в прямоугольных координатах

$$\xi'' = \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \iint \frac{\Delta g x dx dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Величина ошибки интерполяции получилась у нас той же, что и ошибки представительства. Поэтому, не внося дополнительных ошибок, мы можем представить  $\xi''$  в таком виде:

$$\begin{aligned} \xi'' &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \sum_i \Delta g_i \iint \frac{\cos \alpha}{r} dr d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \sum 2\Delta g_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \cos \alpha_m \sin \Delta \alpha \end{aligned} \quad (6.1)$$

или в прямоугольных координатах:

$$\begin{aligned} \xi'' &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \sum \Delta g_i \left[ \operatorname{Arsh} \frac{y_2}{x_1} + \operatorname{Arsh} \frac{y_1}{x_2} - \operatorname{Arsh} \frac{y_1}{x_1} - \operatorname{Arsh} \frac{y_2}{x_2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \sum \Delta g_i f_i \end{aligned} \quad (6.2)$$

Каждый из суммируемых интегралов распространен на всю площадь, от которой „представляет“ данный пункт с аномалией  $\Delta g_i$ . Число этих интегралов под знаком суммы равно числу гравиметрических пунктов.

Средняя квадратическая ошибка результата будет:

$$\delta \xi'' = \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \left( \sum f_i^2 \delta g_i^2 \right)^{1/2},$$

где  $\delta g_i$  — ошибка представительства для площадки  $i$ .

Рассмотрим несколько схем:

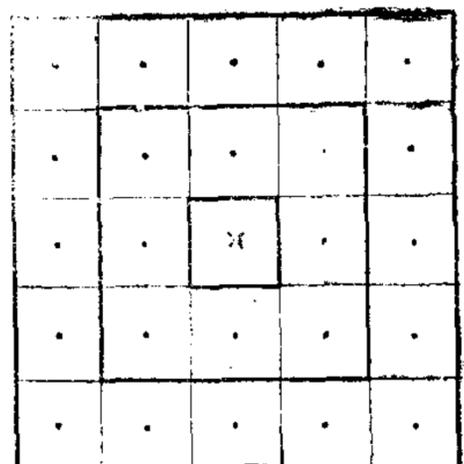
### Схема А

Гравиметрические пункты расположены в шахматном порядке. Расстояние между пунктами равно  $2l$ . Уклонение отвеса ищется для точки, совпадающей с одним из гравиметрических пунктов.

По формуле (6.2) рассчитываем следующую таблицу:

Пояс	Средняя квадратическая ошибка, вносимая поясом	Средняя ошибка всех предыдущих поясов
1 — 3l	$\pm 0'',059 \delta g$	
3l — 5l	0,019	$\pm 0'',059 \delta g$
5l — 7l	0,010	0,062
7l — 9l	0,007	0,063
9l — 11l	0,005	0,063

Схема А

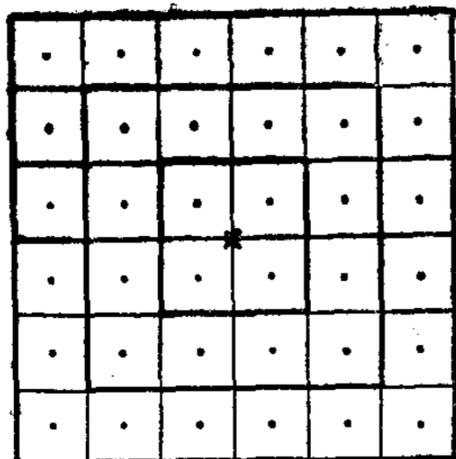


Черт. 7

### Схема В

Отличие от схемы А заключается в том, что уклонение отвеса ищется для точки, лежащей посередине между гравиметрическими пунктами.

Схема В



Черт. 8

Пояс	Средняя квадратическая ошибка, вносимая поясом	Средняя ошибка всех предыдущих поясов
2l — 4l	$\pm 0'',030 \delta g$	$\pm 0'',030 \delta g$
4l — 6l	0,013	0,033
6l — 8l	0,009	0,034
8l — 10l	0,006	0,034

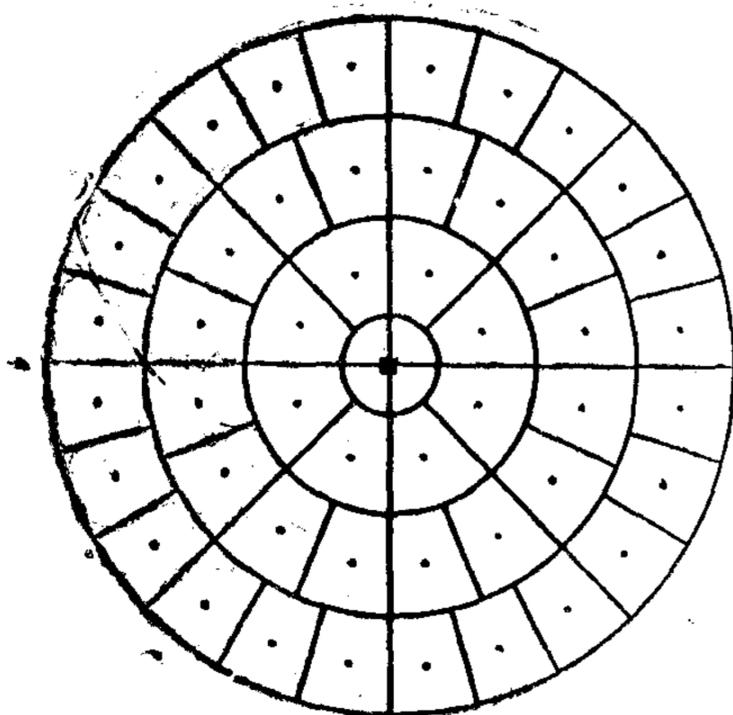
### Схема С

Расположение гравиметрических пунктов и разбивка на элементарные площадки пояснены чертежом. Радиусы окружностей равны  $(2m \pm 1)l$ , где  $m$  — номер зоны.

Число пунктов в зоне равно  $8m$ .  
Для ошибки от зоны  $m$  получаем:

$$\begin{aligned} \delta \xi'' &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \ln \frac{2m+1}{2m-1} \left( \sum \cos^2 \alpha_m (\Delta \alpha)^2 \right)^{1/2} \delta g = \\ &= \frac{1}{4\gamma \sin 1''} m^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{2m+1}{2m-1} \delta g \end{aligned}$$

Схема С



Черт. 9

$m$	Зона	Средняя квад. ошибка, вносим. зоной	Средняя ошибка всех предыдущих зон
1	1 — 3l	$\pm 0'',058 \delta g$	
2	3l — 5l	0,019	$\pm 0'',058 \delta g$
3	5l — 7l	0,010	0,061
4	7l — 9l	0,007	0,062
5	9l — 11l	0,004	0,062

### Схема D

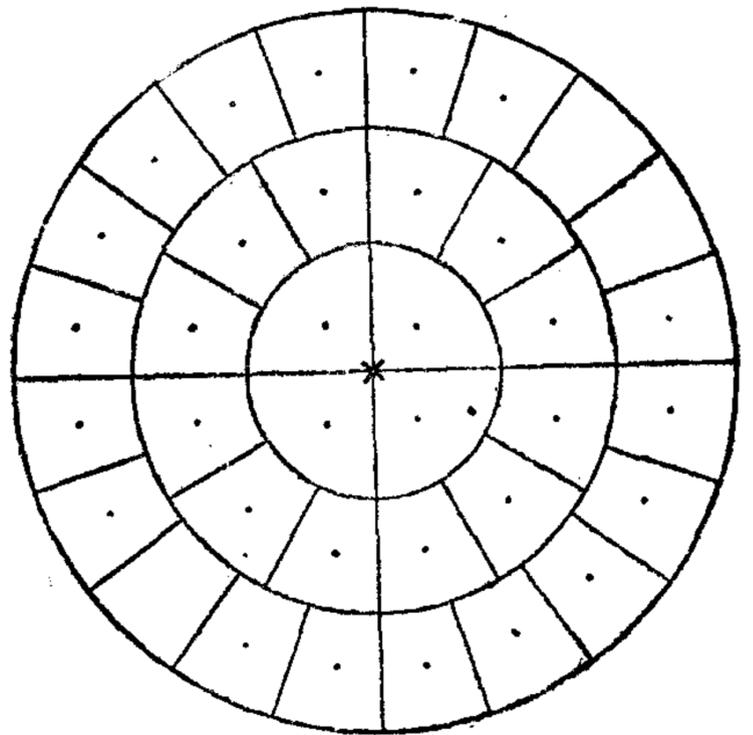
Радиусы окружностей равны  $2ml$  и  $2(m+1)l$ , где  $m$  — номер зоны. Число пунктов в зоне равно  $4(2m+1)$ .

Ошибка от зоны  $m$  выразится так:

$$\delta \xi'' = \frac{1}{2 \gamma \sin 1''} \ln \frac{m+1}{m} (4m+2)^{-1/2} \delta g.$$

$m$	Зона	Средняя квад. ошибка, вносим. зоной	Средняя ошибка всех предыдущих зон
1	2l — 4l	$\pm 0'',030 \delta g$	
2	4l — 6l	0,013	$\pm 0'',030 \delta g$
3	6l — 8l	0,007	0,033
4	8l — 10l	0,005	0,033
5	10l — 12l	0,004	0,034

Схема D



Черт. 10

Сравнивая между собой эти схемы, мы видим, что  $A$  и  $C$  приводят к одной и той же оценке; то же относится к  $B$  и  $D$ . Отличие схем  $A$  и  $B$ , или  $C$  и  $D$ , заключается в том, что в одном случае учитывается ошибка всех зон, начиная от  $l$ , а в другом — начиная от  $2l$ . Положение астропункта относительно гравиметрических пунктов существенную роль играть не может. Действительно, можно совершить переход от одного крайнего случая к другому, именно от схемы  $A$  к  $B$  или от  $C$  к  $D$ . Представим себе, что линейный размер схемы  $D$  уменьшен вдвое. Тогда величина  $\pm 0'',034 \delta g$  будет соответствовать ошибке учета всех зон, начиная от  $2l$ , но при съемке, сгущенной в четыре раза. Это сгущение приводит, поскольку ошибка представительства оставлена неизменной, к повышению точности в  $\sqrt{4} = 2$  раза и, следовательно, при начальной плотности съемки ошибка всех зон, начиная от  $2l$ , должна быть около  $\pm 0'',068 \delta g$ . По схеме  $C$  получилось  $\pm 0'',062 \delta g$ .

Итак, средняя квадратическая ошибка в отклонении отвеса, вносимая областью за пределами  $l$ , равна  $\pm 0'',063 \delta g$ , а областью за пределами  $2l$  равна  $\pm 0'',034 \delta g$ . Порядок величины этой ошибки определяется первой зоной. Средние квадратические ошибки по зонам убывают приблизительно пропорционально номеру зоны в степени  $3/2$ , так как

$$\ln \frac{m+1}{m} \approx \ln \frac{2m+1}{2m-1} \approx \frac{1}{m}.$$

Совершенно особым образом должен ставиться вопрос в отношении центральной зоны от  $0$  до  $l$ . Один пункт, „представительствующий“ от этой зоны, ничего не может дать для учета ее влияния.

Следовательно, здесь речь должна идти не об ошибке ее учета, а о полном ее влиянии, которое должно войти составной частью в ошибку вывода отклонения отвеса. Понятно, что строгий подход в решении этой задачи едва ли возможен, и мы только делаем первую попытку ориентировочной, более или менее правдоподобной, оценки среднего значения этой величины.

Сравним средние квадратические значения для большого района производных от возмущающего потенциала по различным направлениям, исключив предварительно влияния систематического характера или так

называемые региональные поля. Такое исключение может быть произведено с помощью карты, составленной по сравнительно редкой сети гравиметрических пунктов. Ошибка интерполяции возникает от „локальных“ полей, размеры которых одного порядка с расстоянием между пунктами. Этим локальным полям соответствует остаточная часть возмущающего потенциала. Можно думать, что средние квадратические значения величин производных от этого остаточного возмущающего потенциала не должны зависеть от того направления в пространстве, по которому берутся эти производные. Рассматриваемый случай можно пояснить следующими рассуждениями.

В этом случае влияния явных асимметрий района (например, направление простирания, высоты и глубины надземных или погребенных горных хребтов и пр.) окажутся исключенными вместе с региональным полем, и соответствующие им возмущающие массы можно не рассматривать. Таким образом не останется места для асимметрии гравитационного поля в горизонтальном направлении. Кроме того, возмущающие массы положительного и отрицательного знака будут встречаться одинаково часто, а влияние аномалий плотностей удаленных масс настолько ослабится, что можно будет ограничиться рассмотрением только ближайших аномалий масс и не считаться с кривизной Земли. С точки зрения влияния этих аномалий на вертикальный градиент можно все отрицательные массы заменить положительными, перенесенными на соответствующую высоту вверх, заметно не меняя при этом средней величины их влияния на горизонтальные производные. Поскольку характер распределения положительных и отрицательных аномалий плотностей одинаков, все направления становятся после этого равноправными, так как направление вертикали перестает занимать как бы исключительное положение.

Таким образом выясняется простая связь между ошибкой интерполяции силы тяжести и точностью соответствующего вывода уклонения отвесной линии. Если мы говорим, что ошибка интерполяции равна  $\pm \delta g$ , это означает, что не учтена часть поля возмущающего потенциала, причем вертикальный градиент неучтенного поля характеризуется средней величиной  $\pm \delta g$ .

В соответствии с предыдущими рассуждениями мы можем считать, что неучтенный горизонтальный градиент остаточного поля возмущающего потенциала будет характеризоваться той же величиной  $\pm \delta g$ , что повлечет за собой в уклонении отвесной линии ошибку  $\pm \frac{\delta g}{g}$ , если выразить ее в радиальной мере. Переводя в дуговые секунды, получим:

$$\delta \xi'' = \delta \eta'' = \pm \frac{\delta g}{g \sin 1''} = \pm 0'',21 \delta g. \quad (6.3)$$

Далее будет показано, что в нормальных условиях общей гравиметрической съемки СССР гравиметрическое уклонение отвеса фактически получается со средней ошибкой  $\pm 1'',3$  (эта величина получена из многочисленных сопоставлений с астрономо-геодезическими уклонениями отвеса). Подставляя в последнюю формулу полученную ранее величину ошибки представительства (или интерполяции)  $\delta g = \pm 6,5$  мгл, убеждаемся в полном соответствии предыдущей формулы с результатами опыта. Это соответствие подтверждает, что в основу вывода формулы (6.3) положены предпосылки, близкие к истине.

Полезно заметить, что полученное соотношение между  $\delta g$  и  $\delta \xi$  может служить для ориентировочной оценки точности вывода уклонения отвеса в зависимости от случайных ошибок определения аномалий силы тяжести. Для этого достаточно предположить, что ошибки эти создают фиктивное гравитационное поле, налагающееся на поле возмущающего потенциала.

Тогда под  $\delta g$  можно понимать корень квадратный из суммы квадратов рассматриваемой ошибки и ошибки интерполяции.

При малом значении последней, ошибки наблюдения при интерполяции будут заметно ослабляться. Например, для центра круга, описанного вокруг трех пунктов, по которым производится интерполирование, ошибка наблюдения уменьшается в  $\sqrt{3}$ , т. е. примерно в 1,7 раза в то время, как для самих мест карты, соответствующих этим пунктам, она войдет полностью. Для середины каждого отрезка, соединяющего любую пару пунктов, она уменьшится в 1,4 раза. Мы не сделаем большой ошибки, если последнее значение примем за среднее и посчитаем в этом случае, что ошибка в 1 мгл в измеренной аномалии приведет к ошибке в  $\pm 0'',15$  в отклонении отвеса. Заметим, что эта приближенная оценка хорошо согласуется с результатами, полученными численным методом Б. В. Дубовским в ЦНИИГАиК в 1938 г.

Ранее мы видели, что при равномерной съемке с расстоянием между пунктами  $2l$  влияние на результат центральной зоны, имеющей радиус  $l$ , не может быть учтено. Вместе с тем все остальные зоны, характеризующиеся случайной неучтенной аномалией в каждом отсеке  $\pm \delta g$ , вносят ошибку в  $\pm 0'',063 \delta g$ . Следовательно, почти вся полученная нами величина ошибки падает на долю неучтенной центральной зоны, так что

$$\delta \xi''_l = \pm \sqrt{(0,21)^2 - (0,063)^2} \delta g = \pm 0'',20 \delta g.$$

В данном случае

$$\delta g = \pm 0,54.2 \sqrt{2l} = \pm 1,6 \sqrt{l},$$

поэтому

$$\delta \xi''_l = \pm 0'',32 \sqrt{l}.$$

Очевидно, это соотношение остается справедливым только при таких  $l$ , при которых недоучтенное поле возмущающего потенциала носит случайный характер. Последнее обстоятельство не будет иметь места как при очень больших  $l$ , так и при очень малых. К этому вопросу мы еще вернемся.

Позволим себе привести здесь другое рассуждение, которое еще раз подтверждает исключительное значение учета центральной зоны для снижения ошибки вывода отклонений отвеса.

Это рассуждение еще менее, чем предыдущее, претендует на строгость и приводится только для того, чтобы на этот практически важный вопрос посмотреть с другой точки зрения.

Из соображений случайного характера распределения градиентов аномалий вдоль любой линии де Грааф Хентер принимает следующий средний закон изменения аномалий вдоль линии:

$$\Delta g_x = k \sqrt{x},$$

где  $x$  — расстояние от начальной точки отрезка.

Мы будем исходить из предположения, что в центральной зоне закон изменения аномалий в функции расстояния от начальной точки  $\rho$  и азимута  $\alpha$  может быть в среднем представлен формулой:

$$\Delta g = \Delta g_0 + \sqrt{\rho} \sum_0^{\infty} k_n \cos n(\alpha - \alpha_0). \quad (6.4)$$

Наше предположение сводится к тому, что по любому радиусу-вектору прирост аномалий пропорционален  $\sqrt{\rho}$ , изменение же коэффициента пропорциональности в зависимости от направления остается произвольным.

Заметим, что для очень малых  $\rho$  имеет место строгий закон

$$\Delta g = \Delta g_0 + k \rho \cos(\alpha - \alpha_0).$$

Однако, судя по картам детальных гравиметрических съемок, это соотношение справедливо только для  $\rho < 1 - 3$  км. Входящие в формулу (6.4) коэффициенты  $k_n$  свяжем с ошибкой представительства.

Этот закон распределения аномалий для площади круга даст среднюю истинную аномалию  $\Delta g_0$ , а отклонение аномалий от средней для любой наудачу выбранной точки будет равно  $\Delta g - \Delta g_0$ . Среднее квадратическое значение этой величины есть ошибка представительства  $E$  для площади круга:

$$E^2 = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} (\Delta g - \Delta g_0)^2 \rho d\rho d\alpha = \frac{1}{3} r \Sigma k_n^2.$$

Для приближенной оценки заменим этот круг равновеликим квадратом, для которого  $E^2 = (0,54 \cdot 2)^2 \sqrt{\pi r^2}$  (коэффициент 0,54 нами подтвержден для площадок размером  $8 \times 8$  км; мы предполагаем, что он сохранится и для меньших площадок).

Следовательно,  $\Sigma k_n^2 = 3(0,54 \cdot 2)^2 \sqrt{\pi} = 6,23$

$$k_1 = 2,50 - C_1^2.$$

Теперь получим среднее значение  $\Delta \xi''$  для центральной зоны радиуса  $r$ :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \xi''} &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^{-1/2} \cos \alpha \left( \Sigma k_n \cos n(\alpha - \alpha_n) \right) d\rho d\alpha = \\ &= \frac{k_1}{\gamma \sin 1''} \sqrt{r} \cos \alpha_1, \end{aligned}$$

$\alpha_1$  может принимать все значения, поэтому среднее квадратическое значение  $\overline{\Delta \xi''}$  таково:

$$\overline{\Delta \xi''} = \frac{k_1}{\gamma \sin 1'' \sqrt{2}} \sqrt{r} = (0'',37 - C^2) \sqrt{r}.$$

Следовательно, при наших предположениях о характере распределения аномалий в центральной зоне и при коэффициенте ошибки представительства, равном 0,54, среднее квадратическое влияние центральной зоны на уклонение отвеса равно  $\pm (0'',37 - C^2) \sqrt{r}$ , т. е. менее  $\pm 0'',37 \sqrt{r}$ .

Величину  $C^2$  мы определим из фактической точности вывода гравиметрических уклонений отвеса в условиях общей гравиметрической съемки СССР.

В 1937 г. были вычислены уклонения отвеса для 325 пунктов. Обеспеченность этих пунктов гравиметрической съемкой была довольно различной. С этой точки зрения все пункты Б. В. Дубовским были разбиты на 4 категории, примерно придерживаясь такого правила:

Плотность гравиметр. съемки в радиусе 70 км	За пределами этого радиуса имеется съемка на расстояние:	Категория
Нормальная . . . . .	свыше 600 км	I
	от 300 до 600 км	II
	„ 150 „ 300 „	III
	менее 150 км	IV
Ниже нормальной . . . . .	свыше 600 „	II
	от 300 до 600 км	III
	менее 300 км	IV
Нет пунктов . . . . .	—	III или IV

Разности между астрономо-геодезическими и гравиметрическими отклонениями отвеса, помимо случайных ошибок, включают систематическую часть с ярко выраженным ходом по долготе для  $\eta$  и по широте для  $\xi$ . Это объясняется: 1) несовпадением эллипсоида Бесселя с поверхностью относимости гравиметрических выводов; 2) неучтенным влиянием дальних зон. Выделяя эту систематическую часть по остаточным отклонениям, Дубовской подсчитал средние ошибки для пунктов разных категорий. Получились следующие результаты:

Категория	Число пунктов	Средняя ошибка одного определения		Распределение ошибок				
		$\xi''$	$\eta''$	От 0 до 1''	1'' — 2''	2'' — 3''	3'' — 4''	> 4''
I	56	$\pm 1'',48$	$\pm 1'',32$	62	32	15	3	—
II	138	1,80	1,60	146	74	32	16	8
III	89	2,24	2,16	69	55	32	10	12
IV	26	2,73	2,07	17	13	12	7	3
Всего	309	$\pm 1,94$	$\pm 1,75$					

Ошибки по  $\eta$  меньше и, вероятно, ближе к истине, так как в этой составляющей систематическая часть выделяется более полно. Учитывая еще ошибку астрономических определений ( $\pm 0'',3$ ), для пунктов первой категории ошибку гравиметрического вывода будем считать равной  $\pm 1'',3$ . Эта ошибка складывается: из ошибки всех зон за пределами  $l$ , равной  $\pm 0'',063 \delta g = \pm 0'',46$  (так как  $\delta g$  для съемки СССР равно  $\pm 7,3$  мгл); из ошибки, возникшей вследствие того, что не учтена центральная зона радиуса  $l$ , среднее влияние которой равно:

$$(0'',37 - C^2) \sqrt{l} \approx 4 (0'',37 - C^2),$$

поэтому

$$(1'',3)^2 = (0'',46)^2 + 16(0'',37 - C^2)^2,$$

$$C^2 = 0'',07,$$

а влияние центральной зоны получается равным

$$\pm 0'',30 \sqrt{\rho} \text{ км.}$$

Для малых  $\rho$  эта оценка должна быть преувеличена, так как влияние зоны, для которой

$$\Delta g = \Delta g_0 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial g}{\partial y} \sin \alpha \right) \rho,$$

равно

$$\frac{1}{2 \sin 1''} \frac{\partial g}{\partial x} \rho = 0'',105 \frac{\partial g}{\partial x} \rho.$$

Если бы можно было считать последнюю формулу пригодной для  $\rho$  до 16 км, то мы получили бы:

$$\left( 0'',105 \frac{\partial g}{\partial x} \rho \right)^2 + (0'',46)^2 = (1'',3)^2,$$

а влияние центральной зоны равным  $\pm 0'',076 \rho$ , причем для малых  $\rho$  надо ожидать, что эта оценка будет преуменьшена. Обе оценки совпадают при  $\rho = 0$  и  $\rho = 16$  км, а наибольшее расхождение между ними имеет место при  $\rho = 4$  км и равно  $0'',3$ .

Следовательно, надо думать, что:

1) формула  $\pm 0'',30 \sqrt{\rho}$  дает завышенную оценку для малых значений  $\rho$  и правильную для  $\rho = 16$  км;

2) формула  $\pm 0'',076 \rho$  дает заниженную оценку для малых  $\rho$  и правильную для  $\rho = 16$  км.

Поэтому среднее геометрическое из обеих формул

$$\bar{\Delta}^{\xi''} = \pm 0'',15 \rho^{3/4} \quad (6.5)$$

должно достаточно близко передавать среднее значение влияния центральной зоны для  $\rho$  от 0 до 16 и более км (может быть до 30 км).

Так, например, для влияния пятикилометровой зоны получим по последней формуле:

$$\Delta^{\xi''}_5 = \pm 0'',50$$

По материалам вариометрической съемки в 1937 году Лозинской было получено (см. таблицу)  $\bar{\Delta}^{\xi''}_5 = \pm 0'',40$ , а Дубовским для Московской аномалии  $\Delta^{\xi''}_5 = \pm 0'',59$ .

**Уклонение отвеса от влияния ближайшей 5-ти километровой зоны (на основании материалов вариометрической съемки)**

Р а й о н ы	Уклонение отвеса	
	$\xi''$	$\eta''$
$\varphi = 53^\circ 27'$ $\lambda = 56^\circ 0'$	+ 0'',02	- 0'',20
	+ 0,32	- 0,10
Туркмення . . . . .	- 0,48	- 1,04
Чусовской район . . . . .	+ 0,20	+ 0,25
Стерлитамакско-Мелеузовский район	- 0,23	- 0,07
	- 0,21	+ 0,19
	+ 0,24	+ 0,51
	+ 0,05	+ 0,25
Каировский район (Востокнефть) . .	- 0,28	+ 0,26
	+ 0,10	- 1,07
	- 0,12	+ 0,42
Среднее квадратическое . . .	$\pm 0'',40$	

## § 29. Пример Московской аномалии

Интересный материал для проверки предыдущих соображений о точности вывода уклонений отвеса получен Дубовским для района Московской аномалии. Этот район пока является единственным у нас, где имеется довольно подробная и точная гравиметрическая съемка, а также большое количество астрономических определений на пунктах триангуляции. Поэтому он является весьма ценным для проверки различных методических выводов. Но с этой стороны район Москвы имеет существенный недостаток: он исключительно аномален, ошибка представительства для него значительно больше средней, следовательно предвычисленные ошибки, основанные на среднем коэффициенте ошибки представительства, должны оказаться заниженными.

Дубовской для 15 пунктов в районе Московской аномалии вычислил уклонение отвеса в 5 вариантах: 1) сохранив при проведении изоаномал все пункты, что соответствовало среднему расстоянию между пунктами в 6 км.; 2) отбросив часть пунктов так, что среднее расстояние между

ними повысилось до 9 км; 3) то же до 12 километров; 4) до 17 км; 5) до 33 км. (стандартная плотность гравиметрической съемки СССР).

Для последующих вариантов он получил такие средние квадратические расхождения с первым:

З о н ы	Среднее расстояние между пунктами			
	9	12	17	33
0—5 км	$\pm 0'',24$	$\pm 0'',42$	$\pm 0'',46$	$\pm 0'',59$
0—27 „	0 ,50	1 ,10	1 ,25	1 ,80
0—65 „	0 ,51	1 ,12	1 ,30	1 ,88

Для ошибки основного варианта (6 км) из сравнения гравиметрических уклонений отвеса с астрономо-геодезическими Дубовской получил:

$$\delta\epsilon'' = \pm 0'',69,$$

$$\delta\eta'' = \pm 0'',50.$$

Образуя среднее и исключая ошибку астроопределений (приблизительно  $\pm 0'',3$ ), получим  $\pm 0'',52$ .

Для района Московской аномалии ошибку наблюдения в среднем примем равной  $\pm 2,5$  мГЛ, учитывая большую тщательность наблюдений в этом районе, а также и то, что часть наблюдений выполнена гравиметрами.

Рассчитаем теперь ошибку вывода уклонения отвеса для расстояний между пунктами 6, 9, 12, 17 и 33 км.

Среднее расстояние между пунктами	Чистая ошибка представления	Полная ошибка представ.	Влияние зоны за пред. l	$l^{3/4}$	Влияние централ. зоны	Ошибка уклон. отвеса $\epsilon$	Получено Дубовским $\epsilon$	$\frac{3}{2} \epsilon$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	$\pm 2,6$	$\pm 3,6$	$\pm 0'',23$	2,3	$\pm 0,34$	$\pm 0,41$	$\pm 0,52$	$\pm 0,60$
9	3,2	4,1	0,26	3,1	0,46	0,53	0,73	0,80
12	3,8	4,5	0,28	3,8	0,57	0,64	1,23	0,96
17	4,5	5,1	0,32	5,0	0,75	0,82	1,40	1,23
33	6,2	6,7	0,40	8,2	1,23	1,29	1,95	1,94

В столбце 8 приведены соответствующие значения ошибок из предыдущей таблицы после включения ошибки основного варианта ( $\pm 0'',52$ ). Все расчетные оценки ошибок, как и следовало ожидать, преуменьшены (вследствие особой аномальности района Москвы).

Для стандартной плотности съемки (33 км) в графе 7, в сущности говоря, мы имеем не предвычисленную ошибку, а фактически установленную среднюю величину ( $\pm 1'',3$ ), так как из нее мы исходили при определении коэффициента формулы (6.5). Поэтому то обстоятельство, что для Московской аномалии при нормальной плотности гравиметрической съемки ошибка вывода уклонения отвеса получается на 50% выше средней, не зависит от метода расчета, а только от того, что ошибка представительства для этого района примерно на 50% выше средней.

Учитывая это обстоятельство, мы в графе 9 даем для сравнения  $\frac{3}{2} \epsilon$ . Тогда соответствие предвычисленных и фактических результатов становится достаточно удовлетворительным.

Нами рассмотрен вопрос о точности получения уклонений отвеса при наличии равномерной площадной гравиметрической съемки. Методика расчета ожидаемых величин ошибок для этого случая ясна из предыдущего примера. Вопросы об оптимальном распределении гравиметри-

ческих пунктов мы намеренно не касались, так как этот вопрос достаточно подробно разобран де Грааф Хентером [8]. В его расчетах оставался только один пробел, именно вопрос о влиянии на точность вывода  $\xi$  и  $\eta$  центральной зоны. Этот вопрос им и не мог быть решен, ибо он располагал только материалами очень редкой съемки (1 пункт на 10000 кв. км). Мы показали, что эмпирическая формула де Грааф Хентера для ошибки представительства остается практически пригодной даже при расстоянии между гравиметрическими пунктами до 8 км. Следовательно, объединяя результаты де Грааф Хентера и наши, можно без труда решить оба типа задач, которые могут встретиться при проектировании гравиметрических съемок: 1) зная расположение гравиметрических пунктов и их точность, определить ожидаемую ошибку вывода уклонения отвеса; 2) задаваясь требуемой точностью уклонения отвеса и точностью измерения силы тяжести, рассчитать оптимальное расположение гравиметрических пунктов.

## Приложение

### Глава VII

#### Вывод вспомогательных формул к главе IV

##### § 30. Вывод исходных формул

Введем в рассмотрение функции  $K_n$  и  $L_n$ , определяемые следующими равенствами:

$$K_n = \int_{-1}^{+1} F(y) P_n(x) dx, \quad (7.1)$$

$$L_n = \int_{-1}^{+1} F'(y) P_n(x) dx, \quad (7.2)$$

где

$$y = kx + b \text{ и } b = f(k) \quad (7.3)$$

$P_n(x)$  — полином Лежандра порядка  $n$ .

Нетрудно установить некоторые соотношения, связывающие между собой эти функции.

Из (7.2), интегрируя по частям, получаем:

$$kL_n = \left| F(y) P_n(x) \right|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} F(y) P_n'(x) dx. \quad (7.4)$$

Воспользуемся известным соотношением

$$P_n'(x) = P_{n-2}(x) + (2n-1)P_{n-1}.$$

Подставляя его в (7.4) и интегрируя по частям выражение

$$\int_{-1}^{+1} F(y) P_{n-2}(x) dx,$$

получим:

$$L_n = L_{n-2} - (2n-1)K_{n-1}k^{-1} \quad (7.5)$$

$L_0$  и  $L_1$  можно получить непосредственно. Нагляднее вместо  $L_1$  задать  $L_{-1}$ , чтобы подчеркнуть общее между четными и нечетными функциями.

Получим:

$$L_0 = \frac{1}{k} \left[ F(k+b) - F(k-b) \right], \quad (7.6)$$

$$L_{-1} = \frac{1}{k} \left[ F(k+b) + F(k-b) \right].$$

Таким образом функции  $L_n$  для всех целых положительных  $n$  определяются через функции  $K_n$  и  $F$  без дополнительных интегрирований.

Дифференцируя (7.1) по  $k$  и принимая во внимание (7.2), получим:

$$\frac{dK_n}{dk} = \int_{-1}^{+1} F'(y) x P_n(x) dx + \frac{df}{dk} L_n.$$

Учитывая известное соотношение:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),$$

получим:

$$\frac{dK_n}{dk} = \frac{n+1}{2n+1} L_{n+1} + \frac{n}{2n+1} L_{n-1} + \frac{df}{dk} L_n,$$

или на основании (7.5)

$$\frac{dK_n}{dk} = L_{n+1} + nK_n k^{-1} + \frac{df}{dk} L_n. \quad (7.7)$$

Теперь из (7.5) и (7.7) получаем:

$$k \left( \frac{dK_n}{dk} - \frac{dK_{n-2}}{dk} \right) = nK_n - (n-2)K_{n-2} - (2n+1)K_n - \frac{df}{dk} (2n-1)K_{n-1}.$$

Последнее равенство легко приводится к такому виду:

$$\frac{d}{dk} (K_n k^{n+1}) = k^{2n-1} \frac{d}{dk} (K_{n-2} k^{2-n}) - (2n-1) k^n K_{n-1} \frac{df}{dk}. \quad (7.8)$$

Интегрируя обе части этого выражения по  $k$  в пределах от 0 до  $k$ , после интегрирования по частям первого члена в правой части получаем:

$$K_n k^{n+1} = K_{n-2} k^{n+1} - (2n-1) \int_0^k \left[ K_{n-2} + \frac{df}{dk} K_{n-1} \right] k^n dk. \quad (7.9)$$

Если обе стороны равенства (7.8) умножить на  $k^{1-2n}$  и после этого проинтегрировать в пределах от 1 до  $k$ , то получится:

$$K_{n-2} k^{2-n} = K_n k^{2-n} + (2n-1) \int_1^k \left[ K_n + K_{n-1} \frac{df}{dk} \right] k^{1-n} dk + K_{n-2}(1) - K_n(1). \quad (7.10)$$

Равенства (7.9) и (7.10) представляют собой рекуррентные формулы для определения  $K_n$ . Из них первая служит для перехода от функций с меньшим значением  $n$  к функциям с большим  $n$ ; вторая служит для обратного перехода.

Таким образом достаточно иметь функции  $K_n$  для двух смежных значений  $n$ , чтобы получить  $K_n$  и  $L_n$  для любого целого положительного  $n$  с помощью формул (7.9), (7.10), (7.5) и (7.6).

При этом при переходе от больших к меньшим  $n$  дополнительно нужно знать  $K_n(1)$ ; практически это обычно не вызывает затруднений.

Покажем одно свойство функций  $K_n$ , важное для контроля их вычислений.

Вблизи значения  $k=0$  разложим  $F(y)$  в степенной ряд:

$$F(y) = F(b) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} k^m x^m F^m(b).$$

Так как

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x) dx = 0, \quad \text{если } m < n$$

имеем:

$$K_n k^{1-n} = k \int_{-1}^{+1} \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{m!} k^{m-n} x^m F^m(b) P_n(x) dx.$$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow 0} (K_n k^{1-n}) = 0. \quad (7.11)$$

Следовательно, разложение  $K_n$  в степенной ряд должно начинаться с  $k^n$ .

### § 31. Частный случай применения формулы (7.10)

Воспользуемся формулой (7.10) и вычислим систему функций  $K_n$  для функции

$$P_n \left( \frac{x+1-k}{k} \right);$$

$P_n$  — полином Лежандра порядка  $n$ .

Очевидно, в этом случае

$$K_{n+m}(P_n) = 0 \quad (m > 0);$$

при  $k=1$

$$K_n(P_n) = \frac{2}{2n+1},$$

$$K_m(P_n) = 0. \quad (7.12)$$

Роль  $k$  в (7.10) играет  $\frac{1}{k}$  и

$$\frac{df}{d\left(\frac{1}{k}\right)} = 1;$$

условия (7.12) дают все необходимое для вычисления  $K_m(P_n)$  при любых  $m$  и  $n$ .

В данном случае можно было бы непосредственно применить формулу (7.10), положив  $\frac{1}{k} = k_1$ .

Сразу в более удобной форме получим результат, если поступим несколько иначе.

Заменим в (7.10)  $k$  на  $\frac{1}{k}$ ,  $n$  на  $n-m$ .

Получим для этого случая

$$K_{n-m} k^{n-m} = K_{n-m+2} k^{n-m} - (2n - 2m + 3) \int_1^k (K_{n-m+2} + K_{n-m+1}) k^{n-m-1} dk. \quad (7.13)$$

Применяя эту формулу, последовательно получаем:

$$K_n (P_n) k^n = \frac{2}{2n+1},$$

$$K_{n-1} (P_n) k^{n-1} = \frac{2}{k} (1-k),$$

$$K_{n-2} (P_n) k^{n-2} = \frac{2}{k^2} \left[ (1-k) + (n-1) (1-k)^2 \right].$$

Чтобы получить общее выражение для  $K_{n-m}$ , поступим следующим образом. Положим

$$K_{n-m} k^{n-m} = \frac{2}{k^m} \left[ B_1^m (1-k) + B_2^m (1-k)^2 + \dots + B_m^m (1-k)^m \right] \quad (7.14)$$

( $B^m_0 = 0$ , так как  $K_{n-m}(1) = 0$ , если  $n \neq m$ ).

Подставляя в (7.13), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^m} \left[ (B_1^m - B_1^{m-2}) (1-k) + (B_2^m - B_2^{m-2}) (1-k)^2 + \dots \right] + \\ & + (2n - 2m + 3) \int_1^k \left[ (B_1^{m-1} + B_1^{m-2}) (1-k) + \right. \\ & \left. + (B_2^{m-1} + B_2^{m-2}) (1-k)^2 \right] \frac{dk}{k^{m+1}} = 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем это тождество, расположим результат по степеням  $(1-k)$  и приравняем нулю коэффициенты, стоящие при различных степенях  $(1-k)$ .

Таким образом получим систему уравнений для последовательного определения коэффициентов:

$$B_1^m = B_1^{m-2},$$

$$2(B_2^m - B_2^{m-2}) = (2n - 2m + 3)(B_1^{m-1} + B_1^{m-2}),$$

$$3(B_3^m - B_3^{m-2}) = (2n - 2m + 3)(B_2^{m-1} + B_2^{m-2}) + (2-m)(B_2^m - B_2^{m-2}),$$

или, если положим

$$p = m - 1,$$

$$q = 2n - m,$$

получим:

$$(1-p)(B_2^m + B_2^{m-1}) + (1+q)(B_3^{m-1} + B_2^{m-2}) = 3(B_3^m - B_3^{m-2})$$

$$(2-p)(B_3^m + B_3^{m-1}) + (q)(B_3^{m-1} + B_3^{m-2}) = 4(B_4^m - B_4^{m-2}) \quad (7.15)$$

$$(3-p)(B_4^m + B_4^{m-1}) + (q-1)(B_4^{m-1} + B_4^{m-2}) = 5(B_5^m - B_5^{m-2})$$

$$(l-2-p)(B_{l-1}^m + B_{l-1}^{m-1}) + (q+4-l)(B_{l-1}^{m-1} + B_{l-1}^{m-2}) = l(B_l^m - B_l^{m-2})$$

Рекуррентной формуле (7.15) соответствует такое решение:

$$B_l^m = \frac{1}{l} \frac{p(p-1) \dots (p+2-l)}{(l-1)!} \cdot \frac{q(q-1) \dots (q+2-l)}{(l-1)!} \quad (7.16)$$

В этом можно убедиться подстановкой (7.15) в (7.16).  
 Таким образом

$$\frac{1}{2} K_r(P_n) k^{n-t^2} + \frac{1}{2} t^4 p q + \frac{1}{3} t^6 \frac{p(p-1)}{2!} \cdot \frac{q(q-1)}{2!} + \dots + \frac{1}{4} t^8 \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \cdot \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \dots \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} t^2 &= 1 - k \\ p &= n - r - 1 \\ q &= n + r \end{aligned}$$

До  $n=7$  получаем следующие разложения для  $P_n \left( \frac{y+1-k}{k} \right)$ :

$$k P_1 = t^2 + P_1(y)$$

$$k^2 P_2 = (t^2 + t^4) + 3t^2 P_1(y) + P_2(y),$$

$$k^3 P_3 = (t^2 + 3t^4 + t^6) + 3(t^2 + 2t^4) P_1(y) + 5t^2 P_2(y) + P_3(y),$$

$$k^4 P_4 = (t^2 + 6t^4 + 6t^6 + t^8) + 3(t^2 + 5t^4 + \frac{10}{3}t^6) P_1(y) + 5(t^2 + 3t^4) P_2(y) + 7t^2 P_3(y) + P_4(y),$$

$$k^5 P_5 = (t^2 + 10t^4 + 20t^6 + 10t^8 + t^{10}) + 3(t^2 + 9t^4 + 15t^6 + 5t^8) P_1(y) + 5(t^2 + 7t^4 + 7t^6) P_2(y) + 7(t^2 + 4t^4) P_3(y) + 9t^2 P_4(y) + P_5(y),$$

$$k^6 P_6 = (t^2 + 15t^4 + 50t^6 + 50t^8 + 15t^{10} + t^{12}) + 3(t^2 + 14t^4 + 42t^6 + 35t^8 + 7t^{10}) P_1(y) + 5(t^2 + 12t^4 + 28t^6 + 14t^8) P_2(y) + 7(t^2 + 9t^4 + 12t^6) P_3(y) + 9(t^2 + 5t^4) P_4(y) + 11t^2 P_5(y) + P_6(y),$$

$$\begin{aligned} k^7 P_7 &= (t^2 + 21t^4 + 105t^6 + 175t^8 + 105t^{10} + 21t^{12} + t^{14}) + \\ &+ 3(t^2 + 20t^4 + \frac{280}{3}t^6 + 140t^8 + 70t^{10} + \\ &+ \frac{28}{3}t^{12}) P_1(y) + 5(t^2 + 18t^4 + 72t^6 + 84t^8 + \\ &+ \frac{126}{5}t^{10}) P_2(y) + 7(t^2 + 15t^4 + 45t^6 + 30t^8) P_3(y) + \\ &+ 9(t^2 + 11t^4 + \frac{55}{3}t^6) P_4(y) + 11(t^2 + 6t^4) P_5(y) + \\ &+ 13t^2 P_6(y) + P_7(y). \end{aligned}$$

### § 32. Разложение функции Стокса по полиномам Лежандра в интервале изменения $\cos \psi$ от $-1$ до $\cos \psi_0$

Хорошо известно разложение функции Стокса в ряд по полиномам Лежандра в интервале для  $\cos \psi$  от  $-1$  до  $+1$ . Теперь мы ставим себе целью получить подобное же разложение для интервала изменения  $\cos \psi$  от  $-1$  до  $\cos \psi_0$ .

$S(\psi)$  в функции  $y = \cos \psi$  представится следующим образом:

$$S(y) = \sqrt{\frac{2}{1-y}} - 3y \ln \left( \sqrt{\frac{1-y}{2}} + \frac{1-y}{2} \right) - 6 \sqrt{\frac{1-y}{2}} + 1 - 5y.$$

Введем новое переменное  $x$ , связанное с  $y$  линейной зависимостью:

$$y = kx + k - 1, \quad \text{где } k = \frac{1 + y_0}{2}.$$

Тогда, при изменении  $x$  от  $-1$  до  $+1$ ,  $y$  меняется от  $-1$  до  $2k - 1 = y_0$ .

Ограничиваясь приближением порядка  $m$ , разложение  $S(y)$  по полиномам Лежандра в интервале  $-1, 2k - 1$ , представим в следующей форме:

$$S(kx + k - 1) = \sum_0^m \frac{2n + 1}{2} K_n(S) P_n(x). \quad (7.16)$$

Умножив обе части этого равенства на  $P_n(x)$  и интегрируя по  $x$  в пределах от  $-1$  до  $+1$ , получим:

$$K_n(S) = \int_{-1}^{+1} S(kx + k - 1) P_n(x) dx.$$

Последнее выражение относится к рассмотренному типу (7.1)

Чтобы определить  $K_n(S)$  для любого  $n$ , пользуясь формулой (7.9), необходимо прежде всего знать  $K_0(S)$  и  $K_1(S)$ .

Эти величины определяются по формулам:

$$K_0(S) = k^{-1} \int_{-1}^{2k-1} S(y) dy,$$

$$K_1(S) = \frac{1-k}{k} K_0(S) + k^{-2} \int_{-1}^{2k-1} S(y) y dy.$$

Выполнив интеграцию, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \int S(y) dy &= y - \frac{7}{4} y^2 + \sqrt{2(1-y)} \left( -\frac{3}{2} y - \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \frac{3}{2} (1-y^2) \ln \frac{1-y + \sqrt{2(1-y)}}{2}, \\ \int S(y) y dy &= y + \frac{1}{2} y^2 - \frac{4}{3} y^3 + \frac{1}{3} \sqrt{2(1-y)} (1-y - 3y^2) - \\ &- y^3 \ln \frac{1-y + \sqrt{2(1-y)}}{2}. \end{aligned} \right\} (7.19)$$

Следовательно

$$K_0(S) k = -2(1-k) + 7k(1-k) + 2(1-3k)\sqrt{1-k} + 6k(1-k) \ln(1-k + \sqrt{1-k}),$$

$$K_1(S) k^2 = -\frac{4}{3}(1-k) + \frac{5}{3}k(1-k) + \frac{11}{3}k^2(1-k) +$$

$$+ \frac{2}{3}(-3k^2 - 2k + 2)\sqrt{1-k} + (1-k^3) \ln(1-k) - 2k^3 \ln(1 + \sqrt{1-k}).$$

Дальнейшее сводится к механическому применению формулы (7.9). Ее в данном случае можно написать так:

$$K_n(S) k^{n+1} = K_{n-1} k^{n+1} - 2n \int_0^k K_{n-1} k^n dk,$$

так как  $b = k - 1$ .

Выполнив интегрирование, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} K_0(S) k &= -7k^2 + 9k - 2 + \ln(1-k)(-3k^2 + 3k) + \\ &\quad + (2-6k)\sqrt{1-k} + (6k-6k^3)\ln(1+\sqrt{1-k}), \\ K_1(S) k^2 &= -\frac{11}{3}k^3 + 2k^2 + 3k - \frac{4}{3} + (1-k^3)\ln(1-k) + \\ &\quad + \left(-2k^2 - \frac{4}{3}k + \frac{4}{3}\right)\sqrt{1-k} - 2k^3\ln(1+\sqrt{1-k}), \\ K_2(S) k^3 &= -\frac{1}{2}k^4 - k^3 - \frac{7}{2}k^2 + 7k + (3-3k)\ln(1-k) - \\ &\quad - 4k\sqrt{1-k}, \\ K_3(S) k^4 &= \frac{1}{10}k^5 + \frac{1}{2}k^4 + \frac{7}{2}k^3 - \frac{37}{2}k^2 + 9k + \frac{32}{5} + \\ &\quad + (6k^2 - 15k + 9)\ln(1-k) + \\ &\quad + \left(\frac{28}{5}k^2 - \frac{16}{5}k - \frac{32}{5}\right)\sqrt{1-k}, \\ K_4(S) k^5 &= -\frac{1}{30}k^6 - \frac{3}{10}k^5 - \frac{7}{2}k^4 + \frac{217}{6}k^3 - 49k^2 - \frac{84}{5}k + \frac{512}{15} + \\ &\quad + (-10k^3 + 45k^2 - 63k + 28)\ln(1-k) + \\ &\quad + \left(-\frac{36}{5}k^3 + \frac{48}{5}k^2 + \frac{416}{15}k - \frac{512}{15}\right)\sqrt{1-k}, \\ K_5(S) k^6 &= \frac{1}{70}k^7 + \frac{1}{5}k^6 + \frac{7}{2}k^5 - \frac{121}{2}k^4 + 156k^3 - \frac{139}{5}k^2 - \\ &\quad - \frac{1086}{5}k + \frac{1024}{7} + (15k^4 - 105k^3 + 252k^2 - \\ &\quad - 252k + 90)\ln(1-k) + \left(\frac{44}{5}k^4 - \frac{704}{35}k^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2816}{35}k^2 + \frac{8192}{35}k - \frac{1024}{7}\right)\sqrt{1-k}, \\ K_6(S) k^7 &= -\frac{1}{140}k^8 - \frac{1}{7}k^7 - \frac{7}{2}k^6 + \frac{919}{10}k^5 - \frac{1527}{4}k^4 + \frac{1632}{5}k^3 + \\ &\quad + \frac{1389}{2}k^2 - \frac{9185}{7}k + \frac{4096}{7} + (-21k^5 + 210k^4 - \\ &\quad - 756k^3 + 1260k^2 - 990k + 297)\ln(1-k) + \\ &\quad + \left(-\frac{52}{5}k^5 + \frac{1248}{85}k^4 + \frac{19968}{105}k^3 - \frac{6656}{7}k^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{27648}{21}k - \frac{4096}{7}\right)\sqrt{1-k}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned}
K_7(S)k^8 = & \frac{1}{252}k^9 + \frac{3}{28}k^8 + \frac{7}{2}k^7 - \frac{1307}{10}k^6 + \frac{15899}{20}k^5 - \\
& - \frac{5371}{4}k^4 - \frac{7733}{6}k^3 + \frac{88121}{14}k^2 - \frac{46241}{7}k + \\
& + \frac{20480}{9} + \left( 28k^6 - 378k^5 + 1890k^4 - 4620k^3 + \right. \\
& + 5940k^2 - 3861k + 1001 \left. \right) \ln(1-k) + \\
& + \left( 12k^6 - \frac{400}{7}k^5 - \frac{24800}{63}k^4 + \frac{185600}{63}k^3 - \right. \\
& \left. - \frac{140800}{21}k^2 + \frac{407552}{63}k - \frac{20480}{9} \right) \sqrt{1-k}.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

В формулу для  $K_n(S)$ , как видим, входят  $3n+3$  коэффициента. Эти коэффициенты связаны между собой рядом соотношений.

1) Вблизи значения  $k=0$  выражение  $K_n(S)k^{n+1}$  может быть разложено в сходящийся ряд по степеням  $k$ .

На основании (7.11) разложение должно начинаться с  $k^{2n+1}$ . Таким образом первые  $2n+1$  коэффициенты разложения должны тождественно равняться нулю, а потому коэффициенты, входящие в  $K_n(S)k^{n+1}$  связаны  $2n+1$  соотношениями линейного вида.

2) Если  $k$  стремится к единице  $K_n \rightarrow \frac{2}{n-1}$ . Но  $\ln(1-k) \rightarrow \infty$ , поэтому коэффициент при  $\ln(1-k)$  должен стремиться к нулю. Таким образом имеем еще два линейных соотношения между коэффициентами.

Еще некоторые связи между коэффициентами обнаружатся в дальнейшем. Но уже теперь мы видим, что  $3n+3$  коэффициента, входящие в  $K_n(S)$ , связаны  $2n+3$  известными нам линейными соотношениями, которые могут служить для проверки вычисления коэффициентов при интеграции.

Например, при  $n=7$  мы уже имеем 17 линейных соотношений для контроля 24-х коэффициентов.

Для большего удобства численных вычислений придадим (7.20) иной вид. Положим:

$$\sqrt{1-k} = t.$$

После преобразований получим:

$$\begin{aligned}
K_0(S)k &= -4t + 5t^2 + 6t^3 - 7t^4 + (6t^2 - 6t^4) \ln(t+t^2), \\
K_1(S)k^2 &= -2t + 4t^2 + \frac{16}{3}t^3 - 9t^4 - 2t^5 + \frac{11}{3}t^6 + 2 \ln t - \\
& - 2(1-t^2)^3 \ln(t+t^2), \\
K_2(S)k^3 &= 2 - 4t + 5t^2 + 4t^3 - \frac{19}{2}t^4 + 3t^6 - \frac{1}{2}t^8 + 6t^2 \ln t, \\
K_3(S)k^4 &= 1 - 4t + 15t^2 - 8t^3 - 4t^4 + \frac{28}{5}t^5 - \frac{13}{2}t^6 + \\
& + t^8 - \frac{1}{10}t^{10} + (6t^2 + 12t^4) \ln t, \\
K_4(S)k^5 &= \frac{2}{3} - 4t + 22t^2 - \frac{76}{3}t^3 + 35t^4 - 12t^5 - \frac{37}{2}t^6 + \frac{36}{5}t^7 - \\
& - \frac{11}{2}t^8 + \frac{1}{2}t^{10} - \frac{1}{30}t^{12} + (6t^2 + 30t^4 + 20t^6) \ln t
\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}
K_5(S)k^6 &= \frac{1}{2} - 4t + 28t^2 - 48t^3 + \frac{231}{2}t^4 - 88t^5 + \frac{93}{2}t^6 - \frac{528}{35}t^7 - \\
&\quad - \frac{79}{2}t^8 + \frac{44}{5}t^9 - 5t^{10} + \frac{3}{10}t^{12} - \frac{1}{70}t^{14} + \\
&\quad + (6t^2 + 54t^4 + 90t^6 + 30t^8) \ln t, \\
K_6(S)k^7 &= \frac{2}{5} - 4t + \frac{67}{2}t^2 - 76t^3 + \frac{493}{2}t^4 - \frac{1352}{5}t^5 + 357t^6 - \\
&\quad - \frac{1144}{5}t^7 + \frac{79}{4}t^8 - \frac{572}{35}t^9 - \frac{135}{2}t^{10} + \frac{52}{5}t^{11} - \\
&\quad - \frac{47}{10}t^{12} + \frac{1}{5}t^{14} - \frac{1}{140}t^{16} + (6t^2 + 84t^4 + 252t^6 + \\
&\quad + 210t^8 + 42t^{10}) \ln t, \\
K_7(S)k^8 &= \frac{1}{3} - 4t + \frac{387}{10}t^2 - \frac{328}{3}t^3 + 437t^4 - 620t^5 + \frac{2391}{2}t^6 - \\
&\quad - 1040t^7 + 802t^8 - \frac{31460}{63}t^9 - \frac{363}{4}t^{10} - \frac{104}{7}t^{11} - \\
&\quad - \frac{1543}{15}t^{12} + 12t^{13} - \frac{9}{2}t^{14} + \frac{1}{7}t^{16} - \frac{1}{252}t^{18} + \\
&\quad + (6t^2 + 120t^4 + 560t^6 + 840t^8 + 420t^{10} + 56t^{12}) \ln t
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Заметим, что, начиная с  $n = 2$ , коэффициент при  $t$  равен  $-4$ , в многочлене при  $\ln t$  коэффициент при первом члене равен  $6$ , при последнем равен  $n(n+1)$ .

Сумма

$$S_m(kx + k - 1) = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{2} K_n(S) P_n(x)$$

представляет собой  $m$ -ое приближение к  $S(y)$ .

Оценим квадратическую ошибку  $m$ -го приближения  $R_m(S)$ .

Известно, что

$$2R_m^2(S) = \int_{-1}^{+1} S^2(kx + k - 1) dx - \sum_0^m \frac{2n+1}{2} K_n^2(S); \tag{7.22}$$

$R_m(S)$  — средняя квадратическая ошибка  $m$ -го приближения к функции  $S(kx + k - 1)$  в интервале  $-1 \leq x \leq +1$ .

Выполнив замену переменных, получим

$$\int_{-1}^{+1} S^2(kx + k - 1) dx = \frac{2k-1}{k} \int_{-1}^{2k-1} S^2(y) dy = \frac{4}{k} \int_t^1 S^2(z) z dz, \tag{7.23}$$

где

$$z^2 = \frac{1-y}{2}; \quad y = kx + k - 1.$$

$$S(z) = \frac{1}{z} - 3(1 - 2z^2) \ln(z + z^2) - 6z - 5(1 - 2z^2) + 1$$

Интегрируя (7.23), получаем:

$$k \int_{-1}^{+1} S^2(kx + k - 1) dx = \frac{k}{2} \left( K_0^2(S) - \bar{K}_0^2(S) \right) + \frac{3k}{2} \left( K_1^2(S) - \bar{K}_1^2(S) \right) + \\ + 6 \ln^2 t - 4 \ln t + 12 \ln t \ln(1+t) + 8 \ln(1+t) + \pi^2 - 8 \ln 2 + (7.24) \\ + 5t^2 - 64t^3 + \frac{123}{4} t^4 + \frac{6352}{100} t^5 - 45t^6 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n^2},$$

где

$$k \bar{K}_0(S) = -4t + 5t^2 + 6t^3 - 7t^4,$$

$$k \bar{K}_1(S) = -2t + 4t^2 + \frac{16}{3} t^3 - 9t^4 - 2t^5 + \frac{11}{3} t^6 - 2 \ln t.$$

Ряд (7.24) получился от разложения по степеням  $t$  интеграла

$$\int_t^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12} - \int_0^t \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n^2}.$$

Таким образом задача разложения функции Стокса по полиномам Лежандра в интервале

$$-1 \leq x \leq 2k - 1 \quad (k \leq 1)$$

полностью решена. Коэффициенты разложения даются формулой (7.21). С помощью (7.9) этот ряд формул может быть продлен до любого  $n$ . Остаточная квадратическая ошибка разложения может быть получена с помощью формулы (7.24).

### § 33. Формулы Стокса и Венинг Мейнеса в преобразованной форме

Формула (7.18) дает разложение  $S(y)$  по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  в интервале изменения:

$$\begin{aligned} &\text{по } x \text{ от } -1 \text{ до } +1, \\ &\text{по } y \text{ от } -1 \text{ до } 2k - 1. \end{aligned}$$

Тожественным преобразованием можно левую часть (7.18) свести к ряду, составленному из полиномов Лежандра, зависящих от  $y$ .

В функции  $y$  (7.18) переписется в следующем виде:

$$S_m(y) = \sum_0^m \frac{2n+1}{2} K_n(S) P_n\left(\frac{y}{k} + \frac{1}{k} - 1\right).$$

Умножим обе части последнего равенства на  $P_r(y)$  и проинтегрируем по  $y$  от  $-1$  до  $+1$ .

Получим:

$$K_r(S_m) = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{2} K_n(S) K_r(P_n),$$

причем  $K_r(P_n)$  было получено раньше (формула 7.17).

Таким образом имеем:

$$S_m(y) = \sum_{r=0}^m \frac{2r+1}{2} K_r(S_m) P_r(y).$$

Разность  $S(y) - S_m(y)$  близка к  $S(y)$  при  $y$ , близком к единице, и характеризуется средним квадратическим значением  $R_m(S, t)$  в интервале  $2k - 1 \geq y \geq -1$ .

Теперь формулу Стокса можем представить в ином виде:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint \Delta g \left[ S(y) - S_m(y) \right] d\omega + \\ + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint \Delta g \left[ \sum_0^m \frac{2r+1}{2} K_r(S_m) P_r(y) \right] d\omega,$$

или, разлагая во втором интеграле  $\Delta g$  на сферические гармоники  $g_r$  и интегрируя, получим:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint \Delta g \left[ S(y) - S_m(y) \right] d\omega + \frac{R}{2\gamma} \sum_2^m g_r K_r(S_m) \quad (7.25)$$

Формулы для уклонения отвеса получаем путем дифференцирования (7.25) по  $\varphi$  и  $\lambda$ :

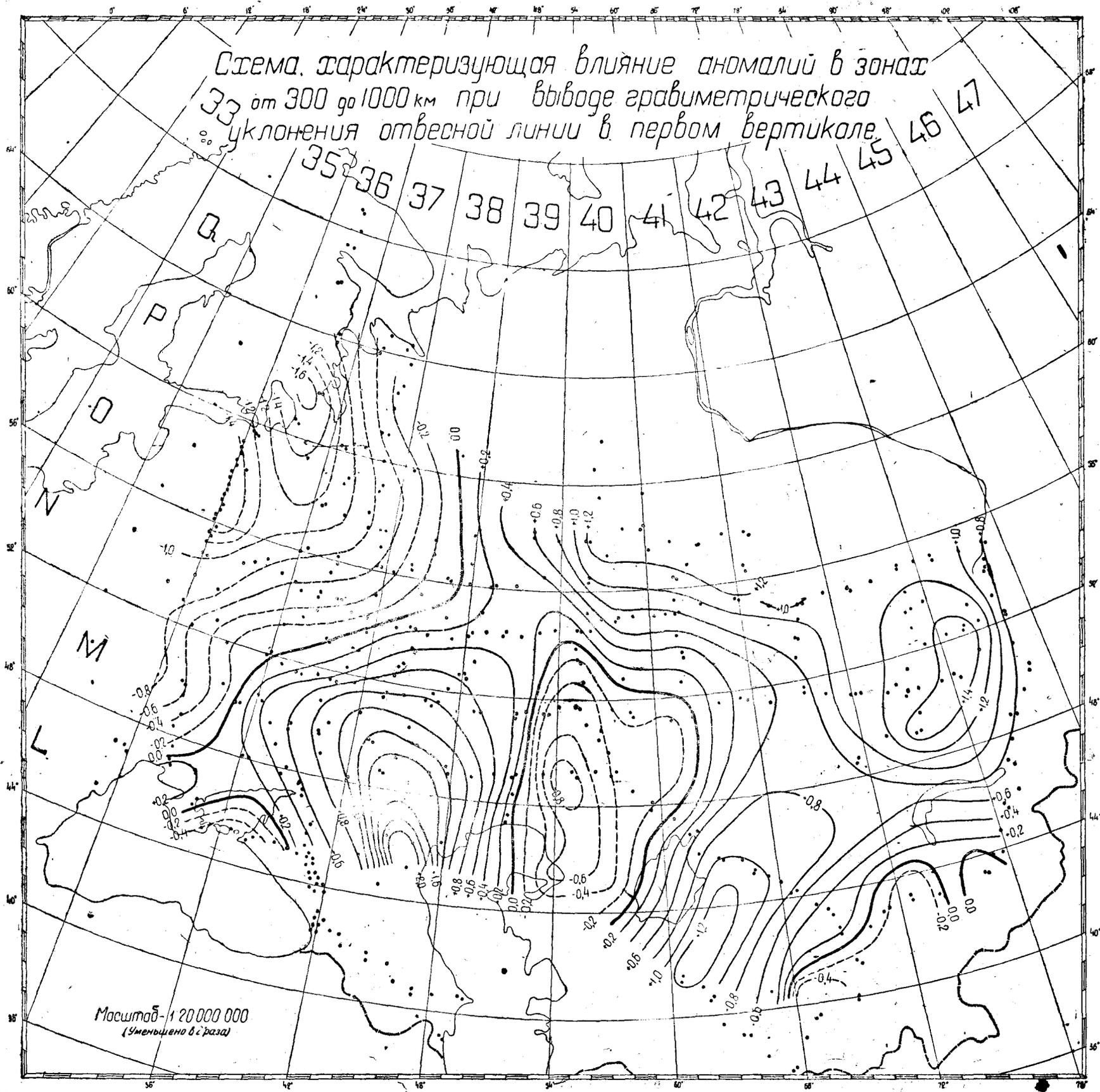
$$\zeta'' = \frac{1}{4\pi\gamma \sin 1''} \int \Delta g \frac{d}{d\psi} \left[ S(y) - S_m(y) \right] \cos_\alpha d\omega - \\ - \frac{1}{2\gamma \sin 1''} \sum_2^m K_r(S_m) \frac{\partial g_r}{\partial \varphi}, \quad (7.26)$$

$$\eta'' = \frac{1}{4\pi\gamma \sin 1''} \int \Delta g \frac{d}{d\psi} \left[ S(y) - S_m(y) \right] \sin_\alpha d\omega - \\ - \frac{1}{2\gamma \sin 1''} \sum_2^m K_r(S_m) \frac{\partial g_r}{\partial \lambda} \sec \varphi.$$

## Цитированная литература

1. Пидетти. Механические основы теории фигуры планет. Москва, 1933
  2. Н. Jeffreys, G. В. Bd.31, 1931; Bd. 36, 1932.
  3. Н. Д. Моисеев. А. Ж. X, 4, 1933; G. В. Bd. 42, Н. 2—3, 1934.
  4. Н. С. Кошляков. Применение метода Грина к основной задаче гравиметрии. Труды Математического ин-та им. Стеклова, т. IV, 1933
  5. Н. Р. Малкин. А. Ж. XI, 5, 1934; G. В. Bd.45, Н. 1—2, 1935.
  6. М. С. Молоденский. Исследования по геодезической гравиметрии, М. Л. 1936 и А. Ж. XI, 1934.
  7. Н. И. Идельсон и Н. Р. Малкин. G. В. Bd. 29, 1931.
  8. De Graaf Hunter. J. Phil. Trans. A. 234.1935.
  9. Н. Д. Моисеев. А. Ж. XII, 4. 1935.
  10. Н. Р. Малкин. А. Ж. XVIII, 4—5, 1940.
  11. А. А. Михайлов. А. Ж. XVII, I.
  12. В. Н. Салтыков. Д. А. Н. 1937, XVI, 3.
  13. G. В. Bd. 38 Н. I стр. 61.
  14. Ф. Н. Красовский. Доклады VII конф. Балт. геод. ком. вып. 2, 1934.
  15. Geodetic Report, 1934, стр. 142.
  16. М. С. Молоденский. Труды ЦНИИГАиК, вып. 17.
  17. Ф. Н. Красовский. Руководство по высшей геодезии. М. 1942.
  18. Ф. А. Слудский. Лекции по высшей геодезии М. 1891.
  19. Н. Р. Малкин. А. Ж. XVI, 1, 1939.
  20. Н. Jeffreys. M. N. R. A. S. Geophys Suppl., 5, No. 3, 1943.
  21. Н. Р. Малкин. G. В. Bd. 38, Н. 1, 1933.
  22. A. Prey. G. В. Bd. 36, 1932.
-







## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
12	6 снизу	$\frac{1}{4\pi}$	$-\frac{1}{4\pi}$	авт.
13	формула (1.6)	$\frac{R}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	авт.
14	3 снизу	$\psi \operatorname{cosec}$	$\operatorname{cosec} \psi$	корр.
15	6 снизу	$\frac{\gamma}{2R} (\zeta_{\pi}^{\infty} - \zeta_0)$	$\frac{3\gamma}{2R} (\zeta_{\pi} - \zeta_0)$	корр.
21	15 и 20 сверху	$\operatorname{arch} z$	$\operatorname{arcch} z$	авт.
23	13 снизу	$n \Delta_n^P$	$n \Delta_n^F$	авт.
39	18 сверху	$T(\bar{q}, q_1, q_2)$	$T(q', q_1, q_2)$	корр.
45	6 и 14 снизу	$\Delta$	$\Delta_2 \bar{q}$	авт.
45	6 снизу	$D$	$\bar{D}$	авт.
51	8 сверху	+ 5,181	+ 0,181	корр.
59	1 снизу	$\left( \frac{d P_n^m}{d \vartheta} \right)$	$\left( \frac{d P_n^m}{d \vartheta} \right)^2$	корр.
63	1 снизу	+ x	x +	корр.
78	21 сверху	$\sin L x_0$	$-\sin L x_0$	корр.
93	8 снизу	$\frac{1}{2 \sin \gamma 1''}$	$\frac{1}{2 \gamma \sin 1''}$	корр.
97	11 сверху	$\frac{n}{2n+1} + L_{n-1}$	$\frac{n}{2n+1} L_{n-1}$	корр.
100	10 снизу	$9 \left( t^2 11 t^4 + \frac{55}{3} t^6 \right) + P_4(y)$	$9 \left( t^2 + 11 t^4 + \frac{55}{3} t^6 \right) P_4(y)$	корр.
102	10 сверху	$(3 - 3 k^2)$	$(3 - 3 k)$	авт.