

Т Р У Д Ы

Центрального научно-исследовательского
института геодезии, аэросъемки и картографии

ВЫПУСК 66

М. Е. Хейфец

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ МАЯТНИКОВ

Т Р У Д Ы

ЦЕНТРАЛЬНОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
ИНСТИТУТА ГЕОДЕЗИИ, АЭРОСЪЕМКИ
и КАРТОГРАФИИ

ВЫПУСК 66

М. Е. Хейфец

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ МАЯТНИКОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Наша общая гравиметрическая съемка, уже по одной своей общегосударственной и плано-научной постановке, является, без сомнения, передовым явлением науки и техники; она, кроме того, не имеет себе аналогии и по размерам подвергаемой сплошному охвату территории.

Проведение гравиметрической съемки СССР, при большом разнообразии его географических, климатических и других, — в частности, транспортных, — условий, обосновывает необходимость применения различных типов гравиметрических приборов в соответствии с условиями работ и их целевым назначением (опорные пункты I и II класса, полевые пункты общей съемки или пункты III класса, пункты дополнительных к общей съемке съемок сгущения). Рациональность дифференцированной расстановки гравиметрических приборов все более и более подтверждается опытом прежних и текущих работ гравиметрического производства ГУГК и других организаций.

Уже в период исходного планирования общей гравиметрической съемки СССР (1931—1932 гг.), в основном ориентировавшегося на единственный испытанный и освоенный тогда гравиметрический прибор — свободные маятники, — все же ставился вопрос о дополнении последних приборами другого типа, могущими в определенных условиях и районах иметь известные преимущества [4, 5, 6]. Здесь имелись в виду, в частности, и такие приборы, где для измерения силы тяжести служат явления упругости — упругие или эластические (по первоначальному названию) маятники [5], использующие принцип астазированных приборов.

Соответствующие конструкторские работы, начатые в некоторых наших учреждениях, дали реальный успех. В ЦНИИГАиК инж. Г. И. Рудаковский самостоятельно осуществил первую, после первоначально построенной Хольвеком и Леже, модель упругих маятников, причем Рудаковскому с его помощниками-механиками (Соловьев, Иохман и Шведов) удалось освоить совершенно неизвестную еще тогда технологию изготовления подобных приборов, в частности, наиболее ответственных упругих их частей.

Упругие маятники получили в СССР достаточное производственное применение, и, параллельно с последним, постепенно вырабатывались кадры наблюдателей, а также отрабатывалась и уточнялась методика наблюдений. В результате в ЦНИИГАиК была составлена и введена в производство первая инструкция по полевым работам с упругими маятниками. Наряду с этим наши математики и гравиметристы; Артемьев [1, 2], Седов, Рудаковский [9] и особенно Хейфец [11—12], стали развивать принципиальное обоснование метода упругих маятников и разработку условий их применения с учетом входящих сюда различных влияний и ошибок. Наконец, в последнее время М. Е. Хейфец, развивая в ЦНИИГАиК свои прежние соображения и используя свои новые опытно-производственные работы, дал делу упругих маятников давно ожидавшееся обобщение с контролем своих выводов на специально поставленных опытах; эта последняя работа М. Е. Хейфеца и составляет содержание настоящего выпуска «Трудов ЦНИИГАиК».

Таким образом, упругие маятники, одна из первых конструкций которых (Рудаковского) была осуществлена в нашей стране, ввиду достаточного развития у нас их применения и указанных специальных

исследований их советскими гравиметристами, могут с достаточным правом считаться полезной принадлежностью нашей гравиметрической науки и техники. В соответствии с этим следует подчеркнуть рациональность применения этого прибора, особенно там, где его специальные свойства (перечисленные нами ниже) могут оказаться выгодными.

Упругие маятники (наблюдаемые динамически)* могут считаться занимающими в производственном отношении среднее место между свободными маятниками и статическими гравиметрами различных типов, употреблявшимися до сих пор по преимуществу на съемках сгущения.

С одной стороны, как теперь выяснилось и продолжает подтверждаться текущим производственным опытом, упругие маятники отличаются достаточной стойкостью своего нуля, уступая в этом отношении разве только свободным маятникам. Вместе с этим упругие маятники обычно сохраняют достаточно постоянным и свой масштаб, определяемый в виде масштабного коэффициента; подобный масштабный коэффициент, раз определенный, остается, можно сказать, практически неизменным в течение ряда лет, как показывают повторные контрольные определения его. Возможность измерения достаточного интервала силы тяжести, ограниченность чего иногда суживала применимость многих современных статических гравиметров, представляется, напротив, для упругих маятников достаточно широкой, удовлетворяя большинству встречающихся на практике запросов.

Точность упругих маятников, при правильном оперировании с последними, можно считать соответствующей точности хороших свободных маятников и таким образом вообще обеспечивающей точность получаемых гравиметрических данных, которая только и может быть реально извлечена из общей стандартной гравиметрической съемки (т. е. полезную точность общей съемки, например, в смысле так называемой ошибки представительства). Но на точность, требуемую для съемок сгущения, упругие маятники все же не рассчитаны, уступая здесь точности статических гравиметров, специально конструируемых в расчете на такие съемки сгущения**.

Что касается скорости самого наблюдения силы тяжести на определяемом гравиметрическом пункте, упругие маятники заметно превосходят, например, соответствующую скорость обычных маятниковых приборов, по крайней мере, пока последние и вся методика работы с ними не получат своей давно ожидаемой модернизации в соответствии с современным состоянием практической физики. При этом скорость самого наблюдения силы тяжести на пункте вообще близка уже для упругих маятников к той, которую можно считать еще полезной в общей гравиметрической съемке, продвиг которой определяется в обычных средних (а тем более в трудных) транспортных условиях, прежде всего

* Вообще упругие маятники могут быть переобстроены и в расчете на наблюдение их статическим методом.

** Статические гравиметры, конечно, могут и должны в ряде подходящих для них случаев применяться и для целей *общей* съемки. Однако последнее мыслится только при обеспеченной возможности достаточно частых заездов на опорные пункты для контроля их нулевых точек: например — при общей съемке — от одного раза каждый день (для наименее стойких гравиметров) до одного раза каждые 4 дня (для более стойких, например, пружинных гравиметров, изобретенных в ЦНИИГАиК М. С. Молоденским). Подобное требование выполнимо в обжитых районах с хорошими дорогами и автомобильным сообщением, или, наоборот, в совершенно необжитых районах, но при наличии собственного воздушного транспорта и многих посадочных площадок для самолетов, например, в степях, или в районе с большим числом акваторий (озер и рек), пригодных для применения гидропланов.

Далее, статические гравиметры могут, а в последнее время и начинают применяться и для связи главных исходных и 1-классных опорных гравиметрических пунктов, опять-таки при наличии неограниченного воздушного транспорта. При последнем применении статических гравиметров надо учитывать ограниченность интервала силы тяжести, измеримого для них без промежуточной перерегулировки.

продолжительностью переезда с пункта на пункт и временем, необходимым для выполнения на гравиметрическом пункте дополнительных операций (определения координат и высоты пункта). В подобных условиях увеличение скорости собственно гравиметрических операций на пункте после известного предела (легко достигаемого, например, для гравиметров) все равно не принесет пользы.

Надо заметить, что применение всех типов гравиметрических приборов, особенно при общей гравиметрической съемке, требует предварительного, или хотя бы одновременного, определения опорных пунктов (I и II классов). Требования к опорной сети возрастают в сторону учащения последней по мере перехода от свободных маятников к статическим гравиметрам; упругие же маятники в смысле требовательности к опорной сети занимают промежуточное место между свободными маятниками и статическими гравиметрами, но заметно ближе к первым.

С другой стороны, надо указать и на некоторые специальные условия применения упругих маятников, в частности, на необходимость обеспечения хорошей неподвижности установки, несоблюдение чего может вносить возмущения в их работу и даже вызывать иногда прямой срыв и брак наблюдений на данном пункте.

Зато исключение и учет температурных влияний для упругих маятников, в пределах присущей последним точности, как правило, достигаются без применения термостатов или подобных им средств, требующих, например, в случае статических гравиметров, слишком тяжелого и громоздкого оборудования для своего непрерывного электрического питания. Свобода от этого обеспечивает для упругих маятников легкий вес всего их рабочего комплекта, а в связи с их другим свойством — постоянным вакуумом — обеспечивает им особую применимость в некоторых районах. Принципиально подходящими их можно считать для горных, особенно высокогорных районов, причем не только для общей съемки, но уже и для съемок сгущения средней точности, например, в геодезическо-гравиметрических целях. При этом надо иметь в виду, что в горах, если не увеличивать обычной для последних целей густоты съемок сгущения, большая точность индивидуальных пунктов (например, возможная для гравиметров) будет затушевываться и пропадать без пользы, ввиду малой выполнимости в горах полного учета сложной топографической обстановки. В обычных горных условиях упомянутые выше требования упругих маятников к незыблемости их рабочей установки легко удовлетворяются использованием имеющихся здесь всегда каменных и скальных выходов.

Таким образом упругие маятники, не являясь универсальной заменой других гравиметрических приборов, рассчитываемых каждый на свою область применения, тем не менее, могут иметь достаточно широкое применение для общей гравиметрической съемки, а иногда и для съемок сгущения умеренной точности, особенно в таких районах, где специфические свойства этого прибора могут дать выгоду перед другими типами приборов.

Следует прибавить, что — как это имеет место в отношении вообще всех измерительных приборов — освоение упругих маятников, хотя и введенных достаточно давно, не могло быть уверенным, пока не было проведено полного теоретического и практического исследования их с соответствующим контролем на практическом опыте производственного характера. Только после подобного исследования и контроля рабочая пригодность упругих маятников может считаться установленной.

Настоящая работа М. Е. Хейфеца как раз и дает такое исследование, необходимость которого для упругих маятников давно чувствовалась.

Профессор, д-р физ.-мат. наук *И. А. Казанский*

I. Введение

В процессе быстрого развития гравиметрической съемки выявилось фактическое разделение ее на съемку трех типов: определение опорных пунктов, «общую съемку» и съемки сгущения. В свою очередь первый тип подразделяется на классы, второй тип — на разряды, третий — на съемки сгущения специального характера. В связи с этим в порядок дня был поставлен вопрос о создании особой инструментально-технической базы для каждого типа, класса и разряда съемки с учетом, конечно, особенностей различных районов работ.

Очевидно, что создание новой и усовершенствование действующей аппаратуры для столь высокоточных полевых измерений, какими являются гравиметрические, — задача весьма трудная; решение ее не могло сразу охватить весь комплекс вопросов, выдвигаемых потребностями гравиметрии. В первую очередь внимание ученых и техников было сосредоточено на создании приборов, пригодных для съемок сгущения, как имеющих первоочередное значение для ряда отраслей народного хозяйства. В этом отношении были достигнуты серьезные успехи, по сравнению с которыми достижения в разработке конструкций приборов для других видов съемки оказались значительно меньшими, несмотря на возрастающее значение последних.

Применение для общей съемки классического маятникового прибора, по мере продвижения работ в отдаленные местности, становится все более затруднительным. Особенно это относится к Советскому Союзу с его огромной территорией, отличающейся исключительным разнообразием природных условий, населенности, путей сообщения и т. д. Понятно стремление применить для советской общей съемки любой прибор, имеющий в определенных условиях известные преимущества по сравнению с маятниковым прибором. Выполняя большую и плодотворную работу по созданию оригинальных конструкций гравиметрических приборов, советские гравиметристы не могли не попытаться использовать и упругие маятники, осуществленные во Франции Хольвеком* и Леже около двух десятков лет тому назад [16, 17, 18, 19].

В Советском Союзе некоторые лица и учреждения занялись разработкой теории и конструкции упругих маятников, однако дело освоения их приходилось начинать совершенно самостоятельно, не имея сколько-нибудь полезных указаний в отношении их изготовления. Решающих успехов в практическом изготовлении прибора добился старший научный сотрудник Центрального научно-исследовательского института геодезии, аэросъемки и картографии Г. И. Рудаковский. Имея, в сущности, только схему прибора, он сумел создать вполне удовлетворительную модель упругих маятников, для чего потребовалось самостоятельно открыть способ изготовления и обработки наиболее важной детали прибора — упругой пластинки маятника.

* Погибшим во время войны от рук немецких фашистов за отказ выдать важное военное изобретение.

В 1937 г. первый образец упругих маятников был опробован в районе Московской аномалии. В 1938 г. Рудаковский определил силу тяжести на 40 пунктах в районе Рязани и доказал целесообразность внедрения нового прибора в производство. Однако к этому времени как в устройстве прибора, так и, особенно, в методике наблюдений с ним оставалось еще много неясного, требовавшего дальнейшего исследования. Чтобы окончательно в производственных условиях апробировать упругие маятники и собрать достаточно обширный материал для изучения их особенностей и возможностей, ЦНИИГАиК в 1939 г. организовал специальную экспедицию, определившую около 300 полевых пунктов в Саратовской и Сталинградской областях, Кабардинской АССР и др. [11].

В состав этой экспедиции был включен автор настоящей статьи, которому было поручено всесторонне изучить упругие маятники и разработать методы полевых измерений, лабораторных исследований и камеральных вычислений. Опыт, накопленный в экспедиции, послужил основой для составленного в 1940 г. «Наставления по работам с упругими маятниками». В дальнейшем автор продолжал начатую работу в лабораторных, а также и в полевых условиях (преимущественно в Каракумской экспедиции 1943 г., организованной Московским аэрогеодезическим предприятием), дополняя экспериментальные материалы некоторыми теоретическими исследованиями.

Все полученные результаты подробно изложены автором в его кандидатской диссертации «Измерение силы тяжести упругими маятниками» (наиболее важные разделы ее опубликованы, см. [11] и [12]). В настоящей статье мы считаем необходимым дополнительно опубликовать ряд других материалов диссертации, имеющих существенное значение для характеристики упругих маятников. Здесь мы не будем останавливаться ни на устройстве и принципе работы прибора, ни на его теории, ни на других вопросах, нашедших уже отражение в литературе. Мы задаемся целью обратить внимание читателя только на новые факты, установленные нами в лаборатории или на полевых работах, или выявленные теоретическим путем.

Предварительно напомним, что основная формула цилиндрического упругого маятника, связывающая период его колебаний с константами упругой системы, для бесконечно малых амплитуд имеет следующий вид*:

$$S = \pi \sqrt{\frac{[(1 + a l \lambda + a^2 \lambda) \sin \lambda' - \lambda' \cos \lambda']^2 + \lambda d^2 (1 - \cos \lambda' + a \sqrt{\lambda} \sin \lambda')^2}{\{(1 + 2 a l \lambda + a^2 \lambda) \sin \lambda' \cos \lambda' - \sqrt{\lambda} [a^2 \lambda (a + l) + a - l] \sin^2 \lambda' - \lambda'\} g \sqrt{\lambda}}}$$

Здесь: l — длина пластинки маятника, $2a$ — длина стержня, g — ускорение силы тяжести, $2S$ — период маятника, $\lambda = \frac{mg}{B}$, $\lambda' = l \sqrt{\lambda}$, m — масса маятника, B — коэффициент жесткости пластинки на изгиб, d — радиус инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести маятника перпендикулярно плоскости колебаний.

Вводя в формулу малую величину $\frac{l}{a}$ и разлагая в ряд, получим после некоторых преобразований, с точностью порядка $\frac{l^2}{a^2}$:

$$g = C - \frac{k}{S^2} - \frac{k'}{S^4} \quad (1,1)$$

* В эту формулу, приведенную в [12], вкралась опечатка.

где:

$$C = \frac{B}{mal} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{l}{a} \right),$$

$$k = \frac{\pi^2 (a^2 + d^2)}{a} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{l}{a} + \frac{al}{a^2 + d^2} \right),$$

$$k' = \frac{\pi^4 ml^2 (a^2 + d^2)}{B}.$$

Так как третий член правой части (1, 1) при относительных измерениях силы тяжести практически можно считать постоянным, то мы имеем право пользоваться общеизвестной формулой, применявшейся в работах Хольвека и Леже:

$$g = C - \frac{k}{S^2}. \quad (1,2)$$

Надо лишь учитывать, что применение последней формулы является законным при соблюдении следующих условий:

1. поправка за амплитуду колебаний маятника одинакова на исходном и полевых гравиметрических пунктах;

2. ошибки температурных коэффициентов, отсчета температуры и разность между температурой термометра и маятника не имеют существенного значения;

3. наблюдаемый период с достаточной точностью свободен от систематических и случайных ошибок отсчета наблюдателем момента прохождения маятника через принятое для данного маятника положение равновесия;

4. константы основной формулы C и k надежно определены, и небольшие их изменения происходят по хорошо известному закону;

5. маятник отъюстирован так, что поправкой за его наклон в плоскости качаний можно пренебречь. Очевидно, для достижения этой цели, небольшой остаточный наклон маятника в положении равновесия должен быть постоянным как на опорных, так и на полевых пунктах;

6. наклон плоскости качания маятника достаточно мал;

7. энергия маятника не расходуется на раскачивание подставки (т. е. влияние «сокачания» отсутствует);

8. маятник не совершает вынужденных колебаний;

9. период маятника не зависит от напряжения магнитного поля Земли.

Задача нашей статьи заключается в том, чтобы выяснить, насколько в действительности соблюдаются перечисленные условия, и, характеризуя реальную точность наблюдений с упругими маятниками и качество окончательных результатов, облегчить возможность суждения об области и условиях применения этого прибора.

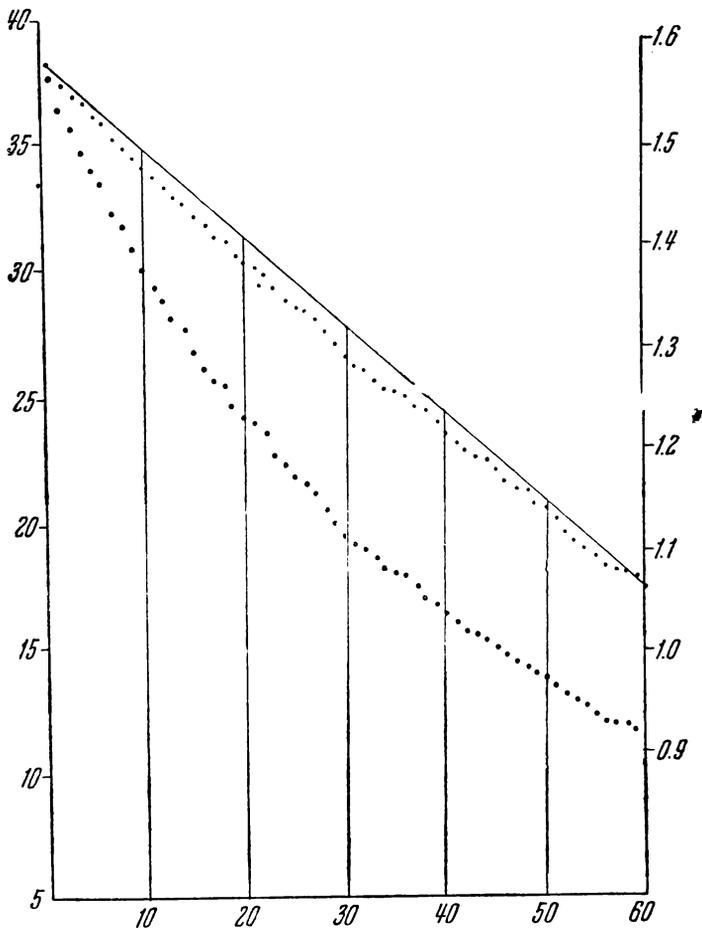
II. Закон затухания амплитуд упругого маятника и поправка за амплитуду

В весьма сложной теории упругого маятника одним из самых трудных вопросов является вопрос об учете влияния амплитуды колебаний маятника на его период. Этот вопрос для упругих маятников имеет практически более существенное значение, чем в случае, например, свободных маятников, и требует поэтому тщательного изучения.

Внимательный анализ работ, посвященных выводу поправки за амплитуду, показывает, что различные формулы, предлагаемые авторами, в значительной мере имеют формальный характер. В связи с этим

обычно далеко неполно описываются и учитываются явления, происходящие в действительности.

Как правило, принимают, что для упругих маятников поправка за амплитуду одинакова на опорном и полевых пунктах, и поэтому вычисление ее считают ненужным. Однако, так как эта поправка относительно весьма велика и к тому же заведомо должна зависеть от силы тяжести, то желательно получить достаточно убедительное подтверждение такой методики на опыте. Проведение подобного эксперимента осложняется тем обстоятельством, что, как известно, колебания упругого маятника быстро затухают. Практически через 15—20 минут после пуска маятник можно считать остановившимся, причем скорость затухания также существенно зависит от силы тяжести. Отсюда ясно, что изучение закона затухания упругого маятника, без которого невозможно правильно учесть и зависимость периода от амплитуды, представляется интересным и важным.

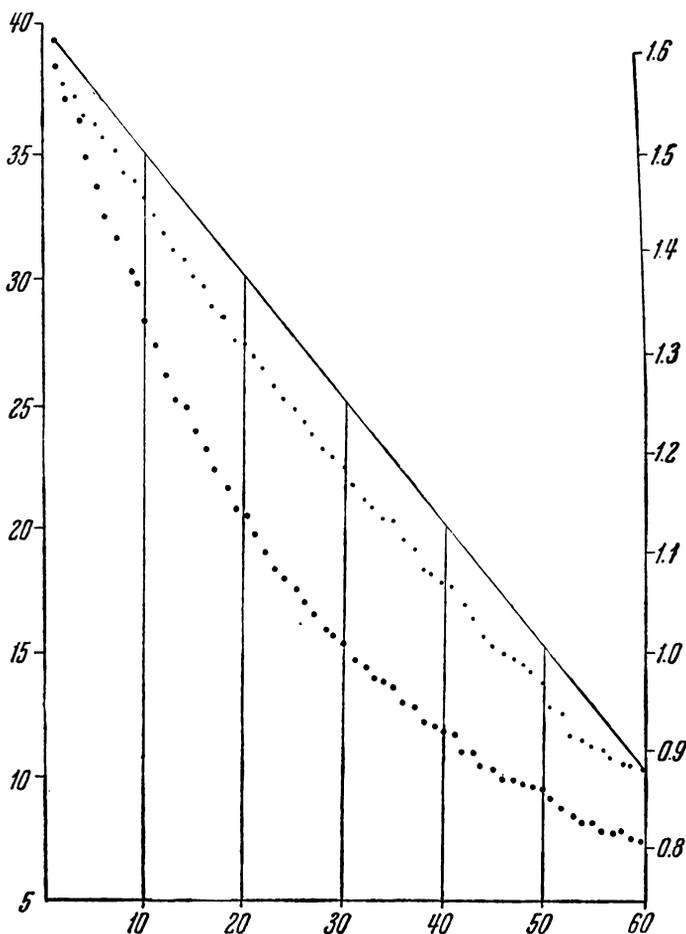


Черт. 1

Несмотря на значительную величину затухания, его исследование является довольно трудным делом. Основную роль играет высокая чувствительность упругого маятника к самым незначительным сотрясениям подставки, вызываемым движением людей и транспорта, микросейсмическими явлениями и многими другими причинами. Самый этот факт достаточно известен. Например, Хольбек и Леже [17] даже отмечают, что «последовательность амплитуд маятника не подчиняется

определенному закону...». Нерлунд, занимавшийся обширными исследованиями упругих маятников, также пишет [21]: «Затухание не следует всегда одному и тому же закону...». На первый взгляд подобное заключение представляется обезнадеживающим. Нам, однако, удалось придти к более утешительным выводам, может быть вследствие того, что при постановке эксперимента удалось обеспечить весьма благоприятные внешние условия. Наблюдения за затуханием амплитуд производились нами в 1944 г. в г. Ашхабаде (помещение гравиметрического пункта II класса) и в Москве (гравиметрическая лаборатория МАГП) в ночные часы, когда в условиях военного времени жизнь в городах в значительной мере замирала.

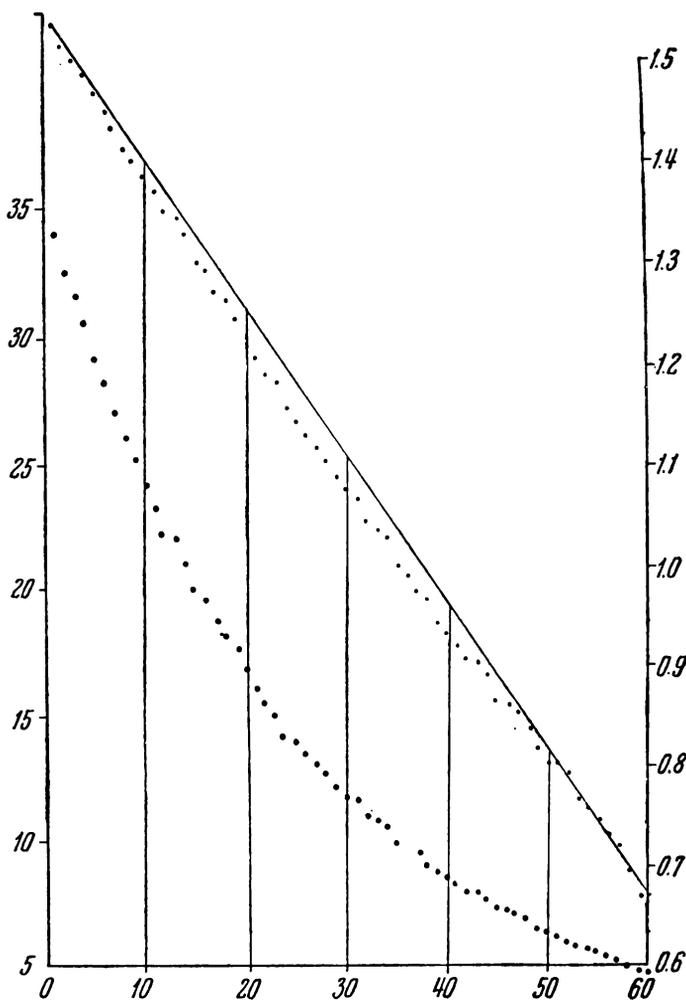
Шкала применявшегося микроскопа была разделена на 40 равных частей. Нуль шкалы совмещался с положением равновесия маятника.



Черт. 2

При наблюдениях амплитуд отсчет по шкале делался для каждой элонгации маятника (примерно через 3 секунды). В каждом приеме наблюдений записывались отсчеты для 160—180 элонгаций; однако последние малые амплитуды были настолько отягощены влиянием посторонних колебаний и сотрясений, а также, возможно, и микросейсмических явлений, что для изучения и обработки материалов использовались лишь первые 60 колебаний. Это число можно считать вполне достаточным, так как при измерении силы тяжести наблюдается не свыше 50 колебаний.

Результаты некоторых выбранных наугад приемов наблюдений маятников № 106, 107 и 108 даны на графиках (черт. 1, 2, 3). На них ординаты точек, расположенных по более изогнутой кривой, дают величины амплитуд (полных размахов), выраженных в делениях шкалы, а ординаты точек, относящихся к менее изогнутой кривой, — логарифмы этих амплитуд. По горизонтальной шкале отложены последовательные номера амплитуд. Вертикальная левая и правая шкалы соответственно дают масштабы для амплитуд и логарифмов последних. Величина амплитуд получалась как сумма отсчетов шкалы при двух последовательных элонгациях маятника во время движения его всегда в одном направлении, поэтому все величины амплитуд независимы в смысле влияния ошибок отсчета. Десятые доли деления шкалы оценивались наблюдателем наглаз.



Черт. 3

На графиках ясно усматривается, что, несмотря на увеличение разброса к концу наблюдений, затухание амплитуд происходит вполне закономерно, причем логарифмическая кривая уже близка к прямой; правда, кривизна ее все еще остается достаточно резко выраженной (чтобы подчеркнуть это, крайние точки логарифмической кривой соединены прямой линией). Отсюда заключаем, что затухание амплитуд упругого маятника нельзя считать происходящим по обычному, в по-

ляются практически неприемлемыми для изучения затухания упругих маятников. Во-первых, строго говоря, величину полуразмаха в данном случае нельзя считать известной, так как положение равновесия маятника может измениться при его запуске; во-вторых, эти формулы приводят к весьма громоздким вычислениям.

Здесь мы укажем без доказательства — элементарного, но довольно громоздкого, — что из соотношений (II, 5) можно вывести следующую формулу, связывающую с той же точностью, с какой получены формулы (II, 5), величины любых двух последовательных полных размахов маятника, которые в дальнейшем для простоты будем называть амплитудами колебания:

$$\Theta_{i+1} = P\Theta_i + Q\Theta_i^2, \quad (\text{II}, 7)$$

где, в отличие от прежних обозначений: Θ — величины амплитуд (т. е. полных размахов) маятника, отсчитываемых при движении его всегда в одну сторону; P и Q — некоторые коэффициенты, зависящие только от периода колебания маятника и коэффициентов сопротивления h и λ ; i — номер амплитуды колебания.

По последней формуле, отсчитав начальную амплитуду Θ_0 и зная коэффициенты P и Q , можно вычислить любую амплитуду номера i . Но поскольку практически наблюдается 50 и больше амплитуд, то такое вычисление последовательным переходом от одной амплитуды к другой является столь же громоздким, как и вычисление по формулам (II, 5). Еще больше усложнится дело, если попытаться применить эту формулу для вывода средней амплитуды, или среднего из квадратов i амплитуд по известным начальной и конечной амплитудам. Для подобных целей формула (II, 7) также является непригодной.

Заметим, что если попытаться перейти от этой формулы к формуле, связывающей непосредственно Θ_i и Θ_0 , то получится полином степени 2^i относительно Θ_0 ; таким образом уже для 10-го колебания маятника получится полином 1024-й степени. Если к тому же еще учесть, что эти полиномы сходятся довольно медленно, то станет ясным, что непосредственное применение формул Крылова в наших целях весьма затруднительно.

Вследствие сказанного необходимо заменить формулу (II, 7) какой-то другой равносильной формулой, имеющей достаточную точность и пригодной для практических вычислений.

К решению поставленной задачи подойдем следующим образом: амплитуду маятника при заданных начальной амплитуде и коэффициентах сопротивления можно считать функцией ее номера i . Хотя в действительности i принимает только целые значения (если отсчитывать колебания в одном направлении), мы можем попытаться подыскать некоторую непрерывную функцию от i , связав ее условием удовлетворять с заданной выше точностью соотношению (II, 7) для целых значений i . Тогда, очевидно, искомая функция сможет заменить формулу (II, 7), и наша задача будет решена.

Итак, пусть Θ есть непрерывная функция $\Theta(i)$. Разность двух последовательных амплитуд $\Delta\Theta = \Theta(i+1) - \Theta(i)$ будем рассматривать, как приращение этой функции, соответствующее приращению аргумента $\Delta i = (i+1) - i = 1$. В том случае, когда интервал изменения i достаточно велик, мы можем считать Δi малой величиной и приближенно положить:

$$\frac{d\Theta}{di} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta i}. \quad (\text{II}, 8)$$

Но из (II, 7), считая Θ переменной величиной и опуская индекс i , получаем:

$$\Delta\Theta = \Theta_{i+1} - \Theta_i = (P - 1)\Theta + Q\Theta^2.$$

Подстановка в (8) дает:

$$di = \frac{d\Theta}{(P-1)\Theta + Q\Theta^2}.$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением для нашей искомой функции; интегрируя его, находим:

$$i = \frac{1}{1-P} \ln \frac{P-1+Q\Theta}{\Theta} + c.$$

Постоянная интегрирования c определяется из условия:

$$\text{при } i = 0, \quad \Theta = \Theta_0;$$

отсюда

$$i = \frac{1}{P-1} \ln \frac{(P-1+Q\Theta_0)\Theta}{(P-1+Q\Theta)\Theta_0}.$$

Решая относительно Θ , имеем:

$$\Theta = \frac{(P-1)e^{i(P-1)}\Theta_0}{P-1+Q(1-e^{i(P-1)})\Theta_0}. \quad (\text{II,9})$$

Введем для простоты обозначения:

$$P-1 = a; \quad Q = b, \quad (\text{II,10})$$

и восстановим индекс i :

$$\Theta_i = \Theta_0 \frac{ae^{ai}}{a+b(1-e^{ai})\Theta_0}. \quad (\text{II,11})$$

Проверим, удовлетворяет ли полученное приближенное соотношение равенству (II, 7). Проще всего получить утвердительный ответ, исходя из следующего рассуждения: так как мы вправе любую амплитуду считать начальной, то, заменив в (II, 11) Θ_0 и Θ_i соответственно через Θ_i и Θ_{i+1} , мы должны положить в правой части $i=1$ и получим:

$$\Theta_{i+1} = \Theta_i \frac{e^a}{1 + \frac{b}{a}(1-e^a)\Theta_i}.$$

Дальше мы увидим, что a является величиной малой. В этом легко убедиться заранее, рассмотрев вышеприведенные графики. Из этих графиков следует, что второй член в знаменателе последнего равенства должен быть величиной малой, так как его величина определяет искривление логарифмического графика амплитуд. Последующие вычисления, как мы увидим, действительно покажут, что порядок величины a равен 1×10^{-2} ; $\frac{b\Theta_i}{a} < 1$. Ввиду этого с ошибкой порядка квадрата амплитуды (1×10^{-4}) мы можем написать:

$$\Theta_{i+1} = e^a \Theta_i \left[1 - \frac{b}{a}(1-e^a)\Theta_i \right] = e^a \Theta_i - \frac{b}{a} e^a (1-e^a) \Theta_i^2. \quad (\text{II,12})$$

Отсюда следует, что соотношение (II, 7) удовлетворится, если имеют место равенства:

$$P = e^a; \quad Q = -\frac{b}{a} e^a (1-e^a).$$

Но тогда, вследствие малости a , получаем, разлагая e^a в ряд и ограничиваясь членами первого порядка:

$$P = 1 + a; \quad Q = b,$$

откуда, ввиду (II, 10), заключаем, что

$$\Theta_{i+1} = P\Theta_i + Q\Theta_i^2.$$

Таким образом, найденная функция (11) удовлетворяет с необходимой точностью исходному соотношению (II, 7), и мы можем считать эту функцию выражающей закон затухания амплитуд.

Для более наглядного сопоставления законов затухания упругого и обычного маятников и еще большего упрощения техники вычислений Θ_i по заданному значению Θ_0 введем в (II, 11) величину φ , обратную величине амплитуды Θ :

$$\varphi_i = \frac{1}{\Theta_i}; \quad \varphi_0 = \frac{1}{\Theta_0}. \quad (\text{II,13})$$

Обозначим также

$$\frac{b}{a} = k. \quad (\text{II,14})$$

Тогда нетрудно получить следующее весьма простое выражение:

$$\varphi_i = (\varphi_0 + k)e^{-ai} - k. \quad (\text{II,15})$$

Напомним, что для обычных маятников:

$$\varphi_i e^{ai} = \text{const} = \varphi_0,$$

для упругих же маятников:

$$(\varphi_i + k)e^{ai} = \text{const} = (\varphi_0 + k). \quad (\text{II,16})$$

Последняя формула в наиболее простой форме является обобщением закона затухания обычных маятников. Можно показать, что, как и для обычных маятников, здесь имеет место равенство:

$$a = -hS,$$

но мы не будем входить в довольно трудоемкий анализ физического смысла параметров a и b (или k), представляющий интерес, но не имеющий отношения к вопросам, которыми мы сейчас занимаемся.

Наша задача заключается в том, чтобы подсчитать влияние затухания на величину средней амплитуды или среднего из квадратов амплитуд для последующего правильного учета поправки за амплитуду. Нас, следовательно, интересует только чисто количественная сторона вопроса, что же касается его физического содержания, то мы были бы вынуждены заниматься им в том только случае, если учет изменения коэффициентов a и b в зависимости от изменения силы тяжести, температуры и других физических факторов эмпирическим путем оказался бы невозможным. Однако нетрудно сообразить, что мы вообще можем избавиться от решения весьма трудных задач, к тому же далеких от предмета нашего исследования, если мы исключим из полученных уравнений коэффициенты a и b , выразив их через какие-то известные амплитуды, аналогично тому, как это делается для обычных маятников.

Прежде чем перейти к описанию способа исключения коэффициентов a и b , займемся опытной проверкой выведенных нами формул, связанной с параллельным определением этих коэффициентов.

Стремясь найти более простой путь проверки, заметим, что хотя преимущества формул (II, 11) и (II, 15) перед (II, 7) очевидны, так как они позволяют быстро и легко вычислять любую амплитуду по заданной начальной, но они уступают (II, 7) в удобстве определения коэффициентов a и b по известным значениям наблюдаемых амплитуд с примене-

Сопоставление наблюдаемых и вычисленных амплитуд по маятнику № 107 в Москве

Таблица 1

i	1 прием			2 прием			3 прием			4 прием			5 прием		
	Θ _{набл.}	Θ _{выч.}	ε												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	39,7			39,0			39,8			39,6			39,3		
1	37,9	37,8	+0,1	37,5	37,3	+0,2	38,0	38,0	0,0	38,0	37,8	+0,2	37,8	37,5	+0,3
2	35,9	36,1	- 2	35,8	35,6	+ 2	36,5	36,3	+0,2	36,2	36,1	+ 1	35,9	35,9	0,0
3	34,4	34,5	- 1	34,1	34,1	0,0	34,8	34,7	+ 1	34,5	34,5	0,0	34,3	34,3	0,0
4	33,1	33,0	+ 1	32,6	32,7	-0,1	33,4	33,3	+ 1	33,1	33,0	+0,1	33,0	32,8	+0,2
5	31,6	31,6	0,0	31,4	31,3	+ 1	31,8	31,9	- 1	31,8	31,7	+ 1	31,6	31,4	+ 2
6	30,3	30,3	0,0	30,0	30,0	0,0	30,5	30,6	- 1	30,2	30,3	- 1	29,8	30,2	- 4
7	29,2	29,0	+0,2	28,9	28,8	+0,1	29,5	29,5	+ 2	29,1	29,1	0,0	29,0	28,9	+ 1
8	27,9	27,8	+ 1	27,8	27,7	+ 1	28,1	28,1	0,0	27,9	27,9	0,0	27,8	27,8	0,0
9	26,8	26,7	+ 1	26,6	26,6	0,0	27,1	27,0	+0,1	26,5	26,8	-0,3	26,7	26,7	0,0
10	25,7	25,6	+ 1	25,5	25,6	-0,1	25,8	26,0	- 2	25,8	25,8	0,0	25,5	25,6	-0,1
11	24,8	24,6	+ 2	24,3	24,6	- 3	25,0	25,0	0,0	24,8	24,8	0,0	24,5	24,7	- 2
12	23,8	23,7	+ 1	23,7	23,7	0,0	24,0	24,0	0,0	23,9	23,9	0,0	23,8	23,7	+ 1
13	22,8	22,8	0,0	22,6	22,8	-0,2	23,0	23,1	-0,1	22,9	23,0	-0,1	22,7	22,8	- 1
14	22,0	21,9	+0,1	21,8	21,9	- 1	22,2	22,3	- 1	22,1	22,1	0,0	22,0	22,0	0,0
15	21,2	21,1	+0,1	21,1	21,1	0,0	21,4	21,5	- 1	21,4	21,3	+0,1	21,2	21,2	0,0
16	20,4	20,4	0,0	20,2	20,4	-0,2	20,5	20,7	- 2	20,3	20,5	-0,2	20,2	20,4	-0,2
17	19,7	19,6	+0,1	19,7	19,7	0,0	19,9	20,0	- 1	19,9	19,8	+ 1	19,7	19,7	0,0
18	18,9	18,9	0,0	18,7	19,0	-0,3	19,1	19,3	- 2	19,1	19,1	0,0	19,0	19,0	0,0
19	18,2	18,3	-0,1	18,1	18,3	- 2	18,6	18,6	0,0	18,3	18,4	-0,1	18,1	18,4	-0,3
20	17,8	17,6	+0,2	17,7	17,7	0,0	17,9	17,9	0,0	17,9	17,8	+ 1	17,7	17,7	0,0
21	16,9	17,0	-0,1	16,9	17,0	-0,1	17,2	17,3	-0,1	17,1	17,2	- 1	17,1	17,1	0,0
22	16,4	16,5	-0,1	16,3	16,5	- 2	16,6	16,7	- 1	16,5	16,6	- 1	16,4	16,5	-0,1
23	15,8	15,9	-0,1	15,9	15,9	0,0	16,1	16,2	- 1	16,0	16,0	0,0	15,9	16,0	-0,1
24	15,3	15,4	- 1	15,4	15,4	0,0	15,6	15,6	0,0	15,5	15,5	0,0	15,4	15,5	- 1
25	14,7	14,9	- 2	14,7	14,9	-0,2	15,0	15,1	-0,1	14,9	15,0	-0,1	14,8	14,9	- 1
26	14,2	14,4	- 2	14,2	14,4	- 2	14,6	14,6	0,0	14,3	14,5	- 2	14,3	14,5	- 2
27	13,9	13,9	0,0	13,9	13,9	0,0	14,2	14,1	+0,1	14,0	14,0	0,0	14,0	14,0	0,0
28	13,5	13,5	0,0	13,5	13,4	+0,1	13,7	13,7	0,0	13,6	13,6	0,0	13,7	13,5	+0,2
29	13,0	13,0	0,0	12,9	13,0	-0,1	13,3	13,2	+0,1	13,0	13,1	-0,1	13,0	13,1	- 1
30	12,6	12,6	0,0	12,5	12,6	- 1	12,7	12,8	-0,1	12,6	12,7	- 1	12,5	12,7	- 2

i	1 прием			2 прием			3 прием			4 прием			5 прием		
	Θ _{набл.}	Θ _{выч.}	ε												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
31	12,2	12,2	0,0	12,0	12,2	- 2	12,3	12,4	- 1	12,2	12,3	- 1	12,2	12,3	- 1
32	11,8	11,9	-0,1	11,8	11,8	0,0	12,0	12,0	0,0	12,0	11,9	+ 1	11,9	11,9	0,0
33	11,6	11,5	+ 1	11,6	11,4	+0,2	11,7	11,6	+0,1	11,6	11,6	0,0	11,6	11,5	+0,1
34	11,2	11,2	0,0	11,1	11,0	+ 1	11,3	11,3	0,0	11,2	11,2	0,0	11,2	11,2	0,0
35	10,7	10,8	- 1	10,6	10,7	- 1	10,9	10,9	0,0	10,8	10,9	-0,1	10,9	10,8	+0,1
36	10,3	10,5	2	10,2	10,4	- 2	10,5	10,6	-0,1	10,4	10,5	-0,1	10,5	10,5	0,0
37	10,1	10,1	0,0	10,0	10,0	0,0	10,2	10,3	- 1	10,0	10,2	- 2	10,0	10,2	-0,2
38	9,9	9,8	+0,1	9,8	9,7	+0,1	10,0	9,9	+ 1	9,8	9,9	- 1	9,8	9,9	- 1
39	9,6	9,5	+ 1	9,6	9,4	+ 2	9,8	9,6	+ 2	9,6	9,6	0,0	9,6	9,6	0,0
40	9,3	9,3	0,0	9,4	9,2	+ 2	9,6	9,3	+ 3	9,4	9,3	+ 1	9,2	9,3	-0,1
41	9,0	9,0	0,0	9,0	8,9	+ 1	9,3	9,1	+ 2	9,0	9,0	0,0	9,0	9,0	0,0
42	8,6	8,7	-0,1	8,6	8,6	0,0	8,8	8,8	0,0	8,7	8,8	-0,1	8,8	8,7	+0,1
43	8,4	8,5	- 1	8,2	8,3	-0,1	8,5	8,5	0,0	8,4	8,5	- 1	8,4	8,5	- 1
44	8,2	8,2	0,0	8,0	8,1	- 1	8,3	8,3	0,0	8,2	8,2	0,0	8,2	8,2	0,0
45	8,0	8,0	0,0	7,9	7,9	0,0	8,1	8,0	+0,1	8,0	8,0	0,0	8,0	8,0	0,0
46	7,9	7,7	+0,2	7,8	7,6	+0,2	7,9	7,8	+ 1	7,8	7,8	0,0	7,8	7,7	+0,1
47	7,7	7,5	+ 2	7,6	7,4	+0,2	7,7	7,6	+0,1	7,6	7,5	+0,1	7,6	7,5	+0,1
48	7,4	7,3	+0,1	7,4	7,2	+0,2	7,5	7,3	+0,2	7,4	7,3	+0,1	7,4	7,3	+0,1
49	7,2	7,1	+0,1	7,1	7,0	+0,1	7,1	7,1	0,0	7,2	7,1	+0,1	7,2	7,1	+0,1
50	6,8	6,9	-0,1	6,8	6,8	0,0	6,9	6,9	0,0	6,9	6,9	0,0	6,8	6,9	-0,1
51	6,5	6,7	-0,2	6,6	6,6	0,0	6,7	6,7	0,0	6,6	6,7	-0,1	6,6	6,7	-0,1
52	6,3	6,5	-0,2	6,4	6,4	0,0	6,5	6,5	0,0	6,4	6,5	-0,1	6,4	6,5	-0,1
53	6,2	6,3	-0,1	6,2	6,2	0,0	6,3	6,3	0,0	6,3	6,3	0,0	6,2	6,3	-0,1
54	6,1	6,1	0,0	6,0	6,0	0,0	6,1	6,2	-0,1	6,1	6,2	-0,1	6,2	6,1	+0,1
55	6,0	6,0	0,0	6,0	5,8	+0,2	6,0	6,0	0,0	6,0	6,0	0,0	6,0	6,0	0,0
56	5,8	5,8	0,0	5,8	5,7	+0,1	5,8	5,8	0,0	6,0	5,8	+0,2	5,9	5,8	+0,1
57	5,8	5,6	+0,2	5,7	5,5	+0,2	5,7	5,7	0,0	5,8	5,7	+0,1	5,7	5,6	+0,1
58	5,6	5,5	+0,1	5,6	5,3	+0,3	5,5	5,5	0,0	5,6	5,5	+0,1	5,6	5,5	+0,1
59	5,4	5,3	+0,1	5,4	5,2	+0,2	5,4	5,3	+0,1	5,4	5,3	+0,1	5,5	5,3	+0,2
60	5,2	5,2	0,0	5,2	5,1	+0,1	5,3	5,2	+0,1	5,4	5,2	+0,2	5,4	5,2	+0,2

Таблица 2

Сопоставление наблюдаемых и вычисленных амплитуд по маятнику № 107 в Ашхабаде

i	1 прием		2 прием		3 прием		4 прием		5 прием	
	$\Theta_{\text{набл.}}$	ϵ								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	38,9		38,7		38,3		38,7		39,9	
1	37,0	+0,4	37,0	+0,2	37,0	-0,1	36,9	+0,3	38,9	-0,4
2	35,8	- 2	35,7	- 1	35,9	- 1	35,9	- 4	37,1	+ 4
3	34,6	- 2	34,3	0	34,5	+ 2	34,5	+ 2	35,9	- 1
4	33,3	0	33,3	- 2	33,6	- 3	33,2	+ 1	34,4	+ 2
5	32,2	- 1	32,0	+ 1	32,4	0	32,1	- 1	33,6	- 4
6	31,1	0	31,1	- 2	31,6	- 2	31,5	- 5	32,1	+ 4
7	30,1	- 1	30,0	0	30,1	+ 5	30,3	+ 1	31,5	- 5
8	28,9	+ 1	29,0	- 1	29,7	- 6	29,6	- 4	30,2	+ 2
9	27,9	0	27,8	+ 3	28,3	+ 4	28,3	+ 4	29,6	- 4
10	27,0	0	26,9	0	27,3	+ 1	27,2	+ 2	28,2	+ 5
11	25,9	+ 2	25,9	+ 1	26,2	+ 3	26,3	0	27,6	- 3
12	25,2	- 1	25,2	- 1	25,2	+ 2	25,6	- 1	26,3	+ 4
13	24,3	+ 1	24,4	0	24,8	- 4	24,3	+ 5	25,5	- 1
14	23,7	- 2	23,8	- 2	23,8	+ 2	23,9	- 3	24,4	+ 3
15	22,9	+ 1	22,8	+ 3	23,3	- 2	23,0	+ 2	23,8	- 1
16	22,1	+ 1	22,1	0	22,3	+ 3	22,2	+ 1	22,9	+ 2
17	21,6	- 2	21,6	- 2	21,6	0	21,7	- 1	22,4	- 2
18	20,8	+ 2	20,8	+ 2	20,7	+ 3	20,9	+ 2	21,7	0
19	20,1	+ 1	20,1	+ 1	20,5	- 4	20,2	+ 1	21,0	0
20	19,8	- 3	19,8	- 3	19,8	+ 1	19,9	- 3	20,2	+ 2
21	18,9	+ 3	18,9	+ 3	19,1	+ 1	19,1	+ 2	19,8	0
22	18,3	0	18,3	0	18,5	+ 1	18,5	0	19,2	- 2
23	18,0	- 2	18,0	- 2	18,0	0	18,1	- 1	18,5	+ 3
24	17,6	- 1	17,6	- 1	17,6	- 1	17,8	- 2	18,0	+ 1
25	16,9	+ 2	17,0	+ 1	17,0	+ 1	17,6	- 3	17,6	- 1
26	16,4	+ 1	16,5	+ 1	16,5	0	17,1	0	17,2	+ 3
27	16,0	0	16,1	0	16,0	0	16,3	+ 4	16,4	0
28	15,8	- 2	15,8	- 1	15,7	- 2	16,0	- 1	16,0	- 2
29	15,4	0	15,5	- 1	15,4	- 2	15,8	- 2	15,8	0

(Продолжение таблицы 2)

i	1 прием		2 прием		3 прием		4 прием		5 прием	
	Θ _{набл.}	ε	Θ _{набл.}	ε	Θ _{набл.}	ε	Θ _{набл.}	ε	Θ _{набл.}	ε
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
30	14,7	+ 3	14,9	+ 2	14,7	+ 2	15,5	- 1	15,4	+ 2
31	14,2	+ 1	14,3	+ 2	14,3	0	14,9	+ 2	14,8	0
32	13,9	- 1	14,1	- 2	13,9	0	14,3	+ 2	14,4	0
33	13,7	- 2	13,8	- 1	13,8	- 3	14,0	- 1	14,0	- 2
34	13,4	- 1	13,4	0	13,6	- 2	13,8	- 2	13,8	- 1
35	13,0	0	13,0	0	13,0	+ 2	13,5	- 1	13,5	- 2
36	12,6	+ 1	12,5	+ 2	12,6	0	13,2	0	13,3	+ 1
37	12,2	+ 1	12,3	- 1	12,2	0	12,6	+ 3	12,8	+ 1
38	11,9	0	12,1	- 1	12,0	- 1	12,2	+ 1	12,3	0
39	11,8	- 2	11,8	0	11,8	- 1	12,0	- 1	11,9	- 3
40	11,6	- 1	11,5	0	11,6	- 1	11,8	- 1	11,8	- 1
41	11,2	+ 1	11,0	+ 2	11,1	+ 2	11,6	- 1	11,6	0
42	10,6	+ 3	10,8	- 1	10,8	0	11,3	0	11,3	+ 2
43	10,4	- 1	10,4	+ 1	10,4	+ 2	10,7	+ 3	10,9	+ 2
44	10,2	- 1	10,2	- 1	10,2	0	10,5	- 1	10,5	0
45	10,0	- 1	10,0	- 1	10,0	0	10,2	0	10,3	0
46	9,9	- 2	9,9	- 2	9,8	0	10,0	- 1	10,1	- 1
47	9,8	- 2	9,6	0	9,8	- 2	9,8	- 2	10,0	0
48	9,6	0	9,3	+ 1	9,6	0	9,7	0	9,8	- 1
49	9,3	+ 1	9,1	0	9,4	0	9,3	+ 2	9,7	0
50	8,9	+ 2	9,0	- 1	8,9	+ 3	9,1	0	9,5	+ 2
51	8,6	+0,1	8,7	+ 1	8,6	+ 1	8,8	+ 1	9,1	+ 2
52	8,4	0	8,5	0	8,3	+ 1	8,4	+ 2	8,7	0
53	8,2	0	8,2	+ 1	8,2	- 1	8,2	0	8,5	0
54	8,1	-0,1	8,1	- 1	8,1	- 1	8,0	0	8,3	0
55	7,9	0	8,0	- 1	7,9	0	8,0	- 1	8,1	- 2
56	7,8	- 1	7,9	- 1	7,9	- 2	7,9	0	8,1	0
57	7,7	0	7,7	+ 1	7,7	0	7,8	0	7,9	0
58	7,5	+ 1	7,6	0	7,5	0	7,6	+ 1	7,7	- 1
59	7,3	+ 1	7,4	+ 1	7,3	0	7,5	0	7,6	- 2
60	6,9	+ 3	7,3	+ 2	7,0	+ 1	7,4	0	7,6	0

нием способа наименьших квадратов. В самом деле, разность двух последовательных амплитуд $\Delta\theta_{i+1} = \theta_{i+1} - \theta_i$ по (II, 7) выражается так:

$$\Delta\theta_{i+1} = a\theta_i + b\theta_i^2. \quad (\text{II}, 17)$$

Написав это равенство для всех значений i , соответствующих приему наблюдений, будем иметь весьма простую систему условных уравнений, из которой по обычным правилам легко найдутся значения коэффициентов a и b . Величина и распределение знаков остаточных погрешностей ϵ явятся критериями точности формулы (II, 7) и наших наблюдений.

Не останавливаясь на описании стандартной техники вычислений, приведем результаты для части приемов, отнаблюденных в Москве по маятнику № 107.

В табл. 1 даны наблюдаемые значения амплитуд $\theta_{\text{набл.}}$ в соответствии с их номером i , вычисленные значения амплитуд $\theta_{\text{выч.}}$ и разности $\epsilon = \theta_{\text{набл.}} - \theta_{\text{выч.}}$. $\theta_{\text{выч.}}$ выводилось при помощи начальной амплитуды θ_0 и коэффициентов a и b , найденных только из данной системы, т. е. из одного приема, состоявшего из 60 отсчитанных полных амплитуд.

Наблюдения, произведенные в Ашхабаде, дают совершенно аналогичную картину, и для них мы приводим лишь наблюдаемые значения амплитуд и остаточные погрешности ϵ (табл. 2).

Таблицы 1 и 2 показывают прекрасную сходимость наблюдаемых и вычисленных амплитуд. Из таблиц 1 и 2 следует, что средняя ошибка единицы веса равна $\pm 0,15$, следовательно, ошибка одного отсчета приблизительно равна $\pm 0,1$ деления шкалы; заметное иногда систематическое распределение знаков ϵ объясняется влиянием разных толчков и сотрясений, испытываемых маятником в процессе наблюдений.

Уже на графиках амплитуд (чертежи 1, 2, 3) видны возрастающие к концу наблюдений волны, обусловленные подобными толчками. Вероятно подобные же волны и заставили Хольвека, Леже и Нерлунда отказаться от мысли выявить закон затухания амплитуд упругих маятников. Но таблицы 1 и 2 показывают, что формула (II, 7) отражает основной закон поведения амплитуд с точностью, превосходящей практические потребности. Что же касается волн, возмущающих колебания маятника, то они не в состоянии в нормальных условиях исказить основной закон поведения амплитуд. Мы производили многочисленные определения коэффициентов затухания различных упругих маятников и всегда получали картину такую же, как только что приведенную. Эти материалы мы не приводим в целях экономии места.

Перейдем к рассмотрению сводных результатов определения коэффициентов a и b маятника № 107 в Ашхабаде и Москве. Они даны в таблицах 3 и 4, где приводятся значения коэффициентов и их ошибок

Таблица 3

Сводка результатов определения коэффициентов a и b в Ашхабаде (маятник № 107)

Дата	Номер приема	a	b	Ошибка единицы веса μ
14.II 1944 г.	1	$-0,01903 \pm 0,00309$	$-0,000520 \pm 0,000113$	$\pm 0,15$
	2	1877 304	518 112	15
	3	2287 402	318 150	20
	4	1843 416	501 152	20
	5	2106 418	387 147	21
Среднее . .		$-0,02003 \pm 0,00084$	$-0,000449 \pm 0,000041$	$\pm 0,18$

Таблица 4

Сводка результатов определения коэффициентов a и b в Москве (маятник № 107)

Дата	Номер приема	a		b		μ
2.VI 1945 г.	1	$-0,02458 \pm 0,00231$		$-0,000555 \pm 0,00083$		$\pm 0,11$
	2	2616	307	470	110	14
	3	2550	223	494	80	11
	4	2507	217	518	78	13
	5	2506	270	515	198	13
Среднее . .		$-0,02527 \pm 0,00026$		$-0,000511 \pm 0,000014$		$\pm 0,12$

из каждой системы условных уравнений, возникающей при наблюдении одного приема; кроме того, дается величина ошибки единицы веса μ , характеризующая точность наблюдений.

Пользуясь вышеприведенными сводками, следует иметь в виду, что при составлении условных уравнений величина амплитуды для простоты вычислений выражалась прямо в делениях шкалы, а не переводилась в единицы отвлеченной меры. Коэффициент a , конечно, не зависит от системы единиц, в которых выражается амплитуда, а вместо коэффициента b получилась величина $\frac{b}{l}$, где l — длина маятника; поэтому, чтобы

получить b в «абсолютной» мере, надо соответствующие величины, помещенные в таблицах, умножить на длину маятника, выраженную в делениях шкалы ($l \cong 2000$), однако в этом нет особой необходимости, так как во все последующие формулы b всегда входит в комбинации со множителем Θ , а их произведение также не зависит от единиц, в которых задается амплитуда.

Сравнительно большие ошибки коэффициентов, как обычно, характеризуют только некоторую трудность их разделения. Между величинами a и b и их ошибками существует связь, обусловленная их совместным определением, которая компенсирует колебания величины a за счет изменений b и наоборот. Достаточно взглянуть на результаты как ашхабадских, так и московских определений, чтобы убедиться в том, что большему значению a всегда соответствует меньшее значение b и наоборот. Поэтому величина ошибок не имеет реального значения для вычислений с получаемыми коэффициентами. Ниже мы приведем пример, достаточно ярко характеризующий, насколько велика степень компенсации ошибок коэффициентов.

Для Москвы и Ашхабада помещенные в сводках ошибки средних значений a и b вычислены по уклонениям отдельных значений от среднего. Эти ошибки значительно меньше величин, которые можно было бы ожидать по точности определения отдельных значений коэффициентов. Особенно удачными получились наблюдения в Москве, где и точность определения отдельных значений коэффициентов также оказалась более высокой, чем в Ашхабаде.

Убедившись в том, что наблюдения прекрасно подтверждают наше исходное соотношение (II, 7), проверим точность формул (II, 11) и (II, 15), представляющих два варианта одной и той же формулы. Чтобы снова обеспечить наименее трудоемкий и достаточно убедительный метод проверки, предварительно выведем вспомогательное выражение для величины среднего из квадратов амплитуд некоторого количества колебаний маятника. Это выражение, которое сыграт важную роль

в дальнейшем, значительно облегчит здесь вычисления; одновременно получим и формулу для средней амплитуды.

Пусть маятник, пущенный с начальной амплитудой Θ_0 , сделал, кроме начального колебания, которое будем считать нулевым, еще i колебаний $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_i$. Обозначим:

$$\Theta_{\text{ср.}} = \frac{1}{i} \sum_0^i \Theta_i; \quad \Theta_{\text{ср.}}^{(2)} = \frac{1}{i} \sum_0^i \Theta_i^2.$$

Кроме того, обозначим:

$$\alpha = 1 + \frac{b}{a} \Theta_0; \quad \beta = -\frac{b}{a} \Theta_0.$$

Переписав тогда (II, 11) в виде:

$$\Theta_i = \Theta_0 \frac{e^{ia}}{\alpha + \beta e^{ia}},$$

можем положить:

$$\Theta_{\text{ср.}} = \frac{\Theta_0}{i} \int_0^i \frac{e^{ia}}{\alpha + \beta e^{ia}} di;$$

$$\Theta_{\text{ср.}}^{(2)} = \frac{\Theta_0^2}{i} \int_0^i \frac{e^{2ia}}{(\alpha + \beta e^{ia})^2} di.$$

Интегрируя с помощью подстановки:

$$x = e^{ai}, \quad dx = ae^{ai} di$$

и возвращаясь к основным переменным, получим:

$$\Theta_{\text{ср.}} = \frac{i}{ib} \ln A; \quad \Theta_{\text{ср.}}^{(2)} = \frac{a}{ib^2} \left[\ln A + \left(1 + \frac{b}{a} \Theta_0\right) \frac{1-A}{A} \right], \quad (\text{II, 18})$$

где через A обозначено:

$$A = 1 + \frac{b}{a} (1 - e^{ai}) \Theta_0. \quad (\text{II, 19})$$

Сопоставим теперь величины, вычисленные по формулам (II, 18) и (II, 19), с данными непосредственных наблюдений.

Для примера возьмем 5 приемов наблюдений маятника № 107 в Ашхабаде, по которым были вычислены коэффициенты, приведенные в таблице 3. Наблюденные амплитуды всех приемов даны в табл. 2. По этим данным были подсчитаны средние амплитуды и средние из квадратов амплитуд для $i = 20, 30, 40, 50, 60$ по всем приемам. Сравнение их с вычисленными по нашим формулам дается в таблицах 5 и 6. Для каждого приема в формулы подставлялись a и b , вычисленные по данным этого же приема.

Применяемый нами способ проверки формул по средним имеет то преимущество, что при образовании средних значительно ослабляется влияние ошибок наблюдаемых амплитуд, и мы можем наиболее наглядно представить себе точность формул.

По числам, приведенным в таблицах, заключаем, что хотя формулы дают несколько преувеличенный результат, их точность можно считать более чем обеспечивающей практические потребности.

Вычисления по другим маятникам дают совершенно аналогичную картину.

Итак, формулы (II, 18) и (II, 19), а, следовательно, и (II, 11) и (II, 15) можно считать проверенными на опыте и пригодными для практической работы. Пользование всеми ими требует знания коэффициентов a и b .

Таблица 5

Сравнение наблюдаемых и вычисленных значений $\theta_{\text{ср.}}$

	$i = 20$			$i = 30$			$i = 40$			$i = 50$			$i = 60$		
	$\theta_{\text{ср.}}^{\text{набл.}}$	$\theta_{\text{ср.}}^{\text{вычисл.}}$	Разность												
1	27,8	27,9	-0,1	24,2	24,4	-0,2	21,4	21,6	-0,2	19,2	19,3	-0,1	17,3	17,4	-0,1
2	27,7	27,8	- 1	24,2	24,3	- 1	21,5	21,6	- 1	19,2	19,3	- 1	17,4	17,5	- 1
3	28,0	28,1	- 1	24,4	24,6	- 2	21,6	21,8	- 2	19,3	19,5	- 2	17,4	17,5	- 1
4	27,9	28,0	- 1	24,4	24,6	- 2	21,7	21,8	- 1	19,5	19,6	- 1	17,6	17,7	- 1
5	28,9	29,0	- 1	25,2	25,4	- 2	22,3	22,5	- 2	20,0	20,2	- 2	18,0	18,2	- 2

Таблица 6

Сравнение наблюдаемых и вычисленных значений $\theta_{\text{ср.}}^{(*)}$

	$i = 20$			$i = 30$			$i = 40$			$i = 50$			$i = 60$		
	$\theta_{\text{ср.}}^{(*)\text{набл.}}$	$\theta_{\text{ср.}}^{(*)\text{вычисл.}}$	Разность												
1	804	807	-3	636	638	-2	522	523	-1	439	440	-1	377	378	-1
2	801	803	-2	635	636	-1	521	522	-1	438	439	-1	377	377	0
3	813	817	-4	643	646	-3	527	530	-3	443	444	-1	381	381	0
4	811	814	-3	645	647	-2	531	531	0	447	448	-1	384	385	-1
5	871	873	-2	688	693	-5	564	568	-4	474	478	-4	408	410	-2

Вернемся к вопросу об исключении этих коэффициентов. Если, кроме начальной амплитуды Θ_0 , нам известны еще два значения амплитуд Θ_i и Θ_j , в одном приеме колебаний маятника, то, теоретически, применение формулы (II, 11) позволяет выразить a и b через Θ_0 , Θ_i и Θ_j . Но в общем случае решение этой задачи сопряжено с большими трудностями, так как неизвестные входят в (II, 11) и в показатели степени и как множители. Но в одном частном случае задача решается весьма просто. Речь идет о том случае, когда отсчеты вспомогательных амплитуд делаются через равное число колебаний маятника, т. е. когда $j = 2i$. Тогда из (II, 11) получим:

$$\Theta_i = \Theta_0 \frac{e^{ia}}{1 + \frac{b}{a}(1 - e^{ia})\Theta_0}; \quad \Theta_{2i} = \Theta_i \frac{e^{ia}}{1 + \frac{b}{a}(1 - e^{ia})\Theta_i}.$$

Из этих двух уравнений легко определяются e^{ia} и $\frac{b}{a}$:

$$e^{ia} = \frac{\Theta_i(1 + \frac{b}{a}\Theta_0)}{\Theta_0(1 + \frac{b}{a}\Theta_i)} = \frac{\Theta_{2i}(1 + \frac{b}{a}\Theta_i)}{\Theta_i(1 + \frac{b}{a}\Theta_{2i})},$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\Theta_i^2 - \Theta_0\Theta_{2i}}{2\Theta_0\Theta_i\Theta_{2i} - \Theta_i^2\Theta_0 - \Theta_i^2\Theta_{2i}},$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{i} \ln \frac{\Theta_{2i}(1 + \frac{b}{a}\Theta_i)}{\Theta_i(1 + \frac{b}{a}\Theta_{2i})}, \\ b &= \frac{\Theta_i^2 - \Theta_0\Theta_{2i}}{i(2\Theta_0\Theta_i\Theta_{2i} - \Theta_i^2\Theta_0 - \Theta_i^2\Theta_{2i})} \ln \frac{\Theta_{2i}(1 + \frac{b}{a}\Theta_i)}{\Theta_i(1 + \frac{b}{a}\Theta_{2i})}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}, 20)$$

Определяя a и b только по трем отсчетам амплитуд, мы получим их, понятно, с довольно большой ошибкой. Приведем для примера результат определения a и b из трех последних приемов ашхабадских наблюдений маятника № 107 (см. таблицу 2).

При вычислении было принято $i = 29$; $j = 58$, так что из таблицы 2 получаем:

№ приема	Θ_0	Θ_i	Θ_j
3	38,3	15,4	7,5
4	38,7	15,8	7,6
5	39,9	15,8	7,7

Найденные по формулам (II, 20) значения a и b сопоставим с данными точных вычислений, приведенными в табл. 3.

№ приема	a		b	
	из таблицы 3	по формуле (II,20)	из таблицы 3	по формуле (II,20)
	0,0	0,0	0,000	0,000
3	2287	1983	318	468
4	1843	2071	501	407
5	2106	1913	387	507

Расхождения получаются довольно большими, но компенсация ошибок величин a и b , о которой мы говорили выше, такова, что если мы с полученными приближенными коэффициентами a и b вычислим $\Theta_{cp.}^{(i)}$ для некоторого значения i , то окажется, что оно весьма мало отличается от точной величины $\Theta_{cp.}^{(i)}$. Для иллюстрации сказанного приведем результат вычисления $\Theta_{cp.}^{(i)}$ для тех же трех приемов на основании приближенных коэффициентов, помещенных в последней табличке; параллельно дадим наблюдаемую величину $\Theta_{cp.}^{(i)}$ и результат, вычисленный с точными коэффициентами. Если принять $i = 59$, то получим:

№ приема	$\Theta_{cp.}^{(i)}$		
	наблюдаемое	вычисленное с точными коэффициентами	вычисленное с приближенными коэффициентами
3	386	387	378
4	390	391	390
5	413	416	402

Приближенные коэффициенты дают вполне удовлетворительное значение $\Theta_{cp.}^{(i)}$, относительная ошибка которого имеет порядок 2—3%.

Главным выводом из приведенного материала является то, что мы имеем возможность образовать $\Theta_{cp.}^{(i)}$ с достаточной точностью только по трем отсчетам амплитуды, не прибегая к громоздким способам определения коэффициентов a и b и к сложным исследованиям зависимости последних от различных внешних факторов и времени.

Так или иначе, в результате вышеприведенных соображений, проверенных опытом, мы теперь имеем средства, позволяющие учитывать затухание упругих маятников для вывода поправки за амплитуду или для иных целей. Нам могут выставить возражения в отношении сложности полученных формул, приводящих к довольно громоздким вычислениям. Может возникнуть вопрос о том, стоит ли вообще в данном случае пользоваться формулами, выведенными теоретически, и не дает ли подбор надлежащей эмпирической формулы более удовлетворительный результат с точки зрения простоты вычислений. По этому поводу мы должны заметить, что для описания сложных явлений весьма трудно подобрать простые эмпирические формулы; кроме того, всякая эмпирическая формула связана с определением и исследованием свойств констант, физический характер которых всегда неизвестен, а потому применение такой формулы может еще больше усложнить проблему, ибо исключение констант далеко не всегда удается осуществить.

Например, если бы мы попытались описать закон затухания упругих маятников подбором парабол различного порядка, то оказалось бы необходимым ввести в формулы так много членов и констант, что этот путь практически стал бы совершенно непригодным. Может быть проще и точнее любой другой формулы, эмпирический закон затухания амплитуд дается следующей простой зависимостью:

$$\Theta_i = \Theta_0 e^{-\alpha i + \beta i^2},$$

где α и β — некоторые положительные константы, легко определяемые из наблюдений. Однако уже вывод $\Theta_{cp.}^{(i)}$ по этому простому закону заставляет воспользоваться методами численного интегрирования, таблицами или номограммами и, следовательно, не дает никакого преимущества перед нашими теоретическими формулами, применение которых также очень упростится, если воспользоваться такими вспомогательными средствами.

Не занимаясь дальнейшим упрощением полученных выше формул или разработкой всякого рода таблиц и номограмм, мы используем эти формулы для решения более важного, принципиально и практически, вопроса: насколько законна практика игнорирования поправки за амплитуду при измерении силы тяжести упрягими маятниками.

Мы уже указывали, что считаем имеющиеся выводы формул для поправки за амплитуду недостаточно точными. Дело в том, что Хольбек и Леже, а вместе с ними и другие авторы (кроме Артемьева) при этом выводе учитывали лишь тот факт, что момент силы тяжести, приложенный к маятнику, не пропорционален углу отклонения последнего, и не принимали во внимание, что и упругая сила также не пропорциональна этому углу. Вторая причина в свою очередь должна вызывать неизохронность колебаний маятника и, следовательно, изменить вид формулы для поправки за амплитуду.

Имея в виду исключительно большие трудности теоретического изучения вопроса, мы считаем целесообразным найти эмпирическое решение задачи в смысле определения зависимости поправки за амплитуду от силы тяжести. Что касается вида функции, связывающей период маятника с самой амплитудой, то мы считаем в первом приближении правильным единодушное мнение всех исследователей, сводящееся к тому, что поправка за амплитуду должна быть пропорциональна квадрату амплитуды. Уже из соображений симметрии нельзя допустить существования зависимости, в которой основную роль играли бы члены, пропорциональные первой (и вообще нечетной) степени амплитуды. Мы особенно высоко ценим в этом отношении мнение Артемьева [1, 2], совпадающее с общим мнением, но, к сожалению, не подтвержденное опубликованием соображений, обосновывающих его.

Подход к вопросу со стороны Хольбека, Леже и Нерлунда отличается некоторым своеобразием. Они не сомневаются в том, что поправка за амплитуду в такой слабой степени зависит от силы тяжести, что, задавая амплитуду постоянной, можно поправкой пренебречь. Изучение влияния амплитуды их интересовало лишь с точки зрения сравнения периодов маятника, измеренных при различном числе колебаний в приеме. В этих целях они выводят эмпирические коэффициенты, позволяющие редуцировать периоды, измеренные при 100 и 75 колебаниях, к периодам, измеренным при 50 колебаниях. Такие коэффициенты, как оказывается, почти не зависят от силы тяжести. Этим и ограничиваются, в сущности, опубликованные исследования, связанные с поправкой за амплитуду.

Мы считаем безусловно необходимым дополнить эти исследования специальными экспериментальным определением величины поправки за амплитуду в пунктах со значительно разнящейся силой тяжести.

Допустим, что период маятника пропорционален квадрату амплитуды, т. е. что можно написать:

$$S = S_0 + \mu \Theta^2,$$

где S — период маятника при амплитуде Θ ; S_0 — период маятника при бесконечно малой амплитуде; μ — искомый коэффициент пропорциональности.

Под амплитудой Θ обычно подразумевают предельный угол отклонения маятника от положения равновесия, мы же понимаем ее в том смысле, в каком она определялась выше. Очевидно, что в данном случае это безразлично.

Если маятник сделал n колебаний, то мы говорим о среднем периоде $S_{\text{ср.}}$, который, очевидно, будет пропорционален среднему из квадратов n соответствующих амплитуд

$$S_{\text{ср.}} = S_0 + \mu \Theta_{\text{ср.}}^2. \quad (11,21)$$

Измерив величины $S_{\text{ср.}}$ для различных значений $\Theta_{\text{ср.}}^{(n)}$, мы получим систему условных уравнений для определения S_0 и μ .

Исследование было проведено с маятником № 107 в Ашхабаде и в Москве. Порядок наблюдений был таков: после отсчета начальной амплитуды сейчас же начинались наблюдения 6 прохождений маятника через нить по обычным правилам. Затем делался новый отсчет амплитуды и наблюдалось еще 6 прохождений и т. д. до тех пор, пока еще можно было фиксировать прохождения маятника через нить. В Ашхабаде, где затухание было слабым, удавалось наблюдать 10 серий прохождений маятника; в Москве затухание настолько увеличилось, что удалось фиксировать только 6 серий прохождений. От одной серии отсчетов до другой маятник совершал всегда 11 колебаний (полных). Таких приемов было наблюдепо по 10 в Ашхабаде и Москве, причем наблюдения делались в те же ночи, когда определялись коэффициенты затухания. В отношении температурного режима и прочих условий наблюдений были приняты особые меры предосторожности. В Ашхабаде, например, удалось все приемы отнаблюдать при температуре, колебавшейся в пределах лишь $\pm 0^{\circ},1$.

В Ашхабаде от отсчета начальной амплитуды до фиксирования первого прохождения маятник совершал одно полное колебание, а в Москве — два колебания.

Таким образом запись в журнале наблюдений имела следующий вид:

$$\begin{array}{r}
 \Theta_0 \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \\
 \quad T_{1,1}; T_{1,2}; T_{1,3}; T_{1,4}; T_{1,5}; T_{1,6} \\
 \Theta_1 \quad T_{2,1}; T_{2,2}; T_{2,3}; T_{2,4}; T_{2,5}; T_{2,6} \\
 \Theta_2 \quad T_{3,1}; T_{3,2}; T_{3,3}; T_{3,4}; T_{3,5}; T_{3,6} \\
 \Theta_3 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \Theta_{n-1} \\
 \quad T_{n,1}; T_{n,2}; T_{n,3}; T_{n,4}; T_{n,5}; T_{n,6} \\
 \Theta_n
 \end{array}$$

Здесь Θ обозначает отсчет амплитуды, а $T_{k,m}$ обозначает наблюденный момент прохождения маятника через нить в серии k (номер строки) под номером m (номер столбца). Стрелки показывают направление движения маятника в моменты отсчетов, фиксировавшихся в данном столбце.

Каждый столбец дает нам возможность составить разности $T_{2,m}-T_{1,m}; T_{3,m}-T_{1,m}; \dots; T_{n,m}-T_{1,m}$, определяющие продолжительность 11, 22, 33...11 ($n-1$) колебаний маятника и соответствующие различным средним амплитудам. Следовательно, каждый прием дает возможность составить 6 ($n-1$) достаточно точных условных уравнений или 54 уравнения для Ашхабада и 30 уравнений для Москвы. Так как отсчеты делались через каждые 8—9 секунд, то времени для дополнительных отсчетов амплитуды не оставалось, но в них нет, конечно, и нужды. Даже производившиеся отсчеты Θ_m имеют смысл лишь для контроля отсчета начальной амплитуды, так как величины $\Theta_{\text{ср.}}^{(n)}$ мы можем получить и без них. В данном случае, когда мы должны подсчитать $\Theta_{\text{ср.}}^{(n)}$ с максимальной точностью, нецелесообразно выводить коэффициенты a и b по немногочисленным отсчетам амплитуды Θ ; это лишь усложнит вычисления, понизив их точность. Поэтому мы воспользуемся здесь средними коэффициентами таблиц 3 и 4.

Вычисление $\Theta_{\text{ср.}}^{(i)}$ затруднено тем, что отсчет начальной амплитуды не совпадает с моментами отсчетов $T_{1,m}$. Быстрое затухание амплитуд не позволяет прибегать к каким-либо осереднениям и интерполяциям в пределах одного приема, иначе мы рискуем потерять как раз то, что ищем: влияние амплитуды на период. Поэтому для получения начальных амплитуд, соответствующих каждому столбцу или моментам $T_{1,m}$, воспользуемся известным значением начальной амплитуды Θ_0 и по формуле (15) вычислим $\Theta_{0,1}, \Theta_{0,2}, \dots, \Theta_{0,8}$, положив в ней i последовательно равным для Ашхабада $i = 1,0; 2,5; 4,0; 5,5; 7,0; 8,5$ и для Москвы $i = 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5$. (Дробные числа получаются вследствие того, что значения амплитуд соответствуют противоположным направлениям движения маятника.)

Имея теперь начальные амплитуды для каждого столбца, вычислим $\Theta_{\text{ср.}}^{(i)}$ для каждого условного уравнения по формулам (18) и (19), положив в них i последовательно равным: для Ашхабада $i = 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ и для Москвы $i = 11, 22, 33, 44, 55$. Составив далее разности

$$T_{2,m} - T_{1,m}; T_{3,m} - T_{1,m}; \dots; T_{r,m} - T_{1,m} \quad (\text{II}, 22)$$

по всем столбцам, будем иметь все данные для составления условных уравнений.

Однако если мы с такой строгостью будем обрабатывать все наблюдаемые в Москве и Ашхабаде 20 приемов, то получим 840 условных (неравноточных притом) уравнений; кроме того, нам придется 840 раз применять формулы (II, 18) и (II, 19) и 120 раз формулу (II, 15), не говоря о поправках за температуру и других вычислениях.

Такой труд является излишним, ибо без ущерба для точности можно ввести одно очень существенное упрощение, основанное на том, что для всех приемов как ашхабадских, так и московских маятник запускался всегда при почти одинаковой на пункте начальной амплитуде. Отсюда следует, что мы можем осереднить данные наблюдений по всем приемам на пункте и составить одну осередненную систему условных уравнений для каждого пункта, уменьшив тем самым объем вычислений в 10 раз.

Обработка была проведена следующим образом: по каждому пункту в отдельности были получены для всех столбцов разности (II, 22). Эти разности (в секундах) для Москвы даны в таблице 7. Вычисленные по ним средние разности являются свободными членами наших условных уравнений и приведены в той же таблице. В целях экономии места мы не приводим материалов по Ашхабаду, но в приложении дан весь материал наблюдений по Ашхабаду и Москве (приложения 1 и 2).

Свободные члены надо исправить за температуру. Для этого мы пользовались имеющимися таблицами поправок за температуру (см. приложение 3), составленными, однако, не для периода, а для величины S , так что пришлось перечислить их на период при помощи

таблиц $\frac{k}{(50 S)^2}$ (см. приложение 4), но, учитывая, что в данном случае

мы имеем дело с иным числом колебаний. Так как отсчет температуры делался в каждом приеме только дважды — в начале и конце наблюдений, — то мы рассчитывали температуру для каждого интервала, исходя из предположения, что температура изменяется между отсчетами термометра пропорционально времени. Такое допущение было вполне законным по условиям температурного режима. После получения средних температур, соответствующих каждой разности $T_{k,m} - T_{1,m}$, последние были осереднены по всем 10 приемам для каждого столбца.

Разности $T_{k,m} - T_{1,m}$ и их средние для Москвы

П р и е м ы										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Среднее
I столбец										
71,0	70,8	70,8	70,8	70,7	70,8	70,6	70,8	70,4	70,9	70,76
141,3	141,1	141,2	141,4	141,3	141,3	141,1	141,6	141,1	141,4	141,28
211,8	211,6	211,4	211,8	211,7	211,8	211,5	211,9	211,5	211,9	211,69
282,1	281,9	281,9	282,0	282,1	282,0	282,0	282,2	282,0	282,3	282,05
352,4	352,1	352,1	352,5	352,4	352,3	352,3	352,7	352,3	352,5	352,36
II столбец										
70,3	70,8	70,4	70,7	70,7	70,6	70,8	70,8	70,6	70,8	70,65
141,0	141,2	141,0	141,1	141,1	141,2	141,5	141,2	141,2	141,2	141,17
211,4	211,4	211,5	211,7	211,7	211,5	211,8	211,8	211,8	211,6	211,62
281,5	281,8	281,5	282,0	282,0	282,1	282,1	282,0	282,1	282,2	281,93
351,9	351,9	352,2	352,2	352,2	352,3	352,5	352,3	352,6	352,3	352,24
III столбец										
70,8	70,3	70,7	70,5	70,4	70,7	70,7	70,5	70,6	70,8	70,60
141,4	140,9	140,9	141,1	141,1	141,2	141,0	141,2	141,1	141,2	141,11
211,7	211,1	211,5	211,4	211,3	211,6	211,6	211,4	211,5	211,8	211,49
281,9	281,4	281,6	282,0	282,0	282,0	281,8	281,9	282,0	282,0	281,86
352,1	351,9	351,9	352,1	352,1	352,1	352,1	352,1	352,2	352,7	352,13
IV столбец										
70,5	70,6	70,6	70,9	70,7	70,6	70,5	70,5	70,3	70,6	70,58
140,8	141,0	141,0	141,5	141,0	141,2	141,0	141,1	141,0	141,1	141,07
211,1	211,4	211,2	211,7	211,6	211,3	211,4	211,5	211,3	211,4	211,39
281,6	281,4	281,8	281,9	282,0	281,9	282,0	281,7	281,5	281,8	281,76
351,7	351,9	352,0	352,2	352,0	352,2	352,1	352,2	352,1	352,1	352,05
V столбец										
70,4	70,7	70,8	70,6	70,3	70,7	70,7	70,7	70,7	70,7	70,63
141,0	140,9	141,2	141,0	141,0	141,3	141,0	140,9	141,0	141,4	141,07
211,2	211,2	211,4	211,5	211,2	211,7	211,6	211,4	211,5	211,7	211,44
281,4	281,5	281,8	281,7	281,9	281,8	281,9	281,8	281,9	282,0	281,77
351,6	351,9	352,0	351,8	352,0	352,4	352,1	352,0	352,1	352,4	352,03
VI столбец										
70,6	70,4	70,6	70,4	70,4	70,7	70,6	70,5	70,4	70,7	70,53
141,0	140,7	140,9	140,9	141,0	141,0	141,1	141,0	141,0	141,2	140,98
211,1	211,1	211,5	211,3	211,3	211,7	211,4	211,3	211,3	211,7	211,37
281,5	281,4	282,0	281,4	281,5	281,8	281,9	281,7	281,9	281,8	281,69
351,7	351,6	351,7	352,0	351,8	352,1	352,0	351,9	352,0	352,3	351,91

В табл. 8 даны величины свободных членов, затем соответствующие им средние температуры и, наконец, свободные члены, приведенные к температуре $t_0 = 15^\circ$.

Таблица 8

Номер столбца	Свободные члены (в секундах времени)	Средняя температура	Исправленные значения свободных членов
I	70,76	17°,71	70,41
	141,28	,71	140,58
	211,69	,72	210,64
	282,05	,72	280,65
	352,36	,73	350,61
II	70,65	,71	70,30
	141,17	,71	140,47
	211,62	,72	210,57
	281,93	,72	280,54
	352,24	,73	350,49
III	70,60	,71	70,25
	141,11	,72	140,41
	211,49	,72	210,45
	281,86	,72	280,46
	352,13	,73	350,39
IV	70,58	,72	70,23
	141,07	,72	140,37
	211,39	,72	210,35
	281,76	,73	280,36
	325,05	,73	350,31
V	70,63	,72	70,28
	141,07	,72	140,37
	211,44	,72	210,39
	281,77	,73	280,37
	352,03	,74	350,28
VI	70,53	,72	70,18
	140,98	,72	140,29
	211,37	,72	210,33
	281,69	,73	280,29
	351,91	,74	350,16

Теперь, когда свободные члены подготовлены, вычислим коэффициенты при неизвестном μ , то-есть величины $(\Theta_{cp.})^{(9)}$. Для этой цели осередним все произведенные отсчеты амплитуды по приемам.

В таблице 9 приведены отсчеты для всех амплитуд по всем приемам и их средние для Москвы.

Таблица 9

№ приема Θ_i											$\Theta_{cp.}$	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Θ_0	39,5	39,6	39,6	40,0	39,8	39,7	39,7	39,9	39,9	39,9	39,9	39,76
Θ_1	25,8	25,7	25,9	26,0	25,9	25,9	25,9	25,9	25,9	25,9	25,9	25,88
Θ_2	17,1	17,0	17,3	17,4	17,2	17,3	17,0	17,4	17,4	17,3	17,3	17,24
Θ_3	11,8	11,9	11,9	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	11,96
Θ_4	8,2	8,3	8,4	8,4	8,3	8,3	8,3	8,3	8,3	8,4	8,4	8,32
Θ_5	6,0	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,09
Θ_6	4,4	4,4	4,5	4,4	4,4	4,5	4,3	4,5	4,5	4,5	4,5	4,44

Сходимость отсчетов указывает, насколько законно осереднение амплитуд, и убеждает в том, что во время наблюдений не возникало заметных посторонних влияний, которые искажали бы результат.

По осередненному значению начальной амплитуды $\Theta_0 = 39,76$, согласно сказанному выше, вычислим начальные амплитуды, соответствующие каждому столбцу осередненного приема. Получим

$$\begin{aligned} \Theta_{0,1} &= 38,01; \Theta_{0,2} = 35,58; \Theta_{0,3} = 33,36; \Theta_{0,4} = 31,34; \\ \Theta_{0,5} &= 29,48; \Theta_{0,6} = 27,76. \end{aligned}$$

Для контроля вычислим еще амплитуду 10-го колебания, т. е. ту, которой в таблице 9 соответствует средняя величина 25,88. Задаваясь $\Theta_0 = 39,76$, $i = 10$, получим из (II, 15): $\Theta_{1,0} = 26,19$, что удовлетворительно согласуется с наблюдением.

Применяя формулы (II, 18) и (II, 19), найдем следующую таблицу значений $\Theta_{\text{ср.}}^{(2)}$ для всех осередненных условных уравнений (табл. 10).

Таблица 10

Значения $\Theta_{\text{ср.}}^{(2)}$ для осередненных условных уравнений по московским наблюдениям

$k \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	941,7	832,9	738,9	657,4	586,0	523,1
2	673,5	599,0	533,7	476,9	426,8	382,5
3	513,2	457,3	408,6	366,0	328,2	294,9
4	409,0	365,0	326,5	292,9	263,1	236,6
5	337,2	301,2	269,7	242,0	217,5	195,8

Из табл. 8, где приведены свободные члены, следует, что точность последних не одинакова. Примем за единицу вес периода, определяемого по продолжительности 11 колебаний маятника; очевидно, что период маятника, определяемый по продолжительности 22, 33, 44 и 55 колебаний, будет соответственно в 2, 3, 4 и 5 раз точнее. Поэтому естественно приписать соответствующим уравнениям вес, равный 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 . Умножая коэффициенты при S_0 и μ на корень квадратный из веса, получаем следующую систему уравнений для Москвы:

$$\begin{aligned} \text{I столбец} \quad S_0 + 942 \mu - 70,41 &= \varepsilon_{1,1}; \\ 2 S_0 + 1347 \mu - 140,58 &= \varepsilon_{2,1}; \\ 3 S_0 + 1540 \mu - 210,64 &= \varepsilon_{3,1}; \\ 4 S_0 + 1636 \mu - 280,65 &= \varepsilon_{4,1}; \\ 5 S_0 + 1686 \mu - 350,61 &= \varepsilon_{5,1}; \\ \text{II столбец} \quad S_0 + 833 \mu - 70,30 &= \varepsilon_{1,2}; \\ 2 S_0 + 1198 \mu - 140,47 &= \varepsilon_{2,2}; \\ 3 S_0 + 1372 \mu - 210,57 &= \varepsilon_{3,2}; \\ 4 S_0 + 1460 \mu - 280,54 &= \varepsilon_{4,2}; \\ 5 S_0 + 1506 \mu - 350,49 &= \varepsilon_{5,2}; \\ \text{III столбец} \quad S_0 + 739 \mu - 70,25 &= \varepsilon_{1,3}; \\ 2 S_0 + 1067 \mu - 140,41 &= \varepsilon_{2,3}; \\ 3 S_0 + 1226 \mu - 210,45 &= \varepsilon_{3,3}; \\ 4 S_0 + 1306 \mu - 280,46 &= \varepsilon_{4,3}; \\ 5 S_0 + 1348 \mu - 350,39 &= \varepsilon_{5,3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV столбец } S_0 + 657 \mu - 70,23 &= \varepsilon_{1,4}; \\
 2 S_0 + 954 \mu - 140,37 &= \varepsilon_{2,4}; \\
 3 S_0 + 1098 \mu - 210,35 &= \varepsilon_{3,4}; \\
 4 S_0 + 1172 \mu - 280,36 &= \varepsilon_{4,4}; \\
 5 S_0 + 1210 \mu - 350,31 &= \varepsilon_{5,4}; \\
 \text{V столбец } S_0 + 586 \mu - 70,28 &= \varepsilon_{1,5}; \\
 2 S_0 + 854 \mu - 140,37 &= \varepsilon_{2,5}; \\
 3 S_0 + 985 \mu - 210,39 &= \varepsilon_{3,5}; \\
 4 S_0 + 1052 \mu - 280,37 &= \varepsilon_{4,5}; \\
 5 S_0 + 1088 \mu - 350,28 &= \varepsilon_{5,5}; \\
 \text{VI столбец } S_0 + 523 \mu - 70,18 &= \varepsilon_{1,6}; \\
 2 S_0 + 765 \mu - 140,29 &= \varepsilon_{2,6}; \\
 3 S_0 + 885 \mu - 210,33 &= \varepsilon_{3,6}; \\
 4 S_0 + 946 \mu - 280,29 &= \varepsilon_{4,6}; \\
 5 S_0 + 979 \mu - 350,16 &= \varepsilon_{5,6}.
 \end{aligned}$$

Решение этих уравнений было проведено отдельно по каждой группе уравнений, соответствующих столбцам осередненного приема. Таким образом возникло 6 систем уравнений по 5 уравнений каждая. На. описании техники решения по способу наименьших квадратов останавливаться не будем. Результат решения дан в нижеприведенной таблице, составленной по аргументу $11 \cdot S_0$, равному продолжительности 11 колебаний маятника при бесконечно малой амплитуде. Для характеристики точности наблюдений приводим ошибку единицы веса m .

Таблица 11

Результаты вычисления S_0 и μ для Москвы

№ с толбцов	$11 \cdot S_0$	μ	m
1	69,958±0,006	0,000192±0,000014	±0,012
2	,968 21	450 53	42
3	,965 17	439 49	34
4	,952 12	461 38	23
5	,924 9	619 31	17
6	,928 25	574 98	48
Среднее . .	69,949±0,007	0,000506±0,000030	—

Ошибки средних коэффициентов вычислены по уклонениям отдельных значений S_0 и μ от своих средних, без введения каких-либо весов.

Как видим, неизвестные определились весьма уверенно.

Вычисления для Ашхабада проведены были совершенно аналогичным образом и дали (табл. 12):

Таблица 12

Результаты вычисления S_0 и μ для Ашхабада

№ столбцов	$11 \cdot S_0$	μ	m
1	63,224±0,006	0,000366±0,000020	±0,034
2	,197 6	447 18	34
3	,212 7	398 28	38
4	,194 9	459 40	50
5	,202 6	510 30	34
6	,188 9	513 47	49
Среднее . .	63,203±0,006	0,000449±0,000024	—

Поправка за амплитуду для Москвы при 11 колебаниях маятника будет теперь писаться так:

$$\Delta S_{\theta} = -\mu \Theta_{\text{ср.}}^{(1)} = -0,000506 \Theta_{\text{ср.}}^{(1)}, \quad (\text{II},23)$$

а для Ашхабада

$$\Delta S_{\theta} = -\mu \Theta_{\text{ср.}}^{(1)} = -0,000449 \Theta_{\text{ср.}}^{(1)}. \quad (\text{II},24)$$

Разница в силе тяжести для Москвы и Ашхабада равна, примерно, 1700 мгл. Для такого большого интервала изменение коэффициента μ можно считать небольшим, но с изменением силы тяжести изменяется и величина $\Theta_{\text{ср.}}^{(1)}$, если задавать при наблюдениях одну и ту же величину начальной амплитуды.

Вычислим теперь полную величину поправки за амплитуду, например при 55 колебаниях и $\Theta_0 = 38,0$.

Величина $\Theta_{\text{ср.}}^{(1)}$ будет равна:

для Москвы 337,

для Ашхабада 363.

Коэффициенты μ для 55 колебаний равны:

в Москве $\mu = -0,002530$,

в Ашхабаде $\mu = -0,002245$.

Отсюда получаем:

$$\text{для Москвы} \quad \Delta S_{\theta} = -0,002530 \times 337 = -0,85 \text{ сек.}$$

$$\text{для Ашхабада} \quad \Delta S_{\theta} = -0,002245 \times 363 = -0,81 \text{ сек.}$$

Получился результат, который никак нельзя было ожидать заранее: разница в величине поправок за амплитуду для Москвы и Ашхабада составляет только 0,04 сек. или 2—3 мгл в силе тяжести. Оказалось, что увеличение коэффициента μ скомпенсировалось увеличением коэффициента затухания, уменьшающим величину $\Theta_{\text{ср.}}^{(1)}$.

Воспользуемся еще полученным результатом для проверки формулы поправки за амплитуду, выведенной Хольвеком и Леже. Эту формулу можно записать в виде:

$$\Delta S_{\theta} = -S_0 \frac{g}{C-g} \cdot \frac{\Theta^2}{16}.$$

Здесь C — упругая постоянная, g — ускорение силы тяжести.

Если бы мы выражали амплитуды в абсолютной мере, то, если формула Хольвека и Леже достаточно точна, должно было бы быть:

$$\frac{1}{11} \mu = -\frac{1}{16} S_0 \frac{g}{C-g}.$$

К сожалению, точная величина амплитуды в градусной или отвлеченной мере нам неизвестна, но мы можем сравнить отношение коэффициентов μ для Ашхабада и Москвы. Будем сопровождать величины, относящиеся к Москве, индексом M , а величины, относящиеся к Ашхабаду, индексом A . Тогда

$$\frac{\mu_M}{\mu_A} = \frac{11 S_{0M} \frac{g_M}{C-g_M}}{11 S_{0A} \frac{g_A}{C-g_A}}. \quad (\text{II},25)$$

Из таблиц 11 и 12 и материалов наблюдений имеем:

	Для Москвы	Для Ашхабада	Среднее
11 S_0	69,949 сек.	63,203 сек.	—
g	981 549 мгл	979 842 мгл	—
C	989 539 мгл	989 550 мгл	989 544 мгл

Отсюда правая часть (II, 25) дает:

$$\frac{\mu_M}{\mu_A} = 1,34.$$

Взяв же отношение этих коэффициентов из (II, 23) и (II, 24), получим:

$$\frac{\mu_M}{\mu_A} = 1,13.$$

Хотя расхождение получилось достаточно большим, но его все же можно объяснить действием ошибок определения коэффициентов μ_M и μ_A .

Подводя итог проведенному исследованию зависимости поправки за амплитуду от силы тяжести, мы считаем необходимым отметить, что оно является недостаточным. Желательно повторить его, используя несколько маятников и проведя наблюдения на нескольких пунктах в достаточно большом интервале силы тяжести.

В настоящее время нет оснований отказываться от практики игнорирования поправки за амплитуду, если только обеспечивается должное постоянство начальной амплитуды маятника и сохранение принятого стандартного числа колебаний, как это требуется Наставлением.

III. Учет влияния температуры и определение температурных коэффициентов

При большинстве точных физических измерений, в частности при измерении силы тяжести, как правило, очень важно надлежащим образом учесть или устранить влияние изменений температуры на показания прибора. Маятниковые приборы и особенно гравиметры обычно стараются возможно лучше защитить от изменений температуры специальными теплозащитными устройствами или термостатами, что вообще осложняет применение многих гравиметров ввиду большого веса термостатов. Для учета остаточного влияния температуры производится тщательное определение температурных коэффициентов, увеличивается точность измерения температуры и стремятся подобрать такие материалы для изготовления ответственных частей приборов, которые слабее всего реагируют на колебания температуры. Конструкция и габариты упругих маятников не допускают ни использования термостатов, ни применения особо точных термометров. В распоряжении конструктора остается только возможность варьировать качество элинвара, употребляемого для изготовления пластинки, а в распоряжении наблюдателя — соответствующая методика исследований и наблюдений.

Термоэластические коэффициенты элинвара, как и других сплавов, зависят от соотношения элементов, образующих сплав, и способа его термической обработки; характер этой зависимости изучен настолько хорошо, что можно получить элинварную пластинку с любым, наперед заданным для некоторого интервала температур, температурным коэффициентом. К сожалению, значительно хуже изучена зависимость устойчивости упругих свойств элинвара от технологии его изготовления и величины термоэластического коэффициента. Можно только считать установленным, что когда термоэластический коэффициент элинварной пластинки становится меньше некоторой определенной величины, то устойчивость ее упругих свойств становится также меньше, и качество такой пластинки резко ухудшается. Указанное обстоятельство является причиной того, что упругие маятники обычно имеют температурные коэффициенты сравнительно большие, чем другие гравиметрические приборы.

Таким образом, решающая роль в деле борьбы с вредными влияниями колебаний температуры принадлежит наблюдателю, его умению организовать исследование и использование прибора; правильное же применение упругих маятников существенно связано со знанием механизма искажения результатов наблюдений действием температуры.

Существуют следующие источники ошибок, связанные так или иначе с температурой:

1. Систематические и случайные ошибки отсчетов термометра маятников.
2. Ошибки температурных коэффициентов прибора.
3. Изменение температурных коэффициентов с течением времени.
4. Несоответствие в скорости восприятия изменений температуры термометром и маятником («динамический» эффект).
5. Температурное последствие, или свойство периода упругого маятника зависеть не только от той температуры, которую маятник имеет в данный момент, но и от температуры, которую он имел в предшествующие моменты времени.

Выбрав надлежащий порядок исследования, можно разделить влияния этих источников и изучить действие каждого из них в отдельности. Скажем сразу, что в нормальных условиях нам не удалось обнаружить сколько-нибудь заметного влияния последних двух источников, а если бы они действительно играли существенную роль, то упругие маятники не могли бы считаться точным измерительным прибором и вряд ли завоевали бы право на участие в гравиметрической съемке.

Динамический эффект сведен к неощутимо-малой величине тем, что шарик термометра маятника запаян в металлическое тело прибора на расстоянии всего лишь около 3 миллиметров от основания пластинки маятника, так что практически температура воздействует на маятник и ртуть термометра одновременно. Во всяком случае, многочисленные наблюдения при колебаниях температуры порядка до $5-6^\circ$ в час еще не обнаружили какого-либо эффекта. Дальнейшее увеличение скорости изменения температуры не удастся осуществить, так как при этом начинает играть решающую роль другой эффект—неравномерный прогрев различных частей прибора, вызывающий настолько большое нарушение нивелировки, что маятник непрерывно «сползает», и наблюдения становятся невозможными. Однако подобные изменения температуры редко встречаются даже на открытом воздухе, так что борьба с динамическим эффектом для упругих маятников не вызывает затруднений. Наставление разрешает производить наблюдения при колебаниях температуры, не превышающих $0,25^\circ$ за один прием, т. е. при часовом изменении в $2\frac{1}{2}-3^\circ$. Такой допуск гарантирует доброкачественность результатов и легко обеспечивается в полевых условиях.

Термометры маятников Рудаковского рассчитаны на наблюдения в интервале температур от 0° до $+30^\circ$. В этих пределах не ощущается температурное последствие в прямом смысле этого слова. Наставление предусматривает меры борьбы с косвенным влиянием смены температурного режима. Когда маятник выносится из помещения на воздух или обратно, необходимо затратить некоторое время на то, чтобы все части прибора восприняли новую температуру, так как в противном случае, по уже упомянутой причине, маятник при наблюдениях будет «сползать». Опыт показал, что после успокоения столбика ртути в термометре на новом уровне температуры достаточно провести 20-минутную отстойку, чтобы наблюдения протекали затем вполне нормально.

Наибольшие колебания в температурном режиме приборов могут встретиться в зимнее время, когда маятники перевозятся при низкой температуре, а наблюдаются при сравнительно высокой. Опыт двух экспедиций, проводившихся в зимнее время (партия Хейфеца 1942—1943 г. в пустыне Кара-Кум и партия Жукова 1940 г. в районе Кокчетава), говорит о том, что качество результатов наблюдений в зимних условиях заметно снижается, несмотря на возрастающую тщательность в организации и исполнении работы. В партии Хейфеца в зимнее время маятникам давалась отстойка до суток и даже больше, тем не менее сходимость результатов наблюдений по трем маятникам была хуже обычной, а в самом поведении маятников наблюдались незакономерные скачки. В партии Жукова качество пунктов, определенных зимой, оказалось столь низким, что оно вызвало дискуссию о возможности использования этих наблюдений вообще.

Изложенные факты оставляют место для обоснованных подозрений о наличии эффекта температурного последствия при резких сменах температурного режима. Выявление последствия в чистом виде является затруднительным, так как зимой условия для наблюдений всегда неблагоприятны. Отсутствие в приборе термометра для низких температур заставляет в полевых условиях прибегать к искусственному подогреву помещения для наблюдений. В лабораторных условиях, даже при лучших способах подогрева, также трудно устранить большие вертикальные и горизонтальные температурные градиенты, нарушающие нивелировку маятников и уменьшающие точность учета температуры. Чтобы сделать упругие маятники пригодными для наблюдений в зимних условиях, необходимо поместить в прибор второй термометр для низких температур, который позволит избавить маятники от резкой смены температуры. Наличие этого термометра облегчит также организацию исследования влияния температурного последствия.

В формуле поправки за температуру, приводившейся нами в [11],

$$\Delta_t = \alpha (t - t_0) + \beta (t - t_0)^2 \quad (\text{III}, 1)$$

под t подразумевается средняя интегральная температура маятника, которую мы получаем по отсчетам термометра. Но эта температура искажена большими систематическими ошибками следующих двух видов:

- а) ошибками шкалы термометра и
- б) ошибками за параллакс.

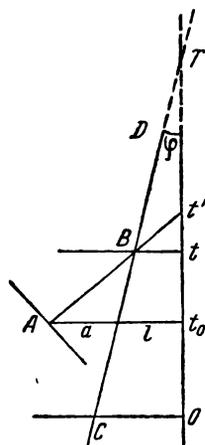
При запайке колбы упругого маятника его термометр испытывает подогрев до 200°; при этом шкала термометра может получить значительные деформации. Провести исследование шкалы и получить ее поправки после запайки уже трудно. Таким образом, строго говоря, температура упругого маятника дается не в общепринятой системе единиц, а в некоторых единицах деформированной шкалы. Та часть деформации, которая приводит к смещению нуля, изменению масштаба или к ошибкам, пропорциональным величине отсчета, будет автоматически учтена при определении температурных коэффициентов и, следовательно, погрешностей, влияющих на измерение силы тяжести, дать не может, но деформации, незакономерно изменяющиеся от одного места шкалы к другому, вызывают крупные ошибки. Выявить их можно лишь специальными наблюдениями при различных температурах или попутно при определении температурных коэффициентов, если достаточно часто распределить наблюдения во всем интервале температур. Однако говорить о получении таким образом уверенной поправки шкалы не приходится. Необходимо поэтому браковать маятники, которые обнару-

живают явно неудовлетворительное качество шкалы. Ослабления влияния ошибок шкалы, находящихся в нормальных пределах, можно добиться применением нескольких маятников для измерения силы тяжести. В таком случае сходимость результатов измерений по отдельным маятникам будет также хорошим контролем работы. Предписывая пользоваться для съёмки не менее чем тремя маятниками, Наставление учитывает, среди других соображений, также и только что изложенное.

Конструкция приспособления для отсчета температуры порождает искажение отсчета параллаксом луча зрения. На границах шкалы соответствующая ошибка достигает величины порядка $1/2^\circ$, и поэтому необходимо разобрать, к чему приводит действие параллакса.

Пусть точка A (черт. 4) есть проекция на плоскость, перпендикулярную к плоскости шкалы термометра, точки зеркала, от которой отражается к наблюдателю луч AB , идущий от мениска ртути капилляра (точки B). CD есть проекция оси капилляра, OT — проекция шкалы термометра. Пусть, далее, точка O есть нуль шкалы, а φ — угол наклона капилляра к шкале.

Очевидно, что правильный отсчет температуры для положения, изображенного на чертеже, есть t , наблюдаемый отсчет — t' , t_0 — единственный отсчет на шкале, не искажаемый параллаксом. Этот отсчет получается пересечением OT перпендикуляром, опущенным на OT из точки A . Расстояние по упомянутому перпендикуляру капилляра от шкалы равно l , а от точки A равно a . Точка T соответствует отсчету, который можно сделать на шкале в пересечении ее с продолжением капилляра.



Черт. 4

Из чертежа находим:

$$\frac{t' - t}{t' - t_0} = \frac{(T - t) \operatorname{tg} \varphi}{a + l}.$$

Заменяя здесь

$$T = t_0 + \frac{l}{\operatorname{tg} \varphi},$$

получим:

$$t = \frac{(t_0 \operatorname{tg} \varphi - a) t' - l t_0 - t_0^2 \operatorname{tg} \varphi}{(t' - t_0) \operatorname{tg} \varphi - a - l}. \quad (\text{III}, 2)$$

Поправка, которую нужно придать к наблюдаемому отсчету t' , чтобы получить правильный отсчет t , есть, очевидно:

$$\Delta = t - t',$$

или

$$\Delta = \frac{l(t_0 - t') + \operatorname{tg} \varphi (t'^2 - t_0^2)}{a + l - (t' - t_0) \operatorname{tg} \varphi}. \quad (\text{III}, 3)$$

Отсюда видно, что если капилляр параллелен шкале, т. е. когда $\varphi = 0$, то параллакс искажает отсчет температуры на величину, пропорциональную величине отсчета. При любой величине коэффициента пропорциональности такое искажение вызовет только изменение коэффициентов α и β . В данном случае параллакс не имеет никаких вредных последствий, кроме, быть может, ничтожного усложнения вычислений за счет увеличения квадратичной поправки.

Если величиной φ пренебречь нельзя, то вид функции (III, 1) изменяется и тогда лучше добавить к ней члены, зависящие от более высоких степеней температуры. Подобные обстоятельства могут обуслов-

ливаться, например, непрямолинейностью капилляра термометра и непараллельностью капилляра шкале термометра, за чем надо следить как при работе с прибором, так и, прежде всего, при самом конструировании последнего.

Во всех случаях величины a , l , φ и t_0 должны быть строго постоянными, и Наставление предписывает наблюдателю следить за этим.

Все, на чем мы останавливались в настоящей главе до сих пор, связано с факторами, систематически искажающими получение той эффективной температуры, которую необходимо подставить в (III, 1) для правильного вычисления поправки за температуру. Поскольку температурные коэффициенты упругих маятников весьма велики, то ошибки учета температуры должны быть постоянно в центре внимания наблюдателя. Проще всего решается вопрос о случайных ошибках отсчета температуры; если набрать достаточное количество отсчетов, то такие ошибки хорошо компенсируются. Так как деления на шкалах термометров идут через $0^{\circ},2$, то с помощью микроскопа легко отсчитать величину $0^{\circ},02$. На пункте делается не меньше десяти отсчетов температуры, и, следовательно, в среднем влияние случайных ошибок отсчета не превосходит $0^{\circ},01$. Даже при величине температурного коэффициента в 50 мгл на 1° соответствующая погрешность в силе тяжести не превысит 0,5 мгл, что вполне допустимо, но такие большие коэффициенты в последних моделях маятников Рудаковского встречаются все реже.

Кроме ошибок величины t на правильность учета температуры влияют еще ошибки температурных коэффициентов α и β . Остановимся теперь на изучении этой группы ошибок, имеющих весьма большое значение, потому что в практических работах невозможно избежать больших разностей температуры между определяемым полевым пунктом и опорным пунктом. Нередко эти разности превышают 10° , а иногда достигают даже 20° .

Ошибки коэффициентов зависят от точности наблюдений при исследовании, от программы и условий исследования, от точности, с которой известен масштабный коэффициент k формулы (I, 2), и, наконец, от стабильности коэффициентов.

Ниже приводятся две таблицы результатов определений температурных коэффициентов некоторых упругих маятников.

В таблице 13, заимствованной из [11], даны результаты определений, производившихся в ЦНИИГАиК в 1938/39 г. и послуживших основой для отработки методики исследований. В таблице 14 даны коэффициенты, полученные в Московском аэрогеодезическом предприятии (МАГП) зимой 1940/41 г., уже в строгом соответствии с Наставлением.

В таблицах даются значения коэффициентов α и β^* с их ошибками, вычисленные по способу наименьших квадратов. α дано для температуры $t = 20^{\circ}$. Кроме того, приводятся ошибка эквивалентного коэффициента $\bar{\alpha} = \alpha + 40\beta$, ошибка единицы веса μ , характеризующая точность наблюдений, и основные данные условий исследования.

При сопоставлении обеих таблиц резко бросается в глаза большое увеличение точности исследований в 1940/41 г. по сравнению с исследованиями предыдущих лет. Опыт, приобретенный в течение первых двух лет работы с упругими маятниками и отраженный в Наставлении, позволяет теперь в стандартных производственных условиях получать настолько уверенные системы температурных коэффициентов, что всякие сомнения в отношении реальности квадратичных членов или надежности коэффициентов вообще должны быть отброшены. Характерно, что все квадратичные коэффициенты имеют один знак. Вряд ли случайно, что

* Входящих в приведенную выше формулу (III, 1): $\Delta t = \alpha(t - t_0) + \beta(t - t_0)^2$.

Результаты определений температурных коэффициентов, произволившихся
в ЦНИИГАиК в 1938 и 1939/40 гг.

№ маятника	Дата исследования	Число точек*	Интервал температур	Средняя температура	α	β	Ошибка эквивалентного коэффициента m_{α}	Ошибка единицы веса для двучленной формулы μ
42	Апрель 1938	20	9°—27°	20°	-13,06±0,92	+0,069±0,005	±0,20	±3,4
42	" 1939	11	8—26	18	13,92	0,96—0,004	29	16
43	" 1938	20	12—31	20	10,53	1,59+0,073	38	23
43	" 1939	10	9—26	18	9,65	2,04+0,073	56	36
44	Февраль 1940	10	9—23	16	40,45	1,80+0,189	54	21
45	Май 1939	10	13—30	22	45,16	3,20+0,111	73	38
46	" 1939	12	12—30	20	15,74	1,83+0,155	59	18
47	Февраль 1940	13	9—22	15	48,68	2,83—0,049	91	33
49	Апрель 1939	9	11—25	19	36,09	2,24—0,053	39	28
50	Май 1939	11	13—29	21	48,07	1,53—0,109	4	16
Среднее квадратическое значение					±1,93	±0,051	±0,26	±4,2

Результаты определений температурных коэффициентов, произволившихся
в МАГП в 1941 г.

№ маятника	Дата исследования	Число точек*	Интервал температур	Средняя температура	α	β	Ошибка эквивалентного коэффициента m_{α}	Ошибка единицы веса для двучленной формулы μ	Ошибка единицы веса для одночленной формулы ν
42	Январь 1941	21	+1°+31°	16°	-13,46±0,21	+0,125±0,006	±0,26	±2,5	±11,3
43	" 1941	16	7 29	20	9,94	0,059	11	13	2,3
47	" 1941	21	0 31	15	47,14	0,046	7	12	2,6
49	" 1941	18	6 32	19	35,58	0,026	15	11	3,7
101	Февраль 1941	17	Материал не сохранился	19	37,34	0,106	12	19	2,4
102	" 1941	15	хранился	16	36,48	0,057	4	13	1,1
103	" 1941	14	То же	18	44,75	0,082	6	18	1,4
104	" 1941	19	"	20	36,90	0,093	13	19	3,3
105	" 1941	14	"	17	24,94	0,024	6	7	1,4
106	" 1941	18	"	19	48,89	0,058	6	12	1,7
107	" 1941	14	"	18	28,43	0,067	12	17	2,6
108	" 1941	15	"	18	31,26	0,046	8	10	1,7
Среднее квадратическое значение					±0,35	±0,009	±0,16	±2,3	±5,6

среднее из двукратных определений эквивалентных коэффициентов маятников № 42 и № 43 в 1938 и 1939 гг. почти совпадает с результатом определения в 1940/41 г.

К сожалению, неуверенность разделения линейного и квадратичного членов, присущая первоначальным исследованиям, осложняет полное сравнение определений ЦНИИГАиК и МАГП. Общеизвестно, насколько трудно выделить квадратичный коэффициент и сколько недоразумений было связано с этим вопросом. Зачастую увеличение ошибки линейного коэффициента при определении квадратичного члена и большая величина относительной ошибки последнего истолковывались как доказательство нецелесообразности пользования двучленной формулой поправки за температуру. В таблице 14 мы приводим ошибки единицы веса, вычисленные как для случая определения одного линейного коэффициента, так и для случая определения квадратичного члена. Значительное уменьшение ошибки единицы веса в последнем случае убедительно показывает, что двучленная формула лучше описывает закон влияния температуры, чем одночленная. Надо лишь правильно оценить влияние ошибок температурных коэффициентов на измерение силы тяжести.

Еще в 1934 году нами была выведена формула, позволяющая вычислить ошибку в силе тяжести, зависящую от ошибок температурных коэффициентов применяемых гравиметрических приборов [11]. Эта формула показывает, что отнюдь нельзя суммировать влияние ошибок линейного и квадратичного коэффициентов так, как если бы они были независимыми, и что некоторое увеличение ошибки линейного коэффициента совершенно не влечет за собой ухудшения учета его влияния. Не останавливаясь на элементарном выводе, приведем упомянутую формулу в готовом виде:

$$m_{\alpha,t}^2 = m_{\alpha}^2(t - t_0)^2 - \lambda(t^2 - t_0^2). \quad (\text{III},4)$$

Здесь:

$m_{\alpha,t}$ — ошибка силы тяжести полевого пункта, зависящая от ошибок коэффициентов;

t и t_0 соответственно — температура при наблюдениях на полевом и опорном пунктах;

m_{α} — ошибка линейного коэффициента α , полученная из уравнительных вычислений (не эквивалентного);

λ — переменный коэффициент, определяемый точностью и условиями исследования и температурами t и t_0 ,

$$\lambda = \frac{m_{\alpha}^2}{[bb]} \left\{ \frac{2[ab]}{t + t_0} - [aa] \right\}, \quad (\text{III},5)$$

где $[aa]$, $[ab]$ и $[bb]$ — коэффициенты эквивалентной системы нормальных уравнений первой степени, служивших для вычисления α и β .

В 1945 году П. Ф. Шокин получил формулу (III, 4) в виде, более удобном для вычислений, но для нашей цели выгоднее воспользоваться (III, 4), так как из нее значительно проще сделать некоторые нужные заключения.

Во-первых, из вида формулы Хейфеца (III, 4) так же, как из вида формулы Шокина, не ясно, не может ли $m_{\alpha,t}^2$ получиться отрицательным; в таком случае интерпретация названных формул могла бы вызвать существенное недоумение.

Однако, подставляя (III, 5) в (III, 4), нетрудно найти:

$$m_{\alpha,t}^2 = m_{\alpha}^2(t - t_0)^2 \left\{ \left[1 - \frac{[ab]}{[bb]}(t + t_0) \right]^2 + \left(\frac{[aa]}{[bb]} - \frac{[ab]^2}{[bb]^2} \right) (t + t_0)^2 \right\}; \quad (\text{III},6)$$

кроме того, можно написать:

$$\frac{[aa]}{[bb]} - \frac{[ab]^2}{[bb]^2} = \frac{[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}}{[aa]},$$

но числитель правой части есть не что иное, как вес неизвестного β в нашей системе нормальных уравнений, и, следовательно, это есть величина положительная. Отсюда заключаем, что $m_{\alpha,t}$ может быть только либо нулем, либо положительной величиной, но никогда не может превратиться в величину отрицательную.

Для того, чтобы $m_{\alpha,t}$ превратилось в нуль, необходимо выполнение одного из двух равенств:

$$t = t_0$$

или

$$\left[1 - \frac{[ab]}{[bb]}(t + t_0)\right]^2 + \left[\frac{[aa]}{[bb]} - \frac{[ab]^2}{[bb]^2}\right](t + t_0)^2 = 0. \quad (\text{III } 7)$$

В последнем случае равенство нулю суммы двух существенно положительных величин влечет за собой равенство нулю каждого из слагаемых в отдельности, откуда получаем:

$$t + t_0 = \frac{[bb]}{[ab]}; \quad [bb] = \frac{[ab]^2}{[aa]}.$$

Второе из этих равенств налагает уже какое-то условие на программу определения коэффициентов, так что при произвольных условиях ошибки коэффициентов исключаются только при равенстве температур на полевом и опорном пунктах. Легко видеть, что попытка перестроить программу исследования так, чтобы удовлетворить последнему равенству, ни к чему не приведет, ибо выполнение его равносильно превращению в нуль веса обоих неизвестных.

Вопрос надо ставить иначе: при какой комбинации температур полевого и опорного пунктов целесообразно вести наблюдения для данного прибора, чтобы свести к минимуму влияние ошибок коэффициентов, если невозможно добиться равенства этих температур? Дифференцируя (III, 6) по величине $t + t_0$ и приравнявая производную нулю, найдем после несложных выкладок

$$t + t_0 = \frac{[ab]}{[aa]}. \quad (\text{III } 8)$$

Ниже мы установим замечательное соотношение, из которого следует, что величина $\frac{[ab]}{[aa]}$ равна удвоенной средней температуре исследования прибора $t_{cp.}$:

$$\frac{[ab]}{[aa]} = 2 t_{cp.} \quad (\text{III } 9)$$

Следовательно, минимум влияния фиксированных ошибок коэффициентов будет иметь место тогда, когда среднее из температур полевого и опорного пунктов равно средней температуре исследования прибора

$$t_{cp.} = \frac{t + t_0}{2}. \quad (\text{III } 10)$$

Вообще же надо стремиться всеми возможными способами к повышению точности исследования.

В основном успех исследования зависит от программы и условий наблюдений. Точность самих наблюдений может быть повышена увеличением их числа, но количество приемов лимитируется тем, что

нельзя слишком затягивать исследование; кроме того, уменьшение случайной ошибки наблюдений имеет смысл лишь в ограниченных пределах вследствие действия систематических ошибок, например, таких, как ошибки делений шкалы термометра. Вариации ошибки единицы веса в таблицах 13 и 14 объясняются, главным образом, подобными ошибками, различно влияющими на разные маятники, в то время, как ошибка собственно определения периода для всех маятников почти одинакова.

Надлежащая постановка определений температурных коэффициентов всегда является сложным делом. Особенно трудно создать хорошие условия исследования для упругих маятников. Циркуляция потоков нагретого воздуха вызывает неравномерный прогрев прибора, нарушение нивелировки и затрудняет наблюдения. Маленький прибор, не имеющий термоизоляции, очень быстро реагирует на всякие случайные изменения температуры, поэтому поддержание температуры на надлежащем уровне не только во время наблюдений, но даже во время отстоя требует значительных усилий. Затяжка работы влечет осложнения с учетом изменений упругих сил пластинки.

Отсюда ясно, насколько велика роль правильной программы наблюдений при исследовании. Количество наблюденных периодов при каждом уровне температуры, число температурных «точек» и величина общего интервала температур должны соответствовать строго необходимому оптимуму, а порядок наблюдений — содействовать лучшему исключению систематических ошибок. Очевидно, что для контроля постоянства периода маятника наблюдения должны начинаться и заканчиваться на одном и том же уровне температуры. В целях исключения остаточного влияния динамического эффекта необходимо наблюдать как при повышении, так и при понижении температуры. Эти соображения учтены в соответствующем разделе Наставления, где подробно излагаются принятые теперь правила исследований.

Труднее всего установить необходимый минимум наблюдений в смысле количества температурных состояний («точек»). Теоретически, для определения двух искомым коэффициентов и значения C при температуре, принятой за исходную, достаточно трех состояний. Количество необходимых избыточных наблюдений неоднократно являлось предметом оживленных дискуссий в отношении многих видов наблюдений. При исследовании обычных маятников ограничиваются четырьмя и, очень редко, пятью состояниями. Конечно, этого совершенно недостаточно для получения уверенного результата и его оценки по способу наименьших квадратов. Мы твердо уверены, что большие погрешности при измерении силы тяжести, в частности свободными маятниками, были своим существованием во многом обязаны недостаточному и вообще неудовлетворительному исследованию приборов и учету температурных влияний.

Эмпирическое решение вопроса о необходимом минимуме температурных состояний требовало бы организации громоздких наблюдений и вычислений, но теоретически он решается довольно просто. Ниже мы получим несложные формулы для предвычисления веса коэффициентов в зависимости от интервала температур и числа «точек» исследования. Формулы будут, конечно, пригодны для определения веса температурных коэффициентов физических приборов любого назначения, если только для них влияние температуры выражается параболической формулой.

Мы исходим из единственного допущения, которое достаточно точно осуществляется в действительности, что наблюдения при исследовании производятся через равные интервалы температур.

Пусть t_1 — наинизшая температура при исследовании, а t_n — наивысшая температура (при состоянии номера n). Таким образом,

поэтому

$$[aa] = \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{4} \right\} \Delta t^2,$$

или окончательно:

$$[aa] = \frac{(n-1)n(n+1)}{12} \Delta t^2. \quad (\text{III}, 15)$$

Далее, из (III, 12) нетрудно получить:

$$t_m^2 = t_1^2 + 2(m-1)\Delta t \cdot t_1 + (m-1)^2 \Delta t^2;$$

$$\frac{[t^2]}{n} = t_1^2 + (n-1)\Delta t \cdot t_1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \Delta t^2,$$

так что

$$b_m = (2m-n-1)t_1 \Delta t + \left\{ (m-1)^2 - \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \right\} \Delta t^2.$$

Образует произведение:

$$a_m b_m = \frac{(2m-n-1)^2}{2} t_1 \Delta t^2 + \frac{2m-n-1}{2} \left\{ (m-1)^2 - \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \right\} \Delta t^3.$$

Обозначим временно:

$$A = \frac{(2m-n-1)^2}{2} t_1 \Delta t;$$

$$B = \frac{2m-n-1}{2} \left\{ (m-1)^2 - \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \right\} \Delta t^2;$$

$$k' = n+1.$$

Тогда

$$[ab] = [A] + [B].$$

Так как A легко представить в виде:

$$A = \left\{ 2m^2 - 2mk' + \frac{k'^2}{2} \right\} t_1 \Delta t^2,$$

то, суммируя аналогично предыдущему, найдем:

$$[A] = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} t_1 \Delta t^2.$$

Перепишем теперь:

$$B = \left\{ \frac{(2m-k')(m-1)^2}{2} - \frac{(2m-k')(n-1)(2n-1)}{12} \right\} \Delta t^2.$$

При суммировании второй член в фигурных скобках превратится в нуль, и после некоторых преобразований останется:

$$[B] = \frac{n(n+1)(n-1)^2}{12} \Delta t^2.$$

Следовательно,

$$[ab] = \frac{(n-1)n(n+1)^2}{6} t_1 \Delta t^2 + \frac{(n-1)^2 n(n+1)}{12} \Delta t^3. \quad (\text{III}, 16)$$

Образование коэффициента $[bb]$ связано с более сложными выкладками; приводить мы их не будем и сразу напишем полученный результат:

$$[bb] = \frac{1}{3} (n-1)n(n+1)t_1^2 \Delta t^2 + \frac{1}{3} (n-1)^2 n(n+1)t_1 \Delta t^3 +$$

$$+ \frac{1}{180} (n-1)n(n+1)(2n-1)(8n-11)\Delta t^4. \quad (\text{III}, 17)$$

Из формул (III, 15), (III, 16) и (III, 17), учитывая (III, 12), выводим следующие интересные соотношения:

$$[aa] = \frac{(n-1)n(n+1)}{12} \Delta t^2; \quad [ab] = 2[aa] t_{cp};$$

$$[bb] = [aa] \left\{ 4 t_{cp}^2 + \frac{n^2 - 4}{15} \Delta t^2 \right\}. \quad (\text{III, 18})$$

На второе из этих равенств мы и ссылались, когда писали (III, 9). Веса неизвестных α и β , P_α и P_β зависят только от коэффициентов $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$:

$$P_\beta = [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]};$$

$$P_\alpha = \frac{[aa]}{[bb]} P_\beta.$$

Поэтому

$$P_\beta = \frac{n^2 - 4}{15} [aa] \Delta t^2 = \frac{(n-1)n(n+1)(n^2 - 4)}{180} \Delta t^2;$$

$$P_\alpha = \frac{(n^2 - 4)[aa] \Delta t^2}{60 t_{cp}^2 + (n^2 - 4) \Delta t^2} = \frac{1}{12} \frac{(n-1)n(n+1)(n^2 - 4) \Delta t^4}{60 t_{cp}^2 + (n^2 - 4) \Delta t^2}. \quad (\text{III, 19})$$

Заменим здесь

$$\Delta t = \frac{t_n - t_1}{n - 1};$$

тогда получим:

$$P_\beta = \frac{1}{180} \frac{n(n+1)(n^2 - 4)}{(n-1)^3} (t_n - t_1)^4,$$

$$P_\alpha = \frac{1}{12} \frac{n(n+1)(n^2 - 4)(t_n - t_1)^4}{(n-1) \{ 60(n-1)^2 t_{cp}^2 + (n^2 - 4)(t_n - t_1)^2 \}}. \quad (\text{III, 20})$$

Формулы (III, 18) и (III, 20) являются вполне строгими, если наблюдения производятся через строго равные интервалы аргумента (температуры или другой величины, обозначенной через t). В некоторых случаях, когда это соблюдается, можно прямо вычислять коэффициенты нормальных уравнений и веса неизвестных по нашим формулам, что, понятно, весьма упрощает уравнительные вычисления. Особенную простоту приобретают формулы в том случае, когда $t_1 = \Delta t = 1$ и остается постоянным для целой группы систем условных уравнений. Нам практически приходилось пользоваться выведенными формулами и констатировать, что для больших значений n ($n = 50, 60$) эффект был очень заметный.

Когда речь идет только о предвычислении веса неизвестных, нет необходимости получать большую точность; достаточно ограничиться определением порядка величины веса. Поскольку вариации ошибки единицы веса сравнительно невелики и средняя величина последней обычно постоянна, теперь можно, задаваясь величиной t_{cp} и пользуясь (III, 20), заранее вычислить порядок величины ошибок коэффициентов в зависимости от n и $t_n - t_1$.

Проверим, как работают формулы (III, 20) при тех неравных интервалах Δt , которые встречаются на практике. Возьмем для примера две системы условных уравнений, из которых получены коэффициенты маятников № 43 и 47, помещенные в табл. 14. Мы сознательно выбираем системы, наиболее неудачные с точки зрения равенства интервалов температур.

В табличке даются номера «точек» и температуры в последовательности выполнения наблюдений.

Маятник № 47		Маятник № 43	
№ „точек“	Температура	№ „точек“	Температура
1	+12°,02	1	+30°,36
2	8,24	2	30,53
3	3,15	3	27,12
4	0,21	4	22,95
5	— 0,01	5	19,15
6	+ 3,05	6	15,40
7	7,41	7	10,90
8	9,95	8	7,80
9	12,06	9	7,56
10	16,23	10	11,35
11	16,62	11	15,52
12	20,47	12	19,41
13	25,27	13	19,67
14	28,67	14	23,44
15	28,21	15	27,64
16	27,13	16	31,18
17	27,21		
18	23,31	Среднее	+20°,00
19	18,65		
20	16,54		
21	12,65		
Среднее	+15°,10		

Если по числам, приведенным в табличке, вычислить по обычным правилам веса неизвестных, то получим

$$\text{для маятника № 43: } P_{\beta} = 44 \times 10^8; P_{\alpha} = 28,3;$$

$$\text{для маятника № 47: } P_{\beta} = 123,3 \times 10^8; P_{\alpha} = 130,5.$$

Чтобы воспользоваться формулами (III, 20), мы просто примем

$$\text{для маятника № 43: } t_n - t_1 = 31^{\circ},18 - 7^{\circ},56 = 23^{\circ},62; n = 16; t_{cp.} = 20^{\circ},00;$$

$$\text{для маятника № 47: } t_n - t_1 = 28^{\circ},67 - (-0^{\circ},01) = 28^{\circ},68; n = 21; t_{cp.} = 15^{\circ},10$$

и получим:

$$\text{для маятника № 43: } P_{\beta} = 41,6 \times 10^8; P_{\alpha} = 21,8;$$

$$\text{для маятника № 47: } P_{\beta} = 94,4 \times 10^8; P_{\alpha} = 100,0.$$

Порядок величины веса выявляется вполне надежно, несмотря на большое неравенство интервалов температур. Таким образом, очевидно, что наши формулы могут служить достаточной основой для суждения о построении программ наблюдений.

Во-первых, формулы отчетливо показывают, что главную роль в повышении точности определения коэффициентов играет величина интервала температур исследования $t_n - t_1$. Вес квадратичного коэффициента растет пропорционально четвертой степени интервала температур, вес линейного коэффициента, хотя и возрастает медленнее, но также

очень чувствителен к величине этого интервала. Неудивительно, что в приведенном примере коэффициенты маятника № 47 определились более уверенно, чем маятника № 43 (см. табл. 14), невзирая на то, что ошибка единицы веса у последнего маятника меньше, а интервал температур для маятника № 47 только на 20% больше, чем для маятника № 43.

Величина интервала температур должна быть такой, чтобы он перекрывал все температуры, которые могут встретиться при работах с маятниками, чтобы не допускать экстраполяции коэффициентов. Все вместе взятое объясняет, почему в Наставлении включено жесткое требование о проведении исследования в пределах от минимального до максимального отсчета температуры на шкале термометра; обычно величина этого интервала отсчетов колеблется от 23° до 30°.

Во-вторых, как показывает (III, 20), вес коэффициентов возрастает приблизительно пропорционально числу n . Учитывая, что ошибки коэффициентов обратно пропорциональны корню квадратному из веса, заключаем, что заметного улучшения результатов исследования можно добиться только при значительном увеличении числа «точек». При n , близком к двум, веса неизвестных будут очень малы; это действительно всегда бывает при исследовании обычных маятников, когда n не превосходит 4 или 5. Для уменьшения вдвое ошибки коэффициентов надо по меньшей мере учетверить число «точек». По такому пути направлены и рекомендации Наставления, в соответствии с которыми полагается наблюдать около 20 «точек». Итти в этом отношении дальше трудно, ибо чем больше n , тем труднее увеличить количество наблюдений, но, как показывает опыт исследований, отраженный в табл. 14, в дальнейшем увеличении числа «точек» особой необходимости нет: установленная программа обеспечивает получение коэффициентов вполне удовлетворительного качества.

Все исследование по программе Наставления растягивается на срок не свыше трех — четырех дней. В течение такого срока можно еще не считаться с колебаниями упругих свойств пластинки, но увеличение его связано с риском навлечь неприятности с этой стороны. С точки зрения обследования шкалы термометра наблюдения через 1—2° также являются достаточными.

Таким образом, как опыт, так и теоретические соображения подтверждают целесообразность программы, описанной в Наставлении.

Сейчас еще рано говорить что-либо о стабильности температурных коэффициентов упругих маятников. В целях набора материала по этому вопросу рекомендуется систематически повторять их определения.

Нам осталось рассмотреть связь ошибок температурных коэффициентов с ошибками масштабного коэффициента k формулы (I, 2) и оценить могущую возникнуть по этой причине неточность масштаба. Поскольку эталонирование почти невозможно провести так, чтобы наблюдения на пунктах эталонирования производились при одинаковой температуре, то в k содержится ошибка, зависящая от ошибок температурных коэффициентов; наоборот, погрешности коэффициента k в свою очередь порождают ошибки в α и β . Наличие связи указанных погрешностей создает известные затруднения как для вывода α и β , так и для вывода k . Однако характер этой зависимости оказывается настолько несложным, что преодоление возникающих затруднений не составляет особого труда.

В самом деле, из одного вида формулы (I, 2) легко установить, что α , β и k связаны линейной зависимостью; значит, если истинные значения α , β и k соответственно равны α_0 , β_0 и k_0 , а мы, пользуясь

ошибочным значением \bar{k} , вычисляем с его помощью некоторые ошибочные значения $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, то имеет место соотношение:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha} = \frac{\beta_0}{\beta} = \frac{k_0}{k}, \quad (\text{III}, 21)$$

откуда следует, что ошибки температурных коэффициентов пропорциональны ошибке масштабного коэффициента k . (Это замечание принадлежит М. С. Молоденскому.) Если мы каким-либо способом уточним известное приближенное значение k , то для перевычисления температурных коэффициентов достаточно только умножить последние на отношение нового значения k к принятому прежде приближенному значению.

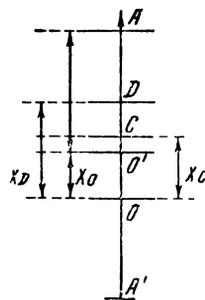
Когда k вообще неизвестно, то из температурного исследования мы найдем вместо α и β величины $\frac{\alpha}{k}$ и $\frac{\beta}{k}$, которые после эталонирования будут перечислены на α и β .

IV. Систематические и случайные ошибки отсчета моментов времени

Так как упругие маятники Рудаковского наблюдаются визуально, то полная ошибка отсчета момента прохождения изображения маятника через нить микроскопа является следствием трех основных причин: 1) неравномерности движения маятника, 2) случайных ошибок отсчета и 3) личных ошибок наблюдателя. Мы не говорим о таких ошибках, влияние которых заведомо неощутимо при правильной организации наблюдений, как, например, об ошибках, зависящих от хода хронометра и т. д.

Оценим величину ошибки, появляющейся вследствие неравномерности движения маятника.

Пусть AA' (черт. 5) есть след движения маятника в поле зрения окуляра микроскопа. В некоторый момент времени, считаемый за начальный, маятник находится в точке O и пусть движется кверху; в этот момент наблюдатель слышит удар хронометра. В момент t' , когда наблюдатель слышит следующий удар хронометра, изображение маятника находится в точке D . O' — точка, соответствующая положению равновесия маятника. В точке C след движения маятника пересекается нитью окуляра. Абсциссы точек O' , C и D будем отсчитывать от точки O и обозначать соответственно через x_0 , x_C и x_D . Элонгации маятника происходят в точках A и A' с абсциссами $(a + x_0)$ и $-(a - x_0)$ (затуханием пренебрегаем). При визуальных наблюдениях считают (в соответствии с классическим методом наблюдения «на глаз и ухо»), что между точками O и D скорость движения маятника постоянна, то-есть вводят допущение, что изображение маятника проходит точку C в момент времени \bar{t}_C , равный



Черт. 5

$$\bar{t}_C = \frac{x_C}{x_D} t'. \quad (\text{IV}, 1)$$

Задача сводится к сопоставлению \bar{t}_C с истинным моментом t_C , в который маятник проходит точку C .

Так как маятник совершает около точки O' гармонические колебания, то можно написать:

$$\left. \begin{aligned} x_C - x_0 &= a \sin(kt_C + \varphi), \\ x_D - x_0 &= a \sin(kt' + \varphi); \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV}, 2)$$

здесь

$$k = \frac{\pi}{S}, \quad (\text{IV}, 3)$$

где $S \cong 3$ сек. есть полупериод маятника.

Начальная фаза φ определится из условия:

$$-x_0 = a \sin \varphi,$$

или

$$\varphi = -\arcsin \frac{x_0}{a}. \quad (\text{IV}, 4)$$

Теперь из (IV, 2) находим:

$$\left. \begin{aligned} t_C &= \frac{1}{k} \left(\arcsin \frac{x_C - x_0}{a} + \arcsin \frac{x_0}{a} \right), \\ t' &= \frac{1}{k} \left(\arcsin \frac{x_D - x_0}{a} + \arcsin \frac{x_0}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV}, 5)$$

Следовательно, истинное соотношение моментов t_C и t' , выражается так:

$$t_C = \frac{\arcsin \frac{x_C - x_0}{a} + \arcsin \frac{x_0}{a}}{\arcsin \frac{x_D - x_0}{a} + \arcsin \frac{x_0}{a}} t'. \quad (\text{IV}, 6)$$

Согласно Наставлению нить должна совмещаться с положением равновесия маятника, поэтому

$$\Delta = x_C - x_0 \quad (\text{IV}, 7)$$

есть величина малая по отношению к x_D и a .

Отсюда следует, что $\frac{x_C}{a}$ и $\frac{x_D}{a}$ также величины малые. В самом деле, из первого равенства (IV, 5), пренебрегая Δ , можно приближенно написать:

$$\frac{x_C}{a} \cong \sin kt_C \cong \sin (1,05 t_C).$$

Предельное значение t есть t' , причем обычно $t' = 0,5$ сек; ему соответствует $x_C = x_D$, и мы имеем:

$$\frac{x_C}{a} \leq \frac{x_D}{a} \cong \frac{1}{2}.$$

В дальнейшем мы будем пренебрегать также величинами порядка

$$\left(\frac{x_D}{a}\right)^5, \quad \frac{\Delta^3}{a^3}.$$

Введем в (III, 6) выражение для Δ :

$$t_C = \frac{\arcsin \frac{\Delta}{a} + \arcsin \frac{x_C - \Delta}{a}}{\arcsin \frac{(x_D - x_C + \Delta)}{a} + \arcsin \frac{x_C - \Delta}{a}} t'.$$

Разлагая теперь с упомянутой точностью арксинусы в ряд, получаем:

$$t_C = \frac{\frac{x_C}{a} + \frac{(x_C - \Delta)^3}{6a^3}}{\frac{x_D}{a} + \frac{(x_D - x_C + \Delta)^3}{6a^3} + \frac{(x_C - \Delta)^3}{6a^3}} t';$$

с той же точностью можно написать:

$$t_C = \frac{x_C}{x_D} \left[1 + \frac{(x_C - \Delta)^3}{6 a^2 x_C} - \frac{(x_D - x_C + \Delta)^3}{6 a^2 x_D} - \frac{(x_C - \Delta)^3}{6 a^2 x_C} \right] t', \quad (\text{IV},8)$$

или, после некоторых преобразований:

$$t_C = \frac{x_C}{x_D} \left[1 - \frac{1}{6 a^2} (x_D - x_C) (x_D - 2x_C) - \frac{\Delta}{2 a^2} (x_D - x_C) - \frac{\Delta^3}{6 a^2 x_C} \right] t'. \quad (\text{IV},9)$$

Обозначим:

$$\frac{x_C}{x_D} = y, \quad (\text{IV},10)$$

и отбросим последний член в квадратных скобках (IV, 9)

$$t_C = y \left[1 - \frac{x_D^2}{6 a^2} (1 - y) (1 - 2y) - \frac{\Delta x_D}{2 a^2} (1 - y) \right] t'.$$

Ошибка, которую мы делаем, определяя t_C простой интерполяцией по формуле (IV, 1) (обозначим ее через Δ_T), очевидно равна:

$$\Delta_T = \frac{x_D^2}{6 a^2} y (1 - y) (1 - 2y) t' + \frac{\Delta x_D}{2 a^2} y (1 - y) t'. \quad (\text{IV},11)$$

Она состоит из двух слагаемых, из которых первое

$$\Delta_T' = \frac{x_D^2}{6 a^2} y (1 - y) (1 - 2y) t' \quad (\text{IV},12)$$

является следствием только неравномерности движения маятника при симметричном колебании его относительно нити.

Второе слагаемое

$$\Delta_T'' = \frac{\Delta \cdot x_D}{2 a^2} y (1 - y) t' \quad (\text{IV},13)$$

учитывает дополнительный эффект асимметрии движения изображения маятника в поле зрения микроскопа. Ошибка Δ_T' обращается в нуль при $y = 0$; $y = 1$; $y = 1/2$. Так, конечно, и должно быть. Определим максимум этой ошибки в зависимости от y .

Дифференцируя функцию

$$F(y) = y (1 - y) (1 - 2y)$$

и приравнявая производную нулю, находим:

$$\frac{dF(y)}{dy} = 6y^2 - 6y + 1 = 0;$$

отсюда

$$y = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Нетрудно убедиться, что при $y_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cong 0,21$ функция $F(y)$ имеет максимум; при $y_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cong 0,79$ $F(y)$ имеет минимум. В обоих случаях абсолютная величина $F(y)$ имеет максимум, равный

$$F(y) = \pm 0,096.$$

Таким образом ошибка Δ_T' имеет по абсолютной величине максимальное значение при $y = 0,21$ или $0,79$, а именно:

$$\Delta_T'_{\text{max.}} = \pm 0,016 \frac{x_D^2}{a^2} t'.$$

Вспоминая, что $\frac{x_D}{a} \cong \frac{1}{2}$; $t' = 0,5$ сек., видим, что

$$\Delta_{T' \max.} = \pm 0,004 \quad t' = \pm 0,002 \text{ сек.}$$

Следовательно, эта ошибка исчезающе мала по сравнению со случайной ошибкой отсчета, равной в среднем, как мы увидим дальше, $\pm 0,07$ сек., и может игнорироваться.

Рассмотрим величину ошибки $\Delta_{T''}$; она превращается в нуль при $y = 0$ и $y = 1$ и достигает максимума при $y = \frac{1}{2}$. В максимуме она может получить значение:

$$\Delta_{T'' \max.} = \frac{1}{8} \frac{x_D}{a} \cdot \frac{\Delta}{a} t' \cong \frac{1}{16} \frac{\Delta}{a} t' \cong \frac{1}{32} \frac{\Delta}{a} \text{ сек.}$$

Поэтому рационально потребовать, чтобы $\frac{\Delta}{a}$ не превышало 0,1. От запуска маятников их нульпункт часто смещается; нередко при «закрытии» приема, т. е. при вторичном наблюдении прохождений маятника для определения продолжительности 50 колебаний, величина $\frac{\Delta}{a}$ бывает значительно больше 0,1. Наставление предписывает браковать такие приемы, а для обнаружения их — записывать в журнал наблюдений величину асимметрии Δ .

Перейдем к определению случайных ошибок отсчетов или интерполяции моментов наблюдаемого прохождения изображения маятника через нить.

Согласно Наставлению, один прием наблюдений заключается в том, что после запуска маятника наблюдается шесть прохождений (по три в каждую сторону) и затем спустя время, необходимое для 50 колебаний, снова наблюдаются 6 прохождений. Пусть при открытии приема наблюденные моменты прохождений будут:

$$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6,$$

а при закрытии приема

$$T_1', T_2', T_3', T_4', T_5', T_6';$$

обозначим:

$$T = \frac{1}{6} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6); \quad T' = \frac{1}{6} (T_1' + T_2' + T_3' + T_4' + T_5' + T_6');$$

тогда средняя продолжительность 50 колебаний выразится так:

$$50 S = \frac{1}{6} [(T_1' - T_1) + (T_2' - T_2) + \dots + (T_6' - T_6)] = T' - T.$$

В журнале наблюдений записываются каждая из 6 разностей $T_1' - T_1, T_2' - T_2 \dots$ и их средние $T' - T$. Для контроля вычислений в журнал записываются еще так называемые «симметричные суммы», т. е. величины:

$$\tau_1 = T_1 + T_6, \quad \tau_2 = T_2 + T_5, \quad \tau_3 = T_3 + T_4;$$

$$\tau_1' = T_1' + T_6', \quad \tau_2' = T_2' + T_5', \quad \tau_3' = T_3' + T_4',$$

и средние из них, которые обозначим соответственно через τ и τ' . Отсюда получаем контрольную формулу:

$$50 S = \frac{1}{2} (\tau' - \tau).$$

Каждая из симметричных сумм соответствует удвоенному среднему моменту открытия или закрытия приема, так что сходимость этих сумм может служить критерием качества наблюдений и позволяет оценить

их точность в смысле влияния случайных ошибок отсчета. Разности $T_1' - T_1$ и т. д. нецелесообразно использовать для указанной цели, так как они зависят от положения нити и величины амплитуды колебаний.

Точность отсчета моментов T_k и T_k' существенно зависит от скорости движения маятника, и поскольку последняя сильно изменяется от начала к концу приема, то наблюдения при открытии и закрытии приема нельзя считать равноточными. Обозначим ошибку отсчета моментов T_k через m и ошибку моментов T_k' через m' . Очевидно, что ошибки средних моментов T и T' будут

$$\frac{m}{\sqrt{6}} \text{ и } \frac{m'}{\sqrt{6}},$$

а ошибка определения продолжительности 50 колебаний, которую обозначим через M , равна:

$$M = \pm \sqrt{\frac{m^2 + m'^2}{6}}. \quad (\text{IV}, 14)$$

С другой стороны, ошибки m и m' связаны с ошибками μ и μ' симметричных сумм τ_k и τ_k' соотношениями:

$$\mu = m \sqrt{2}; \quad \mu' = m' \sqrt{2}, \quad (\text{IV}, 15)$$

и, следовательно, вопрос об определении величин m , m' и M сводится к нахождению величин μ и μ' .

Пусть мы отнаблюдали n приемов. Каждый из них доставляет по три симметричные суммы для открытия и закрытия приема. Образует отклонения каждой симметричной суммы от своего соответствующего среднего в приеме:

$$V_1 = \tau_1 - \tau; \quad V_2 = \tau_2 - \tau; \quad V_3 = \tau_3 - \tau; \\ V_1' = \tau_1' - \tau'; \quad V_2' = \tau_2' - \tau'; \quad V_3' = \tau_3' - \tau'.$$

Ясно, что мы имеем:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\sum V^2}{2n}}; \quad \mu' = \pm \sqrt{\frac{\sum V'^2}{2n}}. \quad (\text{IV}, 16)$$

Формулы (IV, 14), (IV, 15) и (IV, 16) решают поставленную задачу об оценке точности наблюдаемых моментов по сходимости симметричных сумм и об определении ошибки величины 50 S за счет случайных ошибок наблюдаемых моментов.

Для практического применения выведенных формул были взяты из полевого журнала 49 отнаблюдаемых автором (и выбранных наугад) приемов. Симметричные суммы, вычисленные по ним, дают:

$$\sum V^2 = 0,6610; \quad \sum V'^2 = 1,4944;$$

отсюда:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{0,6610}{98}} = \pm 0,082 \text{ сек.}; \quad \mu' = \pm \sqrt{\frac{1,4944}{98}} = \pm 0,123 \text{ сек.},$$

а величины m , m' и M соответственно равны:

$$m = \pm 0,059 \text{ сек.}; \quad m' = \pm 0,088 \text{ сек.}; \quad M = \pm 0,044 \text{ сек.}$$

Эти числа показывают, что точность интерполяции в начале приема действительно значительно выше, чем в конце приема. Величина $M = \pm 0,044$ сек. соответствует ошибке в силе тяжести порядка $\pm 2,0$ мгл. Нормально на пункте наблюдается 9 приемов или больше, так что ошибка в силе тяжести полевого пункта за счет случайных ошибок отсчета равна $\pm \frac{2,0}{3} = \pm 0,7$ мгл. Увеличение количества при-

емов не имеет смысла, так как приведенная ошибка значительно меньше ошибок, порождаемых другими источниками.

Теперь нам осталось рассмотреть последний источник погрешностей, искажающий наблюдаемые моменты прохождения маятника через нить. Речь идет о систематической или, как ее называют в астрономии и геодезии, личной ошибке наблюдателя. То, что эта ошибка для упругих маятников может играть существенную роль, оказалось в известной мере неожиданным. Считалось, что поскольку продолжительность 50 колебаний получается как разность моментов прохождения маятника через нить, то личная ошибка должна исключаться. Однако при таком рассуждении не принимается во внимание большая разница в скорости движения маятника в начале и конце приема, а личная ошибка зависит от скорости движения маятника не в меньшей мере, чем случайная. Многочисленные исследования поведения «личного уравнения» астрономов давно сделали известным факт зависимости величины «личного уравнения» от скорости движения звезд. В данном случае имеется полная аналогия с этим фактом.

Впервые систематическое расхождение результатов у различных наблюдателей было замечено в 1939 г. в Саратовской экспедиции при сопоставлении наблюдений автора с наблюдениями его помощника М. К. Россинского. Однако это расхождение выявилось только для одного маятника № 44, имевшего наибольшее затухание. Специальных исследований тогда еще не было организовано, и сопоставление наблюдений было затруднительным. Для проверки появившихся сомнений зимой 1940/41 г. при проведении эталонирования маятников № 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107 и 108 были организованы систематические параллельные наблюдения двух наблюдателей Н. В. Жукова и Ф. А. Алексина. На всех пунктах эталонирования каждый наблюдатель выполнил полную программу наблюдений, предусмотренную Наставлением, так что накопился достаточно большой и убедительный материал для заключений о личной ошибке. Этот материал тем интереснее, что он получен в различное время, в различных местах и условиях.

Полученные результаты сведены в таблицу, не требующую особых пояснений (см. табл. 15).

Из таблицы 15 видно, что разность систематических ошибок выявляется вполне уверенно. Средняя ее величина $+0,04$ сек. соответствует ошибке в средней силе тяжести порядка трех миллигал. Средняя квадратическая вариация средней величины разности от пункта к пункту равна $\pm 0,01$ сек., следовательно, в течение полутора месяцев, затраченных на эталонирование, разность личных ошибок держится достаточно устойчиво. Конечно, отсюда нельзя делать обобщающих выводов о постоянстве личной ошибки вообще. То, что получилось у весьма опытных и квалифицированных наблюдателей в течение сравнительно короткого промежутка времени, может не повториться у других наблюдателей и даже у тех же — в другой промежуток времени. Скорее, наоборот, в силу аналогии с личной разностью астрономов, можно предположить, что личная ошибка подвержена заметным колебаниям, зависящим от условий наблюдений, состояния наблюдателя и многих других причин. Поэтому необходимо принять все меры для полного исключения этой опасной ошибки. Прежде всего, пока наблюдения производятся визуальным методом, все наблюдения на полевых и местном исходном пунктах должны производиться одним и тем же лицом. Если в партии имеется несколько наблюдателей, то каждый из них должен на местном исходном пункте производить полную программу наблюдений, а его наблюдения на полевых пунктах должны относиться только к его же наблюдениям на исходном пункте. Эти требования включены в Наставление, но их нужно рассматривать лишь как временную меру. Единственно правильным способом исключения личной ошибки и ее вариаций является введение безличных методов отсчета, например, таких, как фотографическая регистрация. В крайнем случае можно

Определение разности личных ошибок наблюдателей

Пункты наблюдений	Наблюдатель	Продолжительность 50 колебаний и разность личных ошибок наблюдателей по маятникам (в секундах)								Средняя величина разности
		№ 101	№ 102	№ 103	№ 104	№ 105	№ 106	№ 107	№ 108	
Москва I	Ж	309,86	342,24	330,86	343,69	323,49	319,66	316,85	325,73	
	А	,90	,23	,86	,76	,54	,66	,92	,78	
Пулково	А — Ж	+0,04	-0,01	0,00	+0,07	+0,05	0,00	+0,07	+0,05	+0,03
	Ж	316,64	350,78	339,20	352,34	331,46	326,94	324,14	332,94	
Полтава	А	,64	,82	,31	,42	,60	,94	,20	33,00	
	Тбилиси	А — Ж	0,00	+ 4	+ 11	+ 8	+ 14	0,00	+ 6	+ 6
Ж		300,16	330,08	319,19	331,10	312,50	309,39	306,86	315,19	
Тбилиси	А	,22	,16	,16	,09	,53	,34	,96	,21	
	Москва II	А — Ж	+ 6	+ 8	- 3	- 1	+ 3	- 5	+ 10	+ 5
Ж		286,74	313,60	303,46	314,46	297,46	-	293,08	301,08	
Москва II	А	,78	,64	,42	,56	,50	-	,12	,10	
	Москва II	А — Ж	+ 4	+ 4	- 4	+ 10	+ 4	-	+ 4	+ 2
Ж		309,70	342,06	330,80	343,52	323,36	320,37	-	325,51	
Средняя величина разностей	А	,73	,14	,86	,63	,43	,40	-	,56	
	А — Ж	+ 3	+ 8	+ 6	+ 11	+ 7	+ 3		+ 5	+0,05
		+0,03	+0,05	+0,02	+0,07	+0,07	0,0	+0,07	+0,05	+0,04

ограничиться визуальным наблюдением, при условии, например, применения неоновой лампочки для освещения поля зрения микроскопа. Если неоновая лампочка будет вспыхивать только в моменты размыкания и замыкания электрического тока хронометром, то наблюдатель сможет отсчитать положение маятника в поле зрения по специальной шкале практически без заметной личной ошибки и с очень большой точностью. При таком способе отсчета случайные ошибки отсчета будут настолько ослаблены, что можно будет значительно уменьшить число колебаний маятника в приеме; последнее вообще весьма желательно, ибо позволит сократить время наблюдений и, обеспечив возможность наблюдения при больших амплитудах, уменьшит вредное влияние различных сотрясений маятника.

V. Эталонирование и ошибки масштабного коэффициента k

Как известно, под «эталонированием» упругого маятника понимают определение коэффициента k формулы (I, 1) или (I, 2). Обычно для этой цели производят измерение периода маятника по крайней мере на двух пунктах с известной и возможно более разнящейся силой тяжести. Тогда из (I, 2) можно будет получить два или более уравнений, решая которые относительно k и C , найдем искомые неизвестные. Другие способы эталонирования в СССР не привились. Из вида формулы (I, 1) следует, что ошибка определяемой разности силы тяжести Δg полевой и исходного пунктов пропорциональна ошибке масштабного коэффициента k . Наоборот, при эталонировании ошибка коэффициента k обратно пропорциональна величине интервала силы тяжести пунктов эталонирования.

Если бы имелась возможность определить коэффициент k с относительной ошибкой порядка миллионных долей, то упругие маятники можно было бы использовать для абсолютных измерений силы тяжести. Определив при эталонировании коэффициенты k и C , мы измеряли бы силу тяжести на полевых пунктах, независимо от измерений на местном исходном пункте, если не говорить об учете поправки за вековой ход. Сравнительно большие погрешности коэффициента k делают невозможным точное определение C . Когда мы выписываем C с семью или восемью десятичными знаками, то следует учитывать, что эта запись имеет условное значение, отмечающее некоторый нульпункт величины $C-g$, от которого мы отсчитываем изменение силы тяжести по изменению периода упругого маятника.

Таким образом, именно невозможность точного определения масштабного коэффициента превращает упругие маятники в прибор для относительного определения силы тяжести.

Легко сформулировать требования, которые целесообразно предъявить к точности эталонирования. При производстве общей гравиметрической съемки вообще желательно максимально увеличить интервал силы тяжести для возможного использования упругих маятников, но этот интервал ограничивается продолжительностью рейсов полевых партий. Решающую роль здесь имеет величина вариаций векового хода маятников и необходимость контроля их поведения, а также и некоторые другие причины. Опыт показал, что вследствие всех этих причин в течение одного рейса редко приходится работать в интервале силы тяжести, превосходящем 150—200 мгл. Отсюда следует, что точность определения коэффициента k порядка $\frac{1}{2}\%$ вполне достаточна для работ по общей съемке.

На основании формулы (I, 1) можно заключить, что эталонирование принципиально выполнимо лабораторным способом, по измерениям линейных размеров пластинки и маятника.

Очевидно, что упомянутую точность обеспечить непосредственными измерениями нетрудно, но такой способ эталонирования возможно при-

Отсутствие указанных ошибок затрудняет анализ постоянства коэффициентов. Впрочем, накопленный материал относится к столь короткому промежутку времени, что делать на его основании выводы об изменчивости коэффициентов было бы все равно затруднительно. На основании теоретических соображений можно с большой степенью вероятности утверждать, что коэффициент k должен быть постоянным и практически не зависеть ни от времени ни от влияния внешних условий. Данные таблицы отнюдь не противоречат этому заключению.

Приведем теперь результаты эталонирования, исполненного в 1941 г. для маятников ЦНИИГАиК нового изготовления.

Таблица 17
Результаты эталонирования 1941 г.

№ маятника	k в 10^8 см	Ошибки m_k
101	790,2	$\pm 1,1$
102	845,7	1,5
103	794,9	0,6
104	837,7	1,9
105	785,6	2,6
106	818,0	0,8
107	809,2	2,9
108	858,9	1,3
Средняя кв. ошибка одного определения		$\pm 1,8$

В данном случае, когда налицо имеются ошибки, полученные из уравнительных вычислений, к сожалению, нельзя сопоставить результат с повторными эталонированиями, так как вследствие войны последние не могли производиться.

Программа выполнения эталонирования за весь период времени в сущности изменениям не подвергалась. Наблюдения всегда производились в Москве, Пулкове, Полтаве и Одессе или Тбилиси; на каждом пункте наблюдения продолжались не меньше двух дней, причем все эталонирование растягивалось на месяц — полтора. Наблюдения в Москве до и после эталонирования позволяли получить поправку за вековой ход. Действующее наставление сохранило эту программу наблюдений, сократив лишь обязательное число приемов по сравнению с тем числом, которое наблюдалось в 1938/1939 г., так как тогда производилось явно излишнее количество наблюдений.

Сопоставляя по-разному вычисленные ошибки одного эталонирования из таблиц 16 и 17, надо учесть, что маятники выпуска 1940 г. по качеству значительно выше маятников выпуска 1938 — 1939 гг.

Интервал изменения силы тяжести от Пулкова до Одессы равен, примерно, 1200 мгл. Таким образом, мы видим, что величина этого интервала при четырех «точках» эталонирования обеспечивает точность определения k порядка 0,3 — 0,5%. Такая точность достаточна для определения силы тяжести в интервале около 300 мгл, желательно лишь следить, чтобы сила тяжести полевых пунктов лежала внутри интервала силы тяжести при эталонировании.

В настоящее время мы считаем вполне возможным изменить параграф Наставления, касающийся необходимости регулярного повторения эталонирования через каждые три года. Если пока, может быть, еще

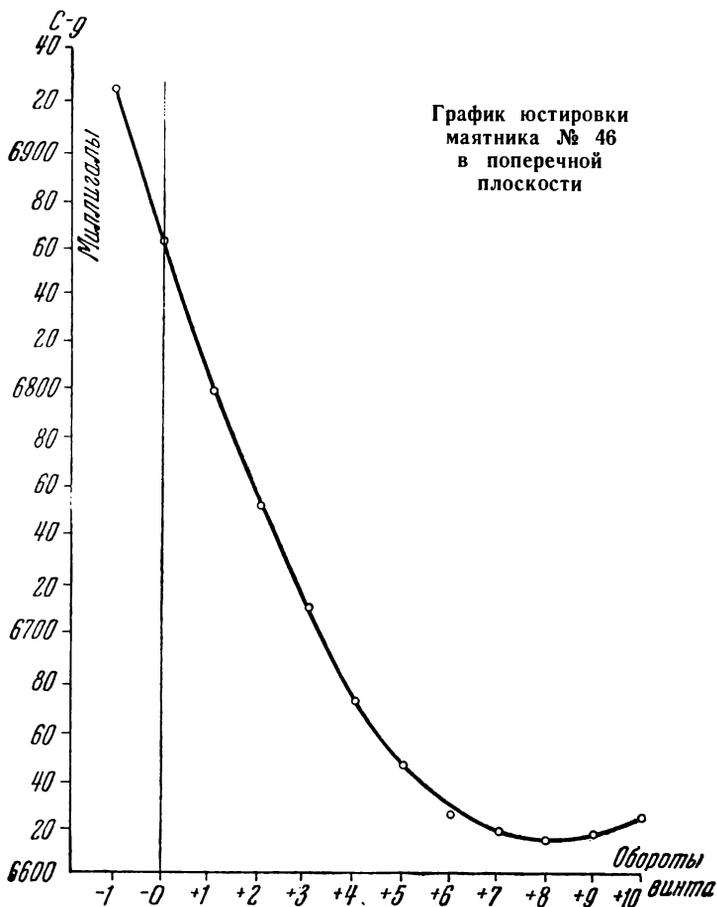
рано совсем отказываться от повторения эталонирований, то во всяком случае к нему можно прибегать не раньше чем через 5—6 лет и, убедившись в правильности и постоянстве коэффициента k , больше уже не возвращаться в дальнейшем к этому вопросу. Для контроля k после первого эталонирования полезно следить, не появляется ли корреляция между разностями силы тяжести, полученными по различным маятникам, с ходом самой силы тяжести.

VI. Влияние нивелировки

При изготовлении каждого упругого маятника стремятся отъюстировать его таким образом, чтобы в положении равновесия ось маятника совпадала с вертикалью. Для этой цели существуют специальные юстировочные винты. Положение маятника после закрепления юстировочных винтов фиксируется индексом рамки и уровнем, нивелирующим плоскость колебаний. Чтобы привести маятник в вертикальное положение, необходимо привести ось уровня в горизонтальное положение и установить успокоившийся маятник по индексу. В дальнейшем будем называть плоскость колебаний маятника «продольной» плоскостью прибора, а перпендикулярную к ней плоскость — «поперечной» плоскостью.

Влияние нивелировки маятников в обеих плоскостях на измерение силы тяжести обусловлено точностью первичной юстировки маятников, а также точностью установки маятника по индексу и уровню.

Первые модели маятников ЦНИИГАиК, включая приборы, выпущенные в 1939 году, были менее удачными в отношении юстировки,



Черт. 6

чем маятники, изготовленные в 1940 г. Для характеристики качества приборов старых выпусков приведем (черт. 6 и 7) графики влияния наклонов на маятник № 46 — один из лучших маятников выпуска 1939 г. (по наблюдениям А. М. Лозинской).

Идеально отъюстированный и правильно установленный маятник должен иметь максимальный период; наклон в любой плоскости вызы-

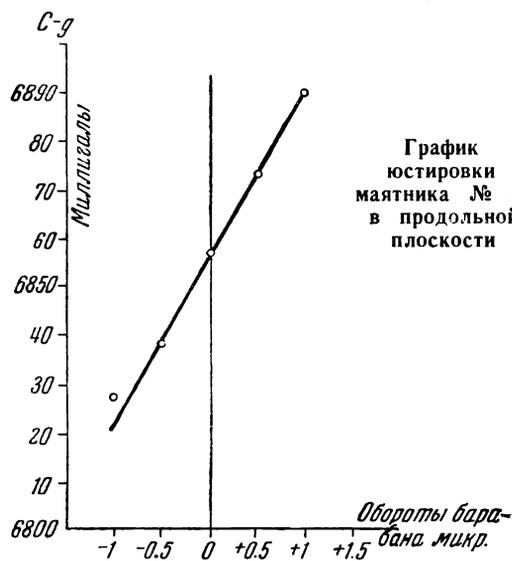


График юстировки маятника № 46 в продольной плоскости

Черт. 7

вает уменьшение периода колебаний. На этом основана проверка юстировки маятников. Правила проверки изложены в Наставлении, и здесь мы их описывать не будем. Сущность работы заключается в том, что маятнику задаются сравнительно большие наклоны в продольной и поперечной плоскости, и при этом измеряется период маятника для сопоставления с периодом в нормальном положении. Разумеется, что предварительно все наблюдения должны быть приведены к одной температуре, а эту операцию удобнее провести, исправив за температуру не период, а упругую постоянную S . Поэтому на график лучше наносить вели-

чину $S-g$; максимуму периода будет соответствовать минимум величины $S-g$.

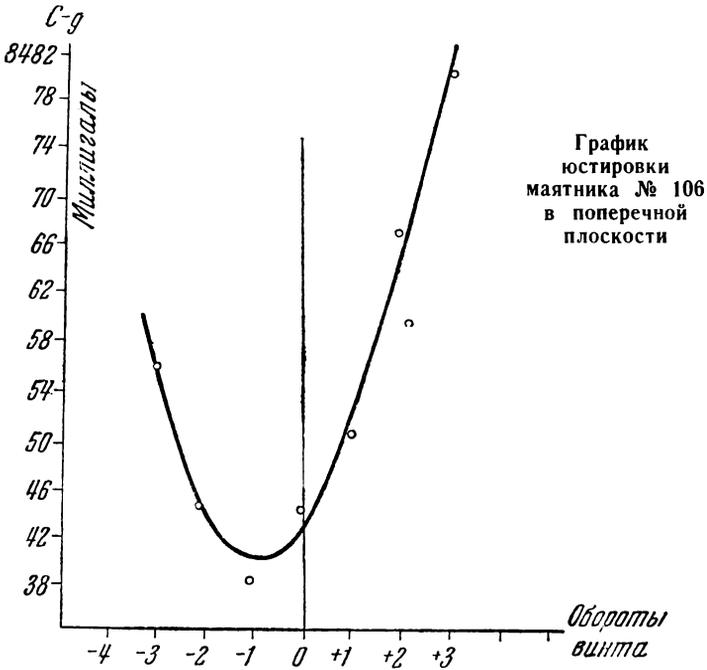
Чертеж 6 изображает результат исследования влияния изменения нивелировки в поперечной плоскости. По оси абсцисс отложены наклоны продольной плоскости, измеренные оборотами подъемного винта подставки маятника. Одному обороту соответствует изменение наклона, равное $10'$ дуги. Счет оборотов ведется от фиксированного нормального положения в обе стороны. По оси ординат отложены соответствующие значения $S-g$ в мгл.

Черт. 6 показывает, что минимум величины $S-g$, для которого влияние изменения нивелировки равно нулю, соответствует наклону продольной плоскости по отношению к фиксированному положению на 8 оборотов винта, т. е. на $1^\circ 20'$. При нормальном положении, отмеченном на графике вертикальной чертой, наклон в $10'$ вызывает изменение величины $S-g$ на 75 мгл. Цена деления «поперечного» уровня равна $10''$, но нивелировка по уровню обычно удаётся лишь с точностью до двух делений уровня, т. е. до $\pm 20''$. Отсюда следует, что ошибка в силе тяжести только за счет ошибки нивелировки в поперечной плоскости равна $\pm 2,5$ мгл. Такая величина ошибки является, конечно, совершенно нетерпимой.

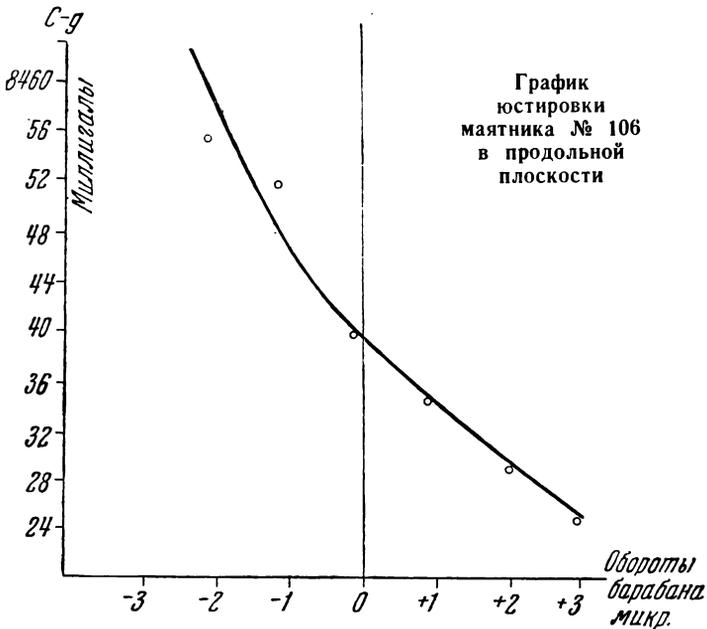
На черт. 7 дан результат проверки юстировки в продольной плоскости. По оси абсцисс отложены наклоны маятника в положении равновесия, измеренные в оборотах барабана микрометра, по оси ординат $S-g$.

Исследование удалось провести только в пределах одного оборота барабана в каждую сторону от нормального положения. Поэтому на графике не отмечено положение минимума. Одному обороту микрометра соответствует изменение $S-g$ на 34 мгл. Точность совмещения нити микрометра с индексом в приборах 1938 и 1939 гг. равна, примерно, 0,05 оборота барабана. Следовательно, ошибка в силе тяжести за счет влияния неточности продольной нивелировки составляет около $\pm 1,7$ мгл.

Суммарное влияние ошибок, вызванных нивелировкой обеих плоскостей, равно $\pm 3,0$ мгл. В сущности, этими ошибками и лимитировалась точность измерения силы тяжести упругими маятниками Рудаковского в 1938/39 г. Укажем, что если влияние ошибок продольной нивели-

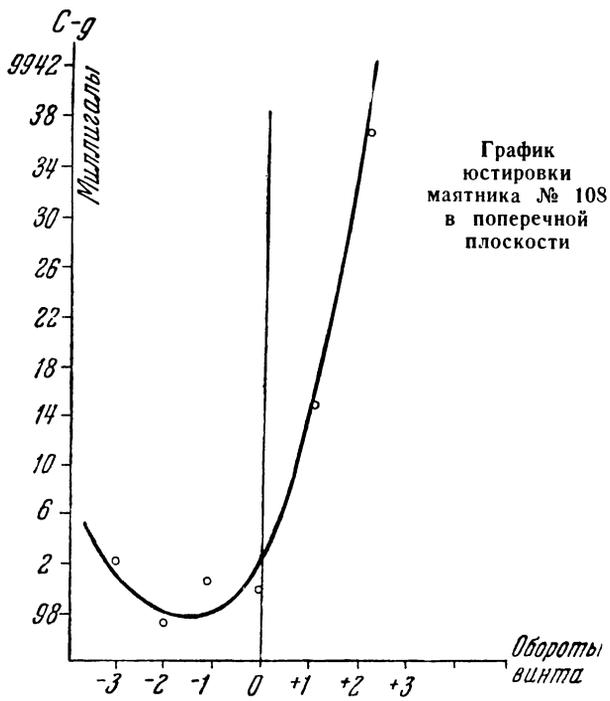


Черт. 8

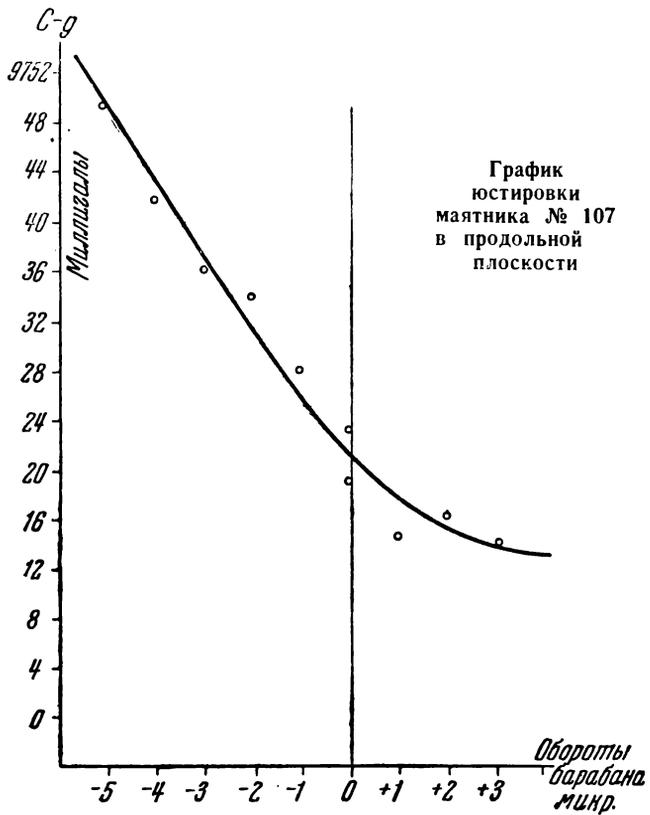


Черт. 9

ровки имеет случайный характер и компенсируется с увеличением числа приемов, то ошибка поперечной нивелировки зачастую носит систематический характер и целиком входит в результат измерения силы тяжести на пункте.

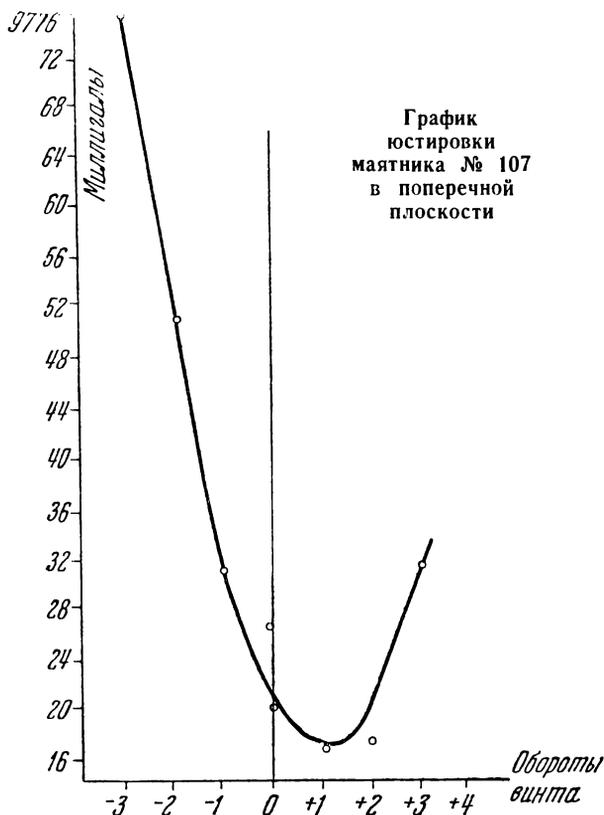


Черт. 10



Черт. 11

Указанное выше положение изменилось в 1940 году. На прилагаемых графиках (черт. 8—13) даны результаты поверки юстировки маятников № 106, 107 и 108 выпуска 1940 года (по на-



Черт. 12



Черт. 13

блюдениям М. Е. Хейфеца и Г. М. Шлефендорфа). Здесь нормальное положение маятников уже близко к положению, соответствующему минимуму $C - g$. Среднее влияние ошибок продольной и поперечной

нивелировок при той же точности нивелирования равно $\pm 0,3$ мгл. — $0,5$ мгл и практически является пренебрегаемо малой величиной (масштаб графиков по необходимости значительно отличается от масштаба, который был принят для графика маятника № 46).

VII. Эффект «сокачания»

Выбор надлежащего места для наблюдений с упругими маятниками в населенных районах зачастую бывает затруднительным. Движение людей и транспорта, работа двигателей и моторов, даже просто хлопанье дверьми вызывает сотрясения маятников, губительно отражающиеся на точности наблюдений. Самые неблагоприятные условия для наблюдений обычно встречаются там, где нужна наибольшая точность: на опорных пунктах, расположенных, как правило, в больших городах. Выбирая место для опорных гравиметрических пунктов, всегда стараются подобрать наиболее выгодные условия для наблюдений, с обычными маятниковыми приборами и совершенно не принимают во внимание тех обстоятельств, которые должны учитываться при работе с упругими маятниками. Каждый, производивший наблюдения упругих маятников, знает, что вопрос выбора подходящего места для наблюдений в городах является весьма серьезным вопросом; ему уделяют много внимания все исследователи, значительное место отведено ему и в Наставлении.

Необходимость тщательного подбора помещения для наблюдений приводила первое время к тому, что наблюдателю приходилось по нескольку раз менять помещения, пока удавалось найти вполне пригодное. При этом случалось, что в близко расположенных друг от друга помещениях наблюдения давали заметные систематические расхождения. Отсюда зародилась мысль, что период упругого маятника может зависеть при вполне хороших условиях наблюдений от того места, на котором установлен прибор; иначе говоря, было высказано подозрение, что для упругих маятников, как и для обычных, имеет место отдача энергии маятников на раскачивание подставки. Понятно, что этот эффект, если он действительно существует, должен зависеть от прочности опоры, на которой установлены маятники, и, следовательно, не может быть постоянным. Возникла угроза осложнения метода упругих маятников учетом влияния сокачания, но такой учет, достаточно сложный и для обычных маятников, мог свести на-нет все преимущества метода упругих маятников.

Исследование реального действия эффекта сокачания можно провести либо теоретически, либо эмпирически. Первый способ требует весьма громоздких и сложных расчетов и в конечном итоге нуждается в организации дополнительных экспериментов для проверки теоретических заключений. Очевидно рациональнее убедиться предварительно на опыте в том, что сокачание имеет достаточно заметную величину, и только после этого решить, необходимо ли заняться выводом соответствующих формул.

Мы не можем отрицать того, что у ряда наблюдателей, работавших с одним и тем же прибором в смежных помещениях, получались систематически разные результаты. Но самая величина получавшихся разностей периодов всегда была малой (не больше 3—4 мгл). Кроме того, накопленные данные страдают тем, что наблюдения носили случайный характер, были малочисленны и в материалах не зафиксированы все условия, которые могли влиять на результат; не были также приняты меры, позволяющие выделить сокачание в чистом виде. Поэтому упомянутые материалы мы приводить не будем и остановимся только на результатах специальных исследований, проведенных нами для выявления указанного эффекта. Что касается объяснения случавшихся иногда небольших систематических расхождений, то достаточно ска-

зять, что они могли быть вызваны неощутимо малой погрешностью в поперечной нивелировке маятников, или небольшим изменением личной ошибки наблюдателя, или резонансным действием колебаний почвы под влиянием работы какого-либо двигателя и т. д. Как видим, имеется достаточно много объяснений получившимся расхождениям и без гипотезы сокачания.

Мы занялись исследованием влияния сокачания экспериментально. В частности, подобные специальные опыты были поставлены нами в марте и апреле 1944 года в Ашхабаде и Ташкенте. При этом мы были озабочены тем, чтобы получить влияние сокачания в наиболее чистом виде, не осложненном действием других погрешностей. Для эксперимента был выбран маятник № 107. Качество его юстировки видно из вышеприведенных графиков; очевидно, что оно никак не могло повлиять на результат. Помещение для наблюдений как в Ашхабаде, так и в Ташкенте было очень хорошим, но в целях максимальной осторожности все наблюдения производились только глубокой ночью (с 23 часов до 4 часов утра). Температурный режим был весьма благоприятным, и изменения температуры были ничтожными. Чтобы контролировать поведение личной ошибки, весьма опасной в данном случае, к наблюдениям был привлечен второй опытный наблюдатель — Г. М. Шлефендорф.

Для выявления эффекта сокачания требуется отнаблюдать маятники на опорах резко различающейся прочности. Чем больше будет разница в прочности опор, тем ярче и убедительнее будет результат. Мы решили попытаться сравнить наблюдения при обычных условиях с наблюдениями, произведенными при установке прибора на резиновых прокладках. Большую вариацию прочности опоры создать вообще невозможно, и трудно представить себе, чтобы на практике условия наблюдений хоть в какой-либо мере приблизились к условиям наблюдений, создающимся при пользовании резиновыми прокладками.

Провести эксперимент с резиновыми прокладками чрезвычайно трудно. Наблюдения упругих маятников даже на нормальной опоре требуют большой осторожности и напряжения сил и внимания наблюдателя. Малейшее неосторожное его движение отражается на маятнике. Наставление обязывает в процессе наблюдений сохранять полную неподвижность; наблюдатель допускает только поворот головы и движения рук для записи. Еще большую осторожность надо соблюдать, когда маятник стоит на зыбкой резиновой прокладке. В этом случае даже запись ведет помощник под диктовку наблюдателя. Но самое трудное заключается в надлежащей установке маятника. Как известно, после дезарретирования пластинка маятника сохраняет некоторую остаточную деформацию изгиба, вызывающую сползание изображения маятника в течение некоторого времени и затрудняющую нивелировку и установку прибора. Во время эксперимента с резиновыми прокладками все эти трудности возрастают во много раз. Когда с соблюдением чрезвычайных предосторожностей маятник был отнивелирован, он после первого же легкого прикосновения снова лег на упор; тогда он снова был отнивелирован, но после запуска его нивелировка опять резко нарушилась. Нивелировка подправлялась и маятник снова запускался предельно легкими и осторожными движениями. Постепенно положение маятника начало приобретать какую-то медленно возрастающую устойчивость и спустя три часа после установки маятник перестал «сползать». Тогда оказалось возможным наблюдать приемы нормального качества, хотя утомление наблюдателей к этому времени было весьма большим.

Техника установки прокладок такова: были взяты 6 металлических кружков одинакового размера и по ним вырезаны резиновые кружки

толщиной около 2 мм. Три металлических кружка укладывались в нише капитальной стены или на столбе, где обычно устанавливался прибор, на расстояниях, соответствующих расстояниям между ножками прибора. На эти кружки клались резиновые прокладки, а сверху них — три оставшихся металлических кружка. Затем на образовавшиеся подпятники с резиновыми прокладками ставилась подставка маятников. Во избежание скольжения ножек по металлу, на кружках были сделаны небольшие углубления, куда входили концы подъемных винтов.

Наблюдения велись в Ашхабаде 9 и 11 марта 1944 года и в Ташкенте 31 марта и 1 апреля того же года. 9 марта Хейфец и Шлефендорф отнаблюдали в нормальном положении прибора по два приема каждый. Затем прибор был установлен на описанные подпятники, и каждый наблюдатель выполнил по два приема в этом положении. 11 марта наблюдения начались при положении прибора на подпятниках. Хейфец отнаблюдал 3 приема и Шлефендорф — 4 приема. Затем подпятники были удалены, и в нормальном положении Хейфец отнаблюдал три приема и Шлефендорф — 2 приема.

Всего в Ашхабаде при подпятниках с резиновыми прокладками Хейфец отнаблюдал 5 приемов, Шлефендорф — 6 приемов. В нормальном положении они соответственно отнаблюдали 5 и 4 приема, причем последние были частично отнаблюдены до работы на подпятниках и частично — после, что позволило контролировать поведение маятников во время эксперимента.

Таблица 18

Результат определения влияния сокачания

Наблюдатель	Дата	Число исполненных приемов	В миллигалах		Н — Р
			C — g		
			Н	Р	
Наблюдения в Ашхабаде					
X	9 III	2	9713,4		+ 2,7
X	9 III	2		9710,7	
III	9 III	2	9713,8		+ 6,1
III	9 III	2		9707,7	
X	11 III	3	9712,9		+ 0,4
X	11 III	3		9712,5	
III	11 III	2	9707,3		+ 0,8
III	11 III	4		9706,5	
Среднее в Ашхабаде . . .					+ 2,5
Наблюдения в Ташкенте					
X	31 III	3	9465,9		
X	1 IV	5		9472,0	
X	1 IV	3	9468,8		
Среднее			9467,4		— 4,6
III	31 III	4	9472,4		
III	1 IV	5		9467,8	
III	1 IV	4	9466,0		
Среднее			9469,4		+ 1,6
Среднее в Ташкенте . . .					— 1,5

Таков же был порядок наблюдений и в Ташкенте. Здесь 31 марта Хейфец и Шлефендорф отнаблюдали 3 и 4 приема в нормальном положении. Затем были установлены подпятники, но надлежащую устойчивость прибор на подпятниках приобрел лишь к 1 апреля. Тогда каждый наблюдатель выполнил по 5 приемов. Затем подпятники были удалены, и в нормальном положении для контроля отнаблюдены 3 и 4 приема (результаты наблюдений даны в табл. 18). Наблюдения в нормальном положении обозначены буквой «Н», а на подпятниках — буквой «Р». Наблюдатели отмечены первыми буквами фамилии. Разность результатов, полученных для каждого способа установки прибора, выведена по каждому наблюдателю в отдельности.

Рассмотрение данных таблицы 18 убеждает нас в том, что ни о каком реальном значении сокачания говорить не приходится. Разности «Н — Р» не выходят за пределы ошибок наблюдений и колебаний личных ошибок наблюдателей, несмотря на совершенно необычный способ установки маятников на резиновых прокладках.

Результаты эксперимента указывают на практическое отсутствие влияния прочности опоры маятников на точность измерения силы тяжести. Правда, Наставление дает ряд ограничений для выбора места установки прибора, но эти ограничения могут лишь уменьшить риск искажения наблюдений посторонними динамическими явлениями. Именно эти посторонние явления, как, например, действие на маятник движений самого наблюдателя, являются весьма опасными факторами; они и должны определять требования, предъявляемые к месту установки прибора.

VIII. Вековой ход маятников

Наиболее важной характеристикой упругих маятников, определяющей точность наблюдений и всю организацию работ по измерению силы тяжести этим прибором, является величина изменения упругих свойств пластинки с течением времени. Мы не в состоянии указать какую-либо закономерность или причину, связывающую период маятника со временем. Здесь, повидимому, имеют место тонкие молекулярные процессы, развитие которых при современном уровне знаний вряд ли можно предусмотреть и проанализировать теоретически. Опыт показывает, что поведение различных маятников столь различно при совершенно, казалось бы, одинаковых условиях изготовления и работы с ними в поле, что весьма трудно делать сколько-нибудь обоснованное заключение и прогнозы о характере изменения коэффициента C в формуле (I, 1).

Наши сведения об изменениях C с течением времени, называемых «вековым ходом» маятника, ограничиваются следующим: в течение первых недель после изготовления маятника коэффициент C довольно быстро уменьшается со скоростью, нередко достигающей нескольких миллигал в сутки. Постепенно ход уменьшается, так что его график напоминает логарифмическую кривую, причем все яснее вырисовывается волнообразный характер кривой векового хода. В некоторых случаях волны или колебания векового хода удается объяснить определенными причинами. Мы уже говорили о возможности влияния температурного последствия, обуславливающего появление таких волн; известно также, что в случае небрежной перевозки маятников появляются значительные вариации упругой постоянной, но в этих случаях мы уже не можем относить такие вариации к собственно вековому ходу и, зная причины их появления, будем добиваться и устранения их.

В настоящей главе речь будет идти только о собственно вековом ходе, к которому мы вынуждены относить все изменения упругой постоянной C , обусловленные неизвестными нам причинами и вследствие этого рассматриваемые, как функции только времени.

Поведение «молодых» маятников в течение первых недель после изготовления описано Рудаковским [8] и другими авторами, и мы на нем останавливаться не будем вследствие полной очевидности вывода, который надо сделать на основании их работ: пока у маятника велик вековой ход, с ним не следует производить наблюдений. Мы со своей стороны можем только полностью подтвердить правильность имеющихся описаний поведения «молодых» маятников.

Постараемся осветить характер поведения маятников, «возраст» которых таков, что допускает их участие в работе, имеющей производственное значение.

Для набора материалов о вековом ходе маятников обстоятельства сложились весьма неблагоприятно. Через наши руки прошли 16 маятников, изготовленных Рудаковским в течение 1938—1940 гг., за судьбой которых мы намерены были следить в течение длительного времени, но часть этих маятников погибла во время войны, а по другим маятникам исчез материал наблюдений. В настоящее время мы имеем возможность привести с достаточной полнотой только данные о маятниках № 106, 107 и 108, изготовленных в 1940 году и работавших в Каракумской экспедиции. Этот материал является интересным и поучительным; он охватывает год экспедиционных работ, проводившихся в разнообразных условиях как в летнее, так и в зимнее время.

Комплект маятников был привезен в Ашхабад в конце 1942 года. С января 1943 года начались регулярные наблюдения, закончившиеся в марте 1944 года. После каждого рейса, продолжавшегося 15—40 дней, маятники привозились для контрольных наблюдений в Ашхабад, на Серный завод или в Байрам-Али. Эти контрольные наблюдения доставляют материал для суждения о вековом ходе и его вариациях.

Приведем таблицу значений C , определенных при помощи известных величин силы тяжести на упомянутых пунктах (табл. 19).

Таблица 19

Значения C маятников № 106, 107 и 108

№ по порядку	Название пункта	Дата	Средняя температура	C (в миллигалах)		
				маятник № 106	маятник № 107	маятник № 108
1	Ашхабад I	8 I 1943 г.	11°,6	989566,0	989583,8	989700,3
2	Серный Завод I	24 I 1943 г.	7,2	67,8	81,4	08,8
3	Серный Завод II	6 II 1943 г.	8,8	77,8	95,4	16,4
4	Серный Завод III	8 III 1943 г.	9,7	68,9	72,4	13,4
5	Ашхабад II	16 IV 1943 г.	16,1	61,5	69,4	10,2
6	Ашхабад III	4 V 1943 г.	18,1	65,9	66,8	04,0
7	Серный Завод IV	10 VI 1943 г.	25,6	57,6	59,6	07,0
8	Ашхабад IV	13 VII 1943 г.	25,8	61,4	39,0	15,4
9	Серный Завод V	18 VII 1943 г.	29,5	59,6	41,6	15,0
10	Ашхабад V	26 VII 1943 г.	27,2	67,0	41,0	14,6
11	Ашхабад VI	30 IX 1943 г.	22,6	61,0	37,8	19,9
12	Байрам-Али I	10 XI 1943 г.	11,3	72,9	44,2	33,3
13	Байрам-Али II	10 XII 1943 г.	11,7	75,1	54,7	33,0
14	Ашхабад VII	25 I 1944 г.	11,8	74,5	52,9	34,2
15	Ашхабад VIII	13 III 1944 г.	15,8	75,0	55,7	33,8

По данным этой таблицы составлены графики векового хода маятников (верхние линии на чертежах 14, 15 и 16). На них по оси

абсцисс отложены даты наблюдений, а по оси ординат — значения C ; соответствующие точки соединены между собою поочередно отрезками прямых линий.

Понимая вековой ход в вышеупомянутом смысле, сопоставим его с ходом температуры, при которой производились наблюдения; таким образом, мы можем установить, не объясняется ли вековой ход маятника просто ошибками их температурных коэффициентов. Для этой цели на графиках второй ломаной линией изображен ход температуры при наблюдениях на опорных пунктах; точки, группирующиеся вблизи этой линии, дают температуры при наблюдениях на полевых пунктах в соответствующие даты.

Нетрудно заметить, что между графиками векового хода и температур существует определенная корреляция. Особенно чувствуется корреляция для маятника № 106, где график температур дает почти зеркальное изображение графика векового хода.

Естественно, что прежде всего надлежало бы уточнить значение температурных коэффициентов маятников (C вычислено с коэффициентами, приведенными в табл. 14), определив их вновь, и лишь потом приступить к строгому анализу вариаций векового хода. Однако в военные годы оказалось невозможным провести новое исследование, и мы вынуждены сейчас ограничиться только приближенным анализом векового хода.

Попытаемся освободить вековой ход от влияния температуры при помощи только тех данных, которыми мы располагаем. Очевидно, что эта задача трудная и в значительной мере неопределенная, поскольку нам не известны ни точные значения температурных коэффициентов, ни закон изменения C с течением времени. Введем поэтому естественное и вероятное допущение, что вековой ход является непрерывной функцией времени, и что, выбрав достаточно малый промежуток времени, мы можем пренебречь изменением C за этот промежуток. Графики наблюденного векового хода подтверждают законность нашего допущения. Но в таком случае мы получаем право вывести приближенные поправки температурных коэффициентов, используя наблюдения на опорных пунктах, разделенных малыми промежутками времени, если эти наблюдения производились в достаточно большом интервале температур и явно не содержат грубых ошибок.

Возьмем, например, маятник № 106 и составим разности температур Δt и разности ΔC значений C по строкам таблицы 19, вычитая из данных второй строки данные первой строки, затем из данных третьей строки — данные второй строки и т. д. Тогда получим следующую таблицу:

Δt	ΔC
— 4°,4	+ 1,8 мгл.
(+ 1 ,6)	(+ 10,0)
(+ 0 ,9)	(— 8,9)
+ 6 ,4	— 7,4
(+ 2 ,0)	(+ 4,4)
+ 7 ,5	— 8,3
(+ 0 ,2)	(+ 3,8)
+ 3 ,7	— 1,8
— 2 ,3	+ 7,4
— 4 ,6	— 6,0
— 11 ,3	+ 11,9
(+ 0 ,4)	(+ 2,2)
(+ 0 ,1)	(— 0,6)
+ 4 ,0	+ 0,5

Здесь в скобки взяты величины, полученные для слишком малых разностей температуры и поэтому исключенные из рассмотрения. Раз-

делив ΔC на соответствующее Δt , получим искомую поправку температурного коэффициента $\Delta\alpha$. Применение способа наименьших квадратов в данном случае явно нецелесообразно, и из 8 полученных значений $\Delta\alpha$ можно просто взять среднее. В этом случае находим:

$$\Delta\alpha_{106} = -0.81.$$

Аналогичным способом получим для маятников № 107 и 108:

$$\Delta\alpha_{107} = -0.70; \quad \Delta\alpha_{108} = -1.20.$$

Согласованность поправок коэффициентов всех трех маятников не может не вызвать удивления. Нельзя уверенно сказать, заключается ли дело в какой-то систематической ошибке определения коэффициентов в 1941 году, или в изменении коэффициентов с течением времени, или здесь имеет место простая случайность. Перейдем к выяснению реальности полученных поправок и выводу новых значений C , исправленных за температуру с новыми температурными коэффициентами.

Вводя в C новые температурные поправки, получим взамен табл. 19 новую таблицу 20.

Таблица 20

Значения C , исправленные новыми температурными поправками

№ по порядку	C		
	маятник № 106	маятник № 107	маятник № 108
1	989 575,4	989 591,9	989 714,2
2	73,6	586,4	17,4
3	85,0	601,6	27,0
4	76,8	579,2	25,0
5	77,0	80,7	29,5
6	80,6	79,5	31,7
7	78,3	77,5	37,7
8	82,3	57,1	36,4
9	83,4	62,3	40,4
10	89,1	60,0	47,2
11	79,3	53,7	47,0
12	82,0	52,1	46,9
13	84,6	62,9	47,0
14	84,0	61,2	48,2
15	86,9	64,4	56,1

На графиках эти данные изображаются ломаными линиями, расположенными ниже кривых температур. Новые графики, конечно, уже не имеют корреляции с температурой. Для маятников № 106 и 108 получилось улучшение результата, течение кривой стало более плавным, уменьшился разброс точек. По маятнику № 107 наступило скорее ухудшение. Разброс точек здесь увеличился, а общий вид кривой изменился мало.

Как на старых, так и на новых графиках бросается в глаза большой параллельный отскок всех трех маятников на пункте Серный Завод II и отскок маятников № 106 и 108 на пункте Серный Завод V. Если бы этих отскоков не было, поведение маятников № 106 и 107 можно было бы назвать прекрасным.

Случайно ли совпадают эти отскоки с наимизшей и наивысшей точками на температурной кривой? Мы полагаем, что не случайно. Наблюдения на пункте Серный Завод II производились в то время, когда в центральных районах Кара-Кум температура достигала -20° . При перевозке маятников вьюком они подвергались длительному действию очень низкой температуры, а по прибытии на Серный Завод пришлось наблюдать при температуре $+7^{\circ}$, $+8^{\circ}$. Значит, маятники получили «температурный толчок», несомненно явившийся причиной отскока всех трех маятников. Условия для работы были столь очевидно неблагоприятными, что пришлось отложить наблюдения до наступления весенней погоды. Нечто аналогичное имело место и летом, когда температура в Кара-Кумах достигала $+45^{\circ}$ в тени и когда невозможно было защитить маятники при перевозке от весьма сильного перегрева; наблюдать же можно было только при более низкой температуре (перед рассветом, когда температура была меньше 30°). Резкий отскок маятников показал, что необходимо снова отложить наблюдения до наступления более благоприятных температурных условий, и работы были прерваны до октября.

Мы полагаем, что поведение маятников и вариации векового хода зависят от подобных температурных толчков и влияния температурного последействия. Борьба с этими влияниями вообще нелегка, и возможно, что дальнейшее усовершенствование метода упругих маятников будет сопряжено с применением каких-либо специальных термостатов.

Нам необходимо оценить влияние вариаций векового хода на точность измерения силы тяжести. Этот вопрос очевидно связан с методом интерполяции величины S на моменты наблюдения на полевых пунктах. Займемся выбором такого метода.

Если бы все ошибки наблюдений были равны нулю, мы должны были бы считать точки изломов векового хода твердыми точками и значения S для полевых пунктов получать простой интерполяцией между значениями S на опорных пунктах, заботясь лишь о том, чтобы наблюдения на опорных пунктах были достаточно частыми. Наоборот, если бы вариации векового хода были исчезающе малыми по сравнению со случайными ошибками наблюдений, нам пришлось бы через все точки провести некоторую прямую и интерполицию значений S вести по этой прямой. В действительности мы должны считать с тем, что график векового хода получается, как резульат суммарного действия ошибок наблюдений и действительных изменений S с течением времени, причем закон этих изменений нам неизвестен.

Руководствуясь упомянутым уже принципом непрерывности векового хода, можно предложить следующий весьма простой способ уравнивания наблюденных значений S , который почти равносильен строгому уравниванию по способу наименьших квадратов.

Разобьем все точки излома на графиках векового хода на группы по три точки в каждой таким образом, чтобы образовались треугольники, вершинами которых были бы точки с номерами: 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5; и т. д. Найдем центры тяжести этих треугольников и проведем через них плавную кривую; поскольку первая и последняя точки входят только в первый и последний треугольники, то припишем этим крайним точкам двойной вес. Полученную кривую будем считать уравненной кривой векового хода. На графиках наблюденного и исправленного векового хода уравненные кривые проведены именно этим способом (центры тяжести треугольников обозначены точками, обведенными четырехугольниками). Мы видим, что во всех случаях получаются плавные кривые, хорошо изображающие общее течение векового хода. Если вариации векового хода малы, то центры тяжести треугольников ложатся почти на прямую линию. Отклонение точек ломаных

линий от уравненных кривых можно считать мерилом вариаций векового хода, а тангенсы углов наклона, касательных к уравненным кривым,— величинами мгновенного векового хода.

При вычислении силы тяжести полевых пунктов мы снимаем величины S с уравненных кривых векового хода. В следующей главе остановимся на сопоставлении этого метода с другими методами учета векового хода.

Уравненные кривые даны не только для исправленных графиков векового хода, но и для наблюдаемых, так как теперь мы можем получить количественную характеристику вариаций векового хода в обоих случаях, подтверждающую или опровергающую нашу гипотезу о поправках температурных коэффициентов.

Вычислим среднюю квадратическую величину вариаций векового хода. Для этого измерим на графике отклонения каждой точки излома наблюдаемого и исправленного векового хода от соответствующей уравненной кривой. Не прибегая к экстраполяции, можно провести измерение для 13 точек в каждом случае. Результат измерения дается в таблице 21.

Таблица 21

Вариации δ векового хода (в мгл)

№ точек	Маятник № 106		Маятник № 107		Маятник № 108	
	наблюденного	исправленного	наблюденного	исправленного	наблюденного	исправленного
1	— 1,8	— 4,1	— 4,2	— 5,1	+ 0,8	— 2,0
2	+ 6,5	+ 6,7	+11,8	+12,5	+ 4,8	+ 5,1
3	— 0,7	— 2,5	— 6,9	— 8,2	— 0,2	— 1,8
4	— 3,2	— 1,0	+ 1,5	+ 1,2	+ 2,0	— 0,2
5	+ 4,0	+ 2,0	+ 1,0	+ 0,4	— 3,0	— 0,2
6	— 3,9	— 2,0	+ 5,0	+ 6,7	— 1,8	+ 2,4
7	0,0	— 1,3	— 2,9	— 4,3	+ 1,3	— 3,6
8	— 2,7	— 0,7	+ 1,0	+ 2,3	+ 0,1	— 0,7
9	+ 4,5	+ 3,8	+ 1,0	+ 0,8	— 0,8	+ 4,3
10	— 6,5	— 4,1	— 3,5	— 1,5	— 3,8	0,0
11	+ 2,8	— 0,1	— 1,6	— 4,4	+ 4,0	— 0,1
12	+ 1,3	+ 0,4	+ 5,2	+ 4,2	0,0	— 0,2
13	0,0	— 1,2	— 0,7	— 1,4	— 0,1	— 2,0
Σ^2	166,5	111,9	285,9	361,5	71,6	75,0

В нижеприведенной таблице помещены значения средней квадратической вариации $\delta_{\text{ср.}}$ по каждому маятнику, вычисленные по формуле:

$$\delta_{\text{ср.}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{13}}$$

Маятник № 106		Маятник № 107		Маятник № 108	
наблюденная	исправленная	наблюденная	исправленная	наблюденная	исправленная
3,6	2,9	5,0	5,3	2,3	2,4

Несомненное улучшение результатов получается в сущности только для маятника № 106. Для маятника № 107 поправка заметно ухудшает дело, а маятник № 108 остается почти без изменения. Величина δ определяется, главным образом, отскоком наблюдений на пункте Серный Завод II, и, исключив этот пункт, мы получили бы другой результат, но мы считаем принципиально недопустимым поступить таким образом. Лучше заведомо преувеличить величину ошибки, чем исключать наблюдения на основании гипотез, достоверность которых может быть оспариваема. Но не отбрасывая ничего из наблюдений, мы по результатам последней таблички не можем утверждать, что система исправленных вековых ходов действительно лучше, чем система наблюдаемых. Поэтому вариации по всем трем маятникам мы выводим в обоих вариантах и в среднем получаем, что приблизительно $\delta = \pm 3,5$ мгл. Эту величину мы можем считать равной величине ошибки в силе тяжести, измеренной одним упругим маятником, за счет ошибок учета вариаций векового хода; она больше всех остальных рассмотренных выше ошибок. Ею в настоящее время в основном определяется точность измерения силы тяжести упругими маятниками. Вообще говоря, на различные маятники одного комплекта ошибка учета векового хода действует различно, так что, имея комплект, состоящий из трех маятников, можно полагать, что ошибка в среднем результате измерения силы тяжести, обусловленная вариацией векового хода, будет равна

$$\pm \frac{3,5}{\sqrt{3}} = \pm 2,0 \text{ мгл.}$$

Что касается величины самого векового хода, то по урavnенным кривым наших графиков видим, что за 14 месяцев «мгновенная» величина векового хода нигде не превышает $\pm 0,30$ мгл в сутки и изменяется довольно плавно, имея различную величину и знак не только у разных маятников, но и у одного и того же маятника в разное время.

Характеристика векового хода маятников № 106, 107 и 108 может быть дополнена по результатам небольшой работы, выполненной осенью 1944 года в Алтайском крае (начальник партии Горыня, наблюдатель Шлефендорф). Опорным пунктом был гравиметрический пункт II класса Ойрот-Тура, где в течение июля — ноября 1944 г. было проведено 5 наблюдений.

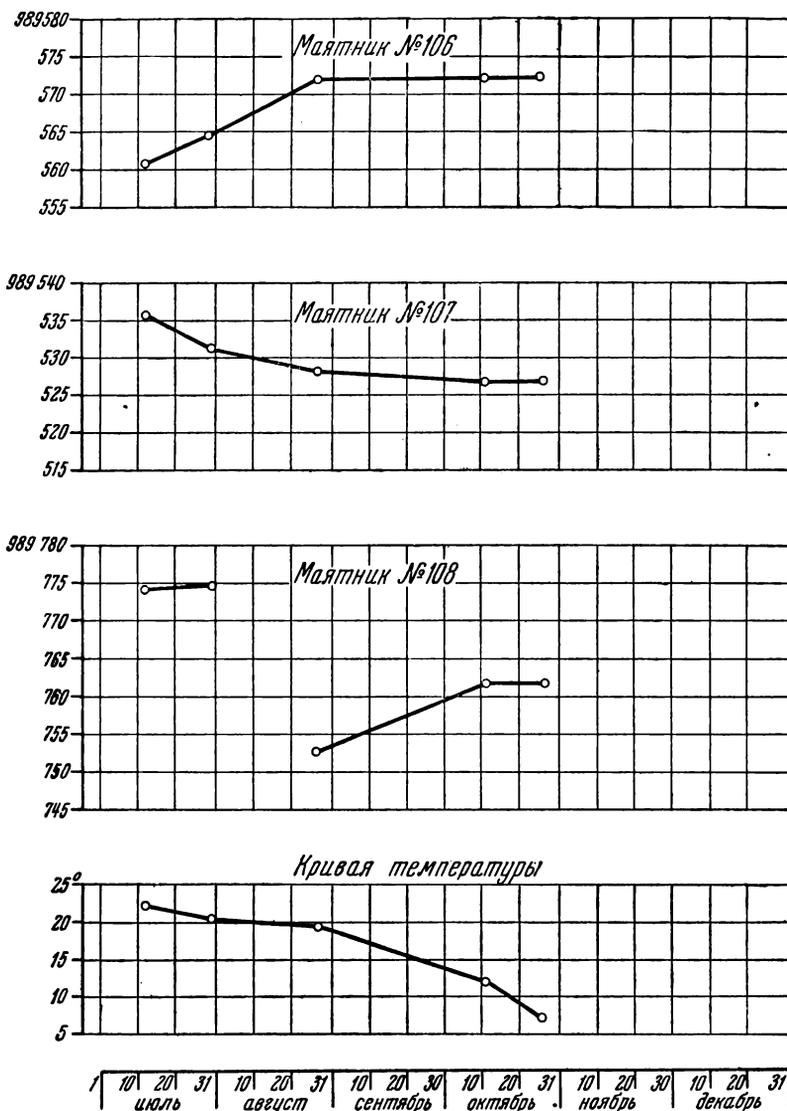
Величины S , найденные из этих наблюдений, даны на черт. 17. Все вычисления произведены с теми же константами, что и в 1943/1944 г. График температур в данном случае не подтверждает заключения о неправильности коэффициентов маятника № 106, но исчерпывающее заключение по этому поводу можно будет сделать только после нового исследования.

В августе 1944 года маятник № 108 претерпел сильный толчок в дезарретированном состоянии, вызвавший резкое уменьшение S на 70 мгл. В течение нескольких дней после этого величина S увеличилась на 40 мгл, но в общем S осталось уменьшенным на 30 мгл по сравнению со своим значением до толчка. Естественное течение векового хода для этого маятника нарушено и делать по нему какие-либо сопоставления с прежними выводами теперь нельзя.

Для остальных маятников мы наблюдаем попрежнему плавное течение векового хода. Любопытно, что за 8 месяцев, истекших со времени окончания Каракумской экспедиции, каждый маятник сохранил характерную для него тенденцию векового хода. S для маятника № 106 в среднем осталось без всякого изменения, как оно в сущности не изменилось и в Кара-Кумах. Для маятника № 107, как и прежде, величина S слегка уменьшалась, изменившись за 8 месяцев еще на 30 мгл.

У маятника № 108 (до аварии) C увеличилось за это время на 45 мгл (за 14 месяцев в Кара-Кумах оно увеличилось на 34 мгл).

Подводя итог нашему обзору поведения маятников за два года в Кара-Кумах и на Алтае, можно заключить, что при нормальном обращении с маятниками, их вековой ход достаточно плавен, чтобы обеспечить точность интерполирования величины упругой постоянной C , достаточную для целей общей гравиметрической съемки.



Черт. 17

Причину неправильных вариаций векового хода скорее всего надо искать в области тех или иных влияний температуры (последствие, температурные толчки и т. д.). Повидимому уменьшения этих вариаций можно добиться только с помощью термостата, как это имеет место для гравиметров других типов, однако для упругих маятников требования к термостату могут быть сильно понижены, что уменьшит также вес и размеры последнего.

IX. Выводы. Практический пример работ Каракумской экспедиции и их результаты

На примере исследования маятников, работающих в настоящее время в производстве, мы изучили влияние основных источников погрешностей, перечисленных в начале статьи. 8-й и 9-й источники не требуют особого изучения, так как аккуратный наблюдатель всегда может создать условия, при которых маятник не будет совершать никаких вынужденных колебаний, а что касается влияния земного магнитного поля, то, вполне возможное теоретически, оно, однако, на практике до сих пор не было обнаружено.

Переходим теперь к рассмотрению того, что характеризует реальные возможности метода упругих маятников, именно к совокупному действию перечисленных источников погрешностей на примере конкретного комплекта маятников № 106, 107 и 108, который нам удалось довольно подробно охарактеризовать в предыдущем изложении. Для этой цели сначала сделаем априорный подсчет точности измерения для работ, проводившихся в 1943 и 1944 гг. в Каракумской экспедиции. Подобный подсчет позволит сделать ряд интересных заключений и сравнить фактическую точность работ с ожидаемой априорно.

Ожидаемую полную ошибку измерения силы тяжести, если комплект состоит из трех маятников, а программа наблюдений на исходном пункте вдвое больше, чем на полевом, можно вычислить по следующей формуле:

$$M_g^2 \equiv m^2 g_0^2 + 8,33 \times 10^{-6} \Delta g^2 + 195 \times 10^{-10} (C - g)^2 + 0,67 m_\varphi^2 + 2 m_\psi^2 + 0,33 m_{\alpha,t}^2 + 0,07 \alpha'^2 m_t^2 + 4,08. \quad (\text{IX}, 1)$$

Здесь:

M_g — ошибка силы тяжести определяемого пункта;

m_{g_0} — ошибка силы тяжести исходного пункта;

Δg — приращение силы тяжести полевого пункта по отношению к исходному, а член, зависящий от Δg , есть функция ошибки m_k масштабного коэффициента k , причем принято, что $\frac{m_k}{k} = \pm 0,5\%$;

$C - g$ — разность между упругой постоянной и силой тяжести. Коэффициент при $C - g$ зависит от систематических и случайных ошибок отсчета моментов прохождения изображения маятника через нить. Здесь принято в соответствии с вышеизложенным (стр. 52), что продолжительность 50 колебаний маятника определяется с ошибкой $\pm 0,044$ и что вариация личной ошибки наблюдателя постоянна на пункте и равна $\pm 0,010$;

m_φ — ошибка продольной нивелировки маятника;

m_ψ — ошибка поперечной нивелировки;

$m_{\alpha,t}$ — ошибка поправки за температуру, зависящая от ошибок температурных коэффициентов маятников; при этом считается, что коэффициенты всех трех маятников равноточны и имеют ошибку, равную средней величине из ошибок отдельных маятников;

α' — средняя величина эквивалентного температурного коэффициента для данного комплекта;

m_t — ошибка отсчета температуры, одинаковая для всех маятников. Член $0,07 \alpha'^2 m_t^2$ получается в предположении, что по каждому маятнику берутся 6 отсчетов температуры.

Последний член формулы (IX, 1) есть функция величины вариации векового хода, принятая равной для отдельного маятника $\pm 3,5$ мгл.

На выводе этой формулы, получаемой дифференцированием известной рабочей формулы маятников

$$g = C_0 + \Delta C + \alpha (t - t_0) + \beta (t - t_0)^2 - \frac{k}{(50 S)^2},$$

после приведенных подробных указаний можно не останавливаться. Оговорим только, что она применима для любого комплекта трех упругих маятников, имеющих приблизительно равные соответствующие константы, если наблюдения производятся в строгом соответствии с действующим Наставлением.

Имея в виду сравнить наши априорные ошибки с фактическими ошибками, полученными по измерениям на контрольных пунктах с известной силой тяжести, и ошибками, вычисленными по сходимости измерений отдельными маятниками, положим $m_{g_0} = 0$. Мы вправе это сделать, так как все наши определения так же, как и определения других партий, фактически отнесены к одному и тому же опорному пункту — Ашхабаду.

Поэтому принимаем:

$$M_g = m_{\Delta g}.$$

Для Каракумской экспедиции в среднем было:

$$\Delta g = 150 \text{ мгл}; C - g = 9500 \text{ мгл}; m_\varphi = \pm 0,5 \text{ мгл}; m_\psi = \pm 0,5 \text{ мгл};$$

$$m_{\alpha,t} = \pm 0,9 \text{ мгл}; m_t = \pm 0^{\circ},02; \alpha' = 36 \frac{\text{мгл}}{\text{гр}};$$

отсюда:

$$\begin{aligned} m_{\Delta g}^2 &= 8,33 \times 150^2 \times 10^{-6} + 195 \times (9500)^2 \times 10^{-10} + 0,67 \times 0,25 + 2 \times 0,25 + \\ &+ 0,33 \times 0,81 + 0,07 \times 36^2 \times 0,0004 + 4,08 = \\ &= 0,19 + 1,76 + 0,16 + 0,50 + 0,27 + 0,04 + 4,08 = 7,00; \\ m_{\Delta g} &= \pm 2,6 \text{ мгл}. \end{aligned}$$

Переходя к одному маятнику, получаем:

$$m_{\Delta g} = \pm 2,6 \sqrt{3} = \pm 4,4 \text{ мгл}.$$

Произведенный расчет весьма интересен в том отношении, что он наглядно показывает относительную роль влияния отдельных источников погрешностей. Так, мы видим, что по отношению к квадрату полной ошибки связи отдельные слагаемые имеют следующую величину:

1. Ошибка вариации векового хода	$\frac{4,08}{7,00} = 58\%$
2. Ошибка отсчета времени	$\frac{1,76}{7,00} = 25\%$
3. Ошибка поперечной нивелировки	$\frac{0,50}{7,00} = 7\%$
4. Ошибка температурных коэффициентов	$\frac{0,27}{7,00} = 4\%$
5. Ошибка масштабного коэффициента	$\frac{0,19}{7,00} = 3\%$
6. Ошибка продольной нивелировки	$\frac{0,16}{7,00} = 2\%$
7. Ошибка отсчета температуры	$\frac{0,04}{7,00} = 1\%$

Прежде всего мы видим, что точность измерений решающим образом определяется колебанием векового хода маятников. Вместе с тем именно этот источник ошибок меньше всего поддается воздействию наблюдателя, да и возможность этого воздействия скорее является гипотетической. Дальнейшая судьба упругих маятников повидимому больше всего зависит от умения конструкторов и механиков уменьшить относительную роль этого главного источника ошибок.

Сравнительно большая величина ошибок, зависящих от точности отсчета времени, в значительной мере обусловлена причинами, которые можно назвать случайными. Дело заключается в том, что комплект упругих маятников изготовлялся в Москве, и при этом не учитывалась возможность отправки его в столь южные широты. Коэффициент астазирования комплекта, не очень высокий и для Москвы ($N = \frac{g}{C - g} = 125$), уменьшился в Ашхабаде до $N = 100$. Отсюда возросла и роль ошибок отсчета. В дальнейшем нетрудно добиться того, чтобы при отборе маятников для работы в те или иные районы учитывать величину коэффициента астазирования. Это может быть полезным и с другой стороны: отправка маятников с большими коэффициентами астазирования в северные районы может затруднить работу за счет увеличения возникающей здесь вредной чувствительности маятников.

Независимо от сказанного, ошибки отсчета времени являются для упругих маятников серьезнейшим источником погрешностей, требующим самого пристального внимания. Прежде всего мы имеем здесь в виду опасную и мало изученную личную ошибку наблюдателя, которая, вероятно, в известных условиях может губительно отражаться на точности работ. Единственный способ борьбы с ней заключается во введении безличных методов отсчета, о которых мы упоминали выше. Увеличение, в случае необходимости, числа наблюденных приемов имеет смысл только в очень небольших пределах. Так, незначительное увеличение числа приемов против принятого в настоящее время уже сравнивает случайную ошибку отсчета с систематической личной.

Из остальных ошибок мы обращаем особое внимание на влияние ошибок температурных коэффициентов. Оно обладает особенностью быстро расти с возрастанием разности температур при наблюдениях на полевом и опорном пунктах, так что средняя величина этого влияния только в очень слабой степени характеризует точность измерений на отдельных пунктах, где условия менее благоприятны. Обеспечение надлежащих температурных условий является в силу этого весьма важной задачей. Помимо того, что на отдельных пунктах ошибки температурных коэффициентов могут сыграть первостепенную роль для точности измерений, с термическим режимом тесно связаны и другие важные влияния. Наличие какой-то связи вариаций векового хода с условиями температуры повидимому нельзя отрицать, от этих же условий часто зависит и устойчивость работы прибора.

Как мы видим, ошибки собственно отсчета температуры являются одними их самых незначительных, но мы не приняли во внимание группу ошибок, оценить влияние которых весьма трудно и неотделимых от ошибок отсчета, а именно — ошибок шкалы термометра и неправильностей капилляра. Каждый упругий маятник должен быть тщательно исследован в этом смысле, а термометры, в которых капилляры не параллельны шкале, должны браковаться.

Ошибки, связанные с нивелировкой маятника, можно считать небольшими; не исключена также возможность дальнейшего их уменьшения. Что же касается ошибок эталонирования, то их влияние можно сделать весьма малым, если работать в достаточно малом интервале

силы тяжести. В случае невозможности последнего надо увеличивать интервал силы тяжести и число пунктов для эталонирования маятников, стараясь также применять для эталонирования самолеты.

Для иллюстрации наших выводов кратко остановимся на практическом примере результатов работы Каракумской экспедиции Московского аэрогеодезического предприятия, руководимой автором.

Целевым производственным назначением экспедиции было заполнение пробелов в общей съемке пустыни Кара-Кум. Возможность применения здесь упругих маятников подвергалась сомнению, так как казалось прежде всего, что в условиях пустыни невозможно обеспечить достаточно частое возвращение на опорный пункт для контроля векового хода. Однако мы предложили организовать два вспомогательных опорных пункта, расположенных таким образом, чтобы довести рейсы до допустимой продолжительности. Этим мероприятием было устранено основное затруднение, и экспедиция могла приступить к работе.

На вооружении экспедиции был комплект упругих маятников № 105, 106, 107 и 108. Маятник № 105 плохо выдерживал перевозки и вскоре был исключен из комплекта.

Основным опорным пунктом был гравиметрический пункт II класса в Ашхабаде. Вспомогательные опорные пункты были организованы на Серном Заводе, расположенном в центре района, и в г. Байрам-Али. Сила тяжести на Серном Заводе была определена обычными маятниками партией Шрейдера в 1933 году. Кроме того, экспедиция автора специально связала в процессе работ Серный Завод с Ашхабадом, используя на время этой связи самолет для переброски на Серный Завод и обратно. Благодаря применению авиации, на всю работу по прямой и обратной связи Серного Завода с Ашхабадом ушло только несколько дней. За такой промежуток времени вековой ход маятников комплекта не мог сколько-нибудь отразиться на точности измерений, и связь получилась вполне удачной, хотя пришлось преодолеть значительные трудности, чтобы обеспечить надлежащий температурный режим для наблюдений. Сходимость наших измерений с измерениями Шрейдера видна из таблицы контрольных пунктов, помещенной ниже.

В Байрам-Али, где не было гравиметрического пункта, пришлось послать специальную партию (инж. Федорова), связавшую своим маятниковым прибором Байрам-Али с Ашхабадом по значительно повышенной программе (в сравнении с программой наблюдений на пунктах III класса) прямой и обратной связью.

По окончании работы в Кара-Кумах наша экспедиция связала также по повышенной программе Байрам-Али с Ашхабадом и Ташкентом.

В итоге для Байрам-Али получился весьма надежное определение силы тяжести, не только не уступающее, но скорее превосходящее по точности пункты II класса.

Сходимость наших определений с определениями Федорова также дана в таблице контрольных пунктов.

Все перевозки маятников в Каракумской экспедиции производились, как правило, выюком на верблюдах и несколько раз — на самолетах, автомашинах и по железной дороге. Перевозки эти подтвердили еще раз неприхотливость упругих маятников в смысле требований к условиям транспортировки. Рабочими помещениями для наблюдений, за редкими исключениями, являлись палатки. Подставка маятников, как обычно, скреплялась с латунной треногой, устанавливаемой на забитые в грунт штыри. Надо отметить, что на песке приборы были несколько не менее устойчивы, чем на любом другом грунте. С другой стороны, в условиях Кара-Кум соблюдение температурного режима требовало известной сноровки, но в общем требования Наставления удовлетворялись не хуже, чем в других районах.

Распределение пунктов по рейсам и продолжительность последних видны из таблицы 22.

Т а б л и ц а 22

№ рейса	Продолжительность рейсов (в днях)	Количество пунктов	Опорные пункты, где производились наблюдения	
			в начале рейса	в конце рейса
1	13	2	Ашхабад	Серный Завод
2	35	9	Серный Завод	Ашхабад
3	20	8	Ашхабад	Серный Завод
4	34	8	Ашхабад	Байрам-Али
5	33	10	Байрам-Али	Байрам-Али
6	44	6	Байрам-Али	Ашхабад
Итого	179	43		

Значения C снимались с приведенных графиков векового хода. При этом, чтобы использовать весь накопленный материал для изучения векового хода, обработка была проведена в трех вариантах. В первом варианте C для всех пунктов данного рейса принималось постоянным и равным среднему значению C на опорных пунктах, замыкавших данный рейс. Во втором варианте было принято, что в каждом рейсе C изменялось пропорционально времени между значениями C на опорных пунктах, непосредственно примыкавших к данному рейсу. В третьем варианте C снималось со специальной кривой, построение которой было описано выше.

Результаты вычислений по всем трем вариантам оказались почти тождественными как в смысле величины силы тяжести полевых пунктов, так и в смысле сходимости определений по различным маятникам. Ни в одном из вариантов не замечено систематических расхождений по маятникам.

Для иллюстрации сказанного приводим таблицу среднерейсовых ошибок одного полевого пункта, вычисленных во всех трех вариантах.

Т а б л и ц а 23
Среднерейсовые ошибки полевых пунктов в трех вариантах обработки наблюдений

№ рейса	Число пунктов	Среднерейсовая ошибка одного пункта		
		I вариант	II вариант	III вариант
1	2	$\pm 2,3$ мгл	$\pm 2,4$ мгл	$\pm 2,8$ мгл
2	9	2,5	2,4	2,8
3	8	1,8	1,7	1,5
4	8	1,9	2,0	1,8
5	10	1,5	1,4	1,3
6	6	2,2	2,2	1,7
Средняя ошибка одного пункта по всему материалу . . .		$\pm 2,0$ мгл	$\pm 2,0$ мгл	$\pm 1,9$ мгл

Вариант III был принят в качестве окончательного, как более обоснованный физически. Если перейти к ошибке силы тяжести, измеряемой одним маятником, то окажется, что в данном случае эта ошибка будет равна

$$\pm 1,9 \times \sqrt{3} = \pm 3,3 \text{ мгл.}$$

Чтобы сопоставить найденную ошибку с подсчитанной ранее априорной, необходимо из последней исключить систематические

ошибки — поперечной нивелировки и личную ошибку. Сделав это, получаем:

$$m^2_{\Delta g} = 5,62; m_{\Delta g} = \pm 2,4 \text{ мгл.},$$

или для одного маятника

$$m_{\Delta g} = \pm 2,4 \times \sqrt{3} = \pm 4,2 \text{ мгл.}$$

Таким образом, фактическая сходимость измерений по отдельным маятникам значительно лучше, чем ожидаемая. Такое положение можно считать нормальным, и оно указывает лишь на то, что мы не преуменьшили влияния отдельных источников случайных ошибок.

Перейдем к оценке точности результатов Каракумской экспедиции по сравнению с измерениями, исполненными с обычными маятниками, а также по повторным определениям упругими маятниками.

В районе работ экспедиции было семь пунктов, где в разное время производились измерения силы тяжести различными партиями. Кроме того, партия на двух пунктах повторила собственные определения, приняв меры к полному изменению всех условий наблюдений. Первоначальные наблюдения делались летом, при самой высокой температуре, а повторные — в зимних условиях при самой низкой температуре. За полгода, разделяющие моменты наблюдений, изменились и все прочие условия (перевозка, поведение векового хода, личные ошибки и т. д.), так что в сущности повторные измерения дают новый самостоятельный материал, не отличающийся от материала, полученного на контрольных пунктах.

Все данные для сопоставления содержатся в таблице 24, не требующей особых пояснений. Укажем только, что ошибка измерений упругими маятниками выведена по сходимости результатов по отдельным маятникам. Данные по партиям прошлых лет заимствованы из официального каталога, кроме партии Федорова, для которой материалы были получены в камеральном бюро Московского аэрогеодезического предприятия.

Так как в данном случае все определения силы тяжести всех партий отнесены к Ашхабаду, то мы можем оценку точности провести по всему материалу, не разделяя повторных и контрольных измерений.

Таблица 24

Результаты наблюдений на контрольных и повторных пунктах Каракумской экспедиции

№ по порядку	Название пункта	g		Разность d	Фамилия наблюдателя и год определения
		по определениям Хейфеца	по другим данным		
Контрольные пункты					
1	Серный Завод	980 130 ± 1,2	980 129 ± 3,5	+1	Шрейдер 1933 г.
2	Кара-Джульба	131 1,8	130 2,0	+1	Шрейдер 1933 г.
3	Теджен	979 839 1,7	979 (847) (7,0)	(-8)	Залесский 1902 г.
4	Теджен	839 1,1	842 4,5	-3	Невецкий 1934 г.
5	Хан-Кую	989 1,9	990 5,0	-1	Невецкий 1934 г.
6	Сейраб	929 0,4	930 1,9	-1	Алексин 1942 г.
7	Байрам-Али	865 1,5	865 1,0	0	Федоров 1944 г.*
Повторные пункты					
		Первое определение (Хейфец)	Второе определение (Хейфец)		
8	Кууртли	979 892 1,6	979 890 1,5	+2	
9	Кырк-Кую	931 1,7	922 2,5	+9	

* Наблюдения по увеличенной программе.

Если не отбрасывать определения Залесского, произведенного свыше 40 лет назад (с прежним прибором Штернека), то среднее квадратическое расхождение результатов будет равно:

$$D = \pm 4,2 \text{ мгл.}$$

Отбрасывая это определение, получаем более надежное значение:

$$D = \pm 3,3 \text{ мгл.}$$

Считая, далее, наши определения равноточными с определениями других партий, получаем в первом случае (с определением Залесского):

$$M_g = \pm 3,0 \text{ мгл}$$

и во втором случае (без определения Залесского):

$$M_g = \pm 2,6 \text{ мгл.}$$

В обоих случаях сходимость фактической точности измерений с априорной ($\pm 2,6$ мгл) надо считать весьма хорошей.

Учитывая все вышесказанное, мы должны заметить, что повидимому в нашем априорном подсчете несколько преувеличена роль случайных ошибок и недооценено полностью значение систематических ошибок. В самом деле, средняя ошибка, полученная по сходимости отдельных маятников, равна только $\pm 1,9$, в то время как оценка по контрольным и повторным пунктам в лучшем случае дает $\pm 2,6$ мгл. Отскок результатов на повторном пункте Кырк-Кую при нормальной внутренней сходимости также несомненно указывает на проявление неучтенной систематической ошибки. Если в 1939 г. подобные отскоки можно было объяснить несовершенством юстировки маятников, то в настоящее время качество приборов настолько повысилось, что такое объяснение не может иметь место. Вероятнее всего, что отскоки вызваны вариациями личной ошибки наблюдателя, если только быть уверенным, что не существует никаких других источников систематических ошибок, кроме тех, которые мы перечисляли в предыдущем изложении.

Правда, в данном случае мы имеем дело с одним единственным отскоком и к тому же не таким уже большим. В практике работ с обычными маятниками нередко встречаются значительно большие отскоки, но самая возможность их появления заставляет быть остороже. Во всяком случае при любой работе с упругими маятниками надо предусматривать достаточное число контрольных и повторных измерений, что, к сожалению, не всегда соблюдается.

В общем итоге мы имеем право считать, что измерения упругими маятниками не уступают по точности лучшим маятниковым определениям и в большинстве случаев они заметно выше последних. На стороне упругих маятников также преимущество в отношении производительности труда, которое в благоприятных условиях может превысить производительность труда с обычными маятниками в 3—4 раза. В различных труднодоступных районах, где уже неоднократно с успехом применялись упругие маятники, особенный эффект получается в результате их большей транспортабельности и легкости и возможности отказаться от громоздкой радиоаппаратуры для приема сигналов времени.

Исключительная простота обработки наблюдений, дающая весьма большую экономию времени на полевых и камеральных вычислениях, еще больше увеличивает экономический эффект от использования упругих маятников.

Однако полная реализация больших возможностей, связанных с применением упругих маятников ЦНИИГАиК, может быть достигнута только путем надлежащей организации работ, основанной на глубоком

знакомстве со всеми особенностями этого прибора и умении обеспечить получение высокоточных результатов простейшим способом.

Опыт, накопленный в производстве, результаты исследований и Наставление, утвержденное ГУГК при Совете Министров СССР, облегчают широкое внедрение упругих маятников в производство гравиметрической съемки и обеспечивают необходимую для всякой производственной работы однородность получаемого материала.

Таким образом, сделаны первые шаги для превращения упругих маятников в приборы, пригодные для массового применения. Следующие шаги должны быть сделаны в отношении скорейшего устранения достаточно уверенно выявленных недостатков. Прежде всего это относится к способу измерения наблюдаемого периода маятников. Далее, желательно приспособить к прибору термостат*; мы видели, что это мероприятие должно не только уменьшить влияние ошибок температурных коэффициентов, но, что еще более важно, сгладить вековой ход маятников, имеющий решающее значение для их работы вообще. Наконец, к числу первоочередных задач следует отнести продолжение лабораторных и полевых исследований, направленных к замене обычного эталонирования лабораторным, выяснению постоянства температурных коэффициентов и т. д.

Высокая чувствительность маятника к нивелировке и сотрясениям, создающая основные затруднения при наблюдениях упругих маятников, вряд ли может быть ослаблена, пока измерения производятся динамическим методом. Здесь нужно стремиться направить творческую мысль конструкторов по линии изыскания возможностей использования упругих маятников как статического гравиметра, так как подобные попытки, несмотря на все трудности, видимо, возможно успешно осуществить.

Прибавим некоторые практические соображения и выводы, которые можно сделать на основе данных настоящей статьи и которые могут оказаться полезными при работах с имеющимися упругими маятниками.

Несмотря на кажущуюся простоту техники наблюдений, она в действительности требует большого напряжения внимания и сил, длительной тренировки и вдумчивого отношения. Умение устранить вредное влияние малейших сотрясений, избежать «сползания» маятников, создать наиболее благоприятные условия для наблюдений не может быть достигнуто только изучением Наставления. Нужно еще хорошо знать и понимать работу прибора и иметь достаточный опыт в наблюдениях. Без этого трудно, например, выбрать подходящее место для пункта (особенно в городах) или суметь почувствовать действие почти незаметных наглаз сотрясений или даже просто сохранить нужную для наблюдений неподвижность. Полезно также учесть, что в настоящее время имеющиеся маятники неоднородны по качеству, и пока нельзя гарантировать, что каждый вновь изготовленный маятник будет строго соответствовать установленным стандартам. Каждый экземпляр упругого маятника обладает индивидуальными, только одному ему присущими свойствами, которые наблюдатель должен изучить и учитывать в дальнейшей работе с данным экземпляром прибора, выдерживая строгое единообразие в оперировании с ним. Маятники различаются поведением векового хода, величиной температурных коэффициентов, качеством юстировки, величиной параллакса

* В данном случае желательны термостаты хотя бы и умеренной точности, но облегченные по весу и габариту, так как упругие маятники предъявляют к температурным условиям все же меньше требований в сравнении со многими другими гравиметрическими приборами; сверх того, следует сохранять существующее в производственном смысле свойство упругих маятников: малые размеры и вес всего их рабочего комплекта.

и т. д. Отсюда следует, что нельзя рассчитывать на универсальность всех пунктов Наставления, дающего лишь некоторые общие принципиальные установки для организации наблюдений. Наставление гарантирует успех, если исполнитель будет придерживаться не только, и даже не столько его буквы, сколько его духа и основных идей. Получение точных результатов требует предварительного изучения всех особенностей данного прибора вообще и индивидуальных свойств каждого рабочего экземпляра в частности. Каждый такой индивидуальный экземпляр упругого маятника должен быть подвергнут соответствующей проверке, связанной с определением всех его констант и всех его свойств, выполняемым, насколько возможно, самим наблюдателем; перемены наблюдателей следует избегать.

При соблюдении этих условий упругие маятники сослужат полезную службу для советской гравиметрической съемки.

Приложение 1

Результаты определения поправки за амплитуду в Москве (журнал наблюдений)
Маятник № 107 **21 мая 1945 г.**

Отсчеты температуры	Отсчеты амплитуд	Наблюденные моменты прохождений					
		$T_{k,1}$	$T_{k,2}$	$T_{k,3}$	$T_{k,4}$	$T_{k,5}$	$T_{k,6}$
17°,34	19,9—19,6	П р и е м 1					
	13,0—12,8	56 19,2	29,2	38,5	48,5	58,1	7,6
	8,8— 8,3	57 30,2	39,5	49,3	59,0	8,5	18,2
	6,0— 5,8	58 40,5	50,2	59,9	9,3	19,1	28,6
	4,2— 4,0	59 51,0	0,6	10,2	19,6	29,3	38,7
	3,1— 2,9	1 1,3	10,7	20,4	30,1	39,5	49,1
	2,3— 2,1	2 11,6	21,1	30,6	40,2	49,7	59,3
17,36	19,9—19,7	П р и е м 2					
	12,9—12,8	5 52,6	2,4	12,2	21,7	31,3	41,1
	8,5— 8,5	3,4	13,2	22,5	32,3	42,0	51,5
	5,9— 6,0	13,7	23,6	33,1	42,7	52,2	1,8
	4,1— 4,2	24,2	33,8	43,3	53,1	2,5	12,2
	3,0— 3,1	34,5	44,2	53,6	3,1	12,8	22,5
	2,1— 2,3	11 44,7	54,3	4,1	13,6	23,2	32,7
17,50	19,9—19,7	П р и е м 3					
	13,0—12,9	15 6,3	16,1	25,6	35,4	44,7	54,6
	8,6— 8,7	17,1	26,5	36,3	46,0	55,5	5,2
	5,9— 6,0	27,5	37,1	46,5	56,4	5,9	15,5
	4,1— 4,3	37,7	47,6	57,1	6,6	16,1	26,1
	3,0— 3,1	48,2	57,6	7,2	17,2	26,5	36,6
	2,1— 2,4	20 58,4	8,3	17,5	27,4	36,7	46,3
17,60	20,0—20,0	П р и е м 4					
	13,0—13,0	23 44,7	54,5	4,2	13,6	23,5	33,2
	8,7— 8,7	55,5	5,2	14,7	24,5	34,1	43,6
	6,0— 6,0	6,1	15,6	25,3	35,1	44,5	54,1
	4,1— 4,3	16,5	26,2	35,6	45,3	55,0	4,5
	3,0— 3,1	26,7	36,5	46,2	55,5	5,2	14,6
	2,1— 2,3	29 37,2	46,7	56,3	5,8	15,3	25,2
17,70	20,0—19,8	П р и е м 5					
	13,0—12,9	32 47,8	57,5	7,2	16,7	26,5	36,2
	8,6— 8,6	58,5	8,2	17,6	27,4	36,8	46,6
	6,0— 6,0	9,1	18,6	28,3	37,7	47,5	57,2
	4,1— 4,2	19,5	29,2	38,5	48,3	57,7	7,5
	3,0— 3,1	29,9	39,5	49,2	58,7	8,4	17,7
	2,1— 2,3	38 40,2	49,7	59,3	8,7	18,5	28,0

Отсчеты температуры	Отсчеты амплитуд	Наблюдаемые моменты прохождений					
		$T_{k,1}$	$T_{k,2}$	$T_{k,3}$	$T_{k,4}$	$T_{k,5}$	$T_{k,6}$
17°,80	19,9—19,8	П р и е м 6					
	13,0—12,9	45 23,3	33,0	42,6	52,3	1,8	11,5
	8,7— 8,6	34,1	43,6	53,3	2,9	12,5	22,2
	6,0— 6,0	44,6	54,2	3,8	13,5	23,1	32,5
	4,1— 4,2	55,1	4,5	14,2	23,6	33,5	43,2
	3,0— 3,1	5,3	15,1	24,6	34,2	43,6	53,3
17 ,86	2,2— 2,3	51 15,6	25,3	34,7	44,5	54,2	3,6
17 ,86	19,9—19,8	П р и е м 7					
	13,0—12,9	53 48,2	57,7	7,5	17,2	26,6	36,3
	8,5— 8,5	58,8	8,5	18,2	27,7	37,3	46,9
	6,0— 6,0	9,3	19,2	28,5	38,2	47,6	57,4
	4,1— 4,2	19,7	29,5	39,1	48,6	58,2	7,7
	3,0— 3,1	30,2	39,8	49,3	59,2	8,5	18,2
17 ,92	2,1— 2,2	59 40,5	50,2	59,6	9,3	18,7	28,3
17 ,92	20,0—19,9	П р и е м 8					
	13,0—12,9	2 52,7	2,5	12,3	22,0	31,6	41,2
	8,7— 8,7	3,5	13,3	22,8	32,5	42,3	51,7
	6,0— 6,0	14,3	23,7	33,5	43,1	52,5	2,2
	4,1— 4,2	24,6	34,3	43,7	53,5	3,0	12,5
	3,0— 3,1	34,9	44,5	54,2	3,7	13,4	22,9
17 ,96	2,2— 2,3	8 45,4	54,8	4,4	14,2	23,6	33,1
17 ,96	20,0—19,9	П р и е м 9					
	13,0—12,9	43 57,2	6,5	16,4	26,2	35,6	45,3
	8,7— 8,7	7,6	17,1	27,0	36,5	46,3	55,7
	6,0— 6,0	18,3	27,7	37,5	47,2	56,6	6,3
	4,1— 4,2	28,7	38,3	47,9	57,5	7,1	16,6
	3,0— 3,1	39,2	48,6	58,4	7,7	17,5	27,2
17 ,96	2,2— 2,3	49 49,5	59,1	8,6	18,3	27,7	37,3
17 ,98	20,0—19,9	П р и е м 10					
	13,0—12,9	20 12,2	22,0	31,5	41,4	40,8	0,5
	8,7— 8,6	23,1	32,8	42,3	52,0	1,5	11,2
	6,0— 6,0	33,6	43,2	52,7	2,5	12,2	21,7
	4,1— 4,3	44,1	53,6	3,3	12,8	22,5	32,2
	3,0— 3,1	54,5	4,2	13,5	23,2	32,8	42,3
17 ,98	2,2— 2,3	26 4,7	14,3	24,2	33,5	43,2	52,8

Отсчеты температуры	Отсчеты амплитуд	Наблюденные моменты прохождений					
		$T_{k,1}$	$T_{k,2}$	$T_{k,3}$	$T_{k,4}$	$T_{k,5}$	$T_{k,6}$
13°,38	20,1—19,8	23,1	31,6	40,3	49,0	57,5	6,3
	13,8—13,4	26,4	35,1	43,7	52,5	1,1	9,7
	9,8— 9,6	29,8	38,5	47,2	55,9	4,4	13,1
	7,1— 7,0	33,3	41,9	50,6	59,2	7,8	16,5
	5,2— 5,3	36,5	45,2	53,8	2,4	11,1	19,7
	4,0— 4,1	39,7	48,5	57,1	5,7	17,3	23,1
	3,0— 3,1	43,2	51,7	0,3	9,1	17,5	26,2
	2,3— 2,4	46,3	54,9	3,5	12,2	20,8	29,4
	1,9— 2,0	49,5	58,2	6,7	15,4	23,9	32,6
	1,5— 1,6	52,7	1,3	9,8	18,5	27,2	35,8
13,38	1,2— 1,3						
13,32	20,1—19,8	35,3	43,8	52,6	1,2	9,9	18,6
	13,9—13,2	38,7	47,4	56,1	4,7	3,5	22,1
	9,9— 9,3	42,2	50,8	59,5	8,1	16,8	25,4
	7,1— 6,9	45,6	54,2	2,8	11,5	20,1	28,7
	5,2— 5,0	48,8	57,6	6,1	14,6	23,5	32,0
	4,2— 4,0	52,1	0,7	9,5	18,1	26,6	35,2
	3,2— 2,9	55,4	3,8	12,6	21,2	30,0	38,4
	2,7— 2,1	58,6	7,1	15,9	24,2	33,1	41,5
	2,1— 1,7	1,8	10,2	19,1	27,5	36,3	44,7
	1,8— 1,3	5,1	13,3	22,3	30,5	39,5	47,7
13,32	1,3— 0,7						
13,38	19,9—19,0	57,7	6,4	15,2	24,0	32,5	41,2
	13,2—13,1	1,3	10,0	18,5	27,2	35,9	44,5
	9,8— 9,2	4,6	13,4	22,1	30,7	39,4	48,0
	7,0— 6,8	8,2	16,7	25,3	34,0	42,7	51,3
	5,1— 5,0	11,4	20,1	28,7	37,3	46,0	54,6
	4,0— 3,9	14,6	23,3	31,9	40,5	49,2	57,7
	3,1— 3,0	17,9	26,5	35,2	43,7	52,3	1,0
	2,4— 2,3	21,3	29,7	38,4	47,0	55,6	4,3
	2,0— 1,8	24,4	32,8	41,5	50,2	58,9	7,4
	1,7— 1,4	27,6	36,2	44,7	53,3	2,1	10,6
13,39	1,0— 1,1						
13,34	20,1—19,8	22,1	30,7	39,5	48,1	56,7	5,3
	13,9—13,2	25,6	34,2	42,8	51,6	0,1	8,8
	10,0— 9,5	29,0	37,6	46,3	54,7	3,6	12,1
	7,2— 7,0	32,3	40,9	49,6	58,2	6,8	15,4

Отсчеты температуры	Отсчеты амплитуд	Наблюдаемые моменты проходов					
		$T_{k,1}$	$T_{k,2}$	$T_{k,3}$	$T_{k,4}$	$T_{k,5}$	$T_{k,6}$
13°,34	5,3— 5,1	35,6	44,2	52,8	1,3	10,1	18,7
	4,2— 3,9	38,9	47,4	56,1	4,7	13,4	21,9
	3,3— 3,0	42,1	50,2	59,5	7,8	16,7	25,2
	2,7— 2,2	45,4	53,7	2,6	11,2	19,8	28,2
	2,1— 1,7	48,6	56,9	5,7	14,2	23,1	31,4
	1,8— 1,2	51,8	0,2	8,9	17,3	26,2	34,6
13 ,38	1,4— 0,9						
П р и е м 5							
13 ,39	20,0—19,3	52,0	0,7	9,4	18,0	26,6	35,4
	13,8—13,1	55,6	4,3	13,0	21,6	30,3	38,8
	9,9— 9,3	59,1	7,6	16,3	24,8	33,6	42,2
	7,2— 6,9	2,4	10,9	19,5	28,2	36,8	45,4
	5,3— 5,0	5,6	14,2	22,8	31,5	40,2	48,7
	4,1— 3,9	8,8	17,4	26,1	34,7	43,4	52,0
	3,1— 3,0	12,2	20,7	29,3	37,9	46,5	55,2
	2,6— 2,3	15,5	23,9	32,5	41,2	49,7	58,3
	2,0— 1,7	18,6	27,1	35,7	44,3	53,1	1,6
	1,8— 1,4	21,8	30,4	39,0	47,4	56,2	4,7
13 ,40	1,3— 1,0						
П р и е м 6							
13 ,40	19,7—19,0	32,5	41,1	49,9	58,6	7,2	15,8
	13,6—13,0	36,1	44,7	53,3	2,0	10,7	19,2
	9,6— 9,2	39,5	48,1	56,8	5,3	14,1	22,6
	7,0— 6,9	42,8	51,5	0,1	8,6	17,4	25,9
	5,2— 5,1	46,1	54,7	3,4	12,0	20,6	29,2
	4,1— 4,0	49,3	58,1	6,6	15,2	23,9	32,4
	3,2— 3,0	52,6	1,2	9,7	18,3	27,1	35,6
	2,6— 2,2	55,9	4,4	13,1	21,5	30,3	38,8
	2,1— 1,8	59,1	7,4	16,3	24,7	33,6	41,9
	1,7— 1,3	2,2	10,7	19,5	27,8	36,7	45,0
13 ,40	1,2— 0,9						
П р и е м 7							
13 ,40	20,0—19,5	0,7	9,4	18,2	26,6	35,4	44,1
	13,7—13,3	4,4	13,0	21,6	30,2	38,9	47,5
	9,8— 9,6	7,7	16,4	25,1	33,7	42,4	50,8
	7,0— 7,0	11,3	19,7	28,3	37,0	45,0	54,5
	5,1— 5,2	14,4	23,0	31,7	40,3	48,7	57,4
	4,0— 4,1	17,5	26,2	34,7	43,4	52,2	0,7
	3,0— 3,1	20,7	29,3	38,0	46,7	55,3	3,9
	2,3— 2,4						

Отсчеты температуры	Отсчеты амплитуд	Наблюденные моменты прохождений						
		$T_{k,1}$	$T_{k,2}$	$T_{k,3}$	$T_{k,4}$	$T_{k,5}$	$T_{k,6}$	
13°,40	1,9— 2,0	24,1	32,7	41,4	50,0	58,5	7,2	
		27,3	35,8	44,4	53,2	1,7	10,3	
	1,6— 1,6	30,4	39,1	47,6	56,3	4,7	13,4	
13 ,42	1,1— 2,3							
П р и е м 8								
13 ,42	20,0—19,6							
	13,8—13,4	4,3	13,0	21,6	30,3	38,9	47,6	
	14,8—14,7	7,8	16,4	25,1	33,7	42,4	51,1	
	7,0— 7,1	11,2	19,8	28,6	37,1	45,7	54,3	
	5,2— 5,3	14,6	23,1	31,8	40,4	49,1	57,6	
	4,1— 4,1	17,8	26,4	35,1	43,6	52,4	0,9	
	3,2— 3,2	21,1	29,6	38,2	46,8	55,6	4,2	
	2,5— 2,5	24,3	32,9	41,5	50,1	58,7	7,4	
	2,1— 2,0	27,5	36,1	44,7	53,4	1,9	10,6	
	1,4— 1,4	30,7	39,2	47,9	56,6	5,1	13,8	
	13 ,42	1,2— 1,1	33,8	42,5	51,1	59,6	8,3	16,8
	П р и е м 9							
	13 ,40	19,9—19,4						
13,7—13,3		52,5	1,3	9,9	18,5	27,2	36,0	
9,8— 9,6		56,2	4,7	13,4	22,2	30,7	39,3	
7,0— 7,1		59,6	8,3	16,7	25,5	34,2	42,6	
5,1— 5,2		2,7	11,5	20,2	28,7	37,4	46,0	
4,0— 4,1		6,1	14,7	23,3	32,1	40,6	49,3	
3,0— 3,1		9,3	18,1	26,6	35,3	43,7	52,4	
2,2— 2,4		12,5	21,2	29,6	38,4	47,2	55,7	
1,9— 2,0		15,7	24,4	33,1	41,7	50,3	58,8	
1,4— 1,5		19,1	27,7	36,3	44,9	53,4	2,2	
13 ,40		1,0— 1,1	22,2	30,8	39,4	48,1	56,5	5,3
П р и е м 10								
13 ,40		19,8—19,2						
	13,7—13,1	9,6	18,2	26,8	35,6	44,2	52,7	
	9,8— 9,4	13,1	21,7	30,3	39,0	47,7	56,2	
	7,1— 6,9	16,4	25,1	33,8	42,3	51,0	59,6	
	5,3— 5,1	19,7	28,4	37,1	45,6	54,2	2,8	
	4,1— 4,0	23,0	31,7	50,2	48,9	57,6	6,1	
	3,3— 3,0	26,2	34,8	43,5	52,1	0,7	9,3	
	2,7— 2,4	29,6	38,1	46,7	55,2	4,0	12,6	
	2,1— 1,9	32,7	41,2	50,0	8,5	17,2	25,7	
	1,8— 1,3	45,9	54,4	3,2	11,6	20,4	28,7	
	13 ,40	1,3— 1,0	49,1	57,5	6,4	14,7	23,6	31,9

Маятник № 107

Таблица значений $\alpha(t-t_0) + \beta(t-t_0)^2$ (в миллигалах)

t	0°,0	0°,1	0°,2	0°,3	0°,4	0°,5	0°,6	0°,7	0°,8	0°,9
1°	-420,4	-417,3	-414,2	-411,1	-408,0	-405,0	-401,9	-398,8	-395,7	-392,6
2	389,5	386,4	383,3	380,2	377,2	374,1	371,0	367,9	364,9	361,8
3	358,7	355,7	352,6	349,5	346,4	343,4	340,3	337,3	334,3	331,1
4	328,1	325,0	322,0	318,9	315,9	312,8	309,8	306,7	303,7	300,6
5	297,6	294,6	291,5	288,5	285,5	282,4	279,4	276,3	273,3	270,3
6	267,2	264,2	261,2	258,2	255,1	252,1	249,1	246,1	243,1	240,0
7	237,0	234,0	231,0	228,0	225,0	222,0	219,0	215,9	212,9	209,9
8	206,9	203,9	200,9	197,9	194,9	191,9	188,9	185,9	182,9	179,9
9	177,0	174,0	171,0	168,0	165,0	162,0	159,1	156,1	153,1	150,1
10	147,1	144,2	141,2	138,2	135,2	132,3	129,3	126,3	123,4	120,4
11	117,4	114,5	111,5	108,6	105,6	102,6	99,7	96,7	93,8	90,8
12	87,9	84,9	82,0	79,0	76,1	73,1	70,2	67,3	64,3	61,4
13	58,4	55,5	52,6	49,7	46,7	43,8	40,9	37,9	35,0	32,1
14	-29,2	-26,2	-23,3	-20,4	-17,5	-14,6	-11,7	-8,7	-5,8	-2,9
15	0,0	+2,9	+5,8	+8,7	+11,7	+14,6	+17,5	+20,3	+23,2	+26,1
16	+29,0	+31,9	+34,8	+37,7	+40,6	+43,5	+46,4	+49,3	+52,2	+55,1
17	57,9	60,8	63,7	66,5	69,4	72,3	75,2	78,0	80,9	83,8
18	86,7	89,5	92,4	95,3	98,1	101,0	103,8	106,7	109,6	112,4
19	115,3	118,1	121,0	123,8	126,7	129,5	132,4	135,2	138,1	140,9
20	143,8	146,6	149,4	152,3	155,1	158,0	160,8	163,6	166,5	169,3
21	172,1	175,0	177,8	180,6	183,4	186,2	189,1	191,9	194,7	197,5
22	200,4	203,2	206,0	208,8	211,6	214,4	217,2	220,0	222,8	225,6
23	228,4	231,2	234,0	236,8	239,6	242,4	245,2	248,0	250,8	253,6
24	256,4	259,2	262,0	264,7	267,5	270,3	273,1	275,9	278,6	281,4
25	284,2	287,0	289,7	292,5	295,3	298,0	300,8	303,6	306,3	309,1
26	311,9	314,6	317,4	320,1	322,9	325,7	328,4	331,2	333,9	336,7
27	339,4	342,2	344,9	347,7	350,4	353,2	355,9	358,6	361,4	364,1
28	366,8	369,6	372,3	375,0	377,8	380,5	383,2	385,9	388,7	391,4
29	394,1	396,8	399,6	402,3	405,0	407,7	410,4	413,1	415,8	418,6
30	+421,3	+424,0	+426,7	+429,4	+432,1	+434,8	+437,5	+440,2	+442,9	+445,6
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9

Таблица значений $\frac{k}{(50 S)^2}$ (в миллигалах)

Маятник № 107

50 S секунд	0°,0	0°,1	0°,2	0°,3	0°,4	0°,5	0°,6	0°,7	0°,8	0°,9
290	9622,2	615,6	609,0	602,4	595,8	589,2	582,6	576,0	569,4	562,8
1	556,2	549,7	543,2	536,6	530,1	523,6	517,1	510,6	504,1	497,5
2	491,0	484,5	478,0	471,5	465,1	458,6	452,1	445,6	439,2	432,7
3	426,2	419,8	413,4	407,1	400,7	394,3	387,8	381,5	375,2	368,8
4	362,4	356,1	349,7	343,4	337,0	330,7	324,4	318,0	311,7	305,3
295	299,0	292,7	286,4	280,1	273,8	267,5	261,3	255,0	248,7	242,4
6	236,1	229,9	223,7	217,5	211,3	205,0	198,8	192,6	186,4	180,2
7	174,0	167,9	161,8	155,6	149,5	143,4	137,3	131,2	125,0	118,9
8	112,8	106,7	100,5	094,6	088,5	082,4	076,3	070,2	064,2	058,1
9	9052,0	046,0	040,0	034,0	027,8	021,8	015,8	009,7	003,7	8997,6
300	8991,6	985,6	979,6	973,6	967,7	961,7	955,7	949,7	943,8	937,8
1	931,7	925,8	919,9	914,0	908,1	902,2	896,3	890,4	884,5	878,6
2	872,7	866,7	861,1	855,3	849,5	843,6	837,8	832,0	826,2	820,4
3	814,5	808,7	802,9	797,1	791,9	785,5	779,7	773,9	768,1	762,3
4	756,5	750,7	745,0	739,3	733,5	727,8	722,1	716,3	710,6	704,8
305	699,1	693,4	687,8	682,1	676,4	670,8	665,1	659,5	653,8	648,2

Вычисление масштабного коэффициента k маятника № 46

$k_0 = 680400$; $\alpha_0 = -15,74$; $\beta_0 = +0,155$

Дата эталонирования — апрель 1939 г.

№ по пор.	Наименование пунктов	g	t	$\frac{k}{(50 S)^2}$	$\alpha_0(t-20)$	$\beta_0(t-20)^2$	γ	$\gamma+g$	$\gamma - \frac{[\gamma]}{n}$	$g - \frac{[g]}{n}$	$\frac{\gamma+g - \frac{[\gamma+g]}{n}}{n}$	γx	ε
1	Москва ГАИШ	1,559	17,37	6672,0	- 41,4	- 1,1	6629,5	8188,5	-251,3	+251,8	+0,4	-2,4	+0,5
2	Пулково	1,900	21,33	6266,5	+ 20,9	- 0,3	6287,1	8187,1	-593,7	+592,8	-1,0	-2,3	-0,8
3	Полтава	1,006	20,49	7176,6	+ 7,7	0,0	7184,3	8190,3	+303,5	-301,2	+2,2	-2,6	+2,1
4	Одесса	0,764	19,54	7429,7	- 7,2	0,0	7422,5	8186,5	+541,7	-543,2	-1,6	-2,7	-1,8
	Среднее . .	1,3072					6880,8	8188,1	+ 0,2	+ 0,2	0,0		0,0

$$\sum \left(\gamma + g - \frac{[\gamma+g]}{n} \right) \left(\gamma - \frac{[\gamma]}{n} \right) = + 294,22$$

$$x = - 0,000367$$

$$\sum \left(\gamma - \frac{[\gamma]}{n} \right)^2 = + 801351,54 \quad C = 988185,6$$

$$k = 680150$$

$$\alpha = - 15,73$$

$$\beta = + 0,155$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемьев И. А. Теория вертикального упругого маятника. Известия АН СССР, 1934 г.
2. Артемьев И. А. Теория околоректильного упругого маятника. Прикладная математика и механика, 1935 г.
3. Голицын Б. Б. Лекции по сейсмометрии, 1912 г.
4. Казанский И. А. Объем, направление и организация работ по общей основной гравиметрической (маятниковой) съемке СССР во втором пятилетии. «Геодезические, картографические и гравиметрические работы во втором пятилетии». Материалы Всесоюзной конференции, апрель 1932 г., Москва — Ленинград, 1933 г.
5. Казанский И. А. Об эластических маятниках. «Геодезические, картографические и гравиметрические работы во втором пятилетии». Материалы Всесоюзной конференции, апрель 1932 г. М.— Л., 1933 г.
6. Михайлов А. А. О приборе для статического определения силы тяжести. «Геодезические, картографические и гравиметрические работы во втором пятилетии». Материалы Всесоюзной конференции, апрель 1932 г.
7. Лойцянский и Лурье. Теоретическая механика. ОНТИ, 1934 г.
8. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939 г.
9. Рудаковский Г. И. Измерение силы тяжести упругими маятниками. Геодезист, № 5, 1938 г.
10. Сорокин Л. В. Курс гравиметрии и гравиметрической разведки. Изд. карт. и горно-топл. литературы, 1941 г.
11. Хейфец М. Е. Первый опыт производственных работ с упругими маятниками. Сборник ГУГК при СНК СССР, № 1, 1941 г.
12. Хейфец М. Е. Об основной формуле упругих маятников. Сборник ГУГК при СНК СССР, № 9, 1945 г.
13. Baeschlin G. F. Das astasierte elastische Pendel als Schweremesser. Schweizerische Zeit. f. Verm. und Kulturtechnik.
14. Baeschlin G. F. et Corpaci A. I. Analyse mathématique des oscillations d'un pendule astatique élastique. Bulletin Géodésique, № 58, 1938.
15. Graf A. Zur Theorie elastischer Pendel mit besonderer Berücksichtigung der Holweck-Lejayschen Stabpendels. Zeitschrift für Geophysik, 10, 1934.
16. Holweck F. Description du nouveau gravimètre Holweck-Lejay. Resultats obtenus. Bulletin Géodésique, № 46, 1935.
17. Holweck F. et Lejay R. Mesures relatives de la gravité au moyen du pendule élastique inverse. Journal des Observateurs, № 17, 1934.
18. Статьи Holweck'a и Lejay в „Comptes rendus de l'Académie des Sciences“. Т. 190 (1930), Т. 192 (1931), Т. 193 (1931), Т. 196 (1933), Т. 198 (1934), Т. 200 (1935), Т. 204 (1937), Т. 205 (1937), Т. 206 (1938), Т. 207 (1938).
19. Lejay R. Instrumente transportable pour la mesure rapide de la gravité. Bulletin Géodésique, № 28, 1930.
20. Norgaard G. Ein statischer Quarzschweremesser und Schweremessung. 1939.
21. Nörlund N. Observations de l'intensité de la pesanteur avec le nouveau modèle de pendule Holweck - Lejay. Copenhagen, 1934.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	<i>Стр.</i>
Предисловие редактора	3
I. Введение	6
II. Закон затухания амплитуд упругого маятника и поправка за амплитуду	8
III. Учет влияния температуры и определение температурных коэффициентов	34
IV. Систематические и случайные ошибки отсчета моментов времени	48
V. Эталонирование и ошибки масштабного коэффициента k	55
VI. Влияние нивелировки	59
VII. Эффект „сокачания“	64
VIII. Вековой ход маятников	67
IX. Выводы. Практический пример работ Каракумской экспедиции и их результаты	75
Приложение 1. Результаты определения поправки за амплитуду в Москве (журнал наблюдений. Маятник № 107)	84
Приложение 2. Результаты определения поправки за амплитуду в Ашхабаде (журнал наблюдений. Маятник № 107)	86
Приложение 3. Таблица значений $\alpha(t - t_0) + \beta(t - t_0)^2$ (маятник № 107)	89
Приложение 4. Таблица значений $\frac{k}{(50 S)^2}$ (маятник № 107)	90
Приложение 5. Вычисление масштабного коэффициента k маятника № 46	91
Список литературы	93

Редактор И. А. Казанский

Техн. ред. И. А. Шленский

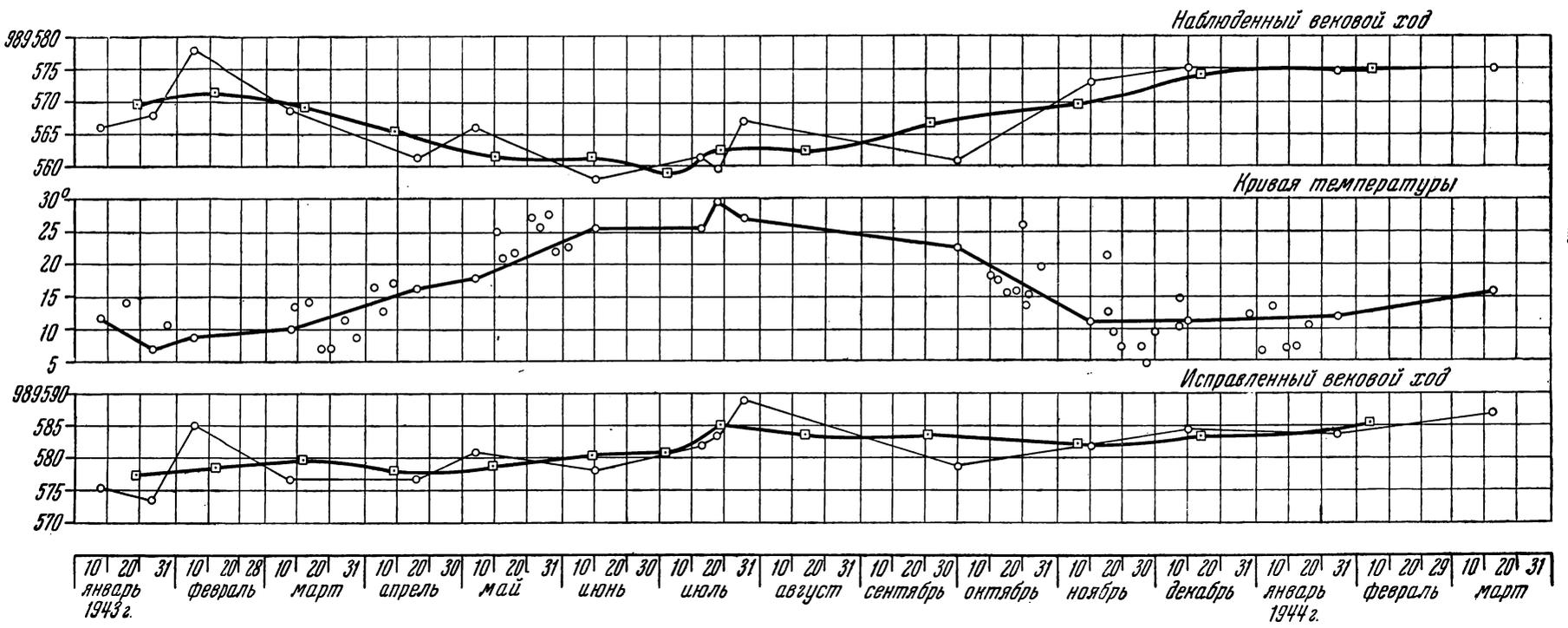
А-03450. Сдано в набор 6/XI—1948 г. Подп. к печ. 15/IV—1949 г. Объем в п/л. 6+1 вкл. Колич. знаков в п/л. 60 000. Уч.-изд. 9 л. Тир. 500. Зак. 1205. Цена 9 р.

Рига. Каргфабрика, ул. Алтонавас, 43.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

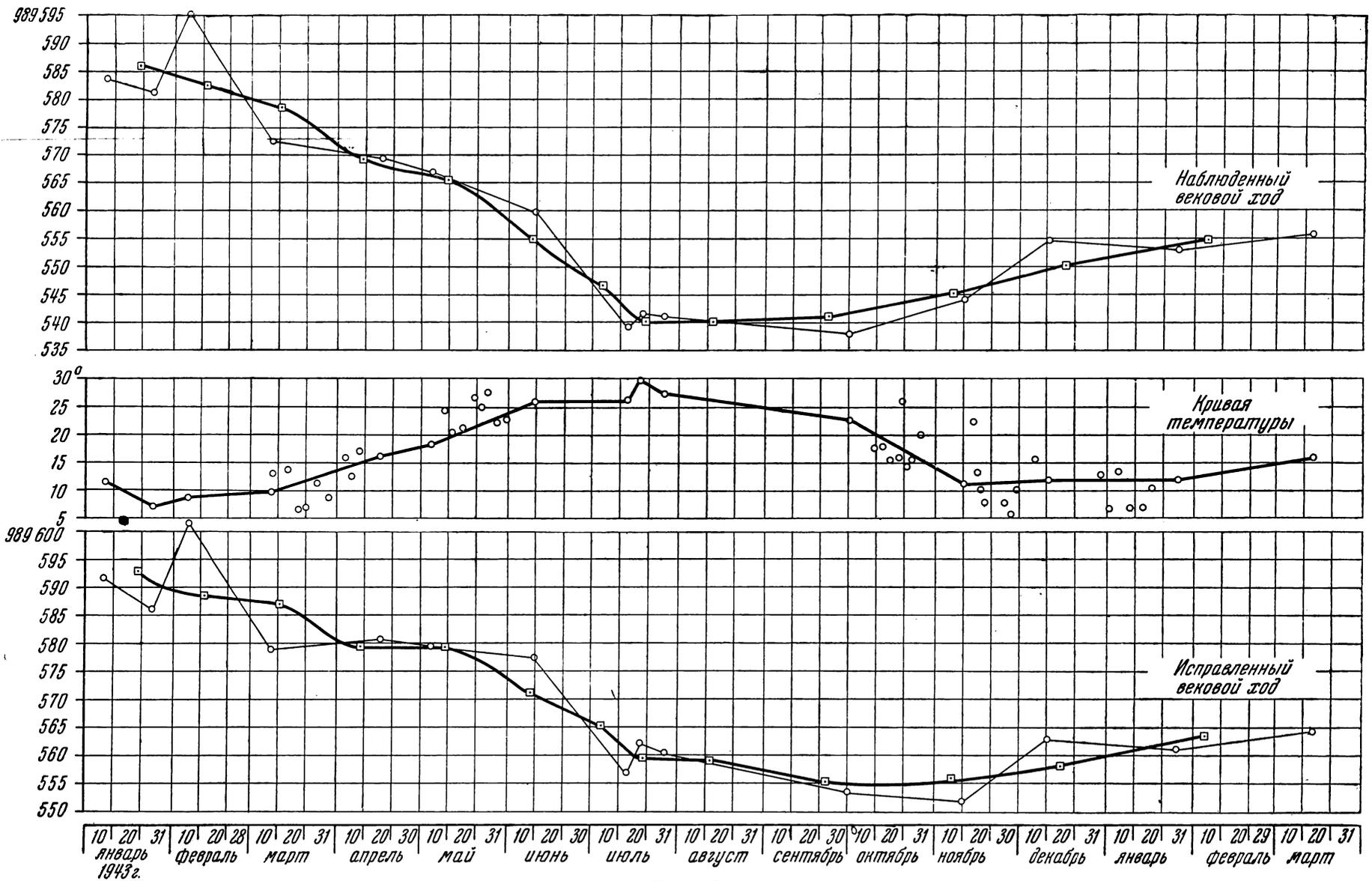
Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
22	13 сверху	θ_{pc}	θ_{cp}
43	9 снизу	$= 2n \left(m - \frac{n+1}{2} \right) \Delta t$	$= \left(m - \frac{n+1}{2} \right) \Delta t$
50	2 сверху	$\left. \frac{(x_C - \Delta)^3}{6 a^2 x_C} \right] t'$	$\left. \frac{(x_C - \Delta)^3}{6 a^2 x_D} \right] t'$
56	14 снизу	β_n^2	βt_n^2

График векового хода маятника № 106



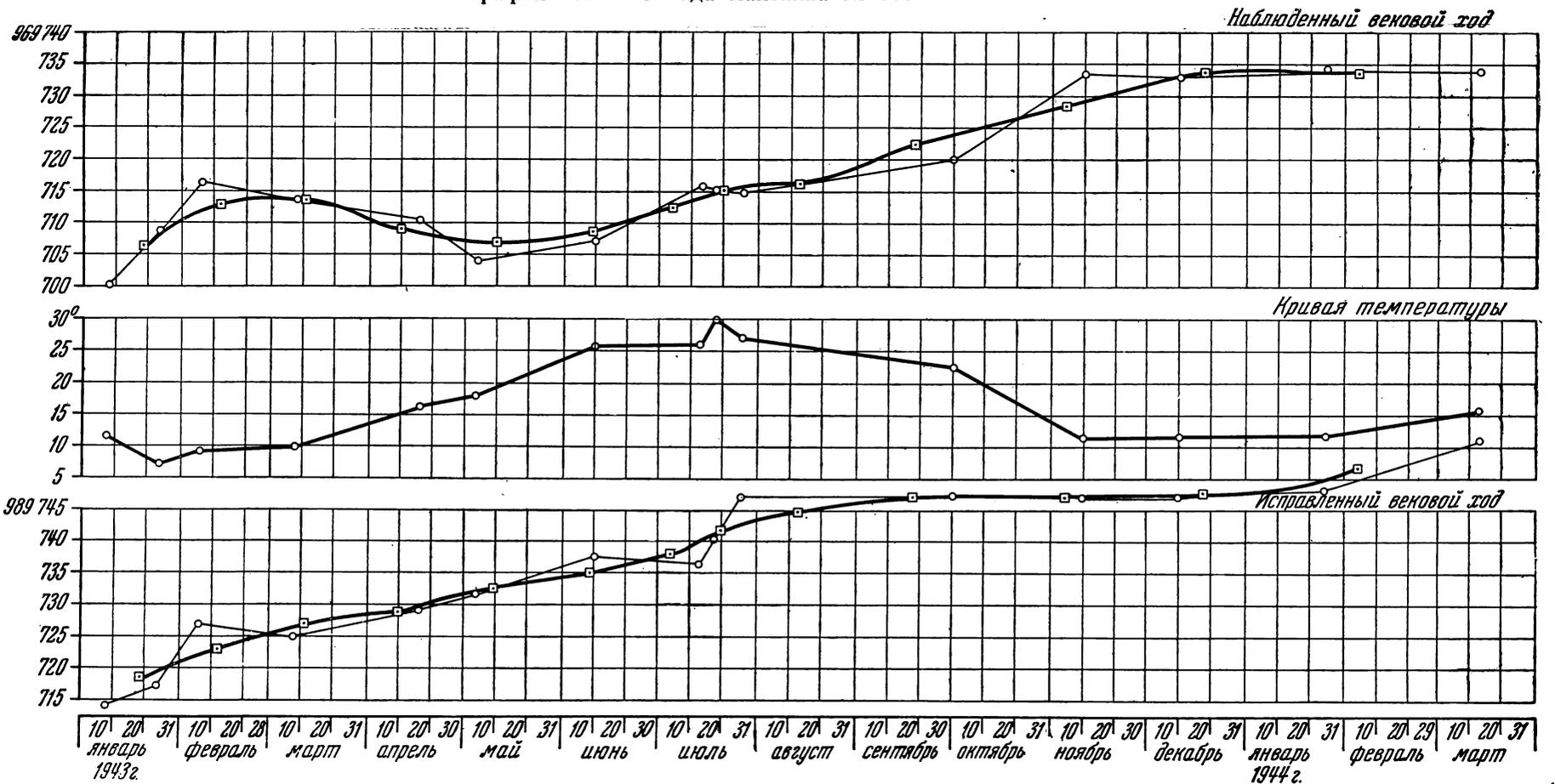
Черт. 14

График векового хода маятника № 107



Черт. 15

График векового хода маятника № 108



Черт. 16