

В

ДЛЯ ВУЗОВ

БАЛЛИСТИКА И НАВИГАЦИЯ РАКЕТ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

В

ДЛЯ ВУЗОВ

БАЛЛИСТИКА И НАВИГАЦИЯ РАКЕТ

Под редакцией заслуженного деятеля науки
и техники РСФСР д-ра техн. наук проф.
А. А. ДМИТРИЕВСКОГО

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для технических вузов



МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1985

ББК 39.62
Б20
УДК 629.762

А. А. Дмитриевский, Н. М. Иванов, Л. Н. Лысенко,
С. С. Богодистов

Рецензент М. Д. Кислик

Баллистика и навигация ракет: Учебник для втузов /
Б20 А. А. Дмитриевский, Н. М. Иванов, Л. Н. Лысенко,
С. С. Богодистов; Под ред. А. А. Дмитриевского — М.: Ма-
шиностроение, 1985. — 312 с., ил.

В пер.: 1 р.

Б $\frac{3607000000-233}{038 (01)-85}$ 233-85

ББК 39.62
676

ПРЕДИСЛОВИЕ

Достижения советской ракетно-космической техники стали возможными благодаря успешному развитию многих областей науки и техники и, в частности, теории полета ракет (баллистики ракет). На протяжении многих лет внешняя баллистика была наукой о движении мин и снарядов ствольных систем. С развитием ракетной техники круг вопросов, составляющих предмет исследования баллистики, значительно расширился. Появились работы по баллистике управляемых летательных аппаратов (ЛА), включающие вопросы оптимизации и выбора программы движения. Существенное развитие получили методы определения управляемости ракет, анализа точности управляемого полета с учетом действия случайных возмущений и др.

Решение задач управления движением ЛА неразрывно связано с информационным обеспечением управляемого полета, являющимся одним из основных разделов навигации — науки о методах и средствах определения текущего состояния объекта относительно фиксированной системы отсчета и выбора траектории, обеспечивающей его приведение в заданную точку пространства. Получившие первоначальное развитие для целей мореплавания, методы навигации впоследствии были распространены на движение ЛА — самолетов, ракет и космических аппаратов. Существенным стимулом дальнейшего совершенствования методов решения навигационных задач послужило создание бортовых цифровых вычислительных комплексов (БЦВК), способствовавших повышению гибкости и эффективности реализации соответствующих навигационных алгоритмов. При проектировании навигационных систем и систем автоматического управления ЛА разработчику приходится использовать не только уравнения возмущенного движения аппарата в окрестности опорной траектории, но и создавать алгоритмы формирования в БЦВК оптимальных стратегий навигационного определения состояния в темпе полета.

При написании учебника авторы стремились, прежде всего, осветить методологические аспекты рассматриваемой дисциплины, поэтому, естественно, книга не исчерпывает всего многообразия проблем, стоящих перед навигацией и баллистикой ракет.

Отбор материала, включенного в учебник, подчинен единой цели — дать достаточно полное представление о методах навигации беспилотных ЛА и возможных способах их реализации при управлении движением ракет. Изложение вопросов баллистики ограни-

чено совокупностью сведений, необходимых и достаточных для понимания исходных предпосылок и проблем баллистико-навигационного обеспечения управляемого полета.

Помимо основных сведений, составляющих содержание соответствующего курса, в учебник включены некоторые материалы для факультативного изучения. Этот вспомогательный материал, требующий для его восприятия и освоения, как правило, более высокого уровня предварительной подготовки, выделен в тексте мелким шрифтом.

Приведенный список литературы содержит перечень использованных авторами источников. Работы, рекомендуемые для более глубокого изучения дисциплины, отмечены в нем звездочками.

Предисловие, введение, гл. 1 и 2 написаны А. А. Дмитриевским, гл. 3 и 7 — Л. Н. Лысенко, гл. 4 — Н. М. Ивановым, гл. 5 и 6 — Л. Н. Лысенко и Н. М. Ивановым совместно, гл. 8 — С. С. Богодистовым.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность всем товарищам, принявшим участие в обсуждении учебника и оказавшим помощь при подготовке его к изданию.

Авторы особенно благодарны д-ру техн. наук проф. А. А. Лебедеву, сделавшему ряд полезных замечаний по рукописи книги, а также д-ру техн. наук проф. М. Д. Кислику, взявшему на себя труд по рецензированию рукописи.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Малые выделенные жирным шрифтом буквы обозначают векторы: $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$. Выделение жирным шрифтом векторов сил и моментов, обозначаемых большими буквами, специально оговаривается в тексте. Строчечная и столбцевая формы записи вектора в общем случае не различаются. Если такое различие существенно, в тексте специально оговаривается, какая форма представления вектора употребляется. Выделенные жирным шрифтом большие буквы и частные производные суть матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ или $\partial f/\partial \mathbf{x}$ и $\partial f/\partial \mathbf{u}$.

Скалярные или векторные функции скалярных или векторных переменных обозначаются заключением аргумента в скобки: $x(t)$, $f(x, u)$, $\dot{f}(x, u)$. В общем случае функция указывается совместно с промежутком, на котором она определена: $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_k$.

Основные обозначения соответствуют ГОСТам: 20058—80, Динамика летательных аппаратов в атмосфере, М.: 1981; 4401—81, Атмосфера стандартная. Параметры, М.: 1981.

- A — азимут;
- a — большая полуось земного эллипсоида, скорость звука, ускорение;
- b — малая полуось земного эллипсоида;
- C — баллистический коэффициент, константы интегрирования (с индексами);
- c_R — аэродинамический коэффициент при результирующей силе аэродинамического сопротивления;
- $c_{x_a}, c_{y_a}, c_{z_a}$ — коэффициенты аэродинамических сил;
- $c_{y_a}^{\dot{\alpha}}, c_{z_a}^{\dot{\beta}}$ — динамические производные коэффициентов подъемной и боковой сил;
- D — относительная дальность (расстояние по линии визирования);
- $\dot{D}$ — скорость движения ЛА вдоль линии визирования;
- e — ошибка системы управления, бесконечно малая величина, окрестность области;
- F — сила, знак функции;
- Q — сила тяжести;
- g — ускорение свободного падения;
- H — геопотенциальная высота, функция Гамильтона (гамльтониан);
- h — высота над поверхностью Земли, давление воздуха в мм. рт. ст.;
- I — тензор инерции, критерий качества;
- K — вектор кинетического момента тела переменной массы;
- K_{0j} ($j = \psi, \theta, \gamma$) — коэффициент усиления соответствующего канала управления;
- L — дальность стрельбы вдоль поверхности Земли;
- l — характерный линейный размер ЛА;
- M — внешний момент, масса Земли;
- $\bar{M}$ — число Маха, символ математического ожидания;
- m — масса ЛА;
- m_x, m_y, m_z — коэффициенты аэродинамических моментов крена, рыскания, тангажа;

$m_x^{\omega_x}$; $m_y^{\omega_y}$; $m_z^{\omega_z}$ — коэффициенты (вращательные производные) демпфирующих моментов крена, рыскания и тангажа;
 n — перегрузка;
 P — тяга двигательной установки ЛА;
 p — давление воздуха;
 q — угол места, скоростной напор;
 $\dot{q}$ — угловая скорость линии визирования;
 R_A — вектор полного аэродинамического сопротивления;
 R_3 — радиус Земли;
 r — радиус-вектор;
 S — площадь (в том числе, площадь миделового сечения ЛА);
 t, τ — время (τ — дополнительно виртуальная температура);
 T — температура;
 u — вектор управления (управление);
 V — воздушная скорость ЛА;
 X_d, Y_d, Z_d — сила лобового сопротивления, аэродинамическая подъемная сила, аэродинамическая боковая сила;
 x — вектор состояния;
 α — угол атаки, сжатие Земли;
 β — угол скольжения;
 γ — угол крена;
 δ — угол отклонения органа управления, символ вариации;
 φ — угол рыскания (курса);
 θ — угол тангажа;
 Ψ — путевой угол (угол поворота траектории);
 Θ — угол наклона траектории (угол наклона вектора скорости к местному горизонту);
 λ — долгота;
 η — угол упреждения;
 ρ — массовая плотность воздуха;
 σ — среднее квадратическое отклонение;
 φ — широта;
 Ω_3 — угловая скорость вращения Земли;
 ω — угловая скорость ЛА.

Нижние индексы:

$З$ — Земля;
 $к$ — конечная величина;
 $ц$ — цель;
 max — максимальное значение;
 min — минимальное значение;
 o — начальное значение, начальная точка.

Верхние индексы.

0 — единичный вектор (орт), оптимальное значение;
 t — знак транспонирования вектора или матрицы;
 $*$ — номинальное значение, локальная производная.
 Прочие обозначения, принятые в учебнике, пояснены в тексте.

ВВЕДЕНИЕ

В.1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ БАЛЛИСТИКИ

Баллистика — как наука, включает в себя изучение движения ЛА с учетом действующих на них сил и моментов и разработку математических алгоритмов управления движением на базе априорной (доопытной) и непосредственно получаемой в полете (апостериорной) информации о параметрах движения. Имея в виду четкую формулировку предмета, современную внешнюю баллистику называют теорией полета, поэтому в учебнике не делается различия между терминами «баллистика ракет» и «теория полета ракет».

Баллистика занимается решением четырех основных задач:

Первая задача — расчет траекторий движения ЛА по заранее известным данным. Для решения этой задачи необходимо определить силы, действующие на ЛА в полете. Далее следует составить дифференциальные уравнения движения ЛА с учетом действующих сил. В результате решения дифференциальных уравнений получаются все характеристики движения: скорость, углы, определяющие ориентацию вектора скорости и ЛА в пространстве, время полета, координаты центра масс, по которым может быть построена траектория. Первую задачу иногда называют **основной или прямой задачей баллистики**. Число сил, действующих на ЛА в полете, характер их изменения, а также число уравнений и их вид зависят от назначения ЛА, его конструкции, способа стабилизации, предполагаемой траектории движения и принятых допущений.

Вторая задача — определение проектных баллистических характеристик движения по заданным тактико-техническим требованиям (ТТТ). Данная задача непосредственно связана с баллистическим проектированием систем, важным этапом которого является описание оптимальных режимов движения и траекторий полета.

Исследование вопросов стабилизации ЛА различного назначения, определение условий управляемости и разработка баллистических алгоритмов управления движением в темпе полета составляет **третью задачу баллистики**.

Расчет траекторий на начальной стадии проектирования ЛА ведется, как правило, для идеально выполненного аппарата при использовании параметров атмосферы, отвечающих средним метеорологическим условиям. Однако в действительности появляется ряд факторов, вызывающих отклонение ЛА в полете от расчетной траектории. Рассеивание траекторий отдельных пусков может зависеть как от конструктивных и технологических причин, так и от отклонений условий полета от расчетных. Изучение факторов, влияющих

на рассеивание траекторий, рассмотрение способов уменьшения рассеивания и повышения точности наведения относится к **четвертой задаче баллистики**.

Помимо перечисленных задач, баллистика дает основные сведения для разработки правил и приемов **прицеливания ракет**.

Перечень вопросов, составляющих содержание баллистики как науки, позволяет выделить в ней по крайней мере два основных направления, первое из которых называют **баллистическим обеспечением полета**, второе — **проектной баллистикой**. Баллистическое обеспечение полета ставит своей целью выполнение совокупности операций, направленных на непосредственное решение задач полета. К числу таких операций может быть отнесено:

определение и прогнозирование **параметров движения ЛА** по результатам навигационных измерений;

анализ соответствия реализуемых параметров конечной цели полета;

расчет корректирующих поправок или необходимых управляющих воздействий для приведения движения ЛА в соответствие с реализуемой программой полета.

В рамках постановки задач баллистики, решаемых в темпе полета, обычно стремятся к использованию математической модели, наиболее полно отражающей не только основные, но и второстепенные факторы, влияющие на движение ЛА (например, «период последствий», эффекты, обусловленные разделением ступеней, переходные процессы при отработке управляющих воздействий и т. д.).

Назначением раздела науки, называемого проектной баллистикой, является получение исходных данных для проектирования ЛА на основе анализа условий движения без привязки траектории к конкретным географическим координатам цели и точки старта, выбора наиболее выгодной схемы полета и определения требуемого управления, обеспечивающего решение поставленной задачи.

Проектные баллистические расчеты проводятся в несколько приближений. Сначала при баллистическом проектировании определяются характеристики идеальной траектории ЛА с учетом массы боевой части и предполагаемых дальностей полета (максимальной и минимальной). При проведении расчетов на стадии баллистического проектирования считается уместным использование специально «загрубленных» упрощенных математических моделей, учитывающих лишь основные факторы. В результате этих расчетов устанавливается целесообразность выбираемого метода управления, форма траектории, ее кривизна, величина касательных и нормальных ускорений. В процессе конструирования ракетного комплекса баллистические проектные расчеты повторяются с введением в них новых уточненных данных об аппарате, его системах управления и стабилизации.

В.2. ОСОБЕННОСТИ ПОЛЕТА РАКЕТ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Дальность стрельбы, траектория движения, способы стабилизации и управления и другие характеристики ракет непосредственно связаны с их назначением. В зависимости от расположения

стартовой установки и цели принято разделять ракеты на четыре класса: «поверхность—поверхность» («земля—земля», «корабль—корабль», «корабль—земля», «земля—корабль»); «поверхность—воздух» («земля—воздух», «корабль—воздух»); «воздух—воздух» («са-

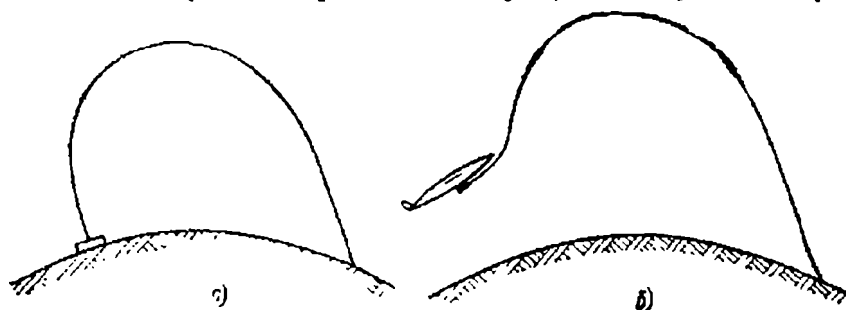


Рис. В.1. Виды траекторий баллистических ракет:

а — траектория баллистической ракеты, стартующей с Земли; б — траектория авиационной баллистической ракеты

молет—самолет», «самолет—ракета» и «воздух—поверхность»). Кроме того, ракеты разделяются на управляемые и неуправляемые. Управляемая ракета снабжается системой управления и обладает свойством принудительно изменять характеристики движения в процессе полета. В том случае, когда по каким-либо причинам управление отсутствует, полет ракеты становится неуправляемым. Если же ракета не имеет системы управления, то она называется неуправляемой.

Типичная траектория движения баллистической ракеты при запуске с поверхности земли показана на рис. В. 1, а. Схема траектории авиационной баллистической ракеты, управляемой по программе, приведена на рис. В. 1, б. На рис. В. 2 показаны траектории движения крылатой и баллистической ракет, имеющих программное управление.

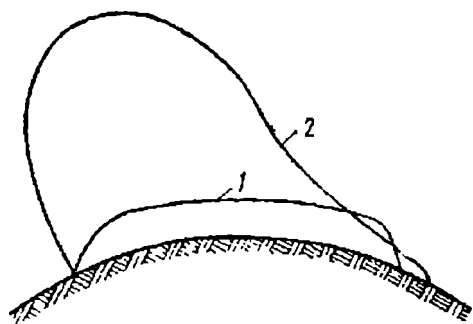


Рис. В.2. Типовые траектории ЛА:

1 — крылатой ракеты; 2 — баллистической ракеты с деформированной траекторией

При наведении ЛА на подвижные цели вид траектории будет определяться в значительной степени траекторией и параметрами движения цели. Имея в виду пространственный характер движения, в общем случае траектории наведения представляют собой сложные пространственные кривые.

В.3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИФИКАЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛОТОМ БЕСПИЛОТНЫХ ЛА

Дальность полета ракет складывается из дальности, соответствующей активному участку траектории, и дальности пассивного полета. Почти всегда у ракет класса «поверхность—поверх-

ность» пассивный участок траектории значительно больше активного и, в основном, именно он определяет полную дальность стрельбы. Для заданной ракеты или ее головной части дальность, соответствующая пассивному участку траектории, зависит от параметров траектории в конце активного участка.

Траектория управляемого ЛА формируется с помощью управляющих параметров. Как известно, целью процесса управления движением в общем случае является перевод ЛА из некоторого заданного при $t = t_0$ начального состояния x_0 в заданное конечное состояние x_k .

Считая ракету твердым телом, в самом общем случае можно определенным образом менять во времени характеристики ее движения по шести степеням свободы. В действительности для решения практических задач управлять характеристиками движения ЛА в воздухе по всем шести степеням свободы не требуется, так как многие параметры движения взаимосвязаны. Например, меняя угол между направлением вектора скорости и осью ракеты, можно изменять во времени пространственные координаты центра масс ракеты.

По принципу формирования управляющих воздействий все системы наведения подразделяются на два типа:

программные системы наведения;

позиционные или координатные системы наведения, т. е. системы наведения, получающие информацию от цели.

В программных системах наведения управляющим воздействием служит сигнал, вырабатываемый программным устройством. Этот сигнал, по существу, определяет требуемую траекторию движения, отклонение от которой компенсируется системой наведения. Программа закладывается на борт ЛА перед пуском в зависимости от координат цели и не корректируется в процессе полета. Системы наведения, имеющие устройства для получения информации о положении цели (координаторы), формируют управляющие воздействия по измеряемым параметрам движения и координатам цели. Положив в основу классификации систем наведения принцип действия системы, определяющий, на основании какой информации вырабатывается сигнал наведения и какие физические явления используются для определения координат цели и ЛА, приходим к следующему общепринятому подразделению систем наведения на **автономные системы**, **системы теленаведения**, **системы самонаведения** и **комбинированные системы**. Причем системы теленаведения, в свою очередь, подразделяются на **командные системы** с выработкой команд наведения в координатах командного пункта (КП) или в координатах ЛА и **лучевые системы** (однолучевые и двухлучевые), к которым примыкают **радионавигационные системы наведения**.

Под автономными будем понимать такие системы, у которых все элементы системы управления движением сосредоточены на борту ракеты. В свою очередь, автономные системы можно подразделить на системы с внутренней информацией о характеристиках реального движения, например инерциальные и гироскопические системы

управления, и системы, получающие внешнюю информацию, например астронавигационные. Применение систем теленавещения предполагает наличие отдельного пункта, вырабатывающего команды или опорные сигналы и передающего их тем или иным способом на борт ракеты.

В отдельный класс систем управления обычно выделяют **системы самонавещения**, у которых внешняя информация поступает от цели, а управляющие сигналы вырабатываются на самом ЛА.

Известны различные комбинированные системы наведения, сочетающие, например, программное управление или теленавещение с самонавещением на конечном участке траектории.

Формирование траекторий управляемых ракет может осуществляться: изменением параметров движения на активном, пассивном участках траектории или их частях и управлением на всей траектории, включая активный и пассивный участки.

В.4. ЗАДАЧИ НАВИГАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ЛА

Управление движением ЛА в общем случае включает в себя:

обеспечение заданного расположения связанных осей ЛА относительно опорной системы координат (иначе, ориентацию и угловую стабилизацию ЛА);

определение координат и скорости ЛА путем измерений различных навигационных параметров, проведение вычислений для целей прогнозирования его движения, оценку результатов прогноза с точки зрения выполнения поставленной задачи полета и выработку поправок, обеспечивающих движение ЛА по оптимальной для каждого момента времени полета траектории (т. е. навигацию ЛА);

выработку команд и формирование управляющих воздействий, пропорциональных вычисленным поправкам, для реализации требуемого закона регулирования (т. е. процесс регулирования текущего состояния ЛА).

Таким образом, навигация ЛА является составной частью более широкого понятия, определяющего процесс «управления движением», а навигационная система — входит в состав системы управления ЛА. **Навигационная система (НС)** представляет собой комплекс технических средств, обеспечивающих решение **навигационной задачи** за **цикл навигации**, т. е. за время непрерывной работы системы в режиме определения навигационных координат ЛА. Решение навигационной задачи предполагает наличие навигационной информации, складывающейся из первичной, начальной и исходной.

Первичная навигационная информация — это текущая информация о поступательном движении центра масс ЛА и вращательном движении базисных направлений, в качестве источника которой могут выступать различные физические поля.

Начальная навигационная информация представляет собой первичную навигационную информацию, отнесенную к моменту начала цикла навигации.

Исходная навигационная (баллистическая) информация — это необходимая для обеспечения навигации баллистическая информация, непосредственно не связанная с движением конкретного ЛА и не изменяющаяся в пределах одного цикла навигации. К ней относятся сведения о физических полях, используемых в качестве источников первичной информации, априорная модель процесса движения, алгоритмы пересчета обобщенных координат ЛА в его навигационные координаты и т. д. Исходная навигационная информация служит основным элементом баллистического обеспечения полета.

Баллистическое обеспечение полета в совокупности с процессом получения первичной и начальной навигационной информации составляет **навигационное или баллистико-навигационное обеспечение полета**. Термин «навигационное обеспечение полета» наиболее часто используют по отношению к **неавтономной навигации**, т. е. к процессу навигации, реализуемому с помощью средств наземного комплекса. При обеспечении навигации только бортовыми средствами ЛА, работающими независимо от наземных систем и средств связи, обычно используют понятие **«автономная навигация»**.

Изложенное свидетельствует об органической взаимосвязи постановки и решения баллистических и навигационных задач на современном уровне развития теории и практики управляемого полета.

Характерным примером сочетаний методов баллистики и навигации может служить комплексная проблема формирования гибкой приземной траектории при терминальном управлении. Разработке теории терминального управления — управления конечным состоянием — посвящено большое количество работ, например, [74, 77]. Терминальные методы наведения реализуются с использованием так называемых многошаговых алгоритмов, при которых время движения ЛА разделяется на постоянные интервалы (шаги). В пределах одного шага ведется расчет и коррекция траектории. В результате последовательно повторяющейся на каждом шаге коррекции ЛА приводится в точку (область) с заданными координатами.

При этом на борту ЛА необходимо иметь БЦВМ, обладающую достаточным быстродействием и объемом памяти.

В.5. МЕТОДЫ НАВИГАЦИИ, ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Целью любого **метода навигации** является получение данных о текущих координатах и скорости ЛА относительно выбранной системы отсчета. В основу классификации методов, в отличие от способов навигации, учитывающих физические принципы построения навигационных систем, положена схема определения координат места ЛА. В настоящее время все методы навигации укрупненно можно подразделить на три группы:

позиционный метод, непосредственно реализующий линии и (или) поверхности положений;

метод счисления пути, основанный на определении линий положения путем непрерывного или дискретного интегрирования по времени измеряемых ускорений или скорости ЛА;

обзорно-сравнительный метод, позволяющий определить текущее местоположение ЛА в результате сопоставления фактически наблюдаемых ориентиров с их заранее запомненным относительным расположением.

Понятия о поверхностях и линиях положения используются в теории навигации для задания местоположения движущегося объекта в пространстве. При этом под **поверхностью положения** понимают геометрическое место точек местоположения ЛА в пространстве, характеризующееся постоянным значением измеряемого **навигационного параметра** (НП). В качестве НП могут выступать углы места и азимута, дальность, сумма или разность дальностей и т. д. Пересечение двух поверхностей положения определяет **линию положения**. Соответственно пересечение двух линий положения дает положение точки в пространстве.

В позиционном методе навигации определение координат ЛА осуществляется относительно небесных тел, наземных ориентиров либо другого ЛА (в частности, цели), а также на основании априорной информации о параметрах физических полей Земли, ее атмосферы и измерений их параметров в процессе полета. В качестве наземных ориентиров могут рассматриваться радионавигационные наземные станции, обеспечивающие определение координат радиотехническими методами, станции наведения и пр. При навигационных измерениях, проводимых в рамках позиционного метода, могут использоваться как естественные, так и искусственные источники излучения или отражения излучений от других объектов. Во всех случаях определение координат ЛА здесь сводится к измерению расстояний, углов или комбинации углов и расстояний в выбранной системе координат относительно одного или нескольких источников излучения. Учет пройденного ЛА расстояния в данном методе необязателен. Позиционный метод является основным методом навигации, реализуемым в системах телеуправления и самонаведения.

В методе счисления пути для определения текущего положения ЛА проводятся измерения его перемещений относительно известного начального положения. Осуществление счисления требует наличия данных о направлении движения ЛА (его курсе), ускорении или скорости относительно Земли. При измерении ускорения координаты определяются двукратным интегрированием, при измерении скорости — однократным интегрированием. К методу счисления пути относятся способы воздушного, радиолокационного, доплеровского и инерциального счислений. Он является основным методом, реализуемым в автономных системах.

В обзорно-сравнительном методе навигации текущие координаты ЛА определяются путем сопоставления фактически наблюдаемой карты местности или неба с географической или звездной картой. Данный метод нашел применение в так называемых экстремальных

и корреляционно-экстремальных навигационных системах управления движением ЛА по заданному курсу.

В отличие от *метода*, определяющего теоретическую основу или путь математического решения (исследования) задачи, *способ навигации* характеризует уже конкретное техническое решение поставленной задачи. Естественно, что один и тот же метод может иметь множество различных технических решений, т. е. может быть реализован с помощью различных способов. Понятие *способа*, таким образом, неразрывно связано с определением конкретного типа систем, используемых для обеспечения навигации ЛА по выбранному методу.

Навигационные системы, реализующие названные методы, конструктивно отличаются друг от друга в зависимости от того, какие физические принципы положены в основу их работы.

ГЛАВА 1

УСЛОВИЯ ПОЛЕТА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ И АТМОСФЕРОЙ ЗЕМЛИ

Выбор траектории ЛА, его динамических характеристик, а также решение всей совокупности задач баллистического и навигационного обеспечения в значительной степени зависят от физических условий полета. Движение ракет осуществляется в поле тяготения Земли, которое, с одной стороны, оказывает определяющее воздействие на формирование траектории, с другой — является объектом получения информации при синтезе навигационных систем.

При разработке навигационных систем используется информация не только о гравитационном поле. Создание комплексных систем требует в ряде случаев знания характеристик магнитного поля Земли (МПЗ).

Характер и интенсивность взаимодействия ЛА с воздушной средой определяются такими ее параметрами, как состав, плотность, давление, температура, скорость распространения возмущений (скорость звука) и т. п. Эти параметры атмосферы прежде всего являются функциями высоты над поверхностью мирового океана. На них оказывают воздействие сезонные и суточные вариации, географические и климатические факторы и многое другое. Значительное влияние на распределение параметров атмосферы оказывает перемещение воздушных масс — ветры. Ветры, кроме того, приводят к отклонению истинного значения воздушной скорости полета от значений скорости движения относительно наземных ориентиров. В совокупности, все эти факторы обуславливают возмущенное движение ЛА, существенно отличающееся от номинального (опорного), определяемого для нормальных условий полета, т. е. условий, не учитывающих фактически отклонения физических условий полета от расчетных значений. Эти отклонения надо уметь учитывать при подготовке данных для пуска ракет, определении текущего местоположения ЛА и в ряде иных баллистических и навигационных задач.

Отметим, наконец, что определение движения предполагает использование той или иной отсчетной базы или иначе, материализуемой с помощью различных технических средств, например гиростабилизированной платформы, системы координат. Выбор системы координат зависит от многих факторов: характера решаемой задачи, конкретного назначения и конструктивной схемы ЛА, реализуемого метода навигации и т. д.

1.1. АППРОКСИМАЦИЯ РЕАЛЬНОЙ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЪЗУЕМЫЕ В БАЛЛИСТИКЕ И НАВИГАЦИИ ЛА

1.1.1. Фигура Земли

За более близкую к реальной форме Земли по отношению к другим возможным видам аппроксимаций принимают фигуру, называемую **геоидом**. Геоид — это фигура, ограниченная уровенной поверхностью потенциала силы тяжести, во всех точках которой значение потенциала одинаково и которая совпадает с поверхностью океанов, находящихся в невозмущенном состоянии, т. е. при отсутствии приливов, отливов, атмосферных и каких-либо других возмущений. В настоящее время данных для точного математического описания геоида еще недостаточно. При проведении различного рода вычислительных работ (геодезических, астрономических и баллистических) в качестве последовательных приближений к геоиду принимают: сферическую модель Земли — сферу, сфероидальную модель — сфероид (эллипсоид вращения), трехосный эллипсоид.

В России в течение долгого времени при проведении астрономо-геодезических работ был принят **сфероид Бесселя**. В 1924 г. по международному соглашению лучшим сфероидом был признан **сфероид Хейфорда**. Во многих случаях оказывается удобным использовать так называемый **нормальный сфероид**, предложенный А. Клеро.

Размеры, определяющие сфероид (его оси), вычислялись на основании градусных измерений длин дуг меридианов. Так как фигура Земли отлична от сфероида, то в разных местах на одной и той же широте дуги меридианы имеют разную кривизну. Поэтому определенные градусными измерениями размеры эллипсоида зависят от места измерения. Этим объясняются имеющиеся различия в численных значениях элементов земного сфероида, полученных отдельными авторами.

Советские геодезисты под руководством Ф. Н. Красовского (1878—1948), используя градусные измерения СССР, Западной Европы и США, определили размеры **двухосного эллипсоида (сфероида)**, который используется в геодезических работах СССР и назван **земным эллипсоидом Красовского**. На основании тех же работ были получены данные для **трехосного эллипсоида**.

Для двухосного эллипсоида Красовского большая полуось (средний радиус экватора) принимается равной $a = 6\,378\,245$ м, малая полуось $b = 6\,356\,863$ м. Разница в величинах осей сфероида составляет $\sim 42\,800$ м. Сжатие сфероида $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1/298,3$.

Квадрат первого эксцентриситета $e_1^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 0,006693$. Квадрат второго эксцентриситета $e_2^2 = (a^2 - b^2)/b^2 = 0,006739$.

Для сферической модели Земли основной геопостоянной величиной является радиус земной сферы. Он может быть определен по-разному. Если взять среднее арифметическое трех полуосей эллипсоида Красовского, то получим $6371,118$ км. Радиус сферы,

имеющей ту же поверхность и тот же объем, что и поверхность и объем земного эллипсоида, может быть принят равным 6371 км.

Земля совершает в пространстве сложное движение — годовое обращение вокруг Солнца и суточное вращение относительно своей оси; земная ось совершает нутационное и прецессионное движение. Однако при исследовании движения ракет ввиду кратковременности их полета считают, что движение Земли по орбите вокруг Солнца можно принимать за прямолинейное равномерное поступательное движение. Нутационные колебания Земли и ее прецессию не учитывают, так как эти движения характеризуются очень малыми угловыми скоростями (период прецессионного движения 26 000 лет, период нутационных колебаний 18,6 года, при амплитуде, не превышающей 9,2"). Учитывается только суточное вращение Земли, которое является практически равномерным; один оборот совершается за 23 ч 56 мин 4 с, угловая скорость вращения

$$\Omega_3 = \frac{2\pi}{(23 \cdot 60 + 56)60 + 4} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с.}$$

Периодическое изменение угловой скорости вращения Земли в течение года и нерегулярные изменения скорости вращения приводят к изменению длины суток на тысячные доли секунды.

1.1.2. Выбор отсчетной базы

В баллистике и навигации движение ЛА рассматривается относительно инерциальной системы отсчета или относительно Земли. В первом случае полет ЛА рассматривается в абсолютном движении, во втором — в относительном.

Пространственное положение ракеты как твердого тела определяется тремя линейными координатами и тремя углами.

Для расчетов чаще всего используются прямоугольные, цилиндрические и сферические системы координат. В экспериментальной баллистике, динамике полета и управлении системы координат для определения пространственного положения выбираются в зависимости от способа приборной реализации измерений.

1.1.3. Системы координат, применяемые в баллистике

Для решения вопросов теории полета ЛА, движущихся в поле земного тяготения, используются две большие группы координат, отличающиеся расположением начала координатных систем. К первой группе относятся системы координат, связанные с Землей или другими точками пространства, ко второй — системы координат, связанные с летательным аппаратом (ГОСТ 20058–80).

Обычно используют несколько разновидностей земных систем координат. За начало земных систем координат может приниматься центр масс Земли, точка старта или другая неподвижная относительно Земли точка.

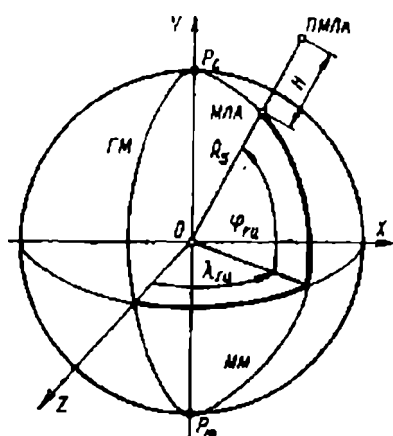


Рис. 1.1. Схема взаимного расположения геоцентрических прямоугольной и сферической систем координат:

ГМ — гринвичский меридиан; МЛА — местоположение ЛА; ПМЛА — пространственное местоположение ЛА; ММ — местный меридиан

Для исследования абсолютного движения, т. е. движения в инерциальном пространстве, применяется **инерциальная система координат** $O_n X_n Y_n Z_n$. В общем случае под инерциальной системой координат понимают систему, которая занимает в пространстве неподвижное положение или же движется равномерно и прямолинейно, а ее оси не изменяют своего направления в пространстве. Инерциальная система координат участвует только в поступательном движении Земли вокруг Солнца, и положение ее осей не зависит от суточного вращения Земли (в отличие от систем координат, связанных с Землей и вращающихся вместе с ней, используемых при изучении относительного движения ракет).

Земная система координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ имеет начало O_0 и оси, зафиксированные по отношению к Земле. Прямоугольная система координат, связанная с Землей, начало которой совмещено с центром масс Земли, а одна из осей направлена на север по оси вращения Земли, называется **геоцентрической связанной системой координат**. Связь между геоцентрическими прямоугольными и геоцентрическими сферическими координатами (рис. 1.1) выражается простыми соотношениями

$$x = r \cos \varphi_{гц} \sin \lambda_{гц}; \quad y = r \sin \varphi_{гц}; \quad z = r \cos \varphi_{гц} \cos \lambda_{гц}, \quad (1.1)$$

где $\varphi_{гц}$ и $\lambda_{гц}$ — геоцентрическая широта и долгота положения ракеты.

Системы координат с началом на поверхности Земли называются **топоцентрическими**.

Нормальной земной системой координат $O_0 X_g Y_g Z_g$ называют систему, начало которой O_0 фиксировано по отношению к Земле, ось $O_0 Y_g$ направлена вверх по местной вертикали, а направление осей $O X_g$ и $O Z_g$ выбирается в соответствии с решаемой задачей. **Стартовая система координат** $O_0 X_c Y_c Z_c$ является разновидностью топоцентрической прямоугольной системы координат для наземных ракетных систем (рис. 1.2). Начало стартовой системы координат определяется положением пусковой установки и совпадает с центром масс ракеты, подготовленной к пуску. При этом координатная ось $O_0 Y_c$ направлена вертикально вверх, а оси $O_0 X_c$ и $O_0 Z_c$ лежат в плоскости стартового горизонта, причем ось $O_0 X_c$ указывает направление стрельбы. Вертикальная плоскость $O_c Y_c X_c$, включающая в себя вектор начальной скорости, называется **плоскостью пуска** или **стрельбы** и иногда — **плоскостью бросания**. Положение плоскости

пуска относительно Земли определяется **азимутом пуска** или **азимутом стрельбы** A_c .

Для определения пространственного положения ракеты или воздушной цели относительно Земли часто используют **топоцентрическую сферическую систему координат** (рис. 1.3). Положение центра масс ракеты (цели) P (Π) определяется величиной радиуса-вектора r , называемой **наклонной дальностью** D , и двумя полярными углами: **азимутом** A , отсчитываемым по часовой стрелке в местной горизонтальной плоскости от направления на север, и **углом места** q , отсчитываемым в вертикальной плоскости. При составлении уравнений движения в сферической системе координат в ряде случаев удобнее для сохранения единства направлений отсчета углов в горизонтальной плоскости вместо азимута $-A$ вводить угол $A_* = -A$. На рисунке 1.3 координатными поверхностями сферической системы координат являются сфера радиусом r ; вертикальная плоскость, проходящая через радиус r ; конус с вершиной в точке O_0 и углом при вершине, равным $180^\circ - 2q$. Координатные линии: (r) — прямая радиуса-вектора; (q) — окружность большого круга сферы, проходящая через заданную точку P ; (A) — окружность от сечения сферы плоскостью, параллельной плоскости $O_0X_gZ_g$, проходящей через заданную точку. Координатные оси $[r]$, $[q]$ и $[A]$ криволинейной системы координат касательны координатным линиям.

Переход от осей криволинейной системы координат к осям земной системы $O_0X_gY_gZ_g$ осуществляется с помощью матриц направляющих косинусов.

На плоских чертежах и схемах, изображающих траекторию ракет, земная ось O_0Y_g условно располагается вертикально, а ось O_0X_g — горизонтально независимо от действительной географической широты места старта.

При решении плоских задач, связанных с расчетом характеристик движения баллистических ракет дальнего действия и спутников Земли, пользуются **земной полярной системой координат** (рис. 1.4). Положение центра масс ракеты P в этом случае определяется радиусом r и полярным углом φ , отсчитываемым в плоскости чертежа.

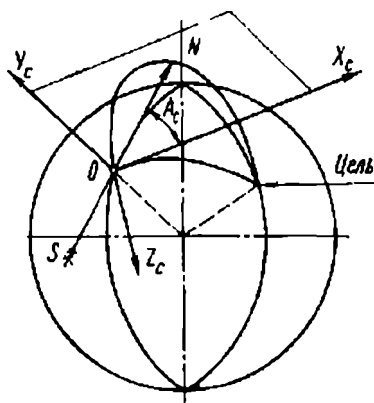


Рис. 1.2. Топоцентрическая стартовая система координат

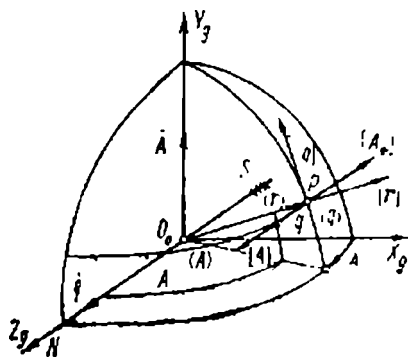


Рис. 1.3. Топоцентрическая сферическая система координат

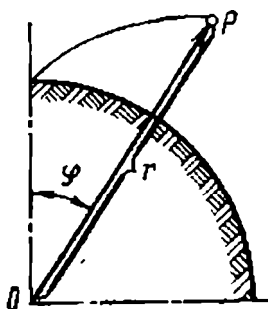


Рис. 1.4. Земная полярная система координат

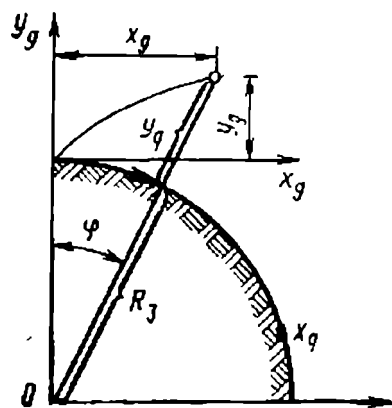


Рис. 1.5. Плоская криволинейная система координат

В некоторых плоских задачах теории полета могут быть использованы также криволинейные координаты: соответствующая углу φ дуга x_g окружности на поверхности Земли, проходящей в плоскости стрельбы, и часть y_g радиуса-вектора, проведенного из центра Земли, между центром масс ракеты P и условной поверхностью земной сферы, определяемой радиусом R_z (рис. 1.5). Связь между координатами точки P в координатных системах криволинейной и $O_0 X_g Y_g$ очевидна:

$$(R_z + y_g)^2 = (R_z + y_g)^2 + x_g^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} y_g &= \sqrt{(R_z + y_g)^2 + x_g^2} - R_z, \\ x_g &= \pi R_z \varphi / 180, \end{aligned} \quad (1.2)$$

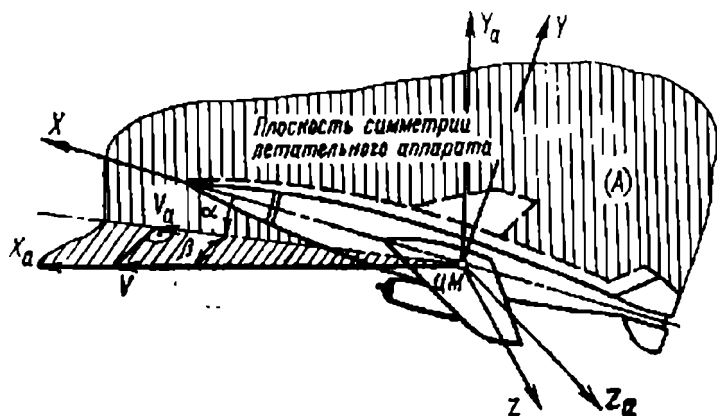
где φ — полярный угол, выраженный в градусах. Если полярный угол дан в радианах, то $x_g = R_z \varphi_{\text{рад}}$. Из рис. 1.5

$$\operatorname{tg} \varphi = x_g / (R_z + y_g).$$

Большая группа подвижных координат объединена общим признаком — расположением начала координат в характерной точке движущегося ЛА, обычно в центре масс. Направление осей подвижной ориентированной системы координат $O X_{\Pi} Y_{\Pi} Z_{\Pi}$ неизменно в пространстве (относительно звезд). Оси подвижной земной системы координат $O X_0 Y_0 Z_0$ направлены так же, как и соответствующие им оси земной (неподвижной относительно Земли) системы координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$. В нормальной системе координат $O X_g Y_g Z_g$, связанной с летательным аппаратом, ось $O Y_g$ направлена вверх по местной вертикали и в отличие от оси $O_0 Y_0$ нормальной земной системы координат изменяет свое направление в пространстве в процессе движения ЛА относительно Земли. Оси $O X_g$ и $O Z_g$ нормальной системы координат параллельны плоскости местного горизонта и направлены удобным для решения поставленной задачи образом.

Оси связанной системы координат $O X Y Z$ направлены: продольная ось $O X$ — в плоскости симметрии ЛА или в плоскости, параллельной ей, если начало координат O помещено вне плоскости

Рис. 1.6. Схема взаимного расположения скоростной и связанной систем координат



симметрии (для осесимметричных аппаратов ось направлена по оси симметрии к носовой части ЛА). Нормальная ось OY располагается в плоскости симметрии или параллельно ей и направлена к верхней части ЛА. Поперечная ось OZ направлена вправо от направления движения перпендикулярно плоскости симметрии. В скоростной системе координат $OX_aY_aZ_a$ скоростная ось OX_a совпадает с вектором воздушной скорости летательного аппарата (скорости ЛА относительно атмосферы V), ось подъемной силы OY_a летит в плоскости симметрии или в плоскости, ей параллельной. Боковая ось OZ_a дополняет две названные оси до правой системы координат.

Начало траекторной системы координат $OX_kY_kZ_k$ обычно помещено в центре масс летательного аппарата, ось OX_k направлена по вектору земной скорости ЛА (скорости ЛА относительно Земли V_k), ось OY_k направлена вверх от поверхности Земли в вертикальной плоскости, проходящей через ось OX_k , ось OZ_k направлена горизонтально. При безветрии направление скоростной оси OX_a и оси OX_k траекторной системы координат совпадают, так как при этом совпадают векторы воздушной и земной скоростей. Связь между скоростной и связанной системами координат осуществляется с помощью угла атаки α , угла скольжения β , пространственного угла атаки α_n , аэродинамического угла крена φ_n . Угол атаки — угол между проекцией вектора воздушной скорости на плоскость симметрии ЛА OXY и продольной осью OX . Угол скольжения — угол между вектором воздушной скорости и плоскостью симметрии ЛА (рис. 1.6). Пространственный угол атаки — угол между продольной осью ЛА и вектором воздушной скорости. С пространственным углом атаки непосредственно связана система координат $OX_nY_nZ_n$, у которой плоскость OX_nY_n совпадает с плоскостью пространственного угла атаки (рис. 1.7). Ось OX_n системы совпадает с продольной осью ЛА, ось OY_n лежит в плоскости пространственного угла атаки, ось OZ_n дополняет систему до правой. Угол между нормальной осью OY и осью OY_n называют аэродинамическим углом крена.

Связь между нормальной $OX_gY_gZ_g$ и связанной $OXYZ$ системами координат осуществляется с помощью углов рыскания, тангажа и крена (рис. 1.8).

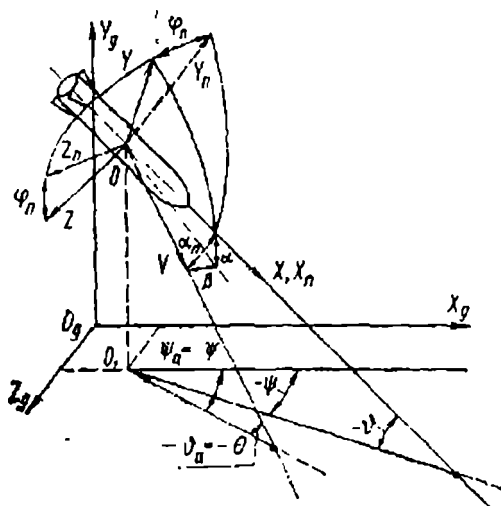


Рис. 1.7. Схема взаимного расположения системы координат, связанной с пространственным углом атаки, связанной системы координат и нормальной земной системы координат при безветрии (α — угол атаки; β — угол скольжения; α_n — пространственный угол атаки, ϕ_n — аэродинамический угол крена)

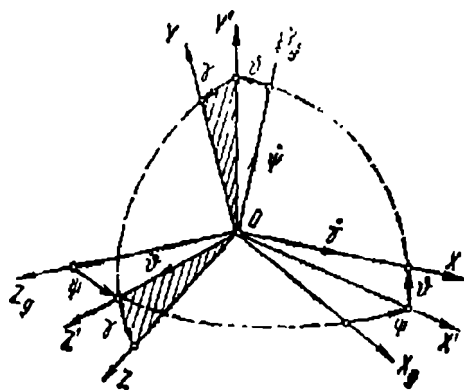


Рис. 1.8. Схема взаимного расположения связанной и нормальной систем координат при первом повороте относительно оси OY_g

Угол рыскания ψ — угол между осью OX_g и проекцией продольной оси OX на горизонтальную плоскость OX_gZ_g . У некоторых ЛА угол рыскания может определяться в зависимости от приборной реализации измерений в плоскости, перпендикулярной плоскости бросания $O_0X_gY_g$ и проходящей через продольную ось ЛА OX . Если угол рыскания, определяемый в указанной наклонной плоскости, обозначим через ψ_n , то из рис. 1.9: $\sin \psi_n = \sin \psi \cos \vartheta$. Очевидно, что при $\vartheta = 0$ получим $\psi_n = \psi$.

Угол тангажа ϑ — угол между продольной осью OX и горизонтальной плоскостью. Следует различить угол тангажа по отношению к стартовой горизонтальной плоскости, т. е. по отношению к нормальной земной системе координат, и местный угол тангажа, измеряемый от плоскости местного горизонта. Это различие целесообразно учитывать при определении характеристик движения ЛА, предназначенных к полету на большие дальности.

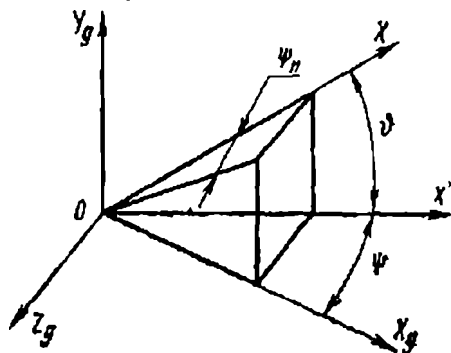


Рис. 1.9. Углы рыскания, измеряемые в горизонтальной и наклонной плоскостях

Угол крена γ — угол между поперечной осью OZ и осью OZ_g , смещенной в положение, соответствующее нулевому углу рыскания.

Связь между нормальной системой координат $OX_gY_gZ_g$ и скоростной $OX_aY_aZ_a$ осуществляется с помощью скоростных углов рыскания, тангажа и крена. Скоростной угол рыскания ψ_a — это угол между осью OX_g и проекцией скоростной оси на горизонтальную плоскость OX_gZ_g .

Скоростной угол тангажа ϑ_a — это угол между скоростной осью OX_a и горизонтальной плоскостью OX_gZ_g . Скоростной угол крена γ_a — это угол между боковой осью OZ_a и осью OZ_g , смещенной в положение, соответствующее нулевому скоростному углу рыскания.

Положение траекторной системы координат относительно нормальной определяется тремя углами: θ , Ψ и γ_c . θ — **угол наклона траектории** (угол между земной скоростью летательного аппарата и горизонтальной плоскостью); Ψ — **угол пути** — угол между осью OX_g и проекцией земной скорости летательного аппарата на плоскость OX_gZ_g (путевой скоростью V_n).

При безветрии векторы земной и воздушной скоростей совпадут. Следовательно, угол наклона траектории θ будет равен скоростному углу тангажа ϑ_a , а угол пути Ψ — скоростному углу рыскания φ_a . Проекции вектора земной скорости V_k на оси нормальной земной системы координат очевидны:

$$V_{x_g} = V_k \cos \theta \cos \Psi; \quad V_{y_g} = V_k \sin \theta;$$

$$V_{z_g} = -V_k \cos \theta \sin \Psi.$$

При рассмотрении плоских задач, когда $\Psi = 0$, горизонтальная и вертикальная проекции скорости соответственно равны

$$V_{x_g} = u = V_k \cos \theta; \quad V_{y_g} = w = V_k \sin \theta.$$

Углом ветра Ψ_w называется угол между осью OX_g и проекцией вектора скорости ветра W на горизонтальную плоскость. **Наклоном ветра θ_w** называется угол между вектором скорости ветра и горизонтальной плоскостью.

Угловая ориентация одних координатных осей относительно других, принимаемых за опорные, может быть осуществлена с помощью **эйлеровых углов поворота**. При выборе в качестве опорных осей нормальной земной системы координат $OX_gY_gZ_g$ осью первого поворота выбирается ось, относительно которой система координат в процессе полета может поворачиваться на большой угол. Для ЛА самолетной схемы первой осью поворота будет ось OY_g поворота на угол рыскания φ . Для ЛА с вертикальным стартом и программным изменением угла тангажа первой осью поворота будет ось OZ_g поворота на угол тангажа. Схема последовательности поворота на углы Эйлера приведена на рис. 1.10.

Напомним, что углы Эйлера независимы между собой, т. е. при изменении одного угла два других не изменяются. Координатные преобразования, связанные с переходом от одной системы координат к другой, осуществляются с помощью **матриц направляющих косинусов**, которые иногда называют таблицами переходных косинусов. Матрицу удобно обозначить двойным индексом, например, $A_i^{(2)}$, где нижний индекс соответствует основной «неподвижной» системе координат, верхний — системе, определяемой последовательным поворотом на Эйлеровы углы относительно неподвижной системы. Элементы матрицы, являющиеся функциями эйлеровых

углов поворота, также обозначают двойным индексом, например, a_{ij} , где i — номер строки; j — номер столбца:

$$A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2^0 & y_2^0 & z_2^0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ z_1^0 \end{bmatrix}$$

Каждый элемент матрицы равен проекции единичного вектора, направленного по одной координатной оси неподвижной системы, на соответствующую координатную ось другой (подвижной) системы, т. е. каждый элемент матрицы есть произведение единичных векторов, определяемых соответствующими строкой и столбцом, например $a_{11} = x_1^0 x_2^0$. Если надо осуществить переход от второй системы координат к первой, то необходимо воспользоваться транспонированной матрицей. Сложный последовательный переход от первой системы координат ко второй и от второй к третьей осуществляется по правилу перемножения матриц $A_1^{(3)} = A_1^{(2)} \cdot A_2^{(3)}$. Для вращающихся ЛА положение связанной системы координат относительно опорной, например подвижной ориентированной, определяется тремя углами Эйлера: углом собственного вращения относительно продольной оси φ , углом нутации δ и углом прецессии ψ . При совмещении вектора кинетического момента $\mathbf{K}$ с вектором земной скорости центра масс $\mathbf{V}_K$ получим схему движения Эйлера — Пуансо (рис. 1.11). На схеме вместо углов φ и ψ показаны векторы угловых скоростей $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$. Вектор угловой скорости вращения связанной системы координат

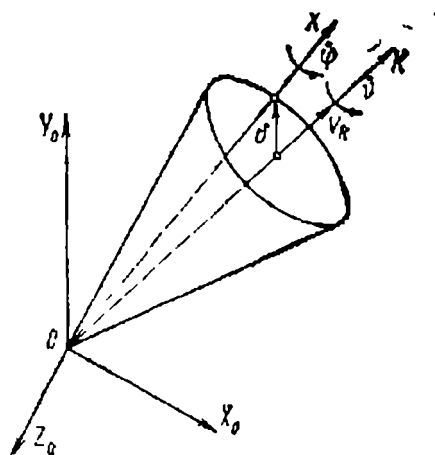
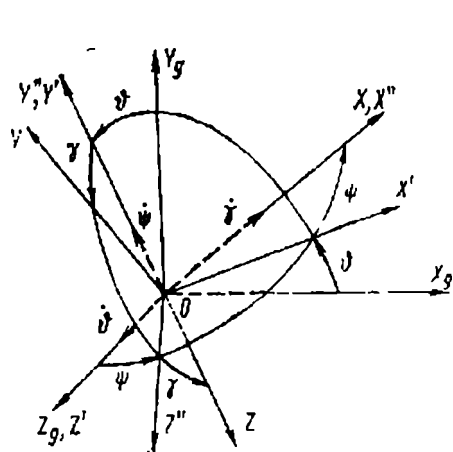


Рис. 1.10. Схема взаимного расположения связанной и нормальной земной систем координат при первом повороте относительно оси OZ_g

Рис. 1.11. Схема углового движения вращающегося ЛА:

$\dot{\varphi}$ — вектор угловой скорости собственного вращения ЛА относительно продольной оси; $\dot{\psi}$ — вектор угловой скорости прецессии; δ — угол нутации; $\mathbf{K}$ — вектор момента количества движения; $\mathbf{V}_K$ — вектор земной скорости ЛА

относительно инерциальной системы обозначается Ω , а вектор угловой скорости связанной системы координат относительно выбранной системы, связанной с Землей — ω . Составляющие угловой скорости ω на оси связанной системы координат представляют собой соответственно скорость крена ω_x , скорость рыскания ω_y , скорость тангажа ω_z . Подобным образом обозначаются составляющие угловой скорости ЛА в других системах координат. Матрицы направляющих косинусов для различных пар прямоугольных систем координат приведены в [22, 49, 63].

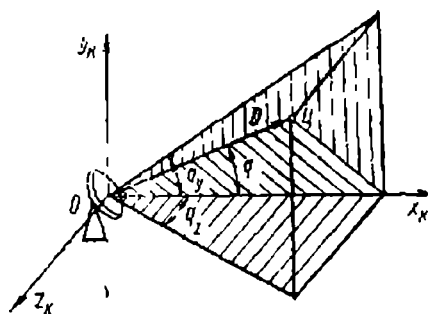


Рис. 1.12. Схема совмещения прямоугольных и полярных систем координат

Выбор системы управления часто накладывает ограничения на приборную реализацию систем координат. Известно разделение в этом смысле управления на декартово, т. е. управление, использующее различного вида системы прямоугольных координат, и полярное управление. Известно и совместное использование прямоугольных и полярных координат. Примером могут служить системы координат, применяемые в бортовом комплексе наведения самонаводящихся ракет (рис. 1.12). Положение цели относительно корпуса ракеты определяется двумя системами координат—системой прямоугольных координат ox_K, y_K, z_K , определяющих положение координатора относительно корпуса ракеты и полярной системы координат, определяющей положение цели относительно координатора. Ось ox_K называется осью координатора.

При проектировании системы управления предусматривают измерительную систему координат, в которой измеряются параметры движения, и исполнительную систему координат, связанную с ракетой, в которой отрабатываются команды.

В процессе наведения ракет на движущиеся цели возможно возникновение явления скручивания (излома) исполнительной системы координат относительно измерительной системы. Это часто происходит при движении по сложным траекториям наведения. Пусть зенитная ракета управляется радиолучом. Измерительная система координат связана с управляющим лучом так, что одна из осей $ox_{изм}$ совпадает с осью равносигнальной зоной луча, а оси $oy_{изм}$ и $oz_{изм}$ дополняют систему до правой и неизменно связаны с антенной, создающей управляющий луч. В исполнительной системе координат ось ox_p связана с продольной осью ракеты, а оси oy_p и oz_p стабилизированы бортовым гиросtabilизатором от вращения вокруг оси ox_p . Предположим, что перед стартом оси исполнительной и измерительной системы координат совпадают по направлению. В процессе наведения ракеты на цель обе системы координат будут перемещаться, ось $ox_{изм}$ измерительной системы будет следить за целью или наводиться в упрежденную точку. Ось ox_p исполнительной системы координат при маневре ракеты будет совпадать с продольной осью ракеты, а оси oy_p и oz_p не смогут поворачиваться относительно оси ox_p вследствие действия гиросtabilизатора. Каждая система координат, перемещаясь в пространстве особым образом, отклоняется от первоначального направления и коллинеарность их осей, предположенная вначале, теряется, т. е. происходит скручивание осей координат. В общем случае скручивание может быть пространственным, при котором в процессе наведения наблюдается угловое расхождение исполнительной и измерительной систем координат по всем трем осям.

1.1.4. Навигационные системы координат

В навигации наибольшее распространение получили географическая, геоцентрическая и ортодромическая глобальные системы координат [75].

В географической системе координат географическая широта φ_r определяется как угол между плоскостью экватора и отвесной линией (рис. 1.13), высота полета обозначается — H ; проекция летательного аппарата на земную поверхность называется **местоположением летательного аппарата** (МЛА), (ПМЛА) — местоположение ЛА в пространстве.

Долгота отсчитывается от гринвичского меридиана (ГМ).

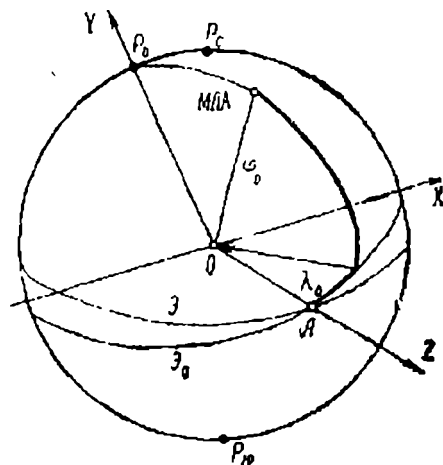
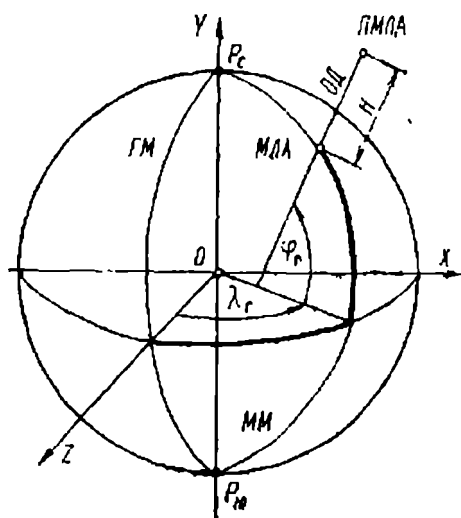


Рис. 1.13. Географическая система координат:

ОД — относительная дальность

Рис. 1.14. Ортодромическая система

В геоцентрической и ортодромической системах координат используется сферическая модель Земли, при которой отвес направлен по радиусу от центра масс ЛА к центру сферической модели Земли (рис. 1.14). Геоцентрическая долгота $\lambda_{гц}$ определяется так же, как и географическая.

Ортодромическая система координат предполагает экватор $\mathcal{E}_0$ повернутым относительно экватора Земли $\mathcal{E}$ на некоторый угол, так чтобы он проходил через начальную и конечную точки траектории. Соответственно полюс ортодромической системы смещен относительно географического полюса Земли P_0 . Ортодромию, соответствующую повернутому экватору, называют главной ортодромией. Координаты ортодромической системы обычно задаются в линейных величинах. Ортодромическая долгота λ_0 отсчитывается вдоль дуги повернутого большого круга от заданной точки А. Ортодромическая широта φ_0 — расстояние от точки МЛА до повернутого экватора.

1.2. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

1.2.1. Потенциал силы земного тяготения

Потенциал для точечной единичной массы, находящейся вне Земли на расстоянии l от элементарной массы Земли dM , по закону тяготения Ньютона определяется выражением

$$d\Pi_T = f dM/l, \quad (1.3)$$

где f — постоянная всемирного тяготения; l — расстояние между точками с единичной массой (точка P) и элементарной массой dM (рис. 1.15). Потенциал Земли для точечной единичной массы получают интегрированием по всей массе Земли:

$$\Pi_T = f \int_{(M)} dM/l. \quad (1.4)$$

Положение точки P вне Земли и элементарной массы Земли dM определяются сферическими координатами: для точки P — r , $\varphi_{гц}$, λ , для элементарной массы dM — ρ , $\varphi'_{гц}$, λ' . Потенциал в функции сферических координат представляется следующим образом:

$$\Pi(r, \varphi_{гц}, \lambda) = f \int_{(M)} \frac{dM}{l(r, \varphi_{гц}, \lambda, \rho, \varphi'_{гц}, \lambda')}. \quad (1.5)$$

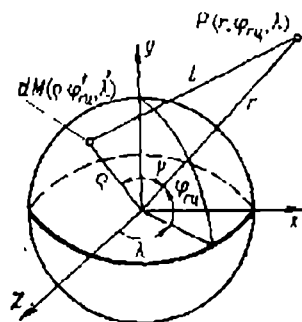


Рис. 1.15. Координаты точечной единичной массы, находящейся вне Земли

Написанный интеграл может быть вычислен только приближенно, так как неизвестны точно форма Земли и ее размеры, неизвестно распределение масс внутри Земли, плотность вещества Земли μ_3 существенно изменяется по всему ее объему. Обозначая угол между ρ и r через ψ , получим

$$l = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi}. \quad (1.6)$$

В процессе полета ракеты относительно Земли будут изменяться величины r и ψ , а следовательно, и величина l . Очевидно, что потенциал Π_T будет меняться в процессе движения ракеты относительно Земли в некоторых пределах и может быть вычислен приближенно при введении различного рода допущений. Наиболее существенные допущения касаются формы Земли, ее размеров и распределения масс.

Общее выражение для потенциала силы земного притяжения, практически пригодное для различных моделей геоида, получают, разложив выражение для Π_T в ряд сферических функций. Предварительно рассмотрим более простой вывод, хорошо поясняющий физический смысл первых членов разложения. Из (1.6) получим

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - \frac{\rho}{r} \cos \psi}} = \frac{1}{r} F\left(\frac{\rho}{r}, \psi\right).$$

Разложение написанной функции в биномиальный ряд может быть представлено в виде суммы членов, включающих в себя полиномы Лежандра $P_n(\cos \psi)$:

$$F\left(\frac{\rho}{r}\right) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos \psi). \quad (1.7)$$

Общее выражение для полинома степени n имеет вид

$$P_n(\cos \psi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(\cos \psi)^2 - 1]^n}{d(\cos \psi)^n}.$$

Для отдельных значений $P_n(\cos \psi)$ имеем

$$P_0(\cos \psi) = 1;$$

$$P_1(\cos \psi) = \cos \psi;$$

$$P_2(\cos \psi) = \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2};$$

$$P_3(\cos \psi) = \frac{5}{2} \cos^3 \psi - \frac{3}{2} \cos \psi; \quad (1.8)$$

$$P_4(\cos \psi) = \frac{35}{8} \cos^4 \psi - \frac{15}{4} \cos^2 \psi + \frac{3}{8}.$$

Используя (1.7), получим из (1.4)

$$\Pi_T = \frac{1}{r} f \int_{(M)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos \psi) dM.$$

Ограничимся тремя членами разложения и представим потенциал суммой трех интегралов

$$\Pi_T = \frac{f}{r} \left[\int_{(M)} dM + \frac{1}{r} \int_{(M)} \rho \cos \psi dM + \frac{1}{r^2} \int_{(M)} \rho^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right) dM \right]. \quad (1.9)$$

Значение первого интеграла очевидно: $\int_{(M)} dM = M$. Остальные

интегралы могут быть взяты в конечном виде, если наложить некоторые ограничения на распределение масс и форму Земли. При равномерном распределении массы по объему Земли, выражая $\cos \psi$ через координаты частицы dM и внешнего тела единичной массы в системе координат, центр которой помещен в центре масс Земли, получим

$$\int_{(M)} \rho \cos \psi dM = 0.$$

Влияние несферичности Земли на распределение масс можно характеризовать моментами инерции Земли, определенными относительно осей геоцентрической системы координат. Если обозначить через B момент инерции относительно главной оси O_0Y_0 , совпадающей с осью вращения Земли, а через A и C — моменты инерции относительно главных осей O_0X_0 , O_0Z_0 , лежащих в экваториальной плоскости, то можно получить формулу для потенциала земного притяжения:

$$\begin{aligned} \Pi_{\tau} = & \frac{fM}{r} + \frac{f}{4r^3} (A + C - 2B) (3 \sin^2 \varphi_{\text{гц}} - 1) + \\ & + \frac{3f}{4r^3} (C - A) \cos^2 \varphi_{\text{гц}} \cos 2\lambda + \Pi_{\tau, \text{н}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где сумма неучтенных членов разложения обозначена через $\Pi_{\tau, \text{н}}$.

В последней формуле первый член представляет собой потенциал сферы с равномерным или сферическим распределением масс, так называемый потенциал ньютоновского притяжения. Второй член зависит от широты $\varphi_{\text{гц}}$ и учитывает влияние полюсного (полярного) сжатия Земли, третий — учитывает зависимость распределения масс Земли от долготы, т. е. отражает влияние бокового сжатия. Последние члены учитывают несимметричность распределения масс в северной и южной частях Земли и другие неравномерности в гравитационном поле Земли.

Если предположить, что Земля — правильный эллипсоид вращения с равномерным распределением масс вокруг оси вращения, т. е. $A = C$, то с добавлением еще одного полинома представим потенциал в виде, называемым **нормальным потенциалом Земли**:

$$\Pi_{\tau} = \frac{\pi_0}{r} + \frac{\pi_2}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi_{\text{гц}} - 1) + \frac{\pi_4}{8r^5} (35 \sin^4 \varphi_{\text{гц}} - 30 \sin^2 \varphi_{\text{гц}} + 3). \quad (1.11)$$

Коэффициенты π_0 , π_2 , π_4 называются геопостоянными и по данным работы [24] принимаются равными

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 3,9859 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2; \quad \pi_2 = -1,77 \cdot 10^{25} \text{ м}^5/\text{с}^2; \\ \pi_4 &= 2,3 \cdot 10^{36} \text{ м}^7/\text{с}^2. \end{aligned}$$

Для практической работы в большинстве случаев оказывается достаточным использование упрощенной формулы

$$\Pi_{\tau} = \frac{\pi_0}{r} + \frac{\pi_2}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi_{\text{гц}} - 1). \quad (1.12)$$

При более полном рассмотрении потенциала Земли предпочитают зависимость для его определения представлять рядом сферических (шаровых) функций, которые выражаются через присоединенные

функции Лежандра. Для тригонометрической функции присоединенная функция Лежандра имеет вид

$$P_{nm}(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_n(\xi), \quad (1.13)$$

где индекс n определяет степень полинома; индекс m — порядок производной.

Гравитационный потенциал Земли, выраженный через сферические функции, имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_T = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_0}{r} \right)^n (C_{1nm} \cos m\lambda + C_{2nm} \sin m\lambda) P_{nm} \times \right. \\ \left. \times (\sin \varphi_{гн}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь C_{1nm} и C_{2nm} — безразмерные числовые коэффициенты; R_0 — экваториальный радиус Земли.

Если принять распределение масс по объему Земли симметричным относительно ее оси вращения, то выражение (1.14) может быть приведено к более удобному виду

$$\begin{aligned} \Pi_T = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + C_{20} \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 P_{20}(\sin \varphi_{гн}) + C_{40} \left(\frac{R_0}{r} \right)^4 P_{40}(\sin \varphi_{гн}) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Безразмерные параметры C_{n0} определяются уровнем поверхности и угловой скоростью вращения Земли. Величины $P_{n0}(\sin \varphi_{гн})$ называются **зональными сферическими функциями**.

Для ориентирования приведем данные, характеризующие поле притяжения Земли, полученные с помощью геофизических спутников [84]:

$$K = fM = 398\,603,2 \text{ км}^3/\text{с}^2; \quad \alpha = 1: (298,2 \pm 0,2);$$

$$C_{20} = -1082,645 \cdot 10^{-6}; \quad C_{30} = 2,546 \cdot 10^{-6};$$

$$C_{40} = 1,649 \cdot 10^{-6}; \quad R_0 = 6378,165 \text{ км}.$$

При проведении баллистических расчетов для определения потенциала Земли большое распространение получила формула, приведенная в работах [49, 51]

$$\Pi_T = \frac{d_{00}}{r} + \frac{d_{20}}{r^3} P_{20}(\sin \varphi_{гн}) + \frac{d_{40}}{r^5} P_{40}(\sin \varphi_{гн}) + \dots, \quad (1.16)$$

где присоединенные полиномы Лежандра $P_{20}(\sin \varphi_{гн}) = \frac{1}{2} \times (3 \sin^2 \varphi_{гн} - 1)$; $P_{40}(\sin \varphi_{гн}) = \frac{1}{8} (35 \sin^4 \varphi_{гн} - 30 \sin^2 \varphi_{гн} + 3)$;

d_{00} , d_{20} , d_{40} — постоянные коэффициенты, зависящие от принятой модели Земли, угловой скорости ее вращения и ускорения силы тяжести на экваторе.

1.2.2. Сила тяжести и ее потенциал

Силу тяжести можно представить как

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_ц, \quad (1.17)$$

где $\mathbf{F}_\tau$ — вектор силы земного притяжения; $\mathbf{F}_ц$ — вектор центробежной силы инерции.

В сферических геоцентрических координатах центробежная сила инерции, действующая на тело массой m в направлении, перпендикулярном оси вращения Земли, равна

$$F_ц = mr \Omega^2 \cos \varphi_{гц}, \quad (1.18)$$

где Ω — угловая скорость вращения Земли*.

Направление силы тяжести совпадает с направлением отвеса. Угол между нормалью $\mathbf{n}^{(0)}$ к поверхности и экваториальной плоскостью Земли называется географической широтой в отличие от геоцентрической широты $\varphi_{гц}$ (рис. 1.16). Географическая долгота отсчитывается от начального меридиана, за который принят меридиан Гринвича. Связь между геоцентрической и географической широтами устанавливается по приближенной формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_{гц} = \operatorname{tg} \varphi_r (1 - e_1^2), \quad (1.19)$$

где e_1 — первый эксцентриситет.

Разность между углами φ_r — $\varphi_{гц}$ может быть найдена из зависимости

$$\varphi_r - \varphi_{гц} = \alpha \sin^2 \varphi_r. \quad (1.20)$$

Наибольшее значение $(\varphi_r - \varphi_{гц})$ равно $11,5'$ при $\varphi_r = 45^\circ$.

Потенциал силы тяжести также можно представить как сумму потенциалов силы земного притяжения и центробежной силы инерции, определяемой суточным вращением Земли,

$$\Pi = \Pi_\tau + \Pi_ц. \quad (1.21)$$

Учитывая, что $d\Pi_ц = F_ц dr_ц$, где $r_ц = r \cos \varphi_{гц}$, получим потенциал центробежной силы инерции, отнесенный к единице массы, в виде

$$\Pi_ц = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi_{гц}. \quad (1.22)$$

Если использовать для Π_τ формулу (1.12), то

$$\Pi = \frac{\pi_0}{r} + \frac{\pi_2}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi_{гц} - 1) + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi_{гц}. \quad (1.23)$$

Получим формулу для определения ускорения силы тяжести. По свойству потенциала, найденного для единичной массы,

$$g_s = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \quad (1.24)$$

* Индекс 3 для упрощения записи опущен.

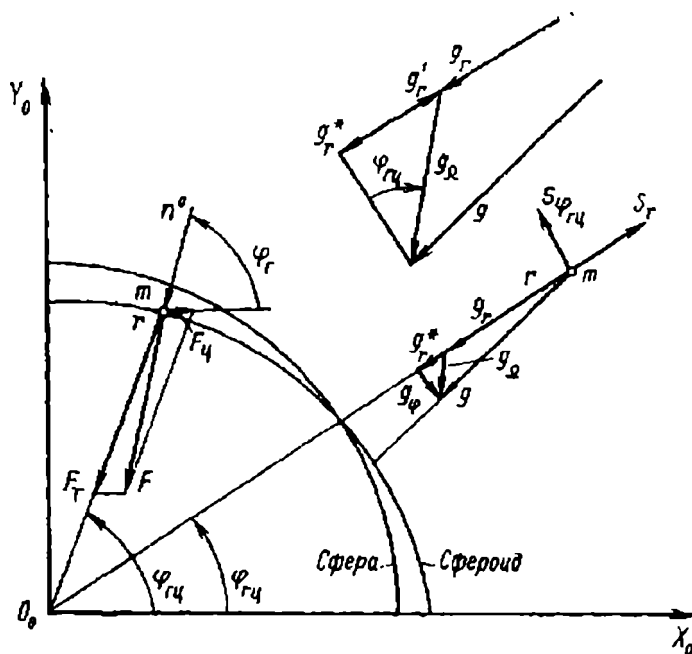


Рис. 1.16. Схема определения положения местной вертикали при географической широте φ_r и разложение вектора ускорения силы тяжести по осям косоугольной системы координат

где g_S — проекция ускорения силы тяжести на направление S ; $\partial\Pi/\partial S$ — производная от потенциала силы тяжести, взятая по направлению S . В некоторых случаях вектор ускорения силы тяжести g удобно задавать в косоугольных системах координат. Например, в координатной системе, образованной радиусом-вектором r и углом $\varphi_{rц}$,

$$g = g_r^* r^0 + g_\varphi S_{\varphi_{rц}}^0, \quad (1.25)$$

где g_r^* и g_φ — составляющие g по направлениям отсчета указанных координат S_r и $S_{\varphi_{rц}}$; r^0 и $S_{\varphi_{rц}}^0$ — соответствующие орты.

Для координатной системы (радиус-вектор r — вектор угловой скорости вращения Земли Ω) аналогично предыдущему можно написать

$$g = g_r^* r^0 + g_\Omega \Omega^0. \quad (1.26)$$

Проекции ускорения силы тяжести g_r^* и g_φ будем находить по формулам

$$g_r^* = \frac{\partial\Pi}{\partial r}; \quad g_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_{rц}}. \quad (1.27)$$

После подстановки в (1.16) присоединенных полиномов и потенциала центробежной силы инерции, дифференцируя поочередно, получим

$$g_r^* = -\frac{d_{00}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{d_{20}}{r^4} (3 \sin^2 \varphi_{rц} - 1) - \frac{35}{8} \frac{d_{40}}{r^6} (5 \sin^4 \varphi_{rц} - \frac{30}{7} \sin^2 \varphi_{rц} + \frac{3}{7}) + \Omega^2 r \cos^2 \varphi_{rц}; \quad (1.28)$$

$$g_{\varphi} = \frac{3}{2} \frac{d_{20}}{r^4} \sin 2\varphi_{гц} - \frac{5}{2} \frac{d_{40}}{r^6} \cos \varphi_{гц} (7 \sin^2 \varphi_{гц} - 3 \sin \varphi_{гц}) - \\ - \frac{1}{2} \Omega^2 r \sin 2\varphi_{гц}. \quad (1.29)$$

Полагая в формулах (1.28) и (1.29) $\Omega = 0$, можно получить выражение для определения составляющих по указанным направлениям вектора g_{τ} .

Найдем теперь составляющие g_r и g_{Ω} , имея в виду, что

$$g_{\Omega} = g_{\varphi}' \cos \varphi_{гц}; \\ g_r' = \varphi_{гц} \operatorname{tg} \varphi_{гц}. \quad (1.30)$$

Так как g_r^* и g_r' имеют противоположные направления, то

$$g_r = g_r^* - g_r' = \frac{d_{00}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{d_{20}}{r^4} (5 \sin^2 \varphi_{гц} - 1) + \frac{15}{8} \frac{d_{40}}{r^6} \times \\ \times (21 \sin^4 \varphi_{гц} - 14 \sin^2 \varphi_{гц} + 1) + \Omega^2 r; \quad (1.31)$$

$$g_{\Omega} = \frac{3d_{20}}{r^4} \sin \varphi_{гц} - \frac{5}{2} \frac{d_{40}}{r^6} \sin \varphi_{гц} (7 \sin^2 \varphi_{гц} - 3) - \Omega^2 r \sin \varphi_{гц} \quad (1.32)$$

Учитывая только первые члены разложения, получим

$$g_r = \frac{d_{00}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{d_{20}}{r^4} (5 \sin^2 \varphi_{гц} - 1); \quad (1.33)$$

$$g_{\Omega} = 3 \frac{d_{20}}{r^3} \sin \varphi_{гц}. \quad (1.34)$$

В большинстве упрощенных расчетов не делают разницы между направлением радиуса-вектора к условному центру Земли и направлением отвеса в точке старта.

Выбираем в качестве направления S нормаль к поверхности сфероида, на которую ускорение g проецируется полной величиной. Обозначая направление нормали к сфероиду через n^0 , будем иметь

$$g = g_n \frac{\partial \Pi}{\partial n}.$$

Имея в виду малую разницу в углах $\varphi_{гц}$ и φ_r , производную по направлению n^0 заменяют производной по направлению r^0

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{\partial \Pi}{\partial n} \cos(\widehat{n^0 r^0}).$$

Учитывая противоположность направлений отсчета для n^0 и r^0 малость угла между n^0 и r^0 , можно записать

$$-1 \leq \cos(\widehat{n^0 r^0}) \leq -0,999995,$$

где число 0,999995 соответствует наибольшему углу $\varphi_r - \varphi_{гц} = -11,5'$. Учитывая малое отличие $\cos(\widehat{n^0 r^0})$ от единицы, получим

$$g = \partial \Pi / \partial n = -\partial \Pi / \partial r.$$

Далее, заменив в формуле (1.23) функции π , их значениями $\pi_0 = fM$ и $\pi_2 = f(A - B)$, придем к выражению g в виде

$$g = \frac{fM}{r^2} + \frac{3f}{2r^4} (A - B) (3 \sin^2 \varphi_{\text{гц}} - 1) - \Omega^2 r \cos^2 \varphi_{\text{гц}}. \quad (1.35)$$

Для сферической модели Земли, без учета ее вращения, получим из (1.35)

$$g = fM/r^2 = g_{\text{т}}.$$

В формулу (1.35) часто вводят величины

$$\mu = \frac{A - B}{R_3^2}$$

и

$$q = \frac{\Omega^2 R_3}{fM/R_3^2} = \frac{\Omega^2 R_3^3}{fM}.$$

Величина μ имеет размерность массы, а q — безразмерный параметр фигуры Земли, равный отношению ускорения центробежной силы к величине ускорения силы тяжести в плоскости экватора. Расчеты показывают, что $\mu = 0,0011 M$; $q = 0,003468$. Вводя в (1.35) значения μ и q , получим

$$g = \frac{fM}{r^2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} \frac{R_3^2}{r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi_{\text{гц}}) - q \frac{r^3}{R_3^3} \cos^2 \varphi_{\text{гц}} \right]. \quad (1.36)$$

В практике предварительных расчетов для определения ускорения силы тяжести g_0 на поверхности Земли находит применение формула

$$g_0 = g_{0\text{э}} (1 + \beta \sin^2 \varphi_{\text{гц}}), \quad (1.37)$$

где $g_{0\text{э}}$ — ускорение силы тяжести на экваторе при $\varphi_{\text{гц}} = 0$.

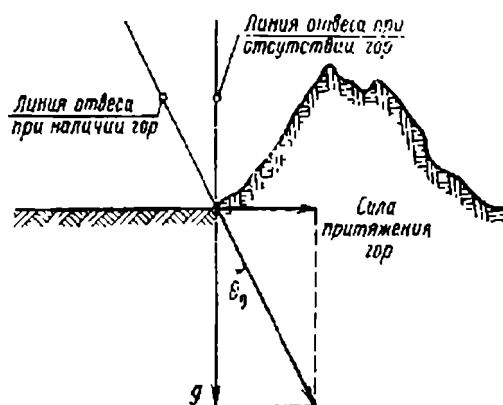
Величина β называется коэффициентом Клеро. Численно $g_{0\text{э}} = 9,78034 \text{ м/с}^2$ и $\beta = 0,00528001$ [84].

При точных расчетах учитывают местные значения величины ускорения силы тяжести и его направление вдоль предполагаемой трассы полета. Аномалии в полете притяжения Земли определяются различными причинами, например наличием гор (рис. 1.17).

По многочисленным измерениям, называемым **гравиметрическими**, составлены **мировые** и более точные **местные гравиметрические карты** [83]. Для составления карт применяются абсолютные и относительные методы измерения силы тяжести. Абсолютные измерения выполняются в небольшом числе пунктов. За эталонные принимаются абсолютные измерения, например, в маятниковом пункте в Потсдаме. При относительных измерениях в какой-либо точке земной поверхности определяют отклонения от эталонных результатов, полученных в пунктах абсолютных измерений.

В гравиметрии применяется внесистемная единица измерения ускорения свободного падения 1 Гал = $1 \text{ см/с}^2 = 0,01 \text{ м/с}^2$, названная так в честь Галилео Галилея (1564 ... 1642 гг.). Кроме того,

Рис. 1.17. Аномалия в поле притяжения Земли, определяемая силой притяжения гор



применяют дольную единицу — миллигал ($1 \text{ мГал} = 10^{-5} \text{ м/с}^2$).

Если Землю рассматривать как сферу со средним радиусом R_3 , в которой масса распределена равномерно по объему, то из (1.10) следует $\Pi_T = fM/r = K/r$. Следовательно, в этом случае потенциальное (гравитационное) поле Земли будет центральным, а ускорение свободного падения, действующее в нем на тело единичной массы, может быть найдено как $g_T = -d\Pi_T/dr = K/r^2$. Знак минус здесь показывает, что вектор $\mathbf{r}$, по направлению которого берется производная $d\Pi_T/d\mathbf{r}$ и вектор $\mathbf{g}_T$ направлены в противоположные стороны.

Сравнивая значения g_T для радиусов r и R_3 , получим зависимость

$$\frac{g_T}{g_{T_0}} = \left(\frac{R_3}{r} \right)^2,$$

которая характеризует изменение ускорения свободного падения в центральном гравитационном поле по мере удаления от его центра. В тех случаях, когда можно принять $g = \text{const}$, обычно берут его равным $9,81 \text{ м/с}^2$ (981 Гал).

Аномалия силы тяжести не превышает десятые доли Гала и уменьшается с увеличением высоты. На поверхности Земли относительное изменение силы тяжести не более 0,5 %.

1.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

1.3.1. Основные понятия и элементы земного магнетизма

Силовые воздействия магнитного поля Земли на постоянный магнит проявляются в принудительной ориентации его (магнита) в определенном направлении относительно Земли. Приближенное математическое описание величины магнитного поля Земли на ее поверхности дает выражение магнитного потенциала шара, равного потенциалу диполя [88]

$$U = \frac{M_3}{R_3^3} \cos \theta_m,$$

где R_3 — радиус Земли; M_3 — магнитный момент Земли; $\theta_m = 90^\circ - \Phi$ — дополнение к геомагнитной широте (рис. 1.18).

Точки пересечения магнитной оси диполя Земли с поверхностью шаровой модели Земли называются геомагнитными полюсами. Линия, соединяющая магнитные полюса, называется магнитной

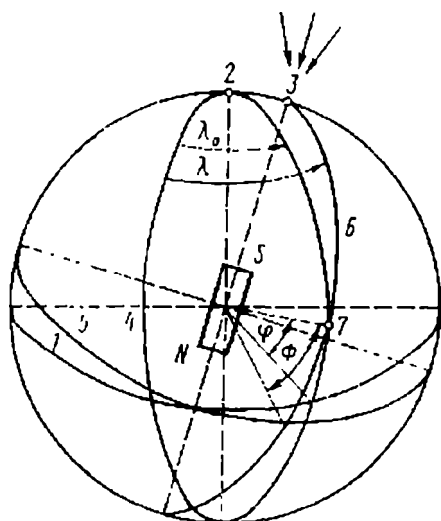


Рис. 1.18. Координаты геомагнитного поля Земли:

1 — географический полюс; 2 — географический северный полюс; 3 — геомагнитный южный полюс; 4 — гринвичский меридиан; 5 — геомагнитный экватор; 6 — геомагнитный меридиан; 7 — положение ЛА

осью диполя. Названия геомагнитных полюсов противоположны названиям географических полюсов [88]. Геомагнитная ось отклонена от оси вращения Земли примерно на $11,5^\circ$. Геомагнитная ось служит полярной осью геомагнитных координат; **геомагнитной широтой Φ** называют широту точки наблюдения, опреде-

ленную относительно геомагнитного экватора. Соотношения между географическими и геомагнитными координатами определяются следующими выражениями:

$$\sin \Phi = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda_0 - \lambda) \sin \Lambda = \cos \varphi \frac{\sin (\lambda_0 - \lambda)}{\cos \Phi},$$

где Λ угол между геомагнитным меридианом места наблюдения и магнитным меридианом географического полюса — **геомагнитная долгота**.

Основной характеристикой магнитного поля Земли является вектор его напряженности — **T** .

В литературе по теории воздушной навигации вектор напряженности **T** раскладывают по направлениям прямоугольной системы координат $OX_r Y_r Z_r$. Ось OX_r направляют по географическому меридиану на север, ось OY_r направлена по касательной к параллели на восток, ось OZ_r направляют к центру шаровой модели Земли. Проекция вектора **T** на ось OX_r называют северной составляющей X_r , а на оси OY_r и OZ_r соответственно восточной и вертикальной составляющими Y_r и Z_r .

Проекция вектора **T** на плоскость местного горизонта носит название горизонтальной составляющей **H** (рис. 1.19). Вертикальная плоскость $Z_r O H$ представляет собой **плоскость магнитного меридиана**. Угол между вертикальными плоскостями, проходящими через магнитный и географический меридианы, называется **магнитным склонением** и обозначается буквой **D** . Угол между вектором **T** и местной горизонтальной плоскостью, в которой лежит вектор **H** , называется **углом магнитного накло-**

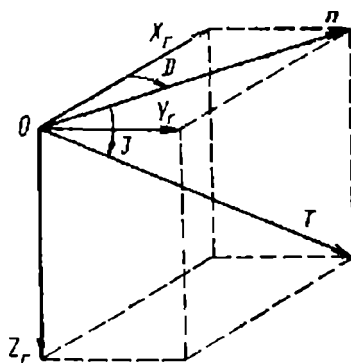


Рис. 1.19. Элементы земного магнетизма

нения и обозначается буквой J . Составляющие вектора напряженности магнитного поля X_r, Y_r, Z_r, H вместе с углами D и J называются **элементами земного магнетизма**.

Если вертикальная плоскость, в которой лежит вектор T , отклонена от плоскости географического меридиана к востоку, то магнитное склонение считается положительным, если к западу, то отрицательным. Если в северном полушарии вектор отклонен от местного горизонта вниз, то угол наклона считается положительным. Если в южном полушарии вектор T отклонен от местного горизонта вверх, то угол наклона считается отрицательным.

Для каждой точки Земли между элементами земного магнетизма действуют следующие элементарные связи (см. рис. 1.19):

$$H = T \cos J; \quad Y_r = H \sin D;$$

$$X_r = H \cos D; \quad T^2 = H^2 + Z_r^2;$$

$$\operatorname{tg} J = \frac{Y_r}{X_r};$$

$$Z_r = H \operatorname{tg} D = T \sin J.$$

Элементы земного магнетизма определяются специальными опытами. По результатам опытов составляются так называемые **магнитные карты**. На карты наносят горизонтальную и вертикальную составляющие вектора напряженности магнитного поля, называемые **изодинами** — соответственно изодиной H и изодиной Z_r . Изолинии, соответствующие постоянному значению угла наклона $J = \operatorname{const}$, называются **изоклинами**; линии, отвечающие постоянному магнитному склонению $D = \operatorname{const}$, называются **изогонами**. Установлено, что среднее значение напряженности магнитного поля T_n сохраняется достаточно длительное время. Отклонение напряженности поля от его среднего значения называется **полем вариаций** δT . Состояние магнитного поля для данного момента времени определяется как векторная сумма

$$T = T_n + \delta T.$$

Величины изменений среднегодовых значений элементов магнетизма называются **вековым ходом** этих элементов. Вековой ход различен в различных точках Земли и отображается в специальных картах, называемых **картами изопор**.

1.3.2. Математическое описание магнитного поля Земли

Кроме графического представления магнитного поля Земли в виде названных выше карт изолиний при решении навигационных задач основываются на математическом представлении геомагнитного поля в виде так называемого гауссова разложения [потенциала поля в ряд по сферическим функциям [88]:

$$U_0 = U_0(\theta_m, \lambda, r) = R_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1} (g_n^k \cos k\lambda + h_n^k \sin k\lambda) P_n^k, \quad (1.38)$$

где λ и θ_M — географическая долгота и дополнение к широте точки местоположения ЛА; R_s — радиус шаровой модели Земли; r — расстояние от центра Земли до ЛА; $P_n^k = P_n^k(\cos \theta_M)$ — квазинормированный по Шмидту полином Лежандра первого рода:

$$P_n^k(\cos \theta_M) = d_n^k \sin^k \theta_M \sum_{S=0}^{E\left(\frac{n-k}{2}\right)} P_{nk}^S \cos^{n-k-2S} \theta_M;$$

$$P_{nk}^S = (-1)^{(S)} \frac{(2n-2S)!}{2^n S! (n-S)! (n-2S-k)!}; \quad (1.39)$$

$$d_n^k = \sqrt{\frac{e_k (n-k)!}{(n+k)!}};$$

$e_k = 1$ кроме $e_0 = r$, а предел $E\left(\frac{n-k}{2}\right)$ означает наибольшее целое положительное число, содержащееся в $\frac{n-k}{2}$; g_n^k , h_n^k так называемые коэффициенты Гаусса — Шмидта, характеризующие распределение магнитных масс относительно системы координат $OX_r Y_r Z_r$. Прогнозирование коэффициентов Гаусса — Шмидта осуществляется с помощью формул:

$$g_n^k(t) = g_n^k(t_0) + \dot{g}_n^k(t-t_0);$$

$$h_n^k(t) = h_n^k(t_0) + \dot{h}_n^k(t-t_0), \quad (1.40)$$

где $g_n^k(t)$, $h_n^k(t)$ — значение коэффициентов на данную эпоху t , $g_n^k(t_0)$, $h_n^k(t_0)$ — принятые коэффициенты на эпоху t_0 , $\dot{g}_n^k(t-t_0)$, $\dot{h}_n^k(t-t_0)$ — скорости изменения коэффициентов во времени [88].

1.4. ЗЕМНАЯ АТМОСФЕРА

1.4.1. Состав и свойства атмосферы

Основные параметры атмосферы — плотность воздуха, температура воздуха, барометрическое давление, скорость звука и ветер — существенным образом влияют на характеристики движения ракет. Для изучения атмосферы создана широкая сеть метеостанций, рассеянных по всему земному шару. Исследования проводятся с помощью метеорологической аппаратуры, устанавливаемой на шарах-пилотах, радиозондах, специально оборудованных самолетах, метеорологических ракетах и спутниках Земли; результаты измерений подвергаются научной обработке и обобщаются.

Атмосферу Земли по химическому составу принято называть азотно-кислородной, она содержит 76 % азота, 21 % кислорода, 3 % водяного пара, водорода, углекислого газа и ряда других газов. Известно несколько принципов построения схем атмосферы. По составу воздуха атмосферу подразделяют на гомосферу и гетеросферу. В гомосфере, простирающейся до высот ~ 95 км, состав воздуха с высотой почти не изменяется.

В гетеросфере азот, кислород и другие газы под действием ультрафиолетового излучения Солнца диссоциируют и находятся в атомарном состоянии.

Поскольку температура воздуха является основным параметром, определяющим характеристики состояния атмосферы, наибольший интерес для баллистики представляет схема строения атмосферы по характеру распределения температуры с высотой. В этой схеме атмосферу Земли подразделяют на пять основных слоев, названных сферами.

Нижний слой — тропосфера, простирающаяся в средних широтах до высоты ~ 11 км, а в экваториальных областях до высот ~ 16 км. Высота тропосферы зависит от времени года, увеличиваясь летом и уменьшаясь зимой. В тропосфере содержится $\sim 75\%$ всей массы атмосферы и основная часть водяного пара. В тропосфере формируются все явления погоды. Отличительная черта тропосферы — понижение температуры воздуха с высотой. Однако зимой и летом после ясных холодных ночей могут наблюдаться температурные инверсии, при которых температура по высоте сначала возрастает, а затем начинает убывать. В тропосфере имеют место значительные горизонтальные и вертикальные течения воздушных масс — ветры. Горизонтальные ветры вызываются разностью давлений в разных местах земной поверхности, вертикальные — разностью температур по высоте.

Следующий слой — **стратосфера**, простирающаяся в средних широтах от ~ 11 до ~ 50 км. Стратосфера до высот ~ 30 км характеризуется постоянством температуры; на большей высоте, по мере приближения к верхней границе стратосферы, температура возрастает, причем имеют место значительные суточные и межсуточные колебания. Изменение температурного градиента между тропосферой и стратосферой происходит в относительно узком слое, называемом **тропопаузой**. Толщина слоя тропопаузы колеблется от нескольких сотен до ~ 2000 м. В относительно узком слое, охватывающем тропопаузу, наблюдаются мощные перемещения воздушных масс (так называемые струйные течения) с запада на восток, со скоростями, достигающими до ~ 110 м/с (~ 400 км/ч).

Область струйных течений в атмосфере характеризуется высокими скоростными градиентами в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Над стратосферой расположена **мезосфера**, которая простирается от высоты ~ 50 до ~ 90 км. Она характеризуется понижением температуры до верхней границы слоя и повышенной турбулентностью.

Термосфера — это слой атмосферы от ~ 90 до ~ 500 км характеризующийся непрерывным повышением кинетической температуры. В верхней части термосферы на высотах 400 ... 500 км кинетическая температура воздуха достигает ~ 1500 К.

Слой, расположенный от высот ~ 500 км до внешней границы атмосферы, т. е. примерно до 2000—3000 км, называется **экзосферой**. В экзосфере воздух очень разрежен. Переходные слои между названными сферами носят соответственно названия **стратопауза**, **мезопауза** и **термопауза**.

1.4.2. Стандартная атмосфера

Исследования показали, что физические параметры атмосферы значительно изменяются в зависимости от климатических условий, времени года и высоты. Например, в слое атмосферы с высотой до 5 км содержится около 50 % всей массы воздуха, а с высотой до 20 км — 95 %. Баллистические расчеты проводятся для **нормальных метеоусловий**, соответствующих средним статистическим опытным данным или так называемым **стандартным атмосферам**. Отклонение метеоусловий от их нормальных значений учитывается отдельно. В настоящее время в соответствии с ГОСТ 4401—81 действует СА-81.

Стандартная атмосфера предназначена для использования при расчетах и проектировании летательных аппаратов, при обработке результатов геофизических и метеорологических наблюдений и для приведения результатов испытаний летательных аппаратов и их элементов к одинаковым условиям. В СА-81 установлены стандартные числовые значения параметров атмосферы в функции геометрической (h) и геопотенциальной (H) высот в диапазоне от -2 до 50 км. Для высот от 50 до 80 км установлены рекомендуемые значения параметров атмосферы, а для высот от 80 до 120 км приведены справочные данные параметров, являющиеся переходными к средней международной справочной атмосфере CIRA1972 Комитета по космическим исследованиям международного совета научных объединений.

В метеорологии геопотенциальную высоту выражают через так называемые геопотенциальные метры. Для удобства изучения распределения давления в атмосфере в расчетные формулы вводят потенциал силы тяжести или геопотенциал, характеризующий потенциальную энергию частицы, расположенной в данной точке $\Phi(x, y, z)$. Поверхность, соответствующая уравнению $\Phi(x, y, z) = \text{const}$, называется **изопотенциальной** или **геопотенциальной**. Для переноса единицы массы с поверхности, имеющей потенциал Φ_1 , на близкую поверхность, имеющую потенциал Φ_2 , необходимо произвести удельную работу $d\Phi = g(h) dh$, имея в виду, что $\Phi_2 = \Phi_1 + d\Phi$. Интегрируя, получим $\Phi = \int_0^h g(h) dh$. Разделив Φ на стандартное (т. е. соответствующее нулевой высоте) ускорение свободного падения g_c , получим геопотенциальную высоту, имеющую размерность длины

$$H = \frac{\Phi}{g_c} = \frac{1}{g_c} \int_0^h g(h) dh. \quad (1.41)$$

Для установления зависимости между геопотенциальной и геометрической высотами необходимо найти зависимость $g(h)$. В СА-81 $g(h)$ вычислялось без учета центробежного ускорения по формуле для сферической модели Земли $g = g_c \left(\frac{R_{jc}}{R_{jc} + h} \right)^2$.

После интегрирования (1.41) получены зависимости

$$H = \frac{R_{3c}h}{R_{3c} + h} \quad \text{и} \quad h = \frac{R_{3c}H}{R_{3c} + H}. \quad (1.42)$$

При вычислении параметров, помещенных в таблицах СА, принят $R_{3c} = 6\,356\,766$ м.

Формулы, определяющие изменение давления с высотой, основаны на гипотезе о вертикальном статическом равновесии атмосферы. По этой гипотезе все горизонтальные слои воздуха элементарной толщины dh и единичной площади уравниваются элементарной разностью dp давлений, действующих на верхнее и нижнее основания слоя,

$$dp = -g\rho dh. \quad (1.43)$$

Уравнение состояния для идеального газа

$$p = \rho R^* T / M, \quad (1.44)$$

где R^* — универсальная газовая постоянная; M — молярная масса воздуха.

Для высот до 94 км значение молярной массы остается постоянным, и отношение $R^*/M = R^*/M_c = R$, где R — удельная газовая постоянная. Тогда

$$p = \rho RT. \quad (1.45)$$

В зависимости от характера изменения температуры атмосфера СА-81 по высоте разбита на ряд слоев; температура в каждом слое аппроксимируется линейной функцией от геопотенциальной высоты

$$T = T_* + \beta (H - H_*), \quad (1.46)$$

где $\beta = dT/dH$ — градиент температуры по геопотенциальной высоте; T_* и H_* — соответственно температура и геопотенциальная высота нижней границы соответствующего слоя. Используя уравнения (1.43), (1.44), (1.45) и интегрируя (1.43), можно получить для изометрических слоев ($\beta = 0$)

$$\ln \frac{p}{p_*} = -\frac{g_c}{RT} (H - H_*), \quad (1.47)$$

или

$$p = p_* \exp \left[-\frac{g_c}{RT} (H - H_*) \right]. \quad (1.48)$$

Для слоев с линейно изменяющейся температурой ($\beta \neq 0$)

$$\ln \frac{p}{p_*} = \ln \left[\frac{T_* + \beta (H - H_*)}{T_*} \right]^{-\frac{g_c}{R\beta}},$$

или

$$p = p_* \left[1 + \frac{\beta}{T_*} (H - H_*) \right]^{-\frac{g_c}{R\beta}}. \quad (1.49)$$

Плотность определяется из уравнения состояния

$$\rho = p/RT. \quad (1.50)$$

Удельный вес

$$\gamma = \rho g. \quad (1.51)$$

Скорость звука

$$a = \sqrt{\frac{\kappa^0 R^* T}{M}} = 20,046796 \sqrt{T}, \quad (1.52)$$

где $\kappa^0 = c_p/c_v = 1,4$ — показатель адиабаты.

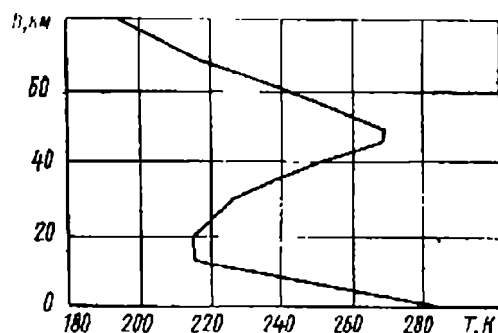


Рис. 1.20. Зависимость температуры от геометрической высоты для стандартной атмосферы

Таблица 1.1

H_0 , км	T_0 , К	β , градус/км
—2	301,15	—6,5
0	288,15	—6,5
11	216,65	0,0
20	216,65	1,0
32	288,65	2,8
47	270,65	0,0
51	270,65	—

По приведенным формулам вычислены таблицы, содержащие основные характеристики атмосферы: температуру (T , К и t °С), давление (p , Па и p , мм рт. ст), плотность воздуха, ускорение свободного падения, скорость звука. Приведены также относительные величины p/p_0 , ρ/ρ_0 и др. Индексом «с» отмечены значения параметров для среднего уровня моря (нулевой высоты). Значения температурных градиентов для стандартизованной части атмосферы СА-81 приведены в табл. 1.1.

Зависимость температуры геометрической высоты приведена на рис. 1.20.

1.4.3. Учет характеристик реальной атмосферы

Основные задачи внешней баллистики решаются при исходных данных, соответствующих техническим условиям на ракету, расчетным начальным условиям и характеристикам стандартной атмосферы. Одной из наиболее существенных причин, определяющих отклонение реальной траектории от расчетной, является несоответствие реальных метеоусловий условиям стандартной атмосферы. Тяга двигателя, аэродинамические силы и моменты в значительной мере определяются температурой, плотностью и давлением воздуха. Вместе с движением воздушных масс (ветром) изменение названных параметров существенно изменит ожидаемый результат пуска ракеты, соответствующий нормальным расчетным условиям.

В баллистике известны два основных метода учета реального состояния атмосферы.

1. Расчет траекторий по известным начальным условиям пуска, или определение начальных условий пуска по ожидаемым результатам (дальности), при определенных перед пуском реальных метеоподготовке (зондировании атмосферы).

2. Применяемый при проектных расчетах второй метод заключается в использовании стандартной атмосферы и моделей вариации ее параметров. Под вариациями понимаются возможные отклонения реальных параметров атмосферы от стандартной. Определение мо-

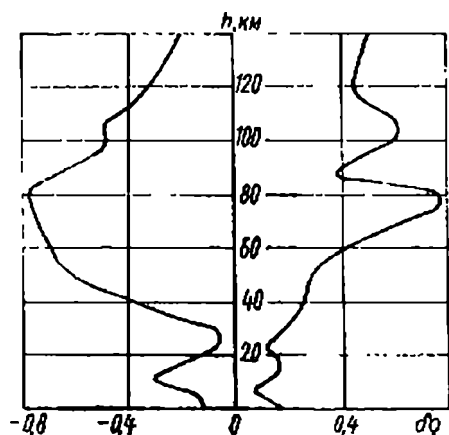


Рис. 1.21. Пример предельного изменения вариации плотности

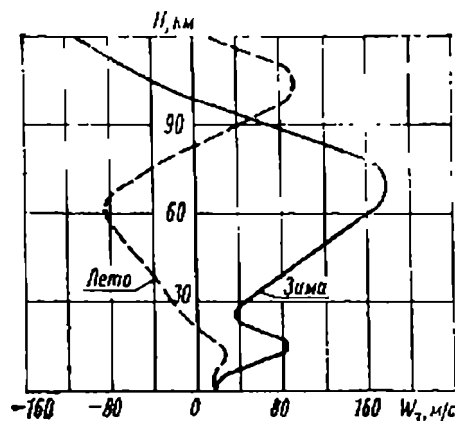


Рис. 1.22. Пример профиля зональной составляющей скорости ветра (в северном полушарии, 40° широты)

делей вариаций основывается на статистической обработке многочисленных многолетних результатов зондирования атмосферы в различных районах земного шара. Методы построения моделей вариаций плотности воздуха и моделей поля ветров изложены в [74] и работах по рассматриваемой теме, названных в списке литературы [74].

Относительное изменение вариации плотности

$$\delta\rho = (\rho - \rho_{CA})/\rho_{CA}, \quad (1.53)$$

где $\rho - \rho_{CA}$ — отклонение плотности от данных стандартной атмосферы ρ_{CA} .

Вариация плотности

$$\delta\rho_{\Sigma} = \delta\rho_{сш} + \delta\rho_{с} + \delta\rho_{случ}, \quad (1.54)$$

где $\delta\rho_{сш}$ — сезонно-широтная вариация плотности; $\delta\rho_{с}$ — суточная вариация; $\delta\rho_{случ}$ — случайная вариация.

Сезонно-широтные вариации в первом приближении определяются по функциональной зависимости

$$\delta\rho_{сш} = \delta\rho_{сш}(M, \varphi, h), \quad (1.55)$$

где M — месяц; φ — широта места определения; h — высота.

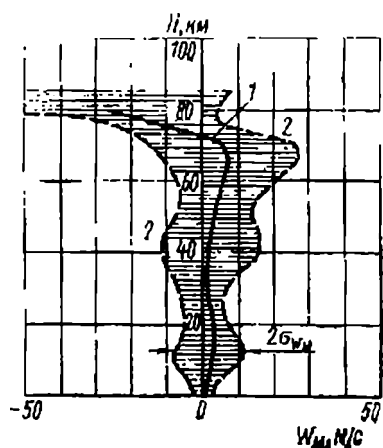


Рис. 1.23. Пример профиля меридиональной составляющей скорости ветра и среднего квадратичного отклонения ястра (σ_{W_M}) в северном полушарии:

1 — среднегодовое значение $W_{Mер}$; 2 — среднее квадратичное отклонение σ_{W_M}

Наименьшие рассеивания параметров траектории могут иметь место применительно к данным апреля и октября, когда наблюдаются наименьшие вариации плотности атмосферы. Наибольшие вариации плотности наблюдаются в январе и июле, по которым определяются наиболее неблагоприятные условия полета и наибольшее рассеивание траекторий.

Помимо средних широтно-сезонных и суточных составляющих полной вариации плотности наблюдаются случайные составляющие вариаций плотности ($\delta\rho_{случ}$), определяемые изменением солнечной активности, возмущениями геомагнитного поля и др. Наименьшие случайные отклонения наблюдаются летом, наибольшие зимой.

Пример предельного изменения вариации плотности представлен на рис. 1.21.

В соответствии со стандартной атмосферой траектория движения ЛА рассчитывается при отсутствии ветра. В действительности всегда есть ветер, действие которого необходимо учитывать. Модель поля ветров строится в двух взаимно перпендикулярных направлениях и соответственно имеет меридиональную составляющую — W_M (по меридиану) и зональную составляющую — W_Z (по параллели). Суммарный вектор определяется по формуле

$$W = \sqrt{W_Z^2 + W_M^2}, \quad (1.56)$$

направление ветра с запада на восток

$$\lg \chi = \frac{W_M}{W_Z}. \quad (1.57)$$

Зональный ветер определяется тремя составляющими — сезонно-широтной, суточной и случайной, меридиальный ветер определяется суточной и случайной составляющими. Пример профиля зональных скоростей ветра приведен на рис. 1.22, пример профиля средней меридиональной скорости ветра и отклонений от него приведен на рис. 1.23 [3].

Введение в баллистический расчет конкретных функций изменения температуры плотности атмосферы и ветра по высоте является трудоемкой задачей. Каждая метеорологическая реализация требует самостоятельного решения сложной системы уравнений [22].

1.5. СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛА В ПОЛЕТЕ

1.5.1. Силы и моменты

На летательный аппарат в полете действуют сила тяги и момент силы тяги основного двигателя, управляющие силы и моменты, аэродинамические силы и моменты, массовые силы (силы тяжести).

Сила тяжести, ее потенциал и ускорение силы тяжести рассмотрены в разд. 1.2.2.

1.5.2. Тяга двигателя

Под стендовой тягой понимают равнодействующую сил давления воздуха и истекающих газов, приложенных к неподвижной ракете, находящейся в невозмущенной атмосфере:

$$P = |\dot{m}| W_{\text{и}} + S_a (p_a - p), \quad (1.58)$$

где p — атмосферное давление, соответствующее высоте, на которой находится ЛА; S_a — площадь выходного сечения сопла; p_a — давление истекающих газов, в выходном сечении сопла; $W_{\text{и}}$ — скорость газов в выходном сечении сопла.

Заменив в уравнении (1.58) секундный массовый расход газа весовым $\left| \frac{dm}{dt} \right| = \frac{Q_{\text{сек}}}{g}$, получим формулу для тяги в другом написании:

$$P = \frac{Q_{\text{сек}}}{g} W_{\text{и}} + S_a (p_a - p). \quad (1.59)$$

В случае, когда можно принять $p = 0$,

$$P = \frac{Q_{\text{сек}}}{g} W_{\text{и}} + S_a p_a. \quad (1.60)$$

Если ракета расположена у поверхности Земли на нулевом уровне $y = 0$, то ее тяга равна

$$P_{ON} = \frac{Q_{\text{сек}}}{g} W_{\text{и}} + S_a (p_a - p_{ON}). \quad (1.61)$$

Сравнивая формулы (1.59) и (1.61), получим

$$P = P_{ON} + S_a p_{ON} \left(1 - \frac{p}{p_{ON}} \right). \quad (1.62)$$

Так как $p/p_{ON} = \pi(y)$, получим окончательно

$$P = P_{ON} + S_a p_{ON} [1 - \pi(y)]. \quad (1.63)$$

Вынеся из правой части формулы (1.59) за скобки $Q_{\text{сек}}/g$, получим упрощенную формулу (модель) для тяги:

$$P = \frac{Q_{\text{сек}}}{g} U_e, \quad (1.64)$$

где

$$U_e = W_{\text{п}} \div \frac{S_{\text{вг}}}{Q_{\text{свк}}} (p_{\text{в}} - p); \quad (1.65)$$

U_e — величина, называемая **эффективной скоростью истечения газов**.

Выражение для **единичного импульса** $I_{\text{ед}}$ может быть получено из общего выражения, определяющего импульс тяги, если взять $U_e = \text{const}$ и отнести полный импульс тяги к массе топлива $Q_{\text{т}}$, сгоревшему за время работы двигателя $t = t_{\text{к}}$, то

$$I_{\text{ед}} = \frac{1}{Q_{\text{т}}} \int_0^t P dt = \frac{U_e}{Q_{\text{т}} g} \int_0^t Q_{\text{свк}} dt. \quad (1.66)$$

При $Q_{\text{свк}} = \text{const}$ получим $\int_0^t Q_{\text{свк}} dt = Q_{\text{свк}} t_{\text{к}} = Q_{\text{т}}$ и тогда

$$I_{\text{ед}} = \frac{U_e}{g}, \quad (1.67)$$

причем

$$I_{\text{ед}} = P_{\text{уд}} = \frac{U_e}{g}. \quad (1.68)$$

Удельная тяга, имеющая размерность времени, характеризует время работы двигателя ракеты при весе топлива, равном тяге *.

Эффективная тяга двигателя определяется формулой

$$P_{\text{эфф}} = P - X_{\text{а}} - \frac{\delta q_{\text{нар}}}{dt}, \quad (1.69)$$

где $X_{\text{а}}$ — сила лобового сопротивления; $\delta q_{\text{нар}}/dt$ — вариационные силы, обусловленные перемещением масс (газов и жидкого наполнителя) внутри корпуса ЛА.

1.5.3. Аэродинамические силы и моменты

Аэродинамическая сила достаточно полно описывается формулой

$$R_{\text{А}} = q c_{\text{R}} S_{\text{м}}$$

при

$$c_{\text{R}} = c_{\text{R}}(M, \text{Re}, \alpha, \beta),$$

где $q = \rho \frac{v^2}{2}$ — **скоростной напор** набегающего невозмущенного потока; $S_{\text{м}}$ — площадь миделевого сечения корпуса ЛА; c_{R} — безразмерный аэродинамический коэффициент, зависящий от числа M ,

* Данная трактовка понятия предложена М. Д. Кисликом.

числа Рейнольдса Re , углов α и β . Составляющие аэродинамической силы в скоростной системе координат *:

$$\begin{aligned} X_a &= c_{x_a} q S_M; \\ Y_a &= c_{y_a} q S_M; \\ Z_a &= c_{z_a} q S_M. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Составляющие аэродинамического момента M на связанные оси координат:

$$M_x = m_x q S l; \quad M_y = m_y q S l; \quad M_z = m_z q S l. \quad (1.71)$$

Проведенные в аэродинамике исследования показали, что для коэффициента аэродинамического момента тангажа в связанной системе координат можно ограничиться зависимостью

$$m_z = f(\alpha, \delta_n, \bar{\omega}_z, \bar{\alpha}, \bar{\delta}_n).$$

Линеаризуя ее, получим

$$m_z = m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_n} \delta_n + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z + m_z^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + m_z^{\bar{\delta}_n} \bar{\delta}_n. \quad (1.72)$$

Здесь m_{z_0} — значение коэффициента аэродинамического момента тангажа при нулевых значениях α , δ_n , ω_z , $\bar{\alpha}$, $\bar{\delta}_n$ статические производные:

$$m_z^\alpha = \frac{\partial m_z}{\partial \alpha}; \quad m_z^{\delta_n} = \frac{\partial m_z}{\partial \delta_n};$$

безразмерные величины:

$$\bar{\omega}_z = \omega_z \frac{l}{V}; \quad \bar{\alpha} = \dot{\alpha} \frac{l}{V}; \quad \bar{\delta}_n = \dot{\delta}_n \frac{l}{V};$$

вращательные производные:

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = \frac{\partial m_z}{\partial \bar{\omega}_z}; \quad m_z^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial m_z}{\partial \bar{\alpha}}; \quad m_z^{\bar{\delta}_n} = \frac{\partial m_z}{\partial \bar{\delta}_n}.$$

Для коэффициента аэродинамического момента рыскания применяют формулу, аналогичную написанной выше [22]:

$$m_y = m_y^\beta \beta + m_y^{\delta_n} \delta_n + m_y^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_y + m_y^{\bar{\beta}} \bar{\beta} + m_y^{\bar{\delta}_n} \bar{\delta}_n. \quad (1.73)$$

Здесь статические производные

$$m_y^\beta = \frac{\partial m_y}{\partial \beta}; \quad m_y^{\delta_n} = \frac{\partial m_y}{\partial \delta_n};$$

* Здесь и далее термины и определения соответствуют ГОСТ 20058—80.

вращательные производные:

$$m_{y\dot{x}}^{\bar{\omega}} = \frac{\partial m_y}{\partial \dot{\bar{\omega}}_x}; \quad m_{y\dot{y}}^{\bar{\omega}} = \frac{\partial m_y}{\partial \dot{\bar{\omega}}_y};$$

$$m_{y\dot{\beta}}^{\bar{\delta}} = \frac{\partial m_y}{\partial \dot{\bar{\beta}}}; \quad m_{y\dot{\alpha}}^{\bar{\delta}} = \frac{\partial m_y}{\partial \dot{\bar{\alpha}}}.$$

Коэффициент аэродинамического момента крена в значительной степени определяется так называемыми **перекрестными аэродинамическими связями**:

$$m_x = m_{x_0} + m_{x\beta}^{\bar{\beta}} + m_{x\alpha}^{\bar{\alpha}}\delta_n + m_{x\dot{x}}^{\bar{\delta}}\delta_x + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \beta} \alpha \beta + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \delta_n} \alpha \delta_n + \\ + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \beta \partial \delta_n} \beta \delta_n + m_{x\dot{x}}^{\bar{\omega}}\dot{\bar{\omega}}_x + m_{x\dot{y}}^{\bar{\omega}}\dot{\bar{\omega}}_y + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \dot{\bar{\omega}}_y} \alpha \dot{\bar{\omega}}_y + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \beta \partial \dot{\bar{\omega}}_z} \beta \dot{\bar{\omega}}_z. \quad (1.74)$$

Здесь m_{x_0} — составляющая коэффициента аэродинамического момента крена, определяемая аэродинамической асимметрией летательного аппарата; $m_{x\beta}^{\bar{\beta}}$, $m_{x\alpha}^{\bar{\alpha}}\delta_n$ — составляющие коэффициента, определяемые скольжением и отклонением руля направления; $m_{x\dot{x}}^{\bar{\delta}}\delta_x$ — составляющая коэффициента, определяемая отклонением рулей, управляющих креном ЛА; $\frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \beta} \alpha \beta$, $\frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \delta_n} \alpha \delta_n$, $\frac{\partial^2 m_x}{\partial \beta \partial \delta_n} \beta \delta_n$ — составляющие коэффициента момента крена, определяемые взаимным влиянием крыльев и оперения; $m_{x\dot{x}}^{\bar{\omega}}\dot{\bar{\omega}}_x$ — коэффициент демпфирующего момента крена, создаваемого крыльями и оперением;

$$m_{x\dot{y}}^{\bar{\omega}}\dot{\bar{\omega}}_y, \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \dot{\bar{\omega}}_y} \alpha \dot{\bar{\omega}}_y, \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial \beta \partial \dot{\bar{\omega}}_z} \beta \dot{\bar{\omega}}_z —$$

составляющие спирального момента крена, возникающего при вращении ЛА вокруг осей OY и OZ .

В некоторых случаях вектор результирующего момента представляют суммой

$$M_R = M_{ст} + M_d, \quad (1.75)$$

где $M_{ст}$ — стабилизирующий или опрокидывающий момент; M_d — демпфирующий момент.

В упрощенных моделях аэродинамические силы и коэффициенты принимают не зависящими друг от друга и без учета угловых скоростей вращения *:

$$c_x = c_{x_0} + c_{x_i}(\alpha); \\ c_y = c_{y_0} + c_y^{\alpha}\alpha + c_y^{\beta}\delta_n; \\ c_z = c_z^{\beta}\beta + c_z^{\alpha}\delta_n. \quad (1.76)$$

* Индекс «а» опущен с целью упрощения записи.

Для ЛА осесимметричной аэродинамической схемы $c_{y_0} = 0$, кроме того, в некоторых случаях управляющие аэродинамические силы можно отдельно не учитывать, а включать в составляющие аэродинамической силы планера:

$$\begin{aligned} Y_a &= \frac{\rho V^2}{2} S c_{y_a}^{\alpha} \alpha; \quad Z_a = \frac{\rho V^2}{2} S c_{z_a}^{\beta} \beta; \\ M_z &= \frac{\rho V^2}{2} S l m_z^{\alpha} \alpha; \quad M_y = \frac{\rho V^2}{2} S l m_y^{\beta} \beta. \end{aligned} \quad (1.77)$$

В баллистических расчетах принимают силу лобового сопротивления равной

$$X_a = m C H(y) F(V), \quad (1.78)$$

где $C = \frac{i d^2}{Q} \cdot 10^3$ — баллистический коэффициент; $H(y)$ — функция изменения плотности атмосферы с высотой; $F(V)$ — эталонная функция силы сопротивления воздуха для подобного по аэродинамической форме ЛА.

Коэффициент пропорциональности

$$i = \frac{c_x(M)}{c_{x_{\text{эт}}}(M)} \quad (1.79)$$

называют коэффициентом формы, причем $c_{x_{\text{эт}}}(M)$ — коэффициент лобового сопротивления для эталонного ЛА.

1.5.4. Управляющие силы и моменты

Зависимости для аэродинамических сил и моментов (или их коэффициентов) управляемых ЛА определяют связи между углами поворота органов управления, углами поворота корпуса ЛА и соответствующими угловыми скоростями. Для учета в уравнениях движения управляющих сил и моментов необходимо выделить составляющие аэродинамических коэффициентов, определяемые поворотом управляющих органов. Например, для рулей высоты (тангажа) и рыскания продольная и нормальные управляющие силы соответственно равны:

$$X_p = S_p q (c_{x_{p0}} + c_{x_p}^{\delta_v} \delta_v + c_{x_p}^{\delta_n} \delta_n); \quad Y_p = S_p q c_{y_p}^{\delta_v} \delta_v; \quad Z_p = S_p q c_{z_p}^{\delta_n} \delta_n, \quad (1.80)$$

где S_p — характерная площадь рулей; q — скоростной напор; $c_{x_{p0}}$, $c_{x_p}^{\delta_v}$, $c_{y_p}^{\delta_v}$, $c_{z_p}^{\delta_n}$ — аэродинамический коэффициент руля и соответствующие частные производные.

Моментные характеристики определяются обычно точнее с учетом угловых скоростей поворота управляющих органов

$$m_{y_p} = m_{y_p}^{\delta_v} \delta_v + m_{y_p}^{\dot{\delta}_v} \dot{\delta}_v; \quad m_{z_p} = m_{z_p}^{\delta_n} \delta_n + m_{z_p}^{\dot{\delta}_n} \dot{\delta}_n. \quad (1.81)$$

Моменты управляющих сил равны

$$M_{yp} = S_p q l m_{yp}; \quad M_{zp} = S_p q l m_{zp}, \quad (1.82)$$

где l — расстояние от центра давления руля до центра масс ЛА.

Большое распространение получили газодинамические управляющие органы (газовые рули, поворотные сопла, дефлекторы, управление вдувом во внутреннюю полость сопла и управление выдувом на внешнюю поверхность ЛА и др.). Для газовых рулей продольную $X_{газ.р}$ и нормальные силы $Y_{газ.р}$, $Z_{газ.р}$ можно рассчитать по приближенным зависимостям

$$\begin{aligned} X_{газ.р} &= q_r S_{г.р} c_{x.р}; \\ Y_{газ.р} &= q_r S_{г.р} C_{y.р}^{\delta_B} \delta_B; \\ Z_{газ.р} &= q_r S_{г.р} c_{z.р}^{\delta_B} \delta_B. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Здесь q_r — скоростной напор газового потока; $S_{г.р}$ — характерная площадь газового руля.

Выражение для управляющих моментов, создаваемых газовыми рулями, имеют структуру, аналогичную (1.81).

Важной характеристикой управляющих органов являются шарнирные моменты:

$$M_{ш} = N_p h, \quad (1.84)$$

где N_p — нормальная сила, действующая на руль; h — расстояние от точки приложения нормальной силы до осевой линии шарнирной оси руля.

Шарнирные моменты определяют мощность и массу рулевого привода. В зависимости от назначения ЛА и их аэродинамической компоновки управляющие органы могут размещаться в различных местах корпуса. Вопросы динамики работы управляющих органов подробно рассмотрены в [44, 49].

ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛЕТА

Общая теория движения ЛА основана на известных теоремах классической механики, касающихся движения центра масс тела; движение произвольной точки, принадлежащей телу; изменение количества движения, кинетического момента и кинетической энергии тела. Характеристики движения определяются с учетом поступательного движения центра масс тела и вращательного движения относительно центра масс. Уравнение движения тел переменной и постоянной массы имеют свои особенности.

2.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

2.1.1. Уравнение И. В. Мещерского

В общем случае принято считать, что при движении ЛА происходит одновременное присоединение масс к телу и отделение их от него. Характерным примером такой модели служит ЛА с воздушно-реактивным двигателем, через заборный диффузор которого поступает встречный поток воздуха, необходимый для работы двигателя. Одновременно с забором воздуха продукты сгорания топлива вытекают с большой скоростью из сопла двигателя назад, создавая тягу. При этом масса тела непрерывно изменяется.

Согласно гипотезе, принятой И. В. Мещерским, присоединение и отделение масс происходит за бесконечно малый промежуток времени подобно удару. После присоединения элементарная масса движется со скоростью основной массы тела, а отделившаяся элементарная масса, получив скорость, сразу теряет взаимодействие с основной массой тела. Это так называемая гипотеза контактного взаимодействия [41, 59]. При этом И. В. Мещерским было получено уравнение движения центра масс тела переменной массы вида:

$$m \frac{dV_a}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i + \frac{dm_1}{dt} (U_a - V_a) + \frac{dm_2}{dt} (W_a - V_a), \quad (2.1)$$

где dm_1 и dm_2 — элементарные массы, присоединяющиеся и отделяющиеся за промежуток времени dt ; U_a — абсолютная скорость движения массы dm_1 перед присоединением; W_a — абсолютная скорость массы dm_2 после отделения; V_a — скорость движения тела до изменения его массы.

Входящие в уравнения (2.1) слагаемые вида $\frac{dm_1}{dt} (\dot{\vec{x}} - V_1) \times \frac{dm_2}{dt} (\dot{\vec{x}} - V_2)$ И. В. Мещерский назвал проекциями на координатные оси «прибавочной силы». Таким образом, И. В. Мещерский показал, что уравнение движения центра масс тела переменной массы можно написать так же, как и уравнение движения тела постоянной массы, включив в число действующих сил прибавочную силу.

Если в (2.1) обозначить относительные скорости присоединения частиц $U_{отп} = U_a - V_a$ и отделения частиц $W_{отп} = W_a - V_a$, то уравнение примет вид

$$m \frac{dV_a}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i + \frac{dm_1}{dt} U_{отп} + \frac{dm_2}{dt} W_{отп}. \quad (2.2)$$

Переменная масса движущегося тела равна

$$m = m_0 + \int_0^t \frac{dm_1}{dt} dt - \int_0^t \left| \frac{dm_2}{dt} \right| dt.$$

Если присоединения частиц нет, т. е. $\int_0^t \frac{dm_1}{dt} dt = 0$, то из (2.2) получим уравнение движения ЛА с реактивным двигателем обычного типа

$$m \frac{dV_a}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i - \left| \frac{dm}{dt} \right| W_{отп}, \quad (2.3)$$

где $\left| \frac{dm}{dt} \right| = |\dot{m}| = - \frac{dm_2}{dt}$ — секундный массовый расход рабочего вещества.

Второе слагаемое правой части принято называть реактивной силой. В дальнейшем будем обозначать его $\sum_{j=1}^m F_{pj}$.

Для движения ракеты вертикально вверх И. В. Мещерский получил уравнение *

$$m\ddot{x} = -mg + p_r - \frac{dm}{dt} W_{отп} - R(\dot{x}), \quad (2.4)$$

где g — ускорение свободного падения; $R(\dot{x})$ — сопротивление воздуха.

Получив уравнение (2.4), Мещерский не раскрыл содержание слагаемого p_r , назвав его давлением газов.

* В этом случае вертикальную ось И. В. Мещерский обозначал ox .

2.1.2. Уравнения движения ЛА как тела переменной массы

При более подробном исследовании движения центра масс ракеты следует иметь в виду следующее: силы, действующие на ракету, приложены к ее корпусу; вместе с тем центр масс всей системы (корпус—топливо—газы) перемещается относительно корпуса за счет расхода рабочего тела (выгорания топлива и истечения газов). Обозначим скорость и ускорение центра масс системы в абсолютном движении через V_a и a_a . Движение корпуса и жестко связанных с ним частей (т. е. и той точки тела, с которой в данный момент времени совпадает центр масс) относительно неподвижной системы координат будет *переносным*. Скорость и ускорение центра масс корпуса в переносном движении обозначим через V_e и $a_e = dV_e/dt$. Скорость и ускорение центра масс системы (корпус—топливо—газы) относительно корпуса ракеты обозначим через V_r и a_r . Из механики тел переменной массы известно, что *произведение массы тела на переносное ускорение его центра масс равно равнодействующей всех внешних и реактивных сил, действующих на тело*, т. е.

$$ma_e = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj}. \quad (2.5)$$

Скорость и ускорение центра масс ракеты в абсолютном движении соответственно равны

$$V_a = V_e + V_r; \quad a_a = a_e + a_r + 2(\omega \times V_r),$$

где ω — вектор угловой скорости вращения корпуса ракеты относительно неподвижной системы координат (с началом, совпадающим с центром масс).

Из последнего равенства определим a_e и подставим в (2.5). Тогда уравнение движения центра масс системы (корпус—топливо—газы), написанное в векторной форме, получим в таком виде:

$$ma_a = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj} - ma_r - 2m(\omega \times V_r) \quad (2.6)$$

При выводе уравнений (2.1) и (2.2) предполагалось, что взаимодействие основного тела с присоединяющимися или отделяющимися массами происходит мгновенно подобно удару. В действительности процесс взаимодействия летательного аппарата с подвижными присоединяющимися или отделяющимися газовыми потоками сложнее. У ракет с двигателями на жидком и твердом топливе отделяющиеся массы получают относительную скорость еще в камере сгорания двигателя до момента выхода частицы на плоскость наружного сечения сопла, т. е. до потери связи с основной массой ракеты. Кроме того, у ракет на жидком топливе горючее и окислитель перемещаются в процессе работы двигателя внутри корпуса ракеты. При взаимодействии движущихся потоков с корпусом, колеблющимся в попереч-

ном направлении, возникает кориолисова сила $F_{\text{кор}}$. Запишем уравнение движения центра масс ракеты с учетом этой силы:

$$ma_a = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj} + F_{\text{кор}} + ma_r + 2m(\omega \times V_r). \quad (2.7)$$

Добавим в последнее уравнение слагаемое, учитывающее нестационарность движения масс внутри ЛА. Пусть количество движения топлива и газов, перемещающихся внутри корпуса, в момент времени t равно $q_{\text{вар}}$, а в момент времени $t + dt$ равно $q_{\text{вар}} + \delta q_{\text{вар}}$. Очевидно, за промежуток времени dt изменение количества движения подвижных масс равно $\delta q_{\text{вар}}$ и уравнение движения запишется в более полной форме

$$ma_a = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj} + F_{\text{кор}} + ma_r + 2m(\omega \times V_r) + \frac{\delta q_{\text{вар}}}{dt}. \quad (2.8)$$

Составляющую $\delta q_{\text{вар}}/dt$ принято называть вариационной силой.

Уравнение (2.8) соответствует **принципу затвердевания** [49]. По принципу затвердевания уравнение движения тела переменного состава можно написать в виде уравнения движения тела постоянного состава, имеющего мгновенно зафиксированную (затвердевшую) массу. В число сил, действующих на тело, включаются внешние, реактивные, кориолисовы и вариационные силы. Вариационные силы и моменты отражают нестационарность движения масс внутри корпуса ЛА. Однако в большинстве случаев процесс перемещения рабочего тела внутри ракеты можно принимать за квазистационарный и не учитывать вариационные силы в виду малости. Кориолисовы силы, действующие на активном участке траектории и обусловленные движением масс внутри корпуса ракеты и ее колебаниями, на движение центра масс почти не оказывают влияния. Кориолисовы силы, появляющиеся при рассмотрении относительного движения ракеты в связанной с Землей системе координат, действующие на всей траектории, оказывают заметное влияние на ее полет только при движении со скоростями, превышающими 2000 ... 3000 м/с и будут учтены нами ниже.

В инерциальной системе координат уравнения движения центра масс ЛА записываются в виде

$$m \frac{dV_a}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj}, \quad (2.9)$$

где $\sum_{i=1}^n F_i$ и $\sum_{j=1}^m F_{pj}$ — векторы суммы внешних и реактивных сил. Уравнение движения центра масс ЛА относительно подвижной связанной с землей системы координат имеет вид

$$ma = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj} + (-ma_{\text{пер}}) + (-ma_{\text{кор}}), \quad (2.10)$$

где $(-ma_{\text{пер}})$ и $(-ma_{\text{кор}})$ — переносная и кориолисова силы инерции, определяемые вращением Земли.

Для прямоугольной системы координат с началом в условном центре Земли при направлении вектора угловой скорости вращения Земли Ω по оси OY_0 получим

$$a_{\text{пер}} = \frac{d\Omega}{dt} \times r + \Omega \times (\Omega \times r). \quad (2.11)$$

Если принять $\Omega = \text{const}$, то переносное ускорение равно

$$a_{\text{пер}} = \Omega \times (\Omega \times r), \quad (2.12)$$

а кориолисово ускорение, определяемое вращением Земли,

$$a_{\text{кор}} = 2(\Omega \times V), \quad (2.13)$$

где V — относительная скорость ЛА.

Очень часто пишут уравнения движения центра масс в подвижной системе координат OX_i, Y_i, Z_i^* , связанной с ракетой. Воспользуемся правилом перехода от неподвижной системы координат к подвижной:

$$m \frac{dV_a}{dt} = m \frac{dV_{a_i}}{dt} + m[\omega \times V_{a_i}] = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj}, \quad (2.14)$$

где $\frac{dV_{a_i}}{dt}$ — производная вектора скорости центра масс ракеты в подвижной системе координат.

Для земных систем координат

$$m \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj} - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}}. \quad (2.15)$$

Если ω — угловая скорость вращения осей подвижной системы координат относительно осей, связанных с Землей, то

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^*V}{dt} + \omega \times V, \quad (2.16)$$

где d^*V/dt — локальная производная.

Тогда векторное уравнение движения центра масс ЛА с учетом влияния вращения Земли будет иметь вид

$$m \left(\frac{d^*V}{dt} + \omega \times V \right) = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj} - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}}. \quad (2.17)$$

* В дальнейшем индексе i заменяется на индекс соответствующей выбранной системы координат.

Для любой прямоугольной системы координат $OX_l Y_l Z_l$, начало которой совпадает с центром масс ЛА, на основании (2.14) можно написать три скалярных уравнения движения центра масс:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{x_l} + \omega_{y_l} V_{z_l} - \omega_{z_l} V_{y_l} &= \frac{\sum_{i=1}^n F_{x_{li}}}{m} + \frac{\sum_{j=1}^m F_{px_{lj}}}{m}; \\ \dot{V}_{y_l} + \omega_{z_l} V_{x_l} - \omega_{x_l} V_{z_l} &= \frac{\sum_{i=1}^n F_{y_{li}}}{m} + \frac{\sum_{j=1}^m F_{py_{lj}}}{m}; \\ \dot{V}_{z_l} + \omega_{x_l} V_{y_l} - \omega_{y_l} V_{x_l} &= \frac{\sum_{i=1}^n F_{z_{li}}}{m} + \frac{\sum_{j=1}^m F_{pz_{lj}}}{m},\end{aligned}\quad (2.18)$$

где V_{x_l} , V_{y_l} , V_{z_l} — проекции вектора скорости центра масс ракеты на оси связанной с ним системы координат; ω_{x_l} , ω_{y_l} , ω_{z_l} — проекции вектора угловой скорости вращения связанной (l -й) системы координат относительно системы координат, также движущейся с ракетой, у которой направление осей неизменно в пространстве и совпадает с направлением осей неподвижной системы координат, на выбранные l -е оси координат; $\sum_{i=1}^n F_{x_{li}}$, $\sum_{i=1}^n F_{y_{li}}$, $\sum_{i=1}^n F_{z_{li}}$, $\sum_{j=1}^m F_{px_{lj}}$, $\sum_{j=1}^m F_{py_{lj}}$, $\sum_{j=1}^m F_{pz_{lj}}$ — проекции внешних и реактивных сил, действующих на ЛА, на оси системы координат $OX_l Y_l Z_l$.

2.1.3. Уравнения вращательного движения ЛА

Для составления уравнений вращательного движения ракеты относительно осей, проходящих через центр масс и вращающихся по отношению к ракете с угловой скоростью ω^* при вращении самой ракеты с угловой скоростью ω , надо воспользоваться известным уравнением

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{K}}{dt} + [(\omega + \omega^*) \times \mathbf{K}], \quad (2.19)$$

где $d\mathbf{K}/dt$ — производная от кинетического момента, вычисленная относительно неподвижной системы координат; $d^*\mathbf{K}/dt$ — производная от кинетического момента, вычисленная относительно l -й системы координат $OX_l Y_l Z_l$ (локальная производная).

Если система координат $OX_l Y_l Z_l$ не перемещается относительно ракеты, то $\omega^* = 0$ и

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{K}}{dt} + \omega \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_R, \quad (2.20)$$

где $\mathbf{M}_R$ — результирующий момент системы сил.

Проекция векторного равенства (2.20) на оси координат, связанные с ЛА, могут быть представлены через проекции на эти оси вектора кинетического момента K :

$$K(t) = A_I \omega(t), \quad (2.21)$$

где A_I — тензор инерции ЛА, выраженный матрицей инерции

$$A_I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Если подвижные оси координат совместить с главными центральными осями инерции ЛА, совпадающими со связанными, $OXYZ$, то матрица (2.22) превратится в диагональную, у которой $I_{ij} = 0$, а диагональные I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} будут главными центральными моментами инерции. Проекция уравнения (2.20) на оси связанной системы координат при этом запишутся в виде

$$A_I \dot{\omega}(t) + A_\omega(t) A_I \omega(t) = M_R(t), \quad (2.23)$$

где

$$A_\omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Определяя из (2.23) угловые ускорения, напомним динамические уравнения вращательного движения симметричного ЛА относительно центра масс в проекциях на оси связанной системы координат в виде динамических уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} I_{xx} \dot{\omega}_x &= M_x + M_{px} - (I_{zz} - I_{yy}) \omega_y \omega_z; \\ I_{yy} \dot{\omega}_y &= M_y + M_{py} - (I_{xx} - I_{zz}) \omega_x \omega_z; \\ I_{zz} \dot{\omega}_z &= M_z + M_{pz} - (I_{yy} - I_{xx}) \omega_y \omega_x. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.1.4. Уравнения свободного движения ЛА

При свободном (баллистическом) движении ЛА в плотных слоях атмосферы на него будут оказывать действие две группы сил — аэродинамические силы и силы, определяемые влиянием поля тяготения Земли. Система уравнений, описывающая движение ЛА как тела постоянной массы, в центральном гравитационном поле может быть получена из уравнений движения ЛА как тела переменной массы, если положить в них $m = \text{const}$ и $P = 0$.

При необходимости приближенного математического описания процесса свободного движения в безвоздушном пространстве или в среде, оказывающей пренебрежимо малое сопротивление, плоская траектория движения ЛА может быть определена на основе использования следующих скалярных уравнений, записанных относительно инерциальной системы координат:

$$\dot{V}_x = -g_{T_0} \frac{R_3^2}{r^3} x; \quad \dot{V}_y = -g_{T_0} \frac{R_3^2}{r^3} y.$$

Заменяя $x = r \sin \varphi$ и $y = r \cos \varphi$, где φ — центральный угол, их выражениями после дифференцирования и последующих преобразований, получим известные уравнения движения ЛА постоянной массы:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= g_{\tau_0} \left(\frac{R_3}{r} \right)^2; \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0, \\ \text{или } \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -g_{\tau_0} \left(\frac{R_3}{r} \right)^2; \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Система (2.26) является основой эллиптической теории, позволяющей приближенно определять характеристики движения баллистических ракет на неуправляемом безвоздушном участке траектории.

2.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫХ ЛА

2.2.1. Определение и основные типы моделей движения ЛА

Под моделью понимают схематизацию реального процесса движения в форме, позволяющей проводить различные теоретические исследования в зависимости от поставленной задачи и принимаемых допущений. В математической модели движения конкретизируется схема ЛА, устанавливается модель среды, в которой движется ЛА, определяются силы и моменты, действующие на ЛА. Конкретный вид математической модели зависит от допущений, положенных в основу составления модели, выбранной системы координат и системы действующих сил.

При составлении различных моделей движения ЛА может быть принят материальной точкой, твердым телом или схематизированным упругим телом.

Уравнения движения ЛА, записанные в любых координатах, в общем случае являются нелинейными дифференциальными уравнениями. Порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей движение материальной системы с конечным числом степеней свободы, будет равен удвоенному количеству степеней свободы. **Нелинейные модели** используются в основном для прямых и проектных баллистических расчетов, **линейные модели** — для исследования систем управления, определения ошибок и характеристик точности стрельбы. Нелинейные модели движения могут быть преобразованы в линейные методом линеаризации, основанным на принципе малых отклонений.

Если уравнения, описывающие движение ЛА, не интегрируются в конечном виде, они относятся к группе так называемых **дифференциальных моделей**. Интегрируемые в конечном виде дифференциальные уравнения составляют группу **аналитических или конечных моделей**. К последним относятся дифференциальные уравнения движения, описывающие движения материальной точки без учета сопротивления среды (параболические и эллиптические траектории).

Все перечисленные модели движения могут быть отнесены к определенным, если известны (или заданы) все действующие факторы и внешние условия. Случайные составляющие, дающие основание отнести соответствующую модель к числу **стохастических моделей**, должны быть заданы в них в виде случайных функций или чисел или должны быть известны характеристики распределения их вероятностей. Движение в условиях априорной неопределенности (например, при аварийных ситуациях) предполагает **неопределенную модель движения**. В подобных случаях движение рассматривается при произвольно выбранном формальном разложении типа

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^m \psi_{kj}(t) a_j \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где $\psi_{kj}(t)$ — произвольно выбираемая линейно независимая система функций; a_j — постоянные коэффициенты. Это — **формальная модель**. При произвольном предполагаемом действии возмущающего фактора модель называется **факторной**.

Указанные модели нельзя считать взаимно независимыми и строго разграниченными. В зависимости от назначения баллистических исследований движения реальных ЛА в различных условиях могут описываться различными дифференциальными и конечными уравнениями, содержащими детерминированные и стохастические факторы. Подобные комплексные модели относят к группе **смешанных (комбинированных) моделей** [14].

2.2.2. Развернутая система уравнений пространственного движения ЛА

Движение ракет будем рассматривать в нормальной земной системе координат $O_0X_gY_gZ_g$. Влияние вращения Земли учтем введением постоянного по величине и направлению ускорения свободного падения. Кориолисовым ускорением будем пренебрегать.

Проще всего написать систему уравнений для определения скорости $V = V_k$ поступательного движения центра масс ракеты относительно Земли в проекциях на оси траекторной системы координат, так как в этой системе $V_{x_k} = V$, $V_{y_k} = V_{z_k} = 0$. Тогда уравнения (2.18) упростятся и будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n F_{x_k i}/m; & V\omega_{z_k} &= \sum_{i=1}^n F_{y_k i}/m; \\ V\omega_{y_k} &= - \sum_{i=1}^n F_{z_k i}/m. \end{aligned} \quad (2.27)$$

После определения проекций угловой скорости вращений траекторной системы координат $O_0X_kY_kZ_k$ относительно неподвижной системы $O_0X_gY_gZ_g$ на оси траекторной системы координат запишем:

$$\omega_{x_k} = \dot{\Psi} \sin \theta; \quad \omega_{y_k} = \dot{\Psi} \cos \theta; \quad \omega_{z_k} = \dot{\theta}. \quad (2.28)$$

Подставляя ω_{y_K} и ω_{z_K} в (2.27), получим систему

$$\dot{V} = \frac{\sum_{i=1}^n F_{x_{Ki}}}{m}; \quad V\dot{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n F_{y_{Ki}}}{m}; \quad V\dot{\psi} \cos \theta = -\frac{\sum_{i=1}^n F_{z_{Ki}}}{m}. \quad (2.29)$$

При написании правых частей уравнений (2.29) будем учитывать составляющие тяги, силы тяжести, аэродинамических и управляющих сил. Аэродинамическую силу R_A зададим составляющими X_a , Y_a , Z_a в скоростной системе координат. Тогда, воспользовавшись таблицей направляющих косинусов, получим проекции аэродинамической силы на траекторные оси координат

$$R_{x_K} = -X_K = -X_a; \quad (2.30)$$

$$R_{y_K} = Y_K = Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a; \quad (2.31)$$

$$R_{z_K} = Z_K = Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a. \quad (2.32)$$

Величины X_a , Y_a и Z_a в первом приближении могут быть определены по формулам (1.70). Пусть тяга задана проекциями на связанные оси координат P_x , P_y , P_z . Управляющие силы, создаваемые отдельными газодинамическими органами управления, могут быть включены в указанные составляющие тяги. Кроме того, использование проекций вектора $\mathbf{P}$ на связанные оси дает возможность учесть влияние эксцентриситета тяги на характеристики движения ракеты.

При переходе к проекциям тяги и управляющих сил на траекторные оси представим их в виде

$$P_{x_K} = \sum_{j=1}^m X_{pKj} = \left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) \cos \alpha \cos \beta - \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) \times \\ \times \sin \alpha \cos \beta + \left(P_z + \sum_{j=1}^m Z_{pj} \right) \sin \beta; \quad (2.33)$$

$$P_{y_K} + \sum_{j=1}^m Y_{pKj} = \left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) (\sin \alpha \cos \gamma_a + \sin \gamma_a \cos \alpha \sin \beta) + \\ + \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) (\cos \gamma_a \cos \alpha - \sin \gamma_a \sin \alpha \sin \beta) - \left(P_z + \sum_{j=1}^m Z_{pj} \right) \times \\ \times \sin \gamma_a \cos \beta; \quad (2.34)$$

$$P_{z_K} + \sum_{j=1}^m Z_{pKj} = \left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) (\sin \gamma_a \sin \alpha - \cos \gamma_a \cos \alpha \sin \beta) + \\ + \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) (\sin \gamma_a \cos \alpha + \cos \gamma_a \sin \alpha \sin \beta) + \left(P_z + \sum_{j=1}^m Z_{pj} \right) \times \\ \times \cos \gamma_a \cos \beta. \quad (2.35)$$

Так как мы не учитываем переменность силы тяжести и кривизну поверхности Земли, то проекции силы тяжести на траекторные оси координат очевидны:

$$Q_{x_K} = -Q \sin \theta; \quad Q_{y_K} = -Q \cos \theta; \quad Q_{z_K} = 0. \quad (2.36)$$

Подставляя полученные составляющие всех учитываемых нами сил из (2.33 ... 2.36) и значения угловых скоростей (2.28) в основные уравнения (2.27), запишем систему уравнений, характеризующую движение центра масс ракеты в траекторной системе координат:

$$\dot{V} = \frac{1}{m} \left(P_{x_k} - \sum_{j=1}^m X_{pkj} - X_k + Q_{x_k} \right); \quad (2.37)$$

$$V \dot{\theta} = \frac{1}{m} \left(P_{y_k} + \sum_{j=1}^m Y_{pkj} + Y_k + Q_{y_k} \right); \quad (2.38)$$

$$V \dot{\Psi} \cos \theta = -\frac{1}{m} \left(P_{z_k} + \sum_{j=1}^m Z_{pkj} + Z_k \right). \quad (2.39)$$

Уравнения вращательного движения ракет и самолетов обычно записывают в проекциях на связанные оси координат. Любая другая, не связанная с ракетой, система координат перемещается относительно ракеты, а это приводит к необходимости учитывать при исследовании движения ракет переменность моментов инерции даже при $m = \text{const}$, что вносит усложнения. Напишем уравнения вращательного движения в проекциях на связанные оси координат, предполагая, что они совпадают с главными центральными осями инерции и, опуская второй индекс у главных центральных моментов,

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x + M_{px}; \quad (2.40)$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_y + M_{py}; \quad (2.41)$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z + M_{pz}, \quad (2.42)$$

где M_i ($i = x, y, z$) — проекции моментов внешних сил и тяги на связанные оси координат (без учета управляющих сил); M_{pi} ($i = x, y, z$) — проекции моментов управляющих сил на связанные оси координат.

Для осесимметричных ракет динамические уравнения вращательного движения можно принять в упрощенном виде

$$I_x \dot{\omega}_x = M_x + M_{px}; \quad (2.43)$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_y + M_{py}; \quad (2.44)$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z + M_{pz}. \quad (2.45)$$

При работающем двигателе моменты инерции будут величинами переменными вследствие изменения массы ракеты из-за расхода топлива. Численные значения I_x, I_y, I_z для ракеты определяются так же, как и для всякого сложного тела, т. е. вычисляются на основании подробных чертежей ракеты и при известном законе изменения ее масс в полете. Работа по расчетному определению моментов инерции и их изменению кропотлива и трудоемка. Поэтому

при приближенных баллистических расчетах их берут постоянными. При более точных расчетах, связанных с исследованием устойчивости и управляемости, переменность моментов инерции необходимо учитывать. Экспериментальные методы определения моментов инерции сложных тел, дающие более точные результаты в сравнении с расчетными, достаточно подробно разработаны в механике, и мы их касаться не будем.

Для установления связей между производными $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}$ и угловыми скоростями ω_x , ω_y и ω_z воспользуемся таблицей направляющих косинусов

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\gamma}; \quad (2.46)$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cos \theta \cos \gamma + \dot{\theta} \sin \gamma; \quad (2.47)$$

$$\omega_z = -\dot{\psi} \cos \theta \sin \gamma + \dot{\theta} \cos \gamma. \quad (2.48)$$

Решая эти уравнения совместно, получим

$$\dot{\theta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \quad (2.49)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \quad (2.50)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - \operatorname{tg} \theta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \quad (2.51)$$

При определении величин аэродинамических сил в процессе решения пространственной задачи движения ракет надо знать величины углов α , β , γ_a .

Определяя направляющие косинусы последовательного перехода от связанных осей к скоростным, от скоростных к траекторным, от траекторных к земным и приравнивая их направляющим косинусам непосредственного перехода от связанных осей к земным, получим следующие соотношения между углами:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta (\sin \alpha \cos \gamma_a + \\ &+ \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a); \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \sin \psi \cos \gamma &= \sin \Psi \cos \beta \cos \gamma_a + \\ &+ \cos \Psi (\sin \beta \cos \theta + \sin \gamma_a \sin \theta \cos \beta) - \\ &- \cos \psi \sin \theta \sin \gamma; \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta \sin \gamma &= \sin \gamma_a \cos \beta \cos \theta - \\ &- \sin \beta \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\gamma_a = \arcsin \frac{\cos \theta \sin \gamma + \sin \beta \sin \theta}{\cos \beta \cos \theta}, \quad (2.55)$$

а углы α и β определяются при решении сложных квадратных тригонометрических уравнений.

Если теперь использовать выражения для проекций вектора скорости центра масс ракеты на оси системы координат $O_0X_gY_gZ_g$, то получим

$$dx_g/dt = V \cos \theta \cos \Psi; \quad (2.56)$$

$$dy_g/dt = V \sin \theta; \quad (2.57)$$

$$dz_g/dt = -V \cos \theta \sin \Psi. \quad (2.58)$$

Соответственно расстояние от начала координат до центра масс ракеты (наклонная дальность) будет равно

$$r = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2}. \quad (2.59)$$

Уравнения (2.37) ... (2.42) и (2.49) ... (2.59) вместе с уравнением

$$m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt, \quad (2.60)$$

определяющим изменение массы, будут составлять систему из 17 уравнений, описывающую пространственное движение ракеты.

$$1. \quad \dot{V} = \frac{1}{m} \left[\left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) \cos \alpha \cos \beta - \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) \sin \alpha \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(P_z + \sum_{j=1}^m Z_{pj} \right) \sin \beta - X_a - Q \sin \theta \right].$$

$$2. \quad \dot{\theta} = \frac{1}{mV} \left[\left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) (\sin \alpha \cos \gamma_a + \sin \gamma_a \cos \alpha \sin \beta) + \right. \\ \left. + \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) (\cos \gamma_a \cos \alpha - \sin \gamma_a \sin \alpha \sin \beta) - \right. \\ \left. - \left(P_z + \sum_{j=1}^m Z_{pj} \right) \sin \gamma_a \cos \beta + Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a - Q \cos \theta \right].$$

$$3. \quad \dot{\Psi} = - \frac{1}{mV \cos \theta} \left[\left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) (\sin \gamma_a \sin \alpha - \cos \gamma_a \cos \alpha \sin \beta) + \right. \\ \left. + \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) (\sin \gamma_a \cos \alpha + \cos \gamma_a \sin \alpha \sin \beta) + \right. \\ \left. + \left(P_z + \sum_{j=1}^m Z_{pj} \right) \cos \gamma_a \cos \beta + Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a \right].$$

$$4. \quad I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x + M_{xp}.$$

$$5. \quad I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_y + M_{yp}.$$

$$6. \quad I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z + M_{zp}.$$

$$7. \quad \dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma.$$

$$8. \quad \dot{\psi} = \cos^{-1} \dot{\vartheta} (\omega_y \cos \gamma + \omega_z \sin \gamma).$$

(2.61)

9. $\dot{\gamma} = \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma).$
10. $\sin \vartheta = \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta (\sin \alpha \sin \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a).$
11. $\sin \psi \cos \gamma = \sin \Psi \cos \beta \cos \gamma_a + \cos \Psi (\sin \beta \cos \theta + \sin \gamma_a \sin \theta \cos \beta) - \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma.$
12. $\cos \vartheta \sin \gamma = \sin \gamma_a \cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta.$
13. $\dot{x}_g = V \cos \theta \cos \Psi.$
14. $\dot{y}_g = V \sin \theta.$
15. $\dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \Psi.$
16. $r = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2}.$
17. $m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt.$

Эта система уравнений может применяться для различных целей. Проще ее использовать для решения прямой задачи внешней баллистики. В этом случае, если будут известны все геометрические, массовые, инерционные, аэродинамические характеристики ракеты, характеристики, определяющие работу ее двигателя; законы изменения управляющих сил $\sum_{j=1}^n X_{pkj}(t)$, $\sum_{j=1}^n Y_{pkj}(t)$, $\sum_{j=1}^n Z_{pkj}(t)$ и моментов $M_{px}(t)$, $M_{py}(t)$, $M_{pz}(t)$ и начальные условия полета, уравнения системы могут быть тем или иным способом проинтегрированы.

В результате решения будут найдены все характеристики движения ракеты: $V(t)$; $\theta(t)$; $\Psi(t)$; $x_g(t)$; $y_g(t)$; $z_g(t)$; $r(t)$; $\vartheta(t)$; $\psi(t)$; $\gamma(t)$; $\alpha(t)$; $\beta(t)$; $\gamma_a(t)$; $\omega_x(t)$; $\omega_y(t)$; $\omega_z(t)$; $m(t)$.

В ряде случаев может быть задана и часть характеристик движения: величины координат, скоростей или углов. Характеристики движения ракеты задаются в функции от времени или других величин, например, изменение скорости по времени $V(t)$, угла тангажа по времени $\vartheta(t)$, углов отклонения управляющих органов по времени $\delta_n(t)$, $\delta_u(t)$, $\delta_a(t)$ или $y_g = f(x_g)$ и т. д. Эти функции носят название программных уравнений. При задании программных уравнений часть основных уравнений системы (2.37) ... (2.42) и (2.49) ... (2.54) окажутся лишними. Например, если задано $\vartheta(t)$, то значение ϑ может быть определено непосредственно дифференцированием функции $\vartheta(t)$ и уравнение (2.49) будет лишним. При этом, естественно, решение прямой задачи упрощается.

Решение полной системы уравнений, описывающей пространственный полет управляемой ракеты, является весьма сложным и трудоемким. Чаще всего при решении практических задач систему упрощают.

2.2.3. Упрощенные системы уравнений, описывающие пространственное движение управляемой ракеты в плотных слоях атмосферы

Если принять $P_x = P$; $P_y = P_z = 0$ и положить $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, т. е. перейти к так называемой балансировочной схеме расчета, которой отвечают балансировочные углы атаки α_B и скольжения β_B и тригонометрические функции этих углов в силу малости заменить их значениями, то можно получить упрощенную систему уравнений пространственного движения ЛА:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\approx \frac{1}{m} (P - X_a) - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} &\approx \frac{1}{mV} [(P + Y^\alpha) \alpha_B - (P + Z^\beta) \beta_B \gamma_a] - \frac{1}{V} g \cos \theta; \\ \dot{\Psi} &\approx - \frac{1}{mV \cos \theta} [(P + Y^\alpha) \alpha_B \gamma_a - (P + Z^\beta) \beta_B]; \\ \sin \vartheta &\approx \sin \theta + \cos \theta (\alpha_B + \beta_B \gamma_a); \\ \sin \psi &\approx \sin \Psi + \cos \Psi (\beta_B \cos \theta + \gamma_a \sin \theta); \\ \gamma_a &= \beta_B \operatorname{tg} \theta \\ \dot{x}_g &= V \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{y}_g &= V \sin \theta; \\ \dot{z}_g &= -V \cos \theta \sin \Psi; \\ r &= \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2}; \\ m &= m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt.\end{aligned}\tag{2.62}$$

В полученной системе дифференциальных уравнений (2.62) управляющие силы учтены в неявном виде путем включения их соответственно в силу лобового сопротивления, подъемную и боковую силы. Здесь для боковых составляющих аэродинамического сопротивления принят линейный закон

$$\begin{aligned}Y_a &= Y^\alpha \alpha; & Z_a &= -Z^\beta \beta; \\ Y^\alpha &= q S c_y^\alpha; & Z^\beta &= q S |c_z^\beta|.\end{aligned}$$

В результате проведенных упрощений получена система из 11 уравнений, содержащих 13 неизвестных. Система может быть решена, если к написанным уравнениям добавить два кинематических соотношения, определяющих закон управления. Во вторых двух уравнениях члены, содержащие произведения малых углов $\beta_B \gamma_a$ и $\alpha_B \gamma_a$, значительно меньше остальных слагаемых и при проведении приближенных расчетов их можно опустить, тогда

$$\dot{\theta} \approx (P + Y^\alpha) \alpha_B (mV)^{-1} - gV^{-1} \cos \theta;\tag{2.63}$$

$$\dot{\Psi} \approx (mV \cos \theta)^{-1} (P + Z^\beta) \beta_B.\tag{2.64}$$

В некоторых случаях, когда накладываются ограничения на ориентацию вектора скорости центра масс ракеты в пространстве, углы $\theta(t)$ и $\Psi(t)$ могут быть определены помимо этих уравнений. Тогда производные $\dot{\theta}$ и $\dot{\Psi}$ можно найти непосредственно дифференцированием (аналитически или численно). Балансировочные углы атаки и скольжения приближенно можно определить по формулам

$$\alpha_B \approx \frac{m}{P + Y\alpha} (V\dot{\theta} + g \cos \theta); \quad (2.65)$$

$$\beta_B \approx \frac{mV\dot{\Psi} \cos \theta}{P + Z\beta}. \quad (2.66)$$

При оптимизации управления движением центра масс ЛА часто накладывают ограничения на величину перегрузок. Для траекторной системы координат основные уравнения при балансировочном режиме движения имеют вид

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{P \cos \alpha \cos \beta - X_a}{mg} - \sin \theta; \quad (2.67)$$

$$\frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} = \frac{P \sin \alpha + Y_K}{mg} - \cos \theta; \quad (2.68)$$

$$-\frac{V}{g} \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} = \frac{-P \cos \alpha \sin \beta + Z_K}{mg}. \quad (2.69)$$

Вследствие малости углов заменим

$$\sin \alpha \approx \alpha; \sin \beta \approx \beta; \cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1.$$

Тогда проекции вектора перегрузки в траекторной системе будут равны

$$n_{x_K} = \frac{P \cos \alpha \cos \beta - X_a}{mg} \approx \frac{P - X_a}{mg}; \quad (2.70)$$

$$n_{y_K} = \frac{P \sin \alpha + Y_K}{mg} \approx \frac{P\alpha + Y_K}{mg}; \quad (2.71)$$

$$n_{z_K} = \frac{-P \cos \alpha \sin \beta + Z_K}{mg} \approx \frac{-P\beta + Z_K}{mg}. \quad (2.72)$$

Вводя проекции вектора перегрузки в (2.67) ... (2.69), напомним систему уравнений в перегрузках:

$$\begin{aligned} n_{x_K} &= \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} + \sin \theta; \\ n_{y_K} &= \frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta; \\ n_{z_K} &= -\frac{V}{g} \cos \theta \frac{d\Psi}{dt}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\text{Отсюда } \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{V} (n_{y_K} - \cos \theta); \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{g}{V \cos \theta} n_{z_K}. \quad (2.74)$$

Подставив соответственно (2.74) в уравнения для радиусов кривизны, получим

$$n_{y_k} = \frac{1}{r_{y_k}} \frac{V^2}{g} + \cos \theta; \quad (2.75)$$

$$n_{z_k} = \frac{1}{r_{z_k}} \frac{V^2 \cos \theta}{g}. \quad (2.76)$$

2.2.4. Уравнения движения центра масс ракеты с учетом формы Земли и ее вращения

Составим относительно полную систему уравнений в траекторной системе координат. Используя (2.15) и помня, что в неподвижной атмосфере $V_k = V$, напомним

$$m \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj} - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}}. \quad (2.77)$$

Траекторная система координат при совмещении оси OY_k с местной вертикалью, проходящей через центр масс движущегося ЛА, вращается в пространстве относительно координат, связанных с Землей. В качестве последних возьмем нормальную земную систему координат $O_g X_g Y_g Z_g$. В соответствии с (2.16) $\frac{dV_k}{dt} = \frac{d^* V_k}{dt} + \omega \times V_k$, где в рассматриваемом случае ω — вектор угловой скорости вращения траекторных координат относительно земных; $\frac{d^* V_k}{dt}$ — локальная производная вектора V_k в траекторной системе координат. Подставляя последнее равенство в (2.77), получим

$$m \left(\frac{d^* V_k}{dt} + \omega \times V_k \right) = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m F_{pj} - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}}. \quad (2.78)$$

Вектор угловой скорости вращения траекторной системы координат относительно земной определяется векторной суммой угловых скоростей

$$\omega = \dot{\Psi} + \dot{\theta} + \dot{\lambda} + \dot{\phi}_{\text{гд}}, \quad (2.79)$$

где $\dot{\lambda}$ и $\dot{\phi}_{\text{гд}}$ — векторы угловых скоростей изменения долготы и широты, определяющих положение центра масс движущегося летательного аппарата в сферических геоцентрических координатах; $\dot{\Psi}$ и $\dot{\theta}$ — векторы производных по времени угла пути и угла наклона траектории.

Связь угловой координаты $\phi_{\text{гд}}$ с осью OY_g для случая, когда плоскость $OX_g Y_g$ нормальных координат проходит через ось вращения Земли, показана на рис. 2.1.

Проекции угловых скоростей на траекторные оси координат определим, пользуясь методикой, изложенной в работах [49, 51]. Вектор угловой скорости определится через свои составляющие,

направленные по нормальным осям, следующим образом (см. рис. 2.1):

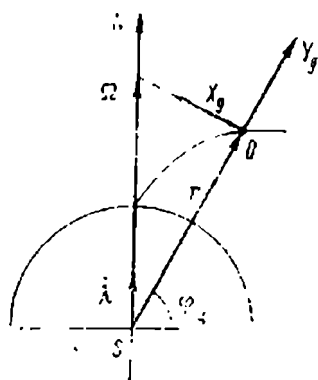
$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda} (\mathbf{x}_g^0 \cos \varphi_{\text{ru}} + \mathbf{y}_g^0 \sin \varphi_{\text{ru}}). \quad (2.80)$$

Имея в виду, что вектор $\dot{\Phi}_{\Gamma\Gamma}$ перпендикулярен плоскости угла $\Phi_{1\Gamma}$, получим

$$\dot{\Psi}_F = Z_F^0 \dot{\Psi}_{FK}. \quad (2.81)$$

Пользуясь матрицей перехода от нормальных земных координат к траекторным, получим векторы $\dot{\lambda}$ и $\dot{\varphi}_{\text{гц}}$ через их составляющие, направленные по осям траекторной системы координат [49]:

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda} [\mathbf{x}_k^0 (\cos \varphi_{ru} \cos \Psi \cos \theta - \sin \varphi_{ru} \sin \theta) + \\ + \mathbf{y}_k^0 (-\cos \varphi_{ru} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{ru} \cos \theta) + \mathbf{z}_k^0 (\cos \varphi_{ru} \sin \Psi)]; \quad (2.82)$$



$$\dot{\Phi}_{\text{ru}} = -\dot{\Phi}_{\text{ru}} [\mathbf{x}_k^0 (-\sin \Psi \cos \theta) + \mathbf{y}_k^0 (\sin \Psi \sin \theta) + \mathbf{z}_k^0 \cos \Psi].$$

Векторы Ψ и Θ получим через их проекции на траекторные оси координат

$$\dot{\Psi} = \dot{\Psi} (\mathbf{x}_K^0 \sin \theta + \mathbf{y}_K^0 \cos \theta); \quad (2.83)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} z_k^0.$$

Рис. 2.1. Схема взаимного расположения осей O_0X_g , O_0Y_g и векторов Ω и $\dot{\lambda}$

$$\begin{aligned}\omega_{x_K} &= \dot{\lambda} (\cos \varphi_{rH} \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_{rH} \sin \theta) + \varphi_{rH} \dot{\sin \Psi} \cos \theta - \dot{\Psi} \sin \theta; \\ \omega_{y_K} &= \dot{\lambda} (-\cos \varphi_{rH} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{rH} \cos \theta) - \\ &\quad - \dot{\varphi}_{rH} \sin \Psi \sin \theta + \dot{\Psi} \cos \theta; \\ \omega_{z_K} &= \dot{\lambda} (\cos \varphi_{rH} \cos \Psi - \dot{\varphi}_{rH} \cos \Psi + \dot{\theta}).\end{aligned}\quad (2.84)$$

Множитель левой части векторного равенства (2.77), определяющий относительное ускорение, может быть представлен в виде скалярного произведения по соответствующим траекторным осям координат

$$\mathbf{a}_R = \frac{d^* \mathbf{V}_R}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_R = \frac{d^* \mathbf{V}_R}{dt} + \begin{vmatrix} \mathbf{x}_R^0 & \mathbf{y}_R^0 & \mathbf{z}_R^0 \\ \omega_{x_K} & \omega_{y_K} & \omega_{z_K} \\ V_{Rx_K} & V_{Ry_K} & V_{Rz_K} \end{vmatrix}. \quad (2.85)$$

Для траекторных осей

$$\frac{d^* V_K}{dt} = \dot{V}_K X_K^0;$$

$$V_{\kappa x_{\kappa}} = V_{\kappa};$$

$$V_{\kappa y_{\kappa}} = V_{\kappa z_{\kappa}} = 0$$

проекции относительного ускорения на соответствующие оси равны

$$a_{\kappa x_{\kappa}} = \dot{V}_{\kappa}; \quad a_{\kappa y_{\kappa}} = V_{\kappa} \omega_{z_{\kappa}};$$

$$a_{\kappa z_{\kappa}} = -V_{\kappa} \omega_{y_{\kappa}}.$$

Подставляя в последние равенства формулы для соответствующих угловых скоростей из (2.84), получим

$$a_{\kappa x_{\kappa}} = \dot{V}_{\kappa};$$

$$a_{\kappa y_{\kappa}} = V_{\kappa} (\dot{\lambda} \cos \varphi_{\Gamma\Omega} \sin \Psi - \dot{\Phi}_{\Gamma\Omega} \cos \Psi + \dot{\Theta});$$
(2.86)

$$a_{\kappa z_{\kappa}} = -V_{\kappa} [-\dot{\lambda} (\cos \varphi_{\Gamma\Omega} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{\Gamma\Omega} \cos \theta) - \\ - \dot{\Phi}_{\Gamma\Omega} \sin \Psi \sin \theta + \dot{\Psi} \cos \theta].$$

Пользуясь рис. 2.1, выразим угловые скорости $\dot{\Phi}_{\Gamma\Omega}$, $\dot{\lambda}$ через проекции относительной скорости V_{κ} на нормальные земные оси координат

$$\dot{\Phi}_{\Gamma\Omega} = \frac{V_{\kappa x_{\kappa}}}{r} = \frac{V_{\kappa}}{r} \cos \theta \cos \Psi;$$
(2.87)

$$\dot{\lambda} = \frac{V_{\kappa z_{\kappa}}}{r \cos \varphi_{\Gamma\Omega}} = -\frac{V_{\kappa}}{r} \frac{\cos \theta \sin \Psi}{\cos \varphi_{\Gamma\Omega}};$$

$$\dot{\Psi} = V \sin \theta.$$

Подставляя последние равенства (2.86), получим левую часть основного уравнения (2.77) в проекциях на траекторные оси координат

$$m \frac{dV_{\kappa x_{\kappa}}}{dt} = m \dot{V}_{\kappa};$$

$$m \frac{dV_{\kappa y_{\kappa}}}{dt} = V_{\kappa} \dot{\Theta} - \frac{V_{\kappa}^2}{r} \cos \theta;$$

$$m \frac{dV_{\kappa z_{\kappa}}}{dt} = -V_{\kappa} \dot{\Psi} \cos \theta + \frac{V_{\kappa}^2}{r} \operatorname{tg} \varphi_{\Gamma\Omega} \sin \Psi \cos^2 \theta. \quad (2.88)$$

Определим проекции слагаемых правой части основного уравнения (2.77) на те же оси. Проекции тяги и управляющих сил определяются системой равенства (2.33) ... (2.35). Составляющие аэродинамических сил определяются системой равенств (2.30) ... (2.32).

Составляющие силы притяжения Земли записывают применительно к сфероидальной форме Земли в функции геоцентрической широты положения ракеты в земных координатах $O_0 X_g Y_g Z_g$. Тягу

и аэродинамические силы определяют по местной высоте. Местный радиус Земли находят, используя зависимость [51]

$$R_3 = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi_{гн}}}, \quad (2.89)$$

где a и e — большая полуось и эксцентриситет земного сфероида. Местную высоту H приближенно определяют по радиусу-вектору r , направленному к центру масс ЛА от центра земного сфероида:

$$H = r - R_3. \quad (2.90)$$

Непосредственное использование формулы (2.89) для решения навигационных задач затруднительно. Без большой погрешности ее можно заменить приближенной зависимостью вида

$$R_3 \approx a\sqrt{1-2\alpha\sin^2\varphi_{гн}}, \quad (2.91)$$

где α — сжатие сфероида.

Проекция переносного и кориолисова ускорений на оси земной геоцентрической системы координат, у которой ось $O_g Y_g$ совпадает с осью вращения Земли, определяется известными формулами

$$a_{\text{пер } x_0} = -x_0\Omega^2; \quad a_{\text{пер } y_0} = 0; \quad a_{\text{пер } z_0} = -z_0\Omega^2; \quad (2.92)$$

$$a_{\text{кор } x_0} = 2\Omega V_{z_0}; \quad a_{\text{кор } y_0} = 0; \quad a_{\text{кор } z_0} = -2\Omega V_{x_0}. \quad (2.93)$$

Определение проекций названных ускорений на траекторные оси координат значительно сложнее.

Ускорение силы земного притяжения и переносное ускорение в формулах (1.29) и (1.33) ... (1.34) объединены в общее ускорение свободного падения, которое представлено в косоугольной системе координат, образованной радиусом-вектором r и вектором Ω . Обозначив в формулах (1.33) и (1.34) слагаемые, определяемые ускорением силы земного тяготения, соответственно через g_{rr} и $g_{r\Omega}$, напишем

$$g_r = g_{rr} + \Omega^2 r; \quad (2.94)$$

$$g_{\Omega} = g_{r\Omega} - \Omega^2 r \sin \varphi_{гн}. \quad (2.95)$$

Для перехода к траекторной системе координат воспользуемся направляющими косинусами, применимыми для определения проекций векторов Ψ и λ на те же оси [см. формулы (2.82) и (2.83)]. Учитывая знаком минус противоположность направлений векторов g_r , g_{Ω} и r , Ω , получим

$$g_{x_k} = -g_r \sin \theta - g_{\Omega} (\cos \varphi_{гн} \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_{гн} \sin \theta);$$

$$g_{y_k} = -g_r \cos \theta - g_{\Omega} (-\cos \varphi_{гн} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{гн} \cos \theta); \quad (2.96)$$

$$g_{z_k} = -g_{\Omega} \cos \varphi_{гн} \sin \Psi.$$

Проекции кориолисовой силы на траекторные оси определим по равенству

$$m a_{\text{кор}} = 2m (\Omega \times V_k) = 2m \begin{vmatrix} x_k^0 & y_k^0 & z_k^0 \\ \Omega_{x_k} & \Omega_{y_k} & \Omega_{z_k} \\ V_k & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.97)$$

Так как направления векторов Ω и $\dot{\lambda}$ совпадают (см. рис. 2.1), то для определения проекций вектора Ω воспользуемся ранее полученной формулой (2.82)

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega [x_k^0 (\cos \varphi_{гц} \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_{гц} \sin \theta) + \\ + y_k^0 (-\cos \varphi_{гц} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{гц} \cos \theta) + z_k^0 (\cos \varphi_{гц} \sin \Psi)]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Проекции $V_{ky_k} = V_{kz_k} = 0$ и, следовательно, проекции кориолисовой силы на траекторные оси координат будут

$$\begin{aligned} m a_{\text{кор } x_k} &= 0; \\ m a_{\text{кор } y_k} &= 2V_k \Omega_{z_k} = 2V_k \Omega \cos \varphi_{гц} \sin \Psi; \\ m a_{\text{кор } z_k} &= -2V_k \Omega (\cos \varphi_{гц} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{гц} \cos \theta). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Для упрощения вида формул объединим составляющие основных действующих сил по траекторным осям, используя (2.30) ... (2.32) и (2.96)

$$\begin{aligned} F_{x_k} &= P_{x_k} + \sum_{j=1}^m X_{pkj} + R_{x_k} + mg_{x_k}; \quad F_{y_k} = P_{y_k} + \sum_{j=1}^m Y_{pkj} + \\ &+ R_{y_k} + mg_{y_k}; \quad F_{z_k} = P_{z_k} + \sum_{j=1}^m Z_{pkj} + R_{z_k} + mg_{z_k}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Используя основную формулу (2.77) и формулы для отдельных слагаемых, напомним уравнения движения центра масс ЛА в проекциях на траекторные оси координат, выделив члены, определяемые вращением Земли и ее кривизной:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{F_{x_k}}{m} - g_r \sin \theta - g_{\Omega} (\cos \varphi_{гц} \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_{гц} \sin \theta); \\ \dot{\theta} &= \frac{F_{y_k}}{mV} - \frac{g_r}{V} \cos \theta - \frac{g_{\Omega}}{V} (-\cos \varphi_{гц} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{гц} \cos \theta) + \\ &+ \frac{V}{r} \cos \theta - 2\Omega \cos \varphi_{гц} \sin \Psi; \\ \dot{\Psi} &= -\frac{F_{z_k}}{mV \cos \theta} + \frac{g_{\Omega}}{V} \frac{\cos \varphi_{гц} \sin \Psi}{\cos \theta} + \frac{V}{r} \operatorname{tg} \varphi_{гц} \sin \Psi \cos \theta + \\ &+ 2\Omega (\cos \varphi_{гц} \cos \Psi \operatorname{tg} \theta - \sin \varphi_{гц}). \end{aligned} \quad (2.101)$$

К написанным трем уравнениям следует добавить уравнения (2.87) и очевидное уравнение $\dot{r} = V \sin \theta$.

Общие уравнения вращательного движения ЛА относительно центра масс не зависят от формы и вращения Земли и имеют вид (2.40), (2.41), (2.42). Однако входящие в названные уравнения проекции вектора угловой скорости вращения ЛА $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на связанные оси координат зависят от угловой скорости вращения Земли Ω . Учитывая совпадения направлений векторов Ω и $\dot{\lambda}$ (см. рис. 2.1), можно написать $\dot{\lambda} = \Omega + \dot{\lambda}$. Формула для определения проекций $\dot{\lambda}$ на нормальные земные оси координат аналогична формуле (2.80)

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda} (x_g^0 \cos \varphi_{гц} + y_g^0 \sin \varphi_{гц}) \quad (2.102)$$

Имея в виду формулу (2.81) и пользуясь матрицей перехода от нормальных земных координат к связанным, выразим векторы $\dot{\lambda}$ и $\varphi_{гц}$ через их составляющие, направленные по осям связанной системы координат:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = \dot{\lambda} [& x^0 (\cos \varphi_{гц} \cos \vartheta \cos \psi + \sin \varphi_{гц} \sin \vartheta) + \\ & + y^0 (-\cos \varphi_{гц} \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \cos \varphi_{гц} \sin \psi \sin \gamma + \\ & + \sin \varphi_{гц} \cos \vartheta \cos \gamma) + z^0 (\cos \varphi_{гц} \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \cos \varphi_{гц} \sin \psi \cos \gamma - \\ & - \sin \varphi_{гц} \cos \vartheta \sin \gamma)]; \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{гц} = -\dot{\varphi}_{гц} [& x^0 (-\sin \psi \cos \vartheta) + y^0 (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) + \\ & + z^0 (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma)]. \end{aligned}$$

Связь между угловыми скоростями $\dot{\Psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\gamma}$ и углами ψ, ϑ и γ определим, пользуясь матрицей перехода (см. [49]), как

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{\psi} (x^0 \sin \vartheta + y^0 \cos \vartheta \cos \gamma - z^0 \cos \vartheta \sin \gamma); \\ \dot{\vartheta} &= \dot{\vartheta} (y^0 \sin \gamma + z^0 \cos \gamma); \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma} x^0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Используя два последних равенства, получим проекции вектора ω на связанные оси координат

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma} + \dot{\lambda} (\cos \varphi_{гц} \cos \psi \cos \vartheta + \sin \varphi_{гц} \sin \vartheta) + \dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\lambda} (-\cos \varphi_{гц} \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \\ &+ \cos \varphi_{гц} \sin \psi \sin \gamma + \sin \varphi_{гц} \cos \vartheta \cos \gamma) - \\ &- \dot{\varphi}_{гц} (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma); \\ \omega_z &= -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma + \dot{\lambda} (\cos \varphi_{гц} \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \\ &+ \cos \varphi_{гц} \sin \psi \cos \gamma - \sin \varphi_{гц} \cos \vartheta \sin \gamma - \\ &- \dot{\varphi}_{гц} (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta)). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Связь между углами $\psi, \vartheta, \gamma, \alpha, \beta, \Psi, \theta, \gamma_a$ не зависит от вращения Земли и может быть определена в виде уравнений, решенных или

относительно тригонометрических функций углов ϑ , ψ и γ , т. е. так, как в равенствах (2.52), (2.53), (2.54), или относительно тригонометрических функций углов θ , Ψ и γ_a [49]:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \cos \beta \times \\ &\quad \times \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \cos \vartheta; \\ \sin \Psi \cos \theta &= \cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta \sin \psi + \sin \alpha \times \\ &\quad \times \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) - \\ &\quad - \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma); \\ \sin \gamma_a \cos \theta &= \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \\ &\quad - (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma) \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Для плоской невращающейся Земли в написанных уравнениях надо принять $\dot{\Omega} = 0$, $\dot{\lambda} = \dot{\varphi}_{гц} = 0$. Тогда, например, уравнения (2.105) обратятся в уравнения (2.46), (2.47) и (2.48). Координаты, определяющие положение центра масс ЛА относительно нормальной земной системы координаты (или стартовой системы координат), находятся из уравнений (2.56), (2.57), (2.58).

При рассмотрении движения в одной плоскости, без учета вращения Земли, положим $\Omega = 0$ и заменим $r = R_3 + H$. Тогда второе уравнение системы (2.101) можно привести к виду

$$mV\dot{\theta} = F_{y_k} - m \left(g_r - \frac{V^2}{R_3 + H} \right) \cos \theta. \quad (2.107)$$

Произведение $m \left(g_r - \frac{V^2}{R_3 + H} \right)$ иногда называют **кажущимся весом**. Приравняв выражение в скобках нулю, можно получить

$$V = \sqrt{g_r(R_3 + H)}. \quad (2.108)$$

Эта скорость при $\theta = 0$ определяет так называемую круговую орбиту и поэтому называется круговой.

2.3. РАЗДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НА ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ, ПРОДОЛЬНОЕ И БОКОВОЕ

2.3.1. Основные предпосылки разделения движения

Разделение пространственного движения на поступательное движение центра масс и вращательное относительно центра масс, на продольное и боковое существенно упрощает системы уравнений внешней баллистики и их решение.

При строгом теоретическом подходе к решению задачи разделение уравнений, описывающих сложное пространственное движение,

на уравнения, описывающие только поступательное движение центра масс или только вращательное движение относительно центра масс, и на уравнения, описывающие отдельное продольное и поперечное движения центра масс, очевидно, невозможно. При движении тел в воздухе основная связь между этими видами движений осуществляется через реактивные и аэродинамические силы и моменты. В зависимости от постановки задачи при составлении уравнений пространственного движения ЛА учитываются инерционные, аэродинамические и реактивные перекрестные связи, а при составлении уравнений пространственного движения в расширенной постановке должны учитываться также перекрестные связи системы управления по каналам тангажа, рыскания, крена и связи, обусловленные появлением управляющих сил.

В уравнениях движения инерциальные перекрестные связи проявляются через члены, содержащие центробежные моменты инерции, и члены, содержащие произведения угловых скоростей. К инерционным перекрестным связям можно отнести также связи, определяемые кориолисовыми силами и моментами, возникающими при перемещении масс относительно колеблющегося корпуса ракеты (см. уравнение (2.7)). Аэродинамические перекрестные связи определяются несимметричностью обтекания ракеты в полете и связанным с этим распределением скоростей по ее внешним обводам [7, 44].

Из выражений для составляющих реактивных и управляющих сил по осям координат также видны перекрестные связи (см. уравнения (2.33) ... (2.35)). Перекрестные связи системы управления заметнее всего проявляются через разность показаний измерительных и исполнительных устройств.

Учет перекрестных связей в системах уравнений, описывающих движение ЛА, усложняется тем, что действующие силы, их моменты инерции определяются относительно разных координатных систем и их связи выражаются сложными функциями, изменяющимися в процессе движения ракет. Для баллистических ракет, как показывают теоретические и экспериментальные исследования, разделение движений на поступательное движение центра масс и вращательное — относительно центра масс и разделение поступательного движения на продольное и боковое позволяют получить практически приемлемую точность расчетов, результаты которых хорошо согласуются с данными опытных стрельб. В написанных выше системах уравнений можно выделить уравнения, определяющие движение центра масс, и уравнения, определяющие движение относительно центра масс. Например, в системе (2.61) левые части уравнений 1, 2, 3, 13, 14, 15 — производные характеристик, определяющих движение центра масс ракеты, уравнения 4 ... 9 содержат величины, определяющие движение относительно центра масс. Тригонометрические уравнения 10—12 определяют дополнительные связи между восемью углами θ , Ψ , γ_a , ϑ , ψ , α , β и γ . Естественно, что раздельное решение возможно только при существенных упрощениях.

2.3.2. Продольное движение

Основные уравнения продольного движения в нормальной земной системе координат имеют вид (рис. 2.2)

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_g &= P \sin \vartheta + Y_a \cos \theta - X_a \sin \theta + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \cos \theta - mg; \\ m\ddot{x}_g &= P \cos \vartheta - Y_a \sin \theta - X_a \cos \theta + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \sin \theta; \\ I_z \ddot{\vartheta} &= M_z + M_{pz}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Здесь, кроме обозначений, соответствующих ГОСТ 20058—80, управляющие силы обозначены $\sum_{j=1}^m Y_{pj} = Y^\delta \delta$.

Рассмотрим горизонтальный полет с малыми значениями углов ϑ , θ и α , положив

$$\sin \vartheta \approx \vartheta; \quad \sin \theta \approx \theta;$$

$$\sin \alpha \approx \alpha;$$

$$\cos \vartheta \approx \cos \theta \approx \cos \alpha \approx 1.$$

Сумму моментов в правой части уравнения вращательного движения представим в зависимости от α , δ и угловых скоростей $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\alpha}$. Ставя в дальнейшем целью решение задачи только стабилизации высоты полета, опустим второе уравнение (2.109), осуществив преобразование первого и третьего уравнений этой системы, в результате получим:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}; \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y};$$

$$\frac{x\dot{\vartheta}}{dt} = \frac{M_z^\alpha \alpha}{I_z} + \frac{M_z^{\omega_z} \dot{\vartheta}}{I_z} + \frac{M_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}}{I_z} + \frac{M_z^\delta \delta}{I_z};$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{P}{m} \vartheta + \frac{Y^\alpha}{m} \alpha + \frac{Y^\delta}{m} \delta - \frac{g}{m} \theta - g. \quad (2.110)$$

При проведении последующих преобразований используем соотношения параметров движения

$$\alpha = \vartheta - \theta; \quad \dot{\alpha} = \dot{\vartheta} - \dot{\theta} \text{ и } \dot{y} \approx V\dot{\theta}.$$

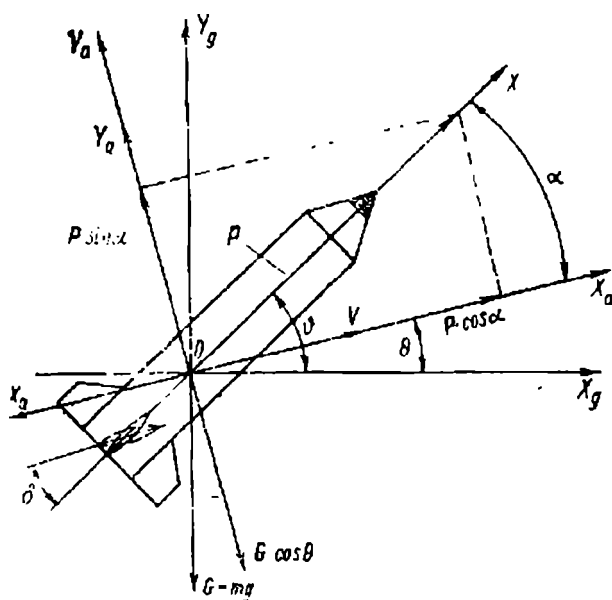


Рис. 2.2. Схема действия сил и углы, определяющие положение ЛА в продольном плоском движении

С учетом их последнее уравнение системы (2.109) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{P}{m} \alpha + \frac{P}{m} \theta + \frac{Y^\alpha}{m} \alpha + \frac{Y^\delta}{m} \delta - \frac{X_a}{m} \theta - g = \\ &= \frac{P + Y^\alpha}{m} \alpha + \frac{P - X_a}{mV} \dot{y} + \frac{Y^\delta}{m} \delta - g.\end{aligned}\quad (2.111)$$

Далее представим

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\theta} - \dot{\theta} = \omega_z - \frac{P + Y^\alpha}{mV} \alpha - \frac{P - X_a}{mV^2} \dot{y} - \frac{Y^\delta}{mV} \delta - \frac{g}{V}.\quad (2.112)$$

Малым слагаемым $(P - X)/mV^2$ можно пренебречь. Поэтому окончательно

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_z - \frac{P + Y^\alpha}{mV} \alpha + \frac{g}{V} - \frac{Y^\delta}{mV} \delta.\quad (2.113)$$

Второе слагаемое системы (2.110) преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{M_z^{\omega_z} + M_z^{\dot{\alpha}}}{I_z} \omega_z + \left[\frac{M_z^\alpha}{I_z} - \frac{M_z^{\dot{\alpha}}(P + Y^\alpha)}{I_z mV} \right] \alpha + \\ &+ \left[\frac{M_z^\delta}{I_z} - \frac{M_z^{\dot{\alpha}} Y^\delta}{I_z mV} \right] \delta + \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{I_z V} g.\end{aligned}\quad (2.114)$$

Запишем систему:

$$dy/dt = \dot{y};$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{P + Y^\alpha}{m} \alpha + \frac{P - X_a}{mV} \dot{y} - \frac{Y^\delta \delta}{m} - g;$$

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_z}{dt} &= \left[\frac{M_z^{\omega_z} + M_z^{\dot{\alpha}}}{I_z} \right] \omega_z + \left[\frac{M_z^\alpha}{I_z} - \frac{M_z^{\dot{\alpha}}(P + Y^\alpha)}{I_z mV} \right] \alpha + \\ &+ \left[\frac{M_z^\delta}{I_z} - \frac{M_z^{\dot{\alpha}} Y^\delta}{I_z mV} \right] \delta + \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{I_z V} g;\end{aligned}\quad (2.115)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_z - \frac{P + Y^\alpha}{mV} \alpha + \frac{g}{V} - \frac{Y^\delta}{mV} \delta$$

Введем следующие обозначения:

$$y = x_1; \dot{y} = x_2; \theta = x_3; \dot{\theta} = \omega_z = x_4;$$

$$\alpha = x_5; \dot{\alpha} = x_6; \delta = u.$$

Тогда, осуществив замену, получим систему уравнений в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2; \\ dx_2/dt &= m^{-1}[(P + Y^\alpha)\alpha + V^{-1}(P - X_\alpha)x_2 + Y^\delta u - mg]; \\ dx_3/dt &= x_4; \\ dx_4/dt &= I_z^{-1}\{[M_z^\alpha + M_z^{\omega_z}]x_4 + [M_z^\alpha - (mV)^{-1}M_z^\alpha(P + Y^\alpha)]x_5 + \\ &\quad + [M_z^\delta - (mV)^{-1}M_z^\alpha Y^\delta]u + V^{-1}M_z^\alpha g\}; \\ dx_5/dt &= x_6 = x_4 - (mV)^{-1}(P + Y^\alpha)x_5 - \\ &\quad - (mV)^{-1}Y^\delta u + V^{-1}g. \end{aligned} \quad (2.116)$$

2.3.3. Боковое движение

В предположении малости углов ψ , β и Ψ (рис. 2.3) запишем, что $\sin \psi \approx \psi$; $\sin \beta \approx \beta$; $\sin \Psi \approx \Psi$, косинусы этих углов примем равными единице, тогда

$$\dot{z} = -V \sin \Psi = -V\Psi, \quad (2.117)$$

откуда

$$\Psi = -\dot{z}/V. \quad (2.118)$$

Уравнения управляемого бокового движения представим в виде

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{P\psi}{m} + \frac{Z^\beta\beta}{m} + \frac{X_\alpha}{m}\Psi + \frac{Z^\delta\delta}{m}; \quad (2.119)$$

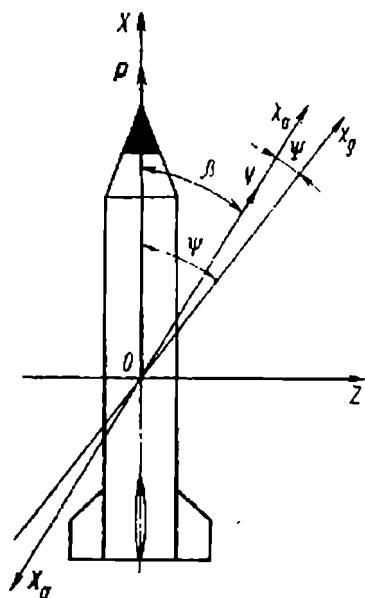


Рис. 2.3. Схема действия сил и углы, определяющие положение ЛА в боковом плоском движении

$$I_y \frac{d^2\psi}{dt^2} = \sum_{i=1}^n M_{y_i} = M_y^\beta\beta + M_y^{\omega_y}\dot{\psi} + M_y^{\dot{\beta}}\dot{\beta} + M_y^\delta\delta. \quad (2.120)$$

Учитывая соотношение углов $\psi = \beta + \Psi$, найдем

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{P - Z^\beta}{m}\psi - \frac{X_\alpha - Z^\beta}{mV}\dot{z} + \frac{Z^\delta}{m}\delta; \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\psi}}{dt} &= \left[\frac{M_y^{\omega_y} + M_y^{\dot{\beta}}}{I_y} \right] \dot{\psi} + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{M_y^{\dot{\beta}}(-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] \psi + \\ &\quad + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y V} + \frac{M_y^{\dot{\beta}}(-X_\alpha + Z^\beta)}{I_y m V^2} \right] \dot{z} + \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{M_y^{\dot{\beta}}Z^\delta}{I_y m V} \right] \delta. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Подставим в полученное выражение (2.122) значение $\dot{z}$ из (2.117)

$$\frac{d\dot{\psi}}{dt} = \frac{d\omega_y}{dt} = \left[\frac{M_y^{\omega_y} + M_y^{\dot{\beta}}}{I_y} \right] \dot{\psi} + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{M_y^{\dot{\beta}}(-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] \psi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y V} + \frac{M_y^\beta (-X_a + Z^\beta)}{I_y m V^2} \right] (-V\Psi) + \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{M_y^\beta Z^\delta}{I_y m V} \right] \delta = \\
& = \left[\frac{M_y^{\omega_y} + M_y^\beta}{I_y} \right] \dot{\psi} + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{M_y^\beta (-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] \dot{\beta} + \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{M_y^\beta Z^\delta}{I_y m V} \right] \dot{\delta},
\end{aligned} \quad (2.123)$$

а в выражении (2.121) заменим $\dot{\psi}$ суммой углов $\dot{\beta} + \dot{\Psi}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= -\frac{P - Z^\beta}{m} \dot{\beta} - \frac{P - Z^\beta}{m} \dot{\Psi} - \frac{X_a - Z^\beta}{mV} \dot{z} + \frac{Z^\delta}{m} \dot{\delta} = \\
&= \frac{-P + Z^\beta}{m} \dot{\beta} + \frac{P - X_a}{mV} \dot{z} + \frac{Z^\delta}{m} \dot{\delta}.
\end{aligned} \quad (2.124)$$

Учитывая далее, что $\dot{\beta} = \dot{\psi} - \dot{\Psi}$, (2.125) получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta}{dt} &= \omega_y + \frac{1}{V} \frac{dz}{dt} = \omega_y + \frac{1}{V} \left[\frac{-P + Z^\beta}{m} \dot{\beta} + \frac{P - X_a}{mV} \dot{z} + \frac{Z^\delta}{m} \dot{\delta} \right] = \\
&= \omega_y + \frac{-P + Z^\beta}{mV} \dot{\beta} + \frac{P - X_a}{mV^2} \dot{z} + \frac{Z^\delta}{mV} \dot{\delta}.
\end{aligned} \quad (2.126)$$

Пренебрегая слагаемым $\dot{z}(P - X_a)/mV^2$ запишем окончательно

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_y + \frac{-P + Z^\beta}{mV} \dot{\beta} + \frac{Z^\delta}{mV} \dot{\delta}. \quad (2.127)$$

Таким образом, система уравнений будет иметь вид

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z}; \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{P - X_a}{mV} \dot{z} - \frac{P - Z^\beta}{m} \dot{\beta} + \frac{Z^\delta}{m} \dot{\delta}; \\
\frac{d\omega_y}{dt} &= \left[\frac{M_y^{\omega_y} + M_y^\beta}{I_y} \right] \omega_y + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{M_y^\beta (-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] \dot{\beta} + \\
&+ \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{M_y^\beta Z^\delta}{I_y m V} \right] \dot{\delta}; \\
\frac{d\beta}{dt} &= \omega_y + \frac{-P + Z^\beta}{mV} \dot{\beta} + \frac{Z^\delta}{mV} \dot{\delta}.
\end{aligned} \quad (2.128)$$

Обозначив $z = x_1$; $\dot{z} = x_2$; $\psi = x_3$; $\dot{\psi} = x_4$; $\beta = x_5$; $\dot{\beta} = x_6$ и $\delta = u$, запишем

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{P - X_a}{mV} x_2 - \frac{P - Z^\beta}{m} x_6 + \frac{Z^\delta}{m} u; \\
\frac{dx_3}{dt} &= x_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_4}{dt} = & \left[\frac{M_y^{\omega_y} + M_y^{\beta}}{I_y} \right] x_4 + \left[\frac{M_y^{\beta}}{I_y} + \frac{M_y^{\beta}(-P + Z^{\beta})}{I_y m V} \right] x_6 + \\ & + \left[\frac{M_y^{\delta}}{I_y} + \frac{M_y^{\beta} Z^{\delta}}{I_y m V} \right] u; \\ \frac{dx_6}{dt} = & x_6 = x_4 + \frac{-P + Z^{\beta}}{m V} \beta + \frac{Z^{\delta}}{m V} u.\end{aligned}\quad (2.129)$$

2.4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ПО ПРОГРАММЕ ЛА И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НАВЕДЕНИЯ

2.4.1. Уравнения управления

Для обеспечения запрограммированного изменения определяющего параметра исполнительный орган системы управления ЛА должен устанавливаться в положение, соответствующее отработке разности между измеренным и программным значениями параметров. Например, при задании программы по углу тангажа, угловой скорости и угловому ускорению уравнения управления для определения отклонения руля тангажа имеет следующий вид:

$$\delta_b = K_{0\theta} \Delta \theta + K_{1\theta} \dot{\theta} + K_{2\theta} \ddot{\theta}, \quad (2.130)$$

где $K_{0\theta}$, $K_{1\theta}$, $K_{2\theta}$ — коэффициенты усиления по каналу тангажа. При управлении по скорости центра масс перемещение исполнительного органа определяется формулой

$$l_V = K_{0V} \Delta V + K_{1V} \dot{V}, \quad (2.131)$$

где $\Delta V = V - V_{\text{пр}}$ ($V_{\text{пр}}$ — программная скорость).

2.4.2. Система уравнений продольного движения ракеты, управляемой по программе угла тангажа на активном участке траектории

При рассмотрении полета с балансировочным углом атаки угол рассогласования по тангажу может быть приближенно связан с углом поворота управляющего органа с помощью первого слагаемого уравнения управления (2.130):

$$\delta_b = K_{0\theta} (\theta - \theta_{\text{пр}}), \quad (2.132)$$

где $K_{0\theta}$ — статический коэффициент усиления.

Запишем балансировочную зависимость между углами δ_b и α , предполагая, что ракета имеет только один управляющий орган, определяющий ее движение в вертикальной плоскости. Тогда

$$M_z + M_{pz} = 0. \quad (2.133)$$

Используя последнее уравнение (1.86) и принимая приближенно $M_{pz} = Y_p^{\delta} \delta_B l_p$, где l_p берется по рис. 2.2, получим

$$0,5\rho V^2 S l m_z^{\alpha} \alpha_B + Y_p^{\delta} \delta_B l_p = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_B = -\frac{2Y_p^{\delta} l_p \delta_B}{\rho V^2 S l m_z^{\alpha}} = -\epsilon_{\theta} \delta_B. \quad (2.134)$$

Знак минус показывает, что при повороте управляющих рулей, расположенных позади центра масс в хвостовой части ракеты в одну сторону, например, по часовой стрелке, ракета повернется в другую (против часовой стрелки).

Используя (2.132), получим

$$\alpha_B = -\epsilon_{\theta} K_{\theta\theta} (\vartheta - \vartheta_{np}) \quad (2.135)$$

или, заменяя в (2.135) $\vartheta = \theta + \alpha_B$,

$$\alpha_B = \frac{\epsilon_{\theta} K_{\theta\theta} (\vartheta_{np} - \theta)}{1 + \epsilon_{\theta} K_{\theta\theta}}. \quad (2.136)$$

Предположим, что вектор тяги направлен по продольной оси ракеты. Кроме того, включим X_p в лобовое сопротивление, а Y_p в подъемную силу. По малости угла атаки примем

$$\sin \alpha = \alpha_B; \quad \cos \alpha = 1; \quad Y_a = Y_a^{\alpha} \alpha_B.$$

Тогда

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P - X - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} &= (P + Y_a^{\alpha}) \alpha_B - mg \cos \theta. \end{aligned}$$

Добавив обычные кинематические соотношения и программное уравнение для угла тангажа, получим систему уравнений, приближенно описывающую продольный управляемый полет ракеты

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P - X_a - mg \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= \frac{\epsilon_{\theta} K_{\theta\theta} (P + Y_a) (\vartheta_{np} - \vartheta)}{mV (1 + \epsilon_{\theta} K_{\theta\theta})} - g \frac{\cos \theta}{V}; \end{aligned} \quad (2.137)$$

$$\vartheta = \theta + \alpha_B = \vartheta_{np} (t);$$

$$\dot{y}_g = V \sin \theta;$$

$$\dot{x}_g = V \cos \theta.$$

Система имеет пять переменных величин $V(t)$, $\theta(t)$, $x_g(t)$, $y_g(t)$, $\alpha_B(t)$ и может быть решена, если заданы программа угла тангажа $\vartheta_{np}(t)$, зависимости $c_x(M)$, ϵ_{θ} , $K_{\theta\theta}$, зависимость, определяющая изменение массы ракеты $m(t)$, и начальные условия полета. Простейшая система уравнений, приближенно описывающая управляемый полет центра масс ракеты, может быть получена из (2.137), если

считать, что ракета управляется идеально и продольная ось совпадает с вектором скорости ($\vartheta \approx \theta$). Тогда

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{P - X_a}{m} - g \sin \theta; \\ \dot{y}_g &= V \sin \theta; \\ \theta(t) &\approx \vartheta_{\text{пр}}(t); \\ \dot{x}_g &= V \cos \theta.\end{aligned}\quad (2.138)$$

Вводя обозначения $\mu = m/m_0$; $D = P/m_0 V$; $E = X_a/m_0 V$, получим

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{\mu} [D - E] V - g \sin \theta; \quad \theta(t) \approx \vartheta_{\text{пр}}(t); \\ \dot{y}_g &= V \sin \theta; \quad \dot{x}_g = V \cos \theta.\end{aligned}\quad (2.139)$$

Здесь три неизвестных $V(t)$, $x_g(t)$, $y_g(t)$, и, если известно $m(t)$, то система решается просто.

2.4.3. Движение управляемой ракеты в боковом направлении

Из обобщенной системы уравнений выделим уравнения, описывающие движение центра масс ракеты в боковом направлении при балансировочном режиме полета

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= -\frac{1}{mV \cos \theta} [-(P_x - X_p)] \sin \beta + (P_z + Z_p) \cos \beta + Z_k; \\ I_y \dot{\omega}_y &= M_y + M_{py}; \quad \psi = \omega_y; \quad \dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \Psi; \\ \sin \psi &= \sin \Psi \cos \beta + \cos \Psi \sin \beta = \sin(\Psi + \beta).\end{aligned}\quad (2.140)$$

Предпоследнее равенство можно записать суммой углов

$$\psi = \Psi + \beta. \quad (2.141)$$

Так как в качестве управляющего параметра принимается угол рыскания ψ , то третье уравнение в системе может быть опущено. Пусть вектор тяги совпадает с продольной осью ракеты, тогда

$P_x - \sum_{j=1}^n X_{pj} = P$. При отсутствии возмущений в боковом направлении траектория ракеты совпадает с плоскостью стрельбы, и если нет каких-либо особых соображений, то программное значение угла рыскания следует принять равным нулю. Угол рассогласования по рысканию свяжем с углом поворота управляющих органов с помощью статического коэффициента усиления $K_{\psi\psi}$ и получим $\delta_n = K_{\psi\psi} \psi$.

Второе уравнение системы (2.140) заменим балансировочной зависимостью, используя которую напомним

$$0,5 \rho V^2 S l m_{\beta}^{\beta} \beta + Z_p^{\delta n} l_{\gamma} \delta_n = 0.$$

Отсюда

$$\beta = -\frac{2 Z_p^{\delta n} l_{\gamma} \delta_n}{\rho V^2 S l m_{\beta}^{\beta}} = -\varepsilon_{\psi} \delta_n. \quad (2.142)$$

Вводя коэффициент усиления и пользуясь (2.141), будем аналогично (2.136) иметь

$$\beta_B = - \frac{\varepsilon_\psi K_{0\psi} \Psi}{1 + \varepsilon_\psi K_{0\psi}}. \quad (2.143)$$

Заменяя в первом уравнении системы (2.140) $\sin \beta$ на β_B и беря $Z_k = Z_a = -Z_a^B \beta_B$, получим уже известную нам вторую формулу из (2.69)

$$\dot{\Psi} = \frac{(P + Z_a^B)}{mV \cos \theta} \beta_B.$$

Заменяя β_B из (2.143), получим систему уравнений, приближенно описывающую сбалансированный полет управляемой ракеты в боковом направлении:

$$\dot{\Psi} = \frac{\varepsilon_\psi K_{0\psi} (P + Z_a^B) (\Psi_{пр} - \Psi)}{mV \cos \theta (1 + \varepsilon_\psi K_{0\psi})}; \quad (2.144)$$

$$\dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \Psi. \quad (2.145)$$

В некоторых случаях, например, при расчете траекторий наведения ракеты на движущуюся цель, когда накладываются ограничения на ориентацию вектора скорости центра масс ракеты в пространстве, углы θ и Ψ могут быть определены помимо написанных уравнений. Тогда производные $\dot{\theta}$ и $\dot{\Psi}$ можно найти непосредственно численным дифференцированием или аналитически.

Балансировочные углы атаки и скольжения приближенно определяются из (2.65) и (2.66) по формулам

$$\alpha_B \approx \frac{m}{P + Y_a^a} (V \dot{\theta} + g \cos \theta); \quad (2.146)$$

$$\beta_B \approx \frac{mV \dot{\Psi} \cos \theta}{P + Z_a^B}. \quad (2.147)$$

Балансировочные углы, как правило, невелики, однако при использовании систем приближенных уравнений следует помнить о тех допущениях, при которых они получены, и по возможности проводить оценку ошибок. Уравнения управляемого полета при выключенном двигателе легко могут быть получены из предыдущих, если в них принять тягу $P = 0$ и $m = \text{const}$.

2.4.4. Программное уравнение угла тангажа

Программное уравнение угла тангажа обычно устанавливает зависимость программного угла тангажа от времени или относительной массы ракеты $\mu = m/m_0$. Вид программного уравнения зависит от назначения ракеты, ее конструктивно-технических параметров и вида старта (вертикальный, наклонный и др.). В программном уравнении должен быть учтен характер ожидаемой траектории —

ее форма, распределение скорости и ускорений (нормальных и тангенциальных) по времени и по пути центра масс ракеты. Необходимо учесть особенности управления — управление только на активном участке или на всей траектории, возможную конструктивную реализацию системы управления — автономное инерциальное, командное и др.

При правильно составленной программе и соответствии ее возможностям системы управления (ограниченность отклонения рулей) характеристики углового движения $\vartheta(t)$, $\dot{\vartheta}(t)$ и $\ddot{\vartheta}(t)$ должны плавно изменяться в процессе полета, чтобы моменты управляющих сил и момент тангажа M_z находились в заданных пределах, определяемых жесткостью конструкций и прочностью ракеты (т. е. и ее весом). Кривизна траектории, устанавливаемая в разумных пределах для данного типа ракет, сказывается в основном на нормальных (поперечных) ускорениях ракеты и мало влияет на тангенциальные (осевые) ускорения. Нормальные ускорения определяются величиной момента тангажа. По (1.77)

$$M_z = q S l m_z^{\alpha} \alpha \approx q S (l_{ц.м} - l_{ц.д}) c_y^{\alpha} \alpha.$$

Расстояние между центром масс и центром давления ракеты, $l_{ц.м} - l_{ц.д}$ почти не зависит от программы полета, также мало зависят от нее (для определенного класса ракет) скоростной напор q и коэффициенты m_z^{α} и c_y^{α} . Определяющее влияние на M_z имеет угол атаки $\alpha = \vartheta - \theta$. Поэтому, чтобы уменьшить M_z и, следовательно, максимально облегчить конструкцию ракеты, необходимо стремиться к программе ее движения с возможно меньшими α , особенно при существенных значениях $q = \rho V^2/2$. Участки траектории с большим q необходимо проходить с нулевыми (или минимальными, близкими к нулевым) углами атаки.

Вид зависимостей $\vartheta(t)$ или $\alpha(t)$ должен учитывать также эффективность работы органов управления. В области трансзвуковых скоростей ($M = 0,8 \dots 1,2$) происходит резкое изменение аэродинамических коэффициентов m_z^{α} и c_y^{α} , что отрицательно сказывается на работе системы управления. Для уменьшения влияния этих изменений m_z^{α} и c_y^{α} необходимо, чтобы ракета проходила указанную область чисел M с нулевыми углами атаки [4].

Отмеченным условиям хорошо удовлетворяет следующая программа для угла α при движении в плотных слоях атмосферы:

$$\alpha = \bar{\alpha} K (K - 2), \quad (2.148)$$

где $K = 2e^{a(t_1-t)}$, $\bar{\alpha}$ — предельное значение угла атаки на дозвуковом участке траектории; t_1 — время от старта до конца вертикального участка полета; a — некоторый постоянный коэффициент, обычно подбираемый для данного класса ракет так, чтобы при достижении $M = 0,7 \dots 0,8$ получать угол атаки $\alpha = 0$.

Важным требованием к программному уравнению является необходимость обеспечения ведения стрельбы в полном диапазоне дальностей от $x_{с\min}$ до $x_{с\max}$. Если диапазон $x_{с\min} - x_{с\max}$ узок

или дальности x_c невелики, то программа $\vartheta(t)$ может быть одна, при широком диапазоне дальностей необходимо иметь несколько программ (желательно как можно меньше). Приборная реализация систем управления должна позволять быстро включать необходимую для заданной дальности программу в процессе подготовки стрельбы.

При составлении программного уравнения предполагается, что продольная ось ракеты идеально выполняет намеченные программой угловые повороты. Типичные графики $\vartheta_{пр}(t)$ и $\alpha_{пр}(t)$ для активного участка траектории при вертикальном старте одноступенчатой баллистической ракеты дальнего действия представлены на рис. 2.4 [4].

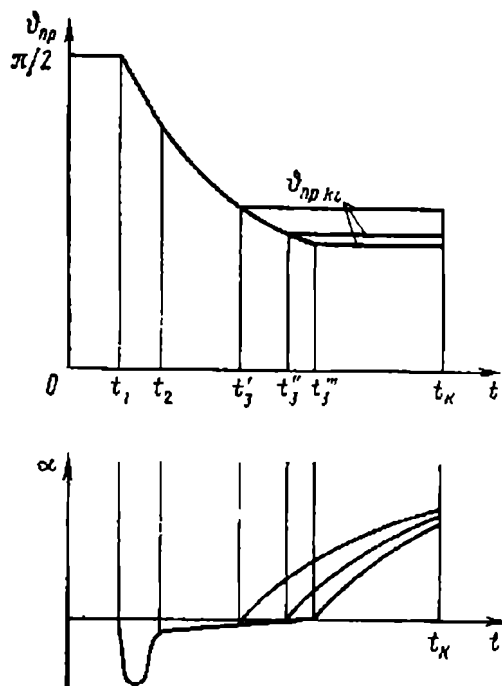


Рис. 2.4. Схема программы угла тангажа для одноступенчатой ракеты и график изменения угла атаки

На первом участке $0 < t < t_1$ полета ракеты $\vartheta_{пр} = 90^\circ = \text{const}$. На втором участке программы ($t_1 < t < t'_3$) угол тангажа плавно изменяется от 90° до значения $\vartheta_{пр kl}$, соответствующего заданной дальности x_c , причем угол α здесь изменяется согласно (2.148); время t_2 характеризует момент достижения чисел $M = 0,7 \dots 0,8$. Третий участок программы ($t_3 < t < t_k$) — это участок движения ракеты в относительно разреженных слоях атмосферы при небольших $q = \rho V^2/2$, когда можно принять $\alpha > 0$, необходимый для обеспечения программы движения с $\vartheta_{пр kl} = \text{const}$. В интервале времени $t'_3 - t'''_3$ происходит переход

программы на прямолинейные участки с углами $\vartheta_{пр kl}$, обеспечивающими диапазон дальностей от $x_{c \min}$ до $x_{c \max}$.

Программа $\vartheta_{пр}(t)$ для криволинейного участка траектории хорошо описывается уравнением

$$\vartheta_{пр}(t) = 90^\circ + (90^\circ - \vartheta_{пр kl})(\bar{t}^2 - 2\bar{t}), \quad (2.149)$$

где $\bar{t} = \frac{t - t_1}{t_3 - t_1}$ — относительное время полета ракеты на втором (криволинейном) участке программы, величина которого изменяется от нуля до единицы.

Для проектных расчетов программа может быть составлена не в виде $\vartheta_{пр}(t)$, а в виде $\vartheta_{пр}(\mu)$. Пусть моменту t_1 конца прямолинейного вертикального полета соответствует относительная масса ракеты μ_1 , а моменту начала прямолинейного наклонного полета — μ_2 . Программу изменения угла θ в процессе полета ракеты на активном криволинейном участке траектории можно представить в виде

$$\vartheta_{пр} = A(\mu - \mu_1)^2 + B(\mu - \mu_2) + C. \quad (2.150)$$

Для того чтобы решение было конкретным, необходимо задаться величинами μ_1 и μ_2 . Можно принять $\mu_1 = 0,95$ и считать, что криволинейный участок программы заканчивается при $\mu_2 = 0,4 \dots 0,5$. Угол $\theta_{прк}$ должен соответствовать углу наибольшей дальности. С учетом сказанного программа изменения угла θ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\theta_{пр} &= 90^\circ \text{ при } 1,00 \geq \mu \geq 0,95; \\ \theta_{пр} &= 4 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{прк} \right) (\mu - 0,45)^2 + \theta_{прк} \text{ при } 0,95 \geq \mu \geq 0,45; \\ \theta_{пр} &= \theta_{прк} \text{ при } 0,45 \geq \mu \geq \mu_k.\end{aligned}\quad (2.151)$$

Для двухступенчатой ракеты примерная программа угла тангажа имеет вид, представленный на рис. 2.5 [4]. Форма траектории полета при работе двигателя первой ступени выбирается по программе получения максимального угла атаки не более $\bar{\alpha}$ в дозвуковой области и получения $\alpha = 0$ в области чисел $M > 0,7 \dots 0,8$. Программное уравнение, определяющее движение второй ступени ракеты, чаще всего может быть взято в виде линейной функции

$$\dot{\theta}_{пр II} = \dot{\theta}_{пр II 0} - \dot{\theta}_{пр} (t - t'''), \quad (2.152)$$

где $\dot{\theta}_{пр II 0}$ — начальное программное значение угла тангажа для второй ступени.

В зависимости от основных конструктивных параметров ракеты значения $\dot{\theta}_{пр II 0}$ и $\dot{\theta}_{пр}$ для обеспечения максимума дальности могут принимать различные значения.

В ряде случаев при выборе наивыгоднейшей программы расчетные значения $\dot{\theta}_{пр I к}$ и $\dot{\theta}_{пр II 0}$ могут не совпадать. В этом случае должен быть обеспечен возможно более быстрый и плавный переход (участок $t' - t'''$ на рис. 2.5) от программы, установленной для первой ступени, к программе, выбранной для второй ступени, при постепенном переходе к прямолинейному участку, на котором завершается работа двигателя второй ступени. Оптимальный угол наклона вектора скорости на прямолинейном участке траектории в конце работы двигателя второй ступени обеспечивает получение дальности, близкой к наибольшей.

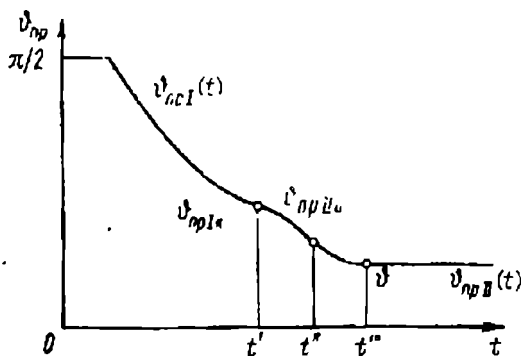


Рис. 2.5. Схема программы угла тангажа для двухступенчатой ракеты

2.4.5. Кажущееся ускорение и кажущаяся скорость управляемой баллистической ракеты

В системах инерциального управления ракетой в качестве управляющей функции используется так называемая **кажущаяся скорость**, или **псевдоскорость**. Непосредственное измерение абсолютной скорости на борту ракеты не представляется возможным,

но она может быть вычислена по показаниям установленной на ракете бортовой аппаратуры путем интегрирования измеренного ускорения по времени.

Для измерения ускорений применяются **акселерометры** — приборы, основанные на использовании принципа инерции. Акселерометры, установленные на борту ракеты, измеряют не абсолютное, а кажущееся ускорение, под которым понимают разность между ускорением относительно инерциальной системы координат и ускорением силы тяжести. Измерители кажущихся ускорений иногда называют **ньютонотрами** [28].

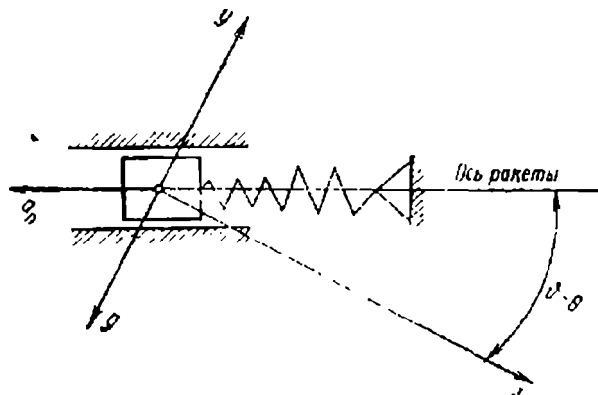


Рис. 2.6. Схема акселерометра для измерения псевдоускорения (кажущегося ускорения) ракеты

Рассмотрим принципиальную схему работы акселерометра. Небольшой груз, подвешенный на пружине, может перемещаться вдоль направляющих (рис. 2.6). Перемещение груза пропорционально ускорению по направлению его движения. Линия, вдоль которой перемещается груз, называется **осью чувствительности акселерометра**. Если принять, что ось чувствительности акселерометра совпадает по направлению с продольной осью ракеты и угол атаки $\alpha = 0$ ($\theta = \vartheta$), то ускорение, измеряемое акселерометром, будет равно разности продольного ускорения движения ракеты dV/dt и проекции ускорения силы тяжести на направление оси ракеты, т. е. можно написать

$$a_n = \frac{dV}{dt} - (-g \sin \theta) = \frac{dV}{dt} + g \sin \theta. \quad (2.153)$$

Ускорение a_n носит название **псевдоускорения (кажущегося ускорения)**, так как согласно формуле (2.153) оно отличается от истинного продольного ускорения ракеты на величину указанной составляющей ускорения силы тяжести. Таким образом, акселерометр, установленный и ориентированный по продольной оси ракеты, все время измеряет псевдоускорение ракеты. Значение псевдоускорения в виде электрического напряжения подводится на вход интегратора, который его интегрирует. В результате интегрирования получаем кажущуюся скорость ракеты V_n :

$$V_n = \int_0^t a_n dt = \int_0^t \frac{dV}{dt} dt + \int_0^t g \sin \theta dt. \quad (2.154)$$

Первое слагаемое в уравнении (2.153) есть истинная скорость движения ракеты. Следовательно, можно написать

$$V_n = V + \int_0^t g \sin \theta dt. \quad (2.155)$$

Таким образом, псевдоскорость (кажущаяся скорость) в момент времени t отличается от истинной скорости на величину $\int_0^t g \sin \theta dt$.

2.4.6. Кинематические уравнения наведения ЛА на перемещающиеся цели

Применительно к траекториям наведения в ряде случаев используют сферическую систему координат, в которой непосредственно определяется наклонная дальность до ракеты r (см. рис. 1.3). Для написания кинематических уравнений в сферической системе используем вывод, приведенный в [50]. Рассмотрим две системы прямоугольных координат — земную $O_0X_0Y_0Z_0$ и подвижную $O'X'_0Y'_0Z'_0$, оси которой остаются параллельными осям первой системы в процессе движения (рис. 2.7). Точку, с которой совпадает центр масс ракеты, обозначим P ; положение ее в подвижной системе координат будет определяться радиусом-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{O_0P} - \vec{O_0O'}.$$

Дифференцируя векторное равенство, получим

$$\dot{\vec{r}}_0 = \vec{V} - \vec{V}_{O'}, \quad (2.156)$$

где $\vec{V}$ — вектор скорости центра масс ракеты; $\vec{V}_{O'}$ — вектор скорости начала подвижной системы координат O' . При $O_0O' = 0$ и $V_{O'} = 0$, $r_{O'} = r$, $\dot{r} = V$. Проектируя последнее равенство на сферические оси координат, получим

$$V_{[r]} = \dot{r}; \quad V_{[q]} = r\dot{q}; \quad V_{[A]} = r\dot{A} \cos q.$$

Пользуясь таблицей косинусов углов между осями земной прямоугольной системы координат и сферической системы координат [49]:

$$\dot{r} = V (\cos \theta \cos \Psi \cos q \cos A + \sin \theta \sin q - \cos \theta \sin \Psi \cos q \sin A);$$

$$r\dot{q} = V (-\cos \theta \cos \Psi \sin q \cos A + \sin \theta \cos q + \cos \theta \sin \Psi \sin q \sin A);$$

$$r\dot{A} \cos q = -V (\cos \theta \cos \Psi \sin A + \cos \theta \sin \Psi \cos A).$$

После преобразования имеем следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V \cos \theta \cos (\Psi + A) \cos q + V \sin \theta \sin q; \\ r\dot{q} &= -V \cos \theta \cos (\Psi + A) \sin q + V \sin \theta \cos q; \\ r\dot{A} \cos q &= -V \cos \theta \sin (\Psi + A). \end{aligned} \quad (2.157)$$

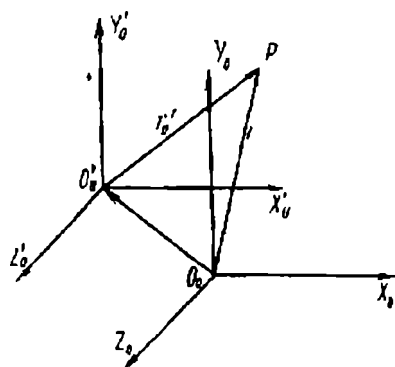


Рис. 2.7. Схема взаимного расположения неподвижной $O_0X_0Y_0Z_0$ и подвижной $O'X'_0Y'_0Z'_0$ систем координат

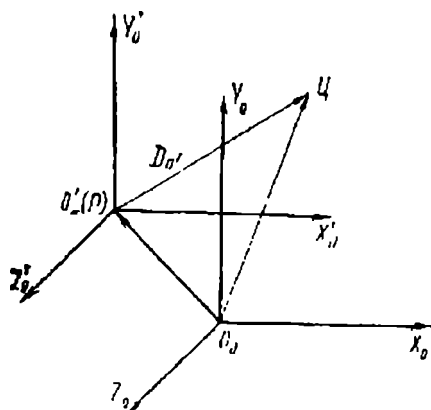


Рис. 2.8. Схема взаимного расположения неподвижной $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ и подвижной $O' X'_0 Y'_0 Z'_0$ систем координат.

Начало подвижной $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ системы координат совпадает с центром масс ЛА

Обращаем внимание на некоторые трудности, возникающие при использовании в расчетах уравнений (2.157) и связанные с отсчетом углов Ψ и A . По правилу механики положительное значение угла Ψ принято отсчитывать в направлении против движения часовой стрелки. Вместе с тем азимут A принято отсчитывать по движению часовой стрелки от направления на север. Если принять для азимута отсчет углов в направлении, противоположном движению часовой стрелки, т. е. в направлении оси $[A_*]$ на рис. 1.3, то в уравнениях (2.157) надо заменить

$$[\Psi + A] \text{ на } [\Psi + (-A_*)] = (\Psi - A_*)$$

и

$$\dot{A} \text{ на } \frac{d}{dt}(-A_*) = -\frac{dA_*}{dt} = -\dot{A}_*.$$

Напомним, что полученная система соответствует неподвижному началу координат O' . При движении начала координат со скоростью $V_{O'}$ кинематические уравнения получим, спроецировав векторное равенство (2.156) на оси сферической системы координат $[r]$, $[q]$ и $[A_*]$:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{O'} &= V \cos \theta \cos [\Psi - A_*] \cos q - V \sin \theta \sin q - \\ &- V_{O'} \cos \theta_{O'} \cos [\Psi_{O'} - A_*] \cos q - V_{O'} \sin \theta_{O'} \sin q; \\ r_{O'} \dot{q} &= -V \cos \theta \cos [\Psi - A_*] \sin q + V \sin \theta \cos q + \\ &+ V_{O'} \cos \theta_{O'} \cos [\Psi_{O'} - A_*] \sin q - V_{O'} \sin \theta_{O'} \cos q; \\ r_{O'} \dot{A}_* \cos q &= V \cos \theta \sin [\Psi - A_*] - V_{O'} \cos \theta_{O'} \sin [\Psi_{O'} - A_*]. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Уравнения (2.157) и (2.158) удобно применять при реализации телеуправления и наведения ракеты соответственно с неподвижной и подвижной станций наведения [12].

Для получения кинематических уравнений, описывающих относительное движение цели и ракеты начало подвижной системы координат помещают в центр масс ракеты. Расстояние между центрами масс ракеты $O' (P)$ и цели (C) по линии визирования обозначим через $D_{O'}$ (рис. 2.8): $D_{O'} = \overline{O_0 C} - \overline{O_0 P}$. Дифференцируя, получим

$$\dot{D}_{O'} = V_c - V. \quad (2.159)$$

Спроецируем последнее равенство на оси сферической системы координат $[D]$, $[q]$ и $[A_*]$, начало которой поместим в центр масс цели:

$$\begin{aligned} D_{O'} &= V_{\alpha} \cos \theta_{\alpha} \cos [\Psi_{\alpha} - A_*] \cos q + V_{\alpha} \sin \theta_{\alpha} \sin q - \\ &\quad - V \cos \theta \cos [\Psi - A_*] \cos q - V \sin \theta \sin q; \\ D_{O'} \dot{q} &= -V_{\alpha} \cos \theta_{\alpha} \cos [\Psi_{\alpha} - A_*] \sin q + V_{\alpha} \sin \theta_{\alpha} \cos q + \\ &\quad + V \cos \theta \cos [\Psi - A_*] \sin q - V \sin \theta \cos q; \\ D_{O'} \dot{A}_* \cos q &= V_{\alpha} \cos \theta_{\alpha} \sin [\Psi_{\alpha} - A_*] - V \cos \theta \sin [\Psi - A_*]. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Полученные уравнения используют при расчете траекторий ракет с самонаведением.

При получении общей системы, описывающей движение ракеты кинематические уравнения выбирают в зависимости от принципа, положенного в основу управления полетом.

2.5. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.5.1. Понятия о возмущенном движении и возмущающих факторах

Математическая модель, описывающая движение ракеты, и результаты расчета по определению характеристик траектории всегда отличаются от характеристик реального полета конкретной ракеты.

Расчетная траектория, полученная при определенных условиях (допущениях) называется **номинальной** или расчетной, соответствующая ей реальная траектория называется **возмущенной**. Причины, определяющие отклонения движения от номинального, принято называть **возмущениями**. Возмущенное движение может быть математически моделировано с теми или иными приближениями. Отклонения можно разделить по характерным признакам на несколько групп.

Первая группа, определяемая отклонениями конструктивных и технологических величин от их номинальных значений. Примерами могут служить:

изменение внешних размеров, в пределах допусков приводящее к некоторым отклонениям аэродинамических и массовых характеристик;

перекос отсеков корпуса ракеты; в частности, известны эффекты «перекоса тяги» и «эксцентриситета тяги», определяемые несоосностью оси сопла с продольной осью ракеты, причем несоосность определяет геометрический эксцентриситет, несимметричность газового потока определяет газодинамический эксцентриситет;

отклонение от расчетного количества заправленного топлива и его единичного импульса;

отклонения от номинала для каждой конкретной ракеты размеров рабочей части сопла, что приводит к изменению секундного расхода рабочего тела.

Ко второй группе следует отнести ошибки, определяемые системой управления. Например, инструментальные ошибки — ошибки отсчета нулей, ошибки ухода гироскопов, ошибки, накапливаемые системой управления в процессе движения ракеты за счет отклонения поля притяжения Земли от расчетного, помех в системе управления и др.

Третья группа ошибок определяется отклонением реальных метеорологических условий от стандартных расчетных (см. разд. 1.4.3).

Четвертая группа ошибок охватывает отклонение начальных условий полета от расчетных. Примером служат ошибки в определении местоположения пусковой установки и цели, ошибки прицеливания ракеты, ошибки установки программного угла тангажа и времени выключения двигателя t_k , ошибки формирования полетного задания и др.

Следует иметь в виду, что полный перечень ошибок и доля каждой из названных групп в общей ошибке точности стрельбы самым существенным образом зависят от используемой системы управления. Возмущающие факторы могут иметь случайный характер.

Учет названных возмущений возможен при использовании двух различных подходов.

При описании сложного процесса полета математическими средствами для упрощения расчетов часть действующих факторов не учитывается, а некоторые из них берутся по номинальным (средним) значениям.

Первый подход определяется количеством учитываемых действующих факторов. Система уравнений, в которой учитывается большое число действующих факторов, может считаться возмущенной по отношению к системе, учитывающей меньшее число факторов. Например, система уравнений, учитывающая действие ветра, может считаться возмущенной по отношению к системе, не учитывающей действие ветра. В данном случае возмущающий фактор — ветер.

При втором подходе предполагается, что интересующие нас факторы учтены в основных дифференциальных уравнениях и необходимо установить влияние их изменений на результаты расчета или реального движения ЛА.

2.5.2. Методы исследования возмущенного движения

При баллистических расчетах соответственно исследование возмущенного движения ракет проводится двумя путями — методом заданных возмущений и методом малых отклонений.

В первом случае, желая установить влияние на траекторию какого-либо фактора, ранее не рассматриваемого, необходимо составить новую систему дифференциальных уравнений, включающую интересующую нас величину. Сравнивая результаты расчета по «невозмущенной» и «возмущенной» системе уравнений определяют влияние возмущающего фактора на результаты расчета для фиксированного момента времени. Также следует поступить, если воз-

мушающий фактор уже учтен в основной системе уравнений, но его изменение существенно. Влияние этого изменения на результаты расчета характеристик движения и элементов траектории следует находить, решая основную систему дифференциальных уравнений при новых измененных данных. Сравнения результатов решений, найденных при изменениях и «нормальных» данных, дает величину искомого отклонения. Описанный путь учета влияния возмущений хотя и является теоретически строгим, однако не всегда используется на практике из-за невозможности получения исчерпывающих данных обо всех возмущающих факторах, например, действии порывов ветра, эксцентриситета тяги и др.

На практике, как правило, приходится встречаться с небольшими отклонениями определяющих параметров от их номинальных значений. В большинстве случаев малые отклонения параметров приводят к малым изменениям элементов траектории. Это позволяет использовать метод малых отклонений, соответствующий *второму случаю*. Сами возмущающие силы и моменты и механизм их действия на ЛА при этом не рассматриваются. Изучается только изменение отклонений характеристик движения уже после действия возмущающих факторов в предположении, что эти отклонения незначительны по величине. Метод малых возмущений позволяет уравнения возмущенного движения ЛА свести к линейным дифференциальным уравнениям (уравнениям в отклонениях), решаемых относительно просто.

2.5.3. Изохронные и полные вариации параметров движения ракеты

Сравним характеристики невозмущенной и возмущенной траекторий.

На рис. 2.9 показаны изменения элементов, траектории, соответствующие моменту конца работы двигателя, вызванные отклонением какого-либо определяющего параметра или группы параметров: δx_k — изменение координаты x_k , вызванное реальными условиями; δy_k — изменение координаты y_k ; δV_k — изменение скорости движения центра масс ЛА; δt_k — изменение времени работы двигателя и т. д.

Изменения элементов могут также определяться для точки, заданной какой-либо характеристикой движения (временем, скоростью, абсциссой, ординатой и пр.), одинаковой для основной и возмущенной траекторий. Например, точке b невозмущенной траектории будет соответствовать точка e траектории возмущенного движения, взятая для того же момента времени t , что и точка b ; при этом возмущениями для траектории в точке b будут величины δx_t , δV_t , δy_t и т. д. При задании условия $y = \text{const}$ точке a соответствует точка c , и для траектории в точке a получим возмущения δx_y , δV_y , $\delta \theta_y$.

Если взять условие $x = \text{const}$, то точке a соответствует точка d , причём изменения элементов траектории в точке a равны δy_x , δV_x , δt_x и т. д.

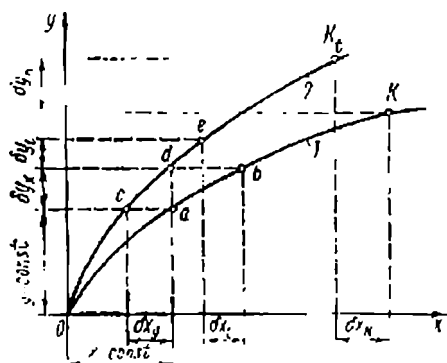


Рис. 2.9. Характер изменения траектории движения центра масс ЛА в зависимости от изменения определяющего параметра:

1 — невозмущенная траектория; 2 — возмущенная траектория

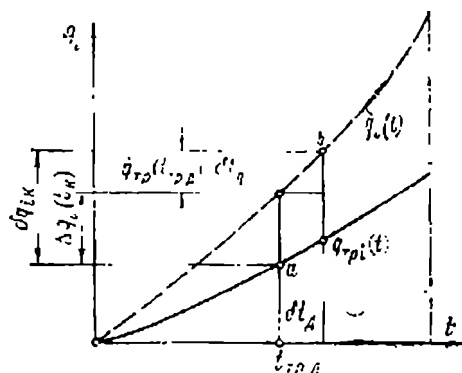


Рис. 2.10. Изохронные и полные вариации движения ЛА

Названные параметры траектории V , x , y и другие являются функциями времени. Обозначим их q_i и построим обобщенные графики для невозмущенной $q_{tr i}(t)$ и возмущенной $q_i(t)$ траектории (рис. 2.10).

Пусть точка a соответствует расчетному времени включения возмущающего импульса, например, включению корректирующего двигателя — $t_{тр.д}$. Разность ординат построенных кривых при фиксированном моменте времени $t_{тр.д}$ определяет так называемое изохронное отклонение $\Delta q_i(t_{tr})$ или **изохронную вариацию** функции $q_i(t_{tr})$.

В действительности момент включения возмущающего импульса не совпадает с расчетным временем t_{tr} и будет отличаться от него на δt_d и соответствовать возмущенной траектории $q_i(t)$, т. е. включение двигателя произойдет в точке b . Кривые $q_{tr}(t)$ и $q_i(t)$ мало отличаются между собой, а время δt_d представляет собой малую величину, поэтому изменение ординаты q_i определяют с небольшой ошибкой как $q_{tr}(t_{тр.д}) \delta t_d$. Полное отклонение от номинальной траектории будет равно:

$$\delta q_{iк} = \Delta q_{iк} + \dot{q}_{tr} \delta(t_{тр.д}), \quad (2.161)$$

где $\Delta q_{iк}$ — изохронная вариация.

Производная определяется дифференцированием рассматриваемой характеристики траектории $q_i(t)$ для заданного момента времени $t_{тр.к}$.

Для основных характеристик движения полные отклонения (вариации) равны:

$$\begin{aligned} \delta V_k &= \Delta V_k + \dot{V}_k \delta t_k; \\ \delta x_k &= \Delta x_k + \dot{x}_k \delta t_k; \\ \delta y_k &= \Delta y_k + \dot{y}_k \delta t_k, \end{aligned} \quad (2.162)$$

где ΔV_k , Δx_k и Δy_k — изохронные вариации в момент времени t_k .

2.5.4. Линеаризация уравнений движения

Математический смысл линеаризации состоит в том, что искомое отклонение элемента находится разложением соответствующей ему функции в ряд Тейлора по степеням отклонения элемента. Напомним формулу разложения в ряд Тейлора для функции многих аргументов $A = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, поскольку к такого рода функциям относятся элементы траекторий ракет. При написании результатов разложения воспользуемся условными обозначениями полных дифференциалов функции многих переменных:

$$d^m A \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_n} d\xi_n \right)^m f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Формула разложения имеет вид

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= f(\xi_{1*} + \delta\xi_1, \dots, \xi_{n*} + \delta\xi_n) = f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + \\ &+ \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta\xi_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta\xi_n \right) f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta\xi_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta\xi_n \right)^2 f(\xi_{1*}, \dots, \xi_{n*}) + R, \end{aligned} \quad (2.163)$$

где ξ_{i*} — расчетные (номинальные) значения определяющих параметров.

Отклонение функции $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, вызванное отклонениями параметров от расчетных значений $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_n$, будет равно

$$\begin{aligned} \delta f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= \\ &= f(\xi_{1*} + \delta\xi_1, \dots, \xi_{n*} + \delta\xi_n) - f(\xi_{1*}, \dots, \xi_{n*}). \end{aligned} \quad (2.164)$$

Первый член разложения (2.163) и второй (2.164) равны, имеют разные знаки и сократятся, поэтому общая формула для отклонения функции $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ может быть получена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= \\ &= \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta\xi_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta\xi_n \right) f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta\xi_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta\xi_n \right)^2 f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + R. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Число членов разложения, учитываемое при расчетах, зависит от требуемой точности определения отклонения. Чаще всего при решении практических задач внешней баллистики учитывают только линейные члены разложения. В этом случае формула (2.165) примет вид

$$\delta f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right)_* \delta\xi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right)_* \delta\xi_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_n} \right)_* \delta\xi_n. \quad (2.166)$$

щенного и возмущенного движений изменяются по времени одинаково: $m(t) = m_*(t)$ и $I_z(t) = I_{z*}(t)$.

Кроме того, будем пренебрегать влиянием отклонения высоты на аэродинамические характеристики и тягу. Для малых значений δy это влияние несущественно, поскольку функции $H(y)$, $\rho(y)$, $\pi(y)$ и $a(y)$, через которые оно проявляется, изменяются медленно.

С учетом этого можно записать

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dV}{dt} - \frac{dV_*}{dt} \right) &= \delta(P \cos \alpha) - \delta X_a - \delta(Q \sin \theta); \\ m \left(V \frac{d\theta}{dt} - V_* \frac{d\theta_*}{dt} \right) &= \delta(P \sin \alpha) + \delta Y_a - \delta(Q \cos \theta); \\ I_z \left(\frac{d\omega_z}{dt} - \frac{d\omega_{z*}}{dt} \right) &= \delta M_z. \end{aligned}$$

При принятых упрощениях отклонения аэродинамических сил и моментов будут зависеть только от двух величин — отклонения скорости полета δV и отклонения угла атаки $\delta \alpha$. Если обозначить

$$X_{a*} = f_1(V_*, \alpha_*) \quad \text{и} \quad X_a = f_1(V, \alpha);$$

$$Y_{a*} = f_2(V_*, \alpha_*) \quad \text{и} \quad Y_a = f_2(V, \alpha);$$

$$M_{z*} = f_3(V_*, \alpha_*) \quad \text{и} \quad M_z = f_3(V, \alpha),$$

то, разлагая последние зависимости в ряд по формуле (2.163), получим с учетом только линейных членов

$$\begin{aligned} \delta X_a &= X_a - X_{a*} = \left(\frac{\partial X_a}{\partial V} \right)_* \delta V + \left(\frac{\partial X_a}{\partial \alpha} \right)_* \delta \alpha; \\ \delta Y_a &= Y_a - Y_{a*} = \left(\frac{\partial Y_a}{\partial V} \right)_* \delta V + \left(\frac{\partial Y_a}{\partial \alpha} \right)_* \delta \alpha; \\ \delta M_z &= M_z - M_{z*} = \left(\frac{\partial M_z}{\partial V} \right)_* \delta V + \left(\frac{\partial M_z}{\partial \alpha} \right)_* \delta \alpha. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Значок $*$ показывает, что данная величина относится к невозмущенному движению в момент, соответствующий началу действия возмущения. Введем сокращенную запись частных производных

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \xi_i} \right)_* = A^{\xi_i}$$

и перепишем формулы (2.171) в таком виде:

$$\delta X_a = X_a^V \delta V + X_a^\alpha \delta \alpha; \quad \delta Y_a = Y_a^V \delta V + Y_a^\alpha \delta \alpha; \quad \delta M_z = M_z^V \delta V + M_z^\alpha \delta \alpha.$$

Подробным же образом найдем отклонения для членов, содержащих тягу P :

$$\delta(P \sin \alpha) = P \cos \alpha_* \delta \alpha; \quad \delta(P \cos \alpha) = -P \sin \alpha_* \delta \alpha.$$

Считая вес ракеты Q на участке возмущения постоянным, получим $\delta(Q \sin \theta) = Q \cos \theta_* \delta \theta$; $\delta(Q \cos \theta) = -Q \sin \theta_* \delta \theta$. Имея

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} - \frac{dV_*}{dt} &= \frac{d}{dt} \delta V, \\ V \frac{d\theta}{dt} - V_* \frac{d\theta_*}{dt} &= V_* \frac{d}{dt} \delta \theta + \delta V \frac{d\theta_*}{dt} + \delta V \frac{d}{dt} \delta \theta \approx V_* \frac{d}{dt} \delta \theta \end{aligned}$$

(без учета членов второго порядка малости);

$$\frac{d\omega_a}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}; \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \frac{d^2\vartheta_*}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\delta\vartheta \quad \text{и} \quad \delta\vartheta = \delta\vartheta - \delta\alpha,$$

а также, принимая ввиду малости угла α_* , что $\sin \alpha_* \approx \alpha_*$ и $\cos \alpha_* \approx 1$, получим следующую систему линеаризованных уравнений:

$$\begin{aligned} m \frac{d\delta V}{dt} &= -X_a^V \delta V - (P\alpha_* + X_a^\alpha - Q \cos \theta_*) \delta\alpha - Q \cos \theta_* \delta\vartheta; \\ mV \left(\frac{d\delta\vartheta}{dt} - \frac{d\delta\alpha}{dt} \right) &= \\ &= Y_a^V \delta V + (P + Y_a^\alpha - Q \sin \theta_*) \delta\alpha - Q \sin \theta_* \delta\vartheta; \\ I_z \frac{d^2\delta\vartheta}{dt^2} &= M_z^V \delta V - M_z^\alpha \delta\alpha. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Эта система состоит из линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися известными функциями времени. Результаты линеаризации более сложной системы приведены в работе [20].

Для определения отклонений характеристик возмущенного движения от невозмущенного на основе второго подхода, необходимо в основную систему уравнений (например, (2.61)) добавить члены, учитывающие возмущающие факторы вида X_{Ba} ; Y_{Ba} ; Z_{Ba} ; M_{yB} ; M_{zB} и найти параметры движения ЛА по возмущенной траектории.

Общая система нелинейных дифференциальных уравнений пространственного движения рассматриваемого класса ракет (2.61) в результате ее линеаризации и упрощений распадается на две независимые системы линейных дифференциальных уравнений движения в отклонениях, причем одна из этих систем описывает продольное возмущенное движение ракеты, происходящее в плоскости $OX_g Y_g$, а другая — боковое возмущенное движение в плоскости $OX_g Z_g$.

Очевидно, что две независимые системы линейных уравнений могут быть решены значительно проще, чем единая исходная система из нелинейных дифференциальных уравнений и геометрических соотношений, особенно если будут использованы ЭВМ. Однако ясно, что простота решения достигается в ущерб его точности. Следовательно, при использовании метода линеаризации уравнений движения, в основе которого лежит условие достаточной малости возмущений, необходимо знать, какова точность получаемых расчетов результатов, или, иначе, какими пределами должны быть ограничены исследуемые возмущения, чтобы ошибки расчета по уравнениям в отклонениях не превосходили допустимых. Исчерпывающий ответ на этот вопрос может быть получен путем сравнения результатов приближенного и точного решений, однако из-за уже отмеченной трудоемкости последнего такой метод оценки точности не имеет широкого применения.

Поэтому часто используют менее строгие, но более простые косвенные или приближенные, методы оценки погрешностей [20].

При получении приведенных выше линеаризованных уравнений основные действующие факторы — тяга, аэродинамические характеристики и другие, были представлены в обобщенном виде без анализа влияния факторов более низкого уровня, например, изменения единичного импульса тяги, плотности среды и др. Учитывая сложность задачи, в качестве примера получим дифференциальные уравнения в отклонениях для активного неуправляемого участка траектории ракет, используя в качестве основной упрощенную систему уравнений;

$$\dot{V} = \frac{P - X_a}{m} - g \sin \theta; \quad \dot{\theta} = \frac{-g \cos \theta}{V}; \quad \dot{y} = V \sin \theta; \quad \dot{x} = V \cos \theta. \quad (2.173)$$

Обозначим правую часть первого уравнения через a_V и раскроем входящие в нее величины. Примем, что c_x является функцией только числа M и не изменяется с высотой. Будем считать также, что для данной расчетной точки траектории изменение тяги не зависит от изменения высоты y :

$$a_V = \frac{1}{m_0 - |\dot{m}|t} \left[|\dot{m}| I_{\text{ед}} g - \frac{S \rho V^2}{2} c_{x_a}(M) \right] - g \sin \theta. \quad (2.174)$$

Последнее равенство может быть переписано в виде функциональной зависимости $a_V = f_1(V, \theta, y, I_{\text{ед}}, S, \rho, c_{x_a}(M), m_0, |\dot{m}|)$. Обозначая правую часть второго уравнения через a_θ , запишем функциональную зависимость $a_\theta = f_2(V, \theta)$. Поступая подобным же образом, можем написать для третьего и четвертого уравнений $a_y = f_3(V, \theta)$ и $a_x = f_4(V, \theta)$. Используя формулу линеаризации (2.169), получим систему дифференциальных уравнений в отклонениях

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta V) = & \frac{\partial a_V}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_V}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial a_V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial a_V}{\partial I_{\text{ед}}} \delta I_{\text{ед}} + \frac{\partial a_V}{\partial \rho} \delta \rho + \\ & + \frac{\partial a_V}{\partial c_x} \delta c_{x_a} + \frac{\partial a_V}{\partial m_0} \delta m_0 + \frac{\partial a_V}{\partial |\dot{m}|} \delta |\dot{m}|; \end{aligned} \quad (2.175)$$

$$\frac{d}{dt}(\delta \theta) = \frac{\partial a_\theta}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \delta \theta;$$

$$\frac{d}{dt}(\delta y) = \frac{\partial a_y}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_y}{\partial \theta} \delta \theta;$$

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \frac{\partial a_x}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_x}{\partial \theta} \delta \theta.$$

Нахождение баллистических производных $\partial a_i / \partial a_j$ во многих случаях представляет хотя не сложную, но трудоемкую задачу. Для принятой нами системы получим

$$a_{VV} = \frac{\partial a_V}{\partial V} = - \frac{S \rho V}{m} \left[c_{x_a}(M) + \frac{M}{2} \frac{\partial c_{x_a}(M)}{\partial M} \right];$$

$$\begin{aligned}
a_{V\theta} &= \frac{\partial a_V}{\partial \theta} = -g \cos \theta; & a_{V I_{\text{ед}}} &= \frac{\partial a_V}{\partial I_{\text{ед}}} = \frac{P}{m} \frac{1}{I_{\text{ед}}}; \\
a_{Vy} &= \frac{\partial a_V}{\partial y} = -\frac{1}{m} S \frac{V^2}{2} c_{x_a}(M) \frac{\partial \rho}{\partial y}; \\
a_{V\rho} &= \frac{\partial a_V}{\partial \rho} = -\frac{X_a}{m} \frac{1}{\rho}; & a_{V c_x} &= \frac{\partial a_V}{\partial c_{x_a}} = -\frac{X_a}{m} \frac{1}{c_{x_a}(M)}; \\
a_{V m_0} &= \frac{\partial a_V}{\partial m_0} = -\frac{P - X_a}{m} \frac{1}{m}; & (2.176) \\
a_{V |\dot{m}|} &= \frac{\partial a_V}{\partial |\dot{m}|} = \frac{1}{|\dot{m}|} \left[\frac{P}{m} + \frac{|\dot{m}|}{m} \frac{(P - X_a)}{m} \right]; \\
a_{\theta V} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial V} = \frac{g \cos \theta}{V^2}; & a_{\theta \theta} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} = \frac{g \sin \theta}{V}; \\
a_{yV} &= \frac{\partial a_y}{\partial V} = \sin \theta; & a_{y\theta} &= \frac{\partial a_y}{\partial \theta} = V \cos \theta; \\
a_{xV} &= \frac{\partial a_x}{\partial V} = \cos \theta; & a_{x\theta} &= \frac{\partial a_x}{\partial \theta} = -V \sin \theta.
\end{aligned}$$

После этого систему дифференциальных уравнений в отклонениях запишем в таком виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\delta V) &= a_{VV} \delta V + a_{V\theta} \delta \theta + a_{Vy} \delta y + \\
&+ a_{V I_{\text{ед}}} \delta I_{\text{ед}} + a_{V c_{x_a}} \delta c_{x_a} + a_{V m_0} \delta m_0 + a_{V |\dot{m}|} \delta |\dot{m}|; & (2.177) \\
\frac{d}{dt} (\delta \theta) &= a_{\theta V} \delta V + a_{\theta \theta} \delta \theta; \\
\frac{d}{dt} (\delta y) &= a_{yV} \delta V + a_{y\theta} \delta \theta; \\
\frac{d}{dt} (\delta x) &= a_{xV} \delta V + a_{x\theta} \delta \theta.
\end{aligned}$$

Систему уравнений в отклонениях при независимом переменном t , пригодную для расчета изменения элементов движения и поправочных коэффициентов для пассивных неуправляемых участков траекторий ракет, получим из системы уравнений (2.177). В этом случае масса ракеты постоянна; P , $I_{\text{ед}}$, $|\dot{m}|$ равны нулю. Первое уравнение системы (2.175) можно написать так:

$$\frac{d}{dt} (\delta V) = \frac{\partial a_V}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_V}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial a_V}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial a_V}{\partial c_{x_a}} \delta c_{x_a} + \frac{\partial a_V}{\partial m_0} \delta m_0.$$

Соответственно в формулах коэффициентов (2.176) надо взять $a_{V m_0} = -X_a/m_0^2$ и в первой, третьей, пятой, шестой формулах приравнять

$m = m_0$. В тех же уравнениях и формулах следует сделать замену $m = m_0$. Система дифференциальных уравнений с учетом этого будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta V) &= a_{VV}\delta V + a_{V\theta}\delta\theta + a_{Vy}\delta y + \\ &+ a_{V\rho}\delta\rho + a_{Vc_x}\delta c_x + a_{Vm_0}\delta m_0; \\ \frac{d}{dt}(\delta\theta) &= a_{\theta V}\delta V + a_{\theta\theta}\delta\theta; \\ \frac{d}{dt}(\delta y) &= a_{yV}\delta V + a_{y\theta}\delta\theta; \\ \frac{d}{dt}(\delta x) &= a_{xV}\delta V + a_{x\theta}\delta\theta. \end{aligned} \quad (2.178)$$

2.5.5. Уравнения движения ЛА с учетом упругих колебаний его корпуса

Большинство ракет различных классов представляют собой механические конструкции с большим удлинением и относительно малой изгибной жесткостью. Это приводит к тому, что под действием тяги, сил, создаваемых органами управления, аэродинамических сил в условиях атмосферной турбулентности (порывов ветра), скачкообразного изменения массы, например, при разделении ступеней и других факторов, возникают упругие деформации несущего корпуса. Для ракет с большим удлинением особенно существенное значение имеет момент, пропорциональный тяге основной двигательной установке.

У жидкостных ракет движение жидкости (горючего и окислителя) в топливных баках является источником дополнительных колебательных возмущений корпуса. Как показывают подробные теоретические исследования и результаты экспериментов, частоты колебаний жидкости значительно ниже частоты упругих колебаний корпуса ракеты, поэтому при исследовании упругих колебаний корпуса колебания жидкости обычно не учитывают, а рассматривают отдельно. Взаимодействие колеблющейся жидкости с упругим корпусом составляет предмет самостоятельных сложных исследований и нами здесь не рассматривается [36] [37].

В общей системе сил, действующих в полете на ЛА, дополнительные возмущающие силы, вызванные изгибными деформациями ЛА, являются относительно малыми и не оказывают заметного влияния на поступательное движение центра масс упругой ракеты и в подавляющем большинстве задач внешней баллистики их не учитывают. Скорость движения центра масс определяют предварительно решением системы уравнений движения ракеты как твердого тела.

Для упругого ЛА при записи системы уравнений движения ограничиваются рассмотрением только поперечного движения ракеты, складывающегося из перемещения ракеты вместе с ее центром масс в направлении нормали к оси OX_h траекторной системы координат, из вращательного движения относительно центра масс ЛА и его упругих деформаций. Для этого воспользуемся известной нам системой уравнений движения ЛА в вертикальной плоскости, исключая из него первое уравнение, содержащее в левой части dV_h/dt :

$$\begin{aligned} mV \frac{d\theta}{dt} &= (P + Y_a^\alpha) \alpha - mg \cos \theta + \Delta F_{\nu_k}; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z^{\omega_z} \omega_z + M_z^\alpha \alpha + M_z^{\delta_b} \delta_b + \Delta M_z; \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_z; \quad \alpha = \phi - \theta; \\ \delta &= K_{\phi\phi} (\phi - \phi_{np}) + \Delta \delta_b. \end{aligned} \quad (2.179)$$

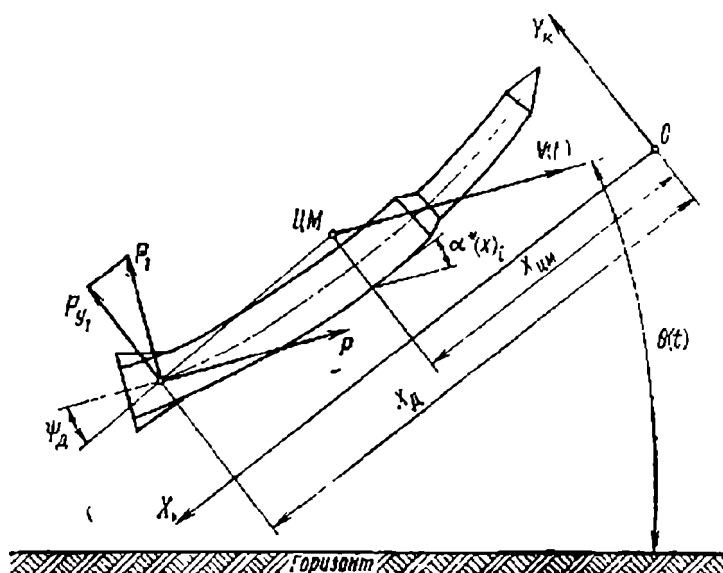


Рис. 2.11. Поперечный изгиб корпуса ракеты в вертикальной плоскости

Правые части написанной системы уравнений должны быть изменены с учетом влияния изгибных колебаний корпуса ракеты. Слагаемые ΔF_{yh} и ΔM_z учитывают соответствующие компоненты поперечной составляющей вектора тяги, определяемые упругими колебаниями корпуса ракеты.

Как известно, для получения уравнений упругих поперечных колебаний ракеты представляют корпус ЛА в виде стержня переменного сечения с переменным распределением массы по его длине. Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t). \quad (2.180)$$

Здесь:

$y(x, t)$ — поперечное смещение стержня в сечении x по координате OY_h (рис. 2.11); $F(x, t)$ — интенсивность внешней поперечной нагрузки; $m(x)$ — переменная распределенная масса, приходящаяся на единицу длины стержня; $EI(x)$ — произведение модуля упругости E на момент инерции $I(x)$ сечения ЛА, определенного относительно продольной оси.

Частное решение уравнения (2.180) определяет вынужденные изгибные колебания ЛА (ракеты), вызванные действием внешних сил

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \zeta_i(t). \quad (2.181)$$

Здесь $\varphi_i(x)$ — функция формы i -й гармоники свободных изгибных колебаний.

Упругие колебания корпуса ракеты определяются функцией $\zeta_i(t)$, т. е. изменением во времени прогиба оси ракеты в рассматриваемом сечении для i -й гармоники вынужденных колебаний. Функция $\zeta_i(t)$ определяется решением линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{\zeta}_i(t) + 2\omega_i \dot{\zeta}_i(t) + \omega_i^2 \zeta_i(t) = \frac{1}{m_{i \text{ пр}}} \int_0^l F(x, t) \varphi_i(x) dx. \quad (2.182)$$

Слагаемое $2\omega_i \dot{\zeta}_i(t)$ учитывает демпфирование изгибных колебаний в предположении, что силы внутреннего трения пропорциональны скоростям деформаций [38] и называется конструкционным демпфированием для i -го тона.

Приведенная обобщенная масса m_l пр определяется равенством

$$m_l \text{ пр} = \int_0^{l_k} \mu(x) \varphi_l^2(x) dx, \quad (2.183)$$

где $\mu(x)$ — «вес» собственных колебаний, определяемый свойством ортогональности.

Переходя от декартовых координат к обобщенным, отметим, что левая часть уравнения (2.182) представляет собой ускорение, следовательно, интеграл правой части есть обобщенная сила, поддерживающая вынужденные упругие колебания корпуса ракеты.

Связь между обобщенными и действительными силами определяется соотношением

$$Q_l = \sum_{k=1}^3 F_k \frac{\partial r_k}{\partial q_l}. \quad (2.184)$$

Здесь $\delta r_k = \delta y$ — виртуальное (возможное) перемещение при вариации обобщенной координаты $\delta q_l = \delta \xi_l$. Следовательно, обобщенная сила определяется, как действительная сила, умноженная на $\varphi_l = \frac{\partial y}{\partial \xi_l}$. Это следует иметь в виду, записывая правые части системы уравнений (2.179).

Определим основные составляющие правой части уравнения (2.182).

Составляющая от тяги на направление изгибного перемещения определяется упругим изгибом продольной оси ракеты в точке приложения тяги P . Если обозначить угол прогиба продольной оси ракеты в месте крепления двигателя ψ_g (см. рис. 2.11), то на направление нормали будет проектироваться сумма сил $P_1 \cos \psi_g$ — $P \sin \psi_g$.

Угол прогиба продольной оси в месте крепления двигателя найдем, дифференцируя (2.181) по координате x_l :

$$\psi_g = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \frac{d\varphi_i(x_g)}{dx}. \quad (2.185)$$

Полагая $\sin \psi_g \approx \psi_g$, $\cos \psi_g \approx 1$, получим слагаемую тяги на направление нормали к оси ракеты, находящейся в невозмущенном состоянии (по рис. 2.11 на направление оси OY_K)

$$P_{y_1} = P_{y_1} \varphi_i(x_g) - P \psi_g \varphi_l(x_g) \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \frac{d\varphi_i(x_g)}{dx}. \quad (2.186)$$

Подъемная сила Y_{ay} определится как функция интегральной величины произведения местного угла атаки $\alpha^*(x)_l$ на соответствующую величину частной производной по углу атаки коэффициента подъемной силы. Местный угол атаки определяют по формуле [46]:

$$\alpha^*(x) = \alpha + \frac{x_{цм} - x}{V} \omega_z - \frac{\dot{y}}{V} + \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (2.187)$$

где α — угол атаки «жесткого» ЛА; ω_z — угловая скорость продольных колебаний; $y(x, t)$ — прогиб упругой линии в процессе изгибных колебаний; $\frac{\partial y}{\partial x}$ — угол поворота упругой линии. Тогда

$$Y_{ay} = S_p \frac{V^2}{2} \int_0^l C_y^2(x) \varphi_l(x) \alpha^*(x) dx \quad (2.188)$$

Складывая найденные величины, получим уравнения (2.182) в развернутом виде.

Для упругой ракеты значение угла отклонения руля при использовании только статического коэффициента усиления $k_{\theta\theta}$, будет иметь вид

$$\delta_b = k_{\theta\theta} \left[\vartheta - \vartheta_{np} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{\partial \varphi_i(x_r)}{\partial x} \right]. \quad (2.189)$$

Здесь x_r — координата установки гироскопического датчика для измерения угла тангажа ракеты.

Теперь перепишем систему уравнений движения (1.179) с учетом действующих возмущений, определенных упругими колебаниями корпуса ЛА. Правая часть второго уравнения (2.179) может быть получена умножением нормальной составляющей всех сил, кроме веса, на координату $(x_{ЦМ} - x_D)$ — плечо приложения суммарной нормальной силы:

$$\begin{aligned} mV \frac{d\theta}{dt} = & P \left[\alpha^*(x_D) - \sum_{i=1}^n \zeta_i(t) \frac{\partial \zeta_i(x_D)}{\partial x} \right] + \\ & + Sp \frac{V^2}{2} \int_0^l c_y^\alpha(x) \alpha^*(x) dx - mg \cos \theta; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} = & P (x_{ЦМ} - x_D) \left[\alpha^*(x_D) - \sum_{i=1}^n \zeta_i(t) \frac{\partial \varphi_i(x_D)}{\partial x} \right] + \\ & + Sp \frac{V^2}{2} \int_0^l c_y^\alpha(x) (x_{ЦМ} - x_D) \alpha^*(x) dx + Y_p^\delta \delta_b; \end{aligned} \quad (2.190)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z;$$

$$\alpha = \vartheta - \theta;$$

$$\delta_b = k_{\theta\theta} \left[\vartheta - \vartheta_{np} + \sum_{i=1}^n \zeta_i(t) \frac{\partial \varphi_i(x_r)}{\partial x} \right];$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\zeta}_i(t) + 2e\omega_i \dot{\zeta}_i(t) + \omega_i^2 \zeta_i(t) = \\ & = P \left[\varphi_i(x_D) \alpha^*(x_D) + \varphi_i(x_D) \sum_{i=1}^n \zeta_i(t) \frac{\partial \zeta_i(x_D)}{\partial x} \right] + \\ & + Sp \frac{V^2}{2} \int_0^l c_y^\alpha(x) \varphi_i(x) \alpha^*(x) dx. \end{aligned}$$

Как видно, даже в рассмотренном относительно простом случае, математическая модель возмущенного движения ЛА с учетом упругих колебаний корпуса оказалась достаточно громоздкой и сложной для исследования. Для упрощения решения поставленной задачи целесообразно уравнения системы (2.190) линеаризовать, используя метод малых отклонений. Коэффициенты линеаризованной системы определяются решением одной из систем уравнений движения, невозмущенных колебаниями ракеты. Для более подробного изучения проблемы в целом необходимо обратиться к специальной литературе, например, [37] [38].

ГЛАВА 3

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАВИГАЦИИ И НАВЕДЕНИЯ

Многообразие принципиальных и конструктивных схем существующих ЛА, отличающихся по назначению, сферам действия, уровню сложности и целевому назначению, приводит к необходимости использования сугубо математически формализованного подхода при формулировке общетеоретических основ рассматриваемых задач. В свою очередь, принятый уровень абстрагирования дает основание считать нецелесообразным сосредоточение внимания на анализе отдельных частных вопросов. Принципиально важным при этом становится выявление структурных взаимосвязей, присущих решению задач навигации и наведения в целом. Наличие указанных взаимосвязей приводит к необходимости поиска путей разделения конечной задачи на совокупность частично или полностью независимых подзадач, решаемых последовательно или параллельно. Такое эквивалентное преобразование исходной постановки задачи может быть осуществлено на основе выполнения условия декомпозируемости (разделимости) многомерных систем с помощью обратной связи по выходу. Из структурного свойства декомпозируемости непосредственно вытекает принцип эквивалентности, базирующийся на теореме разделения. Сущность указанной теоремы заключается в доказательстве, по крайней мере для линейных систем, возможности последовательной оптимизации управления и наблюдения [23, 64].

Применение условия декомпозируемости в рамках решения информационной задачи навигации дает основание для использования редуцированных моделей, описывающих эволюции неполного вектора состояния, что весьма важно, особенно при разработке навигационных алгоритмов для комплексных навигационных систем.

Другим важным свойством динамических систем является свойство управляемости, играющее важную роль в задачах наведения. Ко всему тому «управляемость» обладает свойством дуальности (сопряженности) по отношению к «наблюдаемости». Располагая методами, позволяющими исследовать управляемость системы, можно определить удовлетворяет ли она условиям наблюдаемости.

Хотя в данной главе вопросы наблюдаемости рассматриваются с сугубо теоретических позиций, они, как будет показано позже (см. гл. 6), играют определяющую роль с точки зрения квалифицированного подхода к синтезу навигационных систем. Действительно, только на основании исследования наблюдаемости удастся установить степень совместимости уравнений измерения с уравнениями

движения ЛА, а следовательно, ответить на вопрос о составе требуемых измерителей, достаточных для решения задачи наведения с необходимой точностью. Наконец отметим, что часть задачи навигации, которая предполагает проведение вычислений по измеренным значениям параметров их прогнозируемых значений, базируется на определении переменных состояния ЛА, как в рамках теории линейных, так и нелинейных систем.

3.1. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА ЗАДАЧ НАВИГАЦИИ И НАВЕДЕНИЯ ЛА

3.1.1. Основные понятия и определения

Управляемый полет при наведении ЛА предполагает принудительное изменение характеристик движения его центра масс в пространстве по определенному закону. Техническая реализация этого закона осуществляется с помощью **системы наведения**. Последняя по своему принципу действия может относиться к классу **разомкнутых** или **замкнутых** систем. Отличие замкнутой системы от разомкнутой связано с наличием в ней «обратной связи», обеспечивающей передачу измерений выходной величины на вход устройства управления. Задача системы наведения состоит в том, чтобы возможно точнее воспроизводить на выходе задаваемый закон входного воздействия (задающего воздействия) и возможно полнее подавлять влияние на движение центра масс ЛА возмущающего воздействия. Измеренная выходная величина при этом сравнивается с задающим воздействием (входной величиной) и получаемое рассогласование (ошибка) используется в качестве источника воздействия на систему [50]. Очевидно, что если измерения сопровождаются погрешностями, формируемое воздействие на систему не позволит осуществить точного отслеживания требуемых параметров движения ЛА. С другой стороны, часто прямым измерениям не поддаются те параметры, по величине сравнения которых с задаваемыми, формируют сигнал ошибки.

Именно поэтому обработка результатов измерений относится к ключевым моментам обеспечения высокоточного управляемого движения ЛА.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы извлечь максимум информации из результатов проводимых измерений и наилучшим образом использовать ее при формировании управления. Под **информацией** в данном случае будем понимать совокупность сведений, полученных в результате принятия решения по итогам обработки данных измерений или иначе реализации процедуры **оценивания** (см. рис. 3.1). Понятие «оценивание», таким образом, является наиболее общим термином из числа используемых для того, чтобы охарактеризовать любые преобразования результатов прямых измерений. В подавляющем большинстве задач управления **полный вектор состояния** измерить не представляется возможным. Технически реализуемой оказывается операция измерения лишь некото-

рой, обычно линейной комбинации переменных состояния. Задачу нахождения вектора состояния или определения его аппроксимаций по **наблюдаемой переменной** будем называть **восстановлением**, а получаемое в результате фазовое состояние объекта — **восстановленным**.

В статистической динамике возникает необходимость в установлении по результатам наблюдений, сопровождаемых **шумами**, наиболее правдоподобного состояния системы, подверженной действию случайных возмущений. Это состояние может оцениваться на основании измерений всех или части фазовых переменных на временном интервале (t_0, t) . Операция определения наиболее вероятных значений переменных состояния в момент времени t или выделения полезной информации о сигнале при наличии случайных помех называется **фильтрацией**.

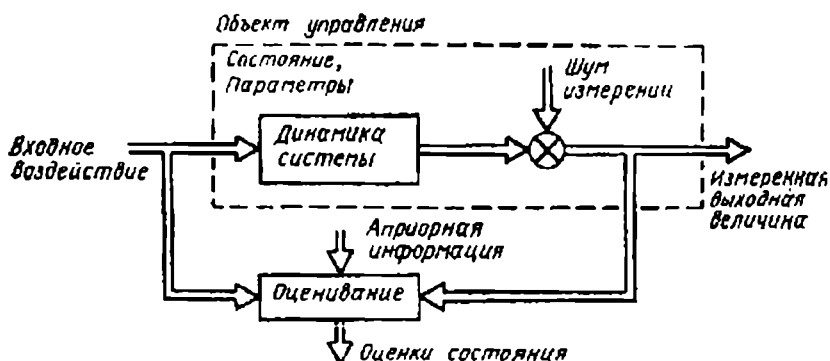


Рис. 3.1. Общая схема процедуры оценивания

К задаче фильтрации примыкает задача **предсказания** или **прогнозирования** (экстраполяции) наиболее вероятного состояния системы на наперед заданный момент $t_1 > t$ при наличии измерений на интервале (t_0, t) . Наконец, третьей частной задачей статистической обработки измерений является задача **сглаживания** и **интерполяции**, т. е. определения наиболее правдоподобных значений переменных состояния, которые объект имел на прошедший момент времени $t_1 < t$. Требование достижения правдоподобных значений переменных состояния предполагает необходимость конкретизации **критерия качества оценки** или иначе **функции потерь**. В каждом частном случае на выбор критерия качества оценивания оказывают существенное влияние цель анализа, возможность численной реализации выбранного критерия и объем необходимой априорной информации. Специфической особенностью обработки измерений в задачах наведения является относительно малый объем располагаемых априорных данных, что заставляет использовать в основном достаточно простые критерии. К числу их прежде всего относятся **квадратичные критерии** (см. гл. 7). Для их применения достаточно иметь информацию о вторых моментных функциях составляющих динамических характеристик, а также вторых начальных и взаимных моментов для шумов. Указанное не означает, конечно, что применение квадратичных критериев является единственно возможным. В прин-

дипе, прикладная теория последовательного оценивания допускает использование множества различных критериев типа $I(x, \hat{x})$, задающих меру отклонения оцененного значения $\hat{x}$ от его истинного значения x . Математическое ожидание функции потерь называют **риском**: «Минимальный риск» $\{\min M [I(x, \hat{x})]\}$ является наиболее общим критерием теории **статистических решений**, объединяющей все многообразие статистических методов интервального и точечного оценивания.

Задача оценивания состояния динамической системы тесно связана с условием восстанавливаемости или более часто используемым понятием наблюдаемости системы. В детерминированной теории с физической точки зрения под наблюдаемой системой понимается система, для которой по измерениям части или всех ее координат, или переменных, связанных с координатами, можно за конечное время определить полностью ее состояние. Различие между понятиями наблюдаемости и восстанавливаемости имеет место только для нестационарных систем. Что же касается стационарных систем, то указанные понятия для них совпадают и поэтому могут использоваться как эквивалентные. Данное обстоятельство имеет вполне объяснимый физический смысл. Действительно, для стационарной системы временной фактор не играет никакой роли, тогда как для нестационарной — он существенен. Отличие же между решением задач наблюдения и восстановления как раз связано с временным фактором. Восстановление состояния осуществляется по данным о реализации входных и выходных переменных, известных на прошедший момент времени, тогда как задача наблюдения трактуется как задача определения состояния по измерениям, проведенным позднее момента, для которого производится оценка состояния

3.1.2. Динамическая система

Управляемый ЛА представляет собой сложную многоуровневую систему. Под **системой** принято понимать совокупность взаимосвязанных элементов, взаимодействующих с внешней средой. Связь с последней осуществляется системой через **входы и выходы**.

Входные воздействия, которые не поддаются измерениям, называются **возмущениями**. В этом случае следует различать понятия «возмущений», используемые в баллистике и теории систем. Если в баллистике под возмущением понималась любая причина, вызывающая отклонение параметров движения ЛА от их расчетных значений, то в теории систем под возмущением (или возмущающими входами) понимаются лишь те воздействия (факторы), которые не могут быть измерены и учтены при формировании управления. Полная совокупность входных воздействий характеризует **состояние** системы в данный и последующие моменты времени. В теории систем входное воздействие $\omega(t)$ принято относить к некоторому определенному множеству их мгновенных значений, обозначаемому, как правило, через Ω , принадлежащему, в свою очередь, m -мерному

пространству R^m . Это множество может быть всем пространством R^m либо его частью, т. е. $\Omega \subset R^m$. Обычно принимается, что Ω — замкнутая область пространства R^m . Ограничения, накладываемые в каждом конкретном случае на $\omega(t)$, диктуются условиями решаемой задачи, характеристиками внешней среды и другими факторами. При этом множество Ω называют **множеством допустимых входных воздействий**.

Имея в виду данное обстоятельство, состояние системы в общем случае можно представить как

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega(t)] \text{ при } \omega \in \Omega, \quad (3.1)$$

где точкой с запятой отделен главный аргумент функции, по которому происходит развитие процесса. Множество значений вектора $x(t)$, характеризующее состояние системы, а следовательно, и ее **траекторию движения** в пространстве называется **пространством состояний**. Его принято обозначать через X . Если далее положить, что все моменты времени, в течение которых происходит развитие процесса, принадлежат множеству T , то выражение для определения состояния системы в более общей форме можно представить как

$$\Phi = \{\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\}, \quad (3.2)$$

которое означает, что на множестве X и множестве, образованном произведением $T \times T \times X \times \Omega$, задано соответствие (правило) φ , такое, что новое множество (представляющее собой произведение множеств) отображается в множество X , образуя множество отображений Φ . Поскольку φ устанавливает функциональную связь упорядоченных четверок в виде $t, t_0, x(t_0), \omega(t)$ с множеством X , содержащим **переменные состояния** $x_i(t)$, то по своему физическому смыслу φ — есть **переходная функции состояния системы**. Для обеспечения однозначности введенного понятия переходная функция состояния должна удовлетворять ряду требований, сводящихся к следующему:

1. Переходная функция состояния должна быть определена для всех $t \geq t_0$, а при $t = t_0$ должно иметь место равенство

$$\varphi[t_0; x(t_0), \omega(t_0)] = x(t_0) \quad (3.3)$$

для всех $t \in T$; $x \in X$; $\omega \in \Omega$.

2. Текущее состояние системы должно быть однозначно определено, если известно ее начальное состояние и входное воздействие на рассматриваемом интервале времени, т. е.

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega(t_0, t)]. \quad (3.4)$$

Систему, отвечающую данному условию, принято называть **динамической**.

3. Одно и то же входное воздействие ω должно определять состояние системы на конце рассматриваемого интервала времени независимо от конкретного времени приложения его внутри этого интервала, т. е.

$$\varphi[t_k; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi[t_k; t_0, \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega], \omega] \quad (3.5)$$

для всех $x \in X$; $\omega \in \Omega$ и $t_0 < t < t_k \in T$.

При известной переходной функции состояния системы и заданном входном воздействии не представляет труда найти **выходную величину** или **вектор выходных переменных системы** $y(t)$. Поскольку $y(t)$ зависит от входного воздействия, запишем

$$y(t) = \psi[t; x(t)], \quad (3.6)$$

где ψ — оператор выхода системы.

Хотя на выходные переменные и не накладываются особые ограничения отображение ψ должно принадлежать некоторому множеству Ψ , которое в общей форме может быть представлено в виде

$$\Psi = \{\psi: T \times X \rightarrow Y\}, \quad (3.7)$$

где Y — множество, которому принадлежат все $y_i(t)$.

Отметим далее, что динамическую систему называют **свободной**, если множество допустимых входных воздействий содержит только один элемент, т. е. если движение системы происходит только в силу наличия начальных отклонений.

Значительное место в теории систем занимают системы, для которых множество моментов времени T представляет собой числовую ось вещественных чисел, а множества допустимых значений входных воздействий и состояний системы есть векторные пространства. Потребуем также, чтобы переходная функция состояния (3.2) была бы непрерывным отображением в любой точке $x \in X$ для каждого $t \in T$. Переходная функция такой системы, называемой **обыкновенной динамической системой**, будет представлять собой решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dt} x(t) = F[t; x(t), \omega(t)] \quad (3.8)$$

с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ для всех $t \in T$, $x \in X$ и $\omega \in \Omega$.

Заметим, что функция $F[t; x(t), \omega(t)]$ в (3.8), определяемая как $\frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0; x(t_0), \omega(t)]$, называется **производящей**. В отдельных случаях отображение (3.7), определяющее «выход» системы, не зависит от t и, следовательно,

$$y(t) = \psi(x). \quad (3.9)$$

Такого рода динамические системы называются **стационарными** или системами с независимыми параметрами.

Наконец, укажем, что динамические системы принято подразделять на системы с **непрерывным** и **дискретным временем** в зависимости от того, является ли T множеством всех вещественных чисел, или множеством только целых чисел.

3.1.3. Управление динамической системой

Если из совокупности входных воздействий выделить те из них, которые предназначаются для изменения состояния системы некоторым предписанным образом, то в отличие от возмущений, они будут называться управлением. Вектор управления обозначают

через $u(t)$. При этом, динамическую систему, подверженную действию управления, принято рассматривать как **объект управления**. Под объектом управления может пониматься и ЛА и корректируемая навигационная система. В теории систем под управлением понимается осуществление целенаправленного действия, в результате которого объект управления совершает изменение своих параметров (в том числе движения) так, что при этом обеспечивается экстремум наперед заданному критерию. Для того чтобы более строго сформулировать **задачу управления**, введем предварительно ряд новых понятий. Прежде всего отметим, что целенаправленное изменение состояния объекта управления приводит и к изменению вектора выходных переменных. Другими словами, на множестве $T \times X \times Y$ может быть выделено подмножество $G_0 \subset T \times X \times Y$, называемое **целевым множеством**, элементами которого являются значения (x, u, t) . По аналогии из множества Ω выделим подмножество U — являющееся **множеством допустимых управлений**.

В качестве количественной оценки эффективности управления в теории систем выступает функционал, называемый **критерием** или **показателем качества управления**. Указанный функционал в общем случае зависит от значений входных и выходных величин, состояния объекта и его свойств, определяемых переходной функцией и оператором выхода системы

$$I = I(u, y, x, \varphi, \psi, t). \quad (3.10)$$

При придании t значения времени достижения t_k , т. е. времени, при котором происходит пересечение множества значений $\varphi[t; t_0, x(t_0), u]$, $\psi[t; x(t)]$ со множеством G_0 и выборе $u(t)$ из множества допустимых управлений, функционал I принимает конкретное числовое значение I_k . Имея в виду сформулированные вводные понятия, можно дать определение **общей задачи управления** как задачи нахождения для каждой из точек (t_0, x_0) , называемых **фазой динамической системы**, допустимого управления $u(t) \in U$, преобразующего фазу таким образом, что

$$\{\varphi[t; t_0, x(t_0), u(t)], \psi[t; x(t)]\} \cap G_0 \quad (3.11)$$

и минимизирующего функционал I на момент времени достижения. Символ $\cap$ в (3.11) обозначает пересечение множеств.

Свойством, определяющим возможности целенаправленного изменения координат, является **управляемость**. Управляемость динамической системы характеризует условия, при которых переходная функция $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ для текущего состояния системы, задаваемого зависимостью (3.4), существовала бы и была отлична от нуля для всех управлений $u(t) \in \Omega_0$. Другими словами, задача определения условий управляемости заключается в нахождении условий, при которых имеет место управление $u(t)$, способное перевести систему из состояния $x(t_0)$ в состояние $x(t_k)$. Нетрудно предположить, что далеко не все из возможных управлений $u(t)$ способны обеспечить полное решение рассматриваемой задачи. Более того, может оказаться, что вообще будет отсутствовать непустое множество Ω_0 , т. е. система будет **неуправляемой**.

Реализация управления (в частности, управления по принципу обратной связи) требует знания текущего состояния системы $x(t)$, определяемого по значениям наблюдаемой выходной переменной $y(t)$. Задачей анализа **наблюдаемости** динамической системы является установление условий, при которых существует отображение $\Phi: Y \rightarrow X$ и оно отлично от нуля для всех $y(t) \in Y$ и $x(t) \in X$.

Процедура «наблюдения» технически реализуется с помощью **канала измерений**, который по аналогии с теорией автоматического регулирования часто называют **обратной связью**. Причем принято различать полную, неполную и стохастическую обратные связи. Наличие полной обратной связи предполагает, что в каждый момент времени t все координаты $x(t)$ можно измерить абсолютно точно, т. е. $y(t) = x(t)$. Сюда же относится и случай, когда в (3.6) размерность вектора выходных (измеряемых) переменных системы больше или равна размерности вектора состояния ($p \geq r$) и для (3.6) существует такое обратное преобразование, что $x(t) = f[y'(t)]$, где $y'(t)$ p -мерный вектор, составленный из компонент $y(t)$. Для **неполной обратной связи** характерно, что в соотношении (3.6) размерность $p < r$ либо, если $p \geq r$, преобразования типа $x(t) = f[y'(t)]$ не существует. При наличии стохастической обратной связи правая часть соотношения (3.6) будет содержать слагаемое в виде p -мерного вектора шумов измерений, характеризующего случайный процесс с известными вероятностными характеристиками.

3.1.4. Наблюдаемость

С математической точки зрения определение условий наблюдаемости динамической системы адекватно исследованию вопроса существования и единственности решения задачи нахождения вектора оцениваемых параметров по вектору измеряемых параметров. Под **условием наблюдаемости** будем понимать условие, при котором единственное решение задачи определения и анализа движения существует. Термин «наблюдаемость» был впервые введен Р. Калманом [34]. Им же был сформулирован в самом общем виде критерий наблюдаемости для линейных систем. Несколько позднее Н. Т. Кузовковым [47] был предложен простой критерий наблюдаемости для стационарных динамических систем, а Ю. М. — Л. Костюковским [42] — разработан локальный критерий наблюдаемости для нелинейных систем.

Следуя подходу, использованному в работе [14], предварительно рассмотрим процедуру определения наблюдаемости, как структурного совокупного свойства модели движения и измеряемых функций на примере простых частных случаев. Пусть движение ЛА описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} x_n(t) = F_n(t; x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (n = 1, \dots, k), \quad (3.12)$$

а измерениям подлежат все компоненты вектора состояния $x(t)$, причем измеренные значения точно соответствуют их истинным значениям, т. е.

$$y_m \equiv x_m, \quad (m = 1, 2, \dots, k). \quad (3.13)$$

В данном случае со всей очевидностью можно утверждать, что в силу тождественности (3.13) выполнение условия наблюдаемости будет зависеть только от модели движения. Исходя из условий теоремы существования единственности решения дифференциальных уравнений движение будет наблюдаемым, если правые части уравнений системы (3.12) и их частные производные $\partial F_n / \partial x_m$ существуют и они непрерывны на интервале наблюдения $[0, T]$. Несколько усложним задачу. Будем считать, что модель движения не задана, а измеряемые параметры являются функциями фазовых координат

$$y_m = \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_k; t), \quad (m = 1, 2, \dots, k). \quad (3.14)$$

В этом случае условие наблюдаемости будет совпадать с условием теоремы существования неявных функций

$$y_m - \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_k; t) = 0, \quad (3.15)$$

оговаривающем возможность выполнения обратного однозначного соответствия между $x(t)$ и $y(t)$.

Для этого достаточно, чтобы матрица

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_k}{\partial x_k} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

была бы невырожденной на интервале $[0, T]$. Напомним, что квадратная матрица A называется **невырожденной (неособенной)**, если она имеет обратную матрицу A^{-1} , определяемую условиями $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица, т. е. скалярная матрица, диагональные элементы которой равны единице. В качестве следующего модельного случая обсудим ситуацию, отвечающую неодинаковой размерности фазового пространства и пространства измерений. Пусть как и ранее движение ЛА описывается системой дифференциальных уравнений (3.12), а измерениям подлежит только один m -й параметр y из числа значений, задаваемых зависимостью (3.14). Тогда измеряемый параметр $y_m = y_m(x_{10}, \dots, x_{k0}; t)$, зависящий от k начальных условий, следует рассматривать как решение обыкновенного дифференциального уравнения k -го порядка:

$$a_0(t) \frac{d^k y_m}{dt^k} + a_1(t) \frac{d^{k-1} y_m}{dt^{k-1}} + \dots + a_k(t) y_m = 0. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.17) путем понижения порядка может быть приведено к системе k уравнений первого порядка, в результате решения которой получим все компоненты фазового вектора $y_m(t)$, т. е.

$\left(y_m, \frac{dy_m}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}y_m}{dt^{k-1}}\right)$. Поскольку исходное дифференциальное уравнение и отвечающая ему система эквивалентны, между их решениями должно существовать взаимно однозначное соответствие, т. е.

$$y_m(t) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \left(y_m, \frac{dy_m}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}y_m}{dt^{k-1}} \right). \quad (3.18)$$

Тогда, уравнения движения и уравнения измерения оказывается возможным заменить некоторой системой функций, построенных следующим образом:

[illegible]

Полученные зависимости представляют собой систему неявных соотношений

$$\frac{d^{n-1}y_m}{dt^{n-1}} - \psi_{m,n}(x_1, \dots, x_k; t) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, k), \quad (3.19)$$

для которой условием наблюдаемости служит условие невырожденности матрицы теперь уже вида

$$\Psi_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{m,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{m,1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{m,1}}{\partial x_h} \\ \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x_h} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

на интервале времени $[0, T]$. Здесь недостающая размерность пространства измерений по сравнению с фазовым пространством состояния компенсируется за счет информации о динамике ЛА, содержащейся в уравнениях его движения.

Рассмотрев частные случаи, перейдем к получению искомого результата для общего случая. Систему модели движения и измеряемых функций представим в виде

$$\frac{d}{dt} x_n(t) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_r; t); \quad (3.21)$$

$$y_m = \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_r, t), \quad (m = 1, \dots, p) \quad (3.22)$$

причем $r-p$ характеризует число неизмеряемых параметров движения.

Для любого измеряемого параметра из числа y_m ($m = 1, \dots, p$) может быть составлена матрица типа (3.20). Объединив p таких матриц, получим матрицу наблюдаемости для вектора-функции $y(t)$

$$\Psi = [\Psi_{m,1}^T, \dots, \Psi_{m,p}^T]^T. \quad (3.23)$$

Теперь представляется возможным сформулировать условие наблюдаемости для системы, задаваемой в форме уравнений (3.21)–(3.22): система будет наблюдаемой на интервале $[0, T]$ тогда, когда правые части уравнений (3.21) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения и ранг матрицы (3.23) равен r . Следует подчеркнуть, что сформулированный критерий характеризует условие локальной наблюдаемости нелинейных систем, т. е. действие его распространяется лишь на некоторую окрестность исследуемой точки фазового пространства.

Имея в виду изложенное, получение условий наблюдаемости для линейных стационарных систем уже не вызывает особых трудностей. Из выражения вектора наблюдаемых координат $y(t) = Cx(t)$

и уравнения состояния $\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t)$ найдем

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t), \\ \dot{y}(t) &= CAx(t) + CBu(t), \\ \ddot{y}(t) &= CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t), \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ характеризуют реализацию вектора $y(t)$ и его производных на интервале наблюдения.

Если теперь составить матрицу $r \times rp$ в виде

$$H = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{r-1} C^T]^T, \quad (3.25)$$

то система будет наблюдаемой тогда, когда в матрице H имеется r линейно независимых столбцов, что эквивалентно тому, что ранг матрицы будет равен размерности вектора состояния, т. е. r . Именно в этом случае матрица H будет невырожденной.

Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий возможность установления условия наблюдаемости для стационарной динамической системы посредством анализа матрицы H , задаваемой зависимостью типа (3.25). Проанализируем два варианта невозмущенных моделей линейных систем, состояние которых отвечает уравнению вида

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

а различие заключается в виде представления вектора наблюдаемых координат $y(t)$, точнее, в содержании матрицы наблюдения C . Для первого варианта $C = [1, 0]$ и, следовательно, измерению

подлежит компонента $x_1(t)$, для второго — $C = [0, 1]$, что соответствует измерению производной от $x_1(t)$, т. е. $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$. Конкретизацией данной схемы может служить, например, сближение ЛА с целью вдоль линии визирования (линии, соединяющей центры масс объектов) при измерении на борту в первом случае величины относительной дальности D , во втором — только скорости сближения $\dot{D}$ без измерения D .

Найдя для первого варианта значения транспонированных матриц

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

вычислим матрицу $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ранг матрицы есть такое число $\mathcal{R}$, что по крайней мере один определитель $\mathcal{R}$ -го порядка, получаемый из этой матрицы при вычеркивании некоторых столбцов и (или) строк, отличен от нуля, а все определители $(\mathcal{R} + 1)$ -го порядка равны нулю. Очевидно, что для рассматриваемого случая $\mathcal{R} = r = 2$, что свидетельствует о полной наблюдаемости системы.

Если ранг квадратной матрицы H равен ее размерности, т. е. если $\mathcal{R} = r$, она является невырожденной, следовательно, ее детерминант не должен равняться нулю ($\det H \neq 0$).

Для второго варианта

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

детерминант ее равен нулю. Поэтому система не является полностью наблюдаемой. Действительно, по наблюдениям только скорости сближения и отсутствию по крайней мере начальной относительной дальности определить текущую величину D не представляется возможным.

Наличие взаимосвязи условий управляемости и наблюдаемости динамических систем также впервые было установлено Р. Калманом. Согласно доказанной им теореме при полной управляемости сопряженной системы исходная система полностью наблюдаема и наоборот.

Данное обстоятельство позволяет при анализе наблюдаемости стационарных динамических систем использовать критерий Н. Т. Кузовкова, а также разработанный им [47] достаточно простой алгоритм, отвечающий применению данного критерия.

Суть условия полной управляемости, отвечающего критерию Н. Т. Кузовкова, заключается в следующем:

система будет полностью управляемой, если имеет место невыполнение тождества

$$C_1 \Delta_1 + C_2 \Delta_2 + \dots + C_r \Delta_r = 0, \quad (3.26)$$

где C_i — произвольно выбираемые постоянные, среди которых хотя бы одна отлична от нуля; Δ_i — определители, отвечающие каждой

из переменных состояния, получаемые из определителя системы заменой столбца, соответствующего рассматриваемой переменной, столбцом из правых частей системы $\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$. Другими словами, если определитель Δ_s представляет собой определитель системы, записанный для скалярных уравнений, полученных переходом от матричного уравнения к скалярной системе в области изображений по Лапласу

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} s - a_{11} & a_{12} & \dots & -a_{1r} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{r1} & a_{r2} & \dots & s - a_{rr} \end{vmatrix}, \quad (3.27)$$

то частные определители Δ_i ($i = 1, \dots, r$) будут иметь вид

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{11}u_1 + \dots + b_{1p}u_p & -a_{12} & \dots & a_{1r} \\ b_{21}u_1 + \dots + b_{2p}u_p & (s - a_{22}) & \dots & -a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1}u_1 + \dots + b_{rp}u_p & -a_{r2} & \dots & (s - a_{rr}) \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & b_{11}u_1 + \dots + b_{1p}u_p \\ -a_{21} & (s - a_{22}) & \dots & b_{21}u_1 + \dots + b_{2p}u_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{r1} & -a_{r2} & \dots & b_{r1}u_1 + \dots + b_{rp}u_p \end{vmatrix}$$

Существенным достоинством подхода, базирующегося на применении критерия Кузовкова, является то, что он позволяет не только ответить на вопрос наблюдаема ли система или нет, но и определить основные направления, следуя которым можно обеспечить выполнение условия наблюдаемости.

3.2. ВОССТАНОВИТЕЛИ СОСТОЯНИЯ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.2.1. Постановка задачи восстановления состояния динамической системы

Итак, при решении задач наведения обычно приходится иметь дело с ситуацией, когда далеко не все компоненты вектора состояния доступны измерениям. Цель анализа заключается в том, чтобы для стационарной системы восстановить вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ или найти замену (оценку) этого вектора по данным о входах $\mathbf{u}(t)$ и выходах $\mathbf{y}(t)$ системы. Оценку вектора состояния системы обозначим $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Близость оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ к истинному значению вектора $\mathbf{x}(t)$ будем трактовать либо как стремление ошибки оценки к нулю, т. е. $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, либо как точное совпадение $\hat{\mathbf{x}}(t)$ с $\mathbf{x}(t)$ в момент $t = t_0$ после наблюдения выходных переменных системы в течение конечного отрезка времени.

3.2.2. Принципы построения асимптотических r -мерных восстановителей состояния линейных стационарных систем

Математической основой построения динамической системы, называемой **восстановителем состояния**, служит наличие априорной информации о взаимосвязи непосредственно измеряемых параметров и определяемых компонент вектора состояния объекта.

Поскольку для стационарной системы матрицы состояния A , управления B и наблюдения C известны, естественной является мысль использовать в качестве такой априорной информации математическую модель системы, формирующую восстанавливаемый

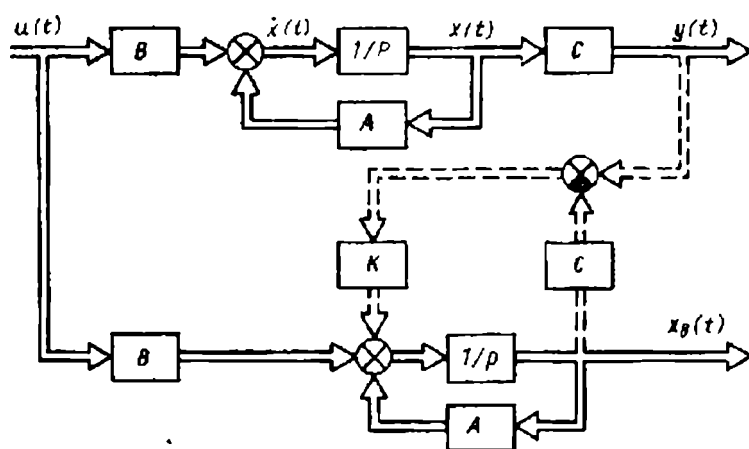


Рис. 3.2. Математический аналог схемы восстановителя фазового состояния динамической системы

вектор состояния $\hat{x}(t)$ по данным о его входе и выходе. Предварительно обсудим недостатки простейшего восстановителя состояния, работающего по информации о входе системы, не корректируемого информацией о ее выходе (рис. 3.2, сплошная линия). При совпадении начальных состояний системы и восстановителя ее состояния и подаче на вход последнего того же воздействия, что и на вход реальной системы, на выходе восстановителя будет иметь место некое значение $x_{\kappa}(t) - \hat{x}(t)$. Вопрос заключается только в том, как обеспечить идентичность начальных состояний. Хотя он в принципе и решается [6], восстановитель, у которого начальное состояние должно вычисляться и фиксироваться в каждый момент времени его функционирования, весьма неудобен в работе. Другим более существенным недостатком рассматриваемого восстановителя является его неустойчивость, под которой понимается следующее. Если матрица A имеет характеристические числа с положительной вещественной частью, то даже незначительное расхождение между $x_{\kappa}(t_0)$ и $\hat{x}(t_0)$ приведет к последующему росту рассогласования, тем большему, чем больше величина положительной вещественной части характеристических чисел A . По этой причине ра-

замкнутые восстановители состояния (без обратной связи) не удовлетворяют предъявляемым к ним требованиям.

Использование информации о выходе системы $y(t)$ дает возможность сформировать обратную связь (см. рис. 3.2, пунктирная линия) для целей повышения точности определения восстанавливаемого состояния. На вход замкнутого восстановителя поступает информация как о входном воздействии, так и о реакции системы на это входное воздействие, т. е. информация о выходе системы. Выход системы $y(t) = Cx(t)$ сравнивается с сигналом восстанавливаемой реакции $y_v(t) = Cx_v(t)$ и их разность используется для формирования корректирующего воздействия. Предварительно полученное значение рассогласования умножается на матрицу коэффициентов усиления K , от величины выбора которой существенно зависят динамические свойства устройства.

Математическая модель рассматриваемого восстановителя состояния линейной стационарной системы $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}x_v(t) = Ax_v(t) - K[y(t) - Cx_v(t)] + Bu(t). \quad (3.29)$$

Элементарные преобразования приводят к следующей форме представления уравнения (3.29):

$$\frac{d}{dt}x_v(t) = [A - KC]x_v(t) + Ky(t) + Bu(t). \quad (3.30)$$

Если потребовать теперь, чтобы все собственные числа матрицы $[A - KC]$ имели отрицательные действительные части меньше величины $-\sigma$, то компоненты вектора ошибки $x_v(t)$ будут стремиться к нулю с градиентом не меньшим, чем $1 - e^{-\sigma t}$. Данное обстоятельство дает основание отнести рассматриваемый восстановитель состояния к числу асимптотических.

Желаемая динамика восстановителя может быть обеспечена только при условии, если стационарная линейная система наблюдаема. Наконец, обратим внимание на то, что размерность данного восстановителя будет равна размерности системы, т. е. будет иметь место r -мерный восстановитель состояния.

3.2.3. Восстановители состояния размерности меньше r

Очевидно, что при разработке восстановителей состояния следует стремиться к понижению их размерности, если, конечно, при этом будут сохраняться или незначительно ухудшаться их свойства в части оценки требуемого количества компонент вектора состояния динамической системы. Восстановители размерности $(r-p)$, где p — число линейно независимых выходов, часто связывают с именем Д. Луенбергера, являющегося одним из основоположников теории наблюдения линейных детерминированных систем.

Краткий обзор ее выводов, касающихся построения $(r-p)$ -мерных восстановителей, начнем с рассмотрения модели восстановителя

состояния однородной стационарной системы $\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t)$ с уравнением наблюдения $y(t) = Cx(t)$. В качестве такой модели выступает векторно-матричное уравнение вида

$$\frac{d}{dt} z(t) = Dz(t) + QCx(t), \quad (3.31)$$

где Q — матрица размерности $q \times p$, D — $(q \times q)$ -мерная матрица. Можно предположить, что существует такая матрица T , размерности $q \times r$, для которой справедливо равенство

$$TA - DT = QC. \quad (3.32)$$

Тогда решение (3.31) может быть представлено в форме

$$z(t) = Tx(t) + e^{Dt} [z(0) - Tx(0)] \quad (3.33)$$

и, следовательно, если D — устойчивая матрица, то $z(t) \rightarrow Tx(t)$ при $t \rightarrow \infty$ для любых $z(0)$ и $x(0)$, причем T является решением уравнения (3.32). Итак, задача заключается в том, чтобы выбрать D и Q такими, при которых решение T имело бы заданный ранг $r = p$. В этом случае p компонент вектора выхода и $r = p$ переменных состояния восстановителя дают r линейно независимых комбинаций переменных состояния системы. Их решение относительно r неизвестных приводит к получению всех компонент восстанавливаемого вектора состояния. При формировании управления $u(t)$ решение уравнения, эквивалентного (3.31), для соответствующей модели системы выражается в форме

$$\frac{d}{dt} z(t) = Dz(t) + QCx(t) + TBu(t) \quad (3.34)$$

при том же условии удовлетворения матрицы T уравнению (3.32).

3.2.4. Теорема разделения и ее применение при синтезе систем наведения

Известно, что в детерминированной теории оптимального управления не делается различий между системой с обратной связью и разомкнутой системой. Это связано с тем, что сигнал ошибки, определяемый в виде разности между текущим и требуемым значениями регулируемого параметра, в детерминированных системах принимается точным неслучайным значением вне зависимости от того, находится ли соответствующая разность при использовании программного или измеренного значения параметра. В этом случае система, оптимальным образом «отреагировавшая» на сигнал ошибки, будет оптимальной. Совсем иначе дело обстоит в стохастических системах или системах со стохастической обратной связью. Наличие помех уже создаст существенные различия между замкнутыми и разомкнутыми системами с точки зрения получения оптимального решения. Успешное решение задачи наведения в этом случае возможно только при совместном определении как оптималь-

ного закона управления, так и оптимального выделения полезного сигнала при измерениях, проводимых на фоне шумов. В общем случае вопросы оптимизации измерительной и формирующей частей системы наведения неразделимы. Однако теории синтеза такого рода оптимальных систем пока еще не создано. Преодоление имеющихся трудностей может быть осуществлено на основе использования **теоремы разделения** и базирующегося на ней **принципа эквивалентности**.

Поскольку указанный результат имеет для решения задач наведения фундаментальное значение, попытаемся разобраться в его сущности. Предварительно получим выражение оптимального закона управления для линейной системы при наличии полной обратной связи. Другими словами, будем считать, что мы располагаем абсолютно точно измеренными детерминированными (нестандартными) компонентами вектора состояния $x(t)$. Известно [23, 32], что линейной оптимальной системе отвечает квадратичный критерий качества, функциональное выражение которого соответствует зависимости (3.10). Для определенности воспользуемся квадратичным критерием смешанного типа:

$$I = \frac{1}{2} x_k^T Q_k x_k + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} [x^T(t) Q_1(t) x(t) + u^T(t) Q_2^{-1}(t) u(t)] dt, \quad (3.35)$$

где Q_k и Q_1 — симметричные, положительно полуопределенные матрицы; Q_2 — положительно определенная матрица.

Первое слагаемое в (3.35) представляет собой терминальную или финитную составляющую критерия, принимающую конкретное значение, соответствующее моменту времени окончания процесса управления $t = t_k$. Интегральное слагаемое характеризует **переходный (текущий) критерий**, для которого экстремум ищется в каждый текущий момент времени t , зависящий от управления $u(t)$ и вида переходной функции состояния φ .

Для нахождения оптимального закона управления, минимизирующего критерий (3.35), необходимо записать функцию Гамильтона, в общем случае представляемую в форме

$$H_\varphi(\varphi, x, u) = \varphi(x, u) + \varphi^T \dot{x}, \quad (3.36)$$

и найти оптимальное значение u из условия экстремума функции $\frac{\partial H_\varphi}{\partial u} = 0$.

Сопряженные (вспомогательные) переменные в (3.36) определяются при этом из дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = -A^T(t) \varphi(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (3.37)$$

где $A(t)$ — матрица состояния объекта.

Для рассматриваемого случая, отвечающего линейной модели системы

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.38)$$

имеем

$$H_\varphi(\varphi, x, u) = (x^T Q_1 x + u^T Q_2^{-1} u) + \varphi^T (Ax + Bu). \quad (3.39)$$

Здесь и далее аргумент t опущен с целью упрощения записи. Вектор вспомогательных переменных, определяемый из сопряженной системы (3.37), запишем в форме

$$\dot{\varphi} = -A^T \varphi - 2Q_1 x \text{ при } \varphi(t_k) = 2Q_k x(t_k). \quad (3.40)$$

Из условия экстремума H_ψ по u имеем

$$\frac{\partial H_\psi}{\partial u} = B^T \psi + 2Q_2^{-1}u = 0, \quad (3.41)$$

откуда

$$u^0 = -\frac{1}{2} Q_2 B^T \psi. \quad (3.42)$$

Подставив полученный результат в исходное уравнение состояния, найдем

$$\frac{d}{dt} x = Ax - \frac{1}{2} B Q_2 B^T \psi; \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.43)$$

В итоге получена система уравнений (3.43) и (3.40), позволяющая установить линейное соотношение между вектором состояния ЛА $x(t)$ и соответствующим вектором сопряженных переменных $\psi(t)$ в форме

$$\psi(t) = 2X(t)x(t), \quad (3.44)$$

где $X(t)$ — некоторое обобщенное матричное преобразование, а $\psi(t)$ и $x(t)$ — векторные функции, удовлетворяющие уравнениям (3.40) и (3.43). Множитель «2» введен в (3.44) для того, чтобы исключить появление дробей при последующей записи полученных соотношений. Продифференцировав по t правую и левую части уравнения (3.44), найдем

$$\dot{\psi} = 2\dot{X}x + 2X\dot{x}. \quad (3.45)$$

Подстановка (3.45) в (3.40) с учетом (3.43) дает после соответствующих преобразований

$$2(\dot{X} + XA + A^T X - XBQ_2 B^T X + Q_1)x = 0. \quad (3.46)$$

В силу того, что требуется найти преобразование $X(t)$, справедливое для любого $x(t)$, условие (3.46) будет удовлетворено, если матрица коэффициентов при x тождественно равна нулю. Это будет иметь место при X , удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = -XA - A^T X - Q_1 - XBQ_2 B^T X, \quad (3.47)$$

называемому матричным уравнением Риккати. Граничные условия для его решения однозначно вытекают из (3.43), (3.40) и (3.45). Учитывая, что $\psi(t_k) = -2Q_k x(t_k)$, получим $X(t_k) = Q_k$. Тогда, имея в виду (3.47), вследствие симметрии Q_k найдем, что матрица $X(t)$ симметрична при всех значениях t . Данное обстоятельство приводит к следующему выражению для оптимального управления:

$$u^0 = -Q_2 B^T X x \quad (3.48)$$

или, обозначив матрицу коэффициентов усиления $Q_2 B^T X$ через K , запишем окончательно

$$u^0 = -Kx. \quad (3.49)$$

Так как Q_2 — положительно определенная матрица, оптимальное управление является единственным из числа возможных.

Теперь перейдем к обсуждению системы со *стохастической обратной связью*. На первый взгляд представляется, что стохастическая модель может быть получена простым добавлением случайной составляющей к правой части детерминированного уравнения состояния системы (3.8). Однако это не так. Действительно, рассмотрим для общности детерминированную модель состояния системы

$$\frac{d}{dt} x(t) = F[t; x(t), \omega^*(t)], \quad (3.50)$$

где $\omega^*(t)$ представляет собой вектор детерминированных входных воздействий, а также «стохастическую» модель

$$\frac{d}{dt} x(t) = F[t; x(t), \omega^*(t)] + \eta(x, t), \quad (3.51)$$

где $\eta(x, t)$ — случайный процесс с заданными свойствами. К числу таких свойств должны быть отнесены: независимость $\eta(t)$ и $\eta(\tau)$ при $t \neq \tau$, равенство нулю его математического ожидания $M[\eta(t)] = 0$, непрерывность и наличие конечной дисперсии. Почему выбраны именно эти свойства? Условие конечной дисперсии вытекает из реальных свойств действующих на ЛА возмущений; непрерывность есть следствие выбора класса модели в виде системы дифференциальных уравнений. Требование равенства нулю математического ожидания не является слишком строгим. Оно не ограничивает общности рассуждений и всегда может быть выполнено за счет выбора функции $F[\cdot]$. Наконец, требование независимости $\eta(t)$ и $\eta(\tau)$ диктуется тем, что в противном случае вероятностное распределение dx/dt будет зависеть не только от текущего состояния (что необходимо для данной модели), но и от его предистории.

При оговоренных условиях интеграл от $\eta(\tau)$ существует, а его математическое ожидание равно нулю, т. е. $M \int \eta(\tau) d\tau = 0$. Существует и средний квадрат производной, который в силу ограниченности дисперсии и независимости $\eta(t)$ и $\eta(\tau)$ будет также равен нулю $M[\eta^2(t)] = 0$ на основании так называемого неравенства Шварца. Следовательно, траектории движения, отвечающие моделям (3.50) и (3.51), полученные в результате интегрирования рассматриваемых уравнений, будут совпадать в среднем квадратичном. Таким образом, модель системы в форме (3.51) не будет удовлетворять стохастической модели состояния с желаемыми статистическими свойствами. Для получения корректной стохастической модели состояния системы с непрерывным временем следует использовать стохастические дифференциальные уравнения. При этом ослабляется требование конечности дисперсии действующего возмущения. Естественно это приводит к снижению уровня адекватности получаемой модели по отношению к реальному процессу, но позволяет упростить процесс исследования. Поскольку $\eta(t)$ в стохастических моделях не имеет конечной дисперсии, то не будет иметь ее и производная dx/dt . Следовательно, ожидать существования процесса dx/dt мы не можем. В связи с этим стохастические дифференциальные уравнения записываются в форме

$$dx = F(x, t) dt + \sigma(x, t) d\eta. \quad (3.52)$$

Векторную функцию $F(x, t)$ при этом называют вектором сноса (коэффициентом сноса для одномерного случая), а матрицу $\sigma(x, t)$ — матрицей диффузии (коэффициентом диффузии). При этом среднее направление траекторий процесса $x(t)$, прошедших в момент t через соответствующую точку $x(t)$, характеризует вектор сноса, а степень разброса случайных траекторий диффузионного процесса («размытость траекторий») определяет матрица диффузии.

Стохастическое дифференциальное уравнение будет называться линейным, если функция F линейна по x и если σ не зависит от x . В канонической векторной форме это уравнение, являющееся стохастическим эквивалентом модели (3.38), имеет вид

$$dx = [Ax + Bu] dt + d\eta, \quad (3.53)$$

где $\eta(t)$ — r -мерный винеровский процесс с нулевым средним значением и ковариацией приращения $R_\eta dt$, причем R_η — симметричная и неотрицательно определенная

ковариационная матрица, элементы которой могут быть кусочно-непрерывными функциями времени.

Решение (3.53) приведет к получению множества траекторий, исходящих из начальной фазы $x(t_0)$.

Критерий (3.35) для рассматриваемого случая будет теперь также являться стохастической переменной, по которой непосредственно нельзя определить, что понимается под ее минимальным значением. В этом смысле от критерия в форме

(3.35) здесь целесообразно перейти к его математическому ожиданию, т. е. записать

$$M[I] = M \left\{ \frac{1}{2} x_k^T Q_k x_k + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} [x^T(t) Q_1(t) x(t) + u^T(t) Q_2^{-1}(t) u(t)] dt \right\}. \quad (3.54)$$

В отличие от детерминированного случая, для которого оптимальное управление u^0 было определено в функции точно известного состояния $x(t)$, в случае стохастической обратной связи $u^0(t)$ уже является функцией $Y_t = \{y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}$. Причем условное распределение $x(t)$ относительно Y_t будем считать нормальным, характеризуемым средним значением $\hat{x}(t)$ и ковариационной матрицей $P(t)$.

Покажем, что терминальный член (3.54) может быть записан при этом в виде

$$x_k^T Q_k x_k = x^T(t_0) X(t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} d(x^T X x). \quad (3.55)$$

Данная форма записи вполне справедлива, учитывая что $X(t_k) = Q_k$, а

$$x_k^T X_k x_k = x^T(t_0) X(t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} d(x^T X x). \quad (3.56)$$

Так как $x(t)$ представляет собой решение стохастического дифференциального уравнения (3.53), дифференциал под знаком интеграла не подчиняется правилам обычного исчисления. Значение его, полученное в ряде источников (см., например, [63], стр. 313), приведем здесь без вывода

$$\begin{aligned} d(x^T X x) = & [-u^T Q_2^{-1} u - x^T Q_1 x + \\ & + (u + Q_2 B^T X x)^T Q_2^{-1} (u + Q_2 B^T X x)] dt + \text{Sp } R X dt + \\ & + d\pi^T X x + x^T X d\pi, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где $\pi(t)$ — вектор ошибок измерений (измерительный шум), а через Sp обозначен след (шпур) соответствующей квадратной матрицы, под которым понимают сумму ее диагональных элементов, т. е. $\text{Sp } R = \sum_{i=1}^r (\sigma_{R_i}^2)_{ii}$. Подставив (3.57) в (3.55), получим

$$\begin{aligned} x_k^T Q_k x_k = & x^T(t_0) X(t_0) x(t_0) - \int_{t_0}^{t_k} [x^T Q_1 x + u^T Q_2^{-1} u] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} (u + Q_2 B^T X x)^T Q_2^{-1} (u + Q_2 B^T X x) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} \text{Sp } R X dt + \int_{t_0}^{t_k} d\pi^T X x + \int_{t_0}^{t_k} x^T X d\pi. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Перенеся в левую часть равенства второй член, стоящий в правой части, найдем окончательно

$$\begin{aligned} x_k^T Q_k x_k + \int_{t_0}^{t_k} [x^T Q_1 x + u^T Q_2^{-1} u] dt = x_0^T X(t_0) x_0 + \\ + \int_{t_0}^{t_k} (u + Q_2 B^T X x)^T Q_2^{-1} [u + Q_2 B^T X x] dt + \\ + \int_{t_0}^{t_k} \text{Sp } R X dt + \int_{t_0}^{t_k} d n^T X x + \int_{t_0}^{t_k} x^T X d n. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Для детерминированной системы $\eta(t) = n(t) = 0$ и в силу единственности оптимального управления $u^0 = -Q_2 B^T X x$ получим, что при реализации u^0 критерий (3.35) примет минимальное значение

$$\begin{aligned} \min I = x_k^T Q_k x_k + \int_{t_0}^{t_k} [x^T Q_1 x + u^T Q_2^{-1} u] dt = x_0^T X(t_0) x_0 + \\ + \int_{t_0}^{t_k} (u^0 + Q_2 B^T X x)^T Q_2^{-1} (u^0 + Q_2 B^T X x) dt = x_0^T X(t_0) x_0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Для случая же неполной стохастической информации о состоянии системы минимальное значение квадратной функции потерь $M[I]$ будет равняться [64]

$$\begin{aligned} \min M[I] = \min M \left\{ x_k^T Q_k x_k + \int_{t_0}^{t_k} [x^T Q_1 x + u^T Q_2^{-1} u] dt \right\} = \\ = M [x_0^T X(t_0) x_0] + \text{Sp } X(t_0) R_0 + \int_{t_0}^{t_k} (\text{Sp } X R) dt + \int_{t_0}^{t_k} (\text{Sp } X B Q_2 X P) dt. \end{aligned} \quad (3.61)$$

В (3.61) первое слагаемое определяет вклад в $\min M[I]$ начального состояния системы. Второе слагаемое, содержащее в виде множителя начальную ковариационную матрицу R_0 , обусловлено неопределенностью начального состояния. Третий член связан с действием на систему случайных возмущений, а последний — с неопределенностью в оценке состояния.

Указанное минимальное значение $M[I]$ будет достигаться при P , не зависящим от $u(t)$, тогда и только тогда, когда оптимальное управление, являющееся единственным, как и для детерминированного случая, определяется в форме

$$u^0 = -\hat{K}x = -KM[x(t) | Y_t]. \quad (3.62)$$

Сопоставление (3.49) с (3.62) дает основание считать обсуждаемую теорему доказанной.

Из теоремы разделения вытекает допустимость декомпозиции общей задачи стохастического управления на задачу синтеза оптимального фильтра, формирующего оценки состояния системы в виде условного среднего при заданных наблюдениях выходных сигналов, и задачу

формирования линейной обратной связи системы управления (наведения) при использовании матрицы коэффициентов усиления, полученной для детерминированной системы. Следствием, вытекающим из этой теоремы, является возможность использования схемы последовательной оптимизации управления и наблюдения. Согласно данной схеме сначала определяют оптимальное управление, минимизирующее выбранный критерий качества для случая, когда шумы

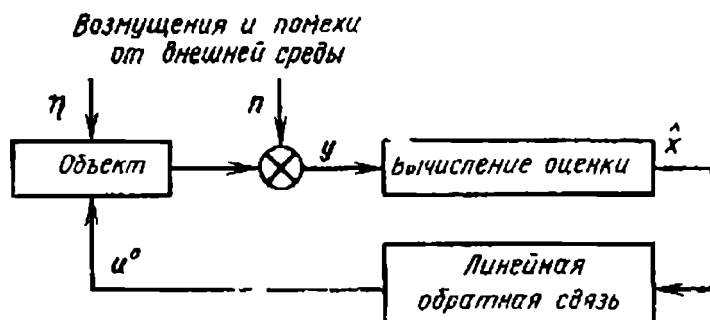


Рис. 3.3. Схема, иллюстрирующая принцип использования теоремы разделения

наблюдений отсутствуют. Затем решается задача оптимального оценивания вектора состояния, минимизирующая соответствующую функцию потерь. Полученные оптимальные оценки фазовых координат вводятся (рис. 3.3) в часть системы, формирующую управление, вместо непосредственно измеряемых параметров движения. Полученная таким образом система наведения будет обеспечивать требуемое качество процесса управления и одновременно использовать оптимальным образом переработанную измерительную информацию. Теорема является строго обоснованной, если функция наблюдения представляет собой линейную функцию величин, определяющих состояние системы, а сама система линейна. Теорема может быть распространена при малых ошибках измерений и на нелинейный случай.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.3.1. Численные методы решения уравнений движения ЛА

В общем случае возмущенное движение ЛА описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Решение их требует применения методов численного интегрирования, реализуемых на ЭЦВМ. Все многообразие расчетов, связанных с интегрированием уравнений движения применительно к решению задач наведения и навигации ЛА, может быть подразделено на две группы:

расчеты основных установочных данных (установок) или формирование полетного задания при известных параметрах ЛА и его системы управления:

решение навигационных задач, связанных с обработкой результатов измерений, определением текущего местоположения и прогнозированием параметров движения, осуществляемых на борту ЛА. Проведение расчетов при решении задач первой группы предполагает использование математических моделей, наиболее полно отражающих реальный физический процесс. Целью определения установочных данных является получение исходной информации для предстартовой настройки системы наведения, обеспечивающей достижение заданной дальности полета.

Для нахождения основных установок могут быть использованы конечные расчетные зависимости в сочетании с **таблицами стрельбы** [51] либо метод, базирующийся на вычислении «попадающей траектории» для заданных краевых условий. Первый подход обычно не связан с проведением громоздких вычислений и потому не требует применения универсальных вычислительных машин. Метод «попадающей траектории» требует трудоемких расчетов, проводимых заранее на универсальных ЭЦВМ.

Автономное решение навигационных задач проводится с помощью бортовых цифровых вычислительных машин (БЦВМ). По принципу построения и характеристикам БЦВМ, как правило, [18, 86] существенно отличаются от универсальных наземных ЭЦВМ. В настоящее время в системах управления ЛА нашли применение три типа БЦВМ: специализированные, универсальные однопроцессорные и мультипроцессорные. К первому типу машин могут быть отнесены БЦВМ ракет, предназначенных для интегрирования в реальном масштабе времени дискретных сигналов, несущих информацию о действующих ускорениях, а также для решения специфических задач контроля функционирования системы управления ЛА на старте. Второй тип БЦВМ составляют вычислительные устройства с существенно расширенными функциями. С их помощью уже могут решаться в полном объеме задачи навигации, наведения и стабилизации ЛА. Функции контроля системы управления осуществляются ими не только на старте, но и в полете. Третий тип машин относится к числу наиболее совершенных, в значительной степени приближающихся по своим возможностям к универсальным наземным ЭЦВМ. С их помощью возможна реализация многошаговых алгоритмов терминального наведения. Они позволяют получить решение в темпе полета весьма сложных задач оптимальной обработки измерительной информации, формирования оптимальных стратегий управления движением, выработки логики последовательности выполнения операций отдельными подсистемами, обнаружения неисправностей и восстановления работоспособности блоков системы управления и др.

К числу основных технических характеристик БЦВМ относят: систему команд; быстродействие; разрядность чисел, команд и запоминающего арифметического устройства; емкость памяти; скорость ввода и вывода информации; габариты и массу.

По данным зарубежной печати [21, 90] типовые модульные БЦВМ баллистических ракет и ракет носителей КА, находящиеся в стадии серийного производства в США с 1972 г., имеют следующие характе-

ристики: количество команд — до 75; объем оперативного запоминающего устройства до 1024 слов, долговременного — до 32 768 слов; арифметическое устройство, как правило, оперирует 32-разрядными двоичными числами; потребляемую мощность порядка 40 Вт, массу — несколько кг (в частности, БЦВМ D-216 имеет массу 3,9 кг при габаритах 4,0 дм³); время наработки на отказ свыше 9000 ч.

Отличаются БЦВМ от универсальных наземных ЭЦВМ и по составу математического и операционного обеспечения. При выборе соответствующего метода численного интегрирования обычно учитывают то обстоятельство, что каждый из существующих методов (Эйлера; трапеций; Адамса, с его разновидностями; Рунге—Кутта и др.) характеризуется тремя основными показателями: точностью, временем решения задачи и устойчивостью. Последнее следует понимать в том смысле, что БЦВМ, реализующая конкретную программу, входя в состав системы управления ЛА, будет оказывать существенное влияние на устойчивость и показатели качества процессов стабилизации и управления ЛА. Ее динамические характеристики, прежде всего частотные, будучи функциями реализуемой вычислительной программы, зависят от применяемых численных методов интегрирования и дифференцирования [18]. Предпочтение отдается тому методу, который при заданной точности обеспечивает достаточную область устойчивости и наименьшие затраты машинного времени. В подавляющем большинстве случаев такому условию отвечает метод Рунге—Кутта, получивший широкое распространение при решении задач как проектной, так и исполнительной баллистики. Подробное описание его применения при решении задач теории полета, возможных вариантов реализации, точности решения и способов контроля погрешностей вычислений приведены в работах [20, 22].

3.3.2. Решение однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений состояния

Применительно к решению широкого круга задач навигации и навигации оказывается возможным перейти на малом интервале исследуемого нелинейного процесса к описывающим его линеаризованным моделям. В векторно-матричном представлении линеаризованное дифференциальное уравнение состояния может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dt} [\delta x(t)] = A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (3.63)$$

В задачах, связанных с исследованием движения ЛА при отслеживании номинальной траектории, характер собственно номинального движения часто не представляет интереса. Поэтому можно положить $x(t) = \delta x(t)$, что приводит к канонической форме математической модели состояния линейной нестационарной системы, т. е. к уравнению вида (3.38). Имея в виду модель линеаризованного движения в форме (3.38), предварительно найдем решение однород-

ного дифференциального уравнения, описывающего неуправляемое свободное возмущенное движение ЛА в окрестности опорной траектории

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t). \quad (3.64)$$

Его общее решение может быть представлено в виде r линейно независимых решений уравнения

$$\frac{d}{dt} f_i = \mathbf{A}(t) f_i, \quad (3.65)$$

линейная комбинация которых $\sum_{i=1}^r c_i f_i(t) \neq 0$, если хотя бы одна из составляющих вектора произвольных постоянных $\mathbf{C}$ имеет отличное от нуля значение. Сформированная из линейно независимых частных решений квадратная матрица $\Phi(t)$, удовлетворяющая матричному уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \mathbf{A}(t) \Phi(t), \quad (3.66)$$

будет неособенной при любом t . Матрица $\Phi(t)$, называемая интегральной (фундаментальной матрицей) решений уравнения (3.64), имеет обратную матрицу $\Phi^{-1}(t)$. Введем в рассмотрение матрицу

$$\Phi_{t_0}^t = \Phi(t, t_0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0), \quad (3.67)$$

называемую нормированной интегральной матрицей или переходной матрицей фазовых состояний. Целесообразно отметить, что при $t = t_0$ матрица $\Phi(t, t_0)$ обращается в единичную матрицу $\mathbf{E}$. Нетрудно показать, что частное решение $\mathbf{x}(t)$ однородного дифференциального уравнения (3.64) может быть выражено через переходную матрицу в виде

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0). \quad (3.68)$$

Перейдем теперь к рассмотрению неоднородного дифференциального уравнения, которое представим в виде схемы, отвечающей рис. 3.4. В соответствии с ней запишем уравнение состояния в форме

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \varphi(t), \quad (3.69)$$

где

$$\varphi(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\eta}(t). \quad (3.70)$$

Решение (3.69) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения (3.64) и частного решения рас-

смагриваемого неоднородного уравнения. Обозначив решение неоднородного уравнения через $z(t)$, будем искать решение (3.69) в виде

$$x(t) = \Phi(t) z(t), \quad (3.71)$$

где $\Phi(t)$ удовлетворяет матричному однородному уравнению (3.66). Подстановка (3.71) в (3.69) дает

$$\left[\frac{d}{dt} \Phi(t) - A(t) \Phi(t) \right] z(t) = \Phi(t) \frac{d}{dt} z(t) = \varphi(t). \quad (3.72)$$

Учитывая, что $\Phi(t)$ удовлетворяет (3.66), из уравнения (3.72) следует

$$\frac{d}{dt} z(t) = \Phi^{-1}(t) \varphi(t). \quad (3.73)$$

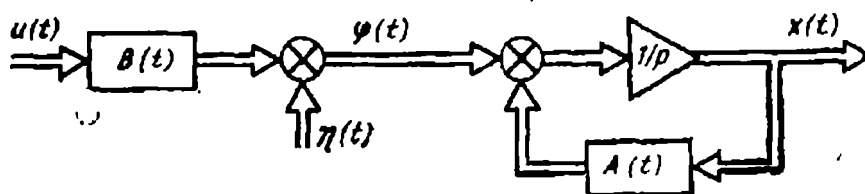


Рис. 3.4. Структурная схема неоднородного линейного дифференциального уравнения, описывающего состояние динамической системы

Проинтегрировав (3.73) и положив равным нулю вектор постоянных интегрирования, окончательно получим

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \left[x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) \varphi(\tau) d\tau \right]. \quad (3.74)$$

Практическое использование (3.74) требует обращения фундаментальной матрицы. Для того чтобы исключить эту операцию, можно воспользоваться переходной матрицей сопряженной системы. В силу невырожденности переходных матриц

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi_c^T(t, t_0). \quad (3.75)$$

Возвращаясь теперь к уравнению (3.74), подставим в подынтегральное выражение вместо $\Phi^{-1}(\tau, t_0)$ транспонированную матрицу $\Phi_c^T(\tau, t_0)$.

В результате найдем

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \left[x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_c^T(\tau, t_0) \varphi(\tau) d\tau \right]. \quad (3.76)$$

Последующие преобразования (3.76) связаны с использованием известных свойств переходных матриц.

Окончательно с учетом выражения (3.70) будем иметь:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) [B(\tau) u(\tau) + \eta(\tau)] d\tau. \quad (3.77)$$

В случае постоянства матрицы $A(t)$ в уравнении (3.69)

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) \quad (3.78)$$

и поэтому

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) [B(\tau) u(\tau) + \eta(\tau)] d\tau. \quad (3.79)$$

Если управление $u(t)$ представить в виде последовательности мгновенно действующих импульсов, выражение (3.77) примет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \{H(t, \tau) u(\tau) + \Phi(t, \tau) \eta(\tau)\} d\tau,$$

где $H(t, \tau)$ носит название **весовой** или **импульсной переходной матрицы** системы.

Матрица $H(t, \tau)$ характеризует реакцию данной системы на единичный импульс, приложенный в момент времени τ , и удовлетворяет условию $H(t, \tau) = 0$ при $t < \tau$. Таким образом, весовую матрицу можно рассматривать, как матрицу, определяющую удельный вес входного воздействия, приложенного к многомерной системе в момент τ , в формировании выходной переменной $x(t)$, т. е. вектора состояния системы, отнесенного к моменту времени t .

Решение стохастического уравнения

$$dx = A(t) x dt + d\eta(t) \quad (3.80)$$

будет иметь вид, формально мало отличающийся от (3.77), а именно:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) d\eta(\tau). \quad (3.81)$$

Однако здесь уже интеграл в правой части (3.81) из-за наличия дифференциала $d\eta(\tau)$ нельзя интерпретировать как обычные интегралы Римана или Стильеса [23]. Интеграл может быть вычислен по частям только в том случае, когда $\Phi(t, \tau)$ гладкая функция. В результате интегрирования получим

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) d\eta(\tau) = E\eta(t) - \Phi(t, t_0)\eta(t_0) - \int_{t_0}^t \eta(\tau) d\Phi(t, \tau). \quad (3.82)$$

Таким образом, изучение свойств объекта, динамика которого описывается стохастическим уравнением вида (3.80), по существу сво-

дится к анализу стохастического интеграла $\int_{t_0}^t \eta(\tau) d\Phi(t, \tau)$, называемого интегралом Ито.

3.3.3. Определение вектора промаха на терминальной поверхности

Конечной целью решения задач наведения и навигации является выведение ЛА в заданную область пространства. Обычно эта область определяется условием достижения ЛА, имеющим фазо-

вые координаты $x(t_k)$, некоторой поверхности, называемой терминальной [23]. Линейной мерой, характеризующей терминальную поверхность, служит конечный промах. Конечный промах h_k является векторной величиной, скалярное значение которой определяется как $h_k = \sqrt{x_{2k}^2 + x_{4k}^2 + x_{6k}^2}$, где x_{jk} ($j = 2, 4, 6$) представляют собой линейные компоненты вектора состояния (координаты) относительно осей системы координат, связанной с целью. В случае, когда по тем или иным причинам в качестве базовой системы отсчета принимается абсолютная система координат, $h_k = [(x_{2k} - x_{2k3})^2 + (x_{4k} - x_{4k3})^2 + (x_{6k} - x_{6k3})^2]^{1/2}$, где x_{jk3} ($j = 2, 4, 6$) — заданные значения координат ЛА в конечной точке. Очевидно, что конечный промах будет являться функцией текущего фазового состояния ЛА и реализуемых управлений. Наиболее просто прогнозирование промаха на конечный момент времени осуществляется для линейных детерминированных систем.

Предварительно рассмотрим случай прогнозирования вектора состояния линейной детерминированной системы при свободном движении ($u(t) = 0$). Применительно к задачам прогнозирования вектора фазовых координат на конечный момент времени введем в рассмотрение матрицу влияния $\Phi_{t_k}^{t_h}$, для нахождения которой можно воспользоваться сопряженной системой. Имея в виду аналогию, вытекающую из соотношения (3.67), получим

$$\Phi_{t_k}^{t_h} = (\Phi_{t_h}^{t_k})^{-1}. \quad (3.83)$$

Искомая матрица может быть найдена однократным интегрированием сопряженной системы

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = -A(t) \Phi(t); \quad \Phi(t_k) = E \quad (3.84)$$

в функции «обратного» времени от t_k до t . Действительно, полученная в результате решения (3.84) матрица $(\Phi_{t_k}^{t_h})_c$ связана с матрицей $\Phi_{t_k}^{t_h}$ соотношением типа (3.75) и поэтому

$$\Phi_{t_k}^{t_h} = (\Phi_{t_k}^{t_h})_c^T. \quad (3.85)$$

Для фиксированных значений t_k и t

$$\Phi_{t_k}^{t_h} = \frac{\partial x(t_k)}{\partial x(t)}. \quad (3.86)$$

Соответственно

$$x(t_k) = \Phi_{t_k}^{t_h} x(t). \quad (3.87)$$

Применительно к объектам управления с дискретным временем переходная матрица $\Phi(t, \tau) = \Phi_t^\tau$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\Delta_t \Phi(t, \tau) = \Phi(t+1, \tau) - \Phi(t, \tau) = A(t) \Phi(t, \tau); \quad \Phi(\tau, \tau) = E, \quad (3.88)$$

откуда

$$\Phi(t+1, \tau) = E + A(t). \quad (3.89)$$

Переходная матрица дискретных систем Φ_t^{τ} обладает следующими свойствами:

$$\Phi(t, t) = E; \quad (3.90)$$

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, \theta) \Phi(\theta, \tau), \quad (t \geq \theta \geq \tau), \quad (3.91)$$

и, таким образом,

$$\Phi_t^{\tau} = \Phi(t, t-1) \Phi(t-1, t-2) \dots \Phi(\tau+1, \tau). \quad (3.92)$$

Следовательно, переходная матрица (аналогично и матрица влияния) для дискретных линейных систем может быть определена посредством прямого перемножения матриц перехода от такта к такту.

Экстраполяция случайного вектора фазовых координат приводит к необходимости обращения к корреляционной матрице. Согласно определению

$$K_t\{x\} = K_x = M\{\ddot{x} \ddot{x}^T\}, \quad (3.93)$$

где $\ddot{x}$ — центрированный случайный вектор, соответствующий $x(t)$. Имея в виду, что

$$\ddot{x}_k = \Phi_t^{t k} \ddot{x}^{\circ} \text{ и } \ddot{x}_k^T = \ddot{x}^{\circ T} (\Phi_t^{t k})^T,$$

получим

$$K_{x_k} = \Phi_t^{t k} K_x (\Phi_t^{t k})^T, \quad (3.94)$$

где K_x — корреляционная матрица, элементы которой соответствуют фиксированному текущему моменту времени.

Задача прогнозирования конечного промаха существенно усложняется, когда рассматривается управляемое движение. Здесь уже приходится оперировать алгоритмами формализации процесса оценивания возмущений, действующих на ЛА, прогнозирования его промежуточного состояния и формирования управляющего воздействия в соответствии с результатами прогнозирования и реализации оптимальной стратегии управления. Другими словами, прогнозирование конечного промаха, если и может быть осуществлено, то только на основании полного решения навигационной задачи.

ГЛАВА 4

МЕТОДЫ И ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ НАВЕДЕНИЯ РАКЕТ НА ПОДВИЖНЫЕ ЦЕЛИ

Задача наведения состоит в организации процесса сближения ракеты с перемещающейся целью, обеспечивающего ее попадание в окрестность, определяемую радиусом поражения цели. Под методом наведения обычно понимается закономерность изменения кинематических параметров движения при сближении ЛА. Траектория ракеты даже при наведении на маневрирующую цель может быть криволинейной, причем степень кривизны определяется применяемым методом наведения. В большинстве случаев следует стремиться к снижению кривизны траектории, так как при этом сокращается время сближения и уменьшаются действующие на ракету перегрузки. Простейшим решением задачи перехвата представляется полет в упрежденную точку, т. е. такую точку пространства, в которой через некоторое время окажутся одновременно ракета и цель. Для выполнения условия встречи должны быть определены ее координаты с учетом скоростей движения ЛА. При этом можно выбрать и соответствующий закон изменения управляющего параметра (тяги двигателя или углов атаки, скольжения, крена), который бы обеспечивал наилучшую траекторию полета. Однако, если ракета будет осуществлять полет по заранее заложенной программе, полученной в результате решения идеализированной задачи, при значительном времени сближения неизбежно возникнут большие погрешности. Поэтому при практическом решении задачи наведения необходимо устранить погрешности, заложенные в такой постановке задачи: во-первых, упрежденная точка определяется по неточным оценкам скорости, высоты и направления полета цели, имеют место ошибки в определении параметров процесса наведения, характеристик атмосферы и т. д.; во-вторых, высока вероятность маневра цели после старта ракеты—перехватчика. Одним словом, принципиально речь может идти об использовании полета в упрежденную точку только при малом времени перехвата и значительном превышении скорости ракеты над скоростью цели.

В общем случае программа полета ракеты должна строиться так, чтобы в любой момент в нее можно было вносить коррективы на основе последующей информации о движении цели и ракеты. Таким образом, в общем случае необходима постоянная информация об относительном положении ЛА. Если такая информация получается и преобразуется в команды, управляющие движением ракеты-перехватчика, аппаратурой, установленной на борту самого перехватчика, то говорят о реализации процесса самонаведения. Если

же команды вырабатываются станцией, не находящейся на борту ракеты, то управляемый полет трактуется как процесс наведения, или более узко—процесс теленаведения (наведение на расстоянии).

4.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СВОЙСТВ ТРАЕКТОРИЙ НАВЕДЕНИЯ

4.1.1. Исходные предпосылки кинематического анализа

Исследование процесса наведения или самонаведения, как правило, начинается с исследования упрощенной аналитической модели, когда принимаются следующие предположения:

система управления ракетой предполагается безынерционной, динамические уравнения ракеты заменяются уравнениями связи; внешние случайные возмущения в расчет не принимаются; ракета рассматривается как материальная точка, обладающая определенной скоростью;

модуль вектора скорости ракеты известен, а изменение его задано в функции времени.

Расчет, выполненный с учетом этих предположений, позволяет получить кинематическую траекторию невозмущенного движения ракеты для выбранного закона управления. Смысл идеализированной постановки и решения задачи состоит в определении возможностей ракеты-перехватчика и проведении сравнительного анализа различных методов. При этом оцениваются: перегрузки, время наведения, дальность действия, области возможных атак, энергетические характеристики, особенности реализации и т. п. Динамика системы управления и точность наведения (промах) оцениваются путем анализа линеаризованных уравнений возмущенного движения ракеты относительно опорной (кинематической) траектории. Отметим еще одну характерную особенность изучения методов наведения. Управление ракетой можно осуществлять активным путем — с использованием тяги двигателя или пассивным — с использованием аэродинамических сил.

Необходимость аэродинамического управления возникает и в случае, если двигатель установлен жестко относительно оси аппарата и тяга постоянна. Закон изменения, например, угла атаки и, как следствие, коэффициента подъемной силы $c_y(t)$ определяется кинематической схемой наведения. Не исключены случаи, когда закон управления углом атаки может оказаться неприемлемым из-за больших нормальных перегрузок n_y или из-за потребных больших угловых скоростей вращения ракеты, которые практически не смогут реализовать органы управления. В силу этого при рассмотрении движения ракеты в режиме наведения или самонаведения уравнения кинематической связи каждого метода необходимо решать совместно с динамическими уравнениями.

Рассмотрим движение ракеты в режиме наведения в вертикальной плоскости. Упрощенные уравнения движения на оси траекторной системы координат имеют вид, соответствующий (2.70) ... (2.72),

или при использовании формы записи этой системы через составляющие вектора перегрузки — соответствующий системе (2.73). Учитывая, что $c_y = c_y^\alpha \alpha$, найдем

$$\alpha = \frac{mg}{P + c_y^\alpha Sq} n_{y_k} \quad (4.1)$$

или

$$c_y = \frac{mg}{P (c_y^\alpha)^{-1} + Sq} n_{y_k}. \quad (4.2)$$

Анализ уравнений в перегрузках и приведенных простых соотношений позволяет сделать ряд выводов:

1. При известной скорости полета ракеты (см. принятые допущения) кривизна траектории практически однозначно определяется нормальной перегрузкой (с точностью до $\cos \theta$) и наоборот.

2. Для каждой конкретной траектории полета ракеты угол атаки может быть определен через нормальную перегрузку.

3. При известной скорости полета составляющая вектора перегрузки на касательную к траектории практически известна (с точностью до $\sin \theta$).

Таким образом, нетрудно установить, что при построении и исследовании кинематической траектории наведения решающую роль должна играть нормальная составляющая вектора перегрузки.

4.1.2. Общие сведения о методах самонаведения

Основной информацией, используемой при реализации самонаведения, служат данные о параметрах относительного движения ракеты и цели. Рассмотрим рис. 4.1, на котором изображены соотношения параметров для общей схемы наведения.

В первом, достаточно грубом приближении будем предварительно считать, что перехват происходит в плоскости векторов скорости перехватчика V и цели V_c . РЦ — линия визирования цели; η — угол упреждения — угол между вектором скорости перехватчика и линией визирования; ϵ — угол пеленга — угол между продольной осью ракеты и линией визирования; θ — угол тангажа; α — угол атаки; q — угол наклона линии визирования к местному горизонту; D — расстояние между перехватчиком и целью (относительная дальность до цели).

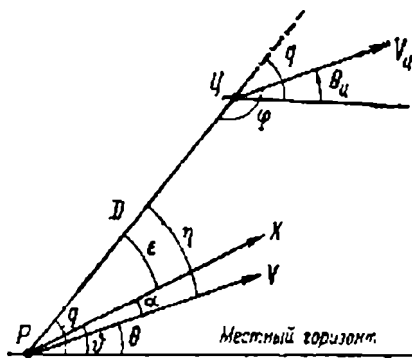


Рис. 4.1. Общая кинематическая схема наведения

На рис. 4.2 представлена упрощенная схема системы самонаведения. Нетрудно видеть, что закон управления ракетой в общем виде может быть записан как

$$\delta_p = f(V; \theta, \theta_c, \alpha, D, q \dots). \quad (4.3)$$

Здесь δ_p — угол отклонения руля.

Рассмотрение рис. 4.1 и 4.2 позволяет укрупненно выделить три группы систем самонаведения.

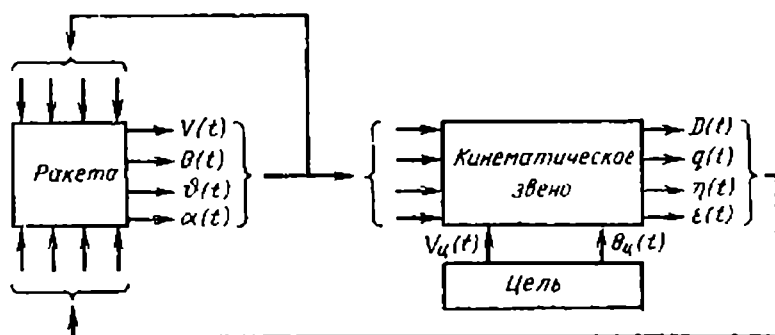


Рис. 4.2. Упрощенная схема системы самонаведения

1. В системах первой группы в процессе сближения меняется по определенному закону угол пеленга цели в связанных осях ракеты. В простейшем случае угол пеленга ε сводится системой управления к нулю. Такой метод называется **прямым наведением**.

2. В системах второй группы меняется по определенному закону угол упреждения $\eta = \text{const}$. В частном случае угол упреждения поддерживается нулевым (**метод погони**) или равным некоторой постоянной величине (**наведение с постоянным углом упреждения**).

3. В системах третьей группы при управлении движением ракеты обеспечивается определенное положение линии визирования цели относительно некоторого направления, фиксированного в пространстве. В частном случае $q = \text{const}$. Это **метод параллельного сближения**.

Следует отметить, что для случаев, когда связи накладываются на закон изменения углов η или q , траектории (по крайней мере, идеальные) можно рассчитывать, не прибегая к уравнениям динамики объекта, так как даже одни кинематические соотношения составляют замкнутую систему. Динамические же уравнения объекта в этом случае характеризуют лишь маневренные свойства ракеты. Для случая, когда связи накладываются на угол пеленга ε , необходимо учитывать и кинематические и динамические уравнения, так как необходимо контролировать угол атаки α , а следовательно, вводить в рассмотрение и уравнения движения ракеты.

4.1.3. Метод наведения по кривой погони

Кинематическая связь при рассмотрении этого метода состоит в том, что вектор скорости перехватчика в каждый момент времени направлен на цель, т. е. угол упреждения $\eta = 0$ во все время наведения. Для получения кинематических уравнений обратимся к рис. 4.3. Скорость цели V_u можно определить следующими двумя углами:

углом $\chi = \theta_u$, который отсчитывается в вертикальной плоскости, содержащей V_u , по часовой стрелке от линии пересечения этой плоскости с горизонтальной, проходящей через точку «Ц»;

углом Ψ_u , отсчитываемым по часовой стрелке в горизонтальной плоскости, проходящей через точку «Ц», от линии пересечения этой плоскости с вертикальной плоскостью РОЦ.

Определим относительную скорость сближения ракеты и цели, для чего спроектируем скорости V и $V_{ц}$ на направление радиус-вектора $\overline{PC} = D$:

$$\dot{D} = -[V + V_{ц}(\cos \chi \cos \Psi_{ц} \cos \theta - \sin \chi \sin \theta)]. \quad (4.4)$$

Определим угловые скорости перемещения цели по отношению к ракете в плоскости чертежа ($\dot{\theta}$) и перпендикулярно плоскости чертежа ($\dot{\Psi}'$):

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{V_{\pi\pi} \sin \theta + V_{y\pi} \cos \theta}{D}; \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt} \Psi'(t) = V_{z\pi} D^{-1} \quad (4.6)$$

или

$$D\dot{\theta} = V_{ц}(\cos \chi \cos \Psi_{ц} \sin \theta + \sin \chi \cos \theta); \quad (4.7)$$

$$D\dot{\Psi}' = -V_{ц} \cos \chi \sin \Psi_{ц}. \quad (4.8)$$

Здесь Ψ' — угол поворота вектора скорости перехватчика в наклонной плоскости, перпендикулярной плоскости РОЦ. Если угол $\chi = \theta_{ц}$, то цель перемещается навстречу ракете, что соответствует перехвату на **встречно-пересекающемся курсе**. При $\chi = \pi - \theta_{ц}$ — цель удаляется от ракеты. В этом случае говорят о перехвате на **попутно-пересекающемся курсе**. Для получения приближенного аналитического решения упростим задачу, введя следующие предположения:

1. Будем считать, что движение ракеты и цели происходит в одной плоскости РОЦ, причем положим, что цель движется прямолинейно ($\theta_{ц} = \text{const}$). В этом случае уравнение (4.8) превращается в тождество, так как $\Psi_{ц} = \Psi' = 0$ и вместо уравнений (4.4), (4.7), (4.8) получим два уравнения

$$\begin{aligned} \dot{D} &= -[V + V_{ц}(\cos \chi \cos \theta - \sin \chi \sin \theta)] = \\ &= -[V + V_{ц} \cos(\chi + \theta)]; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} D\dot{\theta} &= V_{ц}(\cos \chi \sin \theta + \\ &+ \sin \chi \cos \theta) = V_{ц} \sin(\chi + \theta). \end{aligned} \quad (4.10)$$

2. Примем, что управление ракетой осуществляется с использованием угла атаки, т. е. рассматриваем плоское движение ракеты. Исключая из уравнения (4.10) $D = (y_{ц} - y)/\sin \theta$ (согласно рис. 4.3), получим кинематическую связь, содержащую только те переменные, которые входят в уравнения движения перехватчика:

$$\dot{\theta} = \frac{V_{ц}}{y_{ц} - y} \sin \theta \sin(\chi + \theta). \quad (4.11)$$

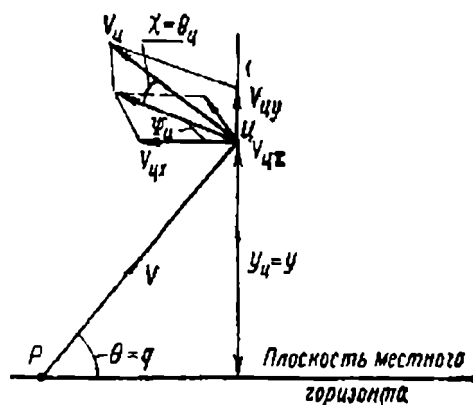


Рис. 4.3. К определению соотношений для метода наведения по кривой погони

3. Считаем, что $V_{\pi} = \text{const}$, $\theta_{\pi} = 0$. Тогда для случая перехвата на встречно-пересекающемся курсе ($\chi = 0$) уравнения (4.9) ... (4.11) примут более простой вид

$$\dot{D} = -(V + V_{\pi} \cos \theta); \quad (4.12)$$

$$D\dot{\theta} = V_{\pi} \sin \theta; \quad (4.13)$$

$$\dot{\theta} = (y_{\pi} - y)^{-1} V_{\pi} \sin^2 \theta. \quad (4.14)$$

Проинтегрировав уравнения (4.12), (4.13), найдем выражение для определения дальности между ракетой и целью и вычисления угла наклона вектора скорости ракеты к горизонту:

$$D = D_0 - \int_0^t V dt - V_{\pi} \int_0^t \cos \theta dt, \quad (4.15)$$

$$\text{tg } \frac{\theta}{2} = \text{tg } \frac{\theta_0}{2} e^{\int_0^t D^{-2} dt}. \quad (4.16)$$

Хотя выражения (4.15) и (4.16) получены с учетом существенных упрощающих факторов, решение их возможно только численными методами или графоаналитическим методом последовательных приближений. Однако некоторые выводы можно сделать. В начале полета, если D велико, θ меняется сравнительно медленно, при этом D — монотонная функция времени. По мере приближения к цели D уменьшается. В этом случае угол θ и соответственно $\dot{\theta}$ возрастают и при малых D изменяются очень быстро. В силу отмеченных особенностей весь полет ракеты можно условно разбить на два участка:

на первом участке θ изменяется сравнительно слабо, при этом скорость ракеты переменна;

на втором участке (вблизи цели) θ меняется очень быстро, а скорость перехватчика практически постоянна.

Рассмотрим начальный участок траектории. В силу переменности скорости ракеты для определения ее траектории необходимо интегрировать нелинейные дифференциальные уравнения (4.12) и (4.13) совместно с уравнениями движения ракеты.

С учетом принятых выше упрощений можно применить приближенные методы решения. Имея в виду тот факт, что D на первом участке является монотонной функцией времени, представим ее выражение в виде ряда Тейлора по степеням t (ограничимся тремя первыми членами разложения):

$$D = D_{0*} + \dot{D}_{0*}t + 0,5\ddot{D}_{0*}t^2. \quad (4.17)$$

Первую и вторую производную $\dot{D}_{0*}$ и $\ddot{D}_{0*}$ при $t = 0$ можно получить из уравнений (4.12), (4.13)

$$\dot{D}_0 = -(V_0 + V_{\pi} \cos \theta_0); \quad \ddot{D}_0 = -\left(\dot{V}_0 - \frac{V_{\pi}^2}{D_0} \sin^2 \theta_0\right).$$

Зная зависимость $D(t)$, нетрудно вычислить интеграл, входящий в уравнение (4.16):

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{1 + 2a(\sqrt{b^2 + 4aD_0} + b)^{-1}t}{1 - 2a(\sqrt{b^2 + 4aD_0} - b)^{-1}t} \right]^{V_{\pi}(\sqrt{b^2 + 4aD_0})^{-1}} \quad (4.18)$$

Здесь $a = -0,5\ddot{D}_0$, $b = -\dot{D}_0$.

Задача расчета траектории наведения по кривой погони может быть решена до конца в квадратурах, если принять следующий закон изменения скорости ракеты:

$$V = V_0 + \dot{V}_0 t. \quad (4.19)$$

Тогда мы имеем полный набор формул для расчета траекторий ракеты на начальном участке, включая его координаты на любой момент времени:

$$x = x_0 + \int_0^t V \cos \theta dt; \quad y = y_0 + \int_0^t V \sin \theta dt. \quad (4.20)$$

Приступим к рассмотрению участка полета, предшествующему перехвату на встречнопересекающемся курсе. Согласно принятым допущениям $V = \text{const}$; $V_{\pi} = \text{const}$; $\theta_{\pi} = 0$. Поделив почленно (4.12) на (4.13), найдем

$$\frac{dD}{D} = - \left(\frac{p}{\sin \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right) d\theta.$$

Здесь $p = V/V_{\pi}$. Полученное выражение можно проинтегрировать:

$$D = K^* \frac{(1 + \cos \theta)^p}{(\sin \theta)^{p+1}}, \quad (4.21)$$

где $K^* = D_1 \frac{(\sin \theta_1)^{p+1}}{(1 + \cos \theta_1)^p}$, а индексом «1» обозначены значения параметров, соответствующих началу второго участка (соответственно, конец первого участка). Очевидно, что при встрече $D = 0$. Тогда из (4.21) следует $\cos \theta = -1$; $\theta = \pi$, т. е. перехват происходит из задней полусферы — с хвоста.

Время полета определяется следующим образом [54]. Умножим (4.12) на $\cos \theta$, (4.13) на $\sin \theta$ и вычтем второе выражение из первого. После преобразования имеем

$$-\dot{D}(p - \cos \theta) - D\dot{\theta} \sin \theta = V_{\pi}(p^2 - 1),$$

которое после интегрирования дает время

$$t = \frac{D_1(p - \cos \theta_1) - D(p - \cos \theta)}{V_{\pi}(p^2 - 1)}. \quad (4.22)$$

В частности, полное время полета на втором участке получим, положив в (4.22) $D = 0$:

$$t_k = \frac{D_1(p - \cos \theta_1)}{V_{\pi}(p^2 - 1)}.$$

Угловую скорость вектора скорости перехватчика найдем, используя выражения (4.13) и (4.21):

$$\dot{\theta} = \frac{V_{\Pi} (\sin \theta)^{p+2}}{K^* (1 + \cos \theta)^p}. \quad (4.23)$$

Выше отмечалось, что ракета атакует цель сзади ($\theta_k = \pi$), даже при перехвате на встречнопересекающемся курсе. Тогда $\dot{\theta}_k$, как видно из (4.23), превращается в неопределенность вида 0/0. Раскрывая эту неопределенность (применяя правило Лопиталя), получим выражения для угловой скорости поворота вектора скорости ракеты в момент встречи с целью. Рассмотрим случай $1 < p < 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \dot{\theta} &= \frac{V_{\Pi}}{K^*} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{(\sin \theta)^{p+2}}{(1 + \cos \theta)^p} = 0/0 = \\ &= - \frac{V_{\Pi}}{K^*} \frac{p+2}{p} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{(\sin \theta)^p \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^{p-1}} = 0/0 = \\ &= \frac{V_{\Pi}}{K^*} \frac{p+2}{p(p-1)} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{p(\sin \theta)^{p-2} - (p+1)(\sin \theta)^p}{(1 + \cos \theta)^{p-2}} = \\ &= \frac{V_{\Pi}}{K^*} \frac{p+2}{p(p-1)} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{(p \sin \theta)^{p-2}}{(1 + \cos \theta)^{p-2}} = 0, \text{ ибо} \\ &\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 0 = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = \infty, \end{aligned}$$

но у нас $1 < p < 2$.

Итак, $\dot{\theta}_k = 0$. Аналогично можно получить $\dot{\theta}_k = \frac{4V_{\Pi}}{K^*}$ при $p = 2$ и $\dot{\theta}_k = \infty$ при $p > 2$.

Следует отметить, что при $p < 2$, угловая скорость $\dot{\theta}$ оказывается очень большой, хотя в момент встречи и равна 0. Это слабая сторона рассматриваемого метода, поскольку физически нельзя реализовать большие значения $\dot{\theta}$. Проведя аналогичные рассуждения, можно получить все необходимые выражения и при перехвате вдогон — на попутно-пересекающемся курсе. Для этого только следует положить $V_{\Pi} = -V_{\Pi}$:

$$\begin{aligned} D &= K_{вд}^* \frac{(\sin \theta)^{p-1}}{(1 + \cos \theta)^p}; \quad K_{вд}^* = D_1 \frac{(1 + \cos \theta_1)^p}{(\sin \theta_1)^{p-1}}; \\ t &= \frac{D_1 (\cos \theta_1 + p) - D (\cos \theta + p)}{V_{\Pi} (p^2 - 1)}; \quad t_k = \frac{D_1 (\cos \theta_1 + p)}{V_{\Pi} (p^2 - 1)}. \end{aligned}$$

В точке встречи ракеты с целью $\theta_k = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{-V_{\Pi}}{K_{вд}^*} \frac{(1 + \cos \theta)^p}{(\sin \theta)^{p-2}}; \\ \dot{\theta}_k &= 0 \text{ при } 1 < p < 2; \\ \dot{\theta}_k &= - \frac{4V_{\Pi}}{K_{вд}^*} \text{ при } p = 2; \\ \dot{\theta}_k &= \infty \text{ при } p > 2. \end{aligned}$$

Таким образом и в этом случае $\dot{\theta}_k = \infty$ при $p > 2$. Но в отличие от первого случая возрастание $\dot{\theta}_k$ происходит лишь в непосредственной близости от цели. Поэтому (особенно при значительном радиусе поражения) атака вдогон с использованием рассматриваемого метода позволяет приблизиться ракете достаточно близко к цели, не испытывая больших перегрузок. Это хорошо видно из графического представления метода погони (рис. 4.4). Следует отметить, что для любого способа атаки при $p \rightarrow 2$ угловая скорость достигает своего максимума при попадании в цель. Если же $1 < p < 2$, то максимальное значение $|\dot{\theta}|$ достигается при $\theta = \arccos \frac{1}{2} p$ в случае

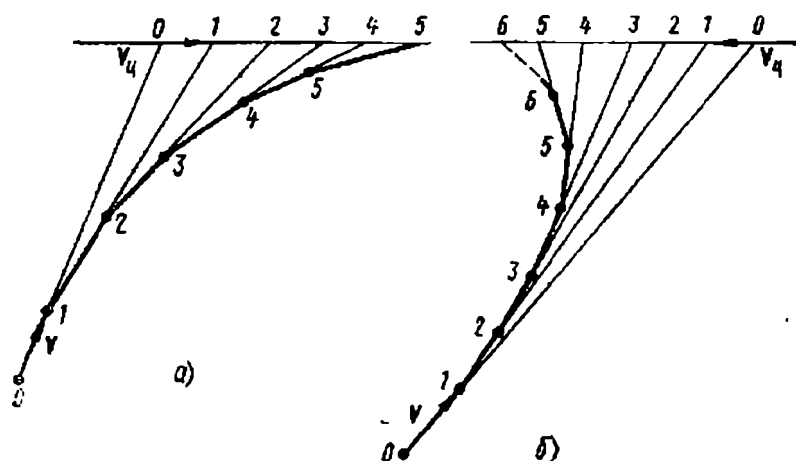


Рис. 4.4. Графическое построение траекторий наведения методом погони:

а — для встречно-пересекающегося курса; б — при перехвате вдогон

удаляющейся и $\theta = \arccos \left(-\frac{1}{2} p \right)$ в случае цели, летящей навстречу. Это следует, если взять первую и вторую производные от выражения для $\dot{\theta}$ по θ . Для удаляющейся цели имеем ($1 < p < 2$):

$$|\dot{\theta}|_{\max} = \frac{V_{ц}}{K_{вд}^*} \left(1 + \frac{p}{2} \right)^p \left[1 - \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right]^{1 - \frac{p}{2}};$$

и для цели, летящей навстречу,

$$|\dot{\theta}|_{\max} = \frac{V_{ц}}{K^*} \frac{\left[1 - \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right]^{1 + \frac{p}{2}}}{\left(1 - \frac{p}{2} \right)^p}.$$

В результате получены все необходимые формулы для аналитического расчета выделенных участков траектории перехвата. Но как определить границу между первым и вторым участками? Для этого поступают следующим образом. Предполагают, что формулы, полученные для первого участка, справедливы везде. Тогда, используя

выражение (4.17), найдем полное время перехвата t_k . Вычтя из этой величины какое-то значение Δt , будем считать, что имеем истинное время полета перехватчика на первом участке $t_1 = t_k - \Delta t$. Подставив t_1 в (4.17) и (4.18), найдем значение D_1 и θ_1 . После чего можно использовать формулы для второго участка. Но как определить Δt ? Для этого, используя формулы для второго участка, следует построить зависимость $\theta(t)$, помня об отмеченных особенностях резкого возрастания θ на втором участке (см. рис. 4.5). Проведя несколько итераций $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$, найдем нужное значение Δt .

К числу важнейших элементов кинематического анализа метода наведения обычно относят исследование зон возможных атак. Рассмотрим простейший случай перехвата горизонтально летящей неманеврирующей цели ($V_{ц} = \text{const}$; $\theta_{ц} = 0$) при реализации метода погони. Нормальные перегрузки, действующие на ракету, определяются как $n_y \approx V\dot{\theta}/g$. Используя выражение для θ из (4.13), будем иметь

$$n_y = -\frac{VV_{ц}}{gD} \sin \theta \text{ или } |n_y| = \frac{VV_{ц}}{gD} \sin \varphi.$$

Здесь φ — ракурс стрельбы — угол между скоростью цели и линией визирования. Если максимально допустимая перегрузка равна $n_{кр}$, то возможные траектории погони должны удовлетворять условию:

$$|n_{кр}| \geq \frac{VV_{ц}}{gD} \sin \varphi$$

или

$$D \geq \frac{VV_{ц}}{gn_{кр}} \sin \varphi.$$

Обозначим $\frac{VV_{ц}}{gn_{кр}} = d$. Тогда граница зоны возможных атак может быть записана как

$$D_{\text{зоны кр}} = d \sin \varphi.$$

Представим это графически, изобразив траектории перехвата на плоскости, связанной с целью (рис. 4.6). Заштрихованная область является зоной перегрузок, превышающих критические значения. Она условно высекает часть пространства, где не может быть реализована атака по методу погони при заданном значении $n_{кр}$. Из рассмотрения рис. 4.6 видно, что стрелять из передней полусферы практически бесполезно, так как ракета сойдет с расчетной траектории из-за недопустимо больших перегрузок. Рассмотрим зоны возможных атак по маневрирующей цели:

а) цель выполняет маневр по скорости

$$D_{кр} = \frac{V(V_{ц} + \Delta V_{ц})}{gn_{кр}} \sin \varphi.$$

Анализ приведенного выражения с использованием рис. 4.6 показывает, что маневр цели по скорости в общем случае очень эффективен. Только в малой зоне II задней полусферы эффективность понижена. Но следует учитывать, что зона II очень мала;

б) цель выполняет маневр по направлению.

При больших дальностях до цели маневр цели по направлению очень мало влияет на характер кривой погони, так как направление линии визирования меняется незначительно. При подходе к цели увеличение перегрузок ракеты (соответственно — уменьшение зоны возможных атак) может вызвать только маневр цели в сторону перехватчика. На конечном участке $\varphi \rightarrow \pi$ и траектории цели и ракеты

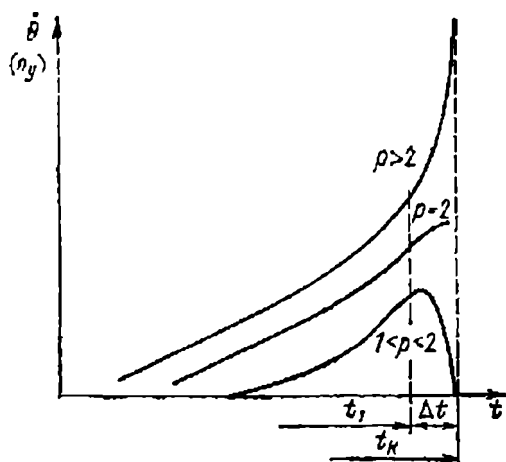


Рис. 4.5. Зависимости изменения угловой скорости поворота V по времени для различных значений p

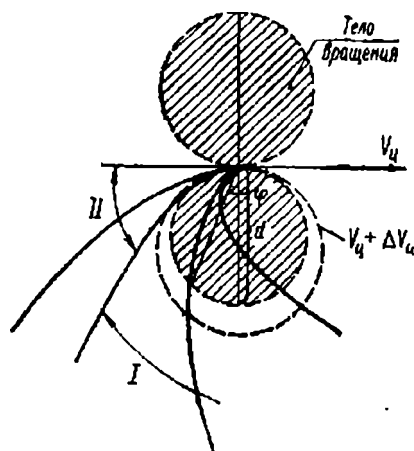


Рис. 4.6. К анализу зон возможных атак в методе погони

близки друг к другу, т. е. $\dot{\theta} = \dot{\theta}_ц$. Однако $n_{уц} \approx \frac{V_ц \dot{\theta}_ц}{g}$, $n_{ур} \approx \frac{V \dot{\theta}}{g}$.

Тогда $\frac{n_{ур}}{n_{уц}} \approx \frac{V}{V_ц} = p > 1$, т. е. при маневре цели в направлении к ракете нормальные перегрузки перехватчика на конечном участке наведения превышают перегрузки цели. В этом один из недостатков метода погони. Если перехватчик имеет небольшое допустимое значение критической перегрузки, то реализуется большой промах, так как ракета сойдет с расчетной траектории.

Исходя из выполненного анализа рассмотренного метода наведения могут быть сделаны следующие выводы:

1. Атаковать желательно издалека, так как при этом ракета на участок непосредственного сближения с целью выйдет с меньшими перегрузками.

2. Перегрузки ракеты при стрельбе по медленно летящим целям меньше, чем по быстролетящим. Поэтому метод погони целесообразно применять при стрельбе по неподвижным или медленно летящим целям.

3. При стрельбе из задней полусферы перегрузки перехватчика при прочих равных условиях меньше, чем при атаке из передней полусферы, ибо в последнем случае q принимает последовательно

значения от $q_0 > \pi/2$ до $q = 0$, при этом $n_{y \max}$ достигается при $q_{n \max} = \arccos \frac{p}{2}$.

4. Даже при прямолинейном и равномерном движении цели траектория перехватчика криволинейна. Особенно это проявляется при стрельбе из передней полусферы, что резко ограничивает зону возможных атак.

5. С точки зрения кинематических траекторий наилучшим соотношением скорости ракеты и цели будет $1 < p < 2$, т. е. скорость ракеты необходимо ограничивать. В противном случае при $p > 2$ перегрузки ракеты при подлете к цели неограниченно возрастают и промах неизбежен.

4.1.4. Наведение с углом упреждения

Сущность этого метода состоит в том, что в течение всего наведения вектор скорости перехватчика направлен под углом к линии визирования. Благоприятный случай — упреждение в сторону мгновенной точки встречи ракеты с целью. В частном случае угол упреждения может быть постоянным во все время наведения (наведение с постоянным углом упреждения).

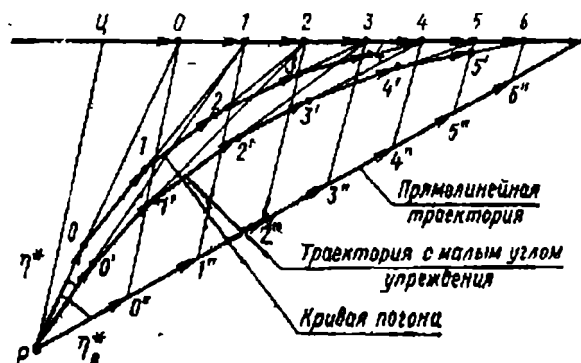


Рис. 4.7. Траектории наведения при различных значениях постоянных углов упреждения

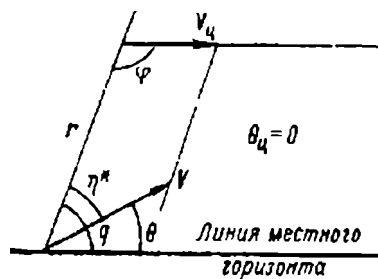


Рис. 4.8. Схема наведения с постоянным углом упреждения

На рис. 4.7 для частного случая ($V_c = \text{const}$; $\theta_c = 0$; $V = \text{const}$) приведены траектории перехвата при разных постоянных углах упреждения, включая $\eta = 0$. Видно, что с увеличением угла упреждения кривизна траектории уменьшается, и в некоторых случаях возможны прямолинейные траектории.

Проведем аналитическое исследование траекторий наведения. Рассмотрим случай $\eta^* = \text{const}$ (рис. 4.8):

$$\frac{dD}{dt} = V_c \cos q - V \cos \eta; \quad (4.24)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{-V_c \sin q + V \sin \eta}{D}. \quad (4.25)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим выражение для метода наведения с углом упреждения:

$$\frac{dD}{D} = \frac{\cos q - p \cos \eta}{-\sin q + p \sin \eta} dq. \quad (4.26)$$

Рассмотрим условия существования прямолинейных траекторий при наведении с постоянным углом упреждения. В этом случае $\theta = \text{const}$ и соответственно $q_0 = \theta + \eta^* = \text{const}$, т. е. $\dot{q} = 0$. Таким образом, как следует из (4.25), при полете по прямолинейным траекториям линия визирования перемещается параллельно самой себе: $V_{\pi} \sin q_0 = V \sin \eta$. При заданных значениях p и η существует два угла q_0 , обеспечивающих прямолинейные траектории,

$$\begin{aligned} q_{01} &= \arcsin(p \sin \eta); \\ q_{02} &= \pi - \arcsin(p \sin \eta). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Очевидно, что прямолинейные траектории возможны при $p \sin \eta < 1$. По мере увеличения $p \sin \eta > 1$ прямолинейных траекторий не будет, а все они примут спиралевидную форму.

Проинтегрируем для случая $p \sin \eta = \text{const}$ уравнение (4.26)

$$\begin{aligned} \int_{D_0}^D \frac{dD}{D} &= \int_{q_0}^q \frac{\cos q}{-\sin q + V \sin \eta} dq - \int_{q_0}^q \frac{V \cos \eta}{-\sin q + p \sin \eta} dq; \\ D &= D_0 \left(\frac{\sin q - p \sin \eta}{\sin q_0 - p \sin \eta} \right)^{\nu-1} \times \\ &\times \left(\frac{1 - p \sin \eta \sin q_0 + \cos q_0 \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \eta}}{1 - p \sin \eta \sin q + \cos q \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \eta}} \right)^{\nu}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Здесь $\nu = \frac{p \cos \eta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \eta}}$ — постоянная действительная величина для рассматриваемых условий.

В результате получили кинематическую функцию связи D и q при выбранном угле упреждения η и начальных условиях D_0 и q_0 . Если $\eta = 0$, то приходим к выражению метода погони, так как $\nu = p$ и уравнение (4.28) вырождается в уравнение кривой погони.

Проанализируем теперь характер и определим устойчивость траекторий наведения с постоянным углом упреждения. При заданных постоянных значениях V_{π} , V , η (при этом $p \sin \eta < 1$) всегда можно найти такое значение q_0 , при котором обеспечивается прямолинейная траектория, т. е. выполняется условие

$$\dot{q} = 0 = - \frac{V_{\pi} \sin q_{0i} + V \sin \eta}{D} \quad (4.29)$$

при $i = 1, 2$.

Если есть вариации переменных относительно прямолинейной траектории, то получим

$$\Delta \dot{q} = \frac{-V_{\pi} \sin(q_0 + \Delta q) + V \sin \eta}{D + \Delta D}.$$

Пренебрегая величиной второго порядка малости, положив $\Delta \dot{q} \Delta D = 0$, $\cos \Delta q \approx 1$, $\sin \Delta q \approx \Delta q$ и принимая во внимание выражение (4.29), найдем, что

$$\begin{aligned} D \Delta \dot{q} &= -V_{\pi} \cos q_0 \Delta q, \text{ или} \\ D \Delta \dot{q} + V_{\pi} \cos q_0 \Delta q &= 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Очевидно, что для $q_0 < \frac{\pi}{2}$ $\cos q_0 > 0$ и при отклонении перехватчика от прямолинейной траектории на угол Δq появляется производная $\Delta \dot{q}$ противоположного знака, ликвидирующая Δq , в результате чего ракета стремится к **устойчивой** прямолинейной траектории $q_{01} < \frac{\pi}{2}$. В точке встречи с целью, когда $D \rightarrow 0$, в соответствии с уравнением в вариациях, учитывая, что $\dot{q} \neq \infty$, $\Delta q \rightarrow 0$, а $q \rightarrow q_{01}$, т. е. в конце наведения угол q асимптотически стремится к углу q_{01} и практически почти любая траектория на конечном участке будет касательной к устойчивой прямолинейной траектории. Соответственно прямолинейная траектория при $q > \pi/2$ неустойчива и ракета сходится с ней, сближаясь с устойчивой прямолинейной траекторией при $q = q_{01}$.

Выполним анализ зоны возможных атак применительно к методу наведения с постоянным углом упреждения, используя все то же выражение нормальной составляющей вектора перегрузки $n_y \approx \frac{V\dot{\theta}}{g}$.

Поскольку $\eta = \text{const}$, то $\dot{\theta} = \dot{q}$, т. е.

$$n_y = \frac{V}{g} \left(\frac{-V_{\pi} \sin q + V \sin \eta}{D} \right) = \frac{VV_{\pi}}{gD} (\sin q - p \sin \eta).$$

Если максимально допустимая перегрузка равна $n_{кр}$, то $D_{кр} = \frac{VV_{\pi}}{gn_{кр}} (\sin \varphi - b)$, где $b = p \sin \eta$. На рис. 4.9 представлена граница зоны возможных атак. Видно, что в рассматриваемом случае область пространства, где перегрузки превышают критические, меньше, чем для метода кривой погони. При этом для прямолинейной траектории $D_{кр} = 0$. Отметим, что при маневре цели по скорости граница зоны расширяется, но это дает существенно меньший эффект по сравнению с методом погони. То же можно сказать и про маневр цели по направлению. Однако, как и при наведении по методу погони, наиболее эффективным маневром цели будет маневр, направленный в сторону движения перехватчика.

Отдельно вкратце остановимся на определении величины перегрузки перехватчика на траектории при наведении с углом упрежде-

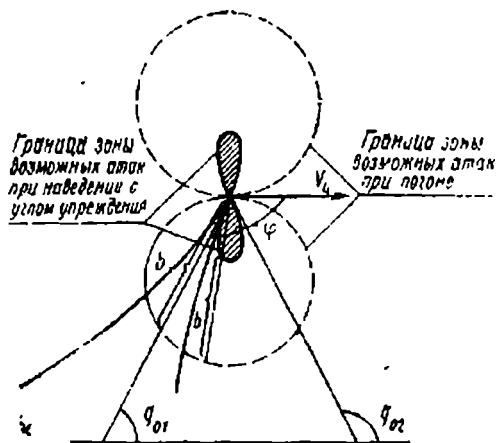


Рис. 4.9. Границы зоны возможных атак в методе наведения с постоянным углом упреждения

ния. Для метода погони имеем $n_{y \text{ пог}} = \frac{V\dot{\theta}}{g} = -\frac{VV_{\pi}}{gD} \sin q$. Для наведения с углом упреждения

$$n_{y \text{ упр}} = \frac{V\dot{\theta}}{g} = -\frac{V}{g} \left(\frac{V_{\pi} \sin q - V \sin \eta}{D} \right). \quad (4.31)$$

$\frac{n_{y \text{ упр}}}{n_{y \text{ пог}}} = \left(1 - \frac{\rho \sin \eta}{\sin q} \right) < 1$, т. е. перегрузки, действующие на ракету, при наведении по методу последовательного упреждения меньше, чем при реализации метода погони.

Абсолютное значение нормальной составляющей вектора перегрузки можно получить, если подставить в (4.31) значение D из формулы (4.28). При этом, если $v < 2$ ($\rho \sin \eta < 1$), то при сближении с целью перегрузка убывает (ракета приближается к устойчивой прямолинейной траектории). При $v > 2$ перегрузка неограниченно растет в конце траектории, даже при соблюдении условия $\rho \sin \eta < 1$. Случай $\rho \sin \eta > 1$ вообще не дает положительного результата в смысле поражения цели.

Сформулируем некоторые выводы по результатам анализа рассмотренного метода.

1. Достоинства и недостатки метода наведения с постоянным углом упреждения те же, что и у метода погони с той разницей, что нормальные перегрузки в обсуждаемом случае меньше, чем при погоне.

2. При угле упреждения, меняющемся на дистанции наведения, он должен рассчитываться с учетом дальности до цели, угла линии визирования и соотношения скоростей ракеты и цели.

3. С точки зрения кинематических траекторий скорость ракеты должна удовлетворять условию $\rho > 1$, $\rho \sin \eta < 1$, т. е. как и в методе погони, скорость ограничена сверху.

4.1.5. Метод параллельного сближения

При параллельном сближении в процессе наведения ракеты на цель линия визирования должна перемещаться в пространстве параллельно самой себе ($q = q_0 = \text{const}$). На рис. 4.10 схематически представлена схема параллельного сближения. При построении считались заданными траектория цели и $V_{\pi}(t)$, а также $V(t)$. Как нетрудно установить, линия визирования будет оставаться в процессе наведения параллельной самой себе, если вектор скорости ракеты в любой момент времени будет направлен в мгновенную точку встречи. Для выполнения этого условия необходимо

$$V \sin \eta(t) = V_{\pi} \sin \eta_{\pi}(t) \quad (4.32)$$

или

$$\rho \sin \eta = \sin \varphi.$$

В этом случае вектор относительной скорости всегда направлен на цель. Если цель не маневрирует, а скорость ракеты и цели постоянны, то траектория наведения с оптимальным постоянным углом

упреждения и траектория параллельного сближения совпадают. В общем же случае траектории различны. Кинематические соотношения для определения параметров движения в методе параллельного сближения имеют вид

$$\dot{q} = \frac{V \sin \eta - V_{ц} \sin \eta_{ц}}{D}; \quad (4.33)$$

$$\dot{D} = V_{ц} \cos \eta_{ц} - V \cos \eta. \quad (4.34)$$

В приведенных уравнениях взаимосвязанными являются $\eta(t)$ и $\eta_{ц}(t)$.

В общем виде при произвольных маневрах цели аналитическое решение уравнений (4.33), (4.34) невозможно. Для неманеврирующей цели при постоянной скорости ракеты решение тривиально; это пря-

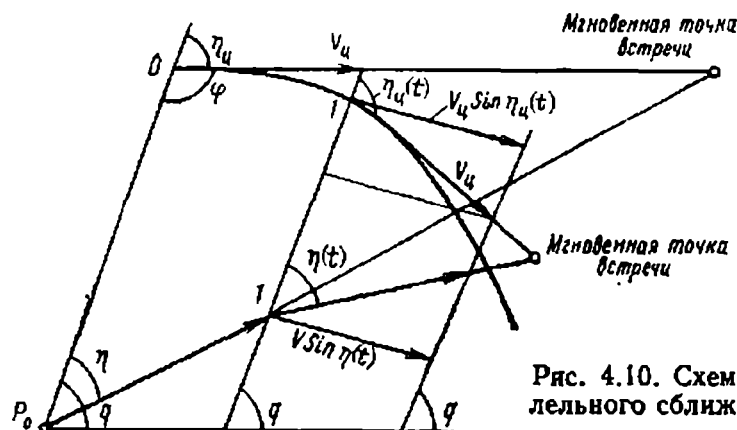


Рис. 4.10. Схема метода параллельного сближения

молинейная траектория при любом начальном ракурсе стрельбы, включая и переднюю полусферу. Это определяет и зону возможных атак, которая практически неограничена ввиду малости перегрузок. Ограничения по зоне наступают прежде всего по углу пеленга

$$\sin \eta_{\max} = p^{-1} \sin \varphi_{\max}.$$

Если максимальный угол пеленга позволяет обеспечить максимальный угол упреждения $\eta_{\max}$, то максимальный ракурс стрельбы

$$\varphi_{\max} = \arcsin(p \sin \eta_{\max}).$$

Если цель не маневрирует и скорости постоянны, то траектория ракеты прямолинейна. В этом случае

$$\sin \eta = p^{-1} \sin \eta_{ц}. \quad (4.35)$$

Поскольку $V_{ц} = \text{const}$, $V = \text{const}$, $\eta_{ц} = \text{const}$, то и $\eta = \text{const}$. По условию $\dot{q} = 0$, а следовательно, и $\dot{\theta} = 0$. Соответственно $n_y = 0$. Рассмотрим случай стрельбы по маневрирующей цели. Не нарушая общности, предположим, что решаем уравнение связи $\eta(t)$ и $\eta_{ц}(t)$ в малых приращениях:

$$\cos \eta \dot{\eta} = V^{-2} \{ V (\dot{V}_{ц} \sin \eta_{ц} + V_{ц} \dot{\eta}_{ц} \cos \eta_{ц}) - \dot{V} V_{ц} \sin \eta_{ц} \}. \quad (4.36)$$

1. Рассмотрим маневр цели по скорости $|V_{ц}| \neq \text{const}$; $V = \text{const}$; $\eta_{ц} = \text{const}$, $\dot{\eta}_{ц} = 0$. Поскольку $\dot{q} = 0$, то из (4.36) имеем $\dot{\eta} = \dot{\theta} =$

$= \frac{\dot{V}_u \sin \eta_u}{V \cos \eta}$. Следовательно, маневр цели по скорости вызывает нормальную перегрузку ракеты, но эта перегрузка тем меньше, чем больше скорость перехватчика.

2. Маневр цели по направлению: $|V_u| = \text{const}$; $V = \text{const}$; $\eta_u \neq \text{const}$; $\dot{q} = 0$.

$$\dot{\eta} = \dot{\theta} = \frac{V_u \cos \eta_u \dot{\eta}_u}{V \cos \eta} - \frac{1}{\rho} \dot{\theta}_u \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \eta_u}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \eta_u}}.$$

Естественно, что при $q = \text{const}$, $\dot{\eta}_u = \dot{\theta}_u$:

$$\dot{\eta} = \dot{\theta} = \dot{\theta}_u \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\rho^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Отсюда

$$\dot{\theta} \dot{\theta}_u^{-1} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} (p^2 - \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.37)$$

Из (4.37) следует при обычном условии $p > 1$, что угловая скорость $\dot{\theta}$ меньше угловой скорости $\dot{\theta}_u$ маневрирующей цели. Следует отметить, что при стрельбе вдогон, когда $\varphi = 0$, $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_u} = \frac{1}{p}$. При

стрельбе под боковым ракурсом $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_u} = 0$, т. е. и здесь маневр

цели практически бесполезен с точки зрения снижения эффективности ее перехвата. В этом одно из основных преимуществ метода параллельного сближения.

Проанализируем влияние неравномерности скорости ракеты на собственные нормальные перегрузки при параллельном сближении. Предположим, что ракета-перехватчик движется равноускоренно: $V \neq \text{const}$, $\dot{V} = \text{const}$, при этом $V_u = \text{const}$, $\eta_u = \text{const}$. Тогда из выражения (4.36) получим:

$$\dot{\eta} = \dot{\theta} = - \frac{\dot{V} V_u \sin \eta_u}{V^2 \cos \eta} = - \frac{\dot{V} V_u}{V^2} \frac{\sin \eta}{\cos \eta} = - \frac{\dot{V}}{V} \text{tg } \eta.$$

При выводе соотношения использовалась зависимость (4.35). Соот-

ветственно $n_y^{(\dot{V})} = \frac{V \dot{\theta}}{g} = - \frac{\dot{V}}{g} \text{tg } \eta = - n_x \text{tg } \eta$. Итак, даже при равномерном и прямолинейном полете цели ракета при параллельном сближении будет иметь нормальную перегрузку, зависящую от ее переменной скорости. Эта перегрузка пропорциональна продольной перегрузке и углу упреждения и при боковых ракурсах стрельбы может достигать больших значений. Для уменьшения влияния продольной перегрузки на ее нормальную составляющую нужно иметь как можно большую скорость перехватчика и поддерживать ее постоянной. Для решения этой задачи на борту ракеты требуется установка маршевого двигателя для поддержания постоянной скорости ее движения.

Основные выводы по результатам анализа сводятся к следующему:

1. При параллельном сближении атака цели возможна как в направлении задней, так и в направлении передней полусфер.

2. Время наведения минимально, так как траектории сближения практически всегда имеют прямолинейный характер.

3. Перегрузки ракеты в процессе наведения сравнительно невелики и, по крайней мере, обычно меньше перегрузок цели.

Однако этот метод сложен в реализации, требует установки сложной и часто громоздкой бортовой аппаратуры.

4.1.6. Метод пропорциональной навигации

Кинематическая связь, накладываемая на движение ракеты этим методом, определяется тем, что в процессе наведения величина отношения угловой скорости поворота вектора скорости перехватчика к угловой скорости линии визирования цели остается постоянной. При наведении с постоянным углом упреждения устойчивы только прямолинейные траектории задней полусферы q_{01} , а прямолинейные траектории передней полусферы (q_{02}) неустойчивы. Поэтому все траектории передней полусферы отходят в сторону от прямолинейной и переходят в заднюю полусферу, асимптотически приближаясь к устойчивой прямолинейной траектории задней полусферы. Поставлена задача: нельзя ли каким-то образом сделать устойчивыми и прямолинейные траектории передней полусферы? Естественно для достижения этой цели следует ввести дополнительные условия. Для заданных V , $V_{ц}$, q_0 и полученном η_0 для прямолинейных траекторий справедливо равенство

$$\frac{dq}{dt} = \frac{-V_{ц} \sin q_0 + V \sin \eta_0}{D} = 0. \quad (4.38)$$

В вариациях, если малые приращения могут иметь переменные q , $\dot{q}$, η , D , запишем:

$$\Delta \dot{q} = - \frac{V_{ц} \sin (q_0 + \Delta q) + V \sin (\eta + \Delta \eta)}{D + \Delta D};$$

$$D \Delta \dot{q} + \Delta D \Delta \dot{q} = -V_{ц} \sin q_0 \cos \Delta q - \\ - V_{ц} \cos q_0 \sin \Delta q + V \sin \eta_0 \cos \Delta \eta + V \cos \eta_0 \sin \Delta \eta.$$

Используя обычные допущения, имеем

$$D \Delta \dot{q} = - (V_{ц} \cos q_0) \Delta q + (V \cos \eta_0) \Delta \eta. \quad (4.39)$$

Напомним, что при наведении с постоянным углом упреждения

$$\eta = \text{const}, (V \cos \eta_0) \Delta \eta \equiv 0 \text{ и } D \Delta \dot{q} = - (V_{ц} \cos q_0) \Delta q.$$

Неустойчивость прямолинейных траекторий в передней полусфере в этом случае связана с изменением знака $\cos q_0$ при переходе q_0 через $\pi/2$, что приводит к однозначным вариациям угла и угловой скорости линии визирования. Введем дополнительные условия и попытаемся сделать устойчивыми прямолинейные траектории передней полусферы с помощью соответствующего изменения угла упреждения, компенсиру-

ющего эффект неустойчивости. Причем изменять η будем в функции от угла наклона линии визирования q . Можно, например, на вариацию $\Delta\eta$ наложить такую функциональную связь:

$$\Delta\eta = (1 - k) \Delta q. \quad (4.40)$$

Это удобно, так как надлежащим выбором коэффициента k , называемым навигационной постоянной, можно получить $\Delta\eta$ соответствующей величины и знака для обеспечения устойчивости прямолинейных траекторий. Подставим (4.40) в (4.39):

$$D \Delta\dot{q} - [-V_{\Pi} \cos q_0 + V \cos \eta_0] (1 - k) \Delta q = 0.$$

Видно, что если выражение в квадратных скобках будет всегда меньше нуля, независимо от знака q_0 (с учетом изменения знака

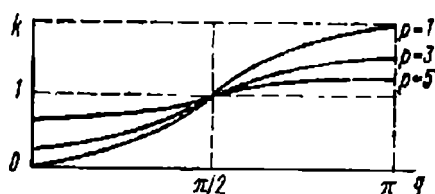


Рис. 4.11. График изменения минимальных значений навигационной постоянной в функции q_0 для различных отношений скоростей цели и ракеты

$\cos q_0$ при переходе q_0 через $\pi/2$), то вариации Δq и $\Delta\dot{q}$ будут противоположного знака и прямолинейные траектории всегда будут устойчивыми независимо от полусфер. Итак, требуем $-V_{\Pi} \cos q_0 + V \cos \eta_0 - kV \cos \eta_0 < 0$, т. е.

$$\begin{aligned} k &\geq 1 - \frac{V_{\Pi} \cos q_0}{V \cos \eta_0} = 1 - \frac{\cos q_0}{p \cos \eta_0} = 1 - \frac{\cos q_0}{p \sqrt{1 - \sin^2 \eta_0}} = \\ &= 1 - \frac{\cos q_0}{\sqrt{p^2 - \sin^2 q_0}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Следовательно, (4.41) определяет необходимое значение коэффициента k для получения устойчивых прямолинейных траекторий. Нетрудно видеть, что знаменатель — величина всегда положительная, ибо $p > 1$, а его минимум соответствует $q_0 = \pi/2$. На рис. 4.11 для различных значений p приведены минимальные значения k в зависимости от q_0 .

Обобщая полученные результаты, можно отметить, что:

- 1) при $k > 2$ прямолинейные траектории устойчивы;
- 2) $k = 1$ соответствует наведению с постоянным углом упреждения, так как $\Delta\eta = (1 - k) \Delta q = 0$;

3) поскольку $q = \theta + \eta$, т. е. $\Delta\theta = k \Delta q$, то $\Delta\eta = \frac{1-k}{k} \Delta\theta$. Тогда при $k \rightarrow \infty$ $\Delta\eta = -\Delta\theta$, т. е. $\Delta q = 0$. Следовательно, $k = \infty$ соответствует случаю параллельного сближения. Отсюда также следует, что траектории параллельного сближения устойчивы;

4) разделив обе части выражения $\Delta\theta = k \Delta t$ на Δq и перейдя к пределу, получаем кинематическую связь метода пропорциональной навигации

$$\dot{\theta} = k\dot{q} \text{ или } \dot{\theta}/\dot{q} = k.$$

В заключение обсудим характер траекторий, отвечающих методу пропорциональной навигации. Для их анализа запишем уравнение прямолинейной траектории и уравнение связи в следующем виде:

$$V \sin \eta - V \sin \eta_{ц} = V \sin \eta - V_{ц} \sin (q - \theta_{ц}) = 0; \quad (4.42)$$

$$\eta = \eta_0 + (1 - k)(q - q_0). \quad (4.43)$$

Введем (4.43) в (4.42):

$$-V_{ц} \sin (q - \theta_{ц}) + V \sin [\eta_0 + (1 - k)(q - q_0)] = 0. \quad (4.44)$$

Начальное значение η_0 определяем из соотношения:

$$V \sin \eta_0 - V_{ц} \sin (q_0 - \theta_{ц0}) = 0.$$

Предположим, что при выбранном угле упреждения η_0 для данного q_0 , стреляем по цели под углом, отличным от q_0 . Проверим, не будет ли в этом случае других прямолинейных траекторий. Наложим условия:

$$q_{ц\text{еи}c\text{г}ь} = q^*; \quad V_{ц} = \text{const}; \quad V = \text{const}; \quad \theta_{ц} = \theta_{ц0} = \text{const}.$$

Тогда уравнение (4.44) перепишется:

$$-V_{ц} \sin (q^* - \theta_{ц0}) + V \sin [\eta_0 + (1 - k)q^* + (k - 1)q_0] = 0.$$

Для выбранных конкретных значений k , $\theta_{ц0}$, η_0 и q_0 последнее уравнение дает несколько решений. Например, при $k = 3$, $\theta_{ц0} = 0$; $\eta_0 + (k - 1)q_0 = \pi/3$; $V_{ц}V^{-1} = 0,6$, как видно из рис. 4.12, имеют место четыре решения ($q_1^* \dots q_4^*$) и соответственно четыре прямолинейные траектории. Следует помнить, что найденные траектории получились побочно при определенной основной траектории, для которой рассчитывался угол η_0 при некотором q_0 . При пропорциональном сближении существуют устойчивые прямолинейные траектории. Все другие располагаются в секторах между ними, т. е. качественная картина такая же, как в методе погони или наведении с упреждением, только нормальные перегрузки в рассмотренном случае меньше, так как секторы между прямолинейными траекториями уже и кривизна траекторий меньше. Чем больше k , тем больше прямолинейных траекторий. Наконец, при $k \rightarrow \infty$ все траектории прямолинейны и устойчивы.

4.1.7. Метод прямого наведения

При методе прямого наведения, который можно рассматривать как частный случай метода наведения с постоянным углом пеленга, угол $\epsilon = 0$ и ось ракеты направлена по линии визирования.

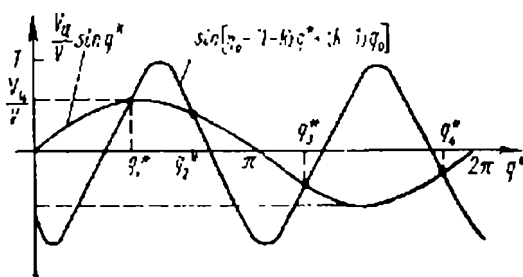


Рис. 4.12. К нахождению значений q_i^* ($i = 1, \dots, 4$)

При этом вектор скорости центра масс ракеты направлен в точку C , расположенную позади или впереди движущейся цели в зависимости от направления ее движения. Скорость изменения расстояния между ракетой и целью за бесконечно малый промежуток времени равна разности проекций скоростей V_{π} и V на направление линии визирования

$$\frac{dD}{dt} = V_{\pi} \cos \eta_{\pi} - V \cos \eta. \quad (4.45)$$

Для сближения ракеты с целью необходимо, чтобы выполнялось неравенство $dD/dt < 0$, т. е. $V \cos \eta$ должно быть больше $V_{\pi} \cos \eta_{\pi}$. Проекция разности составляющих скоростей ракеты и цели на нормаль к линии визирования приводит к ее вращению с угловой скоростью $\dot{q}$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V_{\pi} \sin \eta_{\pi} - V \sin \eta}{D}. \quad (4.46)$$

Кинематических уравнений (4.45) и (4.46) недостаточно для определения параметров движения ракеты. Дело заключается в том, что угол между продольной осью ЛА и вектором скорости, т. е. угол атаки, заранее неизвестен. В этом случае, в частности, при наведении ракеты в вертикальной плоскости необходимо или задаться функцией $\alpha(t)$, определяя угол упреждения и угол наклона траектории по очевидным соотношениям $\eta(t) = \alpha(t)$; $\theta(t) = q(t) - \eta(t)$, или задаться величиной нормальной перегрузки $n_y(t)$ и вычислять $\theta(t)$, решая дифференциальное уравнение $\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{V} (n_y - \cos \theta)$. Уравнение связи углов будет иметь вид $\eta = q - \theta$. В общем случае решение носит частный характер, как требующее численного интегрирования дифференциальных уравнений.

4.1.8. Особенности методов теленаведения

Наличие командного пункта (КП) в системах теленаведения открывает возможность использования множества методов наведения. Действительно, располагая на КП текущей информацией о параметрах движения ракеты и цели, можно рассчитать любую траекторию наведения с учетом возможностей ЛА и соответственно реализовать любой метод наведения. Вместе с тем теленаведение имеет свою специфику и свои методы, из которых наибольшее применение находят следующие два метода:

метод наведения с упреждением, обычно называемый **угловым методом наведения**;

метод совмещения или накрытия цели, называемый **«методом трех точек»**.

В данных методах ограничения (кинематические связи) накладываются на углы, характеризующие положение цели и ракеты относительно КП.

4.1.9. Угловой метод наведения

Положение упрежденной точки в данном методе выбирается так, чтобы за время движения до нее ракеты цель успела бы переместиться в окрестность той же точки. В качестве координат ракеты ($j = P$) и цели ($j = Ц$) в рамках обсуждаемого метода выбираются наклонная дальность D_j , азимут A_j и угол места q_j . В связи с тем, что положение упрежденной точки непрерывно пересчитывается с учетом параметров движения цели и ракеты, управление последней формируется так, чтобы она (ракета) все время направлялась в эту текущую, «мгновенную», упрежденную точку встречи. В связи с тем, что истинное движение цели отличается от движения, отвечающего принятой гипотезе, положение упрежденной точки будет перемещаться в пространстве в процессе проводимых в темпе полета расчетов по данным измерений истинных значений координат. Однако даже при применении простейших гипотез о движении цели перемещение в пространстве упрежденной точки будет происходить все же медленнее, чем перемещение цели. В связи с этим возникает «эффект спрямления траектории ракеты», сопровождаемый уменьшением потребных перегрузок и динамических ошибок наведения [50]. Выработка углов упреждения ΔA и Δq обычно осуществляется в функции координат ракеты и цели, а также их производных. Единственное условие, которому обязательно должна удовлетворять программа изменения углов упреждения, состоит в выполнении равенства $\Delta A = \Delta q = 0$ при $D_p = D_{ц}$. Данное обстоятельство делает обязательным измерение в рамках рассматриваемого метода дальностей до цели и ракеты в течение всего процесса наведения. Для определения составляющих вектора перегрузки на координатные направления, используемые в угловых методах наведения, предварительно получим выражения тангенциальной (касательной к траектории) и нормальной составляющих вектора ускорения.

Пусть текущая дальность от КП до ракеты задается в виде

$$\mathbf{D}(t) = D(t) \mathbf{D}^\circ(t), \quad (4.47)$$

где $\mathbf{D}^\circ(t)$ — орт (единичный вектор) текущей дальности, характеризующий направление линии визирования ракеты. Дифференцируя (4.47) по времени, получим (опуская аргумент для упрощения записи) выражение для вектора скорости ракеты

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{V} = \dot{D} \mathbf{D}^\circ + D \dot{\mathbf{D}}^\circ \quad (4.48)$$

вектор ускорения

$$\ddot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{D} \mathbf{D}^\circ + 2\dot{D} \dot{\mathbf{D}}^\circ + D \ddot{\mathbf{D}}^\circ \quad (4.49)$$

и соответственно тангенциальную и нормальную составляющие вектора ускорения:

$$\mathbf{a}_\tau = \dot{V} \mathbf{V}^\circ = \dot{V} V^{-1} \mathbf{V}; \quad (4.50)$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\tau = D \ddot{\mathbf{D}}^\circ + 2\dot{D} \dot{\mathbf{D}}^\circ + D \ddot{\mathbf{D}}^\circ - \dot{V} V V^{-1}. \quad (4.51)$$

Последнее уравнение удобно представить в несколько иной форме, получаемой в результате подстановки значения $\dot{D}$ из (4.48) в (4.51)

$$a_n = (\ddot{D} - \dot{D}\dot{V}V^{-1}) D^\circ + (2\dot{D} - D\dot{V}V^{-1}) \dot{D}^\circ + D\ddot{D}^\circ. \quad (4.52)$$

Для нахождения скалярных выражений составляющих a_n на оси выбранной координатной системы с осями $[D]$, $[A]$ и $[q]$ спроецируем на эти оси полученное уравнение (4.52). Для этого предварительно найдем выражения скалярных проекций D° , $\dot{D}^\circ$ и $\ddot{D}^\circ$. Очевидно, что

$$D^\circ = 1 \cdot [D]^\circ + 0 \cdot [q]^\circ + 0 \cdot [A]^\circ; \quad (4.53)$$

$$\dot{D}^\circ = \omega \times D^\circ = \begin{vmatrix} [D]^\circ & [q]^\circ & [A]^\circ \\ \dot{A} \sin q & \dot{A} \cos q & \dot{q} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (4.54)$$

$$\ddot{D}^\circ = \ddot{q} [q]^\circ + \dot{q} [\dot{q}]^\circ - (\ddot{A} \cos q - \dot{A} \dot{q} \sin q) [A]^\circ - \dot{A} \cos q [\dot{A}]^\circ; \quad (4.55)$$

$$\omega = \dot{A} + \dot{q}; \quad (4.56)$$

где $[\dot{q}]^\circ = \omega \times [q]^\circ = \dot{A} \sin q [A]^\circ - \dot{q} [D]^\circ; \quad (4.57)$

$$[\dot{A}]^\circ = \omega \times [A]^\circ = \dot{A} \cos q [D]^\circ - \dot{A} \sin q [q]^\circ; \quad (4.58)$$

Соответственно получим

$$\dot{D}^\circ = \dot{q} [q]^\circ - \dot{A} \cos q [A]^\circ; \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}^\circ = & -[\ddot{q} + \dot{A}^2 \cos^2 q] [D]^\circ + (\ddot{q} + \dot{A}^2 \sin q \cos q) [q]^\circ + \\ & + (2\dot{A} \dot{q} \sin q - \ddot{A} \cos q) [A]^\circ, \end{aligned} \quad (4.60)$$

Имея в виду (4.53), (4.59) и (4.60), после подстановки выражений соответствующих значений ортов в (4.52) найдем окончательно

$$\begin{aligned} a_n = & [\ddot{D} - \dot{D}\dot{V}V^{-1} - D(\ddot{q} + \dot{A}^2 \cos^2 q)] [D]^\circ + [(2\dot{D} - D\dot{V}V^{-1}) \dot{q} + \\ & + D(\ddot{q} + \dot{A}^2 \sin q \cos q)] [q]^\circ - [(2\dot{D} - D\dot{V}V^{-1}) \dot{A} \cos q + \\ & + D(\ddot{A} \cos q - 2\dot{A} \dot{q} \sin q)] [A]^\circ. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Для перехода от ускорений к перегрузкам следует воспользоваться известным соотношением $n = a/g - g/g$, которое применительно к введенным базисным направлениям принимает вид:

$$n = n_{[D]} [D]^\circ + n_{[q]} [q]^\circ + n_{[A]} [A]^\circ, \quad (4.62)$$

причем модули проекций ускорений силы тяжести на рассматриваемые оси определяются следующим образом: $g_{[D]} = g \sin q$; $g_{[q]} = g \cos q$; $g_{[A]} = 0$. Как следует из структуры приведенных уравнений, для нахождения значений ускорений и перегрузок, испытываемых ракетой в процессе наведения на перемещающуюся цель, необходимо дополнить рассматриваемые уравнения соотношениями, определяемыми методом наведения и устанавливающими связи между скоростями объектов по модулю и направлению движения.

4.1.10. Наведение по методу совмещения

Наведение по методу совмещения (методу трех точек) осуществляется путем управления ракетой, обеспечивающего удержание ее на прямой, соединяющей станцию наведения с целью. Таким образом, в данном методе в каждый момент времени на указанной прямой будут располагаться три точки: станция наведения, центры масс ракеты и цели. Вследствие этого траекторию наведения, отвечающую данному случаю, называют **трехточечной кривой**.

В каждый момент времени вектор скорости ракеты будет направлен в сторону ожидаемой точки встречи ракеты с целью под некоторым углом к радиусу-вектору, проходящему через КП, центры масс ракеты и цели. Таким образом, при реализации метода будет иметь место наведение с некоторым углом упреждения, причем линия визирования составит часть радиуса-вектора, вращающегося при движении цели и ракеты вокруг точки, в которой расположен КП. Определим величину этого угла упреждения $\eta(t)$ (рис. 4.13). Будем считать, что за бесконечно малый промежуток времени dt цель переместится из положения a в положение b , при этом радиус-вектор D_{Π} повернется на угол dq , а ракета из точки a' переместится в точку b' . Имея в виду тригонометрические соотношения, вытекающие из рис. 4.13, запишем

$$\sin \varphi = \frac{\overline{bc}}{V_{\Pi} dt} \quad \text{и} \quad \sin \eta = \frac{\overline{b'c'}}{V dt}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\overline{b'c'}}{\overline{bc}} \approx \frac{D_p}{D_{\Pi}},$$

получим

$$\sin \eta = \frac{V_{\Pi}}{V} \frac{D_p}{D_{\Pi}} \sin \varphi. \quad (4.63)$$

Решая (4.63) совместно с уравнением

$$\dot{D}_p = V \cos \eta, \quad (4.64)$$

также вытекающим из рисунка, представляется возможным получить данные для построения траектории наведения в координатах D_p и q . Проекции нормального ускорения на оси $[D]$ и $[q]$ могут быть

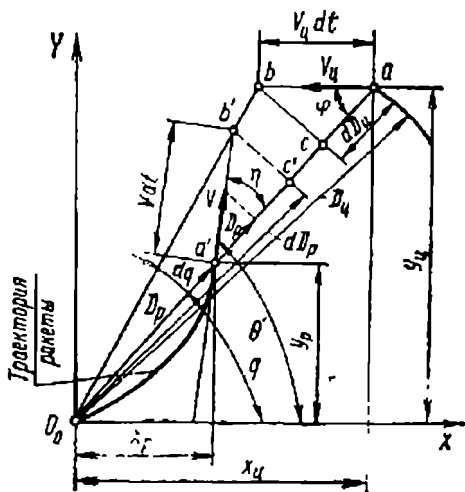


Рис. 4.13. Схема определения угла упреждения в методе совмещения

найденны из (4.61), если учесть, что для рассматриваемой «плоской» задачи $A = \text{const}$, $a_{n[A]} = 0$:

$$a_{n[D]} = \ddot{D}_p - \dot{D}_p \dot{V} V^{-1} - D_p \dot{q}^2; \quad (4.65)$$

$$a_{n[q]} = (2\dot{D}_p - D_p \dot{V} V^{-1}) \dot{q} + D_p \ddot{q}. \quad (4.66)$$

Получение решения возможно при известных значениях характеристик движения цели $D_{\Pi}(t)$, $a_{\Pi}(t)$, $q = q_{\Pi}$, $V_{\Pi}(t)$ и фиксированном профиле скорости ракеты $V(t)$.

Учитывая, что dD_p (см. рис. 4.13) есть величина бесконечно малая, $D_p + dD_p \approx D_p$ и тогда

$$(D_p dq)^2 + (dD_p)^2 = (V dt)^2. \quad (4.67)$$

Разделим правую и левую части равенства (4.67) на $(dq)^2$. В результате будем иметь

$$\left(\frac{dD_p}{dq}\right)^2 + D_p^2 = V^2 \left(\frac{dt}{dq}\right)^2. \quad (4.68)$$

При горизонтальном прямолинейном движении цели $\varphi = q$ и потому

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V_{\Pi} \sin q}{D_{\Pi}}. \quad (4.69)$$

Это дает возможность преобразовать (4.68) к виду

$$\left(\frac{dD_p}{dq}\right)^2 + D_p^2 = \frac{D_{\Pi}^2 p^2}{\sin^3 q}. \quad (4.70)$$

Так как $y_{\Pi} = \text{const}$, удобно осуществить замену $D_{\Pi} = y_{\Pi} \sin^{-1} q$, и тогда

$$\left(\frac{dD_p}{dq}\right)^2 + D_p^2 = \frac{(py_{\Pi})^2}{\sin^4 q}. \quad (4.71)$$

Полученное дифференциальное уравнение не интегрируется в квадратурах. Оно может быть решено приближенно (см., например, [54]). Для определения времени движения воспользуемся зависимостью

$$t = \frac{y_{\Pi} (\text{ctg } q_0 - \text{ctg } q)}{V_{\Pi}}. \quad (4.72)$$

Нахождение величины нормального ускорения осуществляется по формуле

$$a_n = V \frac{d\theta}{dt}. \quad (4.73)$$

Определение выражения производной $\frac{d\theta}{dt}$ требует замены аргумента. Представим

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dq} \cdot \frac{dq}{dt}. \quad (4.74)$$

Имея в виду, что

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V \sin \theta}{V \cos \theta} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d(D_p \sin q)}{d(D_p \cos q)}, \quad (4.75)$$

найдем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{D_{pq}' \sin q + D_p \cos q}{D_{pq}' \cos q - D_p \sin q}. \quad (4.76)$$

Дифференцируя по q , получим

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dq} = \frac{D_p^2 + 2(D_{pq}')^2 - D_{pq}' D_{pq}''}{(D_{pq}' \cos q - D_p \sin q)^2}. \quad (4.77)$$

Учитывая, что $\cos^{-2} \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$, воспользовавшись зависимостью (4.76), запишем

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{D_p^2 + (D_{pq}')^2}{(D_{pq}' \cos q - D_p \sin q)^2}. \quad (4.78)$$

Подстановка (4.78) в (4.77) дает

$$\frac{d\theta}{dq} = \frac{D_p^2 + 2(D_{pq}')^2 - D_{pq}' D_{pq}''}{D_p^2 + (D_{pq}')^2}. \quad (4.79)$$

Значение D_{pq}' найдем из (4.71). Предварительно обозначим через $p^* = (py_{\Pi})^2$. Тогда

$$D_{pq}' = \sqrt{p^* \sin^{-4} q - D_p^2}. \quad (4.80)$$

Соответственно для определения второй производной D_{pq}'' сначала продифференцируем (4.71)

$$D_{pq}' D_{pq}'' + D_p D_{pq}' = -2p^* \operatorname{ctg} q \sin^{-4} q. \quad (4.81)$$

Подставляя (4.80), получим

$$D_{pq}'' = -\frac{2p^*}{\sin^4 q} \frac{\operatorname{ctg} q}{\sqrt{p^* \sin^{-4} q - D_p^2}} - D_p. \quad (4.82)$$

Тогда окончательно

$$\frac{d\theta}{dq} = 2 \left(1 + \frac{D_p \operatorname{ctg} q}{\sqrt{p^* \sin^{-4} q - D_p^2}} \right). \quad (4.83)$$

Имея в виду (4.73) и вводя в рассмотрение постоянную высоту движения цели, запишем

$$a_{\Pi p} = \frac{2pV_p^2 \sin^2 q}{y_{\Pi}} \left(1 + \frac{D_p \operatorname{ctg} q}{\sqrt{(y_{\Pi} p)^2 \sin^{-4} q - D_p^2}} \right). \quad (4.84)$$

На основе анализа соотношения (4.84) можно сделать следующие выводы.

1. Поскольку при сближении $D_p \rightarrow D_{\Pi}$

$$y_{\Pi}^2 p^2 \sin^{-4} q - D_p^2 = D_{\Pi}^2 p^2 \sin^{-2} q - D_{\Pi}^2 = D_{\Pi}^2 \left(\frac{p^2}{\sin^2 q} - 1 \right). \quad (4.85)$$

При $p < 1$ для некоторых значений q возможно возникновение бесконечно больших нормальных ускорений ракеты. Поэтому в принципе следует стремиться к тому, чтобы выполнялось условие $p > 1$.

2. В то же самое время a_{np} прямо пропорционально квадрату скорости цели и растет с увеличением p , а при больших значениях $V_{ц}$ и p оно может оказаться недопустимо большим.

3. В силу того, что нормальное ускорение ракеты обратно пропорционально расстоянию до цели $D_{ц} = y_{ц}/\sin q$, a_{np} увеличивается по мере сближения ракеты с целью.

Перечисленные особенности метода совмещения ограничивают его применимость. Как правило, он используется при наведении ракет на сравнительно тихходные цели.

4.2. СИСТЕМЫ САМОНАВЕДЕНИЯ

4.2.1. Понятие о системах управления самонаводящихся ракет

Информация об относительном положении цели при самонаведении получается на борту ракеты с помощью устройства, называемого координатором цели. Поскольку положение цели относительно ракеты в системах самонаведения может быть определено лишь в системе координат, связанной с координатором, на его выходе будет иметь место сигнал ошибки, преобразуемый затем в сигнал наведения и поступающий в систему управления нормальными перегрузками

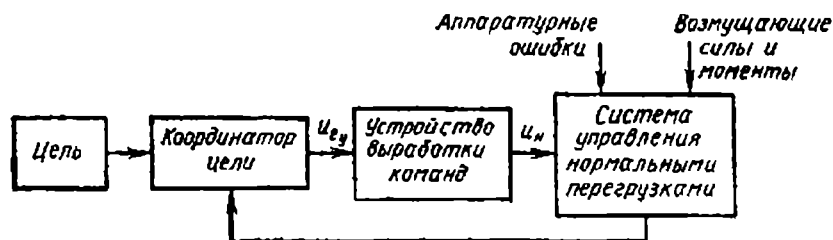


Рис. 4.14. Функциональная схема системы самонаведения

перегрузками (рис. 4.14). В зависимости от месторасположения первичного источника энергии самонаведение подразделяется на три типа: активное, полуактивное и пассивное. Каждый из указанных типов самонаведения обладает присущими только ему достоинствами и недостатками. Так, например, достоинством активного и пассивного самонаведения является полная автономность после захвата цели координатором, в то время как полуактивное самонаведение ограничивает маневр носителя, который в процессе наведения ракеты должен выдерживать траекторию наведения, отвечающую условию обеспечения облучения цели. Пассивное самонаведение обладает существенно меньшей дальностью действия, чем активное, но превосходит последнее с точки зрения скрытности процесса, более высокой надежности, меньших габаритных размеров и массы системы.

4.2.2. Способы формирования сигнала ошибки при самонаведении

Сигнал ошибки самонаведения ϵ_y должен характеризовать отклонение траектории движения ракеты от траектории номинального движения, соответствующего принятому методу наведения. Очевидно, что способы формирования сигнала ошибки будут различаться, прежде всего, в зависимости от того, какие параметры относительного движения следует измерять, чтобы обеспечивалась возможность реализации требуемого метода самонаведения. Информация о взаимном положении ракеты и цели формируется координатором цели в виде сигналов, пропорциональных угловым координатам, задающим положение линии визирования относительно системы координат, связанной с координатором. В зависимости от типа координатора в ряде случаев, кроме угломерной информации, могут быть получены и сигналы, пропорциональные дальности и скорости сближения (например, с помощью радиолокационного координатора цели)

Таким образом, можно сделать вывод, что способы формирования сигнала ошибки при самонаведении определяются не только характером измеряемых параметров, но и тем, как используется полученная информация и каким образом ориентируются в пространстве оси, связанные с координатором.

Имея в виду ограничения, накладываемые методами наведения, все возможные схемы ориентирования осей систем координат, связанных с координатором, подразделим на:

- схему жесткой привязки осей координатора к корпусу ракеты;
- схему совмещения оси координатора с вектором скорости (набегающим потоком);
- схему, соответствующую поддержанию неизменной ориентации приборной системы координат в пространстве;
- схему ориентирования оси координатора по линии визирования цели.

Схема неподвижного крепления координатора на борту ракеты является наиболее простой. При совмещении оси координатора с продольной осью ракеты сигнал с выхода координатора будет пропорционален углу между линией визирования и продольной осью ракеты, т. е. пеленгу цели $\epsilon = \eta \pm \alpha$. Недостатком такого рода схемы установки координатора является то, что она практически применима к координаторам со сравнительно большим углом зрения, не обладающим высокой угловой разрешающей способностью.

Использование схемы ориентирования осей координатора по вектору воздушной скорости приводит к использованию «развязанного» координатора, ось чувствительности которого самоориентируется, например, с помощью флюгера, по набегающему потоку. Сигнал на выходе такого координатора будет приближенно отражать (с точностью до погрешностей работы флюгерного устройства) величину угла η . Следует иметь в виду, однако, что применение схемы возможно только при дозвуковых режимах движения. Стабилизация чувствительного элемента координатора, как правило, требует ис-

пользования гиросtabilизатора, фиксирующего заданное направление в пространстве. Если обозначать угол между этим фиксируемым направлением и соответствующим направлением базовой системы координат (например, направлением местного горизонта) через q_* , то без учета ошибок стабилизации координатор такого типа позволит получить информацию о разности $q_* - q$. При ориентировании чувствительного элемента координатора по линии визирования он должен иметь следящую систему, отличающуюся от автоследящих по угловым координатам антенн РЛС только тем, что помимо углового слежения она (эта система) обеспечивает стабилизацию своего чувствительного элемента относительно корпуса ракеты. При условии идеальной стабилизации снимаемый с выхода координатора сигнал будет пропорционален углу между осью ракеты и осью координатора, т. е. так же как и в первом случае, углу пеленга φ . Отличие будет заключаться в том, что здесь уже чувствительный элемент координатора может иметь небольшой угол зрения. Для ориентирования координатора цели по линии визирования может быть использован [50] следящий силовой гиросtabilизатор, одновременно совмещающий функции гиросtabilизатора и следящей системы, отслеживающей изменение угла q . Кроме измерения угла пеленга, необходимого для наведения ракеты, в данном случае представляется возможным одновременно измерять, например, с помощью датчика угловой скорости (ДУСа) угловую скорость вращения оси координатора, примерно равную угловой скорости линии визирования цели $\dot{q}$.

Имея в виду изложенное, перейдем непосредственно к обсуждению возможных вариантов формирования сигнала ошибки для различных методов самонаведения.

Реализация метода прямого наведения связана с выполнением условия $q = 0$, следовательно, сигнал ошибки должен быть сформирован исходя из соотношения $\varepsilon_y = q$. Получение сигнала ошибки такого вида возможно либо с помощью жестко связанного с корпусом ракеты координатора, либо посредством следящего координатора.

При наведении с постоянным углом упреждения (в частном случае, равным нулю) необходимо, чтобы в течение всего времени полета он бы поддерживался равным наперед заданному значению η^* . В связи с этим сигнал ошибки должен быть пропорционален величине $\varepsilon_y = \eta^* - \eta$. Техническая реализация очевидно возможна в нескольких вариантах. Наиболее рациональным считается следующий. Определение угла η осуществляется на основе использования соотношения $\eta = \varepsilon \pm \alpha$. Измерение угла пеленга при этом может быть проведено с помощью жестко связанного с корпусом ракеты координатора, а угол атаки вычисляется при наличии показаний акселерометра, характеризующих поперечную составляющую вектора перегрузки. Действительно

$$\alpha = R(V, y) n_{y\kappa}, \quad (4.86)$$

где $R(V, y)$ — программная функция, заданная в виде переменных коэффициентов, равная $R(V, y) \approx mg(Y_a^2 + X_a)^{-1}$. Реализация

метода параллельного сближения также допускает различные варианты использования схем формирования сигнала ошибки. Первый — базируется на выполнении соотношения $q_* - q = 0$, где q_* — требуемое постоянное значение угла q , задающее ориентацию линии визирования относительно фиксированной базы. При этом в качестве ошибки ϵ_y выступает разность $\epsilon_y = q_* - q$, которая может быть получена с помощью гиросtabilизированного координатора. Использование жесткозакрепленного на борту ракеты координатора требует иного подхода. Действительно, с выхода координатора в этом случае снимается сигнал, пропорциональный ϵ . Но угол q , необходимый для определения сигнала ошибки, связан с ϵ отношением вида $q = \epsilon + \phi$, где ϕ — угол тангажа, который может быть измерен с помощью свободного гироскопа. При этом начальная выставка свободного гироскопа в пространстве должна быть осуществлена под углом q_* .

Если скорости ракеты и цели постоянны и при старте ракеты известен оптимальный угол упреждения (η_*), то в идеальном случае

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{V_{\pi} \sin q + V \sin \eta}{D} = 0. \quad (4.87)$$

В процессе наведения угол упреждения может отклоняться от заданного, кроме того, непрерывно меняется дальность до цели:

$$(D + \Delta D) \Delta \dot{q} = -V_{\pi} \sin q + V \sin (\eta_* + \Delta \eta);$$

$$D \Delta \dot{q} + \Delta D \Delta \dot{q} = -V_{\pi} \sin q + V \sin \eta_* \cos \Delta \eta + V \cos \eta_* \sin \Delta \eta.$$

Пренебрегая величинами 2-го порядка малости, считая, что $\cos \Delta \eta \approx 1$; $\sin \Delta \eta \approx \Delta \eta$, получим

$$D \Delta \dot{q} = V \Delta \eta \cos \eta_*.$$

Здесь $\cos \eta_* = C_1 = \text{const}$. Поскольку исходное значение $\dot{q} = 0$, то $\Delta \dot{q} = \dot{q}$. В результате окончательно имеем

$$\dot{q} = C_1 V D^{-1} \Delta \eta. \quad (4.88)$$

Итак, зная угол упреждения, вычисленной в момент старта η_* , и измеряя отклонение угла упреждения от заданного (например, с помощью пеленгатора), можно, имея радиодальномер для измерения расстояния до цели (D) и трубку Пито для измерения скорости ракеты (V), вычислить по формуле (4.88) угловую скорость линии визирования $\dot{q}$ и с помощью рулей ракеты скорректировать ее траекторию, приближая ее к идеальной траектории параллельного сближения ($\dot{q} = 0$).

Наиболее простой способ реализации метода параллельного сближения обеспечивается при формировании сигнала ошибки в функции угловой скорости линии визирования $\epsilon_y = k\dot{q}$, где k — безразмерный коэффициент. Заметим, что задание сигнала ошибки в такой форме одновременно устанавливает пропорциональную связь между угловой скоростью линии визирования и нормальным ускорением, что

характерно для метода пропорциональной навигации при использовании в качестве базового направления линии местного горизонта $\frac{d\theta}{dt} = k \frac{dq}{dt}$. Следовательно, рассматриваемый вариант схемы формирования сигнала ошибки можно трактовать и как приближенный способ реализации (при допущении о малости $d\theta/dt$) метода пропорционального сближения. При учете $\dot{\theta}$ сигнал ошибки задается пропорционально величине разности

$$e_y = k \frac{dq}{dt} - \frac{d\theta}{dt}$$

и требует для определения e_y нахождения значения $\dot{\theta}$, что возможно при измерении на борту скорости ракеты V и нормального ускорения $V\dot{\theta}$, получаемого с помощью датчика нормальных ускорений.

Изложенное позволяет сделать вывод, что реализация различных методов самонаведения может быть осуществлена при использовании достаточно большого числа вариантов, отличающихся как набором необходимых измерительных устройств, так и различными способами установки координатора на борту ракеты. Выбор того или иного технического решения не относится к числу формализуемых процедур и связан с необходимостью учета достаточно большого числа противоречивых факторов. Обычно при разработке систем самонаведения стремятся использовать тот метод и ту схему формирования сигнала ошибки, которые допускают простейшую реализацию при условии решения поставленной задачи создания ракеты, отвечающей тактико-техническим требованиям.

4.2.3. Промах самонаводящейся ракеты

Под **конечным промахом (пролетом)** будем понимать минимальное расстояние между ракетой и целью, которое достигается, в данном случае, в процессе самонаведения ЛА. Указанная величина является параметром, характеризующим точность наведения. В конечном итоге задачей самонаведения является сведение ракетой промаха к малому (в пределе — нулевому) значению. Поэтому было бы логичным использовать в качестве ошибки наведения именно эту величину. Ранее же, рассматривая способы формирования сигнала ошибки при самонаведении, мы даже в постановочном плане не упомянули об этом. *В чем же тут дело?* Объяснение является достаточно простым. Дело заключается в том, что получение при самонаведении на борту сигнала, пропорционального конечному промаху при произвольном движении ракеты и цели, не представляется целесообразным из-за необходимости использования большого количества достоверной информации, которая отсутствует. Действительно, задача определения конечного промаха представляет собой задачу экстраполяции, поскольку возникает необходимость предсказания будущего значения одного из параметров относительного движения на основании текущих измеряемых параметров. Для такого предсказания необходимо задаться рядом предположений, связанных с использованием тех или иных гипотез (например, о равномерности и прямо-

линейности движения цели), которые могут оказаться неадекватными реальному процессу). Можно, конечно, попытаться для прогнозирования промаха использовать численное решение при применении наиболее полных дифференциальных уравнений, учитывающих возможный маневр цели и целый ряд других факторов, влияющих на точность прогноза [23]. Однако даже при этом в рассматриваемом случае задача не решается точно. Обусловлено это явлением, известным под названием «ослепление координатора» и заключающемся в прекращении получения с его помощью информации, начиная с некоторого малого расстояния до цели $D_{осл}$, определяющим **мертвую зону самонаведения**. «Потеря» цели координатором может происходить из-за:

непосредственного ослепления, определяемого разрешающей способностью бортовой аппаратуры;

ограниченного угла пеленга координатора;

превышения $\dot{q}(t)$ допустимого предела.

Таким образом, дистанция $D_{осл}$ зависит от конкретного типа и конструкции координатора, а также от значений относительных параметров движения на конечном этапе процесса самонаведения. Невозможность точного определения конечного промаха путем прогнозирования текущих значений параметров не снижает актуальности решения этой задачи при самонаведении. С этой целью вводят понятие **мгновенного промаха**, который в отличие от истинного конечного промаха определяет минимальное расстояние между ракетой и целью, которое имело бы место в случае, если бы начиная с некоторого фиксированного момента времени ракета и цель двигались бы равномерно и прямолинейно. Для его определения найдем вектор относительной скорости сближения

$$V_{отн} = V - V_{ц}.$$

В общем случае вектор относительной скорости $V_{отн}$ будет составлять (рис. 4.15) с линией визирования цели угол q_n , а мгновенный промах будет определяться как

$$h = D \sin q_n. \quad (4.89)$$

С другой стороны, $D\dot{q} = V_{отн} \sin q_n$, откуда

$$h = V_{отн}^{-1} D^2 \dot{q}. \quad (4.90)$$

Применительно к методам параллельного и пропорционального сближения угол q_n является малым, поэтому $\dot{D} = -V_{отн} \cos q_n \approx -V_{отн}$ и, следовательно,

$$h \approx D^2 \dot{q} / |\dot{D}|. \quad (4.91)$$

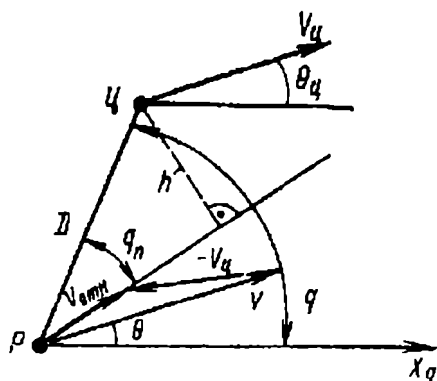


Рис. 4.15. К определению величины мгновенного промаха при самонаведении

Приведенное соотношение может быть использовано для определения мгновенного промаха при $D \gg h$. В случае, когда D соизмеримо с h , оно дает слишком большую погрешность.

4.2.4. Расчетная структурная схема системы самонаведения

В качестве примера рассмотрим [50] расчетную структурную схему системы самонаведения, реализующую метод пропорционального сближения. Будем считать, что в ней используется координатор, осуществляющий слежение за целью с помощью силового гиросtabilизатора. Как уже отмечалось, в этом случае представляется возможным получить на выходе координатора сигнал, пропорциональный угловой скорости линии визирования, без использования каких-либо дополнительных измерительных устройств. Сле-

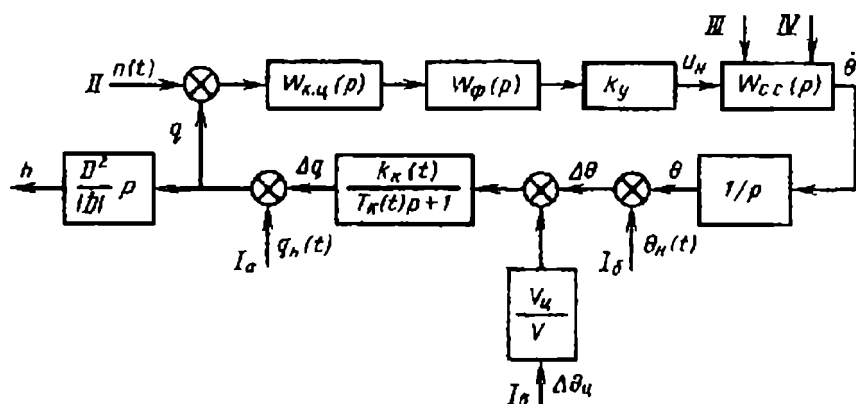


Рис. 4.16. Расчетная структурная схема системы самонаведения

дую подходу, изложенному в [50], при составлении структурной схемы самонаведения не будем детализировать структуру системы стабилизации, вводя ее в схему (рис. 4.16) как элемент с известными (требуемыми) динамическими свойствами. Если в качестве входной величины кинематического звена, отражающего кинематику движения ракеты, принять отклонение $\Delta\theta$, выходом системы стабилизации должно быть либо значение θ , либо $\dot{\theta}$. Последнее является предпочтительным в силу следующих обстоятельств.

Во-первых, получение из $\dot{\theta}(t)$ значения $\theta(t)$ путем интегрирования сигнала не вызывает каких-либо затруднений, а обратный переход, связанный с дифференцированием $\theta(t)$ из-за «подчеркивания» шумов является нежелательным. Во-вторых, следует помнить, что $\dot{\theta}(t)$ характеризует такой важный параметр движения, как нормальную перегрузку ракеты. В качестве выходной величины расчетной структурной схемы удобнее всего использовать мгновенный промах $h(t)$, как величину, хотя и приближенно, характеризующую точность реализации процесса. Введение в схему после координатора цели корректирующего фильтра и усилителя связано с необходимостью обеспечения требуемых динамических свойств системы само-

наведения в целом. Отчасти этому же служит и коррекция динамических характеристик системы стабилизации.

Отдельного обсуждения заслуживают управляющие и возмущающие воздействия, отмеченные на схеме. Позициями I (а, б, в) обозначены управляющие воздействия, причем $\theta_*(t)$ и $q_*(t)$ соответствуют изменениям опорной траектории, относительно которой осуществляется линеаризация уравнений. Таким образом, $\theta_*(t)$ и $q_*(t)$ косвенно отражают заданный (с учетом принятой гипотезы) характер изменения движения цели и именно поэтому относятся к числу управляющих. Воздействие $\Delta\theta_{ц}$ учитывает дополнительный маневр цели, не принятый во внимание при расчете опорной траектории. Если воздействия, приложенные ко входам I (а, б, в) рассматривать как известные функции времени, то им будут соответствовать некоторые динамические ошибки наведения. К числу наиболее важных возмущающих воздействий, оказывающих существенное влияние на точность наведения, относятся шумы, действующие на входе координатора цели и эквивалентные случайным ошибкам измерения углового рассогласования координатора (поз. II на схеме). Помимо шумового воздействия, в качестве возмущений следует учитывать также влияние аппаратных ошибок (уходы гироскопов, дрейф нулей усилителей и т. д.), а также непосредственное воздействие на ракету возмущающих сил и моментов (поз. III и IV).

4.3. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ ТЕЛЕНАВЕДЕНИЯ

4.3.1. Принципы построения систем теленаведения

Любая система теленаведения имеет устройства управления и контроля. Устройства телеконтроля предназначены для получения информации о взаимном положении в пространстве ракеты и цели. Как правило, в качестве таких устройств используются радиолокационные и радионавигационные системы [50].

Определение положения ракеты и цели и сравнение их координат дает основание с учетом принятого метода наведения сформировать команды управления, передаваемые на борт ракеты. Выработка команд может осуществляться как с участием наводчика (полуавтоматические системы), так и автоматически, без участия оператора. С точки зрения реализуемых принципов определения координат ракеты и цели различают два технически осуществимых способа теленаведения:

наведение в координатах командного пункта;

наведение в координатах ЛА.

При первом способе координаты ракеты и цели определяются относительно базовой системы отсчета, связанной с КП. При втором — координаты цели задаются в осях связанной с ракетой отсчетной базы. Функциональная схема системы теленаведения в координатах КП приведена на рис. 4.17. Она представляет собой, по существу, следящую систему, реализующую принцип совмещения центра масс ракеты с номинальной траекторией, отвечающей принятому методу

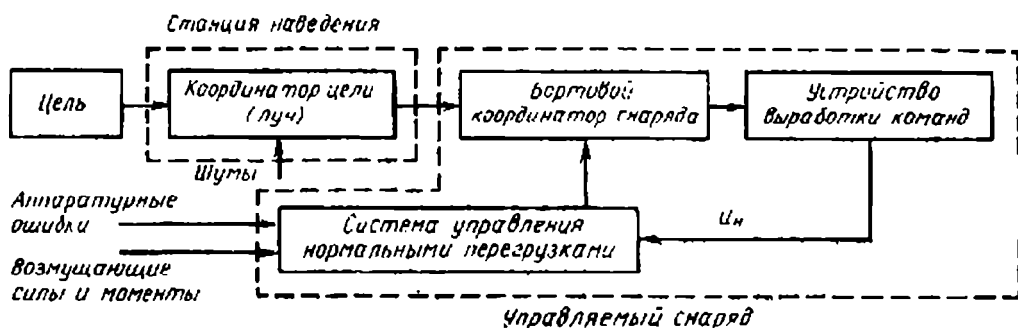


Рис. 4.19. Однолучевая система наведения

наведения и отслеживающий движение цели. Определение положения ракеты в луче при этом осуществляется автоматически на борту ЛА. В простейшем случае в качестве управляющего луча может использоваться равносигнальная зона луча радиолокатора («радиотропа»). Для создания луча могут также использоваться видимые и инфракрасные лучи [50]. В зависимости от способа управления перемещением луча системы наведения подразделяются [43] на **однолучевые** и **двухлучевые**.

В однолучевой системе (рис. 4.19) луч одновременно используется и для сопровождения цели и для удержания ракеты на линии «КП — цель» (т. е. в чистом виде реализуется метод совмещения). Применение двухлучевой схемы (рис. 4.20) позволяет более свободно выбирать метод наведения и, в частности, использовать методы наведения с упреждением. Реализация их в варианте лучевой системы становится возможной в силу «развязки» задач сопровождения цели и наведения ракеты. В двухлучевой схеме один луч обеспечивает определение координат цели, по которым вырабатываются сигналы, управляющие перемещением второго луча, вдоль оси которого движется ракета.

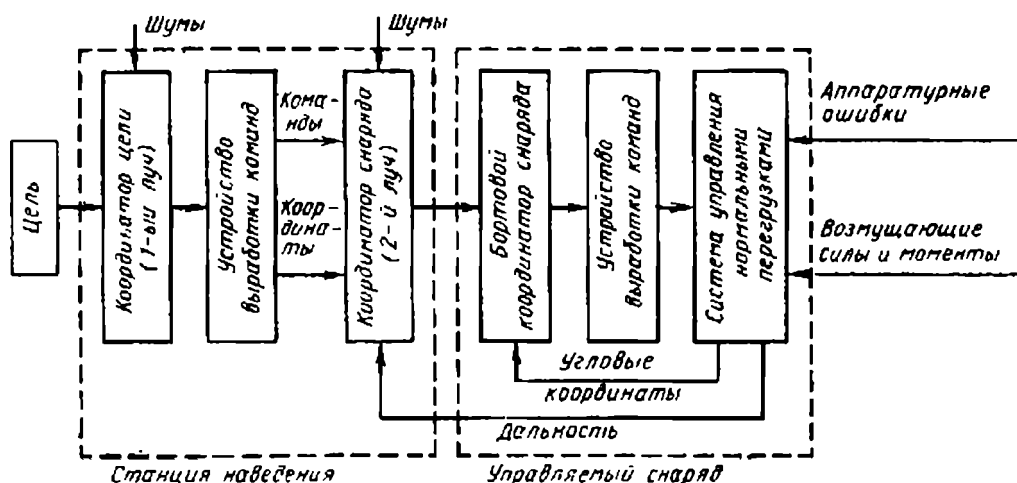


Рис. 4.20. Двухлучевая система наведения

4.3.2. Формирование сигнала ошибки при теленаведении

Для того чтобы перейти от функциональных схем к структурным схемам систем теленаведения, следует прежде всего решить вопрос о способе формирования сигнала ошибки наведения. При этом будем исходить из того, что данный сигнал должен характеризовать отклонение параметров движения ракеты от параметров номинального движения, соответствующего принятому методу наведения. Простейший вариант схемы формирования ошибки наведения имеет место при реализации метода совмещения. Поскольку этот метод характеризуется условием совмещения линий визирования ракеты и цели, т. е. равенством $q_p = q_c$, в качестве ошибки наведения принимают величину $\varepsilon_y = q_c - q_p$. Таким образом, для определения ошибки ε_y достаточно воспользоваться угломерными измерителями положения ракеты и цели относительно базы, связанной с КП. В связи с тем, что в конечном счете качество процесса теленаведения определяется минимальным расстоянием между ракетой и целью на пролете, т. е. промахом, целесообразно перейти от угловой ошибки к линейному отклонению ракеты от требуемой кинематической траектории

$$h(t) \approx D(t) \varepsilon_y(t). \quad (4.92)$$

Однако заметим, что вычисление $h(t)$ требует измерения текущего значения $D(t)$, что приведет к усложнению системы. Чтобы избежать этого, вместо $D(t)$ вводят в рассмотрение известную программно реализуемую функцию $R(t)$, приближенно отражающую закон изменения дальности $D(t)$ в процессе полета ракеты. Тогда ошибка наведения в командных системах, реализующих метод совмещения, будет иметь вид

$$h = R(t) (q_c - q_p). \quad (4.93)$$

При наведении с упреждением угловая ошибка наведения определяется как

$$\varepsilon_y = q_c - q_p \mid \Delta q, \quad (4.94)$$

где Δq — угол упреждения.

Но в отличие от предыдущего случая здесь уже принципиально необходимо измерение расстояний от КП до цели и ракеты. Не говоря уж о том, что угол Δq определяется в функции указанных значений дальностей, следует учитывать также и то, что угол упреждения должен обращаться в нуль при $D_c = D_p$.

4.3.3. Структурные схемы систем теленаведения

Учитывая изложенные сведения, касающиеся формирования сигнала ошибки, рассмотрим [50] типовые структурные схемы систем теленаведения, ограничившись вариантами системы наведения в координатах КП и системы наведения по лучу. Первая из обсуждаемых структурных схем приведена на рис. 4.21. На схеме измеренные значения координат (на выходе измерителя) обозначены индексом «и».

Основным внешним управляющим воздействием здесь является изменяющаяся координата цели $q_{ц}$. Сравнение $q_{цн}$ с измеренным

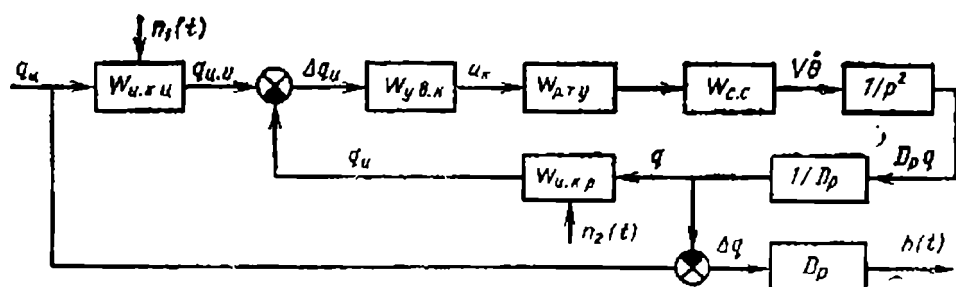


Рис. 4.21. Структурная схема системы теленаведения для метода совмещения

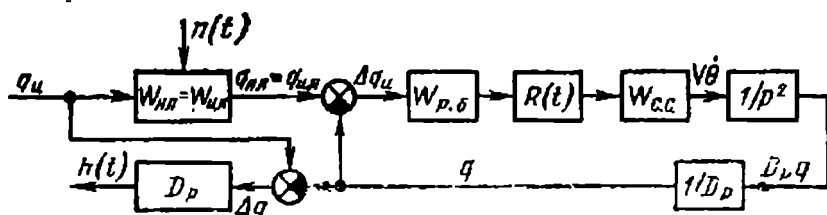


Рис. 4.22. Структурная схема системы наведения по лучу

значением угловой координаты ракеты q_κ дает сигнал ошибки $e_y = \Delta q_\kappa$, на основе которой устройство выработки команд формирует сигнал наведения u_κ , передаваемый с помощью устройства радиотелеуправления на борт ракеты. С целью обеспечения большей наглядности, в качестве передаточной функции кинематического звена здесь принято его простейшее значение $W_{\kappa, \kappa}(p) = 1/p^2$. На вход звена, как следует из рисунка, будет поступать нормальное ускорение $a_{np} = V\dot{\theta}$. Тогда при $\dot{V} = 0$ на выходе кинематического звена будет иметь место значение $S = D_p q$, имеющее физический смысл длины дуги окружности радиуса D_p , стягивающей угол q . Следует отметить [50], что при наведении методом совмещения устройство выработки команд входит во внутреннюю структуру замкнутого контура наведения. При использовании более сложных методов наведения, в частности, при наведении с упреждением, элемент сравнения разделяет устройство выработки команд на две части, одна из которых остается внутри замкнутого контура, другая находится вне его. Это связано с тем, что в отмеченных более сложных случаях угловая координата сравнивается не с соответствующей координатой цели, как в методе совмещения, а с координатой номинальной кинематической траектории, предварительно вычисляемой в устройстве выработки команд.

В системе наведения по лучу (рис. 4.22) функции, выполняемые в командной системе устройством выработки команд, возлагаются на бортовую аппаратуру ракеты.

В системе отсутствует также устройство радиотелеуправления, но содержится устройство наведения луча, решающее задачу, эквивалентную измерению угловой координаты цели. Определение углового отклонения ракеты от оси радиолуча осуществляется с помощью бортового радиоблока.

ГЛАВА 5

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ И НАВЕДЕНИЕ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ

Основой инерциальной навигации служит метод счисления пути. Определение местоположения ЛА в рамках данного метода осуществляется путем двукратного интегрирования составляющих его ускорения. По существу, можно считать, что при инерциальной навигации координаты ЛА вычисляются в результате решения уравнений движения его центра масс, записанных относительно абсолютной (инерциальной) системы координат. Инерциальная система, т. е. система, для которой справедливы законы Ньютона (в том числе и закон инерции), является основной системой отсчета данного метода навигации. Значение ее состоит в том, что в ней ускорение и силовое взаимодействие тел являются взаимно однозначно определенными. Данное обстоятельство позволяет в качестве необходимой для решения задачи определения координат ЛА информации использовать вектор результирующей силы, измеряемой с помощью специальных датчиков удельной силы (акселерометров) в виде проекций вектора на направления их осей чувствительности. Ориентация датчиков при этом осуществляется с помощью гироскопов либо по показаниям самих акселерометров, установленных на стабилизированной площадке.

Создание основ отечественной теории гироскопических приборов и инерциальных систем связано прежде всего с именами А. Н. Крылова, Б. В. Булгакова и А. Ю. Ишлинского [28, 29]. Последующим развитием теория инерциальной навигации обязана трудам многих отечественных ученых [1, 19, 25, 65, 68, 71, 80] и др.

При построении инерциальной навигационной системы (ИНС) существенным представляется выбор схемы моделирования реализуемой отсчетной базы, методов учета гравитационного ускорения и начальных параметров движения, способов измерения навигационных параметров ЛА, вида ориентирования акселерометров и др. Указанные обстоятельства послужили причиной возникновения широкого многообразия существующих и принципиально возможных схем конструктивного выполнения ИНС. Рассмотрение этих конструктивных решений, а тем более вопросов проектирования ИНС, не входит в задачу настоящего учебника. Обсуждение данных вопросов предполагается здесь лишь на уровне и в той части, в которой они оказывают влияние на алгоритмические аспекты теории инерциальной навигации.

Инерциальная навигация предусматривает необходимость проведения измерений вектора ускорения движущегося объекта в трех-

мерном пространстве. Вместе с тем учитывая физические особенности процессов движения ЛА различных классов, принято подразделять ИНС на две большие группы. К первой группе относят системы, осуществляющие **пространственную инерциальную навигацию** объекта, движущегося со значительными ускорениями в течение небольшого промежутка времени при существенном изменении всех трех линейных координат, что, в частности, характерно для управляемых баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов. Вторую группу составляют ИНС, обеспечивающие **инерциальную навигацию относительно двух горизонтальных осей вблизи поверхности Земли** («навигация на плоскости») в течение длительного времени полета и использующие для определения положения по высоте специальные (неинерциальные) средства измерений, в частности, радиовысотомер. Характерным примером объектов, на борту которых устанавливаются ИНС второй группы, могут служить самолеты-снаряды и крылатые ракеты, имеющие протяженный участок полета на заданной постоянной высоте (см. рис. В.2).

В силу значительных конструктивных отличий в специальной литературе обычно используется раздельное описание систем, относящихся к указанным группам. Это обусловливается прежде всего приоритетным изложением вопросов их приборного оформления. В рамках данного материала, не акцентируя внимание на различиях в особенностях построения соответствующих систем, ограничимся изложением основ теории пространственной инерциальной навигации, рассматривая навигацию на плоскости, как частный наиболее простой случай общей теории.

5.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ИНС

5.1.1. Алгоритм пространственной инерциальной навигации

Под алгоритмом инерциальной навигации понимают совокупность математических соотношений, с помощью которых информация об ускорении ЛА в инерциальном пространстве однозначно преобразуется в информацию о координатах аппарата в заданной системе отсчета, как правило, связанной с Землей. Основным уравнением алгоритма является зависимость, определяющая величину ускорения, пропорционального выходным сигналам акселерометров, записанная с учетом вращения Земли и перемещения ЛА относительно ее поверхности. Получим это уравнение в векторной форме. Согласно (2.153) вектор кажущегося ускорения, измеряемый тремя взаимно ортогонально расположенными одностепенными акселерометрами, будет определяться как

$$\mathbf{a}_n = \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \mathbf{g}. \quad (5.1)$$

Вследствие этого, измеренное значение вектора равнодействующей всех приложенных к ЛА внешних негравитационных сил оказы-

вается отнесенным к системе координат, начало которой совмещено с центром масс ЛА, а оси совпадают с осями чувствительности акселерометров. Реализация указанной системы отсчета осуществляется на борту с помощью гиросtabilизированной платформы (ГСП). Такую приборную систему координат, моделирующую выбранные отсчетные направления, принято называть **сопровождающим координатным трехгранником** либо просто **сопровождающей системой**.

В реальных условиях работы плоскость платформы с установленными на ней акселерометрами может несколько отклоняться от требуемой. В связи с этим вводят понятие «правильной» сопровождающей системы. Оси правильной сопровождающей системы воспроизводят направление осей стабилизированной платформы при ее идеальной работе. При получении алгоритмов инерциальной навигации будем исходить из предпосылки, что рассматриваемые сопровождающие системы являются правильными. Сначала обсудим самый общий случай, согласно которому сопровождающий трехгранник, определяющий положение измерительной системы в пространстве, изменяет свою ориентацию при движении ЛА относительно поверхности Земли с угловой скоростью ω , задаваемой в осях подвижной земной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$. В свою очередь, система координат $O_0X_0Y_0Z_0$ поворачивается с угловой скоростью вращения Земли Ω относительно оси O_0Y_H геоцентрической инерциальной системы координат. Положение ЛА относительно системы $O_0X_HY_HZ_H$ зададим r . С учетом изложенного абсолютная угловая скорость сопровождающей системы $OX_{сп}Y_{сп}Z_{сп}$ определяется как

$$\omega_a = \omega + \Omega_3^*, \quad (5.2)$$

а выражение для нахождения абсолютной скорости ЛА приобретает вид [91]

$$\frac{d}{dt} [r]_a = \frac{d^*}{dt} r + (\Omega + \omega) \times r, \quad (5.3)$$

где d^*r/dt представляет собой условное изображение производной вектора r относительно системы координат $OX_{сп}Y_{сп}Z_{сп}$ (локальная производная r). Дифференцируя (5.3), найдем выражение для абсолютного ускорения ЛА, которое с учетом $\Omega = \text{const}$ запишем, приводя его к геоцентрической инерциальной системе координат, в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\dot{r}]_a = \frac{d}{dt} \left[\frac{d^*}{dt} r \right]_a + \Omega \times \left\{ \left[\frac{d^*}{dt} r \right] + \Omega \times r + \omega \times r \right\} + \\ + \frac{d}{dt} [\omega]_a \times r + \omega \times \left\{ \left[\frac{d^*}{dt} r \right] + \Omega \times r + \omega \times r \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Найдем выражения производных $\frac{d}{dt} \left[\frac{d^*}{dt} r \right]_a$ и $\frac{d}{dt} [\omega]_a$. Очевидно,

** Далее для упрощения записи индекс 3 у Ω пропущен.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{d^*}{dt} \mathbf{r} \right]_a &= \frac{d^*}{dt} \left[\frac{d^*}{dt} \mathbf{r} \right] + (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \\ &= \frac{d^{**}}{dt^2} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r};\end{aligned}\quad (5.5)$$

$$\frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega}]_a = \frac{d^*}{dt} \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} = \frac{d^*}{dt} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (5.6)$$

Осуществив подстановку (5.5) и (5.6) в (5.4) и произведя перегруппировку членов, получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}]_a &= \frac{d^{**}}{dt^2} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \\ &+ \frac{d^*}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}).\end{aligned}\quad (5.7)$$

Или, учитывая, что $(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, запишем окончательно

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}]_a &= \frac{d^{**}}{dt^2} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + \\ &+ \frac{d^*}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Последнее слагаемое в (5.8) представляет собой (см. (2.12)) переносное ускорение $\mathbf{a}_{\text{пер}} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Векторная сумма ускорения от силы тяготения и ускорение центробежной силы инерции, равное обратной по направлению величине переносного ускорения, т. е. $\mathbf{g}_r - \mathbf{a}_{\text{пер}}$, дает (см. разд. 1.2.2) вектор ускорения от силы тяжести $\mathbf{g}$. Поэтому, учитывая, что $\frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}]_a = \dot{\mathbf{V}}_a$, после подстановки (5.8) в (5.1) найдем, что в рассматриваемом общем случае вектор $\mathbf{a}_n$ будет определяться как

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_n &= \frac{d^{**}}{dt^2} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + \\ &+ \frac{d^*}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \mathbf{g}.\end{aligned}\quad (5.9)$$

Выражение (5.9) представляет собой основное векторное уравнение инерциальной навигации относительно вращающейся Земли.

Рассмотрим, какой физический смысл имеют слагаемые, входящие в его правую часть. Вторая локальная производная $\frac{d^{**}}{dt^2} \mathbf{r}$ характеризует составляющую ускорения ЛА вдоль радиуса-вектора $\mathbf{r}$. При движении ЛА на постоянной высоте (при стабилизации высоты полета) можно считать, что $\mathbf{r} = \text{const}$, и, следовательно, $\frac{d^{**}}{dt^2} \mathbf{r} = 0$. Слагаемое $\frac{d^*}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ представляет собой тангенциальную состав-

ляющую вектора ускорения, связанную с движением ЛА в горизонтальной плоскости. Член $\omega \times (\omega \times r)$ есть не что иное, как центростремительное ускорение, обусловленное горизонтальной составляющей скорости ЛА относительно Земли. Члены, содержащие удвоенные произведения угловых скоростей, представляют собой ускорения Кориолиса, причем слагаемое $2\Omega \times \frac{d^*}{dt} r$ обусловлено вращением Земли и вертикальной составляющей скорости ЛА, $2\omega \times \frac{d^*}{dt} r$ — вращением сопровождающей системы координат при наличии вертикальной составляющей движения ЛА, $2\Omega \times (\omega \times r)$ — вращением Земли при наличии горизонтальной составляющей движения.

Для упрощения последующих преобразований представим (5.9) в виде следующих двух эквивалентных ему соотношений

$$a_n = \dot{V} + (2\Omega + \omega) \times V - g; \quad (5.10)$$

$$V = \dot{r} + \omega \times r, \quad (5.11)$$

где V — скорость ЛА относительно Земли.

Характер преобразований, связанных с переходом от основного уравнения инерциальной навигации, заданного в векторной форме, к скалярным уравнениям, проиллюстрируем на примере получения навигационных алгоритмов для двух случаев движения ЛА в горизонтальной плоскости: при навигации относительно вращающейся Земли и при предположении, что Земля не вращается. В качестве модели Земли используем сфероидальную модель (см. гл. 1). При горизонтальном (относительно поверхности земного эллипсоида) движении ЛА в качестве сопровождающей системы целесообразно выбрать систему, ориентация осей которой будет совпадать с нормальной системой координат. В том случае, когда специально оговаривается, что ось Ox_g данной системы направлена в сторону северного полюса и лежит в плоскости меридиана, система называется **касательным координатным трехгранником**. Причем различают вращающийся и постоянно ориентированный касательные координатные трехгранники. По мере перемещения ЛА из одной точки в другую вращающийся касательный трехгранник будет поворачиваться в инерциальном пространстве, но сохранять при этом два базисных направления: направление, определяющее плоскость местного меридиана, и направление местной вертикали. При использовании его в качестве сопровождающего, представляется возможным получить на выходе ИНС широту и долготу, т. е. географические координаты. Поэтому вращающуюся касательную координатную систему, моделируемую на борту ЛА с помощью ГСП, называют также **географической**.

Проекция векторного произведения $(2\Omega + \omega) \times V$ на оси географической сопровождающей системы координат, направление кото-

рых зададим единичными векторами (ортами) x^0 , y^0 и z^0 найдем, используя известное равенство

$$(2\Omega + \omega) \times V = \begin{vmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ 2\Omega_x + \omega_x & 2\Omega_y + \omega_y & 2\Omega_z + \omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} =$$

$$= x^0 \{ (2\Omega_y + \omega_y) V_z - (2\Omega_z + \omega_z) V_y \} -$$

$$- y^0 \{ (2\Omega_x + \omega_x) V_z - (2\Omega_z + \omega_z) V_x \} +$$

$$+ z^0 \{ (2\Omega_x + \omega_x) V_y - (2\Omega_y + \omega_y) V_x \}. \quad (5.12)$$

Тогда соответственно, имея в виду выражение (5.10), запишем проекции a_n на оси $OX_{сп}$ и $OZ_{сп}$ в следующей форме:

$$a_x = \dot{V}_x + (2\Omega_y + \omega_y) V_z - (2\Omega_z + \omega_z) V_y, \quad (5.13)$$

$$a_z = \dot{V}_z + (2\Omega_x + \omega_x) V_y - (2\Omega_y + \omega_y) V_x. \quad (5.14)$$

Проекции g на оси $OX_{сп}$ и $OZ_{сп}$ сопровождающей системы координат равны нулю, поскольку плоскость $OX_{сп}Z_{сп}$ перпендикулярна направлению местной вертикали. Составляющие вектора скорости ЛА на оси географической сопровождающей системы координат определяются как

$$V_x = \dot{r}_x + \omega_y r_z - \omega_z r_y;$$

$$V_y = \dot{r}_y + \omega_z r_x - \omega_x r_z;$$

$$V_z = \dot{r}_z + \omega_x r_y - \omega_y r_x. \quad (5.15)$$

Связь между геоцентрической и географической широтами задается (см. разд. 1.2.2) соотношением

$$\Delta\varphi = \varphi_r - \varphi_{гц} \approx \alpha \sin 2\varphi_r \approx \alpha \sin 2\varphi_{гц},$$

где $\alpha = 1/298,3$ — сжатие сфероид. Тогда, имея в виду несферичность Земли, запишем

$$r_x = r \sin \Delta\varphi; \quad r_y = r \cos \Delta\varphi; \quad r_z = 0. \quad (5.16)$$

Предельная величина $\Delta\varphi$ достигается при $\varphi_r = 45^\circ$ и составляет $11,5'$. Это дает основания принять $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$; $\cos \Delta\varphi \approx 1$. Тогда $r_x = r\Delta\varphi$; $r_y = r$; $r_z = 0$. При горизонтальном полете ЛА производные от r_i ($i = x, y, z$) равны нулю и поэтому уравнения (5.15) принимают вид

$$V_x = -\omega_z r; \quad (5.17)$$

$$V_y = \omega_z r \Delta\varphi; \quad (5.18)$$

$$V_z = \omega_x r - \omega_y r \Delta\varphi. \quad (5.19)$$

Далее, выразив проекции относительной угловой скорости ω на оси сопровождающей системы координат через скорости изменения долготы и широты, получим

$$\omega_x = \dot{\lambda} \cos \varphi_{гц}; \quad \omega_y = \dot{\lambda} \sin \varphi_{гц}; \quad \omega_z = -\dot{\varphi}_{гц}. \quad (5.20)$$

Осуществив подстановку, найдем

$$V_x = \dot{\varphi}_{гц} r; \quad (5.21)$$

$$V_y = -\dot{\varphi}_{гц} r \Delta\varphi; \quad (5.22)$$

$$V_z = r\dot{\lambda} \cos \varphi_{гц} - r\dot{\lambda} \Delta\varphi \sin \varphi_{гц}. \quad (5.23)$$

Имея в виду численное значение $\Delta\varphi$, можно утверждать, что V_y будет иметь второй порядок малости по отношению к двум другим составляющим скорости. Поэтому положим $V_y = 0$, а соотношение для определения V_z преобразуем к виду

$$\begin{aligned} V_z &= r\dot{\lambda} \cos \varphi_{гц} \left[1 - \Delta\varphi \frac{\sin \varphi_{гц}}{\cos \varphi_{гц}} \right] = r\dot{\lambda} \cos \varphi_{гц} \left[1 - \alpha \frac{\sin \varphi_{гц}}{\cos \varphi_{гц}} \sin 2\varphi_{гц} \right] = \\ &= r\dot{\lambda} \cos \varphi_{гц} [1 - 2\alpha \sin^2 \varphi_{гц}] = r\omega_\lambda [1 - 2\alpha \sin^2 \varphi_{гц}], \end{aligned} \quad (5.24)$$

где $\omega_\lambda = \dot{\lambda} \cos \varphi_{гц}$.

Вспомним теперь (см. 2.91), что

$$[1 - 2\alpha \sin^2 \varphi_{гц}]^{1/2} = \frac{r-H}{a} = \frac{R}{R_{эк}}. \quad (5.25)$$

Введя обозначения $r^* = rR_3^2 R_{эк}^{-2}$ и $\omega_\varphi = \dot{\varphi}_{гц}$, запишем

$$V_x = \omega_\varphi r^*; \quad V_z = \omega_\lambda r^*. \quad (5.26)$$

Наконец, представим составляющие Ω в проекциях на оси географической сопровождающей системы координат. Очевидно, что

$$\Omega_x = \Omega \cos \varphi_{гц}; \quad \Omega_y = \Omega \sin \varphi_{гц}; \quad \Omega_z = 0. \quad (5.27)$$

Имея в виду полученные соотношения, вернемся к рассмотрению зависимостей (5.13) и (5.14):

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{V}_x + (2\Omega \sin \varphi_{гц} + \dot{\lambda} \sin \varphi_{гц}) \dot{\lambda} \cos \varphi_{гц} r^*; \\ a_z &= \dot{V}_z - (2\Omega \sin \varphi_{гц} + \dot{\lambda} \sin \varphi_{гц}) \dot{\varphi}_{гц} r \end{aligned} \quad (5.28)$$

или с учетом введенных обозначений

$$a_x = \dot{V}_x + (2\Omega \sin \varphi_{гц} + \omega_\lambda \operatorname{tg} \varphi_{гц}) \omega_\lambda r^*; \quad (5.29)$$

$$a_z = \dot{V}_z - (2\Omega \sin \varphi_{гц} + \omega_\lambda \operatorname{tg} \varphi_{гц}) \omega_\varphi r. \quad (5.30)$$

Если оси чувствительности акселерометров совпадают с осями $OX_{сн}$ и $OZ_{сн}$ сопровождающей системы координат, то с выхода интеграторов соответствующих акселерометров будет сниматься сигнал, содержащий информацию об истинных составляющих скорости движения ЛА с погрешностью в виде вторых слагаемых под знаками интегралов в выражениях

$$V_x = \int_0^t [a_x - (2\Omega \sin \varphi_{гц} + \omega_\lambda \operatorname{tg} \varphi_{гц}) \omega_\lambda r^*] dt; \quad (5.31)$$

$$V_z = \int_0^t [a_z + (2\Omega \sin \varphi_{гц} + \omega_\lambda \operatorname{tg} \varphi_{гц}) \omega_\varphi r] dt. \quad (5.32)$$

Для того чтобы избавиться от них, необходимо в выходные сигналы акселерометров ввести соответствующие поправки, равные вычисленным значениям этих слагаемых. Расчет их требует знания величин $\varphi_{гц}$, $\dot{\varphi}_{гц}$ и λ . Алгоритм инерциальной навигации при использовании описанной выше сопровождающей системы должен включать в себя также зависимости, позволяющие определить проекции абсолютной угловой скорости координатной системы на собственные оси, что необходимо для управления ориентацией платформы. Запишем их в виде

$$\Omega_{Ox} = \Omega \cos \varphi_{гц} + \omega_{\lambda}; \quad (5.33)$$

$$\Omega_{Oy} = \Omega \sin \varphi_{гц} + \omega_{\lambda} \operatorname{tg} \varphi_{гц}; \quad (5.34)$$

$$\Omega_{Oz} = -\omega_{\varphi}. \quad (5.35)$$

Последующие упрощения приведенного алгоритма инерциальной навигации позволяют получить из него, как частный случай, навигационный алгоритм, реализующий метод счисления пути относительно поверхности Земли при неучете ее вращения. При этом, естественно, положим, что $\Omega = 0$. Кроме того, будем считать, что гравитационное поле Земли является центральным, т. е. будем аппроксимировать фигуру Земли шаром с равномерным распределением масс. Соответственно будем иметь, что $r^* = r$. При принятом предположении об отсутствии вращения Земли скорость вращения сопровождающей системы координат зависит только от скорости перемещения ЛА относительно поверхности. Имея в виду (5.21) и (5.23), запишем

$$\dot{\varphi} = V_x r^{-1}; \quad \dot{\lambda} = V_z (r \cos \varphi)^{-1}. \quad (5.36)$$

По $\omega_x = \dot{\lambda} \cos \varphi$; $\omega_y = \dot{\lambda} \sin \varphi$; $\omega_z = -\dot{\varphi}$ и, следовательно,

$$\omega_x = \frac{V_z}{r}; \quad \omega_y = \frac{V_z}{r} \operatorname{tg} \varphi; \quad \omega_z = -\frac{V_x}{r}, \quad (5.37)$$

где V_x и V_z — проекции линейной скорости движения ЛА относительно поверхности невращающейся Земли на оси $OX_{сн}$ и $OZ_{сн}$ сопровождающей системы координат.

Зависимости (5.37) необходимы для формирования корректирующих воздействий, обеспечивающих непрерывную требуемую ориентацию осей чувствительности акселерометров, при которой к тому же достигается настройка платформы на период невозмущаемости по каналам горизонтирования. Под **горизонтированием платформы** понимают совокупность действий, направленных на совмещение ее рабочей поверхности с плоскостью горизонта, перпендикулярной направлению местной вертикали. Традиционным устройством, моделирующим направление местной вертикали, является маятник. Если масса маятника и его точка подвеса находится в состоянии относительного покоя, то плечо такого маятника устанавливается строго по направлению местной вертикали. При наличии вертикальных ускорений положение равновесия маятника нарушаться не будет. Однако при горизонтальных ускорениях точки подвеса он начнет совершать колебательное движение даже в том

случае, если до этого находился в состоянии покоя. При этом говорят, что маятник возмущается ускорением точки подвеса. Изучая проблему построения «невозмущаемой» вертикали, профессор механики М. Шулер в работе [87], опубликованной в 1923 г., пришел к достаточно очевидному с позиций сегодняшних представлений

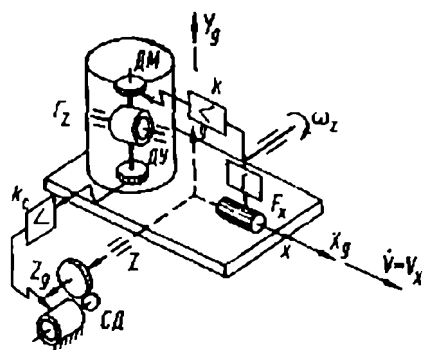


Рис. 5.1. Гироскопическая система для моделирования невозмущенного маятника

выводу, что **математический маятник** не будет возмущаться ускорением точки подвеса, если его плечо равно расстоянию от точки подвеса до центра Земли. Действительно, если плечо маятника примерно равно радиусу Земли, то это означает, что масса маятника будет размещаться в геометрическом центре Земли и поэтому любое перемещение точки подвеса вдоль земной поверхности с любым ускорением не вызовет отклонения плеча маятника от направления вертикали. Принятие допущения

о том, что Земля имеет форму сферы с радиусом $R_3 = 6371$ км позволяет достаточно просто определить период колебаний невозмущаемого математического (в отличие от физически реализуемого или просто «физического») маятника, который будет равен

$$T_{\text{ш}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g_0}} = 6,28 \sqrt{\frac{6371 \cdot 10^3}{9,81}} \approx 84,4 \text{ мин.}$$

Естественно, возникает вопрос о технической реализуемости маятника, имеющего указанный период колебаний.

Принцип работы такой системы рассмотрим на примере обычного **одноосного гиростабилизатора с интегральной коррекцией** (рис. 5.1). Пусть в начальный момент времени платформа выставлена в плоскость местного горизонта, т. е. ось y платформы направлена строго по местной вертикали. В результате перемещения объекта вдоль поверхности Земли (вращение Земли здесь не учитывается) истинная местная вертикаль повернется от своего начального положения на угол φ . Приборная вертикаль должна отслеживать поворот истинной вертикали, т. е. за тот же промежуток времени она должна повернуться на такой же угол $\varphi = \varphi_{\text{пр}}$. Однако это произойдет только при выполнении ряда условий. Найдем эти условия. Будем считать, что $\varphi_{\text{пр}} \neq \varphi$, и имеет место ошибка, равная $\beta = \varphi - \varphi_{\text{пр}}$, причем $\ddot{\beta} = \ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_{\text{пр}}$. Угловое ускорение $\ddot{\varphi} = \dot{V}r^{-1}$, где r — расстояние между началом геоцентрической базовой системы координат и гиростабилизатором (точнее, точкой подвеса акселерометра). Необходимо определить значение $\ddot{\varphi}_{\text{пр}}$. Для идеального регулятора

$$\ddot{\varphi}_{\text{пр}} = M_k H_r^{-1}, \quad (5.38)$$

где M_k — корректирующий момент, создаваемый датчиком момента (ДМ) гироскопа Γ_z по информации, снимаемой с акселерометра F_x ;

H_r — кинетический момент гироскопа. Как следует из рис. 5.1

$$M_k = k \int_0^t a_x dt, \text{ или}$$

$$M_k = k \int_0^t (\dot{V} + g_T \beta) dt. \quad (5.39)$$

Подстановка (5.39) в (5.38) дает

$$\dot{\varphi}_{np} = \frac{k}{H_r} \int_0^t (\dot{V} + g_T \beta) dt.$$

Дифференцируя полученное выражение и подставляя его в выражение $\ddot{\beta}$, найдем

$$\ddot{\beta} + \frac{k}{H_r} g_T \beta = \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{H_r} \right) \dot{V}. \quad (5.40)$$

Выражение (5.40) представляет собой дифференциальное уравнение движения приборной вертикали идеального одноосного гиростабилизатора относительно истинного направления местной вертикали сферической Земли.

Для выполнения условия невозмущаемости платформы ускорением ее движения относительно Земли необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{H_r} \right) \dot{V} = 0, \quad (5.41)$$

откуда однозначно вытекает соотношение

$$k = r^{-1} H_r, \quad (5.42)$$

называемое **условием технической реализации принципа невозмущаемости**.

Достоинством систем, реализующих **широтно-долготный принцип навигации**, является простота определения азимута (поскольку ось $OX_{сн}$ непосредственно направлена на север) и возможность измерения угловой ориентации ЛА относительно Земли (точнее относительно вертикали и горизонта) по показаниям гироскопических датчиков платформы. Недостаток заключается в том, что при полете в высоких широтах корректирующие сигналы, подаваемые на датчики момента гироскопов для отслеживания платформой требуемого направления становятся очень большими.

Использование географической сопровождающей системы координат, конечно, не исчерпывает всех возможных вариантов моделирования на борту ЛА координатных базисов. Выбор координатной системы для конкретного приборного оснащения определяется многими соображениями. Основным из них является обеспечение простоты вычислений координат ЛА по выходным сигналам акселерометров, естественно, при прочих равных условиях. В силу существенного различия задач управляемого движения ЛА рассматриваемых

типов универсальное решение проблемы в этом смысле отсутствует. Поэтому дополнительно получим уравнения инерциальной навигации еще для нескольких типов систем с целью показа возникающих при этом отличий их структуры. Начнем этот дополнительный анализ с постоянно ориентированного касательного координатного трехгранника. Ориентация осей этой системы задается в некоторой фиксированной точке (обычно точке старта), называемой **основной точкой**. Начальное ортонормирование осей аналогично направлению осей географической сопровождающей системы координат. Особенностью же данной системы является то, что в процессе всего времени полета при вращении системы вместе с Землей ориентация ее осей остается параллельной координатным осям в основной точке. Считая широту основной точки φ_0 известной, проекции вектора угловой скорости вращения Земли на оси рассматриваемого координатного трехгранника запишем в форме

$$\Omega_x = \Omega \cos \varphi_0; \quad \Omega_y = \Omega \sin \varphi_0; \quad \Omega_z = 0. \quad (5.43)$$

Проекция же вектора $\mathbf{a}_n$, задаваемого векторным уравнением (5.10), на оси данной системы координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{V}_x - 2\Omega_y V_z - g_x; \\ a_z &= \dot{V}_z + 2\Omega_x V_y - 2\Omega_y V_x - g_z. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Компоненты ускорения силы тяжести, входящие в соотношения (5.44), вычисляются на основании расчетных зависимостей, характеризующих градиент потенциала земного сфероида, приведенных в гл. 1. Сигналы, снимаемые с первых интеграторов, установленных в выходных цепях акселерометров, будут согласно (5.44) содержать информацию вида

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^t [a_x + 2\Omega_y V_z + g_x] dt; \\ V_z &= \int_0^t [a_z - 2\Omega_x V_y + 2\Omega_y V_x + g_z] dt. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Как следует из структуры приведенных соотношений, поправки, которые необходимо ввести в выходные сигналы акселерометров, могут быть вычислены на основе получаемых значений составляющих вектора скорости V_x , V_y и V_z . Достоинством приборной реализации постоянно ориентированного касательного координатного трехгранника является то, что скорость вращения его осей постоянна и она может быть определена и введена в систему в виде установки («уставки») в период предстартовой подготовки. В результате достигается более высокая точность работы системы. Существенный недостаток связан с тем, что рассматриваемый координатный базис «не держит» направления местной вертикали и, следовательно, ориентацию ЛА относительно поверхности Земли не представляется возможным определять по непосредственным измерениям, получаемым с гироскопических устройств, обеспечивающих ориентацию

платформы. При решении ряда навигационных задач необходимо, чтобы оси сопровождающей системы не совпадали с осями выбранной базовой системы. В частности, это имеет место при реализации так называемой **свободной в азимуте системы координат**. Такая система, сохраняя ориентацию в плоскости местного горизонта, может поворачиваться по азимуту. Особенностью ее является то, что при отсутствии вертикальной скорости объекта нет необходимости управлять ориентацией оси чувствительности вертикального гироскопа, а сигналы на ориентацию горизонтальных гироскопов берутся с интеграторов выходных каналов акселерометров. Возможность использования свободной в азимуте системы для баллистических ракет связана с необходимостью коррекции навигационного алгоритма с целью учета в нем существенной вертикальной составляющей вектора скорости. Рассмотрим схему получения уравнений приборной реализации свободной в азимуте сопровождающей системы. В отличие от (5.3) выражение для определения абсолютной скорости ЛА применительно к рассматриваемому случаю будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}]_a = \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (5.46)$$

Соответственно абсолютное ускорение зададим в форме

$$\frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}]_a = \frac{d^*}{dt} [\dot{\mathbf{r}}] + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt} [\mathbf{r}]_a \quad (5.47)$$

или с учетом (5.46)

$$\frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}]_a = \frac{d^*}{dt} [\dot{\mathbf{r}}] + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (5.48)$$

где $\mathbf{V} = \frac{d^*}{dt} \mathbf{r}$, а $\frac{d^*}{dt} [\dot{\mathbf{r}}] = \dot{\mathbf{V}}$.

Имея в виду (5.1), получим

$$\frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{a}_n + \mathbf{g}_r - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (5.49)$$

Тогда выходные сигналы первых интеграторов горизонтальных акселерометров определяются, как

$$V_x = \int_0^t [a_x + g_{rx} - \omega_z V_y - \omega_y V_z - \Omega_z \omega_y r] dt; \quad (5.50)$$

$$V_z = \int_0^t [a_z + g_{rz} + \omega_y V_x - \omega_x V_y + \Omega_x \omega_y r] dt. \quad (5.51)$$

В силу (5.26) угловые скорости изменения ориентации горизонтальных гироскопов будут равны

$$\omega_x = V_z r^{-1}; \quad \omega_z = -V_x r^{-1}, \quad (5.52)$$

из чего следует, что корректирующие моменты, пропорциональные ω_x и ω_z , действительно определяются интегралами от выходных сигналов акселерометров, отнесенными к модулю радиуса-вектора $\mathbf{r}$.

5.1.2. Математические аналоги структурных схем навигационных систем и отвечающие им типовые схемы конструктивного выполнения ИНС

Векторное уравнение (5.10) дает основание для построения функциональной схемы системы (рис. 5.2), позволяющей определить скорость и положение ЛА относительно Земли.

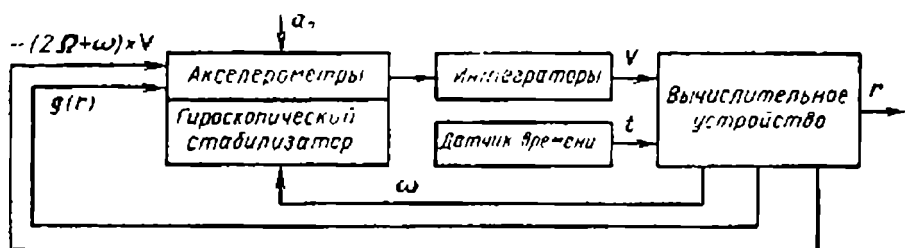


Рис. 5.2. Функциональная схема ИНС

Естественно, что конкретный вид уравнений инерциальной навигации, зависящий от реализуемого на борту координатного базиса, повлечет за собой различную структуру схемного построения ИНС. Наиболее сложной, очевидно, будет структура инерциаль-

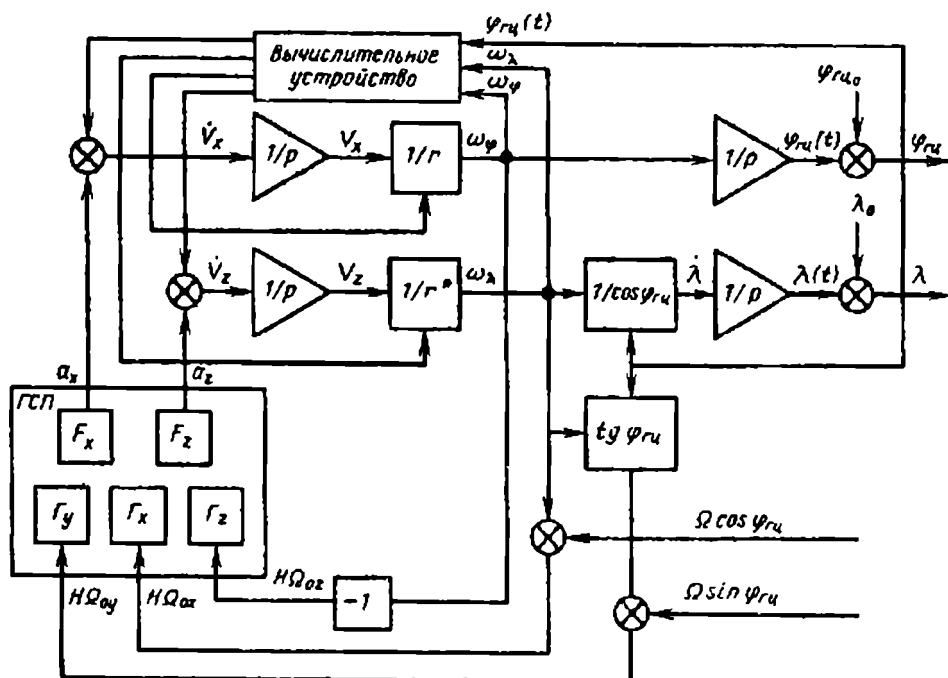


Рис. 5.3. Математический аналог структурной схемы ИНС относительно вращающейся Земли

ной системы навигации, использующей географическую сопровождающую систему координат и отвечающую навигационным уравнениям типа (5.31), (5.32). Рис. 5.3 иллюстрирует структуру такой системы. Формирование сигналов управления текущей ориентацией платформы осуществляется в соответствии с зависимостями

(5.33)÷(5.35). Управляющие сигналы подаются на датчики моментов гироскопов Γ_i ($i = x, y, z$). В результате обеспечивается непрерывная ориентация осей чувствительности акселерометров в направлении осей $X_{сн}$ и $Z_{сн}$ сопровождающей системы координат.

Выходные сигналы акселерометров F_x и F_z поступают на суммирующие устройства, где осуществляется компенсация сигналов на величину поправок, соответственно равных

$$\Delta \dot{V}_x = -(2\Omega \sin \varphi_{гц} + \omega_\lambda \operatorname{tg} \varphi_{гц}) \omega_\lambda r^*;$$

$$\Delta \dot{V}_z = (2\Omega \sin \varphi_{гц} + \omega_\lambda \operatorname{tg} \varphi_{гц}) \omega_\lambda r.$$

Проинтегрированное значение сигналов, снимаемых с выходов суммирующих устройств, пропорциональны составляющим скорости V_x

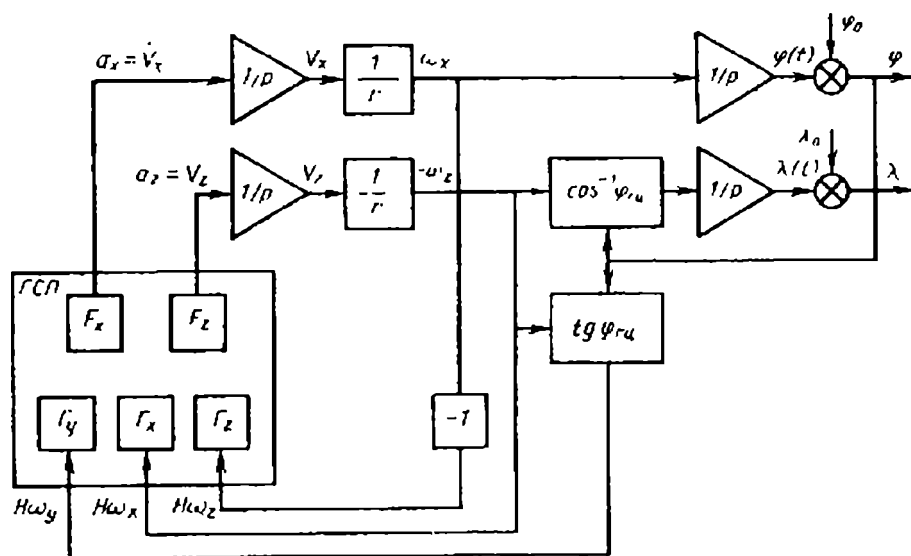


Рис. 5.4. Математический аналог структурной схемы ИНС относительно невращающейся Земли

и V_z . Умножение их на r^{-1} и $(r^*)^{-1}$, вычисляемых по известному значению $\varphi_{гц}$, дают согласно соотношениям (5.26) соответственно ω_φ и ω_λ . Последующее интегрирование ω_φ и суммирование сигнала с сигналом, задающим начальное значение широты $\varphi_{гц}(t_0)$, позволяет определить текущее значение географической широты. Для вычисления текущего значения географической долготы предварительно, перед подачей сигнала, пропорционального ω_λ , его значение необходимо, следуя соотношению $\lambda = \omega_\lambda (\cos \varphi_{гц})^{-1}$, умножить на $(\cos \varphi_{гц})^{-1}$.

В случае инерциальной навигации относительно поверхности невращающейся Земли при использовании касательной сопровождающей системы координат выходные сигналы акселерометров соответственно равны $a_x = \dot{V}_x$ и $a_z = \dot{V}_z$. Данное обстоятельство приводит к существенному упрощению структуры системы, во-первых, из-за отсутствия необходимости вычисления поправок, во-вторых, в связи с упрощением процесса формирования управляющих

сигналов, имея в виду соотношения (5.37). Математический аналог структурной схемы ИНС относительно поверхности невращающейся Земли приведен на рис. 5.4.

Выбор того или иного алгоритма навигации определяется такими соображениями, как назначение ЛА и дальность его полета, требуемая точность решения навигационной задачи, особенность выполнения соответствующих математических операций в вычислительном устройстве, условия пуска ракеты и т. д. С точки зрения приборной реализации эти соображения определяют необходимость выбора количества рамок карданова подвеса, типа применяемых гироскопов, количества акселерометров, наличия или отсутствия обратных связей и пр. В свою очередь, способ построения цепи обратной связи определяется способом реализации на ЛА горизонтальной системы координат ИНС.

Именно по этому признаку инерциальные системы разделяют [25, 65, 81 и др.] на три типа: полуаналитические, геометрические и аналитические.

В ИНС **полуаналитического типа** измерительные оси гироскопов и акселерометров расположены в одной плоскости, что обеспечивается установкой акселерометров на ГСП прецизионной курсовертикали с интегральной коррекцией. Цепь местной обратной связи в каждом из двух горизонтальных каналов системы образуется за счет подачи на ДМ соответствующих гироскопов сигналов, пропорциональных значению интеграла выходного сигнала акселерометра. В азимуте платформа ориентируется в соответствии с выбранной системой отсчета. Она может корректироваться в азимутальном направлении и непосредственно в процессе полета. В отличие от горизонтальных каналов азимутальный, как правило, разомкнут. Отличительным признаком системы является использование классического варианта устранения в ней скоростных и баллистических погрешностей (девиаций). Устранение **скоростной девиации**, обусловленной движением с постоянной скоростью вдоль поверхности Земли, обеспечивается за счет применения интегральной коррекции. Исключение **баллистических девиаций**, связанных с приобретением системой свойства невозмущаемости силами инерции при полете с ускорением, достигается соответствующей настройкой коэффициентов усиления. Карданов подвес ИНС полуаналитического типа состоит из трех рамок, что делает ее наиболее компактной по отношению к ИНС другого типа.

В ИНС **геометрического типа** реализован иной по сравнению с рассмотренным вариант построения системы, не возмущаемой силами инерции. Сущность его заключается в том, что акселерометры со взаимно ортогональными осями чувствительности, ориентированными в географической системе координат, поворачиваются в процессе движения ЛА так, что все время остаются в плоскости местного горизонта, а оси ГСП сохраняют неподвижную ориентацию относительно инерциального пространства. Поворот измерительных осей акселерометров относительно ГСП осуществляется с угловой скоростью, равной сумме скоростей вращения Земли и

относительного движения ЛА. Разворот платформы с акселерометрами в процессе полета ЛА относительно ГСП достигается за счет дополнительного карданова подвеса, обеспечивающего три степени свободы относительно платформы гиросtabilизатора. В качестве исполнительных органов используются интегрирующие электродвигатели (ИД), установленные по осям дополнительного карданова подвеса. С учетом дополнительного карданова подвеса ИНС геометрического типа будет иметь пять рамок. Первая из них связана с корпусом ЛА рамкой крена, вторая — рамкой тангажа, третья — рамкой курса, четвертая и пятая — рамками широты и долготы соответственно.

Принципиальной особенностью ИНС аналитического типа является то, что акселерометры в ней располагают на гиросtabilизированной платформе, выставленной относительно заданной инерциальной системы координат. При этом горизонтальная плоскость системы на борту физически не моделируется, а вся необходимая информация получается в результате вычислений в БЦВМ. Другими словами, ИНС аналитического типа не предполагает физического моделирования маятника с шулеровским периодом. Физическое моделирование здесь заменяется математическим.

В процессе полета акселерометры будут измерять проекции вектора кажущегося ускорения на оси инерциального сопровождающего трехгранника. Для определения проекций вектора абсолютного линейного ускорения ЛА на его оси необходимо учесть проекции вектора гравитационного ускорения. Соответствующие сигналы компенсации формируются в БЦВМ. Так же как и предыдущие типы систем, ИНС аналитического типа относится к числу замкнутых динамических систем с отрицательной обратной связью через ВУ. Целесообразно отметить, что к вычислительному устройству таких систем предъявляются существенно более высокие требования (по объему памяти, быстродействию, точности и т. д.), чем к ВУ рассмотренных ранее типов ИНС.

5.1.3. Кинематические основы построения БИНС

Несмотря на определенные различия в схемах построения ИНС геометрического, полуаналитического и аналитического типов все они обладают общностью, обусловленной необходимостью использования в них стабилизируемых платформ. Погрешности работы платформенных ИНС во многом определяются ошибками стабилизации ГСП относительно осей земного или инерциального координатных трехгранников. Создание же прецизионных платформ представляет собой задачу большой технической сложности. Кроме того, ГСП ИНС обладают общими недостатками, связанными со сравнительно большими интервалами времени, затрачиваемыми на их подготовку к работе, значительной массой и габаритными размерами, а главное, ограниченными перспективами повышения надежности. В этом смысле представляет интерес возможность построения инерциальной системы связанного типа, которую также называют

бесплатформенной или бескарданной инерциальной навигационной системой (БИНС). Чувствительные элементы в такой системе устанавливаются непосредственно на корпусе ЛА, что приводит к совпадению в БИНС измерительных триэдров со связанной системой координат ракеты. При этом изменение ориентации отсчетной базы (стабилизированной платформы) полностью моделируется математическими методами в БЦВМ. Очевидно, что такой подход к построению ИНС позволяет в принципе повысить точность и надежность системы и значительно упростить технологию ее изготовления. Это обстоятельство дало основание отечественным специалистам

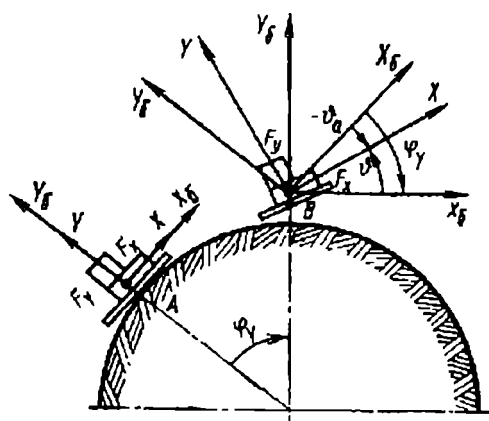


Рис. 5.5. К выводу уравнений инерциальной навигации для однокомпонентной БИНС

еще в конце 40-х годов вплотную заняться разработкой теории бесплатформенных ИНС. Однако практическая реализация их оказалась столь сложной, что даже в настоящее время трудности технического воплощения БИНС не решены еще в полной мере. Дело заключается в том, что на точность работы БИНС в первую очередь оказывают влияние погрешности чувствительных элементов. Последние в варианте построения ИНС связанного типа при размещении их непосредственно на корпусе ЛА находятся в существенно более тяже-

лых условиях работы, чем в случае установки на стабилизированной платформе. Они оказываются подверженными прямому воздействию высоких угловых скоростей, возникающих в процессе полета ракеты, а главное, влиянию угловых и совместно угловых и линейных вибраций. Особенно неприятны в этом смысле вибрации, действие которых не совпадает с направлением осей чувствительности приборов. Появление гироскопов с электростатическим подвесом, а особенно оптических гироскопов (ОК — гироскопов, лазерных гироскопов или иначе гиromетров), основанных на применении кольцевых оптических квантовых генераторов, позволило, отчасти, решить проблему. Успехи, достигнутые в области микроминиатюризации, обеспечившие качественный скачок в разработке бортовых ЦВМ также в значительной мере способствовали этому. Следуя [25], рассмотрим принципиальную возможность построения БИНС на примере однокомпонентной системы. С целью упрощения анализа будем считать, что ЛА совершает полет относительно неподвижной сферической Земли в плоскости. Однокомпонентная навигационная система будет иметь только два акселерометра F_x и F_y , измерительные оси которых OX и OY , совпадающие с осями связанной системы координат ЛА, выставляются (рис. 5.5) в точке старта по осям связанного с Землей координатного двухгранника OX_0Y_0 , принимаемого за базовую систему отсчета. Стартовое положение измеритель-

ных осей акселерометров остается фиксированным относительно строительных осей ЛА в течение всего времени движения последнего. Пусть в некоторый текущий момент времени t ЛА находится в точке B , отстоящей от точки A на величину угла φ_T . Тогда, при ориентации ЛА, отвечающей рис. 5.5, акселерометры F_x и F_y будут выдавать информацию о составляющих вектора абсолютного ускорения движения, задаваемых в виде

$$a_x = \dot{V}_{ax} + g_T \sin \vartheta; \quad a_y = \dot{V}_{ay} - g_T \cos \vartheta. \quad (5.53)$$

Для определения кинематических параметров, характеризующих движение ЛА относительно поверхности Земли, необходимо получить проекции вектора ускорения центра масс объекта на оси базовой системы координат

$$\begin{aligned} a_{x_0} &= \dot{V}_{ax} \cos \vartheta - \dot{V}_{ay} \sin \vartheta; \\ a_{y_0} &= \dot{V}_{ax} \sin \vartheta + \dot{V}_{ay} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Подставляя в (5.54) соответствующие составляющие вектора $\dot{V}_a$ из (5.53), найдем

$$\begin{aligned} a_{x_0} &= a_x \cos \vartheta - a_y \sin \vartheta; \\ a_{y_0} &= a_x \sin \vartheta + a_y \cos \vartheta - g_T. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Имея в виду вытекающее из рис. 5.5 соотношение углов

$$\vartheta = -(\varphi_T - \vartheta_a), \quad (5.56)$$

запишем

$$\begin{aligned} a_{x_0} &= a_x \cos (\varphi_T - \vartheta_a) + a_y \sin (\varphi_T - \vartheta_a); \\ a_{y_0} &= -a_x \sin (\varphi_T - \vartheta_a) + a_y \cos (\varphi_T - \vartheta_a) - g_T. \end{aligned} \quad (5.57)$$

В свою очередь, текущие значения угла отклонения измерительных осей акселерометров относительно базового координатного двухгранника могут быть определены как в результате непосредственных измерений (с помощью свободного гироскопа), так и измерением текущих значений углового ускорения $\dot{\vartheta}_a$ или скорости $\dot{\vartheta}_a$ с последующим их интегрированием

$$\vartheta_a = \int_0^t \left(\int_0^t \dot{\vartheta}_a dt + \dot{\vartheta}_{a0} \right) dt; \quad \vartheta_a = \int_0^t \dot{\vartheta}_a dt, \quad (5.58)$$

где $\dot{\vartheta}_{a0}$ — начальное значение угловой скорости.

Из изложенного следует, что в зависимости от способа определения углового положения ЛА возможны различные варианты построения ИНС данного класса. Например, при использовании схемы, включающей два линейных акселерометра F_x и F_y и датчик угловой скорости (ДУС), установленные в центре масс ЛА, связанные со

входом ВУ, навигационный алгоритм будет определяться зависимостями

$$\ddot{\varphi}_Y = \frac{1}{r} [a_x \cos(\varphi_Y - \vartheta_a) + a_y \sin(\varphi_Y - \vartheta_a)];$$

$$\dot{\vartheta}_a = \int_0^t \dot{\vartheta}_a dt.$$
(5.59)

Схема вычислительной системы, реализующей данный алгоритм, приведена на рис. 5.6. Как и однокомпонентная, трехкомпонентная

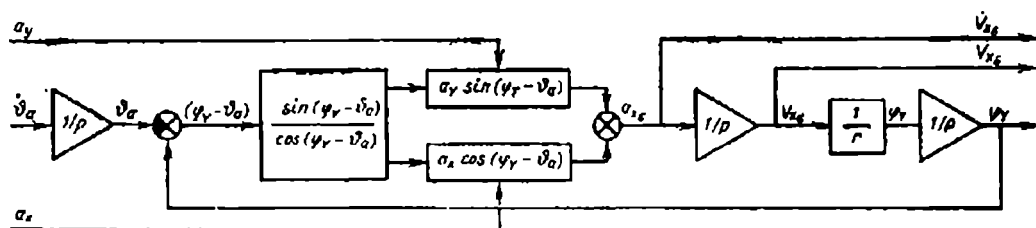


Рис. 5.6. Схема вычислительного алгоритма однокомпонентной БИНС.

БИНС может иметь следующие основные варианты схемной реализации:

- а) шесть линейных акселерометров, попарно разнесенных на определенные расстояния относительно некоторой точки (в частности, относительно центра масс) по трем ортогональным осям ЛА;
- б) три линейных акселерометра и три измерителя угловой скорости, устанавливаемые в некоторой точке ЛА;
- в) три акселерометра и три измерителя углового положения ЛА.

Во всех указанных вариантах схем построения БИНС предполагается наличие вычислительной машины (как правило, БЦВМ) для решения соответствующих систем кинематических уравнений. Оси чувствительности измерительных приборов обычно взаимно ортогональны и их положение относительно базовой системы должно быть известно. Перед стартом ЛА оси чувствительности приборов целесообразно ориентировать по осям базовой системы, относительно которой производится навигация объекта.

5.2. ОСНОВНЫЕ ИСТОЧНИКИ И ХАРАКТЕР ЭВОЛЮЦИЙ ОШИБОК ИНС

5.2.1. Причины возникновения ошибок в ИНС

Метод счисления пути является весьма чувствительным к ошибкам приборно реализующих его систем. Поэтому полезно иметь представление об основных источниках ошибок в ИНС и характере их изменения.

Ошибки в инерциальных навигационных системах могут возникать по различным причинам: из-за неточностей изготовления измерительных приборов (гироскопов и акселерометров); рассогласования осей приборов, смонтированных на платформе; начальных

ошибок в горизонтировании и ориентировании платформы; ошибок вычислений и используемых аппроксимаций при приборной реализации уравнений системы. Исходя из характера этих ошибок разделим их на две категории: инструментальные ошибки и методические ошибки. К первой категории относятся все ошибки, которые определяют способность ИНС к выдаче точной навигационной информации. В их число включим ошибки чувствительных элементов и ошибки начальной выставки (начального ориентирования). Эти ошибки являются наиболее весомыми с точки зрения обеспечения требуемой точности работы системы. Ко второй категории ошибок относятся погрешности, обусловленные бортовой инструментальной реализацией алгоритма навигации. Как правило, они возникают из-за стремления к упрощению навигационной системы. Сюда входят прежде всего ошибки, связанные с «загрублением» математической модели процесса за счет принятия различного рода допущений. К ошибкам данного типа относятся и ошибки собственно вычислений, возникающие из-за округлений, использования различного рода аппроксимаций, а также из-за ограниченности разрядной сетки БЦВМ. Применительно к БИНС, в дополнение к указанным выше инструментальным ошибкам, приводящим к погрешностям измерений, должны быть отнесены и ошибки измерений, обусловленные упругой деформацией корпуса ЛА. Действительно, в случае размещения приборов непосредственно на корпусе, особенно в вариантах их «разнесенной» установки, измерительный сигнал будет содержать информацию не только об истинных параметрах движения «жесткого» ЛА, но и о упругих колебаниях корпуса ЛА (см. разд. 2.5.5). В большинстве случаев факторы, влияющие на образование ошибок системы, особенно инструментальные ошибки, носят случайный характер. Однако в рамках данного анализа, ставящего целью качественную оценку влияния ошибок на точность решения навигационной задачи, ограничимся детерминированным подходом.

5.2.2. Вывод векторных уравнений ошибок платформенных ИНС

При проектировании ИНС основное внимание уделяется инструментальным ошибкам, что связано, в первую очередь с их наибольшим вкладом в общую суммарную погрешность ИНС, и, кроме того, в связи с тем, что они сложным образом зависят от изменяющихся в процессе полета условий, а также от различных, действующих на ЛА возмущений. Методическим ошибкам обычно уделяется меньшее внимание, поскольку их влияние с появлением современных БЦВМ объективно стало менее весомым. Однако при большой дальности и длительности полета они становятся соизмеримыми с инструментальными и должны учитываться. Это приводит к необходимости при исследовании процесса накопления ИНС ошибок в определении местоположения рассматривать погрешности ориентирования платформы не относительно ее истинного положения, а относительно углового положения, определяемого в ВУ с учетом методических ошибок.

Итак, введем в рассмотрение некоторую базовую систему координат, например, постоянно оториентированный касательный координатный трехгранник и отвечающую ему сопровождающую систему, моделирующую на борту ЛА выбранный базис. Угловую скорость реальной (подверженной уходом) сопровождающей системы относительно инерциального пространства обозначим через ω_p , скорость

ориентации отвечающей ей правильной системы — через ω_{Π} , а скорость изменения углового положения сопровождающей системы, рассчитываемую в ВУ — ω_B . Естественно, будем рассматривать случай, при котором угловые отклонения между этими тремя координатными системами малы. Тогда они могут быть представлены в виде векторов, абсолютные величины которых равны угловым отклонениям, а направление перпендикулярно плоскости этого углового отклонения и образует со сторонами угла правую систему координат. Введем следующие обозначения. Пусть Φ — вектор угла между реальной и правильной системами координат, $\delta\theta$ — вектор угла между правильной системой и положением системы, определяемым ВУ, а $\delta\Psi$ — вектор угла, характеризующий рассогласование между вычисляемой и реальной ориентацией платформы. Инерциальная угловая скорость осей реальной платформы будет равна

$$\omega_p = \omega_{\Pi} + \dot{\Phi}. \quad (5.60)$$

С другой стороны, с точки зрения сигналов, пропорциональных угловой скорости ω_B , формируемых в ВУ для подачи их на ДМ гироскопов, получим

$$\omega_B = \omega_{\Pi} + \delta\dot{\theta}. \quad (5.61)$$

Данная величина вектора угловой скорости раскладывается на составляющие по осям правильной системы координат. Но (как было принято) между осями правильной системы и системы, определяемой ВУ, имеет место угловое рассогласование, задаваемое вектором $\delta\theta$. Учитывая к тому же, что ориентация реальной системы относительно правильной определяется углом Φ , результирующая угловая скорость реальной платформы при наличии угловой скорости ухода гироскопов в будет равна

$$\omega_p = \Phi^{-1} \times [\omega_B - \delta\theta \times \omega_{\Pi} + \varepsilon] \quad (5.62)$$

или, что аналогично [27],

$$\omega_p = \omega_B + \Phi \times \omega_B - \delta\theta \times \omega_B + \Phi \times (\delta\theta \times \omega_{\Pi}) + \varepsilon + \Phi \times \varepsilon. \quad (5.63)$$

Поскольку $\delta\theta$, Φ и ε есть величины малые, можно пренебречь членами $\Phi \times \varepsilon$ и $\Phi \times (\delta\theta \times \omega_B)$, как имеющими второй порядок малости. Тогда

$$\omega_p = \omega_B + (\Phi - \delta\theta) \times \omega_{\Pi} + \varepsilon. \quad (5.64)$$

Подставляя в (5.64) значение ω_B из (5.61) и пренебрегая произведением $(\Phi - \delta\theta) \times \delta\dot{\theta}$, как имеющим второй порядок малости, найдем

$$\omega_p = \omega_{\Pi} + \delta\dot{\theta} + (\Phi - \delta\theta) \times \omega_{\Pi} + \varepsilon. \quad (5.65)$$

Теперь приравняем (5.60) и (5.65). В результате получим

$$\dot{\Phi} - \delta\dot{\theta} + \omega_{\Pi} \times (\Phi - \delta\theta) = \varepsilon. \quad (5.66)$$

Наконец, имея в виду, что $\Phi = \delta\Psi + \delta\theta$ или

$$\Phi - \delta\theta = \delta\Psi, \quad (5.67)$$

а $\dot{\Phi} - \delta\dot{\theta} = \delta\dot{\Psi}$, запишем окончательно

$$\delta\dot{\Psi} + \omega_{\Pi} \times \delta\Psi = \varepsilon. \quad (5.68)$$

Векторное уравнение (5.68) характеризует накопление со временем угловой ошибки, определяющей рассогласование ориентации осей реальной платформы по отношению к их вычисляемой ориентации.

Нетрудно заметить, что эта ошибка не зависит от ошибок определения местоположения ЛА.

Теперь перейдем к анализу ошибок местоположения. Для рассматриваемого координатного базиса $\omega = \Omega$, поэтому, учитывая (5.3), запишем

$$\frac{d}{dt} [\dot{r}]_a = \frac{d}{dt} \left[\frac{d^*}{dt} r \right] + 2\Omega \times \frac{d^*}{dt} r + \Omega \times (\Omega \times r). \quad (5.69)$$

Теперь, имея в виду (5.1), а также то, что

$$g = g_T - \Omega \times (\Omega \times r),$$

получим

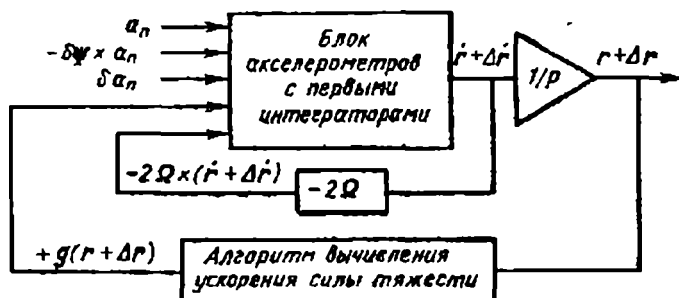
$$a_n = \frac{d}{dt} V + 2\Omega \times V - g_r + \Omega \times (\Omega \times r) = \frac{d}{dt} V + 2\Omega \times V - g. \quad (5.70)$$

Отметим, что ускорение от силы тяжести есть функция текущего радиуса-вектора r . В связи с этим (5.70) более строго следует записать как

$$a_n = \frac{d}{dt} V + 2\Omega \times V - g(r). \quad (5.71)$$

Применительно к правильной системе координат и точном вычислении составляющих кориолисова ускорения ($2\Omega \times V$) и ускорения свободного падения в проекциях на эти оси, предварительно скомпенсированный на величину указанных слагаемых выходной сигнал акселерометра после его двухкратного интегрирования будет определять местоположение ЛА, т. е. даст величину r . На самом деле, из-за имеющих место ошибок $a_n \neq \ddot{r}$. Эти ошибки будут складываться из ошибок

Рис. 5.7. Схема ИНС, иллюстрирующая возникновение ошибок в определении местоположения объекта



ориентирования платформы по сигналам ВУ, обозначаемых как $\delta\psi \times a_n$, собственно ошибок акселерометра δa_n (смещение нуля, ошибки масштабирования и т. д.) и ошибок в определении компенсирующей поправки в силу возникновения ошибки в определении r (рис. 5.7). Тогда

$$a_n - \delta\psi \times a_n + \delta a_n + g(r + \Delta r) - 2\Omega \times (\dot{r} + \Delta \dot{r}) = \ddot{r} + \Delta \ddot{r}. \quad (5.72)$$

Заменив a_n его выражением из (5.70), найдем

$$\ddot{r} + 2\Omega \times \dot{r} - g(r) - \delta\psi \times a_n + \delta a_n + g(r + \Delta r) - 2\Omega \times (\dot{r} + \Delta \dot{r}) - \ddot{r} - \Delta \ddot{r} = 0$$

или иначе

$$\Delta \ddot{r} + 2\Omega \times \Delta \dot{r} + g(r) - g(r + \Delta r) = \delta a_n - \delta\psi \times a_n. \quad (5.73)$$

Очевидно, что Δr является малой величиной по отношению к r . Поэтому будем считать, что

$$g(r + \Delta r) = g(r) + \Delta g. \quad (5.74)$$

Проведя замену в (5.73) с учетом (5.74), найдем

$$\Delta \ddot{r} + 2\Omega \times \Delta \dot{r} - \Delta g = \delta a_n - \delta\psi \times a_n. \quad (5.75)$$

Для коротких по отношению к 24-часовому периоду вращения Земли интервалов времени движения ЛА кориолисовым ускорением можно пренебречь. В этом случае $g = g_r$ и соответственно согласно сведениям, изложенным в разд. 1.2.2 $g = -\frac{K}{r^3} r$, где $K = fM$. Тогда с учетом степенного разложения

$$\Delta g = \frac{3K}{r^6} (\Delta r \cdot r) r - \frac{K}{r^3} \Delta r \quad (5.76)$$

для правильной ($\delta\psi = 0$) сопровождающей системы координат получим

$$\Delta \ddot{r} = \delta a_n - \frac{K}{r^3} \Delta r + \frac{3K}{r^6} (\Delta r \cdot r) r. \quad (5.77)$$

Уравнение (5.77) представляет собой основное уравнение ошибок при использовании в качестве базового координатного трехгранника геоцентрической инерциальной системы координат. Оно может быть преобразовано к виду

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}} = \delta \mathbf{a}_n - \frac{\mathbf{g}(\mathbf{r})}{r} \left[\Delta \mathbf{r} - \frac{3(\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \mathbf{r} \right]. \quad (5.78)$$

Вернемся теперь к соотношению (5.73). Отметим, что в случае, когда для определения $\mathbf{g}$ используются неинерциальные средства измерения высоты полета (что характерно для ИНС, реализующих «навигацию на плоскости»), ошибка в определении r (т. е. по существу горизонтальных координат ЛА) повлечет за собой только ошибку в определении направления $\mathbf{g}$. Тогда составляющая $3\mathbf{g}(\mathbf{r}) \frac{\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \mathbf{r} \approx 0$. Соответственно уравнение ошибок применительно к случаю навигации на плоскости примет вид

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{g}(\mathbf{r})}{r} \Delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{a}_n - \delta \Psi \times \mathbf{a}_n. \quad (5.79)$$

Здесь так же как и в предыдущем случае принято, что продолжительность полета несоизмеримо мала по отношению к периоду вращения Земли, однако при реализации рассматриваемого типа навигации, она (эта продолжительность) в целом существенно больше, чем время полета баллистических ракет на активном участке траектории. Поэтому, если для последних уходами платформы еще можно пренебречь ($\delta \Psi = 0$), то для ЛА, совершающих длительный полет в окрестности поверхности Земли, величина $\delta \Psi$ становится одной из главных возмущающих функций в уравнении ошибок местоположения.

Обратим внимание на тот факт, что полученные уравнения ошибок свидетельствуют, что имеющие место ошибки определения местоположения ЛА обладают колебательным характером с частотой Шулера, равной $\nu = \sqrt{g/r}$. Если бы шулеровские колебания, обусловленные наличием обратной связи по вычисляемому значению ускорения свободного падения отсутствовали, то инерциальная навигация в современном виде была бы крайне затруднена в силу практической невыполнимости основных требований по точности, которым должны были бы удовлетворять приборы длительно функционирующих ИНС.

5.2.3. Анализ эволюций ошибок одноосного гиросtabilизатора с интегральной коррекцией

Качественную картину колебательного характера накопления ошибок в платформенных ИНС, обусловленных погрешностями работы их элементов, удобно проиллюстрировать на примере эволюций ошибок одноосного гиросtabilизатора с интегральной коррекцией, изображенного на рис. 5.1. Схема его математического аналога приведена на рис. 5.8. В соответствии с этой схемой при наклоне платформы на угол $\delta \Psi$ относительно истинной плоскости горизонта и наличии ошибки в показаниях акселерометра δa_n — приборное значение ускорения, пропорциональное выходному сигналу акселерометра, будет определяться при малом $\delta \Psi$ как

$$\dot{V}_{np} = \dot{V} + g \delta \Psi + \delta a_n. \quad (5.80)$$

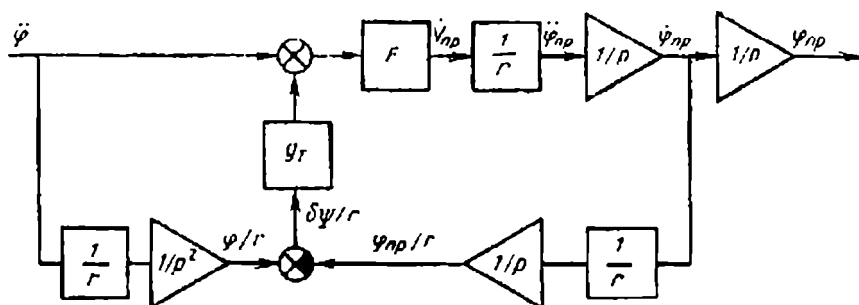


Рис. 5.8. Схема математического аналога одноосного гиросtabilизатора с интегральной коррекцией

Имея в виду, что $\ddot{\varphi} = \dot{V}r^{-1}$, и, следовательно,

$$\Delta\ddot{\varphi} = r^{-1}(-\dot{V}_{np} + \dot{V}), \quad (5.81)$$

а $\delta\dot{\Psi} = -\Delta\dot{\varphi}$, получим уравнение для расчета ошибки угловой стабилизации платформы

$$\Delta\ddot{\varphi} + \frac{g_T}{r} \Delta\varphi = \frac{\delta a_{\Pi}}{r}. \quad (5.82)$$

Решение его для постоянной высоты полета при $\delta a_{\Pi} = \text{const}$ имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{\delta a_{\Pi}}{g_T} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g_T}{r}} t \right). \quad (5.83)$$

График изменения $\Delta\varphi$ во времени представлен на рис. 5.9, а. Как видим, $\Delta\varphi(t)$ является периодической функцией, колебания которой с периодом Шулера осуществляется относительно среднего значения

$$\Delta\varphi_{cp} = \frac{\delta a_{\Pi}}{g_T}. \quad (5.84)$$

Аналогичным образом определяется и погрешность, вызванная постоянной ошибкой стабилизации ($\delta\dot{\Psi}_0 = \delta\dot{\Psi} = \text{const}$) платформы

$$\Delta\varphi = \delta\dot{\Psi}_0 \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g_T}{r}} t \right). \quad (5.85)$$

Очевидно, что график данной функции будет иметь тот же характер, что и отвечающий соотношению (5.83). В силу систематического ухода платформы с угловой скоростью $\delta\dot{\Psi} = \delta\dot{\Psi}_0 = \text{const}$ погрешность в измерении $\Delta\varphi$ будет определяться как

$$\Delta\varphi = \delta\dot{\Psi}_0 \left(\sqrt{\frac{r}{g_T}} \sin \sqrt{\frac{g_T}{r}} t - t \right). \quad (5.86)$$

Из приведенной зависимости следует, что и эта погрешность изменяется по гармоническому закону с периодом Шулера. При этом

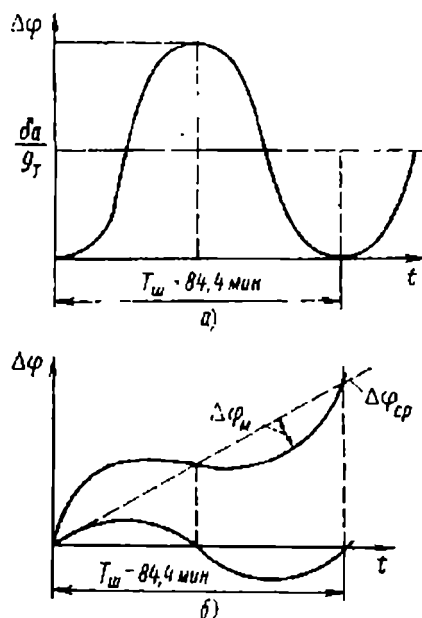


Рис. 5.9. К определению ошибок одноосного гиросtabilизатора

амплитуда будет равна $\Delta\varphi_m \approx \Delta\dot{\Psi} \sqrt{\frac{r}{g_T}}$, а среднее значение линейно возрастает (см. рис. 5.9, б) со временем

$$\Delta\varphi_{cp} = \Delta\dot{\Psi}_0 t. \quad (5.87)$$

Наличие неустойчивости нуля отсчета $\Delta\varphi_0$, эквивалентное появлению ложного сигнала на выходе при отсутствии сигнала на входе системы, вызываемое изменением параметров первого интегратора, приводит к ошибке

$$\Delta\varphi = -\frac{\Delta\varphi_0}{v} \sin vt. \quad (5.88)$$

Следует, однако, отметить, что благодаря интегральной коррекции неустойчивость первого интегратора, охваченного обратной связью, не приводит к возрастанию во времени ошибок системы по положению.

5.2.4. Инструментальные погрешности БИНС

Инструментальные погрешности БИНС складываются из погрешностей используемых измерителей, установленных непосредственно на корпусе ЛА и погрешности ВУ (не математического характера). При высокоточных вычислениях погрешности БИНС будут определяться, главным образом, погрешностями первичных измерительных приборов (акселерометров и измерителей угловой скорости или угла), входящих в систему. Для всех трех вариантов БИНС, рассмотренных ранее, уравнение ошибок однокомпонентной системы имеет один и тот же вид

$$\Delta\ddot{\varphi}_Y + \frac{a_Y + g_T}{r} \Delta\varphi_Y = \frac{1}{r} [\delta a_x \cos(\varphi_Y - \vartheta_a) + \delta a_y \sin(\varphi_Y - \vartheta_a)]. \quad (5.89)$$

Нетрудно заметить, что при $a_Y = 0$, левая часть уравнения (5.89) является ни чем иным, как уравнением маятника Шулера (см., например, (5.40)), а правая — представляет собой возмущающее воздействие. Рассмотрение движения ЛА в плоскости горизонта дает основание, положив к тому же $\delta a_x = \delta a_y = \delta a_n$, существенно упростить выражение (5.89) и представить его в первом приближении как

$$\Delta\ddot{\varphi}_Y + \frac{g_T}{r} \Delta\varphi_Y \approx \frac{\delta a_n}{r}. \quad (5.90)$$

Решение его при $\delta a_n = \text{const}$ будет иметь вид, полностью совпадающий с (5.83). Погрешность измерений, связанная с наличием отклонений $\delta\vartheta_a = \delta\vartheta_{a0}t$ влечет за собой появление ошибки в определении $\Delta\varphi_Y$, вычисляемой по формуле, аналогичной (5.86) при замене $\delta\dot{\Psi}_0$ на $\delta\dot{\vartheta}_{a0}$.

Таким образом, приходим к выводу, что ошибка измерителя угловой скорости в БИНС вызывает те же погрешности, что и дрейф стабилизированной площадки в платформенных ИНС. При наличии погрешностей в измерениях угловых ускорений в 1-м варианте схемы построения БИНС соответственно возникнут ошибки в опре-

делении угла $\delta\theta_a$ и угловой координаты φ_Y . Уравнение ошибок однокомпонентной БИНС в этом случае будет иметь вид [25]

$$\Delta\ddot{\varphi}_Y + \frac{a_Y + g_T}{r} \Delta\varphi_Y = - \frac{a_Y + g_T}{r} \delta\theta_a. \quad (5.91)$$

Имея в виду, что $\delta\theta_a = 0,5\delta\ddot{\theta}_{a0}t^2$, получим при $a_Y = 0$

$$\Delta\varphi_Y = \delta\ddot{\theta}_{a0} \left[\frac{r}{g_T} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g_T}{r}} t \right) - 0,5t^2 \right]. \quad (5.92)$$

Как следует из приведенной зависимости, погрешность однокомпонентной БИНС рассматриваемой схемы в определении $\Delta\varphi_Y$, обусловленная постоянной ошибкой в измерении угловых ускорений будет складываться из трех составляющих (рис. 5.10): из постоянной по отношению к t составляющей $\Delta\varphi_Y^c = \delta\ddot{\theta}_{a0} r g_T^{-1}$, составляющей, возрастающей пропорционально квадрату времени движения $\Delta\varphi_Y^v = -0,5\delta\ddot{\theta}_{a0} r g_T^{-1} t^2$, гармонической составляющей, изменяющейся с периодом Шулера $\Delta\varphi_Y^w =$

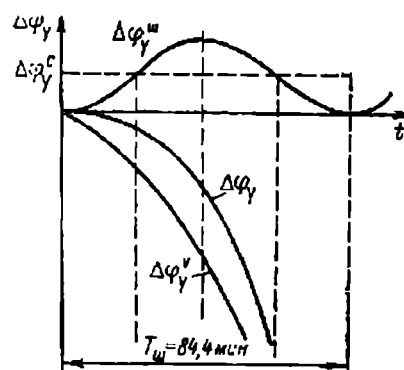


Рис. 5.10. Составляющие ошибки $\Delta\varphi_Y$ для первого варианта схемы построения БИНС

$= -\delta\ddot{\theta}_{a0} r g_T^{-1} \cos \sqrt{\frac{g_T}{r}} t$. Проведенный

анализ ошибок дает основание сделать вывод, что данный вариант схемы применим только при наличии достаточно точных акселерометров для ЛА, совершающих полет в течение непродолжительного времени, т. е. баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов. Второй и третий варианты построения БИНС характеризуются примерно той же зависимостью характеристик ошибок от времени, что и платформенные ИНС. Поэтому они более применимы для ЛА типа крылатых ракет, совершающих полет в течение достаточно длительного промежутка времени.

5.3. НАЧАЛЬНАЯ ВЫСТАВКА ИНС

5.3.1. Общие принципы выставки платформенных и бесплатформенных ИНС

Поскольку стабилизированная платформа ИНС должна удерживать в процессе полета заданное угловое положение осей чувствительности акселерометров либо разворачивать их по некоторому закону, непосредственно перед стартом ЛА оси инерциальных элементов, установленных на ГСП, должны быть соответствующим образом соориентированы. Кроме того, учитывая, что определение скорости и координат ЛА осуществляется интегрированием данных показаний акселерометров, как и при всяком интегрировании, должны быть известны начальные условия, т. е. в систему должна быть введена информация о начальной скорости и координ-

натах точки пуска, а также данные о цели. **Выставка ИНС** относительно используемой базовой системы координат заключается в горизонтировании платформы, т. е. в совмещении вертикали платформы с направлением вертикали базовой системы и ориентировании по азимуту. Для повышения точности выставки приведение платформы в горизонт и ориентирование по азимуту должно проводиться, по возможности, одновременно. Следует иметь в виду, что предельная точность, которую может обеспечить ИНС при наведении ЛА, не может превышать точности выставки платформы, поскольку погрешности, возникающие при выставке в подавляющем большинстве случаев, не могут быть скомпенсированы и, более того, в процессе полета они вызовут нарастающие ошибки в определении местоположения ЛА. Начальная выставка может быть осуществлена как на Земле (до старта), так и в процессе движения (в условиях автономного полета или при размещении ЛА на подвижном носителе). Для горизонтирования платформы неподвижно относительно Земли ЛА используются, как правило, акселерометры горизонтальных каналов ИНС. Выставка платформы в азимуте может быть осуществлена оптическими средствами или методом гирокомпасирования. Подготовка к работе ИНС в условиях движущегося относительно Земли ЛА представляет собой существенно более сложную задачу. В процессе полета отсутствует непосредственная связь между положением платформы относительно вертикали места и показаниями акселерометров горизонтальных каналов. При движении объекта горизонтальная составляющая угловой скорости отклоняется от направления на север и изменяется по величине. Вместе с тем от успешного решения задачи начальной выставки ИНС в нестационарных условиях во многих случаях (прежде всего при пуске ЛА с подвижного носителя) зависит точность решения задачи навигации в целом. Данная проблема, получившая специальное название — **выставки ИНС на подвижном основании** [55], составляет специальную задачу прикладной теории инерциальной навигации.

С точки зрения средств, используемых для выставки ИНС, различают три основных метода:

- а) начальная выставка с использованием внешних по отношению к инерциальной системе навигационных устройств;
- б) начальная выставка по информации от инерциальных измерителей выставки ИНС;
- в) начальная выставка ИНС при комбинированном использовании как внешних навигационных устройств, так и своих же инерциальных измерителей.

В качестве навигационных устройств, применяемых при реализации первого метода, могут быть использованы: геодезические реперные знаки, отвесы, уровни, пеленгаторы небесных светил, радиосекстанты и т. д. Привлечение для решения рассматриваемых задач внешних навигационных устройств делает процесс выставки ИНС, как правило, **неавтономным**. Это же будет иметь место при реализации комбинированного метода. Исключение составляет выставка комплексных систем, в частности астроинерциальных,

б) гироскопирование; в) выставка по астрономическим наблюдениям; г) векторное согласование; д) согласование углов кардановых подвесов систем.

Обсудим методологические основы указанных способов.

Как известно, **направление вертикали** совпадает с направлением силы тяжести и задается направлением отвеса, закрепленного на неподвижном относительно Земли основании. Таким образом, вертикаль сама по себе не является вектором. Она характеризует определенное направление,

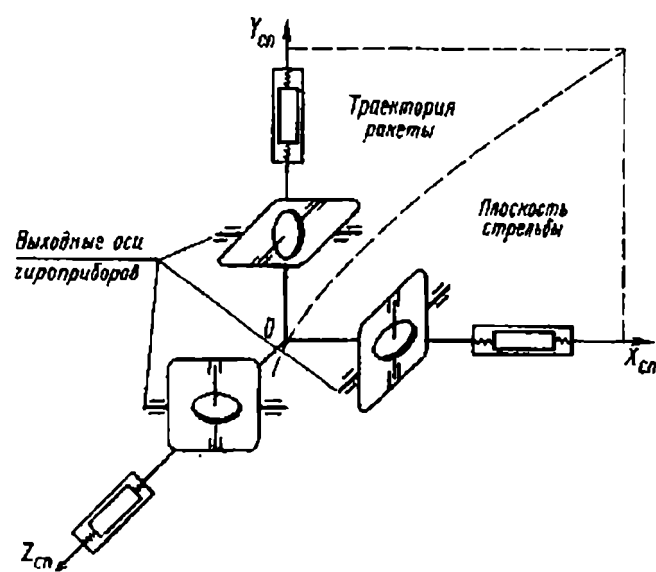


Рис. 5.11. Схема ориентирования гироскопов и акселерометров на гироскопической платформе

совпадающее с направлением вектора силы тяжести, представляющим собой один из двух неколлинеарных векторов, необходимых для выставки. В качестве чувствительных элементов, используемых при **выставке вертикали**, могут быть применены акселерометры, расположенные в плоскости платформы. Ее горизонтирование будет осуществляться при подаче выходных сигналов этих акселерометров через соответствующие преобразова-

тели на сервоприводы рамок карданова подвеса. Очевидно, что выходные сигналы горизонтальных акселерометров F_x и F_z будут равны нулю только в том случае, когда их оси чувствительности окажутся перпендикулярными направлению силы тяжести, что будет отвечать выставке платформы в горизонт. Отгоризонтированная платформа, однако, еще не является носителем трехмерной отсчетной базы. Для того чтобы она стала таковой, необходимо в дополнение к выставке вертикали провести **азимутальную выставку**. Для азимутальной выставки платформы, а следовательно, и азимутального прицеливания ракеты, при котором вертикальная (основная) плоскость симметрии ЛА, совпадающая с **плоскостью стабилизации**, совмещается (рис. 5.11) с **плоскостью стрельбы**, необходимо на стартовой позиции зафиксировать **направление стрельбы**. При условии, что основная плоскость симметрии (плоскость рулей I—III; см. стр. 393 [79]) совпадает с плоскостью стрельбы, процесс совмещения плоскости стабилизации с основной плоскостью симметрии ЛА, осуществляемый при азимутальном приведении, называется **юстировкой гироскопической платформы**. Для того чтобы зафиксировать на стартовой позиции направление стрельбы, обычно используют так называемые **ориентирные направления**. Под ними понимают направ-

ление какой-либо зафиксированной прямой, геодезический азимут которой заранее известен. Формирование ориентирного направления может осуществляться от геодезической сети на основе астрономических наблюдений или с помощью гироскопических приборов (внешних либо входящих непосредственно в состав ИНС).

Автономное определение азимутов ориентирных направлений наиболее просто осуществляется с помощью гироскопов. Гироскоп представляет собой маятниковое гироскопическое устройство, предназначенное для отслеживания направления горизонтальной составляющей вектора угловой скорости суточного вращения Земли. Процесс автоматического ориентирования ГСП в заданном азимутальном направлении с помощью гироскопа называется **гироскопированием**. Применение гироскопирования как метода азимутальной выставки, предварительно отгоризонтированной по направлению силы тяжести платформы, ограничено областями, исключаяющими полярные области, где векторы, используемые для полной выставки, оказываются близки к коллинеарным.

Наиболее распространенными способами начальной выставки платформы при пуске ракеты с подвижного носителя являются способ согласования углов кардановых подвесов систем и способ векторного согласования. Следует иметь в виду, что обычно носитель имеет более совершенный навигационный комплекс, который и используется как базовая система при выставке сопровождающей системы ракеты. Кроме применения в качестве опорной системы, ИНС носителя обеспечивает и определение начальных условий (местоположения и скорости) ракеты в момент старта. При реализации способа согласования углов кардановых подвесов систем могут использоваться как оптические, так и электромеханические варианты выставки. Ограниченность применимости данного способа связана с тем, что из-за изгибных деформаций носителя, погрешностей установки его навигационной системы, необходимости обеспечения канала прямой видимости (при оптической выставке) и т. д. возникают трудности с точки зрения обеспечения требуемой точности выставки за счет согласования платформ. В этом смысле более предпочтительным является способ векторного согласования. Принцип векторного согласования состоит в приведении выставленной системы в положение, при котором она будет иметь то же угловое положение относительно измеряемого вектора, что и система носителя. Данный принцип применим при любой физической природе измеряемого вектора (инерциальной, магнитной, электромагнитной).

5.4. ИНЕРЦИАЛЬНОЕ НАВЕДЕНИЕ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ

5.4.1. Особенности решения задачи наведения баллистических ракет с регулируемой и нерегулируемой тягой

Вследствие наличия двух различных участков (активного и пассивного) полета баллистической ракеты (БР) задачей наведения является обеспечение таких параметров движения центра масс ЛА

в момент отсечки тяги двигательной установки (ДУ), при которых последующий свободный полет будет происходить по **попадающей траектории**, т. е. траектории, удовлетворяющей поставленной задаче полета. В общем случае система наведения должна управлять тремя составляющими скорости (продольной, нормальной и боковой), отделением ступеней и головной части ракеты. Каналы управления составляющими скорости работают по принципу обратной связи и образуют совместно с БР как объектом управления, трехканальную замкнутую динамическую систему. Управление отделением составных элементов конструкции ракеты, а также формирование команды на выключение ДУ осуществляется автоматически по разомкнутой схеме (без обратной связи) с помощью **автомата управления дальностью (АУД)**. Управление боковой скоростью предназначается для удержания вектора скорости БР в плоскости стрельбы, т. е. ликвидации бокового сноса. Поэтому канал управления боковой скоростью обычно называют **каналом боковой стабилизации**. Управление нормальной скоростью ставит своей целью обеспечение полета БР в плоскости стрельбы с заданным направлением вектора скорости. Характерной особенностью работы канала является медленное изменение величины нормальной скорости за время длительности работы соответствующей ступени ракеты, что в большей степени отвечает режиму стабилизации, нежели режиму управления. Поэтому у БР с регулируемой тягой канал управления нормальной скоростью называют также **каналом нормальной стабилизации** [51]. Изменение (регулирование) продольной скорости решает задачу поддержания заданной программной скорости полета для уменьшения области параметров движения центра масс БР, при которых достигается последующее движение по попадающей траектории. Это изменение осуществляется с помощью канала (системы) **регулирования кажущейся скорости (РКС)** путем форсирования или дросселирования основной ДУ ракеты. Система РКС может отсутствовать, если представляется возможным и без изменения величины продольной скорости обеспечить требуемую точность полета.

На первый взгляд, учитывая, что под наведением мы договорились понимать управляемое движение центра масс ЛА, может показаться, что процесс угловой стабилизации не оказывает сколь-нибудь существенного влияния на процесс наведения БР и его можно безболезненно исключить из рассмотрения. На самом деле это далеко не так. Действительно, для того чтобы создать боковую и нормальную управляющие силы требуется изменить углы атаки и скольжения, что возможно лишь при изменении ориентации (углового положения) БР по каналам тангажа и рыскания. Следовательно, эти каналы **автомата угловой стабилизации (АУС)** должны быть отнесены к числу структурных элементов соответствующих каналов системы наведения. Функции АУС, как правило, сводятся к выдерживанию требуемого углового положения БР в течение всего времени полета на активном участке траектории, определяемого нулевыми значениями углов рыскания и крена ($\psi = 0$; $\gamma = 0$) и программным значением угла тангажа ($\vartheta = \vartheta_{\text{пр}}(t)$).

Возможность регулирования в широких диапазонах тяги жидкостной двигательной установки БР предопределяет обеспечение полета на активном участке по траектории, близкой к номинальной. В данном случае в чистом виде реализуется программное управление БР в окрестности номинальной траектории вплоть до момента «отсечки» тяги. Для этого необходимо измерять три составляющих ускорения центра масс БР (либо интегралы от них) и сравнивать их с программными значениями, заданными на борту в функции времени в той же системе отсчета, относительно которой ведутся измерения (рис. 5.12). Баллистические ракеты, у которых величина тяги ДУ не регулируется, например твердотопливные ракеты [51],

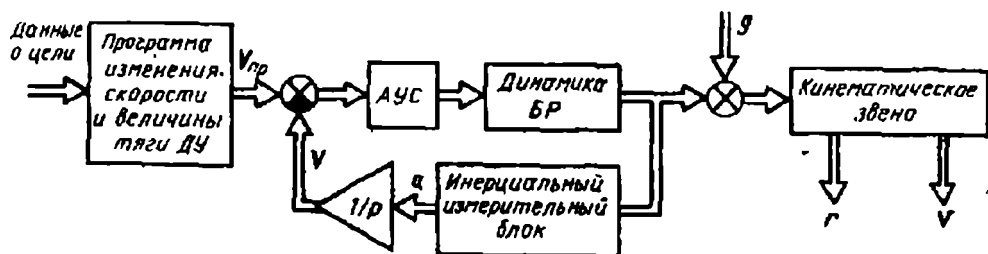


Рис. 5.12. Система управления БР с регулируемой тягой двигательной установки

могут в процессе движения существенно отклоняться от номинальной траектории. Данное обстоятельство вынуждает использовать отличный от рассмотренного принцип управления. Существо его сводится к тому, что программное управление сохраняется в отношении только углового движения (реализуется программное изменение угла тангажа), а выключение ДУ осуществляется в некоторый момент времени, определяемый из условий минимального отклонения конечной точки полета относительно заданной (цели). Данный принцип управления требует использования менее жесткой программы.

В зависимости от количества проекций вектора кажущегося ускорения (или скорости), измеряемых чувствительными элементами и используемых для целей управления дальностью полета БР, принято различать [60] одно-, двух- и трехкоординатные методы управления. На этапе баллистического полета на вход инерциальной системы информации не поступает и работа навигационной системы сводится к функционированию контура обратной связи, сопровождаемому рассмотренным ранее процессом накопления ошибок.

5.4.2. Автоматы угловой стабилизации баллистических ракет

По крайней мере два канала АУС являются структурными элементами соответствующих каналов (нормальной и боковой стабилизации) системы наведения. Канал стабилизации крена, служащий для предотвращения разворота ракеты относительно ее продольной оси при действии внешних возмущений, хотя и не входит непо-

средственно в систему наведения, тем не менее существенно влияет (в смысле облегчения) на ее работу. Предварительно рассмотрим простейший вариант построения АУС на базе двух трехстепенных гироскопов направления, один из которых носит название **гиро-горизонта (ГГ)**, другой — **гировертиканта (ГВ)**. Гироскопы размещаются на БР таким образом, что ось наружной рамки ГГ параллельна оси тангажа OZ , а ось наружной рамки ГВ параллельна оси рыскания OY . При прицеливании ось OX устанавливается

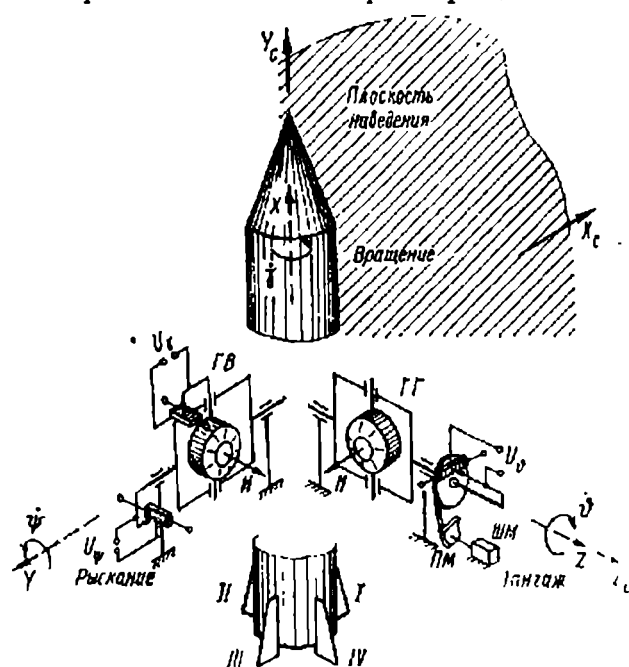


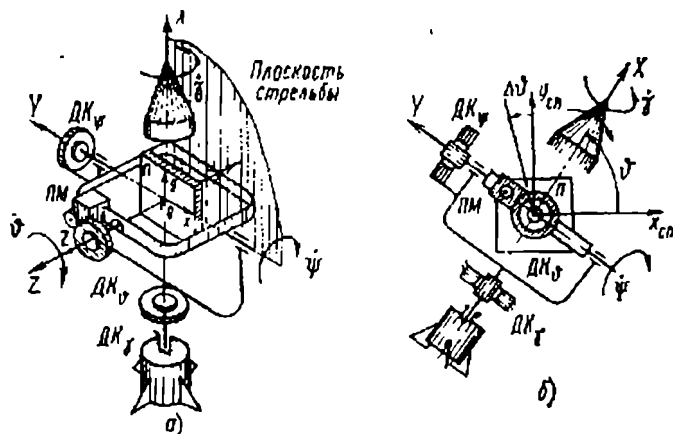
Рис. 5.13. Схема установки гироскопов на борту ракеты

(рис. 5.13) по направлению местной вертикали, а ось OY ориентируется противоположно направлению на цель. Перед стартом БР оси роторов приборов приводятся в плоскость горизонта и устанавливаются перпендикулярно к осям наружных рамок. Таким образом, перед стартом БР ось ротора ГГ выставляется горизонтально с точностью до погрешностей системы приведения и лежит в плоскости стрельбы; ось ротора ГВ также займет горизонтальное положение, но будет направлена перпендикулярно плоскости стрельбы. Непосред-

ственно перед стартом ракеты системы приведения гироскопов отключаются, и во все время полета гироскопы ГГ и ГВ остаются свободными, т. е. оси их роторов с погрешностью, не превосходящей величин их уходов, сохраняют заданное им перед стартом направление в пространстве. При этом ГГ служит для измерения отклонений действительного угла тангажа от его программных значений, а ГВ предназначен для измерения углов рыскания и крена. Одновременно ГГ используют в качестве задатчика программы изменения угла тангажа. Такая классическая схема АУС «первого поколения» не является единственной и тем более — не обязательна [79]. В современных системах управления для определения углового положения ЛА, а одновременно и для обеспечения стабилизации акселерометров ИНС, применяются **трехосные или пространственные гиростабилизаторы (ГС)**. Несмотря на существенные конструктивные отличия, качественно и количественно иные возможности такого рода гироскопических устройств [65], «взаимодействие» их с навигационной системой с принципиальной точки зрения остается аналогичным уже рассмотренному. Чтобы убедиться в том, что это действительно так, вкратце рассмотрим принцип измерения текущего

углового положения корпуса ЛА трехосным ГС баллистической ракеты (рис. 5.14, а, б). Датчики команд (ДК), служащие для измерения углов рыскания ψ , тангажа ϑ и крена γ , устанавливаются по осям подвеса, причем ротор ДК связан с платформой, а статор может поворачиваться относительно внутренней рамки с помощью программного механизма (ПМ). Начальная выставка платформы осуществляется системой приведения, которая отключается перед стартом БР. В процессе вертикального движения при совпадении

Рис. 5.14. Принципиальные схемы работы ГС в качестве датчика углового положения БР



осей связанной с ЛА системы координат с направлением осей сопровождающей системы рассогласования между статорами и роторами ДК отсутствуют, и управляющие сигналы в систему управления угловым движением БР не поступают. Такой сигнал формируется только при отклонении соответствующей оси от направления моделируемой базы (за счет разворота статора ДК относительно ротора, связанного со стабилизируемой платформой). Для разворота БР по каналу тангажа статор ДК должен начать вращаться по программе с помощью ПМ в сторону, обратную требуемому программному направлению разворота ракеты.

5.4.3. Общая постановка задачи инерциального управления дальностью и направлением полета

Если вспомнить о влиянии вращения Земли на полет БР, то при рассмотрении ее движения относительно географической системы координат потребуется обеспечить управление движением центра масс ракеты в том числе и ее последней степени в боковом направлении в течение всего времени полета. Действительно, положив в (5.8) $\omega = 0$, получим, что

$$\frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}]_a = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d}{dt} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (5.93)$$

и соответственно, имея в виду (5.1),

$$\mathbf{a}_n = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d}{dt} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \mathbf{g}_T. \quad (5.94)$$

Если исходить далее из того, что задача наведения ракеты в боковом направлении должна заключаться в удержании ее центра масс в плоскости стрельбы, вращающейся вместе с Землей, то система наведения должна обеспечить движение центра масс в боковом направлении с ускорением, равным соответствующей проекции $\dot{V}$. Данная проекция будет определяться (см. в частности, (5.14)) при $\omega_x = \omega_y = 0$, как

$$\dot{V}_z = 2(\Omega_y V_x - \Omega_x V_y). \quad (5.95)$$

Управлять дальностью полета БР в широком диапазоне ее варьирования на пассивном участке траектории крайне нежелательно, поскольку это приведет к существенному усложнению системы наведения и, главное, необходимости иметь на борту запас топлива для формирования управляющих сил на безвоздушном участке полета. В связи с этим решение задачи наведения БР целесообразно ограничивать в подавляющем большинстве случаев пределами активного участка. Вращение Земли, вызывающее перемещение цели относительно плоскости траектории в этом случае должно быть учтено при расчете дальности и азимута пуска БР [20]. В результате, представляется возможным учесть перемещение цели за время полета, как в продольном, так и в боковом направлении не приборно, а в виде установочных данных стрельбы. При этом переход от вращающейся вместе с Землей стартовой системы координат к неподвижной системе в виде сопровождающего инерциального трехгранника осуществляется в момент старта БР.

Имея в виду изложенные обстоятельства, задачу инерциального управления дальностью и направлением полета сформулируем как задачу выбора момента отсечки тяги ДУ путем формирования на борту некоторой функции управления, обеспечивающей выполнение ракетой полетного задания, при непрерывной стабилизации бокового движения БР, ставящей целью удержание центра масс ракеты в плоскости стрельбы вплоть до момента отсечки тяги. Рассмотрим, каким же образом может быть определен этот момент, имея в виду, что он должен отвечать условию минимального отклонения точки падения относительно заданной точки прицеливания. Отклонение по дальности полета от расчетного значения в линейной постановке имеет вид

$$\Delta x_c = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_c}{\partial \xi_{in}} \Delta \xi_{in}, \quad (5.96)$$

где $\Delta \xi_{in}$ — отклонение ξ_i параметра движения от номинального значения в конце активного участка.

В выражении (5.96) верхний предел суммирования является переменной величиной, причем он равен 6, если параметры движения БР в точке выключения ДУ определяются в относительной системе координат (т. е. системе, связанной с вращающейся Землей) и 7, если параметры точки, соответствующей концу активного участка, задаются в инерциальной системе координат. В последнем

случае к трем отклонениям составляющих скорости и трем отклонениям координат прибавляется еще отклонение (вариация) момента времени отсечки тяги ДУ. Наиболее просто решение поставленной задачи может быть получено для случая управления дальностью полета ракет малой дальности (рис. 5.15). В этом случае эффектами вращения Земли и кривизной ее поверхности можно пренебречь. Соответственно можно не учитывать и влияние бокового движения на изменение полной дальности. Тогда, учитывая, что

$$\Delta x_c = x_{c.н} - x_{c.д}, \quad (5.97)$$

где $x_{c.н}$ и $x_{c.д}$ — соответственно номинальная и действительная дальности полета, выражение (5.96) представим в виде

$$x_{c.н} - x_{c.д} = \frac{\partial x_c}{\partial V_{кx}} \Delta V_{кx} + \\ + \frac{\partial x_c}{\partial V_{кy}} \Delta V_{кy} + \frac{\partial x_c}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial x_c}{\partial y_k} \Delta y_k. \quad (5.98)$$

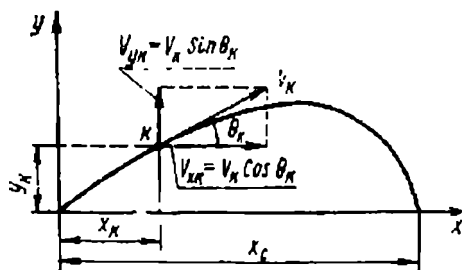


Рис. 5.15. К определению дальности полета ракет малой дальности

Условие достижения требуемой дальности эквивалентно выполнению требования $x_{c.н} = x_{c.д}$. Введя обозначения $\frac{\partial x_c}{\partial V_{кx}} = \mu_{V_x}$;

$$\frac{\partial x_c}{\partial V_{кy}} = \mu_{V_y}; \quad \frac{\partial x_c}{\partial x_k} = \mu_x; \quad \frac{\partial x_c}{\partial y_k} = \mu_y$$

и учитывая, что $\Delta \xi_{ik} = \xi_{i.н.н} - \xi_i$, получим для $\Delta x_c = 0$:

$$\mu_{V_x} V_x + \mu_{V_y} V_y + \mu_x x + \mu_y y = \mu_{V_x} V_{x.н.н} + \mu_{V_y} V_{y.н.н} + \mu_x x_{к.н} + \mu_y y_{к.н}. \quad (5.99)$$

Обозначим левую часть равенства через Φ_x , а правую часть через $\Phi_{хп}$, причем Φ_x будем называть **управляющей функцией** или **функционалом управления дальностью полета**, а $\Phi_{хп}$ — его настроечным значением. Из (5.99) вытекает, что условие обеспечения заданной дальности полета выполняется в случае, когда отсечка тяги ДУ происходит при выполнении условия

$$\Phi_x = \Phi_{хп}. \quad (5.100)$$

Настроечное значение функционала управления дальностью представляет собой известную величину, постоянную для заданной дальности полета, вводимую в систему наведения БР в виде начальной установки перед стартом. Она задается в виде числа или в виде какого-либо физического параметра, например, напряжения, пропорционального конкретному числу. Из изложенного следует, что структура АУД в рассматриваемом случае (рис. 5.16) будет определяться исходя из необходимости формирования на борту ЛА текущего значения $\Phi_x(t)$ и сравнения его с расчетным значением настройки $\Phi_{хп}(t_{к.н})$.

Задача боковой стабилизации относительно плоскости стрельбы, моделируемой на борту с помощью соответственно выставленной ГСП, здесь может рассматриваться, как независимая. Применительно к управлению точкой падения баллистической ракеты дальнего действия (БРДД) все оказывается существенно более сложным. Вращение Земли и кривизна ее поверхности здесь уже начинают играть определяющее значение. Причем проявление данных эффектов многогранно. Начнем с того, что наличие временных вариаций отсечки тяги, объективно присутствующих в рассмотренном алгоритме управления дальностью, приводит (в силу вращения Земли) к боковому отклонению точки падения от цели, которое остается ничем не

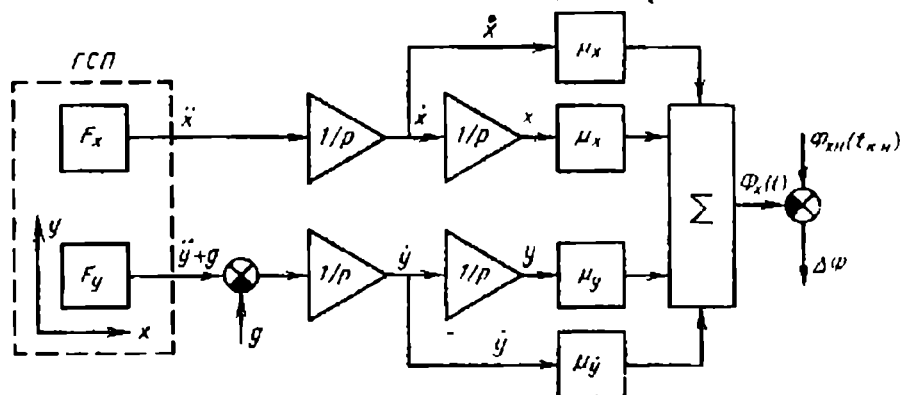


Рис. 5.16. Схема АУД, формирующего управляющую функцию вида (5.99)

скомпенсированным. Далее, наличие отклонений по времени полета от номинала, связанное с вариациями высоты точки окончания работы ДУ при наборе функционалом его настроечного значения, вызовут погрешности определения компенсационной величины ускорения от силы тяжести. Нецентральность поля тяготения, наличие гравитационных аномалий и т. д. приведут при этом также к возникновению погрешностей, хотя и более высокого порядка малости, чем указанные ранее. Наконец, решение задачи управления дальностью полета БРДД выдвигает требование выбора базовой системы отсчета, обеспечивающей при соответствующей начальной выставке ГСП наилучшие результаты. Обсудим, из каких же соображений следует исходить при выборе такой системы. Очевидно определяющим должно служить условие нечувствительности боковых отклонений к небольшим изменениям времени полета БР на активном участке траектории. Определить базовые направления, отвечающие данному условию, можно нахождением геометрического места точек падения, обусловленного изменением времени отсечки тяги ДУ в сторону увеличения дальности при неизменном направлении прицеливания. Линия, касательная к полученному геометрическому месту точек падения, проведенная из точки цели, будет характеризовать одно из базовых направлений, называемое **направлением мгновенно-временного или естественного изменения дальности полета**. Оно обозначается как ЦЛ. Перпендикуляр к указанному направлению, проведенный в плоскости местного горизонта цели

вправо от линии ЦЛ, обозначается ЦЗ и составляет второе базовое направление, называемое **направлением мгновенно-временного или естественного изменения боковых отклонений**. Поскольку ЦЛ и ЦЗ будут лежать в плоскости местного горизонта, ось ЦУ должна быть направлена (при принятии допущения о центральном гравитационном поле Земли) по радиусу-вектору, соединяющему центр масс Земли с точкой Ц. Система координат ЦЛYZ получила название **мгновенной координатной системы в точке падения**. В ряде случаев ее называют также **условной [27] или естественной финишной системой координат**. Для определения азимутального направления A_L , необходимого для начальной выставки базовой системы, спроектируем составляющие скорости БР в точке падения $\frac{dx_L}{dt_K}$; $\frac{dy_L}{dt_K}$ и $\frac{dz_L}{dt_K}$, заданные в осях геоцентрической системы координат, на географические базовые направления. Отношение соответствующих проекций даст $\operatorname{tg} A_L$, т. е.

$$A_L = \operatorname{arctg} \left| \frac{-\frac{dx_L}{dt_K} \sin \lambda_{\Pi} - \frac{dz_L}{dt_K} \cos \lambda_{\Pi}}{\left(-\frac{dx_L}{dt_K} \cos \lambda_{\Pi} + \frac{dz_L}{dt_K} \sin \lambda_{\Pi}\right) \sin \varphi_{\Pi} + \frac{dy_L}{dt_K} \cos \varphi_{\Pi}} \right|, \quad (5.101)$$

где λ_{Π} — долгота цели относительно меридиана стартовой позиции; φ_{Π} — широта местоположения цели.

В естественной системе координат отклонения точки падения определяются величинами ΔL и Δz , причем применительно к конкретной номинальной траектории и для расчетного момента времени отсечки тяги, отвечающего заданной точке прицеливания, производная по времени от продольного отклонения $\frac{d}{dt_K}(\Delta L)$ — максимальна, а производная от бокового отклонения $\frac{d}{dt_K}(\Delta z) = 0$. То обстоятельство, что возмущенная (реальная) траектория полета может проходить выше или ниже номинальной траектории учитывается посредством введения в рассмотрение изохронных вариаций силы тяжести.

5.4.4. Приборная реализация баллистического уравнения управления дальностью полета

Отклонение дальности полета, называемое **продольным отклонением**, наиболее удобно фиксировать в естественной системе координат; параметры же конца активного участка определяются относительно абсолютной стартовой системы координат. Взаимосвязь их задается уравнением управления дальностью полета, условно называемым **основным баллистическим уравнением [28]**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial V_{xK}} V_x^k(t) + \frac{\partial L}{\partial V_{yK}} V_y^k(t) + \frac{\partial L}{\partial x_K} \Delta_i S_x^k(t) + \frac{\partial L}{\partial y_K} \Delta_i S_y^k(t) = \\ = \frac{\partial L}{\partial V_{xK}} V_{xK}^k(t_{K. \Pi}) + \frac{\partial L}{\partial V_{yK}} V_{yK}^k(t_{K. \Pi}), \end{aligned} \quad (5.102)$$

где V_x^k и V_y^k — проекции кажущейся скорости на направления осей стартовой абсолютной системы координат; $\Delta_t S_x^k$ и $\Delta_t S_y^k$ — отклонения от номинальных значений проекций кажущегося пути на те же оси; $V_{xн}^k(t_{к.н})$ и $V_{yн}^k(t_{к.н})$ — программные номинальные составляющие скорости в стартовой системе координат, вычисленные на номинальный момент окончания активного участка.

Уравнение (5.102) является приборно реализуемым, поскольку оно оперирует измеряемыми (кажущимися) параметрами движения.

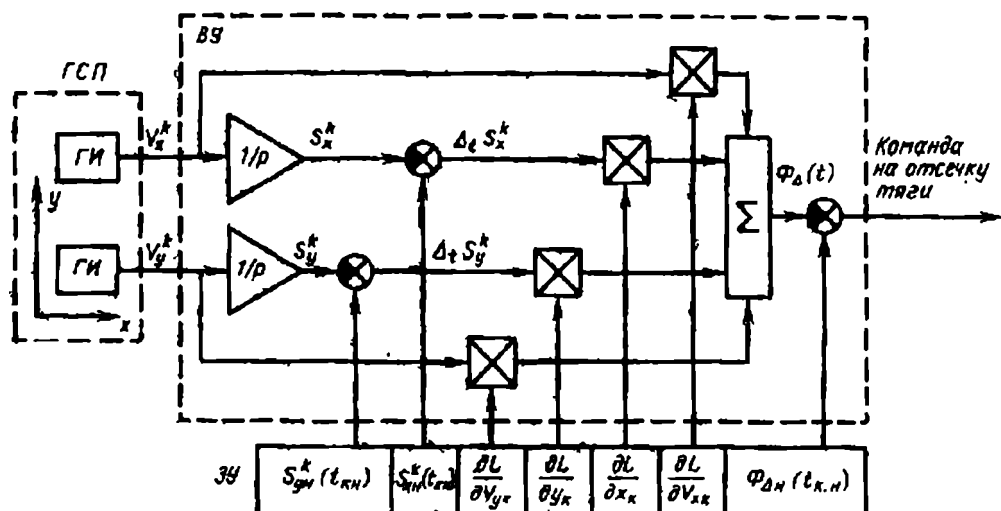


Рис. 5.17. Схема реализации основного баллистического уравнения, заданного в форме (5.102)

Отметим, что переход к кажущимся параметрам связан с использованием изохронных вариаций составляющих ускорений

$$\begin{aligned}\Delta_t \dot{V}_x &= \Delta_t a_x + \Delta_t g_x; \\ \Delta_t \dot{V}_y &= \Delta_t a_y + \Delta_t g_y\end{aligned}\quad (5.103)$$

при допущении о малости изохронных вариаций ускорения силы тяжести. Для формирования текущего значения управляющей функции в виде левой части уравнения (5.102) необходимо иметь на борту БР два интегрирующих акселерометра или гироскопические интеграторы (ГИ) линейных ускорений, стабилизированных с помощью ГСП относительно соответствующих осей абсолютной системы координат; ВУ, осуществляющее операции интегрирования, умножения и алгебраического суммирования, и запоминающее устройство (ЗУ). Схема приборной реализации основного баллистического уравнения, заданного в форме (5.102), приведена на рис. 5.17. Приборная реализация основного баллистического уравнения может быть упрощена путем специального выбора ориентации осей чувствительности интегрирующих акселерометров или используемых вместо них гироскопических интеграторов. Анализ схем, изображенных на рис. 5.16 и 5.17 дает основание сделать вывод о том, что независимо от того, какая модель Земли используется при расчете траектории, в выражение управ-

ляющей функции (по крайней мере, четырехчленной) всегда будут входить две суммы соответственно произведений составляющих скорости и пути на их баллистические производные. Если теперь расположить ось чувствительности одного из акселерометров под постоянным углом λ к оси OX стартовой абсолютной системы координат, то в силу несовпадения в общем случае направления V^k с λ -направлением, получим (рис. 5.18), что проекция V^k на это направление запишется в виде

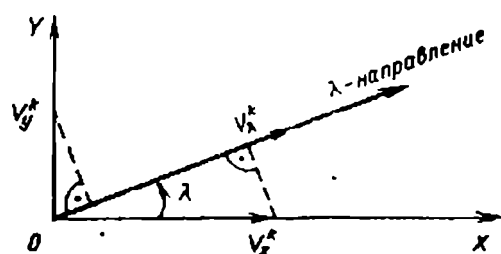


Рис. 5.18. К определению λ -направления

$$V_{\lambda}^k = V_x^k \cos \lambda + V_y^k \sin \lambda. \quad (5.104)$$

По аналогии представим

$$\frac{\partial L}{\partial V_{\lambda k}} = \frac{\partial L}{\partial V_{xk}} \cos \lambda + \frac{\partial L}{\partial V_{yk}} \sin \lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\right)^2}. \quad (5.105)$$

Разделив почленно (5.105) на выражение, записанное в правой части, найдем

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial V_{xk}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\right)^2}} \cos \lambda + \frac{\frac{\partial L}{\partial V_{yk}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\right)^2}} \sin \lambda = 1. \quad (5.106)$$

Совершенно очевидно, что соотношение (5.106) будет справедливо для любых λ только в том случае, когда

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial V_{xk}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\right)^2}} = \cos \lambda; \quad \frac{\frac{\partial L}{\partial V_{yk}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\right)^2}} = \sin \lambda.$$

Действительно, только при этом условии будем иметь

$$\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda = 1.$$

Тогда

$$\lambda = \arctg \left[\frac{\partial L}{\partial V_{xk}} \left(\frac{\partial L}{\partial V_{yk}} \right)^{-1} \right]. \quad (5.107)$$

Модуль функции, аргумент которой отвечает зависимости (5.107), равен

$$\Lambda = |\lambda| = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\right)^2}. \quad (5.108)$$

Следовательно, сумма произведений скоростных составляющих на их баллистические производные может быть определена с помощью

только одного интегратора ускорений, ось чувствительности которого совпадает с λ -направлением:

$$\Delta V_{\lambda}^k(t) = \Lambda [\cos \lambda V_x^k(t) + \sin \lambda V_y^k(t)]. \quad (5.109)$$

Аналогичным образом найдем второе направление (μ -направление), позволяющее при постоянной ориентации оси чувствительности второго акселерометра к оси OX , определить сумму произведений

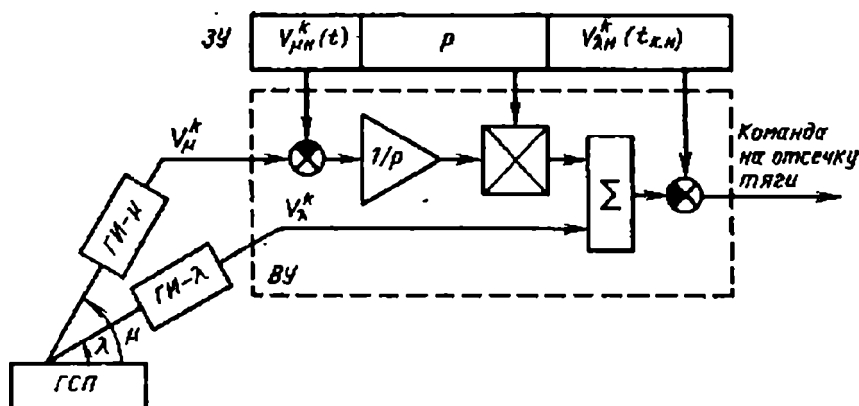


Рис. 5.19. Схема приборной реализации λ — μ -функционала

путевых составляющих на их баллистические производные. Получим, что

$$\mu = \arctg \left[\frac{\partial L}{\partial y_k} \left(\frac{\partial L}{\partial x_k} \right)^{-1} \right]; \quad (5.110)$$

$$M = |\mu| = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y_k} \right)^2}. \quad (5.111)$$

и соответственно

$$MS_{\mu}^k(t) = M \int_0^t V_{\mu}^k dt = M [\cos \mu S_x^k(t) + \sin \mu S_y^k(t)]. \quad (5.112)$$

С целью сокращения числа операций умножения на постоянные множители введем в рассмотрение отношение

$$\rho = \frac{M}{\Lambda} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y_k} \right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial V_{xk}} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial V_{yk}} \right)^2}}. \quad (5.113)$$

Теперь основное баллистическое уравнение (5.102) может быть представлено, как

$$V_{\lambda}^k(t) + \rho \int_0^t [V_{\mu}^k(t) - V_{\mu n}^k(t)] dt = V_{\lambda n}^k(t_{k, n}). \quad (5.114)$$

Левая часть данного выражения представляет собой модификацию управляющей функции (функционала), получившую название λ — μ -функционала. Приборная реализация ее, как это следует из рис. 5.19, проще предыдущей (см. рис. 5.17). К числу других до-

стоинств ее относится то, что отклонения кажущейся скорости БР вдоль λ -направления и отклонения кажущегося пути вдоль μ -направления максимально влияют на продольное отклонение, а отклонения в плоскости, нормальной $\lambda - \mu$ -направлениям, не вызывают отклонений по дальности.

Однако данной схеме присущ и очевидный недостаток, связанный с тем, что значение углов λ и μ должны рассчитываться для каждой конкретной дальности полета и вводиться в систему наведения непосредственно перед стартом. Естественно, что установка углов λ и μ в условиях стартовой позиции может быть осуществлена менее точно, чем в заводских условиях, а следовательно, будет увеличиваться инструментальная ошибка управления дальностью.

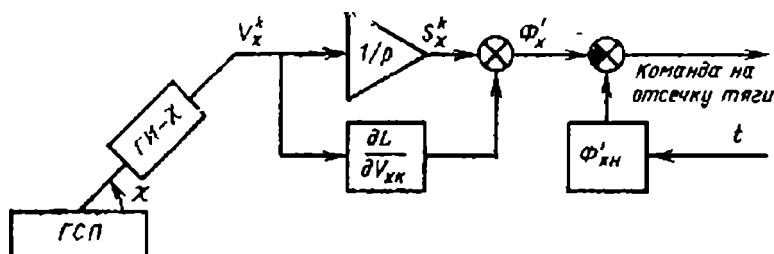


Рис. 5.20. Схема АУД БР малой дальности, реализующего χ -функционал

Рассмотрим вариант построения АУД для БР с использованием только одного наклонного инерциального измерителя, установленного на ГСП. Пусть в качестве информации, применяемой при вычислении основного баллистического уравнения, используются наклонная скорость и наклонный путь. Данной постановке будет отвечать схема приборной реализации (рис. 5.20), в которой ось чувствительности ГИ совпадает с так называемым χ -направлением, определяемым из условия [60]:

$$\chi = \arctg \left(\frac{\partial L}{\partial y_k} \right). \quad (5.115)$$

С учетом проекции ускорения силы тяжести ($g = \text{const}$) на χ -направление, текущее значение управляющей функции Φ_x представим в виде

$$\Phi'_x = S_x(t) + \frac{\partial L}{\partial V_{\chi k}} (V_x(t) + gt \sin \chi) - 0.5gt^2 \sin \chi. \quad (5.116)$$

Переход от действительных к кажущимся параметрам движения БР позволяет учесть влияние проекции ускорения силы тяжести при расчете настроенного значения управляющей функции и тогда (5.116) может быть представлено как

$$\Phi_x = S_x^k(t) + \frac{\partial L}{\partial V_{\chi k}} V_x^k(t), \quad (5.117)$$

что отвечает представленной схеме. Выставка ГИ по χ -направлению здесь также проводится перед стартом ракеты [60].

Наконец, обсудим возможности простейших методов управления дальностью, применяемых в случае, когда использование ГСП по каким-либо причинам представляется нецелесообразным. В качестве наиболее характерного представителя таких методов рассмотрим управление по проекции кажущейся скорости на направление продольной оси БР. Естественно, речь идет здесь об управлении дальностью полета ракет, предназначенных для пусков на относительно небольшие дальности. Идея использования информации о скорости для управления дальностью полета представляется вполне обоснованной, поскольку при полете БР на максимальную дальность именно скорость в конце активного участка траектории является доминирующим фактором, определяющим запас кинетической энергии, а следовательно, и протяженность полета. Однако при отсутствии ГСП автономно измерить абсолютную скорость ЛА

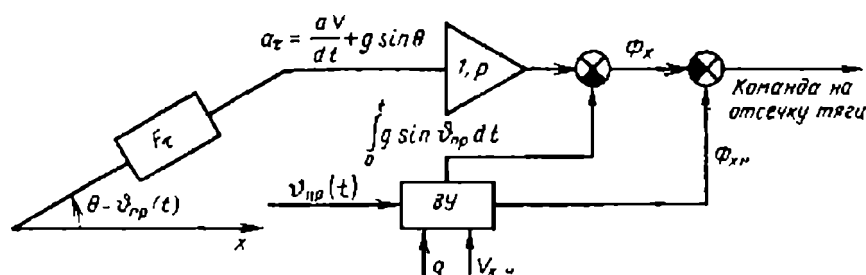


Рис. 5.21. Схема реализации одночленной управляющей функции при установке акселерометра вдоль продольной оси БР

не представляется возможным. Установленный на борту БР акселерометр, ось чувствительности которого совпадает с продольной осью ракеты, при полете БР без угла атаки ($\vartheta = \theta$) будет давать информацию о проекции кажущейся скорости на направление продольной оси, связанную со скоростью аппарата соотношением (2.155). Очевидно, можно было бы построить метод управления дальностью, положив в его основу требование отсечки тяги ДУ по выполнению условия $V_n - V^k - V_{k.n}^k = \text{const}$. Однако равенство соответствующего значения кажущейся скорости его номинальному значению, рассчитанному для конца активного участка, будет гарантировать всего лишь равенство суммы, а на отдельных слагаемых (2.155). Они же могут отличаться от расчетных значений. Полная дальность полета определяется, однако, не кажущейся, а истинной скоростью. Напрашивается идея компенсации величины $g \sin \theta$ с помощью вычислительного устройства, формирующего компенсационную поправку $g \sin \vartheta_{np}(t)$. В данном случае реализуется одночленная управляющая функция (рис. 5.21), настроечное значение которой в виде конечной номинальной скорости полета на активном участке траектории рассчитывается для $\theta_{k.n}$ и вводится в АУД в виде начальной установки перед стартом ракеты. Данный метод был впервые реализован еще в 1942 г. на баллистической ракете ФАУ-2 с тем отличием, что в качестве измерителя кажущейся скорости был использован ГИ линейных ускорений [27].

5.4.5. Формирование установочных данных

Итак, из предшествующего следует, что для пуска управляемой БР необходимо предварительно сформировать полетное задание в виде вводимых в систему управления перед стартом **установочных (установочных) данных**. Под последним принято понимать совокупность сведений, предназначенных для предстартовой настройки приборов системы управления и прицеливания, обеспечивающих движение ракеты по **попадающей траектории** [51]. Состав установочных данных определяется способом прицеливания, типом системы управления, видом реализуемой управляющей функции, схемой разделения степеней и т. д. Здесь, базируясь на работе [51], дадим лишь перечень исходных данных, необходимых для подготовки пуска БР. Основными данными, называемыми **основными установками**, служат **настроечное значение функционала управления дальностью и азимут пуска**, используемый для прицеливания ракеты. Однако определением основных установок не исчерпывается подготовка данных на пуск БР. Обычно основные установки дополняются **вспомогательными**, вид и характер которых зависит от конкретного типа ракеты. Например, к числу вспомогательных установок могут быть отнесены установки, определяющие моменты разделения ступеней (для многоступенчатых ракет), дросселирование или форсирование тяги ДУ в системах РКС на фиксированных участках движения и др.

Исходные данные пуска (основные и вспомогательные установки) определяются в виде соответствующего документа, служащего основным руководством для подготовки БР к старту.

ГЛАВА 6

ПРИНЦИПЫ НАВИГАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМБИНИРОВАННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ

Метод счисления пути с точки зрения его возможных конкретных реализаций в ИНС не свободен от недостатков, обусловленных, прежде всего, возрастанием со временем ошибок определения координат.

Системы, базирующиеся на других методах, также не обладают свойством абсолютно точного определения местоположения ЛА. Но в том смысле, в котором эти погрешности присущи ИНС, они (эти системы) являются более предпочтительными. Однако такого рода НС не обладают одновременно достоинствами ИНС. Так, если говорить об измерителях, реализующих, в частности, позиционный метод, то они в целом менее универсальны, не обладают аналогичной с ИНС помехозащищенностью, наконец, не всегда обеспечивают автономность навигации. Естественно, поэтому возникает мысль о целесообразности сочетания при построении НС позиционного или какого-либо другого метода с методом счисления пути. Число возможных вариантов указанных сочетаний при этом может оказаться достаточно большим. Обычно навигационные системы, сочетающие метод счисления пути с позиционным методом, подразделяют на две группы: комбинированные и комплексные.

К числу комбинированных систем принято относить системы, в которых используется независимая комбинация конструктивно обособленных подсистем. Примером такой комбинированной НС может служить инерциальная система в составе АУД и радиотехническая система, обеспечивающая получение данных для управления движением центра масс БР в боковом направлении, предназначенная для удержания ракеты в расчетной плоскости стрельбы (система боковой радиокоррекции).

Комплексными системами (или иначе навигационными комплексами) обычно называют системы, в которых имеет место структурная избыточность. Согласно определению [85], под структурной избыточностью в НС понимается возможность решения навигационных задач параллельно несколькими способами с использованием идентичной по характеру информации от нескольких измерителей, построенных на различных физических принципах действия. Так, например, текущие координаты ЛА могут быть определены двукратным интегрированием сигналов, снимаемых с акселерометров, они могут быть вычислены по сигналам измерителя воздушной скорости и доплеровского измерителя скорости и т. д. Отличительной особенностью комплексных систем является наличие перекрестных

связей между отдельными измерителями для компенсации и изменения характеристик системы в целом. Задача организации рационального взаимодействия отдельно взятых измерителей в навигационном комплексе трактуется как задача комплексирования бортового навигационного оборудования. Одно из центральных мест в ней занимает задача коррекции ИНС, ставящая целью уменьшение ошибок инерциальной системы за счет использования дополнительной информации о текущих координатах ЛА и их производных, получаемых от внешних по отношению к ИНС источников. В отличие от других способов повышения точности ИНС коррекция не требует ни изменения внутренней структуры основной навигационной системы [2], ни увеличения инструментальной точности входящих в нее элементов. Пояснение сущности работы корректируемых ИНС может быть осуществлено на основе проведения аналогии их принципа действия с рассмотренным ранее процессом автоматической начальной выставки ИНС. Действительно, получение внешней информации в системах начальной выставки предназначалось для приведения сопровождающей системы координат ИНС к базовой системе, т. е. по существу к ликвидации рассогласования между рассматриваемыми трехгранниками в начальный момент времени. Коррекция ИНС преследует решение той же задачи только уже не в начальный, а в некоторый текущий момент времени, когда накопленные ошибки, приводящие к рассогласованию систем координат, превзойдут допустимые.

Вопросы коррекции неразрывно связаны с одним из структурных свойств ИНС, как сложной динамической системы, а именно, со свойством наблюдаемости ее ошибок. Детальное обсуждение этого понятия было проведено в гл. 3. Здесь оно рассматривается с точки зрения информативного обеспечения корректируемых ИНС. Вопрос может быть поставлен так: возможно ли, располагая данными об ошибках определения одной из составляющих вектора фазовых координат оценить другие ошибки, не проводя соответствующих «эталонных» измерений? Очевидно, что ответ на данный вопрос будет играть определяющую роль при комплексировании навигационных систем на стадии их синтеза.

6.1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ ПОЗИЦИОННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ, СОЧЕТАЕМЫХ С ИНС В КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ И НАВИГАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСАХ

6.1.1. Методы определения пространственного положения ЛА позиционными измерителями, использующими искусственно создаваемые физические поля

Измерители, непосредственно определяющие линии (поверхности) положения делят на две группы. К первой группе относят измерители, работа которых предполагает использование искусственно создаваемого физического поля. В нее входят системы и

устройства, основанные на учете закономерностей распространения волн различной физической природы. К этим закономерностям относится, например, распространение радиоволн по кратчайшим расстояниям с постоянной и конечной скоростью. На использовании свойств и закономерностей искусственно создаваемых физических полей основаны различные способы определения навигационных параметров. Наиболее характерными в этом смысле являются радиотехнические способы определения пространственного положения ЛА. К их числу относятся дальномерный, разностно и суммарно-дальномерный, дальномерно-пеленгационный и другие способы [20].

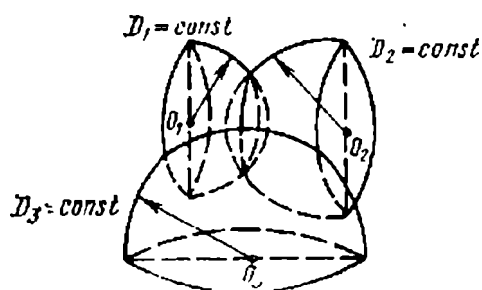


Рис. 6.1. Поверхности положения, отвечающие дальномерному методу

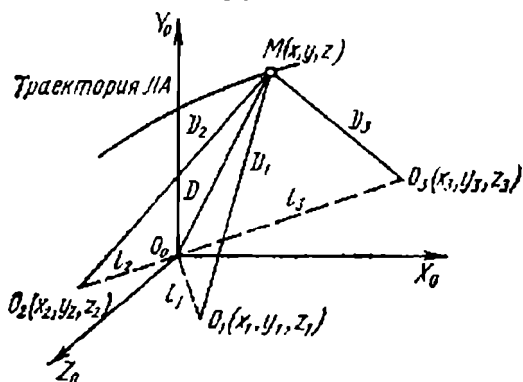


Рис. 6.2. К определению координат ЛА дальномерным способом

Дальномерный способ характеризуется тем, что в качестве поверхности положения в нем выступает сфера с радиусом, равным дальности D от станции слежения до ЛА. Его местоположение определяется как точка пересечения трех поверхностей положения $D = \text{const}$ (рис. 6.1). Пусть станции слежения расположены в точках $O_1(x_1, y_1, z_1)$, $O_2(x_2, y_2, z_2)$ и $O_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 6.2). Введя соответствующие обозначения относительных расстояний, найдем

$$D_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}; \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.1)$$

$$l_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}; \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.2)$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (6.3)$$

Выражение (6.1) может быть преобразовано к виду

$$D_i = \sqrt{l_i^2 + D^2 - 2(x_i x + y_i y + z_i z)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.4)$$

после подстановки в него соотношений (6.2) и (6.3). Задача заключается в определении координат x, y, z . Для этого найдем выражение разностей $D_1^2 - D_2^2$, $D_1^2 - D_3^2$ и $D_2^2 - D_3^2$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} D_1^2 - D_2^2 &= l_1^2 - l_2^2 - 2\{(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (z_1 - z_2)z\}; \\ D_1^2 - D_3^2 &= l_1^2 - l_3^2 - 2\{(x_1 - x_3)x + (y_1 - y_3)y + (z_1 - z_3)z\}; \\ D_2^2 - D_3^2 &= l_2^2 - l_3^2 - 2\{(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y + (z_2 - z_3)z\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Последующие преобразования системы алгебраических уравнений (6.5) приводят к получению решения относительно x и z

$$x = \kappa_1 - ay; \quad (6.6)$$

$$z = \kappa_2 - by, \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{(y_1 - y_2)(z_2 - z_3) - (y_2 - y_3)(z_1 - z_2)}{(x_1 - x_2)(z_2 - z_3) - (x_2 - x_3)(z_1 - z_2)}; \\ b &= \frac{(y_1 - y_2)(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_3)(z_1 - z_2) - (x_1 - x_2)(z_1 - z_3)}; \\ \kappa_1 &= \frac{c_1(z_2 - z_3) - c_3(z_1 - z_2)}{(x_1 - x_2)(z_2 - z_3) - (x_2 - x_3)(z_1 - z_2)}; \\ \kappa_2 &= \frac{c_1(x_1 - x_3) - c_2(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_3)(z_1 - z_2) - (x_1 - x_2)(z_1 - z_3)}, \end{aligned}$$

причем

$$c_1 = 0,5 (D_2^2 - D_1^2 + l_1^2 - l_2^2);$$

$$c_2 = 0,5 (D_3^2 - D_1^2 + l_1^2 - l_3^2);$$

$$c_3 = 0,5 (D_3^2 - D_2^2 - l_2^2 - l_3^2).$$

Для определения координаты y следует воспользоваться соотношением (6.1) при фиксированном значении i . В результате подстановки в (6.1) значений x и z из (6.6) и (6.7) получим при $i = 1$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + 1)y^2 + 2(x_1a - y_1 + z_1b - a\kappa_1 - b\kappa_2)y - \\ - (D_1^2 - l_1^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 2x_1\kappa_1 + 2z_1\kappa_2) = 0. \end{aligned}$$

Как правило, стремятся располагать все станции слежения в плоскости $X_0O_0Z_0$. В этом случае $y_1 = y_2 = y_3 = a = b = 0$, и координаты ЛА определяются по формулам

$$x = \kappa_1; \quad (6.8)$$

$$y = \sqrt{D_1^2 - l_1^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 2x_1\kappa_1 + 2z_1\kappa_2}; \quad (6.9)$$

$$z = \kappa_2. \quad (6.10)$$

Если в качестве навигационного параметра принять разность дальностей от ЛА до двух измерительных пунктов, то придем к **разностно-дальномерному способу** определения координат ЛА. Наличие информации о разности дальностей ΔD позволяет зафиксировать лишь то, что ЛА расположен на соответствующей поверхности положения $\Delta D = \text{const}$. Свойство $\Delta D_r = D_1 - D_2 = \text{const}$, как известно, присуще двухполостным гиперboloидам вращения, фокусами которых являются точки o и o_1 расположения измерительных станций (рис. 6.3). Поскольку для определения местоположения ЛА в пространстве необходимо иметь пересечение трех поверхностей положения, разностно-дальномерная система должна включать в себя четыре станции. Одна из станций, являясь ведущей, осуществляет синхронизацию работы трех других (ведомых) станций.

В суммарно-дальномерном способе навигационным параметром является сумма расстояний от ЛА до двух измерительных пунктов. Поверхностью положения в этом случае будет эллипсоид вращения (рис. 6.4), обладающий тем свойством, что сумма расстояний от фокусов эллипсоида до любой точки его поверхности остается постоянной. Требуемое количество станций — аналогично предыдущему способу. Для получения соответствующих формульных выражений для определения местоположения ЛА по суммарно-дальномерному способу вновь воспользуемся рис. 6.2. Будем считать, что ведущая станция расположена в начале системы координат,

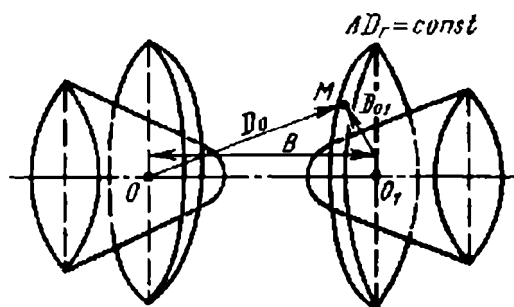


Рис. 6.3. Поверхности положения равной разности дальностей

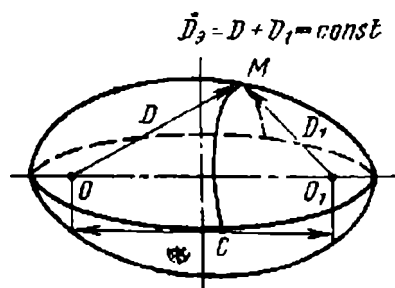


Рис. 6.4. Поверхности положения равной суммы дальностей

а ведомые размещены в точках O_1 , O_2 , O_3 . При сопровождении ЛА станциями слежения определяются следующие суммы дальностей

$$D_{i\Sigma} = D + D_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.11)$$

Для нахождения соотношений, характеризующих изменение координат, осуществим подстановку D_i из (6.11) в левую часть уравнения (6.4). В результате получим

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z - DD_{1\Sigma} = f_1, \quad (6.12)$$

где $f_i = 0,5(D_i^2 - D_{1\Sigma}^2)$; ($i = 1, 2, 3$).

Таким образом, имеем три алгебраических соотношения при четырех неизвестных: x , y , z и D . Для их определения к соотношениям (6.12) необходимо добавить выражение (6.3). Если ведущая и ведомая станции расположены в плоскости $X_0 O_0 Z_0$, решение системы (6.3), (6.12) имеет вид

$$x = A^{-1} [f_1 (z_3 D_{2\Sigma} - z_2 D_{3\Sigma}) - z_1 (f_3 D_{2\Sigma} - f_2 D_{3\Sigma}) - D_{1\Sigma} (f_2 z_3 - f_3 z_2)]; \quad (6.13)$$

$$y = (D^2 - x^2 - z^2)^{1/2}; \quad (6.14)$$

$$z = A^{-1} [x_1 (f_3 D_{2\Sigma} - f_2 D_{3\Sigma}) - f_1 (x_3 D_{2\Sigma} - x_2 D_{3\Sigma}) - D_{1\Sigma} (x_2 f_3 - x_3 f_2)]; \quad (6.15)$$

$$D = A^{-1} [x_1 (z_2 f_3 - z_3 f_2) - z_1 (x_2 f_3 - x_3 f_2) + f_1 (x_2 z_3 - x_3 z_2)], \quad (6.16)$$

где

$$A = x_1 (z_3 D_{2\Sigma} - z_2 D_{3\Sigma}) - z_1 (x_3 D_{2\Sigma} - x_2 D_{3\Sigma}) - D_{1\Sigma} (x_2 z_3 - x_3 z_2).$$

Для установления координат ЛА разностно-дальномерным способом могут быть использованы зависимости (6.13) ... (6.16) при подстановке в них значений

$$D_{iz} = \Delta D_i = D - D_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.17)$$

При дальномерно-пеленгационном способе используется сочетание поверхности положения дальномерного способа в виде сферы ($D = \text{const}$) и поверхностей положения, характеризующих пеленгационный (т. е. угломерный) способ в виде вертикальной плоскости постоянного азимута ($A = \text{const}$) и конической поверхности постоянного угла места ($q = \text{const}$). Пересечение указанных поверхностей однозначно задает местоположение ЛА. Координаты ЛА относительно начала системы отсчета в рассматриваемом способе определяются следующим образом:

$$x = D \cos q \cos A; \quad (6.18)$$

$$y = D \sin q; \quad (6.19)$$

$$z = D \cos q \sin A. \quad (6.20)$$

Дальномерно-пеленгационный способ является основным из числа используемых в радиолокационных системах (РЛС). Из изложенного вытекает, что измерение наклонной дальности от станции слежения до ЛА является, если не обязательным (например, для пеленгационного метода), то во всяком случае желательным условием определения местоположения аппарата. Измерение скорости полета и относительной дальности осуществляется в РЛС на основе эффекта Доплера. Сущность его заключается в изменении несущей частоты колебаний, излучаемых передатчиком и воспринимаемых приемным устройством в зависимости от их относительного перемещения. Абсолютная величина изменения несущей частоты называется частотой Доплера. Она определяется как

$$F_d = f_{\text{пр}} - f_{\text{пер}}, \quad (6.21)$$

где $f_{\text{пр}}$ — частота приема; $f_{\text{пер}}$ — частота передачи. Относительная радиальная скорость ЛА, ретранслирующего сигналы передатчика, связана с F_d соотношением вида

$$V_r = 0,5 \lambda_c F_d. \quad (6.22)$$

Здесь

$$\lambda_c = c f_{\text{пер}}^{-1} \quad (6.23)$$

представляет собой длину волны электромагнитных колебаний, выраженную через скорость их распространения в пространстве $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В результате интегрирования полученного значения скорости по времени при известной начальной относительной дальности может быть определена текущая наклонная дальность до ЛА.

6.1.2. Вопросы реализации позиционного метода навигации спутниковыми радионавигационными системами

Определение пространственного положения ЛА с помощью радиотехнических средств требует в общем случае использования достаточно большого числа наземных станций, соответствующим образом расположенных относительно траектории ЛА, что не всегда возможно. Появление искусственных спутников Земли (ИСЗ) открыло новую эру в развитии теории и практики навигации подвижных объектов. При установке радионавигационной точки (РНТ) на ИСЗ удастся создать систему навигационных искусственных спутников Земли (НИСЗ), способную обеспечить эффективное решение задач навигации подвижных объектов, особенно в безориентирной местности [35, 40, 61, 73]. Эксплуатация спутниковых радионавигационных систем (СРНС) 1-го поколения, появившихся в начале 60-х годов и предназначенных первоначально исключительно для обеспечения высокоточного морского судовождения, позволила оценить возможность применения СРНС также и для навигации ЛА [35, 61]. Если СРНС 1-го поколения представляли собой системы дискретного действия, продолжительность измерений для которых определялась временем нахождения НИСЗ в зоне видимости потребителя, то СРНС 2-го поколения уже являются сетевыми системами непрерывного действия, обеспечивающими глобальное определение вектора состояния подвижного объекта. Определение навигационных параметров с использованием СРНС имеет много общего с определением местоположения ЛА на основе нахождения точки пересечения линий положения, определяемых с помощью наземных радиотехнических систем навигации. Отличительной особенностью СРНС является то, что установленные на борту спутников системы РНТ флуктуируют, т. е. отклоняются случайным образом относительно расчетных значений их координат. Естественно, данное обстоятельство приводит к необходимости создания специальной службы, предназначенной для определения и прогнозирования на длительный период параметров орбит НИСЗ.

Применительно к наиболее распространенному дальнометрическому способу, реализуемому с помощью СРНС, местоположение ЛА определяется в результате измерений наклонных дальностей до одного или нескольких одновременно видимых спутников. Каждой из измеренных дальностей будет соответствовать сферическая поверхность положения с центрами в точках расположения НИСЗ в моменты измерения. Пересечение двух сферических поверхностей даст линию положения в виде окружности, расположенной в пространстве, а также ее проекцию на поверхность Земли. Определение геоцентрической высоты позволит получить третью поверхность положения, которая, пересекаясь с полученной линией положения, даст искомую точку местоположения ЛА. При одновременном измерении дальностей до двух НИСЗ для определения координат ЛА относительно геоцентрической связанной системы координат необходимо решить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}(x_{c1} - x)^2 + (y_{c1} - y)^2 + (z_{c1} - z)^2 &= D_1^2; \\(x_{c2} - x)^2 + (y_{c2} - y)^2 + (z_{c2} - z)^2 &= D_2^2; \\x^2 + y^2 + z^2 &= (R + H)^2,\end{aligned}\tag{6.24}$$

где x_c, y_c, z_c и x, y, z — геоцентрические координаты НИСЗ и ЛА на момент проведения измерений; R — модуль радиуса-вектора используемой модели Земли; H — высота полета ЛА над поверхностью Земли на момент обсервации.

В рассматриваемом способе на НИСЗ устанавливается аппаратура для приема и перензлучения импульсов запроса с ЛА. При реализации суммарно- и разностно-дальнометрических способов определения местоположения ЛА с помощью СРНС основной проблемой является оптимальное размещение НИСЗ на орбитах. Под оптимальным в данном случае следует понимать возможность размещения НИСЗ на орбитах из условий перекрытия рабочими зонами необходимых районов земного шара (а в пределе — глобального перекрытия) и обеспечения расстояний между линиями положения, отвечающих достижению заданной точности навигации в пределах дальности действия соответствующих средств.

6.1.3. Особенности и принципы действия навигационных позиционных измерителей, использующих естественные физические поля

В отличие от измерителей, отнесенных к первой группе, принцип действия измерителей второй группы базируется на использовании естественных физических полей. К такого типа измерителям относятся астрономические, изодинамические и изобарические устройства.

В основе использования астрономических позиционных измерителей лежат известные закономерности взаимного расположения небесных тел.

Автоматическое визирование светил предполагает использование априори известных соотношений между координатами выбранных небесных тел и текущими координатами ЛА. В зависимости от параметров, применяемых для решения навигационной задачи, различают **высотные** и **высотно-азимутальные методы астронавигации**. В качестве астрономических ориентиров обычно используют Солнце, Луну, планеты и наиболее яркие звезды (Сириус, Канопус, Ригель, Вега и др.). Выбор и использование небесных ориентиров связаны с определенными трудностями, обусловленными необходимостью одновременной или поочередной пеленгации двух или более ориентиров, имеющих разность азимутов, близкую к 90° . Такая разность азимутов обеспечивает максимальную точность определения местоположения ЛА по данным астронавигационных измерений. Астрономические навигационные измерители обладают значительным достоинством, заключающимся в практически постоянной и сравнительно высокой точности определения места ЛА и его курса; полной автономности и устойчивости по отношению к искусственно создаваемым помехам. В то же время им присущ и ряд недостатков, заключающихся, главным образом, в существенном влиянии метеофакторов, а также в конструктивной сложности выполнения автоматических астрономических навигационных систем.

В изодинамических (или изодинамных) навигационных измерительных приборах в качестве источника навигационной информации используется магнитное поле Земли. Количественной характеристикой магнитного поля Земли (МПЗ) служит вектор напряженности T , определяемый относительно географической системы координат с помощью двух углов (наклонения магнитного поля и склонения). Использование в качестве линий положения — изогон и изоклин, нанесенных на географические карты, позволяет при измерении текущих значений параметров МПЗ на борту ЛА определить его местоположение. Имеет смысл отметить также, что из-за стационарности и нестационарности МПЗ по времени и трудностей компенсации внешних помех высокая точность местоопределения ЛА только с помощью изодинамических измерений достигнута быть не может.

Наконец, навигационные **изобарические измерители**, как это вытекает из их названия, реализуют принцип увязки измеряемого

Таблица 6.1

Диапазон высот над поверхностью Земли Н, км	0 до 11	11 до 20	20 до 32
Частные выражения барометрической формулы для слоев	$p_{11} = p_0^* \left(1 - \frac{71,5}{288,15} \right)^{\frac{g_c}{6,5R}}$	$p_{20} = p_{11}^* \times \exp \left[-\frac{g_c}{216,65R} \times (H - 11) \right]$	$p_{32} = p_{20}^* \times \left[1 + \frac{(H - 20)}{216,65} \right]^{\frac{-g_c}{R}}$
Давление на нижней границе слоя p^* [кг/м²]	10 332,3	2313,7	563,6
Диапазон высот над поверхностью Земли Н, км	32 до 47	47 до 61	61 до 80
Частные выражения барометрической формулы для слоев	$p_{47} = p_{32}^* \left[1 + \frac{2,8 (H - 32)}{288,65} \right]^{\frac{-g_c}{2,8R}}$	$p_{61} = p_{47}^* \times \left[-\frac{g_c}{270,65R} (H - 47) \right]$	$p_{80} = p_{61}^* \left[1 + \frac{3,4 (H - 61)}{270,65} \right]^{\frac{-g_c}{3,4R}}$
Давление на нижней границе слоя p^* [кг/м²]	90,3	12,5	7,6

значения давления с текущей высотой полета. Данная увязка ведется с помощью так называемой барометрической формулы, имеющей в общем случае вид (1.48). Основываясь на указанной зависимости и данных, приведенных в табл. 1.1, можно получить частные выражения барометрической формулы для слоев стандартизированной атмосферы, характеризующихся постоянным градиентом температуры (табл. 6.1).

В приведенных в табл. 6.1 зависимостях использованы обозначения: g_0 — стандартное (т. е. соответствующее нулевой высоте) ускорение свободного падения; $R = R^*/M$ — удельная газовая постоянная, равная отношению универсальной газовой постоянной ($R^* = 29,27 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{(\text{кг} \cdot \text{к})}$ к молярной массе воздуха (M). Зависимость $p = f(H)$ применяется при градуировке барометрических высотомеров. Последние позволяют измерить барометрическую высоту полета, т. е. высоту относительно некоторого уровня, давление воздуха для которого известно. Однако использование одного лишь барометрического высотомера приводит к слишком большим погрешностям измерения высоты. Эти погрешности, обусловленные, в первую очередь, нестабильностью атмосферы, а также запаздыванием, особенно велики при резком наборе высоты, имеющим место, в частности, при вертикальном старте баллистической ракеты.

6.2. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ

6.2.1. Классификация комплексных систем

В отличие от **комбинированных систем**, в которых каждая из подсистем является конструктивно обособленной и предназначенной для решения самостоятельных задач навигационного определения, подсистемы **навигационного комплекса** образуют единое целое, как с точки зрения конструкции, так и с точки зрения их целевого назначения. Отмеченное единство обеспечивается в них за счет наличия перекрестных связей между отдельными измерителями и реализации единого алгоритма решения навигационной задачи.

Классификация КНС может быть осуществлена по различным признакам. С технической точки зрения наибольший интерес представляет классификация, в основу которой положены различия (сходство) в общих принципах построения комплексов, отражающих реализуемые взаимосвязи между параметрами навигационных измерителей, образующих структурно избыточную систему. В этом смысле КНС подразделяются на три группы (рис. 6.5).

Первую группу образуют системы, основанные на комплексном использовании метода счисления. В системах данной группы имеет место структурная избыточность в виде измерителей, построенных на различных физических принципах, но реализующих метод счисления. Наиболее типичным представителем таких систем является инерциально-доплеровская система.

Вторую группу представляют системы, сочетающие метод счисления с позиционным методом. В зависимости от конкретного типа позиционных линий (радиотехнические, астрономические и т. д.) различают радиоинерциальную, астроинерциальную, бароинерциальную, магнитноинерциальную и другие системы.

В третью группу входят системы, сочетающие метод счисления с комплексным использованием позиционного метода, т. е. системы,

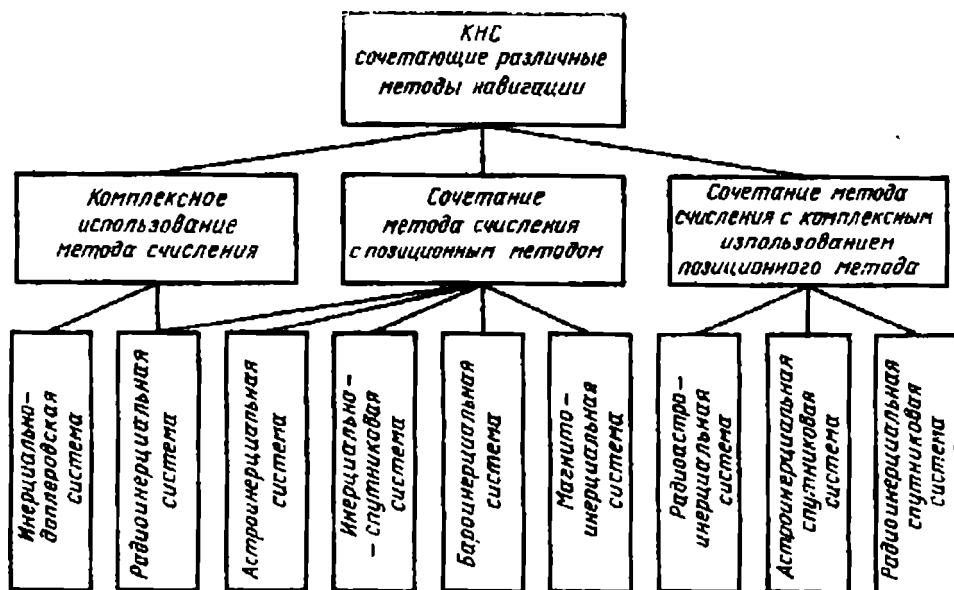


Рис. 6.5. Схема одного из видов классификации КНС

в которых имеет место структурная избыточность в виде позиционных измерителей в сочетании с измерителями, реализующими метод счисления. В качестве примеров таких систем могут быть названы радиоастроинерциальная, радиоинерциальная спутниковая и астроинерциальная спутниковая системы.

По методу обработки информации КНС подразделяются на полуавтоматические и автоматические. Применительно к беспилотным ЛА последние являются основными.

6.2.2. Общие принципы комплексирования

Выбор оптимального состава навигационного комплекса представляет собой сложную задачу, связанную с необходимостью взаимного согласования многочисленных и весьма противоречивых требований. При этом указанные требования во многом зависят от конкретных задач, выполняемых данным типом ракет. Вместе с тем несмотря на большое различие в технических требованиях, предъявляемых к ЛА различных классов, представляется возможным выделить некоторые общие признаки, определяющие состав КНС. Прежде всего это высокая точность определения навигационных параметров. Далее немаловажное значение имеют надежность, помехозащищенность и автономность работы бортовой НС.

И, наконец, совместимость НС с другими элементами системы управления, заключающаяся в возможности полной автоматизации процессов измерения, вычислений и передачи информации. Как правило, при комплексировании навигационных измерителей исходят из необходимости объединения приборов, частотные спектры ошибок которых лежат в различных областях. Данное условие является принципиально необходимым условием повышения точности КНС, поскольку только при его выполнении избыточная информация может рассматриваться как «эталонная» и использоваться для коррекции показателей основных измерителей. Уже отмечалось, что ошибки ИНС увеличиваются со временем, но при этом определяющий вес спектра ошибок сосредоточен вблизи нуля. Доплеров-

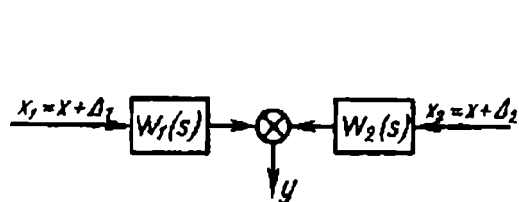


Рис. 6.6. Схема КНС, выполненная по схеме фильтрации

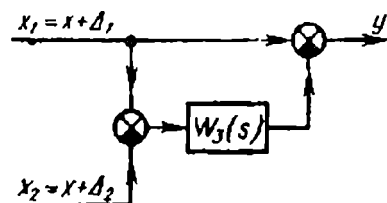


Рис. 6.7. Схема КНС, выполненная по схеме компенсации

ские же системы, обладая высокой мгновенной точностью и длительной стабильностью, имеют спектр ошибок, сосредоточенный вблизи несущей частоты доплеровского сигнала, имеющий высокочастотный характер. Далее, ранее обращалось внимание на то, что высотомер в виде бародатчика обладает запаздыванием в переходных режимах. Погрешности его особенно велики в области высоких частот. Данное обстоятельство дает основание считать, что комплексирование ИНС с доплеровской системой и бародатчиком осуществимо. Аналогичные соображения могут быть приведены и для других КНС из числа указанных в приведенной выше классификации.

По принципу работы измерителей КНС подразделяются на системы с несledящими и следящими измерителями [13]. В свою очередь, КНС с несledящими измерителями может быть построена по схеме фильтрации или по схеме компенсации.

Принцип построения КНС по схеме фильтрации иллюстрируется рис. 6.6. Сигналы, получаемые с двух измерителей, реализующих различные физические принципы, будут содержать истинное значение измеряемой величины x и ошибки Δ_1 и Δ_2 , т. е. $x_1 = x + \Delta_1$, $x_2 = x + \Delta_2$. После прохождения сигналов через фильтры с передаточными функциями $W_1(s)$ и $W_2(s)$ и суммирования получим изображение выходного сигнала

$$y(s) = [W_1(s) + W_2(s)] x(s) + W_1(s) \Delta_1(s) + W_2(s) \Delta_2(s). \quad (6.25)$$

Исходя из условия обеспечения инвариантности системы по отношению к изображению входного сигнала $x(s)$, отвечающего случаю, при котором для любых $x(t)$ система не будет вносить динамически

ошибок, обусловленных переходными процессами в фильтрах, потребуем, чтобы $W_1(s) + W_2(s) = 1$. Тогда

$$y(s) = x(s) + \delta x(s),$$

где $\delta x(s)$ — изображение ошибки измерения, равное

$$\begin{aligned} \delta x(s) &= W_1(s) \Delta_1(s) \div [1 - W_1(s)] \Delta_2(s) = \\ &= [1 - W_2(s)] \Delta_1(s) + W_2(s) \Delta_2(s). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Если спектр ошибки $\Delta_1(t)$ сосредоточен в области нижних частот, а $\Delta_2(t)$ представляет собой широкополосный случайный процесс, фильтр $W_1(s)$ должен быть фильтром верхних частот, а $W_2(s) = 1 - W_1(s)$ — нижних.

Принцип построения КНС по схеме компенсации вытекает из рассмотрения рис. 6.7. На выходе первого вычитающего устройства образуется разность $\Delta_1(t) - \Delta_2(t)$, причем будем считать, что спектр $\Delta_1(t)$ сосредоточен в области нижних частот, а процесс $\Delta_2(t)$ является широкополосным. Если можно было бы подобрать фильтр с передаточной функцией $W_3(s)$ таким, что помеха $\Delta_2(t)$ полностью подавлялась, а $\Delta_1(t)$ — пропусклась без искажений, то измеряемый сигнал $x(t)$ воспроизводился бы идеально точно $y(t) = x(t) + \Delta_1(t) - \Delta_2(t) = x(t)$. Однако такая идеальная компенсация возможна только тогда, когда спектры помех не перекрываются. В реальном случае

$$y(t) = x(t) + \delta x(t), \quad (6.27)$$

где $\delta x(t)$ тем меньше, чем больше различие в спектральных характеристиках помех $\Delta_1(t)$ и $\Delta_2(t)$. Причем

$$\delta x(s) = [1 - W_3(s)] \Delta_1(s) + W_3(s) \Delta_2(s). \quad (6.28)$$

Сопоставляя (6.28) с (6.26), можно заметить, что построение КНС по схеме компенсации оказывается эквивалентным схеме фильтрации при $W_3(s) = W_2(s) = 1 - W_1(s)$. Если в качестве одного из измерителей, входящих в состав КНС, используется радиотехнический следящий измеритель (типа автоселектора импульсного сигнала, измерителя доплеровской частоты и т. д.), то построение КНС может быть упрощено за счет задействования элементов и фильтров, входящих в состав следящего измерителя.

6.2.3. Инерциально-доплеровские системы навигации

Повышение точности определения навигационных параметров в инерциально-доплеровских НС достигается, главным образом, путем демпфирования собственных колебаний системы на основе использования разностного сигнала сравнения значений скорости, определяемых по показаниям ИНС и доплеровского измерителя путевой скорости и угла сноса (ДИСС). В результате с помощью внешней информации осуществляется изменение динамических характеристик комплекса. Покажем, что это действительно

так. Для этого воспользуемся уравнением (5.9), записав его с учетом формируемого сигнала коррекции в виде

$$\frac{d^{*2}}{dt^2} \mathbf{r} + 2\Omega_3 \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + 2\omega \times \frac{d^*}{dt} \mathbf{r} + \frac{d^*}{dt} \omega \times \mathbf{r} + 2\Omega_3 \times (\omega \times \mathbf{r}) + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + k_k (\mathbf{V} - \mathbf{V}_d) = \mathbf{a}_n + \mathbf{g}, \quad (6.29)$$

где k_k — коэффициент усиления сигнала коррекции; $\mathbf{V}$ — значение скорости, полученное по показаниям ИНС; $\mathbf{V}_d$ — значение скорости от доплеровского измерителя. Будем считать, что погрешность нахождения скорости по показаниям ИНС определяется (см. гл. 5), как

$$\Delta \mathbf{V} = \frac{d^*}{dt} \Delta \mathbf{r} + \Omega_3 \times \Delta \mathbf{r}. \quad (6.30)$$

Погрешность измерения скорости доплеровским измерителем, отнесенную к связанной с ЛА системе координат, обозначим $\Delta \mathbf{V}_d$. Приведем ее к осям правильной сопровождающей системы координат (т. е. учтя ошибки ориентирования платформы по сигналам ВУ), найдем

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{V}_n + \Delta \mathbf{V}_d - \delta \Psi \times \mathbf{V}_n, \quad (6.31)$$

где $\mathbf{V}_n$ — истинное значение скорости ракеты; $\delta \Psi$ — как и ранее, вектор угла, характеризующий рассогласование между вычисляемой и реальной ориентацией платформы. Тогда разность

$$\mathbf{V} - \mathbf{V}_d = \frac{d^*}{dt} \Delta \mathbf{r} + \Omega_3 \times \Delta \mathbf{r} + \delta \Psi \times \mathbf{V}_n - \Delta \mathbf{V}_d. \quad (6.32)$$

Имея в виду полученное выражение (6.32), воспользовавшись уравнением ошибок (5.75), получим:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} + 2\Omega_3 \times \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{g} + k_k \left[\frac{d^*}{dt} \Delta \mathbf{r} + \Omega_3 \times \Delta \mathbf{r} \right] = \\ = \delta \mathbf{a}_n - \delta \Psi \times \mathbf{a}_n - k_k [\delta \Psi \times \mathbf{V}_n] + k_k \Delta \mathbf{V}_d. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Считая, что составляющая ошибки в вертикальном направлении мала ($\Delta y = 0$), перейдем от векторного уравнения ошибок к системе скалярных однородных уравнений, отвечающей уравнению (6.33):

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{x} + k_k \Delta \dot{x} + \frac{K}{r^3} \Delta x + k_k \Omega_{ay} \Delta z = 0; \\ \Delta \ddot{z} + k_k \Delta \dot{z} + \frac{K}{r^3} \Delta z - k_k \Omega_{ay} \Delta x = 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

где $K = fM$ — гравитационный параметр Земли.

Учитывая, что $\Omega_{ay} = \text{const}$, решение однородных уравнений системы (6.34) представим в форме

$$\Delta i = A_i e^{\lambda_{1i} t} + B_i e^{\lambda_{2i} t}; \quad (i = x, z), \quad (6.35)$$

где A_i и B_i — коэффициенты, зависящие от начальных условий, $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k_k}{2} \pm \sqrt{\frac{k_k^2 K}{4r^3} + j k_k \Omega_{ay}}.$$

При $\lambda_{1,2}$ чисто мнимых и сопряженных величинах, графическое изображение зависимости $\Delta z = f(\Delta x)$, характеризующее поведение решения (6.35) в плоскости ошибок, представляло бы собой геометрическое место точек в виде эллипса, соответствующее **недемпфированной системе**. При комплексно-сопряженных $\lambda_{1,2}$ с отрицательной действительной частью также имеет место эллипс, однако размеры его уже будут экспоненциально уменьшаться со временем.

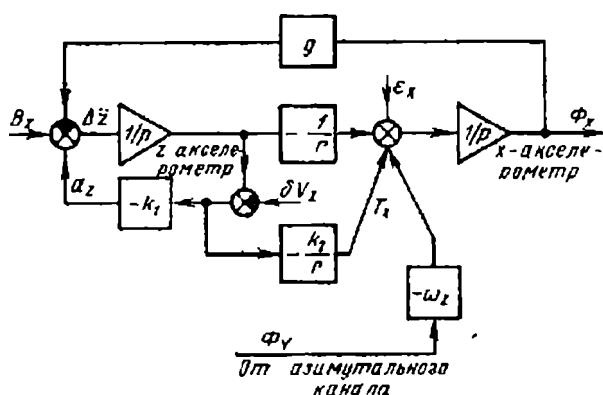


Рис. 6.8. Схема системы коррекции горизонтирования ИНС от ДИСС при одноосной модели ошибки

ошибке определения координат, что характерно для **демпфированной системы**. Использование информации о скорости движения ЛА, получаемой от ДИСС, помимо решения задачи о демпфировании позволяет осуществить выставку платформы в процессе полета. Применительно к горизонтированию ИНС для одноосной модели ошибок коррекция предполагает формирование сигнала T_x , позволяющего осуществить отслеживание вертикальной осью платформы направления местной вертикали. В этом случае величина сигнала обратной связи к акселерометру и горизонтальному гироскопу через усилительные блоки с коэффициентами усиления k_1 и k_2/r будет представлять собой разность между скоростями выработанной ИНС и полученной от ДИСС, разложенную предварительно на компоненты по осям платформы (рис. 6.8). Заметим в заключение, что постоянные коэффициенты усиления k_1 и k_2 в реальных системах, подверженных случайным воздействиям, заменяются частотными фильтрами со своими передаточными функциями, либо коэффициентами усиления оптимального фильтра, как это будет показано в следующей главе.

6.2.4. Системы с астрокоррекцией

Информация от астроследящего устройства в астроинерциальной системе навигации (АИСН) о направлении на небесное светило используется для коррекции ухода гироскопов ИНС. В свою очередь, информация, снимаемая с выходов ИНС, позволяет сформировать сигналы наведения телескопов на выбранные светила вне зависимости от эволюций траектории ракеты.

Целесообразно обратить внимание на то, что один автоматический пеленгатор не может выделить пространственные угловые ошибки визирования (что следует из разд. 5.3.2), поэтому для трехосной коррекции платформы необходимо обеспечить слежение по крайней мере за двумя астроориентирами. В некоторых системах для этой цели используется несколько телескопов. Однако может быть использован и один телескоп, осуществляющий попеременное визирование двух звезд. Возможны два варианта построения АИСН. В первом варианте астроследящее устройство устанавливается непосредственно на инерциальной платформе, во втором — на повторителе вертикали. Первый вариант является более предпочтительным, однако реализация его не всегда возможна по конструктивным

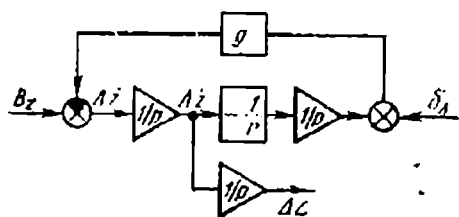


Рис. 6.9. Схемы модели ошибок одного канала недемпфированной ИНС с астрокоррекцией

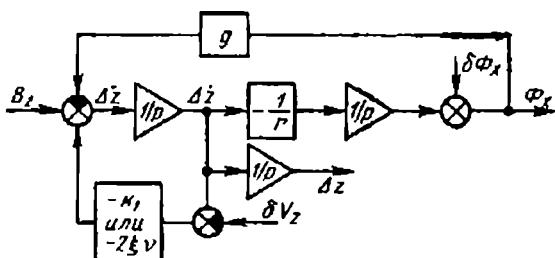


Рис. 6.10. Схема модели ошибок одного канала демпфированной ИНС с астрокоррекцией

соображениям. Использование второго варианта построения схемы связано с ухудшением ее точности из-за ошибок дистанционной передачи углов крена, тангажа и рыскания на повторитель вертикали и из-за упругих деформаций корпуса ЛА. Точность работы АИСН главным образом зависит от ошибок астроследящего устройства, скорости ухода гироскопов, ошибок акселерометров, а также от погрешностей ввода начальных данных (угла наклона платформы, скорости и координат). При этом в качестве ориентировочного критерия требуемой точности визирования астроориентиров можно использовать тот факт, что ошибка ориентации телескопа в $1''$, как правило, приводит к ошибке в определении местоположения ЛА в несколько десятков метров. На рис. 6.9 показана схема модели ошибок для недемпфированной системы с астрокоррекцией, где вход $\delta \Delta$ представляет собой погрешность измерений астропеленгатора. Наличие $\delta \Delta$ для случая недемпфированной системы приводит к возрастанию ошибки в определении местоположения ЛА пропорционально корню квадратному из времени. Этот рост ошибки можно интерпретировать как ожидаемое увеличение амплитуды колебаний с периодом Шулера. Введение демпфирования будет способствовать устранению ошибки в определении местоположения в установившемся режиме работы. Схема модели ошибок демпфированной ИНС с астрокоррекцией приведена на рис. 6.10. Здесь целесообразно обратить внимание на противоречивые требования, предъявляемые к коэффициенту усиления k_1 или к коэффициенту демпфирования ξ .

С одной стороны, его надо увеличивать для уменьшения ошибки за счет шумов следящего астропеленгатора, с другой, — необходимо уменьшать для снижения влияния шумов в измерении скорости.

6.3. АНАЛИЗ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ КАНАЛА ИНЕРЦИАЛЬНО-ДОПЛЕРОВСКОЙ НС ПО РАСПОЛАГАЕМЫМ ОШИБКАМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ

6.3.1. ИНС с идеальными чувствительными элементами

Принимая допущение, что доплеровский измеритель дает точное (эталонное) измерение скорости, будем считать, что в результате сравнения указанного эталона со скоростью, получаемой от ИНС, представляется возможным установить «точное» значение скоростной ошибки системы. Естественно возникает вопрос, какие другие ошибки системы могут быть оценены при наличии информации об ошибках определения скорости. Полный ответ на поставленный вопрос может быть дан только на основе исследования свойства наблюдаемости ИНС с неидеальными чувствительными элементами по данным о ее скоростных ошибках на основании общетеоретических посылок, приведенных в гл. 3.

Следуя методике, изложенной в [47], рассмотрим применимость критерия Н. Т. Кузовкова к исследованию наблюдаемости одного канала ИНС со свободной в азимуте платформой. Обсуждение начнем с рассмотрения случая использования идеальных гироскопов и акселерометров. Для упрощения приводимых выкладок ограничимся анализом ситуации, отвечающей предполетной калибровке НС на неподвижном ЛА, находящемся на стартовой позиции. Тогда значения эталонной скорости, приведенные к осям сопровождающей системы координат, будут иметь нулевые значения, а значения составляющих скорости, снимаемые с выходов первых интеграторов ($\delta\dot{x}$ — для одноканальной системы) дадут в чистом виде ошибку определения скорости, которая при наличии идеальных измерителей будет обусловлена их неточной выставкой и (или) погрешностями интегрирования. Введя обозначения

$$x_1 = \delta\dot{x}; \quad x_2 = \delta x; \quad x_3 = \psi_2; \quad x_4 = \psi_3; \quad x_5 = \psi_1,$$

где ψ_i ($i = 1, 2, 3$) — углы, характеризующие ошибки углового положения платформы, запишем уравнения ошибок ИНС с идеальными чувствительными элементами ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$; $B_1 = B_2 = 0$) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\nu^2 x_2 - g x_3; & \dot{x}_2 &= x_1; & \dot{x}_3 &= \omega_1 x_4; \\ \dot{x}_4 &= -\omega_1 x_3 + \omega_2 x_5; & \dot{x}_5 &= -\omega_2 x_4. \end{aligned}$$

В приведенных уравнениях

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Omega_3 \cos \varphi \sin \chi; \\ \omega_2 &= \Omega_3 \cos \varphi \cos \chi; \\ \chi &= -(\Omega_3 \sin \varphi) t, \end{aligned} \tag{6.36}$$

где φ — широта точки старта ЛА; χ — угол поворота «правильного» базиса относительно вертикальной оси географической системы координат.

Согласно (6.36) ω_1 и ω_2 представляет собой периодические функции времени. Однако учитывая, что период их составляет не менее 24 ч, в первом приближении указанные угловые скорости можно считать постоянными величинами. Из всех рассматриваемых переменных состояния непосредственно связана с результатами прямых измерений только координата x_1 . Эта переменная служит выходной величиной, поэтому модель рассматриваемой системы представим в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad (6.37)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -v^2 & g & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Для исследования наблюдаемости системы (6.37) воспользуемся подходом, базирующимся на применении критерия Кузовкова. Согласно этому подходу сначала найдем матрицу $s\mathbf{E} + \mathbf{A}^T$, которая будет иметь вид

$$s\mathbf{E} + \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v^2 & s & 0 & 0 & 0 \\ -g & 0 & s & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & s & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 & s \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Далее в матрице (6.38) необходимо поочередно заменить все столбцы столбцом, полученным при умножении $\mathbf{C}^T$ на $\mathbf{u}$ и вычислить определители Δ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Применительно к рассматриваемой задаче $\mathbf{u} = u_1$ есть величина скалярная, поэтому

$$\mathbf{C}^T u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1. \quad (6.39)$$

Вычисление частных определителей детально рассмотрим на примере первого из них. Итак

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & s & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 & s \end{vmatrix}. \quad (6.40)$$

Напомним, что детерминантом (определителем) квадратной матрицы порядка $r > 1$ называется число

$$\det A = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad (6.41)$$

где M_{1k} — детерминант матрицы порядка $(r-1)$, полученный из A вычеркиванием первой строки и k -го столбца. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= u_1 \det \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -\omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & s & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & s \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & s & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & s \end{vmatrix} = \\ &= u_1 s \det \begin{vmatrix} s & -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & s & -\omega_2 \\ 0 & \omega_2 & s \end{vmatrix} = u_1 s [s(s^2 + \omega_2^2) + \omega_1(\omega_1 s - 0) + 0] = \\ &= u_1 s [s(s^2 + \omega_2^2) + s\omega_1^2] = u_1 s^2 (s^2 + \omega_2^2 + \omega_1^2). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Аналогичным образом вычисляются и другие определители

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= u_1 v^2 s (s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2); \\ \Delta_3 &= u_1 g s (s^2 + \omega_2^2); \\ \Delta_4 &= u_1 g \omega_1 s^2; \quad \Delta_5 = u_1 g \omega_2 \omega_1 s. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Нетрудно заметить, что определитель Δ_2 может быть представлен в виде линейной комбинации определителей Δ_3 и Δ_5 . Действительно

$$\Delta_2 = \frac{v^2}{g} \Delta_3 + \frac{v^2 \omega_1}{g \omega_2} \Delta_5 = u_1 v^2 s (s^2 + \omega_2^2) + u_1 v^2 s \omega_1^2 = u_1 v^2 s (s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2). \quad (6.44)$$

Данное обстоятельство свидетельствует, что система (6.37) не является полностью наблюдаемой.

Последующий анализ матрицы (6.38) позволяет решить, что надо сделать для обеспечения условия полной наблюдаемости.

Так, если отнести теперь x_5 к внешним возмущениям (т. е. неизмеряемым входам), то Δ_5 станет равным нулю, а матрица (6.38) примет вид

$$sE + A^T = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ -v^2 & s & 0 & 0 \\ -g & 0 & s & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & s \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Система четвертого порядка, отвечающая (6.45), уже будет полностью наблюдаемой.

Аналогичный результат будет иметь место и при приравнивании нулю Δ_2 , что соответствует отнесению к внешним возмущениям переменной x_2 . Сложнее обстоит дело в случае, когда $\Delta_3 = 0$. При этом получающаяся система четвертого порядка распадается на две независимые подсистемы, из которых одна, характеризуемая переменными x_1 и x_2 , будет полностью наблюдаемой по измерениям x_1 , а вторая, характеризуемая переменными x_5 и x_3 , — полностью ненаблюдаема при том же составе измерений.

Итак, используя внешний по отношению к ИНС высокоточный измеритель составляющей вектора скорости и определив ошибку $\delta\dot{x}$, представляется возможным на основе применения вычислительных методов установить также величину ошибки ИНС в определении местоположения (δx) и величины двух угловых ошибок в определении вертикали и азимута (ψ_2 и ψ_3). Система становится наблюдаемой с точки зрения всех трех ошибок углового положения платформы (ψ_1 , ψ_2 и ψ_3) по измерениям $\delta\dot{x}$ при отказе от определения величины δx .

6.3.2. ИНС с неидеальными чувствительными элементами

При учете дрейфа гироскопов ε_1 , ε_2 и ε_3 , а также смещения нуля акселерометра B_1 , относимых к внешним воздействиям, математическая модель ошибок канала ИНС при идентичных предыдущему предположках, касающихся постановки исследуемой задачи, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -v^2 x_2 - g x_3 + x_7; & \dot{x}_2 &= x_1; & \dot{x}_3 &= x_4 + \omega_1 x_5; & \dot{x}_4 &= -\alpha_e x_4; \\ \dot{x}_5 &= -\omega_1 x_3 + x_6; & \dot{x}_6 &= -\alpha_e x_6; & \dot{x}_7 &= 0, \end{aligned} \quad (6.46)$$

где $x_1 = \delta\dot{x}$; $x_2 = \delta x$; $x_3 = \psi_2$; $x_4 = \varepsilon_2$; $x_5 = \psi_3$; $x_6 = \varepsilon_3$; $x_7 = B_1$, а под α_e понимается коэффициент затухания корреляционной функ-

ции, аппроксимирующей случайный дрейф гироскопа. Матрица $sE + A^T$ этой системы

$$sE + A^T = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v^2 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g & 0 & s & 0 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s - \alpha_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s - \alpha_e & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}. \quad (6.47)$$

Под измеряемой по-прежнему понимается координата x_1 , равная ошибке в определении составляющей скорости $\delta \dot{x}$. Тогда вектор-столбец

$$C^T u_1 = [u_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (6.48)$$

а определители Δ_i ($i = 1, \dots, 7$) примут значения

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= u_1 s (s - \alpha_e)^2 (s^2 + \omega_1^2); & \Delta_2 &= u_1 v^2 s (s - \alpha_e)^2 (s^2 + \omega_1^2); \\ \Delta_3 &= u_1 g s^3 (s - \alpha_e)^2; & \Delta_4 &= u_1 g s^3 (s - \alpha_e); & \Delta_5 &= u_1 g \omega_1 s^2 (s - \alpha_e)^2; \\ \Delta_6 &= u_1 g \omega_1 s^2 (s - \alpha_e); & \Delta_7 &= u_1 s (s - \alpha_e)^2 (s^2 + \omega_1^2). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Анализ приведенных выражений дает основание [47] для следующих выводов.

Вследствие пропорциональности определителей Δ_2 и Δ_7 переменные x_2 и x_7 по отдельности ненаблюдаемы. Ненаблюдаемы также и переменные x_4 , x_5 и x_6 в силу того, что определитель Δ_4 представляет собой линейную комбинацию определителей Δ_5 и Δ_6 . Действительно,

$$\Delta_4 = \frac{1}{\omega_1} \Delta_5 + \frac{\alpha_e}{\omega_1} \Delta_6. \quad (6.50)$$

Полная наблюдаемость будет иметь место только в случае отнесения к внешним возмущениям смещения нуля акселерометра $x_7 = B_1$, а также дрейфа одного из гироскопов ($x_4 = e_2$ или $x_6 = e_3$). Следовательно, в рамках рассмотренной задачи по располагаемой измерительной информации о величине $\delta \dot{x}$ не представляется возможным установить величину дрейфа одного из гироскопов и постоянное смещение нуля акселерометра.

Использование более сложных моделей, соответствующих условиям работы ИНС в процессе полета ЛА, естественно приводит к заметному усложнению процесса исследования системы на предмет определения условий ее полной наблюдаемости (или ненаблюдаемости) в реальных условиях функционирования, однако подход и общие принципы анализа остаются идентичными рассмотренным выше.

Входные воздействия рассмотренных ранее НС, установленных на борту ЛА, имеют случайный характер. Это приводит к необходимости привлечения для их проектирования статистических методов. При этом следует различать задачи статистического исследования и статистического синтеза НС. Цель статистического исследования заключается в оценке точности, а статистического синтеза — в выборе параметров или структуры и параметров, обеспечивающих требуемое качество работы НС.

Отдельно выделим проблему синтеза статистически оптимальных НС. Сущность отвечающего ей подхода заключается в отыскании оператора преобразования или алгоритма, доставляющего наилучшую (в смысле выбранного критерия) статистическую оценку навигационных параметров, полученную в процессе обработки результатов измерений.

Значительную роль в развитии и совершенствовании теории статистических (стохастических) динамических систем сыграли советские ученые А. Н. Колмогоров, В. С. Пугачев, А. А. Красовский, Е. П. Попов, Н. И. Андреев, И. А. Богуславский, Б. Г. Доступов, И. Е. Казаков, Р. Ш. Липцер, В. В. Солодовников, А. В. Солодов, Р. Л. Стратонович, С. С. Ривкин, И. Б. Челпанов, А. Н. Ширяев и др. В настоящее время в теории статистического синтеза НС сформировалось два основных направления, взаимно дополняющих друг друга. Первое — связано с построением фильтра, оптимального в установившемся режиме. Второе — базируется на использовании динамических фильтров, получивших название фильтров Калмана (ФК) по фамилии американского ученого Р. Калмана, положившего начало развитию соответствующего раздела науки. В отличие от фильтров первого типа они обеспечивают возможность получения по результатам измерений оптимальных оценок вектора состояния системы в каждый текущий момент времени.

Теоретической предпосылкой, на которой основывается возможность достаточно широкого использования ФК в системах управления ЛА, служит рассмотренный ранее принцип эквивалентности, базирующийся на теореме разделения.

Достоинством НС, включающих в свой состав ФК, является прежде всего то, что они позволяют не только получить оптимальные оценки навигационных параметров, но и оценить такие случайные переменные, как скорость дрейфа гироскопов и смещение «нулей» акселерометров в ИНС. В результате представляется возможным

существенно снизить требование по точности чувствительных элементов ИНС без снижения требований по точности определения навигационных параметров. Следует отметить, однако, что нахождение достоверных оценок параметров движения ЛА с помощью ФК возможно только при условии адекватности используемой априорной математической модели процесса реальному физическому процессу.

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ ЛА С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНОГО ХАРАКТЕРА ПОГРЕШНОСТЕЙ И ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

7.1.1. Аппроксимация реальных случайных процессов, используемая при исследовании и синтезе навигационных систем

При решении задач статистической динамики НС возникает необходимость в использовании для математического описания исследуемых случайных процессов аппарата теории случайных функций [70].

Случайной функцией $X(t)$ называется такая функция своего аргумента, которая является случайной величиной при любом неслучайном $t \in T$. При этом принято различать два случая:

а) аргумент случайной функции t может принимать любые значения в заданном интервале (конечном или бесконечном);

б) аргумент случайной функции может принимать только определенные дискретные значения.

В первом случае $X(t)$ обычно называют **случайным процессом**, во втором — **случайной последовательностью**. Если для определения $X(t)$ провести n независимых опытов, то их итогом будут определенные функциональные зависимости $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), называемые **реализациями случайной функции $X(t)$** . Исчерпывающей характеристикой случайного процесса служат соответствующие ему **функция распределения и плотность распределения вероятности**:

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = P[X(t_1) < x_1, \dots, X(t_k) < x_k]; \quad (7.1)$$

$$f(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \frac{\partial^k F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k}, \quad (7.2)$$

где $0 \leq P \leq 1$ — вероятность события, характеризующая степень возможности его появления.

Таким образом, функция плотности распределения вероятности (или просто плотности распределения) случайного процесса $X(t)$ определяет вероятность того, что данный процесс в момент времени t_1 находится в диапазоне $x_1 \leq X(t_1) \leq x_1 + dx_1$, в момент t_2 — в диапазоне $x_2 \leq X(t_2) \leq x_2 + dx_2$ и т. д. Естественно, чем больше число k , тем полнее описываются статистические свойства случайного процесса.

Важную роль в теории случайных процессов играют **стационарные случайные процессы**. Случайный скалярный или векторный процесс $X(t)$ называется **стационарным** в широком смысле, если его

математическое ожидание есть величина постоянная ($m_x = \text{const}$), корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ не зависит от значений аргументов t_1 и t_2 , а определяется их разностью $\tau = t_2 - t_1$, т. е. $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau)$. При $\tau = 0$ корреляционная функция скалярного стационарного процесса

$$K_x(\tau) = K_x(t - t) = K_x(0) = \sigma_x^2 = \text{const}. \quad (7.3)$$

Если взаимная корреляционная функция является функцией разности аргументов двух случайных процессов

$$K_{x_1, x_2}(t_1, t_2) = K_{x_1 x_2}(\tau), \quad (7.4)$$

то такие процессы называются **стационарно связанными**.

Квазипериодический характер во времени вероятностных характеристик стационарных случайных процессов позволяет заменить исследование стационарной случайной функции времени исследованием случайной функции некоторой вспомогательной переменной. В частности, приемлемые результаты могут быть получены при аппроксимации стационарной случайной функции $X(t)$ суммой гармонических процессов с различными комплексными амплитудами, которые выражаются в виде произведения их модулей (вещественных амплитуд) на экспоненциальный множитель, учитывающий фазу гармоники. Так как фаза гармоник случайна, то при интегрировании различные гармоники частично компенсируются. Это делает возможным применение к автокорреляционной функции стационарного процесса преобразования Фурье, хотя, как известно, интеграл Фурье для бесконечной реализации случайного процесса, строго говоря, не существует. Данное обстоятельство дает основание связать $K_x(\tau)$ с так называемой **спектральной плотностью** процесса $S_x(\omega)$ соотношением вида

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} K_x(\tau) d\tau. \quad (7.5)$$

Обратное преобразование Фурье позволяет найти

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.6)$$

Частным случаем данной формулы ($\tau = 0$) является выражение дисперсии случайного процесса через спектральную плотность

$$K_x(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (7.7)$$

Если $X(t)$ вещественная, то спектральная плотность $S_x(\omega)$ будет четной функцией ω . Тогда

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega).$$

Четность $S_x(\omega)$ позволяет избавиться в (7.5) от комплексных выражений. Действительно, подставляя в (7.5)

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau,$$

получим при переходе к новым пределам интегрирования

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (7.8)$$

По аналогичным причинам имеем

$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (7.9)$$

Представляет интерес для последующих приложений, связанных с аппроксимацией реальных случайных процессов, характерных для НС, рассмотрение корреляционной функции частного вида, задаваемой в форме

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha |\tau|}, \quad (7.10)$$

где σ_x^2 является дисперсией некоторой случайной функции, а коэффициент $\alpha > 0$, имеющий размерность, обратную размерности времени, служит характеристикой быстроты убывания корреляционной связи между ординатами случайной функции при увеличении разности аргументов этих ординат τ . Подстановка (7.10) в (7.5) и последующее интегрирование дает

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)\tau} d\tau \right\} = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha+j\omega} + \frac{1}{\alpha-j\omega} \right) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

При увеличении α быстрота убывания ординат функции $K_x(\tau)$ увеличивается. Вместе с тем при увеличении α начальная ордината спектральной плотности, равная $\sigma_x^2/\pi\alpha$, уменьшается, а так как площадь под кривой $S_x(\omega)$ всегда равна дисперсии σ_x^2 , то функция $S_x(\omega)$ будет прижиматься к оси ω , становясь одновременно более полой. При достаточно большом значении α можно считать

$$S_x(\omega) = c = \text{const}. \quad (7.12)$$

Стационарный случайный процесс, имеющий постоянную спектральную плотность, носит название **белого шума**. В (7.12) значение c будет характеризовать величину интенсивности белого шума:

$$c = \sigma_x^2 (\pi\alpha)^{-1}. \quad (7.13)$$

Для того чтобы при $\alpha \rightarrow \infty$ значение c оставалось постоянным, корреляционная функция (7.10) должна обладать свойствами **дельта-функции Дирака**, т. е. принимать бесконечно большое значение при $\tau = 0$ и не отличаться от нуля в любом другом случае. Формально,

выражение корреляционной функции белого шума можно представить в виде

$$K_x(\tau) = 2\pi s \delta(\tau) = Q \delta(\tau), \quad (7.14)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция; Q — интенсивность белого шума. Физический смысл полученного результата состоит в том, что ординаты белого шума, взятые для любых различных моментов времени, являются некоррелированными, а его дисперсия равна бесконечности.

В дополнение к использованному ранее понятию **безусловной плотности распределения вероятности**, отвечающей (7.2), введем в рассмотрение понятие **условной (переходной) плотности распределения вероятности** $f(x_k, t_k | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_{k-1}, t_{k-1})$, где вертикальная черта означает «для данного» или «при условии, что». Если безусловная плотность распределения определяла вероятность последовательного прохождения одних и тех же реализаций процесса $X(t)$ через заданные интервалы соответственно в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k$, то условная плотность характеризует распределение вероятностей реализации процесса $X(t)$ при условии, что значения ординат случайного процесса в предшествующие моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ известны.

Процесс $X(t)$ называется **абсолютно случайным**, если случайные величины $x(t_i)$ и $x(t_j)$ независимы при сколь угодно малом $\Delta t = t_j - t_i$. Имея в виду, что плотность распределения вектора со взаимно независимыми компонентами

$$f(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^k f(x_i, t_i), \quad (7.15)$$

абсолютно случайный процесс будет полностью характеризоваться **одномерным распределением** с плотностью $f(x, t)$. Белый шум, таким образом, представляет собой ни что иное, как абсолютно случайный процесс $X(t)$ с нормальной одномерной плотностью. Для математической формулировки основного свойства **марковского процесса** необходимо рассмотреть **условную плотность распределения**. В общем случае эта плотность зависит от значений $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ ординат случайного процесса в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$. Однако для марковских процессов существенным является только знание ординаты процесса в момент времени, ближайший к рассматриваемому моменту времени t_k . Поэтому в качестве определения марковского процесса можно записать следующее условие: если для любых моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k$

$$f(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}) = f(x_k | x_{k-1}), \quad (7.16)$$

т. е. если плотность распределения $f(x_k, t_k)$ зависит только от ординат этого процесса в момент времени t_{k-1} и совершенно не зависит от их значений в прошлом, то такой процесс называется **марковским**. Именно в этом смысле марковский процесс иногда называют «процессом без последствия». Исчерпывающими характеристиками его являются **начальная одномерная плотность** (плотность вероятности первой ординаты) $f(x_1)$ и **переходная плотность** $f(x_k | x_{k-1})$. Мар-

ковский процесс с независимыми приращениями $X(t)$, у которого переходная плотность гауссовская, называется **винеровским случайным процессом** (процессом случайного блуждания). С точки зрения свойств совместной плотности распределения стационарные процессы следует трактовать, как процессы, у которых плотность распределения вероятностей инварианта к временному сдвигу.

Если теперь вспомнить, какие требования были предъявлены к свойствам введенных в рассмотрение в гл. 3 стохастических дифференциальных уравнений, нетрудно установить, что процессы, определяемые такими уравнениями, относятся к числу марковских. Достоинством подхода, базирующегося на использовании теории марковских процессов, является то, что в отличие от случайных процессов общего вида, использование их приводит к существенному упрощению методов анализа процессов и динамики стохастических систем, для исследования которых аппарат **корреляционной теории**, т. е. теории, оперирующей моментами не выше второго порядка, оказывается недостаточным.

В отличие от линейных стохастических дифференциальных уравнений, для которых условная плотность распределения при заданном нормальном предшествующем состоянии будет отвечать гауссовскому распределению, в нелинейных системах данное условие в общем случае не выполняется. Для нахождения соответствующих условных плотностей распределения используют при этом дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа, получившие названия **прямого и обратного уравнений Колмогорова**. Прямое уравнение Колмогорова еще до его строгого вывода в работе [39] было использовано П. Фоккером и М. Планком при исследовании диффузионных процессов, поэтому его также называют **уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова**. Применительно к многомерному диффузионному процессу, описываемому векторным стохастическим дифференциальным уравнением (3.53), и обеспечении условий гладкости переходная плотность распределения f (под которой, как следует из определения, понимается плотность вероятности состояния $x(t)$ при условии, что в предшествующий момент t_0 , принимаемый за начальный, процесс характеризуется состоянием x_0) будет удовлетворять обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i, j, k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.17)$$

с начальным условием

$$f(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0).$$

В функции аргументов τ ($\tau > t$) и $x(\tau)$ изменение переходной плотности описывается прямым уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\tau i}} (f F_{\tau i}) + \frac{1}{2} \sum_{i, j, k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{\tau i} \partial x_{\tau j}} f (\sigma_{ik} \sigma_{jk})_{\tau} \quad (7.18)$$

при этом же начальном условии.

Переходя от (3.52) к стохастическому нелинейному уравнению первого порядка, запишем

$$dx = F(x, t) dt + \sigma(x, t) d\eta. \quad (7.19)$$

Относительная безусловная плотность распределения $f(x, t)$ для него, получаемая из уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова, будет иметь вид

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t) f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t) f(x, t)]. \quad (7.20)$$

Из этого уравнения могут быть получены [67, 76] уравнения, характеризующие изменение математического ожидания и дисперсии процесса $x(t)$ в функции времени:

$$\frac{d}{dt} m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) f(x, t) dx; \quad (7.21)$$

$$\frac{d}{dt} D_x(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x, t) f(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(x, t) f(x, t) dx. \quad (7.22)$$

В общем случае нелинейной системы, приведенные соотношения являются незамкнутыми, так как входящая под знаки интегралов плотность $f(x, t)$ диффузионного процесса $x(t)$ неизвестна.

Для линейной системы они превращаются в уравнения относительно $m_x(t)$ и $D_x(t)$ и становятся замкнутыми. Действительно, для линейной одномерной системы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) f(x, t) dx &= a(t) m_x(t) + b(t); \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x, t) f(x, t) dx &= a(t) D_x(t); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(x, t) f(x, t) dx &= \sigma^2(t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} m_x(t) = a(t) m_x(t) + b(t); \quad (7.23)$$

$$\frac{d}{dt} D_x(t) = 2a(t) D_x(t) + \sigma^2(t). \quad (7.24)$$

Интегрирование полученных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях $m_x(t_0)$ и $D_x(t_0)$ приводит к нахождению расчетных зависимостей изменений математического ожидания и дисперсии в функции времени.

7.1.2. Задачи и общая характеристика основных методов исследования статистических систем

К числу основных задач статистического исследования динамических систем, в частности, навигационных и систем наведения ЛА относятся оценка точности воспроизведения фазовых координат ЛА по результатам обработки сигналов, сопровождаемых внешними помехами и внутренними шумами измерительной аппаратуры, а также определение точности реализации управляемого движения в условиях действия случайных возмущений. Под оценкой (определением) точности динамической системы понимается нахождение статистических характеристик выходных координат (математических ожиданий, корреляционных функций и вероятностных моментов высших порядков) при известных начальных условиях.

Наиболее универсальным методом вероятностного анализа динамических систем является **метод статистического моделирования**, называемый в литературе также **методом имитационного моделирования**, либо **методом статистических испытаний** (**методом Монте-Карло**). Применение этого метода требует:

- выявить факторы, влияющие на функционирование системы;
- установить законы распределения этих факторов;
- математически описать процесс функционирования системы.

При невозможности корректного математического описания функционирования отдельных элементов системы, статистическим испытаниям может быть подвергнута **полунатурная модель**, т. е. модель, включающая наряду с математическими соотношениями, реализуемыми, как правило, на АВМ, образцы конкретных приборов и устройств, включенных в расчетную схему.

Реализация метода статистических испытаний возможна как в непрерывном, так и в дискретном вариантах. Дискретный вариант метода сводится к проведению на ЭВМ многократно повторяемых вычислений параметров моделируемого случайного процесса функционирования системы, подверженной действию случайных возмущений, и к последующей вероятностной обработке полученных в процессе этих «испытаний» результатов. Моделирование процесса наведения ЛА, происходящего при действии случайных факторов или стохастического процесса функционирования НС, требует формирования физическими или программными методами реализации случайных величин с заданным распределением. **Физические датчики случайных последовательностей** (генераторы случайных шумов), как правило, применяются при проведении исследований случайных процессов и при решении статистических задач на аналоговых и гибридных аналого-цифровых вычислительных машинах.

При моделировании реализации случайных величин на универсальных ЭВМ предпочтение отдается программным методам формирования случайных последовательностей. С некоторой долей условности соответствующие стандартные подпрограммы называют **программными датчиками псевдослучайных чисел**. «Псевдослучайность» формируемой ими последовательности здесь обуславливается тем, что

в «датчике» каждое последующее «случайное» значение вычисляется с помощью рекуррентной зависимости при использовании в качестве аргумента нескольких чисел, полученных в процессе предыдущих обращений к подпрограмме. Количество вычислительных реализаций при статистическом моделировании определяется характером решаемой задачи, требуемой точностью и надежностью получения оценок числовых характеристик. Достоинством метода является его универсальность и высокая точность. Недостаток — громоздкость и трудоемкость.

К числу приближенных, но в достаточной степени общих методов, пригодных для исследования широкого круга нелинейных задач статистической динамики, прежде всего относится **метод статистической линейаризации** и его различные модификации. Существо принципа статистической линейаризации нелинейностей заключается в замене нелинейного звена системы статистически эквивалентным линейаризованным звеном. Использование метода открывает возможность распространения корреляционной теории на широкий круг нелинейных в своей начальной постановке вероятностных задач. Прежде, чем перейти к изложению существа метода статистической линейаризации, рассмотрим **процедуру линейаризации однозначных дифференцируемых характеристик нелинейностей** типа $y = \varphi(x)$. Если входной случайный сигнал

$$x(t) = m_x(t) + \dot{x}(t) \quad (7.25)$$

нелинейного звена незначительно отличается от $m_x(t)$, то нелинейная характеристика в пределах изменения центрированного входного сигнала $\dot{x}(t)$ может быть заменена линейной характеристикой. Раскладывая $\varphi(x)$ в ряд Тейлора относительно $\dot{x}(t)$ и ограничиваясь линейными членами разложения, получим

$$y \approx \varphi(m_x) + \varphi'(m_x) \dot{x}, \quad (7.26)$$

где знак «штрих» означает взятие производной по соответствующему аргументу. Замена нелинейной функции $\varphi(x)$ зависимостью (7.26) эквивалентна замене кривой $y = \varphi(x)$ касательной к ней в подвижной точке $m_x(t)$. Применительно к неоднозначным функциям и к характеристикам, имеющим угловые точки и точки разрыва, описанный выше способ линейаризации не может быть использован. Именно в этих случаях обращаются к принципу статистической линейаризации нелинейностей [30, 31, 62, 76]. Замена нелинейной случайной функции $\varphi(x)$ при этом производится приближенной зависимостью, нелинейной относительно $m_x(t)$ и линейной относительно центрированной случайной составляющей $\dot{x} = x - m_x$, т. е.

$$y \approx \varphi_0 + k_1 \dot{x}. \quad (7.27)$$

Входящие в это соотношение **статистическая характеристика нелинейности** φ_0 и **статистический коэффициент усиления** k_1 — неслу-

чайные нелинейные функции, зависящие от статистических характеристик случайного процесса $x(t)$. Естественно, что выбор значений φ_0 и k_1 должен производиться исходя из условия обеспечения статистической эквивалентности нелинейного и аппроксимирующего его линейного процессов. При этом критерии эквивалентности могут быть различными. Наиболее часто используют следующие две формы задания критериев:

в первом случае при выполнении равенств $\varphi_0 = m_y(t)$; $\varphi_0 = -M[\varphi(x)]$ требуется, чтобы дисперсии переменных y и x отвечали соотношению $D_y = k_1^2 D_x$;

во втором — выдвигается требование минимизации среднего квадрата ошибки аппроксимации, т. е. требование обеспечения условия $\min M[(y - \varphi_0 - k_1 x)^2]$.

Применительно к указанным критериям, расчетные зависимости для нахождения φ_0 и коэффициентов усиления $k_1^{(i)}$ ($i = 1, 2$), где верхний индекс указывает на способ линеаризации, будут иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx; \\ k_1^{(1)} &= \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \pm \sigma_x^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - \varphi_0^2 \right\}^{1/2}; \\ k_1^{(2)} &= \frac{K_{xy}}{D_x} = (D_x)^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \varphi(x) f(x) dx \right\}.\end{aligned}$$

Здесь σ_j ($j = x, y$) — средние квадратические отклонения (СКО) переменных x и y ; K_{xy} — их взаимный корреляционный момент; $f(x)$ — одномерная плотность распределения случайного процесса $x(t)$. В общем случае $f(x)$ — неизвестная величина. Однако если предположить (что и делается в методе статистической линеаризации), что $f(x)$ есть плотность распределения нормального процесса, то $f(x)$ может быть найдена, и интегралы в приведенных выше выражениях сводятся к интегралу Лапласа. Это позволяет получить выражения для вычисления φ_0 и k_1 только в функции математического ожидания и дисперсии переменной $x(t)$ на входе нелинейности.

Применение теории марковских процессов для анализа точности динамических систем основывается на интегрировании уравнений (7.21) и (7.22). В простейшем случае линейной системы первого порядка они имеют вид (7.23), (7.24). Для стационарной системы в установившемся режиме $m_x = -ba^{-1}$, а $D_x = -0,5\sigma^2 a^{-1}$. Распространение зависимостей (7.23) и (7.24) на многомерную линейную марковскую систему, отвечающую векторному уравнению (3.53), дает [76]

$$\frac{d}{dt} m_x(t) = A(t) m_x(t) + b(t); \quad (7.28)$$

$$\frac{d}{dt} K_x(t) = A(t) K_x(t) + K_x(t) A^T(t) + \sigma(t) G(t) \sigma^T(t), \quad (7.29)$$

где $G(t)$ — интенсивность входного возмущающего воздействия, аппроксимируемого белым шумом.

В совокупности уравнения (7.28) и (7.29) составляют так называемую **корреляционную систему уравнений**. Будучи независимыми, они могут интегрироваться раздельно.

Наиболее просто задача оценки точности решается применительно к линейным системам на основе корреляционной теории случайных процессов. Практическое использование соответствующих методов при этом целесообразно обсудить на примере, отвечающем случаю, когда случайный векторный процесс $x(t)$ связан с входным случайным воздействием линейным дифференциальным уравнением вида (3.69). При этом будем считать, что $\Phi(t)$ есть случайная функция с известным математическим ожиданием $m_\Phi(t)$ и корреляционной функцией $K_\Phi(t_1, t_2) = M[\dot{\Phi}(t_1) \dot{\Phi}^T(t_2)]$. Полагая также, что начальные условия заданы и не коррелированы с входным воздействием не раскрывая структуры случайного процесса $\Phi(t)$, запишем, используя (3.77),

$$\begin{aligned} m_x(t) &= M[\Phi(t, t_0) x(t_0)] + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) M[\varphi(\tau)] d\tau = \\ &= \Phi(t, t_0) m_x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) m_\Phi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (7.30)$$

Для нахождения текущего значения $K_x(t_1, t_2)$ учтем соотношение (3.94), распространив его на случайные процессы

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \Phi(t_1, t_0) K_x(t_0) \Phi^T(t_2, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} M[(\Phi(t_1, \tau) \dot{\Phi}(\tau_1)) (\Phi(t_2, \tau) \dot{\Phi}(\tau_2))^T] d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Имея в виду, что

$$M[(\Phi(t_1, \tau) \dot{\Phi}(\tau_1)) (\Phi(t_2, \tau) \dot{\Phi}(\tau_2))^T] = \Phi(t_1, \tau_1) K_\Phi(\tau_1, \tau_2) \Phi^T(t_2, \tau_2), \quad (7.32)$$

запишем окончательно

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \Phi(t_1, t_0) K_x(t_0) \Phi^T(t_2, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, \tau_1) K_\Phi(\tau_1, \tau_2) \Phi^T(t_2, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (7.33)$$

При $t_1 = t_2 = t$ переходим к выражению ковариационной матрицы

$$\begin{aligned} K_x(t, t) &= K_x(t) = \Phi(t, t_0) K_x(t_0) \Phi^T(t, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau_1) K_\Phi(\tau_1, \tau_2) \Phi^T(t, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Диагональные элементы $K_x(t)$ представляют собой дисперсии, что позволяет при необходимости вычислить и средние квадратичные отклонения. В отличие от корреляционной матрицы, ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали.

7.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

7.2.1. Постановка задачи линейной оптимальной фильтрации

Под оптимальной фильтрацией обычно принято понимать процесс определения наиболее вероятных значений полезного сигнала, сопровождаемого при измерениях случайными искажениями (помехами, шумами).

Стохастическая навигационная система, как и любая другая оптимальная система, будет называться оптимальной в смысле некоторого

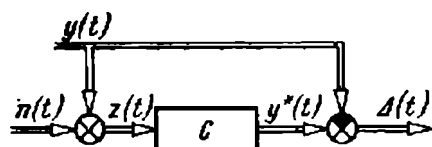


Рис. 7.1. К понятию определения ошибки оптимальной многомерной линейной системы обработки измерительной информации

критерия, если структура и значения ее параметров доставляют экстремум (минимум или максимум в зависимости от физического смысла) этому критерию. Однако применительно к НС имеют место частные особенности, на которые уместно обратить внимание. Первая из них заключается в том, что здесь речь идет о статистической оптимизации.

Поэтому в рассматриваемом случае мы можем говорить о системе, оптимальной только по отношению к множеству реализаций процесса измерений. Вторая особенность обусловлена выбором критерия. Формулировка его неразрывно связана с использованием понятия ошибки преобразования входного сигнала. Под ошибкой будем понимать векторную величину, определяемую как

$$\Delta(t) = y^*(t) - y(t), \quad (7.35)$$

где $y(t)$ — вектор наблюдаемых параметров, отражающий только полезную составляющую обрабатываемого сигнала (рис. 7.1); $y^*(t)$ — фактический вектор наблюдаемых параметров на выходе системы, представляющий собой результат преобразования полного входного сигнала, включающего как полезную составляющую $y(t)$, так и помеху $n(t)$. Сама ошибка $\Delta(t)$ является случайной функцией времени, поэтому непосредственно она не может служить критерием оценки точности системы. Обычно в качестве критерия выбирают одну из числовых характеристик этой случайной функции. Наиболее приемлемым [32] является использование среднего квадрата ошибки, имеющего для векторной случайной функции $\Delta(t)$ вид

$$I(t) = M[\Delta^T(t) \Delta(t)]. \quad (7.36)$$

Ошибка $\Delta(t)$ может быть выражена через ее математическое ожидание $M_{\Delta}(t)$ и центрированное значение ошибки $\dot{\Delta}(t)$ в виде

$$\Delta(t) = M_{\Delta}(t) + \dot{\Delta}(t). \quad (7.37)$$

Тогда

$$I(t) = M_{\Delta}^T(t) M_{\Delta}(t) + M[\dot{\Delta}^T(t) \dot{\Delta}(t)]. \quad (7.38)$$

Второе слагаемое в (7.38) является скалярной величиной, равной следу (шпуру) корреляционной матрицы $K_{\Delta}(t)$, т. е. сумме ее диагональных элементов. Следовательно, для каждой фазовой координаты выражение (7.38) будет характеризовать средний квадрат ошибки, определяемый зависимостью вида

$$I_i(t) = \eta_{x_i}(t) = M_{\Delta_i}^2(t) + D_{\Delta_i}(t).$$

(7.39)

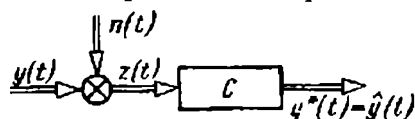


Рис. 7.2. Схема преобразования входного сигнала

Поскольку при $M_{\Delta_i} = 0$, $\sqrt{I_i(t)} = \sigma_{x_i}(t)$, системы, обладающие минимальным средним квадратическим отклонением, называют **оптимальными в смысле минимума среднеквадратической ошибки**.

Применение этого критерия делает возможным получить решение задачи отыскания оптимального оператора преобразования входного сигнала с помощью математического аппарата **корреляционной теории**, используя линейную, а следовательно, наиболее просто технически реализуемую систему.

Пусть имеется некоторая многомерная система обработки измерительной информации, носителем которой является входной сигнал

$$z(t) = y(t) + n(t). \quad (7.40)$$

Требуется найти оптимальный оператор C , характеризующий эту систему (рис. 7.2), позволяющий выделить полезный сигнал $y(t)$ из измерительного сигнала $z(t)$ путем нахождения оптимальной оценки

$$\hat{y}(t) = y^*(t) = Cz(t), \quad (7.41)$$

для которой имело бы место минимальное из всех возможных значений среднего квадрата ошибки. Очевидно, что если выбранный оператор линейного преобразования не обеспечивает минимума выбранного критерия, то в отличие от (7.41), на выходе такой системы будет иметь место сигнал $y_1^*(t)$, представляющий собой результат преобразования сигнала $z(t)$ любым произвольным отличным от C оператором D , принадлежащим к тому же классу, что и оптимальный оператор

$$y_1^*(t) = Dz(t). \quad (7.42)$$

Теперь, используя понятие ошибки (7.35), запишем условие минимума среднего квадрата ошибки оптимальной системы, как

$$M[(y^*(t) - y(t))^T (y^*(t) - y(t))] \leq M[(y_1^*(t) - y(t))^T (y_1^*(t) - y(t))]. \quad (7.43)$$

По существу, в квадратных скобках записан квадрат модуля действительного вектора ошибки оптимальной (слева) и неоптимальной систем. Известно, что минимизация математического ожидания квадрата модуля вектора ошибки эквивалентна минимизации математического ожидания квадрата каждой компоненты вектора ошибки. Не приводя здесь соответствующих математических выкладок доказательства, изложенного в [32, 66], укажем, что условие оптимальности (7.43) идентично выполнению требования

$$M[(y^*(t) - y(t))(y_i^*(t))^T] = 0 \quad (7.44)$$

или, заменив $y^*(t)$ и $y_i^*(t)$ их выражениями (7.41) и (7.42), найдем

$$M[(Cz(t) - y(t))(Dz(t))^T] = 0. \quad (7.45)$$

Условие (7.45) является не только необходимым, но и достаточным. Исходя из него, представляется возможным найти выражение искомого оператора.

7.2.2. Вывод многомерного уравнения Винера—Хопфа

Линейная система может быть полностью охарактеризована интегральным оператором [32], который через весовые матрицы физически реализуемой системы выражается в виде

$$Cz(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau_2) z(\tau_2) d\tau_2;$$

$$Dz(t) = \int_{t_0}^t H_1(t, \tau_1) z(\tau_1) d\tau_1,$$

где $H(t, \tau_2)$ и $H_1(t, \tau_1)$ — весовые матрицы или матрицы весовых функций соответственно оптимальной и неоптимальной системы.

Напомним, что под физически реализуемой системой понимается система, удовлетворяющая условию $H(t, \tau) = 0$ при $\tau > t$, оговоренному при введении понятия весовой или импульсной переходной матрицы системы (см. гл. 3). Это условие отражает тот факт, что никакая реальная система не может отреагировать в момент времени t на входное воздействие, которое будет приложено к ней позже этого момента. На практике нет смысла учитывать все значения входного сигнала $z(t)$, начиная с момента t_0 включения системы в работу. В связи с этим целесообразно ограничить класс рассматриваемых систем только такими системами, память которых имеет ограниченную длительность T . Для таких систем весовые матрицы будут принимать нулевое значение при всех $\tau < t - T$. Это приводит к изменению нижнего предела интегрирования в исходных выражениях, которые представим в следующем виде:

$$Cz(t) = \int_{t-T}^t H(t, \tau_2) z(\tau_2) d\tau_2; \quad (7.46)$$

$$Dz(t) = \int_{t-T}^t H_1(t, \tau_1) z(\tau_1) d\tau_1. \quad (7.47)$$

Подстановка (7.46) и (7.47) в (7.45) дает

$$M \left[\left\{ \int_{t-T}^t \mathbf{H}(t, \tau_2) \mathbf{z}(\tau_2) d\tau_2 - \mathbf{y}(t) \right\} \left\{ \int_{t-T}^t \mathbf{H}_1(t, \tau_1) \mathbf{z}(\tau_1) d\tau_1 \right\}^T \right] = 0. \quad (7.48)$$

Данное условие должно выполняться при любых значениях матрицы $\mathbf{H}_1(t, \tau_1)$.

Следуя [62], внесем выражение в первых фигурных скобках под знак второго интеграла и почленно умножим это выражение под знаком второго интеграла на $\mathbf{z}(\tau_1)$:

$$M \left[\int_{t-T}^t \left\{ \int_{t-T}^t \mathbf{H}(t, \tau_2) \mathbf{z}^T(\tau_2) \mathbf{z}(\tau_1) d\tau_2 - \mathbf{y}(t) \mathbf{z}^T(\tau_1) \right\} \mathbf{H}_1^T(t, \tau_1) d\tau_1 \right] = 0. \quad (7.49)$$

Очевидно, что выполнение условия (7.49) при любой $\mathbf{H}_1(t, \tau_1)$ возможно только тогда, когда равно нулю выражение в фигурных скобках. Осуществив операцию нахождения математического ожидания под знаком интеграла, окончательно получим

$$\int_{t-T}^t \mathbf{H}(t, \tau_2) M[\mathbf{z}^T(\tau_2) \mathbf{z}(\tau_1)] d\tau_2 - M[\mathbf{y}(t) \mathbf{z}^T(\tau_1)] = 0 \quad (7.50)$$

$(t - T \leq \tau_1 \leq t).$

Приведенное уравнение (7.50) представляет собой **обобщенное уравнение Винера—Хопфа** для многомерной в общем случае нестационарной линейной системы.

7.2.3. Элементы теории винеровской фильтрации

Для реализации процесса фильтрации (имея в виду его традиционную трактовку) необходимо найти решение (7.50). Это в принципе возможно, если известны матрицы

$$\mathbf{K}_z(\tau_1, \tau_2) = M[\mathbf{z}^T(\tau_2) \mathbf{z}(\tau_1)]; \quad (7.51)$$

$$\mathbf{R}_{yz}(t, \tau_1) = M[\mathbf{y}(t) \mathbf{z}^T(\tau_1)], \quad (7.52)$$

По своему физическому смыслу $\mathbf{K}_z(\tau_1, \tau_2)$ представляет собой корреляционную матрицу входного сигнала, а $\mathbf{R}_{yz}(t, \tau_1)$ — матрицу взаимных корреляционных функций составляющих полезной компоненты и полной суммарной величины входного сигнала. С учетом обозначений (7.51) и (7.52) уравнение Винера—Хопфа имеет вид

$$\int_{t-T}^t \mathbf{K}_z(\tau_1, \tau_2) \mathbf{H}(t, \tau_2) d\tau_2 = \mathbf{R}_{yz}(t, \tau_1). \quad (7.53)$$

На его основе представляется возможным получить матрицу весовых функций, с помощью которой затем построить алгоритм оптимальной обработки сигналов в форме

$$\mathbf{y}^*(t) = \int_{t-T}^t \mathbf{H}(t, \tau_2) \mathbf{z}(\tau_2) d\tau_2. \quad (7.54)$$

Обработка результатов измерений на основе использования **винеровских фильтров** (ВФ), соответствующих по структуре зависимости (7.54), может потребовать в ряде случаев для определения некоторого навигационного параметра выполнения операции дифференцирования сигнала в присутствии шумов. Данное обстоятельство приводит к необходимости дополнительного обсуждения условия реализуемости рассматриваемого фильтра. Прежде всего это касается достаточности выполнения условия (7.50) с точки зрения оптимальности линейной системы, определяемой весовой матрицей $\mathbf{H}(t, \tau_2)$. Если предположить, что входной сигнал $z(t)$ подвергается дифференцированию p раз, то весовые матрицы $\mathbf{H}(t, \tau_2)$ и $\mathbf{H}_1(t, \tau_1)$ могут содержать [62] δ -функции и их производные до порядка p включительно. Полагая в (7.49) $\mathbf{H}_1(t, \tau_1) = \delta^k(t - \tau_3 - \tau_1)$ запишем, следуя [62], что

$$\int_{t-T}^t \left[\frac{\partial^k \mathbf{K}_z(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^k} \right]_{\tau_1=t-\tau_3} \mathbf{H}(t, \tau_2) d\tau_2 - \left[\frac{\partial^k \mathbf{R}_{yz}(t, \tau_1)}{\partial \tau_1^k} \right]_{\tau_1=t-\tau_3} = 0. \quad (7.55)$$

Здесь величина τ_3 может принимать любое значение в пределах $0 \leq \tau_3 \leq T$. Заметим, что тождественное выполнение равенства (7.53) внутри интервала $(t - T \leq \tau_1 \leq t)$ повлечет за собой и автоматическое выполнение равенства (7.55) для всех k внутри интервала $t - T < \tau_1 < t$, т. е. при всех τ_3 в пределах $0 < \tau_3 < T$. Невыполнение же равенства (7.55) может иметь место только на концах интервала $[t - T, t]$, т. е. при $\tau_3 = 0$ и $\tau_3 = T$. Для исключения этого, в дополнение к условию (7.53), необходимо потребовать выполнения граничных условий

$$\int_{t-T}^t \left[\frac{\partial^k \mathbf{K}_z(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^k} \right]_{\tau_1=t-T} \mathbf{H}(t, \tau_2) d\tau_2 - \left[\frac{\partial^k \mathbf{R}_{yz}(t, \tau_1)}{\partial \tau_1^k} \right]_{\tau_1=t-T} = 0; \quad (7.56)$$

$$\int_{t-T}^t \left[\frac{\partial^k \mathbf{K}_z(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^k} \right]_{\tau_1=t} \mathbf{H}(t, \tau_2) d\tau_2 - \left[\frac{\partial^k \mathbf{R}_{yz}(t, \tau_1)}{\partial \tau_1^k} \right]_{\tau_1=t} = 0,$$

($k = 1, \dots, p$).

Поскольку весовая матрица $\mathbf{H}(t, \tau_2)$ также может содержать допустимые δ -функции и их производные, то уравнения (7.56) будут содержать [62] смешанные производные

компонентов матрицы $\mathbf{K}_z(\tau_1, \tau_2)$ до порядка $\frac{\partial^{2p} (\mathbf{K}_z)_{ij}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^p \partial \tau_2^p}$ включи-

тельно. Отсюда вытекает, что наибольшее целое число p , при котором смешанные производные продолжают оставаться непрерывными при $\tau_1 = \tau_2$, определяет наивысший порядок допустимого дифференцирования входного сигнала. Итак, окончательно имеем, что для того, чтобы матрица $\mathbf{H}(t, \tau)$ была бы весовой матрицей оптимальной линейной системы, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла обобщенному уравнению Винера—Хопфа в замкнутом интервале $t - T \leq \tau_1 \leq t$ и содержала δ -функции и их производные не выше p -го порядка, если p — наибольшее целое число, при котором смешанные производные $\frac{\partial^{2p} (\mathbf{K}_z)_{ij}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^p \partial \tau_2^p}$ непре-

рывны.

Задача определения оптимальной линейной системы для выделения желаемого сигнала из смеси полезного сигнала и помехи впервые была решена А. Н. Колмогоровым для дискретных процессов (1941 г.) и значительно позднее Н. Винером — для непрерывных процессов. Поэтому ее часто называют задачей Колмогорова—Винера [5].

Ограниченность применения винеровских фильтров (ВФ) обусловлена рядом специфических особенностей преобразования сигнала,

вытекающих из постановки задачи Колмогорова—Винера. К числу таких особенностей следует прежде всего отнести следующее.

Интегральная форма уравнения (7.73), предназначенного для отыскания матрицы весовых функций оптимальной системы в общем случае не позволяет найти точного решения. Практически, речь может идти о решении, получаемом при принятии допущения о том, что полезный сигнал и помеха являются стационарными случайными процессами. При этом оптимальные оценки находятся при $t \rightarrow \infty$. Другими словами, решение отыскивается в классе стационарных линейных систем, а минимизация критерия достигается в установившемся режиме их работы. Данное обстоятельство является основным сдерживающим фактором широкого распространения винеровских фильтров. Кроме того, к характерным недостаткам рассматриваемых фильтров относится трудность определения большого количества числовых характеристик случайных процессов, необходимых для решения уравнения Винера—Хопфа, и относительное неудобство реализации алгоритма в БЦВМ.

7.2.4. Исходная постановка и основные положения линейной теории динамической оптимальной фильтрации (основы теории фильтров Калмана—Бьюси)

С точки зрения формулировки целевого назначения рассматриваемого здесь подхода, она (эта формулировка) практически не отличается от подхода, отвечающего методу Колмогорова—Винера. Действительно, так же как и в предыдущем случае, задача будет заключаться в определении алгоритма обработки некоторого случайного сигнала, поступающего с измерителей, который обеспечивал бы нахождение оптимальной оценки $\hat{x}(t)$ полезного сигнала $x(t)$. Оптимальность понимается в смысле минимизации критерия

$$I(t) = M[(\hat{x}(t) - x(t))^T (\hat{x}(t) - x(t))]. \quad (7.57)$$

На первый взгляд может показаться, что и в данном случае мы имеем дело с традиционной задачей оптимальной фильтрации, на самом деле это не совсем так. Прежде всего дело заключается в том, что в подходе Колмогорова—Винера мы пытались найти оптимальную оценку $\hat{y}(t) = y^*(t)$ именно того сигнала, который поступал с измерителей. Размерность векторов $z(t)$ и $y^*(t)$ была одинаковой. В рассматриваемом подходе предполагается, что на интервале (t_0, t) измерениям подлежит вектор размерности $p \leq r$, связанный с вектором $x(t)$ линейным матричным уравнением

$$y(t) = C(t)x(t) + n(t), \quad (7.58)$$

где $n(t)$ — вектор шумов измерений.

Матрица измеряемых (наблюдаемых) координат $C(t)$ в общем случае не равна единичной и, следовательно, измерениям могут подлежать не все компоненты вектора $x(t)$, а только часть из них. Тем не менее,

при этом правомерна поставка задачи получения оценок всех компонентов, т. е. полного вектора $\mathbf{x}(t)$. Естественно, здесь возникает вопрос, который не возникал при обсуждении подхода Колмогорова—Винера: возможно ли это? Очевидно, что если утвердительный ответ допустим, то далеко не во всех случаях. Прежде всего необходимо, чтобы в качестве оцениваемого вектора выступал не любой произвольный вектор измерений, а вектор фазовых координат некоторой линейной динамической системы, описываемой, например, векторно-матричным уравнением (3.69). По крайней мере вторым из числа обязательных условий при этом должно выступать и выполнение требования наблюдаемости динамической системы (см. гл. 3). Учитывая отмеченные существенные отличительные особенности обсуждаемого подхода, имеет смысл трактовать процесс оптимальной обработки результатов измерений при привлечении для этих целей априорной динамической модели в виде дифференциальных уравнений, описывающих фазовое состояние системы, как **динамическую** или **последовательную оптимальную фильтрацию**.

В исходной постановке задачи [33], как возмущения действующие на систему, так и аддитивные (прибавляемые, иначе суммируемые) шумы измерений предполагались многомерными случайными процессами типа белого шума, некоррелированными между собой и имеющими нулевые математические ожидания.

Обсудим, сколь существенны эти ограничения с точки зрения практической применимости ФК. Прежде всего отметим, что требование $M[\eta(t)] = 0$ не является определяющим. Вспомним, что математическое ожидание является неслучайной характеристикой случайной величины. Поэтому, если $M[\eta(t)] \neq 0$, соответствующее значение математического ожидания случайного возмущения может быть учтено (со своим «весом») в детерминированном векторе управляющего входного воздействия. Несколько сложнее дело обстоит в случае, когда возмущающие функции являются случайными процессами, отличающимися от белого шума. Однако и эта ситуация является разрешимой. Использование априори известной модели процесса в виде дифференциальных уравнений состояния динамической системы и уравнения наблюдений (уравнения обратной связи) позволяет для формирования требуемого входного сигнала применить в отличие от задачи Колмогорова—Винера) фиктивную линейную динамическую систему, называемую **формирующим фильтром** (рис. 7.3). Действительно, если возникает необходимость воспользоваться моделью системы

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}(t), \quad (7.59)$$

где $\mathbf{W}(t)$ — коррелированный во времени шум (иногда, в отличие от «белого» его называют «цветным» или «окрашенным»), то для приведения (7.59) к виду (3.69), (3.70) при $\eta(t)$ случайном процессе типа белого шума надо, чтобы формирующий фильтр отвечал уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) = \mathbf{K}_w(t) \mathbf{W}(t) + \eta_1(t), \quad (7.60)$$

где $K_w(t)$ — матрица коэффициентов усиления формирующего фильтра; $\eta_1(t)$ — возбуждающий (порождающий) белый шум. Объединение векторов x и $w(t)$ в вектор $x_p(t) = [x(t); w(t)]^T$ приведет к получению **расширенного вектора состояния** [23], для которого будет справедливо уравнение, содержащее в качестве входного случайного воздействия белый шум. Математический аналог функциональной схемы системы, изображенной на рис. 7.3, приведен на рис. 7.4.

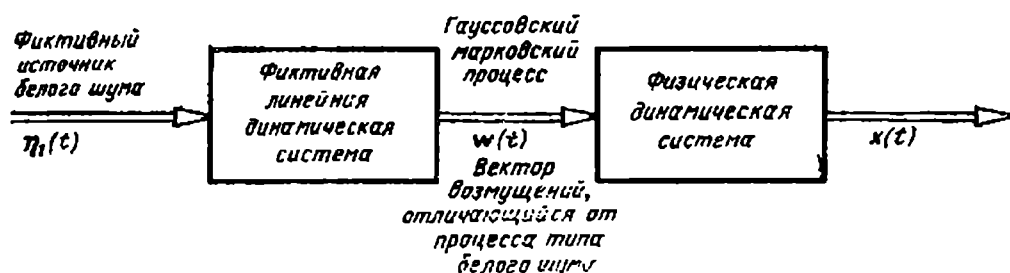


Рис. 7.3. Схема преобразования белого шума в коррелированный по времени (окрашенный) шум с помощью формирующего фильтра

Наиболее строго алгоритм Калмана—Бьюси может быть получен [32] на основе уравнения Винера—Хопфа, что свидетельствует о единых основах двух рассматриваемых схем оптимальной фильтрации. С целью упрощения выкладок, предварительно положим, что $u(t) = 0$. Тогда случайный действительный векторный r -мерный процесс $x(t)$, порождаемый случайным возмущением, аппроксимируемый

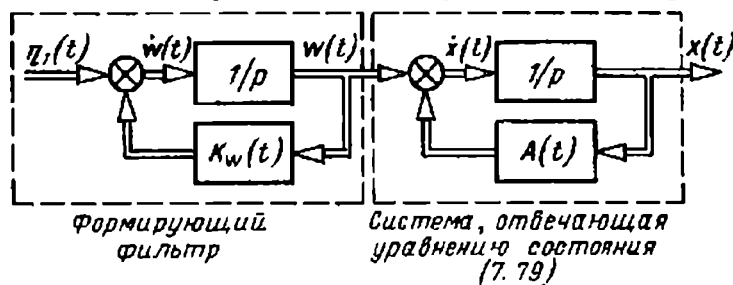


Рис. 7.4. Математический аналог схемы, изображенной на рис. 7.3 ($C(t) = E$)

векторным белым шумом $\eta(t)$, будет являться решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t) x(t) + \eta(t); \quad x(t_0) = x_0. \quad (7.61)$$

Пусть

$$M[x_0] = 0; \quad M[\eta(t)] = 0, \quad \text{а} \quad M[\eta(t)\eta^T(\tau)] = G(t)\delta(t - \tau), \quad (7.62)$$

где $G(t)$ — симметричная положительно определенная матрица интенсивности вектора $\eta(t)$.

Гауссов векторный белый шум измерений в (7.58) охарактеризуем, как

$$M[n(t)] = 0; \quad M[n(t)n^T(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau), \quad (7.63)$$

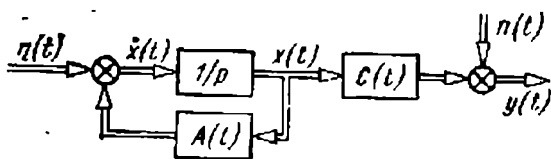


Рис. 7.5. Схема формирующего фильтра для модели типа (7.18), (7.78)

(7.58). Так как начальное состояние системы $x(t_0)$ не зависит от возмущений и помех, действующих в моменты времени $t > t_0$, запишем

$$M[x(t_0) \eta^T(t)] = 0; \quad M[x(t_0) n^T(t)] = 0. \quad (7.64)$$

Воспользуемся уравнением Винера—Хопфа, представив его с учетом принятых обозначений, как

$$\int_{t-T}^t H(t, \tau_2) M[y^T(\tau_2) y(\tau_1)] d\tau_2 - M[x(t) y^T(\tau_2)] = 0, \quad (7.65)$$

$$(t - T \leq \tau_2 \leq t).$$

Имея в виду (7.61), после дифференцирования (7.65) при изменении порядка выполнения операций взятия частной производной и определения математического ожидания найдем:

$$\int_{t-T}^t \frac{\partial H(t, \tau_2)}{\partial t} M[y^T(\tau_2) y(\tau_1)] d\tau_2 + H(t, t) [y(t) y^T(\tau_2)] -$$

$$- A(t) M[x(t) y^T(\tau_2)] - M[\eta(t) y^T(\tau_2)] = 0. \quad (7.66)$$

Так как $\eta(t)$ не коррелировано с $n(t)$ и $x(t)$ для всех $t > \tau_2$, а $x(t)$ не коррелирован с $n(t)$ для всех $t, \tau_2 > t_0 = t - T$, то в силу взаимосвязи, определяемой зависимостью (7.40), $\eta(t)$ не коррелирован и с $y(t)$ и, следовательно,

$$M[\eta(t) y^T(\tau_2)] = 0. \quad (7.67)$$

Теперь рассмотрим выражение $M[y(t) y^T(\tau_2)]$. Учитывая (7.40), запишем

$$M[y(t) y^T(\tau_2)] = M[(C(t)x(t) + n(t)) y^T(\tau_2)] =$$

$$= C(t) M[x(t) y^T(\tau_2)] + M[n(t) y^T(\tau_2)]. \quad (7.68)$$

Но $M[n(t) y^T(\tau_2)] = M[n(t) x^T(\tau_2)] C^T(t) + M[n(t) n^T(\tau_2)] = 0$ в силу некоррелированности векторов $x(t)$ и $n(t)$ и с учетом того, что $n(t)$ является белым шумом, для которого взаимосвязь между значениями n , отвечающими различным временным сечениям (t и τ_2), отсутствует.

Таким образом,

$$M[y(t) y^T(\tau_2)] = C(t) M[x(t) y^T(\tau_2)]. \quad (7.69)$$

где $Q(t)$ — симметричная матрица интенсивности шумов измерений. Нетрудно заметить, что в рамках рассматриваемых предположений структуру формирующего фильтра (рис. 7.5) будут определять непосредственно уравнения (7.61) и

Возвращаясь к (7.66), запишем

$$\int_{t-T}^t \frac{\partial H(t, \tau_2)}{\partial t} M[y^T(\tau_2) y(\tau_1)] d\tau_2 + H(t, t) C(t) M[x(t) y^T(\tau_2)] - \\ - A(t) M[x(t) y^T(\tau_2)] = \int_{t-T}^t \frac{\partial H(t, \tau_2)}{\partial t} M[y^T(\tau_2) y(\tau_1)] d\tau_2 + \\ + M[x(t) y^T(\tau_2)] [H(t, t) C(t) - A(t)] = 0. \quad (7.70)$$

Из (7.54), которое при введенных обозначениях преобразуется к виду

$$\hat{x}(t) = \int_{t-T}^t H(t, \tau_2) y(\tau_2) d\tau_2, \quad (7.71)$$

следует, что

$$M[x(t) y^T(\tau_2)] = \int_{t-T}^t H(t, \tau_2) M[y^T(\tau_2) y(\tau_1)] d\tau_2. \quad (7.72)$$

В результате подстановки (7.72) в (7.70) найдем

$$\int_{t-T}^t \left\{ -A(t) H(t, \tau_2) + \frac{\partial H(t, \tau_2)}{\partial t} + H(t, t) C(t) H(t, \tau_2) \right\} \times \\ \times M[y^T(\tau_2) y(\tau_1)] d\tau_2 = 0. \quad (7.73)$$

Поскольку $M[y^T(\tau_2) y(\tau_1)]$ является произвольной величиной, она должна быть отлична от нуля. Таким образом, для выполнения равенства (7.73) необходимо, чтобы нулю равнялось выражение в фигурных скобках

$$A(t) H(t, \tau_2) - \frac{\partial H(t, \tau_2)}{\partial t} - H(t, t) C(t) H(t, \tau_2) = 0. \quad (7.74)$$

Продифференцировав (7.71), получим, что

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \int_{t-T}^t \frac{\partial H(t, \tau_2)}{\partial t} y(\tau_2) d\tau_2 + H(t, t) y(t). \quad (7.75)$$

Теперь подставив выражение $\frac{\partial H(t, \tau_2)}{\partial t}$ из (7.75) в (7.74) и введя обозначение $H(t, t) = K(t)$, найдем

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \int_{t-T}^t [A(t) H(t, \tau_2) y(\tau_2) - K(t) C(t) H(t, \tau_2) y(\tau_2)] d\tau_2 + \\ + K(t) y(t) = K(t) y(t) + [A(t) - K(t) C(t)] \int_{t-T}^t H(t, \tau_2) y(\tau_2) d\tau_2. \quad (7.76)$$

Вспомним теперь, что $\int_{t-T}^t \mathbf{H}(t, \tau_2) \mathbf{y}(\tau_2) d\tau_2 = \hat{\mathbf{x}}(t)$, поэтому окончательно имеем

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t) \hat{\mathbf{x}}(t)]; \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = 0. \quad (7.77)$$

Полученное уравнение представляет собой векторно-матричное дифференциальное уравнение оптимального оценивания вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ или уравнение оптимального линейного динамического фильтра (фильтра Калмана—Бьюси).

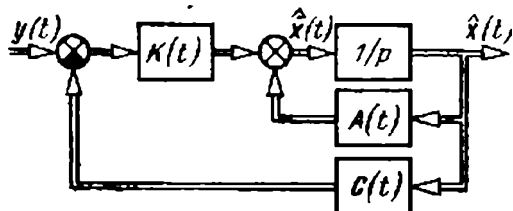


Рис. 7.6. Схема оптимального непрерывного многомерного фильтра Калмана—Бьюси

Имея в виду структуру уравнения (7.77), оптимальный фильтр является системой с отрицательной обратной связью, обусловленной сомножителем, стоящим при матрице коэффициентов усиления $\mathbf{K}(t)$ (рис. 7.6). Указанная матрица пока что не определена.

Для ее нахождения вновь воспользуемся уравнением Винера—Хопфа, записав его в функции ошибки оценки

$$\Delta_{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t). \quad (7.78)$$

Имея в виду (7.78), запишем

$$\int_{t-T}^t \mathbf{H}(t, \tau_2) \mathbf{M} [\mathbf{y}^T(\tau_2) \mathbf{y}(\tau_1)] d\tau_2 - \mathbf{M} [\hat{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] + \mathbf{M} [\Delta_{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] = 0. \quad (7.79)$$

С учетом (7.71) получим, что

$$\mathbf{M} [\hat{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] - \mathbf{M} [\hat{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] + \mathbf{M} [\Delta_{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] = 0. \quad (7.80)$$

Тогда $\mathbf{M} [\Delta_{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] = 0$, но

$$\begin{aligned} \mathbf{M} [\Delta_{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] &= \mathbf{M} [\hat{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] - \mathbf{M} [\mathbf{x}(t) \mathbf{y}^T(\tau_2)] = \\ &= \int_{t-T}^t \mathbf{H}(t, \tau_1) \mathbf{M} [\mathbf{x}_*(\tau_1) \mathbf{x}_*^T(\tau_2)] d\tau_1 + \mathbf{H}(t, \tau_2) \mathbf{Q}(\tau_2) - \mathbf{M} [\mathbf{x}(t) \mathbf{x}_*^T(\tau_2)] = 0. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Здесь $\mathbf{x}_*(t)$ обозначено произведение $\mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t)$. Перейдем в выражении (7.81) к пределу при $\tau \rightarrow t$. Данный предельный переход правомерен, поскольку все члены рассматриваемого соотношения непрерывны по τ_2 при любом t . Сделав соответствующие преобразования и

имея в виду зависимости (7.58) и (7.71), а также принятое ранее обозначение $K(t) = H(t, t)$, найдем

$$K(t)Q(t) = M[x(t)x^T(t)] - \int_{t-T}^t H(t, \tau_1) M[y(\tau_1)x^T(t)] d\tau_1 + \\ + \int_{t-T}^t H(t, \tau_1) M[n(\tau_1)x^T(t)] d\tau_1. \quad (7.82)$$

В силу некоррелированности $n(\tau_1)$ и $x(t)$ последнее слагаемое в (7.82) равно нулю, а предпоследнее, учитывая (7.71), есть не что иное, как $M[\hat{x}(t)x^T(t)]$, и тогда

$$K(t)Q(t) = M[x(t)x^T(t)] - M[\hat{x}(t)x^T(t)], \quad (7.83)$$

что эквивалентно, имеется в виду выражение ошибки оценки $\Delta_x(t)$, равенству

$$K(t)Q(t) = -M[\Delta_x(t)x^T(t)]C^T(t). \quad (7.84)$$

Подставляя в (7.84) $x(t) = \hat{x}^T(t) - \Delta_x^T(t)$, найдем

$$K(t)Q(t) = -M[\Delta_x(t)\hat{x}^T(t)]C^T(t) + M[\Delta_x(t)\Delta_x^T(t)]C^T(t). \quad (7.85)$$

Первое слагаемое в правой части (7.85) равно нулю, поскольку $M[\Delta_x(t)y^T(\tau_2)] = 0$, а $y(t)$ связано с $x(t)$ линейной зависимостью (7.58). Следовательно,

$$K(t)Q(t) = M[\Delta_x(t)\Delta_x^T(t)]C^T(t) = R(t)C^T(t), \quad (7.86)$$

где $R(t) = M[\Delta_x(t)\Delta_x^T(t)]$ представляет собой ковариационную матрицу ошибок оценки; $Q(t)$ — матрица положительно определенная и поэтому невырожденная. Невырожденность $Q(t)$ дает основание считать, что обратная матрица $Q^{-1}(t)$ существует, и тогда

$$K(t) = R(t)C^T(t)Q^{-1}(t). \quad (7.87)$$

Таким образом, матрица коэффициентов усиления ФК найдена. Однако неясен пока алгоритм вычислений ковариационной матрицы $R(t)$. Для его получения составим дифференциальное уравнение, основываясь на соотношении (7.77) при учете (7.58) и (7.61). Запишем

$$\frac{d}{dt}\Delta_x(t) = A(t)\Delta_x(t) - K(t)[C(t)\Delta_x(t) - n(t)] + \eta(t); \quad \Delta_x(t_0) = -x_0. \quad (7.88)$$

Теперь возьмем производную от матрицы $R(t)$ по t , имея в виду ее выражение, приведенное ранее:

$$\dot{R}(t) = M[\dot{\Delta}_x(t)\Delta_x^T(t)] + M[\Delta_x(t)\dot{\Delta}_x^T(t)]. \quad (7.89)$$

Заменяя $\dot{\Delta}_x(t)$ и $\dot{\Delta}_x^T(t)$ их выражениями, найдем

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t) - K(t)C(t)R(t) - K(t)M[n(t)\Delta_x^T(t)] + \\ + M[\eta(t)\Delta_x^T(t)] - R(t)A^T(t) - R(t)C^T(t)K^T(t) - \\ - M[\Delta_x(t)n^T(t)]K(t) + M[\Delta_x(t)\eta^T(t)]. \quad (7.90)$$

Можно показать [32], что

$$\begin{aligned} M[\Delta_x(t) p^T(t)] &= -0,5K(t)Q(t); & M[\Delta_x(t) \eta^T(t)] &= 0,5G(t); \\ M[p(t) \Delta_x^T(t)] &= -0,5Q(t)K^T(t); & M[\eta(t) \Delta_x^T(t)] &= 0,5G(t). \end{aligned} \quad (7.91)$$

После подстановки будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]R(t) + R(t)[A(t) - K(t)C(t)]^T + \\ &+ K(t)Q(t)R^T(t) + G(t). \end{aligned} \quad (7.92)$$

Ранее было получено, что $K(t) = R(t)C^T(t)Q^{-1}(t)$, поэтому окончательно

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= A(t)R(t) + R(t)A^T(t) - R(t)C^T(t)Q^{-1}(t)C(t)R(t) + G(t); \\ R(t_0) &= R_0, \end{aligned} \quad (7.93)$$

где R_0 — априори известная ковариационная матрица вектора состояния $x(t)$, соответствующая начальному моменту времени $t = t_0$. Уравнение (7.93) совпадает по форме с уравнением (3.47) и также представляет собой нелинейное дифференциальное матричное уравнение Риккати. Решение (7.93) является единственным при всех $t = t_0$, если R_0 — неотрицательно определенная матрица. В частном случае стационарной устойчивой системы и значениях возмущений и шумов, аппроксимируемых белыми шумами, при $t_0 = -\infty$ уравнение (7.93) имеет предельное установившееся решение, определяемое из алгебраического матричного уравнения Риккати. Последнее получается из (7.93) путем приравнивания $\dot{R} = 0$:

$$AR^* + R^*A^T - R^*C^TQ^{-1}CR^* + G = 0. \quad (7.94)$$

Каждое решение стационарного уравнения Риккати при отличных от нуля значениях R_0 и при $t_0 = -\infty$ будет равномерно стремиться к R^* . Оптимальный фильтр в этом случае описывается согласно зависимостям (7.77) и (7.87) стационарным уравнением

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = [A - R^*C^TQ^{-1}C] \hat{x}(t) + R^*C^TQ^{-1}y(t). \quad (7.95)$$

Это уравнение определяет асимптотически устойчивый фильтр, совпадающий по свойствам со стационарным ВФ.

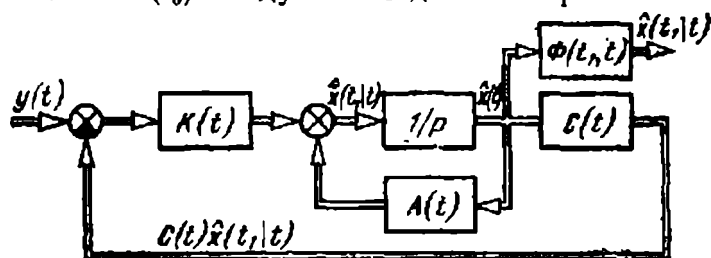
Полученные соотношения были найдены в предположении, что полезный сигнал, характеризующий значение вектора состояния $x(t)$, порождается только белым шумом и входное воздействие не содержит детерминированной составляющей в виде вектора управления $u(t)$ с матрицей управления $B(t)$. Данное обстоятельство не снижает общности рассуждений и выводов. Если случайный процесс $x(t)$ описывается уравнениями (3.69) и (3.70), в которых $\eta(t)$ — случайное возмущение, аппроксимируемое белым шумом, а $u(t)$ — детерминированная функция времени, уравнение оптимального фильтра (7.77) должно быть скорректировано [72] введением в его пра-

вую часть слагаемого $\mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)$. В результате уравнение (7.77) примет вид

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t) \hat{\mathbf{x}}(t)] + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t). \quad (7.96)$$

Уравнения (7.93) и (7.87) при этом останутся без изменения. Для того чтобы полностью завершить описание алгоритма непрерывной калмановской фильтрации, необходимо сделать несколько замечаний по заданию начальных условий для интегрирования (7.77) или (7.96). Начальное условие при (7.77) было записано в виде $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = 0$, что может вызвать недоумение. Отметим, что в общем случае при выборе значения $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ следует исходить из требования

Рис. 7.7. Схема непрерывного фильтра Калмана с прогнозатором



несмещенности оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ относительно полезного сигнала. Данное условие эквивалентно выполнению равенства $M[\hat{\mathbf{x}}(t)] = M[\mathbf{x}(t)]$. Нетрудно показать, что это равенство будет иметь место в случае, если $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = M[\mathbf{x}_0]$, что даст $M[\Delta_{\mathbf{x}}(t)] = 0$. Таким образом, если не оговорено нулевое значение математического ожидания вектора $\mathbf{x}(t_0)$, что было сделано нами при выводе (7.77), в качестве $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ должно быть принято $M[\mathbf{x}_0] \neq 0$.

Использование в совокупности с алгоритмом фильтра Калмана переходной матрицы фазовых состояний (3.67), либо матрицы влияния, определяемой соотношениями (3.84), (3.85), позволяет решить задачу упреждения (прогнозирования) оцениваемого фазового состояния. Она сводится к нахождению оценки $\hat{\mathbf{x}}(t_1|t)$ в некоторый момент времени t_1 по данным наблюдений на интервале (t_0, t) , причем $t_1 > t$. Соответствующая расчетная зависимость будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{x}}(t_1|t) = \Phi(t_1, t) \hat{\mathbf{x}}(t|t). \quad (7.97)$$

Матричная структурная схема непрерывного фильтра Калмана с прогнозатором показана на рис. 7.7.

При решении навигационных задач, как правило, приходится иметь дело с достаточно высокой размерностью вектора состояния $\mathbf{x}(t)$. Реализация соответствующего фильтра в виде непрерывной (аналоговой) системы при этом оказывается весьма сложной, ко всему тому, в этом случае не удастся обеспечить и требуемой точности решения задачи (из-за погрешностей работы элементов аналоговой вычислительной техники). В связи с этим весьма важным становится

переход от алгоритма непрерывной оптимальной фильтрации к дискретному алгоритму, имеющему вид **рекуррентных соотношений**, весьма удобных с точки зрения их использования в БЦВМ.

Многошаговые алгоритмы оптимальной фильтрации предполагают использование дискретной формы представления моделей. Возможность соответствующего перехода неразрывно связана с вопросом эквивалентности дискретного представления непрерывных систем. Если для детерминированных систем достаточным условием эквивалентности является совпадение реакций систем на аналогичные воздействия, т. е. эквивалентность во временной области, то для стохастических дискретных систем, впрочем так же как и непрерывных систем, эквивалентность должна рассматриваться как во временном, так и в статистическом отношениях. Рассмотрим данное требование подробнее. В общем случае детерминированная r -мерная система с дискретным временем, отвечающая непрерывной модели типа (3.8), описывается разностным уравнением

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k], \quad t \in T, \quad (7.98)$$

где k — номер такта, принимающего целочисленное значение $0, 1, 2, \dots, N$.

Очевидно, что движение такой системы в будущем однозначно определяется значением $\mathbf{x}$ в момент времени t , отвечающий k -му такту и не зависит от предыстории $\mathbf{x}(k-1)$. Если реакция детерминированной дискретной (7.98) и непрерывной (3.8) систем на одно и то же воздействие окажется идентичной, то преобразование можно считать эквивалентным. Теперь выясним, каким образом модель (7.98) может быть представлена как стохастическая модель состояния. Для этого предположим, что $\mathbf{x}(k+1)$ не определяется однозначно $\mathbf{x}(k)$, а является случайной величиной, зависящей от $\mathbf{x}(k)$ и k . Тогда можем записать

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k] + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}(k), k). \quad (7.99)$$

В данном соотношении первое слагаемое будет представлять собой условное среднее от $\mathbf{x}(k+1)$ при заданном $\mathbf{x}(k)$, а второе — случайную величину (возмущение) с нулевым математическим ожиданием. При этом необходимо потребовать, чтобы процесс (7.99) являлся бы марковским. В противном случае в вероятностном смысле процесс $\mathbf{x}(k+1)$ будет зависеть не только от $\mathbf{x}(k)$, но и от предшествующих его значений, т. е. от $\mathbf{x}(k-1)$, $\mathbf{x}(k-2)$ и т. д. Если дополнительно предположить, что $\boldsymbol{\eta}(k)$ при заданном $\mathbf{x}(k)$ подчиняется нормальному закону распределения, то случайная величина $\boldsymbol{\eta}(k)$ всегда может быть нормирована таким образом, что

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{x}, k) = \sigma_i(\mathbf{x}, k) \boldsymbol{\omega}_i(k), \quad (7.100)$$

где $\sigma_i^2(\mathbf{x}, k)$ — дисперсии i -х компонент вектора $\mathbf{x}(k)$; $\boldsymbol{\omega}_i(k)$ — последовательности i -х компонент независимых одинаково распределенных гауссовых случайных векторов с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_{\omega}$. В линейной постановке,

т. е. при линейной зависимости $F(x(k), k)$ от x и независимости σ_i от x стохастическое разностное уравнение (7.99) принимает вид

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k)w(k). \quad (7.101)$$

Уравнение (7.99) в рассматриваемом случае может быть записано как

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \eta(k). \quad (7.102)$$

Здесь уже $\eta(k)$ будет представлять собой последовательность некоррелированных с $x(0)$ независимых гауссовых векторов с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами $G = R_{\eta} = \Gamma(k)R_w\Gamma^T(k)$.

Имея в виду изложенное, разобьем отрезок времени (t_0, t) на N интервалов дискретности, так, что

$$NT = t - t_0. \quad (7.103)$$

полагая

$$x(t)|_{t=t_0+kT} \approx x(k) \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, N. \quad (7.104)$$

Тогда аппроксимация линейного непрерывного уравнения (7.61) линейным дискретным аналогом даст

$$x(t+T) = [E + A(t)T]x(t) + \eta(t)T. \quad (7.105)$$

Сопоставление (7.102) и (7.105) приводит к мысли, что

$$\Phi(k+1, k) = \Phi^k(T) = [E + A(t)T]_{t=t_0+kT}. \quad (7.106)$$

Обычно элементы матрицы $A(t)$ в (7.106) на интервале дискретности считаются постоянными и тогда $[E + A(t)T]_{t=t_0+kT}$ представляют собой линейно усеченную матричную экспоненту [23].

$$\Phi(T) = e^{AT} = E + AT + A^2 \frac{T^2}{2!} + \dots + A^n \frac{T^n}{n!}. \quad (7.107)$$

Таким образом, по своему физическому смыслу $\Phi(k+1, k)$ является дискретным аналогом переходной матрицы фазовых состояний. При допущении о стационарности матрицы A в пределах интервала дискретности матрица $\Phi(T)$ также будет постоянной, поэтому

$$\Phi(kT, 0) = \Phi(T)\Phi[(k-1)T, 0]. \quad (7.108)$$

Теперь надо решить вопрос, что же следует понимать под матрицей ковариаций процесса η_k при аппроксимации непрерывного процесса белого шума $\eta(t)$, для которого $M[\eta(t)\eta^T(\tau)] = G(t)\delta(t-\tau)$, **дискретным белым шумом**. Отметим, что если непрерывный белый шум имеет физический аналог, то дискретный белый шум с матрицей ковариаций

$$M[\eta_i\eta_j^T] = G_i\delta_{ij} \quad (7.109)$$

является математической абстракцией. В (7.109) через δ_{ij} обозначена функция (символ) Кронера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что G , будет зависеть от величины T , а ее выбор будет определяться исходя из стремления иметь

$$R(t)|_{t-t_0=kt} \approx R(k), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (7.110)$$

Дискретная аппроксимация уравнения (7.93), соответствующего случаю отсутствия шумов измерений, приводит к

$$R(t+T) - R(t) = A(t) R(t) T + R(t) A^T(t) T + G(t) T. \quad (7.111)$$

Но, с другой стороны,

$$R(k+1) = \Phi(k+1, k) R(k) \Phi^T(k+1, k) + G(k). \quad (7.112)$$

Подставляя (7.106) и (7.110) в (7.112), найдем

$$R(t+T) - R(t) = A(t) R(t) T + R(t) A^T(t) T + \\ + A(t) R(t) A^T(t) T^2 + [G(t) T] T. \quad (7.113)$$

Для того чтобы (7.113) соответствовало бы (7.111) с точностью до членов первого порядка по T , необходимо, чтобы

$$G(t)|_{t-t_0=kt} = G(k) T, \quad (7.114)$$

или обратно

$$G(t) = \lim_{T \rightarrow 0} [G(k) T]. \quad (7.115)$$

Теперь можно попытаться сформулировать классическую постановку задачи оптимальной динамической фильтрации в дискретной форме. Она сводится к следующему: имея последовательность векторов измерений $y_0, y_1, y_2, \dots$, принадлежащих множеству Y и отвечающих модели измерения

$$y(k) = C(k) x(k) + n(k), \quad (7.116)$$

определить оценку состояния системы на момент k , представляющую собой условное математическое ожидание $\hat{x}(k | k-1) = M[x(k) | Y_{k-1}]$, обеспечивающую минимальную дисперсию ошибки оценки.

Нетрудно показать [23], что алгоритм непрерывного фильтра Калмана, приведенный ранее, может быть также получен путем формального предельного перехода из уравнений дискретного фильтра (при устремлении T к нулю). Данное обстоятельство дает основание полагать, что структуры непрерывного и дискретного фильтров Калмана в принципе должны совпадать. Поэтому есть смысл искать оптимальную оценку $\hat{x}(k | k-1) = \hat{x}(k)$ в форме, соответствующей (7.96), но учитывающей отличия в модели процесса:

$$\hat{x}(k) = \Phi(k, k-1) \hat{x}(k-1) + K(k) [y(k) - C(k) \hat{x}(k)] \quad (7.117)$$

при начальном условии

$$\hat{x}(0 | 0) = \hat{x}(0) = \tilde{x}(0). \quad (7.118)$$

Матрицы $K(k)$ в уравнении (7.117) представляет собой $(r \times p)$ -матрицу коэффициентов усиления дискретного фильтра на k -м

интервале дискретности. Характер зависимости (7.117), определяющий рекуррентную форму выработки оценки $\hat{\mathbf{x}}(k)$, свидетельствует о необходимости использования для ее нахождения значения предыдущей оценки $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$. Так как $\mathbf{x}(k-1)$ и, следовательно, $\mathbf{y}(k-1)$ зависит от $\boldsymbol{\eta}(j-1)$ только для $j-1 < k-1$, то пространство наблюдений $\mathbf{Y}(k-1)$ не содержит информации о дискретном белом шуме $\boldsymbol{\eta}(k-1)$. Поэтому для предсказания значения $\mathbf{x}(k)$ по наблюдениям $\mathbf{y}(k-1)$ достаточно предсказать значения $\mathbf{x}(k-1)$ на один шаг вперед, полагая $\hat{\boldsymbol{\eta}}(k-1) = 0$, т. е.

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \Phi(k, k-1) \hat{\mathbf{x}}(k-1). \quad (7.119)$$

Выражение матричного коэффициента усиления в рассматриваемом случае записывается в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) &= \Phi(k, k+1) \mathbf{K}(k+1, k) = \\ &= \Phi(k, k+1) \Phi(k+1, k) \mathbf{R}(k|k-1) \mathbf{C}^T(k) \times \\ &\quad \times [\mathbf{C}(k) \mathbf{R}(k|k-1) \mathbf{C}^T(k) + \mathbf{Q}(k)]^{-1}. \end{aligned}$$

Или, учитывая, что $\Phi(k, k+1) = \Phi^{-1}(k+1, k)$, получим окончательно

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{R}(k|k-1) \mathbf{C}^T(k) [\mathbf{C}(k) \mathbf{R}(k|k-1) \mathbf{C}^T(k) + \mathbf{Q}(k)]^{-1}. \quad (7.120)$$

Уравнение для определения дискретной ковариационной матрицы ошибок оценки вектора состояния системы будет при этом иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(k+1|k) &= \Phi(k+1, k) \mathbf{R}(k|k-1) \Phi^T(k+1, k) + \\ &\quad + \mathbf{G}(k) - \Phi(k+1, k) \mathbf{R}(k|k-1) \mathbf{C}^T(k) \times \\ &\quad \times [\mathbf{C}(k) \mathbf{R}(k|k-1) \mathbf{C}^T(k) + \mathbf{Q}(k)]^{-1} \mathbf{C}(k) \mathbf{R}(k|k-1) \Phi^T(k+1, k). \end{aligned}$$

Учитывая (7.120), его можно представить также в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(k+1|k) &= [\Phi(k+1, k) - \mathbf{K}(k+1) \mathbf{C}(k)] \times \\ &\quad \times \mathbf{R}(k|k-1) \Phi^T(k+1, k) + \mathbf{G}(k). \end{aligned} \quad (7.121)$$

Матрица $\mathbf{R}(k+1|k)$ носит название **априорной ковариационной матрицы ошибок оценивания** в отличие от $\mathbf{R}(k)$ — апостериорной матрицы, поскольку $\mathbf{R}(k+1|k)$ характеризует числовые характеристики ошибок оценивания составляющих вектора состояния до момента проведения измерений. Выражение (7.121) удобно записать в функции апостериорной матрицы

$$\mathbf{R}(k) = [\mathbf{E} - \mathbf{K}(k) \mathbf{C}(k)] \mathbf{R}(k|k-1). \quad (7.122)$$

С учетом (7.122) уравнение (7.121) может быть преобразовано [72] к виду

$$\mathbf{R}(k+1|k) = \Phi(k+1, k) \mathbf{R}(k) \Phi^T(k+1, k) + \mathbf{G}(k). \quad (7.123)$$

Отметим, что эволюция матрицы ковариаций ошибки оценивания (7.123) и (7.122) не зависит от наблюдений. Поэтому, если заданы параметры динамической системы, включая процесс наблюдений,

матрицу ковариаций, а следовательно, и $K(k)$ можно вычислить заранее и записать их в память БЦВМ. Это позволит существенно сократить время решения задачи фильтрации. Анализ структурной схемы дискретного оптимального фильтра (рис. 7.8) свидетельствует, что в нем реализуется идея «предсказания—коррекции». Предыдущая оценка $\hat{x}(k-1)$ экстраполируется (предсказывается) на один шаг вперед и затем используется для получения наилучшей оценки нового наблюдения $y(k)$, основанной на всех предыдущих наблюдениях. Ошибка взвешивается с весом $K(k)$, учитывающим значение ковариаций входного процесса, измерения и ошибки оценивания

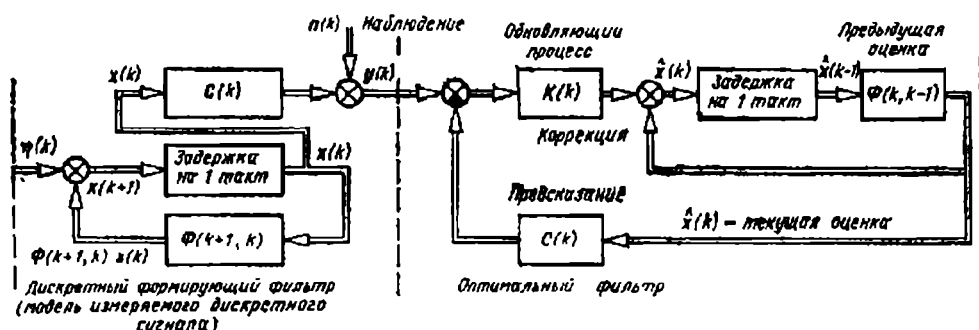


Рис. 7.8. Схема дискретного оптимального фильтра

для формирования сигнала коррекции. Сигнал коррекции складывается с предсказанной оценкой и в результате получается новая оценка.

Практическая реализация алгоритма дискретной оптимальной фильтрации в цифровых вычислительных машинах в ряде случаев сопровождается явлением, называемым **расходимостью (неустойчивостью) процесса фильтрации**. Под расходимостью дискретного фильтра в узком смысле понимается, главным образом, накопление ошибок округления малых чисел, характеризующих элементы ковариационной матрицы, вследствие ограниченности длины разрядной сетки машины и рекуррентной процедуры вычислений. Следствием накопления отмеченных ошибок является потеря матрицей ковариаций ее основного свойства — симметричности, а из-за увеличения разности соответствующих элементов возникает и потеря неотрицательной определенности, связанной с появлением отрицательных значений дисперсий. В связи с этим одной из проблем, требующих разрешения при воспроизведении алгоритмов оптимальной последовательной фильтрации в БЦВМ, является ограничение ошибок округления. Для этих целей могут быть использованы как конструктивные решения типа увеличения длины разрядной сетки БЦВМ, так и программно-математические методы. Конечно, причиной неустойчивости (расходимости в широком смысле) ФК служат не только ошибки округления. Широкое привлечение априорной информации при решении задачи фильтрации предполагает, что эта информация, по крайней мере, соответствует реальному физическому процессу. Отсутствие данных о реальной физической задаче,

всякого рода упрощающие предположения при математическом описании процесса, ошибки, связанные с моделированием вероятностных характеристик шумов и возмущений могут вызвать серьезные возражения и по поводу целесообразности применения ФК. Однако все это имеет отношение скорее к общим недостаткам подхода, а не к частностям его реализации. Тем не менее, об одной из перечисленных причин «глобального» характера, тесно связанной с вопросами практической реализации фильтра, стоит сказать несколько слов отдельно. Речь идет о расходимости, обусловленной неточным заданием модели наблюдения (измерения). Дело заключается в том, что исходя из теоретических принципов построения фильтра элементы матрицы коэффициентов усиления очень быстро стремятся к нулю при увеличении времени, особенно, когда шум входных возмущений мал по сравнению с шумами измерений. В результате оценка вектора состояния со временем оказывается все менее зависимой от последовательности проводимых измерений и растущая ошибка наблюдений, обусловленная неадекватностью модели и реального процесса измерений на нее не влияет. Средством борьбы с этим нежелательным явлением, называемым иногда **насыщением информацией**, является введение ограничения снизу значений матрицы коэффициентов усиления фильтра для исключения возникновения «нечувствительности» фильтра к поступающим измерениям.

Теперь подведем некоторые итоги нашего обсуждения метода динамической фильтрации. К числу несомненных достоинств его следует отнести возможность решения задачи фильтрации применительно к многомерным нестационарным системам как при конечном, так и при «бесконечном» времени наблюдения, а также хорошую приспособленность к реализации на ЦВМ. Основной недостаток связан с необходимостью обладания полными априорными сведениями о структуре формирующего фильтра, т. е. использовании заранее известных данных о статистических свойствах входного сигнала и действующих помех. Если эти сведения малодостоверны, то применение фильтра Калмана либо теряет смысл (тогда отдается предпочтение фильтрам Винера), либо должно одновременно сопровождаться существенным усложнением алгоритма за счет реализации принципа адаптации.

7.2.5. Понятие о методах оценивания состояния нелинейных систем

Известно, что подавляющее большинство встречающихся на практике динамических систем и систем измерений являются **нелинейными**. Речь же до сих пор шла о линейных фильтрах, предполагающих наличие линейных моделей состояния динамической системы и линейных уравнений наблюдения. Естественно, возникает вопрос о степени практической применимости линейной теории, тем более, что советскими учеными разработана [56] строгая теория **оптимальной нелинейной фильтрации** как для случая непрерывных, так и для дискретных систем. Тем не менее, в настоящее время прак-

тическое применение находит все же исключительно линейная теория. С чем же это связано? Во-первых, с тем, что возможности даже самых современных ЭЦВМ существенно отстают от требований, отвечающих условию применения теории нелинейной фильтрации для решения прикладных задач навигации и управления ЛА. Во-вторых, уравнения линейных оптимальных фильтров могут быть эффективно использованы в целом ряде практически важных прикладных задач, если осуществить линеаризацию нелинейной модели процесса. При этом разложение функций в степенной ряд может осуществляться либо относительно номинальной траектории, вычисленной на основе априорных данных, либо относительно оценки, получаемой непосредственно в процессе фильтрации результатов измерений. В первом случае алгоритм фильтрации будет проще, так как уравнения для определения $\mathbf{R}$ решаются раздельно (аналогично канонической схеме) от уравнений получения оптимальной оценки $\hat{\mathbf{x}}$. Если же номинальная траектория неизвестна или отклонения от прогнозируемой номинальной траектории нельзя полагать малыми, приходится использовать второй подход. При разложении функций в ряд относительно оценки, системы уравнений для $\mathbf{R}$ и $\hat{\mathbf{x}}$ уже будут взаимосвязанными. При рассмотрении методов оценивания состояния нелинейных систем ограничимся случаем нелинейных непрерывных процессов. Нелинейной системой, соответствующей линейной модели (7.61), (7.58), является

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t); t] + \boldsymbol{\eta}(t); \quad (7.124)$$

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t); t) + \mathbf{n}(t) \quad (7.125)$$

при тех же обозначениях и предположениях в отношении априорных сведений и статистических характеристиках возмущений и шумов, что и принятые ранее.

Одним из возможных вариантов фильтра для нелинейной системы (7.124), (7.125) может служить очевидная модификация линейного фильтра из предыдущего раздела

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t); t) + \mathbf{R}(t) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{Q}^{-1}(t) [\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{x}}(t); t)]; \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) &= \hat{\mathbf{x}}_0; \end{aligned} \quad (7.126)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}(t) &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t) \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \mathbf{R}(t) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{Q}^{-1}(t) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{R}(t) + \mathbf{G}(t); \\ \mathbf{R}(t_0) &= \mathbf{R}_0. \end{aligned} \quad (7.127)$$

Здесь частные производные $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{x}$ и $\partial \boldsymbol{\psi} / \partial \mathbf{x}$ — матрицы, вычисляемые вдоль номинальной траектории.

Рассмотренный алгоритм нелинейной фильтрации, основанный на разложении нелинейных зависимостей в ряд Тейлора в окрестности номинальной траектории, имеет ряд существенных недостатков, основным из которых является то, что при больших дисперсиях шумов он может давать расходящиеся результаты вследствие эффекта

«подчеркивания» шума операциями дифференцирования. Кроме того, собственно применение процедуры разложения справедливо только для непрерывных нелинейных функций, что ограничивает применимость метода. От первого из указанных недостатков свободен подход, базирующийся на использовании метода статистической линеаризации. В рассматриваемом варианте метода будем осуществлять представление нелинейностей полиномами по степеням ошибки оценки (7.78), для которой $M[\Delta_x(t) \Delta_x^T(t)] = R(t)$, а выбор коэффициентов полиномов проводить из условия минимума среднего квадратичного отклонения ошибки аппроксимации, т. е. на основе использования второй формы задания критерия (см. разд. 7.1.2). Расчетные соотношения алгоритма получим для случая аппроксимации (приближения) второго порядка, учитывающего квадратичные члены разложения:

$$F(x; t) = a(t) + b(t) \Delta_x(t) + \frac{1}{2} c(t) \Delta_x(t) \Delta_x^T(t); \quad (7.128)$$

$$\psi(x; t) = d(t) + l(t) \Delta_x(t) + \frac{1}{2} m(t) \Delta_x(t) \Delta_x^T(t), \quad (7.129)$$

где коэффициенты при четных степенях $\Delta_x(t)$ — векторы, а при нечетных — матрицы размерности $r \times r$ (здесь r — размерность вектора $\Delta_x(t)$). Вид уравнений состояния нелинейной динамической системы и наблюдения остаются прежними (7.124), (7.125). Но в отличие от предыдущего варианта линеаризованного фильтра, коэффициенты полиномов здесь, следуя методу статистической линеаризации, должны представлять собой неслучайные функции, зависящие от статистических характеристик случайного процесса. Поэтому

$$a(t) = F(\hat{x}(t); t); \quad b(t) = \left. \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}}; \quad c(t) = \left. \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=\hat{x}};$$

$$d(t) = \psi(\hat{x}(t); t); \quad l(t) = \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}}; \quad m(t) = \left. \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=\hat{x}},$$

где для получения оценок могут быть использованы расчетные зависимости линеаризованного фильтра Калмана, приведенные ранее. По аналогии с методикой построения линейного фильтра Калмана искомый алгоритм будем строить [23] на основе использования априорной оценки вектора состояния $M[\hat{x}(t)]$ и поправочного члена $y(t) - C(t) \hat{x}(t)$, в котором $C(t) \hat{x}(t)$, по существу, представляет собой априорную оценку измерения $M[y(t)]$. Для нахождения их выражений необходимо определить соответствующие значения математических ожиданий, воспользовавшись уравнениями (7.124) и (7.125) с учетом (7.128) и (7.129). Предварительно определим значение математического ожидания некоторой функции $f[\xi(t), t]$. Для этого разложим ее в ряд Тейлора относительно среднего значе-

ния $M[\xi(t)] = m_\xi(t)$ процесса $\xi(t)$. При ограничении числа членов ряда слагаемыми второго порядка имеем

$$\begin{aligned} f[\xi(t), t] &\approx f[m_\xi(t), t] + \frac{\partial f[m_\xi(t), t]}{\partial m_\xi(t)} [\xi(t) - m_\xi(t)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r [\xi_i(t) - m_{\xi_i}(t)] [\xi_j(t) - m_{\xi_j}(t)] \frac{\partial^2 f[m_\xi(t), t]}{\partial m_{\xi_i}(t) \partial m_{\xi_j}(t)} = \\ &= f[m_\xi(t), t] + \frac{\partial f[m_\xi(t), t]}{\partial m_\xi(t)} [\xi(t) - m_\xi(t)] + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial^2 f[m_\xi(t), t]}{(\partial m_\xi(t))^2} R_\xi \right], \end{aligned} \quad (7.130)$$

где R_ξ — ковариационная матрица случайного процесса $\xi(t)$; Sp обозначает след матрицы. Имея это в виду, получим

$$M[\dot{x}(t)] = a(t) + \frac{1}{2} \text{Sp}[c(t) R(t)]; \quad (7.131)$$

$$M[y(t)] = d(t) + \frac{1}{2} \text{Sp}[m(t) R(t)]. \quad (7.132)$$

Равенство нулю $M[\eta(t)]$ и $M[n(t)]$ здесь вытекает из принятых ранее предположений (см. 7.62 и 7.63), но, вообще говоря, требование $M[\eta(t)] = 0$ не является сколь-нибудь принципиальным.

Учитывая (7.131) и (7.132), представим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= a(t) + \frac{1}{2} \text{Sp}[c(t) R(t)] + \\ &+ \Pi(t) \left\{ y(t) - d(t) - \frac{1}{2} \text{Sp}[m(t) R(t)] \right\}; \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \end{aligned} \quad (7.133)$$

где

$$\Pi(t) = R(t) l(t) Q^{-1}(t).$$

Уравнение для определения ковариационной матрицы примет вид

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= b(t) R(t) + R(t) b^T(t) - R(t) l(t) Q^{-1}(t) l^T(t) R(t) + G(t) + \\ &+ \frac{1}{2} R(t) m^T(t) Q^{-1}(t) \left\{ y(t) - d(t) - \frac{1}{2} \text{Sp}[m(t) R(t)] \right\} R(t); \quad R(t_0) = R_0. \end{aligned} \quad (7.134)$$

Заметим, что полученные зависимости по форме мало отличаются от соотношений линейного непрерывного фильтра Калмана. На первый взгляд различие усматривается, главным образом, в том, что в уравнение для вычисления $\dot{R}(t)$ входит дополнительный член, зависящий от текущего измерения. Однако здесь имеют место принципиальные различия. Еще раз обратим внимание на то, что в силу зависимости коэффициентов разложения от $\hat{x}(t)$ и $R(t)$ соответствующие уравнения при реализации данного алгоритма должны решаться совместно. Некоторые другие варианты построения линеаризованного ФК рассмотрены в работах [23, 32, 72].

7.3. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ В НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

7.3.1. Способы включения ФК в контур навигационной системы

Вопрос о включении оптимального фильтра в контур навигационной системы (НС) может показаться тривиальным, не требующим специального обсуждения. Действительно, следуя общей схеме процедуры оценивания (см. рис. 3.1), не составляет никакого труда составить и схему «информационного потока» при стохастическом управлении, определяющего место ФК в контуре (рис. 7.9). Как следует из рисунка ФК в общем случае включается

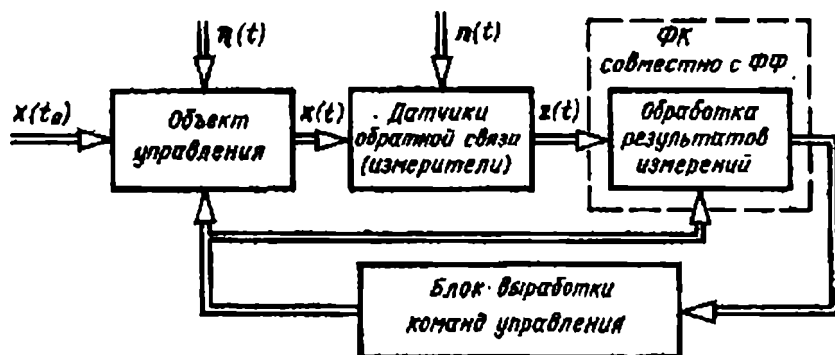


Рис. 7.9. Схема информационных потоков при стохастическом управлении (с учетом принципа эквивалентности)

в контур последовательно по отношению к измерительному устройству. Таким образом, приходим к схеме последовательного включения фильтра, характерной для некорректируемых НС.

Проиллюстрируем особенности работы схемы на простом примере стационарной системы первого порядка, допускающей возможность аналитического решения уравнения Риккати.

Рассмотрим схему получения оптимальной оценки угловой скорости линии визирования при наведении самонаводящейся ракеты на маневрирующую цель. Будем считать, что для получения измеренного значения угловой скорости линии визирования $\dot{q}$ используется дифференцирующий гироскоп (ДУС), связанный с осью чувствительного элемента развязанного следящего координатора. Математическим аналогом рассматриваемого процесса при этом может служить скалярное уравнение вида

$$\frac{d}{dt} \dot{q}(t) = a \dot{q}(t) + b \eta_n(t),$$

где $a = -2\dot{D}D^{-1}$; $b = D^{-1}$; η_n — отрабатываемое ракетой в процессе наведения нормальное по отношению к линии визирования ускорение цели; D — дальность до цели.

Для упрощения анализа введем допущение, что на интервале проведения непрерывного измерения, описываемого уравнением

$$y(t) = \dot{q}(t) + n(t),$$

коэффициент $a = -2\dot{D}D^{-1}$ изменяется незначительно. Это позволит принять $a = \text{const}$. Положим, что входное возмущающее воздействие представляет собой случайный процесс типа белого шума с $M[\eta(t)] = 0$ и $M[\eta(t)\eta(\tau)] = g_\eta \delta(t - \tau)$. Причем $g_\eta = b^2 \sigma_{\eta_n}^2$, где $\sigma_{\eta_n}^2$ — дисперсия случайного процесса $\eta_n(t)$.

Аналогичные предположения введем в отношении числовых характеристик измерительного шума и начальных условий углового движения:

$$M[n(t)] = 0; M[n(t)n(\tau)] = q_n \delta(t - \tau);$$

$$M[\dot{q}(t_0)] = 0; M[\dot{q}^2(t_0)] = r_0.$$

В приведенных соотношениях g_n , q_n и r_0 — суть постоянные величины. Тогда уравнение для определения дисперсии принимает вид

$$\frac{d}{dt} r(t) = +2ar(t) + g_n - q_n^{-1} r^2(t); \quad r(t_0) = r_0.$$

Решение данного скалярного уравнения может быть представлено в форме

$$r(t) = q_n \{(\alpha + a) + 2\alpha [r_1 r_2^{-1} \exp(2\alpha t) - 1]^{-1}\},$$

где

$$\alpha = \sqrt{a^2 + g_n q_n^{-1}}; \quad r_1 = r_0 + q_n \alpha - q_n a; \quad r_2 = r_0 - q_n \alpha + q_n a.$$

Легко заметить, что $r(t)$ определяется через заданные и не связанные с измеряемыми параметры, поэтому данную функцию времени можно вычислить заранее. Выражение ФК для рассматриваемого случая сводится к уравнению

$$\frac{d}{dt} \hat{q}(t) = a \hat{q}(t) + r(t) q_n^{-1} [y(t) - \hat{q}(t)]; \quad \hat{q}(t_0) = 0.$$

Схема формирования оптимальной оценки угловой скорости линии визирования цели представлена на рис. 7.10. Сделаем к ней некоторые пояснения. Так как

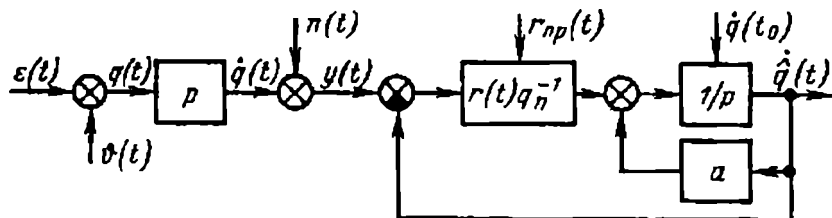


Рис. 7.10. Схема последовательного включения ФК при определении оптимальной оценки угловой скорости линии визирования цели

основание следящего привода развязанного координатора цели установлено на корпусе ракеты, ориентирование оси его чувствительного элемента по линии визирования сводится к слежению за угловым движением цели относительно корпуса ракеты, определяемым изменением угла пеленга ε . Связь между ε и q имеет вид $q = \varepsilon + \theta$, где θ — угол тангажа.

Применительно к корректируемым НС рассмотренная схема последовательного включения ФК, как правило, не в состоянии обеспечить ожидаемого эффекта. С чем же это связано? Вообще, при использовании ФК в задачах коррекции НС, в частности ИНС, казалось бы схема последовательного включения фильтра не только применима, но и вполне оптимальна. При таком включении в качестве фазовых координат вектора состояния будут непосредственно задействованы измеряемые параметры движения ЛА и, как будто бы, задача фильтрации будет решена. Но, если предположить, что

получаемые в результате оптимальной обработки данные измерений, снимаемые с нестабильных измерителей, характеризуют истинное (в пределах допуска) движение ЛА, модель процесса должна в точности соответствовать модели идеальной работы ИНС. Реализовать это практически не удастся. *Во-первых*, даже по одному внешнему виду алгоритма инерциальной навигации, приведенного в гл. 5, нетрудно сделать вывод о его существенной нелинейности и сложности, фактически исключающей проведение любого вида линеаризации. *Во-вторых*, входное внешнее воздействие в виде вектора кажущегося ускорения, будучи зависимым от конкретной траектории движения ЛА, представляется непрогнозируемым с требуемой точностью. Поэтому представление его в виде совокупности детерминированной составляющей и шума с заданными статистическими характеристиками оказывается невозможным. В этом смысле, в качестве подлежащего фильтрации вектора фазовых координат корректируемых НС удобно принять не навигационные параметры, а параметры, характеризующие погрешности функционирования НС, статистические характеристики которых, как правило, хорошо изучены, а уравнения их являются линейными, либо поддающимися линеаризации. Получение оптимальных оценок ошибок должно осуществляться параллельно с решением основной навигационной задачи. Таким образом, приходим к схеме параллельного включения фильтра в контур НС. При этом принято различать схемы параллельного включения с прямой корректирующей связью, с обратной корректирующей связью и со смешанной оптимальной структурой. Сущность первого варианта включения, называемого [69] также **разомкнутой схемой**, сводится к реализации компенсационной схемы обнуления ошибок измерений основного (базового) измерителя, рассмотренной в гл. 6. Оптимальный фильтр в таком варианте включения вводится в схему (см. рис. 6.8) вместо полосового фильтра с передаточной функцией $W_3(S)$. Применительно к корректируемой ИНС, разомкнутую схему включения иллюстрирует рис. 7.11. При использовании многомерного ФК на выходе фильтра будет иметь место векторный сигнал $\hat{\Delta}_1$, а ошибки вектора навигационных параметров с учетом коррекции не будут превосходить ошибки оптимальных оценок

$$\delta x = \Delta_1 - \hat{\Delta}_1. \quad (7.135)$$

Покажем, что это действительно так. Поведение ошибки Δ_1 может быть описано согласно (7.61) уравнением вида

$$\frac{d}{dt} \Delta_1(t) = A(t) \Delta_1(t) + \eta(t). \quad (7.136)$$

Соответственно оценка ошибки определяется на основании уравнения оптимального фильтра, как

$$\frac{d}{dt} \hat{\Delta}_1(t) = A(t) \hat{\Delta}_1(t) + K(t) [y(t) - C(t) \hat{\Delta}(t)]. \quad (7.137)$$

Проведя почленное вычитание, найдем выражение, характеризующее изменение ошибки $\hat{\delta x}$ во времени

$$\frac{d}{dt} [\Delta_1(t) - \hat{\Delta}_1(t)] = \frac{d}{dt} [\delta x(t)] = [A(t) - K(t)C(t)] \delta x(t) + n(t), \quad (7.138)$$

что в полной мере отвечает (7.88).

Поскольку коэффициенты усиления ФК зависят от времени, дисперсия сигнала на его выходе будет убывать со временем, тогда как дисперсия фильтра с постоянными коэффициентами (неоптимального) является постоянной. Рассмотренная схема включения ФК не накладывает каких-либо жестких ограничений на состав

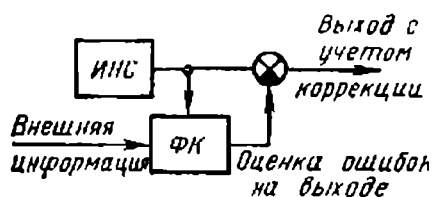


Рис. 7.11. Схема параллельного включения ФК с прямой корректирующей связью

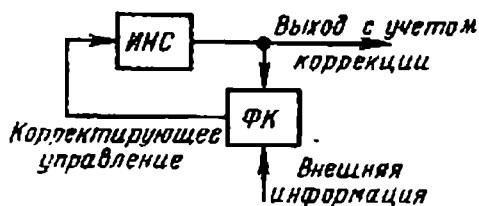


Рис. 7.12. Схема параллельного включения ФК с обратной корректирующей связью

используемых измерителей точно так же, как и на выбор базового измерителя. Однако ей присущ определенный недостаток, обусловленный тем, что для обеспечения минимальных ошибок навигационных параметров, фильтр должен работать непрерывно в составе НС, будучи ее обязательным функциональным элементом.

Особенность схемы параллельного включения фильтра с обратной корректирующей связью (или иначе [69], **замкнутой схемы**) заключается (рис. 7.12) в том, что ФК выступает в этом случае как управляющее устройство, формирующее корректирующие сигналы, подаваемые в соответствующие точки структуры системы, отвечающие конкретным точкам выработки компонент вектора навигационных параметров. Так же как и в первом варианте включения ФК в схему, входным воздействием может служить разностный сигнал $\Delta_1(t) - \Delta_2(t)$, но может использоваться и сигнал, несущий информацию о любой иной совокупности параметров. Однако нахождения оптимальных оценок, по крайней мере, всех параметров, здесь уже не требуется. Вместо этого формируется в соответствии с (3.49) оптимальное линейное управление

$$u(t) = -K(t)y^0(t), \quad (7.139)$$

корректирующее работу отдельных элементов НС, например, выходных сигналов акселерометров и гироскопов в ИНС. Смысл введения корректирующих сигналов заключается в изменении алгоритма работы соответствующих измерителей так, чтобы требуемым образом изменилась структура уравнений ошибок, а следовательно, и характер их поведения. Отличительной особенностью такой схемы

включения ФК в контур НС является то, что после отключения коррекции, погрешность НС будет увеличиваться не скачкообразно, а плавно, начиная со значений, равных величинам этих ошибок в момент прекращения работы фильтра (рис. 7.13). Поэтому данная схема включения ФК позволяет осуществлять периодический режим коррекции НС. Применимость замкнутой схемы, однако, ограничена только тем классом НС, в которых все компоненты управления $u(t)$ имеют физически существующие точки приложения.

Последнее понятие удобно обсудить при рассмотрении конкретного частного примера. В качестве такого примера рассмотрим включение ФК по замкнутой

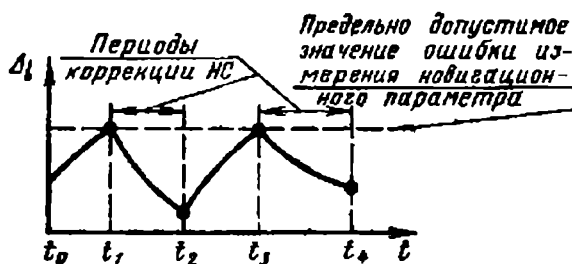


Рис. 7.13. График изменения погрешности работы НС при периодической коррекции

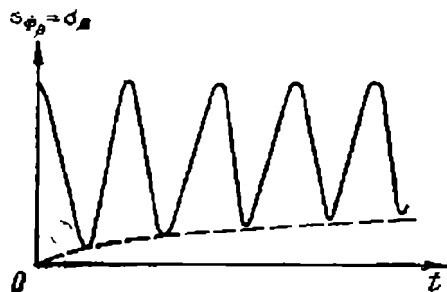


Рис. 7.14. Характер изменения СКО недемпфированной ИВ

схеме в контур инерциальной вертикали при демпфировании ИНС [69]. Инерциальная вертикаль (ИВ) является одним из основных элементов ИНС. Она одновременно выполняет функции построителя вертикали места и измерителя составляющей линейной скорости ЛА. С целью упрощения анализа и повышения наглядности результатов ограничимся, следуя [69], рассмотрением одноканальной ИВ (северный канал). Ошибки, а следовательно, и их дисперсии при отсутствии демпфирования колебательно, либо монотонно возрастают со временем. К числу возмущений, которые могут вызвать возрастание ошибок недемпфированной ИВ, относят погрешности начальной ориентации, дрейф гироскопа, смещение нуля акселерометра и т. д. На рис. 7.14 показана качественная картина изменения среднего квадратичного отклонения угла наклона ИВ относительно геоцентрической вертикали $\beta(t)$ при отсутствии демпфирования. Кривая СКО угловой погрешности наглядно иллюстрирует [69] колебательный характер реакции недемпфированной ИВ на случайные возмущения при общей тенденции к постепенному смещению кривой вверх. Нижняя кривая (пунктирная) соответствует случаю нулевой начальной ошибки выставки ИВ и иллюстрирует монотонный рост СКО пропорционально времени. Повышение точности ИВ и ИНС в целом достигается (см. гл. 6) за счет демпфирования собственных колебаний системы. Обеспечение демпфирования (в частности, при привлечении внешней информации о скорости движения ЛА) является следствием изменения динамических характеристик КНС. С другой стороны, использование ФК, включенного по параллельной схеме, также приводит к требуемому изменению структуры ошибок и, как следствие, изменению динамических характеристик системы. Напрашивается мысль о возможности использования ФК для целей демпфирования ИНС. Эта мысль тем более очевидна, что в принципе известна схема демпфирования ИВ с внутренними связями, предложенная Е. Б. Левенталем, в которой демпфирующий сигнал формируется пропорционально измеренному акселерометром (F) ускорению и прикладывается к ДМ гироскопа (G).

Для осуществления демпфирования ИВ с помощью ФК прежде всего надо рассмотреть погрешности недемпфированной ИВ и построить ее математическую модель.

Уравнение северного канала недемпфированной ИВ с интегральной коррекцией по координате $\beta(t)$ может быть получено из уравнения прецессионного движения ГСП по этому каналу, которое имеет вид [69]

$$H_r \left(\dot{\beta} + \frac{V \cos \psi}{r} \right) = M_{ky} + M_{by},$$

где H_r — кинетический момент гироскопа; $V \cos \psi$ — северная составляющая относительной скорости ЛА; r — модуль радиуса-вектора ЛА; M_{ky} — момент интегральной коррекции; M_{by} — возмущающий момент на оси подвеса гироскопа. Заменяя значения моментов их выражениями и продифференцировав правую и левую части уравнения прецессии гироскопа, после преобразований с учетом условия невозмущенности (5.42) можно получить

$$T_v^2 \ddot{\beta} + \dot{\beta} = g^{-1} [f_1 \delta V \sin \psi + f_2 \delta \varphi + B_y(t) + n(t)] + T_v^2 \dot{\varepsilon}(t).$$

Здесь, кроме оговоренных ранее, приняты следующие обозначения: $T_v = v^{-1}$ — постоянная времени, соответствующая частоте Шулера; ψ — курсовой угол; δV и $\delta \varphi$ — ошибки в определении скорости и широты; $B_y(t)$ — ошибка в определении случайной составляющей ухода нуля акселерометра; $n(t)$ — помехи на выходе акселерометра; $\varepsilon(t)$ — угловая скорость дрейфа гироскопа; $f_1 \approx 2r^{-1} V \sin \psi \operatorname{tg} \psi$, $f_2 \approx V^2 \sin^2 \psi (r \cos^2 \psi)^{-1}$ — функциональные множители, зависящие от параметров движения ЛА, которые на малом интервале времени проведения измерений допустимо считать постоянными величинами. Теперь введем в рассмотрение статистические характеристики входящих в уравнение недемпфированной ИВ случайных факторов. Для шума измерений оставим без изменений все ранее оговоренные стандартные предположения. Для описания уходов гироскопа за длительные интервалы времени наиболее корректным является представление его в виде стационарного случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией (7.10). Такая модель аппроксимации процесса с помощью цветного шума потребует при оптимальной фильтрации использование формирующего фильтра, который, следуя (7.60), для рассматриваемого случая представим в виде

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\alpha_{\varepsilon} \varepsilon(t) + \sigma_{\varepsilon} \sqrt{2\alpha_{\varepsilon}} \eta(t).$$

Аналогичные предпосылки используем и при представлении случайного ухода нуля акселерометра B_y и ошибки измерения скорости δV . Кроме случайного смещения нуля акселерометра учитывают также [69] и случайную систематическую составляющую B_y^c с известной дисперсией $\sigma_{B_y^c}^2$, характеризующей разброс смещений нуля в данной партии приборов. Ошибка счисления $\delta \varphi$ связана с δV известным соотношением

$$\delta \varphi(t) = r^{-1} \delta V \cos \psi.$$

Изложенное позволяет перейти к формированию используемого вектора состояния. Предварительно, однако, сделаем небольшое отступление. Кроме рассмотренных ошибок ε , $\delta \varphi$, B_y^c , B_y и δV , а также собственно угла β в число компонент вектора состояния должен быть включен и непосредственно измеряемый параметр. Таким непосредственно измеряемым параметром является составляющая интегрируемого кажущегося ускорения, снимаемого с выхода акселерометра. Ее выражение будет иметь вид $x_1 = T_v^2 H_r^{-1} \mu a_y(t)$, где a_y — выходной сигнал акселерометра, μ — коэффициент пропорциональности. Итак, семимерный вектор состояния, кроме непосредственно получаемого по результатам измерений x_1 , будет включать в себя $x_2 = \beta(t)$; $x_3 = \varepsilon(t)$; $x_4 = \delta \varphi(t)$; $x_5 = B_y^c(t)$; $x_6 = B_y(t)$ и $x_7 = \delta V(t)$. Математическую модель системы, отвечающую принятому к рассмотрению вектору состояния, представим в форме

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{\Gamma} \eta(t);$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t).$$

Под $\eta(t)$ здесь понимается четырехмерный вектор входных белых шумов с составляющими $\eta_1(t) = n(t)$, $\eta_2(t) = n_1(t)$, $\eta_3(t) = n_2(t)$ и $\eta_4 = n_3(t)$, где $n_i(t)$ — три белых шума с единичной интенсивностью, являющиеся входными воздействиями формирующих фильтров для $\varepsilon(t)$, $B_y(t)$ и $\delta V(t)$. Структура матрицы C размерности (1×7) представляется очевидной

$$C = [T_v^{-2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Точно так же, учитывая уравнение формирующего фильтра для (7.10), нетрудно составить матрицу Γ порядка (7×4)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\sigma_\varepsilon^2 \alpha_\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2\sigma_{B_y}^2 \alpha_{B_y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2\sigma_{\delta V}^2 \alpha_{\delta V}} \end{bmatrix}.$$

Несколько сложнее получить [69] матрицу состояния

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & g^{-1}f_2 & g^{-1} & g^{-1} & g^{-1}f_1 \sin \psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^{-1} \cos \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{B_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{\delta V} \end{bmatrix}.$$

В уравнении оптимального фильтра (7.77) обозначим, имея в виду рассматриваемую модель измерений

$$[y(t) - \hat{C}\hat{x}(t)] = C[x(t) - \hat{x}(t)] + n(t) = C\Delta x(t) + n(t) = y^0(t).$$

Величина $y^0(t)$ будет представлять собой ни что иное, как вектор входных сигналов ФК, включенного в ИВ по замкнутой схеме, образованный ошибками преобразования вектора $x(t)$. Изменение динамических свойств ИВ при этом осуществляется за счет формируемых в фильтре корректирующих сигналов $u_1(t)$ и $u_2(t)$,

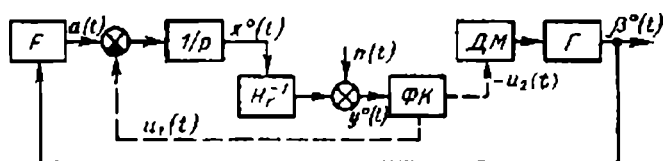


Рис. 7.15. Схема демпфирования ИВ с помощью ФК

показанных на рис. 7.15 пунктирными линиями, прикладываемых к физически существующим точкам коррекции схемы выработки навигационных параметров. Такими точками в ИВ являются ДМ и выход акселерометра. Подача корректирующего сигнала на ДМ заставляет гироскоп прецессировать и таким образом изменить положение стабилизированной платформы, определяемое выходным сигналом ДК, а введение корректирующего сигнала в выходной сигнал акселерометра не-

посредственно влияет на его величину. Значения корректирующих сигналов определяются [69] по зависимостям

$$u_1(t) = \hat{N}(t) + k_1 y^0(t);$$

$$u_2(t) = \hat{\varepsilon}(t) + k_2 y^0(t).$$

Здесь $\hat{N}(t)$ — оптимальная оценка величины $N(t)$, определяемой по формуле $N(t) = H_v T_v^{-2} [g^{-1} (f_1 \delta V \sin \psi + f_2 \delta \phi + B_y(t)) + n(t)]$. k_1 и k_2 — оптимальные коэффициенты усиления ФК (компоненты матрицы $K(t)$).

Для рассмотренной схемы построения ИВ график СКО значений погрешности уже будет иметь вид, изображенный на рис. 7.16. Нетрудно показать, что это так.

Действительно, при $k_2 < 0$, что необходимо для придания системе устойчивости, как это следует из характеристического полинома

$$\Delta(s) = s^2 + k_1 H_v^{-1} s - k_2 T_v^{-2},$$

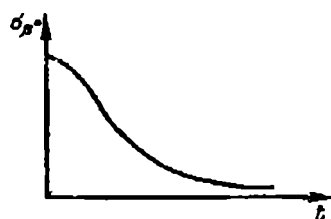


Рис. 7.16. График изменения СКО, демпфированной с использованием ФК инерциальной вертикали

будет иметь место демпфирование шулеровских колебаний. Но, с другой стороны, ИВ с включенным по обсуждаемой схеме ФК, приобретая свойства демпфированной ИВ, теряет свойство невозмущаемости. Это также легко объяснимо. В выражениях $u_i(t)$ ($i = 1, 2$) в явном виде присутствуют члены, зависящие от скорости и ее производной. Ничего в этом смысле не изменит и введение дополнительной прямой связи с выхода интегратора на вход ДМ (см. рис. 7.15). Данное обстоятельство ограничивает при-

менимость рассмотренной схемы включения ФК, по крайней мере, в задачах обсуждаемого типа. Другим более общим недостатком замкнутой схемы включения ФК является то, что в случае неадекватности реализуемой модели реальному физическому процессу выработанные в фильтре коэффициенты усиления могут привести к формированию корректирующих сигналов, недопустимых с точки зрения нормальных режимов функционирования системы (подача на ДМ сигнала сверх допустимого уровня в нашем примере).

В значительном числе практически важных навигационных задач далеко не все обратные связи $u_i(t)$ имеют физически существующие точки приложения. Все это приводит к необходимости обращаться к смешанной схеме включения ФК, содержащей как элементы разомкнутой, так и элементы замкнутой структур. Примером могут служить, в частности, демпфированные ИНС, обладающие одновременно свойством невозмущаемости. Как было показано в предыдущей главе, это возможно только при использовании внешней информации о скорости и ее производной, получаемой от устройств, не входящих в состав ИНС. Особенно широко смешанная схема используется в КНС, сочетающих метод счисления с комплексным использованием позиционного метода.

Подводя итоги изложенному, можно сделать следующие выводы:

а) схема последовательного включения ФК в навигационный контур применяется обычно в некорректируемых НС, модель которых является либо линейной, либо достаточно просто поддается линеаризации;

б) схема параллельного включения ФК с прямой корректирующей связью (разомкнутая схема) находит применение главным образом при комплексировании измерителей одного навигационного

параметра и условия относительно небольшого времени непрерывной работы НС;

в) включение ФК по замкнутой и смешанной схемам целесообразно, когда имеется полная и надежная информация об ошибках функционирования длительно работающих НС при комплексировании измерителей нескольких навигационных параметров.

7.3.2. Понижение размерности фильтра на основе применения наблюдающих (восстанавливающих) систем минимального порядка

Анализ уравнений ФК дает основание для утверждения, что расчет оптимальных оценок вектора состояния требует выполнения большого числа математических операций над матрицами и векторами. При этом очевидно, что объем вычислений, приходящихся на один такт работы БЦВМ, будет определяться прежде всего размерностью вектора состояния. По данным работы [69] для системы, имеющей десять переменных состояния ($r = 10$), пять входных белых шумов и скалярное измерение, решение задачи оптимальной фильтрации на одном такте потребует выполнения 4091 операции умножения и 3711 операций сложения. При увеличении числа измерений до трех объем вычислений составит 4717 операций умножения и 4297 операций сложения. Таким образом, увеличение числа измерений не вызывает существенного увеличения объема вычислений, тогда как увеличение размерности вектора состояния всего лишь на две компоненты ($r = 12$) приводит к резкому росту объема вычислений: до 6290 операций умножения и 5762 операций сложения.

В связи с изложенным весьма важным и актуальным становится вопрос о возможности упрощения алгоритма оптимальной фильтрации при допустимой незначительной потере точности результатов оценивания вектора состояния. Такие фильтры, которые по сравнению с оптимальными обеспечивают более низкую точность в переходном, а в большинстве случаев и в установившемся режимах, но характеризуются более простой структурой получили название **субоптимальных фильтров**. Синтез субоптимальных фильтров представляет собой довольно сложную задачу, входящую в состав общей проблемы проектирования оптимальных НС. В настоящее время разработано достаточное количество методов понижения порядка оптимального фильтра [23]. Наиболее перспективным из них представляется подход, связанный с использованием наблюдающих (восстанавливающих) систем пониженной (или минимальной) размерности, элементы теории которых были рассмотрены в гл. 3. Основываясь на этих материалах, обсудим принципы синтеза соответствующего алгоритма для дискретной модели процесса. В качестве последней воспользуемся разностным уравнением (7.102) с уравнением наблюдения (7.116). В соответствии с (3.31) $(r - p)$ -мерный вектор состояния, формируемый наблюдающим устройством, должен

удовлетворять уравнению, которое применительно к дискретной модели процесса будет иметь вид

$$z(k+1) = D(k)z(k) + Q(k)C(k)x(k), \quad (7.140)$$

где $D(k)$ и $Q(k)$ — матрицы, подлежащие определению. Выбор этих матриц, как отмечалось в гл. 3, не является произвольным. Необходимо, чтобы матрицы $D(k)$ и $Q(k)$ были такими, при которых матрица $T(k)$ в уравнении (3.32) имела бы заданный ранг $r-p$. В этом случае $p < r$ измеряемых компонент и $r-p$ переменных состояния, восстанавливаемых с использованием математических соотношений, дадут r линейно независимых комбинаций переменных состояния, отвечающих условию полной наблюдаемости динамической

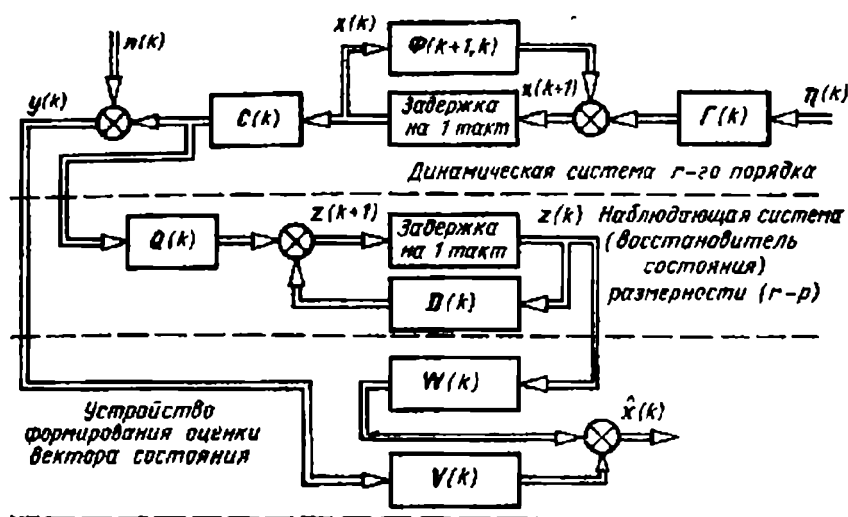


Рис. 7.17. Схема субоптимального фильтра с наблюдающим устройством пониженной размерности

системы. К матрице $T(k)$, преобразующей при нулевых начальных условиях вектор состояния $x(k)$ в вектор $z(k)$ с помощью линейного преобразования

$$z(k) = T(k)x(k) \quad (7.141)$$

предъявляется требование [89], заключающееся в том, что матрица $T^*(k)$, образованная из компонентов матриц $T(k)$ и $C(k)$, должна быть неособенной. Тогда матрица $T^*(k)$ будет иметь обратную, такую, что подматрицы $W(k)$ и $V(k)$, входящие в ее состав как

$$[T^*(k)]^{-1} = [W(k) | V(k)], \quad (7.142)$$

позволят получить оценку вектора $\hat{x}(k)$ в виде

$$\hat{x}(k) = W(k)z(k) + V(k)y(k). \quad (7.143)$$

Приведенная зависимость характеризует работу фильтра пониженной относительно вектора состояния ЛА размерности. Входом филь-

тра являются измерения меньшего, чем r числа компонентов вектора $y(k)$, а выходные переменные $z(k)$ совместно с измеряемым образуют оценку полного вектора состояния. Условием, гарантирующим существование фильтра с наблюдающей системой (устройством) пониженной размерности, является выполнение соотношений для матриц $D(k)$ и $Q(k)$, задаваемых в виде

$$D(k) = T(k) \Phi(k+1, k) W(k); \quad (7.144)$$

$$Q(k) = T(k) \Phi(k+1, k) V(k) C^{-1}(k). \quad (7.145)$$

Схема построения фильтра с наблюдающим устройством пониженной размерности приведена на рис. 7.17. Отметим, что синтез субоптимальных фильтров менее полно формализуем, чем синтез оптимальных фильтров в силу предполагаемого компромисса для соотношения «сложность—точность оценивания».

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕАЛИЗАЦИИ ОБЗОРНО-СРАВНИТЕЛЬНОГО МЕТОДА В КОРРЕЛЯЦИОННО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

В качестве формирователей эталонного и наблюдаемого ориентиров в обзорно-сравнительном методе навигации могут быть использованы как искусственные (оптическое, радиолокационное и др.), так и естественные геофизические поля, такие, например, как гравитационные аномалии, магнитное поле Земли и т. д. В выбранной системе отсчета положение эталонного изображения ориентира соответствует требуемому курсовому направлению движения. Сопоставляемая информация может сниматься в точке, с линии или с площади соответствующего поля. При этом точечное зондирование не накладывает ограничений на вид зондируемого поля, тогда как съем информации с линии или площади исключает возможность использования пространственных полей и базируется только на поверхностных полях (поле рельефа, оптического или радиолокационного контраста и др.). Последнее обусловлено тем, что ЛА имеют обычно несоизмеримо малые размеры по сравнению с так называемым радиусом корреляции пространственного поля.

Вне зависимости от принципов разработки алгоритмов и систем, строящихся на использовании обзорно-сравнительного метода навигации, все они обладают общностью, заключающейся в реализации вычислительной процедуры, сходной с вычислением взаимной корреляционной функции и определением экстремума этой функции. В связи с этим навигационные системы данного типа получили название корреляционно-экстремальных навигационных систем (КЭНС). В случае, если априори известно, что в процессе полета могут иметь место относительно небольшие отклонения параметров движения ЛА от номинальных, при которых рассогласование между текущим и эталонным изображением не превзойдет радиуса корреляции их взаимной пространственной корреляционной функции, предпочтение отдается беспойсковым КЭНС. Поисковые КЭНС, обладая свойством инвариантности по отношению к начальным ошибкам, являются более универсальными, но в то же время и более сложными по сравнению с беспойсковыми. Теория КЭНС как для поисковых, так и беспойсковых систем развита в основном трудами советских ученых [8, 45, 57, 10].

Принципы функционирования поисковых КЭНС основываются на теории статистических решений и сводятся к заданию множеств гипотез об истинном движении ЛА на некотором временном интервале, предшествующем текущему. Каждой гипотезе ставится в соответствие конкретная реализация, которая сопоставляется с наблюдаемым изображением.

8.1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РЕАЛИЗАЦИИ КЭНС

8.1.1. Классификация корреляционно-экстремальных систем

Признаки, по которым классифицируют КЭНС [10, 45], определяют возможные виды реализации их составных элементов (датчиков поля, блоков памяти (если они есть), корреляторов, вычислительных устройств и др.) и особенности используемых алгоритмов обработки информации — методы вычисления корреляцион-

Признаки классификации	По виду используемого физического поля	По виду рабочей информации	По объему используемой априорной информации	По способу хранения и обработки информации	По методу определения экстремума корреляционной функции
Виды и классы КЭНС	КЭНС, использующие пространственные поля: — аналоговое магнитное — аналоговое гравитационное	КЭНС-I	Системы «без памяти»	Аналоговые КЭНС	Поисковые КЭНС
	КЭНС, использующие поверхностные поля: — рельефа местности — радиолокационного контраста — оптического контраста — радиотепловые — естественной радиолокативности — нестабильные во времени (естественные и искусственные)	КЭНС-II			Системы со сканированием
		КЭНС-III	Системы «с памятью»	Цифровые КЭНС	Рекуррентно-поисковые КЭНС Беспоскоковые КЭНС

Рис. 8.1. Классификация корреляционно-экстремальных навигационных систем

ной функции и определения ее экстремума, объем и способы использования априорной информации и т. д. По виду зондируемого физического поля КЭНС можно разделить на системы, использующие пространственные и поверхностные поля (рис. 8.1). По виду рабочей информации, снимаемой датчиком поля в текущий момент времени, КЭНС делятся на системы, в которых информация снимается в точке (КЭНС-I), с линии (КЭНС-II) и с площади (КЭНС-III). По объему начальной информации, используемой в системе, выделяют системы «без памяти» и системы «с памятью». Первые в отличие от вторых не имеют «эталонного» изображения поля в районе навигации и могут определять лишь скорость изменения координат ЛА относительно ориентиров, используя любые, в том числе и нестабильные

во времени поверхностные поля (например, облачный покров). По способу хранения и обработки информации выделяют классы аналоговых и цифровых систем.

8.1.2. Особенности реализации обзорно-сравнительного метода в КЭНС

Основная задача КЭНС состоит в определении текущих координат местоположения ЛА и (или) их производных. Одна из первых корреляционно-экстремальных систем была разработана для управления движением самолета и предназначалась для удержания его на заданной траектории при многократных полетах по одному

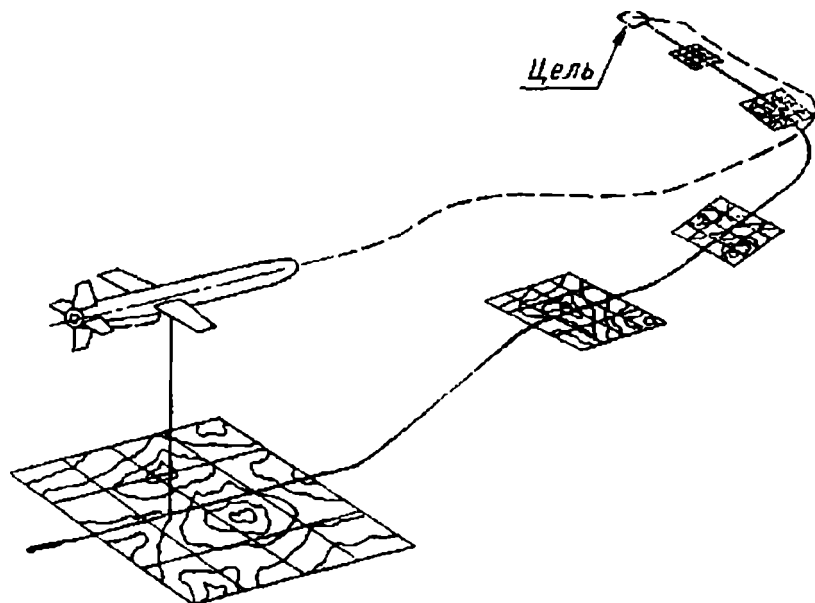


Рис. 8.2. Характер траектории полета дозвуковой крылатой ракеты при использовании информации о рельефе местности в районах коррекции

и тому же маршруту. Во время первого полета фиксируется изображение подстилающей местности. Оно служит эталоном для последующих полетов, при которых управление самолетом проводится так, чтобы эталонное и текущее изображения совпадали. В этом состоит идея управления движения ЛА по заданному курсу с использованием карт местности [57].

Автоматические системы данного типа могут реализовать различные алгоритмы работы. Так автоматическое управление движением ЛА по «карте заданного курса» может быть организовано непрерывно на всей траектории движения. Иногда целесообразно лишь периодически корректировать эту траекторию в отдельных навигационных районах (рис. 8.2). При этом не требуется карта местности всего маршрута, а только карта местности в районах коррекции. Корреляционно-экстремальная система может использоваться для коррекции других навигационных систем, в частности, инерциальных. При создании корреляционно-экстремальных систем для наведения

ЛА класса «воздух—земля» используются системы с многократной перезаписью «эталонного» изображения цели и района местности в окрестности цели. В момент пуска начальная ориентация системы на цель (т. е. выбор цели, наведение ГСН на нее и запись «изображения» цели в память системы) осуществляется по команде оператора, а затем после пуска ракеты по мере приближения к цели ее текущее изображение будет все больше отличаться от «эталонного», вследствие накопления масштабных и ракурсных изменений. Поэтому периодически осуществляется перезапись «эталонного» изображения местности в районе цели [8].

8.1.3. Особенности задачи оценивания состояния в корреляционно-экстремальных системах

Проблему создания автоматического управления по картам местности можно рассматривать, как частный случай проблемы распознавания образов. Решение задачи получения оценок фазовых координат ЛА с использованием корреляционно-экстремальных алгоритмов, реализуемых КЭНС, имеет ряд особенностей, отличающих ее, как по постановке и математическому описанию, так и по методам решения от рассмотренных выше общих методов оптимального оценивания. Остановимся на некоторых из них.

Во-первых, КЭНС использует информацию о значениях некоторого параметра физического поля, изменяющегося при изменении точки зондирования (или при изменении положения ЛА и соответственно датчика поля). При этом датчик измеряет некоторую случайную функцию h_1 , аргументом которой является некоторая пространственная координата x (в общем случае векторная величина), и только «развертка» (за счет естественного движения датчика (ЛА) или каким-либо искусственным способом) этой пространственной координаты во времени $x(t)$ преобразует функцию $h_1(x)$ в случайную функцию времени $h_1(t)$. Здесь следует подчеркнуть, что оценка координат ЛА ведется на основе сравнения реализаций (на некотором интервале времени) случайных функций воспроизводимых датчиком поля $h_1(x)$ и блоком памяти $h(x_n)$; именно реализации функций, а не отдельные значения их (соответствующие текущему моменту времени) сопоставляются в КЭНС, т. е. в общем случае системы совмещения «изображений» необходимо рассматривать, как системы с бесконечномерным вектором наблюдения.

Во-вторых, сама по себе информация о параметрах зондируемого поля, которую выдают чувствительные элементы КЭНС (датчики поля), не содержит никакой информации о фазовых координатах ЛА, как объекта управления. Только сопоставление измеренных значений параметров физических полей с их эталонными значениями из блока памяти позволяет оценить значения координат самого ЛА, т. е. фактически только в блоке памяти имеется соответствие (установлена функциональная связь) между измеряемыми параметрами физических полей и оцениваемым местоположением ЛА. Выходными координатами корреляционно-экстремальной си-

стемы являются координаты, извлекаемые из блока памяти. На их основе строится оценка действительных координат ЛА: $\hat{x} = x_{\text{ц}} + \hat{\delta}_x$, где $\hat{\delta}_x$ — рассогласование координат, выявленное КЭНС в результате сопоставления реализаций $h_1(x)$ и $h(x_{\text{ц}})$.

В-третьих, необходимо подчеркнуть, что даже при отсутствии шумов в измерениях датчика поля (и того, который дает текущие измерения, и того, с помощью которого записана карта в блоке памяти), т. е. при идеальных измерениях проблема совмещения

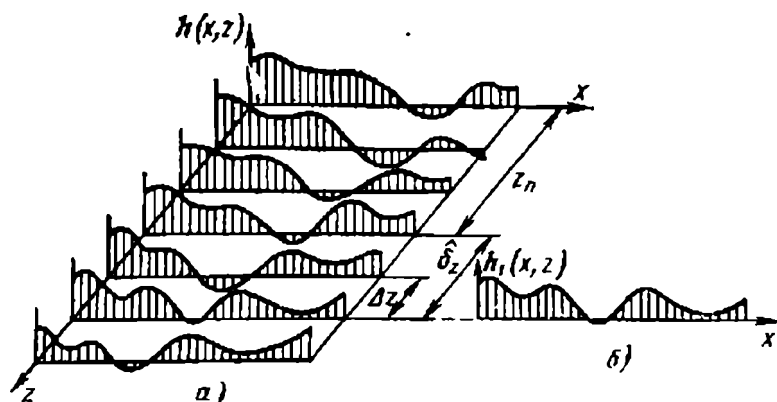


Рис. 8.3. Изображение карты реализаций поля:

а — эталонная карта $h(x, z)$; б — текущая реализация, полученная датчиком поля $h_1(x, z)$

реализаций функций остается. Другими словами, точность получаемых оценок координат будет зависеть не только от интенсивности шумов измерений, но и от качества «совмещения» эталонного и текущего изображений.

Пусть, например, априори известно, что при движении ЛА над районом зондирования возможны только боковые смещения δ_z траектории ЛА от заданного маршрута (соответствующего величине $z - z_{\text{ц}}$) и задачей КЭНС является получение оценки этого отклонения $\hat{\delta}_z$. Пусть в памяти КЭНС хранится карта эталонных реализаций поля $h(x, z)$ (рис. 8.3), полученная с интервалом дискретизации по z , равным Δz . Если датчиком поля при движении ЛА над районом навигационного определения получена реализация $h_1(x, z)$ (см. рис. 8.3), то задачей КЭНС будет выделение наиболее «похожей» эталонной реализации из блока памяти, и тогда соответствующее значение $\hat{\delta}_z$ (см. рис. 8.3) будет наилучшей (по выбранному критерию «сходства» реализаций) оценкой истинного рассогласования δ_z . Соответственно наилучшей оценкой бокового смещения ЛА будет величина $\hat{z} = z_{\text{ц}} + \hat{\delta}_z$.

Естественно, возникают вопросы о критерии «близости» или «сходства» реализаций, о принципах разработки алгоритмов автоматического поиска наиболее «похожих» реализаций, т. е. вопросы, решаемые в теории распознавания образов. Основой для разработки алгоритмов распознавания образов, а в нашем случае совме-

щения «эталонного» и текущего «изображений» (реализаций функций $h(x_n)$ и $h_1(x)$), служат конструктивные методы, разработанные в теории статистических решений.

8.2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОИСКОВЫХ КЭНС

8.2.1. Элементы теории статистических решений

Пусть существует некоторый источник, реализующий выбор одной из N возможных гипотез $g_1, g_2, \dots, g_N$, которые образуют множество возможных гипотез G . Существует также некоторая система, которая для каждой реализованной гипотезы g_i вырабатывает сигнал s_i , который однозначно определяет вид гипотезы. Однако выходной сигнал этой системы недоступен непосредственному наблюдению, иначе не было бы проблемы выбора решения. Наблюдению

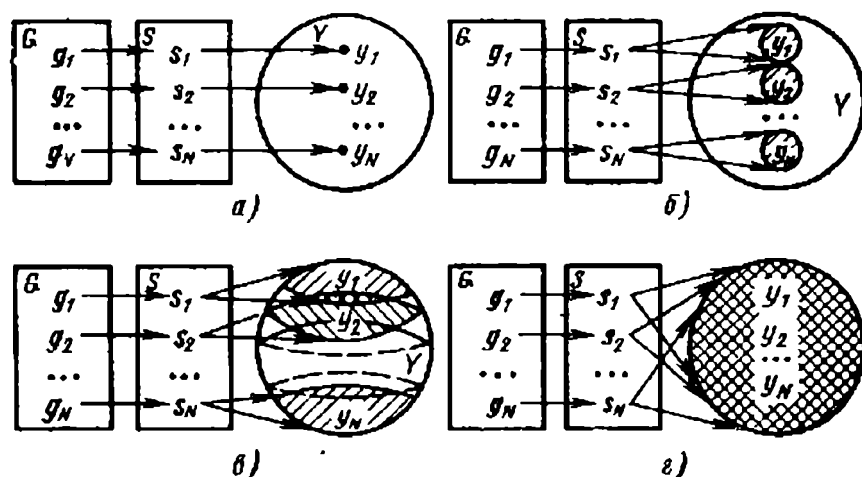


Рис. 8.4. К пояснению понятия неопределенности зависимости гипотезы g_i и наблюдения y_i :

а — функциональная связь наблюдения и гипотезы; б — функциональная связь множества наблюдений и гипотез; в — стохастическая взаимосвязь части гипотез и множества наблюдений; г — стохастическая взаимосвязь всех гипотез и множества наблюдений

доступен только результат преобразования выходного сигнала системы некоторым устройством, таким, что между входом s_i и выходом его y_i существует только вероятностная связь. Устройство определяет вероятностный механизм перехода, т. е. преобразования сигнала s_i в наблюдение y_i . Выходной сигнал можно рассматривать как точку из пространства наблюдений. По полученным наблюдениям с помощью правила выбора решения необходимо установить, какая из возможных гипотез реализована в данном случае. Возможная неопределенность зависимости сигнала s_i и наблюдения y_i показана на рис. 8.4. Ситуация, изображенная на рис. 8.4, а, соответствует случаю, когда сигналу s_i соответствует единственно возможное наблюдение y_i , и в теории решений не рассматривается. Рис. 8.4, б иллюстрирует случай, когда сигналу s_i соответствует целое множество возможных наблюдений y_i , но эти множества не

имеют общих элементов. Проблемы статистического различения гипотез по результатам наблюдения в случаях *a* и *б* как таковой нет, поскольку всегда может быть принято правильное решение. В случае, показанном на рис. 8.4, *в*, наблюдение y_i может соответствовать сразу нескольким гипотезам, так что в случае реализации одной из них для идентификации ее по результатам наблюдения нужно принять нетривиальное решение. Рис. 8.4, *г* иллюстрирует ситуацию, когда любое из наблюдений могло иметь место при любой из возможных гипотез. Правило выбора решения должно учитывать не только результаты наблюдений, но и априорные вероятности различных гипотез, а также условные вероятности, характеризующие вероятностный механизм перехода. На рис. 8.5 показаны

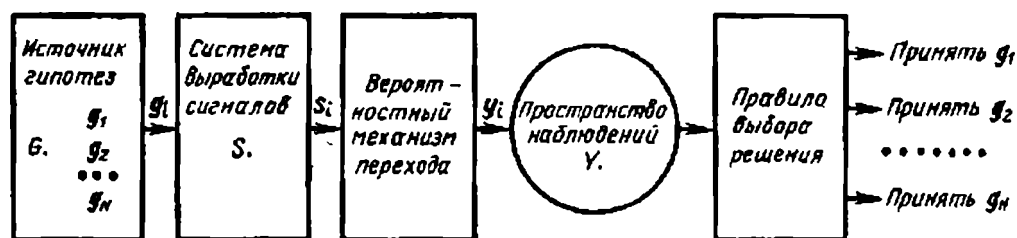


Рис. 8.5. Элементы многоальтернативной задачи теории решений

элементы многоальтернативной задачи теории решений. Например, если в качестве источника гипотез рассматривается ЛА, а гипотеза, подлежащая определению, — это реализующаяся в конкретном полете траектория из множества допустимых траекторий, то довольно часто априори можно утверждать, что траектории с малыми отклонениями координат от заданных будут более вероятны, чем траектории с большими отклонениями координат. Следовательно, представляется допустимым задать априорные вероятности (распределение вероятностей) реализации различных траекторий из допустимого множества траекторий. Задание вероятностного механизма перехода будет эквивалентно заданию вида комбинации помехи и сигнала и плотности вероятностей помехи, статистические характеристики которой в общем случае могут зависеть от того, какая из гипотез реализована в данном случае.

В большинстве практических задач однократное наблюдение не позволяет обеспечить решение поставленной задачи. Это приводит к необходимости многократного повторения наблюдений. Возникает задача проверки гипотез по выборкам фиксированного объема — некоторой совокупности наблюдений из пространства наблюдений. Именно такая задача возникает при синтезе оптимальных поисковых алгоритмов работы корреляционно-экстремальных систем.

В соответствии с рис. 8.5 основными объектами, фигурирующими в многоальтернативной задаче теории решений, будут: пространство гипотез G (или решений, так как «решением» является принятие одной из гипотез), элементами которого в общем случае являются векторы гипотез $g^T = [g_1, \dots, g_k]$; пространство сигналов S , эле-

ментами которого являются векторы сигналов $s^i = [s_{i1}, \dots, s_{in}]$, пространство наблюдений (выборок) Y , с элементами $y^T = [y_1, \dots, y_n]$. Статистические характеристики помехи (шума измерений) предполагаются известными. Каждой реализации принятого наблюдения искаженного шумом измерений, $y \in Y$ должно быть поставлено в соответствие некоторое решение (гипотеза) $g \in G$. Это можно интерпретировать, как преобразование пространства Y в G . Правило такого преобразования называется в теории решений стратегией решающего устройства, решающим правилом или решающей функцией — $F(g | y) : Y \rightarrow G$. При реализации i -й гипотезы g_i задана функция распределения плотности вероятности наблюдений на пространстве наблюдений — $f_i(y)$. Эта функция рассматривается как условная плотность вероятности выборки (совокупности наблюдений y) при реализации рассматриваемых гипотез. Если эти функции ($f_i(y)$, $i = 1, \dots, N$) полностью заданы и не зависят от неизвестных параметров, то гипотезы называются простыми. Если условные плотности вероятности выборки при рассматриваемых гипотезах зависят от неизвестного (в общем случае случайного параметра), то гипотезы называются сложными. Методы, используемые при решении задач теории проверки гипотез, рассмотрим последовательно для случаев проверки двух, а затем нескольких простых гипотез.

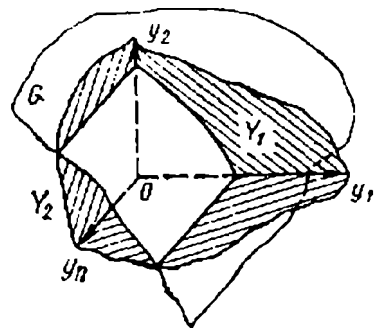


Рис. 8.6. Разделение пространства наблюдений Y поверхностью решения G

Пусть выбор одной из двух возможных гипотез g_1 и g_2 основывается на результатах измерений $y^T = [y_1, \dots, y_n]$, которую можно представить как точку в n -мерном пространстве (рис. 8.6). Стратегия принятия решения может быть представлена как разделение пространства наблюдений на две области Y_1 и Y_2 . Решающее устройство (см. рис. 8.5), реализующее правило выбора решения, выбирает гипотезу g_1 , когда точка, соответствующая выборке y , попадает в область Y_1 , т. е. когда $y \in Y_1$, и гипотезу g_2 , если $y \in Y_2$. Области Y_1 и Y_2 разделены некоторой поверхностью, называемой поверхностью решения — g . При таком способе принятия решения можно сделать два рода ошибок: при реализации гипотезы g_1 сделан вывод о наличии гипотезы g_2 , и наоборот. Если можно в числах выразить «цену» этих ошибок или потери, нанесенные решающим устройством, то можно сформировать таблицу, или матрицу потерь w_{ij} ($i, j = 1, 2$); $W = \begin{bmatrix} 0 & w_{21} \\ w_{12} & 0 \end{bmatrix}$. Величина w_{ij} в ней характеризует потери, связанные с принятием i -й гипотезы, когда на самом деле справедлива j -я гипотеза. Пусть известны априорные вероятности реализации гипотез g_1 и g_2 , равные соответственно q_1 и q_2 , и условные плотности вероятности выборки y при реализации этих гипотез — $f_1(y)$ и $f_2(y)$.

Если при попадании выборки в область Y_1 принимается решение g_1 , то вероятность правильного решения при условии, что действительно имела место гипотеза g_1 равна:

$$p_{11} = \int_{Y_1} f_1(y) dy, \quad (8.1)$$

где $dy = dy_1 dy_2 \dots dy_n$,

а вероятность неправильного решения при гипотезе g_1 :

$$p_{21} = \int_{Y_2} f_1(y) dy. \quad (8.2)$$

Аналогично вероятность правильного решения при гипотезе g_2 равна:

$$p_{22} = \int_{Y_2} f_2(y) dy, \quad (8.3)$$

а вероятность неправильного решения при y_2 :

$$p_{12} = \int_{Y_1} f_2(y) dy. \quad (8.4)$$

Так как априорная вероятность реализации гипотезы g_1 равна q_1 , то вероятность соответствующего наблюдения и правильного решения равна $q_1 p_{11}$, т. е. это вероятность ситуации, соответствующей левому верхнему элементу матрицы W . Вероятности ситуаций, соответствующих трем другим элементам, равны $q_1 p_{21}$, $q_2 p_{12}$ и $q_2 p_{22}$. Средние потери или математические ожидания потерь, связанных с неправильным решением, будут равны сумме «цен» каждого неправильного решения, умноженного на вероятность такого решения, т. е. $w_{21} p_{21} q_1 + w_{12} p_{12} q_2$ или с учетом (8.2) и (8.4)

$$w_{21} q_1 \int_{Y_2} f_1(y) dy + w_{12} q_2 \int_{Y_1} f_2(y) dy. \quad (8.5)$$

Формула (8.5) выражает средние потери, которые подлежат минимизации. Таким образом, пространство наблюдений Y необходимо разделить на две области Y_1 и Y_2 так, чтобы математическое ожидание потерь было минимально. Среднее значение потерь (8.5) называют **байесовским риском**, а метод, который обеспечивает минимум (8.5) при данных априорных вероятностях q_1 и q_2 , называется **методом Байеса** или **байесовым правилом решения**. Оно сводится к следующему: для полученного наблюдения y вычисляется **коэффициент правдоподобия** (отношение правдоподобия)

$$\Lambda(y) = f_1(y)/f_2(y) \quad (8.6)$$

и сравнивается с величиной $\Lambda_0 = w_{12} q_2 / w_{21} q_1$.

Если $f_1(y)/f_2(y) > \Lambda_0$, то принимается гипотеза g_1 .
Если $f_1(y)/f_2(y) < \Lambda_0$, принимается гипотеза g_2 . } (8.7)

Уравнение $f_1(y)/f_2(y) = \Lambda_0$ является уравнением «поверхности решений» (см. рис. 8.6). Байесова стратегия может быть определена, как выбор гипотезы, дающей меньший условный риск. Условная вероятность гипотезы g_1 при условии, что результатом наблюдения является выборка y , равна

$$f(g_1 | y) = \frac{q_1 f_1(y)}{q_1 f_1(y) + q_2 f_2(y)}, \quad (8.8)$$

где $q_1 f_1(y) + q_2 f_2(y)$ — полная плотность вероятностей наблюдения y при всех возможных реализациях. Вероятность гипотезы g_2 при том же условии

$$f(g_2 | y) = \frac{q_2 f_2(y)}{q_1 f_1(y) + q_2 f_2(y)}. \quad (8.9)$$

«Условный риск», сопровождающий выбор гипотезы g_1 , определяется соотношением

$$w_{12} f(g_2 | y),$$

а условный риск при выборе g_1 равен

$$w_{21} f(g_1 | y).$$

С учетом выражений (8.8) и (8.9) видим, что байесовское правило выбора решения (8.7) выбирает гипотезу, для которой условный риск при наблюдении y оказывается меньшим.

Таким образом, выбор гипотез g_1 и g_2 и соответствующее разбиение пространства наблюдений Y на две области Y_1 и Y_2 в соответствии с байесовским правилом решений может быть записан в виде

$$Y_1: \frac{f_1(y)}{f_2(y)} > \frac{w_{12} q_2}{w_{21} q_1}; \quad Y_2: \frac{f_1(y)}{f_2(y)} < \frac{w_{12} q_2}{w_{21} q_1}. \quad (8.10)$$

Пусть теперь необходимо выбрать одну из N гипотез $g_1, g_2, \dots, g_N$, для которых заданы условные плотности вероятностей наблюдений ($y^r = [y_1, \dots, y_n]$) при реализации этих гипотез — $f_1(y), \dots, f_N(y)$ соответственно. Задача состоит в том, чтобы разбить пространство наблюдений Y на N попарно непересекающихся областей $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$. Если наблюдение попадет в область Y_i ($y \in Y_i$), то можно сделать вывод о том, что была реализована гипотеза g_i . Пусть цена ошибочного выбора гипотезы g_i , в то время как на самом деле имела место гипотеза g_j , равна w_{ji} . Вероятность этого ошибочного решения равна

$$p_{ji} = \int_{Y_i} f_j(y) dy.$$

Предположим, что известны априорные вероятности реализации соответствующих гипотез — $q_1, q_2, \dots, q_N$. Тогда математическое ожидание потерь будет равно

$$\sum_{i=1}^N q_i \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^N w_{ji} p_{ji} \right\}. \quad (8.11)$$

Области $Y_1, \dots, Y_N$ требуется выбрать так, чтобы сделать (8.11) минимальным.

Так как нам известны априорные вероятности реализации каждой из гипотез, то можно определить условную вероятность того, что наблюдение проводилось при реализации некоторой гипотезы, при условии, что компоненты вектора y имеют данные значения. Условная вероятность того, что наблюдение имело место при реализации гипотезы g_i , равна

$$\frac{q_i f_i(y)}{\sum_{k=1}^N q_k f_k(y)}. \quad (8.12)$$

Если будет принято решение, что имела место гипотеза g_j , то математическое ожидание потерь будет равно:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i f_i(y)}{\sum_{k=1}^N q_k f_k(y)} w_{ji}. \quad (8.13)$$

Мы получим минимум математического ожидания потерь, если выберем j так, чтобы (8.13) было минимальным. Для этого достаточно, чтобы для всех j сумма

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N q_i f_i(y) w_{ji} \quad (8.14)$$

была минимальной. Таким образом, данную выборку y мы относим к одной из областей Y_j , на основании чего можем принять решение о выборе гипотезы g_j . Следовательно, k -я область пространства наблюдений Y_k состоит из тех точек y , для которых выполняется неравенство:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N q_i f_i(y) w_{ki} < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N q_i f_i(y) w_{ji}, \quad (8.15)$$

где $j = 1, 2, \dots, N$; $j \neq k$.

Рассмотрим случай простейшей матрицы потерь, когда $w_{ij} = 1$ для всех i и j ($i \neq j$), т. е.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & w_{21} & \dots & w_{N1} \\ w_{21} & 0 & \dots & w_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{1N} & w_{2N} & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Тогда для точек области Y_k выполняется условие

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N q_i f_i(y) < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N q_i f_i(y), \quad (j \neq k). \quad (8.17)$$

Вычитая из обеих частей неравенства (8.17) $\sum_{i=1}^N q_i f_i(y)$, получим

$$q_j f_j(y) < q_k f_k(y), \quad (j \neq k). \quad (8.18)$$

В этом случае точка y принадлежит Y_k , если k есть индекс, для которого $q_i f_i(y)$ максимальна, т. е. g_k , соответствующая области Y_k есть наиболее вероятная гипотеза.

Стратегия принятия решений при двух гипотезах. Рассмотрим, как реализуется стратегия принятия решений, описываемая формулами (8.7), если распределение вероятностей наблюдений $f_1(y)$ и $f_2(y)$ при условии реализации соответствующих гипотез подчиняется нормальному закону, т. е. для вектора наблюдений $y^T = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ заданы плотности распределения вероятностей:

$$f_1(y) = \frac{1}{(V 2\pi)^n V |K_y|} e^{-\frac{1}{2} (y - m_y^{(1)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(1)})}; \quad (8.19)$$

$$f_2(y) = \frac{1}{(V 2\pi)^n V |K_y|} e^{-\frac{1}{2} (y - m_y^{(2)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(2)})}, \quad (8.20)$$

где $(m_y^{(1)})^T = [m_{y_1}^{(1)}, \dots, m_{y_n}^{(1)}]$, $(m_y^{(2)})^T = [m_{y_1}^{(2)}, \dots, m_{y_n}^{(2)}]$ — математическое ожидание вектора y , соответственно при реализации гипотез g_1 и g_2 ; K_y — корреляционная матрица вектора y (считаем, что она постоянна для обеих гипотез). В соответствии с правилом решения (8.7) найдем отношение

$$\begin{aligned} \frac{f_1(y)}{f_2(y)} &= \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (y - m_y^{(1)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(1)}) \right]}{\exp \left[-\frac{1}{2} (y - m_y^{(2)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(2)}) \right]} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(y - m_y^{(1)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(1)}) - (y - m_y^{(2)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(2)})] \right\}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

От неравенства вида (8.7) мы можем перейти к эквивалентному, если прологарифмируем обе его части (так как логарифмическая функция монотонно возрастает). Тогда с учетом (8.21) получим, что следует выбрать гипотезу g_1 , если

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} [(y - m_y^{(1)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(1)}) - \\ &-(y - m_y^{(2)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(2)})] > \ln \frac{q_2 \omega_{12}}{q_1 \omega_{21}} \end{aligned} \quad (8.22)$$

и выбрать гипотезу g_2 , если знак неравенства противоположный. Левую часть неравенства можно преобразовать к виду

$$y^T K_y^{-1} (m_y^{(1)} - m_y^{(2)}) - \frac{1}{2} (m_y^{(1)} + m_y^{(2)})^T K_y^{-1} (m_y^{(1)} - m_y^{(2)}). \quad (8.23)$$

Первое слагаемое (8.23) является линейной функцией компонент вектора наблюдения и называется **дискриминантной функцией**. Таким образом, в случае нормального распределения вероятностей наблюдений разбиение пространства наблюдений Y на две области Y_1 и Y_2 , и соответственно выбор гипотез g_1 и g_2 проводится по следующему правилу:

$$\begin{aligned} Y_1: & y^T K_y^{-1} (m_y^{(1)} - m_y^{(2)}) - \frac{1}{2} (m_y^{(1)} + m_y^{(2)})^T \times \\ & \times K_y^{-1} (m_y^{(1)} - m_y^{(2)}) > \ln \frac{q_2 \omega_{12}}{q_1 \omega_{21}}; \\ Y_2: & y^T K_y^{-1} (m_y^{(1)} - m_y^{(2)}) - \frac{1}{2} (m_y^{(1)} + m_y^{(2)})^T \times \\ & \times K_y^{-1} (m_y^{(1)} - m_y^{(2)}) < \ln \frac{q_2 \omega_{12}}{q_1 \omega_{21}}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Стратегия принятия решений при нескольких гипотезах. Покажем, как реализуется стратегия принятия решения, задаваемая условием (8.15), когда по измерению $y^T = [y_1, \dots, y_n]$ необходимо сделать выбор одной из N гипотез $g_1, g_2, \dots, g_N$ при распределении вероятностей выборок, подчиняющемся нормальному закону. В этом случае условные плотности вероятности наблюдений $f_i(y)$ имеют вид

$$f_i(y) = \frac{1}{(V2\pi)^n V|K_y|} \exp \left[-\frac{1}{2} (y - m_y^{(i)})^T K_y^{-1} (y - m_y^{(i)}) \right], \quad (8.25)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$; $(m_y^{(i)})^T = [m_{y_1}^{(i)}, \dots, m_{y_n}^{(i)}]$ — соответствующий

вектор среднего значения; K_y — корреляционная матрица, как и ранее постоянная при всех гипотезах. Если априорные вероятности реализаций каждой из N гипотез заданы и равны соответственно $q_1, q_2, \dots, q_N$, можем определить N функций, задаваемых формулой (8.14) и провести разбиение пространства наблюдений Y так, что область Y_i будет определена, как совокупность таких точек y , в которых j -я функция оказывается минимальной. Так же, как в случае двух гипотез, введем функции

$$\begin{aligned} \lambda_{jk}(y) &= \ln \Lambda_{jk} = \ln \frac{f_j(y)}{f_k(y)} = \\ &= \left[y - \frac{1}{2} (m_y^{(j)} + m_y^{(k)}) \right]^T K_y^{-1} (m_y^{(j)} - m_y^{(k)}). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Учитывая (8.3), условие (8.18) разбиения пространства наблюдений и выбора j -й гипотезы можем записать в виде

$$Y_j: \lambda_{jk}(y) > \ln \frac{q_k}{q_j}, \quad k = 1, \dots, N, \quad k \neq j. \quad (8.27)$$

Условие (8.27) предполагает равные цены ошибочных решений, т. е. матрицу потерь вида (8.16).

8.2.2. Корреляционно-экстремальный алгоритм фиксации прохождения ЛА района, характеризуемого аномалией геофизического поля

Пусть задачей навигационной системы ЛА является фиксация прохождения им района, характеризуемого аномалией зондируемого геофизического поля. В памяти системы хранится дискретная реализация сигнала $s^* = [s_1, \dots, s_n]$, описывающего аномалию поля в данном районе и представляющую собой результат предварительного зондирования поля в n равноотстоящих точках $s_i = h(x_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Считая скорость ЛА такой же, как и при предварительном перемещении датчика и формировании карты поля, можем принять, что s^* характеризует некоторый сигнал, зависящий от времени $s_i = h(t_i)$, измеренный в n равноотстоящих моментах времени t_i в интервале наблюдения $t_i = i\Delta t = i\frac{T}{n}$, ($1 \leq i \leq n$), $\Delta t = \Delta x/V$, где Δx — интервал между точками зондирования, V — скорость ЛА). Измерения датчика поля при прохождении аномалии представляют собой сумму ожидаемого сигнала и гауссового шума с нулевым средним значением — $y(t) = s(t) + n(t)$, фиксируемую соответственно в дискретные моменты времени так, что вектор наблюдения $y^T = [y_1, \dots, y_n]$. Все остальное время (при движении ЛА вне района аномалии) выходным сигналом датчика поля является шум измерений (ожидаемый сигнал отсутствует). Таким образом, анализируя результаты измерений, НС должна принять одно из двух решений, т. е. выбрать одну из двух гипотез: g_1 — ожидаемого сигнала, описывающего аномалию, нет и ЛА не прошел через заданный район; g_2 — ожидаемый сигнал имел место и ЛА прошел через заданный район. Если интервал Δt между измерениями превышает величину ω_c^{-1} , обратную ширине шумового спектра, то компоненты вектора наблюдения $y_i = y(t_i)$ можно считать статистически независимыми, и при гипотезе g_1 плотность вероятности их совместного распределения (8.19) будет иметь вид

$$f_1(y) = p_{11}(y_1) p_{12}(y_2) \dots p_{1n}(y_n) = (2\pi\sigma_y^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} y_k^2 \sigma_y^{-2}\right), \quad (8.28)$$

где σ_y^2 — дисперсия случайной величины y_i .

Когда ЛА проходит аномалию и ожидаемый сигнал присутствует в наблюдении, часть вектора y , обусловленная шумом измерений, равна $y_i - s_i$. Поэтому при гипотезе g_2 функция совместного распределения измеряемых величин будет иметь вид

$$f_2(y) = p_{21}(y_1) p_{22}(y_2) \dots p_{2n}(y_n) = (2\pi\sigma_y^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - s_i)^2}{2\sigma_y^2}\right]. \quad (8.29)$$

Правило принятия решений дается соотношениями (8.7) или (8.24). Коэффициент правдоподобия (8.6)

$$\Lambda_y = \frac{f_1(y)}{f_2(y)} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{2s_i y_i - s_i^2}{2\sigma_y^2}\right). \quad (8.30)$$

Решающее устройство принимает гипотезу g_1 , если $\Lambda(y) > \Lambda_0$ или с учетом (8.24), если:

$$\Delta t \left(\sum_{i=1}^n s_i y_i \right) > \Delta t \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 + \sigma_y^2 \ln \Lambda_0 \right). \quad (8.31)$$

Таким образом, выбор решения может осуществляться на основе анализа величины

$$\Delta t \sum_{i=1}^n s(t_i) y(t_i) \quad (8.32)$$

путем сравнения ее с некоторым фиксированным значением, определяемым правой частью неравенства (8.31). В n -мерном пространстве наблюдений с координатами y_i (см. рис. 8.6) поверхность решений представляет собой гиперплоскость

$$\sum_{i=1}^n s_i y_i = \text{const} \quad (8.33)$$

перпендикулярную вектору с компонентами s_i . При большом числе зондируемых точек поля и наличии белого шума в измерениях величина, определяемая формулой (8.32) (при $n \rightarrow \infty$), будет равна

$$\int_0^T s(t) y(t) dt, \quad (8.34)$$

т. е. решение о выборе одной из двух гипотез основывается на вычислении «взаимной корреляции» наблюдения $y(t)$ и ожидаемого сигнала $s(t)$ (т. е. функции, записанной в памяти системы в виде карты поля) и сравнении с некоторым пороговым значением.

8.2.3. Оптимизация поисковых алгоритмов работы КЭНС-1

Возможности применения поисковых алгоритмов в КЭНС во многом связаны с использованием БЦВМ, решающих задачу совмещения реализаций случайных функций. В качестве примера синтеза поискового алгоритма КЭНС-1 на основе изложенных результатов теории статистических решений (и, в частности, правила выбора вида (8.27)), рассмотрим алгоритм, предложенный в [9,

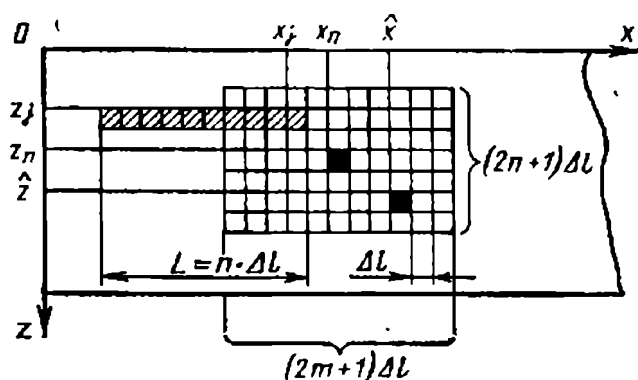


Рис. 8.7. Построение доверительного прямоугольника в координатах «грубой» системы

10]. Его реализация предполагает использование вспомогательной «грубой» навигационной системы, которая выдает приближенные значения текущих фазовых координат ЛА. Будем считать, что карта поля записана в блоке памяти КЭНС с шагом дискретизации по координатам $\Delta l = \Delta x = \Delta z$. Пусть датчик поля (соответственно ЛА) движется с постоянной скоростью вдоль оси ox (рис. 8.7). «Грубая» измерительная система выдает координаты $\mathbf{x}_n^T = [x_n, z_n]$, которые отличаются от истинных на величину $\delta_x^T = [\delta_x, \delta_z] = [x - x_n]^T = [x - x_n, z - z_n]^T$. Выбирается «длина» реализации сигнала датчика $L = n \Delta l$. Вокруг координат (x_n, z_n) , которые можно рассма-

тривать, как оценку истинных координат, полученную «грубой» системой, строится доверительный прямоугольник со сторонами $(2m + 1) \Delta l$ и $(2n + 1) \Delta l$ (см. рис. 8.7). Величины $m \Delta l$ и $k \Delta l$ выбираются большими, чем возможные ошибки «грубой» системы.

Из блока памяти последовательно извлекаются реализации той же «длины», что и реализации сигнала датчика, и которые заканчиваются соответственно в первой клетке первой строки доверительного прямоугольника, затем во второй и т. д. до конца первой строки. Затем с реализацией датчика сопоставляются реализации из памяти, заканчивающиеся в клетках второй строки и т. д. В результате перебора выбирается та реализация из блока памяти, которая более всего «похожа» на реализацию датчика. Координаты клетки $(\hat{x}, \hat{z})$, в которой эта реализация заканчивается, являются наилучшей (по выбранному критерию) оценкой истинных координат ЛА. Перейдем теперь к математической постановке задачи на языке теории решений. Система должна принять решение об истинных значениях координат ЛА. В качестве таких оценок у нас выступают координаты клеток доверительного интервала (при этом считаем, что Δl так мало, что погрешность такого порядка не существенна для целей управления ЛА) — (x_i, z_j) , где $i = -k, \dots, k$; $j = -m, \dots, m'$. Таким образом, имеем $N = (2m + 1)(2k + 1)$ «гипотез» об истинном местоположении ЛА — $g_1, g_2, \dots, g_N$ (принимая при нумерации гипотез построчную развертку при нумерации клеток). Каждой из гипотез g_i соответствует свой «ожидаемый» сигнал из блока памяти $s_i^T = [s_{i1}, \dots, s_{in}]$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Сигнал содержит дискретные значения параметра зондируемого поля $h(x, z)$. Например, сигнал, оканчивающийся в клетке, стоящей на пересечении i -й строки и j -го столбца ($i = -k, \dots, k$), ($j = -m, \dots, m$), будет иметь номер $r = (k + i)(2m + 1) + (m + j)$ и содержать компоненты

$$s_r = \begin{bmatrix} s_{r1} \\ s_{r2} \\ \dots \\ s_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_n + i \Delta l; z_n + j \Delta l) \\ h(x_n + (i - 1) \Delta l; z_n + j \Delta l) \\ \dots \\ h(x_n + (i - n + 1) \Delta l; z_n + j \Delta l) \end{bmatrix}.$$

Пусть наблюдение y содержит сумму сигнала, соответствующего реализовавшейся гипотезе и шума δh ,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x, z) + \delta h(x, z) \\ h(x - \Delta l, z) + \delta h(x - \Delta l, z) \\ \dots \\ h(x - (n - 1) \Delta l, z) + \delta h(x - (n - 1) \Delta l, z) \end{bmatrix},$$

где $\delta h(x, z)$ — ошибки измерения датчика в соответствующих точках.

Рассмотрим случай, когда наблюдение содержит гауссов шум с нулевым средним значением. Предположим также, что шумы датчика поля являются высокочастотным случайным процессом, время корреляции которого меньше интервала $\Delta t = \Delta l/V$, за который

движущийся объект проходит расстояние Δl . При этом корреляция между соседними измерениями датчика отсутствует и часть вектора y , обусловленная шумом измерений, равна $(y - s_j)$ (при реализации гипотезы g_j). Тогда при гипотезе g_j условная плотность распределения вероятности наблюдения будет иметь вид

$$f_j(y) = p_{j1}(y_1) p_{j2}(y_2) \dots p_{jn}(y_n) = (2\pi\sigma_y^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[- \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - s_{ji})^2}{2\sigma_y^2} \right].$$

При гипотезе g_k

$$f_k(y) = p_{k1}(y_1) p_{k2}(y_2) \dots p_{kn}(y_n) = (2\pi\sigma_y^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[- \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - s_{ki})^2}{2\sigma_y^2} \right].$$

Считая, что априорные вероятности реализации гипотез заданы — $q_1, q_2, \dots, q_N$ (они могут быть рассчитаны на основе знания статистических характеристик ошибок «грубой» измерительной системы) воспользуемся полученным выше правилом разбиения пространства наблюдений Y , предварительно определив в соответствии с (8.26) $\lambda_{jk}(y)$:

$$\begin{aligned} \lambda_{jk}(y) &= \ln \frac{f_j(y)}{f_k(y)} = - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - s_{ji})^2}{2\sigma_y^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - s_{ki})^2}{2\sigma_y^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i s_{ji} - y_i s_{ki}}{\sigma_y^2} + \sum_{i=1}^n \frac{s_{ki}^2 - s_{ji}^2}{2\sigma_y^2}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Запишем теперь условие выбора j -й гипотезы g_j и соответствующего выделения области Y_j пространства наблюдений (8.27)

$$\begin{aligned} Y_j: \sum_{i=1}^n y_i s_{ji} &> \sum_{i=1}^n y_i s_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_{ki}^2 - s_{ji}^2) + \sigma_y^2 \ln \frac{q_k}{q_j}, \\ k &= 1, \dots, N; \quad k \neq j. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Заметим, что решение можно основывать на значении величины ((8.32): $\Delta t \sum_{i=1}^n y(t_i) s_j(t_i)$), которая в пределе (при $n \rightarrow \infty$) дает взаимную корреляционную функцию наблюдения y и ожидаемого сигнала s_j . Причем предпочтение отдается той гипотезе g_j и соответственно тому сигналу, взаимная корреляционная функция которого максимальна, т. е. неравенство (8.36) выполняется для всех $k = 1, \dots, N$ ($k \neq j$). Каждая из функций $\lambda_{jk}(y)$ является линейной относительно наблюдения y . Следовательно, область Y_j ограничена гиперплоскостями. Второе слагаемое в правой части неравенства (8.36) зависит от статистических характеристик зондируемого поля

$h(x, z)$, и если оно стационарно и эргодично, то можно считать, что

$$\sum_{i=1}^n (s_{ki}^2 - s_{ji}^2) = \text{const.}$$

Таким образом, показано, что поиск наилучшего по критерию минимума средних потерь алгоритма совмещения реализаций случайного поля приводит к корреляционно-экстремальному алгоритму.

Упрощенная функциональная схема корреляционно-экстремальной системы показана на рис. 8.8. Блок памяти в системе предназначен для хранения эталонных значений измеряемого параметра физического поля (h), соответствующих движению ЛА по возможным траекториям из заданного множества траекторий с координатами x_n . Датчик поля измеряет текущее значение параметра физического

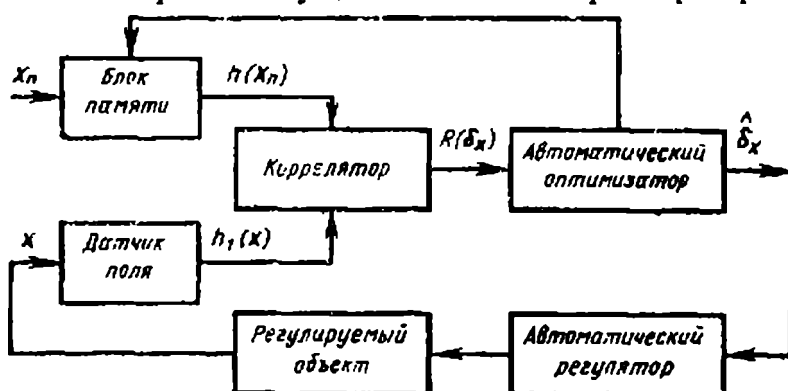


Рис. 8.8. Функциональная схема корреляционно-экстремальной системы

поля (h_1), соответствующее реальной траектории полета ЛА, характеризуемой вектором состояния x . Коррелятор осуществляет вычисление взаимной корреляционной функции сравниваемых реализаций случайных функций $h(x_n)$ и $h_1(x)$. Вычисляемая взаимная корреляционная функция $R(\delta_x)$ имеет максимум при $\delta_x = x - x_n = 0$, т. е. при совпадении желаемых (или «предсказанных» грубой системой) и действительных значений координат ЛА. Автоматический оптимизатор обеспечивает поиск экстремума взаимной корреляционной функции и определение соответствующих отклонений координат реальной траектории от желаемой, т. е. формирует некоторую оценку $\hat{\delta}_x$, на основе которой могут быть определены действительные координаты ЛА $\hat{x} = x_n + \hat{\delta}_x$, что позволит автоматическому регулятору (автопилоту) вернуть ЛА на требуемую траекторию полета.

8.3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ БЕСПОИСКОВЫХ КЭНС

8.3.1. Беспойсковые алгоритмы оценивания координат в КЭНС

Теоретической основой синтеза алгоритмов беспойсковых корреляционно-экстремальных систем служит современная теория оптимального оценивания, идентификации и управления. Примене-

ние соответствующих методов для создания алгоритмов КЭНС встречает определенные трудности. Прежде всего это связано с тем, что естественные навигационные поля, такие как поле рельефа местности, аномальное магнитное или гравитационное поле описываются весьма сложными функциями координат, напоминающими реализации случайных функций. Вектор наблюдения, используемый для оценки координат ЛА, является нелинейной, трудно поддающейся аналитическому описанию функцией вектора состояния ЛА. Так что строгое разделение алгоритмов оптимального управления и оптимального оценивания, базирующееся на использовании теоремы разделения, в данном случае невозможно.

Тем не менее на практике такое разделение проводят, переходя к приближенно оптимальным (субоптимальным) алгоритмам. При этом оптимальное управление строится на основе оптимальной оценки вектора состояния ЛА, формируемой фильтром Калмана. Обоснование такого подхода при синтезе беспойсковых алгоритмов работы КЭНС дается, например, в [45]. Движение ЛА описывается уравнениями вида (7.124) и (7.125). Фильтр Калмана для соотношений (7.124) и (7.125), описывающих модели объекта и измерений, имеет вид (7.126) и (7.127).

Значение параметра $h_n(\hat{x})$ зондируемого поля, соответствующее оценке $\hat{x}$, извлекается из блока памяти КЭНС. Для вычисления оптимальной оценки координат в соответствии с (7.126) и (7.127) необходимо вычислять значения элементов матрицы $\partial F/\partial x$, которые являются функцией $h_n(\hat{x})$ и могут быть получены численным дифференцированием в процессе работы алгоритма, либо вычисляться заранее и храниться в блоке памяти. Причем $x(t)$ здесь может принимать как значения фазовых координат, отвечающих номинальной траектории, так и полученных значений оценки $x(t) = \hat{x}(t)$. При этом для обеспечения устойчивой работы алгоритма погрешности линеаризации в пределах ошибок оценки должны быть невелики. Линеаризация функций, описывающих физические поля, возможна лишь в радиусе корреляции поля.

8.3.2. Принципы рекуррентно-поискового оценивания в КЭНС

Рекуррентная форма алгоритма фильтра Калмана позволяет существенно сократить объем вычислений, необходимых для получения текущей оценки фазовых координат. Описанные выше поисковые процедуры оценки теоретически не имеют ограничений на допустимые начальные рассогласования координат ЛА. Но чем больше эти рассогласования, тем большим оказывается объем вычислений. Так (см. разд. 8.2. 2), если линейные размеры доверительного прямоугольника возрастают в k раз, то количество «гипотез», подлежащих проверке (при неизменной точности оценки) увеличивается в k^2 раз. При этом вычисление текущей оценки координат может потребовать от БЦВМ слишком больших затрат времени. В итоге работа алго-

ритма в реальном масштабе времени, что необходимо для управления ЛА, окажется невозможной. Совместное использование дискретной калмановской фильтрации и теории проверки статистических гипотез привело к разработке алгоритмов рекуррентно-поискового оценивания [11, 45]. Такой подход направлен прежде всего на сокращение объема вычислений при увеличении допустимых начальных рассогласований. Рекуррентная форма алгоритма позволяет сопоставлять гипотезы не дожидаясь пока будут проведены все необходимые наблюдения, а делать это в темпе проведения измерений.

Для каждой из возможных гипотез моделируется соответствующий ей оптимальный фильтр, с помощью которого вычисляется оптимальная при данной гипотезе и данном векторе наблюдения оценка состояния. На ее основе вычисляется значение некоторого функционала (критерия сравнения гипотез). Гипотеза g_j , при которой достигается экстремум функционала, и соответствующая ей оценка вектора состояния выбираются в качестве оптимальных.

Для формулировки задачи рекуррентно-поискового оценивания в КЭНС воспользуемся результатом, полученным в [45]. Каждая из возможных гипотез $g_j \in G$ характеризуется априорной вероятностью q_j ($j = 1, \dots, N$). Дискретная динамическая система описывается уравнением, записываемым по аналогии с (7.102), в виде

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k|g)x(k) + \eta(k), \quad (8.37)$$

в котором переходная матрица состояния зависит от реализовавшейся гипотезы: $\Phi(k+1, k|g_j) = \Phi'(k+1, k)$. В дискретные моменты времени наблюдается сигнал

$$y(k+1) = C(k+1|g)x(k+1) + F(k+1|g) + n(k+1), \\ (k=0, 1, \dots, m), \quad (8.38)$$

где матрицы $C(k+1|g_j) = C'(k+1)$ и $F(k+1|g_j) = F'(k+1)$ также зависят от реализовавшейся гипотезы g_j .

Заметим, что матрица $F(k+1|g)$ в уравнении (8.38) описывает составляющую наблюдаемого сигнала, зависящую от реализовавшейся гипотезы и не зависящую от текущих значений фазовых координат. Статистические характеристики возмущений — дискретных белых шумов (последовательностей) — $\eta(k)$, $n(k+1)$ и начального значения вектора состояния $x(0)$ зависят от гипотезы, имеющей место на интервале наблюдения ($k=0, 1, \dots, m$):

$$M[\eta(k)\eta^T(i)|g_j] = G'(k)\delta_{ki}; \quad M[n(k+1)n^T(i+1)|g_j] = Q'(k+1)\delta_{ki}.$$

Шумы объекта и измерений в дальнейшем считаются некоррелированными $M[n(k)\eta^T(i)|g_j] = 0$.

В качестве критерия оптимальности оценивания принимают [45]

$$I = \max_{x_m, g_j} p(x_m, j|y^m). \quad (8.39)$$

Величина $p(x_i, j|y^m)$ обладает свойствами вероятности по отношению к гипотезе g_j и свойствами плотности вероятности по отношению

к вектору состояния $\mathbf{x}_i$, т. е. оптимальной считается такая оценка и такая гипотеза $(\mathbf{x}_i, g_i)$, которые имеют наибольшую вероятность совместного появления при проведенных наблюдениях y^m .

Так как множество гипотез конечно, общий максимум (8.39) можно вычислять последовательной максимизацией [45] критерия $I = \max_{g_j} (\max_{\mathbf{x}_m} p(\mathbf{x}_m, j | y^m))$, т. е. для каждой из возможных гипотез g_i необходимо найти $\mathbf{x}_m^i$, доставляющее максимум функции $p(\mathbf{x}_m, j | y^m)$. В [45] показано, что критерий можно привести к виду

$$I = \max_{g_j} b_m \exp(-J_m^i/2), \quad (8.40)$$

$$\text{где } b_i = \left\{ (\sqrt{2\pi})^n \sum_{j=1}^N \sqrt{|R^j(k|k)|} \exp \left[-\frac{1}{2} J^j(k) \right] \right\}.$$

Тогда максимум (8.40) будет достигаться при $\min J_m^i$. Значение функционала J_m^i вычисляется рекуррентно по формулам:

$$J^j(k+1) = J^j(k) + \Delta'^T(k+1) (\Sigma^j(k+1))^{-1} \Delta^j(k+1) + \varepsilon^j(k+1);$$

$$\Delta^j(k+1) = y(k+1) - C^j(k+1) \Phi^j(k+1, k) \hat{\mathbf{x}}^j(k|k) - F^j(k+1);$$

$$\varepsilon^j(k+1) = \ln(|G^j(k)| |Q^j(k+1)| |\Pi^j(k)|^{-1});$$

$$(\Pi^j(k))^{-1} = (R^j(k|k))^{-1} + \Phi'^T(k+1|k) (G^j(k))^{-1} \Phi^j(k+1|k);$$

$$(\Sigma^j(k+1))^{-1} = (Q^j(k+1))^{-1} \times$$

$$\times [E - C^j(k+1) R^j(k+1|k+1) C'^T(k+1) (Q^j(k+1))^{-1}]. \quad (8.41)$$

В качестве наиболее вероятной выбирается гипотеза g_i , минимизирующая функционал $J_m^i = \min_i J_m^i$. Оценка $\hat{\mathbf{x}}_m^i$, полученная отвечающим этой гипотезе фильтром Калмана, будет оптимальной оценкой вектора состояния $\mathbf{x}$.

Таким образом оптимальный в указанном смысле алгоритм оценивания вектора состояния и выбора гипотезы будет включать три группы уравнений [45]: уравнения оценок в форме (7.147), (7.120), уравнения корреляционной матрицы, типа (7.122) и уравнения функционалов (8.41). Последние решаются при следующих начальных условиях:

$$J^j(0) = \Delta'^T(0) (\Sigma^j(0))^{-1} \Delta^j(0) + \varepsilon^j(0);$$

$$\varepsilon^j(0) = \ln(|R_0^j| |Q^j(0)| q_j^{-2});$$

$$(\Sigma^j(0))^{-1} = (Q^j(0))^{-1} [E - C^j(0) R^j(0|0) C'^T(0) (Q^j(0))^{-1}],$$

$$(j = 1, \dots, N).$$

Три указанные группы уравнений описывают алгоритм рекуррентно-поискового оценивания.

1. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (автономные системы). М.: Наука, 1966. 579 с*.
2. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (корректируемые системы). М.: Наука, 1967. 648 с.
3. Андреевский В. В. Динамика спуска космических аппаратов на Землю. М.: Машиностроение, 1970. 232 с.
4. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М.: Наука, 1966. 307 с*.
5. Астапов Ю. М., Медведев В. С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления; под ред. Е. П. Попова. М.: Наука, 1982. 304 с.
6. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
7. Аэродинамика ракет; под ред. Н. Ф. Краснова/Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н. и др. М.: Высшая школа, 1968. 772 с.
8. Баблицкий В. К., Юрьев А. Н. Корреляционно-экстремальные методы навигации. М.: Радио и связь, 1982. 256 с.
9. Белоглазов И. Н. Проблемы синтеза и анализа корреляционно-экстремальных систем. — В кн.: Адаптивные автоматические системы; под ред. Г. А. Медведева. М.: Сов. радио, 1972, с. 120—154.
10. Белоглазов И. Н., Тарасенко В. П. Корреляционно-экстремальные системы. М.: Сов. радио, 1974. 392 с.
11. Белоглазов И. Н. Рекуррентно-поисковые алгоритмы оценивания. — ДАН, 1977, т. 236, № 2, с. 292—293.
12. Беспилотные летательные аппараты; под ред. Л. С. Чернобровкина/Афонин П. М., Голубев И. С., Колотков Н. И. и др. М.: Машиностроение, 1967. 440 с.
13. Бобнев М. П., Кривичкий Б. Х., Ярыков М. С. Комплексные системы радиоавтоматики. М.: Сов. радио, 1968. 232 с.
14. Брандин В. Н., Васильев А. А., Худяков С. Т. Экспериментальная космическая баллистика; под ред. Д. А. Погорелова. М.: Машиностроение, 1974. 340 с.
15. Брандин В. Н., Разоренов Г. Н. Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
16. Воробьев Л. М. К теории полета ракет. М.: Машиностроение, 1970. 223 с.
17. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М. Теория полета неуправляемых ракет. М.: Физматгиз, 1959. 360 с.
18. Горелик А. Л., Бутко Г. И., Белоусов Ю. А. Бортовые цифровые вычислительные машины. М.: Машиностроение, 1975. 204 с.
19. Горенштейн И. А., Шульман И. А. Инерциальные навигационные системы. М.: Машиностроение, 1970. 231 с.
20. Движение ракет (Введение в теорию полета ракет) под ред. А. А. Дмитриевского/Дмитриевский А. А., Казаковцев В. П., Лысенко Л. Н. и др.; М.: Воениздат, 1968. 464 с.
21. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами; под ред. М. С. Хитрика и С. М. Федорова/Арсен В. Д., Федоров С. М., Хитрик М. С. и др. М.: Машиностроение, 1972. 176 с.
22. Дмитриевский А. А. Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 1979. 479 с*.

23. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 328 с.
24. Жонголович И. Д. Потенциал земного тяготения — Бюллетень института теоретической астрономии АН СССР, 1957, т. 6, № 8, с. 29—37.
25. Захарин М. И., Захарин Ф. М. Кинематика инерциальных систем навигации. М.: Машиностроение, 1968. 236 с.
26. Иванов Н. М., Лысенко Л. Н., Мартынов А. И. Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом; под ред. А. А. Дмитриевского. М.: Машиностроение, 1981. 254 с.
27. Инерциальные системы управления; под ред. Д. Питтмана. М.: Воениздат, 1964. 456 с.
28. Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М. Наука, 1968. 148 с.*
29. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
30. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1962. 332 с.
31. Казаков И. Е. Статистические методы проектирования систем управления. М.: Машиностроение, 1969. 262 с.
32. Казаков И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М.: Наука, 1975. 342 с.
33. Калман Р., Бьюси Р. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. — Труды американского общества инженеров механиков, сер. Д., 1961, т. 83, № 1, с. 123—142.
34. Калман Р. Об общей теории систем управления. — Труды I конгресса ИФАК по автоматическому регулированию, 1961, т. 2, изд-во АН СССР, с. 521—547.
35. Кирст М. А. Навигационная кибернетика полета. М.: Воениздат, 1971. 184 с.
36. Колесников К. С. Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969. 298 с.
37. Колесников К. С., Сухов В. Н. Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. М.: Машиностроение, 1974. 267 с.
38. Колесников К. С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
39. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. — Успехи математических наук — М.: изд-во АН СССР, 1938, вып. 5, с. 5—41.
40. Космические радиотехнические комплексы/Бычков С. И., Лукьянов Д. П., Назимок Б. Н. и др. М.: Сов. радио, 1967. 582 с.
41. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики. Ч. II. М.: Просвещение, 1966. 400 с.
42. Костюковский Ю. М.—Л. О наблюдаемости нелинейных управляемых систем. М.: —А и Т. 1968, № 9, с. 29—42.
43. Кочетков В. Т., Половко А. М., Пономарев В. М. Теория систем телеуправления и самонаведения ракет. М.: Наука, 1964. 536 с.
44. Краснов Н. Ф. Аэродинамика. Ч. I. М.: Высшая школа, 1980. 496 с.; Ч. II. 416 с.
45. Красовский А. А., Белоглазов И. Н., Чигин Г. П. Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. М.: Наука, 1979. 448 с.*
46. Кузовков Н. Т. Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет) М.: Высшая школа, 1976. 304 с.
47. Кузовков Н. Т., Карабанов С. В., Салычев О. С. Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
48. Лахтин Л. М. Свободное движение в поле земного сфероида. М.: Физматгиз, 1963. 120 с.
49. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.*
50. Лебедев А. А., Карабанов В. А. Динамика систем управления беспилотными аппаратами. М.: Машиностроение, 1965. 528 с.
51. Лебедев А. А., Герасюта Н. Ф. Баллистика ракет. (Некоторые задачи баллистики ракет дальнего действия). М.: Машиностроение, 1970. 244 с.*

52. Летов А. М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
53. Летные испытания ракет и космических аппаратов; под ред. Е. И. Кринецкого/Криницкий Е. И., Александровская Л. Н., Шаронов А. В. и др. М.: Машиностроение, 1979. 464 с.
54. Локк А. Управление снарядами. М.: Физматгиз, 1958. 775 с.
55. Липтон А. Выставка инерциальных систем на подвижном основании. М.: Наука, 1971. 167 с.
56. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974. 696 с.
57. Медведев Г. А., Тарасенко В. П. Вероятностные методы исследования экстремальных систем. М.: Наука, 1967. 456 с.
58. Механика полета (инженерный справочник)/Горбатенко С. А., Макашов Э. М., Полушкин Ю. Ф. и др. М.: Машиностроение, 1969. 420 с.
59. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы М.: Гостехиздат, 1952. 280 с.
60. Могилевский В. Д. Наведение баллистических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1976. 208 с.
61. Одинцов В. А. Радионавигация летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1968. 408 с.
62. Основы автоматического управления; под ред. В. С. Пугачева/Пугачев В. С., Казаков И. Е., Гладков Д. И. и др. М.: Наука, 1974. 720 с.
63. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета М.: Машиностроение, 1969. 500 с.
64. Остром К. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 321 с.
65. Пельпор Д. С., Ягодкин В. В. Гироскопические системы (Ч. I. Системы ориентации и навигации); под ред. Д. С. Пельпора. — М.: Высшая школа, 1971. 216 с.
66. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 883 с.
67. Проектирование систем наведения; под ред. Е. А. Федосова/Батков А. М., Горский А. А., Левитин В. Ф. и др. М.: Машиностроение, 1975. 296 с.
68. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств. Л.: Судпромгиз, Ч. I, 1962, 502 с.; ч. II, 1964. 480 с.
69. Ривкин С. С., Ивановский Р. И., Костров А. В. Статистическая оптимизация навигационных систем; под ред. И. Б. Челпанова. Л.: Судостроение, 1976. 280 с.
70. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 463 с.
71. Селезнев В. П. Навигационные устройства. М.: Машиностроение, 1974. 600 с.
72. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.
73. Сетевые спутниковые радионавигационные системы; под ред. П. П. Дмитриева и В. С. Шебшаевича/Шебшаевич В. С., Дмитриев П. П., Иванцевич Н. В. и др. М.: Радио и связь, 1982. 272 с.
74. Сихарулидзе Ю. Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука, 1982. 352 с*.
75. Сосновский А. А., Хаймович И. А. Авиационная радионавигация (справочник). М.: Транспорт, 1980. 255 с.
76. Статистическая динамика управляемого полета/Лебедев А. А., Бобронников В. Т., Красильщиков М. Н. и др. М.: Машиностроение, 1978. 240 с.
77. Стеллард Д. Дискретная оптимальная система терминального управления ракеты. ВРТ, 1973, № 8, с. 65—79.
78. Феодосьев В. И., Снярев Г. Б. Введение в ракетную технику. М.: Оборонгиз, 1960. 507 с.
79. Феодосьев В. И. Основы техники ракетного полета. М.: Наука, 1979. 498 с.
80. Фридлендер Г. О. Инерциальные системы навигации. М.: ГИФМЛ, 1961. 154 с.
81. Фролов В. С. Инерциальное управление ракетами. М.: Воениздат, 1975. 168 с.
82. Фролов В. С. Радионинерциальные системы наведения. М.: Сов. радио, 1976. 184 с.
83. Цубон Т. Гравитационное поле Земли. М.: Мир, 1982. 286 с.

84. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики. М.: Наука, 1965. 367 с.
85. Челпанов И. Б. Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах. М.: Наука, 1967. 392 с.
86. Шаталов В. А., Селетков С. Н., Скребушевский Б. С. Применение ЭВМ в системе управления космическим аппаратом. М.: Машиностроение, 1974. 208 с.
87. Шулер М. Возмущение маятниковых и гироскопических приборов ускорениями точки подвеса, перев. с нем., «Физический периодический журнал», том 24, 1923, с. 334—350.
88. Яновский Б. М. Земной магнетизм. М.: Гостехиздат, 1953. 592 с.
89. Luenberger D. An Introduction to Observer. IEEE Trans on Automatic Control, 1971, vol. 16, № 6, p. p. 596—602.
90. Schmitt A. Future Trends of Airborn Computers. «AIAA Paper», № 895, 1972, p. 8.
91. Schultz O. T. J. Aero-Space Sci, 29, № 11, 1324—1331 (1962.)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Азимут 19
Акселерометр 86
Алгоритм дискретной фильтрации 260
— инерциальной навигации 171
— многошаговый 12
Атмосфера Земли 38
— стандартная 40
- БЦВМ 125
- Вариации параметров атмосферы 43
— изохронные 92
Вектор состояния 104
— расширенный 253
Выставка ИНС 196
- Геонд 16
Гировертиконт 202
Гирогоризонт 202
Гиростабилизатор 178, 202
- Данные установочные 124, 213
Датчик поля 283
— псевдослучайных чисел 242
— физический 242
Девяцици ИНС 184
- Задача баллистики прямая 7
— Колмогорова—Винера 250
- Измерители астрономические позицион-
ные 215, 221
— изобарические 221
— изодинамические 221
- Инерциальная НС 170 и д.
— аналитического типа 185
— бесплатформенная 186
— геометрического типа 184
— демпфированная 228
— полуаналитического типа 184
Интервал наблюдений 11
- Каналы управления 200
Карта гравиметрическая 34
— изопор 37
— магнитная 37
— местности 13, 282
Координатор цели 25, 159
Коэффициент аэродинамический 46 и д.
— правдоподобия 288
— статический усиления 81
— статистический 243
— формы 49
Критерий 105, 109, 251, 284, 299
— качества 105
— квадратичный 105
— наблюдаемости 110, 114 и д.
- Линия визирования 88, 134 и д.
— положения 13
Линеаризация уравнений 93
— нелинейностей 243
— статистическая, 243
- Метод Байеса 288
— малых отклонений 90
— наведения 135, 152
— навигации 12 и д.
— Рунге—Кутты 126

— статистических испытаний 242

Модель Земли 16

— математическая 58 и д.

— полушатурная 242

— поля ветров 44

— стохастическая 59, 121

Наблюдаемость 110

— локальная 113

— полная 114

— стационарной системы 116

Навигация 11 и д.

Навигационная система 11 и д.

— автономная 12

— инерциальная 170

— комбинированная 223

— комплексная 223

— корреляционно-экстремальная 280

— стохастическая 246

Направление базисное 174

— вертикали 198

— естественных изменений боковых отклонений и дальности 206, 207

— ориентированное 199

— стрельбы 198

Ньютонометр 86

Обеспечение баллистическое 12

— навигационное 12

Оценивание 104

— рекуррентно-поисковое 298

Параметр движения 8

— измерений (кажущийся) 208

— физического поля 283

Перегрузка 66

Плоскость стабилизации 198

— стрельбы 18, 198

Поверхность уровенная 16

— положения 13

— решения 287

Поле гравитационное 27

— магнитное 35

— поверхностное 280

— пространственное 280

Помеха аддитивная 252

— случайная 246

Потенциал Земли 27

— нормальный 29

Принцип затвердевания 54

— невозмущаемости 179

— физической реализуемости 248

— эквивалентности 119

Промах 129

— конечный 130, 162

— мгновенный 163

Пространство гипотез 286

— состояний (фазовое) 107

Процессы

абсолютно случайные 239

— винеровские 240

— марковские 239

— случайные 236

— стационарные 236

— стационарно-связанные 237

Радиус корреляции 280

Ракета баллистическая 9

Риск байесовский 288

— минимальный 106

Самонаведение 10, 134

Система (автомат) управления 9

— замкнутая 104

— наведения 10

— разомкнутая 104

— регулирования кажущейся скорости 200

— угловой стабилизация 200

— управления дальностью 200

Способ выставки ИНС 197

— дальномерный 216

— дальномерно-пеленгационный 219

— разностно-дальномерный 217

— суммарио-дальномерный 218

Сфероид 16

Схема включения фильтра 269 и д.

— компенсации 226

— фильтрации 225

Теленаведение 10, 152

Теория корреляционная 240

— нелинейной фильтрации 265

— оптимальной фильтрации 252

— полета 7

— статистических решений 106

Траектория 7, 107 и д.

— возмущенная 89

— кинематическая 133

— наведения 9 и д.

— номинальная 89

— попадающая 125, 213

— устойчивая 145

Тяга 45

Уравнение балансировочное 79

— корреляционное 245

— матричное Риккати 120, 258

— обобщенное Винера—Хопфа 249

— основное баллистическое 207

— программное угла тангажа 82

— прямое и обратное Колмогорова 240

— Фоккера—Планка—Колмогорова

240

Ускорение кажущееся 86

Установки (устойки) 180, 213

— вспомогательные 213

— основные 213

Фильтр Винера 250

— Калмана 235, 251

— субоптимальный 277

— формирующий 252

Функция Гамильтона 119

— дискриминантная 292

— решающая 287

— управляющая 205

Шум 105

— белый 238

— дискретный белый 261

— цветной (окрашенный) 252

Юстировка гироскопов 198

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Основные обозначения	5
Введение	7
Глава 1. Условия полета, определяемые геофизическими полями и атмосферой Земли	15
1.1. Аппроксимация реальной фигуры Земли и системы координат, используемые в баллистике и навигации ЛА.	16
1.2. Гравитационное поле Земли	27
1.3. Магнитное поле Земли	35
1.4. Земная атмосфера	38
1.5. Силы и моменты, действующие на ЛА в полете.	45
Глава 2. Математические основы баллистического обеспечения управляемого полета	51
2.1. Основные уравнения динамики тела переменной массы.	51
2.2. Математические модели движения беспилотных ЛА	58
2.3. Разделение пространственного движения на поступательное и вращательное, продольное и боковое	73
2.4. Уравнения движения управляемого по программе ЛА и кинематические уравнения наведения	79
2.5. Уравнения возмущенного движения и методы их исследования	89
Глава 3. Общетеоретические основы постановки и решения задач навигации и наведения	103
3.1. Элементы системного анализа задач навигации и наведения ЛА	104
3.2. Восстановители состояния и принцип эквивалентности динамических систем	115
3.3. Определение переменных состояния динамической системы	124
Глава 4. Методы и основные способы наведения ракет на подвижные цели	132
4.1. Кинематический анализ определяющих свойств траекторий наведения	133
4.2. Системы самонаведения	158
4.3. Основные элементы систем теленаведения	165
Глава 5. Инерциальная навигация и наведение баллистических ракет,	170
5.1. Элементы теории и принципы построения ИНС.	171
5.2. Основные источники и характер эволюций ошибок ИНС	188
5.3. Начальная выставка ИНС	195
5.4. Инерциальное наведение баллистических ракет	199

Глава 6. Принципы навигации с использованием комбинированных и комплексных систем	214
6.1. Физические основы работы позиционных измерителей, сочетаемых с ИНС в комбинированных системах и навигационных комплексах	215
6.2. Способы построения навигационных комплексов	223
6.3. Анализ полной наблюдаемости канала инерциально-доплеровской НС по располагаемым ошибкам определения скорости	230
Глава 7. Статистическая динамика навигационных систем	235
7.1. Элементы анализа навигационных систем ЛА с учетом случайного характера погрешностей и входных воздействий	236
7.2. Математические основы теории статистически оптимальных навигационных систем	246
7.3. Особенности применения оптимальных фильтров в навигационных системах	269
Глава 8. Математические основы реализации обзорно-сравнительного метода в корреляционно-экстремальных навигационных системах	280
8.1. Классификация и основные принципы реализации КЭНС	281
8.2. Основы теории поисковых КЭНС	285
8.3. Теоретические основы построения беспойсковых КЭНС	297
Список литературы	301
Предметный указатель	305

**Андрей Александрович Дмитриевский, Лев Николаевич Лысенко,
Николай Михайлович Иванов, Сергей Сергеевич Богодистов**
БАЛЛИСТИКА И НАВИГАЦИЯ РАКЕТ

Редактор Г. П. Филипповская
Художественный редактор В. В. Лебедев
Технический редактор Н. В. Тимофеев
Корректоры: В. Е. Блохина, Л. Е. Сониюшкяня

ИБ № 4581

Сдано в набор 07.11.84. Подписано в печать 07.05.85. Т-08190.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 19,5. Усл. кр.-отт. 19,5. Уч.-изд. л. 21,03.
Заказ 310. Тираж 3000 экз. Цена 1 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение»
107076, Москва, Стромынский пер., д. 4.

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, г. Ленинград, ул. Мойсеенко, 10.