



# СПРАВОЧНИК ПО РАСЧЕТАМ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,  
ДОПОЛНЕННОЕ И ПЕРЕРАБОТАННОЕ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1989

ББК 22.18  
Д93  
УДК 519.3

**Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.**— 3-е изд., доп. и перераб.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 464 с.— ISBN 5-02-013988-2.

Новое издание справочника является наиболее полным практическим руководством по научным, общетехническим и инженерным расчетам на электронных микрокалькуляторах. Содержит описание современных отечественных и зарубежных микрокалькуляторов, языков и основ их программирования. В справочник включено свыше 650 прикладных программ, причем более 500 из них дано для массовых отечественных микрокалькуляторов серии «Электроника» (БЗ-34, МК-52, МК-54, МК-56 и МК-61). Программы обеспечивают реализацию важнейших численных методов, вычисление широко распространенных специальных функций и решение многих практических задач. Расширено описание алгоритмов и приемов проведения вычислений (в том числе и без ввода программ). Даны рекомендации по переводу программ. Первое издание вышло в 1985 г.

Для широкого круга читателей.

Д  $\frac{1404000000-122}{053(02)-89}$  155-89

ISBN 5-02-013988-2

© Издательство «Наука»,  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1985, 1986;  
с исправлениями, 1989

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Как пользоваться справочником ; . . . . .	8
<b>Глава 1. Микрокалькуляторы с обратной бескобочной записью вычислений . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Функциональные возможности микрокалькуляторов с обратной бескобочной записью вычислений . . . . .	11
1.2. Система команд и кодов программируемого микрокалькулятора «Электроника БЗ-34» . . . . .	22
1.3. Основы программирования отечественных микрокалькуляторов . . . . .	32
1.4. Специальные приемы программирования отечественных микрокалькуляторов . . . . .	36
1.5. Система команд программируемых микрокалькуляторов НР-11С . . . . .	42
1.6. Основы программирования микрокалькуляторов НР-11С . . . . .	58
1.7. Система команд программируемых микрокалькуляторов НР-15С с расширенным микропрограммным обеспечением . . . . .	63
1.8. Особенности программирования микрокалькуляторов НР-15С . . . . .	92
1.9. Погрешности вычислений на микрокалькуляторах . . . . .	99
<b>Глава 2. Микрокалькуляторы с алгебраической логикой вычислений . . . . .</b>	<b>103</b>
2.1. Общие сведения о микрокалькуляторах с алгебраической логикой вычислений . . . . .	103
2.2. Вычисления на непрограммируемых микрокалькуляторах с алгебраической логикой . . . . .	108
2.3. Клавиатура и язык микрокалькуляторов с алгебраической логикой ТИ-58С . . . . .	117
2.4. Элементарное программирование микрокалькуляторов с алгебраической логикой . . . . .	124
2.5. Специальные вопросы программирования микрокалькуляторов с алгебраической логикой . . . . .	126
2.6. Работа с библиотекой программ пользователя . . . . .	130
2.7. Операторы управления магнитофоном и принтером . . . . .	131
2.8. Ввод, редактирование и перевод программ . . . . .	133
<b>Глава 3. Программирование простых вычислений . . . . .</b>	<b>137</b>
3.1. Операции с действительными числами . . . . .	137
3.2. Цепные и непрерывные дроби . . . . .	142

3.3.	Вычисление определителей и операции с действительными матрицами . . . . .	143
3.4.	Вычисление факториалов и комбинаторика . . . . .	148
3.5.	Операции с комплексными числами . . . . .	149
3.6.	Геометрические расчеты, векторные операции и преобразования координат . . . . .	151
3.7.	Вычисление коэффициентов характеристических полиномов матриц и их собственных значений . . . . .	159
3.8.	Вычисление юлианских дат, дней недели и числа суток между заданными датами . . . . .	161
3.9.	Масштабирование графиков и табуляция функций . . . . .	165
3.10.	Финансовые операции со сложными процентами . . . . .	170
<b>Глава 4. Вычисление элементарных функций, многочленов и цифровых последовательностей . . . . .</b>		<b>174</b>
4.1.	Гиперболические и обратные гиперболические функции действительного переменного . . . . .	174
4.2.	Элементарные функции комплексного переменного . . . . .	175
4.3.	Вычисление рядов и сложных числовых последовательностей . . . . .	180
4.4.	Вычисление многочленов Лагерра, Лежандра, Лагранжа, Эрмита и Чебышева и их коэффициентов . . . . .	182
4.5.	Операции с многочленами действительного и комплексного переменного . . . . .	189
4.6.	Производные и интеграл степенного многочлена . . . . .	198
4.7.	Геометрическое и гармоническое среднее, надежность системы . . . . .	201
<b>Глава 5. Алгоритмы и программы реализации основных численных методов . . . . .</b>		<b>202</b>
5.1.	Решение систем линейных уравнений . . . . .	202
5.2.	Интерполяция и экстраполяция функций одной переменной . . . . .	208
5.3.	Интерполяция и экстраполяция функций двух переменных . . . . .	216
5.4.	Вычисление действительных корней нелинейных уравнений . . . . .	218
5.5.	Поиск экстремумов функций . . . . .	228
5.6.	Решение алгебраических уравнений . . . . .	233
5.7.	Численное дифференцирование . . . . .	236
5.8.	Вычисление частных производных и коэффициентов чувствительности . . . . .	240
5.9.	Вычисление определенных интегралов . . . . .	243
5.10.	Вычисление двойных и тройных определенных интегралов . . . . .	252
5.11.	Решение дифференциальных уравнений первой степени . . . . .	254
5.12.	Решение систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высшей степени . . . . .	262
5.13.	Спектральный синтез . . . . .	270
5.14.	Спектральный анализ . . . . .	273
5.15.	Статистические расчеты и построение гистограмм . . . . .	288
5.16.	Генерирование случайных чисел и реализация метода Монте-Карло . . . . .	296
5.17.	Регрессионный анализ и приближение функций эмпирическими формулами . . . . .	299

5.18. Сглаживание эмпирических данных с ошибками . . . . .	304
5.19. Приближение и аппроксимация функций по Чебышеву . . . . .	307
5.20. Многоинтервальная (сплайн) интерполяция и аппроксимация . . . . .	311
<b>Глава 6. Вычисление специальных функций . . . . .</b>	<b>315</b>
6.1. Интегральная показательная и родственные ей функции . . . . .	315
6.2. Интегральный синус и косинус (включая гиперболические) . . . . .	318
6.3. Гамма-функции (включая неполные) и родственные им функции . . . . .	320
6.4. Функции Бесселя (включая модифицированные) . . . . .	326
6.5. Функции Струве (включая модифицированные) . . . . .	333
6.6. Функции Кельвина . . . . .	335
6.7. Функции Эйри . . . . .	336
6.8. Гипергеометрические функции . . . . .	337
6.9. Дигамма-функция . . . . .	338
6.10. Интегралы Френеля . . . . .	338
6.11. Эллиптические интегралы . . . . .	340
6.12. Вычисление некоторых специальных функций с помощью численного интегрирования . . . . .	341
6.13. Интеграл вероятности и связанные с ним функции . . . . .	343
6.14. Функции плотности вероятности и распределения случайных величин . . . . .	348
<b>Глава 7. Прикладные программы электрофизических, электротехнических и радиотехнических расчетов . . . . .</b>	<b>353</b>
7.1. Расчет линейных электро-радиотехнических пассивных цепей . . . . .	353
7.2. Расчет индуктивных элементов . . . . .	362
7.3. Расчет емкостных элементов и конденсаторов . . . . .	374
7.4. Расчет линий передачи и задержки . . . . .	379
7.5. Расчет нелинейных цепей в статическом режиме . . . . .	386
7.6. Расчет и моделирование нелинейных безыперционных цепей в динамическом режиме . . . . .	397
7.7. Пересчет параметров биполярных транзисторов . . . . .	398
7.8. Расчет малосигнальных усилительных каскадов на биполярных и полевых транзисторах . . . . .	400
7.9. Расчет и моделирование релаксационных генераторов . . . . .	407
<b>Приложение 1. Библиотека программ для микрокалькуляторов «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61» . . . . .</b>	<b>410</b>
<b>Приложение 2. Библиотека программ для микрокалькуляторов НР-11С и НР-15С . . . . .</b>	<b>419</b>
<b>Приложение 3. Библиотека внешних программ для микрокалькуляторов ТИ-58С/59 . . . . .</b>	<b>445</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>462</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Микрокалькуляторы — специализированные на выполнение расчетных операций микро-ЭВМ индивидуального пользования, оперирующие с десятичными числами и обеспечивающие ввод данных и программ, а также команд управления с клавишного пульта. Заметно уступая универсальным и персональным ЭВМ [10] в предельной сложности решаемых задач, скорости вычислений и объеме памяти, микрокалькуляторы, тем не менее, обеспечивают решение множества научных, общетехнических и инженерных задач достаточно оперативно, бесшумно, в любое удобное время, в любой обстановке, с высокой надежностью и точностью.

Современные программируемые микрокалькуляторы (ПМК) приобрели функциональные возможности, недавно присущие лишь большим ЭВМ: прямую и косвенную адресацию, организацию условных и безусловных переходов, циклов и подпрограмм, микропрограммное вычисление многих элементарных и специальных функций вводом одной команды, запись программ на магнитные носители (например, миниатюрные карты), подключение модулей с библиотеками программ пользователя и алфавитно-цифровых печатающих устройств (принтеров). Все это сочетается с малыми габаритами и массой, относительной дешевизной микрокалькуляторов и их подлинно массовой доступностью.

Микрокалькуляторы быстро совершенствуются. Поэтому в данном издании справочника существенно расширено описание современных ПМК. Описаны новые отечественные модели «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52» и наиболее распространенные и удачные модели ведущих зарубежных фирм: HP-11C, HP-15C фирмы Hewlett Packard, TI-58C, TI-59 фирмы Texas Instruments и др.

Основной материал справочника ориентирован на математические, научно-технические, статистические и экономические расчеты общего характера. К ним относятся: табуляция функций, реализация разнообразных численных методов, статистическая обработка данных, вычисление широко распространенных специальных математических функций и решение различных прикладных задач.

В новом издании справочника расширено описание алгоритмов, значительно увеличено число решаемых задач и повышена степень их сложности, большее внимание уделено основам программирования ПМК и технике вычислений в ручном режиме. Существенно увеличена библиотека прикладных программ. В справочник включены более 650 программ, причем свыше 500 из них даны для массовых отечественных программируемых микрокалькуляторов серии «Электроника» (БЗ-34, МК-52, МК-54, МК-56 и МК-61). Большинство программ, взятых из последнего издания справочника [9], существенно переработано: сокращена их длина, уменьшено число используемых регистров памяти, расширены инструкции по применению программ. В справочник включены не только оригинальные программы (их большая часть), но и лучшие из программ, описанных в литературе. Таким образом, справочник является наиболее полным пособием по математическому, алгоритмическому и программному обеспечению современных микрокалькуляторов.

В справочнике дается также описание языков программирования и небольших библиотек программ (приложения 2 и 3) для наиболее распространенных зарубежных микрокалькуляторов. Эти сведения полезны не только их пользователям, но и всем другим заинтересованным читателям, желающим разобраться с весьма многочисленными программами, описанными в зарубежной литературе, и освоить технику перевода программ с одного языка программирования на другой.

Справочник рассчитан на широкий круг читателей и, в первую очередь, научных работников, инженеров и студентов вузов и техникумов. Он полезен для освоения основ программирования и практического изучения численных методов.

Автор благодарит В. В. Козлова, С. В. Белякова, М. О. Иванова и многих читателей за обсуждение ряда программ, В. Г. Шиливак и О. И. Бокову — за помощь в оформлении рукописи. Он признателен многочисленным читателям, которые своими советами и пожеланиями способствовали работе над книгой. Отзывы по справочнику следует направлять по адресу: 117071 Москва В-71, Ленинский пр. 15, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука».

## КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ СПРАВОЧНИКОМ

Для облегчения использования приведенных в справочнике программ и других материалов следует руководствоваться следующими положениями.

1. Справочник не подменяет руководств по использованию конкретных типов микрокалькуляторов, с которыми следует ознакомиться прежде, чем приступить к их эксплуатации.

2. Приведенные в справочнике программы для отечественных программируемых микрокалькуляторов пригодны для всех моделей (отдельные исключения особо отмечаются) с учетом эквивалентности символов клавиш:

Символы в программах справочника	Символы модели «Электроника БЗ-34»	Символы модели «Электроника МК-56»	Символы моделей «Электроника МК-54», «Электроника МК-61», «Электроника МК-52»
↑	↑	B ↑	B ↑
П	П	$x \rightarrow П$	$x \rightarrow П$
ИП	ИП	$П \rightarrow x$	$П \rightarrow x$
XУ	$\overrightarrow{XY}$ $\overleftarrow{XY}$	$X \rightleftharpoons Y$	$\leftrightarrow$
arcsin	arcsin	$\sin^{-1}$	$\sin^{-1}$
arccos	arccos	$\cos^{-1}$	$\cos^{-1}$
arctg	arctg	$tg^{-1}$	$tg^{-1}$
F, $\bigcirc$	F $\bigcirc$	F $\bigcirc$	F $\bigcirc$
A, B, C, D, E	A, B, C, D	a, b, c, d	a, b, c, d, e

3. Перед использованием программы нужно внимательно ознакомиться с алгоритмом вычислений и правилами работы с программой.

4. Включив микрокалькулятор, переводим его в режим программирования, нажав клавиши F и ПРГ, затем вводим программу, нажимая указанные в ее тексте клавиши. Все программы справочника заносятся начиная с адреса 00. Поэтому, если микрокалькулятор уже использовался перед вводом данной программы, нужно перед нажатием клавиш F и ПРГ нажать клавишу

В/0 (установка программы на адрес 00). Для исключения ошибок при вводе программ в их тексте указаны все префиксные клавиши (например, вычисление  $e^x$  задается как  $Fe^x$ , что напоминает о необходимости нажатия префиксной клавиши F).

5. После ввода программы переводим микрокалькулятор в режим автоматических вычислений, нажав клавиши F, АВТ и В/0. Нажатие клавиши В/0 необходимо для установки программы на нулевой шаг (адрес 00). Исключения из этого правила оговариваются особо.

6. В точном соответствии с инструкцией по вводу заносим исходные данные. Обозначения вида  $x_i = PN$  означают ввод числа  $x_i$  в регистр  $N$  с помощью клавиш  $x_i$  и  $PN$  (например, число  $x_i = 3.2$  при указании  $x_i = PA$  вводится набором числа 3.2 и нажатием клавиш  $P$  и  $A$ ). Обозначения вида  $x_i = PX$  (например,  $a = PX$ ,  $b = PX$ ,  $c = PX$  и т. д.) означают, что каждое число вводится его набором в регистр  $X$ , после чего ввод обязательно фиксируется нажатием клавиши  $C/P$  (если это не оговорено, то на результаты промежуточных вычислений, индифференцируемые после нажатия клавиши  $C/P$ , можно не обращать внимания). Обозначения вида  $c = PT$ ,  $d = PZ$ ,  $y = PY$ ,  $x = PX$  означают ввод чисел в регистры стека по следующей схеме: набор числа  $c$ , нажатие клавиши  $\uparrow$ , набор числа  $d$ , нажатие клавиши  $\uparrow$ , набор числа  $y$ , нажатие клавиши  $\uparrow$ , набор числа  $x$ , нажатие клавиши  $C/P$  (в некоторых программах эта схема обозначена сокращенно символами  $c \uparrow d \uparrow y \uparrow x C/P$ ). Обозначения вида  $a$  ПП  $b$  ПП  $c$  ПП и т. д. означают, что после набора соответствующего числа нажимается клавиша ПП (выполнение одного шага программы при ее нажатии в режиме автоматических вычислений).

7. Пуск программы проводится последним нажатием клавиши  $C/P$ . Вычисления сопровождаются миганием индикатора. Если время счета не оговорено, результат должен появиться не позже чем через 30—40 с. Обозначения вида  $a \rightarrow PX$ ,  $x_i \rightarrow PX$ ,  $y_i \rightarrow PX$  означают, что результат выводится на индикацию, т. е. в регистр  $X$ , по мере нажатия клавиши  $C/P$  (с последующим ожиданием очередного результата). Обозначения вида  $a \rightarrow PX = PA$ ,  $y \rightarrow PY = P2$ ,  $z \rightarrow PZ = P3$  и т. д. означают, что результаты (значения переменных  $a$ ,  $y$ ,  $z$  или других) после остановки программы заносятся в регистры  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $T$  стека, а также хранятся в указанных регистрах памяти ( $A$ ,  $2$ ,  $3$  и т. д.). Обозначения вида  $a \rightarrow PA$ ,  $b \rightarrow PB$  и т. д. означают, что результаты заносятся в соответствующие регистры памяти, но программа не останавливается и результаты на индикацию в регистр  $X$  не выводятся. После остановки программы эти результаты могут быть вызваны в регистр  $X$  на индикацию с помощью команд вида  $IPN$ , где  $N$  — символ регистра ( $0$ ,  $1$ ,  $2$ , ...,  $9$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ). Если программа зациклилась

(в ожидаемое время остановки вычислений не происходит), вычисления прерываются нажатием клавиши С/П.

8. Программу следует проверить по контрольному примеру. Приступать к вычислениям следует, если контрольный пример (или примеры) решается верно. В противном случае нужно проверить программу по кодам (см. табл. 1.4) и уточнить правильность ввода исходных данных. Иногда полезно провести вычисления по шагам (нажимая клавишу ПП), контролируя правильность вычислений на каждом шаге. Это позволит выявить и затем устранить ошибки в программе.

9. Перед выполнением сложных вычислений рекомендуется потренироваться в решении простых задач и получить практические навыки работы с микрокалькулятором.

10. При использовании сложных моделей зарубежных микрокалькуляторов (НР-11С, НР-15С, Т1-58С, Т1-59 и др.) следует тщательно ознакомиться с языком их программирования и особенностями работы (см. гл. 1, 2). Многие программы для отечественных микрокалькуляторов могут без доработки использоваться на моделях зарубежных микрокалькуляторов с обратной бесскобочной записью вычислений, в частности на наиболее распространенных моделях фирмы Hewlett Packard. Такие программы не включены в библиотеки зарубежных микрокалькуляторов, приведенные в приложениях справочника.

11. В некоторых программах справочника встречаются операторы КП↑ и КИП↑, не допустимые для моделей ПМК «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52», либо операторы, реализованные у последних микропрограммно. Такие программы помечены знаком °. Тексты этих программ, специально переработанные для указанных ПМК, помещены в приложение 1.

## МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ С ОБРАТНОЙ БЕССКОБОЧНОЙ ЗАПИСЬЮ ВЫЧИСЛЕНИЙ

### 1.1. Функциональные возможности микрокалькуляторов с обратной бесскобочной записью вычислений

*Микрокалькуляторы* — специализированные на выполнение повседневных расчетов ЭВМ личного пользования. Их основой (рис. 1.1) является специальное устройство для проведения логических и арифметических операций — *микропроцессор* (МП). Хранение двух чисел (операндов) осуществляется с помощью запоминающих устройств — *операционных регистров* X и Y. Результат

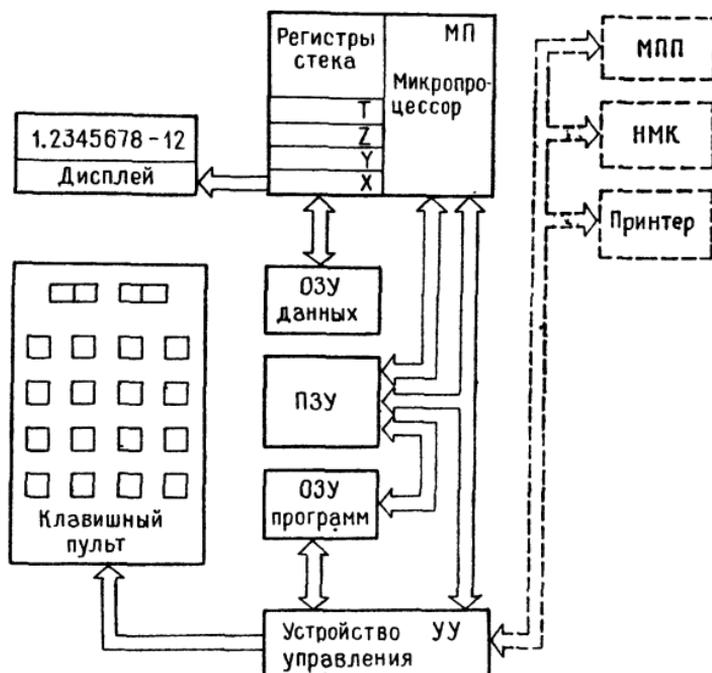


Рис. 1.1. Функциональная схема микрокалькулятора

вычислений поступает в регистр X и индицируется в десятичной форме с помощью *индикатора* (дисплея).

В современных микрокалькуляторах с операционными регистрами X и Y объединены еще несколько регистров (Z, T и т. д.),

образуя стек (магазин). Перемещение чисел в стеке вверх ( $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z, Z \rightarrow T$  и т. д.) или вниз ( $X \leftarrow Y, Y \leftarrow Z, Z \leftarrow T$  и т. д.) напоминает перемещение патронов в магазине пистолета.

К МП подключаются также постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) и оперативные запоминающие устройства (ОЗУ) данных и программ. ОЗУ данных представляет собой от одного до нескольких сотен регистров памяти, подобных регистрам  $X$  или  $Y$ . Пользователь может обратиться к любому из них, задав его номер (*адрес*). ОЗУ программ хранит команды, задаваемые программой, которую вводит пользователь. В ПЗУ хранятся команды (*микропрограммы*) для выполнения основных операций. У непрограммируемых микрокалькуляторов ОЗУ программ отсутствует. Иногда ОЗУ данных и программ объединяются, т. е. часть ОЗУ используется для хранения данных, остальная часть — для хранения программ.

Управление всеми блоками от клавишного пульта или автоматически по программе осуществляется устройством управления. Через него к МП могут подключаться некоторые дополнительные устройства: модуль с программами пользователя (МПП), накопитель информации на магнитной карте (НМК), печатающее устройство — принтер и др.

Управление всеми блоками от клавишного пульта или автоматически по программе осуществляется устройством управления. Через него к МП могут подключаться некоторые дополнительные устройства: модуль с программами пользователя (МПП), накопитель информации на магнитной карте (НМК), печатающее устройство — принтер и др.

Рис. 1.2. Внешний вид микрокалькулятора «Электроника БЗ-19М» с обратной бесконечной записью вычислений

Для проведения сложных расчетов весьма удобной оказалась бесконечная запись вычислений, предложенная польским математиком Лукасевичем. Микрокалькуляторы с обратной бесконечной записью вычислений имеют специальную клавишу для ввода и перемещения чисел в стеке вверх  $\boxed{\uparrow}$ ,  $\boxed{\uparrow E}$  или  $\boxed{ENTER \uparrow}$ \*)

\*) Иногда регистры  $X, Y, Z$  и т. д. на функциональной схеме микрокалькулятора указываются под регистром  $X$ . В этом случае стрелка на клавише ENTER обращена острием вниз. Однако такое обозначение встречается очень редко.

(enter — ввод). Арифметические операции при этом выполняются по схеме: ввод числа  $a$ , ввод оператора (команды)  $\uparrow$ , ввод числа  $b$ , ввод оператора соответствующей операции  $*$  ( $*$  — знак операции:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  или  $\div$ ). Сокращенно эта схема выглядит так:  $a \uparrow b *$ .

Из отечественных непрограммируемых микрокалькуляторов лишь одна модель — «Электроника БЗ-19М» относится к рассматриваемой группе микрокалькуляторов. Она имеет стек из трех регистров X, Y и Z. Функциональные возможности микрокалькулятора очевидны из надписей на пульте управления (рис. 1.2). Габариты этого микрокалькулятора  $86 \times 167 \times 41$  мм, масса 400 г, питание от сети и аккумуляторов (4 элемента Д-0,55).

Микрокалькулятор «Электроника БЗ-19М», как и другие, рассмотренные в книге, оперирует с числами, представленными в показательной форме  $x = M \cdot 10^E$ , где  $M$  — нормализованная мантисса и  $E = \pm 99$  — порядок числа. Функции, обозначения которых даны над клавишами, вводятся после нажатия префиксной клавиши F и соответствующей клавиши. Например, функция  $\ln x$  вычисляется после набора и нажатия клавиши F и  $\boxed{\ln}$ . Результат заносится в регистр X.

Обратная бесскобочная запись вычислений особенно удобна при вычислении сложных выражений, требующих выполнения заданной последовательности операций, например:

$$\begin{array}{ll} (a \times b) + (c \times d) \dots & a \uparrow b \times c \uparrow d \times + \dots \\ (a - b) / (c + d) \dots & a \uparrow b - c \uparrow d + \div \dots \\ a \lg \left( \frac{b+c}{d} \right) \dots & b \uparrow c + \uparrow d \div F \lg \uparrow a \times \dots \end{array}$$

Операции с тремя числами  $a$ ,  $b$  и  $c$  могут выполняться после их ввода, например:

$$\begin{array}{ll} (a + b) \times c & c \uparrow b \uparrow a + \times \\ (a \times b) + c & c \uparrow b \uparrow a \times + \end{array}$$

В этих примерах отчетливо видны особенности обратной бесскобочной записи вычислений: ввод чисел в порядке, обратном их использованию, и разделение их при вводе оператором  $\uparrow$ , выполнение подряд двух операторов арифметических действий. Отсутствие скобок. Более детальное описание дается в следующих параграфах этой главы.

Применение обратной бесскобочной записи в программируемых микрокалькуляторах позволяет заметно уменьшить число шагов программы, особенно если при вызове очередного числа предшествующие числа автоматически смещаются в верхние регистры стека, а при выполнении операций — в нижние регистры. Тогда операция  $(a + b) \times c$  выполняется символически так:  $c b a + \times$ . Для

сравнения укажем, что у микрокалькуляторов с алгебраической логикой (см. гл. 2) те же вычисления символически записываются в виде  $(a + b) \times c =$ . Таким образом, в программе они займут 8 шагов, тогда как в первом случае — только 5.

Указанные обстоятельства привели к массовому применению программируемых микрокалькуляторов с обратной бесконечной

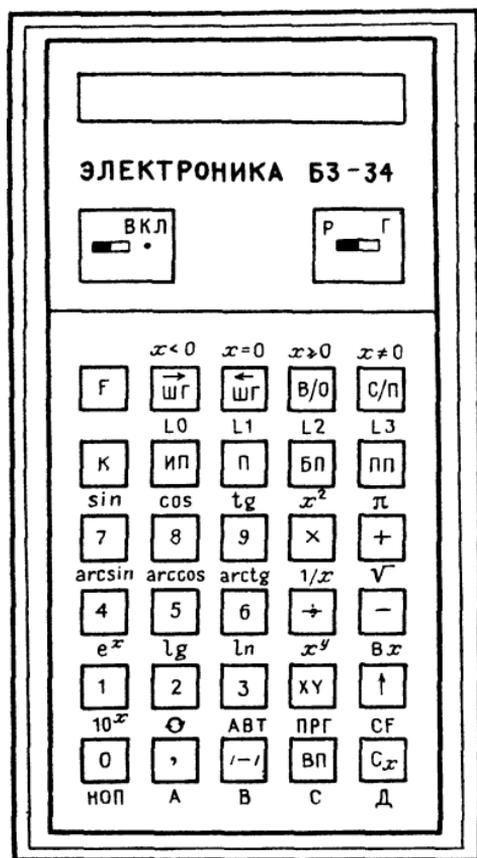


Рис. 1.3. Внешний вид программируемого микрокалькулятора «Электроника БЗ-34»

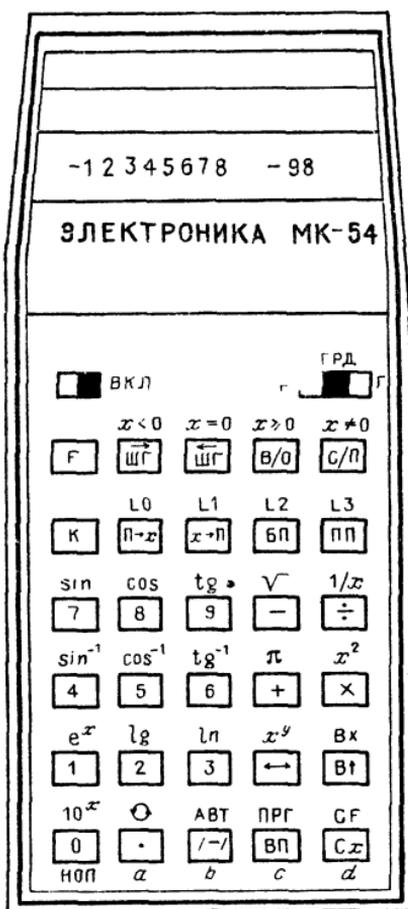


Рис. 1.4. Внешний вид программируемого микрокалькулятора «Электроника МК-54»

записью вычислений. К этой группе относятся отечественные программируемые микрокалькуляторы, технические характеристики которых даны в табл. 1.1.

Микрокалькуляторы «Электроника БЗ-21», «Электроника МК-46» условно можно отнести к первому поколению программируемых микрокалькуляторов. Они имеют ограниченный набор команд и вычисляемых по ним функций, небольшое предельное число шагов программы, а главное — только прямую адресацию (см.

ниже). Особенности вычислений и программирование этих микрокалькуляторов детально описаны в книгах [8, 18] и поэтому далее не рассматриваются.

Гораздо большими функциональными возможностями обладают программируемые микрокалькуляторы второго поколения: «Электроника БЗ-34» (рис. 1.3), «Электроника МК-54» (рис. 1.4), «Электроника МК-56» (рис. 1.5). Микрокалькуляторы «Электроника БЗ-34» — самые массовые из отечественных программируемых

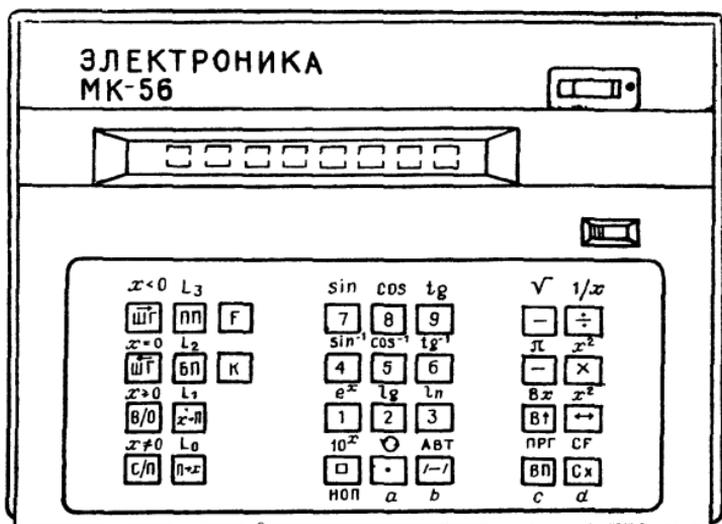


Рис. 1.5. Внешний вид программируемого микрокалькулятора «Электроника МК-56»

микрокалькуляторов. Они питаются от 4 дисковых аккумуляторов Д-0,55 (периодически подзаряжаемых от сети) либо от сети переменного тока 220 В 50 Гц через специальный адаптер.

Микрокалькуляторы «Электроника МК-54» по своим возможностям совершенно аналогичны модели «Электроника БЗ-34» (добавлено лишь представление углов в градусах — см. табл. 1.1). Благодаря питанию от гальванических элементов А316 или 316) у них несколько уменьшены масса и габариты, улучшен внешний вид и снижена цена.

Микрокалькуляторы «Электроника МК-56» выполнены в виде настольной микро-ЭВМ, питаемой только от сети. Увеличенные габариты клавишного пульта и индикатора (дисплея) делают работу с этой моделью более удобной. Эти микрокалькуляторы широко используются в школах, техникумах и вузах.

Отечественные микрокалькуляторы «Электроника МК-61» (рис. 1.6) и «Электроника МК-52» (рис. 1.7) можно отнести к третьему поколению (особенно модель «Электроника МК-52»).

## Характеристики отечественных программируемых микрокалькуляторов

Параметр	Тип микрокалькулятора				
	БЗ-21	МК-46	БЗ-34	МК-53	МК-54
Число разрядов мантисы/порядка	7,8/2	7,8/2	8/2	8/2	8/2
Число регистров операционного блока	2	2	4	4	4
Регистр восстановления результата предшествующей операции	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть
Число добавочных регистров (ячеек) памяти	6 + стек на 6 чисел	6 + стек на 6 чисел	14	14	14
Максимальное число шагов программы	60	66	98	98	98
Вычисление функций $x$ : $1/x$ , $x^2$ , $\sqrt{x}$ , $e^x$ , $\ln x$ , $\sin x$ , $\cos x$	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Вычисление функций $x$ : $\operatorname{tg} x$ , $\operatorname{arctg} x$ , $\operatorname{arccos} x$ , $10^x$ , $\operatorname{arcsin} x$ , $\ln x$	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть
Представление углов	Рadiany	Рadiany	Рadiany, градусы	Рadiany, градусы, градусы *)	Рadiany, градусы, градусы
Адресация	Прямая	Прямая	Прямая и косвенная	Прямая и косвенная	Прямая и косвенная
Время выполнения арифметических операций не более, с	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
Габариты, мм	$185 \times 100 \times 48$	$280 \times 240 \times 90$	$185 \times 100 \times 48$	$208 \times 205 \times 60$	$167 \times 78 \times 36$
Масса, кг	0,39	2,5	0,39	1,3	0,25
Питание	Универсальное	Сеть	Универсальное	Сеть	Универсальное
Оформление	Переносное	Настольное	Переносное	Настольное	Переносное

\*) Град — мера измерения углов, равная 1/100 части прямого угла

Параметры этих микрокалькуляторов даны в табл. 1.2. Микрокалькуляторы имеют расширенный набор микропрограмм, в частности выделения целой и дробной части чисел, нахождение абсолютного и максимального значения чисел, выполнение некоторых логических операций. В то же время новые модели полностью совместимы с описанными ранее моделями по системе команд и кодов. Число шагов программы увеличено до 105, число регистров памяти — до 15.

Микрокалькуляторы «Электроника МК-52» — первые отечественные микрокалькуляторы с энергонезависимой памятью, обеспечивающей сохранность программ при выключении питания. Блок этой памяти способен хранить программы с общим числом шагов до 512 и обмениваться ими с ОЗУ. Кроме того, имеется возможность подключения внешнего ПЗУ, хранящего несколько десятков программ, образующих библиотеку пользователя (эти программы записываются заводом-изготовителем).

Из зарубежных моделей программируемых микрокалькуляторов с обратной бесконечной записью вычислений наиболее массовыми являются модели серии HP фирмы Hewlett Packard (табл. 1.3). Отечественные программируемые микрокалькуляторы и калькуляторы серии HP удовлетворяют важнейшим требованиям, предъявляемым к современным микро-ЭВМ индивидуального пользования, ориентированным на научно-технические расчеты. В их числе:

- простота в работе и обслуживание одним пользователем, как правило, неспециалистом в области программирования,
- малые габариты и масса, питание от автономного источника и сети переменного тока,
- простота языка программирования, ввода и редактирования программ,

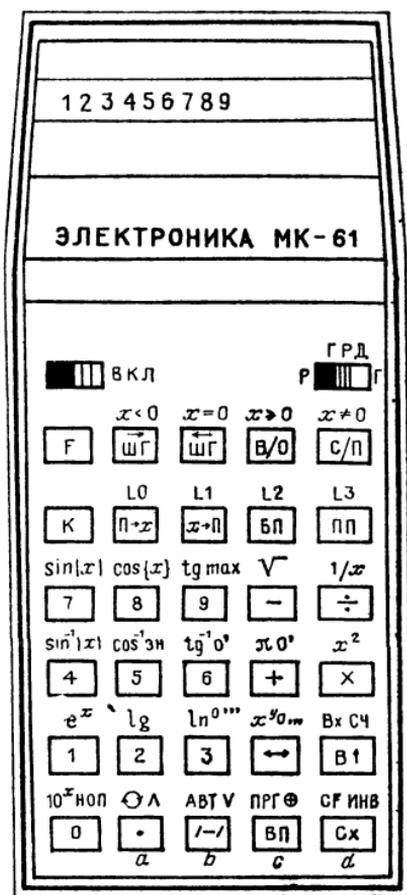


Рис. 1.6. Внешний вид программируемого микрокалькулятора «Электроника МК-61»

### Характеристики программируемых микрокалькуляторов «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52»

Параметр	Тип микрокалькуляторов	
	«Электроника МК-61»	«Электроника МК-52»
Число разрядов мантиссы/порядка	8/2	8/2
Число регистров операционного блока	4	4
Регистр восстановления результата предшествующей операции	Есть	Есть
Число регистров памяти	15	15
Максимальное число шагов программы	105	105
Адресация	Прямая и косвенная	Прямая и косвенная
Число операций	62	65
Вычисление функций $x$ : $1/x$ , $x^2$ , $\sqrt{x}$ , $e^x$ , $10^x$ , $\ln x$ , $\lg x$ , $\sin x$ , $\cos x$ , $\operatorname{tg} x$ , $\arcsin x$ , $\arccos x$ , $\operatorname{arctg} x$	Есть	Есть
Представление углов	Радианы, градусы, грады	Радианы, градусы, грады
Вычисление целой и дробной части $x$ , выделение модуля $x$ , определение наибольшего из двух чисел, определение знака $x$ , генерация случайных чисел, логические операции $\wedge$ , $\vee$ , $\oplus$ и инвертирование, преобразование углов и времени	Есть	Есть
Энергонезависимая память для программ	Нет	Есть (512 шагов)
Подключение модулей с программами пользователя	Нет	Есть
Питание	Сеть, 3 элемента А316	Сеть, 4 элемента А316
Габариты, мм	167×78×36	212×78×34,5
Масса, кг	0,25	0,25



Характеристики зарубежных микрокалькуляторов с обратной бесконечной записью вычислений для инженерных и научных расчетов (в модель, помеченную знаком \*, встроен принтер)

Параметр	Тип микрокалькулятора							
	НР-11С	НР-15С	НР-25С	НР-29С	НР-55	НР-67	НР-97*	НР-41С
Программируемость	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Число регистров памяти	21	67	8	30	20	26	26	320
Число шагов программы	63	448	49	98	49	224	224	2240
Вычисление функций $1/x$ , $\sqrt{x}$ , $y^x$ , $\ln x$ , $lg x$ , $e^x$ , $10^x$	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Тригонометрические и обратные им функции	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Гиперболические и обратные им функции	Есть	Есть	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет
Статистические расчеты	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Число разрядов мантиссы/порядка	10/2	10/2	8/2	8/2	10/2	10/2	10/2	10/2
Запоминание программ при выключении	Есть	Есть	Есть	Есть	Нет	Нет	Нет	Есть
Запись на магнитные карты	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть
Число флажков/меток	2/15	10/25	Нет	Нет	Нет	4/10	4/10	56
Косвенная адресация	Есть	Есть	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть
Подключение принтера	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть
Габариты, мм	128×80× ×15	128×80× ×15	130×68× ×30	130×68× ×30	152×81× ×34	152×81× ×34	229×203× ×64	144×33× ×33

— вычисление по встроенным микропрограммам важнейших элементарных функций аргумента  $x$  ( $1/x$ ,  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $y^x$  или  $x^y$ ,  $e^x$ ,  $10^x$ ,  $\ln x$ ,  $\lg x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$  и др.),

— достаточное максимальное число шагов программной памяти ( $\approx 100$  и выше),

— развитые программные возможности (наличие команд прямой и косвенной адресации, организации условных и безусловных переходов, подпрограмм и циклов),

— возможность выполнения всех операций с клавишного пульта,

— низкая стоимость, делающая микро-ЭВМ доступными для широкого круга пользователей (инженерно-технических и научных работников, студентов и т. д.).

Развитие современных программируемых микрокалькуляторов с обратной бесшумной записью вычислений идет по следующим направлениям: увеличение числа регистров памяти и шагов программы (см., например, модель НР-41С — табл. 1.3), использование дополнительных ОЗУ, ПЗУ с записями программ (твердотельных и в виде цифровых магнитофонов с записью программ на миниатюрные магнитные карты), обеспечение работы с внешним периферийным оборудованием (кассетные магнитофоны, принтеры, устройства сопряжения с телефонной сетью и др.).

У некоторых последних зарубежных моделей таких микрокалькуляторов существенно расширен набор функций, выполняемых микропрограммно. Так, карманные микрокалькуляторы НР-15С имеют емкость программной памяти на 448 шагов, выполняют различные операции с матрицами (размер до  $8 \times 8$ ), решают системы из 2—7 линейных уравнений, выполняют операции с комплексными числами, решают нелинейные уравнения, вычисляют определенные интегралы, проводят статистические расчеты и др. У микрокалькуляторов с буквой С в названии (НР-15С, НР-41С и др.) программа и данные в регистрах памяти сохраняются после отключения питания, что создает большие удобства при отладке сложных программ и проведении трудоемких вычислений.

Отечественные и зарубежные (серии НР) микрокалькуляторы имеют простой *символьно-кодový язык программирования* с тщательно продуманной системой команд. Это означает, что операции вводятся нажатием клавиш с изображенными на них символами и им присваиваются коды в виде чисел и знаков, отображаемых дисплеем в ходе ввода программ и их редактировании\*). Наиболее распространенные операции (ввод чисел в регистры памяти

---

\*) У микрокалькуляторов НР-29С и НР-41С операторы, в том числе буквенные, отображаются алфавитно-цифровым жидкокристаллическим дисплеем.

и их вызов, безусловные переходы и обращения к подпрограммам с косвенной адресацией и др.) выполняются одношаговыми операторами, что заметно сокращает общее число шагов программы. Не составляет труда перевод программ для отечественных микрокалькуляторов на язык программирования калькуляторов серии HP и наоборот.

Символьно-кодовое программирование имеют также некоторые настольные микро-ЭВМ: «Электроника ДЗ-28», «Электроника 15ВСМ-5», «Искра-124», «Искра-125» и др. Микро-ЭВМ «Электроника ДЗ-28» с емкостью ОЗУ от 16 до 128 кбайт имеет емкость программируемой памяти до 32 256 шагов и допускает с пульта прямое обращение к 166 десятичным регистрам памяти (ср. с 98 шагами и 14 регистрами у микрокалькулятора «Электроника БЗ-34»). Время вычисления на ней примерно в 100 раз меньше, чем у микрокалькуляторов. Особенности программирования данной ЭВМ на символьно-ковом языке описаны в [8]. Эти микро-ЭВМ программируются и на языке высокого уровня бейсик [10].

Микро-ЭВМ «Искра-124» имеет емкость программной памяти на 180 шагов, 10 регистров памяти и 3 стековых регистра. Время выполнения операций сложения и вычитания около 0,02 с, умножения и деления — 0,1 с, извлечения квадратного корня — 0,3 с и вычисления функций — около 1 с.

Микро-ЭВМ «Искра-125» имеет блок отображения информации на электронно-лучевой трубке, обеспечивающей индикацию результатов вычислений и вводимой программы. Емкость ОЗУ 1 кбайт, ПЗУ-4 кбайт. Предусмотрены прямое и косвенное обращение к 256 регистрам памяти и возможность записи программ и данных на магнитную ленту накопителя.

Символьно-кодовое программирование этих микро-ЭВМ в принципе подобно программированию микрокалькуляторов. Однако система символов клавиатуры и кодов операторов у них иная.

## **1.2. Система команд и кодов программируемого микрокалькулятора «Электроника БЗ-34»**

Внешний вид программируемого микрокалькулятора «Электроника БЗ-34» приведен на рис. 1.3. В верхней части передней панели расположен 12-разрядный люминесцентный индикатор, под которым располагаются выключатель питания и переключатель Р — Г (радианы — градусы).

Пульт управления микрокалькулятором имеет 30 клавиш с двойным или тройным управлением. Основная операция, вводимая клавишей, обозначена символом прямо на клавише. Операции, обозначенные символами красного цвета над клавишами, вводятся после нажатия префиксной клавиши F, а операции, обозначен-

ные символами черного цвета под клавишами, вводятся после нажатия префиксной клавиши К, которая используется также для ввода операций косвенной адресации.

Отметим назначение специальных символов:

АВТ — перевод в режим автоматических вычислений,

ПРГ — перевод в режим программирования.

$\pi$  — вызов числа  $\pi = 3,1415926$ ,

F,— поворот стека для вывода чисел из него в регистр X,

Vx — вызов числа из регистра восстановления результата предшествующей операции,

Cx — сброс содержимого операционного регистра X на нуль,

CF — сброс действия префиксной клавиши F,

$x < 0$ ,  $x = 0$ ,  $x \geq 0$  и  $x \neq 0$  — ввод операций условных переходов,

БП — ввод операции безусловных переходов,

ПП — ввод подпрограммы,

П — запись чисел в регистры памяти,

ИП — вызов чисел из регистров памяти,

$\overrightarrow{\text{ШГ}}$  — смещение программы на один шаг в направлении ввода,

$\overleftarrow{\text{ШГ}}$  — смещение программы на один шаг против направления ввода,

/—/ — смена знака мантиссы или порядка,

V/0 — установка программы на нулевой шаг и ввод операции возврата из подпрограммы,

C/П — ввод операции остановки и пуска вычислений по программе,

L0, L1, L2 и L3 — ввод операций для организации циклов,

НОП — ввод операции нейтрализации ошибочно введенной в программу команды,

A, B, C и D — обозначение регистров памяти с номерами 10, 11, 12 и 13,

$\uparrow$  — смещение чисел в стеке вверх на одну ступень.

При включении микрокалькулятора автоматически устанавливается режим автоматических вычислений и обнуляются все регистры памяти и операционные регистры. Сброс ошибочно введенного числа выполняется нажатием клавиши Cx. В этом режиме микрокалькулятор обеспечивает выполнение арифметических операций, вычисление функций, отмеченных в табл. 1.1, вызов числа  $\pi$ , запись чисел в 14 регистров памяти и вызов их из этих регистров, запись чисел в регистры стека и управление их продвижением, изменение знака мантиссы и порядка числа  $x$  в регистре X, обмен содержимого регистров X и Y, восстановление результата предшествующей операции и проведение сложных последовательных вычислений по обратной бескобочной схеме вычислений.

В автоматическом режиме работы программируемые микрокалькуляторы можно использовать для проведения обычных вычислений (без программы). При выполнении арифметических операций числа (операнды) вводятся в регистры стека, причем для разделения ввода используется клавиша  $V\uparrow$ . Если очередное число вводится после выполнения операции, нажимать клавишу  $V\uparrow$  уже не нужно, например:

Выполняемая операция	Нажимаемые клавиши	Показания дисплея
$(2 + 3) = 5$	2 $V\uparrow$ 3 +	5
$(2 \times 3) = 6$	2 $V\uparrow$ 3 $\times$	6
$2 + 3 \times (9 - 5) = 14$	2 $V\uparrow$ 3 $V\uparrow$ 9 $V\uparrow$ 5 - $\times$ +	14
$(9 - 5) \times 3 + 2 = 14$	9 $V\uparrow$ 5 - 3 $\times$ 2 +	14
$2^3 = 8$	3 $V\uparrow$ 2 $Fx^y$	7,9999993
$(2^3)/\pi = 2,5464791$	3 $V\uparrow$ 2 $Fx^y$ $F\pi \div$	2,5464789

Результат двухместных операций (+, -,  $\times$ ,  $\div$ ) поступает в регистр X, число из регистра X переходит в регистр восстановления результата предшествующей операции, а в остальных регистрах стека перемещение чисел происходит по схеме:  $T \rightarrow Z \rightarrow Y$ . Таким образом, операнд из регистра Y исчезает. При выполнении  $x^y$  результат поступает в регистр X, число  $x$  из регистра X поступает в регистр X1, а содержимое регистров Y, Z и T не меняется (т. е. оба операнда сохраняются).

Вычисления элементарных функций аргумента  $x$  ( $x$  вводится в регистр X) относятся к одноместным операциям. Результат их поступает в регистр X, а операнд  $x \rightarrow X1$ :

Выполняемая операция	Нажимаемые клавиши	Показания дисплея
$\ln 2$	2 F ln	6,9314717 — 01
Вызов $x = 2$	F Vx	2
$x^2 = 2^2$	F $x^2$	4
Вычисление $2^2 \ln 2$	$\times$	2,7725887

Более подробные данные о перемещениях чисел в стеке и использовании регистров памяти приводятся в следующих параграфах, посвященных проведению вычислений по программам. Отметим, что такие вычисления совершенно аналогичны проводимым вручную, но выполняются автоматически.

Микрокалькуляторы «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52» имеют ряд дополнительных команд. В их числе одноместные команды: выделение целой части числа  $K[x]$ , выделение дробной части числа  $K\{x\}$ , выделение модуля числа  $K|x|$ , определение знака числа КЗН, выдача случайного числа в интервале  $[0; 1]$  с равномерным распределением КСЧ, преобразование временных

величин, выраженных в часах, минутах, секундах и долях секунды, в значения, выраженные в часах и долях часа  $K^{\circ\overline{m}}$ , обратное преобразование  $K^{\circ\overline{m}}$ , преобразование угловых величин, выраженных в градусах, минутах и долях минуты в значения, выраженные в градусах и долях градуса  $K^{\circ'}$ , и обратно  $K^{\circ'}$ . Примеры выполнения таких операций:

Выполняемая операция	Нажимаемые клавиши	Показания дисплея
Вызов $\pi = 3,1415926$	Фл	3,1415926
Выделение целой части $\pi$	K [x]	3
Вызов $\pi = 3,1415926$	Фл	
Выделение дробной части	K {x}	1,415926 — 01
Выделение знака числа $x$ (+1 при $x > 0$ , 0 при $x = 0$ и -1 при $x < 0$ )	KЗН	1 (т.е. знак +)
Генерация случайного числа	КСЧ	4,040672 — 01
Генерация случайного числа	КСЧ	5,396403 — 01
Генерация случайного числа	КСЧ	5,8743 — 02
Вызов $-\pi = -3,1415926$	Фл/—/	— 3,1415926
Выделение модуля $x = -\pi$	K  x	3,1415926
Преобразование времени		
18 ч 24 мин 15,2 с $\rightarrow$ 18,40422 ч	$18.24152K^{\circ\overline{m}}$	18,40422
18,40422 ч $\rightarrow$ 18 ч 24 мин 15,2 с	$K^{\circ\overline{m}}$	18,241519
Преобразование угла		
30°30 $\rightarrow$ 30,5°	$30.30K^{\circ'}$	30,5
30,5 $\rightarrow$ 30°30	$K^{\circ'}$	30,3

Имеется также операция выделения максимального из двух чисел, хранящихся в регистрах X и Y. Большее из чисел поступает в регистр X (число из регистра X поступает в регистр X1). Например, введя  $\pi$  в регистр Y и 3 в регистр X (нажатием клавиши Фл 3), выделим максимальное из этих чисел  $\pi = 3,1415926$ , нажав клавиши K и тах. Таким образом, вводя числа по схеме  $x_1 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$  и т. д., в конце в регистре X получим наибольшее из всех чисел.

Имеются также четыре логические операции над числами, представленными в двоично-десятичном коде с весами 8—4—2—1. К этим операциям относятся: сложение  $K\vee$ , умножение  $K\wedge$ , сложение по модулю 2 (исключающее ИЛИ)  $K\oplus$  и инверсия числа KИНВ. Результаты вычислений индицируются цифрами и знаками (табл. 1.4).

Первые три логические операции двухместные. Числа для них заносятся в регистры Y и X (см. примеры ниже). Признаком вы-

полнения логических операций является индикация цифры 8 в старшем (самом левом) разряде индикатора. При вводе чисел в регистры X и Y в старшем разряде необходимо набрать любую незначащую цифру, отличную от нуля.

Примеры выполнения логических операций (в скобках указана символическая запись).

1. Сложить числа 8888888 и 7770665 (8888888  $\vee$  7770665):  
18888888 В  $\uparrow$  17770665 К  $\vee$  (получаем 8.8ЕЕГ)

2. Умножить числа 237 и 545 (237  $\wedge$  545):  
1237 В  $\uparrow$  5545 К  $\wedge$  (получаем 8.005)

3. Сложить по модулю 2 числа 30880 и 80001 (30880  $\oplus$  80001):  
230880 В  $\uparrow$  280001 К  $\oplus$  (получаем 8, L 0881)

Незначащие цифры в старших разрядах операндов и результатов подчеркнуты снизу. Операция инверсии является односторонней, причем подлежащее инверсии число вводится в регистр X с

Таблица 1.4

Информация в регистрах		Информация на индикаторе	Информация в регистрах		Информация на индикаторе
в десятичной системе	в двоично-десятичной системе		в десятичной системе	в двоично-десятичной системе	
0	0000	0	8	1000	8
1	0001	1	9	1001	9
2	0010	2	10	1010	—
3	0011	3	11	1011	L
4	0100	4	12	1100	[
5	0101	5	13	1101	Г
6	0110	6	14	1110	Е
7	0111	7	15	1111	Пробел

первой незначащей цифрой, отличной от нуля. Например, для обращения числа 112 набираем число 112 и нажимаем клавиши К и ИНВ. Получаем результат 8.ЕЕГ.

После перевода в режим программирования (нажатием клавиш F и ПРГ) каждая операция или команда вводится нажатием соответствующих клавиш и кодируется определенным символом. Все операции микрокалькулятора и их коды даны в табл. 1.5. Коды имеют вид цифр и знаков, отображаемых семисегментными элементами индикатора в процессе ввода программы и ее редактирования.

Микрокалькуляторы «Электроника МК-52» имеют специальное *перепрограммируемое запоминающее устройство (ППЗУ)*, которое может хранить программы и данные в течение времени до 5000 ч при выключении источников питания.

Коды микрокалькуляторов «Электроника» (в верхней части  
для моделей МК-54, МК-56, БЗ-34, МК-52 и МК-61,  
в нижней части только для моделей МК-52 и МК-61)

Операция	Код	Операция	Код	Операция	Код	Операция	Код
0	00	П0	40	$Kx \neq 00$	70	КПП0	—0
...	...	...	...	...	...	...	...
9	09	П9	49	$Kx \neq 09$	79	КПП9	—9
,	0—	ПА	4—	$Kx \neq 0A$	7—	КППA	— —
/—/	0L	ПВ	4L	$Kx \neq 0B$	7L	КППB	—L
ВП	0[	ПС	4[	$Kx \neq 0C$	7[	КППC	—[
Cx	0Г	ПД	4Г	$Kx \neq 0D$	7Г	КППD	—Г
↑	0E	FBx	0	КБП0	80	КП0	L0
+	10	C/П	50	...	...	...	...
—	11	БП	51	КБП9	89	КП9	L9
×	12	B/0	52	КБПА	8—	КПА	L—
÷	13	ПП	53	КБПB	8L	КПB	LL
XУ	14	КНОП	54	КБПC	8[	КПC	L[
$F10^x$	15	$Fx \neq 0$	57	КБПD	8Г	КПD	LГ
$Fe^x$	16	FL2	58	$Kx \geq 00$	90	КИП0	Г0
$Flg$	17	$Fx \geq 0$	59	...	...	...	...
$Fln$	18	$Fx = 0$	5E	$Kx \geq 09$	99	КИП9	Г9
$F arcsin$	19	$Fx < 0$	5[	$Kx \geq 0A$	9—	КИПА	Г—
$F arccos$	1—	FL0	5Г	$Kx \geq 0B$	9L	КИПB	ГL
$F arctg$	1L	FL1	5L	$Kx \geq 0C$	9[	КИПC	Г[
$F sin$	1[	FL3	5—	$Kx \geq 0D$	9Г	КИПD	ГГ
$F cos$	1Г	ИП0	60	$Kx < 00$	[0	$Kx = 00$	E0
$F tg$	1E	ИП1	61	$Kx < 01$	[1	$Kx = 01$	E1
Fl	20	...	...	...	...	...	...
$FV^{-}$	21	ИП9	69	$Kx < 09$	[9	$Kx = 09$	E9
$Fx^2$	22	ИПА	6—	$Kx < 0A$	[—	$Kx = 0A$	E—
$F1/x$	23	ИПB	6L	$Kx < 0B$	[L	$Kx = 0B$	EL
$Fxy$	24	ИПC	6[	$Kx < 0C$	[[	$Kx = 0C$	E[
$F,$	25	ИПD	6Г	$Kx < 0D$	[Г	$Kx = 0D$	EГ
$K \overleftarrow{}$	26	$K[x]$	34	КИПB	3—	$Kx \geq 0e$	9E
$K \overrightarrow{}$	2—	$K\{x\}$	35	КСЧ	3L	$Kx < 0e$	E
$K \overleftarrow{}$	30	$K \max$	36	$x \rightarrow Pe$	4E	$Kx = 0e$	EE
$K x $	31	$K \wedge$	37	$\Pi \rightarrow xe$	6E	КППe	—E
КЗН	32	$K \vee$	38	$Kx \neq 0e$	7E		
$K \overleftarrow{}$	33	$K \oplus$	39	КБП	8E		

ППЗУ организовано в виде матрицы, содержащей 1024 четырехрядные ячейки, расположенные в виде 64 строк (по 16 ячеек в каждой строке):

00	01	02	...	15 (строка 1)
16	17	18	...	31 (строка 2)
1008	1009	1010	...	1023 (строка 64)

Один шаг программы занимает в ППЗУ 2 ячейки, содержимое каждого адресуемого регистра памяти занимает 14 ячеек (или 7 шагов). Таким образом, в ППЗУ можно записать до  $1024/2 = 512$  шагов программ (при записи данных из регистров памяти это число соответственно уменьшается).

Управление ППЗУ осуществляется с помощью переключателей С — З — СЧ (стирание — запись — считывание), Д — П (данные — программы) и клавиш А↑ и ↑↓. Клавиша А↑ фиксирует ввод так называемого *адреса обращения* к ППЗУ. Возможно около  $10^4$  обращений к ППЗУ.

Адрес обращения к ППЗУ задается в виде числа, содержащего не менее 7 цифр и имеющего вид

*caaa.anns.ss,*

где *c* — незначащая цифра (любая, кроме 0), *aaaa* =  $A_0$  — начальный адрес (номер) ячейки ППЗУ, *nn* =  $N$  — число шагов (пар ячеек) и *s.ss* — незначащие (любые) знаки.

Начальный адрес задает номер (адрес) ячейки ППЗУ, начиная с которой происходит обращение к ППЗУ. Число  $nn = N$  определяет количество  $2N$  используемых при обращении к ППЗУ ячеек и номер  $A_k = A_0 + 2N - 1$  конечной ячейки. Пользователь имеет возможность по своему усмотрению распределить память ППЗУ с отмеченными ниже ограничениями.

Адрес обращения к ППЗУ вводится в регистр X. Ввод фиксируется нажатием клавиши А↑ (при этом адрес обращения запоминается). Обращение к ППЗУ происходит после нажатия затем клавиши ↑↓ и фиксируется появлением во всех разрядах индикатора черточек. В это время нельзя нажимать какие-либо клавиши микрокалькулятора. При хранимом в регистре X адреса обращения к ППЗУ клавиши А↑ и ↑↓ можно нажимать в любом режиме работы (автоматических вычислений или программирования).

Для программ (переключатель Д — П в положении П) или данных (переключатель Д — П в положении Д) предусмотрено три режима работы с ППЗУ: стирание, запись и считывание.

Стирание используется перед записью новых программ или данных в ранее занятые ячейки ППЗУ. Это необходимо, так как

в противном случае новая информация смешивается с хранимой ранее, что может привести к ошибкам вычислений.

Для стирания переключатель С — З — СЧ устанавливается в положение С (стирание). Затем вводится адрес обращения и нажимаются клавиши А↑ и ↑↓. Стирание происходит *построчно*. Поэтому для стирания любой полной строки достаточно указать адрес любой ее ячейки. Например, если задать адрес обращения к ППЗУ

3 0000 10

то  $N = 10$  и адрес ячейки  $2N = 20$  соответствует ее расположению во второй строке. Следовательно, будут стерты полностью первая и вторая строки. Поскольку  $nn \leq 99$ , то за один прием стирается 13—14 строк (при  $nn = 99$ ). Их число зависит от  $A_0$  и  $nn$ . Для полного стирания нужно повторить эти операции, изменяя  $A_0$ .

Стирание программ в ППЗУ производится с их адреса 00 (см. разд. 1.3). Стирается число шагов, укладываемых в указанную в адресе обращения к ППЗУ область памяти. Соответственно данные из адресуемых регистров стираются начиная с данных регистра  $P_0$ , затем  $P_1, P_2, \dots, P_e$ . Число регистров, данные из которых стираются, также определяется количеством стираемых ячеек ППЗУ. Текущая программа в ОЗУ и данные при операции стирания ППЗУ также стираются. Максимальное число шагов программ, записываемых в ППЗУ, равно 98.

Запись программ или данных в ППЗУ осуществляется при установке переключателя С — З — СЧ в положение З (запись). Программы и данные записываются с адреса  $A_0$  пачками по 7 шагов, причем начальный шаг каждой пачки для программ помещается в ее конец. Например, при  $A_0 = 0$  ( $aaaa = 0000$ ) шаги программы в ППЗУ располагаются с адреса 0000 и имеют такую последовательность: 01 02 03 04 05 06 00 (первые 7 шагов) 08 09 10 11 12 13 07 (вторые 7 шагов) 15 16 17 18 19 20 14 (третьи 7 шагов) и т. д.

При записи (в зависимости от количества шагов программы и числа регистров памяти, данные из которых подлежат хранению) указывается адрес обращения к ППЗУ (см. выше) и нажимаются клавиши А↑ и ↑↓. Если адрес обращения к ППЗУ был указан ранее (например, при предшествующем стирании), клавишу А↑ можно не нажимать. Программы и данные при их записи из ОЗУ в ППЗУ в ОЗУ стираются.

Если записать данные из всех 15 адресуемых регистров памяти, на это потребуется 210 ячеек ППЗУ. Оставшиеся 814 ячеек можно использовать для записи 406 шагов программы. Этого хватает на запись 4 программ с максимальным числом шагов около 100.

Вызов информации (программы или данных, в зависимости от положения переключателя Д — П) осуществляется при установке переключателя С — З — СЧ в положение СЧ (считывание). После этого вводится адрес обращения к ППЗУ (см. выше) и нажимаются клавиши А↑ и ↑↓.

Проиллюстрируем эти режимы работы с ППЗУ на примере использования программы для вычисления площади круга,

$$S = \pi D^2/4,$$

с хранением числа  $\pi/4$  в регистре 0 и значения  $D = 10$  см в регистре 1. Программа (см. подробнее в разд. 1.3) имеет вид

$$\text{П} \rightarrow x1 \text{ F}x^2 \text{ П} \rightarrow x0 \times \text{С/П}$$

(число из регистра 1 вызывается и возводится в квадрат, затем вызывается число из регистра 0, числа перемножаются и программа по команде С/П останавливается).

Прежде всего выясняем, что программа требует  $N = 5$  шагов в ППЗУ. Увеличиваем это число до 7 (ближайшее кратное 7). Кроме того, надо хранить данные из двух регистров 0 и 1, на что нужно еще  $2 \cdot 7 = 14$  шагов. Итого необходимо очистить 21 шаг в ППЗУ. Для этого переключатель С — З — СЧ устанавливаем в положение С. Задаем адрес обращения к ППЗУ

1 0 0 0 0 2 1

где  $A_0 = 0000$  и  $N = 21$ . Нажав клавиши А↑ и ↑↓, очищаем две первые строки ППЗУ.

Теперь вводим программу и данные. Для ввода программы нажимаем клавиши В/0 F и ПРГ, после чего вводится текст программы. Далее, нажав клавиши F, АВТ и В/0, возвращаемся в режим автоматических вычислений и устанавливаем программу на нулевой шаг. Нажав клавиши Fl  $4 \div x \rightarrow \text{П}0$  1 0  $x \rightarrow \text{П}1$ , заносим число  $\pi/4$  в регистр 0 и число 10 в регистр 1. Нажав клавишу С/П, получаем результат  $S = 78,539815$  см<sup>2</sup> и убеждаемся в работе программы.

Теперь перепишем программу из ОЗУ в ППЗУ. Для этого переключатель С — З — СЧ устанавливаем в положение З, а переключатель Д — П — в положение П. Вводим адрес обращения к ППЗУ в виде числа

1 0 0 0 0 0 7

где  $aaaa = A_0 = 0000$  и  $N = 7$ . Нажав клавиши А↑ и ↑↓, переносим программу из ОЗУ в ППЗУ. Программа из ОЗУ при этом исчезает, в чем легко убедиться.

Далее перенесем данные из регистров памяти в ППЗУ. Для этого переведем переключатель Д — П в положение Д и зададим

адрес обращения к ППЗУ в виде числа

1 0 0 1 4 1 4

где  $aaaa = A_0 = 14$  и  $N = 14$ . Нажав клавиши  $A\uparrow$  и  $\uparrow\downarrow$ , перенесим данные из регистров памяти в ППЗУ. При этом данные в регистрах памяти теряются (регистры обнуляются).

Теперь выключим микрокалькулятор и спустя 10—15 с вновь включим его. Нажав клавишу С/П, нетрудно убедиться, что программы в ОЗУ нет. Нажав клавишу С/П еще раз и далее нажав клавиши  $\Pi \rightarrow x 0$  и  $\Pi \rightarrow x 1$ , убедимся в том, что данных в регистрах памяти также нет (они обнулены).

Для вызова программы из ППЗУ и ее загрузки в ОЗУ установим переключатель С—З—СЧ в положение СЧ, а переключатель Д—П— в положение П. Задав адрес обращения к ППЗУ в виде числа

1 0 0 0 0 0 7

и нажав клавиши  $A\uparrow$  и  $\uparrow\downarrow$ , осуществим вызов программы.

Для вызова данных из ППЗУ и их ввода в адресуемые регистры памяти переведем переключатель Д—П в положение Д, зададим адрес обращения к ППЗУ

1 0 0 1 4 1 4

и нажмем клавиши  $A\uparrow$  и  $\uparrow\downarrow$ . Затем, нажав клавиши  $\Pi \rightarrow x 0$  и  $\Pi \rightarrow x 1$ , убеждаемся в том, что числа  $\pi/4$  и 10 занесены в эти регистры.

Теперь, нажав клавиши В/0 и С/П, можно пустить программу и получить вновь результат  $S = 78,539815 \text{ см}^2$ .

Следует отметить, что при обращениях к ППЗУ потребляемая от источников питания мощность кратковременно значительно возрастает. Если элементы питания частично разряжены, это может привести к нарушению работы с ППЗУ. Поэтому рекомендуется проводить запись в ППЗУ при питании микрокалькулятора от сети через специальный блок питания, поставляемый вместе с микрокалькулятором. Перед выключением микрокалькулятора переключатель С—З—СЧ следует установить в положение СЧ, так как при установке его в другие положения информация в ППЗУ может случайно нарушиться или стереться.

У микрокалькуляторов «Электроника МК-52» предусмотрено также применение внешних ПЗУ с записанными в них программами. Такие ПЗУ изготавливаются в виде небольших модулей и вставляются в специальные разъемы, нормально закрытые откидными крышками. Изменять программы в ПЗУ пользователь не может. Обычно программы в ПЗУ ориентированы на решение оп-

ределенного класса задач (общее математическое обеспечение, статистика и т. д.).

Применение ППЗУ и сменных ПЗУ значительно повышает удобства работы с микрокалькулятором и увеличивает сложность решаемых на них задач (в том числе по нескольким используемым последовательно программам).

### 1.3. Основы программирования отечественных микрокалькуляторов

Рассмотрим основные понятия программирования для моделей отечественных микрокалькуляторов на примере «Электроники БЗ-34».

**Ввод и представление чисел.** Числа-операнды вводятся в микрокалькулятор нажатием соответствующих клавиш. Порядок числа вводится нажатием клавиш ВП. Знак минус вводится нажатием клавиши  $/-/$  после ввода мантиссы или порядка числа. Числа, больше 1, но меньше  $10^8$ , представляются в обычном виде, например 9725 или 14,1256. Числа за этими пределами представляются в экспоненциальной форме  $M \cdot 10^E$ , где  $M$  — нормализованная мантисса с первым знаком от 1 до 9,  $E$  — порядок числа (до  $\pm 99$ ). Нормализация числа происходит при записи чисел в любой регистр (см. ниже).

**Операторы.** Совокупность символов, обеспечивающих по программе выполнение одной из элементарных операций, называется *оператором*. Операторы вводятся нажатием одной или нескольких клавиш. Например, вычисление  $e^x$  сводится к набору числа  $x$  и нажатию клавиш F и  $e^x$ . В программе это соответствует оператору  $Fe^x$ , который занимает один шаг (см. ниже). Некоторые операторы являются двухшаговыми.

**Регистры.** Для хранения чисел и результатов вычислений служат *регистры памяти*. По своему назначению они подразделяются на три типа. Первый тип — *операционные регистры* X и Y, в которые вводятся два операнда двухместных арифметических операций. Второй тип регистров — *регистры памяти* — служит для записи исходных данных и промежуточных результатов вычислений. Эти регистры обозначаются буквами A, B, C, D и цифрами 0 ÷ 9 (всего 14 регистров). Кроме того, еще два таких регистра Z и T объединяются с регистрами X и Y, образуя стек. К третьему типу регистров относится *регистр восстановления результата предшествующей операции* X1.

Структура стека и перемещение в нем чисел при различных операциях показаны на рис. 1.8: а) операция  $\uparrow$ ; б) ввод числа  $x$  в регистр X после операции  $Sx$ ; в) вызов в регистр X числа из регистра N (см. ниже); г) обмен содержимым регистров X и Y:  $X \rightleftharpoons Y$ ; д) одноместная операция  $\textcircled{1}$ , например вычисление  $e^x$ ,

е) двухместная арифметическая операция  $\odot^*$ ); ж) кольцевое перемещение чисел в стеке — оператор F,; з) вызов числа из регистра X1 — оператор FBx. В дальнейшем операторы  $X \rightleftharpoons Y$  и F, будут указываться символами XY и F,

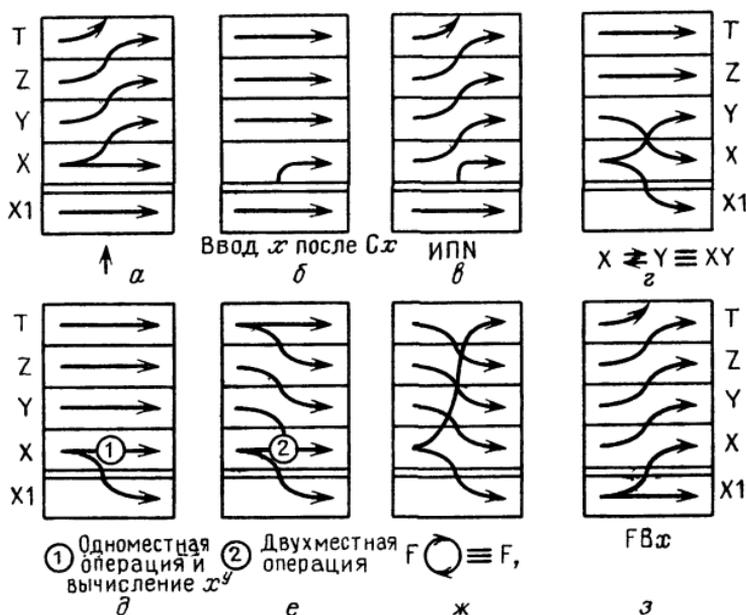


Рис. 1.8. Перемещение чисел в регистрах стека отечественных программируемых микрокалькуляторов при основных операциях

**Ввод чисел в регистры памяти.** Число можно ввести в регистр памяти  $N$  нажатием клавиш П и  $N$ . Здесь  $N$  — символ регистра (А, В, С, Д,  $0 \div 9$ ). В программах ввод соответствует оператору ПN.

**Вызов чисел из регистров памяти.** Вызывается число из регистра памяти  $N$  нажатием клавиш ИП и  $N$  (оператор ИПN).

**Шаги программы и их адреса.** Каждому оператору в программе соответствует свой шаг. Шаги последовательно нумеруются двухзначными десятичными числами от 00 до 97 (всего 98 шагов). В режиме программирования (после нажатия клавиш F и ПРГ) номера шагов высвечиваются в правом конце индикатора. Операторы в программе удобно записывать построчно, по 10 операторов в каждой строке. В этом случае положение оператора в программе позволяет легко найти номер шага, именуемый его адресом.

**Прямая адресация.** Непосредственное указание адреса (номера шага программы или символа регистра памяти) называется

\*) Исключением является операция  $x^y$  — при ней перемещение чисел в стеке происходит, как показано на рис. 1.8, д.

*прямой адресацией.* Так, описанный выше ввод чисел в регистры и их вызов проводились с использованием прямой адресации.

**Косвенная адресация.** Если адрес указан содержимым одного из регистров памяти, то адресация будет косвенной. *Косвенная адресация* задается нажатием клавиши К. Например, при выполнении по программе оператора КП5 число  $x = PX$  будет записано в регистр памяти, номер которого указан модифицированным содержимым регистра 5. Аналогично оператор КИПА обеспечивает вызов числа из регистра с номером, указанным содержимым регистра А, в регистр Х. Числам  $0 \div 13$  в регистре адресации соответствуют регистры  $0 \div 9$ , А(10), В(11), С(12) и Д(13).

**Модификация адресов при косвенной адресации.** Если в качестве регистра адресации, в котором хранится адрес обращения, взять один из регистров 7, 8, 9, А, В, С или Д, то при выполнении операторов косвенной адресации содержимое регистра адресации не изменяется. Если регистр адресации имеет номер 0, 1, 2 или 3, то при каждом выполнении операторов косвенной адресации содержимое регистра адресации уменьшается на 1, а при регистрах адресации 4, 5 или 6 увеличивается на 1. Таким образом, происходит *модификация адресов.*

**Безусловные прямые и косвенные переходы.** Для построения разветвляющихся программ используются *безусловные переходы.* Безусловный переход на шаг программы с адресом  $N$  вводится оператором БП  $N$ . Например, во фрагменте программы

ИПА	ИПВ	+	БП	17	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	ИПС	×	С/П

после выполнения операции  $a + b$  при  $a = PA$  и  $b = PB$  происходит безусловный переход на адрес 17, т. е.  $a + b$  умножается на  $c$  ( $c = PC$ ), после чего вычисления останавливаются (оператор С/П). Для простоты пропущенные операторы обозначены точками. Одношаговая команда КБПМ обеспечивает *безусловный косвенный переход* по адресу, указанному содержимым регистра адресации  $M$  ( $M = A, B, C, D, 0 \div 9$ ).

**Условные прямые и косвенные переходы.** Переход к адресу  $N$  может проводиться по данным анализа содержимого  $x$  регистра  $X$  на выполнение одного из условий:  $x < 0$ ,  $x = 0$ ,  $x \geq 0$  или  $x \neq 0$ . Такие переходы вводятся операторами  $Fx < 0$ ,  $Fx = 0$ ,  $Fx \geq 0$  и  $Fx \neq 0$ , после которых указывается оператор — адрес перехода  $N$ . Если условие перехода не выполняется, то происходит переход на шаг программы с адресом  $N$ , если выполняется — адрес перехода игнорируется и выполняется следующая за ним часть программы. Одношаговая команда  $Kx < 0M$ ,  $Kx = 0M$ ,  $Kx \geq 0M$  или  $Kx \neq 0M$ , где  $M$  — символ регистра адресации ( $M = A, B, C, D, 0 \div 9$ ), обес-

печивает условный переход по адресу, указанному содержимым регистра  $M$ .

**Подпрограммы.** Повторяющиеся фрагменты программ можно оформить в виде *подпрограммы*, которая должна начинаться с адреса  $N$  и кончатся оператором возврата из подпрограммы В/О. Обращение к подпрограмме из любого места программы задается двухшаговой командой, содержащей операторы ПП и  $N$ .

Пусть подпрограмма имеет  $n$  шагов и повторяется  $m$  раз. Тогда она в программе займет  $n + 1$  шагов. Кроме того, придется дать  $m$  обращений к подпрограмме, что займет  $2m$  шагов. Без введения подпрограммы вычисления займут  $m \cdot n$  шагов. Следовательно, если  $2m + n + 1 < m \cdot n$  или  $n > (2m + 1)/(m - 1)$ , то введение подпрограммы сокращает общее число шагов программы. Однако число операций при этом возрастает, растет и время вычислений. Можно использовать до пяти подпрограмм, вложенных друг в друга. Одношаговая команда КППМ обеспечивает косвенное обращение к подпрограмме с адресом  $N$ , определяемым содержимым регистра адресации  $M$  ( $M = A, B, C, D, 0 \div 9$ ).

**Организация циклов.** Для организации циклов циклических программ служат операторы построения счетчиков FL0, FL1, FL2 и FL3 в регистрах 0, 1, 2 и 3. После этих операторов указывается адрес перехода  $N$ . При выполнении этих операторов содержимое соответствующего регистра-счетчика уменьшается на 1. Если оно не равно нулю, то происходит переход по адресу  $N$ , а если оно становится равным нулю — переход идет к шагу программы, следующему след за оператором.

**Остановка и пуск программы.** Для остановки программы в пужном месте вводится оператор С/П. Нажатие клавиши с этим символом ведет к запуску программы. Для запуска программы с нулевого адреса нажимаются клавиши В/О и С/П.

**Ввод и редактирование программы.** Программа вводится нажатием соответствующих клавиш после перевода калькулятора в режим программирования (нажатием клавиш F и ПРГ). При этом на индикаторе отображаются коды трех последних операций и адрес последующей операции, например:

Показания индикатора	10	6	6	—	10
Операторы	+	ИПВ	ИПА		
Направление ввода программы	—————→				

При ошибочно нажатой префиксной клавише F сброс ее действия производится нажатием клавиши CF. Для установки программы на заданный адрес используются клавиши сдвига программы на один шаг вправо  $\overrightarrow{\text{ППГ}}$  или влево  $\overleftarrow{\text{ППГ}}$ . С их помощью можно установить программу на шаг с ошибочно набранным оператором и исправить его. Для этого (в режиме автоматических вычислений

после нажатия клавиш F и АВТ) можно использовать команды БП и N (установка программы на шаг с адресом N). Двухшаговые команды, набранные ошибочно, заменяются новыми полностью (т. е. с вводом обоих операторов). На место лишнего оператора вставляется оператор КНОП (нет операции).

**Индикация некорректных операций.** При выполнении *некорректных операций* (деление на нуль, переполнение разрядной сетки ЭВМ, возведение  $x = 0$  в степень  $y$ , вычисление квадратного корня из отрицательного числа, вычисление  $1/x$  при  $x = 0$  и т. д.) вычисления останавливаются и на индикаторе появляется символ ЕГГОГ (от английского слова error — ошибка). После этого можно проводить ввод чисел и продолжать вычисления.

**Представление углов.** Аргумент тригонометрических функций можно выражать в градусах или радианах. Для этого служит переключатель Р — Г (радианы — градусы).

**Примеры для контроля программ.** Составленные и отлаженные программы должны сопровождаться контрольным примером (или примерами, если программа разветвляющаяся). Приступать к основным вычислениям можно только после проверки программы по контрольному примеру. Если будет обнаружена ошибка, следует проверить правильность ввода программы по кодам основных операций (см. табл. 1.3). При отладке программ бывает полезно проверить вычисления по шагам; для этого в режиме автоматических вычислений нажимается клавиша ПП.

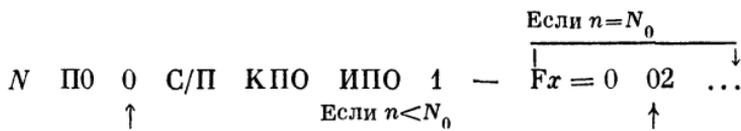
#### 1.4. Специальные приемы программирования отечественных микрокалькуляторов

Операторы косвенной адресации обеспечивают дополнительные возможности, не отмеченные в инструкции к пользованию микрокалькуляторами «Электроника БЗ-34». Так, при вводе числа  $x$  ( $1 < x < 10^8$ ) в регистры 7, 8, 9, А, В, С и Д и последующем выполнении операторов КПМ или КИПМ происходит автоматическое отбрасывание дробной части числа  $x$ . Например, введя в регистр X число  $x = 421,756$  и выполнив операторы П9 КИП9 ИП9, получим результат в виде 00000421. При любой последующей операции это число приобретает обычный вид 421. Таким образом, всего два оператора ПМ и КИПМ обеспечивают *выделение целой части  $x$* .

Если регистр  $M = 0, 1, 2$  или 3, то наряду с отбрасыванием дробной части при выполнении оператора КИПМ или КПМ происходит уменьшение целой части числа в регистре  $M$  на 1, а если  $M = 4, 5$  или 6, то происходит увеличение целой части числа на 1. Это позволяет строить счетчики вида  $n = n - 1$  и  $n = n + 1$  вводом всего одного оператора КИПМ или КПМ, причем текущие зна-

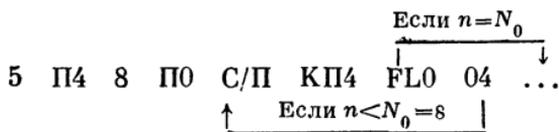
чения  $n$  заносятся в регистр  $M$  и могут в дальнейшем без модификации вызваться оператором ИПМ. Повторяя операторы КИПМ или КПМ  $a$  раз, можно организовать построение счетчиков вида  $n = n - a$  и  $n = n + a$ . Предпочтение следует отдавать оператору КИПМ, так как при использовании оператора КПМ в регистры, номера которых соответствуют  $n$ , будут заносятся результаты предшествующих операций.

Для последовательного ввода до  $N_0 = 13$  чисел  $a_{13}, a_{12}, \dots, a_1$  в регистры 1, 2, ..., 9, А, В, С и Д можно использовать циклическую программу с косвенной адресацией к регистрам:



Здесь  $N = N_0 + 1$ . Если  $N > 9$ , адрес 02 в конце программы надо заменить на 03. При каждом цикле меняется на  $-1$  адрес в регистре адресации 0 и соответственно каждое новое число попадает в новый регистр: Д, С, В, А, 9, ..., 1. После ввода всех чисел происходит выход из цикла.

Еще один фрагмент программы, обеспечивающий ввод до 8 чисел в регистры 6, 7, 8, 9, А, В, С и Д:



В этом фрагменте номера регистров, в которые заносятся числа, формируются в регистре 0 при выполнении оператора FL0.

Отметим, что ввод  $N_0$  чисел фрагментом программы с прямой адресацией

П1 С/П П2 С/П П3 С/П П4 С/П и т. д.

занимает  $2N_0 - 1$  шагов, т. е. 15 шагов при  $N_0 = 8$  и 25 при  $N_0 = 13$ , что существенно больше, чем при организации ввода с использованием косвенной адресации.

В общем случае программы могут быть *линейными*, *разветвляющимися* и *циклическими*. Примером линейной программы является программа вычисления функции

$$y = (\sin \pi nft) / (\pi nft) \quad (1.1)$$

с вводом  $t$  в регистр X. Отведем под запись  $n$  и  $f$  регистры 8 и 9 ( $n = P8, f = P9, t = PX$ ). Будем записывать программу с нулевого адреса. В полном виде программа имеет такой вид (впизу

дано размещение чисел в регистрах X, Y, Z, T и X1 стека после ввода  $n$ ,  $f$  и  $t$  и выполнения программы по шагам):

Адрес	00 01	02	03 04	05	06	07	08	09
Код	20 68	69	12 12	12	11	0	13	50
Оператор	Fl ИП8	ИП9	× ×	×	Fsin	FBx	÷	C/П
T	0	$n$ $f$	$t$	$t$ $t$	$t$	$t$	$t$	$t$
Z	$n$	$f$ $t$	$\pi$	$t$ $t$	$t$	$t$	$t$	$t$
Y	$f$	$t$ $\pi$	$n$	$\pi$ $t$	$t$	$\sin \pi nft$	$t$	$t$
X	$t$	$\pi$ $n$	$f$	$nf$ $\pi nf$	$\pi nft$	$\sin \pi nft$	$\pi nft$	$y$ $y$
X1	0	$t$ $t$	$t$	$f$ $nf$	$\pi nf$	$\pi nft$	$\pi nft$	$\pi nft$ $\pi nft$

При вычислении по этой программе используются все регистры стека. Перед пуском программы нажимается клавиша В/0 и программа устанавливается на нулевой адрес. После этого вводятся исходные данные. При  $n = 2$ ,  $f = 1000$  и  $t = 1,2 \cdot 10^{-4}$  получаем  $y = 9,0790883 \cdot 10^{-1}$ .

Эту программу можно записать несколько иначе, выполняя операции умножения по мере ввода каждого нового сомножителя:

Fl × ИП8 × ИП9 × Fsin FBx ÷ C/П

Обычно такой способ предпочтителен, так как слабее загружает стек и предотвращает потерю числа из регистра T при случайных переполнениях стека.

В дальнейшем адреса и коды приводиться не будут. Адрес легко определяется положением команды при записи программы построчно с десятью операторами в каждой строке. Коды нужны только при проверке программ неопытными пользователями, так как на первых порах ошибочное нажатие клавиш не редкость. Если пользователь критически оценивает свою пунктуальность при вводе программ, он может составить дополнительную таблицу кодов нужной программы, используя табл. 1.5. При некотором навыке коды операций быстро запоминаются.

Теперь рассмотрим простейшую разветвляющуюся программу. Нетрудно заметить, что при  $t = 0$  значение  $y$  по (1.1) определить нельзя, так как  $(\sin \pi nft)/(\pi nft)$  дает неопределенность вида 0/0, а деление на 0 относится к некорректным операциям. При вводе  $t = 0$  вычисления по описанным программам приводят к появлению знака ошибки ЕГГОГ. Между тем значение  $\sin x/x = 1$  при  $x = 0$ . Следовательно, более точно определять  $y$  по двум формулам:

$$\begin{aligned}
 y &= 1 && \text{при } t = 0, \\
 y &= (\sin \pi nft)/(\pi nft) && \text{при } t \neq 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Переход от одной формулы к другой можно осуществлять, используя условные переходы по условиям  $x = 0$  или  $x \neq 0$ . Тогда по-

лучим такую программу:

```

Fx = 0 04 1 C/П Фл ИП8 ИП9 × × ×
Fsin FBx ÷ C/П

```

Если ввести  $t = 0$ , то условие  $t = x = 0$  выполняется, адрес перехода 04 игнорируется и на индикацию выводится 1. Если  $t = x \neq 0$ , условие не выполняется и происходит переход по адресу 04, т. е. вычисление по второй формуле (1.2). Отметим, что при вводе каждого нового значения  $t$  надо нажимать клавиши В/0 и С/П.

Модифицируем программу так, чтобы после ввода каждого значения  $t$  требовалось нажимать только клавишу С/П:

```

Fx = 0 06 1 C/П БП 00 Фл ИП8 ИП9 ×
× × Fsin FBx ÷ БП 03

```

Допустим, введено  $t = 0$ . Тогда после пуска будет выдано значение  $y = 1$ . Набрав новое значение  $t$  и нажав клавишу С/П, мы обеспечим безусловный переход (команда БП 00) на адрес 00. Если  $t \neq 0$ , то условие  $x = t = 0$  не выполняется и продолжение программы пойдет с адреса 06. После деления  $\sin \pi nft$  на  $\pi nft$  (операция с адресом 14) происходит безусловный переход на адрес 03 (операторы БП 03), т. е. к команде остановки вычислений С/П.

Рассмотрим пример составления программы с подпрограммой косвенной адресации регистров памяти. Пусть надо вычислить значение выражения

$$f = (ae^{\pi x^2/2} - be^{\pi y^2/2}) / (ce^{\pi z^2/2}). \quad (1.3)$$

Будем руководствоваться следующим алгоритмом.

1. Значение  $\pi/2$  вычислим один раз в начале программы, что сократит общее время счета.

2. Вычисление похожих членов  $ae^{\pi x^2/2}$ ,  $be^{\pi y^2/2}$  и  $ce^{\pi z^2/2}$  оформим подпрограммой.

3. Так как при выполнении п. 2 значения  $x$ ,  $a$ ,  $y$ ,  $b$ ,  $z$  и  $c$  должны вызываться поочередно, то это целесообразно сделать, используя косвенную адресацию регистров памяти и разместить  $x$ ,  $a$ ,  $y$ ,  $b$ ,  $z$  и  $c$  последовательно в регистрах 7, 8, 9, А, В и С.

Тогда получим программу в виде

```

Фл 2 ÷ П6 6 П5 ПП 15 ПП 15
— ПП 15 ÷ С/П КИП5 Fx2 ИП6 × Fex
КИП5 × В/0

```

Запись числа 6 в регистр адресации 5 задает вызов числа  $x$  из регистра 7 при первом обращении к подпрограмме, которое

начинается с операции косвенной адресации КИП5 по адресу 15. При выполнении этого оператора содержимое регистра 5 (число 6) увеличивается на 1. Следовательно, происходит вызов числа  $x$  из регистра  $7 = 6 + 1$ . Далее  $x$  возводится в квадрат, умножается на  $\pi/2 = P6$  и вычисляется  $e^{\pi x^2/2}$ . Затем (оператор КИП5 по адресу 20) происходит вызов числа  $a$  из регистра 8, так как содержимое регистра 5 вновь увеличивается на 1. Подпрограмма заканчивается умножением  $e^{\pi x^2/2}$  на  $a$  и возвратом (оператор В/0) к основной программе. Аналогично (для пар  $y, b$  и  $z, c$ ) происходит второе и третье выполнение подпрограммы.

Сравним эту программу с программой вычисления (1.3) без подпрограммы:

Fl	2	÷	P6	ИП7	$Fx^2$	×	$Fe^x$	ИП8	×
ИП9	$Fx^2$	ИП6	×	$Fe^x$	ИПА	×	—	ИПВ	$Fx^2$
ИП6	×	$Fe^x$	ИПС	×	÷	С/П			

Нетрудно заметить, что в данном случае введение подпрограммы сократило общее число шагов программы на 4 шага. Однако время вычисления при введении подпрограммы несколько увеличивается. Действительно, при  $x = 3, a = 100, y = 2, b = 5, z = 4$  и  $c = 0,01$  получим результат  $f = 1,6775483 \cdot 10^{-1}$  за время около 15 с по первой и около 12 с по второй программ.

Теперь рассмотрим составление *циклических* программ. Пусть надо вычислить функцию

$$f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{x + 1}$$

для  $x = 1, 2, 3 \dots$ . Один из простейших вариантов программы вычисления  $f(x)$  имеет вид ( $0 = P4$ )

КИП4	ИП4	$Fe^x$	1	+	ИП4	1	+	÷	Flп
С/П	БП	00							

Первые два оператора обеспечивают увеличение содержимого регистра  $P4 \rightarrow x$  на 1 при каждом пуске программы. Последующие операторы (с адресами 03—10) служат для вычисления  $f(x)$ . Операторы БП 00 обеспечивают переход к началу программы. Таким образом, при нажатии клавиши С/П происходит циклическое вычисление  $f(x)$ , причем для каждого цикла  $x$  возрастает на 1. Нажимая клавишу С/П (перед первым пуском В/0 и С/П), будем получать  $f(1) = 0,6201145, f(2) = 1,0283157, f(3) = 1,6622929$  и т. д.

Вычисления можно автоматизировать в еще большей степени. Пусть надо вычислить до 12 значений  $f(x)$  для  $x = 1, 2, 3, \dots, 12$  с записью результатов без вмешательства оператора в регистры 1, 2, ..., 9, А, В, С. В этом случае требуется дополнитель-

но решить две задачи: организовать до  $n \leq 12$  циклов вычислений и предусмотреть автоматический выбор регистров для записи результатов. Первая задача решается с использованием оператора организации цикла, например в регистре 0 — FL0. Вторая — с использованием косвенной адресации. Приведем один из вариантов такой программы ( $n = 10$ ):

ИПО ПД Fe<sup>x</sup> 1 + ИПД 1 + ÷ Fln  
 КПД FL0 00 C/П

В начале программы содержимое регистра счетчика 0 (при первом пуске  $n$ ) переписывается в регистр адресации РД — операторы ИПО ПД. Затем (операторы с адресами 01—09) вычисляется  $f(x)$ . Оператор КПД обеспечивает запись  $f(x)$  в тот регистр, номер которого указан содержанием регистра Д. Оператор FL0 обеспечивает возврат к началу программы (адрес 00) и уменьшение на 1 содержимого регистра 1. Циклы продолжаются, пока содержимое регистра 0 не станет равным 0. Введя, например,  $n = 10$ , спустя минуту счета получим  $f(1) = 0,6201145$ . Извлекая из регистров 2, 3, ..., 9, А другие значения  $f(x)$ , получим:  $f(2) = 1,0283157$ ,  $f(3) = 1,6622929$ , ...,  $f(10) = 7,6021501$ .

Большое число конкретных примеров программирования читатель найдет в последующих разделах книги. Однако внимательное знакомство с приведенными простыми примерами поможет разобраться в алгоритмах вычислений, реализованных в более сложных программах. Эти примеры иллюстрируют также большие функциональные возможности косвенной адресации и операторов организации циклов.

Следует обратить внимание на то, что в некоторых микрокалькуляторах первых выпусков нельзя по программе производить смену знака вычислений и заканчивать подпрограммы следующими операторами: Fsin, Fcos, Ftg, Farcsin, Farccos, Farctg, Fe<sup>x</sup>, Flg, Fln, Fx<sup>2</sup>, F1/x, Fl, F√, F10<sup>x</sup> и Fx<sup>y</sup>. Если по условию задачи надо провести смену знака результата, то при умножении и делении это можно сделать, присвоив знак минус одному из сомножителей или делимому либо делителю. Например, если надо вычислить значение  $ab$  ( $a = PA$ ,  $b = PB$ ), то фрагмент программы должен быть ИПА /—/ ИПВ × или ИПА ИПВ /—/ ×, а не ИПА ИПВ × /—/. Отмеченные выше операции допустимо проводить перед засылкой результата в какой-либо неиспользованный регистр памяти (в том числе в регистр Y командой ↑).

Описанные в книге программы составлены с учетом этого ограничения с тем, чтобы они были пригодны для любых микрокалькуляторов данного типа. В выпускаемых сейчас микрокалькуляторах эти ограничения отсутствуют, что несколько упрощает составление программ.

Для уменьшения времени вычислений в циклических программах рекомендуется выносить за пределы цикла фрагменты программ, которые не меняются от цикла к циклу. Полезно также нормирование уравнений и приведение их к возможно более простому виду.

## 1.5. Система команд программируемых микрокалькуляторов HP-11C

Калькуляторы серии HP фирмы Hewlett Packard (США) и ряда ее филиалов являются одними из наиболее распространенных за рубежом. Модели HP имеют много общего. Число команд и встроенных микропрограмм у них возрастает от модели к модели.

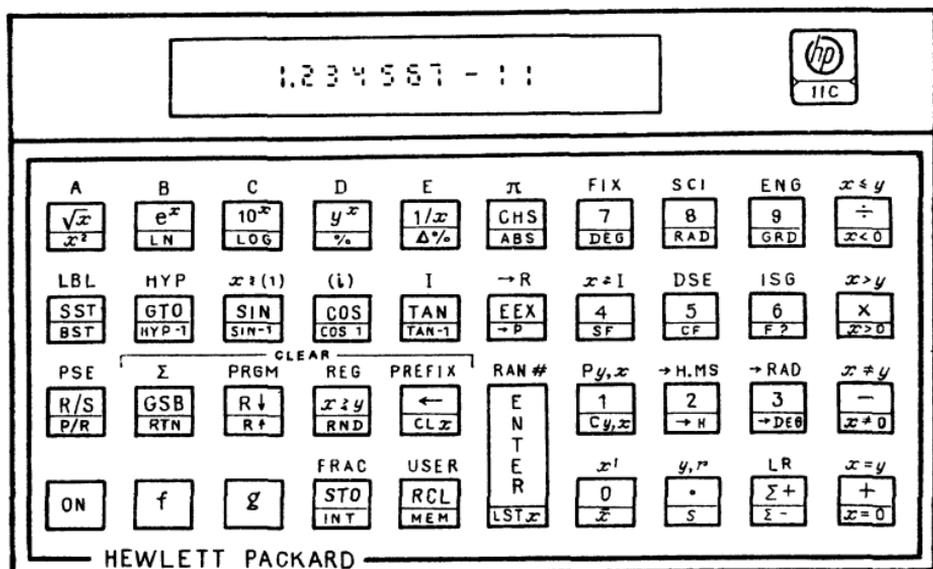


Рис. 1.9. Внешний вид программируемого микрокалькулятора HP-11C

Однако все они используют обратную бесконечную логику вычислений и содержат стек из 4-х регистров и регистра восстановления результата предшествующей операции (как и описанные выше отечественные микрокалькуляторы). По объему памяти современная массовая карманная модель HP-11C (рис. 1.9) близка к отечественным ПМК «Электроника МК-61» и предназначена для выполнения повседневных научно-технических расчетов умеренной сложности.

**Включение и выключение.** Включение и выключение HP-11C производится клавишей ON. Предусмотрено автоматическое выключение, если калькулятор не работает более 8—17 мин. Благодаря применению жидкокристаллического индикатора (дисплея) и эко-

помичных КМОП микросхем HP-11С потребляет от источника питания (три дисковых элемента, подобных отечественным СЦ-0,18) настолько малую мощность, что работает в нормальных условиях без смены элементов свыше года.

**Память данных и программ.** Данные и программы у HP-11С сохраняются при выключении питания (ОЗУ остается подключенным к элементам питания), а также (в течение нескольких недель) при извлечении элементов питания из отсека. В последнем случае возможна также работа в течение примерно 1 ч по программе (источником энергии является заряженный конденсатор большой емкости).

**Информация, отображаемая дисплеем.** Жидкокристаллический дисплей HP-11С отображает: десять цифр (от 0 до 9); знаки мантиссы и порядка; буквы *f* и *g*, индицирующие нажатие префиксных клавиш; служебные слова RAD (радианы), GRAD (градусы), PRGM (программирование), Running (работа по программе «бег»), Error (с номером ошибка).

Числа могут быть представлены с десятичной точкой или десятичной запятой с делением (сепарацией) их на группы по три цифры от десятичной точки (запятой). Например, число 12345678,91 может быть представлено в виде

12,345,678.91 (десятичная точка),

12.345.678,91 (десятичная запятая).

Для перевода режима индикации нужно при выключенном калькуляторе одновременно нажать клавиши  $\boxed{\cdot}$  и  $\boxed{0}$ . Такая операция обозначается оператором  $\boxed{\cdot / 0}$ . В дальнейшем в качестве десятичной используется запятая, а не точка.

**Тестовый контроль.** Для проверки исправности калькулятора предусмотрена специальная встроенная микропрограмма (тест). Для ее пуска при выключенном микрокалькуляторе одновременно нажимаются и держатся нажатыми клавиши  $\boxed{ON}$  и  $\boxed{\times}$ . Затем первой отпускается клавиша  $\boxed{ON}$ , а сразу вслед за ней — клавиша  $\boxed{\times}$ . Выполнение теста индицируется мигающей надписью Running. Спустя примерно 15 с на дисплее должны появиться цифры — 8.8.8.8.8.8.8.8. и указанные выше служебные слова (кроме Error и Running).

**Префиксные клавиши.** Почти все клавиши микрокалькулятора HP-11С имеют тройное назначение. Для обеспечения этого служат префиксные клавиши *f* и *g* желтого и синего цветов. При нажатии клавиши выполняется операция, указанная на клавише белым цветом. При предварительном нажатии желтой префиксной клавиши *f* и какой-либо основной клавиши выполняется операция, указанная над основной клавишей желтым цветом. Если предва-

рительно нажата синяя префиксная клавиша  $g$ , будет выполняться операция, обозначенная синим цветом под (на скосе) основной клавишей. Например:

Нажимаемые клавиши		Выполняемая операция
префиксная	основная	
$\boxed{f}$	A	A (метка)
Нет	$\boxed{\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\boxed{g}$	$\boxed{x^2}$	$x^2$

В дальнейшем префиксные клавиши  $f$  и  $g$  указываться не будут. Например, нажатие клавиши  $g$  и основной клавиши в приведенном выше примере будет обозначено просто как  $x^2$  (цвет и расположение надписей подсказывают, какая префиксная клавиша должна нажиматься для ввода данной команды).

**Операторы стирания.** Содержимое регистра X может стираться вводом оператора  $CLx$  (clear X). Результат вычислений можно также стереть с помощью клавиши  $\boxed{\leftarrow}$ . При вводе чисел в регистр X клавиша  $\boxed{\leftarrow}$  используется для стирания последней введенной цифры. Например, если вместо числа 1234 введено число 1235, нажав клавишу  $\boxed{\leftarrow}$ , мы стираем только цифру 5, после чего можно ввести правильную цифру 4.

Надписью CLEAR или, сокращенно, CL объединена группа операторов: CLΣ — стирание информации в суммирующих регистрах при статистических расчетах, CLPRGM — стирание программы, CLREG (сокращенно CLRG) — стирание информации во всех регистрах памяти, кроме стековых, и CLPREFIX — сброс ошибочно нажатой префиксной клавиши (а также сброс операторов STO, RCL, GTO, GSB, HYP и HYP<sup>-1</sup>, назначение которых описано ниже).

**Операторы управления стеком.** Стек у модели HP-11C содержит 4 регистра X, Y, Z и T и регистр восстановления результата предшествующей операции X1. Клавиша ввода чисел (из регистра X в Y, из Y в Z, из Z в T) обозначена как ENTER (сокращенно ENT), поворот стека обозначен оператором R↓, а операция вызова числа из регистра X1 в регистр X — LSTx (last x). Работа стека поясняется рис. 1.10.

Отметим два отличия в работе стека HP-11C по сравнению с работой стека у микрокалькуляторов «Электроника БЗ-34». У HP-11C имеется возможность поворота стека в другом направлении с помощью оператора R↑ (X → Y → Z → T → X). Кроме того, после ввода оператора ENT ввод в регистр X любого числа, в том числе из регистра памяти, не ведет к изменению содержимого остальных регистров стека.

**Установка формата чисел.** У микрокалькуляторов HP-11C предусмотрена индикация результата вычислений в трех форматах. Формат с фиксированной запятой устанавливается оператором  $FIX N$ , где  $N$  — желаемое число знаков после запятой. Например,

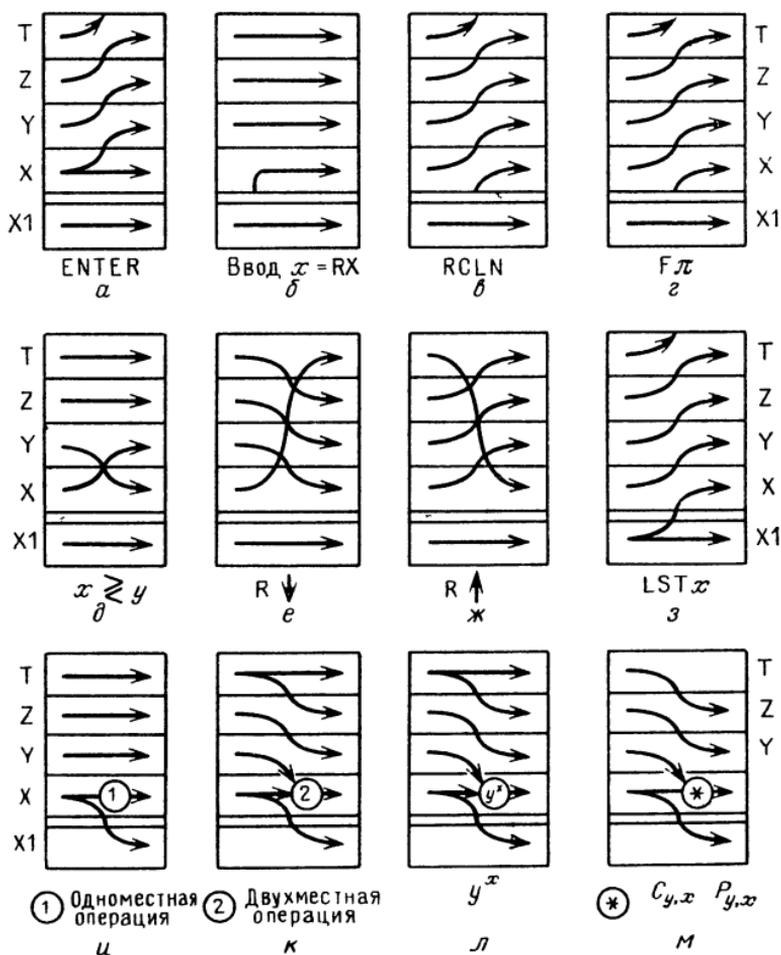


Рис. 1.10. Перемещение чисел в стеке микрокалькуляторов HP-11C при основных операциях

поделив 1 на 3, получим 0,333333333 при  $N = 9$ . Введя операторы  $FIX 3$ , получим 0,333. Последняя значащая цифра автоматически округляется. Например,  $2/3$  получаем в виде 0,667.

**Научный формат** соответствует экспоненциальной форме числа с плавающей запятой  $M \cdot 10^E$ , где  $M$  — мантисса (до 7 цифр) и  $E$  — порядок (2 цифры). Он вводится операторами  $SCI N$ . Порядок  $E$  вводится после нажатия клавиши ввода порядка  $EEX$ .

**Инженерный формат**, вводимый операторами  $ENG N$ , подобен научному, но порядок  $E$  автоматически устанавливается нулевым

или кратным 3. Например,  $1/3$  в научном формате с  $N = 3$  представляется в виде  $3,333 \cdot 10^{-1}$ , а в инженерном формате — в виде  $333,3 \cdot 10^{-3}$ . Нажав клавиши  $f$  и PREFIX, на индикацию выводится 10 цифр мантиссы.

**Операции с числами.** Выделение целой части чисел выполняется оператором INT (integer), а дробной части — оператором FRAC (fractional). Смена знака числа производится оператором CHS (change sign), а выделение абсолютного значения числа — оператором ABS (absolute value). После набора числа с большим чем было установлено форматом, количеством цифр мантиссы, установка заданного числа цифр может выполняться оператором RND (rounding — округление).

**Операторы регистров памяти.** Помимо регистров стека у микрокалькулятора HP-11C имеется 21 регистр памяти. Первые 10 регистров обозначаются как 0, 1, 2, ..., 9, вторые 10 — как .0, .1, .2, ..., .9. Имеется также специальный индексный регистр I (его дополнительные функции описываются дальше).

*Запись чисел из регистра X в регистр памяти с условным обозначением N (0, .2, .9 и т. д.)* производится оператором STO (store — записывать), а *вызов чисел из регистра N в регистр X* — оператором RCL (recall — вызывать). После операторов STO и RCL указывается символ регистра. Например, число 0,123 можно ввести в регистр 5, исполнив оператор STO5, а вызвать его из регистра 5 — исполнив оператор RCL5. Обмен содержимым между регистрами X и I проводится оператором  $X \rightleftharpoons I$ .

**Операции над числами в регистрах памяти с числами.** В регистрах памяти 0, 1, 2, ..., 9 можно проводить арифметические операции

(+ (сложение), — (вычитание),  $\times$  (умножение) и  $\div$  (деление)):

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Число } a \text{ в регистре} \\ a = RN \end{array}} * \boxed{\begin{array}{l} \text{Число } b \text{ в регистре} \\ b = RN \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{Результат } a*b \text{ в регистре } N \\ a*b \rightarrow RN \end{array}},$$

где \* — один из знаков +, —,  $\times$ ,  $\div$ . Это выполняется операторами вида  $STO * N$ . Например, если в регистре 3 было число 10, а в регистре X набрано число 2, то после выполнения оператора  $STO \div 3$  в регистре 3 будет число  $(10/2) = 5$ . Операции в регистрах памяти можно проводить и при косвенной адресации (при этом они возможны и в регистрах .0, .1, .2, ..., .9).

**Одноместные операции.** Одноместные операции выполняются после ввода аргумента  $x$  в регистр X стека. Результат вычислений поступает также в регистр X, а аргумент  $x$  — в регистр X1. Регистры Y, Z и T стека не используются, их содержимое не меняется. Помимо одноместных операторов для операций с числами, к одноместным относятся еще и следующие: вызов числа  $\pi = 3,141592654$  в регистр X; вычисление факториала  $x!$  и гамма-

функции (для вычисления гамма-функции вместо  $x$  вводится  $x-1$  и используется оператор  $x!$ ); вычисление обратной функции  $1/x$ ; возведение в квадрат  $x^2$ ; извлечение квадратного корня  $\sqrt{x}$ ; выполнение операций  $e^x$ ,  $10^x$ ,  $\ln x$  (оператор LN),  $\log x$  (оператор LOG) и др. (см. ниже). Например, вычисляем  $\Gamma(-3,2)$ , набрав  $x-1 = -4,2$  и нажав клавиши с надписями  $f$  и  $x!$ ; получим  $\Gamma(-3,2) = 0,689056412$ .

**Операторы тригонометрических и обратных тригонометрических функций.** К ним относятся операторы вычисления следующих функций (операторы указаны в скобках):  $\sin x$  (SIN),  $\cos x$  (COS),  $\operatorname{tg} x$  (TAN),  $\arcsin x$  ( $\text{SIN}^{-1}$ ),  $\arccos x$  ( $\text{COS}^{-1}$ ) и  $\operatorname{arctg} x$  ( $\text{TAN}^{-1}$ ). Операторы DEG, RAD и GRD служат для задания представления углов соответственно в градусах, радианах и градах. Ввод операторов RAD и GRD индицируется дисплеем. Например, нажав клавиши с надписями  $g$  DEG 30 SIN, получим  $\sin 30^\circ = 0,5$ .

**Операторы преобразования углов и времени.** Оператор  $\rightarrow$  H.MS обеспечивает: 1) преобразование угла, заданного в градусах, минутах и секундах; 2) преобразование времени, заданного в часах с десятичными долями, во время, заданное в часах, минутах и секундах. Например, дано время 1,52 ч. Нажав клавиши с надписями  $f$  и  $\rightarrow$  H.MS, получим 1,3112 (первые две цифры после запятой — минуты, вторые — секунды). Обратные преобразования обеспечивает оператор  $\rightarrow$  H.

Преобразование угла, заданного в радианах  $\varphi_{\text{рад}}$ , в угол  $\varphi^\circ = \varphi_{\text{рад}} \cdot 180/\pi$ , заданный в градусах, обеспечивает оператор  $\rightarrow$  DEG. Обратное преобразование  $\varphi_{\text{рад}} = \varphi^\circ \cdot \pi/180$  обеспечивает оператор  $\rightarrow$  RAD. Например, набрав значение  $\varphi^\circ = 90^\circ$  и нажав клавиши с надписями  $f$  и  $\rightarrow$  RAD, получим  $\varphi_{\text{рад}} = \pi/2 = 1,570796327$  рад.

**Операторы гиперболических и обратных гиперболических функций.** К ним относятся операторы вычисления следующих функций (операторы даны в скобках):  $\operatorname{sh} x$  (HYP SIN),  $\operatorname{ch} x$  (HYP COS),  $\operatorname{th} x$  (HYP TAN),  $\operatorname{arsh} x$  ( $\text{HYP}^{-1}$  SIN),  $\operatorname{arch} x$  ( $\text{HYP}^{-1}$  COS),  $\operatorname{arth} x$  ( $\text{HYP}^{-1}$  TAN). Например,  $\operatorname{sh} 1 = 1,475201194$  вычисляем, набрав число 1 и нажав клавиши с надписями  $f$  (HYP) и SIN.

**Оператор генерации случайных чисел.** Случайные числа с равномерным распределением в отрезке  $[0, 1]$  и начальным значением  $x_0$  выдаются по мере исполнения оператора RAN #. Перед первым его исполнением число  $x_0$  вводится в регистр X и нажимается клавиша STO. Например, для  $x_0 = 0,123$  вводим число  $123 = \text{RX}$  и нажимаем клавишу STO. Затем, нажимая клавиши с надписями  $f$  и RAN #, будем получать: 0,123; 0,205; 0,620; 0,788; 0,192 и т. д. (формат FIX3).

**Двухместные операторы.** К двухместным операторам относятся операторы арифметических операций (операторы даны в скоб-

ках): сложение (+), вычитание (—), умножение (×) и деление (÷). Операнды этих операций — в регистрах X и Y, результат поступает в регистр X (см. работу стека на рис. 1.10). Например,  $4 \times 5 = 20$  получаем, нажав клавиши 4 ENT 5 ×.

Преобразование координат X и Y точки (рис. 1.11, а) в прямоугольной системе координат в радиус-вектор этой точки длиной  $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$  и углом  $\theta$  (в пределах  $\pm 180^\circ$ ) в полярной системе координат обеспечивает оператор  $\rightarrow P$  (результат  $\theta \rightarrow PY$ ,  $r \rightarrow PX$ ).

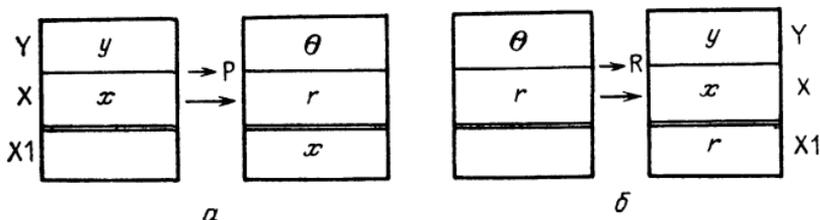


Рис. 1.11. Преобразование координат из декартовых в полярные (а) и из полярных и декартовы (б)

Например,  $X = 1$  и  $Y = 1$ . Исполнив оператор  $\rightarrow P$ , получим  $r = 1,414$ ; нажав клавишу  $X \rightleftharpoons Y$ , получим  $\theta = 45^\circ$ . Обратное преобразование (рис. 1.11, б) обеспечивает оператор  $\rightarrow R$ .

Для двух чисел  $x = RX$  и  $y = RY$  оператор  $P_{y,x}$  обеспечивает нахождение числа перестановок

$$P_{y,x} = y! / (y - x)!,$$

а оператор  $C_{y,x}$  — числа сочетаний

$$C_{y,x} = y! / (x!(y - x)!).$$

При этом  $P_{y,x}$  или  $C_{y,x}$  поступает в регистр X, значение  $y$  теряется, а значение  $x$  хранится в регистре X1.

**Пример 1.1.** Найти, сколькими способами можно распределить первые  $x = 3$  места для  $y = 10$  команд, участвующих в спортивных соревнованиях. Это задача на вычисление числа перестановок  $P_{y,x}$ . Вводим  $y = 10$ , нажимаем клавишу ENT, вводим  $x = 3$  и нажимаем клавиши с надписями  $f$  и  $P_{y,x}$ . Получаем  $P_{y,x} = 720$ .

**Оператор  $y^x$ .** Этот оператор обеспечивает вычисление степени  $x = RX$  числа  $y = RY$ . Так,  $2^3 = 8$  получим, нажимая клавиши 2 ENT 3  $y^x$  ( $2 = RY$ ,  $3 = RX$ ). Допустимы значения  $y < 0$  при целых  $x$ .

**Операторы процентных вычислений.** Оператор % обеспечивает вычисление  $n \% = RX$  от числа  $N = RY$ . Например, сколько будет 15 % от 200. Введя  $200 = RY$  и  $15 = RX$ , нажав клавиши с надписями  $g$  и %, получим 30. Оператор  $\Delta \%$  позволяет найти, на

сколько процентов  $\Delta\%$  число  $x = \text{RX}$  отличается от числа  $y = \text{RY}$ ? Например, если  $y = 100$  и  $x = 125$ , исполнив оператор  $\Delta\%$ , получим 25%.

**Статистические вычисления.** Ряд операторов микрокалькулятора НР-11С обеспечивает микропрограммное выполнение операций двухмерной статистики над массивами пар чисел  $x_i$  и  $y_i$ , вводимых в регистры X и Y. Перед вводом очистка регистров памяти выполняется оператором CLR  $\Sigma$ . После ввода каждой пары чисел  $x_i$  и  $y_i$  выполняется оператор  $\Sigma +$ . После обработки чисел высвечивается их индекс  $i$ . Если набранные числа оказались ошибочными, их можно исключить исполнением оператора  $\Sigma -$ .

При выполнении статистических расчетов используются первые шесть регистров памяти:  $n \rightarrow \text{R0}$  ( $n$  — количество введенных пар чисел  $x_i, y_i$ ),  $\Sigma x \rightarrow \text{R1}$ ,  $\Sigma x^2 \rightarrow \text{R2}$ ,  $\Sigma y \rightarrow \text{R3}$ ,  $\Sigma y^2 \rightarrow \text{R4}$  и  $\Sigma xy \rightarrow \text{R5}$ . Стрелкой обозначено занесение соответствующего результата в регистр.

После ввода  $n$  пар чисел  $x_i$  и  $y_i$  при статистических вычислениях находятся:

— средние значения

$$\bar{x} = \Sigma x/n \rightarrow \text{RX} \text{ и } \bar{y} = \Sigma y/n \rightarrow \text{RY}$$

при исполнении оператора  $\bar{x}$ ;

— стандартные отклонения

$$S_x = \sqrt{\frac{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}{n(n-1)}} \rightarrow \text{RX} \text{ и } S_y = \sqrt{\frac{n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}{n(n-1)}} \rightarrow \text{RY}$$

при исполнении оператора  $S$ ,

— коэффициенты  $A$  и  $B$  линейной регрессии  $y = Ax + B$

$$A = \frac{n \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \rightarrow \text{RY} \text{ и } B = \frac{\Sigma y \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma xy}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \rightarrow \text{RX},$$

— коэффициент корреляции

$$r = \frac{n \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\sqrt{[n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2] \cdot [n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

и линейное приближение

$$\hat{y} = Ax + B \rightarrow \text{RY}$$

для заданного  $x = \text{RX}$  при исполнении оператора  $\hat{y}, r$ .

**Пример 1.2.** Вычислить статистические характеристики для зависимости  $y_i(x_i)$ , заданной отсчетами 5,5(2), 6,3(4), 7,2(6), 8(8) и 8,6(10). Нажимаем клавиши  $f$  и CLR  $\Sigma$ . Вводим  $y_1 = 5,5$ , нажимаем клавишу ENT, вводим  $x_1 = 2$  и нажимаем клавишу

$\sum +$  (получаем на дисплее  $i = 1$ ). Аналогично вводим остальные пары  $y_i(x_i)$ . Получаем  $n = 5$ . Нажав клавиши с надписями  $g$  и  $\bar{x}$ , получаем  $\bar{x} = 6$ ; нажав клавишу  $X \rightleftharpoons Y$ , получаем  $\bar{y} = 7,12$ . Далее, нажав клавиши с надписями  $f$  и  $S$ , получим  $S_x = 3,162$ ; нажав клавишу  $X \rightleftharpoons Y$ , находим  $S_y = 1,252$ . Применяя оператор  $L.R.$ , находим  $A = 0,395$  и  $R = 4,75$ , т. е. линейное приближение для  $y_i(x_i)$  имеет вид  $y = 0,395x + 4,75$ . Используя оператор  $\widehat{y}, r$  при  $x = 5 = RX$ , получим  $y(5) = 6,725$  и  $r = 0,998$  (близость  $r$  к  $+1$  указывает, что зависимость  $y_i$  от  $x_i$  близка к линейной и число с ростом  $x$  растет).

**Операторы установки флагов.** С помощью флагов осуществляются специальные виды переходов по программе (см. ниже). В микрокалькуляторе HP-11C можно использовать два флага с номерами  $N$ , равными 0 и 1. Подъем флага обеспечивается оператором  $SFN(\text{set flag})$ , а спуск (стирание) — оператором  $CFN(\text{clear flag})$ .

**Оператор постановки меток.** Части программы можно помечать пятнадцатью метками с помощью оператора  $LBLN(\text{label — метка})$ . При этом символ  $N$  может иметь вид числа от 0 до 9 (числовые метки) и букв  $A, B, C, D, E$  (буквенные метки). Буквенные метки удобны для пуска программ с определенного, помеченного меткой, места. Ввод их производится с использованием префиксной клавиши  $f$ .

**Оператор USER.** Оператором  $USER$  можно изменить функциональное назначение первых пяти верхних клавиш с буквенными метками:

Оператор  $USER$  не использован      Оператор  $USER$  использован

A	B	C	D	E	$\sqrt{x}$	$e^x$	$10^x$	$y^x$	$1/x$
$\sqrt{x}$	$e^x$	$10^x$	$y^x$	$1/x$	A	B	C	D	E
$x^2$	LN	LOG	%	$\Delta\%$	$x^2$	LN	LOG	%	$\Delta\%$

После этого буквенную метку можно вводить нажатием соответствующей клавиши без использования префиксной. Ввод оператора  $USER$  индицируется дисплеем.

**Операторы условных и безусловных переходов.** Безусловные переходы к месту программы, помеченному меткой  $N$ , осуществляются оператором  $GTON(\text{go to — идти к})$  — рис. 1.12, а. Условные переходы задаются операторами:  $x < 0$ ;  $x > 0$ ;  $x \neq 0$ ;  $x = 0$ ;  $x \leq y$ ;  $x > y$ ;  $x \neq y$ ;  $x = y$ . Если условие перехода выполняется (при  $x = RX$  и  $y = RY$ ), то происходит выполнение следующего за ним оператора. В противном случае этот оператор не воспринимается (рис. 1.12, б).

Оператор  $F?N$  (где  $N = 0$  или  $N = 1$ ) обеспечивает проверку состояния флага  $N$ . Если флаг поднят, происходит выполнение

следующего оператора, если флаг опущен — он не воспринимается (рис. 1.12, в). Операции контроля состояния флагов 0 и 1 и переходов по их состоянию осуществляются без изменения содержимого регистров стека.

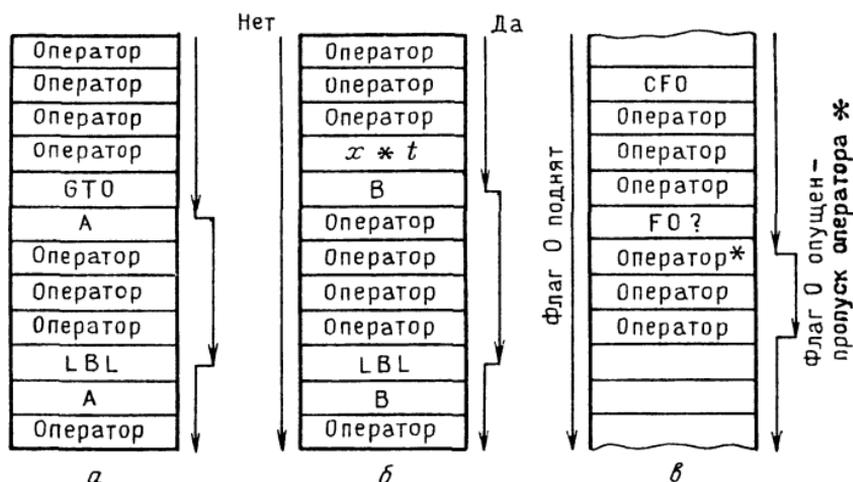


Рис. 1.12. Основные виды переходов у микрокалькуляторов HP-11C: безусловный по метке (а), условный (б) и по состоянию флага (в)

**Операторы ввода подпрограмм.** Обращение к подпрограмме, помеченной в ее начале меткой *N*, осуществляется оператором

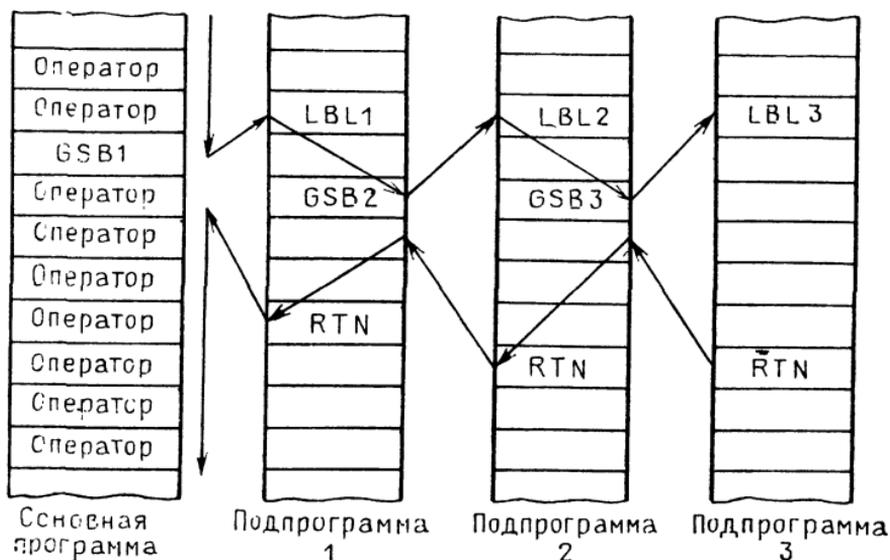


Рис. 1.13. Структура подпрограмм с вложениями

GSBN (go subroutine — ити к подпрограмме). Возврат из подпрограммы задается оператором RTN (return — возвращаться), кото-

рый ставится в конце подпрограммы. Одна подпрограмма может входить в другую. Глубина обращения подпрограмм равна 4 (рис. 1.13).

**Операторы индексного регистра.** Регистр I может использоваться как обычный регистр памяти. Однако основное его назначение заключается в осуществлении различных видов косвенной адресации. В этом случае содержимое регистра I представляется в виде числа

$$I = \pm nnnnn.xxyy$$

Левая часть этого числа может модифицироваться при каждом исполнении операторов инкремента со скачком ISG (при этом приращение равно  $yy$  и положительно) и декремента со скачком DSE (приращение равно  $yy$  и отрицательно). При  $yy = 0$  приращение автоматически задается равным 1.

Если число  $nnnnn$  задано положительным, то при использовании операторов  $x \rightleftharpoons (i)$ , RCL( $i$ ), STO( $i$ ), GTOI и GSBI осуществляется косвенная адресация следующего вида:

Целая часть $nnnnn$ числа в регистре	Метка LBLN для операторов GTOI и GSBI	Номер регистра N для операторов $x \rightleftharpoons (i)$ , STO ( $i$ ) и RCL ( $i$ )
0	LBL 0	R0
.	.	.
.	.	.
.	.	.
9	LBL 9	R.9
10	LBLA	R.0
11	LBLB	R.1
12	LBLC	R.2
13	LBLD	R.3
14	LBLE	R.4
15	—	R.5
16	—	R.6
17	—	R.7
18	—	R.8
19	—	R.9
20	—	

Таким образом, при выполнении операторов GTOI и GSBI содержимое  $nnnnn \geq 0$  регистра I указывает на номер или букву метки, а при выполнении операторов  $x \rightleftharpoons (i)$ , RCL( $i$ ), STO( $i$ ) (а также STO \* ( $i$ ), где \* — знак арифметической операции: +, —,  $\times$  или  $\div$ ) указывает на номер регистра памяти.

Если  $nnnnn < 0$ , то при выполнении оператора GTOI будет происходить безусловный переход на шаг программы с номером (адресом), равным  $|nnnnn|$ .

Число  $xxx$  является опорным и задает значение модифицируемого числа  $nnnnn$ , при котором происходят скачки на один шаг

при выполнении операторов ISG и DSE (см. примеры на рис. 1.14, а и б). Это позволяет создавать переходы с гибкой структурой и циклы.

Если, например,  $I = 6,00902$ , то  $nnnnn = 6$ ,  $xxx = 9$  и  $yy = 2$ . Тогда оператор  $STO(i) = STO6$ ,  $x \rightleftharpoons (i) = x \rightleftharpoons 6$ ,  $RCL(i) = RCL6$ ,  $GTOi = GTO6$ ,  $GSBI = GSB6$ . При выполнении оператора ISG

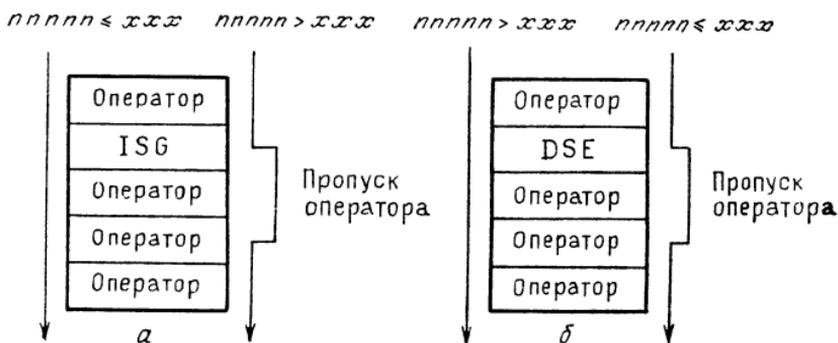


Рис. 1.14. Переходы при выполнении операторов ISG (а) и DSE (б)

$nnnnn$  будет увеличиваться на  $yy = 2$  и при  $nnnnn > xxx = 9$  произойдет скачок-пропуск команды после оператора ISG. Более детально использование операторов косвенной адресации рассматривается в следующем разделе.

**Операторы ввода и редактирования программ.** Перевод в режим программирования и автоматических вычислений производится оператором P/R(program/run). Шаг вперед и шаг назад в режиме редактирования (просмотра адресов и кодов программ) задается операторами SST и BST. Остановка в программе задается оператором R/S(run/stop), а пауза на  $\approx 1$  с — оператором PSE(pause).

## 1.6. Основы программирования микрокалькуляторов HP-11C

Микрокалькуляторы HP-11C программируются на символично-кодовом машиноориентированном языке программирования с тщательно продуманной и удобной системой команд и обширными возможностями редактирования программ.

Емкость ОЗУ этих микрокалькуляторов автоматически перераспределяется между программой и регистрами памяти. В исходном состоянии программа имеет свободные 63 линии, не считая особую нулевую линию останова 000, и пользователем могут использоваться все 21 регистр памяти. Если число линий в программе превышает 63, то допустимое число регистров памяти автома-

тически уменьшается. Связь между номерами регистров, извлекаемых из пользования, и адресами программных линий следующая:

Регистр	Адреса линий	Регистр	Адреса линий
R.9	064 — 070	R9	134 — 140
R.8	071 — 077	R8	141 — 147
R.7	078 — 084	R7	148 — 154
R.6	085 — 091	R6	155 — 161
R.5	092 — 098	R5	162 — 168
R.4	099 — 105	R4	169 — 175
R.3	106 — 112	R3	176 — 182
R.2	113 — 119	R2	183 — 189
R.1	120 — 126	R1	190 — 196
R.0	127 — 133	R0	197 — 203

Таким образом, извлечение из пользования одного регистра памяти увеличивает максимальную длину программы на 7 шагов. При этом предельная длина программы составляет 203 шага, а в распоряжении пользователя остаются только индексный регистр I, а также четыре регистра стека X, Y, Z и T и регистр восстановления результата предшествующей операции X1. Если оставить 14 регистров памяти, то число шагов программы составит 105 (у микрокалькулятора «Электроника БЗ-34» — 98).

Оператором MEM (memoгу — память) можно оперативно проверить распределение памяти. При этом индицируется число свободных шагов программы P и максимальный номер допустимого к использованию регистра памяти r. Например, при отсутствии программы, нажав клавиши с надписями f и MEM, получим:  $P = 63$   $r = .9$  (т. е. имеем в пользовании 63 шага программы и регистры до R.9 включительно).

Перераспределение емкости ОЗУ заметно расширяет возможности микрокалькулятора. Например, при вычислении многочленов программы с косвенной адресацией получаются короткими. В этом случае емкость ОЗУ можно использовать под регистры памяти, что увеличивает степень вычисляемых многочленов. Напротив, вычисления по некоторым сложным формулам могут потребовать большого числа шагов программы при небольшом числе регистров памяти.

При вводе каждой линии (шага) программы индицируется адрес и код каждой из нажимаемых клавиш. При этом коды клавиш клавиатуры образуются в соответствии со следующей схемой:

11	12	13	14	15	16	7	8	9	10
21	22	23	24	25	26				4
31	32	33	34	35	36	1	2	3	30
41	42	43	44	45	36				0

Цифровые клавиши 0, 1, ..., 9 вводят коды 0, 1, ..., 9, а коды остальных клавиш соответствуют индексам образованной ими ма-

трицы. Поэтому после небольшого навыка по номерам кодов легко распознавать, какие клавиши нажимались и какие операции ими вводились, например:

Код	Клавиши с надписями	Оператор
1	1	1
42.21.5	<i>f</i> LBL 5	LBL 5
44.40.3	STO + 3	STO + 3
12	$e^x$	$e^x$
43 12	<i>g</i> LN	LN

Из этих примеров видно, что операторы могут вводиться нажатием от 1 до 3 клавиш. Однако в программе они занимают всегда один шаг (линию), что увеличивает эффективный объем программной памяти.

Условия типографского набора программ требуют, чтобы в каждом операторе было не более 4-х знаков. Поэтому примем сокращенные обозначения некоторых громоздких операторов:

Полное обозначение оператора	Сокращенное обозначение оператора	Пояснение
RCLN; RCL.N	RN; R.N	Вызов числа из регистра $N = 0, 1, \dots, 9$
STON; STO.N	SN; S.N	Запись числа в регистр $N = 0, 1, \dots, 9$
STO*N	S*N	Арифметическая операция * в регистре $N = 0, 1, \dots, 9$
STO( <i>i</i> )	S( <i>i</i> )	Запись числа в регистр R( <i>i</i> )
STO*( <i>i</i> )	S*( <i>i</i> )	Арифметическая операция в регистре R( <i>i</i> )
CLEAR REG	CREG	Стирание чисел в регистрах
ENTER	ENT	Ввод
SIN <sup>-1</sup>	ASIN	Вычисление $\arcsin x$
COS <sup>-1</sup>	ACOS	» $\arccos x$
TAN <sup>-1</sup>	ATAN	» $\arctg x$
HYP SIN	HSIN	» $\text{sh } x$
HYP COS	HCOS	» $\text{ch } x$
HYP TAN	HTAN	» $\text{th } x$
HYP <sup>-1</sup> SIN	AHS	» $\text{arsh } x$
HYP <sup>-1</sup> COS	AHC	» $\text{arch } x$
HYP <sup>1</sup> TAN	AHT	» $\text{arth } x$

Следующие директивы не вводятся в программу и не имеют кодов:

- P/R — перевод в режим программирования и счета,
- CLEAR PRGM — стирание программы,
- CLEAR PREFIX — сброс действия префиксных клавиш,
- SST — сдвиг адресов программы на один шаг вперед,
- BST — сдвиг адресов программы на один шаг назад,
- GTO.nnn — установка шага с адресом (номером) nnn,
- MEM — контроль распределения памяти.

ON/.— смена запятой сепарации на точки и наоборот,  
 USER — смена порядка операций клавиш с буквенными метками,

← — стирание чисел и операторов программы.

Процесс ввода и редактирования программ рассмотрим на примере вычисления функции (1.1) при  $n = R8$ ,  $f = R9$  и  $t = RX$ . С учетом принятых сокращенных обозначений операторов программу можно представить в компактной форме с десятью операторами в каждой полной строке:

LBLA  $\pi \times R8 \times R9 \times \text{SIN LST}x \div$   
 RTN

Ввод программы выполняется после включения калькулятора нажатием клавиши ON и перевода в режим программирования нажатием клавиш с надписями  $g$  и P/R. Затем производится стирание старой программы (если она была введена) нажатием клавиш с надписями  $f$  и CLEAR PRGM. После этого вводится нужная программа. Подробные данные о процессе ввода приведенной выше программы:

Нажимаемые клавиши с надписями	Оператор программы	Показания дисплея		Краткий комментарий
		Адрес	Коды	
$f$ CLEAR PRGM		000—		Стирание программы
$f$ LBL A	LBLA	001—	42.21. 11	Ввод метки A
$f$ $\pi$	$\pi$	002—	42 16	Вызов числа $\pi$
$\times$	$\times$	003—	20	Операция умножения
RCL 8	R8	004—	45 8	Вызов числа из регистра R8
$\times$	$\times$	005—	20	Операция умножения
RCL 9	R9	006—	45 9	Вызов числа из регистра R9
$\times$	$\times$	007—	20	Операция умножения
SIN	SIN	008—	23	Вычисление синуса
$g$ LST $x$	LST $x$	009—	42 36	Вызов числа из регистра X1
$\div$	$\div$	010—	10	Операция деления
$g$ RTN	RTN	011—	43 32	Возврат к линии 000

После ввода всех команд (операторов) нажатие клавиши SST (шаг вперед) приведет к автоматическому переходу к линии 000 программы. Если далее последовательно нажимать клавишу SST, можно по шагам проверить адреса и коды всех команд. Возврат на шаг назад обеспечивается исполнением оператора BST. Если какой-то оператор набран ошибочно, с помощью операторов SST, BST или GTO· $nnn$  нужно найти его и нажать клавишу ←. После любого оператора с адресом  $nnn$  можно вставить другой оператор, нажав клавиши его ввода. При этом автоматически меняется адресация последующих команд. Поясним это случаем, когда оши-

бочно набран оператор + по адресу 003, а нужно ввести оператор X:

Исходная программа	На шаге 003	На шаге 002
	нажата клавиша $\boxed{\leftarrow}$	нажата клавиша $\boxed{\times}$
001 — 42.21.11	→ 001 — 42.21.11	→ 001 — 42.21.11
002 — 42 16	→ 002 — 42 16	→ 002 — 42 16
<u>003 — 40</u>		003 20
004 — 45 8	→ 003 — 45 8	→ 004 45 8
005 — 20	→ 005 — 20	→ 005 20
.....	.....	.....

После ввода программы и ее проверки по кодам операторов нажатием клавиши R/S переводим калькулятор в режим автоматических вычислений. Нажав клавиши с надписями *g* и RAD, устанавливаем представление углов в радианах. Вводим исходные данные в регистры памяти, например  $n = 2$  (набираем 2 и нажимаем клавиши STO и 8),  $f = 1000$  (набираем 1000 и нажимаем клавиши STO и 9) и  $t = 1,2 \cdot 10^4$  (набираем  $1,2 \cdot 10^{-4}$ ). Нажав клавиши *f* и A или клавишу R/S, получаем  $y = 0,907908797$ .

В процессе редактирования и отладки программ может возникнуть необходимость просмотра всех кодов и пошагового выполнения программы. Опишем приемы редактирования и отладки программ, имеющие у калькуляторов HP-11C характер простейшего диалога с пользователем.

После ввода программы для перевода ее на нулевой адрес 000 достаточно нажать клавишу SST либо (это можно с любого места программы) дать команду GTO.000. Теперь, нажимая клавишу SST, будем получать по шагам показания дисплея: адрес и коды каждого оператора (см. пример выше).

Для проверки выполнения программы по шагам переводим калькулятор в режим автоматических вычислений, нажав клавиши с надписями *g* и P/R. Для установки программы на нулевой шаг нажимаем клавиши с надписями *g* и RTN. Теперь, введя исходные данные и нажимая клавишу SST, будем по шагам получать следующие данные (формат FIX 5):

Оператор	Показания дисплея		Индикация результатов
	Адрес	Коды	
LBLA	001	42.21.11	0,00012
$\pi$	002	42 16	3,14159
X	003	20	0,00038
R8	004	45 8	2,00000
X	005	20	0,00075
R9	006	45 9	1.000,00000
X	007	20	0,75398
SIN	008	23	0,68455
LSTx	009	43 36	0,75398
$\div$	010	10	0,90791
RTN	011	43 32	0,90791

Адреса и коды индицируются при нажатии клавиши SST с задержкой. При быстром ее нажатии индицируются только результаты вычислений. При пуске программы нажатием клавиши R/S или меток с задержкой также получим индикацию адреса и кодов шага, с которого идет пуск. Остановку вычислений в любой момент времени обеспечивает нажатие любой клавиши калькулятора.

Очевидно, что только колонка операторов в программе несет информацию о порядке выполняемых операций и их характере. Поэтому целесообразно в дальнейшем пользоваться компактной построчной схемой записи программ с десятью операторами в каждой строке. При этом нумерация линий будет соответствовать следующей:

001	002	003	004	005	006	007	008	009	010
011	012	013	014	015	016	017	018	019	020
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
201	202	203							

Такой порядок (с пропуском линии 000) целесообразен, поскольку линия автоматического останова 000 не может использоваться для записи в нее операторов.

В приведенном примере реализованы два варианта пуска: указанием метки A и вводом оператора R/S. В общем случае схема пуска указанием метки имеет следующий вид:

Пуск указанием метки (фрагмент программы)

000	...	L	B	L	A	...	...	...	...	...	RTN	...
					↓							
↑	Возврат на линию 000 и останов											

Таким образом, при указании метки происходит переход на тот шаг программы, который помечен меткой. После этого выполняется фрагмент программы до оператора RTN. Последний обеспечивает возврат на линию 000 и остановку вычислений. Оператор R/S обеспечивает пуск с любого адреса (в том числе и с 000). В этом случае операторы меток воспринимаются как пелинейные, т. е. никаких операций не выполняют.

Применение буквенных меток позволяет отождествлять переменные с буквами, что характерно для языков высокого уровня (например, бейсик). Как это делается, рассмотрим на примере вычисления арифметического выражения

$$d = \frac{a \cdot b + c}{a \cdot b - c}. \quad (1.4)$$

Программа вычисления (1.4) состоит из четырех частей: три части вида LBLA S0 RTN, LBLB S1 RTN и LBLC S2 RTN служат для ввода чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  и заключительная, четвертая часть

LBLD R2 R0 R1  $\times$  + LSTx R2 —  $\div$  RTN — для вычисления  $d$ .  
 В целом программа имеет вид

```

    LBLA S0 RTN LBLB S1 RTN LBLC S2 RTN LBLD
    R2 R0 R1  $\times$  + LSTx R2 —  $\div$  RTN
    
```

Переведя калькулятор в режим USER, по этой программе можно вводить значения  $a$ ,  $b$  и  $c$  в любом порядке, нажимая затем клавиши A, B и C, и вычислять  $d$ , нажимая клавишу D. Так, если  $a = 3$ ,  $b = 4$  и  $c = 2$ , вычисления можно провести набором команд: 2 C 3 A 4 B D (получим  $d = 1,4$ ). В общем случае клавиши с буквенными метками задают выполнение по программе функции пользователя.

Если необходимо начать выполнение программы с какого-либо фрагмента, помеченного не буквенной, а цифровой меткой вида LBL0, ..., LBL9, то для этого в режиме вычислений следует нажать клавишу GSB и клавишу с номером 0, ..., 9 метки. Можно также дать команду GTON, где  $N$  — номер или буква метки (при этом произойдет переход к адресу LBL $N$  с остановкой на нем) и нажать клавишу R/S.

Вычисление функции (1.2), включая случай  $t = 0$ , возможно по программе

```

    x  $\neq$  0 GTO1 1 RTN LBL1  $\pi$  R8 R9  $\times$   $\times$ 
     $\times$  SIN LSTx  $\div$  RTN
    
```

Здесь, если  $t = RX \neq 0$ , происходит переход по оператору GTO1 к метке 1, т. е. к вычислению по второй формуле (1.2). Если  $x = 0$ , переход игнорируется, и в регистр X поступает число 1. Для  $n = 2$ ,  $f = 1000$  и  $t = 0$  получаем  $y = 1$ , а для  $t = 1,2 \cdot 10^{-4}$  —  $y = 0,907908797$ . Пуск программы в данном случае осуществляем клавишей R/S.

У калькуляторов HP-11C не предусмотрены прямые переходы по программе к заданному адресу в виде числа. Переход возможен только к метке. Последнее удобно тем, что при изменении программы (усовершенствовании, редактировании, вводе новых операторов и т. д.) не требуется перестройки команд переходов — условных и безусловных, к подпрограммам и по анализу состояния флагов. Хотя каждая метка занимает отдельный шаг в программе, операторы GTON, GSB $N$  и F? $N$  являются одношаговыми (сравните с БП $N$ , ПП $N$  у калькулятора «Электроника БЗ-34», где эти команды двухшаговые). При косвенной адресации возможны переходы к заданному адресу с помощью операторов GTO1 (см. выше).

Особенностью микрокалькуляторов HP-11C является возможность выполнения любых команд по результатам выполнения условий условных переходов и контролю состояния флагов. В частности, этими командами могут быть команды безусловных пере-

ходов. Поясним это примерами. Во фрагменте программы вычисления  $\sqrt{x}$  при  $x \geq 0$

```
R0 x < 0 CHS  $\sqrt{x}$  RTN . . . . .
```

если число, извлекаемое из регистра 0,  $x > 0$ , оператор CHS после невыполненного условия  $x < 0$  игнорируется и происходит извлечение из  $x$  квадратного корня. Если условие  $x < 0$  выполняется, исполняется оператор CHS, т. е. числу  $x$  придается обратный знак — оно становится вновь положительным. Таким образом, операторы  $x < 0$  CHS эквивалентны оператору ABS выделения абсолютного значения  $|x|$  числа  $x$ .

Использование флагов и подпрограмм поясним на примере вычисления выражения (1.4) при  $a = R0$ ,  $b = R1$  и  $c = R2$ . Нетрудно заметить, что вычисление числителя и знаменателя можно организовать по одной подпрограмме, но при вычислении знаменателя надо сменить знак у числа  $c$ . В программе

```
CF0 GSB0 SF0 GSB0 ÷ RTN LBL0 R0 R1 ×
R2 F?0 CHS + RTN
```

подпрограмма содержит вычисление выражения  $a \cdot b + c$  и записана после метки LBL0. Знак вызываемого из R2 числа зависит от состояния флага F0 (заметим, что допустимо номер флага и номер метки подпрограммы выбирать одними и теми же — в нашем случае 0). При первом выполнении подпрограммы флаг 0 опущен и оператор CHS игнорируется. При втором выполнении подпрограммы флаг 0 поднят и число  $c$  суммируется со знаком минус, т. е. вычисляется  $a \cdot b - c$ . При  $a = 3$ ,  $b = 4$  и  $c = 2$  получим  $d = 1,4$ .

Аналогичным образом фрагмент программы F?N 1/x × обеспечивает умножение числа  $x = RX$  на число  $y = RY$ , если флаг N опущен (при этом оператор 1/x не выполняется), и деление  $y$  на  $x$  (точнее, умножение  $y$  на  $1/x$ ), если флаг N поднят. Фрагмент программы F?N GTOA GTOB обеспечивает переход к метке A, если флаг поднят, и к метке B, если он опущен.

После операторов ISG и DSE могут стоять любые операторы — в том числе возврата на линию 000 RTN и операторы безусловного перехода GTON.

Операторы ISG и DSE могут использоваться для организации циклов и косвенной адресации с модификацией адресов. Например, фрагмент программы

```
S(i) ISG RTN . . . . .
```

обеспечивает запись до  $N \leq 20$  чисел последовательно в регистры R0, R1, ..., R8, R9. Перед его пуском в регистр I надо записать число  $xxx01$ , где  $xxx = N - 1$ . При каждом исполнении приведенного фрагмента программы содержимое nnnnn (вначале оно рав-

но 0) будет увеличиваться на 1 и в момент равенства  $n\ n\ n\ n = x\ x\ x = N - 1$  выполнение оператора RTN прервется и произойдет выполнение последующей части программы. Отметим, что оператор RTN обеспечивает возврат на нулевую линию (адрес 000) с остановкой на ней. Добавив перед оператором ISG операторы RI INT, перед каждым новым пуском на дисплее получим номер введенного ранее числа (он соответствует номеру регистра, куда это число заносится). В этом случае оператор INT обеспечивает выделение только числа  $n\ n\ n\ n$  из общего содержимого  $n\ n\ n\ n\ .x\ x\ x\ y\ y$  регистра I.

Запись  $N$  чисел в регистры  $R\ N, \dots, R\ 2, R\ 1$  с использованием оператора DSE поясняет следующий фрагмент программы:

S(i) DSE RTN ... ..

Теперь в регистр I достаточно ввести только число  $N$ , т. е. в содержимом  $n\ n\ n\ n\ .x\ x\ x\ y\ y$  этого регистра  $n\ n\ n\ n = N, x\ x\ x = 0$  и  $y\ y = 0$ . Отметим, что при  $y\ y = 0$  калькулятор автоматически устанавливает приращение  $n\ n\ n\ n$  на  $-1$  при каждом исполнении оператора DSE. Приращение, равное нулю, бессмысленно — его можно получить, просто не вводя операторы ISG и DSE. Таким образом, при каждом исполнении оператора DSE номер регистра, в который вписывается число  $x = R\ X$ , меняется на  $-1$ . Когда  $n\ n\ n\ n = y\ y\ y = 0$ , выполнение оператора RTN прекращается и происходит переход к последующей части программы.

Аналогичным образом осуществляются циклы общего вида:



В теле цикла могут стоять вычисления различных функций или членов числовых рядов. В качестве опорных чисел в последнем случае может использоваться содержимое  $n\ n\ n\ n$  целой части числа  $n\ n\ n\ n\ .y\ y\ y\ x\ x$ , хранящегося в регистре I (выделение его производится операторами RI INT).

Иногда при выходе из цикла желательно восстановить исходное число  $I = n\ n\ n\ n\ .y\ y\ y\ x\ x$ , введенное в регистр I. Для этого могут использоваться операции выделения дробной FRAC и целой INT частей чисел. Например, при использовании оператора ISG  $x\ x = 0$  (приращение  $n\ n\ n\ n$  равно  $+1$ ), восстановление содержи-

мого регистра  $x$  достигается с помощью следующего фрагмента программы на выходе из цикла: RI FRAC STOI. Пусть в регистре I было число 0,015 (в начале цикла). После выполнения пятнадцати циклов получим в регистре I число, равное 15,015. Приведенный выше фрагмент программы отбрасывает целую часть этого числа и обеспечивает восстановление исходного числа 0,015 в регистре I.

Наличие одного индексного регистра затрудняет создание программ с рядом циклов, вложенных друг в друга. В этом случае модификацию адресов можно создать с помощью обычных регистров, обеспечив обмен их содержимого с содержимым индексного регистра. При этом можно использовать оператор  $x \rightleftharpoons I$ .

Следует отметить, что при косвенной адресации возможны арифметические операции с помощью оператора  $S * (i)$  (где  $*$  — знак операции:  $+$ ,  $\times$ ,  $-$  или  $\div$  над содержимым всех регистров памяти, а также возможен обмен содержимым между регистрами  $X$  и  $R(i)$  с помощью оператора  $x \rightleftharpoons (i)$ .

При составлении подпрограмм глубина вложения одной подпрограммы в другую может достигать 4. Все подпрограммы должны начинаться с меток LBL0, LBL1, ..., LBL9, LBLA, ..., LBLE. и заканчиваться оператором RTN. Ограничение на число вложенных друг в друга подпрограмм не относится к числу отдельных подпрограмм (оно может доходить до 15). К каждой подпрограмме можно обращаться неоднократно.

Следует отметить, что расширенное микропрограммное обеспечение калькуляторов HP-11C позволяет во многих случаях существенно сократить длину программ и увеличить сложность решаемых задач. Нередко это ведет к изменению рациональных алгоритмов вычислений. Например, большинство видов нелинейной регрессии сводится к решению систем из двух уравнений и проводится по довольно сложным программам. Наличие у калькулятора HP-11C операций линейной регрессии, осуществляемых микропрограммно, позволяет нелинейную регрессию свести к линейной с помощью простых нелинейных преобразований при вводе исходных данных и выводе результатов. В результате не только сокращается длина программ, но и появляется возможность одновременно вычислять и коэффициент корреляции.

Вычисление специальных функций на микрокалькуляторе HP-11C существенно упрощается благодаря микропрограммному вычислению факториалов, числа сочетаний и размещений, гамма-функции, выделению целой и дробной частей чисел, вычислению  $y^x$  при  $y < 0$  и нечетных целых  $x$  и т. д.

Завершая описание программирования микрокалькуляторов HP-11C, отметим, что в них предусмотрена индикация ряда ошибок:

**Егг0 0.** Некорректная математическая операция (деление на 0; вычисление  $y^x$  при  $y < 0$  и не целом  $x$  и  $x \leq 0$ ;  $\sqrt{x}$  при  $x <$

$\sqrt{\quad} < 0$ ;  $1/x$  при  $x = 0$ ;  $\log x$  и  $\ln x$  при  $x < 0$ ;  $\arcsin x$  при  $|x| > 1$ ;  $\arccos x$  при  $|x| > 1$ ;  $\Delta \%$  при  $0 = PY$ ;  $\operatorname{arch} x$  при  $|x| < 1$ ,  $\operatorname{arth} x$  при  $|x| > 1$ ;  $C_{y, x}$  и  $P_{y, x}$  при не целых  $x$  или  $y$ ,  $x < 0$ ,  $y < 0$ ,  $x > y$  и  $x \geq 10^{10}$ ).

Еггор 1. Переполнение регистров при арифметических операциях.

Еггор 2. Ошибки при статистических расчетах: вычисление  $\bar{x}$  при  $n = 0$ ,  $s$  при  $n \leq 1$ ,  $\hat{u}$ ,  $r$  при  $n \leq 1$ , L.R. при  $n \leq 1$ .

Еггор 3. Указан недопустимый номер регистра памяти.

Еггор 4 Указан недопустимый адрес или номер метки.

Еггор 5. Больше, чем допустимо, вложенных друг в друга подпрограмм.

Еггор 6. Указан недопустимый номер флага.

Еггор 9. Микрокалькулятор требует ремонта (ошибка с номером 9 проявляется при тестовом испытании).

Рг Еггор. Выключена память (например, из-за большого перерыва).

## 1.7. Система команд программируемых микрокалькуляторов НР-15С с расширенным микропрограммным обеспечением

Микрокалькуляторы НР-15С (рис. 1.15) являются дальнейшей модификацией карманных моделей серии НР. Они ориентированы на научные и инженерно-технические расчеты повышенной сложности. По сравнению с НР-11С у моделей НР-15С существенно увеличен объем памяти и введен ряд новых функций, выполняемых микропрограммно: выполнение арифметических операций и вычисление функций комплексного переменного, операции с матрицами (содержащими как действительные, так и комплексные элементы), решение нелинейных уравнений вида  $f(x) = 0$  и вычисление определенных интегралов. Таким образом, значительная часть наиболее распространенных расчетов выполняется без ввода внешних программ, необходимых для более серьезных вычислений. Все дополнительные операции могут включаться в программы пользователя.

**Основные операции.** К основным операциям микрокалькулятора НР-15С относятся все операции, присущие микрокалькулятору НР-11С и описанные в разд. 1.5. Поэтому программное обеспечение, разработанное для НР-11С, может использоваться и для НР-15С (при этом операторы DSE и ISG нужно записывать в виде DSEI и ISGI — см. ниже).

**Память НР-15С и ее распределение.** ПМК НР-15С имеет память с объемом 448 байтов, распределяемую пользователем между ре-

гистрами памяти и линиями программы. Каждый регистр памяти занимает 7 байтов, каждая линия программы — 1 или 2 байта. Следующие команды занимают 2 байта: LBL.N, GTO.N, CFn, CFI, SFn, SFI, F?n, F?I, FIXn, FIXI, SCIn, SCII, ENgn, ENgI, S<sub>y</sub><sup>x</sup>, SOLVE, MATRIXn, x ≠ yN, DSER, ISGR, STO +, STO -, STO ×, STO ÷, RCL +, RCL -, RCL ×, RCL ÷, STO MATRIXA (или B, C, D, E), STO A (или B, C, D, E) в режиме USER, RCL A (или B, C, D, E) в режиме USER, STO(i) и RCL(i). Все остальные команды (их

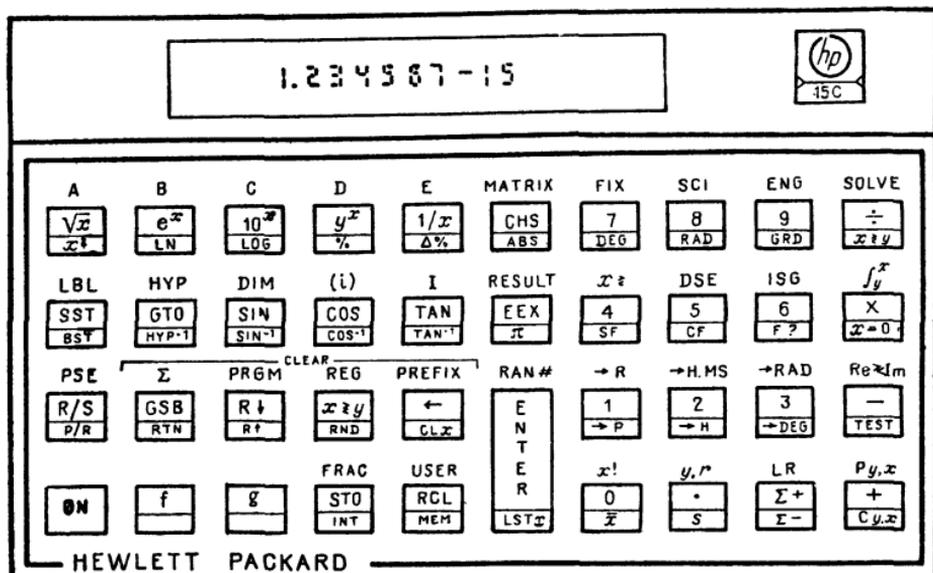


Рис. 1.15. Внешний вид программируемого микрокалькулятора HP-15C



Рис. 1.16. Распределение регистров памяти микрокалькулятора HP-15C (исходное состояние)

большинство) занимают 1 байт памяти. Максимальное число регистров памяти 67, максимальное число линий программы 448 (при этом останутся регистры 0, 1 и I).

При заправке в ПМК элементов питания и его первом включении автоматически устанавливается исходное распределение памяти (рис. 1.16): 21 регистр памяти отводится под регистры дан-

ных (1, 0, 1, ..., 9, 0, 1, ..., 9) и 46 регистров отводится под линии программы (332 линии при однобайтных командах).

Распределение памяти у HP-15C осуществляется вводом команды  $N \text{ DIM } (i)$ , где  $N$  — максимальный номер регистра памяти, который может использоваться для хранения данных. Контроль за распределением памяти осуществляется вводом команды  $g \text{ MEM}$  (с удержанием клавиши MEM в нажатом состоянии). При этом дисплей индицирует следующие данные:

$dd \quad uu \quad pp \quad -$

Здесь  $dd$  — максимальный номер используемого регистра памяти,  $uu$  — число регистров, которые можно занять под программу,  $pp$  — число регистров, которые заняты под программу, и  $b$  — число свободных байтов последнего из регистров, занятого под программу частично. Число  $dd$  можно также вызвать командой  $\text{RCL DIM } (i)$ .

Примеры использования команды  $\text{RCL DIM } (i)$ :

1. Нажимаемые клавиши	Показания дисплея
19 $f \text{ DIM } (i)$	19,0000
$g \text{ MEM}$	19 46 0 — 0
←	0,0000
$\text{RCL DIM } (i)$	19,0000

В данном случае 19 регистров отведено под данные и 46 — под программу. Все они свободны.

2. Нажимаемые клавиши Показания дисплея

30 $f \text{ DIM } (i)$	30,0000
$g \text{ MEM}$	30 35 0—0
$g \text{ P/R}$	000—
$\text{RCL } 0$	001—45 0
$\text{RCL } 1$	002—45 1
$\times$	003—20
$g \text{ RTN}$	004—43 32
$g \text{ P/R}$	30,0000
$g \text{ MEM}$	30 34 1—3

В данном случае вначале под данные отведено 30 регистров, под программу — 35. После ввода программы  $\text{RCL } 0 \text{ RCL } 1 \times \text{RTN}$  число  $uu$  уменьшилось на 1 (т. е. один регистр был использован под программу и  $pp = 1$ ). Поскольку все команды программы од-нобайтные, то из 7 байтов использовано только 4 и  $b = 3$ .

Дополнительные функции (см. далее) требуют под их реализацию дополнительную память (она берется из числа  $uu$  регистров).

1. Операции с комплексными числами — 5 регистров.

2. Операции с матрицами — 1 регистр на 1 элемент матрицы.

3. Решение нелинейных уравнений (оператор SOLVE) — 5 регистров.

4. Вычисление определенного интеграла (оператор  $\int_y^x$ ) — 23 регистра.

5. Совместное использование операторов SOLVE и  $\int_y^x$  — 23 регистра. Резервирование памяти под эти функции описано далее, при их рассмотрении.

**Непрограммируемые команды.** К непрограммируемым (т. е. вводимым только вручную) относятся следующие команды (с указанием префиксной клавиши):

f CLEAR PREFIX — вывод 10 знаков мантиссы,

f CLEAR PRGM — стирание программы,

f (i) — неполное указание косвенной адресации,

f USER — установка режима USER (см. описание HP-11C),

g BST — сдвиг программы на 1 шаг назад,

SST — сдвиг программы на 1 шаг вперед,

g MEM — проверка распределения памяти,

g P/R — перевод в режим ввода программы или в режим вычислений,

GTO CHS *nnn* — установка программы на шаг *nnn* (от 0 до 448),

← — стирание числа или линии программы,

ON/ — задание разделителя (сепаратора) в виде точки или запятой,

ON/ — — очистка всей памяти.

**Условные переходы.** В связи со значительным увеличением числа операций у HP-15C несколько изменен ввод в программу условных переходов. Непосредственно вводятся только два наиболее распространенных перехода для условий:  $x \leq y$  и  $x = 0$ . Остальные 10 типов условных переходов вводятся с помощью оператора TEST*n*:

Оператор	Условие перехода		Оператор	Условие перехода
TEST 0	$x \neq 0$		TEST 5	$x = y$
TEST 1	$x > 0$		TEST 6	$x \neq y$
TEST 2	$x < 0$		TEST 7	$x > y$
TEST 3	$x \geq 0$		TEST 8	$x < y$
TEST 4	$x \leq 0$		TEST 9	$x \geq y$

Если условие перехода выполняется, то по программе будет выполняться следующая линия (команда), в противном случае она обходится. Памятка о типах переходов помещена на нижней крышке калькулятора.

**Метки.** У HP-15C предусмотрено 25 меток: A, B, C, D, E, 0, 1, ..., ..., 9, .0, .1, ..., .9. Они вводятся командой LBL*M*, где *M* — метка. По программе допустимы безусловные переходы только по меткам, т. е. вида GTOM.

**Флаги.** Число флагов у HP-15C увеличено до 10. Номер флага  $n$  может быть от 0 до 9. С флагами используются следующие команды:

- SFn — подъем флага (set flags) с номером  $n$ ,
- CFn — спуск флага (clear flags) с номером  $n$ ,
- F?n — проверка состояния флага с номером  $n$ .

При выполнении команды F?n последующая команда выполняется, если флаг поднят, и пропускается, если он опущен. Флаги с  $n = 0, 1, \dots, 7$  находятся полностью в распоряжении пользователя. Флаг 8 служит для задания операций с комплексными числами (см. ниже), а флаг 9 — для задания мигания дисплея. Дисплей мигает, если флаг 9 поднят. Сброс флага 9 проводится командой CF9 либо (непрограммируемая операция) нажатием клавиши ←. При выключении калькулятора клавишей ON флаг 9 опускается. Однако если калькулятор отключается сам (автоматически), то поднятый флаг 9 не опускается.

**Подпрограммы.** Подпрограммы у HP-15C организуются так же, как у HP-11C. Однако число вложений подпрограмм друг в друга увеличено до 7.

**Индексный регистр и косвенная адресация.** Функции индексного регистра I у HP-15C аналогичны описанным для HP-11C. Однако у HP-15C индексный регистр может использоваться и как дополнительный регистр данных (см. ниже). Косвенная адресация выполняется с применением регистра I следующим образом:

Целая часть числа в регистре	Регистр Ri	Метка
0, ..., 9	R0, ..., R9	LBL0, ..., LBL9
10, ..., 19	R.0, ..., R.9	LBL.0, ..., LBL.9
20, ..., 24	R20, ..., R24	LBLA, ..., LBLE
25, ..., 65	R25, ..., R65	

Виды косвенной адресации HP-15C (знак \* означает арифметическую операцию +, −, × или ÷):

STO (i) — запись числа в регистр Ri,

RCL (i) — вызов числа из регистра Ri,

STO \* (i) — арифметические операции с числами, хранящимися в регистрах Ri и X, с записью результата в Ri,

RCL \* (i) — арифметические операции с числами, хранящимися в регистрах Ri и X, с записью результата в регистр X,

$x \rightleftharpoons (i)$  — обмен содержимым между регистрами X и Ri,

GTOI ( ) — безусловный переход по адресу, хранящемуся в регистре (адрес задается меткой) при  $npppp > 0$ ,

GTOI ( ) — безусловный переход по адресу, хранящемуся в регистре (адрес задается числом  $npppp < 448$  при указании передним знаком минус),

SFI, GFI и F?I — операции с флагами, номер которых задается содержимым регистра I,

FIXI, SCII и ENGI — установка формата дисплея с числом индицируемых знаков, заданным содержимым регистра I.

**Операторы DSE и ISG.** Операторы DSE и ISG у HP-15C записываются в виде DSER и ISGR, где R — номер любого регистра, т. е. 0, 1, ..., 9, .0, .1, ..., .9, или (i). Модификация адреса в любом из этих регистров происходит так, как это было описано для регистра I для ПМК HP-11C. Таким образом, области применения операторов DSE и ISG у HP-15C существенно расширены, что позволяет легко организовывать большое число циклов со счетчиками не только на основе регистра I, но и на основе любого другого регистра.

**Дополнительные функции.** К дополнительным функциям ПМК HP-15C относятся: операции с комплексными числами, матричные операторы, решение нелинейных уравнений и вычисление определенных интегралов. Дополнительные функции существенно расширяют математическое обеспечение, представляемое пользователю в виде готовых микропрограмм, которые могут выполняться как в режиме ручных вычислений, так и в составе программ, вводимых им в ПМК.

Использование дополнительных функций у ПМК HP-15C осуществляется довольно просто, а реализованные для этого алгоритмы достаточно универсальны и обеспечивают вычисления с высокой скоростью. Наличие дополнительных функций эквивалентно нескольким десяткам встроенных микропрограмм, решающих наиболее часто встречающиеся задачи. Это значительно расширяет круг задач, оперативно решаемых на HP-15C без ввода внешних программ.

К дополнительным функциям можно также отнести операции вида  $RCL * N$ , где  $N = 0, 1, \dots, 9, .0, .1, \dots, .9$  — номер регистра и  $*$  — арифметическая операция  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  и  $\div$ . При этом операции выполняются с содержимым регистров X и RN, причем результат заносится в регистр X, не меняя содержимого остальных регистров стека.

**Операции с комплексными числами.** Наряду с действительными числами HP-15C выполняет вычисления с комплексными числами вида

$$z = a + ib,$$

где  $a$  — действительная часть числа,  $b$  — мнимая часть его и  $i = \sqrt{-1}$ .

Для операций с комплексными числами к стеку подключается 5 дополнительных регистров памяти (из числа отведенных под программу). В результате образуется двойной стек (рис. 1.17), ле-

вая половина которого служит для хранения действительных частей комплексных чисел, а правая — для мнимых частей. Доступ к правому регистру X осуществляется с помощью оператора  $\text{Re} \rightleftharpoons \text{Im}$ , при исполнении которого содержимое левого и правого регистров X меняются местами. Таким образом, можно, например,

Рис. 1.17. Организация стека микрокалькулятора HP-15C при операциях с комплексными числами



ввести число  $b$ , набрав его (в левом регистре X) и нажав клавиши  $f$  и  $\text{Re} \rightleftharpoons \text{Im}$ . Клавиша  $\leftarrow$  стирает число только в левом регистре X.

Помимо указанных действий, ввод  $a$  и  $b$  можно проводить в более наглядном виде: вводим  $a$ , нажимаем клавишу ENTER, вводим  $b$  и нажимаем клавиши  $f$  и  $I$  (т. е. задаем  $z = a + bi$ ).

Режим операций с комплексными числами задается подъемом флага F8 оператором SF8 или автоматически при первом использовании команд  $\text{Re} \rightleftharpoons \text{Im}$  и  $I$  (см. выше). При этом из регистров программной памяти изымается 5 регистров, устанавливается представление тригонометрических функций в радианах и индицируется знак  $c$  (от слова complex) комплексных чисел.

Все функции (алгебраические, тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические и обратные гиперболические) при комплексном переменном вычисляются после ввода  $a$  и  $b$  и нажатия клавиши для вычисления соответствующей функции действительного переменного (т. е.  $z \equiv x$ ). Результат получаем в виде числа в левом регистре X (действительная часть) и в правом (мнимая часть). Вызов мнимой части можно осуществить вводом команды  $\text{Re} \rightleftharpoons \text{Im}$  или  $(i)$ .

**Пример 1.3.** Найти значение  $\sin(3 + i \cdot 2)$ . Порядок нажатия клавиш следующий:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
3	3	Ввод числа $a = 3$
ENTER	3,0000	Фиксация ввода $a$
2	2	Ввод числа $b = 2$
$f$ I	3,0000	Указание, что $b$ — мнимая часть
SIN	0,5309	Вычисление $\sin(3 + i \cdot 2)$ с индикацией действительной части результата

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
$f(i)$	-3,5906	Индикация мнимой части результата (пока нажата клавиша $(i)$ )
	0,5309	Индикация действительной части результата после отжатия (примерно через 2 с) клавиши $(i)$
$f \text{ Re} \rightleftharpoons \text{Im}$	-3,5906	Индикация мнимой части результата после обмена содержимым между левым и правым регистрами X стека

**Пример 1.4** Найти  $1/z^2$  при  $z = 3 + i \cdot 2$ . Нажимаем клавиши 3 ENTER 2  $f$  I  $g$   $x^2$  1/ $x$  (получаем 0,0296) и  $f(i)$  (получаем -0,0710). Следовательно,  $1/z^2 = 0,0296 - i \cdot 0,071$ .

**Пример 1.5.** Найти  $\text{arctg} z$  при  $z = 0,3 + i \cdot 0,2$ . Нажимаем клавиши 3 ENTER .2  $f$  I  $g$   $\text{HY}^{-1}$  TAN (получаем  $\text{arctg} z = 0,2957 + i \cdot 0,2155$ ).

Двухместные операции выполняются вводом действительной  $a$  и мнимой  $b$  частей вначале для первого комплексного числа, а затем для второго. После этого указывается команда нужной операции. Эти операции могут проводиться последовательно и комбинироваться с вычислением функций комплексного переменного.

**Пример 1.6.** Вычислить

$$z_0 = \sqrt{A/B},$$

где  $A = 1,2 + i \cdot 4,7$  и  $B = 2,7 + 3,2i$ . Нажимаем клавиши 1.2 ENTER 4.7  $f$  I (ввод  $A$ ) 2.7 ENTER 3.2  $f$  I (ввод  $B$ )  $\div$  (деление  $A$  на  $B$ )  $\sqrt{x}$  (вычисление  $z_0$ ). Результат получим в виде  $z_0 = 1,0491 + i \cdot 0,2406$ .

**Пример 1.7.** Вычислить

$$z_0 = \frac{(5 - i \cdot 3)(3 + i \cdot 2)}{(5 + i \cdot 3)(2 - i \cdot 4)} + (0,5 + i \cdot 1).$$

Нажимаем клавиши: 5 ENTER 3 CHS  $f$  I 3 ENTER 2  $f$  I  $\times$  5 ENTER 3  $f$  I  $\div$  2 ENTER 4 CHS  $f$  I  $\div$  .5 ENTER 1  $f$  I  $+$ . Получаем  $z_0 = 1,1588 + 1,4647i$ .

Действия с комплексными числами могут комбинироваться с преобразованием координат (см. рис. 1.11,  $a, б$ ). Например, в последнем примере, выполнив команду  $g \rightarrow R$ , получим  $r = 1,8677$  и (нажав клавиши  $f$  DEG и  $f \text{ Re} \rightleftharpoons \text{Im}$ )  $\theta = 51,6502^\circ$ .

**Операции с матрицами, имеющими действительные элементы.** ПМК HP-15C обеспечивает проведение основных операций над матрицами с действительными элементами, число которых не должно превышать 64. Так, операции над единичными квадратными матрицами возможны, если размер их не больше  $8 \times 8$  (т. е. 8 строк и 8 столбцов).

Матрицы в ПМК ПР-15С задаются буквами А, В, С, D и Е. Задание матрицы заключается в указании ее размера с помощью оператора DIM, задаваемого в виде  $m$  ENTER  $n$  DIM  $M$ , где  $m$  — число строк,  $n$  — число столбцов и  $M$  — обобщенное имя матрицы ( $M = A, B, C, D, E$  или  $I$ ). Матрица, в которую заносятся вычисляемые в ходе матричных операций элементы, задается оператором RESULT  $M$ . Для ряда операций (арифметические операции с элементами матрицы и константой, инвертирование матрицы и др.) матрицы результатов может по имени совпадать с исходной матрицей, т. е. результаты вычисленной матрицы могут заноситься на место исходной матрицы.

Основные операции с матрицами, имеющими действительные элементы, следующие:

DIMM — вызов спецификации матрицы (см. ниже),

MATRIX0 — установка размера всех матриц на 0 (т. е. освобождение памяти от матриц),

MATRIX1 — задание 1 в регистр 0 (счетчик числа строк) и в регистр 1 (счетчик числа столбцов),

MATRIX4 — транспортирование матрицы  $Y$  в матрицу  $Y^T$  со спецификацией ее в регистре X,

MATRIX5 — умножение транспортированной матрицы  $Y^T$  на матрицу X со спецификацией первой в регистре Y и второй в регистре X,

MATRIX6 — вычисление остатка (residual) матрицы  $Res = R - YX$  со спецификацией матриц Y и X в регистрах Y и X,

MATRIX7 — вычисление суммы всех элементов матрицы X.

MATRIX8 — вычисление корня квадратного из суммы квадратов всех элементов матрицы X,

MATRIX9 — вычисление определителя матрицы X,

RCLM — вызов элемента  $a_{j,i}$  матрицы M при j, хранящемся в регистре 0, и i, хранящемся в регистре 1,

j ENTER i RCL g M — вызов элемента  $a_{ji}$  матрицы M на индикацию (при задержке нажатия клавиши  $M = A, B, C, D, E$  или I выводится наименование элемента  $a_{ji}$  в виде  $Mji$ ),

RCL MATRIXM — выдача спецификации матрицы M (в виде  $Mmn$ , где  $M = A, B, C, D, E$  или  $i$ ),

RCL RESULT — выдача спецификации матрицы-результата M (в виде  $Mmn$ ),

RESULTM — задание матрицы M (A, B, C, D, E или I), в которую заносится результат,

STOM — запись значения элемента  $a_{ji}$ , заданного содержимым регистра X при j, хранящемся в регистре 0, и i, хранящемся в регистре 1,

$a_{jt}$  j ENTER i STO g M — запись значения элемента  $a_{jt}$ , заданного содержимым регистра Z стека при j, хранящемся в ре-

гистре Y, и  $i$ , хранящемся в регистре X (при задержке нажатия клавиши с именем матрицы индицируется имя элемента),

STO MATRIX M — запись всех элементов матрицы M с выдачей спецификации матрицы, с которой списываются элементы,

1/r — инвертирование матрицы, вызванной в регистр X и запись результата.

+, — — выдача спецификации матрицы результата в регистр X, сложение  $\Sigma$ ри вычитании двух матриц, или матрицы со скаляром,

$\times$  — перемножение двух матриц с выдачей их спецификаций или умножение одной матрицы на скаляр, запись результата,

$\div$  — деление двух матриц с выдачей их спецификаций, деление элементов одной матрицы на скаляр и обращение матрицы с умножением элементов обращенной матрицы на скаляр, запись результата.

Все операции над матрицами выполняются, как и над действительными числами. Участвующие в операциях матрицы должны быть предварительно заданы. Матрица задается ее спецификацией, т. е. обозначением (буквой A, B, C, D или E) и размером, например A 2 2 есть спецификация матрицы A размера  $2 \times 2$ .

Пример 1.8. Выполнить обращение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Результат занести в матрицу B. Вычисления выполняются следующим образом:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
g CF 8		Выключение режима работы с комплексными числами (если нужно)
3 ENTER f DIM A	3,0000	Задание массива $3 \times 3$ под матрицу
f MATRIX 1	3,0000	Установка 1 в счетчики R0 и R1
f USER	3,0000	Установка режима USER для удобства ввода данных
4 STO A	A 1,1	Ввод элемента $a_{11} = 4$ с индикацией его обозначения при задержке отпускания клавиши
	4,0000	Индикация после отпускания клавиши
8 STO A	8,0000	Ввод элемента $a_{12} = 8$
0 STO A	0,0000	Ввод элемента $a_{13} = 0$
8 STO A	8,0000	Ввод элемента $a_{21} = 8$
8 STO A	8,0000	Ввод элемента $a_{22} = 8$

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
8 STO A	8,0000	Ввод элемента $a_{23} = 8$
2 STO A	2,0000	Ввод элемента $a_{31} = 2$
0 STO A	0,0000	Ввод элемента $a_{32} = 0$
1 STO A	1,0000	Ввод элемента $a_{33} = 1$
f RESULT B	1,0000	Задание матрицы $B$ под результатом
RCL MATRIX A	A 3 3	Вызов матрицы $A$ и индикация ее спецификации (обозначения $A$ и размера $3 \times 3$ )
f 1/x	B 3 3	Обращение матрицы $A$ и выдача спецификации результата матрицы $B = A^{-1}$
RCL B	0,0633	Вывод значения $b_{11}$
RCL B	-0,0833	Вывод значения $b_{12}$
RCL B	0,6667	Вывод значения $b_{13}$
RCL B	0,0833	Выдача значения $b_{21}$
RCL B	0,0417	Выдача значения $b_{22}$
RCL B	-0,3333	Выдача значения $b_{23}$
RCL B	-0,1667	Выдача значения $b_{31}$
RCL B	0,1667	Выдача значения $b_{32}$
RCL B	B 3 3	Выдача обозначения элемента $b_{33}$ при задержке отпущения клавиши B
	-0,3333	Выдача значения $b_{33}$ после отпущения клавиши B

Пример 1.9. Решить системы линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &= 274, \\ 0,24x_1 + 0,86x_2 &= 120,32; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 1y_1 + 1y_2 &= 233, \\ 0,24y_1 + 0,86y_2 &= 112,96; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 1z_1 + 1z_2 &= 331, \\ 0,24z_1 + 0,86z_2 &= 151,36, \end{aligned} \right\}$$

отличающиеся только вектором свободных членов. Матрицы коэффициентов при неизвестных у всех систем одинаковы. Целесообразно решение провести по следующему алгоритму: вычисляется матрица  $A^{-1}$ , вектор неизвестных находится по формуле  $X = A^{-1}B$  после задания вектора  $B$  свободных членов каждого уравнения. Порядок выполнения операций следующий:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
2 ENTER f DIM A	2,0000	Задание размера $2 \times 2$ матрицы $A$
2 ENTER 1 f DIM B	1,0000	Задание размера $2 \times 1$ матрицы $B$
f RESULT A	1,0000	Задание матрицы результата $A$

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
f MATRIX 1	1,0000	Занесение 1 в счетчики R0 и R1 строк и столбцов
f USER	1,0000	Задание режима USER
1 STO A	1,0000	Ввод элемента $a_{11}$
1 STO A	1,0000	Ввод элемента $a_{12}$
.24 STO A	0,2400	Ввод элемента $a_{21}$
.86 STO A	0,8600	Ввод элемента $a_{22}$
RCL MATRIX A	A 2 2	Вызов матрицы A
f 1/x	A 2 2	Обращение матрицы A с занесением $A^{-1}$ на место исходной матрицы
f RESULT C	A 2 2	Задание матрицы результата
274 STO B	274,0000	Ввод элемента $b_{11}$
120.32 STO B	120,3200	Ввод элемента $b_{21}$
RCL MATRIX A	A 2 2	Вызов матрицы $A^{-1}$
RCL MATRIX B	B 2 1	Вызов матрицы-вектора B
×	C 2 1	Вычисление $C = A^{-1} B$
RCL C	186,0000	Вызов $x_1 = c_{11}$
RCL C	88,0000	Вызов $x_2 = c_{21}$
233 STO B	233,0000	Ввод элемента $b_{11}$
112.96 STO B	112,9600	Ввод элемента $b_{21}$
RCL MATRIX A	A 2 2	Вызов матрицы $A^{-1}$
RCL MATRIX B	B 2 1	Вызов матрицы B
×	C 2 1	Вычисление $C = A^{-1} B$
RCL C	141,0000	Вызов $y_1 = c_{11}$
RCL C	92,0000	Вызов $y_2 = c_{21}$
331 STO B	331,0000	Ввод элемента
151.36 STO B	151,3600	Ввод элемента
RCL MATRIX A	A 2 2	Вызов матрицы $A^{-1}$
RCL MATRIX B	B 2 1	Вызов матрицы B
×	C 2 1	Вычисление $C = A^{-1} B$
RCL C	215,0000	Вызов $z_1 = c_{11}$
RCL C	116,0000	Вызов $z_2 = c_{21}$

Таким образом, вычисления могут проводиться для любого числа систем.

**Пример 1.10.** Решить три системы линейных уравнений (см. пример 1.9), представив их в виде (неизвестные обозначены как  $d_{ji}$ )

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,24 & 0,86 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 274 & 233 & 331 \\ 120,32 & 112,96 & 151,36 \end{bmatrix}$$

или

$$A \cdot D = B.$$

Для этого вводим матрицы A ( $2 \times 2$ ) и B ( $2 \times 3$ ), задаем матрицу результата D и находим ее элементы (неизвестные), выполнив операции RCL MATRIX B RCL MATRIX A  $\div$  . В результате получим матрицу неизвестных

$$\begin{bmatrix} 186 & 141 & 215 \\ 88 & 92 & 116 \end{bmatrix}.$$

Обращение матриц, вычисление их определителя и решение системы линейных уравнений выполняются с применением LU-преобразования исходной матрицы.

**Операции с матрицами, имеющими комплексные элементы.** Максимальный размер квадратных матриц с комплексными элементами при вычислениях на калькуляторе составляет  $4 \times 4$ . Матрица  $Z = X + iY$  с комплексными элементами, имеющая размер  $m \times n$ , задается матрицами  $X$  и  $Y$  действительных и мнимых частей с размерностью  $m \times n$ . Таким образом, общее число элементов матрицы  $Z$  составляет  $2m \times n$ .

Комплексная матрица может быть представлена в форме

$$Z^p = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

где  $X$  — действительная часть,  $Y$  — мнимая.

Например, если

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix},$$

то

$$A = Z^p = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$Z = \begin{bmatrix} x_{11} + iy_{11} & x_{12} + iy_{12} \\ x_{21} + iy_{21} & x_{22} + iy_{22} \end{bmatrix}$$

может быть также представлена в форме

$$A = Z^c = \begin{bmatrix} x_{11} & y_{11} & x_{12} & y_{12} \\ x_{21} & y_{21} & x_{22} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

Эти преобразования выполняются следующим образом:

Нажимаемые клавиши	Исходная матрица	Преобразованная матрица
$f P_{y, x}$	$Z^c$	$Z^p$
$f C_{y, x}$	$Z^p$	$Z^c$

**Пример 1.11.** Матрицу с комплексными элементами

$$Z = \begin{bmatrix} 4 + 3i & 7 - 2i \\ 1 + 5i & 3 + 8i \end{bmatrix},$$



4. Нажав клавиши  $f$  MATRIX 2, преобразуем матрицу  $Z^p$  в  $\tilde{Z}$ .

5. Задаем матрицу результата.

6. Нажав клавишу  $1/x$ , получаем обращенную матрицу  $\tilde{Z}^{-1}$ , элементы которой заносятся в матрицу результата.

7. Нажав клавиши  $f$  MATRIX 3, преобразуем матрицу  $\tilde{Z}^{-1}$  в  $(Z^{-1})^p$ .

8. Если нужно преобразовать обращенную матрицу к форме  $(Z^{-1})^c$ , нажимаем клавиши  $g$  и  $C_{y, x}$ .

Пример 1.12. Обратить матрицу, полученную в примере 1.11, и представить ее в форме  $(Z^{-1})^p$ . Для этого выполняем следующие действия:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
RCL MATRIX A	A 4 2	Вызов спецификации матрицы A
$f$ MATRIX 2	A 4 4	Преобразование $Z^p$ в $\tilde{Z}$
$f$ RESULT B	A 4 4	Задание матрицы результата B
$1/x$	4 4	Вычисление $(\tilde{Z})^{-1} = (\tilde{Z}^{-1})$
$f$ MATRIX 3	4 2	Преобразование $(\tilde{Z}^{-1})$ в $(Z^{-1})^p$

Вызов элементов матрицы B с помощью команд RCL B дает следующий результат:

$$(Z^{-1})^p = B = \left[ \begin{array}{cc} -0,0254 & 0,2420 \\ -0,0122 & -0,1017 \\ \cdot & \cdot \\ -0,2829 & -0,0022 \\ 0,1691 & -0,1315 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{Действительная часть} \\ \text{Мнимая часть} \end{array} \right\}$$

**Умножение комплексных матриц.** Умножение комплексных матриц выполняется с применением соотношения  $(YX)^p = \tilde{Y}X^p$  по следующему алгоритму.

1. Вводятся элементы матрицы Y и X в форме  $Z^p$  или  $Z^c$ .

2. Вызывается спецификация матрицы Y.

3. Если матрица Y задана в форме  $Y^c$ , нажав клавиши  $f$  и  $P_{y, x}$ , она преобразуется в форму  $Y^p$ .

4. Нажав клавиши  $f$  MATRIX 2, преобразуем матрицу  $Y^p$  в  $\tilde{Y}$ .

5. Вызывается спецификация матрицы X.

6. Если матрица X была задана в форме  $X^c$ , нажав клавиши  $f$  и  $P_{y, x}$ , преобразуем ее в форму  $X^p$ .

7. Задаем результирующую матрицу.

8. Нажав клавишу X, получаем спецификацию результирующей матрицы  $\tilde{Y}X^p = (YX)^p$ .

9. Если нужно получить результат в виде  $(YX)^c$ , нажимаем клавиши  $g$  и  $C_{y, x}$ .

**Решение системы комплексных линейных уравнений.** Система линейных уравнений, записанных в матричной форме  $AX = B$ , решается с применением операций  $X = A^{-1}B = B/A$ . Порядок вычислений следующий.

1. Вводятся элементы матриц  $A$  и  $B$  в форме  $Z^p$  или  $Z^c$ .
2. Вызывается спецификация матрицы  $B$ .
3. Если матрица  $B$  была задана в форме  $B^c$ , нажав клавиши  $f$  и  $P_{y, x}$ , приводим ее к форме  $B^p$ .
4. Вызывается спецификация матрицы  $A$ .
5. Если матрица  $A$  была задана в форме  $A^c$ , нажав клавиши  $f$  и  $P_{y, x}$ , приводим ее к форме  $A^p$ .
6. Нажав клавиши  $f$  MATRIX 2, преобразуем матрицу  $A^p$  в матрицу  $\tilde{A}$ .
7. Задаем матрицу результата  $C$  ( $C = X$ ), нажав клавиши  $f$  RESULT C.
8. Нажав клавишу  $\div$ , вычисляем  $C = B/\tilde{A}$ .
9. Если матрица результата  $C^p = X^p$  должна быть представлена в форме  $C^c = X^c$ , нажимаем клавиши  $g$  и  $C_{y, x}$ .

**Пример 1.13.** Найти токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  в электрической цепи (рис. 1.18). Активные и реактивные комплексные сопротивления

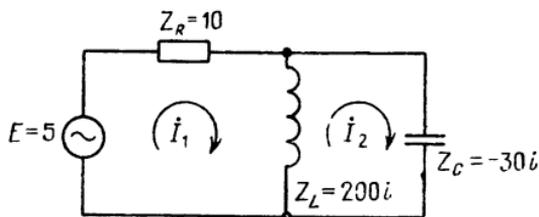


Рис. 1.18. Электрическая цепь к примеру 1.13

на частоте источника переменного э. д. с. указаны на рисунке. Для этой цепи можно составить систему линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} 10 + 200i & -200i \\ -200i & (200 - 30)i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  представим в форме  $Z^p$ :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 200 & -200 \\ -200 & 170 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Порядок вычислений следующий:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
$f$ MATRIX 0	0,0000	Обнуление всех матриц
4 ENTER 2 $f$ DIM A	2,0000	Задание памяти под матрицу $A$

Нажимаемые клавиши	Показание дисплея	Полученный
f MATRIX 1	2,0000	Ввод 1 в регистры-счетчики R0, R1
f USER	2,0000	Задание режима USER
10 STO A	10,0000	Ввод элемента $a_{11}$
0 STO A	0,0000	Ввод элемента $a_{12}$
STO A	0,0000	Ввод элемента $a_{21}$
STO A	0,0000	Ввод элемента $a_{22}$
200 STO A	200,0000	Ввод элемента $a_{31}$
CHS STO A	-200,0000	Ввод элемента $a_{32}$
STO A	-200,0000	Ввод элемента $a_{41}$
170 STO A	170,0000	Ввод элемента $a_{42}$
4 ENTER 1 f DIM B	1,0000	Задание памяти под матрицу B
0 STO MATRIX B	0,0000	Обнуление элементов матрицы B
5 ENTER 1 ENTER	1,0000	Задание $b_{11} = 5$
STO g B	5,0000	Ввод элемента $b_{11}$
RCL MATRIX B	B 4 1	Вызов спецификации матрицы B
RCL MATRIX A	A 4 2	Вызов спецификации матрицы A
f MATRIX 2	A 4 4	Преобразование $A^p$ в $\tilde{A}$
f RESULT C	A 4 4	Задание матрицы результата C
÷	C 4 1	Вычисление $C = B / A$
g C y, x	C 2 2	Преобразование $C^p$ в $C^c$ (и $X^p = C^p$ в $X^c = C^c$ )

Нажимая клавиши RCL C, получим результат

$$C^c = X^c = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0372 + 0,1311i \\ 0,0437 + 0,1543i \end{bmatrix}.$$

Описанным выше способом можно решать системы из двух или трех линейных уравнений с комплексными матрицами A и B. Системы до 4 линейных уравнений можно решать в следующем порядке.

1. Вводим элементы матрицы A в форме  $A^p$  или  $A^c$ .
2. Вызываем спецификацию матрицы A.
3. Если матрица A была задана в форме  $A^c$ , приводим ее к форме  $A^p$ , нажав клавиши f и P y, x.
4. Нажав клавиши f MATRIX 2, преобразуем  $A^p$  в  $\tilde{A}$ .
5. Нажав клавиши STO RESULT, заносим  $\tilde{A}$  на место  $A^p$  и задаем матрицу результата A.
6. Нажав клавишу 1/x, получаем  $(\tilde{A})^{-1}$  с занесением ее на место матрицы A.
7. Освобождаем половину массива A, указав половину числа строк, содержащегося в спецификации результата в п. 6.

8. Вводим элементы матрицы  $B$  в форме  $B^p$  или  $B^c$ .
9. Вызываем спецификацию матрицы  $A$ .
10. Вызываем спецификацию матрицы  $B$ .
11. Если матрица  $B$  была задана в форме  $B^c$ , преобразуем ее к форме  $B^p$ , нажав клавиши  $f$  и  $P_y$   $x$ .
12. Нажав клавиши  $f$  MATRIX 2, преобразуем  $B^p$  в  $\tilde{B}$ .
13. Задаем матрицу результата.
14. Нажимаем клавишу  $X$ .
15. Нажимаем клавиши  $f$  MATRIX 4 для транспонирования результирующей матрицы.
16. Нажимаем клавиши  $f$  MATRIX 2.
17. Освобождаем половину массива матрицы-результата, указав половину числа строк, содержащегося в спецификации матрицы результата.
18. Нажав клавиши RCL RESULT, вызываем спецификацию матрицы результата.
19. Нажав клавиши  $f$  MATRIX 4, вычисляем  $X^p$ .
20. Если нужна форма  $X^c$  результата, нажимаем клавиши  $g$  и  $C_y$   $x$ .

**Запись спецификации матрицы в индексный регистр  $I$ .** Спецификация матрицы может быть записана в индексный регистр  $I$ . При этом вызов или запись элементов матрицы, а также различные операции с ней могут производиться при обращении к индексному регистру; например, операция RCL  $I$  дает вызов спецификации данной матрицы, операции RCL( $i$ ) обеспечивают вызов построчно элементов матрицы, STO( $i$ ) — их запись и т. д.

**Работа стека при матричных операциях.** При матричных операциях стек используется для ввода чисел (например, номеров строк и столбцов) и спецификаций матриц. Характер перемещений их в стеке такой же, как обычных чисел.

**Решение нелинейных уравнений.** Нелинейные уравнения вида  $F(x) = 0$  решаются с помощью команды SOLVE (решение). Порядок решения следующий.

1. Вычисление функции  $F(x)$  оформляется в виде подпрограммы, которая начинается оператором LBLM (где  $M$  — метка A, B, C, D, E, 0, ..., 9, .0, ..., .9), и заканчивается оператором RTN. При этом надо помнить, что перед началом выполнения подпрограммы текущие значения  $x$  заносятся микропрограммой SOLVE во все регистры стека (X, Y, Z и T).

2. Решение, т. е. нахождение корня  $\bar{x}$ , удовлетворяющего условию  $F(\bar{x}) = 0$ , выполняется вводом двух первых приближений  $x_0$  и  $x_1$  в регистры Y и X и указанием команд  $f$  SOLVEM (где  $M$  — метка, указанная в п. 1).

3. В результате решения получаем: значение  $x_n$  ( $n$  — номер последней итерации) в регистре X,  $x_{n-1}$  (т. е. предшествующей ос-

тановке итерации) в регистре Y и  $F(x_n)$  — значение функции  $F(x)$  при  $x = x_n$  в регистре Z.

По значениям  $x_n$ ,  $x_{n-1}$  и  $F(x_n)$  можно судить о характере решения. Алгоритм, реализованный в микропрограмме SOLVE, обеспечивает:

1. Нахождение действительного корня  $x_n = \bar{x}$  на отрезке  $[a, b]$  при задании  $x_0 = a$  и  $x_1 = b$  для функции  $F(x)$ , у которой этот корень существует. В этом случае  $x_n \approx x_{n-1}$  и  $F(x_n) \approx 0$ .

2. Поиск ближайшего действительного корня  $x_n = \bar{x}$  при задании  $x_0$  и  $x_1$  вне пределов  $[a, b]$  его определения. В этом случае также  $x_n \approx x_{n-1}$  и  $F(x_n) \approx 0$ .

3. Обнаружение корня в месте разрыва функции. При этом  $x_n \approx x_{n-1}$  и  $F(x_n) \neq 0$ .

4. Обнаружение особенностей функции  $f(x)$  при отсутствии действительных корней: экстремумов, асимптот, комплексных корней. О характере особенностей можно судить по значениям  $x_n$ ,  $x_{n-1}$ ,  $F(x_n)$  и поведению функции  $F(x)$  вблизи значения  $F(x_n)$ . Во всех этих случаях остановка происходит с выдачей на индикацию сообщения Error8, которое сбрасывается нажатием клавиши ←. Сообщение Error8 означает отсутствие действительного корня.

Микропрограмма SOLVE реализует комбинированный метод секущих-хорд. В случае, описанном в п. 1 (см. выше), реализуется метод хорд, а в случае п. 2 — метод секущих (рис. 1.19). Во всех

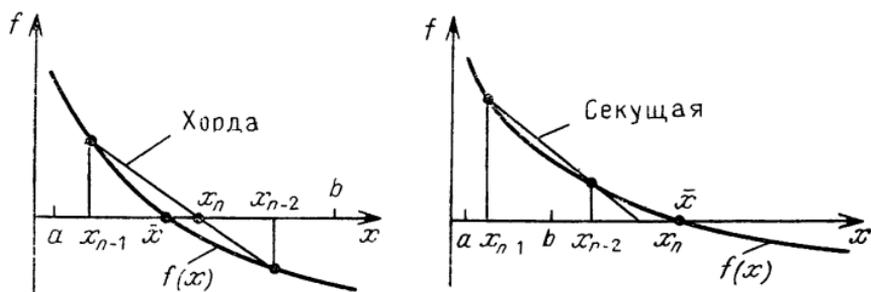


Рис. 1.19. Поиск очередного значения  $x_n$  по двум предшествующим значениям  $x_{n-1}$  и  $x_{n-2}$  для случая, когда  $x_n$  находится в пределах отрезка  $[a, b]$  (а) и за его пределами (б)

этих случаях значение  $x_i$  вычисляется по двум предшествующим значениям  $x_{i-1}$  и  $x_{i-2}$  с применением линейной интерполяции-экстраполяции. Погрешность решения  $\epsilon$  задается автоматически при задании числа цифр результата  $n$  операторами FIX $n$ , SCI $n$  и ENG $n$ . Для гладких  $F(x)$  без особенностей обычно получаются верными все заданные цифры результата.

**Пример 1.14.** Вычислить корень уравнения

$$F(x) = x - \sin x - 0,25 = 0,$$

находящийся на отрезке [1; 1,2]. Решение выполняем следующим образом:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения	
$\varphi$ RAD	0,0000	Установка $x$ в радианах	
$\varphi$ P/R	000—	Перевод в режим «ввод подпрограммы вычисления $F(x)$ »	
$f$ LBL 9	001— 42, 21. 9	Задание метки 9	
SIN	002— 23	Вычисление $\sin x$	
—	003— 30	Вычисление $x - \sin x$	
.	004— 48	} Вычисление $F(x) = x - \sin x = 0,25$	
2	005— 2		
5	006— 5		
—	007— 30		
$\varphi$ RTN	008— 43	32	Возврат из подпрограммы
$\varphi$ P/R	0,0000		Переход в режим счета
1 ENTER 1.2	1,2		Задание $x_0 = 1 = PY$ и $x_1 = 1,2 = PX$
$f$ SOLVE 9	running		Пуск микропрограммы SOLVE с меткой 9
	1,17112		Результат $x_n = 1,1712$
R ↓	1,1712		Результат $x_{n-1} \approx x_{n-1}$
R ↓	-3,0000-10		Результат $F(x_n) = 3 \cdot 10^{-10}$

В данном случае  $x_n = x_{n-1} = \bar{x}$  находится в отрезке  $[a, b]$ , причем  $x_0 = a$  и  $x_1 = b$ , а  $F(x_n) \approx 0$ . Следовательно, найден действительный корень функции  $F(x)$ , которая не имеет особенностей в заданном отрезке  $[a, b]$ . Повторив вычисления для  $x_0 = 1,1$  и  $x_1 = 1,12$ , а также для  $x_0 = 1,2$  и  $x_1 = 1,22$ , получим те же результаты, хотя в этом случае отрезок  $[x_0, x_1]$  уже не является интервалом определенности корня.

**Пример 1.15.** Вычислить корни уравнения

$$F(x) = x^2 - 3x - 10 = 0,$$

если известно, что один из них  $\bar{x}_1 > 0$ , а другой  $\bar{x}_2 < 0$ . Представив  $F(x)$  в виде

$$F(x) = (x - 3)x - 10,$$

запасем в программу подпрограмму вычисления  $F(x)$ , записанную в строку (см. разд. 1.6):

LBL0 3 —  $\times$  1 0 — RTN

Задав отрезок  $[0, 10]$  для поиска  $\bar{x}_1$  и нажав клавиши 0 ENTER 10  $f$  SOLVE 0, получим  $\bar{x}_1 = 5,0000$  (предшествующее значение равно также 5,0000,  $F(x_n) = 0$ ). Задав далее отрезок  $[-10, 0]$ , аналогичным образом находим  $\bar{x}_2 = -2,0000$ . График функции  $F(x)$ , рассмотренной в этом примере, дан на рис. 1.20.

В некоторых случаях  $F(x)$  имеет несколько корней, часть из которых физически нереальна. Такой случай дан в следующем примере.

**Пример 1.16.** Лист тонкого железа (рис. 1.21) имеет размеры  $4 \times 8$  дм. Из него необходимо сделать ящик заданного объема

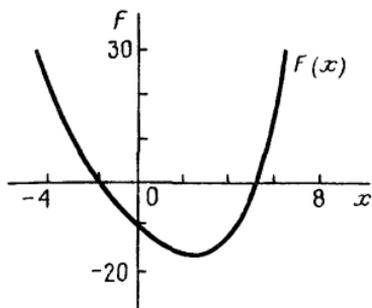


Рис. 1.20. График функции  $F(x) = x^2 - 3x - 10$

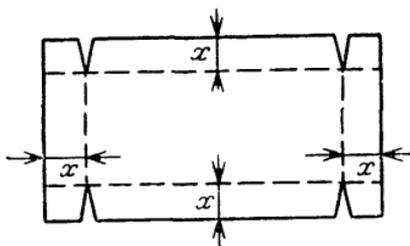


Рис. 1.21. Раскрой железного листа под ящик заданного объема

$V_0$ , отгибая края на расстоянии  $x$ . Объем ящика  $V = (8 - 2x) \times (4 - 2x)x$  или, раскрыв скобки и представляя полученный многочлен в форме Горнера,

$$V = 4((x - 6)x + 8)x.$$

Если требуемый объем  $V_0 = 7,5$  дм<sup>3</sup>, то  $x$  находится из решения нелинейного уравнения

$$F(x) = 4((x - 6)x + 8)x - 7,5 = 0.$$

График этой функции (рис. 1.22) показывает, что она имеет три корня при  $\bar{x}_1 \approx 0,3$  дм,  $\bar{x}_2 \approx 1,5$  дм и  $\bar{x}_3 > 4$  дм. Третий корень физически нереален, так как при ширине листа 4 дм  $x$  не может превышать 2 см.

Для вычисления корней введем подпрограмму:

```
LBL 9 6 - × 8 + × 4 × 7
.      5 - RTN
```

Задав отрезок  $[0; 0,5]$ , находим  $\bar{x}_1 = 0,2974$  дм, а задав отрезок  $[1; 2]$ , получим  $\bar{x}_2 = 1,5$  дм. В первом случае получается неглубокий ящик большой площади, во втором — более глубокий, но меньшей площади. Задав отрезок  $[3; 4]$ , можно найти и третий корень  $\bar{x}_3 = 4,2026$  дм, но, как отмечалось, он физически нереален.

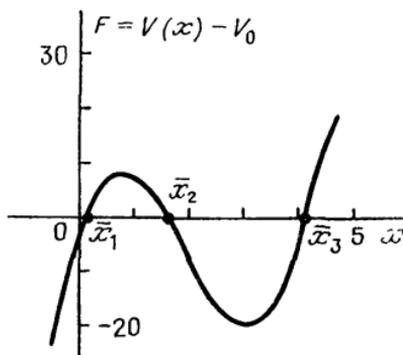


Рис. 1.22. Зависимость объема  $V$  от расстояния отгиба  $x$

**Пример 1.17.** Найти корень уравнения

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x < 1 \\ -1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases} = 0.$$

Подпрограмма вычисления  $F(x)$  имеет вид:

```
LBL0 1 x ≤ y GTO1 R ↓ CHS ex RTN LBL1 CHS
RTN
```

Задав отрезок  $[0, 2]$ , получим  $x_n = \bar{x} = 1,0000$ ,  $x_{n-1} = 1,0000$  и  $F(x_n) = 0,3679$ . Совпадение  $x_n$  и  $x_{n-1}$  позволяет считать корень действительным, но отличие  $F(x_n)$  от 0 свидетельствует о разрыве функции  $F(x)$  при  $x = x_n$ . Действительно, данная функция имеет

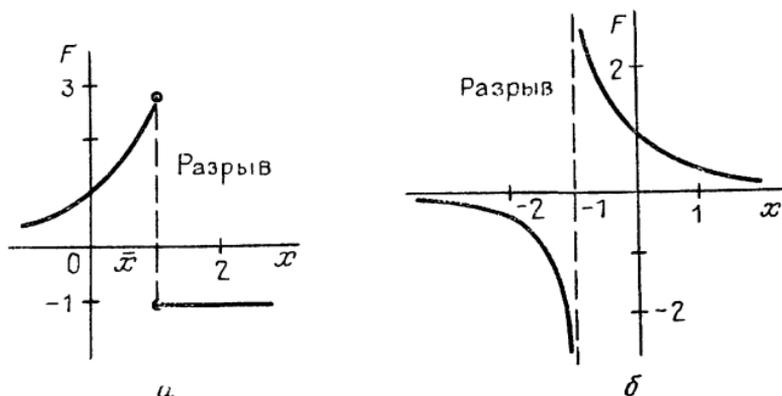


Рис. 1.23. Функции с разрывом

разрыв при  $x_n = \bar{x} = 1$  (рис. 1.23, а), причем значения  $F(x)$  слева и справа от разрыва конечны (на это указывает и нормальная остановка вычислений).

**Пример 1.18.** Найти корень уравнения

$$F(x) = 1/(x + 1) = 0.$$

Подпрограмма вычисления  $F(x)$  имеет вид: LBL0 + 1/x RTN. Задав отрезок  $[-2, 0]$  и пустив программу нажатием клавиш 2 CHS ENTER 0 f SOLVE 0, получим через некоторое время сообщение Error 0 (математическая операция не корректна). Сбросив сообщение об ошибке нажатием клавиши ←, получим содержимое регистра X, равное 0 в момент некорректной операции (деление на 0). Нажав клавишу R ↓ два раза, находим  $x_n = -1,0000$  и  $x_{n-1} = -1,0000$ , что указывает на наличие корня. Эти данные можно трактовать как наличие при  $\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1}$  разрыва у  $F(x)$ , причем вблизи разрыва значения  $F(x)$  уходят в бесконечность. Действительно, график данной функции  $F(x)$  рис. 1.23, б указывает на такую особенность ее.

Если  $F(x)$  не имеет действительных корней, то остановка вычислений, как правило, обеспечивается при значениях  $x$ , для которых  $F(x)$  имеет особенности. Этот случай иллюстрирует пример 1.19.

Пример 1.19. Исследовать функцию

$$F(x) = 3 + e^{-|x|/10} - 2 \cdot x^2 e^{-|x|}$$

на наличие корней и других особенностей. Подпрограмма вычисления  $F(x)$  имеет вид:

```

LBLO ABS CHS e^x x ↔ y x^2 × e^x 2 ×
CHS x ↔ y ABS CHS 1 0 ÷ e^x + 3
+ RTN

```

Вычисления начнем, задавая  $x_0 = x_1 = 10, 1$  и 0:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
40 ENTER	10,0000	Задание $x_n = x_1 = 10$
f SOLVE 0	Error 8	Указание на особенность
←	455,4335	Начальное значение $x_n$
R↓	48.026.721,85	Значение $x_{n-1}$
R↓	1,0000	Значение $F(x_n)$

Отличия  $x_n$  от  $x_{n-1}$  и  $F(x_n)$  от 0 говорят об отсутствии корня, но пока не дают возможность распознать особенность функции. Поэтому продолжим исследование:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
g R↓ g R↓	455,4335	Возврат стека
f SOLVE 0	Error 8	Указание на особенность
←	48.026.721,85	Новое значение $x_n$
R↓ R↓	1,0000	Значение $F(x_n)$

Совпадение  $F(x_n)$  для двух разных значений  $x_n$  свидетельствует о наличии асимптоты у функции  $F(x_n)$  при  $x \gg 10$ .

Продолжим исследование:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
1 ENTER	1,0000	Задание $x_0 = x_1 = 1$
f SOLVE 0	Error 8	Указание на особенность
←	2,1213	Значение $x_n$
R↓	2,1471	Значение $x_{n-1}$
R↓	0,3788	Значение $F(x_n)$
g R↓ R↓	2,1213	Возврат стека
f SOLVE 0	Error 8	Указание на особенность
←	2,1213	Значение $x_n$
R↓ R↓	0,3788	Значение $F(x_n)$

Совпадение  $x_n$  в двух испытаниях и отличие  $F(x_n)$  от 0 при остановке с индикацией ошибки Error 8 указывает на наличие экстремума. Продолжим исследование  $F(x)$ :

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
EEX CHS 20 ENTER	1,0000 — 20	Зададим $x_0 = x_1 = 10^{20}$
f SOLVE 0	Error 8	Указание на особенность
←	1,0000 — 20	Значение $x_n$
R↓	1,1250 — 20	Значение $x_{n-1}$
R↓	2,0000	Значение $F(x_n)$
g R↑ g R↑	1,0000 — 20	Возврат стека
f SOLVE 0	Error 8	Указание на особенность
←	1,1250 — 20	Новое значение $x_n$
R↓	1,5625 — 16	Новое значение $x_{n-1}$
R↓	2,0000	Новое значение $F(x_n)$

Как и в предыдущем случае, полученные данные указывают на наличие экстремума. Его характер можно установить, исследуя значения  $F(x)$  вблизи экстремума. Для этого задаются значения  $x$  и нажимаются клавиши ENTER ENTER ENTER

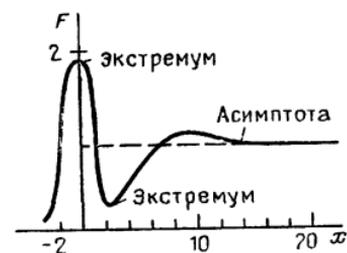


Рис. 1.24. График функции с двумя экстремумами и асимптотой

GSB M ( $M$  — метка, в данном примере 0). Например, задав  $x = 0,05$ , получим  $F(x) = 1,9903 < F(0) = 2$ . Следовательно, вблизи  $x = 0$  имеет место максимум  $F(x)$ . При  $x = 2$  получим  $F(x) = 0,3821 > F(2,1213) = 0,3788$ . Следовательно, при  $x = 2,1213$  наблюдается минимум  $F(x)$ . Такой характер поведения  $F(x)$  соответствует ее графику (рис. 1.24).

Если  $F(x)$  имеет несколько корней, их можно найти, задавая различные  $x_0$  и  $x_1$  (см. примеры 1.15 и 1.16). Однако начальные значения  $x_0$  и  $x_1$  обычно неизвестны. Если задать их произвольными, удастся найти один корень  $\bar{x}_1$ . Для нахождения других корней удобно разделить  $F(x)$  на  $(x - \bar{x}_1)$ . Тогда новая функция  $F(x)/(x - \bar{x}_1)$  уже не будет содержать корень  $\bar{x}_1$ . Решая уравнение  $F(x)/(x - \bar{x}_1) = 0$ , можно найти второй корень, затем, решая уравнение  $F(x)/(x - \bar{x}_1)/(x - \bar{x}_2)$ , можно найти третий корень и т. д. Если действительные корни в ходе их исключения будут исчерпаны, микропрограмма SOLVE обеспечивает поиск особенностей функции. Применяя этот прием можно, в частности, находить все действительные и комплексные корни полиномов (см. пример ниже).

Пример 1.20. Вычислить все корни полинома пятой степени, решая уравнение

$$F(x) = x^5 + 8x^4 + 31x^3 + 80x^2 + 94x + 20 = 0.$$

Для ускорения вычислений задаем  $F(x)$  в виде Горнера

$$F(x) = (((x + 8)x + 31)x + 80)x + 94)x + 20.$$

Подпрограмма для вычисления  $F(x)$  записывается в виде

```

LBL0  8  +  ×  3  1  +  ×  8  0
+     ×  9  4  +  ×  2  0  +  RTN
    
```

Отметим, что алгебраическое уравнение пятой степени имеет по крайней мере один действительный корень (в данном случае он отрицательный).

Порядок решения следующий:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
1 CHS ENTER 0	0,0000	Задание $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$
f SOLVE 0	-0,2679	Вычисление $\bar{x}_1 = -0,2679$
STO 1	-0,2679	Запись $\bar{x}_1$ в регистр 1
g P/R	000—	Перевод в режим записи программы
g BST g BST	019— 40	Переход к концу программы
$x \rightleftharpoons y$	020— 34	Исключение $\bar{x}_1$ делением $F(x)$ на $(x - \bar{x}_1)$
RCL 1	021— 45 1	
—	022— 30	
÷	023— 10	
g P/R	-0,2679	Возврат в режим счета
1 CHS ENTER 0	0,0000	Задание $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$
f SOLVE 0	-2,0000	Вычисление $\bar{x}_2$
STO 2	-2,0000	Занесение $\bar{x}_2$ в регистр 2
g P/R	000—	Перевод в режим ввода программы
g BST g BST	023— 40	Переход к концу программы
$x \rightleftharpoons y$	024— 34	Исключение $\bar{x}_2$ путем задания $F(x)/(x - \bar{x}_1)/(x - \bar{x}_2)$
RCL 2	025— 45 2	
—	026— 30	
÷	027— 10	
g P/R	-2,000	Переход в режим счета
1 CHS ENTER 0	0,0000	Задание $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$
f SOLVE 0	-3,7321	Вычисление $\bar{x}_3$
STO 3	-3,7321	Задание $\bar{x}_3$ в регистр 3

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
$g$ P/R	000—	Перевод в режим ввода программы
$g$ BST $g$ BST	027— 10	Переход к концу программы
$x \rightleftharpoons y$	028— 34	Исключение $\bar{x}_3$ путем задания $F(x)/(x - \bar{x}_1)/(x - \bar{x}_2)/(x - \bar{x}_3)$
RCL 3	029— 45 3	
—	030— 30	
$\div$	031— 10	
$g$ P/R	—3,7321	Переход в режим счета
1 CHS ENTER 0	0,0000	Задание $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$
$f$ SOLVE 0	Error 8	Указание на особенность $F(x)$
$\leftarrow$	—1,0000	Значение $x_n$
R $\downarrow$	—1,0000	Значение $x_{n-1}$
R $\downarrow$	9,000	Значение функции

В данном случае знак Error 8 указывает на то, что больше действительных корней нет. Поскольку полином 5 степени имеет 5 корней, из которых 3 действительных были найдены, можно сделать вывод, что оставшиеся два корня комплексно-сопряженные. Равенство  $x_n$  и  $x_{n-1}$  указывает на то, что найдена действительная часть  $\bar{x}_{4,5} = -1$ . Мнимую часть можно найти, извлекая квадратный корень из значения функции (в нашем случае 9). Таким образом, корни полинома следующие:  $\bar{x}_1 = -0,2679$ ;  $\bar{x}_2 = -2$ ;  $\bar{x}_3 = -3,7321$ ;  $x_4 = -1 + 3i$  и  $x_5 = -1 - 3i$ .

**Вычисление определенного интеграла.** HP-15C обеспечивает микропрограммное вычисление определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

для подынтегральной функции  $f(x)$ , которая может иметь особенности при  $x = a$  и  $x = b$ , т. е. на пределах интегрирования. Вычисление определенного интеграла выполняется в следующем порядке.

1. Нажав клавиши  $g$  P/R и  $f$  PRGM, переводим микрокалькулятор в режим программирования и стираем (если нужно) старую программу.

2. Вводим подпрограмму вычисления подынтегральной функции  $f(x)$ . Она должна начинаться с метки LBLM (где  $M = A, B, C, D, E, 0, \dots, 9, .0, \dots, .9$ ) и заканчиваться командой возврата RTN. Текущее значение  $x$  заносится перед подпрограммой в регистры X, Y, Z и T стека.

3. Вводим  $a = RY$  и  $b = RX$ , после чего нажимаем клавиши  $f \int_y^x M$  (где  $M$  — метка, указанная в п. 2). Получаем: значения

интеграла  $I$  в регистре X, абсолютную погрешность  $\Delta$  в регистре Y и пределы  $a$  и  $b$  в регистрах T и Z стека.

Численное интегрирование выполняется с заданной точностью (она определяется числом цифр и результата, устанавливаемым вводом команд  $FIXn$ ,  $SCI n$  и  $ENGn$ ). Чем выше точность (больше  $n$ ), тем медленнее вычисляется значение определенного интеграла. При задании формата индикации  $FIXn$  погрешность вычисления функции  $f(x)$  при численном интегрировании  $\delta(x) = 0,5 \cdot 10^{-n}$ , а при задании форматов  $SCI n$  и  $ENGn$

$$\delta(x) = 0,5 \cdot 10^{-n+m(x)},$$

где  $m(x)$  — число цифр порядка. Вычисленный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b [f(x) \pm \delta(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \delta(x) dx = I \pm \Delta.$$

Как отмечалось, значение  $\Delta$  после исполнения микропрограммы численного интегрирования заносится в регистр Y. Время вычисления простых интегралов обычно лежит в пределах от 10—20 с до 2—3 мин (в зависимости от  $n$ ).

**Пример 1.21.** Вычислить определенный интеграл

$$I = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$$

с точностью до 5 цифр результата после запятой. Порядок операций следующий:

Нажимаемые клавиши	Показания дисплея	Пояснения
$f$ FIX 5	0,00000	Установка формата FIX 5
$g$ P/R	000—	Перевод в режим записи программ
$f$ PRGM	000—	Стирание старой программы
$f$ LBL 9	001— 42.21.9	Ввод метки 9
2	002— 2	Вычисление $f(x) = \sqrt{2x+1}$
$\times$	003— 20	
1	004— 1	
+	005— 40	
$\sqrt{x}$	006— 11	
RTN	007— 43 32	Возврат из подпрограммы
$g$ P/R	0,00000	Перевод в режим счета
0 ENTER 1	1	Ввод пределов $a = 0$ и $b = 1$
$f$ $\int_y^x$ 9	1,39872	Вычисление интеграла
R↓	0,00001	Значение интеграла I
R↓	1,00000	Погрешность $\Delta$
R↓	0,00000	Предел $b$
		Предел $a$

В данном примере подынтегральная функция в отрезке  $[a, b]$  монотонна и не имеет особенностей. Интеграл при этом вычислен со всеми верными цифрами. Если задать формат FIX9, то полученное значение  $I$  будет  $I = 1,398717474$ .

Численное интегрирование может применяться для вычисления на HP-15C специальных функций, имеющих интегральное представление.

**Пример 1.22.** Вычислить значение интегрального синуса

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

для  $x = 1$  с точностью до 4 знаков результата. Подынтегральная функция  $f(t) = \sin t/t$  при  $t = 0$  имеет особенность  $0/0$ . Однако, как отмечалось, реализованный в HP-15C алгоритм численного интегрирования не использует значения подынтегральной функции на ее пределах. Подпрограмма вычисления  $f(t)$  имеет вид

LBL0 SIN  $x \Rightarrow y \div$  RTN

После ее ввода и перехода в режим счета нажимаем клавиши  $f$  FIX 5  $g$  RAD (задание аргумента  $x$  в радианах) 0 ENTER 1 (задание пределов интегрирования) и  $f \int_0^x$  0 (пуск микропрограммы интегрирования). Получим  $I = Si(1) = 0,94608$ . Нажав клавишу  $x \Rightarrow y$ , находим погрешность  $\Delta = 0,00001$ .

При проведении численного интегрирования полезно знать особенности подынтегральной функции. Так, особенности такого вида, как на рис. 1.25, или разрывы подынтегральной функции могут существенно повлиять на время и погрешность интегрирования. Если в ходе вычисления ее дискретных значений  $f(x) \rightarrow \infty$ , то происходит остановка вычислений с индикацией ошибки Error 0. Погрешность вычислений зависит и от колебаний  $f(x)$  внутри отрезка  $[a, b]$ . Как видно из рис. 1.26, при одних и тех же отсчетах  $f(x)$  в ходе численного интегрирования  $f(x)$  может иметь самый различный вид, а значения  $I$  при этом могут существенно различаться. Следует стремиться к устранению подобной ситуации. Колебательный характер подынтегральной функции может привести к тому, что с ростом числа цифр  $n$  результата погрешность  $\Delta$  будет не уменьшаться, а даже возрастать.

Например, при вычислении функции Бесселя 4-го порядка

$$J_4(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(4\theta - x \sin \theta) d\theta,$$

подынтегральная функция осциллирует. Ограничимся случаем, когда  $x = 1$ , и вычислим интеграл

$$I = \int_0^{\pi} \cos(4\theta - \sin \theta) d\theta.$$

Для этого введем подпрограмму

LBL0 4 X  $\Rightarrow$  Y SIN - COS RTN

Задав формат SCI2 и представление углов в радианах, найдем  $I = 7,79 \cdot 10^{-3}$  и  $\Delta = 1,45 \cdot 10^{-3}$ . Используя клавиши  $f$  и PREFIX, можно вывести все 10 цифр результата: 7785820888. Точное значение

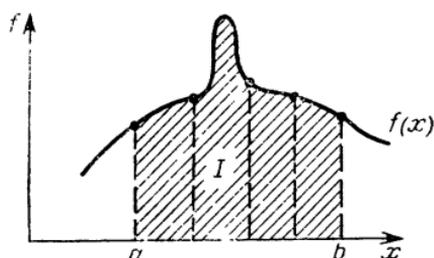


Рис. 1.25. Функция с особенностью, затрудняющей численное интегрирование

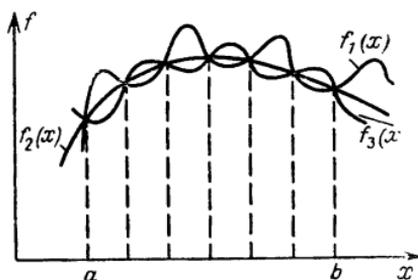


Рис. 1.26. Три функции, принимающие одно и то же значение в узлах, но имеющие разные значения определенного интеграла

данного интеграла равно  $7,7805 \cdot 10^{-3}$ , следовательно, реальная погрешность  $(7,7858 - 7,7805) \cdot 10^{-3} = 5,3 \cdot 10^{-6}$ , что существенно меньше  $\Delta$ . Это объясняется тем, что  $\Delta$  дает гарантированное верхнее значение погрешности.

Теперь повторим вычисления при формате FIX3. Получим  $I = 7,786 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Delta = 1,448 \cdot 10^{-4}$  и все 10 цифр результата 7785820888. Нетрудно заметить, что все 10 цифр результата при формате FIX2 и FIX3 совпали, т. е. задание большего  $n$  не привело к увеличению точности результата (объяснение этого факта было дано выше).

При определенном навыке на HP-15C вычисляются несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, например, вида

$$I = \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Обычно при этом бесконечный предел меняется на конечный  $b$ , выбранный так, чтобы в пределах  $[a, b]$  функция была полностью

определена. Однако нельзя делать отрезок  $[a, b]$  слишком большим, поскольку  $f(x)$  задается дискретными отсчетами, которые могут попасть на несущественный участок  $f(x)$ . К чему это ведет, поясняет следующий пример.

**Пример 1.23.** Вычислить значение интеграла

$$I = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Точное значение этого интеграла  $I = 1$ , вид подынтегральной функции дан на рис. 1.27. Для вычисления  $f(x)$  используем подпрограмму:

LBL0 CHS  $e^x$   $\times$  RTN

Казалось бы, что поскольку верхний предел равен бесконечности, следует задать его равным  $b = 1 \cdot 10^{99}$  (т. е. близким к верхнему значению чисел, вводимых в калькулятор). Выполнив расчет при формате SCI3, получим неверный результат  $I = 1$ . Объясняется это тем, что в столь широком отрезке  $[0; 1 \cdot 10^{99}]$  все

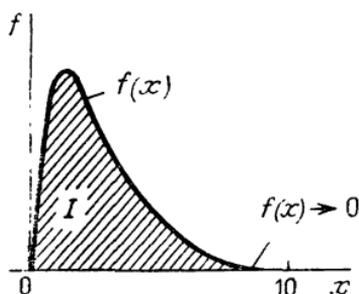


Рис. 1.27. График функции  $f(x) = x e^{-x}$

дискретные отсчеты  $f(x) = x e^{-x}$  оказались близкими к 0, поскольку  $f(x) = x e^{-x} \rightarrow 0$  практически уже при  $x > (10 \div 100)$  — рис. 1.27. Взяв более разумный отрезок  $[0, 1000]$  (значение  $b = 1000$  взято с большим, но разумным запасом), получим  $I = 1$  при  $\Delta = 1,824 \cdot 10^{-4}$ , т. е. результат с учетом округления оказался точным.

## 1.8. Особенности программирования микрокалькуляторов HP-15C

**Основы программирования.** Основы программирования микрокалькуляторов HP-15C аналогичны описанным в разд. 1.6 для родственных моделей HP-11C. Напоминаем, что программы для HP-11C пригодны (за редким исключением) для HP-15C, если встречаемые в них операторы DSE и ISG записывать в виде DSEI и ISGI (команды DSE и ISG без указания индекса или номера регистра у HP-15C не воспринимаются).

Особенности программирования HP-15C прежде всего связаны с рациональным использованием в программах пользователя дополнительного микропрограммного обеспечения, описанного в разд. 1.7. Микропрограммы операций с комплексными числами и матрицами, решения нелинейных уравнений и численного интегрирования реализуются довольно сложными и универсальными

алгоритмами. Их включение в программы пользователя резко упрощает последние и иногда (но далеко не всегда) ведет к уменьшению времени вычислений.

Однако все дополнительные микропрограммы занимают большое число регистров памяти. Кроме того, универсальные алгоритмы далеко не всегда являются лучшими в отношении получения минимального объема памяти, занимаемого программой, или минимального времени вычислений. Многие специализированные программы, например вычисления специальных функций, требуют намного меньше общего объема памяти и имеют меньшее время счета, чем программы, составленные на базе встроженных микропрограмм.

**Программирование операций с комплексными числами.** Выполнение операций с комплексными числами по программе практически аналогично таковому в режиме ручных вычислений. Оно занимает 5 регистров памяти, что эквивалентно 35 шагам программы.

**Пример 1.24.** Вычислить

$$E = \sqrt{Y/X},$$

где  $Y = a + bi$ ,  $X = c + di$  с запасением  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в регистры 0, 1, 2 и 3 и вводом путем указания меток A, B, C, D. Результат получить указанием метки E. В компактной форме программа имеет вид

```

LBLA S0 RTN LBLB S1 RTN LBLC S2 RTN LBLD
S3 RTN LBLE SF8 R0 ENT R1 I R2 ENT
R3 I ÷  $\sqrt{x}$  RTN

```

Для  $a = 1,2$ ,  $b = 4,7$ ,  $c = 2,7$  и  $d = 3,2$  получим результат 1,0491 (действительная часть  $E$ ) и, нажав клавиши  $f$  и  $(i)$ , 0,2406 (мнимая часть). Ввод режима вычислений с комплексными числами выполняется оператором SF8.

**Пример 1.25.** Вычислить

$$z^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i,$$

если число  $z = x + yi$  задано значениями  $x = PX$  и  $y = PY$ . Результат поместить в регистры X (действительная часть) и Y (мнимая часть).

Подобная программа с использованием режима вычисления комплексных чисел имеет вид

```

SF8  $x \Rightarrow y$  I  $x^2$  ENT Re  $\Rightarrow$  Im  $x \Rightarrow y$  RTN

```

Для  $z = 3 + 2i$ , нажав клавиши 2 ENTER 3  $g$  RTN и R/S, получим результат  $12 = PY$  и  $5 = PX$ . Программа получилась ко-

роткой (всего 8 операторов), но занимает 7 регистров памяти (5 занято в операциях с комплексными числами и 2 — самой программой, причем в одном из регистров использовано только 2 байта).

Сбросив флаг 8 командой  $g\ CF8$ , составим и введем подобную программу вычисления  $z^2$  без обращения к микропрограмме возведения комплексного числа в квадрат:

```

ENT  ENT  R↑  ×  LSTx  x2  R↑  x2  x ⇌ y  —
x ⇌ y  2    ×  x ⇌ y  RTN

```

Эта программа содержит 15 операторов. Однако она занимает в памяти всего 3 регистра (в одном занят только 1 байт).

Таким образом, если экономия памяти существенна, то вместо использования микропрограмм операций с комплексными числами целесообразно перейти к реализации этих операций с помощью обычных программ.

**Программирование операций с матрицами.** Применение микропрограмм матричных операций существенно упрощает построение программ пользователя, базирующихся на таких операциях. При этом дополнительной памяти (кроме нужной для хранения элементов матриц) не требуется. Большинство матричных операторов выполняются по программе так же, как в режиме ручного счета.

Отметим специфику применения оператора  $USER$  с матричными операторами  $RCLM$  и  $STOM$  (где  $M$  — наименование матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  или  $E$ ). Если оператор  $USER$  не введен, то исполнение операторов  $RCLM$  и  $STOM$  не приводит к автоматическому изменению чисел в регистрах-счетчиках строк и столбцов  $R0$  и  $R1$ . Если же оператор  $USER$  введен, то числа в этих регистрах меняются, обеспечивая построчный опрос элементов матрицы. После опроса последнего элемента выполняется перескок через одну линию программы (см. на рис. 1.28 фрагмент программы, с помощью которого все элементы матрицы  $D$  возводятся в квадрат и заносятся на место исходных). Такой перескок обеспечивает возможность построения циклов, в ходе которых выполняются различные операции над элементами матриц.

Далее в программах операторы  $RCLM$  и  $STOM$ , вводимые без применения режима  $USER$ , будут сокращенно обозначаться как  $RM$  и  $SM$ . Операторы  $RCLM$  и  $STOM$ , вводимые после перехода в режим  $USER$ , соответственно будут обозначаться  $URM$  и  $USM$ . Оператор  $MATRIX$  сокращенно обозначается  $MAT$ .

**Пример 1.26.** Найти в матрице  $A$  наибольший по модулю элемент и нормировать все элементы матрицы делением на число, равное модулю этого элемента. Один из вариантов такой про-

граммы в компактной форме имеет вид

```

LBL0 CLr S2 MAT1 LBL1 URA GTO5 GTO2 LBL5 GSB3
GTO1 LBL2 GSB3 LBL4 R4 R2 ÷ USA GTO4 R2
RTN LBL3 ABS R2 r  $\neq$  1 TEST9 S2 RTN
    
```

В этой программе организовано два цикла. Первый выводит элементы  $a_{ji}$  матрицы  $A$  построчно и (с помощью подпрограммы GSB3, начинающейся с метки LBL3) сравнивает их модуль с числом, хранящимся в регистре 2 (вначале это число равно 0). Если

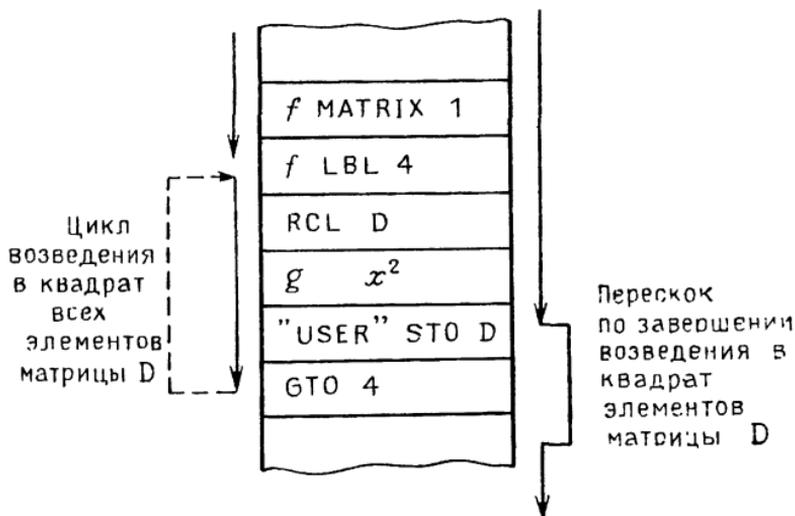


Рис. 1.28. Фрагмент программы, обеспечивающий возведение в квадрат всех элементов матрицы

$|a_{ji}|$  больше данного числа, оно записывается в регистр 2. Второй цикл (с метки LBL4) обеспечивает вывод  $a_{ji}$  и деление их на число, хранящееся в регистре 2.

По окончании вычислений программа выдает содержимое регистра 2 (модуль наибольшего по модулю элемента) и заносит нормированные элементы на место исходных. Исходная и нормированная матрицы размера  $3 \times 3$  для этого примера имеют вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 8 & -9 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0,1111 & 0,2222 & -0,3333 \\ 0,7778 & 0,8889 & -1,0000 \\ 0,4444 & 0,5556 & -0,6667 \end{bmatrix}.$$

Пуск программы выполняется командой GSB0, на индикаторе получаем значение  $|a_{23}| = 9,0000$ .

**Использование микропрограммы SOLVE.** Микропрограмма SOLVE может использоваться в программах пользователя. Если в результате исполнения оператора SOLVEM найден действительный корень, то выполняется следующий за ним оператор. Если корень не найден, то происходит перескок через этот оператор.

Перед использованием оператора SOLVEM нужно (по программе или перед ее пуском) ввести в регистры Y и X значения  $x_0$  и  $x_1$ . В программах оператор SOLVE обозначается сокращенно SLV. Для микропрограммы SOLVE требуется 5 регистров памяти.

**Пример 1.27.** Составить программу для решения кубического уравнения, приведенного к виду

$$F(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

при  $a = R0$ ,  $a_1 = R1$  и  $a_2 = R2$ . Алгоритм решения уравнения следующий: с помощью микропрограммы SOLVE ищется обязательно существующий один действительный корень  $\bar{x}_1$ , уравнение  $F(x)$  делится на  $(x - \bar{x}_1)$  и решается полученное квадратное уравнение. Если оно имеет действительные корни  $x_2$  и  $x_3$ , они заносятся в регистры X и Y стека. Если  $x_2$  и  $x_3$  — комплексно-сопряженные корни  $x_{2,3} = x \pm iy$ , то их действительная часть заносится в регистр X, а мнимая — в регистр Y. При этом поднимается флаг 9 и показания дисплея мигают.

Программа, реализующая этот алгоритм, следующая:

```

SLV9  R/S   R6  CHS  2  ÷   S4  x2   R3  —
TEST1 GTO2  CHS  √x  R4  SF9  RTN  LBL2  √x  ENT
ENT   R4    +   x ↔ y  R4  x ↔ y  —   CF9  RTN  LBL9
R2    +     S6  ×     R1  +     S3  ×     R0  +
RTN

```

Для уравнения  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  получим  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  и  $x_3 = 3$ , а для уравнения  $x^3 - 6x^2 + 21x - 52 = 0$  получим  $x_1 = 4$  и  $x_{2,3} = 1 \pm 3,46410i$ . Перед пуском программы в регистр X заносилось число 1, в регистр Y — число 0. В приведенной программе вычисление  $F(x)$ , объединенное с делением  $F(x)$  на  $(x - \bar{x}_1)$ , реализовано подпрограммой, записанной начиная с метки LBL9 (конец 3 строки).

**Пример 1.28.** Решить кубическое уравнение (см. пример выше), используя только оператор SOLVE. В этом случае алгоритм будет следующий. Вначале с помощью оператора SOLVE ищется обязательно существующий действительный корень  $\bar{x}_1$ . Делением  $F(x)$  на  $(x - \bar{x}_1)$  этот корень исключается. Теперь вновь с помощью микропрограммы SOLVE ищется корень  $x_2$ . Тут могут встретиться две ситуации. В первой действительный корень не обнаруживается и микропрограмма SOLVE завершает вычисления нахождением действительной части  $x$  двух оставшихся корней  $x_{2,3} = x \pm iy$  ( $x \rightarrow RX$ ) и квадрата мнимой части  $y^2 \rightarrow RZ$ . Тогда, извлекая квадратный корень из  $y^2$ , находим сразу  $x_{2,3}$ . Во второй ситуации находится действительный корень  $\bar{x}_2$ , следовательно,  $\bar{x}_3$  тоже действительный корень. Тогда  $\bar{x}_3$  находится с помощью опе-

ратора SOLVE при делении  $F(x)$  на  $(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)$ . Для разделения отмеченных выше двух ситуаций можно использовать то обстоятельство, что если действительного корня нет, следующий за SOLVEM оператор игнорируется.

Однако практическая реализация этого алгоритма усложняется тем, что перед каждым использованием оператора SOLVE нужно задавать два начальных значения  $x$ , не совпадающих с  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ . Это связано с тем, что в начале работы микропрограммы SOLVE значениям  $x$  приписываются начальные значения и  $(x - \bar{x}_1) \times (x - \bar{x}_2)$  становится равным 0 (деление на 0 ведет к остановке счета и выдаче знака ошибки Error 0). Чтобы избежать этого, перед каждым из трех операторов SOLVE можно вводить два случайных числа (в регистры X и Y стека), используя для этого генератор случайных чисел и оператор их получения RAN#. Программа, реализующая описанный алгоритм, следующая:

RAN#	RAN#	SLV7	S3	R/S	RAN#	RAN#	S8	GTO0	4
R ↓	R ↓	$\sqrt{x}$	R4	SF9	RTN	LBL0	S4	RAN#	RAN#
SLV9	R4	CF9	RTN	LBL7	R2	+	×	R1	+
×	R0	+	RTN	LBL8	GSB7	$x \neq y$	R3	-	÷
RTN	LBL9	GSB8	$x \neq y$	R4	-	÷	RTN		

Проверить ее можно по контрольным уравнениям к примеру 1.27. Данная программа оказывается длиннее, чем приведенная ранее, и имеет большее время счета. Это говорит о том, что не следует увлекаться применением оператора SOLVE там, где без этого можно обойтись, — в данном случае при решении квадратного уравнения  $F(x)/(x - \bar{x}_1)$ , которое в программе к примеру 1.27 решается проще аналитическим методом. Однако программа к примеру 1.28 хорошо иллюстрирует технику применения микропрограммы SOLVE.

**Использование микропрограммы численного интегрирования.** Микропрограмма численного интегрирования вводится в програм-

му оператором  $\int_y^x M$ , после того как в регистр Y вводится ниж-

ний предел интегрирования, а в регистр X — верхний предел. Подинтегральная функция может находиться в любом месте программы, она должна начинаться оператором LBLM (где  $M = A, B, C, D, E, 0, 1, \dots, 9, .0, .1, \dots, .9$  — метка) и заканчиваться опе-

ратором RTN. Метка  $M$  в операторе  $\int_y^x M$  должна соответствовать

метке в операторе LBLM. В начале действия подпрограммы вычисления подынтегральной функции текущие значения  $x$  заносятся

в регистры X, Y, Z и T стека. После выполнения оператора  $\int_y^x M$  результат заносится в регистр X, погрешность вычисления — в регистр Y и пределы интегрирования — в регистры Z и T. Микропрограмма численного интегрирования требует 23 регистра памяти (161 шаг программы).

Пример 1.29. Составить программу вычисления функции

$$f(a, b) = \int_a^b \sqrt{2x+1} dx + be^a.$$

Программа, использующая оператор  $\int_y^x M$ , имеет вид

LBLE	S0	RTN	LBLE	S1	RTN	LBLE	R0	R1	$\int_y^x$	0
R0	$e^x$	R1	×	+	RTN	LBLE	2	×	1	
+	$\sqrt{x}$	RTN								

Вначале (фрагменты с метками A и B) вводятся значения  $a$  и  $b$  указанием меток A и B. Затем (фрагмент с меткой C) вычисляется  $f(a, b)$ . Наконец, с метки 0 начинается подпрограмма вычисления подынтегральной функции  $\sqrt{2x+1}$ . Задав  $a = 0$ ,  $b = 1$  и указав метку C, находим  $f(a, b) = 2,39872$ .

Поскольку микропрограмма численного интегрирования требует для своей реализации большого объема памяти (23 регистра), ею целесообразно пользоваться, если вводимые в микрокалькулятор внешние программы достаточно просты. При совместном использовании этой микропрограммы с микропрограммой SOLVE требуется также 23 регистра памяти.

При вычислениях по программе у HP-15C индицируются следующие виды ошибок:

Еггор 0 — запрещенная математическая операция (деление на 0, вывод аргумента функций за пределы их определения и т. д.),

Еггор 1 — ошибочно задан матричный оператор,

Еггор 2 — ошибочно используется микропрограмма статистических расчетов и линейной регрессии (например, неверно задано значение числа  $n$  вводимых данных),

Еггор 3 — запись в несуществующий регистр данных (включая запись элемента матрицы),

Еггор 4 — указание несуществующего номера шага программы (например  $> 448$ ) или метки,

Еггор 5 — указание несуществующей подпрограммы, превышение допустимого числа вложений подпрограммы ( $> 7$ ),

Еггор 6 — задана операция с несуществующим номером флага ( $> 9$ ),

Еггор 7 — нарушены правила использования операторов SOLVE

и  $\int_y^x$ , например превышено число подпрограмм,

Еггор 8 — микропрограмма SOLVE не обнаруживает действительный корень уравнения,

Еггор 9 — нарушена работа микрокалькулятора (выявляется при испытании тестом, как у HP-11C),

Еггор 10 — запрошенная память превышает имеющуюся,

Еггор 11 — ошибки при использовании матричных операций (несоответствие размеров матриц, неправильное использование скалярных величин, запись в регистр скаляра вместо спецификации матрицы и др.),

Рг Еггор — содержание памяти стерлось при смене источника питания.

## 1.9. Погрешности вычислений на микрокалькуляторах

Получаемый в результате вычислений результат  $y$  отличается от точного  $y_0$ . Абсолютная погрешность вычисления

$$\Delta y = |\Delta y| = |y_0 - y|,$$

а относительная —

$$\delta y = \Delta y / |y_0|.$$

Поскольку значения  $y_0$  не всегда заранее известны, иногда задают  $\Delta y$  независимо. Например, если  $\Delta y = \pm 2$ , то при  $y_0 = 5$  имеет  $y = 5 \pm 2 = 3 \div 7$ , а при  $y_0 = 100$  имеет  $y = 100 \pm 2 = 98 \div 102$ . Часто задают  $y$  числом верных знаков результата. Верными называют знаки, если представленный ими результат имеет абсолютную погрешность не более  $1/2$  младшего разряда. Например, если результат  $y = 50,0124$  задан тремя верными знаками, то можно принять, что  $49,95 < y < 50,05$ .

Поскольку результат вычислений микрокалькулятор выдает с конечным числом знаков, ему всегда присуща погрешность округления. Обычно ее считают равной  $\pm 1$  последнего разряда.

При вычислении элементарных и специальных функций наблюдается методическая погрешность. Она связана с тем, что такие вычисления проводятся разложением функций в ряд или непрерывную дробь с конечным числом членов. Отбрасываемые члены создают погрешность результата, оцениваемую остаточным

членом  $R$ . Эта погрешность обычно зависит от аргумента  $x$  (см. табл. 1.6 для микрокалькуляторов серий «Электроника»).

У более совершенных микрокалькуляторов (НР-11С, НР-15С, Т1-58С, Т1-59 и др.) приняты специальные меры, обеспечивающие погрешность вычисления функций не более  $\pm 1$  младшего разряда индикатора. К таким мерам, в частности, относится применение

Таблица 1.6

**Погрешности вычисления функций для микрокалькуляторов серии «Электроника»**

Функция	Допустимые значения	Максимальная относительная погрешность
$\sin x$	$1 \cdot 10^{-49} <  x  < 10^9$ (градусы)	$3 \cdot 10^{-7}$
$\cos x$	$1 \cdot 10^{-49} <  x  < 10^9$ (градусы)	$3 \cdot 10^{-7}$
$\operatorname{tg} x$	$1 \cdot 10^{-90} <  x  < 10^9$ (градусы)	$3 \cdot 10^{-7}$
$\arcsin x$	$ x  \leq 1$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\arccos x$	$ x  \leq 1$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\operatorname{arctg} x$	$1 \cdot 10^{-99} <  x  < 9,9999999 \cdot 10^{99}$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\alpha^x$	$x > 0$	$1 \cdot 10^{-6}$
$e^x$	$ x  < 100 \ln 10$	$4 \cdot 10^{-7}$
$\alpha^2$	$ x  < 10^{80}$	$1 \cdot 10^{-7}$
$10^x$	$ x  < 99,999999$	$4 \cdot 10^{-7}$
$1/x$	$x \neq 0$	$1 \cdot 10^{-7}$
$\sqrt{x}$	$x \geq 0$	$1 \cdot 10^{-4}$
$\ln x$	$x > 0$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\lg x$	$x > 0$	$3 \cdot 10^{-7}$

скрытых разрядов, т. е. выполнение операций с 2—3 дополнительными разрядами, скрадывающими ошибки округления чисел и усечения рядов при вычислениях функций.

При вычислениях на микрокалькуляторе функций нескольких переменных  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  общая погрешность определяется разложением функции в ряд Тейлора. Тогда абсолютная погрешность

$$\Delta y = y - y_0 \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n y'_i \Delta x_i,$$

$\delta$  относительная погрешность —

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \sum \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i} = \sum_{i=1}^n s_i \delta_{x_i},$$

где  $s_i = y'_i x_i / y_i$  — коэффициент чувствительности к относительному изменению переменной  $x_i$ . Значения  $y'_i$  и  $s_i$  для наиболее распространенных функций даны в табл. 1.7 [20].

Таблица 1.7

**Коэффициенты чувствительности к абсолютному и относительному изменению значений переменных при вычислениях различных функций**

Функция $y =$	$y'_i = \partial y / \partial x_i$	$s_i = y'_i x_i / y$
$x_1 + x_2$	$y'_1 = y'_2 = 1$	$s_1 = x_1 / (x_1 + x_2),$ $s_2 = x_2 / (x_1 + x_2)$
$x_1 - x_2$	$y'_1 = 1, y'_2 = -1$	$s_1 = x_1 / (x_1 + x_2),$ $s_2 = -x_2 / (x_1 + x_2)$
$x_1 \cdot x_2$	$y'_1 = x_2, y'_2 = x_1$	$s_1 = s_2 = 1$
$x_1 / x_2$	$y'_1 = 1/x_2, y'_2 = -x_1/x_2^2$	$s_1 = 1, s_2 = -1$
$x^2$	$y'_1 = x_2 x_1^{x_2-1}, y'_2 = x_1^{x_2} \ln x_1$	$s_1 = x_2, s_2 = x_2 \ln x_1$
$x_1$	$-1/x$	$-1$
$1/x$	$2x$	$2$
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}/2$	$1/2$
$e^x$	$e^x$	$x$
$10^x$	$10^x \ln 10$	$x \ln 10$
$\ln x$	$1/x$	$1/\ln x$
$\lg x$	$1/x \ln 10$	$1/\ln 10 \ln x$
$\sin x$	$\cos x$	$x/\lg x$
$\cos x$	$-\sin x$	$-x \lg x$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$	$2x \sin(2x)$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$x'(\sqrt{1-x^2} \arcsin x)$
$\arccos x$	$x/\sqrt{1-x^2}$	$1/(\sqrt{1-x^2} \arccos x)$
$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$	$x'/(1+x^2) \operatorname{arctg} x)$

Если погрешности  $\Delta x_i/x_i$  не коррелированы и носят случайный характер, то вычисляется среднеквадратичная относительная погрешность

$$\delta_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i \delta_{x_i})^2}.$$

Погрешность, получаемая в результате проведения операций над приближенными числами, называется операционной погрешностью. Операционная погрешность арифметических операций равна сумме погрешностей чисел, над которыми проводятся эти операции. Существуют определенные правила уменьшения этой погрешности. Так, суммировать числа рекомендуются с меньших значений. При умножении следует умножать меньшее число на большее. Если промежуточный результат при этом  $y_i > 1$ , его надо умножить на меньшее из оставшихся чисел, если  $y_i < 1$  — то на большее. Операции умножения и деления целесообразно чередовать друг с другом, избегая переполнения операционного регистра X. Следует избегать вычитания близких чисел, так как результат может попасть в область машинного нуля, что может привести к большим погрешностям, например, при последующем умножении даже на большее число.

Для уменьшения операционной погрешности полезно проводить преобразования функций с учетом отмеченных выше правил. Например,  $y = (a + b)^2 - a^2$  при  $b \ll a$  следует представить в виде  $y = 2ab + b^2$ , что позволит избежать вычитания близких чисел  $(a + b)^2$  и  $a^2$ . К таким преобразованиям относится также нормирование уравнений, степенных полиномов и других функций, проводимое так, чтобы вычисления велись с числами, далекими от машинного нуля или бесконечности. Более подробные рекомендации по уменьшению погрешностей можно найти в [20].

## МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ С АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЛОГИКОЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ

### 2.1. Общие сведения о микрокалькуляторах с алгебраической логикой вычислений

Микрокалькуляторы с алгебраической логикой выполняют вычисления в более естественном виде благодаря использованию клавиш ввода скобок  $\overline{[( ]} \overline{[( ]} \overline{[ ) ]} \overline{[ ) ]}$  и равенства  $\overline{[ = ]}$ . Число скобок, иногда только круглых, может быть от 1 до 16 и определяется емкостью стекового регистра. Такие калькуляторы подразделяются на 1) непрограммируемые, 2) программируемые с обычной алгебраической логикой, 3) программируемые по системе AER (Algebraic Expression Reserve — алгебраическое выражение условий), 4) программируемые на языке высокого уровня бейсик.

В табл. 2.1 даны характеристики отечественных непрограммируемых микрокалькуляторов для научных и инженерных расчетов. В функциональном отношении они различаются мало. Поэтому рассмотрим широко распространенную современную модель миниатюрного микрокалькулятора «Электроника БЗ-38» с большим числом выполняемых операций. Этот калькулятор (рис. 2.1) имеет тройное управление большинством клавиш, достигаемое применением двух функциональных (префиксных) клавиш  $F_1$  и  $F_2$ . Общий сброс осуществляется клавишей С. Сброс ошибочно набранного числа осуществляется клавишей СК. Имеется один дополнительный регистр памяти (ввод чисел в него задается нажатием клавиш  $F_1$  ЗП, а вызов —  $F_2$  ИП). Скобки [(и)] двойные.

Непрограммируемые микрокалькуляторы нашли весьма широкое применение у широкой категории пользователей, выполняющих относительно несложные и редко повторяющиеся вычисления. Однако при определенном навыке с такими микрокалькуляторами можно проводить и достаточно сложные вычисления по программам, выполняемым не автоматически, а вручную. Это опять-таки оправдано, если расчеты повторяются редко. Интерес к непрограммируемым микрокалькуляторам обусловлен, прежде всего, простотой их использования при несложных вычислениях.

Сложные и многократно повторяющиеся вычисления удобно проводить на программируемых микрокалькуляторах с алгебраической

### Характеристики отечественных непрограммируемых микрокалькуляторов с алгебраической логикой вычислений, предназначенных для инженерных и научно-технических расчетов

Параметр	Тип микрокалькулятора «Электроника»						
	СЗ-15	БЗ-32	БЗ-35	БЗ-36	БЗ-37	БЗ-38	МК-51
Число разрядов индикатора	15	9	12	12	9	9	9
Число разрядов мантиссы/порядка	10/2	5/2	8/2	8/2	—	5/2	5/2
Число дополнительных регистров памяти	2	1	1	1	1	1	1
Скобки	( )	[ ( ) ]	( )	( )	[ ( ) ]	[ ( ) ]	[ ( ) ]
Вычисление функций: $1/x$ ; $\sqrt{x}$ ; $x^y$ ; $\ln x$ ; $\lg x$ ; $e^x$ ; $10^x$	Есть кро- ме	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Вычисление тригонометрических и обратных тригонометрических функций, вызов	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Операции в регистрах памяти	Нет	$\Pi + \Pi$ $\Pi \times \Pi$ $x \mp \Pi$	$\Pi + \Pi$ $\Pi \times \Pi$ $\Pi \mp \Pi$	$\Pi + \Pi$ $\Pi \times \Pi$ $\Pi \mp \Pi$	$\Pi + \Pi$ $\Pi + x^2$ $\Pi \mp \Pi$	$\Pi + \Pi$ $\Pi \mp \Pi$	$\Pi + \Pi$ $\Pi \mp \Pi$
Другие функции	$\sqrt{x^2 + y^2}$	Корни	Корни	$n!$	$n!$	$n!$	$n!$
Статистические расчеты	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть
Представление углов	Радианы	Радианы Градусы	Градусы	Радианы Градусы	Радианы Градусы	Радианы Градусы	Радианы Градусы
Габариты	$170 \times 90 \times 32$	$120 \times 73 \times 30,4$	$14,3 \times 79 \times 22$	$14,5 \times 78,5 \times 17$	$15,5 \times 78 \times 28$	$55 \times 91 \times 5,5$	$130 \times 71 \times 8$
Масса, кг	0,4	0,3	0,25	0,2	0,25	0,05	0,1
Потребляемая мощность	1,2	0,3	0,3	0,35	0,3	0,0006	0,0006
Питание У — универсальное, Б — от гальванических элементов	У	У	У	У	У	Б	Б

ческой логикой вычислений. Такие калькуляторы получили широкое распространение за рубежом и в основном копируют функциональные возможности микрокалькуляторов этой группы, разработанных фирмой Texas Instruments (США) — см. табл. 2.2. Эти микрокалькуляторы сочетают присущую непрограммируемым микрокалькуляторам с алгебраической логикой простоту и естественность структуры вычислений с возможностью их автоматизации

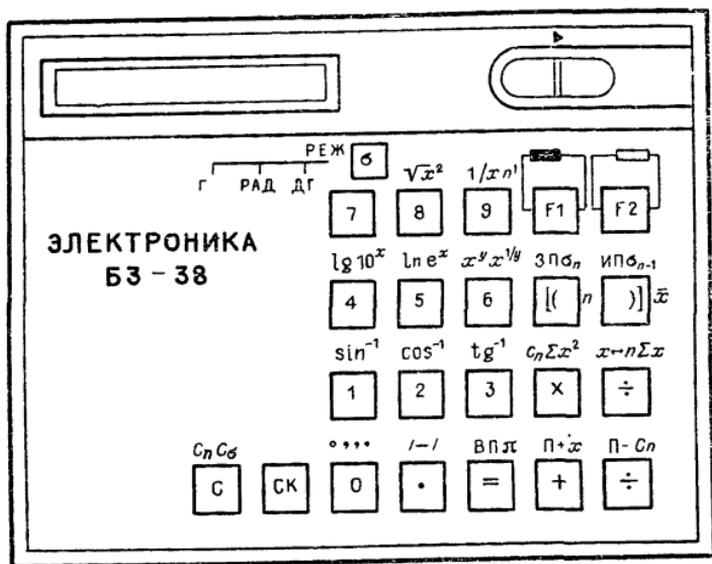


Рис. 2.1. Внешний вид микроминиатюрного непрограммируемого микрокалькулятора для инженерных расчетов «Электроника БЗ-38»

в программируемом режиме. Следует, однако, помнить, что пользователи, привыкшие к применению микрокалькуляторов с обратной бесскочной записью вычислений, с большим трудом привыкают к использованию микрокалькуляторов с алгебраической логикой (и наоборот).

Калькуляторы этого класса обычно имеют иерархию операций, т. е. выполнение их в определенном порядке: 1 — вычисление математических функций, 2 — вычисление функций  $x^y$  и  $\sqrt[y]{x}$  (или  $y^x$  и  $\sqrt[x]{y}$ ), 3 — умножение и деление, 4 — сложение и вычитание и 5 — окончание вычислений (оператор =). Так, при наличии иерархии выражение  $2 + 3 \times 4$  вычисляется как  $2 + (3 \times 4) = 14$ , а при отсутствии ее — как  $(2 + 3) \times 4 = 20$ . Наличие иерархии позволяет более экономно использовать скобки и сокращать длину программ, которая обычно бывает несколько большей, чем у калькуляторов с обратной бесскочной записью вычислений.

### Характеристики зарубежных программируемых микрокалькуляторов с алгебраической логикой вычислений

Параметр	Тип микрокалькулятора						
	SR-52	SR-56	T1-58C	T1-59	FX-502P	EL-5100	EL-5101
Фирма (страна) изготовитель	TI (США)	TI (США)	TI (США)	TI (США)	Casio (Япония)	Sharp (Япония)	Sharp (Япония)
Число регистров памяти	20	10	60	100	22	25	12
Число шагов программы	100	224	480	960	256	80 членов формул	48 членов формул
Функции $y^x$ , $\ln x$ , $\lg x$ , $e^x$ , $10^x$ , $1/x$ , вызов $\pi$	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Тригонометрические и обратные тригонометрические функции	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Статистические расчеты	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Гиперболические функции	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет
Число разрядов мантиссы/порядка	10/2	10/2	10/2	10/2	10/2	10/2	10/2
Запоминание программ и данных	Нет	Нет	Есть	Нет	Нет	Есть	Есть
Логика вычислений (О — обычная или АНБ)	О	О	О	О	О	АРЕ	АРЕ
Запись программ на магнитные карты	Есть	Нет	Нет	Есть	Нет	Нет	Нет
Подключение принтера	Нет	Нет	Есть	Есть	Нет	Нет	Нет
Встроенный модуль с библиотекой программ пользователя	Нет	Нет	Есть	Есть	Нет	Нет	Нет
Габариты, мм	90×160× ×40	80×150× ×30	167×83× ×36	162×86× ×36	141×71× ×9.6	175×70× ×9.8	175×70× ×9.3
Масса, г	350	235	350	350	72	120	110
Питание У — универсальное, Б — от гальванических элементов	У	У	У	У	Б	Б	Б

Наиболее совершенные микрокалькуляторы с алгебраической логикой вычислений (TI-58C, TI-59) имеют встроенные модули с библиотекой программ пользователя (Master Library), встроенный магнитофон для записи программ на магнитные карты (TI-59). Калькуляторы, имеющие в названии букву C (TI-58C), обладают энергонезависимой памятью данных и программ. Такие модели снабжаются разъемом для подключения к ним малогабаритного печатающего устройства — принтера.

Калькуляторы EL-5100 и EL-5101 фирмы Sharp (Япония) реализуют метод программирования AER. Его суть заключается в формульном представлении программ. Например, вычисление функции

$$f(A, B, C) = 0,5AB \sin C.$$

выполняется по такой программе, вводимой в режиме AER:

$$2ndf( ) = ABC \quad f( ) = .5AB SINC$$

Вначале резервируются переменные A B C в виде букв, а затем записывается формула для вычисляемой функции.

Вычисления сводятся к вводу исходных данных по подсказке калькулятора путем нажатия клавиши [COMP]. Первое ее нажатие ведет к появлению на дисплее сообщения A = ? (надо ввести A), второе — к сообщению B = ? (надо ввести B), третье — к сообщению C = ? (вводим C). Нажав клавишу [COMP], еще раз получим значение  $f(A B C)$ . При системе AER число нажатий клавиш существенно меньше, чем при обычной алгебраической логике вычислений. Однако широкого распространения такие микрокалькуляторы не получили, поскольку введение метода программирования AER усложняет клавишный пульт, требует заметного увеличения объема памяти и применения более сложного алфавитно-цифрового дисплея.

В последнее время с обычными калькуляторами успешно конкурируют карманные компьютеры (Pocket Computers), программируемые на языке бейсик. Выпускаются и программируемые микрокалькуляторы такого типа (FX-702P, FX-802P японской фирмы Casio и др.). Например, микрокалькулятор класса Pocket Computers FX-702P имеет память на 80 шагов программы и 226 регистров памяти. Память перестраиваемая: уменьшив число регистров до 26, можно увеличить число шагов программы до 1680 (каждый шаг эквивалентен одному оператору языка бейсик). Микрокалькулятор имеет расширенный набор микропрограмм (вычисление гиперболических и обратных гиперболических функций, факториала, 17 статистических параметров и др.). Предусмотрено подключение к кассетному магнитофону и принтеру через интерфейсный блок FA-2.

Хотя габариты, масса и стоимость карманных компьютеров уже вполне сопоставимы с этими характеристиками обычных микрокалькуляторов, пока нет оснований полагать, что последние будут вытеснены карманными ЭВМ. Это связано с тем, что освоение даже сравнительно простого языка бейсик требует больших затрат времени, чем освоение символично-кодowego языка программирования обычных микрокалькуляторов. В большинстве случаев для выполнения операций на бейсике требуется большее число нажатий клавиш, чем при работе на обычных калькуляторах. В то время как язык бейсик «закрыт» для пользователей, при программировании на языках обычных калькуляторов пользователи имеют возможность по своему усмотрению использовать все тонкости работы микрокалькулятора. Поскольку микро-ЭВМ, программируемые на языке бейсик, описаны в книге [10], далее они не рассматриваются.

## **2.2. Вычисления на непрограммируемых микрокалькуляторах с алгебраической логикой**

Элементарные вычисления на непрограммируемых микрокалькуляторах с алгебраической логикой почти не требуют подготовки к ним, поскольку выполняются в естественном порядке. Для типовой отечественной модели микрокалькуляторов с расширенными функциональными возможностями примеры элементарных вычислений даны в табл. 2.3.

По мере усложнения вычислений становится желательным составление их плана, т. е. в сущности программы вычислений. Эта программа может быть записана так же, как и для программируемых микрокалькуляторов, в виде последовательности символов нажимаемых клавиш. Однако выполнение программы теперь происходит не автоматически, а с помощью пользователя, нажимающего клавиши в нужном порядке. Программа, особенно при сложных циклических вычислениях, избавляет пользователя от необходимости продумывать каждый ход вычислений в процессе их проведения (он обдумывается при составлении программы). Это не значит, что клавиши можно нажимать чисто механически: нужно следить за правильностью ввода данных, за промежуточными и окончательными вычислениями. Некоторые калькуляторы имеют неприятную особенность — дребезг контактов при нажатии клавиши, который может привести к ошибкам при выполнении программы. Тем не менее программа значительно облегчает проведение сложных расчетов.

Как отмечалось, программа для непрограммируемого микрокалькулятора записывается в виде последовательности символов

нажимаемых клавиш. Для уменьшения ошибок целесообразно указывать не только основные (смысловые) символы, но и символы префиксных клавиш. Чтобы сделать программу универсальной,

Таблица 2.3

**Выполнение основных элементарных операций  
на микрокалькуляторе «Электроника БЗ-38»**

Операция	Пример операции
Сложение	$12.36 + 45.2 = 57.56$
Вычитание	$23.788 - 12.56 = 11.228$
Умножение	$12.3 \times 2.5 = 30.75$
Деление	$45.6 \div 3 = 15.2$
Вызов числа $\pi$	$F_2 \pi 3.1415926$
Вычисление $x^2$	$5 F_2 x^2 25$
Вычисление $n!$	$10 F_2 n! 3\ 628\ 800$
Вычисление $10^x$	$2.5 F_2 10^x 316.22776$
Вычисление $e$	$2 F_2 e^x 7.389056$
Вычисление $x^{1/y}$	$2 F_2 x^{1/y} 0.5 = 4 (x = 2; y = 0.5)$
Вычисление $\sqrt{x}$	$64 F_1 \sqrt{\quad} 8$
Вычисление $1/x$	$5 F_1 1/x 0.2$
Вычисление $\lg x$	$100 F_1 \lg 2$
Вычисление $\ln x$	$2 F_1 \ln 0.6931471$
Вычисление $x^y$	$2 F_1 x^y 3 = 8 (x = 2; y = 3)$
Вычисление $\sin x$	$30 F_1 \sin 0.5$ (режим Г)
Вычисление $\cos x$	$60 F_1 \cos 0.5$ (режим Г)
Вычисление $\operatorname{tg} x$	$1 F_1 \operatorname{tg} 1 5574078$ (режим РАД)
Вычисление $\arcsin x$	$0.5 F_2 \sin^{-1} 0.5235987$ (режим РАД)
Вычисление $\arccos x$	$0.5 F_2 \cos^{-1} 66 666667$ (режим ДГ)
Вычисление $\operatorname{arctg} x$	$10 F_2 \operatorname{tg}^{-1} 84.289407$ (режим Г)
Смена знака числа	$2 F_1 /-/- 2$
Ввод порядка числа	$12 F_1 \text{ВП} 3 = 12\ 000$
Ввод числа в память	$123 F_1 \text{ЗП} 123$
Сброс набранного числа	СК 0
Вызов числа из памяти	$F_1 \text{ИП} 123$
Сложение в регистре памяти	$12 F_1 \text{П} + (F_1 \text{ИП даст } 135)$
Вычитание в регистре памяти	$15 F_1 \text{П} - (F_1 \text{ИП даст } 120)$
Перевод углов ( $^{\circ}'' \rightarrow ^{\circ}$ )	$30 F_1 ^{\circ}'' 30 F_1 ^{\circ}'' 30.5^{\circ}$
Общий сброс	C
Переход к статистическим вычислениям	$F_2 \sigma$ (см. примр 9 в тексте)

нужно особо отметить места ввода исходных данных и команды, ведущие к выдаче результатов. Далее ввод данных будет обозначаться символом в кружке, например 7 в кружке будет означать ввод числа 7,  $x$  в кружке — ввод численного значения переменной  $x$  и т. д. Команды, ведущие к выдаче окончательных или промежу-

точных результатов, будут заключены в прямоугольник, например  $\boxed{=}$ .

Так, вычисление выражения

$$a + (b + (c + d)) = ?$$

в соответствии с этими правилами можно представить (для любых  $a, b, c$  и  $d$ ) в виде следующей программы:

$$\textcircled{a} + (\textcircled{b} + (\textcircled{c} + \textcircled{d})) \boxed{=}$$

Подставляя вместо  $a + d$  числа 2, 3, 4 и 5, получим результат 29. Применяя этот прием, можно многие более сложные вычисления проводить по алгоритмам, формулам и даже программам, приводимым для программируемых микрокалькуляторов (см. дальнейшие разделы справочника). Ниже даны примеры типовых вычислений на непрограммируемом микрокалькуляторе «Электроника БЗ-38» (БЗ-36, БЗ-37, МК-51) с необходимыми краткими комментариями.

**Пример 1.** Вычисление гиперболического синуса  $\text{sh}(x) = (e^x - 1/e^x)/2$ :

$$\textcircled{x} F_2 e^x - F_1 1/x \div 2 \boxed{=}$$

Для  $x = 1$  получим  $\text{sh}(1) = 1,1752011$ . В этой программе используется то обстоятельство, что после вычисления  $e^x$  нажатие клавиши «—» не ведет к исчезновению в регистре X числа  $e^x$ . Поэтому значение  $1/e^x$  можно получить, нажав клавиши  $F_1$  и  $1/x$ , не вводя повторно  $x$ .

**Пример 2.** Вычисление гиперболического косинуса  $\text{ch}(x) = (e^x + 1/e^x)/2$  выполняется по вышеприведенной программе, если заметить в ней знак минус на плюс. Для  $x = 1$  получим  $\text{ch}(1) = 1,5430806$ .

**Пример 3.** Вычисление гиперболического тангенса  $\text{th} x = \text{sh}(x)/\text{ch}(x) = (e^x - 1/e^x)/(e^x + 1/e^x)$ :

$$\textcircled{x} F_2 e^x F_1 3\Pi - F_1 1/x \div [(F_1 \Pi + F_1 1/x)] \boxed{=}$$

При  $x = 1$  получим  $\text{th}(1) = 0,7615941$ . В этом примере  $e^x$  вычисляется один раз и заносится в память (команда  $F_1 3\Pi$ ) для вычисления затем члена  $(e^x + 1/e^x)$ . Гиперболический котангенс  $\text{cth}(x) = 1/\text{th}(x)$  вычисляется по этой программе, если после ее выполнения задать команду  $F_1 1/x$ . Получим  $\text{cth}(1) = 1,3130252$ .

Пример 4. Вычисление обратного гиперболического синуса  $\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ :

$$\textcircled{x} \quad F_1 3\text{П} \quad F_2 x^2 + 1 = F_1 \sqrt{\quad} + F_1 \text{ИП} = \boxed{F_1 \ln}$$

Для  $x = 1$  получим  $\operatorname{arsh}(1) = 0,8813735$ .

Пример 5. Вычисление обратного гиперболического косинуса  $\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  выполняется по программе к примеру 4, если в пей знак плюс перед 1 заменить на знак минус для  $x = 2 > 1$  получим  $\operatorname{arch}(2) = 1,3169579$ .

Пример 6. Вычисление обратного гиперболического тангенса ( $-1 < x < 1$ ):

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\textcircled{x} \quad F_1 3\text{П} + 1 \div [(1 - F_1 \text{ИП})] = F_1 \ln \div 2 \quad \boxed{=}$$

Для  $x = 0,5$  находим  $\operatorname{arth}(0,5) = 0,5493061$ .

Пример 7. Вычисление обратного гиперболического котангенса ( $x > 1$ )  $\operatorname{arcth}(x) = \ln \sqrt{2/(x+1) + 1}$ :

$$\textcircled{x} \quad - 1 = F_1 1/x \times 2 + 1 = F_1 \sqrt{\quad} \quad F_1 \ln$$

Для  $x = 1,3130351$  получим  $\operatorname{arcth}(x) = 1,0000002$ .

Пример 8. Найти число сочетаний  $C_9^3 = 9! / ((3!) (9-3)!)$ :

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad F_2 n! \div [ ( [ ( \textcircled{3} \quad F_2 n! ) ] \times [ ( \\ \textcircled{9} \quad - \quad 3 ) ] F_2 n! ) ] \quad \boxed{=} \end{aligned}$$

Получаем  $C_9^3 = 84$ . Особенность этой программы заключается в использовании двух пар внутренних скобок  $(3!)$  и  $(9-3)!$  внутри внешней пары скобок.

Пример 9. Для пяти чисел 7, 8, 8, 9 и 9,5 найти их основные статистические параметры:

$$\begin{aligned} F_2 \sigma \quad \textcircled{7} \quad F_2 x \quad \textcircled{8} \quad F_2 x \quad \textcircled{8} \quad F_2 x \quad \textcircled{9} \quad F_2 x \quad \textcircled{9,5} \\ F_2 x \quad \bar{n} \quad \bar{x} \quad F_2 \sigma_n \quad F_2 \sigma_{n-1} \quad F_2 \Sigma x \quad F_2 \Sigma x^2 \end{aligned}$$

Получаем количество введенных чисел  $n = 5$ , среднее  $\bar{x} = 8,3$ , дисперсию  $\sigma_n = 0,8717797$ ,  $\sigma_{n-1} = 0,9746794$ , сумму чисел  $\Sigma x = 41,5$  и сумму квадратов чисел  $\Sigma x^2 = 348,25$ . Этот пример ил-

люстрирует технику статистических расчетов по встроенным в микрокалькулятор микропрограммам.

**Пример 10.** Найти корни квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , применяя формулу

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = a \pm jb$$

для  $p = 2,736$  и  $q = -5,219$ :

$$\textcircled{p} \div 2 = \boxed{F_1 / - /} \quad F_2 x^2 - \textcircled{q} \boxed{=}^* \boxed{F_1 / - /}^* \boxed{F_1 \sqrt{\quad}}$$

При выполнении команды  $\boxed{F_1 / - /}$  получаем число  $a$ , а при выполнении команды  $\boxed{F_1 \sqrt{\quad}}$  — число  $b$ . Возможны два случая: а) корни  $x_1 = a + b$  и  $x_2 = a - b$  действительные и б) корни  $x_{1,2} = a \pm jb$  мнимые. Если полученное после исполнения команды  $\boxed{=}^*$  число положительно или равно 0, значит имеем случай а). В этом случае  $x_1 = a + b = 1,294785$  и  $x_2 = a - b = 4,030785$ . Для  $p = 2$  и  $q = 15$  получаем  $x_{1,2} = -1 \pm i3,7416573$  (случай б)).

**Пример 11.** Методом простых итераций решить систему из 3 линейных уравнений с преобладанием диагональных элементов:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 &= 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 &= 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 &= 20. \end{aligned}$$

Разделив каждое уравнение на коэффициент при  $x_i$ , где  $i$  — номер уравнения, приведем систему к виду, удобному для итераций:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\ x_2 &= 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\ x_3 &= 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения возьмем  $x_{10} = 2$ ,  $x_{20} = 3$  и  $x_{30} = 5$ . Подставляя эти значения в каждое из уравнений, найдем первое приближение  $x_{11} = 1,92$ ,  $x_{21} = 3,19$  и  $x_{31} = 5,04$ .

Для удобства вычисления можно выполнять по программам (см. пример для 1-го из 3-х уравнений):

$$\begin{aligned} &2 - [( \cdot 0 \ 6 \times \textcircled{x_2} )] + [( \cdot \\ &0 \ 2 \times \textcircled{x_3} )] \boxed{=} \end{aligned}$$

Проведя три итерации, получим:

Номер итерации $k$	$x_{1k}$	$x_{2k}$	$x_{3k}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1.90923	3,19495	5,04485

С точностью до 3 знаков после запятой можно приять, что корни равны:  $x_1 = 1,909$ ;  $x_2 = 3,194$  и  $x_3 = 5,045$ .

Пример 12. Методом простых итераций решить систему с трансцендентным уравнением:

$$\begin{aligned} y &= kx, \\ y &= 1 - e^{-x/\tau}. \end{aligned}$$

Пусть  $\tau = 1$  и  $k = 0,3$ . Тогда эту систему нетрудно привести к виду, удобному для вычислений:

$$x_{n+1} = \frac{1 - e^{-x_n}}{k} \quad \text{или, лучше,} \quad -x_{n+1} = \frac{e^{-x_n} - 1}{k}.$$

Нажав клавиши . 3 F<sub>1</sub>ЗП, введем константу  $k$  в регистр памяти микрокалькулятора. Составим программу вычисления величины  $-x_{n+1}$ :

$$\textcircled{x_n} \quad F_2 e^x \quad - \quad 1 \quad \div \quad F_1 \text{ИП} \quad \boxed{=}$$

Зададим нулевое приближение  $-x_0 = -2$ . Выполнив вычисления по этой программе несколько раз, будем получать следующие результаты (знак «-» опускаем):  $x_1 = 2,8822157$ ,  $x_2 = 3,1466315$ ,  $x_3 = 3,1900109$ ,  $x_4 = 3,1960952$ ,  $x_5 = 3,1969277$ ,  $x_6 = 3,1970412$ ,  $x_7 = 3,1970567$ ,  $x_8 = 3,1970588$ ,  $x_9 = 3,1970591$  и  $x_{10} = 3,1970591$ . Дальнейшие вычисления становятся нецелесообразными, так как значения  $x_9 = x_{10}$  приблизились к искомому корню.

Пример 13. Найти напряжение  $U_0 = U_M \cos \theta$  на выходе выпрямителя с емкостным фильтром, если угол отсечки  $\theta$  (в радианах) определяется из решения трансцендентного уравнения

$$F(\theta) = \theta - \text{tg } \theta + \pi R_{\text{пр}}/R_n = 0,$$

где  $R_{\text{пр}}$  — сопротивление диода в прямом направлении,  $R_n$  — сопротивление нагрузки. При  $R_{\text{пр}} = 0,01$   $R_n$  константа  $\pi R_{\text{пр}}/R_n = 0,03142$ . Запишем ее в регистр памяти, нажав клавиши . . 0 3 1 4 2 F<sub>1</sub>ЗП. Составим программу вычисления  $F(\theta)$ :

$$\textcircled{\theta} \quad - \quad F_1 \text{tg} \quad + \quad F_1 \text{ИП} \quad \boxed{=}$$

Ее особенность — вычисление  $\theta - \text{tg } \theta$  без обновления ввода 0 при вычислении второго члена  $\text{tg } \theta$ .

Будем вести вычисления методом целенаправленных проб. Вначале зададим  $\theta = 0, 1, 2, \dots$  рад (не забудьте установить переключатель задания единиц представления углов в положение РАД, нажав клавиши F<sub>1</sub> и  $\overline{\Gamma \text{ РАД } \Gamma}$  до появления на индикаторе знака РАД). Обнаружив изменение знака  $F(\theta)$ , делаем шаг назад и уменьшаем шаг  $h$ . Результаты вычислений с точностью до 3 знаков даны в следующей таблице:

№ итерации	0	1	.	4
$\theta$ рад	0	1	0,5	0,45
$F(\theta)$	0,0314	-0,526	-0,0149	$-1,63 \cdot 10^{-3}$
№ итерации	5	6	7	8
$\theta$ рад	0,44	0,444	0,443	0,442
$F(\theta)$	$6,39 \cdot 10^{-4}$	$-2,56 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-4}$

Из этих данных можно заключить, что  $\theta = 0,443$  рад, поэтому при амплитуде синусоидального сигнала на входе выпрямителя  $U_m = 10$  В выходное напряжение  $U_0 = 10 \cdot \cos 0,443 = 9,0347$  В.

Пример 14. Вычислить значение интегрального синуса

$$Si(x) = I = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

применив формулу численного интегрирования модифицированным методом прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(t) dt \approx \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right).$$

Взяв  $n = 4$ ,  $x = b = 2$  и  $a = 0$ , составим программу вычисления интеграла:

$$\textcircled{t_i} \div F_1 \sin = F_1 1/x \quad F_1 \Pi_+$$

Заключительная команда обеспечивает суммирование значений  $f(t_i + \Delta t/2)$  в регистре памяти (проследите, чтобы в начале вычислений он был обнулен). Для  $i = 0, 1, 2$  и 3 получим значения

$t_i = (i\Delta t + \Delta t/2)$ , где  $\Delta t = (b - a)/n$ , равные 0,25; 0,75; 1,25 и 1,75. Проведя для них вычисления по программе, получаем в регистре памяти значения  $\sum f(t_i + \Delta t/2)$ . Поскольку  $(b - a)/n = 1,2$ , то нажав клавиши  $F_1 \text{ИП} \div 2 \overline{=}$ , найдем значение  $I \approx 1,6699664$  при точном значении  $Si(2) = 1,665418$  (т. е. относительная погрешность  $\delta \approx 0,283 \%$ ).

Пример 15. Найти приближенное значение интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

воспользовавшись формулой Симпсона

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4)$$

для двух двоясных отрезков интегрирования при 5 ординатах  $f(x)$  (см. § 5.9). Вычисление ординат с умножением их на множитель  $k = 1, 4, 2, 4, 1$  и суммированием в регистре организуем по программе:

$$\textcircled{x_i} F_2 x^2 + 1 = F_1 1/x \times \textcircled{k} = F_1 \Pi_+$$

Задавая  $x_i = 0; 0,25; 0,5; 0,75$  и 1, проведем 5 циклов вычисления. Затем, нажав клавиши  $F_1 \text{ИП} \div 1 \ 2 \overline{=}$ , получим искомый резуль-

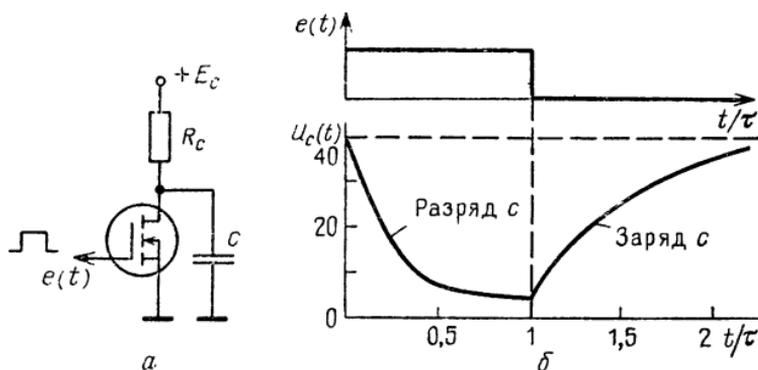


Рис. 2.2. Ключ на мощном МДП-транзисторе (а) и временные диаграммы его работы (б)

тат  $I = 0,7853921$  при точном 0,785398 (здесь учтено, что в данном случае  $\Delta x/3 = 1/12$ ).

Пример 16. Найти зависимость напряжения на стоке мощного МДП-транзистора в ключевой схеме (рис. 2.2, а), запускаемой

прямоугольным импульсом (рис. 2.2, б), если выходная вольтамперная характеристика транзистора аппроксимируется выражением

$$I_c(U_c, U_3) = S(U_3 - U_0) [1 - \exp(-kU_c/(U_3 - U_0))],$$

при  $E_c = 40$  В,  $S = 0,1$  А/В (крутизна транзистора),  $U_3 = 10$  В (напряжение на затворе),  $U_0 = 0$  (напряжение отсечки),  $k = 1$  и  $R_c = 100$  Ом. Зависимость напряжения на стоке  $U_c$  от времени задается решением нелинейного дифференциального уравнения

$$C \frac{dU_c}{dt} = \frac{E_c - U_c}{R_c} - I_c(U_c, U_3)$$

или, обозначив  $CR_c = \tau$  и  $R_c S(U_3 - U_0) = U_{см}$ ,

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{\tau} \left\{ E_c - U_c - U_{см} [1 - e^{-kU_c/(U_3 - U_0)}] \right\}.$$

Решая это уравнение методом Эйлера, будем иметь

$$U_{c_{n+1}} = U_{c_n} + \frac{\Delta t}{\tau} \left\{ E_c - U_{c_n} - U_{см} [1 - e^{-kU_{c_n}/(U_3 - U_0)}] \right\},$$

или, подставив приведенные выше численные значения заданных параметров и задав  $\Delta t/\tau = 0,1$ ,

$$U_{c_{n+1}} = U_{c_n} + 0,1 \left[ 40 - U_{c_n} + 100 \left( e^{-U_{c_n}/10} - 1 \right) \right].$$

На каждом шаге интегрирования дифференциального уравнения вычисление  $U_{c_{n+1}}$  по заданному  $U_{c_n}$  с помощью этой формулы реализуется следующей программой:

$$\begin{aligned} \textcircled{U_{c_n}} &\div \textcircled{10} = F_1 / - / & F_2 e^{w} - 1 \times \\ 100 &- F_1 \text{ИП} + \textcircled{40} & \times \textcircled{.1} + F_1 \text{ИП} \\ \boxed{=} & F_1 \text{ЗП} \end{aligned}$$

Перед началом вычисления зададим  $U_{c_0} = E_c = 40$  В и, нажав клавиши 40 F<sub>1</sub>ЗП, занесем  $U_{c_0}$  в регистр памяти. Теперь, выполняя вычисления по данной программе, будем получать следующие результаты:

t/	$\tau$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	...
$U_{c_n}$ , В	40	30,183	21,654	14,635	9,486	...	

Вычисления продолжают, пока  $t/\tau \leq t_n/\tau$ , где  $t_n$  — длительность запускающего импульса. Например, при  $t_n/\tau = 1$  получим для  $t/\tau =$

$= 1 U_{c10} = 4,404$  В. Таким образом, вычисляется спад напряжения на стоке — разряд емкости С.

При  $t/\tau > t_n/\tau$  надо подставлять значения  $I_c(U_n, U_c) = 0$ . Поэтому дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{E_c - U_c}{\tau}$$

и имеет аналитическое решение в виде

$$U_c(t) = E_c + [U_c(0) - E_c]e^{-t/\tau},$$

где  $U_c(0) = U_{c10}$  и отсчет  $t$  ведется с момента окончания импульса. Расчет  $U_c(t)$  для заданных  $t/\tau$  выполняется по программе (в регистре памяти  $U_{c10}$ )

$$t/\tau \quad F_1 \quad /-/ \quad Fe^x \quad \times \quad [( \quad F_1 \text{ИП} \quad - \quad 40 \quad )] \quad + \\ 40 \quad \underline{\underline{=}}$$

При этом будем получать значения  $U_c(t/\tau)$ , равные:  $U_c(0,1) = 7,791$ ;  $U_c(0,2) = 10,856$ ;  $U_c(0,3) = 13,629$  и т. д. Расчетная зависимость  $U_c(t)$  дана на рис. 2.2, б.

Приведенные примеры показывают, что в принципе на непрограммируемых микрокалькуляторах можно выполнять различные вычисления — от простейших до реализующих численные методы с циклическими и итерационными процедурами. Однако гораздо удобнее, быстрее и надежнее проводить последние, применяя программируемые микрокалькуляторы.

### 2.3. Клавиатура и язык микрокалькуляторов с алгебраической логикой TI-58C

С клавиатурой и языком современных программируемых микрокалькуляторов с алгебраической логикой можно ознакомиться на примере широко распространенных моделей программируемых микрокалькуляторов высокого класса TI Programmable 58C и 59 (TI-58C/59). Пульт управления их (рис. 2.3) содержит 45 клавиш, которыми вводится свыше 100 операций. Это достигается с помощью клавиши двойной операции  $2nd$  (она нажимается, если выполняется операция, обозначенная над основной клавишей) и клавиши операции  $INV$  (см. ниже). В программах нажатие клавиши  $2nd$  не указывается, так как на него прямо указывает расположение функциональной надписи основной клавиши. Например,

нажав клавишу  $\frac{\log}{\ln x}$ , вводим оператор  $\ln x$ ; нажав клавиши  $2nd$  и  $\frac{\log}{\ln x}$ , вводим оператор  $\lg(\log x)$ ; нажав клавиши  $INV$   $2nd$   $\frac{\log}{\ln x}$ , вводим оператор  $10^x$  и т. д.

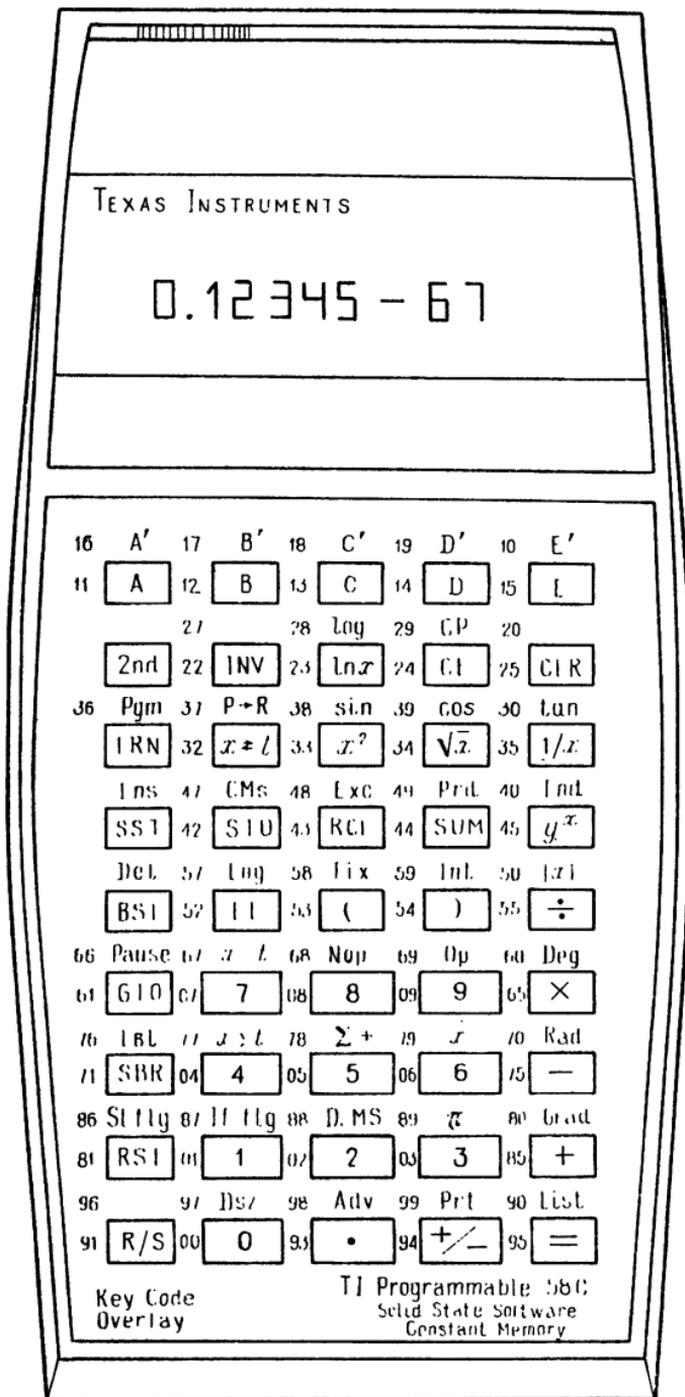


Рис. 2.3. Внешний вид программируемого микрокалькулятора TI Programmable 58C с алгебраической логикой вычислений

**Операторы ввода чисел.** К ним относятся цифры 0, 1, ..., 9, разделительная точка  $\boxed{\cdot}$ , оператор смены знака мантиссы или порядка +/-, оператор ввода порядка EE и оператор вызова числа  $\pi = 3,141592653590$  (выводится 10 знаков из 13 используемых при вычислениях).

**Операторы стирания (сброса).** Общий сброс вводится оператором CLR. При этом устанавливается на 0 содержимое регистра X, устанавливается стандартная форма представления чисел, прекращается индикация ошибок (мигание индикатора). Содержимое регистров памяти сохраняется.

Оператор CE (clear entry — стирание ввода) обеспечивает только стирание числа в регистре X (за исключением числа  $\pi$ ). Стирание программы обеспечивается вводом вручную оператора CP (clear program — стирание программы), а очистка всех регистров памяти осуществляется оператором CMs (clear memory — стирание памяти). Оператор CP в программе обеспечивает стирание содержимого регистра сравнения I.

**Операторы прямых и обратных функций.** Операторы прямых функций вводятся нажатием основных клавиш, обратных функций — после нажатия клавиши INV (табл. 2.4).

**Операторы установки формата чисел.** Нормальный формат соответствует выводу десяти знаков мантиссы в виде десятичного числа с фиксированной запятой. При вводе порядка оператором EE устанавливается *научный (экспоненциальный) формат* чисел  $x = M \cdot 10^E$ , где M — нормированная мантисса, содержащая 8 знаков, и E — порядок, содержащий 2 знака.

Например,

	Мантисса			Порядок
—	2.5786432	EE	—	16
Знак мантиссы			Знак порядка	

Диапазон чисел лежит в пределах от  $\pm 1 \cdot 10^{-99}$  до  $\pm 9,9999999 \cdot 10^{99}$ .

*Инженерный формат* вводится оператором Eng. При этом порядок чисел равен 0 или кратен 3. Например, разделив 1 на 3, получим .3333333333. Нажав клавиши EE и =, получим 3. 3333333 —01, нажав далее клавиши 2nd и End, получим 333.33333 —03.

*Формат с фиксацией заданного числа знаков после запятой N* устанавливается вводом оператора Fix N. Например, при  $N = 2$  предшествующий результат получим (после нажатия клавиши 2nd Fix 2). 333. 33—03.

**Операторы арифметических операций.** К ним относятся операторы сложения +, вычитания —, умножения X, деления ÷, ввода открывающих (и закрывающих) скобок и знака равенства =. Допустимо вводить до девяти пар скобок.

**Операторы алгебраических функций.** К операторам алгебраических функций относятся:  $\ln x$  — вычисление натурального логарифма,  $\log (\lg x)$  — вычисление десятичного логарифма,  $\text{INV } \ln x$  — вычисление функции  $e^x$ , вычисление функции  $10^x$  —  $\text{INV } \log, x^2$  — вычисление квадрата  $x$ ,  $\sqrt{x}$  — вычисление квадратного корня,  $y^x$  — вычисление степенной функции и  $\text{INV } y^x$  — вычисление функции  $\sqrt[x]{y}$ . За исключением функций  $y^x$  и  $\sqrt[x]{y}$ , остальные функции

Таблица 2.4

**Операторы прямых и инверсных функций  
микрокалькуляторов TI58C/59**

Прямая функция	Обратная функция
EE (ввод порядка)	INV EE (сброс порядка)
Eng (ввод инженерного формата)	INV Eng (сброс инженерного формата)
Fix (ввод ограничения числа знаков)	INV Fix (сброс ограничения числа знаков)
log (десятичный логарифм)	INV log $x$ (функция $y = 10^x$ )
$\ln x$ (натуральный логарифм)	INV $\ln x$ (функция $y = e^x$ )
$y^x$ ( $y$ в степени $x$ )	INV $y^x$ (корень степени $x$ из числа $y$ )
Int (выделение целой части)	INV Int (выделение дробной части)
sin (sin $x$ )	INV sin (arcsin $x$ )
cos (cos $x$ )	INV cos (arccos $x$ )
tan (tg $x$ )	INV tan (arctg $x$ )
Prd (умножение в регистре)	INV Prd (деление в регистре)
SUM (суммирование в регистре)	INV SUM (вычитание в регистре)
D.MS (преобразование угла в градусы, минуты, секунды)	INV D.MS (преобразование угла в градусы с десятичными долями)
$P \rightarrow R$ (преобразование полярных координат в декартовы)	INV $P \rightarrow R$ (преобразование декартовых координат в полярные)
$\Sigma +$ (накопление с суммированием)	INV $\Sigma +$ (накопление с вычитанием)
$\bar{x}$ (среднее значение)	INV $\bar{x}$ (стандартное отклонение)
list (печать программы)	INV list (печать данных из регистров)
SBR (обращение к подпрограмме)	INV SBR (возврат из подпрограммы)
$x = t$ (условие перехода)	INV $x = t$ ( $x \neq t$ )
$x \geq t$ (условие перехода)	INV $x \geq t$ ( $x < t$ )
if flg (проверка подъема флага)	INV if flg (проверка спуска флага)
st flg (поднять флаг)	INV st flg (опустить флаг)
DSZ (скачок, если $R_x = 0$ )	INV DSZ (скачок, если $R_x \neq 0$ )
Write (запись программы)	INV Write (считывание программы)

вычисляются после ввода числа  $x$  в регистр X. Например, нажав клавиши  $2\text{INV } \ln x$ , получим  $e^2 = 7.389056099$ .

Для вычисления функции  $y^x$  вводится число  $x$ , выполняется оператор  $y^x$ , вводится число  $y$  и выполняется оператор  $=$ . Для вычисления функции  $\sqrt[x]{y} = y^{1/x}$  вводится число  $y$ , затем выполняется оператор  $INV y^x$ , вводится число  $x$  и выполняется оператор  $=$ . Например, для вычисления  $\sqrt[3]{64} = 4$  нажимаем клавиши 6 4 INV  $y^x$  3  $=$ .

**Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.** Эти функции вычисляются при представлении углов в градусах (оператор Deg), радианах (оператор Rad) и градах (оператор Grad).

Синус, косинус и тангенс вычисляются вводом операторов  $\sin$ ,  $\cos$  и  $\tan$ . Если после них выполняется оператор  $1/x$ , то вычисляются косеканс  $\csc x = 1/\sin x$ , секанс  $\sec x = 1/\cos x$ , и котангенс  $\cot x = 1/\tan x$ .

Аргумент может находиться в пределах  $\pm 36\,000^\circ$ ,  $\pm 200\pi$  рад и  $\pm 40\,000$  град.

Обратные тригонометрические функции вычисляются, если перед этими операторами вводится оператор  $INV$ . Результат при этом представляется в следующих пределах:

$\arcsin x$	$0 \div 90^\circ$ ,	$\pi/2$ рад, 100 град
$\arcsin(-x)$	$0 \div -90^\circ$ ,	$-\pi/2$ рад, $-100$ град
$\arccos(x)$	$0 \div 90^\circ$ ,	$\pi/2$ рад, 100 град
$\arccos(-x)$	$90 \div 180^\circ$ ,	$\pi/2 \div \pi$ рад, $100 \div 200$ град
$\text{arctg}(x)$	$0 \div 90^\circ$ ,	$\pi/2$ рад, 100 град
$\text{arctg}(-x)$	$0 \div -90^\circ$ ,	$-\pi/2$ рад, $-100$ град.

Арксеканс  $\arcs \csc x$ , арксеканс  $\arcs \sec x$  и арккотангенс  $\arcs \cot x$  вычисляются с помощью операторов  $1/x$   $INV \sin$ ,  $1/x$   $INV \cos$  и  $1/x$   $INV \tan$ .

Если угол задан в градусах, минутах и секундах, то его можно преобразовать в градусы с десятичными долями с помощью оператора D.MS. Например, угол  $24^\circ 17' 29''$  вводим в виде 24.1729 и, нажав клавиши 2nd и D.MS, получаем  $\phi = 24.29138889^\circ$ . Обратное преобразование производится вводом оператора  $INV$  D.MS (нажимаются клавиши  $INV$  2nd и D.MS).

**Операторы выделения абсолютного значения, целой и дробной частей чисел.** Абсолютное значение (модуль) дробного числа  $x$  выделяется при исполнении оператора  $|x|$ . Операторы  $\text{Int}$  и  $INV \text{Int}$  обеспечивают выделение целой и дробной частей числа  $x$ .

**Операторы управления регистрами памяти.** Запись чисел в регистр XX (XX — двузначное число — адрес регистра) производится операторами вида  $\text{STOXX}$  (store — записывать). Вызов числа из регистра XX производится операторами  $\text{RCLXX}$  (recall — вызвать). Обмен содержимым между регистрами X и XX произво-

дится при исполнении оператора ExсXX (exchange — менять). Оператор  $x \rightleftharpoons t$  обеспечивает обмен между регистрами X и t.

**Операторы арифметических операций над числами в регистрах памяти.** С содержимым регистров X и XX можно выполнять арифметические операции с занесением их результата в регистр XX. Такие операции вводятся операторами: сложение SUMXX, умножение PrdXX, вычитание INV SUMXX и деление INV PrdXX. Например: разделить число 12, хранящееся в регистре 00, на число  $2,5 = RX$ . Нажимаем клавиши 1 2 STO 00 (ввод числа 12 в регистр 00) 2 . 5 INV 2nd Prd 00. Теперь, нажав клавиши RCL 00, вызываем из регистра 00 результат — число 4,8.

**Преобразование систем координат.** Пусть в системе полярных координат (P) имеется радиус-вектор длиной R и углом  $\theta$ . Нужно найти координаты x и y в декартовой системе координат (R). Для этого служит оператор  $P \rightarrow R$ . Обратное преобразование выполняется с помощью операторов  $INV P \rightarrow R$  (означает  $R \rightarrow P$ ). Для проведения этих преобразований используется регистр t. Порядок преобразований следующий:

P→R	R→P
Вводим R.	Вводим x.
Исполняем оператор $x \rightleftharpoons t$ .	Исполняем оператор $x \rightleftharpoons t$ .
Вводим $\theta$ .	Вводим y.
Исполняем оператор $P \rightarrow R$ и получаем y.	Исполняем оператор $INV P \rightarrow R$ и получаем $\theta$ .
Исполняем оператор $x \rightleftharpoons t$ и получаем x.	Исполняем оператор $x \rightleftharpoons t$ и получаем R.

Угол  $\theta$  находится в пределах  $-90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$  или  $-\pi/2$  рад  $\leq \theta < 3\pi/2$  рад или  $-100$  град  $\leq \theta < 300$  град. Например:  $R = 5$ ,  $\theta = 25^\circ$ , найти y и x. Нажимаем клавиши 5  $x \rightleftharpoons t$  25 2nd  $P \rightarrow R$  и получаем  $y = 2.113091309$ ; нажав клавишу  $x \rightleftharpoons t$ , получим  $x = 4.531538935$ .

**Операторы управления вычислениями по программе.** Стирание программ (clear programm) в ОЗУ производится оператором CP. Перевод в режим программирования (обучения ЭВМ) и наоборот производится нажатие клавиши LRN (learn — учить). Остановка вычислений по программе и пуск программы производится вводом оператора R/S (run/stop). В программе этот оператор обеспечивает остановку вычислений для выдачи их результата. В режиме счета он используется для пуска программы с того адреса, на котором она остановилась.

Оператор RST (reset — возврат к нулю) обеспечивает переход на нулевой адрес (000) программы. Кратковременная остановка (на  $\approx 0,5$  с) вычислений по программе обеспечивается вводом в нее оператора Pause (пауза).

**Распределение объема ОЗУ.** Емкость ОЗУ может распределяться пользователем между регистрами памяти и шагами программы (рис. 2.4). Каждые 10 регистров памяти занимают в ОЗУ место для 80 шагов программы.

Число десятков регистров  $N$  задается пользователем с помощью операторов  $N$  Op 17. При нажатии клавиш  $N$  2nd Op 17 на индикаторе высвечивается максимальный адрес программы и максимальный номер регистра памяти. Например, если  $N = 3$ , то на

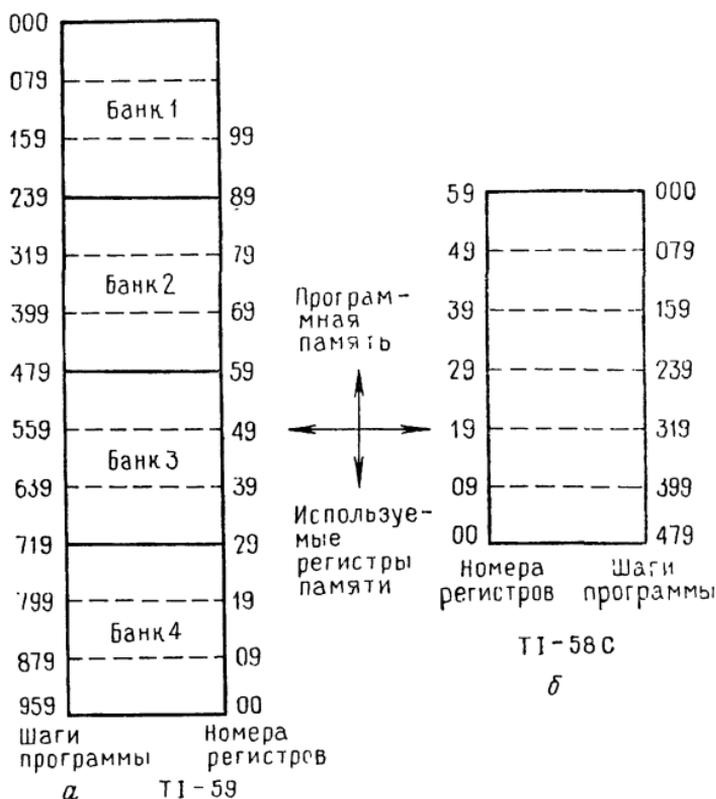


Рис. 2.4. Структура ОЗУ

индикаторе будут цифры 239.29 (239 — максимальный номер шага программы и 29 — максимальный номер регистра памяти). Переполнение памяти, отведенной под регистры или программу, индицируется как ошибка миганием дисплея.

**Операторы статистических расчетов.** Простейшие статистические расчеты могут выполняться микропрограммно после очистки регистров оператором CMS. Для ввода чисел, подлежащих статистической обработке, служат клавиши 2nd  $\Sigma +$ , нажимаемые после ввода каждого числа  $x_i$ . Если какое-то число введено ошибочно, его исключают повтором набора и нажатием клавиш INV 2nd  $\Sigma +$

Среднее значение ряда введенных чисел  $\bar{x}$  можно вызвать на индикацию, нажав клавиши 2nd  $\bar{x}$ . Для вычисления дисперсии, коэффициента парной корреляции и параметров линейной регрессии служат специальные операторы Op 11 ÷ Op 15 (см. далее). Их использование поясняют примеры в приложении 3 (программы ПЗ.25—ПЗ.30).

## 2.4. Элементарное программирование микрокалькуляторов с алгебраической логикой

Элементарное программирование микрокалькуляторов с алгебраической логикой мало отличается от такового для микрокалькуляторов с обратной бескобочной записью вычислений. Некоторые отличия заключаются в использовании операторов ввода скобок (до 9 пар) и оператора = (они достаточно очевидны), а также в учете приоритета операций. Рассмотрим несколько типовых примеров.

### 1. Вычисление

$$e = a + b \times (c - d) = ? \quad (2.1)$$

при  $a = R00$ ,  $b = R01$ ,  $c = R02$  и  $d = R03$  с занесенным результатом в регистр R04 выполняется по программе:

```
RCL 00 + RCL 01 × ( RCL 02 —
RCL 03 ) = STO 04 R/S
```

2. Иногда можно сократить программу, исключив скобки и создав приоритет выполнения операций вводом оператора = . Например, (2.1) можно вычислить по программе:

```
RCL 02 — RCL 03 = × RCL 01 +
RCL 00 = STO 04 R/S
```

В данном случае вначале вычисляем  $c - d$ , умножаем результат на  $b$  и прибавляем  $a$ .

### 3. Вычисление

$$y = 7,06 \cdot 10^{-3} e^{2x} = 7,03 \cdot 10^{-3} \times (\exp(2x)) = ? \quad (2.2)$$

Формально выполняется по программе ( $x = R00$ ):

```
7 . 0 6 EE 3 +/--- × ( (
2 × RCL 00 ) INV ln x ) = R/S
```

Для  $x = 2$  получаем  $y = 3,8546294 \cdot 10^{-1}$ .

4. Введя число  $7,06 \cdot 10^{-3}$  в регистр R01 и несколько изменив порядок вычислений (2.2), можно заметно сократить программу:

```
2 × RCL 00 = INV ln x × RCL 01
= R/S
```

## 5. Вычисление

$$y = x - (\ln x + 1) = ? \quad (2.3)$$

формально требует запоминания  $x$  для последующего ввода его в скобки и вычисления  $\ln x$ :

$$\begin{aligned} \text{STO } 00 & - (\text{RCL } 00 \ln x + 1) \\ = & \text{R/S} \end{aligned}$$

Для  $x = 3$  получим  $y = 0,9013877113$ .

6. Вычисление (2.3) можно выполнить по более простой программе:

$$- (\ln x + 1) = \text{R/S}$$

учитывая, что после исполнения операторов  $-$  и  $($  (число  $x$  сохраняется в регистре X. Этот прием можно использовать, если после оператора  $($  стоит оператор вычисления математической функции или оператор CE.

7. Наконец, вычисление (2.3) можно выполнить совсем просто по программе

$$- \ln x - 1 = \text{R/S}$$

В этом случае (2.3) представлено в виде  $y = x - \ln x - 1$ .

Последние примеры наглядно показывают, что при отступлении от формальных правил и использовании особенностей иерархии операций можно значительно сократить длину программ и уменьшить время их выполнения. Однако при этом приходится жертвовать полной идентичностью между записями фрагментов арифметических выражений и программ, выполняющих вычисления по ним.

**Операторы безусловных переходов.** Безусловные переходы задаются к метке  $N$  (вводится любой клавишей, имеющей код) или трехзначному адресу  $n nn$  с помощью операторов GTO  $N$  (двухшаговых) и GTO  $n nn$  (трехшаговых). Например, переход к началу программы задается оператором GTO 0 00. Такой переход дает и специальный оператор RST.

**Операторы условных переходов.** Имеется четыре типа операторов условных переходов:

Операторы		Условия перехода	
$x \geq t$ N	или $n nn$	$x \geq t$	
$x = t$ N	или $n nn$	$x = t$	
INV $x \geq t$ N	или $n nn$	$x < t$	
INV $x = t$ N	или $n nn$	$x \neq t$	

Здесь  $t$  содержимое регистра сравнения  $t$ . Если условие перехода выполняется, то происходит переход к метке  $N$  или адресу  $n nn$ . Если условие не выполняется, происходит выполнение оператора,

указанного после метки или адреса  $n nn$ . Оператор  $x \neq t$  обеспечивает обмен содержимым регистров  $X$  и  $t$ , например, для ввода  $t$ . Оператор CP в программе обеспечивает очистку регистра  $t$  ( $t = 0$ ).

**Пример.** Вычислить

$$y = (\sin x)/x \quad \text{при } x \neq 0,$$

$$y = 1 \quad \text{при } x = 0.$$

**Программа**

```
CP Rad x=t 0 13 STO 00 sin ÷ RCL
00 = R/S 1 R/S
```

при  $x = 0$  (в регистре  $t$  число 0) обеспечивает условный переход по адресу 013, т. е. вывод на индикацию числа 1. Если  $x \neq 0$ , то вычисляется  $(\sin x)/x$ .

**Операторы ввода подпрограмм.** Подпрограмма, начинающаяся с адреса  $n nn$ , выполняется при исполнении трехшагового оператора SBR  $n nn$  (SBR — сокращение слова subroutine — подпрограмма). Если подпрограмма пачинается операторами ввода метки LBL  $N$  (см. ниже), то она выполняется при исполнении двухшагового оператора SBR  $N$ . В конце подпрограммы вводится оператор INV SBR (возврат из подпрограммы). Число вложений подпрограмм друг в друга не должно превышать 6.

## 2.5. Специальные вопросы программирования микрокалькуляторов с алгебраической логикой

**Операторы ввода меток.** Метки (labels) вводятся операторами вида Lbl  $N$ , где  $N$  — символ любой клавиши, имеющей код (общая метка). Очень удобны 10 меток, вводимые пятью специальными клавишами верхнего ряда и обозначенные буквами A, B, C, D, E, A', B', C', D' и E'. Введя этот символ, мы обеспечиваем выполнение программы с адреса, следующего за операторами метки. Таким образом, указанные клавиши задают функции пользователя.

**Пример.** Вычислить (2.1), обозначив переменные  $a, b, c, d$  и  $e$  метками A, B, C, D и E. Программа при этом будет иметь вид

```
Lbl A STO 00 R/S Lbl B STO 01 R/S
Lbl C STO 02 R/S Lbl D STO 03 R/S
Lbl E RCL 02 — RCL 03 = × RCL
01 + RCL 00 = R/S
```

Теперь числа A, B, C и D можно вводить в любом порядке, указав после ввода соответствующий буквенный символ. Например, если  $A = 2$ ,  $B = 5$ ,  $C = 4$  и  $D = 3$ , ввод можно выполнить так: 3 D 5 B 2 A 4 C. Теперь, указав символ E, получим  $e = 7$ .

**Операторы организации циклов.** Циклы организуются операторами  $Dsz\ X\ N$  и  $Dsz\ X\ n\ nn$ , где  $X$  — номер регистра  $R_x$  (от 0 до 9). При каждом исполнении этого оператора от содержимого  $R_x > 0$  отнимается 1, а к содержимому  $R_x < 0$  прибавляется 1, после чего, если  $R_x \neq 0$ , происходит переход к метке  $N$  или к адресу  $n\ nn$ . Если  $R_x = 0$ , метка  $N$  или адрес  $n\ nn$  игнорируется и выполняется следующий за ними оператор.

**Пример.** Вычислить ряд

$$y = \sum_{k=1}^m k^n.$$

Программа имеет вид ( $m = RX; n = RX$ ):

```
CMS STO 00 R/S STO 01 RCL 00 yx RCL
01 = SUM 02 Dsz 0 0 06 RCL 02
R/S RTN
```

Здесь оператор  $Dsz\ 0\ 0\ 06$  организует в регистре  $R00$  счетчик  $k = k - 1$  с начальным значением  $k = m$  и цикл вычисления  $k$ , начинающийся с адреса  $0\ 06$  и кончающийся оператором  $Dsz\ 0\ 0\ 06$ . При  $k = 0$  происходит выход из цикла и содержимое суммирующего регистра  $R02$  вызывается по индикацию. Для  $m = 5$  и  $n = 6$  получим  $y = 20515$  при времени счета 5 с.

**Операторы установки и контроля флагов.** Как отмечалось в разд. 1.5, флаг — специальный указатель перехода в программе. У калькулятора TI-58C/59 флаги могут иметь номера  $y = 0, 1, 2, \dots, 9$ . Подъем флага выполняется вводом оператора  $Stflg\ y$ , а спуск — оператором  $INV\ stflg\ y$ . Проверка условия установки флага в нужном месте программы обеспечивается исполнением оператора  $Ifflg\ y\ N$  или  $Ifflg\ y\ n\ nn$ . Если флаг  $y$  поднят, то осуществляется переход к метке  $N$  или к шагу программы  $n\ nn$ . Если флаг  $y$  опущен, такой переход не происходит. При исполнении оператора  $INV\ Ifflg\ y\ N$  или  $INV\ Ifflg\ y\ n\ nn$  переход происходит, если флаг  $y$  опущен, и не происходит, если он поднят.

**Пример.** Составить программу перевода мер длины в соответствии с формулами:

1 км = 1000 м; 1 м = 3,28084 фут; 1 миля = 5,280 фут.

Один из вариантов такой программы имеет вид:

```
Lbl A × 1 0 0 0 Stflg 0 GTO
C Lbl B INY Stflg 0 Lbl C × 3
. 2 8 0 4 INV Ifflg 0 = ÷
5 2 8 0 Lbl = = INVSR
```

Здесь, если вводятся километры (метка  $A$ ), поднимается флаг  $y = 0$ , если метры (метка  $B$ ) — флаг  $y = 0$  опускается. В зависи-

мости от этого пересчет ведется по той или иной формуле. Пусть надо узнать, сколько миль в 75 км. Вводим число 75 и указываем метку А. Получим 46,6 миль. Теперь выясним, сколько футов в 1,78 м. Вводим 1,78 и указываем метку В. Получим 5,84 футов (результаты округлены на третьей цифре).

**Специальные операторы Op.** Командой вида Op  $nn$ , где  $nn = 00 + 39$ , вводятся 40 специальных операторов:

Назначение оператора Op

- 00 ÷ 08 Управление печатью принтера (описаны далее)
- 09 Запись в ОЗУ программы из блока ML (см. далее)
- 10 Вычисление сигнум-функции ( $y = 1$  при  $x > 0$ ,  $y = 0$  при  $x = 0$  и  $y = -1$  при  $x < 0$ , причем  $y \rightarrow PX$ )
- 11 Вычисление дисперсии и коэффициента В линейной регрессии ( $y = A + Bx$ )
- 12 Вычисление  $y(0) = A$  при линейной регрессии
- 13 Вычисление коэффициента корреляции
- 14 Вычисление  $y$  по заданному  $x$  при линейной регрессии
- 15 Вычисление  $x$  по заданному  $y$  при линейной регрессии
- 16 Проверка распределения памяти
- 17 Установка заданного распределения памяти
- 18 Подъем флага  $y = 7$ , если нет ошибки
- 19 Подъем флага  $y = 7$ , если есть ошибка
- 20 ÷ 29 Увеличение содержимого регистра R00 ÷ R09 на 1
- 30 ÷ 39 Уменьшение содержимого регистра R00 ÷ R09 на 1

**Операторы косвенной адресации.** К ним относятся следующие операторы (XX — номер регистра адресации):

Оператор	Код	Назначение оператора
STO Ind XX	72 XX	Запись в регистр памяти R
RCL Ind XX	73 XX	Вызов из регистра памяти R
EXCInd XX	63	Обмен R $\rightleftharpoons$ X
(INV)SUMInd XX	(22) 74 XX	Суммирование или вычитание в регистре памяти R
(INV)PrdInd XX	(22) 64 XX	Умножение и деление в регистре памяти R
GTOInd	83 XX	Безусловный переход
PgmInd	62 XX	Обращение к программе ПЗУ
OpInd	84 XX	Выполнение оператора Op
SBRInd	71 40 XX	Обращение к подпрограмме
FixInd XX	58 40 XX	Задание числа цифр после запятой

Оператор	Код	Назначение оператора
(INV) $x = t$ Ind XX	(22) 67 40 XX	Условные переходы
(INV) $x \geq t$ Ind XX	(22) 77 40 XX	
(INV)StflgInd XX	(22) 86 40 XX	
(INV)IfflgInd XX	(22) 87 40	
YY $N$ или $n$ nn	YY или $n$ nn	
(INV)IfflgInd YY Ind XX	(22) 87 40 YY 40 XX	Подъем (спуск) флага Анализ положения флага и переход с прямой адре- сацией
(INV)DszInd XX, $N$ или $n$ nn	(22) 97 40 XX, $N$ или $n$ nn	Анализ положения флага и переход с косвенной адре- сацией
(INV)DszXInd XX	(22) 97 X 40 XX	Оператор Dsz со счетчи- ком в регистре XX и переходом с прямой адре- сацией
(INV)DszInd XX Ind XX	(22) 97 40 XX 40 XX	Оператор Dsz с перехо- дом с косвенной адре- сацией
		Оператор Dsz со счетчи- ком в регистре XX и пе- реходом с косвенной адре- сацией

Напомним, что при косвенной адресации адреса программы, номера регистров и номера флагов указываются содержимым регистра адресации XX. Для модификации его могут использоваться операторы Op 20 ÷ Op 39 Dsz. Например, в программе

CMs	+	1	STO	00	=	$x \neq t$	RCL	00	R/S
STOI*)	00	Op	20	RCL	0	INV	$x = t$	0	09
R/S	...	...	...	...	...	...	...	...	...

обеспечивается запись  $N$  чисел последовательно в регистры памяти от R01 до R с использованием косвенной адресации (регистр адресации 00) и модификацией адреса, обеспечиваемой исполнением оператора Op 20. При пуске программы в регистр  $t$  вводим число  $N$ , а в регистр R00 — число 1. Для  $N = 5$ , нажав клавиши RST и R/S, получим на индикаторе номер числа, которое надо вводить — 1. Введем  $x_1 = 12$  и, нажав клавишу R/S, получим новый номер 2. Вводим  $x_2 = 7$  и т. д., например  $x_3 = 7$ ,  $x_4 = 9$  и  $x_5 = 1,5$ . Теперь нетрудно убедиться, что эти числа окажутся записанными в регистрах R01 ÷ R05. В этой программе выход из цикла осуществляется по условию  $x_{00} = t = N$ . Если  $x_{00} \neq N$ , происходит переход на адрес 0 09 (начало цикла с оператором записи в регистры памяти с косвенной адресацией).

\*) В программах у операторов вида STOInd, RCLInd и т. д. вместо символа Ind косвенной адресации используется упрощенный символ I (т. е. STOI, RCLI и т. д.).

## 2.6. Работа с библиотекой программ пользователя

В микрокалькуляторы TI-58C/59 встроен сменный модуль с библиотекой программ пользователя ML (Master Library). Он представляет собой твердотельное постоянное запоминающее устройство емкостью около 40 кбит, в котором может храниться библиотека из нескольких десятков простых программ либо сложная программа с числом шагов до 5 000. Смена блока ML позволяет мгновенно переориентировать микрокалькулятор на выполнение различных профессиональных вычислений: научно-технических, деловых (экономических), статистических, биологических и т. д.

Типовой блок ML (модуль 1) содержит 25 программ, в основном реализующих научно-технические расчеты. Перечень этих программ и инструкции по их применению даны в приложении 1.

Программы ML могут использоваться самостоятельно. В этом случае они вводятся с клавиатуры нажатием клавиш *2nd Pgm mm*, где *mm* — двузначный номер программы ML. Следует отметить, что введенная таким образом программа ML не занимает ту часть ОЗУ, которая отводится под внешние (вводимые пользователем) программы. Поэтому число шагов программы ML может превышать допустимые для внешних программ. Однако при работе с программами ML используется часть регистров памяти (их номера указаны в описании программ ML), что должен учитывать пользователь при составлении своих (внешних) программ.

Программы ML можно переписать в ОЗУ вводом команд *2nd Pgm mm Op 09*. Это возможно, если число шагов программы ML меньше максимального числа шагов программной памяти (480 у TI-58C и 960 у TI-59). Такая перезапись позволяет детально проанализировать программу ML — *mm* и изменить ее. Запись измененной программы в блок ML невозможна, что обеспечивает защиту программ ML.

В программах ML широко используются метки, делящие каждую программу на части, имеющие самостоятельное значение. Программу ML — *mm* полностью или частично можно использовать в качестве подпрограммы, входящей во внешние программы, составляемые пользователем. И напротив, внешние программы можно использовать в качестве подпрограмм для программ ML. Эти возможности реализуются операторами:

*Pgm mm N* Обращение к части программы ML — *mm* помеченной меткой *N*

*Pgm mm SBR N* Возврат из подпрограммы ML — *mm* к выполнению внешней программы

*Pgm mm R/S* Обращение к программе ML — *mm* с остановкой

*SBR n nn* Обращение из программы ML — *mm* к подпрограмме, внесенной в ОЗУ с адреса *nn*

SBR N Обращение к подпрограмме в ОЗУ, помеченной меткой N.

Такое комбинированное использование программ нередко позволяет реализовать вычисления, которые потребовали бы составления программ с общим числом шагов до 5 000.

Поясним комбинированное использование программ ML и внешних программ на примере вычисления выражения

$$f(a, b) = \int_a^b \sqrt{2x+1} + be^a = I + be^a,$$

содержащего интеграл  $I$ , вычисляемый программой ML — 09 численного интегрирования. Из ее описания выясняем использование регистров памяти: R01 =  $a$ , R02 =  $b$ , R03 =  $n$ , R04 =  $I$ , R05 =  $n$ . Программа, вводимая в ОЗУ, имеет такой вид:

Ввод	Фрагмент программы	Пояснения
$a$	Pgm 09 A R/S	Ввод $a$ по программе ML — 09
$b$	Pgm 09 B R/S	Ввод $b$ по программе ML — 09
$c$	Pgm 09 C	Ввод $c$ по программе ML — 09
	Pgm 09 D	Вычисление $I$ по программе ML — 09
	RCL 01 INV ln $x \times$	Вычисление $be^a + I$ и остановка
	RCL 02 + RCL 04 = R/S	основной программы
	Lbl A' C STO 06	Подпрограмма в ОЗУ для вы-
	RCL 06 $\times$ 2 +	числения подынтегральной
	1) $\sqrt{x}$ INVSBR	функции $\sqrt{2x+1}$

В этой программе 4 раза части программы ML — 09 используются в качестве подпрограмм для выполнения основной программы. С другой стороны, заключительный фрагмент программы — вычисление  $\sqrt{2x+1}$  используется в качестве подпрограммы для вычисления интеграла по программе ML — 09. Для  $a = 0$ ,  $b = 1$  и  $c = n = 8$  получим  $f(a, b) = 2,398713896$ .

## 2.7. Операторы управления магнитофоном и принтером

В микрокалькулятор TI-59 встроен миниатюрный магнитофон для записи данных и программ с двух сторон магнитных карт (длина 7,62 см). Данные вводятся оператором вида  $n$  2nd Write, где  $n$  — номер банка данных ( $n = 1, 2, 3$  или  $4$ ). Запись программ выполняется вводом оператора 2nd Write. Считывание данных производится оператором  $n$  INV 2nd Write, а программ — INV 2nd Write. При этом недопустима установка формата Fix (сброс его выполняется вводом оператора INV 2nd Fix).

К микрокалькуляторам TI-58C и TI-59 могут подключаться миниатюрные печатающие устройства — принтеры PC-100A и PC-100C. Вывод данных на печать обеспечивается вводом в программу оператора Prt (от слова print — печать). Его работа иллюстрируется следующим примером:

Образец печати программы			Образец печати данных
Адрес	Код	Оператор	
000	85	+	3
001	03	3	6
002	95	=	9
003	99	PRT	12
004	81	RS	15
005	00	0	18

При вводе перед оператором Prt(PRT) оператора Adv обеспечивается большой пробел между строками печати. Распечатка текста (листинга) программы (см. пример выше) обеспечивается вводом с пульта оператора List.

Предусмотрена возможность печати алфавитно-цифровых символов в любом месте строки. Строка разбивается на 20 знакомест, устанавливаемых вводом операторов OP1 ÷ OP4:

0 1 2 3 4 | 5 6 7 8 9 | 10 11 12 13 14 | 15 16 17 18 19  
 OP1 | OP2 | OP3 | OP4

Каждый из 64 символов задается кодом:

		Вторая цифра кода							
		0	1	2	3	4	5	6	7
Первая цифра кода	0	Пробел	0	1	2	3	4	5	6
	1	7	8	9	A	B	C	D	E
	2	—	F	G	H	I	J	K	L
	3	M	N	O	P	Q	R	S	T
	4	·	U	V	W	X	Y	Z	+
	5	×	*	†	π	e	(	)	,
	6	†	%	‡	/	=	„	х	¯
	7	²	¿	+	!	II	Δ	II	Σ
		Печатаемые символы							

Коды символов указываются перед вводом операторов OP1 ÷ OP4. Допустим, нужно напечатать фразу INPUT X, Y, Z.

Распределяем знакоместа строки печати:

Символ	I	N	P	U	T		X	,	Y	,		Z						
Код	24	31	33	41	37		00	44	57	45	57		46	00	00			
													00	00	00	00	00	00

Программа печати данной фразы имеет вид:

Оператор	Показания дисплея	Пояснения
CLR Op 00	0.	Сброс регистра принтера
2431334137 Op 01	2431334137	Печать слова INDUT
0044574557 Op 02	0044574557	Печать знаков X, Y.
4600000000 Op 03	4600000000	Печать знака Z
0000000000 Op 04	0000000000	Печать пробелов

Таким образом, при работе с принтером оператор имеет возможность вывода на печать не только цифр, но и специальных знаков и словесных комментариев, обеспечивающих развитой диалог с пользователем. С помощью оператора Op 07 можно печатать знаком \* простые графики. При этом результат вычислений надо нормировать так, чтобы содержимое регистра X не превышало 20 (зона печати разбивается на 20 знакомест). Так, печать синусоиды производится с помощью программы:

```

Lb1 A RCL 01 sin + 1 = × 9
. 9 = Op 07 1 8 SUM 1 A
    
```

Амплитуда синусоиды нормирована, так что печать в строке занимает 18 интервалов.

Оператор Op 08 обеспечивает вывод на печать текста (листинга программы), как и оператор List. Оператор NV INV List обеспечивает распечатку содержимого десяти регистров памяти, начиная с номера NV в виде (NV = 20).

Образец печати данных Содержимое регистра	Номер регистра	Образец печати данных Содержимое регистра	Номер регистра
12,73964896	20	0.	25
148,9657318	21	0.	26
0.	22	0.	27
8,1786109—15	23	0.	28
—1,2256434 08	24	0,000124564	29

## 2.8. Ввод, редактирование и перевод программ

Перед вводом новой программы иногда полезно стереть старую, нажав клавиши 2nd CP, и очистить все регистры памяти нажатием клавиш 2nd и CMS. Для ввода программы нажимается клавиша LRN (от слова learn — обучение). На дисплее высвечивается символ 00 00 (первое число — номер шага или адрес, второе — код). После этого вводится программа соответствующим на-

жатием клавиш. После ввода каждого оператора высвечивается только адрес последующего оператора.

**Пример.** Введем программу вычисления факториала  $E! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots E$  с учетом значения  $0! = 1$ :

```
Lbl E STO 0 CP x=t A Lbl B RCL
0 x Dsz 0 B Lbl A 1 = R/S
```

Более детально процесс ввода виден из подробного описания программы.

Показания дисплея		Оператор	Пояснения
Адрес	Код		
000	76	Lbl	Ввод
001	15	E	метки E
002	42	STO	Запись числа E
003	00	0	в регистр R00
004	29	CP	Сброс на 0 регистра <i>t</i>
005	67	$x = t$	Сравнение E с $0 = t$
006	11	A	Если E = 0, переход к метке 0,
007	76	Lbl	т. е. задание $0! = 1$
008	12	B	Ввод
009	43	RCL	метки B
010	00	0	Вызов содержимого регистра R00
011	65	x	Операция умножения
012	97	Dsz	Выполнение оператора органи-
013	00	0	зации цикла с возвратом по
014	12	B	метке B
015	76	Lbl	Ввод
016	11	A	метки A
017	01	1	Вывод числа 1
018	95	=	Фиксация конца вычислений
019	91	R/S	Остановка вычислений

Коды операций нанесены на прозрачной пластмассовой наклейке с прорезями для клавиш (см. рис. 2.2). Если при вводе программы или при ее редактировании допущена и обнаружена ошибочная операция, ее стирают нажатием клавиш *2nd Del* (от слова *delete* — стирать). Пропущенный оператор можно вставить, нажав клавиши *2nd Ins* (от слова *insert* — вставлять) и введя этот оператор. При этом автоматически меняются адреса всех последующих операторов (уменьшаются или увеличиваются).

Просмотр кодов операторов программы по шагам производится при нажатии клавиш SST (шаг вперед) и BST (шаг назад). В режим вычислений переходим, нажав клавишу LBN. Если пуск программы проводится с нулевого адреса, нажимаются клавиши RST (установка нулевого адреса) и R/S. Пуск с адреса  $n$  или  $nn$  обеспечивается вводом оператора GTO  $n$  или  $nn$ , пуск с метки  $N$  (кроме буквенных) производится вводом оператора GTO  $N$ . Пуск с буквенных меток A, B, C, D, E, A', B', C', D' и E' производится указанием пущной буквы путем нажатия соответствующей клавиши (для букв A' — E' перед этим нажимается клавиша 2nd).

Провести вычисления по шагам можно, нажимая в режиме счета клавишу SST. Результаты вычисления на каждом шаге выводятся на индикатор.

Важным источником программного обеспечения микрокалькуляторов является перевод программ. В справочной и периодической литературе описано множество программ для различных моделей микрокалькуляторов с разной логикой вычислений и символикой клавиатуры. Это затрудняет перевод программ и требует детального знакомства с языком программирования различных моделей калькуляторов. Тем не менее самостоятельное составление сложных программ более трудоемко, чем перевод готовой программы. Здесь та же ситуация, что и с написанием или переводом литературных произведений.

Обычно при переводе учитываются следующие обстоятельства.

1. Легким является перевод с простого языка программирования на более сложный. Обратный перевод значительно труднее.
2. Формальный перевод путем замены символов (ИП на RCL, П на STO, БП на GTO, ПП на SBR и т. д.) возможен, если модели калькуляторов имеют одинаковую логику вычислений и систему команд. Так, весьма простым является перевод программ с языка отечественных микрокалькуляторов серии «Электроника» (БЗ-34, МК-54, МК-56) на язык калькуляторов серии HP (HP-65, HP-67, HP-97 и др.) и наоборот.

3. Различия в логике вычислений должны быть внимательно изучены и учтены при переводе. Особых трудностей такой перевод не вызывает, но требует повышенного внимания.

4. Наиболее важной обычно является детальная и конкретная реализация алгоритма вычислений в пайдепной программе. Поэтому нередко проще разобраться в частях алгоритма, а затем воспроизвести их на языке используемого микрокалькулятора с учетом всех его функциональных возможностей.

Для читателей, желающих освоить технику перевода, полезно внимательно ознакомиться с реализацией важнейших численных методов на различных микрокалькуляторах. Основной материал данной книги посвящен программному обеспечению массовых оте-

чественных программируемых микрокалькуляторов. Однако в приложениях 1, 2 можно найти ряд примеров составления программ (от простейших до сложных) для микрокалькуляторов HP-11C, HP-15C, TI-58C и TI-59. Сопоставление их с программами для отечественных микрокалькуляторов явится хорошей школой для освоения техники перевода программ и использования программ, описанных в зарубежной литературе. Кроме того, язык калькуляторов HP-11C, HP-15C и TI-58C/59 типичен для большинства других зарубежных моделей, так что этими программами можно воспользоваться и владельцам зарубежных микрокалькуляторов разных типов.

### 3.1. Операции с действительными числами

**Программа 3.1.** Выделение целой части числа  $x$  ( $0 < x < 10^8$ ).

Ввод:  $x = PX$  ( $M = 0, 1, 2$  или  $3$ ).

↑ 1 + ПМ КИПМ ИПМ С/П

Для  $x = 0,123$  получим результат 0, для  $x = 123,456$  получим результат 123.

**Программа 3.2.** Выделение дробной части числа  $x$  ( $0 < x < 10^8$ ). Ввод:  $x = PX$  ( $M = 7, 8, 9, A, B, C$  или  $D$ ).

↑ 1 + ПМ КИПМ ХУ ИПМ — С/П

Для  $x = 123,456$  получим результат 0,456.

У микрокалькуляторов «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52» эти операции выполняются микропрограммно.

**Программа 3.3.** Округление числа  $x$  любого знака с коррекцией последней цифры результата (она сохраняется, если последующий знак  $x$  меньше 5 и увеличивается на 1, если он больше 5). Ввод:  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-n} = PД$ ,  $x = PX$ .

↑	$Fx < 0$	04	/—/	÷	П9	$FVx$	ИПД	÷	ПС
КИПС	ХУ	ИПС	—	$F1/x$	2	—	$Fx < 0$	23	ИПС
1	+	ПС	ИПС	ИПД	×	ИП9	×	С/П	

Для  $x = \pm 12,345678$  и  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-2}$  получаем округленное значение  $x = \pm 12,35$ , а для  $x = \pm 12,344999$  — округленное значение  $x = \pm 12,34$ .

**Программа 3.4.** Выделение модуля  $|x|$  числа  $x$ . Ввод:  $x = PX$ .

... ..  $Fx < 0$  N /—/ ... ..

Здесь  $N$  — адрес шага после оператора /—/. Выделение модуля возможно и с помощью операторов  $Fx^2$   $F\sqrt{\quad}$ , но с большей погрешностью.

**Программа 3.5.** Преобразование угла, выраженного в градусах  $\varphi$ , в угол, выраженный в градусах  $\varphi^\circ$ , минутах  $\varphi'$  и секундах  $\varphi''$ . Ввод:  $\varphi = PX$ . Вывод в виде числа 1ГГГ, ММСС (ГГГ — градусы,

ММ — минуты, СС — секунды; единица в начале результата игнорируется и служит для задания указанного формата, если  $\varphi < 1^\circ$ . Алгоритм преобразования следующий: ГГГ получаем, выделяя целую часть  $\varphi$ ; ММ получаем, выделяя целую часть остатка, умноженную на 60; СС получаем, выделяя целую часть  $60(\varphi_{\text{мин}} - \varphi')$ , где  $\varphi_{\text{мин}}$  — минуты в десятичном представлении.

↑	3	F10 <sup>x</sup>	+	ПП	13	×	ПП	13	÷
С/П	БП	00	ПД	КИПД	ХУ	ИПД	—	0	,
6	×	ИПД	+	1	0	0	В/0		

Для  $\varphi = 90,505^\circ$  получаем результат 1090,3019 (т. е.  $\varphi = 90^\circ 30' 19''$ ).

**Программа 3.6.** Преобразование угла, выраженного в градусах, минутах и секундах с десятичными долями, в угол

$$\varphi = (\varphi''/60 + \varphi')/60 + \varphi^\circ,$$

выраженный в градусах с десятичными долями. и в угол  $\varphi_{\text{рад}} = \varphi \pi / 180$ , выраженный в радианах. Ввод:  $\varphi^\circ \uparrow \varphi' \uparrow \varphi''$  С/П (при первом пуске В/0 и С/П). Результат:  $\varphi_{\text{рад}} \rightarrow \text{РХ}$ ,  $\varphi \rightarrow \text{РУ}$ .

↑	6	0	÷	+	6	0	÷	+	↑
Fl	×	1	8	0	÷	С/П	БП	00	

Для  $\varphi = 114^\circ 35' 29,62''$  получим  $\varphi_{\text{рад}} = 1,999999$  и  $\varphi = 114,59156^\circ$ .

Перевод чисел с основанием  $m$  в числа с основанием  $n$  выполняется по программам 3.7—3.10 [21]. Максимальное число знаков вводимого числа и результата ограничено 8.

**Программа 3.7°.** Перевод целых чисел  $N_m$  с основанием  $m = 10$  в числа  $N_n$  с другим основанием  $n$  и наоборот. Ввод:  $m = \text{P0}$ ,  $n = \text{P1}$  и  $N_m = \text{РХ}$ .

КНОП	1	П2	Сx	ХУ	↑	ИП1	÷	1	+
П3	КИП3	F,	F,	ИП3	ИП1	×	—	ИП2	×
+	ИП2	ИП0	×	П2	F,	ИП3	F <sub>x</sub> =0	05	F,
С/П									

Перевод основан на последовательном делении  $N_m$  на  $n^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Последовательность остатков от деления умножается на  $m^j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) и складывается.

**Примеры.**

1.  $m=10$   $n=5$   $N_{10}=113$

$$113 \div 5 = 22 + 3 \div 5$$

$$22 \div 5 = 4 + 2 \div 5$$

$$4 \div 5 = 0 + 4 \div 5$$

---


$$N_5 = 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 = 423$$

2.  $m=5$   $n=10$   $N_5=423$

$$423 \div 10 = 42 + 3 \div 10$$

$$42 \div 10 = 4 + 2 \div 10$$

$$4 \div 10 = 0 + 4 \div 10$$

---


$$N_{10} = 3 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 = 113$$

**Программа 3.8.** Перевод дробных чисел  $N_m$  из системы с основанием  $m = 10$  в систему с основанием  $n$  и наоборот. Ввод:  $m = P0, n = P1, N_m = PX$ .

КНОП 1	П5	F10 <sup>x</sup>	ПЗ	Cx	XY	ИП1	×	П4	
1	+	П2	КИП2	F,	F,	ИП2	ИП5	ИП0	×
П5	÷	+	ИП4	ИП2	—	Fx≠0	30	FL3	07
F,	C/П								

Перевод основан на умножении  $N_m$  на  $n^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Последовательность целых чисел после умножения делится на  $m^j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Для  $m = 10, n = 2$  и  $N_{10} = 0,8125$  получим  $N_2 = 0,1101$ .

**Программа 3.9.** Перевод действительных чисел (целых и дробных)  $N_m$  из системы с основанием  $m = 10$  в систему с основанием  $n$  и наоборот. Ввод:  $m = PA, n = PB$  и  $N_m = PX$ .

П2	1	П4	П5	+	ПЗ	КИПЗ	9	П0	Cx
ИП2	ИПЗ	—	ИПВ	×	П2	1	+	П1	КИП1
F,	F,	ИП1	ИП4	ИПА	×	П4	÷	+	ИП2
ИП1	—	Fx≠0	36	FL0	13	F,	ИП3	ИПВ	÷
1	+	П2	КИП2	F,	F,	ИП3	ИП2	ПЗ	ИПВ
×	—	ИП5	×	+	ИП5	ИПА	×	П5	F,
ИПЗ	Fx=0	38	F,	C/П					

Перевод осуществляется отдельно для целой и дробной частей. Для  $m = 10, n = 2$  и  $N_{10} = 11,375$  получим  $N_2 = 1011,011$  (в зависимости от  $N_m$  время счета  $t_0 \approx 0,5-2,5$  мин).

**Программа 3.10.** Перевод чисел  $N_m$  из системы с любым основанием  $m$  в систему с основанием  $n$ . Ввод:  $N_m \uparrow m \uparrow n$  В/0 С/П. Получаем  $N_n \rightarrow PX$ .

П8	F,	1	0	П0	ПП	13	ИП7	П0	ИП8
ПП	13	C/П	П7	F,	П6	F,	1	П4	П5
Cx	XY	↑	ПП	68	ПЗ	—	ИП7	×	П2
ПП	68	ИП4	ИП6	×	П4	÷	+	ИП2	ИП1
—	Fx≠0	45	FL0	27	F,	ИП3	↑	ИП7	÷
ПП	68	ИП7	×	—	ИП5	×	+	ИП5	ИП6
×	П5	F,	ИП1	Fx=0	47	F,	В/0	1	+
П1	КИП1	F,	F,	ИП1	В/0				

Для  $N_2 = 1011,011, m = 2, n = 8$  получим  $N_8 = 13,5$ . Время счета 1—4 мин в зависимости от  $N_m$ .

**Программа 3.11.** Деление числа А на число В с остатком г. Ввод: А = PA, В = PB. Результат: остаток  $g \rightarrow PX$ , целая часть  $K \rightarrow P9$ .

ИПА	ИПВ	÷	П9	КИП9	ИПА	ИПВ	ПА	ИП9	×
—	C/П								

Для  $A = 101$  и  $B = 50$  получим  $r = 1$  и  $K = 2$ .

**Программа 3.12<sup>о</sup>.** Нахождение наибольшего общего делителя  $(n, m)$  двух чисел  $n$  и  $m$  ( $n > m$ ) по алгоритму Евклида. Ввод:  $n = PA, m = PB$ .

ИПА ИПВ ÷ П9 КИП9 ИПА ИПВ ПА ИП9 ×  
— ПВ  $Fx=0$  00 ИПА С/П

Для  $n = 1532$  и  $m = 24$  получим  $(n, m) = 4$  при  $t_c \approx 12$  с.

**Программа 3.13.** Разложение числа  $n = PX$  на простые множители [22]:

$$n = \prod_i P_i^{\alpha_i}$$

Ввод:  $n = PX$ . Результат (после каждого нажатия клавиши С/П до индикации 0):  $\alpha_i \rightarrow PY, P_i \rightarrow PX$ .

ПА	2	П4	ПП	24	3	П4	ПП	24	5
П4	ПП	24	ИП4	2	+	П4	ПП	24	ИП4
4	+	БП	10	0	П5	ИПА	$F\sqrt{\quad}$	ИП4	—
$Fx \neq 0$	65	$Fx \geq 0$	49	ИПА	ИП4	÷	П9	КИП9	ХУ
ИП9	—	$Fx=0$	59	ИП9	ПА	КИП5	БП	26	ИП5
$Fx \neq 0$	54	ИП4	С/П	1	ИПА	С/П	0	С/П	ИП5
$Fx \neq 0$	64	ИП4	С/П	В/0	ИП5	2	+	ИП4	БП
56									

Для  $n = 129852$  получим  $P_1^{\alpha_1} = 2^2$ ;  $P_2^{\alpha_2} = 3^2$  и  $P_3^{\alpha_3} = 3607^1$   
т. е.  $129852 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3607$  ( $t_c \approx 5$  мин).

**Программа 3.14.** Разложение числа  $n$  на простые множители и вычисление числовых функций Эйлера:  $\varphi(n)$  — количество чисел, меньших и взаимно простых с  $n$ , и  $d(n)$  — количество всех делителей  $n$ . Ввод  $25 = P7, 83 = P8, n = PX$ . Результат (после каждого нажатия клавиши С/П до индикации 0):  $\alpha_i \rightarrow PY, P_i \rightarrow PX$ . После индикации 0, нажав клавишу С/П, получаем  $\varphi(n) \rightarrow PX$ , еще раз нажав клавишу С/П, находим  $d(n) \rightarrow PX$ .

ПА	ПВ	$F\sqrt{\quad}$	П1	1	ПС	2	П4	КПП7	3
П4	КПП7	5	П4	КПП7	ИП4	2	—	П4	КПП7
ИП4	4	+	БП	13	0	П5	ИП1	ИП4	—
$Fx \neq 0$	76	$Fx \geq 0$	51	ИПА	ИП4	÷	П9	КИП9	ХУ
ИП9	—	$Fx=0$	69	ИП9	ПА	$F\sqrt{\quad}$	П1	КИП5	БП
27	ИП5	$Fx \neq 0$	57	ИП4	С/П	КПП8	1	П5	ИПА
П4	С/П	КПП8	0	С/П	ИПВ	С/П	ИПС	С/П	ИП5
$Fx \neq 0$	75	ИП4	С/П	КПП8	В/0	ИП5	2	+	П5
ИП4	БП	62	ИПВ	ИП4	÷	ИП4	1	—	×
ПВ	КИП5	ИПС	ИП5	×	ПС	В/0			

Для  $n = 999$  получим разложение  $999 = 3^3 \cdot 37$ ,  $\varphi(999) = 648$  и  $d(999) = 8$  при  $t_c \approx 2$  мин. Если нужно вычислить только  $\varphi(n)$  и  $d(u)$ , на место вычисленных жирным шрифтом операторов следует вставить оператор КНОП.

Иногда возникает необходимость в выполнении арифметических операций с повышенной точностью. Для этого могут использоваться приведенные ниже программы [20, 21].

**Программа 3.15.** Сложение чисел с числом знаков до 15 включительно. Ввод поясняется контрольными примерами.

ПВ	ХУ	ПС	1	ВП	7	ПА	0	С/П	ХУ
ПД	ХУ	ИПВ	+	ПВ	ИПА	—	<b><math>Fx &lt; 0</math></b>	27	ИПВ
ИПС	ИПД	+	ПС	С/П	БП	00	ПВ	1	ИПС
+	ПС	БП	21						

**Пример.** Сложение целых чисел:

	Блок 1	Блок 2
Число 1	123	4567891
Число 2	98765	4621023
Результат	<u>98888</u>	<u>9188914</u>

Из примера видно, что целые числа разбиваются на блоки, причем в блоке 2 должно быть 7 цифр. Аналогичным образом получается результат (если в блоке 2 меньше 7 цифр, они слева заменяются нулями). Порядок операций при сложении следующий: ввод блока 1 числа 1  $\uparrow$ , ввод блока 2 числа 1 С/П (индицируется 0), ввод блока 1 числа 2  $\uparrow$ , ввод блока 2 числа 2 С/П (получаем блок 1 результата), ХУ (получаем блок 2 результата).

При сложении дробных чисел они уравниваются по числу знаков после запятой.

**Пример.** Сложение дробных чисел.

	Блок 1	Блок 2
Число 1	98	765, 4321
Число 2	1234	587, 8900
Результат	<u>1333</u>	<u>333, 3221</u>

Вычисления для этого примера проводятся по схеме: вводим число 7654321 (без запятой), нажимаем клавишу С/П (индицируется 0), вводим число 1234, нажимаем клавишу  $\uparrow$ , вводим число 5878900 (без запятой), нажимаем клавишу С/П (получаем число 1333) и клавишу ХУ (получаем 3333221). С учетом числа знаков после запятой (четыре) результат равен 1333333,3221.

**Программа 3.16.** Точное умножение чисел с  $n \leq 8$  значащими цифрами мантииссы. Ввод:  $1 \cdot 10^4 = P9$  и далее по примеру.

ПА	ХУ	ПП	41	П7	ХУ	П8	ИПА	ПП	41
П4	ХУ	П5	ИП8	×	ПО	ИП7	ИП4	×	П1

ИП7	ИП5	×	ИП8	ИП4	×	+	ПП	41	П2
ХУ	ИП9	×	ИП0	+	ИП2	ИП1	+	С/П	БП
00	ПС	ИП9	—	$F_x \geq 0$	60	ИПС	ИП9	÷	ПД
КИПД	ИПД	ИП9	×	ИПС	ХУ	—	ИПД	БП	62
Сx	ИПС	В/0							

**Пример.** Умножить число  $A = 1234,5678$  на число  $B = 0,654321$ . Числа нужно представить в показательной форме:  $A = 12345678 \cdot 10^{-4}$  и  $B = 654321 \cdot 10^{-6}$ . Вводим мантиссу А, нажимаем клавишу ↑, вводим мантиссу В, нажимаем клавиши В/0 и С/П; получим  $(ab)_1 = 80780$ . Нажав клавишу ХУ, получим  $(ab)_0 = 36374638$ . С учетом суммы порядков результат  $AB = 807,8036374638$ .

**Программа 3.17°.** Деление числа  $a$  на число  $b$  с произвольной точностью. Ввод  $a \uparrow b$  В/0 С/П ... (каждый очередной знак результата получается после нажатия клавиши С/П).

ПО	ХУ	П2	ИП0	÷	1	+	П1	КИП1	ИП2
ИП1	С/П	ИП0	×	—	1	0	×	БП	02

**Пример.**  $800/2,3 = 347; 8; 2; 6; 0; 8; 6; 9$  и т. д., т. е.  $a/b = 347,8260869 \dots$

## 3.2. Цепные и непрерывные дроби

**Программа 3.18.** Преобразование десятичного числа  $b = PX$  в цепную дробь  $\left[ a_0; \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots \right]$ :

$$a_0 = E[b]; \quad a_1 = E\left[\frac{1}{b - a_0}\right]; \quad a_2 = E\left[\frac{1}{\frac{1}{b - a_0} - a_1}\right]; \quad \dots,$$

где  $E$  — операция выделения целой части чисел. Ввод  $b = PX$ . Вывод результатов  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , в регистр X (по мере нажатия клавиши С/П).

П1	1	+	ПО	КИПО	ИП1	ИПО	С/П	—	F1/x
БП	00								

**Пример.** Для  $b = \pi = 3,141592$  получим  $a_0 = 3; a_1 = 7; a_2 = 15; a_3 = 1; a_4 = 244; a_5 = 1; a_6 = 2$  и т. д.

**Программа 3.19.** Преобразование цепной дроби в десятичное число  $b = b_n = c_n/d_n$ , где  $c_i = c_{i-1}a_i + c_{i-2}$ , причем  $c_0 = 1$  и  $c_1 = a_0$ ,  $d_i = d_{i-1}a_i - d_{i-2}$  и  $d_0 = 0, d_1 = 1$ . Ввод:  $a_0, a_1, a_2$  и т. д. в регистр X.

П2	0	ПО	ВП	П3	П1	÷	С/П	П4	ИП3
ИП4	ИП2	П3	×	+	П2	ИПО	ИП4	ИП1	ПО
×	+	БП	05						

Введя  $a_i$  для примера к программе 3.18, получим:  $b = 3,141592$ .

Программа 3.20. Вычисление непрерывных дробей вида

$$f = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}} = \left[ a_0; \frac{b_1}{a_1}; \frac{b_2}{a_2}; \frac{b_3}{a_3}; \dots \right].$$

Ввод  $a_m, b_m, a_{m-1}, b_{m-1}, \dots, a_1, b_1, a_0$  в регистр X.

↑ С/П XY ÷ ↑ С/П + БП 00

Пример.

$$f = \left[ 5; \frac{8}{4}; \frac{2}{7}; \frac{3}{5} \right] = 6,8765432.$$

### 3.3 Вычисление определителей и операции с действительными матрицами

Программа 3.21. Вычисление определителя 2-го порядка с записью его членов в регистры памяти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1=P8 & b_1=P9 \\ a_2=P5 & b_2=P6 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

ИП8 ИП6 × ИП5 ИП9 × — С/П

Пример.  $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1,5 & 3 \end{vmatrix} = 9.$

Программа 3.22. Вычисление определителя 2-го порядка без использования регистров памяти. Ввод построчно  $a_1, b_1, a_2, b_2$  в регистр X.

С/П С/П × XY С/П × XY — С/П

Программа 3.23. Вычисление определителя 3-го порядка с записью его членов в регистры памяти:

$$\begin{vmatrix} a_1=P7 & b_1=P8 & c_1=P9 \\ a_2=P4 & b_2=P5 & c_2=P6 \\ a_3=P1 & b_3=P2 & c_3=P3 \end{vmatrix} = c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

ИП4 ИП2 × ИП1 ИП5 × — ИП9 × ИП1  
ИП8 × ИП7 ИП2 × — ИП6 × + ИП7  
ИП5 × ИП4 ИП8 × — ИП3 × + С/П

Пример.  $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10.$

Время счета около 10 с.

Программа 3.24°. Вычисление определителя 3-го порядка с малой загрузкой регистров памяти (заняты регистры P0 + P4) [21].

Ввод членов определителя построчно в регистр X.

П4	2	П0	П3	С/П	ИП4	÷	КП ↑	FL0	04
ИП0	С/П	П0	ИП2	×	С/П	—	×	ИП0	ИП1
×	С/П	—	FL3	11	XY	П0	F,	×	ИП0
—	ИП4	×	С/П						

**Программа 3.25.** Вычисление определителя 4-го порядка [21].

Ввод членов определителя построчно в регистр X.

ПА	С/П	ПВ	С/П	ПС	С/П	ПД	ПП	72	П1
ИПС	ПП	77	П2	ИПД	ПП	77	П3	ПП	72
П4	ИПС	ПП	77	П5	ИПД	ПП	77	П6	ПП
72	П7	ИПС	ПП	77	П8	ИПД	ПП	77	П9
ИП5	×	ИП6	ИП8	×	—	ИП1	×	ИП9	ИП4
×	ИП6	ИП7	×	—	ИП2	×	—	ИП4	ИП8
×	ИП5	ИП7	×	—	ИП3	×	+	ИПА	/—/
×	ПД	С/П	ИПА	÷	П0	ИПВ	ИПО	×	С/П
—	В/0								

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -20.$$

**Программа 3.26.** Вычисление определителей порядка  $n \leq 5$  [20]. Ввод:  $n = P0$  В/0  $a_1$  С/П  $b_1$  С/П и т. д. построчно.

П4	1	4	П2	КИПО	ИПО	П1	С/П	ИП4	÷
КП2	FL1	07	1	4	П3	ИПО	П1	Сx	КП2
FL1	19	ИПО	ИП2	+	П1	П2	ИП3	—	Fx ≠ 0
36	С/П	ПП	83	БП	23	КИПО	ИП4	С/П	КИП2
—	×	П4	ИПО	П3	Fx ≠ 0	37	FBx	С/П	КИП2
—	XY	÷	КП1	FL3	47	ИП1	ИПО	+	П3
1	4	П1	П2	КИП1	/—/	ПП	83	ИП3	+
П3	ИП1	—	Fx=0	64	ИПО <sub>j</sub>	П1	КИП3	КП2	FL1
77	БП	13	ИПО	XY	↑	КИП3	×	КИП1	+
КП2	F,	FL0	85	F,	П0	В/0			

При вводе нельзя изменять содержимое регистров Y, Z и T стека. Поэтому для нулевых элементов определителей надо вводить 0, а очистку регистра X при ошибочном вводе выполнять вводом оператора Сx. Программу можно проверить по примерам для предыдущих программ, а также вычислив определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 360,00001.$$

Время счета в последнем примере около 260 с.

Определители более высокого порядка могут вычисляться путем их разложения на определители 2, 3, 4 и 5-го порядков. Однако более рационально проводить такие вычисления на настольных или универсальных ЭВМ по стандартным программам.

С помощью микрокалькуляторов легко проводить операции над матрицами с числом элементов, не превышающим числа регистров памяти (16 у микрокалькулятора «Электроника БЗ-34», включая регистры Z и T стека). Поясним это примерами.

Пусть надо сложить неограниченное количество матриц с числом строк 4 и столбцов 3. Эту программу удобно представить в виде

$$\begin{bmatrix} a_7 & a_8 & a_9 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_7 & b_8 & b_9 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & m_9 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_0 & m_{10} & m_{11} \end{bmatrix},$$

где индексы у элементов матриц заменены номерами регистров, в которые эти элементы вносятся (P10 = PA, P11 = PB).

**Программа 3.27.** Сложение матриц размера  $4 \times 3$ . Ввод:  $a_0 \div a_{11} = P0 \div P11$ ,  $b_0 \div b_{11} = PX \dots$ . Результат  $m_0 \div m_{11}$  заносится в регистры P0  $\div$  P11.

7	С/П	ИП7	+	П7	8	С/П	ИП8	+	П8
9	С/П	ИП9	+	П9	4	С/П	ИП4	+	П4
5	С/П	ИП5	+	П5	6	С/П	ИП6	+	П6
1	С/П	ИП1	+	П1	2	С/П	ИП2	+	П2
3	С/П	ИП3	+	П3	0	С/П	ИП0	+	П0
1	0	С/П	ИПА	+	ПА	1	1	С/П	ИПВ
+	ПВ	БП	00						

При использовании этой программы вначале в регистры P0  $\div$  P11 вводятся числа первой матрицы. Затем, после нажатия клавиши С/П построчно вводятся значения элементов второй матрицы. При этом программа всякий раз подсказывает номер числа матрицы: например, 7, 8 и 9 при вводе первой строки. Если матриц несколько, то в той же последовательности вводятся значения элементов последующих матриц. Проверить программу можно, присвоив значениям элементов складываемых двух матриц номера регистров (получим удвоение значений элементов).

Часто возникает необходимость в умножении матриц. Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  на матрицу  $B$  размера  $n \times p$  является матрица  $C = AB$  размера  $m \times p$ , элемент  $c_{ij}$  которой, расположенный в  $ij$  клетке, равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Таким образом, число столбцов матрицы  $A$  должно быть равно числу строк матрицы  $B$ .

**Программа 3.28.** Умножение матрицы  $A$  размера  $3 \times 4$  на матрицу  $B$  размера  $4 \times 2$ . Ввод элементов матрицы  $B$  и вывод значений элементов матрицы  $C$  соответствует указанным в формуле:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11}=P7 & b_{12}=P8 \\ b_{21}=P4 & b_{22}=P5 \\ b_{31}=P1 & b_{32}=P2 \\ b_{41}=P0 & b_{42}=PA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}=P9 & c_{21}=PB \\ c_{31}=P6 & c_{22}=PC \\ c_{31}=P3 & c_{32}=PD \end{bmatrix}$$

ПП	16	ИПЗ	П9	ИПД	ПВ	ПП	16	ИПЗ	П6
ИПД	ПС	ПП	16	0	С/П	1	С/П	↑	ИП7
×	ПЗ	Ф,	ИП8	×	ПД	2	С/П	↑	ИП4
×	ИПЗ	+	ПЗ	Ф,	ИП5	×	ИПД	+	ПД
3	С/П	↑	ИП1	×	ИПЗ	+	ПЗ	Ф,	ИП2
×	ИПД	+	ПД	4	С/П	↑	ИПО	×	ИПЗ
+	ПЗ	Ф,	ИПА	×	ИПД	+	ПД	В/0	

**Пример.**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 17 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 11 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 15 & 5 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = 16 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 19 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5 \end{bmatrix}$$

Вводя элементы матрицы  $B$ , нажав клавишу С/П, получим на индикаторе цифру 1, указывающую на ввод первого элемента  $a_{11}$  первой строки матрицы  $A$ . Вводим его, нажав клавишу С/П, получим цифру 2 — надо вводить  $a_{12}$ . Вводя таким образом построчно все элементы матрицы  $A$ , получим в конце на индикаторе цифру 0, указывающую на конец вычислений. Из регистров 9, 6, 3, В, С и Д вызываем результат вычислений — числа 17, 15, 19, 11, 16 и 5.

**Программа 3.29.** Умножение матриц размера  $2 \times 2$  [21]. Ввод построчно в регистр X коэффициентов матрицы  $A$ , а затем построчно коэффициентов матрицы  $B$ . Результат:  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{21}$  и  $c_{22} \rightarrow PX$ .

П8	7	ПО	С/П	КП ↑	FL0	03	1	0	ПО
ИП8	ИП4	×	ИП7	ИП2	ПП	35	ИП8	ИП3	×
ИП7	ПП	34	ИП6	ИП4	×	ИП5	ИП2	ПП	35
ИП6	ИП3	×	ИП5	ИП1	×	+	КПО	С/П	В/0

Пример. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

**Программа 3.30.** Умножение матриц размера  $3 \times 3$  [21]. Ввод построчно в регистры P1 — P9 коэффициентов матрицы B, а затем построчно в регистр X коэффициентов матрицы A. Результат: построчно в регистры A, B и C.

КНОП	1	0	ПО	Cx	ПА	ПВ	ПС	F,	ПП
13	ПП	13	↑	КИПО ×	ИПС	+	ПС	F,	
↑	КИПО ×	ИПВ	+	ПВ	F,	КИПО ×	ИПА		
+	ПА	C/П	B/0						

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 30 & 36 \\ 51 & 66 & 81 \\ 78 & 102 & 136 \end{bmatrix}.$$

Иногда нужны обратные матрицы  $A^{-1}$ , удовлетворяющие условию  $A \cdot A^{-1} = 1$ . Правила обращения матрицы A в обратную матрицу  $A^{-1}$  описаны в [1, 3, 13, 7]. На микрокалькуляторе легко провести обращение квадратных матриц размера  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ . Обращение матриц большего размера можно проводить, разбивая их на блоки меньшего размера.

**Программа 3.31.** Обращение матрицы  $2 \times 2$ . Ввод:

$$\begin{bmatrix} a_{11}=P7 & a_{12}=P8 \\ a_{21}=P4 & a_{22}=P5 \end{bmatrix}.$$

Обращенная матрица заносится на место исходной.

ИП4	ИП8	×	П2	ИП7	П9	ИП5	×	ИП2	—
П2	ИП5	XУ	÷	П7	ИП9	ИП2	÷	П5	ИП4
ИП2	/—/	÷	П4	ИП8	ИП2	/—/	÷	П8	C/П
БП	00								

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,6666666 & -2,6666666 \\ -1,3333333 & 2,3333333 \end{bmatrix}.$$

**Программа 3.32.** Обращение матрицы размера  $3 \times 3$ . Ввод:

$$\begin{bmatrix} a_{11}=P7 & a_{12}=P8 & a_{13}=P9 \\ a_{21}=P4 & a_{22}=P5 & a_{23}=P6 \\ a_{31}=P1 & a_{32}=P2 & a_{33}=P3 \end{bmatrix}$$

3	ПО	ИП4	ИП7	÷	ПД	ИПД	/—/	ПС	ИП5
ИПД	ИП8	×	—	ПА	ИП6	ИПД	ИП9	×	—
ПВ	ИП1	ИП7	÷	ПД	ИПД	/—/	П8	ИП2	ИПД
ИП8	×	—	П4	ИП3	ИПД	ИП9	×	—	П5
ИП8	ИП7	÷	П1	ИП9	ИП7	÷	П2	ИП7	F1/x
ПЗ	ИПА	П7	ИПВ	П8	ИНС	П9	FLO	02	C/П

**Пример.**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,08333333 & -0,08333333 & 0,66666666 \\ 0,08333333 & 0,04166667 & -0,33333333 \\ 0,16666666 & 0,16666666 & -0,33333333 \end{bmatrix}.$$

Повторное обращение матрицы  $A^{-1}$  даст матрицу  $A$  с небольшими операционными погрешностями.

У некоторых микрокалькуляторов операции с матрицами выполняются микропрограммно (HP-15C) или с помощью модуля программ пользователя (TI-58C, TI-59C).

### 3.4. Вычисление факториалов и комбинаторика

**Программа 3.33.** Вычисление факториала  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , включая заведомо известное значение  $0! = 1$ . Ввод:  $x = PX$

ВП ПО 1 ИПО  $\times$  FLO 03 C/П

**Пример.**  $10! = 36\,288\,00$  вычисляется за 10 с. Факториал вычисляется с помощью цикла с регистром-счетчиком P0.

**Программа 3.34.** Вычисление факториала  $n!$  больших чисел (при  $n > 10$  верны пять первых знаков результата) по уточненной формуле Стирлинга

$$n! = \left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \exp \left[ -n + \frac{1}{12n} \left( 1 - \frac{1}{30n} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Ввод:  $n = PX$  при максимальном  $n = 56$ .

П9	↑	$Fx^y$	1	ИП9	3	0	$\times$	$F1/x$	—
1	2	÷	ИП9	÷	ИП9	—	$Fe^x$	$\times$	2
Fl	$\times$	ИП9	$\times$	$F\sqrt{\quad}$	$\times$	C/П	БП	00	

**Примеры.**  $10! = 3628711,6$  (точно 3628800);  $20! = 2,4328826 \cdot 10^{18}$  ( $t_0 = 12$  с);  $56! = 7,1100172 \cdot 10^{74}$ .

**Программа 3.35.** Вычисление факториала  $n!$  при  $n \leq 12$  по точной формуле, а при  $n > 12$  — по формуле (3.1).

ПО	1	2	—	$Fx < 0$	20	ИПО	$Fx \neq 0$	17	1
ИПО	$\times$	FLO	10	C/П	БП	00	1	БП	14
ИПО	↑	$Fx^y$	1	ИПО	3	0	$\times$	$F1/x$	—
1	2	÷	ИПО	÷	ИПО	—	$Fe^x$	$\times$	2
Fl	$\times$	ИПО	$\times$	$F\sqrt{\quad}$	$\times$	БП	14		

**Примеры.**  $3! = 6$ ;  $10! = 3628800$ ;  $15! = 1,3076567 \cdot 10^{12}$ .

**Программа 3.36.** Вычисление факториала  $n!$  по формуле

$$n! = 10^{\sum_{k=1}^n \lg k}.$$

Ввод:  $n = PX$ . Вывод: мантисса  $n! \rightarrow PX$ , порядок  $\rightarrow PY$  (для вывода порядка нажимаем клавишу  $XY$ ).

П1 Сх ИП1 Flg + FL1 02 П9 КИП9 ХУ  
ИП9 -  $10^x$  ИП9 ХУ С/П БП 00

Пример Для  $n = 100$  получим  $n! = 9,3318985 \cdot 10^{157}$  при точном значении  $9,33262 \cdot 10^{157}$  ( $t_c \approx 5$  мин).

Программа 3.37. Вычисление функции [21]

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 1 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ n \cdot (n-2) \dots 4 \cdot 2 & \text{при } n \text{ четном} \end{cases}$$

Ввод:  $n = PX$  ( $n \leq 119$ ).

П0 1 ИП0  $\times$  FL0 06 FL0 02 С/П

Пример. Для  $n = 7$  получим  $n!! = 105$  при  $t_c \approx 9$  с.

Программа 3.38. Расчет числа перестановок  $P_n = n!$ , числа размещений из  $n$  элементов по  $m$

$$A_n^m = n!/(n-m)!$$

$n$  числа сочетаний из  $n$  элементов по  $m$

$$C_n^m = n!/m!(n-m)!$$

Ввод:  $n = PX$ ,  $m = PX$ . Вывод:  $m! \rightarrow P4$ ,  $P_n = n! \rightarrow P5$ ,  $(n-m)! \rightarrow P6$ ,  $A_n^m \rightarrow PA$ ,  $C_n^m \rightarrow PC = PX$ .

П9 С/П П8 ПП 26 П4 ИП9 ПП 26 П5  
ИП9 ИП8 - ПП 26 П6 ИП5 ХУ  $\div$  ПА  
ИП4  $\div$  ПС С/П БП 00 П0 1 ИП0  $\times$   
FL0 28 В/0

Пример. Для  $n = 10$ ,  $m = 5$  получаем (спустя 30 с счета)  $C_{10}^5 = 252$ ,  $A_{10}^5 = 30240$  и  $P_{10} = 3628800$ .

### 3.5. Операции с комплексными числами

Программа 3.39. Преобразования комплексного числа из алгебраической формы  $z = a + ib$  в показательную  $z = Me^{i\varphi}$ , где  $M = \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $\varphi = \arccos(a/|M|)$  при  $b \geq 0$  и  $\varphi = -\arccos(a/|M|)$  при  $b < 0$  ( $-180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ). Ввод:  $a = PX$ ,  $b = PX$ . Вывод результата  $M \rightarrow PX = P8$ ,  $\varphi$  (в градусах)  $\rightarrow PY = P9$ . Переключатель  $P - \Gamma$  в положении  $\Gamma$ .

ПА С/П ПВ ИПА  $\uparrow$  Fx<sup>2</sup> ИПВ Fx<sup>2</sup> + F $\sqrt{\quad}$   
П8  $\div$  F $\arccos$  П9 ИПВ Fx<0 20 ИП9 /-/- П9  
ИП9 ИП8 С/П БП 00

Примеры для  $z = -1 + i \cdot 1$  получим  $M = 1,4142135$  и  $\varphi = 135^\circ$ , для  $z = -1 - i \cdot 1$  получим  $M = 1,4142135$  и  $\varphi = -135^\circ$ , для  $z = -1 + i \cdot 0$  получим  $M = 1$  и  $\varphi = 180^\circ$ .

Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме выполняются по формулам

$$z_0 = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$z_0 = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2),$$

$$z_0 = z_1 / z_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2) / (a_2^2 + b_2^2) + i(b_1 a_2 - a_1 b_2) / (a_2^2 + b_2^2).$$

**Программа 3.40.** Арифметические операции (сложение — код 0, умножение — код 1 и деление — код 2) над комплексными числами  $z_1 = a_1 + ib_1$ ,  $z_2 = a_2 + ib_2$ ,  $z_3 = a_3 + ib_3$  и т. д. Ввод:  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  в регистр X; код операции в регистр X;  $a_3, b_3$ , код операции в регистр X и т. д. Результат  $z_0 = a_0 + ib_0$ :  $a_0 \rightarrow P4 = PX$ ,  $b_0 \rightarrow P5 = PY$ .

П4	С/П	П5	С/П	П2	С/П	П3	0	С/П	$Fx \neq 0$
52	1	—	$Fx \neq 0$	30	ИП2	$Fx^2$	ИП3	$Fx^2$	+
П8	ИП2	ИП8	÷	П2	ИП3	/—/	ИП8	÷	П3
ИП3	ИП5	×	П0	ИП4	ИП3	×	П1	ИП2	ИП5
×	ИП1	+	П5	ИП2	ИП4	×	ИП0	—	П4
БП	03	ИП5	ИП3	+	П5	ИП4	ИП2	+	П4
БП	03								

**Пример.** Вычислить

$$z_0 = \frac{(5 - i \cdot 3)(3 + i \cdot 2)}{(5 + i \cdot 3)(2 - i \cdot 4)} + (0,5 + i \cdot 1).$$

Вводим 5, -3, 3, 2, 1 (код умножения), 5, 3, 2 (код деления), 2, -4, 1 (код деления), 0,5, 1, 0 (код сложения). Получаем  $z_0 = -1,1588235 + i \cdot 1,4647059$ .

**Программа 3.41.** Последовательное умножение и деление комплексных чисел в показательной форме:

$$z_0 = z_1 z_2 = M_1 M_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad z_0 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{M_1}{M_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

**Ввод:**  $M_1, \varphi_1, M_2, \varphi_2$ , код операции (1 — для умножения и 2 — для деления). Результат  $z_0 = M_0 e^{i\varphi_0}$ :  $M_0 \rightarrow PX = P6$ ,  $\varphi_0 \rightarrow PY = P7$ .

П6	С/П	П7	С/П	П8	С/П	П9	0	С/П	†
1	—	$Fx \neq 0$	24	ИП7	ИП9	—	П7	ИП6	ИП8
÷	П6	БП	03	ИП7	ИП9	÷	П7	ИП6	ИП8
×	П6	БП	03						

**Пример.** Вычислить

$$z_0 = z_1 z_2 / z_3 = 2e^{i \cdot 306} e^{i \cdot 20} / 4e^{-i \cdot 40}.$$

Вводим 2, 30, 6, 20, 1 (код умножения), 4, -40, 2 (код деления). Получаем  $z_0 = 3e^{i \cdot 90}$  ( $M_0 = 3, \varphi_0 = 90^\circ$ ). Перед вводом кода в программах 3.40 и 3.41 индицируется цифра 0.

При частых и сложных операциях с комплексными числами целесообразно выполнять их по программе, обеспечивающей одновременно проведение всех перечисленных выше операций с вводом для этого наглядного идентификатора операций вида ИП \* С/П, где \* соответствует выбранной операции [20]. При этом используется то обстоятельство, что обращения вида ИП + (-, X, ÷ или XY) эквивалентны обращениям к регистрам памяти 0 (1, 2, 3 и 4). В эти регистры предварительно заносятся адреса безусловных переходов к нужным фрагментам программы (см. ниже).

**Программа 3.42.** Операции над комплексными числами  $z_1 = a_1 + ib_1$  и  $z_2 = a_2 + ib_2$ . Ввод: 39 = P0, 50 = P1, 61 = P2, 81 = P3, 16 = P4, 2 = PA,  $a_1 = P8, b_1 = P9, a_2 = P5$  и  $b_2 = P6$  и далее идентификатор ИП \* С/П. При арифметических операциях (\* — один из знаков: -, +, X или ÷) результат  $z_0 = a_0 + ib_0$  при  $a_0 \rightarrow PX = P8$  и  $b_0 \rightarrow PY = P9$ . При преобразовании  $z_1 = Me^{i\varphi}$  ( $M = P5, \varphi = P6$ ) в алгебраическую форму (\* имеет вид A) получаем  $z_0 = a_0 + ib_0$  при  $a_0 \rightarrow PX = P5$  и  $b_0 \rightarrow PY = P6$ , а при преобразовании  $z_1 = a_1 + ib_1$  ( $a_1 = P8, b_1 = P9$ ) в показательную форму (\* имеет вид XY) получаем  $z_0 = Me^{i\varphi}$  при  $M \rightarrow PX = P7$  и  $\varphi \rightarrow PY = P8$  ( $\varphi$  — находится в интервале  $\pm\pi$  или  $\pm 180^\circ$ ).

ПД	КБПД	ИП5	ИП6	Fcos	X	ИП5	ИП6	Fsin	X
П6	XY	П5	С/П	БП	00	ИП8	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>
+	FV	П7	ИП8	ИП7	÷	Farcos	ПС	ИП9	Fx < 0
34	ИПС	/—/	ПС	ИПС	ИП7	С/П	БП	00	ИП9
ИП6	+	П9	ИП8	ИП5	+	П8	С/П	БП	00
ИП9	ИП6	-	П9	ИП8	ИП5	-	П8	С/П	БП
00	ИП8	ИП5	X	ИП9	ИП6	X	-	ИП8	ИП6
X	ИП9	ИП5	X	+	П9	XY	П8	С/П	БП
00	ИП5	Fx <sup>2</sup>	ИП6	Fx <sup>2</sup>	+	ПВ	ИП6	/—/	
ИПВ	÷	П6	ИП5	ИПВ	÷	П5	БП	61	

**Пример.**

$$\frac{(-2 + i \cdot 2)(2 - i \cdot 3)}{(3 + i \cdot 4)} + (6 + i \cdot 6) - 5e^{i \cdot 45} = 4,3044659 + i \cdot 3,3444659 = 5,4510438 e^{i \cdot 37,846346}$$

### 3.6. Геометрические расчеты, векторные операции и преобразования координат

Пакет из пяти программ, приведенных ниже, обеспечивает решение треугольников: по трем известным параметрам находят три неизвестных и площадь треугольника. Под параметрами под-

разумеваются стороны и углы треугольника. Расчетные формулы соответствуют приведенным в [3, 21]. Углы могут задаваться и вычисляться в радианах или градусах ( $\pi_{\text{рад}} = 180^\circ$ ).

**Программа 3.43.** Решение треугольника по 3 сторонам  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad B = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$C = \pi - (A + B), \quad S = (ab \sin C)/2.$$

Ввод: длины сторон  $a$  ПП  $b$  ПП  $c$  ПП С/П. Вывод результатов:  $S \rightarrow \rightarrow PX = PD, A \rightarrow PA, B \rightarrow PB$  и  $C \rightarrow PC$ .

П1	П2	ПЗ	Fx <sup>2</sup>	П4	XY	Fx <sup>2</sup>	П5	+	XY
Fx <sup>2</sup>	—	FVx	ИП4	+	ИП5	—	ИП3	2	×
П4	÷	ИП1	÷	Farccos	ПВ	XY	ИП2	÷	ИП4
÷.	Farccos	ПА	+	Fcos	ПС	ИПС	/—/	Farccos	ПС
Fsin	ИП1	ИП2	×	2	÷	×	ПД	С/П	

**Пример.** Для  $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $c = 5$  получим (переключатель  $P - \Gamma$  в положении  $\Gamma$ ):  $S = 3,79996712$ ,  $A = 49,458395^\circ$ ,  $B = 22,331646^\circ$  и  $C = 108,20995^\circ$ . При положении  $P$  переключателя  $P - \Gamma$  и указанных выше значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$ :  $S = 3,7996711$ ,  $A = 0,8632118$  рад,  $B = 0,38976075$  рад,  $C = 1,88862$  рад.

**Программа 3.44.** Решение треугольника по двум сторонам  $a$ ,  $b$  и углу  $C$  между ними:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}, \quad A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$B = \pi - (A + C), \quad S = (ac \sin B)/2.$$

Ввод:  $a$  ПП  $b$  ПП  $C$  С/П. Вывод результатов:  $S \rightarrow PD = PX, A \rightarrow \rightarrow PA, B \rightarrow PB, C \rightarrow PZ$ .

П1	П2	ПС	Fcos	×	×	ИП1	Fx <sup>2</sup>	П4	ИП2
Fx <sup>2</sup>	П5	+	XY	2	×	—	FV	ПЗ	Fx <sup>2</sup>
ИП5	+	ИП4	—	ИП2	÷	ИП3	÷	2	÷
Farccos	ПА	ИПС	+	Fcos	ПВ	ИПВ	/—/	Farccos	ПВ
Fsin	ПИ1	×	ИП3	×	2	÷	ПД	С/П	

**Пример.** Для  $a = 4$ ,  $b = 2$  и  $C = 108,20995^\circ$  получаем  $S = 3,7996672$ ,  $A = 49,458407^\circ$ ,  $B = 22,331637^\circ$  и  $c = 4,9999997$  (при  $C = 1,88862$  рад получаем  $S = 3,7996712$ ,  $A = 0,8632118$  рад,  $B = 0,38976075$  рад и  $c = 5$ ).

**Программа 3.45.** Решение треугольника по двум сторонам  $c$ ,  $b$  и углу  $B$ :

$$C = \arcsin \frac{c \sin B}{b}, \quad A = \pi - (B + C),$$

$$a = b \sin A / \sin B, \quad S = (ac \sin B)/2.$$

При  $b < c$  существует и второе решение:

$$C' = \pi - C, \quad A' = \pi - (B + C'),$$

$$a' = (b \sin A')/\sin B, \quad S' = (a'c \sin B)/2.$$

Ввод:  $b$  ПП  $c$  ПП  $B$  С/П. Вывод результатов:  $S \rightarrow$  РД = РХ,  $A =$  = РА,  $C =$  РС,  $a =$  Р1 (для получения второго решения при  $b <$   $< c$  нажать клавишу С/П еще раз).

П2	П3	ПВ	Fsin	×	XY	÷	Farcsin	ПС	1
/—/	Farccos	XY	—	П4	ИПВ	—	ПА	Fsin	ИП2
×	ИПВ	Fsin	÷	П1	FBx	ИП1	×	ИП3	×
2	÷	ПД	С/П	ИП4	ПС	БП	08		

Пример. Для  $b = 2$ ,  $c = 2,5$  и  $B = \pi/4$  рад имеем:  $S =$  = 2,3892972,  $a = 2,7031812$ ,  $A = 1,2720932$  рад,  $C = 1,0841013$  рад,  $S' = 0,7357027$ ,  $a' = 0,83235252$ ,  $A' = 0,2987032$ ,  $C' = 2,0574913$  рад. При  $B = 45^\circ$  имеем:  $S = 2,389272$ ,  $a = 2,7031811$ ,  $A = 72,88557^\circ$ ,  $C = 62,114433^\circ$ ,  $S' = 0,73570255$ ,  $a' = 0,83235252$ ,  $A' = 17,11443^\circ$  и  $C' = 117,88557^\circ$ .

**Программа 3.46.** Решение треугольника по двум углам  $B$ ,  $C$  и стороне  $a$  между ними:  $A = \pi - (B + C)$ ;  $b = a \sin B/\sin A$ ;  $c =$  =  $a \sin C/\sin A$ ;  $S = ac \sin B/2$ . Ввод:  $a$  ПП  $A$  ПП  $C$  С/П. Вывод результатов:  $S =$  РД = РХ,  $A =$  РА,  $b =$  Р2 и  $c =$  Р3.

П1	ПВ	ПС	+	Fcos	ПА	ИПА	/—/	Farccos	ПА
ИП1	ИПВ	Fsin	П4	×	ИПА	Fsin	П5	÷	П2
ИП1	ИПС	Fsin	×	ИП5	÷	П3	ИП1	×	ИП4
×	2	÷	ПД	С/П					

Пример. Для  $a = 50$ ,  $A = 1$  рад и  $C = 1,5$  рад получим:  $S = 1753,1376$ ,  $A = 0,64159262$  рад,  $b = 70,301607$  и  $c = 83,336802$ . При  $a = 50$ ,  $A = 60^\circ$  и  $C = 90^\circ$ :  $S = 2165,0638$ ,  $A = 29,999995^\circ$ ,  $b = 86,602557$  и  $c = 100,00001$ .

**Программа 3.47.** Решение треугольника по двум углам  $A$  и  $C$  и стороне против одного из них:

$$B = \pi - (A + C), \quad b = (a \sin B)/\sin A,$$

$$c = (a \sin C)/\sin A, \quad S = (bc \sin A)/2.$$

Вывод результатов:  $S \rightarrow$  РД = РХ,  $B \rightarrow$  РВ,  $b \rightarrow$  Р2,  $c \rightarrow$  Р3.

П1	ПА	ПС	+	Fcos	ПВ	ИПВ	/—/	Farccos	ПВ
Fsin	ИП1	×	ИПА	Fsin	П4	÷	П2	ИП1	ИПС
Fsin	×	ИП4	÷	П3	ИП4	ИП2	×	ИП3	×
2	÷	ПД	С/П						

Пример. Для  $a = 50$ ,  $A = 1$  рад,  $C = 1,5$  рад получим:  $S =$  = 886,79965,  $B = 0,64159262$  рад,  $b = 85,561065$  и  $c = 59,270909$ . Для  $a = 50$ ,  $A = 60^\circ$  и  $C = 90^\circ$ :  $S = 721,68765$ ,  $B = 29,999995^\circ$ ,  $b =$  = 28,867507 и  $c = 57,735024$ .

**Программа 3.48.** Вычисление ориентированного расстояния от точки  $(x_0, y_0)$  до прямой  $y = a + bx$  на плоскости Ввод:  $a = PA$ ,  $b = PB$  и далее  $y_0 \uparrow x_0$  С/П. Результат:  $d \rightarrow PX$ , причем  $d = (a + bx_0 - y_0) / \sqrt{b^2 + 1}$ .

ИПВ  $\times$  ХУ  $-$  ИПА  $+$  ИПВ  $Fx^2$  1  $+$   
 $F\sqrt{-}$   $\div$  С/П БП 00

**Пример.** Для  $a = 2$ ,  $b = 3$  и  $x_0 = 4$ ,  $y_0 = 5$  получим  $d = 2,8460499$ .

**Программа 3.49.** Вычисление ориентированного расстояния от точки  $(x_0, y_0, z_0)$  в пространстве до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ввод:  $A = PA$ ,  $B = PB$ ,  $C = PC$ ,  $D = PD$  и далее  $z_0 \uparrow y_0 \uparrow x_0$  С/П.

ИПА  $\times$  ХУ ИПВ  $\times$   $+$  ХУ ИПС  $\times$   $+$   
 ИПД  $+$  ИПА  $Fx^2$  ИПВ  $Fx^2$   $+$  ИПД  $Fx^2$   $+$   
 $F\sqrt{-}$   $\div$  С/П БП 00

**Пример.** Для  $A = 2$ ,  $B = 2$ ,  $C = 2$  и  $D = 1$  получим  $d = 10,333333$  при  $z_0 = 6$ ,  $y_0 = 5$  и  $x_0 = 4$ .

**Программа 3.50.** Расстояние между двумя точками  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , находящимися на одной плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ввод:  $y_2 \uparrow x_2 \uparrow y_1 \uparrow x_1$  С/П.

ХУ F,  $-$   $Fx^2$  F, ХУ  $-$   $Fx^2$  ХУ F,  
 $+$   $F\sqrt{-}$  С/П БП 00

**Пример.** При  $x_1 = -2,3$ ,  $y_1 = 4$ ,  $x_2 = 8,5$  и  $y_2 = 0,7$  получаем  $d = 11,292918$ .

**Программа 3.51.** Пересчет координат  $x$  и  $y$  точки из одной системы декартовых координат в другую с центром в точке  $(x_0, y_0)$  и углом поворота  $\alpha$ :

$$x' = (x - x_0)\cos \alpha + (y - y_0)\sin \alpha,$$

$$y' = (x - x_0)\sin \alpha + (y - y_0)\cos \alpha.$$

Ввод:  $x_0 = P0$ ,  $y_0 = P1$ ,  $\alpha = PA$  и далее  $y \uparrow x$  С/П. Результат:  $x' \rightarrow PX$ ,  $y' \rightarrow PY$ .

ИП0  $-$  П2 ИПА  $F\cos$  П3  $\times$  ХУ ИП1  $-$   
 П4 ИПА  $F\sin$  П5  $\times$   $+$  ИП2  $/- /$  ИП5  $\times$   
 ИП4 ИП3  $\times$   $+$  ХУ С/П БП 00

**Пример.** Для  $x_0 = 30$ ,  $y_0 = 40$ ,  $\alpha = 0,5$  рад и  $x = 50$ ,  $y = 50$  получим  $x' = 22,345907$  и  $y' = -0,8126847$ .

**Программа 3.52.** Вычисление координат  $(x, y)$  точки, делящей отрезок с концевыми точками  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  на плоскости в отношении  $m_1/m_2$ :

$$x = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Ввод:  $m_1 = P1$ ,  $m_2 = P2$  и далее  $y_1 \uparrow x_1$  С/П  $y_2 \uparrow x_2$  С/П. Результат:  $x \rightarrow PX$ ,  $y \rightarrow PY$ .

ПЗ	ХУ	П4	Сх	С/П	ИП1	×	ИП3	ИП2	×
+	ПЗ	ХУ	ИП1	×	ИП4	ИП2	×	+	ИП1
ИП2	+	÷	ИП3	FВх	÷	С/П	БП	00	

**Пример.** Для  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 3$ ,  $y_1 = -4$ ,  $x_1 = 6$ ,  $y_2 = 0$  и  $x_2 = 0$  получим  $x = 3,6$  и  $y = -2,4$ .

**Программа 3.53.** Вычисление длины отрезка

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

заданного точками или векторами  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ , выходящими из центра декартовой системы координат; вычисление координат точки, делящей этот отрезок в отношении  $m_1/m_2$ ,

$$x = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_2 z_1 + m_1 z_2}{m_1 + m_2},$$

и вычисление угла между векторами:

$$\varphi = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Ввод:  $m_1 = P1$ ,  $m_2 = P2$  и далее  $z_1 \uparrow y_1 \uparrow x_1$  С/П  $z_2 \uparrow y_2 \uparrow x_2$  С/П (получаем  $d$ ) С/П (получаем  $x$ ) С/П (получаем  $y$ ) С/П (получаем  $z$ ) БП 45 С/П (получаем  $\varphi$ ).

П7	F,	П9	F,	ПВ	С/П	П8	F,	ПА	F,
ПС	ИПВ	ХУ	—	Fx <sup>2</sup>	ИПА	ИП9	—	Fx <sup>2</sup>	+
ИП8	ИП7	—	Fx <sup>2</sup>	+	F√	С/П	ИП1	ИП2	+
П0	6	П6	КИП6	ИП2	×	КИП6	ИП1	×	+
ИП0	÷	С/П	БП	33	ИП7	ИП8	×	ИП9	ИПА
×	+	ИПВ	ИПС	×	+	ИП7	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>
+	ИПВ	Fx <sup>2</sup>	+	F√	÷	ИП8	Fx <sup>2</sup>	ИПА	Fx <sup>2</sup>
⊕	ИПС	Fx <sup>2</sup>	+	F√	÷	Farccos	С/П		

**Пример.** Для  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 3$ ,  $A_1 = (2; 4; -1)$  и  $A_2 = (-3; -1; 6)$  получим  $d = 9,9498743$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1,8$  и  $\varphi = 2,1115608$  рад (переключатель Р — Г в положении Р).

**Программа 3.54.** Вычисление длины вектора, заданного координатами конца  $(x, y, z)$ ,

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

и вычисление углов между заданным вектором и осями декартовой системы координат:  $A = \arccos(x/d)$ ,  $B = \arccos(y/d)$  и  $C = \arccos(z/d)$ . Ввод:  $z \uparrow y \uparrow x$  С/П. Результат:  $d \rightarrow PX = PD$ ,  $C \rightarrow PY = PC$ ,  $B \rightarrow PZ = PB$  и  $A \rightarrow PT = PA$ ,

ПА	F,	ПВ	F,	ПС	Fx <sup>2</sup>	ИПВ	Fx <sup>2</sup>	+	ИПА
Fx <sup>2</sup>	+	F√	ПД	ИПА	ИПД	÷	Farccos	ПА	ИПВ
ИПД	÷	Farccos	ПВ	ИПС	ИПД	÷	Farccos	ПС	ИПД
С/П	БП	00							

**Пример.** Для  $x = 2$ ,  $y = -2$  и  $z = -1$  получим  $d = 3$ ,  $A = 48,189683^\circ$ ,  $B = 131,81031^\circ$  и  $C = 109,47122^\circ$  (переключатель Р — Г в положении Г).

**Программа 3.55.** Преобразование декартовых координат точки  $(x, y)$  на плоскости в полярные (с длиной радиуса-вектора  $A$  и углом  $\varphi$ ):

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arccos(x/A) & \text{при } y \geq 0, \\ -\arccos(x/A) & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Ввод:  $x = PA$ ,  $y = PB$ . Результат:  $A \rightarrow PA$ ,  $\varphi \rightarrow PB$ .

ИПА	↑	Fx <sup>2</sup>	ИПВ	Fx <sup>2</sup>	+	F√	ПА	÷	Farccos
ИПВ	XY	ПВ	XY	Fx<0 19		ИПВ	/- /	ПВ	ИПВ
ИПА	С/П								

**Пример.** Для  $x = y = 1$  получим  $A = 1,4142135$  и  $\varphi = 44,999998^\circ$  (переключатель Р — Г в положении Г).

**Программа 3.56.** Преобразование полярных координат  $(A, \varphi)$  точки в декартовы  $(x, y)$ :  $x = A \cos \varphi$  и  $y = A \sin \varphi$ . Ввод:  $A = PA$  и  $\varphi = PB$ .

ИПА	ИПВ	Fcos	×	ИПА	ИПВ	Fsin	×	ПВ	XY
ПА	С/П								

**Пример.** Для  $A = \sqrt{2}$  и  $\varphi = 45^\circ$  получим  $x = y = 0,9999999$ .

**Программа 3.57.** Преобразование декартовых координат  $(x, y)$  в полярные  $(A, \varphi)$  и наоборот. Ввод:  $y \uparrow x \uparrow 0$  С/П при преобразовании декартовых координат в полярные (результат:  $A \rightarrow PX = PA$ ,  $\varphi \rightarrow PY = PB$ ) и  $\varphi \uparrow A \uparrow 1$  С/П при преобразовании полярных координат в декартовы (результат:  $x \rightarrow PX = PA$  и  $y \rightarrow PY = PB$ ).

$F_x=0$	27	F,	ПА	XY	ПВ	XY	↑	$F_x^2$	ИПВ
$F_x^2$	+	$F\sqrt{\quad}$	ПА	÷	$F\arccos$	ИПВ	XY	ПВ	XY
$F_x<0$	25	ИПВ	/-/	ПВ	БП	40	F,	ПА	XY
ПВ	$F\cos$	×	ИПА	ИПВ	$F\sin$	×	ПА	XY	ПВ
ИПВ	ИПА	С/П	БП	00					

Для проверки данной программы можно воспользоваться контрольными примерами, приведенными для программ 3.55 и 3.56.

**Программа 3.58.** Полярные координаты прямой  $Ax + By + C = 0$ , лежащей на плоскости:

$$P = C/\sqrt{A^2 + B^2}, \cos \alpha = \pm A/\sqrt{A^2 + B^2}, \sin \alpha = \pm B/\sqrt{A^2 + B^2},$$

где верхний знак соответствует  $D < 0$ , а нижний —  $D \geq 0$ . Ввод  $A = PA$ ,  $B = PB$  и  $C = PC$ . Результат:  $P \rightarrow PX$ ,  $\cos \alpha \rightarrow PX$  и  $\sin \alpha \rightarrow PX$ .

ИПА	$F_x^2$	ИПВ	$F_x^2$	+	$F\sqrt{\quad}$	ПД	ИПС	$F_x<0$	11
/-/	П9	ИПД	÷	С/П	9	П6	КИП6	/-/	ИПД
÷	ИПС	×	ИП9	÷	С/П	БП	17		

**Пример.** Для прямой  $3x - 4y + 10 = 0$  получим  $P = 2$ ,  $\cos \alpha = -0,6$ ,  $\sin \alpha = 0,8$ , а для прямой  $3x - 4y - 10 = 0$  получим  $P = 2$ ,  $\cos \alpha = 0,6$  и  $\sin \alpha = -0,8$ .

Вектор с параметрами  $(\rho, \theta, \varphi)$  в сферической системе координат преобразуется в свои проекции декартовой системе координат

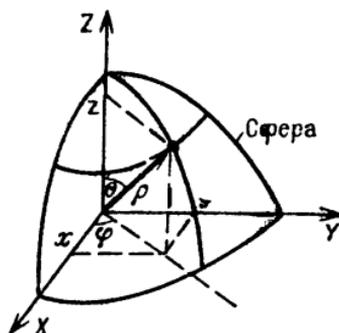


Рис. 3.1. К переводу координат точки в пространстве из декартовых в сферические и наоборот

пат (рис. 3.1) с помощью формул:  $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$  и  $z = \rho \cos \theta$ .

Обратное преобразование может выполняться по формулам [20]

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2}) & \text{при } y \geq 0, \\ -\arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2}) & \text{при } y < 0, \end{cases}$$

$$\theta = \arccos(z/\rho).$$

Эти преобразования можно объединить со сложением векторов в декартовой системе координат (с накоплением результатов), а также их умножением, реализованным с применением формул:  $x = y_1z_2 - z_1y_2$ ,  $y = z_1x_2 - x_1z_2$  и  $z = x_1y_2 - y_1x_2$ . Здесь координаты с индексом 1 соответствуют первому вектору, с индексом 2 — второму и без индекса — результирующему вектору.

В программе 3.59 [20] описанные выше операции задаются при вводе в регистр X числа (кода)  $pq$ , где при преобразовании координат  $p = 0$ , сложении векторов  $p = 3$  и умножении  $p = 5$ . Для декартовой системы координат задается  $q = 7$ , а для сферической —  $q = 5$ .

Программа 3.59. Операции над векторами в трехмерном пространстве. Ввод и вывод результатов в соответствии с инструкцией, приведенной после текста программы.

ПС	ИП8	КПС	С/П	КБПД	БП	82	П4	ИП7	ПП
19	П5	ИП8	$Fx < 0$	18	ИП5	/-/	П5	ИП9	↑
$Fx^2$	ИП4	$Fx^2$	+	$F\sqrt{\quad}$	П4	÷	$F\arccos$	П6	В/0
ИП5	$F\sin$	×	П8	В/0	ПП	82	ИП2	+	П2
ИП7	ИП1	+	ИП3	ИП9	+	П3	П9	XY	П1
П7	ИП2	П8	БП	07'	ПП	82	ИП3	×	ИП9
ИП2	П0	×	—	ИП9	ИП1	×	ИП7	ИП3	×
—	П2	XY	ИП7	ИП0	×	ИП8	ИП1	×	—
БП	46	ИП4	ИП6	$F\cos$	×	П9	ИП5	$F\cos$	ИП4
ИП6	$F\sin$	×	×	П7	$FV_x$	БП	30		

Инструкция: 1) установить переключатель Р — Г в положение, соответствующее выбранной единице измерения углов; 2) занести 0 в регистры 1, 2, 3 и Д; 3) ввести декартовы координаты  $x = P7$ ,  $y = P8$  и  $z = P9$  или сферические  $\rho = P4$ ,  $\varphi = P5$  и  $\theta = P6$ ; 4) дать команды В/0 35 С/П, если первый вектор задан в сферических координатах, и В/0 и 37 С/П, если он задан в декартовых координатах; 5) ввести, как в п. 3, второй вектор, при необходимости преобразования в сферические координаты дать команду 05 С/П, а в декартовы — соответственно 07 С/П; 6) для сложения векторов в декартовой системе координат дать команды 35 С/П, а для сложения в сферической системе координат — команды 37 С/П, соответственно для умножения векторов дать команды 55 С/П и 57 С/П; 7) считать результат в сферических ( $\rho \rightarrow P4$ ,  $\varphi \rightarrow P5$ ,  $\theta \rightarrow P6$ ) или декартовых ( $x \rightarrow P7$ ,  $y \rightarrow P8$ ,  $z \rightarrow P9$ ) координатах; 8) для продолжения вычислений перейти к п. 5. Время преобразования координат 12—15 с, сложения и умножения векторов — не более 45 с.

Пример. Вычислить вектор  $D = A \times [B + C]$  при  $a_x = 3$ ,  $a_y = 4$ ,  $a_z = 5$ ,  $b_x = 8$ ,  $b_y = -1$ ,  $b_z = 0$ ,  $\rho_c = 4$ ,  $\varphi_c = -30^\circ$ ,  $\theta_c = 60^\circ$  (вектор  $C$  задан в сферической системе координат, а век-

торы  $A$  и  $B$  — в полярной). В соответствии с инструкцией выполняем следующие действия:

- 1) переключатель  $P - \Gamma$  ставим в положение  $\Gamma$ ;
- 2) задаем  $0 = P1 = P2 = P3 = P4$ ;
- 3) вводим  $b_x = 8 = P7$ ,  $b_y = -1 = P8$ ,  $b_z = 0 = P9$ ;
- 4) выполняем команды 37 В/0 С/П;
- 5) вводим  $\rho_c = 4 = P4$ ,  $\varphi_c = -30 = P5$ ,  $0_c = 60 = P6$ ;
- 6) выполняем команды 35 С/П;
- 7) вводим  $a_x = 3 = P7$ ;  $a_y = 4 = P8$ ,  $a_z = 5 = P9$ ;
- 8) выполняем команды 57 С/П;
- 9) выводим на индикацию результаты:  $d_x = 21,660255$  ( $d_x \rightarrow P7$ ),  $d_y = 49$  ( $d_y \rightarrow P8$ ),  $d_z = -52,196153$  ( $d_z \rightarrow P9$ ) или  $\rho_d = 74,797091$  ( $\rho_d \rightarrow P4$ ),  $\varphi_d = 66,152365^\circ$  ( $\varphi_d \rightarrow P5$ ) и  $\theta_d = 134,25369^\circ$  ( $\theta_d \rightarrow P6$ ).

**Программа 3.60.** Вычисление полярных параметров плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$P = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos \beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где верхний знак берется при  $D < 0$ , нижний — при  $D \geq 0$ . Ввод:  $A = PA$ ,  $B = PB$ ,  $C = PC$  и  $D = PD$ . Инструкция по выводу результатов: С/П  $P \rightarrow PX$  С/П  $\alpha \rightarrow PY$   $\cos \alpha \rightarrow PZ$  С/П  $\beta \rightarrow PX$   $\cos \beta \rightarrow PY$  С/П  $\gamma \rightarrow PX$   $\cos \gamma \rightarrow PY$ .

ИПА	$Fx^2$	ИПВ	$Fx^2$	ИПС	$Fx^2$	+	+	$F\sqrt{\quad}$	П8
ИПД	$Fx < 0$	14	/—/	П9	ИП8	÷	С/П	9	П6
КИП6	/—/	ИП8	÷	ИПД	×	ИП9	÷	↑	Farccos
С/П	БП	20							

**Пример.** Для плоскости  $x - 2y + 2z - 3 = 0$  получим:  $P = 1$ ,  $\alpha = 70,52878^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0,3333333$ ,  $\beta = 131,81031^\circ$ ,  $\cos \beta = -0,6666666$ ,  $\gamma = 48,189683^\circ$ ,  $\cos \gamma = 0,6666666$ . Для плоскости  $x - 2y + 2z + 3 = 0$ :  $P = 1$ ,  $\alpha = 109,47122^\circ$ ,  $\beta = 48,189863^\circ$  и  $\gamma = 131,81031^\circ$ . Данные получены при положении  $\Gamma$  переключателя  $P - \Gamma$ .

### 3.7. Вычисление коэффициентов характеристических полиномов матриц и их собственных значений

Для матрицы  $A$  размера  $n \times n$  можно найти  $n$  собственных значений  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), удовлетворяющих решению уравнения

$$Ax = \lambda X,$$

где  $X$  — собственный вектор матрицы.

Собственное значение матрицы можно вычислить из уравнения

$$(A - \lambda E)X = 0,$$

где  $E$  — единичная матрица. Эта система имеет ненулевое решение, если определитель

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Раскрыв этот определитель, получаем характеристический многочлен

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0,$$

из равенства которого нулю можно найти  $\lambda_i$  как корни уравнения  $P(\lambda) = 0$ .

Вычисление коэффициентов  $a_0, \dots, a_n$  характеристического полинома матриц возможно с помощью специальных численных методов [10, 23]. Однако для программируемых микрокалькуляторов класса «Электроника БЗ-34» реализация этих методов практически невозможна. Для матриц размера  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  легко вычислять коэффициенты характеристических полиномов по аналитическим выражениям.

**Программа 3.61.** Вычисление коэффициентов  $a_1 = a_{11} + a_{22}$  и  $a_0 = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$  характеристического полинома  $P(\lambda) = -\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  матрицы  $2 \times 2$  (значение  $a_2 = -1$ ). Ввод:

$$\begin{bmatrix} a_{11}=P7 & a_{12}=P8 \\ a_{21}=P4 & a_{22}=P5 \end{bmatrix}$$

Вывод результатов:  $a_1 \rightarrow PY = P1, a_0 \rightarrow PX = P0$ .

ИП7 ИП5 + П1 ↑ ИП3 ИП4 × ХУ —  
 ПО С/П

**Пример.** Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

получим  $a_0 = 20$  и  $a_1 = 12$ .

**Программа 3.62.** Вычисление коэффициентов  $a_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ ,  $a_1 = -a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}$  и  $a_0 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{31}a_{22}$  характеристического полинома  $P(\lambda) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  (значение  $a_3 = -1$ ) матрицы  $3 \times 3$ .

Ввод:

$$\begin{bmatrix} a_{11}=P7 & a_{12}=P8 & a_{13}=P9 \\ a_{21}=P4 & a_{22}=P5 & a_{23}=P6 \\ a_{31}=P1 & a_{32}=P2 & a_{33}=P3 \end{bmatrix}$$

Вывод результатов:  $a_2 \rightarrow PX=PC$ ,  $a_1 \rightarrow PY=PB$  и  $a_0 \rightarrow PZ=PA$ .

ИП7	ИП5	/—/	ИП3	—	×	ИП5	ИП3	×	—
ИП6	ИП2	×	+	ИП8	ИП4	×	+	ИП9	ИП1
×	+	ПВ	ИП7	ИП5	ИП3	×	×	ИП7	ИП6
ИП2	×	×	—	ИП8	ИП6	ИП1	×	×	+
ИП3	ИП4	ИП3	×	×	—	ИП9	ИП2	ИП4	×
×	+	ИП9	ИП1	ИП5	×	×	—	ПА	ИП3
ИП7	ИП5	+	ИП3	+				ПС	С/П

**Пример.** Найти максимальное усилие в кубе, подверженном усилиям по всем трем осям, если матрица усилий имеет вид

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 5 & 20 & 4 \\ 6 & 4 & 30 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

Опуская нормирующий множитель  $10^6$ , вводим данную матрицу и получаем:  $a_2 = 60$ ,  $a_1 = -1023$  и  $a_0 = 4610$ , т. е.  $P(\lambda) = \lambda^3 - 60\lambda^2 + 1023\lambda - 4610$  (получаем умножением всех коэффициентов на  $a_3 = -1$ ). Решив кубическое уравнение  $P(\lambda) = 0$ , по программе 5.46 находим все собственные значения данной матрицы:  $\lambda_1 = 19,14906$ ,  $\lambda_2 = 7,14176$  и  $\lambda_3 = 33,70918$ . Максимальное усилие определяется максимальным по модулю собственным значением, которое (с учетом умножения на нормирующий множитель) будет равно  $\lambda_{\text{макс}} = \lambda_3 \cdot 10^6 = 33,70918 \cdot 10^6$ .

### 3.8. Вычисление юлианских дат, дней недели и числа суток между заданными датами

Приближенно год — это время, за которое Земля делает один оборот вокруг Солнца. За месяц наш спутник Луна совершает один оборот вокруг Земли. Деление месяца на недели и дни нам столь привычно, что не стоит его пояснять.

Однако Земля совершает один оборот вокруг Солнца за 365,2422 суток. Нам же удобно трактовать сутки как некоторую целую часть года. Если принять, что год равен 365 целым суткам, то за 100 лет набегает погрешность, равная 24 суткам.

Юлий Цезарь предложил **уменьшить эту погрешность**, сделав каждый делящийся на 4 год **високосным** и прибавив к нему сутки (29 февраля високосного года). **Этой системой** (юлианским календарем) много веков пользовались люди, пока не стало ясно, что ей присуща заметная погрешность (юлианский год в среднем содержит 365,25 суток). Тогда папа Григорий XIII ввел с 1582 г. новый (григорианский) календарь, исключив из юлианского календаря дни с 5 по 14 (включительно) октября 1582 г. и введя

правило пропуска трех дней каждые 400 лет. При этом високосными считаются годы, содержащие целое число сотен, если они делятся на 400. В результате вычисление дат стало довольно запутанным делом, помочь в котором может микрокалькулятор.

При календарных вычислениях нередко требуется знать, сколько суток (дней) прошло начиная с некоторой исходной даты и каким днем недели является заданная дата. Исходной датой (или эпохой) принято считать средний григвичский полдень 1 января 4713 г. до пашей эры. Число дней от этого момента до заданной даты называется юлианской датой. Отметим, что юлианская дата, таким образом, на  $1/2$  суток расходится с началом гражданских суток.

Для вычисления юлианской даты используется следующий численный алгоритм (см. П. Даффет-Смит. Практическая астрономия с калькулятором.— М.: Мир, 1982).

1. Задаем номер дня  $D$  (может быть дробной частью), месяца  $M$  и года  $G$ .

2. Если месяц — январь или февраль, полагаем  $G' = G - 1$  и  $M' = M + 12$ . Иначе:  $G' = G$  и  $M' = M$ .

3. Если дата позднее 15 октября 1582 г. (т. е. дана по григорианскому календарю), вычисляем  $A = \text{int}(G'/100)$  и  $B = 2 - A + \text{int}(A/4)$ . В противном случае полагаем  $B = 0$ .

4. Вычисляем  $C = \text{int}(365,25 G')$ .

5. Вычисляем  $D = \text{int}(30,6001 (M' + 1))$ .

6. Находим юлианскую дату:

$$JD = B + C + D + 1720994,5.$$

Для нахождения числа дней между двумя датами  $D_1M_1G_1$  и  $D_2M_2G_2$  достаточно вычислить для каждой из них соответствующую юлианскую дату:  $JD_1$  для первой даты и  $JD_2$  — для второй. Тогда число дней между этими датами (включая одну из них)  $N = JD_2 - JD_1$ .

День недели заданной даты находится по следующему алгоритму.

1. Находим юлианскую дату, соответствующую  $0$ , (с учетом расхождения юлианского и гражданского времени на  $1/2$  суток).

2. Вычисляем  $A = (JD + 1,5)/7$ .

3. Дробную часть  $A$  умножаем на 7 и округляем до целого значения. Полученное число от 0 до 6 соответствует дням недели от воскресенья (0) до субботы (6).

Эти вычисления реализуются следующей программой.

Программа 3.63°. Вычисление юлианских дат, дней недели каждой из дат и числа дней между двумя датами. Ввод:  $365,25 = P4$ ,  $30,6001 = P5$ ,  $1720994,5 = P5$  и далее согласно инструкции после программы.

ПО	F,	П8	F,	П9	2	ИП8	—	$F_x \geq 0$	16
КИПО	ИП8	1	2	+	П8	ИПО	1	0	0
÷	ПП	83	ПА	4	÷	ПП	83	ИПА	—
2	+	С/П	ПВ	ИПО	ИП4	×	ПП	83	ПС
ИП8	1	+	ИП5	×	ПП	83	ИПВ	+	ИПС
+	ИП9	+	ИП6	+	П2	1	,	5	+
7	÷	1	+	П7	КИП7	XY	ИП7	—	7
×	ПП	83	С/П	ИП2	ПД	F,	БП	00	ИП2
ИПД	—	С/П	1	+	П3	КИП3	ИП3	В/0	

После ввода программы и констант в регистры Р4, Р5 и Р6 проводим вычисления по следующей схеме.

1. Вводим  $D_1 \uparrow M_1 \uparrow G_1$  и нажимаем клавиши В/0 и С/П. Получаем значение  $V_1$ . Если введенная дата позже 15.10.1582 г., нажимаем клавишу С/П (иначе: Сx и С/П). Получаем день недели первой даты, юлианская дата ее заносится в регистр 2.

2. Вводим  $D_2 \uparrow M_2 \uparrow G_2$  и нажимаем клавишу С/П. Получаем значение  $V_2$ . Если введенная дата позже 15.10.1582 г., нажимаем клавишу С/П (иначе: Сx и С/П). Получаем день недели второй даты, ее юлианская дата заносится в регистр 2 (юлианская дата первой даты поступает в регистр Д, т. е. сохраняется).

3. Число дней между датами находим, нажав клавиши БП 79 С/П (время вычислений менее 1 мин).

Возьмем памятные нам дни начала (22.06.1941 г.) и конца (9.05.1945 г.) Великой Отечественной войны. Для 6 часов утра 22.06.1941 г. вводимая дата имеет вид:  $22,25 \uparrow 6 \uparrow 1941$ . Нажав клавиши В/0 и С/П, получим  $V_1 = -13$ , нажав клавишу С/П еще раз (см. инструкцию) получаем цифру 0 (именно утром в воскресенье враг вероломно напал на нашу страну). Теперь введем новую дату (например, полдень 9.05.1945 г.):  $9,5 \uparrow 5 \uparrow 1945$ . Нажав клавишу С/П, получим  $V_2 = -13$ , еще раз нажав клавишу С/П, получаем число 3 (т. е. День Победы — среда). Нажав клавиши БП 79 С/П, получим число 1417 (столько долгих дней и почей вел наш народ борьбу с захватчиком). Из регистров Д и 2 вызываем юлианские даты памятных нам событий:  $JD_1 = 2430168$  и  $JD_2 = 2431585$ .

Юлианские даты по программе 3.63 вычисляются с отбрасыванием сотых долей чисел  $JD_1$  и  $JD_2$ . Поэтому задание произвольных дробных дней (суток)  $D_1$  и  $D_2$  при вычислениях дней недели дат может приводить к ошибкам. Рекомендуется задавать  $D_1$  и  $D_2$  с добавлением  $1/4$  или  $1/2$  суток в виде поправки на различие между юлианским и гражданским временем (см. приведенные выше примеры). Если дни недели определять не требуется, можно задавать любое время дня. Например, если нужно вычислить юлианскую дату для 6 часов утра 17 февраля 1985 г., то следует вводить дату в виде  $17,25 \uparrow 2 \uparrow 1985$ . Получим  $V = -13$ ; нажав клавишу С/П, получаем число 0 (в данном случае результат верен,

т. е. эта дата — воскресенье). Из регистра 2 вызываем результат  $JD = 2446113,8$ . Точный результат  $JD = 2446113,75$ ; следовательно, произошло округление  $JD$  с добавкой пяти сотых долей. В этом примере  $D = 17 + 1/4 = 17,25$  (6 часов соответствуют  $1/4$  суток). При использовании микрокалькуляторов с 10-разрядными операционными регистрами этот недостаток (округление  $JD$ ) отсутствует.

Существует ряд иных алгоритмов для вычисления дней недели, двух дат и числа суток между ними. Приведем алгоритм, в котором сутки рассматриваются и задаются как целые числа. Этот алгоритм взят из описания библиотеки программ пользователя микрокалькулятора TI-58C и состоит из следующих операций.

1. Задаем число (календарный день)  $D$ , месяц  $M$  и год  $\Gamma$  одной даты ( $\Gamma > 1582$ ).

2. Вычисляем фактор  $F$  для января и февраля ( $M = 1$  или  $M = 2$ ) по формуле

$$F = 365 \Gamma + D + 31(M - 1) + \\ + \text{int}((\Gamma - 1)/4) - \text{int}(3/4(\text{int}(\Gamma - 1)/100 + 1)),$$

а для остальных месяцев ( $M > 2$ ) — по формуле

$$F = 365 \Gamma + D + 31(M - 1) - \text{int}(0,4 M + 2,3) + \\ + \text{int}(\Gamma/4) - \text{int}(3/4(\text{int}(\Gamma/100) + 1)),$$

где знак  $\text{int}$  означает выделение целой части соответствующего выражения.

3. Вычисляем день недели по формуле

$$D_n = F - 7\text{int}(\Gamma/7) - 1.$$

При этом дни от воскресенья до пятницы соответствуют значениям  $D_n$  от 0 до 5, субботе соответствует  $D_n = -1$ .

4. Задаем  $F_1 = F$ . Возвращаясь к п. 1 алгоритма, повторяем вычисления по пп. 1—3 для второй даты. Число дней между двумя датами находится как  $N = F_2 - F_1$ , где  $F_2$  — значение фактора  $F$  после вычисления дня недели второй даты.

**Программа 3.64<sup>о</sup>.** Определение дня недели двух дат и числа  $N$  календарных дней между ними. Ввод и вывод результатов согласно следующей инструкции: вводим числа  $0,4 = P_0$ ,  $2,3 = P_1$ ,  $0,75 = P_2$ ,  $92 = P_B$ ,  $100 = P_C$ ,  $365 = P_D$  и далее  $V/0 D_1 \uparrow M_1 \uparrow \Gamma_1 C/P$  (получаем день недели даты 1)  $D_2 \uparrow M_2 \uparrow \Gamma_2 C/P$  (получаем день недели даты 2)  $BP 88 C/P$  (получаем число дней между датами). После вычислений их можно повторять, начиная с ввода первой даты.

П9	F,	П8	F,	П7	ПП	12	ИП5	П6	F,
БП	00	ИПД	ИП9	×	ИП7	+	ИП8	1	—
3	1	×	+	П5	2	ИП8	—	$F_x < 0$	55

ИП5	ИП0	ИП8	×	ИП1	+	КППВ	-	ИП9	4
÷	КППВ	+	ИП9	ИПС	÷	КППВ	1	+	ИП2
×	КППВ	-	БП	76	ИП9	1	-	ИПС	÷
1	+	КППВ	ИП2	×	КППВ	ИП9	1	-	4
÷	КППВ	ХУ	-	ИП5	+	П5	ИП5	7	÷
КППВ	7	×	--	1	-	С/П	В/0	ИП5	ИП3
-	С/П	ПА	КИПА	F, F,	ИПА	В/0			

Работу этой программы можно проверить по примерам, приведенным выше. Время вычислений (для двух дат) около 1 мин.

### 3.9. Масштабирование графиков и табуляция функций

Пусть некоторая функция  $y(x)$  задана рядом точек  $(x_i, y_i)$  при  $i = 1, 2, 3, \dots$ , причем точки известны из результатов расчета, эксперимента, таблиц или графиков с масштабом, неудобным для нас. Если известны максимальные значения  $x - x_m$  и  $y - y_m$ , то для построения графика с линейным масштабом и с максимальной длиной осей  $l_{x_m}$  и  $l_{y_m}$  нужно преобразовать значения  $x_i$  и  $y_i$  в значения

$$l_{x_i} = x_i (l_{x_m}/x_m) \quad \text{и} \quad l_{y_i} = y_i (l_{y_m}/y_m).$$

**Программа 3.65°.** Преобразование  $x_i$  и  $y_i$  для графиков с линейным масштабом с усечением у результата  $n$  цифр после десятичной запятой. Ввод:  $\epsilon = 10^{-n} = \text{РД}$ ,  $(l_{x_m}/x_m) = \text{Р8}$ ,  $(l_{y_m}/y_m) = \text{Р9}$  и далее  $y_i \uparrow x_i$  С/П (при первом пуске В/0 и С/П). Получаем  $l_{y_i} \rightarrow \text{PY}$  и  $l_{x_i} \rightarrow \text{PX}$ , после чего можно вводить новую пару  $y_i x_i$ .

ИП8	×	ПП	13	ХУ	ИП9	×	ПП	13	ХУ
С/П	БП	00	ИПД	÷	ПС	F,	КИПС	F,	ИПС
ИПД	×	В/0							

**Пример.**  $\epsilon = 10^{-1}$ ,  $l_{x_m} = 150$  мм,  $x_m = 10$  (т. е.  $l_{x_m}/x_m = 15$ ),  $l_{y_m} = 100$  мм,  $y_m = 100$  (т. е.  $l_{y_m}/y_m = 1$ ). Для  $y_1 = 45,123$  и  $x_1 = 5,234$  получим  $l_{x_1} = 78,5$  мм и  $l_{y_1} = 45,1$  мм. Таким образом, для построения точки  $(x_1, y_1)$  на графике надо по оси  $x$  отложить отрезок 78,5 мм, а по оси  $y$  — 45,1 мм. Усечение результатов десятиными долями миллиметров устраняет излишнюю информацию, поскольку построение отрезков с большей точностью бессмысленно для обычных графиков. Время преобразования для одной пары  $x_i y_i$  около 8 с.

Если отсчет  $x$  и  $y$  начинается не с 0, а со значений  $x_0$  и  $y_0$ , то уравнения преобразования записываются в виде

$$l_{x_i} = (x_i - x_0) (l_{x_m}/x_m) \quad \text{и} \quad l_{y_i} = (y_i - y_0) (l_{y_m}/y_m).$$

Программу 3.65 нетрудно дополнить вычитанием  $x_0$  из  $x_i$  и  $y_0$  из  $y_i$  с хранением  $x_0$  и  $y_0$  в свободных регистрах памяти.

Помимо линейных масштабов широко применяются логарифмические и полулогарифмические. При логарифмическом масштабе

$$l_{x_i} = (\log x_i) (l_{x_m}/\log x_m), \quad l_{y_i} = (\log y_i) (l_{y_m}/\log y_m).$$

При полулогарифмическом масштабе логарифмическому преобразованию подвергается лишь одна из переменных  $x$  или  $y$ . Часто применяются специальные логарифмические единицы, например децибеллы — единицы отношения  $y/y_0$ :

$$y_{дб} = 20 \log (y/y_0)$$

или  $y_{дб} = 20 \log y$ , если  $y_0 = 1$ . В децибеллах измеряют, например, зависимость коэффициента усиления  $K$  электронного усилителя от частоты  $f$  (ось частот при этом часто строится в логарифмическом масштабе).

**Программа 3.66.** Вычисление  $y_{дб}$ ,  $l_{x_i}$  и  $l_{y_i}$  для зависимости  $y(x)$ , заданной значениями  $y_i$  и  $x_i$ . Ввод:  $\epsilon = 10^{-n} = \text{РД}_1$ ,  $(l_{x_m}/\log x_m) = \text{Р8}$ ,  $(l_{y_m}/\log y_m) = \text{Р9}$  и далее  $y_i \uparrow x_i$  С/П (при первом пуске В/0 и С/П). Результат:  $y_{дб} \rightarrow \text{РХ}$  С/П  $l_{y_i} \rightarrow \text{РУ}$  и  $l_{x_i} \rightarrow \text{РХ}$  (после этого можно повторить ввод  $y_i$  и  $x_i$ ).

Flg	ИП8	×	ПП	24	ХУ	Flg	2	0	×
С/П	FBx	÷	ИП9	×	ПП	24	ХУ	С/П	БП
00	ИПД	÷	ПС	Ф,	КИПС	Ф,	ИПС	ИПД	×
В/0									

**Пример.** Преобразовать зависимость  $y(x) = K(f)$ , представленную ниже, в зависимость  $y_{дб}$  и определить значения  $l_{x_i}$  и  $l_{y_i}$  для построения графика:

i	1	2	3	4	5	6	7
<b>K, раз</b>	1000	1000	950	800	700	200	20
<b>f, Гц</b>	1	10	100	1000	10000	100000	10 <sup>6</sup>

Полагаем  $x_m = 10^6$ ,  $l_{x_m} = 100$  мм ( $l_{x_m}/x_m = 16,666667$ ),  $y_m = 1000$ ,  $l_{y_m} = 100$  ( $l_{y_m}/y_m = 33,333333$ ) и  $\epsilon = 0,1$ . Введя эти данные для  $i = 1$ ,  $y_1 = K_1 = 1000$ ,  $x_1 = f = 1$ , получим  $y_{дб} = 60$  дБ,  $l_{x_1} =$

$= 0$  и  $l_{y1} = 99,9$ . Проведя расчеты для остальных точек, получаем:

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$K, \text{дБ}$	60	60	59,554	58,062	56,902	46,021	26,021
$l_{yi}$	99,9	99,9	99,2	96,7	91,8	76,7	43,3
$l_{xi}$	0	16,6	33,3	50	66,6	83,3	99,9

Таблицей функций  $y(x)$  обычно называют расчет  $y$  при заданных  $x$  с целью построения таблицы значений  $y_i(x_i)$ . Таблица относится к простым, но наиболее распространенным видам вычислений. В программах таблицы функций предусматривается автоматическое изменение  $x$  по заданному закону.

**Программа 3.67.** Табуляция функций при изменении аргумента  $x$  с равномерным шагом  $\Delta x$ , т. е.  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ , где  $\Delta x = \text{const}$ . Ввод: данные  $y(x)$  и далее  $\Delta x \uparrow x_0$  В/0 С/П ... С/П. Вывод результатов:  $x_i \rightarrow \text{PX} = \text{P0}$ ,  $y_i \rightarrow \text{PY}$ . Заняты регистры P0 и P1.

ПО ХУ П1 ... ИПО С/П ИПО ИП1 + ПО  
БП 03

**Пример 1.** Протабулировать функцию относительного изменения атмосферного давления  $P_h$  от высоты  $h = x$

$$y(x) = P_h/P_0 = e^{-x/7,99}$$

для высот от  $x = x_0 = 0$  до  $x = x_{10} = 10$  км с шагом  $\Delta x = 1$  км. Записав число  $-7,99$  в регистр 9, вычисление  $y(x)$  организуем фрагментом программы ИПО ИП9  $\div \text{Fe}^x$ . Он вписывается в программу 3.67 на место многоточия. Далее вводим  $1 \uparrow 0$  В/0 и, нажимая клавиши С/П (получаем  $x_i$ ) и ХУ (получаем  $y_i$ ), находим необходимые данные:

$y$	1	0,882	0,779	0,687	0,606	0,535	0,472	0,416	0,367	0,324	0,286
$x, \text{км}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

При табуляции функций следует исключать однократные фрагменты вычислений функций  $y(x)$ . Например, вычисление  $y(x)$  без этого правила возможно с применением такого фрагмента программы:

ИПО /- / 7 , 9 9  $\div \text{Fe}^x$

Этот фрагмент удается сократить вдвое, записав константу  $-7,99$  в один из регистров памяти (см. пример выше).

**Пример 2.** Протабулировать уравнение движения тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту,

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \left( g / (2v_0^2 \cos^2 \alpha) \right) x^2,$$

с начальной скоростью  $v_0$ . Целесообразно составить программу (на базе программы 3.67) так, чтобы вначале вычислялись константы  $a = \operatorname{tg} \alpha$  и  $b = g / (2v_0^2 \cos^2 \alpha)$ . Тогда вычисления можно реализовать по формуле

$$y = x(a - Bx),$$

обеспечивающей минимальное число операций.

**Программа 3.68.** Табулирование уравнения движения тела. Ввод: В/0  $\alpha$  С/П  $g$  С/П  $v_0$  С/П  $\Delta x$  С/П  $x_0$  С/П... С/П (получаем значения  $y_i$  для  $x_i$ , меняющегося от  $x_0$  с шагом  $\Delta x$ ).

Ftg	ПА	FBx	Fcos	Fx <sup>2</sup>	С/П	XY	÷	С/П	Fx <sup>2</sup>
÷	2	÷	ПВ	С/П	П1	С/П	ПО	ИПА	ИПВ
ИПО	×	—	×	ИПО	С/П	ИПО	ИП1	+	БП

17

Для  $\alpha = 30^\circ$  (переключатель Р — Г установить в положение Г),  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>,  $v_0 = 10$  м/с,  $\Delta x = 1$  м и  $x_0 = 0$  получим следующие (округленные на 3 знаке после запятой) данные:

x, м	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y, м	0	0,512	0,893	1,143	1,256	1,251	1,110	0,837	0,433	-0,104

Значение высоты подъема  $y = -0,101$  м при  $x = 9$  является кажущимся и свидетельствует о том, что при  $8 < x < 9$  тело упало на землю. Составление программ табуляции по описанным правилам обеспечивает минимальное время вычисления каждой точки функции.

Аналогичные описанным правила справедливы и при табуляции нескольких функций одного аргумента  $x$ . Однако в этом случае выдачу значений  $x_i$ ,  $y_i(x_i)$ ,  $z_i(x_i)$  и т. д. удобно проводить, используя нажатие одной клавиши С/П (см. пример ниже).

**Программа 3.69.** Табуляция зависимости атмосферного давления  $P_h$  и плотности воздуха  $\rho_h$  от высоты  $h$  с расчетом их по формулам

$$P_h = 101,3(1 - 6,5h/288)^{5,125},$$

$$\rho_h = 1,2255(1 - 6,5h/288)^{4,255},$$

учитывающим изменение температуры воздуха по высоте столба. Ввод: 6,5 = P4; 288 = P5; 101,3 = P6; 5,125 = P7; 1,2255 = P8; 4,255 = P9;  $\Delta h = P1$ ;  $h_0 = P0$ . Нажимая клавиши В/0 С/П С/П С/П ..., будем получать значения  $h_1$ ,  $P_{h_1}$  и  $\rho_{h_1}$ .

ИП0 ИП4 × ИП5 ÷ 1 ХУ — ПА ИП0  
 С/П ИП7 ИПА  $Fx^y$  ИП6 × С/П ИП9 ИПА  $Fx^y$   
 ИП8 × С/П ИП0 ИП1 + П0 БП 00

Для  $\Delta h = 1$  и  $h_0 = 0$  будем получать следующие данные:

Высота $h$ , км	0	1	2	3	4	5
Давление $P_h$ , кПа	101,3	90,116	79,947	70,723	62,376	54,840
Плотность $\rho_h$ , кг/м <sup>3</sup>	1,2255	1,112	1,007	0,909	0,819	0,736

Описанные приемы табулирования не являются обязательными. Обычно к табулированию относят и расчеты функций по любым значениям аргумента, вводимым в регистр X. Например, если нужно вычислить  $P_h$  и  $\rho_h$  для нескольких любых (в том числе некратных) значений  $h$ , то формирование сетки  $h_{i+1} = h_i + \Delta h$  становится нежелательным. С целью экономии регистров памяти константы могут включаться в программу (пример ниже).

Программа 3.70. Вычисление  $P_h$  и  $\rho_h$  для любых  $h = PX$  ( $h \geq 0$ ). Вывод результатов:  $P_h \rightarrow PY$  и  $\rho_h \rightarrow PX$ . Занят регистр D.

↑ 6 , 5 × 2 8 8 ÷ 1  
 ХУ — ПД 5 , 1 2 5 ХУ  $Fx^y$   
 1 0 1 , 3 × 4 , 2 5  
 5 ИПД  $Fx^y$  1 , 2 2 5 5 ×  
 ХУ F, С/П БП 00

Для  $h = 2$  км получим  $\rho_h = 1,0068364$  кг/м<sup>3</sup> и  $P_h = 79,947154$  кПа. Время счета по этой программе для одного значения  $h$  около 18 с, что примерно вдвое больше, чем при вычисленных по программе 3.68.

Табуляция функций может быть объединена с масштабированием графиков и преобразованием масштабов осей. Например, если значения  $x_{i\text{дб}}$  задаются с шагом  $\Delta x_{i\text{дб}}$  в децибеллах, то для перехода к  $x_i$  в обычных единицах используется преобразование  $x_i = 10^{0,05x_{i\text{дб}}}$ .

### 3.10. Финансовые операции со сложными процентами

Пусть пользователь внес в сберкассу единовременный вклад  $S_0$ . При  $P\%$  годовых начислений спустя время  $N$  лет его вклад увеличится до величины

$$S = S_0(1 + P/100)^N.$$

А какой начальный вклад  $S_0$  нужно внести, чтобы он вырос до заданного значения  $S$  при  $P\%$  годовых начислений спустя  $N$  лет? Нетрудно найти, что

$$S_0 = S/(1 + P/100)^N.$$

Еще один вопрос: сколько лет  $N$  понадобится ждать, чтобы начальный вклад  $S_0$  увеличился до желаемой суммы  $S$  при  $P\%$  годовых начислений? Ответ следующий:

$$N = \frac{\lg S \lg S_0}{\lg (1 + P/100)}.$$

И, наконец, последний вопрос. Какой процент годовых начислений  $P\%$  должен быть, чтобы за  $N$  лет вклад  $S_0$  увеличился до  $S$ ? В этом случае

$$P = 100[(S/S_0)^{1/N} - 1].$$

Расчеты по формулам, для вычисления сложных процентов выполняются по следующей программе. Выбор нужной формулы проводится с помощью операций условных переходов.

**Программа 3.71.** Операции с единовременными вкладами. Ввод: В/О  $S_0$  С/П  $S$  С/П  $N$  С/П  $P$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). Результат поступает в регистр X.

ПО	С/П	ПА	С/П	ПВ	С/П	ПС	1	0	0
ПД	ИПА	$Fx=0$	24	ИПВ	ИПС	ИПД	÷	1	+
$Fx^y$	ИПО	×	С/П	ИПО	$Fx=0$	38	ИПВ	ИПС	ИПД
÷	1	+	$Fx^y$	$F1/x$	ИПА	×	С/П	ИПВ	$Fx=0$
54	ИПА	Flg	ИПО	Flg	—	ИПС	ИПД	÷	1
+	Flg	÷	С/П	ИПВ	$F1/x$	ИПА	ИПО	÷	$Fx^y$
1	—	ИПД	×	С/П					

**Примеры.**

$S_0$ , руб	$S$ , руб	$N$ , лет	$P\%$	Результат
5 000	0	5	3	$S=5796,3305$
0	30 000	22	3	$S_0=15696,775$
20 000	30 000	0	3	$N=13,717217$
15 000	30 000	18	0	$P=3,92592$

Рассмотрим другой широко распространенный вид финансовых расчетов. Пусть пользователь сберегательной кассы каждый

год на протяжении  $N$  лет вкладывает (или поглощает) сумму  $S_1$  рублей при  $P\%$  годовых начислений. Чему будет равна общая сумма вклада (или сколько рублей будет погашено)? Ответ следующий:

$$S = S_1 \frac{(1 + I)^N - 1}{I},$$

где  $I = P/100$ .

Другой вопрос. За сколько лет  $N$  ежегодные вклады по  $S_1$  рублей при  $P\%$  годовых увеличат хранящуюся в сберкассе сумму до заданного значения  $S$ ? Получаем

$$N = \ln \left( \frac{SI}{S_1} + 1 \right) \Big| \ln(1 + I).$$

Чтобы за  $N$  лет накопить сумму  $S$  при  $P\%$  годовых, нужно ежегодно вкладывать сумму

$$S_1 = SI / [(1 + I)^N - 1].$$

А какой процент годовых  $P\%$  (или  $I$ ) должен быть, чтобы за  $N$  лет ежегодные вклады по  $S_1$  рублей привели к накопленной сумме  $S$ ? Тут мы имеем особый случай, поскольку относительно  $I$  приведенные уравнения разрешить не удастся. Поэтому нахождение  $P = 100I$  приходится сводить к решению уравнения

$$F(I) = SI / [(1 + I)^N - 1] - S_1 = 0$$

одним из численных методов. В приведенной ниже программе использован модифицированный метод Ньютона (см. описание программы 5.26 в разд. 5.4, константа  $K = 10\,000$ ). Как и ранее, поиск нужного фрагмента вычислений осуществляется с помощью условных переходов и задания нулевого значения искомого параметра.

**Программа 3.72.** Операции с периодически повторяющимися вкладами. Ввод: В/0  $S$  С/П  $S_1$  С/П  $N$  С/П  $P$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). Результат поступает в регистр X.

ПО	С/П	ПА	С/П	НВ	С/П	ПО	1	0	0
ПД	÷	П9	ИП0	$F_x=0$	28	ИПВ	ИП9	1	+
$F_x^y$	1	—	ИП9	÷	ИПА	×	С/П	ИПА	$F_x=0$
44	ИПВ	ИП9	1	+	$F_x^y$	1	—	$F1/x$	ИП0
×	ИП9	×	С/П	ИПВ	$F_x=0$	64	ИП0	ИП9	×
ИПА	÷	1	+	$F \ln$	ИП9	1	+	$F \ln$	+
С/П	ИПД	$F1/x$	П9	ИПВ	ИП9	1	+	$F_x^y$	1
—	ИП0	ИП9	×	XY	÷	ИПА	—	ИПД	$F_x^y$
÷	ИП9	+	П9	$FV_x$	—	$F_x=0$	64	ИП9	ИПД
×	С/П								

### Примеры.

$S$ , рублей	$S_1$ , рублей	$N$ , лет	$P$ %	Результат
0	1000	10	3	$S=11463,88$
30 000	0	20	3	$S_1=1116,4711$
30 000	1000	0	3	$N=21,714475$
30 000	1000	20	0	$P=4,07151$

Еще один вид регулярных вкладов характеризуется вкладом  $S_0$ , вносимым  $N$  раз в год на протяжении  $Y$  лет при номинальном проценте  $P$ . Обозначив через  $I = P/100$ , получим общую сумму капитала по истечении времени

$$S = S_0 \frac{(1 + I/N)^{NY} - 1}{I/N}.$$

Легко определить и значение регулярного вклада  $S_0$ , обеспечивающего заданную сумму  $S$  капитала, образующуюся через  $Y$  лет при  $N$  ежегодных вкладах и номинальном проценте  $P$ :

$$S_0 = S \frac{I/N}{(1 + I/N)^{NY} - 1}.$$

**Программа 3.73.** Вычисление  $S$  или  $S_0$  при регулярных  $N$  вкладах в год на протяжении  $Y$  лет при номинальных  $P$  % отчислений. Ввод: В/0  $S_0$  С/П  $S$  С/П  $P$  С/П  $N$  С/П  $Y$  С/П (искомому параметру  $S_0$  или  $S$  задать нулевое значение).

ПО	С/П	П1	С/П	П3	С/П	П4	С/П	П5	ИП3
ИП4	÷	1	0	0	÷	П6	1	+	ИП4
ИП5	×	XY	$Fx^y$	1	—	ИП6	÷	ИП1	$Fx=0$
35	XY	ИП0	×	С/П	XY	ИП1	XY	÷	С/П

### Примеры.

$S_0$ , руб	$S$ , руб	$P$ %	$N$	$Y$	Результат
10,95	0	12,5	12	5	$S=906,3654$
0	2500	10	12	5	$S_0=32,28444$

Еще один вид финансовых операций заключается в следующем: если внесен вклад  $S$ , то какими регулярными изъятиями  $S_0$  (по  $N$  раз в год) на протяжении времени  $Y$  лет можно полностью спаять его? Значение  $S_0$  определяется из выражения

$$S_0 = S \left[ \frac{I/N}{(1 + I/N)^{NY}} + \frac{1}{NY} \right],$$

где  $I = P/100$  и  $P$  — номинальный процент. В конце срока  $Y$  вклад полностью ликвидируется.

Другой вопрос заключается в том, какую сумму  $S$  надо одновременно внести, чтобы затем  $Y$  лет по  $N$  раз в год обеспечить

регулярные изъятия суммы  $S_0$ ? В этом случае

$$S = \frac{S_0 N}{I} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + I/N)^{NY}} \right].$$

**Программа 3.74.** Вычисление  $S$  или  $S_0$  при регулярных изъятиях вклада. Ввод:  $B/0 S_0 C/\Pi S C/\Pi P C/\Pi N C/\Pi Y C/\Pi$  (искомая сумма  $S$  или  $S_0$  задается нулевой).

П0	С/П	П1	С/П	П3	С/П	П4	С/П	П5	ИП3
ИП4	÷	1	0	0	÷	П6	1	+	ИП4
ИП5	×	XY	$Fx^y$	П7	ИП0	$Fx=0$	39	ИП6	ИП7
÷	ИП4	ИП5	×	$F1/x$	+	ИП1	×	С/П	1
ИП7	$F1/x$	—	ИП0	×	ИП6	÷	С/П		

**Примеры.**

$S_0$ , рублей	$S$ , рублей	$P$ %	$N$	$Y$	Результат
0	1000	12,5	12	5	$S_0=22,260349$
100	0	12,5	12	25	$S=9171,3365$

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ,  
МНОГОЧЛЕНОВ И ЦИФРОВЫХ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

**4.1. Гиперболические и обратные гиперболические функции действительного переменного**

**Программа 4.1.** Вычисление гиперболического синуса  $\operatorname{sh} x = (e^x - 1/e^x)/2$ . Ввод:  $x = PX$ .

$Fe^x \uparrow F1/x - 2 \div C/P \text{ БП } 00$

**Пример.** Для  $x = 1$  имеем  $\operatorname{sh}(1) = 1,1752012$ .

**Программа 4.2.** Вычисление гиперболического косинуса  $\operatorname{ch} x = (e^x + 1/e^x)/2$ . Ввод:  $x = PX$ .

$Fe^x \uparrow F1/x + 2 \div C/P \text{ БП } 00$

**Пример.** Для  $x = 1$  имеем  $\operatorname{ch}(1) = 1,5430806$ .

**Программа 4.3.** Вычисление гиперболического тангенса  $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$ . Ввод:  $x = PX$ .

$Fe^x \uparrow \uparrow F1/x + 2 \div - FBx \div$   
 $C/P \text{ БП } 00$

**Пример.** Для  $x = 1$  получим  $\operatorname{th}(1) = 0,76159417$ . Для вычисления  $\operatorname{cth} x = 1/\operatorname{th} x$  перед оператором  $C/P$  ввести дополнительно оператор  $F1/x$ .

**Программа 4.4.** Вычисление обратного гиперболического синуса  $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  при  $x = PX$  в диапазоне значений от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

$\uparrow Fx^2 1 + F\sqrt{\quad} + F\ln C/P \text{ БП } 00$

**Пример.** Для  $x = 1$  имеем  $\operatorname{arsh}(1) = 0,88137355$ .

**Программа 4.5.** Вычисление обратного гиперболического косинуса  $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$  для  $x = PX > 1$ .

$\uparrow Fx^2 1 - F\sqrt{\quad} + F\ln C/P \text{ БП } 00$

**Пример.** Для  $x = 2$  получаем  $\operatorname{arch}(2) = 1,3169579$ .

**Программа 4.6.** Вычисление обратного гиперболического тангенса  $\operatorname{arth} x = \ln \sqrt{(x+1)(1-x)}$  для  $x = PX$  в диапазоне значений от  $-1$  до  $+1$ .

$\uparrow 1 \text{ XY } \div 1 \text{ FBx } = \div F\sqrt{\quad} F\ln$   
 $C/P \text{ БП } 00$

**Пример.** Для  $x = 0,7615942$  получим  $\operatorname{arth}(0,7615942) = 1,0000001$ .

**Программа 4.7.** Вычисление обратного гиперболического котангенса  $\operatorname{arcth} x = \ln \sqrt{1 + 2/(x-1)}$  для  $x = PX > 1$ .

↑	1	—	2	XY	÷	1	+	F√ <sup>—</sup>	Fln
C/П	БП	00							

**Пример.**  $\operatorname{arcth}(1,3130352) = 1,0000001$ .

При необходимости вычисления всех гиперболических и обратных гиперболических функций (кроме  $\operatorname{arcth} x$ ) по одной программе целесообразно помимо задания  $x = PX$  задать код, с помощью которого осуществляется косвенный безусловный переход к вычислению пужной функции. В приведенной ниже программе код задается нажатием той клавиши, над которой стоит знак эквивалентной тригонометрической функции. Например, для вычисления  $\operatorname{arsh} x$  при  $x = 1$  вводится  $x = 1 = PX$ , нажимается клавиша C/П,

нажимается клавиша  $\left| \frac{\sin}{7} \right|$  и клавиша C/П (при этом вводится код  $k = 7$  и он пересчитывается в адрес  $(k - 3) \cdot 10$  безусловного перехода, т. е. перехода по адресу 40, с которого идет вычисление функции  $\operatorname{sh} x$ ). При таком подходе запоминать коды не требуется, что облегчает работу с программой.

**Программа 4.8.** Вычисление функций  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{arsh} x$ ,  $\operatorname{arch} x$  и  $\operatorname{arth} x$ . Ввод:  $x = PX$  C/П код C/П (см. пояснения выше).

П8	C/П	↑	3	—	1	0	×	ПД	КБПД
ИП8	↑	F $x^2$	1	+	F√ <sup>—</sup>	+	F ln	БП	71
ИП8	↑	F $x^2$	1	—	F√ <sup>—</sup>	+	F ln	БП	71
ИП8	1	+	1	ИП8	—	÷	F√ <sup>—</sup>	БП	17
ИП8	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	—	2	÷	C/П	БП	00
ИП8	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	+	2	÷	C/П	БП	00
ИП8	Fe <sup>x</sup>	↑	↑	F1/x	+	2	÷	—	FVx
÷	C/П	БП	00						

Работу этой программы можно проверить по контрольным примерам, приведенным к программам 4.1—4.6.

## 4.2. Элементарные функции комплексного переменного

В приведенных ниже программах комплексная переменная обозначена как  $z = x + iy$ , где  $x = P8$  и  $y = P9$ . Результат вычисления функции  $f(z) = x_j + iy_j$  получаем в виде  $x_j \rightarrow PX$  и  $y_j \rightarrow PY$ . Там, где это не оговорено особо, контрольные примеры даны для  $z = 3 + i \cdot 2$ .

**Программа 4.9.** Возведение комплексного числа в квадрат:

$$z^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy.$$

ИП8 ИП9  $\times$  2  $\times$  ИП8  $Fx^2$  ИП9  $Fx^2$  —  
С/П

**Пример.**  $f(z) = 5 + i \cdot 12.$

**Программа 4.10.** Обращение комплексного числа:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

ИП9 /—/ ИП8  $Fx^2$  ИП9  $Fx^2$  +  $\div$  ИП8  $FVx$   
 $\div$  С/П

**Пример.**  $f(z) = 0,23076923 - i \cdot 0,15384615.$

**Программа 4.11.** Обращение квадрата комплексного числа:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

ИП8 /—/ ИП9 2  $\times$   $\times$  ИП8  $Fx^2$  ИП9  $Fx^2$   
+  $Fx^2$   $\div$   $FVx$  ИП8  $Fx^2$  ИП9  $Fx^2$  — XY  
 $\div$  С/П

**Пример.**  $f(z) = 2,9585798 \cdot 10^{-2} - i \cdot 7,1005917 \cdot 10^{-2}.$

**Программа 4.12.** Обращение разности комплексного числа  $z = x + i \cdot y$  с числом  $a + i \cdot b$  при  $a = PA$  и  $b = PB$ :

$$\frac{1}{z - (a + ib)} = \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2} - i \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

ИПВ ИП9 —  $\uparrow$   $Fx^2$  ИП8 ИПА — П7  $Fx^2$   
+  $\div$  ИП7  $FVx$   $\div$  С/П

**Пример.** При  $a = 2$  и  $b = 1$  имеем  $f(z, a, b) = 0,5 - i \cdot 0,5.$

**Программа 4.13.** Вычисление корня квадратного из комплексного числа:

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \pm i \cdot \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}.$$

ИП8  $Fx^2$  ИП9  $Fx^2$  +  $FV$  ИП8 + 2  $\div$   
 $FV\sqrt{}$   $FVx$  ИП8 —  $FV\sqrt{}$  XY С/П

**Пример.**  $f(z) = \pm 1,817354 \pm i \cdot 0,55025048.$

**Программа 4.14.** Вычисление  $e^z$ :

$$e^z = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y.$$

Переключатель P — Г в положении P.

ИП9 Fsin ИП8 Fe<sup>x</sup> × FBx ИП9 Fcos × C/П

Пример.  $f(z) = -8,3585327 + i \cdot 18,263726$ .

Программа 4.15. Вычисление  $\ln z$ :

$$\ln z = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) + i \cdot \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi \right),$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Переключатель P — Г в положении P.

ИП9 ИП8 ÷ Farc<sup>t</sup>g ИП8 Fx<sup>2</sup> ИП9 Fx<sup>2</sup> + Fln  
2 ÷ C/П

Пример.  $f(z) = 1,2824746 + i \cdot 0,58800261$  (для  $k = 0$ ).

Программа 4.16. Вычисление синуса комплексной переменной:

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

ИП9 Fe<sup>x</sup> ↑ ↑ F1/x + 2 ÷ — FBx  
XY ИП8 Fcos × XY ИП8 Fsin × C/П

Пример.  $f(z) = 0,53092084 - i \cdot 3,5905644$ .

Программа 4.17. Вычисление косинуса комплексной переменной:

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

ИП9 Fe<sup>x</sup> ↑ ↑ F1/x + 2 ÷ — FBx  
XY ИП8 /—/ Fsin × XY ИП8 Fcos × C/П

Пример.  $f(z) = -3,7245453 - i \cdot 0,51182233$ .

Программа 4.18. Вычисление тангенса комплексной переменной:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\cos (2x) + \operatorname{ch} (2y)} + i \frac{\operatorname{sh} (2y)}{\cos (2x) + \operatorname{ch} (2y)}.$$

ИП9 2 × Fe<sup>x</sup> ↑ ↑ F1/x + 2 ÷  
— FBx ИП8 2 × П7 Fcos + ÷ FBx  
ИП7 Fsin XY ÷ C/П

Пример.  $f(z) = -9,8843723 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0,96538587$ .

Программа 4.19. Вычисление гиперболического синуса комплексной переменной:

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

ИП8 Fe<sup>x</sup> ↑ ↑ F1/x + 2 ÷ — FBx  
ИП9 Fsin × XY ИП9 Fcos × C/П

Пример  $f(z) = -4,168907 + i \cdot 9,1544984$ .

**Программа 4.20.** Вычисление гиперболического косинуса комплексной переменной:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \cdot \operatorname{sh} x \sin y.$$

ИП8	Fe <sup>x</sup>	↑	↑	F1/x	+	2	÷	—	FBx
XY	ИП9	Fsin	×	XY	ИП9	Fcos	×	C/П	

**Пример.**  $f(z) = -4,1896257 + i \cdot 9,1092272.$

**Программа 4.21.** Вычисление гиперболического тангенса комплексной переменной:

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x) + \cos(2y)} + i \cdot \frac{\sin(2y)}{\operatorname{ch}(2x) + \cos(2y)}.$$

ИП8	2	×	Fe <sup>x</sup>	↑	↑	F1/x	+	2	÷
—	FBx	ИП9	2	×	П7	Fcos	+	÷	FBx
ИП7	Fsin	XY	÷	XY	C/П				

**Пример.**  $f(z) = 1,0032386 - i \cdot 3,7640263 \cdot 10^{-3}.$

Обратные тригонометрические функции комплексного переменного вычисляются по следующим формулам:

$$\operatorname{arcsin} z = \operatorname{arcsin} B + i \cdot \ln [A + \sqrt{A^2 - 1}],$$

$$\operatorname{arccos} z = \operatorname{arccos} B - i \cdot \ln [A + \sqrt{A^2 - 1}],$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x}{1 - x^2 - y^2} \right) + i \cdot \frac{1}{4} \ln \left( \frac{x^2 + (y + 1)^2}{x^2 + (y - 1)^2} \right),$$

где

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

и

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

**Программа 4.22.** Вычисление арксинуса комплексной переменной.

ИП8	1	+	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	F√	ИП8	1
—	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	F√	П7	+	2	÷
↑	↑	Fx <sup>2</sup>	1	—	F√	+	Fln	XY	ИП7
—	Farcsin	C/П							

**Пример.**  $\operatorname{arcsin} z = 0,9646583 + i \cdot 1,9686379.$

**Программа 4.23.** Вычисление арккосинуса комплексной переменной.

ИП8 1	+	$Fx^2$	ИП9	$Fx^2$	+	$F\sqrt{\quad}$	ИП8 1
—	$Fx^2$	ИП9	$Fx^2$	+	$F\sqrt{\quad}$	П7	+
↑	↑	$Fx^2$	1	—	$F\sqrt{\quad}$	+	$F1/x$
ИП7	—	$\text{Farccos}$	С/П				ИП8 1

**Пример.**  $\arccos z = 0,60613793 - i \cdot 1,9686379$ .

**Программа 4.24.** Вычисление арктангенса комплексной переменной.

ИП8	$Fx^2$	↑	ИП9	1	+	$Fx^2$	+	XY	ИП9
1	—	$Fx^2$	+	÷	$F\ln$	4	÷	ИП8	2
×	1	ИП8	$Fx^2$	—	ИП9	$Fx^2$	—	÷	$\text{Farctg}$
2	÷	С/П							

**Пример.** С учетом допустимой области определения  $z$  для  $\arctg z = 0,3 + i \cdot 0,2$  получим  $\arctg z = 0,30187467 + i \cdot 0,18499464$ .

Для вычисления обратных гиперболических функций комплексного переменного воспользуемся связью с обратными тригонометрическими функциями:  $\text{arsh } z = -i \arcsin z$ ,  $\text{arch } z = \pm i \arccos z$  и  $\text{arth } z = -i \arctg iz$ .

**Программа 4.25.** Вычисление обратного гиперболического синуса комплексного переменного.

ИП9 /—/	1	+	$Fx^2$	ИП8	$Fx^2$	+	$F\sqrt{\quad}$	ИП9
/—/	1	—	$Fx^2$	ИП8	$Fx^2$	+	$F\sqrt{\quad}$	П7
2	÷	↑	↑	$Fx^2$	1	—	$F\sqrt{\quad}$	+
XY	ИП7	—	$\text{Farcsin}$	0	XY	—	XY	С/П

**Пример.**  $\text{arsh } z = 1,983387 + i \cdot 0,5706528$ .

**Программа 4.26.** Вычисление обратного гиперболического косинуса комплексного переменного.

**Пример.** Программа аналогична программе 4.23 с добавлением перед оператором С/П оператора XY. Тогда получим  $\text{arch } z = \pm 1,9686379 \pm i \cdot 0,60613793$ .

**Программа 4.27.** Вычисление обратного гиперболического тангенса комплексного переменного.

ИП9	$Fx^2$	↑	ИП8 1	+	$Fx^2$	+	XY	ИП8
1	—	$Fx^2$	+	÷	$F\ln$	4	+	ИП9 /—/
2	×	1	ИП9 $Fx^2$	—	ИП8	$Fx^2$	—	÷
$\text{Farctg}$	2	/—/	÷	XY	С/П			

**Пример.** С учетом допустимой для  $\text{arth } z$  области определения  $z$  при  $z = 0,3 + i \cdot 0,2$  получим  $\text{arth } z = 0,29574995 + i \cdot 0,2154745$ .

### 4.3. Вычисление рядов и сложных числовых последовательностей

В основе вычислений рядов и сложных числовых последовательностей лежат циклические программы с циклами, вычисляющими главный член последовательности. Изменение этого члена задается последовательностью опорных чисел, формируемых счетчиками вида  $i = i + 1$  или  $i = i - 1$ . Такие счетчики создаются операторами косвенной адресации вида КИПН ИПН или операторами организации циклов FL0, FL1, FL2 или FL3. Проиллюстрируем методику составления таких программ конкретными примерами (см. также разд. 3.4).

Вычисление суммы последовательности  $n$  целых чисел

$$S = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

можно (отвлекаясь от аналитического выражения для  $S = n(n+1)/2$ ) найти по программе (ввод  $n = PX$ ):

			↓	Цикл	↓	
ПО	0	ИП0	+	FL0	02	С/П

Главный член последовательности — сами числа  $i$ , которые создаются в регистре P0:  $n, n-1, \dots, 3, 2, 1$  и суммируются в регистре X по мере выполнения каждого цикла. Число 0 (оператор по адресу 01) служит для обнуления накапливающего регистра X перед выполнением циклов. Взяв  $n = 10$ , получим  $S = 55$ , нажав клавиши В/0 и С/П.

Другой вид последовательности (так называемые числа Фибоначчи) получается при использовании рекуррентной формулы  $x_{i+1} = x_{i-1} + x_i$  при  $x_0 = x_1 = 1$ :  $x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 8, x_6 = 13$  и т. д. Для формирования такой последовательности можно использовать следующую программу:

			↑	Цикл	↓	
1	С/П	XY	FBx	+	В/0	

Здесь цикл формируется с помощью оператора В/0, обеспечивающего переход на адрес 01. Исходная последовательность и числа Фибоначчи формируются в стеке. Если нужно получить  $n$ -е число Фибоначчи, можно применить оператор цикла.

**Программа 4.28.** Вычисление  $(n+1)$ -го числа Фибоначчи. Ввод:  $n = PX$  ( $n \geq 1$ ).

ПО 1 ↑ XY FBx + FL0 03 С/П

**Пример.** Для  $n = 6$  получим  $x_1 = 21$ , для  $n = 10$   $x_{11} = 144$ .

Другим примером является последовательность, образующая сумму факториалов:

$$S = \sum_{i=1}^n i! = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)! + n!$$

Здесь каждый последующий член равен предыдущему, умноженному на текущее значение  $i$ , т. е.  $i! = (i-1)! \cdot i$ .

**Программа 4.29.** Вычисление суммы  $S(i!)$  факториалов. Ввод:  $n = \text{PX}$ .

П7	0	П9	П6	1	П8	КИП6	ИП6	ИП8	×
П8	ИП9	+	П9	ИП6	ИП7	—	Fx=0 06	ИП9	
С/П	БП	00							

В этой программе  $n$  вводится в регистр 7, накопление сумм происходит в регистре 9, текущие значения  $i$  формируются в регистре 6. Регистр 8 используется для запоминания предшествующего опорного члена последовательности. Счет останавливается при  $i - n = 0$ .

**Пример.** Взяв  $n = 4 = \text{PX}$ , получим  $S(i!) = 33$ .

**Программа 4.30.** Вычисление произведения факториалов

$$P(i!) = 1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \dots (i!) \dots (n-1)! \cdot n!$$

Ввод:  $n = \text{PX}$ .

П7	0	П6	1	П8	П9	КИП6	ИП6	ИП8	×
П8	ИП9	×	П9	ИП6	ИП7	—	Fx=0 06	ИП9	
С/П	БП	00							

**Пример.** В этой программе для вычисления главного члена — факториала также используется рекуррентное соотношение  $i! = (i-1)! \cdot i$ . Для  $n = 4 = \text{PX}$  получим  $P(i!) = 288$ .

**Программа 4.31.** Вычисление последовательности

$$y = \sum_{k=1}^m k^n.$$

Ввод:  $m$  и  $n$  в регистр  $X$ .

П7	С/П	П9	0	П4	П8	КИП4	ИП4	ИП9	XY
Fx <sup>y</sup>	ИП8	+	П8	ИП7	ИП4	—	Fx=0 06	ИП8	
С/П	БП	00							

Главный член последовательности в этом случае  $k^n$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ .

**Пример.** Для  $m = 20$  и  $n = 4$  значение  $y = 722665,91$  (точное значение 722666) вычисляется за время около 2 мин.

Если знаки главного члена должны попеременно меняться, вводится умножение его в каждом цикле на  $-1$ . При суммировании бесконечного числа членов умножение заменяется суммированием конечного числа членов с контролем значений главного члена. Если эти значения становятся меньше малого числа  $\epsilon$ , задающего погрешность вычислений, последние останавливают.

Приведенные выше рекомендации широко используются в программах вычисления специальных функций по их разложению в ряды.

#### 4.4. Вычисление многочленов Лагерра, Лежандра, Лагранжа, Эрмита и Чебышева и их коэффициентов

Широко распространенные в научно-технических расчетах дифференциальные уравнения второго порядка часто имеют решения в виде ортогональных многочленов [13], коэффициенты которых вычисляются по приведенным ниже программам (см. также [18, 20]). Вычисления по ним проводятся после ввода  $n = PX$  и нажатия клавиши С/П (первый ряд В/0 и С/П) до индикации цифры 0 (каждое нажатие клавиши С/П дает один коэффициент).

**Программа 4.32.** Вычисление коэффициентов ортогонального многочлена Лагерра

$$L_n(x) = (n!)^2 \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^i}{(i!)^2 (n-i)!}$$

П9	Фл	×	Fcos	0	П6	XY	С/П	ИП6	КИП6
Ф,	ИП9	—	Fx <sup>2</sup>	×	ИП6	/—/	÷	БП	07

**Пример.** Переключатель Р — Г установить в положение Р.  
 $L_5(x) = -1x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$ .

**Программа 4.33.** Вычисление коэффициентов ортогонального многочлена Лежандра

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n/2} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{i! (n-i)! (n-2i)!} x^{n-2i}$$

П9	1	П6	П8	+	П3	2	П4	×	3
—	П0	П7	ИП8	×	ИП6	÷	П8	КИП6	ИП7
2	—	Fx<0	12	ИП8	С/П	КИП3	ИП3	КИП3	XY
ИП3	×	ИП8	×	ИП4	/—/	÷	ИП0	÷	П8
КИП4	КИП4	КИП0	КИП0	БП	24				

**Пример.**  $P_6(x) = 7,875x^6 - 8,75x^3 + 1,875x$ .

**Программа 4.34.** Вычисление коэффициентов ортогональных многочленов Эрмита:

$$H_n(x) = n! \sum_{i=0}^{n/2} (-1)^i \frac{(2x)^{n-2i}}{i!(n-2i)!}.$$

П9 1 П8 + П3 2 П4 ИП8 С/П КИП3  
 ИП3 КИП3 ХУ ИП3 × ИП8 /- / × ИП4 ÷  
 П8 КИП4 КИП4 БП 07

**Пример.**  $H_8(x) = 1x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105.$

**Программа 4.35.** Вычисление коэффициентов ортогональных многочленов Чебышева при  $n > 2$ :

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{i=0}^{n/2} (-1)^i \frac{(n-i-1)!}{i!(n-2i)!} (2x)^{n-2i}.$$

П9 2 П5 П7 — П4 1 П8 2 ИП7  
 × П7 FL1 08 С/П ИП9 /- / × 4 ÷  
 П6 ИП8 × С/П ИП6 ИП5 ÷ П7 1 П8  
 КИП5 ИП5 П4 2 — П0 ИП4 ИП9 — ИП8  
 × П8 КИП4 FL0 36 ИП7 БП 18

**Пример.**  $T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$  (коэффициенты округляются до целых чисел).

Вычисление значений ортогональных многочленов для заданных  $x$  возможно непосредственно по формулам для этих многочленов. Однако более удобны универсальные программы, обеспечивающие вычисление многочленов любой заданной степени по рекуррентным формулам [17]. Ниже дается пакет таких программ. Для каждого многочлена приведено две программы: первая — более длинная — имеет меньшую погрешность, вторая — более короткая — имеет большую погрешность.

**Программа 4.36.** Вычисление значений многочлена Лагерра  $L_n(x)$  по рекуррентной формуле

$$L_{i+1}(x) = \frac{1}{i+1} [(2i+1-x)L_i(x) - iL_{i-1}(x)], \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

при  $L_0(x) = 1$  и  $L_1(x) = 1 - x$ . Ввод:  $n = \text{РД}$ ,  $x = \text{РХ}$  (при смене  $n$  вводится  $x = \text{РХ}$  и нажимается клавиша С/П).

П7 1 П6 П8 ХУ — П9 ИП6 ИП8 /- /  
 × ИП6 2 × 1 + ИП7 — ИП9 П8  
 × + КИП6 ХУ ИП6 ÷ П9 ИП6 ИПД —  
 Fx ≥ 0 07 ИП9 С/П БП 00

**Пример.** Для  $x = 3$ :  $L_2(3) = -0,5$ ;  $L_3(3) = 1$ ;  $L_4(3) = 1,375$  ( $t_c \approx 25$  с).

**Программа 4.37.** Вычисление значений многочлена Лагерра. Ввод (для каждого  $x$ ):  $x \uparrow n$  В/0 С/П.

П0	ХУ	1	П6	ИП6	КИП6	F,	ИП0	$Fx^2$	÷
×	×	1	ХУ	—	FL0	04	С/П	БП	00

**Пример.** Для  $x = 3$ :  $L_3(3) = 1,0000009$ ;  $L_4(3) = 1,3750024$  ( $t_c \approx 4n$  с).

**Программа 4.38.** Вычисление значений многочлена Лежандра по рекуррентной формуле

$$P_{i+1}(x) = \frac{1}{i+1} [(2i+1)xP_i(x) - iP_{i-1}(x)], \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

при  $P_0(x) = 1$  и  $P_1(x) = x$ . Ввод см. в программе 4.36.

П7	П9	1	П8	П6	ИП6	/—/	ИП8	×	ИП6
2	×	1	+	ИП7	×	ИП9	П8	×	+
КИП6	ХУ	ИП6	÷	П9	ИП6	ИПД	—	$Fx \geq 0$	05
ИП9	С/П	БП	00						

**Пример.** Для  $x = 2$ :  $P_2(2) = 5,5$ ;  $P_3(2) = 17$ ;  $P_4(2) = 55,375$ .

**Программа 4.39.** Вычисление значений многочлена Лежандра. Ввод (для каждого  $x$ ):  $x \uparrow n$  В/0 С/П.

П3	ХУ	П2	$Cx$	П5	1	ИП4	ИП5	×	ХУ
П4	ИП5	КИП5	F,	ИП5	+	ИП2	×	×	ХУ
—	ИП5	÷	FL3	06	С/П				

**Пример.** Для  $x = 2$ :  $P_3(2) = 17$ ;  $P_4(2) = 55,375$  ( $t_c \approx 6n$  с).

**Программа 4.40.** Вычисление значений многочлена Эрмита по рекуррентной формуле:

$$H_n(x) = 2xH_i(x) - 2nH_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

при  $H_0(x) = 1$  и  $H_1(x) = 2x$ . Ввод см. в программе 4.36.

П7	2	×	П9	1	П8	П6	ИП6	2	×
ИП8	/—/	×	ИП7	2	×	ИП9	П8	×	+
П9	КИП6	ИП6	ИПД	—	$Fx \geq 0$	07	ИП9	С/П	БП
00									

**Пример.** Для  $x = 3$ :  $H_2(3) = 34$ ;  $H_3(3) = 180$ ;  $H_4(3) = 876$ .

**Программа 4.41.** Вычисление значений многочлена Эрмита. Ввод (для каждого  $x$ ):  $x \uparrow n$  В/0 С/П.

П0	П2	ХУ	П4	1	ХУ	ИП2	ИП0	—	×
ХУ	ИП1	×	+	2	×	FL2	05	С/П	

См. пример к программе 4.40 ( $t_c \approx 4n$  с).

Многочлены Чебышева первого рода  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  и второго рода  $U_n(x) = \sin((n+1) \arccos x) / \sin(\arccos x)$  вычисляются непосредственно по этим формулам или рекуррентным соотношениям (последнее дает меньшую погрешность).

**Программа 4.42.** Вычисление значений многочлена Чебышева первого рода. Ввод:  $n = \text{РД}$ ,  $x = \text{РХ}$ .

Farccos ИПД  $\times$  Fcos C/П БП 00

**Пример.** Для  $x = 0,2$ :  $T_3(0,2) = -0,56800025$ ;  $T_5(0,2) = 0,84512025$  ( $t_0 \approx 5$  с).

**Программа 4.43.** Вычисление значений многочлена Чебышева первого рода по рекуррентной формуле

$$T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

при  $T_0(x) = 1$  и  $T_1(x) = x$ . Ввод:  $n = \text{РД}$ ,  $x = \text{РХ}$ .

П7 П9 1 П8 ИПД 1 — П0 ИП8 /—/  
ИП9 П8 2  $\times$  ИП7  $\times$  + П9 FL0 08  
C/П БП 00

**Пример.** Для  $x = 0,2$ :  $T_3(0,2) = -0,568$ ;  $T_5(0,2) = 0,84512$  ( $t_0 \approx 18$  с).

**Программа 4.44.** Вычисление значений многочлена Чебышева второго рода. Ввод:  $n = \text{РД}$ ,  $x = \text{РХ}$ .

Farccos П9 ИПД 1 +  $\times$  Fsin ИП9 Fsin +  
C/П БП 00

**Примеры.**  $U_3(0,15) = -0,57300006$ ;  $U_2(0,2) = -0,83999998$ .

Особый интерес представляет вычисление коэффициентов интерполяционных полиномов Лагранжа, которые применяются для интерполяции функций  $y(x)$ , заданной рядом ординат  $y_0 \div y_n$  при абсциссах  $x_0 \div x_n$ . В качестве нулевого узла можно использовать любой узел; например, при трех узлах и нулевом центральном значения функций будут обозначаться как  $y_{-1} = y(x_{-1})$ ,  $y_0 = y(x_0)$  и  $y_{+1} = y(x_{+1})$ . Полином Лагранжа может записываться в двух формах. Первая форма имеет вид

$$y(x) = A_0(x)y_0 + A_1(x)y_1 + \dots + A_n(x)y_n = \sum_{i=0}^n A_i(x)y_i, \quad (4.1)$$

где коэффициенты определяются из формулы

$$A_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Ввиду сложности этого выражения на микрокалькуляторах значения  $A_i(x)$  можно вычислять раздельно для полиномов с  $n \leq 5$  при  $n+1$  ординатах. При нормировке

$$x = x_0 + ph,$$

где  $h$  — разность абсцисс соседних узлов,

$$p = (x - x_0)/h \quad (4.2)$$

и будем вычислять значения нормированных коэффициентов Лагранжа  $A_i(p)$ . Ниже дан пакет программ, позволяющих вычислить  $A_i(p)$  для  $(n+1) = 3, 4, 5$  и  $6$  по формулам, приведенным в [13], с минимальным временем вычислений.

**Программа 4.45.** Вычисление коэффициентов полинома Лагранжа при трех ординатах  $y_{-1}, y_0, y_{+1}$ :

$$A_i(p) = (-1)^{i+1} \frac{p(p^2 - 1)}{(1+i)!(1-i)!(p-i)}$$

ПД	$Fx^2$	1	—	ИПД	×	ПС	0	П6	ПП
27	2	÷	П1	ПП	27	/—/	ПО	ПП	27
2	÷	ПА	3	С/П	БП	00	КИП6	ИПС	ИПД
ИП6	—	2	+	÷	В/0				

**Пример.** Для  $p = 0,45 = PX$ , нажав клавишу С/П, получим цифру 3 (указание на 3 ординаты). Коэффициенты полинома заносятся в регистры  $A_{-1} = -0,12375 \rightarrow P1$ ,  $A_0 = 0,7975 \rightarrow P0$ ,  $A_{+1} = 0,32625 \rightarrow PA$ .

**Программа 4.46.** Вычисление коэффициентов полинома Лагранжа при четырех ординатах  $y_{-1}, y_0, y_{+1}$  и  $y_{+2}$ :

$$A_i(p) = (-1)^{i+2} \frac{p(p^2 - 1)(p - 2)}{(1+i)!(2-i)!(p-i)}$$

ПД	$Fx^2$	1	—	ИПД	×	ИПД	2	—	×
ПС	0	П6	ПП	39	6	/—/	÷	П1	ПП
39	2	÷	ПО	ПП	39	2	/—/	÷	ПА
ПП	39	6	÷	ПВ	4	С/П	БП	00	КИП6
ИПС	ИПД	ИП6	—	2	+	÷	В/0		

**Пример.** Для  $p = 0,15$ , нажав клавишу С/П, получим цифру 4 (число ординат). Коэффициенты полинома заносятся в регистры:  $A_{-1} = -0,0393125 \rightarrow P1$ ,  $A_0 = 0,9041875 \rightarrow P0$ ,  $A_{+1} = 0,1595625 \rightarrow PA$  и  $A_{+2} = -0,0244375 \rightarrow PB$ .

**Программа 4.47.** Вычисление коэффициентов полинома Лагранжа при пяти ординатах  $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1}$  и  $y_{+2}$ :

$$A_i(p) = (-1)^{i+2} \frac{p(p^2 - 1)(p^2 - 4)}{(2+i)!(2-i)!(p-i)} \quad (4.3)$$

ПД	$Fx^2$	ПС	1	—	ИПС	4	—	×	ИПД
×	ПС	0	П6	ПП	47	2	4	÷	П2
ПП	47	6	/—/	÷	П1	ПП	47	4	÷
ПО	ПП	47	6	/—/	÷	ПА	ПП	47	2
4	÷	ПВ	5	С/П	БП	00	КИП6	ИПС	ИПД
ИП6	—	3	+	÷	В/0				

**Пример.** Для  $p = 0,3$ , нажав клавишу С/П, получим цифру 5 (число ординат). Коэффициенты полинома заносятся в регистры:  $A_{-2} = 0,0193375 \rightarrow P2$ ,  $A_{-1} = -0,13685 \rightarrow P1$ ,  $A_0 = 0,889525 \rightarrow P0$ ,  $A_{+1} = 0,25415 \rightarrow PA$  и  $A_{+2} = -0,0261625 \rightarrow PB$ .

**Программа 4.48.** Вычисление коэффициентов полинома Лагранжа при шести ординатах  $-y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2}$  и  $y_{+3}$ :

$$A_i(p) = (-1)^{i+3} \frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{(2+i)!(3-i)!(p-i)}.$$

ПД	Fx <sup>2</sup>	П8	1	—	ИП8	4	—	×	ИПД
3	—	×	ИПД	×	П8	0	П6	ПП	63
1	2	0	/—/	÷	П2	ПП	63	2	4
÷	П1	ПП	63	1	2	/—/	÷	П0	ПП
63	1	2	÷	ПА	ПП	63	2	4	/—/
÷	ПВ	ПП	63	1	2	0	÷	ПС	6
С/П	БП	00	КИП6	ИП8	ИПД	ИП6	—	3	+
÷	В/0								

**Пример.** Для  $p = 1,45 = PX$ , нажав клавишу С/П, получим цифру 6 (число ординат). Коэффициенты полинома заносятся в регистры:  $A_{-2} = -0,011356897 \rightarrow P2$ ,  $A_{-1} = 0,079961828 \rightarrow P1$ ,  $A_0 = -0,27021584 \rightarrow P0$ ,  $A_{+1} = 0,8706955 \rightarrow PA$ ,  $A_{+2} = 0,35619361 \rightarrow PB$  и  $A_{+3} = -0,025278255 \rightarrow PC$ .

Во второй форме записи интерполяционного полинома Лагранжа

$$y(x) = b_0(y) + b_1(y)(x - x_0) + b_2(y)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(y)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (4.4)$$

коэффициенты  $b_0(y) \div b_n(y)$ , или сокращенно  $b_0 \div b_n$ , являются функциями ординат  $y_0 \div y_n$  [1]. Алгоритм их вычисления с минимальным временем счета по схеме Эйткена поясняется табл. 4.1. При известных  $b_0 \div b_n$  вычисление  $y(x)$  для любого  $x$  можно провести по схеме Горнера.

**Программа 4.49.** Вычисление коэффициентов  $b_0, b_1$  и  $b_2$  по вводимым в регистр X значениям  $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2$  и  $y_2$ .

П0	С/П	ПА	С/П	П1	С/П	ПВ	С/П	П2	С/П
ПС	ИПЕ	ИПА	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПВ	ИПС
ИПА	—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПВ	—	ИП2	ИП1
—	÷	ПС	0	С/П	БП	00			

**Пример.** Для  $x_0 = 1,3; y_0 = 0,934; x_1 = 1,4; y_1 = 0,9523; x_2 = 1,5$  и  $y_2 = 0,9661$  получим цифру 0 (окончание вычислений). Коэффициенты полинома заносятся в регистры:  $b_0 = 0,934 \rightarrow PA$ ,  $b_1 = 0,183 \rightarrow PB$  и  $b_2 = -0,225 \rightarrow PC$ .

**Программа 4.50.** Вычисление коэффициентов  $b_0, b_1, b_2$  и  $b_3$ .  
 Ввод:  $x_0 \div x_3 = P0 \div P3, y_0 \div y_3 = PA \div PD$ , результат  $b_0 \div b_3 \rightarrow PA + PD$ .

ИПВ ИПА — ИП1 ИПО — ÷ ПВ ИПС ИПА  
 — ИП2 ИПО — ÷ ИПВ — ИП2 ИП1 —  
 ÷ ПС ИПД ИПА — ИПЗ ИПО — ÷ ИПВ  
 — ИПЗ ИП1 — ÷ ИПС — ИПЗ ИП2 —  
 ÷ ПД 0 С/П

**Пример.** Для  $x_0 = 1,3; x_1 = 1,4; x_2 = 1,5; x_3 = 1,6; y_0 = 0,934; y_1 = 0,9523; y_2 = 0,9661$  и  $y_3 = 0,9763$  получим, нажав

Таблица 4.1

$x$	$y$	$q$	$r$	$s$
$x_0 \rightarrow P0$	$y_0 \rightarrow PA = b_0$			
$x_1 \rightarrow P1$	$y_1 \rightarrow PB$	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =$ $= q_1 = B_1 \rightarrow$ $\rightarrow PB$		
$x_2 \rightarrow P2$	$y_2 \rightarrow PC$	$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} =$ $= q_2 \rightarrow PC$	$\frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} = r_2 =$ $= b_2 \rightarrow PC$	
$x_3 \rightarrow P3$	$y_3 \rightarrow PD$	$\frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} =$ $= q_3 \rightarrow PD$	$\frac{q_3 - q_1}{x_3 - x_1} =$ $= r_3 \rightarrow PD$	$\frac{r_3 - r_2}{x_3 - x_2} =$ $= s_3 = b_3 \rightarrow PD$

клавишу С/П, цифру 0 (указывает на конец счета). Коэффициенты полинома записываются в регистры:  $b_0 = 0,934 \rightarrow PA, b_1 = 0,183 \rightarrow PB, b_2 = -0,225 \rightarrow PC$  и  $b_3 = 0,15 \rightarrow PD$ .

**Программа 4.51.** Вычисление коэффициентов  $b_0, b_1, b_2, b_3$  и  $b_4$ .  
 Ввод:  $x_0 \div x_4 = P0 \div P4, y_0 = P9$  и  $y_1 \div y_4 = PA \div PD$ , результат  $b_0 \rightarrow P9, b_1 \div b_4 \rightarrow PA \div PD$ .

ИПА ИП9 — ИП1 ИПО — ÷ ПА ИПВ ИП9  
 — ИП2 ИПО — ÷ ИПА — ИП2 ИП1 —  
 ÷ ПВ ИПС ИП9 — ИПЗ ИПО — ÷ ИПА  
 — ИПЗ ИП1 — ÷ ИПВ — ИПЗ ИП2 —  
 ÷ ПС ИПД ИП9 — ИП4 ИПО — ÷ ИПА  
 — ИП4 ИП1 — ÷ ИПВ — ИП4 ИП2 —  
 ÷ ЦНС — ИП4 ИП3 — ÷ ПД 0 С/П

**Пример.** Для  $x_0 = 2,2$ ;  $x_1 = 2,3$ ;  $x_2 = 2,4$ ;  $x_3 = 2,5$ ;  $x_4 = 2,6$ ;  $y_1 = 0,4860966$ ;  $y_1 = 0,4892759$ ;  $y_2 = 0,4918025$ ;  $y_3 = 0,4937903$  и  $y_4 = 0,4953388$  получим, нажав клавишу С/П, цифру 0, указывающую на конец вычислений. Результаты заносятся в регистры:  $b_0 = 0,4860966 \rightarrow P9$ ,  $b_1 = 3,1793 \cdot 10^{-2} \rightarrow PA$ ,  $b_2 = -3,2635 \cdot 10^{-2} \rightarrow PB$ ,  $b_3 = 1,80333 \cdot 10^{-2} \rightarrow PC$  и  $b_4 = -5,99965 \cdot 10^{-3} \rightarrow PD$ .

Коэффициенты  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ( $n \leq 5$ ) могут быть вычислены с помощью универсальной программы (она является частью программы 5.16).

**Программа 4.52.** Вычисление коэффициентов  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ( $n \leq 5$ ). Ввод:  $y_0 \uparrow x_0$  В/О С/П (индицируется цифра 14),  $y_1 \uparrow x_1$  С/П и т. д. до ввода  $y_n$  и  $x_n$ . Результаты вычислений:  $b_0 \rightarrow P7$ ,  $b_1 \rightarrow P6, \dots, b_5 \rightarrow P2$ ,  $x_0 \rightarrow PD$ ,  $x_1 \rightarrow PC, \dots, x_5 \rightarrow P8$ .

ПД	ХУ	П7	7	П4	1	4	ПО	С/П	ПЗ
F,	ИП8	КИПО	—	ХУ	ИПО	5	—	ПО	F,
КИПО	—	ХУ	÷	ИПО	6	+	ПО	6	—
ИП1	—	Fx=0	10	F,	КП1	ИП8	КПО	БП	05

Для проверки программы можно воспользоваться приведенными выше примерами.

## 4.5. Операции с многочленами действительного и комплексного переменного

Вычисление значений степенного многочлена действительного переменного

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

производится по схеме Горнера

$$A(x) = (\dots(a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0.$$

Короткие программы получают при использовании косвенной адресации для вызова коэффициентов  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  в ходе вычисления  $A(x)$  по схеме Горнера.

**Программа 4.53.** Вычисление значений степенного многочлена  $A(x)$ . Ввод:  $a_0 = P0$ ,  $a_1 \div a_n = P1 \div Pn$  ( $n \leq 12$ ) и далее для каждого  $x \ n = PX$  и  $x = PX$ . Результат  $A(x) \rightarrow PX$ .

ПД	С/П	↑	КИПД	ИПД	1	—	ПД	F,	×
КИПД	+	ИПД	Fx=0	05	ХУ	С/П	БП	00	

**Пример.** Для многочлена  $A(x) = 12x^{12} + 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1x + 1$  при  $x = 2$  получим  $A(2) = 90115$  ( $t_c = 35$  с).

Время счета можно сократить, реализовав схему Горнера с применением оператора цикла и оператора косвенной адресации КИП↑ без модификации адреса в адресном регистре 0 (этот оператор

нельзя применять в программах для ПМК «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52»).

**Программа 4.54°.** Вычисление значений степенного многочлена  $A(x)$ . Ввод:  $a_0 = PД$ ,  $a_1 \div a_n = P1 \div Pn$  ( $n \leq 12$ ) и далее для каждого  $x$   $n = PХ$  и  $x = PХ$ .

ПО	С/П	↑	↑	С <sub>з</sub>	КИП↑	+	×	FLO	05
ИПД	+	С/П	БП	00					

Контрольный пример см. в программе 4.53. Время счета 18 с.

**Программа 4.55°.** Вычисление значений степенного многочлена  $A(x)$  с автоматическим вводом его коэффициентов в регистры памяти. Ввод (в регистр X):  $n$ ,  $a_n$ ,  $a_{n-1}, \dots, a_0$  и  $x$  (при смене  $x$  вводится только новое значение  $x$ ). Степень многочлена  $n \leq 11$ .

ПД	ПО	ИПО	С/П	КП↑	FLO	02	С <sub>з</sub>	С/П	ПС
ИПД	ПО	С <sub>з</sub>	С/П	↑	↑	С <sub>з</sub>	КИП↑	+	×
FLO	17	ИПС	+	С/П	ИПД	ПО	XY	БП	14

**Пример.** Для многочлена  $A(x) = 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1x + 1$  получим для  $x = 8$   $A(x) = 2790067$  при времени вычисления  $A(x)$  около 20 с.

Время вычисления  $A(x)$  можно существенно сократить, отказавшись от использования косвенной адресации и реализовав схему Горнера с вызовом  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  непосредственно из регистров памяти [19, 20].

**Программа 4.56.** Вычисление значений многочлена  $A(x)$  при степени  $n = 13$ . Ввод:  $a_0 \div a_{13} = P0 \div P9, PA, PB, PC, PD$  и далее для каждого  $x$   $x = PХ$ .

↑	↑	ИПД	×	ИПС	+	×	ИПВ	+	×
ИПА	+	×	ИП9	+	×	ИП8	+	×	ИП7
+	×	ИП6	+	×	ИП5	+	×	ИП4	+
×	ИП3	+	×	ИП2	+	×	ИП1	+	×
ИПО	+	С/П	БП	00					

**Пример** Для многочлена  $A(x) = 13x^{13} + 12x^{12} + \dots + 1x + 1$  при  $x = 2$  получим  $A(2) = 196611$  ( $t_c = 13$  с). При  $n < 13$  можно также использовать эту программу, давая отсутствующим коэффициентам многочлена нулевые значения. Однако для сокращения времени счета лучше сократить программу, исключив из нее лишние операторы.

Вычисление значений многочлена действительного переменного при  $n \leq 15$  можно выполнить, заменив первые три оператора операторами  $\times +$  ИПД  $+$ . При этом ввод должен быть следующим:  $a_0 \div a_{13} = P0 \div PД$  и далее  $x = PХ$  ↑↑  $a_{14}$  XY  $a_{15}$  В/0 и С/П. Тогда для многочлена  $A(x) = 1 + 1x + 2 + 3 + \dots + 15x^{15}$  получим  $A(2) = 917507$  при  $x = 2$  ( $t_c \approx 14$  с).

**Программа 4.57.** Вычисление значений многочлена действительной переменной при произвольной степени  $n$  в полуавтоматическом режиме. Ввод:  $n = P0$ ,  $a_n = P7$ ,  $x = P8$ ,  $a_{n-1} = PX$  В/О С/П  $a_{n-2} = PX$ , ...,  $a_0 = PX$  (после ввода каждого  $a_i$  индицируется номер  $i$ , после ввода  $a_0$  получаем результат  $0 = PX$  и  $A(x) \rightarrow \rightarrow P7$ ).

ИП7 ИП8  $\times$  + П7 КИПО ИПО С/П БП 00

Для проверки программы можно воспользоваться одним из приведенных выше примеров.

Над многочленами могут проводиться различные операции, реализуемые с помощью приведенных ниже программ [19, 20].

**Программа 4.58.** Вычисление коэффициентов частного  $D(x) = A(x)/(x^2 + b_1x + b_0)$  и остатка  $r_1x + r_0$  для многочлена  $A(x)$  степени  $n \leq 9$ . Ввод:  $a_0 \div a_n = P0 \div Pn$ ,  $b_1 = PД$ ,  $b_0 = PС$ ,  $n = PX$ . Нажав клавиши В/О и С/П, получаем:  $r_0 \rightarrow PX$ ,  $r_1 \rightarrow PY$ ,  $d_0 \rightarrow P0$ , ...,  $d_{n-2} \rightarrow Pn - 2$ .

ПА 1	—	ПВ	КИПА	КИПВ	ИПВ 1	—	ПВ
$Fx \geq 0$ 26	F,	ХУ	ИПД	$\times$	—	ХУ	КИПВ ХУ
КПВ ИПС	$\times$	—	БП	06	F,	С/П	

**Пример.** Для  $(x^6 + 7x^5 + 15x^4 + 15x^3 + 4x^2 - 2x + 120)/(x^2 - 2x + 2)$  получим  $r_1 = r_0 = 0$  и  $D(x) = x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$  при  $t_c \approx 40$  с.

**Программа 4.59.** Вычисление вещественного корня  $\bar{x}$  алгебраического уравнения

$$A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

при  $a_n = 1$  и коэффициентов частного  $B(x) = A(x)/(x - \bar{x})$ . Ввод:  $a_0 \div a_{n-1} = P0 \div Pn - 1$ ,  $1 = Pn$ ,  $n = PС$  и  $1 + |a_{\max}| = PД$ , где  $|a_{\max}|$  — взятое по модулю значение наибольшего из  $a_i$ . Корень  $\bar{x}$  вычисляется методом дихотомии (см. разд. 5.4). Результат:  $\bar{x} \rightarrow \rightarrow PX = PД$ ,  $b_{n-2} \rightarrow Pn - 2$ , ...,  $1 \rightarrow Pn - 1$ .

ИПО	ПВ	С	ХУ	FBx	$\uparrow$	$\uparrow$	ИПС	ПО	F,
КИПО	+	$\times$	ИПО	$Fx=0$ 09	FBx	+	ХУ	F,	
ИПВ	+	$Fx < 0$	28	F,	ИПД	+	$\uparrow$	F,	ИПД
2	$\div$	ПД	—	—	$Fx=0$ 04	+	ИП1	ПД	
F,	ИПС	ПО	П1	F,	КИПО	+	КП1	$\times$	ИПО
2	—	$Fx=0$ 44	F,	ИПД	+	ПВ	F,	ПД	
3	ПО	КИПО	КПО	ИПС	ИПО	3	+	ПО	—
$Fx=0$ 62	ИПВ	ПО	ИПД	С/П					

**Пример.** Для уравнения

$$A(x) = x^7 + 7,5x^6 + 18,5x^5 + 22,5x^4 + 11,5x^3 + 0x^2 + 119x + 60 = 0$$

получим  $\bar{x} = -4,0000001$  и

$$b(x) = x^6 + 3,4999999x^5 + 4,5x^4 + 4,5x^3 - 6,5x^2 + 26,000001x + 14,99999$$

при точном

$$b(x) = x^6 + 3,5x^5 + 4,5x^4 + 4,5x^3 - 6,5x^2 + 26x + 15$$

и  $t_0 \approx 13$  мин.

Для вычисления степенных многочленов комплексного переменного (коэффициенты многочлена действительны) также используется схема Горнера, но с применением комплексной арифметики — программы 4.60—4.65 [19].

**Программа 4.60.** Вычисление комплексных значений  $A(z) = a + ib$  многочлена  $A(z)$  мнимой переменной  $z = i\omega$  при степени  $n \leq 11$ . Ввод:  $a_0 + a_{11} = P0 \div P6$ ,  $n = P4$  и  $\omega = PX$  (при смене  $\omega$  вводится только новое значение  $\omega$ ). Результат  $a \rightarrow PX$ ,  $b \rightarrow PY$  и  $\omega \rightarrow PC$ .

ПС	ИПО	ИПД	1	+	ПО	Cx	↑	КИПО	Fx ≠ 0
22	+	ИПС	×	XУ	ИПС	×	0	XУ	—
БП	08	+	F,	F,	F,	ПО	+	C/П	БП
00									

**Пример.** Для  $A(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + 11z^{11}$  и  $\omega = 2$  получим  $A(z) = -8519 - i \cdot 18678$  при  $t_0 \approx 50$  с.

**Программа 4.61.** Вычисление комплексных значений  $A(z) = a + ib$  многочлена  $A(z)$  мнимой переменной  $z = i\omega$  при степени  $n \leq 15$ . Ввод:  $a_0 + a_{11} = P0 \div P6$  и далее  $a_{12} = P4$ ,  $a_{13} = PX \uparrow a_{15} = PX \uparrow a_{14} = PX \uparrow \omega = PX$  В/0 и C/П. Получаем  $a \rightarrow PX$ ,  $b \rightarrow P4$  и  $c \rightarrow PC$ .

ПС	Fx <sup>2</sup>	×	ИПД	XУ	—	ИПС	×	ПД	F,
ИПС	Fx <sup>2</sup>	×	XУ	—	ИПС	Fx <sup>2</sup>	×	ИПВ	ПП
56	ИПА	ПП	56	ИП9	ПП	56	ИП8	ПП	56
ИП7	ПП	56	ИП6	ПП	56	ИП5	ПП	56	ИП4
ПП	56	ИП3	ПП	56	ИП2	ПП	56	ИП1	ПП
56	ИПО	+	C/П	БП	00	+	ИПС	×	ИПД
XУ	ПД	XУ	ИПС	×	0	XУ	—	В/0	

**Пример.** Для многочлена  $A(z) = 1 + z + 2z^2 + \dots + 15z^{15}$  и  $\omega = 2$  получим  $A(z) = -188743 - i \cdot 403702$  при  $t_0 \approx 60$  с.

**Программа 4.62.** Вычисление значений многочлена  $A(z) = a + ib$  мнимой переменной  $z = i\omega$  при произвольной степени  $n$  в полуавтоматическом режиме. Ввод (для каждого значения  $z$ ):  $n = P4$ ,  $a_n = P7$ ,  $0 = P8$ ,  $\omega = P9$  и далее  $a_{n-1}$  В/0 C/П  $a_{n-2}$  C/П ...  $a_0$  C/П. Получаем  $0 \rightarrow PX$ ,  $a \rightarrow P7$ ,  $b \rightarrow P8$  и  $\omega \rightarrow P9$ . При вводе коэффициентов  $a_j$  индицируется номер  $j$ .

ИП9	/-/	ИП8	×	+	ИП7	ИП9	×	П8	XУ
П7	ИП4	1	—	C/П	БП	00			

Программа проверяется по одному из приведенных выше примеров.

**Программа 4.63.** Вычисление значений многочлена комплексного переменного  $z = a + ib$  при степени  $n \leq 10$  по схеме Горнера. Ввод:  $a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_9 = P9, a_{10} = PA, a = PY$  и  $b = PX$ . Результат  $A(z) = c + id: c \rightarrow PX, d \rightarrow PY$ .

ПС	ХУ	ПВ	ИПА	×	ИП9	+	ИПС	ИПА	+
ПД	ХУ	ИП8	ПП	42	ИП7	ПП	42	ИП6	ПП
42	ИП5	ПП	42	ИП4	ПП	42	ИП3	ПП	42
ИП2	ПП	42	ИП1	ПП	42	ИП0	ПП	42	С/П
БП	00	ИПД	ИПС	×	—	ХУ	ИПВ	×	+
ХУ	ИПС	×	ИПД	ИПВ	×	+	ПД	ХУ	В/0

**Пример.** Для многочлена  $A(z) = 1 + z + 2z^2 + \dots + 8z^9$  ( $a_9 = a_{10} = 0$ ) при  $z = 1 + i \cdot 1$  получим  $P(z) = 144 - 113 \cdot i$  при  $t_c = 70$  с.

**Программа 4.64.** Вычисление значений многочлена комплексного переменного  $z = a + ib$  при степени  $n \leq 12$ . Ввод:  $a_0 \div a_{10} = P0 \div PA$  и далее (для каждого значения  $z$ )  $a_{11} = PД, a = PВ, b = PС$  и  $a_{12} = PХ$ . Результат:  $A(z) = c + id: c \rightarrow PХ, d \rightarrow PУ = PД$ .

↑	ИПВ	×	ИПД	+	ХУ	ИПС	×	ПД	ХУ
ИПА	ПП	46	ИП9	ПП	46	ИП8	ПП	46	ИП7
ПП	46	ИП6	ПП	46	ИП5	ПП	46	ИП4	ПП
46	ИП3	ПП	46	ИП2	ПП	46	ИП1	ПП	46
ИП0	ПП	46	С/П	БП	00	ИПД	ИПС	×	—
ХУ	ИПВ	×	+	ХУ	ИПС	×	ИПД	ИПВ	×
+	ПД	ХУ	В/0						

**Пример.** Для многочлена  $A(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + 12z^{12}$  при  $z = (1 + i \cdot 2)$  получим  $A(z) = 200603 + i \cdot 61484$ , а при  $z = (1 + i \cdot 1)$  соответственно  $A(z) = -832 + i \cdot 703$  ( $t_c \approx 80$  с).

**Программа 4.65.** Вычисление значений многочлена комплексной переменной  $z = a + ib$  при произвольной степени  $n$  в полуавтоматическом режиме. Ввод (для каждого  $z$ ):  $n = P0, a_n = PA, a = PВ, b = PС, 0 = PД$  и далее  $a_{n-1} В/0 С/П, a_{n-2} С/П, \dots, a_0 С/П$ . Результат  $P(z) = c + id: 0 \rightarrow PХ, c \rightarrow PA, d \rightarrow PД$ . При вводе  $a_j$  индицируется номер  $j$ .

ИПА	ИПВ	×	ИПД	ИПС	×	—	+	ИПА	ИПС
×	ИПД	ИПВ	×	+	ПД	ХУ	ПА	КИПО	ИПО
С/П	БП	00							

Программу можно проверить по одному из приведенных выше примеров.

Операции с многочленами широко используются при проведении анализа линейных систем (в частности, электрических цепей) операторным методом [2, 3, 13]. При этом системы описываются дробно-рациональными функциями комплексной частоты (оператора Лапласа)  $p = \sigma + i \cdot \omega$ , представляемыми в виде отношения двух многочленов

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k p^k}{\sum_{k=0}^m b_k p^k} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m} \quad (4.5)$$

с действительными коэффициентами  $a_k$  и  $b_k$ .

При составлении операторных функций  $F(p)$  линейных систем приходится проводить ряд операций над многочленами, некоторые из которых автоматизируются при использовании приведенных ниже программ.

**Программа 4.66.** Вычисление коэффициентов  $c_i$  произведения трехчлена  $(b_2 p^2 + b_1 p + b_0)$  на многочлен  $A(p)$  произвольной степени  $n$ . Ввод:  $n + 3 = P2$ ,  $b_2 = P4$ ,  $b_1 = P5$ ,  $b_0 = P6$ ,  $0 = P7 = P8$ ,  $a_n = PX$  В/0. Далее, нажимая клавишу С/П, получаем  $n + 2 \rightarrow PX$  и  $c_{n+2} \rightarrow PY$ ; введя  $a_{n-1} = PX$  и нажав клавишу С/П, получаем  $n + 1 \rightarrow PX$  и  $c_{n+1} \rightarrow PY$  и т. д. до индикации 0 после ввода  $a_0 (c_2 \rightarrow PY, c_1 \rightarrow P7, c_0 \rightarrow P8)$ .

П1	ИП4	×	ИП7	+	ПЗ	ИП1	ИП5	×	ИП8
+	П7	ИП1	ИП6	×	П8	ИП2	1	—	П2
ИПЗ	ХУ	С/П	БП						

**Пример.**  $(3p^2 + 2p + 1)(4p^2 + p + 2) = 12p^4 + 17p^3 + 16p^2 + 7p + 2$ .

**Программа 4.67.** Вычисление коэффициентов произведения многочлена  $B(p)$  степени  $m \leq 6$  на многочлен  $A(p)$  произвольной степени  $n$ . Ввод:  $b_0 \div b_6 = P0 \div P6$  и далее  $0 = P7 \div PA$ ;  $a_n = PX$  В/0 С/П (получаем  $a_n \rightarrow PX$ ,  $c_{n+6} \rightarrow PY$ ),  $a_{n-1} = PX$  С/П (получаем  $a_{n-1} \rightarrow PX$ ,  $c_{n-5} \rightarrow PY$ ) и т. д. до получения  $a_0 \rightarrow PX$  и  $c_6 \rightarrow PY$  (при этом  $c_5 \rightarrow PC$ ,  $c_4 \rightarrow PB$ ,  $c_3 \rightarrow PA$ ,  $c_2 \rightarrow P9$ ,  $c_1 \rightarrow P8$  и  $c_0 \rightarrow P7$ ).

ПД	ИП6	×	ИПС	+	ИПД	ИП5	×	ИПВ	+
ПС	Ф,	ИПД	ИП4	×	ИПА	+	ПВ	Ф,	ИПД
ИПЗ	×	ИП9	+	ПА	Ф,	ИПД	ИП2	×	ИП8
+	П9	Ф,	ИПД	ИП1	×	ИП7	+	П8	Ф,
ИПД	ИП0	×	П7	Ф,	ИПД	С/П	БП	00	

**Пример.**  $(6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1) \cdot (5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1) = 30p^{11} + 49p^{10} + 58p^9 + 58p^8 + 50p^7 + 41p^6 +$

+  $30p^5 + 18p^4 + 10p^3 + 5p^2 + 2p + 1$ . Время вычисления одного коэффициента  $c_i$  около 15 с.

**Программа 4.68.** Вычисление коэффициентов многочлена  $C(p) = (A(p))^2$  при  $A(p)$  степени  $n \leq 9$ . Ввод:  $a_0 \div a_n = P0 \div Pn$ ,  $n = PД$  и далее В/0 С/П С/П С/П и т. д. (получаем при каждом нажатии клавиши С/П значения  $c_{2n}, c_{2n-1}, c_{2n-2}, \dots, c_1, c_0$ ).

Сх	ИПД	ПА	ПВ	ПС	F,	КИПВ	КИПС	×	ИПВ
ИПС	—	$Fx < 0$	28	F,	2	×	+		ИПВ 1
+	ПВ	F,	ИПС	1	—	БП	04		$Fx \neq 0$ 32
Сх	ХУ	F,	+	С/П	ИПА	1	—	ПА	$Fx \geq 0$
46	ПВ	Сх	ИПД	БП	04	ИПД	+	ПС	Сх
ПВ	БП	06							

**Пример.**  $(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)^2 = 9p^6 + 12p^5 + 10p^4 + 7p^3 + 3p^2 + p + 0,25$ .

**Программа 4.69.** Вычисление значений многочлена  $C(p) = A(p) \cdot A(-p)$  при степени  $A(p)$   $n \leq 11$ . Ввод:  $a_0 \div a_{11} = P0 \div PВ$  В/0 (при  $n < 11$  отсутствующие коэффициенты  $A(p)$  задаются равными 0 и вводятся в регистры памяти). Коэффициенты  $c_0, c_2, c_4$  и т. д. до  $c_{2n}$  получаются по мере нажатия клавиши С/П.

Сх	ПС	ПД	КИПС	$Fx^2$	ИПД	$Fx \neq 0$	32	1	—
ПД	ХУ	ИПС	1	+	ПС	1	2	—	$Fx \neq 0$
31	ХУ	КИПС	КИПД	×	2	×	ХУ	—	БП
05	ХУ	—	ИПС	ИПД	+	2	÷	1	+
ХУ	С/П	ХУ	БП	01					

**Пример.** Для  $A(p) = 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5$  получим  $C(p) = A(p) \cdot A(-p) = -9p^6 - 2p^4 + p^2 + 0,25$  ( $t_c \approx 6 \div 45$  с в зависимости от номера  $c_i$ ).

**Программа 4.70.** Вычисление комплексного значения операторной функции  $F(p) = a + ib$  при  $n \leq 3$  и  $m \leq 4$ . Ввод:  $b_0 \div b_4 = P0 \div P4$ ,  $a_0 = P5$ ,  $a_1 = P6$ ,  $a_2 = P7$  и далее (для каждого значения  $p = \sigma + i\omega$ )  $a_3 = P8$ ,  $0 = P9$ ,  $\sigma = PУ$  и  $\omega = PХ$  (отсутствующие  $a_j$  и  $b_j$  задаются равными 0). Результат:  $a \rightarrow PA = PX$  и  $b \rightarrow PB = PY$  (в регистры С и Д заносятся действительная и мнимая части значения  $A(p)$  при заданном  $p$ ).

ПВ	ХУ	ПА	ИП7	ИП8	ПП	47	ИП6	ПП	54
ИП5	+	ПС	ИП9	ПД	ИП3	ИП4	ПП	47	ИП2
ПП	54	ИП1	ПП	54	ИП0	+	↑	$Fx^2$	ИП9
$Fx^2$	+	÷	ПА	ИП9	FBx	÷	ПВ	ИПС	П9
ИПД	ПП	55	ИП9	С/П	БП	00	↑	ИПВ	×
П9	F,	ИПА	×	+	↑	ИПВ	×	ИПА	ИП9
×	+	ИП9	ХУ	П9	F,	ИПВ	×	ХУ	ИПА
×	ХУ	—	В/0						

Пример. Для  $F(p) = (p^2 + 2p + 1)/(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)$  и  $p = 2 + 1 \cdot i$  получим  $F(p) = 0,1863999 - i \cdot 0,12612384$  при  $t_c \approx 70$  с.

**Программа 4.71.** Вычисление комплексного значения операторной функции  $F(p) = a + ib$  при любых  $n$  и  $m$  в полуавтоматическом режиме. Ввод (для каждого значения  $p = \sigma + i\omega$ ):  $\sigma = P1$ ,  $\omega = P2$ ,  $n = P7$ ,  $m = P8$  В/0 и далее  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$  (после ввода каждого  $a_j$  и  $b_j$  индицируется номер  $j$ ).

ИП7	ПО	Сх	ПВ	ПП	40	ПС	ИПВ	ПД	ИП8
ПО	Сх	ПВ	ПП	62	↑	$Fx^2$	ИПВ	$Fx^2$	+
÷	ПА	ИПВ	FBx	÷	П6	ИПД	×	ИПА	ИПС
×	+	ПО	ИПА	ИПД	×	ИПС	БП	59	ИПА
+	ПА	КИПО	ИПО	$Fx \geq 0$	67	ИПВ	П6	ИП1	×
ИПА	ИП2	×	+	ПВ	ИПА	ИП1	×	ИП2	ИП6
×	-	ПА	ИПО	С/П	БП	39	ИПА	В/0	

Проверить программу можно по примеру, приведенному для программы 4.70.

Одной из важнейших задач анализа линейных систем, описываемых операторной функцией  $F(p) - (4.5)$ , является расчет их амплитудно-частотных  $A(\omega)$  и фазо-частотных  $\varphi(\omega)$  характеристик (АЧХ и ФЧХ):

$$F(p)|_{p=i\omega} = a(\omega) + ib(\omega) = |A(\omega)|e^{i\varphi(\omega)},$$

причем

$$A(\omega) = \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg [b(\omega)/a(\omega)].$$

Для приведения угла  $\varphi(\omega)$  в отрезок  $[0; 2\pi]$  или  $[0; 360^\circ]$  вычисление  $\varphi(\omega)$  удобно организовать по формулам

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arccos [a(\omega)/|A(\omega)|] & \text{при } b \geq 0, \\ -\arccos [a(\omega)/|A(\omega)|] & \text{при } b < 0. \end{cases}$$

Расчет АЧХ и ФЧХ сводится к расчету  $a(\omega)$  и  $b(\omega)$  функции  $F(p) = A(p)/B(p)$  при  $p = i\omega$  и вычислению  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  по приведенным выше формулам. При этом с учетом равенства  $i^2 = -1$

$$F(i\omega) = \frac{(\dots + a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0) + i\omega(\dots + a_5\omega^4 - a_3\omega^2 + a_1)}{(\dots + b_4\omega^4 - b_2\omega^2 + b_0) + i\omega(\dots + b_5\omega^4 - b_3\omega^2 + b_1)}.$$

**Программа 4.72.** Вычисление АЧХ и ФЧХ линейной системы при  $n \leq 4$  и  $m \leq 5$ . Ввод (отсутствующим коэффициентам при даются нулевые значения):  $b_0 \div b_5 = P0 \div P5$ ,  $a_0 = P6$ ,  $a_1 = P7$ ,  $a_2 = P8$ ,  $a_3 = P9$ ,  $a_4 = PA$  и далее  $\omega = PX$  В/0 и С/П (при смене  $\omega$  набирается только новое значение  $\omega$  и нажимается клавиша С/П).

Результат:  $A(\omega) \rightarrow PX$ ,  $\varphi(\omega) \rightarrow PY$  (в радианах или градусах, в зависимости от положения переключателя  $P - \Gamma$ ). Если  $\varphi(\omega) > 180^\circ$  или  $\varphi(\omega) > \pi$ , то фазовый угол приводится в отрезке  $[-180^\circ; 180^\circ]$  или  $[-\pi; \pi]$  добавлением или вычитанием  $360^\circ$  или  $2\pi$ .

ПД	$Fx^2$	↑	↑	ИП5 ×	ИП3	—	×	ИП1
+	ИПД	×	ПС	F,	ИП9 /—/	×	ИП7	+
ИПД	×	ПВ	F,	ИП4 ×	ИП2	—	×	ИП0
+	ПД	F,	ИПА	×	ИП8	—	×	ИП6
ПП	59	ИПС	ПВ	F,	ПС	F,	ИПД	ПП
ИПС	XY	—	ПД	F,	÷	С/П	БП	00
$Fx^2$	ИПВ	$Fx^2$	+	$F\sqrt{-}$	÷	$FVx$	XY	Farccos
$Fx < 0$	76	$Cx$	XY	—	↑	F,	V/0	ИПВ

Пример. Для  $F(p) = (p^2 + 2p + 1)/(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)$  и  $\omega = 2$  получим  $A(2) = 0,21511595$  и  $\varphi(2) = 235,69461^\circ$ , или, отняв  $360^\circ$ ,  $\varphi(2) = -124,30539^\circ$ .

Программу легко перестроить для вычисления  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  систем, имеющих другие предельные значения  $n$  и  $m$  функции  $F(p) = F(i\omega)$  при условии, что  $(n + m) \leq 11$ . В полуавтоматическом режиме можно вычислять  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  при любых  $n$  и  $m$ .

Программа 4.73. Вычисление  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  линейной системы при любых  $n$  и  $m$  в полуавтоматическом режиме. Ввод (для каждого значения  $\omega$ ):  $n = P4$ ,  $m = P5$ ,  $\omega = P7$ ,  $a_n = P8$ ,  $0 = P9$ ,  $V/0$  и далее  $a_{n-1}$  С/П  $a_{n-2}$  С/П ...  $a_0$  С/П (после ввода каждого  $a_j$  начиная с  $a_{n-1}$  индицируется номер  $i$ ). После ввода  $a_0$  и индикации цифры 0 вводится  $b_m = P8$   $b_{m-1}$  С/П  $b_{m-2}$  С/П ...  $b_0$  С/П. Результат:  $A(\omega) \rightarrow PX = P1$ ,  $\varphi(\omega) \rightarrow P2$ ,  $a \rightarrow PC$  и  $b \rightarrow PD$  ( $a$  и  $b$  соответствуют значению  $F(p) = a + ib$ ).

ИП9	ИП7	×	—	ИП8	ИП7	×	П9	XY	П8
ИП4	1	—	П4	$Fx \neq 0$	67	$Fx < 0$	73	ИП5	1
—	П5	$Fx = 0$	73	ИПВ	ИП8	×	ИПА	ИП9	×
—	ИП8	$Fx^2$	ИП9	$Fx^2$	+	П0	÷	ПД	ИПА
ИП8	×	ИПВ	ИП9	×	+	ИП0	÷	ПС	↑
$Fx^2$	ИПД	$Fx^2$	+	$F\sqrt{-}$	П1	÷	Farccos	П2	ИПД
$Fx < 0$	64	ИП2	/—/	П2	ИП1	С/П	ИП8	ПА	ИП9
ПВ	0	П9	С/П	БП	00				

Работу этой программы можно проверить по примеру, приведенному для программы 4.72 ( $a = -0,12124016$ ;  $b = -0,17769551$ ).

Если воздействие на систему зависит от ее реакции, то в системе действует обратная связь. При разрыве обратной связи произведение  $\beta(p) \cdot K(p)$ , где  $\beta(p)$  — операторный коэффициент передачи цепи обратной связи и  $K(p)$  — коэффициент передачи самой системы, также может быть выражено в виде функции  $F(p)$ . При

этом часто ставится задача об устойчивости системы, охваченной обратной связью.

Один из методов (Найквиста) анализа устойчивости заключается в построении годографа функции  $F(p)$  при мнимом  $p = i\omega$  на комплексной плоскости. Для этого непосредственно пригодны программы 4.70 ÷ 4.73 при замене  $p$  на  $i\omega$ . Однако в этом случае расчеты приходится повторять многократно для разных  $\omega$ . Отметим, что годограф позволяет судить о многих свойствах системы, включая устойчивость. Система устойчива, если годограф  $F(p) = \beta(p)K(p)$  не охватывает точку  $(1, 0)$  в комплексной плоскости.

Линейные системы описываются также линейными дифференциальными уравнениями. С помощью преобразований Лапласа их можно свести к алгебраическому уравнению в виде многочлена  $\Delta(p)$ , устойчивость которого оценивается с помощью критерия Гурвица [19]. При нем многочлен  $\Delta(p)$  представляется суммой  $\Delta(p) = M(p) + N(p)$  четной  $M(p) = b_0 + b_2p^2 + b_4p^4 + \dots$  и нечетной  $N(p) = b_1p + b_3p^3 + b_5p^5 + \dots$  частей. Многочлен  $\Delta(p)$  и описываемая им система устойчивы, если положительны все коэффициенты дроби

$$\frac{M(p)}{N(p)} = c_1p + \frac{1}{c_2p + \frac{1}{c_3p + \dots}} + \frac{1}{c_m p}$$

**Программа 4.74.** Оценка устойчивости многочлена  $\Delta(p)$  степени  $m \leq 12$  по критерию Гурвица. Ввод:  $b_0 \div b_{12} = P0 \div PС$ ,  $m - 2 = PД$ . Результат:  $0 \rightarrow PХ$ , если многочлен устойчив, и  $EГГОГ$ , если многочлен неустойчив.

ИПД 2	+	ПД	КИПД	ПС	ИПД 1	-	ПД
F,	F,	КИПД	ПВ	F,	ИПД 2	-	ПД F,
ИПС	КИПД	×	ИПД 1	+	ПД F,	ИПВ	КИПД
×	XY	-	ИПВ	÷	КПД F√ F,	ИПД 3	
-	Fx < 0	18	F,	3	-	Fx = 0	01 C/П

**Примеры.** Многочлен  $p^5 + 2p^4 + 2p^3 + 4p^2 + p + 1$  неустойчив, многочлен  $p^7 + 21p^6 + 196p^5 + 910p^4 + 2359p^3 + 3388p^2 + 2484p + 720$  устойчив. При  $m = 12$   $t_c \approx 12$  мин.

## 4.6. Производные и интеграл степенного многочлена

Для степенного многочлена

$$A(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

первая производная есть также степенной многочлен  $(n-1)$ -й степени:

$$B(x) = A'(x) = \frac{dA(x)}{dx} = \sum_{i=1}^n a_{i-1} i x^{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j.$$

Таким образом, каждый член этого многочлена может вычисляться по формуле

$$b_j = a_{i-1} i, \quad j = i - 1.$$

При этом производную  $A'(x)$  можно вычислить по схеме Горнера как значение многочлена  $B(x)$ .

**Программа 4.75.** Преобразование многочлена  $A(x)$  в многочлен  $B(x) = A'(x)$  и вычисление  $A'(x)$  по заданному значению  $x$ . Ввод:  $a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_n = Pn$  ( $n \leq 11$ ),  $n = PД$ . После пуска (В/О С/П) получим  $b_0 \rightarrow P0, b_1 \rightarrow P1, \dots, b_{n-1} \rightarrow Pn-1 = PХ$ . Теперь, вводя  $x = PХ$  и нажимая клавишу С/П, будем получать  $B(x) = A'(x)$ .

1	ПС	КИПС	ИПС	×	ИПС	1	—	ПС	ХУ
КПС	ИПС	2	+	ПС	ИПД	ХУ	—	Fx<0	02
F,	ИПД	1	—	ПС	ХУ	С/П	↑	КИПС	ИПС
1	—	ПС	F,	×	КИПС	+	ИПС	Fx=0	30
БП	20								

**Пример.** Для многочлена

$$A(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1x + 1,$$

вводя  $a_4 = 4, a_3 = 3, a_2 = 2, a_1 = 1, a_0 = 1$  ( $a_0$  можно не вводить) и  $n = 4$ , получим  $b_0 = 1, b_1 = 4, b_2 = 9$  и  $b_3 = 16$ . Следовательно,

$$B(x) = A'(x) = 16x^3 + 9x^2 + 4x + 1.$$

При  $x = 2$  получим  $B(2) = A'(2) = 173$ , при  $x = 1$  получим  $B(x) = A'(1) = 30$ .

По программе 4.75 могут вычисляться и высшие производные. Для перехода к очередной производной достаточно уменьшить  $n$  на 1 и пустить программу с нулевого шага нажатием клавиши В/О и С/П. Например, для вычисления второй производной  $A''(x)$  многочлена  $A(x)$  (см. пример выше) вводим в регистр Д значения  $n-1 = 3$ . Получим  $c_0 = 4, c_1 = 18$  и  $c_2 = 48$ , т. е.

$$C(x) = A''(x) = B'(x) = 48x^2 + 18x + 4.$$

Для  $x = 2$  получим  $A''(2) = 232$ , для  $x = 1 - A''(1) = 70$ .

**Неопределенный интеграл от степенного многочлена**

$$\int \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) dx = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j x^j$$

представляет собой многочлен  $(n + 1)$ -й степени, коэффициенты которого

$$b_j = a_i / (i + 1), \quad j = i + 1.$$

Определенный интеграл

$$I = \int_a^b \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) dx = \sum_{j=1}^{n+1} b_j b^j - \sum_{j=1}^{n+1} b_j a^j.$$

**Программа 4.76.** Вычисление коэффициентов  $b_j$  многочлена  $V(x)$ , представляющего неопределенный интеграл многочлена  $A(x)$  и значения определенного интеграла  $I$  при верхнем пределе интегрирования  $b$  и нижнем  $a$ . Ввод:  $a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_n = Pn, n = Pд$  ( $n \leq 10$ ). Нажав клавиши В/0 и С/П, получаем  $0 \rightarrow PX, b_1 \rightarrow P1, b_2 \rightarrow P2, \dots, b_{n+1} \rightarrow Pn + 1$ . Далее вводим  $b = PX$  С/П (получаем  $V(b)$ )  $a = PX$  С/П (получаем  $I$ ). При  $a = 0$   $I = V(b)$ . При смене пределов интегрирования повторяется ввод  $b$  и  $a$ .

ИПД	ПС	КИПС	ИПС	1	+	ПС	÷	КПС	ИПС
2	—	ПС	Fx=0	02	С/П	ПП	24	С/П	ПП
24	—	ВП	15	ИПД	1	+	ПС	F,	ПО
КИПС	×	ИПД	ПС	F,	КИПС	+	ИПО	×	ИПС
1	—	ПС	Fx=0	34	F,	В/0			

**Пр и м е р.** Для многочлена ( $n = 5$ )

$$A(x) = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1x + 1,$$

получим  $b_1 = 1, b_2 = 0,5, b_3 = 0,66666666, b_4 = 0,75, b_5 = 0,8$  и  $b_6 = 0,83333333$ . Далее, введя  $b = 2$  и  $a = 1$ , получим  $I = 95,71667$ . При  $b = 1$  и  $a = 0$  получаем (после ввода  $b$ )  $I = 4,55$ . Время вычисления  $b_j$  около 20 с, время вычисления  $I$  — приблизительно 46 с.

Поскольку вычисление производных и интегралов в данном разделе выполняется по точным формулам, погрешность вычислений и время их проведения оказываются минимальными. Если сложная функция  $f(x)$  представляется в виде степенного многочлена (см. § 5.2), то с помощью программ 4.75 и 4.76 можно находить производные  $f^m(x)$  и определенные интегралы, близкие к интегралу

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Они могут вычисляться и другими более общими численными методами, описанными в следующей главе.

## 4.7. Геометрическое и гармоническое среднее, надежность системы

Программа 4.77. Вычисление среднего геометрического ряда из  $N$  чисел

$$G_M = (x_1 \cdot x_2 \dots x_N)^{1/N}$$

и среднего гармонического

$$H_M = N / (x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_N^{-1}).$$

Ввод (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $x_1 = \text{РХ}$  С/П  $x_2$  С/П ...  $\dots x_N$  С/П 0 С/П. После ввода 0 получаем  $G_M \rightarrow \text{РУ}$  и  $H_M \rightarrow \text{РХ}$ . После ввода каждого  $x_i$  индицируется текущий номер  $i$ .

Сх	П6	П5	1	П4	ИП6	С/П	Fx $\neq$ 0 21	П9
ИП4	×	П4	ИП9	F1/x	ИП5	+	П5	КИП6 БП
05	ИП6	F1/x	ИП4	Fx $^y$	ИП6	ИП5	+	С/П

Пример. Для пяти чисел 2; 3,5; 6,1; 1,2 и 3,9 получим  $H_M = 2,4517107$  и  $G_M = 2,8849262$ .

Программа 4.78. Расчет надежности  $R = e^{-xt}$  системы, где

$$x = \sum_{i=1}^n (L_i + 1/M_i),$$

$M_i$  — долговечность  $i$ -го элемента,  $L_i$  — вероятность выхода его из строя,  $t$  — время. Ввод (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $L_1 \uparrow M_1$ , С/П  $L_2 \uparrow M_2$  С/П ...  $L_n \uparrow M_n$  С/П 0  $t$  С/П (получаем  $R$ ). После ввода каждой пары  $L_i, M_i$  индицируется текущий номер  $i$ . При смене  $t$  повторяется набор  $t \uparrow 0$  С/П.

Сх	П6	П5	ИП6	С/П	Fx $\neq$ 0 15	F1/x	+	ИП5	
+	П5	КИП6	БП	03	ХУ	ИП5	/—/	×	Fex
БП	04								

Пример. Для  $L_1 = 0,0001$ ,  $M_1 = 6000$  ч,  $L_2 = 0,00015$ ,  $M_2 = 7000$  ч,  $L_3 = 0,0002$ ,  $M_3 = 7000$  ч и  $t = 1000$  ч получим  $R = 0,40560276$ .

## АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ РЕАЛИЗАЦИИ ОСНОВНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

### 5.1. Решение систем линейных уравнений

**Программа 5.1.** Решение системы из двух уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

методом Крамера [3]. Ввод:  $a_{11}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_1$  и  $b_2$  в регистр X (ввод каждого коэффициента фиксируется нажатием клавиши С/П).

П7	С/П	П4	С/П	П8	С/П	П5	С/П	П6	С/П
П3	ИП7	ИП5	×	ИП8	ИП4	×	—	П0	ИП6
ИП5	×	ИП3	ИП8	×	—	ПА	ИП3	ИП7	×
ИП6	ИП4	×	—	ПВ	ИПА	ИП0	÷	С/П	ИПВ
ИП0	÷	С/П	БП	00					

**Пример.** Для  $a_{11} = 2$ ,  $a_{21} = 3$ ,  $a_{12} = -1$ ,  $a_{22} = 1$ ,  $b_1 = 3$  и  $b_2 = 7$  получим  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 1$ .

Система из трех уравнений может решаться методом Гаусса [1, 3], который сводится к последовательному исключению неизвестных, пока не останется одно из них. Процедура этого (прямой ход) сводится к образованию коэффициентов  $a_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) в  $a_{jk}$  ( $k = i+1, \dots, N$ ) с помощью выражений

$$a_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad a_{jk} = a_{jk} + a_{ji}a_{ik}, \quad (5.1)$$

а коэффициентов  $b_j$  — с помощью формулы

$$b_j = b_j + a_{ji}b_i \quad (5.2)$$

до тех пор, пока не будет получено значение  $x_N = b_N/a_{NN}$ . Далее по формулам обратного хода

$$x_i = b_i, \quad x_i = x_i - x_j a_{ij}, \quad x_i = x_i/a_{ii} \quad (5.3)$$

для  $i = N-1, \dots, 2$  и  $j = i+1, \dots, N$  находятся остальные переменные. Для повышения точности вычислений желательно привести систему к виду, при котором максимальными по модулю будут диагональные коэффициенты.

**Программа 5.2. Решение системы из трех уравнений ( $N = 3$ )**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

методом Гаусса [19]. Ввод:

$$\begin{aligned} a_{11} &= P7 & a_{12} &= P8 & a_{13} &= P9 & b_1 &= PA \\ a_{21} &= P4 & a_{22} &= P5 & a_{23} &= P6 & b_2 &= PB \\ a_{31} &= P1 & a_{32} &= P2 & a_{33} &= P3 & b_3 &= PC \end{aligned}$$

ИПЗ	ИП6	ИП9	ПП	42	ПЗ	ХУ	П6	ИПД	П9
3	ПО	ИПС	ИПВ	ИПА	ПП	42	ПВ	ХУ	ПА
ИПД	ПС	ИП2	ИП5	ИП8	ПП	42	П4	ХУ	П7
ИПД	П1	ИП9	П2	ИП6	П8	ИПЗ	П5	FL0	12
ИПА	С/П	ИП7	÷	ПД	ИП4	×	—	ХУ	ИПД
ИП1	×	—	В/0						

**Пример.** Для системы вида

$$\begin{aligned} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 &= 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 &= 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 &= 20 \end{aligned} \quad (5.4)$$

получим:  $x_1 = 1,9091983 \rightarrow PA = PX$ ,  $x_2 = 3,1949644 \rightarrow PB$  и  $x_3 = 5,0448073 \rightarrow PC$ . Время счета около 40 с.

Решение системы из  $N \leq 4$  линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

на микрокалькуляторе возможно по единой программе методом оптимального исключения переменных [20]. Он реализуется следующим алгоритмом.

1. Преобразуем коэффициенты первого уравнения по формуле:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}/a_{11}; \quad j = 1, 2, \dots, N + 1.$$

2. Исключаем переменную  $x_1$  из второго уравнения с помощью преобразований

$$a_{2j}^{(2)} = (a_{2j} - a_{21}a_{1j}^{(1)}) / (a_{22} - a_{21}a_{12}^{(1)}); \quad j = 2, 3, \dots, N + 1.$$

3. Исключаем переменную  $x_2$  из первого уравнения с помощью преобразований

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}a_{12}^{(1)}; \quad j = 2, 3, \dots, N + 1,$$

4 Исключаем  $x_1$  и  $x_2$  из третьего уравнения с помощью преобразований

$$a_{3j}^{(3)} = \frac{a_{3j} - (a_{31}a_{1j}^{(2)} - a_{32}a_{2j}^{(1)})}{a_{33} - a_{31}a_{13}^{(2)} - a_{32}a_{23}^{(2)}}, \quad j = 4, 5, \dots, N+1.$$

5. Исключаем  $x_3$  из первого и второго уравнений

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} = a_{3j}^{(3)}a_{i3}^{(2)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 4, 5, \dots, N+1.$$

В результате этих преобразований получим:

$$x_1 + a_{14}^{(3)}x_4 + \dots + a_{1N}^{(3)}x_N = a_{1,N+1}^{(3)},$$

$$x_2 + a_{24}^{(3)}x_4 + \dots + a_{2N}^{(3)}x_N = a_{2,N+1}^{(3)},$$

$$x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 + \dots + a_{3N}^{(3)}x_N = a_{3,N+1}^{(3)}.$$

Теперь для хранения коэффициентов преобразованной системы уравнений достаточно иметь  $3N - 6$  регистров памяти против  $3(N+1)$  для исходной (не преобразованной) системы.

Для получения неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_N$  на каждом  $p$ -м шаге выполняем следующие вычисления:

$$a_{pj}^{(p)} = \left( a_{pj}^{(p-1)} - \sum_{r=1}^{p-1} a_{rj} a_{pr} \right) \left/ \left( a_{pp}^{(p-1)} - \sum_{r=1}^{p-1} a_{rp}^{(p-1)} a_{pr} \right) \right.,$$

где  $j = p+1, \dots, N+1$ , и

$$a_{ij}^{(p)} = a_{ij}^{(p-1)} - a_{pj}^{(p)} a_{ip}^{(p-1)},$$

где  $i = 1, 2, \dots, p-1, \quad j = p+1, \dots, N+1$ .

В результате, после  $N$  шагов прямого хода, получаем

$$x_i = b_i^{(N)} = a_{i,N+1}^{(N)}.$$

Эти действия обеспечивает приведенная ниже программа. Ее целесообразно применять при одновременном решении систем до четырех линейных уравнений включительно. При  $N = 2$  или  $N = 3$  целесообразно воспользоваться приведенными выше более простыми программами (они обеспечивают и меньшее время счета).

**Программа 5.3.** Решение системы из  $N \leq 4$  уравнений методом оптимального исключения переменных. Ввод:  $N = P0$  и (не обращающая внимания на промежуточные результаты) коэффициенты  $a_{ij} = PX, a_{i, j+1} = PX$  (построчно). Вывод:  $x_i \rightarrow PX$ .

П4	1	4	П2	ИП0	П1	С/П	ИП4	÷	КИ2
FL1	06	1	4	ПЗ	ИП0	П1	FL1	23	КИПЗ
С/П	БП	19	Сx	КП2	FL1	24	КП2	ИП0	ИП2
+	П1	П2	ИПЗ	—	$Fx \neq 0$	42	С/П	ПП	84
БП	28	КИП0	ИП0	ПЗ	С/П	КИП2	—	П4	С/П

КИП2	—	ИП4	÷	КП1	FL3	49	ИП1	ИПО	+	
ПЗ	1	4		П1	П2	КИП1	/—/	ИП	84	ИПЗ
+	ПЗ	ИП1	—	Fx=0	65	ИПО	П1	КИПЗ	КП2	
FL1	78	БП	12	ИПО	ХУ	↑	КИПЗ	×	КИП1	
+	КП2	F,	FL0	86	F,	ПО	В/0			

Пример. Для системы из четырех уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

получим  $x_1 = 3,0000015$ ,  $x_2 = -4$ ,  $x_3 = -9,999996 \cdot 10^{-1}$  и  $x_4 = 1,0000002$  при  $t_c \approx 4$  мин.

**Программа 5.4.** Решение системы из пяти уравнений методом оптимального исключения переменных [20]. Ввод: 18 = P0, 5 = PD,  $a_{12}/a_{11} = PC$ ,  $a_{13}/a_{11} = PB$ ,  $a_{14}/a_{11} = PA$ ,  $a_{15}/a_{11} = P9$ ,  $b_1/a_{11} = P8$ , 0 = P3 = P4 = ... = P7 и далее, нажав клавишу В/0, построчно  $a_{21} = PX$ ,  $a_{22} = PX$ , ...,  $a_{25} = PX$ ,  $b_2 = PX$ ,  $a_{31} = PX$ , ...,  $b_5 = PX$  (ввод каждого коэффициента фиксируется нажатием клавиши С/П, на промежуточные результаты можно не обращать внимания). Результат:  $x_1 \rightarrow PC$ ,  $x_2 \rightarrow PB$ ,  $x_3 \rightarrow PA$ ,  $x_4 \rightarrow P9$  и  $x_5 \rightarrow P8$ .

ИПД	ХУ	↑	F,	↑	КИПО	×	КИПД	+	ПП
89	Fx<0	03	F,	ХУ	ПД	С/П	ИПД	ИПО	—
3	+	Fx≥0	03	F,	КИПД	—	ИПД	ПО	F,
С/П	КИПО	—	ХУ	÷	FBx	ХУ	ПП	89	Fx=0
29	F,	ХУ	ПД	1	3	ПО	П1	F,	КИП1
/—/	↑	F,	↑	КИПД	×	КИП1	+	КИПО	ПП
90	Fx=0	52	F,	ХУ	ПД	ИП1	ИПО	6	—
—	—	Fx=0	48	П1	F,	КИПД	КПО	Cx	ПП
89	Fx<0	75	+	1	3	ПО	БП	14	КПД
F,	ИПД	1	—	ПД	1	—	В/0		

Пример. Для системы

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 16 & -6 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 8 \\ 6 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

получим  $x_1 = 6,8205128$ ;  $x_2 = 10,517949$ ;  $x_3 = -3,1282053$ ;  $x_4 = 6,6307692$  и  $x_5 = -1,1230768$  при  $t_c \approx 11$  мин.

Для полуавтоматического решения систем из  $N < 11$  уравнений можно использовать метод Жордана — Гаусса [18, 19], позволяющий получить неизвестные в конце прямого хода.

**Программа 5.5.** Решение систем из  $N < 11$  уравнений в полуавтоматическом режиме по методу Жордана — Гаусса с циклической перестановкой строк и применением вычислительного бланка.

↑	Сх	ХУ	ИП1	÷	П0	ХУ	1	ПС	ХУ
С/П	ИПД	ИПС	1	+	ПС	—	$F_x \geq 0$	26	ХУ
КИПС	ИПО	×	—	БП	10	ХУ	ИПО	БП	20

**Пример.** Решить систему

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Графа для  $P = 0$  бланка (см. табл. 5.1) заполняется коэффициентами уравнения, вводится  $N = \text{РД}$ . Далее последовательно заполняются графы для  $P = 1, 2$  и т. д. Для этого вводится первый столбец в регистры 1, 2, ...,  $N$  (сверху вниз). Затем вводится первый элемент следующего столбца и нажимаются клавиши В/0 и С/П — высвечивается 0. Далее вводятся остальные элементы в регистр X и нажимается клавиша С/П (после ввода последнего элемента клавиша С/П нажимается дважды). Полученные результаты вписываются в графу под вводимым столбцом, а в графе слева снизу дописывается 1. После заполнения граф бланка для  $P = N$  получаем  $x_1, x_2, \dots, x_N$  и контрольные суммы.

У некоторых микрокалькуляторов (НР-15С, Т1-58С, Т1-59С и др.) решение систем из  $N \leq (6-10)$  уравнений реализовано микропрограммно или с помощью встроенных модулей программ пользователя.

Если матрица коэффициентов содержит нулевые коэффициенты, метод Гаусса может стать неприменимым из-за остановки вычислений при делении на нулевой коэффициент. В этом случае преимуществами перед рассмотренными выше точными методами решения обладают итерационные методы.

Для обеспечения сходимости итераций систему надо привести вначале к виду, при котором диагональные коэффициенты по модулю превосходят недиагональные. Далее систему

$$Ax = B,$$

где  $A$  и  $B$  — матрицы коэффициентов  $a_{ij}$  и  $b_i$ , приводят к виду

$$x = \beta + \alpha x$$

и осуществляют итерации по схеме

$$x_{k+1} = \beta + \alpha x_k$$

Процесс программирования по этому методу очень прост. Для неизвестных  $x_i$  выделяется  $N$  регистров памяти и составляются

программы вычисления  $x_{i, k+1}$ . При простом методе итераций нужно хранить все  $x_{ik}$  для вычисления по ним  $x_{i, k+1}$ . Более просто программируется итерационный метод Зейделя. При нем найденное значение  $x_{1, k+1}$  сразу подставляется на место  $x_{1k}$  в последующие 2, 3 и т. д. уравнения,  $x_{2, k+1}$  подставляется вместо  $x_{2k}$  в последующие уравнения и т. д. В результате хранить значения  $x_{ik}$  уже

Таблица 5.1

Вычислительный бланк для решения системы уравнений методом Жордана — Гаусса

$P$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$\Sigma$
0	4	-2	3	1	13	19
	0	5	-2	3	16	22
	2	-3	4	-2	0	1
	1	0	-3	1	-4	-5
1		5	-2	3	16	22
		-2	2,5	-2,5	-6,5	-8,5
		0,5	-3,75	0,75	-7,25	-9,75
	1	-0,5	0,75	0,25	3,25	4,75
2			1,7	-1,3	-0,1	0,3
			-3,55	0,45	-8,85	-11,95
		1	0,55	0,55	4,85	6,95
		1	-0,4	0,6	3,2	4,4
3				-2,2647059	-9,0588235	-11,323529
			1	0,97058823	4,8823529	6,8529412
			1	0,29411765	3,1764706	4,4705882
			1	-0,76470588	-0,58823529	0,17647058
4				1	$x_1 = 1,0000001$	2,0000003
				1	$x_2 = 2$	3
				1	$x_3 = 2,9999999$	3,9999998
				1	$x_4 = 3,9999999$	4,9999997

не требуется, что уменьшает до  $N$  число потребных регистров памяти для записи  $x_i$  на каждой итерации. Свободные регистры памяти можно выделить на запись громоздких коэффициентов системы.

Пример. Решить итерационным методом Зейделя систему уравнений (5.4). В ней диагональные коэффициенты преобладают

по модулю. Поэтому остается каждое уравнение поделить на коэффициент при неизвестном  $x_i$  и привести систему к виду

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\x_2 &= 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\x_3 &= 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2.\end{aligned}$$

Будем заносить  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  в регистры P1, P2, P3, а регистры P4 ÷ ÷ P9 используем для записи коэффициентов. В результате получим программу, приведенную ниже.

**Программа 5.6.** Решение системы уравнений (5.4) методом Зейделя. Ввод: начальные приближения  $x_{10} = P1$ ,  $x_{20} = P2$ ,  $x_{30} = P3$ ,  $0,06 = P4$ ,  $0,02 = P5$ ,  $0,03 = P6$ ,  $0,05 = P7$ ,  $0,01 = P8$  и  $0,02 = P9$ . Результат:  $x_{1k} \rightarrow P1$ ,  $x_{2k} \rightarrow P2$  и  $x_{3k} \rightarrow P3$ .

2	ИП2	ИП4	×	—	ИП3	ИП5	×	+	P1
3	ИП1	ИП6	×	—	ИП3	ИП7	×	+	P2
5	ИП1	ИП8	×	—	ИП2	ИП9	×	+	P3
С/П	БП	00							

Зададим начальное приближение  $x_{10} = 2$ ,  $x_{20} = 3$  и  $x_{30} = 5$ . Ниже даны значения  $x_{1k}$ ,  $x_{2k}$  и  $x_{3k}$ , полученные в результате нескольких запусков программы ( $t_c \approx 10$  с на одну итерацию):

$k$	$x_{1k}$	$x_{2k}$	$x_{3k}$
0	2	3	5
1	1,92	3,1924	5,044648
2	1,909345	3,1949519	5,0448015
3	1,909199	3,1949643	5,0448073
4	1,9091983	3,1949645	5,0446073
5	1,9091983	3,1949645	5,0448073

Итак, спустя всего пять итераций получены значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , совпадающие с вычисленным методом Гаусса по программе 5.2. Отметим, что при методе итераций не обязательно принимать за начальные приближения значения свободных членов системы уравнений. Кроме того, метод итераций не критичен к сбоям в процессе вычислений: если итерационный процесс сходится, то в конечном счете будут получены корни системы уравнений.

## 5.2. Интерполяция и экстраполяция функций одной переменной

Интерполяция заключается в отыскании значений функции  $y(x)$ , заданной  $n$  узлами, в промежутках между ними, а экстраполяция — за их пределами. При этом функция заменяется тем или иным полиномом  $P(x)$ , значения которого в узлах совпадают со

значениями  $y(x)$ . Ниже дан пакет программ, реализующих интерполяцию с помощью полинома Лагранжа [1, 5]. Коэффициенты интерполяционного полинома при произвольном расположении узлов вычисляются методом Эйткена (см. разд. 4.4). Формулы для интерполяции с равномерным расположением узлов взяты из [17].

**Программа 5.7.** Линейная интерполяция при  $n = 2$  по формуле

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)(y_1 - y_0)/h. \quad (5.5)$$

Ввод:  $h = P9$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $y_1$  и (после индикации цифры 0)  $x$  в регистр X.

P0	C/P	PA	C/P	ИПА	—	ИП9	÷	PB	0
C/P	ИП0	—	ИПB	×	ИПА	+	БП	10	

**Пример.** Для  $h = 0,01$ ;  $x_0 = 2,47$ ;  $y_0 = 0,4932443$  и  $y_1 = 0,4934309$  получим  $y(2,475) = 0,4933376$  (интерполяция). Набрав новое значение  $x = 2,485$  и нажав клавишу C/P, получим  $y(2,485) = 0,4935242$  (экстраполяция).

**Программа 5.8.** Квадратичная интерполяция при  $n = 3$  по формуле

$$y(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1), \quad (5.6)$$

при произвольном расположении узлов. Ввод в регистр X:  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$  и (после индикации цифры 0)  $x$ . Коэффициенты  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  после вычисления заносятся в регистры A, B и C.

P0	C/P	PA	C/P	P1	C/P	PB	C/P	P2	C/P
PC	ИПB	ИПА	—	ИП1	ИП0	—	÷	PB	ИПC
ИПА	—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПB	—	ИП2	ИП1
—	÷	PC	0	C/P	P8	ИП1	—	ИПC	×
ИПB	+	ИП8	ИП0	—	×	ИПА	+	БП	34

**Пример.** Для  $x_0 = 1,3$ ;  $y_0 = 0,934$ ;  $x_1 = 1,4$ ;  $y_1 = 0,9523$ ;  $x_2 = 1,5$  и  $y_2 = 0,9661$  получим  $y(1,43) = 0,9569125$ . При смене  $x$  набираем только его новое значение и нажимаем клавишу C/P.

**Программа 5.9.** Квадратичная интерполяция при равноотстоящих узлах по формуле

$$y(x + ph) = \frac{p(p-1)}{2} y_{-1} + (1-p^2) y_0 + \frac{p(p+1)}{2} y_{+1}, \quad (5.7)$$

где  $p = (x - x_0)/h$ . Ввод:  $h = P9$ ,  $x_0$ ,  $y_{-1}$ ,  $y_0$ ,  $y_{+1}$  и (после индикации цифры 0)  $x$  в регистр X.

P8	C/P	P1	C/P	P2	C/P	P3	0	C/P	P7
ИП8	—	ИП9	÷	P6	1	—	ИП6	×	2
÷	ИП1	×	1	ИП6	$Fx^2$	—	ИП2	×	+
ИП6	1	+	ИП6	×	2	÷	ИП3	×	+
БП	08								

**Пример.** Для  $h = -0,1$ ;  $x_0 = 1,4$ ;  $y_{-1} = 0,9661$ ;  $y_0 = 0,9523$  и  $y_{+1} = 0,934$ , нажав клавиши В/0 и С/П, получим цифру 0. Введя  $x = 1,43$  и нажав клавишу С/П, получим  $y(1,43) = 0,9569125$  — интерполяция назад ( $h < 0$ ).

**Программа 5.10.** Интерполяция при четырех произвольно расположенных узлах при  $n = 4$  по формуле

$$y(x) = [[b_3(x - x_2) + b_2](x - x_1) + b_1](x - x_0) + b_0. \quad (5.8)$$

**Ввод:**  $x_0 \div x_3 = P0 \div P3$ ,  $y_0 \div y_3 = PA \div PD$  и  $x = PX$  (после индикации цифры 0). Коэффициенты  $b_0 \div b_3$  заносятся в регистры А + Д.

ИПВ	ИПА	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПВ	ИПС	ИПА
—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПВ	—	ИП2	ИП1	—
÷	ПС	ИПД	ИПА	—	ИП3	ИП0	—	÷	ИПВ
—	ИП3	ИП1	—	÷	ИПС	—	ИП3	ИП2	—
÷	ПД	0	С/П	П9	ИП2	—	ИПД	×	ИПС
+	ИП9	ИП1	—	×	ИПВ	+	ИП9	ИП0	—
×	ИПА	+	БП	43					

**Пример.** Для  $x_0 = 1,3$ ;  $x_1 = 1,4$ ;  $x_2 = 1,5$ ;  $x_3 = 1,6$ ;  $y_0 = 0,934$ ;  $y_1 = 0,9523$ ;  $y_2 = 0,9661$  и  $y_3 = 0,9763$  получим  $y(1,43) = 0,95687155$  при точном значении 0,9569.

**Программа 5.11.** Интерполяция при четырех равноотстоящих узлах по формуле

$$y(x_0 + ph) = -\frac{p(p-1)(p-2)}{6}y_{-1} + \frac{(p^2-1)(p-2)}{2}y_0 - \\ -\frac{p(p+1)(p-2)}{2}y_{+1} + \frac{p(p^2-1)}{6}y_{+2}. \quad (5.9)$$

**Ввод:**  $h = P9$ ,  $y_{-1}$ ,  $y_0$ ,  $y_{+1}$ ,  $y_{+2}$ ,  $x_0$  и  $x$  в регистр X.

П1	С/П	П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П	П8	С/П
П7	ИП8	—	ИП9	÷	П6	2	—	2	÷
П5	3	÷	ИП6	1	—	×	ИП6	/—/	×
ИП1	×	ИП6	Fx <sup>2</sup>	1	—	ПА	ИП5	×	ИП2
×	+	ИП6	1	+	ИП6	×	ИП5	×	ИП3
×	—	ИПА	ИП6	×	6	÷	ИП4	×	+
БП	09								

**Пример.** Для данных примера к программе 5.10 ( $h = 0,1$ ;  $y_{-1} = 0,934$ ;  $y_0 = 0,9523$ ;  $y_{+1} = 0,9661$ ;  $y_{+2} = 0,9763$ ;  $x_0 = 1,4$  и  $x = 1,43$ ) получим  $y(1,43) = 0,9568716$ .

**Программа 5.12.** Интерполяция при пяти произвольно расположенных узлах по формуле

$$y(x) = [[[[b_4(x - x_3) + b_3](x - x_2) + b_2](x - x_1) + b_1](x - x_0) + b_0,$$

Ввод:  $x_0 \div x_4 = P0 \div P4$ ,  $y_0 = P9$ ,  $y_1 \div y_4 = PA \div PD$  и  $x = PX$  (после пуска и индикации цифры 0). Коэффициенты  $b_0, b_1 \div b_4$  записываются в регистры 9, A  $\div$  Д.

ИПА	ИП9	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПА	ИПВ	ИП9
—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПА	—	ИП2	ИП1	—
÷	ПВ	ИПС	ИП9	—	ИП3	ИП0	—	÷	ИПА
—	ИП3	ИП1	—	÷	ИПВ	—	ИП3	ИП2	—
÷	ПС	ИПД	ИП9	—	ИП4	ИП0	—	÷	ИПА
—	ИП4	ИП1	—	÷	ИПВ	—	ИП4	ИП2	—
÷	ИПС	—	ИП4	ИП3	—	÷	ПД	0	С/П
П8	ИП3	—	ИПД	×	ИПС	+	ИП8	ИП2	—
×	ИПВ	+	ИП8	ИП1	—	×	ИПА	+	ИП8
ИП0	—	×	ИП9	+	БП	69			

В табл. 5.2 даны значения функции

$$y(x) = \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

в узлах интерполяции и вычисленные по данной программе значения  $b_0, b_1 \div b_4$ . При  $x = 2,45$  получим  $y(2,45) = 0,49285719$  при точном значении 0,4928572.

Таблица 5.2

$x$	$y$	$b$	$b \rightarrow P_i$
$x_0 = 2,2$	$y_0 = 0,4860966$	$b_0 = 0,4860966$	P9
$x_1 = 2,3$	$y_1 = 0,4892759$	$b_1 = 3,1793 \cdot 10^{-2}$	PA
$x_2 = 2,4$	$y_2 = 0,4918025$	$b_2 = -3,2635 \cdot 10^{-2}$	PВ
$x_3 = 2,5$	$y_3 = 0,4937903$	$b_3 = 1,89833 \cdot 10^{-2}$	PC
$x_4 = 2,6$	$y_4 = 0,4953388$	$b_4 = -5,99965 \cdot 10^{-2}$	PD

**Программа 5.13.** Интерполяция при пяти равноотстоящих узлах по формуле

$$y(x_0 + ph) = \frac{(p^2 - 1)p(p - 2)}{24} y_{-2} - \frac{(p - 1)p(p^2 - 4)}{6} y_{-1} + \frac{(p^2 - 1)(p^2 - 4)}{4} y_0 - \frac{(p + 1)p(p^2 - 4)}{6} y_{+1} + \frac{(p^2 - 1)p(p + 2)}{24} y_{+2}. \quad (5.10)$$

Ввод:  $h = P9$ ,  $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2}$ ,  $x_0$  и  $x$  в регистр X.

П1	С/П	П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П	П5	С/П
П8	С/П	П7	ИП8	—	ИП9	÷	П6	Fx <sup>2</sup>	ПД
1	—	4	÷	ПА	ИП6	2	—	×	ИП6

×	6	÷	ИП1	×	ИПД	4	—	ПС	6
÷	ПВ	ИП6	×	ИП6	1	—	×	ИП2	×
—	ИПА	ИПС	×	ИП3	×	+	ИП6	1	+
ИП6	×	ИПВ	×	ИП4	×	—	ИП6	2	+
ИП6	×	ИПА	×	6	÷	ИП5	×	+	БП

11

**Пример.** Используя данные примера к программе 5.12 и взяв  $x_0 = 2,4$  и  $y_0 = 0,4918025$ , при  $x = 2,45$  получим  $y(2,45) = 0,49285719$ .

**Программа 5.14.** Интерполяция при шести равноотстоящих узлах по формуле

$$\begin{aligned}
 y(x_0 + ph) = & - \frac{p(p^2 - 1)(p - 2)(p - 3)}{120} y_{-2} + \\
 & + \frac{p(p - 1)(p^2 - 4)(p - 3)}{24} y_{-1} - \frac{(p^2 - 1)(p^2 - 4)(p - 3)}{12} y_0 + \\
 & + \frac{p(p + 1)(p^2 - 4)(p - 3)}{12} y_{+1} - \frac{p(p^2 + 1)(p + 2)(p - 3)}{24} y_{+2} + \\
 & + \frac{p(p^2 - 1)(p^2 - 4)}{120} y_{+3}.
 \end{aligned}$$

**Ввод:**  $x_0 = P8$ ,  $h = P9$ ,  $y_{-2} = P2$ ,  $y_{-1} = P1$ ,  $y_0 = P0$ ,  $y_{+1} = PA$ ,  $y_{+2} = PB$ ,  $y_{+3} = PC$  и  $x = PX$ .

П7	ИП8	—	ИП9	÷	П7	$Fx^2$	1	—	П3
2	4	÷	ПД	ИП7	3	—	×	ИП7	/—/
×	П4	ИП7	2	—	×	5	÷	ИП2	×
ИП7	$Fx^2$	4	—	П5	ИП7	3	—	×	1
2	÷	П6	ИП7	×	ИП7	1	—	×	2
÷	ИП1	×	+	ИП6	ИП3	×	ИП0	×	—
ИП7	1	+	ИП7	×	ИП6	×	ИПА	×	+
ИП4	ИП7	2	+	×	ИПВ	×	+	ИП7	ИПД
×	ИП5	×	5	÷	ИПС	×	+	С/П	БП

00

**Пример.** Для контроля этой программы воспользуемся табулированными данными функции  $P(x)$  нормального распределения вероятностей [17] при  $x_{-2} = 0,5$ ;  $x_{-1} = 0,6$ ;  $x_0 = 0,7$ ;  $x_{+1} = 0,8$ ;  $x_{+2} = 0,9$ ;  $x_{+3} = 1,0$  (т. е.  $x_0 = 0,7$  и  $h = 0,1$ ). Для этих значений  $x$  имеем  $y_{-2} = 0,6914625$ ;  $y_{-1} = 0,7257469$ ;  $y_0 = 0,7580363$ ;  $y_{+1} = 0,78814466$ ;  $y_{+2} = 0,8159399$  и  $y_{+3} = 0,8413447$ . Введя эти данные и положив  $x = 0,86 = PX$ , найдем  $P(0,86) = 0,80510553$ , при известном точном значении  $0,80510547$  и  $t_0 \approx 1$  мин.

Программы, обеспечивающие интерполяцию функции  $y(x)$  при произвольном расположении узлов, могут использоваться и для

обратной интерполяции, т. е. нахождения значений  $x$  при заданном  $y$ . Для этого значения  $x_i$  в узлах интерполяции заносятся в регистры, отведенные под запись  $y_i$ , а значения  $y_i$  — в регистры, отведенные под запись  $x_i$  в узлах.

Приведенные выше программы обеспечивают минимальное время интерполяции благодаря вычислению коэффициентов полиномов Лагранжа по готовым формулам с заранее вычисленными членами, содержащими факториалы. Однако при этом для каждого  $n$  приходится использовать свою программу. Это не является существенным недостатком, поскольку при интерполяции таблиц обычно заведомо известно число узлов, требуемое для достижения заданной точности. Исключением являются таблицы значений резко нелинейных функций, у которых точность может сильно зависеть от того, в какой части таблицы проводится интерполяция. В последнем случае можно использовать описанные в [20] программы, применимые при разных  $n$ .

**Программа 5.15.** Интерполяция по Лагранжу для  $n + 1 \leq 10$  неравноотстоящих узлов. Ввод:  $x_0 = P0, x_1 = P1, \dots, x_9 = P9, n + 1 = PD, x = PX$  и после нажатия клавиш В/О и С/П  $y_0, y_1, \dots, y_n$  в регистр X. Результат: номер вводимого отсчета  $y_i$   $i$  и (после ввода  $y_n$ ) значение  $y(x)$ .

ПВ	Сх	↑	↑	F,	ПС	С/П	XY	F,	ИПД
1	—	ПА	F,	КИПС	КИПА	—	$Fx \neq 0$	25	÷
ИПВ	КИПА	—	×	↑	F,	ИПА	$Fx = 0$	10	F,
+	ИПС	1	+	↑	ИПД	—	$Fx = 0$	04	F,
БП	04								

**Пример.** Для  $n + 1 = 6$  значений гамма-функции  $\Gamma(1) = 1, \Gamma(1,3) = 0,8975, \Gamma(1,4) = 0,8873, \Gamma(1,6) = 0,8935, \Gamma(1,8) = 0,9314, \Gamma(2) = 1$  и  $x = 1,723$  найдем  $\Gamma(1,723) = 0,91317137$ . Время обработки каждого  $y_i$  около 40 с. При смене  $x$  приходится повторять ввод всех отсчетов  $y_i$ .

Интерполирующая функция может быть представлена полиномом Ньютона:

$$y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \prod_{j=0}^i (x - x_j), \quad (5.11)$$

Для практики удобнее представление в виде степенного многочлена

$$y(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad (5.12)$$

которое можно получить, воспользовавшись следующим алгоритмом, реализованным в программе 5.16 [19]:

1. Задаем  $j = 0$  и  $b_n = 0$ .

2. Принимаем  $j = j + 1$ .

3. Вычисляем

$$b_i^{(j)} = \begin{cases} b_i^{(j-1)} - b_{i+1}^{(j-1)} & \text{при } j + i = n, \\ b_i^{(j-1)} & \text{при } j + i < n. \end{cases}$$

4. Если  $j = n + 1$ , принимаем  $a_i = b_i^{(n+1)}$  и заканчиваем вычисления, в противном случае идем к п. 2.

**Программа 5.16.** Вычисление коэффициентов  $b_i$  и  $a_i$  степенных многочленов (5.11) и (5.12) при  $n + 1 \leq 6$ . Ввод:  $y_i = PY$ ,  $x_i = PX$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Получаем:  $b_0 \rightarrow P7, \dots, b_5 \rightarrow P2$ . Для получения  $a_0 \rightarrow P7, \dots, a_5 \rightarrow P2$  нажимаем клавиши БП 40 С/П. Для получения  $y(x)$  для каждого  $x$ : вводим  $n + 1 = P9$ ,  $x = PX$  и нажимаем клавишу С/П. Для смещения начала отсчета  $x$  в точку  $x'_0 = x_0 - \Delta$  вводим  $\Delta = PD = PC = \dots = P(14 - n)$ ,  $7 - n = P1$  и нажимаем клавиши БП 40 С/П ( $a'_0 \rightarrow P7, \dots, a'_5 \rightarrow P2$ ).

ПД	ХУ	П7	7	П1	1	4	ПО	С/П	П8
F,	ИП8	КИПО	—	ХУ	ИПО	5	—	ПО	F,
КИПО	—	ХУ	÷	ИПО	6	+	ПО	6	—
ИП1	—	Fx=0	10	F,	КП1	ИП8	КПО	БП	05
ИП1	1	+	П8	7	+	ПО	6	—	П1
9	—	Fx≠0	79	КИПО	↑	F,	↑	КИП1	ХУ
КИП1	×	—	ИП1	2	+	П1	F,	КП1	F,
ИП1	ИП8	—	Fx=0	56	ИПО	2	БП	45	С/П
↑	ИП9	П1	Cx	ИП8	ПО	F,	×	КИПО	+
ИПО	2	+	FL1	85	F,	БП	79		

**Пример.** Найти коэффициенты  $b_i$  и  $a_i$  многочленов, аппроксимирующих функцию  $y_i(x_i)$ , заданную табл. 5.2. Введя  $y_i(x_i)$ , получим:  $b_0 = 0,4860966$ ;  $b_1 = 0,031793$ ;  $b_2 = -0,032635$ ;  $b_3 = 0,0189833$ ;  $b_4 = -0,00599965$ ;  $a_0 = -0,16166365$ ;  $a_1 = 0,79047151$ ;  $a_2 = -0,36226819$ ;  $a_3 = 0,07538001$  и  $a_4 = -0,00599965$ . Далее для  $x = 2,45$  можно найти  $y(2,45) = 0,49285713$ .

Максимальную степень многочлена можно повысить с 5 до 9, если абсциссы  $x_i$  расположены равномерно с шагом  $h$  относительно значения  $x_0$ .

**Программа 5.17.** Вычисление коэффициентов  $\alpha_i$  многочлена (5.11),  $a_i$  (5.12) и  $y(z)$ , где  $z = x - x_0$ , по формуле (5.12) [20]. Ввод:  $y_0 = P0$ ,  $y_1 = P1, \dots, y_n = Pn$  и  $n = PX$ . Нажав клавиши В/0 и С/П, получаем:  $\alpha_0 \rightarrow P0$ ,  $\alpha_1 \rightarrow P1, \dots, \alpha_n \rightarrow Pn$ . Далее вводим  $h = PX$  и, нажимая клавишу С/П, получаем  $a_0, a_1, \dots, a_n \rightarrow PX$  ( $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  заносятся также в регистры  $P0, P1, P2, \dots, Pn$ ). Для определения  $y(z)$  по формуле (5.74) для каждого  $z$  вводим  $n = PD$ ,  $z = x - x_0 = PX$  и нажимаем клавиши БП 78 С/П.

ПА	Cx	ПД	КИИД	ПВ	ИИД	1	+	ПС	ИИД
1	+	ИД	ИПВ	КИИД	ИВ	ХУ	-	ИПС	÷
КИИД	ИИД	ИПА	-	Fx=0	09	ИПС	ПД	ИПА	-
Fx=0	03	ИПА	1	-	ПС	ПВ	ИПВ	1	+
ИД	КИПВ	КИИД	ИПС	×	-	КПВ	ИПВ	1	+
ПВ	ИПА	-	Fx=0	37	ИПС	1	-	Fx=0	35
ПД	С/П	ПВ	КИИД	ИПС	÷	КИИД	С/П	ИПС	ИИВ
×	ПС	ИИД	1	+	ПД	БП	63	↑	1
↑	Cx	↑	F,	×	КИИД	+	ИИД	1	-
ПД	Fx<0	83	F,	С/П	БП	78			

Пример. Используя данные примера к программе 5.16 получим:  $\alpha_0 = 0,4860966$ ;  $\alpha_1 = 0,0035472167$ ;  $\alpha_2 = -0,0003899$ ;  $\alpha_3 = 2,2583333 \cdot 10^{-5}$ ;  $\alpha_4 = -6 \cdot 10^{-7}$ ;  $a_0 = 0,4860966$ ;  $a_1 = 3,5472167 \cdot 10^{-2}$ ;  $a_2 = -0,3899 \cdot 10^{-2}$ ;  $a_3 = 0,022583333$ ;  $a_4 = -6 \cdot 10^{-3}$ . Для  $x = 2,45$  ( $z = 0,25$ ) получаем  $y(x) = 0,49285719$ .

С помощью описанных выше методов и программ можно проводить экстраполяцию. Однако, особенно при больших  $n$ , экстраполяция выполняется с существенно большей погрешностью, чем интерполяция. При  $n > 10$  возрастает и погрешность интерполяции, главным образом из-за ошибок округления.

**Программа 5.18.** Вычисление коэффициентов  $a_i$  интерполяционного многочлена (5.12) степени  $n \leq 9$  при фиксации начала координат ( $x = 0$ ) в середине интервала интерполяции [19]. Ввод:  $y_0 = P_0, \dots, y_9 = P_9$ ,  $n = PA$  и (после нажатия клавиш В/0 и С/П и индикации цифры 1)  $h = PX$ . Вывод результатов (по мере нажатия клавиши С/П):  $a_0 \rightarrow PX = P_0$ ,  $a_1 \rightarrow PX = P_1, \dots, a_9 \rightarrow PX = P_9$ .

Cx	ПД	КИИД	ПВ	ИИД	1	+	ПС	ИИД	1
+	ПД	ИПВ	КИИД	ПВ	ХУ	-	ИПС	÷	КИИД
ИИД	ИПА	-	Fx=0	08	ИПС	ПД	ИПА	-	Fx=0
02	ИПА	2	÷	ПС	ИПА	1	-	ПД	ПВ
ИПС	1	-	ПС	ИПВ	1	+	ПВ	КИПВ	ИПС
×	ИПВ	1	-	ПВ	ХУ	КИПВ	ХУ	-	КПВ
ИИВ	1	+	ПВ	ИПА	-	Fx=0	44	ИИД	Fx=0
36	ПД	1	ПС	С/П	ПВ	КИИД	ИПС	÷	КИИД
С/П	ИПС	ИПВ	×	ПС	ИИД	1	+	ПД	БП
76									

Пример. Для  $y_i = 5; 10; 30; 50; 55; 57$ ;  $n = 5$  и  $h = 0,2$  получим  $a_0 = 41,253907$ ;  $a_1 = 103,75781$ ;  $a_2 = -128,90625$ ;  $a_3 = -382,8125$ ;  $a_4 = 351,5625$  и  $a_5 = 703,125$ . Положение интервала интерполяции относительно начала координат можно изменить, заменив делитель 2 по адресу 32 делителем  $1/k = n/(n - q_0)$ , где  $q_0 = x_0/h$  (если начало координат совпадает с первым узлом, то  $q_0 = 0$  и  $1/k = 1$ ).

### 5.3. Интерполяция и экстраполяция функций двух переменных

Часто встречаются функции  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$ . Ограничившись доступными для микрокалькуляторов «Электроника БЗ-34» методами интерполяции и экстраполяции функций  $f(x, y)$  с постоянным шагом  $h = \Delta x$  и  $k = \Delta y$  [17], введем наряду с параметром

$$p = (x - x_0)/h$$

параметр

$$q = (y - y_0)/k.$$

Точку  $(x_0, y_0)$  условно обозначим как 0, а значение функции для нее  $f_{00} = f(x_0, y_0)$ . Отличие  $x$  и  $y$  от  $x_0$  и  $y_0$  на шаг  $h$  и  $k$  обозначим условно как 1. Тогда  $f_{10} = f(x_1, x_0)$ ,  $f_{01} = f(x_0, y_1)$ ,  $f_{11} = f(x_1, y_1)$ ,  $f_{0-1} = f(x_0, y_{-1})$  и т. д.

**Программа 5.19.** Интерполяция и экстраполяция функции  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$  по формуле для трех точек

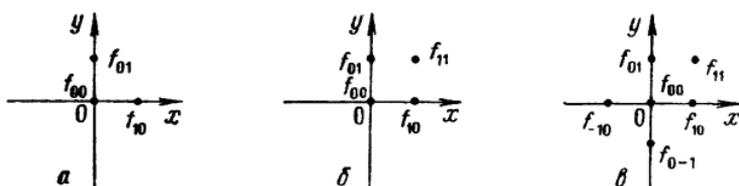


Рис. 5.1. Расположение узлов при интерполяции функций двух переменных при трех (а), четырех (б) и шести (в) точках

(рис. 5.1, а):  $f(x, y) = (1 - p - q)f_{00} + pf_{10} + qf_{01}$  с погрешностью  $O(h^2)$ , пропорциональной  $h^2$ . Ввод:  $h = P8$ ,  $k = P9$  и далее в регистр X:  $x_0, y_0, f_{00}, f_{01}, f_{10}, x$  и  $y$  (при повторных пусках программы для новых  $x$  и  $y$  вводятся только последние).

П0	С/П	П1	С/П	П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П
П5	С/П	П6	ИП1	—	ИП9	÷	П6	ИП5	ИП0
—	ИП8	÷	П5	1	XY	—	ИП6	—	ИП2
×	ИП5	ИП4	×	+	ИП6	ИП3	×	+	БП
09									

**Пример.** Для контроля программы рассмотрим значения (см. табл. 5.3) функции последействия

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-y^2 z^2 - z - x e^{-z}}) dz.$$

Для выбранных узлов имеем  $h = 0,3$ ;  $k = 0,1$ ;  $x_0 = 0,4$ ;  $y_0 = 0$ ;  $f_{00} = 2,5$ ;  $f_{01} = 2,456$  и  $f_{10} = 1,429$ . Введя эти данные и при-

давая  $x$  и  $y$  различные отмеченные ниже значения, получим:  $f(0,7; 0,05) = 1,407$  при точном значении 1,419;  $f(0,7; 0,1) = 1,385$  при точном значении 1,4;  $f(0,4; 0,05) = 2,478$  при точном значении 2,487 и т. д. В узлах интерполяции расчетные значения  $f(x, y)$

Т а б л и ц а 5.3

$y$	$x$		
	$x_0=0,4$	$x_1=0,7$	$x_2=1,0$
$y_0 = 0,00$	2,500	1,429	1,000
$y_1 = 0,05$	2,487	1,419	0,955
$y_2 = 0,10$	2,456	1,400	0,981

совпадают с исходными. Время вычисления одного значения  $f(x, y)$  около 12 с.

**Программа 5.20.** Интерполяция и экстраполяция функции  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$  по формуле для четырех точек (рис. 5.1, б):  $f(x, y) = (1-p)(1-q)f_{00} + p(1-q)f_{10} + q(1-p)f_{01} + pqf_{11}$ , с погрешностью  $O(h^2)$ , пропорциональной  $h^2$ . Ввод:  $h = P1$ ,  $k = P2$  и далее, после нажатия клавиши С/П, в регистр X значений  $x_0, y_0, f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}, x$  и  $y$ .

4	П4	6	П0	С/П	КП4	FL0	04	С/П	ПЗ
С/П	П4	ИП6	—	ИП2	÷	П4	ИПЗ	ИП5	—
ИП1	÷	ПЗ	1	ИПЗ	—	ПВ	1	ИП4	—
ПС	×	ИП7	×	ИПВ	ИП4	×	ИП8	×	+
ИПС	ИПЗ	×	ИП9	×	+	ИПЗ	ИП4	×	ИПА
×	+	БП	08						

**Пример.** Для проверки этой программы воспользуемся данными табл. 5.3. Введя  $h = 0,3 = P1$  и  $k = 0,1 = P2$ , нажимаем клавишу С/П — высвечивается цифра 6, указывающая на ввод шести параметров:  $x_0 = 0,4$ ;  $y_0 = 0$ ;  $f_{00} = 2,5$ ;  $f_{01} = 2,456$ ;  $f_{10} = 1,429$  и  $f_{11} = 1,4$ . При вводе их в регистр X нажимается клавиша С/П. Далее вводятся в регистр X текущие значения  $x$  и  $y$ , что ведет к выдаче  $f(x, y)$ . Например, будем иметь  $f(0,4; 0,05) = 2,478$  при точном значении 1,419,  $f(0,5; 0,08) = 2,1118001$  и т. д.

**Программа 5.21.** Интерполяция и экстраполяция функции  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$  по формуле для шести точек (рис. 5.1, в)

$$f(x, y) = \frac{q(q-1)}{2} f_{0-1} + \frac{p(p-1)}{2} f_{-10} + (1+pq-p^2-q^2) f_{00} + \\ + \frac{p(p-2q+1)}{2} f_{10} + \frac{q(q-2p+1)}{2} f_{01} + pqf_{11}$$

с погрешностью  $O(h^3)$ , пропорциональной  $h^3$ . Ввод  $h = P1$ ,  $k = P2$  и далее, после нажатия клавиши С/П и высвечиваия цифры 8, в регистр X:  $x_0, y_0, f_{00}, f_{10}, f_{0-1}, f_{-10}, f_{01}, f_{11}, x$  и  $y$ .

4	П4	8	ПО	С/П	КП4	FL0	04	С/П	ПЗ
С/П	П4	ИП6	—	ИП2	÷	П4	ИП3	ИП5	—
ИП1	÷	ПЗ	ИП4	1	—	ИП4	×	ИП9	×
ИП3	1	—	ИП3	×	ИПА	×	+	ИП3	ИП4
×	ПД	1	+	ИП3	$Fx^2$	—	ИП4	$Fx^2$	—
2	×	ИП7	×	+	ИП3	ИП4	2	×	—
1	+	ИП3	×	ИП8	×	+	ИП4	ИП3	2
×	—	1	+	ИП4	×	ИПВ	×	+	ИПД
ИПС	×	2	×	+	2	÷	БП	08	

**Пример.** Для контроля этой программы вновь воспользуемся данными табл. 5.3, взяв в качестве центральной точку  $(x_0 = 0,7; y_0 = 0,05)$ . Тогда исходными будут следующие данные:  $h = 0,3; k = 0,05; x_0 = 0,7; y_0 = 0,05; f_{00} = 1,419; f_{10} = 0,995; f_{0-1} = 1,429; f_{-10} = 2,487; f_{01} = 1,4$  и  $f_{11} = 0,981$ . Введя указанные далее значения  $x$  и  $y$ , получим:  $f(1,0) = 1$  при точном значении 1,  $f(0,4; 0) = 2,502$  при точном значении 2,5,  $f(0,5; 0,03) = 2,0658579$  и т. д. Время счета около 25 с.

## 5.4. Вычисление действительных корней нелинейных уравнений

Нелинейное, в частности трансцендентное, уравнение

$$F(x) = 0 \quad (5.13)$$

имеет один или несколько корней  $x = \xi_i$ . Их нахождение сводится к оценке отрезка изоляции корня  $[a, b]$  и его последующему сужению до тех пор, пока приближенное значение корня  $\bar{x}_i$  на этом отрезке не станет отличаться от точного  $\xi_i$  на заданную малую величину  $\varepsilon$ . Ниже дан пакет программ вычисления корней функции  $F(x)$  различными методами. Вычисление  $F(x)$  оформляется фрагментом программы, вписываемым в текст основной программы на место многоточия.

**Программа 5.22°.** Определение корня (5.13), приведенного к виду  $x = f(x)$ , методом простых итераций, реализованным выражениями

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{пока } (x_{n+1} - x_n)^2 > \varepsilon^2.$$

Ввод: данные  $f(x)$ ,  $\varepsilon^2 = PC$ , начальное приближение  $x_0 = PX$ .

ПД	...	...	...	...	...	...	...	ИПД
XY	ПД	—	$Fx^2$	ИПС	—	$Fx < 0$	01	ИПД С/П

Отметим, что метод простых итераций сходится, если на отрезке  $[a, b]$   $|f'(x)| < 1$ . Для контроля программы найдем корень уравнения

$$F(x) = x - \sin x - 0,25 = 0. \quad (5.14)$$

Приведем его к виду

$$x = f(x) = \sin x + 0,25.$$

Поскольку  $f'(x) = \cos x < 1$ , то метод простых итераций применим для решения этого уравнения. При  $k = 0,25 = P9$  фрагмент программы для вычисления  $f(x)$  имеет вид: ИПД Fsin ИП9 +. Для  $x_0 = 1,2$  и  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-6}$  получим  $\bar{x} = 1,1718537$  при  $t_c \approx 22$  с.

**Программа 5.23.** Реализация метода простых итераций с остановкой по критерию машинного нуля (т. е. при  $x_{n+1} = x_n$  с точностью до последнего знака). Ввод: данные  $f(x)$ ,  $x_0 = PX$ .

ПД ... .. .  
 ... .. ИПД ХУ ПД — Fx= 0 01 ИПД С/П

**Пример.** Используя данные примера к программе 5.22, получим  $\bar{x} = 1,1712298$  при  $t_c \approx 60$  с.

Повышенную скорость сходимости итерационного процесса имеет метод Ньютона (касательных), реализуемый итерационным уравнением вида

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n). \quad (5.15)$$

Сходимость обеспечивается при выборе начального приближения, удовлетворяющего условию

$$F(x_0) \cdot F''(x_0) > 0. \quad (5.16)$$

В качестве  $x_0$  выбирается тот конец отрезка  $[a, b]$ , для которого знак  $F(x)$  одинаков со знаком  $F''(x)$ .

**Программа 5.24.** Реализация метода Ньютона с остановкой вычислений по критерию машинного нуля. Ввод: данные  $F(x_n)/F''(x_n)$  при  $x_n = PД$ ,  $x_0 = PХ$ .

ПД ... .. .  
 ... ИПД ХУ — ПД FВx Fx=0 01 ИПД С/П

**Программа 5.25.** Реализация метода Ньютона с остановкой вычислений по критерию  $(x_{n+1} - x_n)^2 < \varepsilon^2$ . Ввод: данные  $F(x_n)/F'(x_n)$  при  $x_n = PД$ ,  $\varepsilon^2 = PС$ ,  $x_0 = PХ$ .

ПД ... .. . ИПД ХУ  
 — ПД FВx Fx^2 ИПС — Fx<0 01 ИПД С/П

**Пример.** Для контроля двух последних программ вычислим корень уравнения (5.14). В этом случае

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{x - \sin x - 0,25}{1 - \cos x},$$

и фрагмент программ, вычисляющий  $F(x)/F'(x)$ , имеет вид (0,25 = P9):

ИПД ↑ Fsin — ИП9 — 1 ИПД Fcos —  
÷

Поскольку  $F''(x) = \sin x > 0$  и  $F(x) > 0$  при  $x = b$ , то надо взять  $x_0 = b = 1,3$ . По программе 5.24 получим  $\bar{x} = 1,712297$  при  $t_c = 30$  с.

Если нахождение производной  $F'(x)$  затруднено или нежелательно, можно использовать модифицированный метод Ньютона, реализуемый выражением

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/k,$$

где  $k$  — константа, близкая к среднему значению  $F'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

**Программа 5.26.** Реализация модифицированного метода Ньютона.

**Пример.** Используя данные примера к программе 5.25 с остановкой вычислений по критерию машинного нуля. Ввод: данные  $F(x_n)$  при  $x_n = \text{PД}$ ,  $k = \text{PВ}$ ,  $x_0 = \text{PХ}$ .

ПД ... .. . ИПВ  
÷ ИПД ХУ — ПД FВx Fx=0 01 ИПД С/П

при  $k = 0,64$  получим  $\bar{x} = 1,1712297$  при  $t_c \approx 35$  с. Фрагмент программы вычисления  $F(x_n)$  имеет при этом вид: ИПД ↑ Fsin — — ИП9 —.

Другой вариант модифицированного метода Ньютона заключается в замене производной  $F'(x)$  ее приближенным значением  $F'(x) \approx \Delta F(x)/\Delta x$ , где  $\Delta x = \delta$  — малое приращение аргумента  $x$ , а  $\Delta F(x)$  — приращение  $F(x)$  при изменении  $x$  на величину  $\delta$ . При этом итерационная формула Ньютона записывается в виде

$$x_{n+1} = x_n - \delta \frac{F(x_n)}{F(x_n + \delta) - f(x_n)}, \quad (5.17)$$

или

$$x_{n+1} = x_n + \delta \frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(x_n + \delta)}. \quad (5.18)$$

Можно положить  $\delta = \varepsilon$  для уменьшения числа необходимых регистров памяти.

**Программа 5.27°.** Реализация модифицированного метода Ньютона при  $\delta = \varepsilon$ . Ввод:  $x_0 = \text{P0}$ ,  $\delta = \text{PС}$ , данные  $F(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы.

ИП0 ИПС + ПП 28 ПД ИП0 ПП 28 ↑  
ИПД — ÷ ИПС × ИП0 + П0 FВx —  
Fх² ИПС Fх² — Fх<0 00 ИП0 С/П ... В/0

**Пример** При  $x_0 = 1,3$  и  $\delta = 0,001$  получаем  $\bar{x} = 1,1712297$  при  $t_c \approx 40$  с.

Вычисление корней (5.13) возможно также методом хорд. При графической иллюстрации этого метода каждое новое значение  $\bar{x}$  находится как точка пересечения хорды, проведенной через точки  $F(a)$  и  $F(b)$  графика функции  $F(x)$  с осью  $x$ .  $F(x)$  совпадает со знаком  $F''(x)$ . Условие сходимости этого метода аналогично (5.16). Если неподвижен конец хорды с  $x = a$ , то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(a)} (x_n - a), \quad (5.19, a)$$

а если неподвижен конец хорды с  $x = b$ , то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)} (b - x_n). \quad (5.19, b)$$

Полученное значение  $x_{n+1}$  присваивается значению  $b$  в первом случае и  $a$  — во втором, что обеспечивает сужение отрезка  $[a, b]$ . Вычисления прекращаются при  $(x_{n+1} - x_n)^2 < \varepsilon^2$ .

**Программа 5.28.** Реализация метода хорд при неподвижном конце  $a$ . Ввод: данные  $F(x_n)$ ,  $a = PA$ ,  $\varepsilon^2 = PD$ ,  $b = PX$ .

ПВ	ИПА	ПП	28	ПС	ИПВ	ПП	28	↑	ИПС
—	÷	ИПВ	ИПА	—	×	ИПВ	ХУ	—	ПВ
FBx	Fx <sup>2</sup>	ИПД	—	Fx < 0	05	ИПВ	С/П	...	В/0

**Программа 5.29.** Реализация метода хорд при неподвижном конце  $b$ . Ввод: данные  $F(x_n)$ ,  $b = PB$ ,  $\varepsilon^2 = PD$  и  $a = PX$ .

ПА	ИПВ	ПП	28	ПС	ИПА	ПП	28	↑	ИПС
—	÷	ИПВ	ИПА	—	×	ИПА	ХУ	+	ПА
FBx	Fx <sup>2</sup>	ИПД	—	Fx < 0	05	ИПА	С/П	...	В/0

В этих программах вычисление  $F(x_n)$  оформляется подпрограммой, причем значения  $x_n$  заносятся в начало подпрограммы. Пусть надо вычислить корень уравнения

$$F(x) = x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = ((x - 1/5)x - 1/5)x - 1,2,$$

лежащий на отрезке  $[1; 1,5]$ . Вычисление значений  $F(x)$  и  $F''(x)$  показывает, что их знаки одинаковы при  $x = a = 1$ . Следовательно, надо использовать программу 5.28, дополнив ее фрагментом вычисления  $F(x)$ :

ПО	5	F1/x	—	ИПО	×	5	F1/x	—	ИПО
×	1	,	2	—					

Введя  $a = 1 = PA$ ,  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-16} = PD$  и  $b = 1,5 = PX$ , получим  $\bar{x} = 1,2$  при  $t_c \approx 2$  мин.

**Пример.** Для контроля программы 5.29 вычислим корень (5.14), введя в нее фрагмент программы (0,25 = P9):  $\uparrow$  Fsin — ИП9 — . Для  $b = 1,3$ ,  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-16}$  и  $a = 1,1$  получим  $\bar{x} = 1,1712297$  при  $t_c \approx 1$  мин.

При методе хорд абсциссы  $a$  и  $b$  выбираются по обе стороны от корня. Если их взять с одной стороны — реализуется метод секущих. Недостатком методов хорд и секущих является реализация их по одной из двух итерационных формул (по двум программам).

На практике предпочтение часто отдается методам, не требующим анализа  $F(x)$  на сходимость. К таким методам относится комбинированный метод секущих — хорд. В его основе лежит итерационная формула Ньютона (5.15), но точное значение производной  $F(x)$  заменяется приближенным — множителем после  $F(x_n)$ :

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

Метод дает сходимость при произвольном выборе в пределах отрезка  $[a, b]$  нулевого  $x_0$  и первого  $x_1$  приближений.

**Программа 5.30°.** Реализация комбинированного метода секущих-хорд. Ввод: данные  $F(x_n)$ ,  $x_0 = PA$ ,  $x_1 = PB$  и  $\varepsilon^2 = P0$ .

ИПА	ПП	34	ПС	ИПВ	ПП	34	ПД	ИПА	ИПС
$\uparrow$	ИПД	ПС	ХУ	—	$\div$	ИПА	ИПВ	—	$\times$
+	ИПВ	ХУ	ПВ	ХУ	ПА	—	$Fx^2$	ИПО	—
$Fx < 0$	04	ИПВ	С/П	...	...	...	...	...	В/0

В табл. 5.4 даны результаты вычисления корня (5.14) по этой программе. Фрагмент программы вычисления  $F(x_n)$  при  $x_n$ , зано-

Т а б л и ц а 5.4

$x_0$	$x_1$	$\bar{x}$	Время счета $t_c, c$
1,1 = a	1,15	1,1712297	50
1,1 = a	1,3 = b	1,1712297	80
1,3 = b	1,1 = a	1,1712297	80
1,3 = b	1,25	1,1712297	80
1,1 = a	1,2	1,1712297	50

симом в его начало, и  $0,25 = P9$  имеет вид:  $\uparrow$  Fsin — ИП9 — . Вычисления велись при  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-16}$ .

Гарантированную сходимость при простой программной реализации имеет метод половинного деления. При нем отрезок  $[a, b]$  делится пополам, затем выбирается тот полуинтервал, в котором  $F(x)$  переходит через нуль, он делится вновь пополам и т. д., пока ширина суженного интервала не станет меньше  $\varepsilon$ .

**Программа 5.31.** Реализация метода половинного деления. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x \rightarrow PA$ ,  $a = PA$ ,  $b - a = PB$ , любое число  $n = PC$  со знаком, совпадающим со знаком  $F(a)$ , и  $\varepsilon^2 = PD$ .

ИПВ 2	÷	ПВ	↑	ИПА +	ПА	÷	$Fx^2$
ИПД —	$Fx < 0$	16		ИПА С/П	...	...	...
ИПС ХУ	ПС	×	$Fx < 0$	00	ИПВ /—/	БП	01

Решим для контроля этой программы уравнение

$$F(U_D) = E - U_D - RI_0 (e^{\nu U_D} - 1),$$

определяющее падение напряжения на диоде  $\bar{x} = U_D$ , подключенном через резистор  $R$  к источнику напряжения  $E$ . Тогда при  $E = P1$ ,  $RI_0 = P2$  и  $\nu = P3$  фрагмент программы, вычисляющий  $F(x) = F(U_D)$ , имеет вид

ИПА ИПЗ	×	$Fe^x$	1	—	ИП2	×	ИПА +
ИП1 ХУ	—						

**Пример.** Для  $E = 0,5$  В;  $RI_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  В;  $\nu = 10$  1/В;  $n = F(0) = 0,5$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0,5$  и  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-6}$  получим  $U_D = 0,27172852$  при  $t_c \approx 2$  мин и для  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-14}$  —  $U_D = 0,27174234$  В при  $t_c \approx 4$  мин. Из этого примера видно, что сходимость метода половинного деления медленная, ибо функция  $F(x) = F(U_D)$  относительно простая.

Гарантированную сходимость имеет также метод случайных проб (Монте-Карло). При нем приближениям  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  задают случайные значения на отрезке  $[a, b]$ , каждый раз сужая этот интервал. Например, для функции  $F(x)$  с  $F(a) > 0$ , если  $F(x_n) > 0$ , значению  $a$  придается значение  $x_n$ , если  $F(x_n) < 0$ , то значению  $b$  придается значение  $x_n$  и т. д.; до тех пор, пока разность  $(b - a)$  не станет меньше  $\varepsilon$ . Генерация случайных чисел с равномерным распределением описана далее в § 5.16.

**Программа 5.32.** Реализация метода случайных проб. Ввод: данные  $F(x_n)$  при  $x_n = PC$ , начальное случайное число  $V_0 = P0$  ( $V_0 < 1$ ),  $a = PA$ ,  $b = PB$ ,  $\varepsilon = PD$ .

ИПО 3	7	×	1	+	ПС	КИПС ХУ	ИПС
—	ПО	.	ИПВ	ИПА —	×	ИПА +	ПС
...	...	...	$Fx \geq 0$	$N$	ИПС	ПА БП	$(N+2)$
ПВ	ИПВ	ИПА	—	ИПД —	$Fx < 0$	00	ИПА С/П

В этой программе  $N$  — число, дающее номер шага команды ИПС после записи в программу фрагмента, вычисляющего  $F(x_n)$ . Для предшествующего примера при  $V_0 = 0,1234567$ ,  $E = 0,5$  В = P1,  $I_0 R = 1 \cdot 10^{-3}$  В = P2,  $\nu = 20$  1/В = P3,  $a = 0,2$  В = PA,  $b = 0,3$  В = PB и  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-3}$  = PD получим  $\bar{x} = 0,27144498$  В при времени счета 70 с (оно сильно зависит от выбора начального приближения).

Фрагмент программы вычисления  $F(x_n)$  имеет при этом вид:

ИПЗ × Fe<sup>x</sup> 1 — ИП2 × ИПС + ИП1  
 ХУ —

Процесс формирования значений  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  можно упорядочить, в частности, формируя эти значения поразрядно [8]. Например, можно формировать значения  $x_n$  с шагом

$$x_n = x_{n+1} + \Delta x_N, \quad (5.20)$$

вычисляя каждый раз  $F(x_n)$ . Если  $F(x_n)/\Delta x_N \geq 0$ , даем  $x_n$  очередное приращение  $\Delta x_N$ . Если  $F(x_n)/\Delta x_N < 0$ , то делим  $\Delta x_n$  на некоторое число  $R$  (показатель разрядности), т. е. получаем новое значение

$$\Delta x_N = -\Delta x_{N-1}/R.$$

Если  $(\Delta x_N)^2 > \epsilon^2$ , организуем вычисления по формуле (5.20); если  $(\Delta x_N)^2 \leq \epsilon^2$  — заканчиваем счет. При  $R = 10$  метод поразрядного приближения становится методом подекадного приближения, причем результат вычислений автоматически округляется (точными являются все цифры результата). Время счета минимально при  $R = 3$  или  $R = 4$ .

**Программа 5.33.** Реализация метода подекадного приближения. Ввод: данные  $F(x_n)$  при  $x_n \rightarrow PA$ ,  $x_0 = PA$ ,  $\Delta x_1 = PB$  и  $\epsilon^2 = PC$ .

ИПА ИПВ + ПА ... ..  
 ... .. ИПВ ÷ Fx<0 00 ИПВ /-/ 1  
 0 ÷ ПВ Fx<sup>2</sup> ИПС — Fx<0 00 ИПА С/П

Для приведенного выше примера при  $\Delta U_{д1} = \Delta x_1 = 0,1$  В и  $\epsilon^2 = 1 \cdot 10^{-6}$  получим  $U_{д} = 0,272$  В при  $t_c \approx 65$  с.

Ввиду невысокого быстродействия микрокалькуляторов значительный интерес представляют методы решения нелинейных уравнений, обеспечивающие повышенную скорость сходимости итерационных процессов.

Ускоренную сходимость при сложных уравнениях (5.13) имеет метод Эйткена — Стеффенсона. При его реализации уравнение (5.13) приводится к виду  $x = f(x)$ , вычисляется первое приближение для  $x = x_0$ :  $x_1 = f(x_0)$ , затем второе:  $x_2 = f(x_1)$ . По ним находится уточненное значение корня  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = (x_0 x_2 - x_1^2) / (x_0 - 2x_1 + x_2). \quad (5.21)$$

Оно приписывается значению  $x_0$ , после чего процесс повторяется до тех пор, пока разность  $(\bar{x} - x_0)^2$  не станет равной или меньшей  $\epsilon^2$ . В программе следует предусмотреть контроль знаменателя (5.21) на нулевое значение, которое может возникнуть при ра-

венстве  $x_0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  в конце итераций. Если такая ситуация возникает, следует перейти к выдаче значений  $x_0 = \bar{x}$ .

**Программа 5.34.** Реализация метода Эйткена — Стеффенсона.

Ввод: данные  $f(x)$ ,  $\varepsilon^2 = \text{PB}$  и  $x_0 = \text{P0}$ .

ИПО	ПП	33	ПА	ПП	33	↑	ИПО	×	ИПА
$Fx^2$	—	XY	ИПО	+	ИПА	2	×	—	$Fx \neq 0$
31	÷	ИПО	XY	ПО	—	$Fx^2$	ИПВ	—	$Fx < 0$
00	ИПО	С/П	...	...	...	...	...	...	V/0

Программу 5.34 можно проверить вычислением корня уравнения (5.14). При  $x_0 = 1,2$  и  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-8}$  получим  $\bar{x} = 1,1714285$  при  $t_c \approx 27$  с.

Корень уравнения (5.13) можно найти путем обратной интерполяции-экстраполяции. При этом на отрезке  $[a, b]$  задается  $N$  значений абсцисс  $x_n$  и вычисляется  $N$  ординат  $F(x_n)$ . Записав  $x_n$  в регистры, отведенные в программах интерполяции с произвольно расположенными узлами (§ 5.2) под запись ординат, а  $F(x_n)$  — под запись абсцисс, найдем сразу приближенное значение корня  $\bar{x}_1$ . После этого можно сузить отрезок  $[a, b]$  и повторить расчет.

С ростом  $N$  существенно усложняется программная реализация методов решения уравнения (5.13) путем обратной интерполяции-экстраполяции. Кроме того, при больших  $N$  резко ухудшается точность экстраполяции. Отметим, что в случае экстраполяции корень может быть обнаружен за пределами отрезка  $[a, b]$ . В связи с этим целесообразно ограничиться значениями  $N = 2$  и  $N = 3$ . При  $N = 2$  используется линейная интерполяция-экстраполяция, реализованная комбинированным методом секущих-хорд. При  $N = 3$  используется квадратичная интерполяция — экстраполяция.

При квадратичной интерполяции-экстраполяции для приближенного значения корня  $\bar{x}$  можно получить аналитическое выражение. Действительно, полином Лагранжа второй степени при замене  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$  приобретает вид

$$x(y) = b_0 + b_1(y - y_0) + b_2(y - y_0)(y - y_1).$$

Поскольку  $y = 0$ , то

$$\bar{x} = b_0 - b_1 y_0 + b_2 y_0 y_1.$$

В соответствии с методом Эйткена при замене переменных  $x$  и  $y$ :

$$b = x_0; \quad b_1 = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}; \quad b_2 = \frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0}; \quad b_2 = \frac{q_2 - b_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставляя коэффициенты  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  в выражение для  $\bar{x}$ , после элементарных преобразований получаем:

$$\bar{x} = x_0 - y_0 \left( \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} + \frac{(x_1 - x_0)/(y_1 - y_0) - (x_2 - x_0)/(y_2 - y_0)}{y_2 - y_1} y_1 \right). \quad (5.22)$$

**Программа 5.35.** Реализация метода нахождения корней с помощью квадратичной обратной интерполяции-экстраполяции. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $x_0 = P0$ ,  $x_2 = P2$  и  $x_1 = PX$ . Результат  $\bar{x} \rightarrow PX$ .

ИП0	ПП	49	ПВ	ИП2	ПП	49	ПД	С/П	П1
ПП	49	ПС	ИП1	ИП0	—	ИПС	ИПВ	—	÷
ИП2	ИП0	—	ИПД	ИПВ	—	÷	—	ИПД	ИПС
—	÷	ИПС	×	ИП1	ИП0	—	ИПС	ИПВ	—
÷	+	ИПВ	×	ИП0	XY	—	БП	08	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	V/0

После получения  $\bar{x}$ , нажав клавишу С/П, получим новое значение  $\bar{x}$  и т. д.

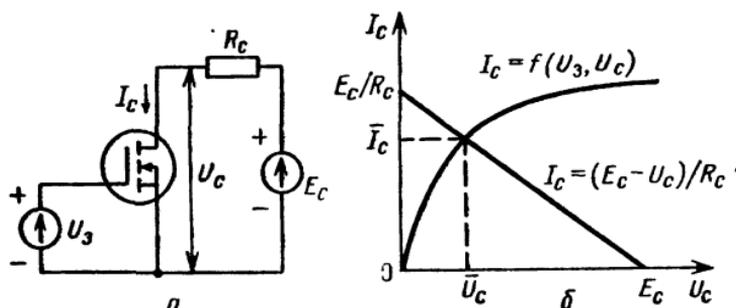


Рис. 5.2. Каскод на мощном МДП-транзисторе (а) и графическое определение положения его рабочей точки (б)

Пусть надо найти напряжение на стоке мощного МДП-транзистора (рис. 5.2, а и б) из решения уравнения

$$\frac{E_0 - U_c}{R_c} - I_c(U_c, U_3) = 0, \quad (5.23)$$

если зависимость тока стока  $I_c$  от напряжений на стоке  $U_c$  и затворе  $U_3$  описывается выражением

$$I_c(U_c, U_3) = S(U_3 - U_0 - bU_3^2) \left[ 1 - e^{-pU_c / (U_3 - U_0 - bU_3^2)} \right], \quad (5.24)$$

где  $S$  — крутизна,  $p$  и  $b$  — параметры аппроксимации вольтамперной характеристики.

Подставляя (5.23) в (5.24), получим окончательно

$$F(U_c) = E_c - U_c - R_c S (bU_3^2 - U_3 + U_0) \left[ e^{pU_c / (bU_3^2 - U_3 + U_0)} - 1 \right]. \quad (5.25)$$

При  $E_c = P4$ ,  $U_3 = P5$ ,  $SR_c = P6$ ,  $p = P7$ ,  $b = P8$  и  $U_0 = +1$  В вписываемый в подпрограмму фрагмент вычисления функции  $F(U_c)$  имеет вид

↑	ИП7	×	ИП8	ИП5	Fx <sup>2</sup>	×	1	+	ИП5
—	П9	÷	Fc <sup>2</sup>	1	—	ИП9	×	ИП6	×
+	ИП4	XY	—						

Пример. Для  $E_c = 40$  В,  $U_3 = 10$  В,  $SR_c = 10$  В,  $p = 1$ ,  $b = 0,02$  1/В,  $U_{c0} = x_0 = 4$  В,  $U_{c1} = x_1 = 5$  В,  $U_{c2} = x_2 = 6$  В получим  $\bar{U}_c = 4,8762113$  В при точном значении  $\bar{U}_c = 4,876727$  В и  $t_c \approx 45$  с. Таким образом, уже при одном цикле интерполяции  $\bar{U}_c$  определено с точностью до 4-х верных знаков, что более чем достаточно для практических расчетов. Второй и третий цикл дают  $\bar{U}_c = 4,8767308$  В и  $\bar{U}_c = 4,8767282$  В при  $t_c \approx 22$  с.

Автоматическое уточнение корня при методе обратной интерполяции-экстраполяции можно выполнить различными способами. Так, для данного примера одним из возможных является следующий способ: левая граница интервала изоляции корня берется равной  $x_0 = 0$  (при этом  $F(U_{c0}) = E_c$ ), значение  $x_1 = \bar{x}$  и  $x_2 = x_1 + \Delta x$ , где  $\Delta x = \Delta U_c = \text{const}$  (например, 1 В).

**Программа 5.36.** Расчет  $U_c$  для схемы рис. 5.2, а методом обратной интерполяции-экстраполяции с автоматическим уточнением корня. Ввод: начальное значение  $U_c = P\text{В}$ ,  $U_0 = P0$ ,  $E_c = P4$ ,  $\varepsilon^2 = P5$ ,  $SR_c = P6$ ,  $p = P7$ ,  $b = P8$  и  $U_3 = P\text{X}$ .

П9	Fx <sup>2</sup>	ИП8	×	ИП0	+	ИП9	—	П9	ИПВ
ПП	57	П1	ИПВ	1	+	ПС	ПП	57.	П2
ИПВ	ИП1	ИП4	—	÷	ПД	ИПС	ИП2	ИП4	—
÷	ИПД	—	ИП1	ИП2	—	÷	ИП1	×	ИПД
+	ИП4	/—/	×	ИПВ	XY	ПВ	—	Fx <sup>2</sup>	ИП5
—	Fx < 0	09	ИПВ	С/П	БП	00	↑	ИП7	×
ИП9	÷	Fe <sup>x</sup>	1	—	ИП6	×	ИП9	×	+
ИП4	XY	—	В/0						

Пример. При  $U_{c0} = 5$  В,  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-10}$ ,  $U_3 = 10$  В и указанных выше других данных  $F(U_c)$  получим  $U_c = 4,8767272$  В, при  $U_3 = 6$  В  $U_c = 6,522966$  В, при  $U_3 = 4$  В  $U_c = 13,381808$  В, при  $U_3 = 2$  В  $U_c = 30,8$  В. При повторных вычислениях вводится только значение  $U_3 = P\text{X}$  и нажимается клавиша С/П. Время вычисления одного значения  $U_c$  около 2 мин.

Наименьшее число вычислений  $F(x) = y(x)$  обеспечивается при следующем алгоритме нахождения корней с помощью обратной интерполяции-экстраполяции.

1. Задаем отрезок  $[a, b]$  и значения  $x_0 = a$  и  $x_2 = b$ .
2. Вычисляем  $F(x_0) = F(a)$  и  $F(x_2) = F(b)$ .
3. Задаем начальное приближение  $a < x_n = x_1 < b$ .
4. Вычисляем  $F(x_1) = F(x_n)$ .
5. По формуле (5.22) находим  $\bar{x}$ .

6. Сравниваем  $\bar{x}$  с  $x_n$ . Если  $|\bar{x} - x_n| < \varepsilon$ , останавливаем счет с выдачей  $\bar{x}$ , если нет — полагаем  $x_n = \bar{x}$  и возвращаемся к п. 4. В этом случае только на первом шаге итераций вычисляются три значения  $F(x)$ . При последующих шагах вычисляется только одно значение  $F(x)$ .

**Программа 5.37.** Вычисление корня (5.1) методом квадратичной обратной интерполяции-экстраполяции с заданной точностью. Ввод: данные  $F(x)$ ,  $a = PA$ ,  $b = PB$ , начальное приближение  $x_1 = PC$ ,  $e^2 = PD$ . Заняты регистры  $0 \div 2$ ,  $A \div D$ .

ИПА	ПП	51	ПО	ИПВ	ПП	51	П2	ИПС	ПП
51	П1	ИПС	ИПА	—	ИП1	ИПО	—	÷	↑
ИПВ	ИПА	—	ИП2	ИПО	—	÷	—	ИП2	ИП1
—	÷	ИП1	×	+	ИПО	/—/	×	ИПА	+
ИПС	XY	ПС	—	ИПД	$Fx^2$	—	$Fx < 0.08$	ИПС	
С/П	...	...	...	...	...	...	...	...	V/0

**Пример.** Для решения уравнения (5.14) подпрограмма вычисления  $F(x)$  записывается в виде:  $\uparrow F \sin$  — ИП9 — (значение  $k = 0,25 = P9$ , текущие значения  $x$  заносятся в начало подпрограммы). Для  $a = 1$ ,  $b = 1,3$ ,  $x_1 = 1,2$  и  $e^2 = 10^{-6}$  получим  $x = 1,1712453$  при  $t_c \approx 40$  с.

## 5.5. Поиск экстремумов функций

Пусть некоторая целевая функция  $F(x)$  одной переменной имеет экстремумы при изменении  $x$ . Задача их поиска близка к решению нелинейных уравнений и сводится к определению отрезка  $[a, b]$ , в котором находится один экстремум, и его сужению. Будем искать максимум  $F(x)$ , так функция  $F(x)$ , имеющая минимум, сводится к функции  $F(x)$ , если  $F(x)$  умножить на  $-1$ . Остановимся вначале на решении этой задачи методом поразрядного приближения.

Поскольку при однократном прохождении экстремума ( $x$  меняется с шагом  $\Delta x$ ) знак приращения  $F(x)$  может не изменяться (см. рис. 5.3), то следует перед дроблением  $\Delta x$  предусмотреть возврат назад на два шага после изменения знака приращения  $F(x)$ ,

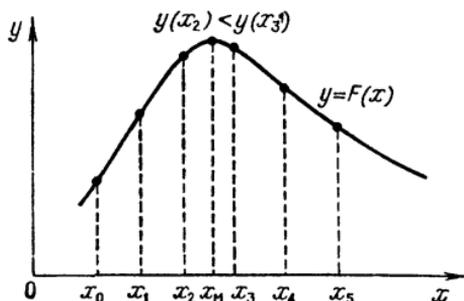


Рис. 5.3. Иллюстрация к поиску максимума унимодальной (одноэкстремальной) функции

Кроме того, желательно при отсутствии экстремума на отрезке  $[a, b]$  автоматически расширять его, пока экстремум не будет обнаружен.

**Программа 5.38.** Определение максимума  $F(x)$  методом поразрядного приближения. Ввод: данные  $F(x)$ ,  $x_0 = PA$ ,  $\Delta x_0 = PB$ ,

$\varepsilon/4 = P0$ . Значения  $x = x_m$  и  $F(x_m)$  в точке максимума заносятся в регистры РХ = РД и РС соответственно, текущее значение  $x \rightarrow$  РА.

0	ПС	ИПА	ИПВ	+	ПА	ПП	35	↑	ИПС
—	$Fx \geq 0$	19	ХУ	ПС	ИПА	ПД	БП	02	ИПА
ИПВ	2	×	—	ПА	ИПВ	4	÷	ПВ	ИПО
—	$Fx < 0$	02	ИПД	С/П	...	...	...	...	В/0

Пример. Для  $F(x) = 10x - 2x^2$ , вписав в программу фрагмент вычисления  $F(x)$  вида

1 0 ИПА × FBx Fx<sup>2</sup> 2 × —

при  $x_0 = 0$ ,  $\Delta x_0 = 1$  и  $\varepsilon/4 = 2,5 \cdot 10^{-4}$  найдем (нажав клавиши В/0 и С/П)  $x_m = 2,5$  при  $t_c \approx 100$  с. Из регистра С вызываем значение  $F(x_m) = 12,5$ .

При другом методе — дихотомии — интервал  $[a, b]$  делится пополам и вблизи точки  $(a + b)/2$  берутся два значения

$$x_1 = (a + b - \varepsilon)/2 \quad \text{и} \quad x_2 = (a + b + \varepsilon)/2,$$

различающихся на небольшую величину  $\varepsilon$ . Далее вычисляются два значения функции  $F(x_1)$  и  $F(x_2)$ . Если  $F(x_1) > F(x_2)$ , то полагаем  $b = x_2$  и вновь делим суженный почти вдвое интервал пополам. Если  $F(x_1) < F(x_2)$ , то полагаем  $a = x_1$  и возвращаемся к делению интервала пополам. Таким образом, при  $\varepsilon \ll (b - a)$  каждая итерация при методе дихотомии обеспечивает сужение отрезка  $[a, b]$  вдвое, но при этом каждый раз приходится вычислять два значения  $F(x)$ .

**Программа 5.39.** Нахождение максимума методом дихотомии. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $a =$  РА,  $b =$  РВ,  $\varepsilon =$  РС (регистры 8, 9, А ÷ Д заняты). Значение  $F(x_m)$  заносится в регистр 8,  $x_m \rightarrow$  РХ.

ИПВ	ИПА	—	ИПС	2	×	—	$Fx < 0$	11	ИПВ
С/П	ИПА	ИПВ	+	ИПС	—	2	÷	ПД	ПП
40	П8	ИПД	ИПС	+	П9	ПП	40	ИП8	—
$Fx < 0$	36	ИП9	ПВ	БП	00	ИПД	ПА	БП	00
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Пример. Найдем максимум функции

$$F(x) = 10x - 2x^2 + 0,1x^3,$$

подпрограмма вычисления которой имеет вид

П7 1 0 ÷ 2 — ИП7 × 1 0  
+ ИП7 ×

Запись начальными  $a = 2$ ,  $b = 5$  и  $\varepsilon = 0,001$  получим  $x_m = 3,3350277$  при  $t_c \approx 220$  с.

При сложных функциях  $F(x)$  преимуществом по скорости счета перед описанными выше методами может обладать метод золотого сечения. Он реализуется с помощью следующего алгоритма.

1. Находим коэффициент дробления отрезка  $[a, b]$ , который в соответствии с правилом золотого сечения имеет значение  $k = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

2. Находим абсциссу  $x_1 = a + (1 - k)(b - a)$  и вычисляем  $F(x_1)$ .

3. Находим абсциссу  $x_2 = a + k(b - a)$  и вычисляем  $F(x_2)$ .

4. Сравниваем  $|x_2 - x_1|$  с  $\varepsilon$ , и если  $|x_2 - x_1| < \varepsilon$ , останавливаем счет с выдачей  $x_m = (x_1 + x_2)/2$ ; если  $|x_2 - x_1| > \varepsilon$  — идем дальше к п. 5.

5. Сравниваем  $F(x_1)$  с  $F(x_2)$ . Если  $F(x_1) < F(x_2)$ , то задаем  $a = x_1$ ,  $x_1 = x_2$  и  $F(x_1) = F(x_2)$ , после чего выполняем п. 3 и переходим к выполнению п. 4.

6. Если  $F(x_1) \geq F(x_2)$ , то задаем  $b = x_2$ ,  $x_1 = x_2$ ,  $F(x_1) = F(x_2)$ , после чего выполняем п. 2 и идем к п. 4.

Особенность метода золотого сечения заключается в особом значении  $k$ . При этом на каждой итерации отрезок  $[a, b]$  уменьшается в  $1/k = 1,62$  ( $k \approx 0,618$ ) раза, но вычислять  $F(x)$  достаточно один раз. Этот выигрыш при простых  $F(x)$  несущественен или даже отсутствует из-за сложности алгоритма и большого числа вспомогательных операций.

**Программа 5.40.** Нахождение максимума методом золотого сечения. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $a = PA$ ,  $b = PB$ ,  $\varepsilon^2 = PC$  ( $(\sqrt{5} - 1)/2 = PD$  (регистры 3, 4, 5, 6, A + D заняты). Значение  $F(x_m)$  заносится в регистр 6,  $x_m \rightarrow PX$ .

ПП	47	П5	ПП	59	П6	ИП4	ИП3	—	$Fx^2$
ИПС	—	$Fx < 0$	20	ИП3	ИП4	+	2	÷	C/П
ИП5	ИП6	—	$Fx \leq 0$	36	ИП4	ПВ	ИП3	П4	ИП5
П6	ПП	47	П5	БП	06	ИП3	ПА	ИП4	П3
ИП6	П5	ПП	59	П6	БП	06	ИПВ	ИПА	—
1	ИПД	—	×	ИПА	+	П3	БП	67	ИПВ
ИПА	—	ИПД	×	ИПА	+	П4	...	...	V/0

**Пример.** Используя данные примера к программе 5.39, получим

$$x_m = 3,3334954 \text{ при } t_0 \approx 230 \text{ с.}$$

Поиск максимума (в том числе наибольшего из нескольких на отрезке  $[a, b]$ ) возможен методом Монте-Карло. При нем формируются случайные значения  $x_i$  на отрезке  $[a, b]$  и организуется поиск  $x_i$ , для которых значение  $F(x_i)$  максимально. К сожалению, время вычислений  $x_m$  этим методом существенно выше, чем у ранее рассмотренных методов.

Для относительно гладких функций большой эффективностью обладает метод поиска экстремумов с помощью интерполяции-

экстраполяции. Его суть заключается в том, что по нескольким значениям  $F(x_i)$  строится интерполяционно-экстраполяционный полином, экстремум которого  $x_m$  удается найти аналитически. Эту процедуру можно рядом способов объединить с итерационной процедурой уточнения  $x_m$ . Можно, например, присвоить приближенное значение одной из абсцисс  $x_i$ , постепенно суживать отрезок  $[a, b]$  и т. д.

Простой реализацией обладает модификация этого метода, основанная на квадратичной интерполяции-экстраполяции. Она реализуется следующим алгоритмом.

1. Задаем начальное приближение для максимума  $x_1$  и вычисляем два смежных значения  $x_0 = x_1 - h$  и  $x_2 = x_1 + h$ .

2. Вычисляем три значения функции  $F(x)$ :  $F_0 = F(x_0)$ ,  $F_1 = F(x_1)$  и  $F_2 = F(x_2)$ .

3. Находим коэффициенты

$$c = \frac{F_0}{2h^2} - \frac{F_1}{h^2} + \frac{F_2}{2h^2} = \frac{1}{2h^2}(F_0 - 2F_1 + F_2),$$

$$b = \frac{-F_0(2x_1 + h) + 4F_1x_1 - F_2(2x_1 - h)}{2h^2}$$

и определяем значение  $x_m$  при экстремуме параболы из аналитического выражения

$$x_m = -\frac{b}{2c} = \frac{1}{2} \frac{F_0(2x_1 + h) - 4F_1x_1 + F_2(2x_1 - h)}{F_0 - 2F_1 + F_2}.$$

4. Вычисляем  $|x_m - x_1|$ . Если  $|x_m - x_1| < \varepsilon$ , останавливаем счет, если  $|x_m - x_1| \geq \varepsilon$  — задаем  $x_1 = x_m$  и возвращаемся к выполнению п. 1.

Особенностью этого метода является возможность обнаружения ближайшего экстремума (как максимума, так и минимума)  $F(x)$  даже в том случае, когда его нет на отрезке  $[x_0, x_2]$ . Этот экстремум может быть не глобальным. Кроме того, точка  $F(x_m)$  может соответствовать условию  $F(x) = 0$ . Графическая иллюстрация поиска максимума в пределах  $[x_0, x_2]$  и минимума за пределами  $[x_0, x_2]$  дана на рис. 5.4.

**Программа 5.41.** Нахождение экстремумов методом квадратичной интерполяции-экстраполяции. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , занесимом в начало подпрограммы,  $h = \text{PB}$ ,  $\varepsilon^2 = \text{PC}$ ,  $x_1 = \text{PX}$  (заняты регистры 0, 1, A, B и C). Значение  $F(x_m)$  заносится в регистр 1,  $x_m \rightarrow \text{PX}$ .

ПА	ИПА	ИПВ	—	ПП	58	ПО	ИПА	ПП	58
П1	ИПА	ИПВ	+	ПП	58	↑	ИПА	2	×
ИПВ	—	×	ИПА	2	×	ИПВ	+	ИПО	×
+	ИП1	4	×	ИПА	×	—	XY	ИПО	+
ИП1	2	×	—	÷	2	÷	ИПА	XY	ПА
—	$Fx^2$	ИПС	—	$Fx < 0$	01	ИПА	С/П	...	В/0

Пример. Для примера к программе 5.39, задав  $x_1 = 3$ ,  $h = 0,1$  и  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-6}$ , получим  $x_M = 3,33375$  и  $F(x_M) = 14,814815$  при  $t_0 = 90$  с. Задав  $x_1 = 9$ , получим  $x_{\text{мин}} = 9,9995065$  и  $F(x_{\text{мин}}) = 9,9999065 \cdot 10^{-6}$ . Значения  $F(x_M)$  показывают, что в первом случае обнаружен и вычислен максимум, а во втором — минимум.

Для функций нескольких переменных  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  обычно ищутся значения  $x_{1\text{мин}}, x_{2\text{мин}}, \dots, x_{n\text{мин}}$ , при которых значения

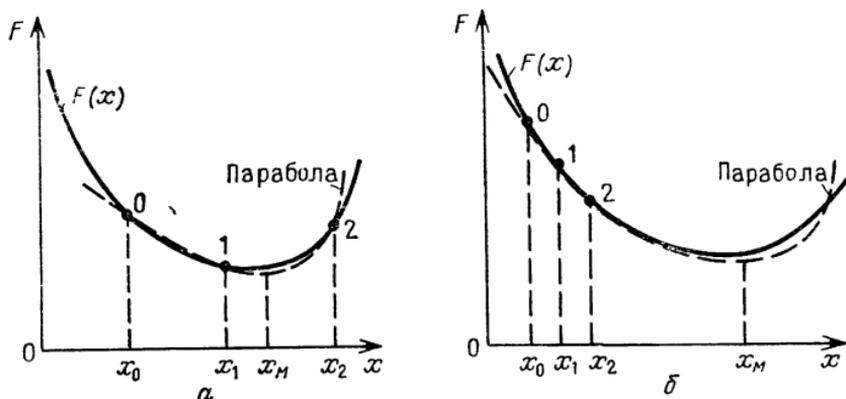


Рис. 5.4. Иллюстрация к поиску экстремума методом квадратичной интерполяции — экстраполяции при нахождении его в пределах отрезка  $[x_0, x_2]$  (а) и за пределами этого интервала (б)

функции минимальны. В простейшем случае для этого используется последовательно поиск значений  $x_{1\text{мин}}$  при поразрядном изменении  $x_1$ , затем  $x_{2\text{мин}}$  при изменении  $x_2$  и т. д. (метод координатного спуска). Если при этом шаг изменения  $\Delta x$  уменьшается постепенно по мере перехода от минимизации  $F(x_i)$  по переменной  $x_1$ , затем  $x_2$  и т. д., то траектория спуска напоминает спираль. В этом случае реализуется метод спирального координатного спуска. Программы, реализующие эти методы, приведены ниже [19, 20].

Программа 5.42. Минимизация гладких функций с  $n \leq 9$  переменными методом координатного спуска. Ввод: данные  $F(x_i)$  при  $x_i$ , берущимися из регистров  $P_i$ ,  $1 \cdot 10^{99} = P_0$ ,  $(\varepsilon/9)^2 = P_A$ ,  $1 = P_B$ ,  $\Delta x = P_C = P_D$ ,  $x_i(0) = P_i$ . После пуска (нажатием клавиш В/0 и С/П)  $F(x_{i\text{мин}}) \rightarrow P_X = P_0$ ,  $x_{i\text{мин}} \rightarrow P_i$ .

КИПВ	ИПД	+	КПВ	...	...	ИПО	XY	ПО	XY
—	$Fx \geq 0$	00	ИПД	/—/	3	÷	ПД	$Fx^2$	ИПС
3	÷	$Fx^2$	—	$Fx < 0$	00	ИПС	ПД	n	ИПВ
1	+	ПВ	—	$Fx < 0$	00	1	ПВ	ИПА	ИПС
9	÷	ПС	ПД	$Fx^2$	—	$Fx \geq 0$	00	ИПО	С/П

Пример. Минимизировать функцию трех переменных

$$F(x_i) = \exp(x_1 + x_2 + x_3) / (x_1^2 x_2^2 x_3^3).$$

Для  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta x = x_i(0) = 0,5 = P1 = P2 = P3 = PC$  и  $n = 3$  (вписывается в программу вместо буквы  $n$ ) получим  $F(x_{i\text{мин}}) = 3,7354517$ ,  $x_{1\text{мин}} = 1,0001271$ ,  $x_{2\text{мин}} = 2,0001018$  и  $x_{3\text{мин}} = 3,0002796$  при  $t_c \approx 21$  мин.

**Программа 5.43.** Минимизация выпуклых функций с  $n \leq 10$  переменными методом спирального координатного спуска. Ввод: данные  $F(x_i)$  при  $x_i \rightarrow Pi$ ,  $1 \cdot 10^{99} = P0$ ,  $(\varepsilon/5)^2 = PB$ ,  $1 = PC$ ,  $\Delta x = PD$  и  $x_i(0) = Pi$ . После пуска (нажатием клавиш В/0 и С/П)  $F(x_{i\text{мин}}) \rightarrow P0 = PX$ ,  $x_{i\text{мин}} \rightarrow Pi$ .

КИПС	ИПД	+	КПС	...	...	...	...	...	...	
...	ИПО		ХУ	ПО	ХУ	-	$Fx \geq 0$	00	$n$	ИПС
1	+		ПС	-	$Fx < 0$	00	1	ПС	ИПВ	ИПД
/-/	5		÷	ПД	$Fx^2$	-	$Fx \geq 0$	00	ИПО	С/П

**Пример.** Используя данные примера к программе 5.42, получим  $F(x_{i\text{мин}}) = 3,7354523$ ,  $x_{1\text{мин}} = 0,999872$ ,  $x_{2\text{мин}} = 2,000672$  и  $x_{3\text{мин}} = 3,001184$  при  $t_c \approx 15$  мин. Большие времена счета показывают, что поиск экстремумов функций нескольких переменных на микрокалькуляторах целесообразен для простых функций.

## 5.6. Решение алгебраических уравнений

На микрокалькуляторах «Электроника БЗ-34» возможно решение алгебраических уравнений

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

по отдельным программам для  $n \leq 5$  [20].

**Программа 5.44.** Вычисление корней квадратного уравнения

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (5.26)$$

по формулам  $x_{1,2} = -a_1 / (2a_2) \pm \sqrt{(a_1 / (2a_2))^2 - a_0 / a_2}$ . Ввод:  $a_0 = P0$ ,  $a_1 = P1$  и  $a_2 = P2$ . Вывод результата (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $7 \rightarrow PX$ ,  $x_2 \rightarrow PY$ ,  $x_1 \rightarrow P7$ , если корни вещественные, и  $4 \rightarrow PX$ ,  $m \rightarrow PY$  и  $d \rightarrow P4$ , если корни  $x_{1,2} = d \pm i \cdot m$  — комплексно-сопряженные.

ИП1	/-/	ИП2	÷	2	÷	П4	$Fx^2$	ИПО	ИП2
÷	-	$Fx < 0$	18	/-/	$F\sqrt{-}$	4	С/П	$F\sqrt{-}$	ПЗ
ИП4	+	П7	ИП4	ИП3	-	7	С/П		

**Пример.** Для уравнения  $2x^2 - 5x - 10 = 0$  получим  $x_1 = -1,3117376$  и  $x_2 = 3,8117376$ , а для уравнения  $x^2 + 2x + 15 = 0$  получим  $x_{1,2} = -1 \pm i \cdot 3,7416573$ .

**Программа 5.45.** Решение квадратного уравнения (5.26) с уменьшенной погрешностью вычисления вещественных корней (меньший по модулю вещественный корень вычисляется по формуле  $x_2 = -a_0 / x_1 a_2$ , где  $x_1$  — больший по модулю корень). Ввод:  $a_0 = P0$ ,  $a_1 = P1$  и  $a_2 = P2$ . Вывод результатов (после на-

жатия клавиш В/0 и С/П):  $7 \rightarrow PX$ ,  $x_1 \rightarrow P7$ ,  $x_2 \rightarrow P8$ , если корни вещественные, и  $4 \rightarrow PX$ ,  $d \rightarrow P4$ ,  $m \rightarrow P5$ , если корни  $x_{1,2} = d \pm \pm i \cdot m$  комплексно-сопряженные.

ИПС	ИПА	÷	П9	ИПВ	/-/	ИПА	2	×	÷
П4	$Fx^2$	—	$Fx < 0$	31	/-/	$F\sqrt{\quad}$	ИП4	$Fx < 0$	23
XY	—	0	+	П7	ИП9	XY	÷	П8	7
С/П	$F\sqrt{\quad}$	П5	4	С/П					

**Пример.** Для уравнения  $3x^2 + 20000x + 12 = 0$  получим по этой программе  $x_1 = -6666,666$  и  $x_2 = -6,0000006 \cdot 10^{-4}$ . По программе 5.44  $x_1 = -6666,666$  и  $x_2 = -6,66666666 \cdot 10^{-4}$  (точное значение  $x_2 = -6 \cdot 10^{-4}$ ).

**Программа 5.46.** Решение приведенного кубического уравнения

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (5.27)$$

выделим вещественного корня  $\bar{x}$ , делим (5.27) на  $(x - \bar{x})$  и вычислением корней полученного квадратного уравнения. Ввод:  $a_0 = P0$ ,  $a_1 = P1$ ,  $a_2 = P2$ ,  $1 + |a_{\max}| = PX$  (здесь  $|a_{\max}|$  — взятое по модулю значение коэффициента с максимальным численным значением). Вывод результатов (после нажатия клавиши В/0 и С/П): 1)  $7 \rightarrow PX$ ,  $x_1 \rightarrow P7$ ,  $x_2 \rightarrow P8$  и  $x_3 \rightarrow P9$  (если корни вещественные) и 2)  $4 \rightarrow PX$ ,  $d \rightarrow P4$ ,  $m \rightarrow P5$  и  $x_3 \rightarrow P9$  (если есть пара комплексно-сопряженных корней).

ПА	Сx	XY	$FVx$	↑	↑	ИП2	+	П6	×
ИП1	+	П3	×	ИП0	+	$Fx < 0$	22	F,	ИПА
+	↑	F,	ИПА	2	÷	ПА	—	П9	—
$Fx=0$	03	ИП6	/-/	2	÷	П4	$Fx^2$	ИП3	—
$Fx < 0$	47	/-/	$F\sqrt{\quad}$	П5	4	С/П	$F\sqrt{\quad}$	П5	ИП4
+	П7	ИП4	ИП5	—	П8	7	С/П		

**Пример.** Для уравнения  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  найдем корни  $x_1 = 2,9999996$ ,  $x_2 = 2,20000006$  и  $x_3 = 0,99999982$ , а для уравнения  $x^3 - 6x^2 + 21x - 52 = 0$  получим  $x_{1,2} = 1 \pm i \cdot 3,4641015$  и  $x_3 = 4$ .

**Программа 5.47.** Вычисление корней алгебраического уравнения четвертой степени

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (5.28)$$

разложением на два квадратичных множителя. Ввод:  $a_0 \div a_3 = = P0 \div P3$ ,  $2(1 + |a_{\max}|) = PA$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $x_1 \rightarrow PX$ ,  $x_2 \rightarrow PY$ , если корни  $x_{1,2}$  действительны, и ЕГГОГ, если корни комплексно-сопряженные (тогда, нажав клавишу С/П, получим  $d \rightarrow PX$  и  $m \rightarrow PY$ ). Для вычисления аналогичным образом  $x_{3,4}$  нажимается клавиша С/П.

ИП3	/-/	2	÷	ПД	ИПД	↑	↑	ИП3	+
П6	×	ИП2	+	П5	×	ИП1	+	$Fx=0$	65
ИП1	ИП3	÷	↑	$Fx^2$	ИП0	—	$Fx \geq 0$	65	$F\sqrt{\quad}$

+	П7	ИПД 2	÷	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП7	—	Fx < 0	
50	/—/	F√— 0	÷	Cx	F,	XY	БП	54	
F√—	+	÷	FBx	C/П	ИП3	/—/	ИПД	—	ПД
ИПО	ИП7	÷	БП 31	XY	ИП6	+	Fx ≠ 0	84	
÷	П7	↑	ИП5	—	×	ИПО	+	Fx < 0 84	
ИПД	ИПА	—	ПД	ИПА 2	÷	ПА	ИПД	+	
ПД	FBx	—	Fx=0 05	ИП7	БП	32			

**Пример.** Для уравнения  $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60 = 0$  получим  $x_{1,2} = -1 \pm i \cdot 1,9999999$  ( $t_c \approx 7$  мин) и  $x_3 = -3$  и  $x_4 = -4$  ( $t_c \approx 10$  с). Из регистров Д и 7 можно вызвать значения коэффициентов квадратичных множителей ( $-2$  и  $4,9999998$ ) до вычисления  $x_{3,4}$ .

**Программа 5.48.** Решение алгебраического уравнения пятой степени

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (5.29)$$

выделением вещественного корня и приведением к уравнению четвертой степени. Ввод:  $a_0 \div a_4 = P0 \div P4$ ,  $2(1 + |a_{\max}|) = PA = PB$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П): 1)  $x_1 \rightarrow PX$ ,  $x_2 \rightarrow PY$  и  $x_3 \rightarrow PD$ , если корни  $x_{1,2,3}$  действительные, 2) ЕГГОГ, если корни  $x_{1,2}$  комплексно-сопряженные. В случае 2), нажав клавишу XY, получаем  $d_{1,2}$ , нажав клавиши XY /—/ F√—, получаем  $m_{1,2}$  ( $x_3 \rightarrow PD$ ). Далее, нажав клавиши БП 76 С/П, получаем: 1)  $x_4 \rightarrow PX$ ,  $x_5 \rightarrow PY$  или 2) ЕГГОГ (нажав клавишу XY, получим  $d_{4,5}$ , далее, нажав клавиши XY /—/ F√—, получим  $m_{4,5}$ ).

Cx	ПС	XY	FBx	↑	↑	ИП4	+	П8	×
ИП3	+	П7	×	ИПС	Fx=0 63	F,	ИП2	+	
П6	×	ИП1	+	П5	×	ИПО	+	Fx < 0 34	
F,	ИПА	+	↑	F,	ИПА 2	÷	ПА	—	
П9	—	Fx=0 03		ИПС	Fx=0 76	ИПВ	ПА	ПС	
ИП9	ПД	ИП5	ПО	ИП7	П3	ИП8	П4	/—/ 2	
÷	БП	35	F,	ИП6	+	XY	ИП8	+	÷
П5	↑	ИП7	—	БП	25	ИПО	ИП5	÷	П5
ИП4	/—/	ИП9	—	П9	2	÷	↑	Fx <sup>3</sup>	ИП5
—	F√—	+	÷	FBx	C/П				

**Пример.** Для уравнения  $x^5 + 8x^4 + 31x^3 + 80x^2 + 94x + 20 = 0$  получим  $x_{1,2} = -1 \pm i \cdot 3,0000178$ ;  $x_3 = -3,7320507$ ;  $x_4 = -0,2679458$  и  $x_5 = -2,000032$  (при  $t_c \approx 13$  мин).

Решение уравнения шестой степени сводится к нахождению квадратичного члена (программа 5.49) и делению его на этот член (программа 4.58). Полученные уравнения второй и четвертой степени решаются по описанным выше программам.

**Программа 5.49.** Выделение квадратичного члена ( $x^2 + b_1x + b_0$ ) у многочлена  $A(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

Ввод:  $a_0 \div a_5 = P0 \div P5$ ,  $1 = P6$ ,  $3(1 + |a_{\max}|) = PA$ . Результат (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $b_1 \rightarrow PX$ ,  $b_0 \rightarrow PY$ .

Сх	ПД	ИПД	↑	↑	ИП5	—	×	ИП4	+
×	ИП3	—	П8	×	ИП2	+	П7	×	ИП1
	П6	F,	3	×	ИП5	—	ПВ	ИП5	—
×	ИП4	+	П9	×	ИП8	+	П8	ИП9	ИПВ
×	—	ПС	ИП6	×	ИПВ	$Fx^2$	ИП0	×	+
ИПВ	ИП7	×	ИП6	—	ИПВ	×	ИПС	ИП8	×
+	$Fx \neq 0$	93	÷	ПС	↑	ИПВ	×	ИП8	—
×	ИП6	+	$Fx < 0$	79	ИПД	ИПА	—	ПД	ИПА
2	÷	ПА	ИПД	+	ПД	$FVx$	—	$Fx=0$	02
ИПС	ИПД	С/П	ИПВ	БП	73				

Пример. С помощью этой программы множитель  $B(x) = x^2 + 2x + 2$  многочлена  $x^6 + 5x^5 + 19x^4 + 11x^3 + 4x^2 + 2x + 120$  выделяется за время  $\approx 14$  мин.

У уравнения седьмой степени с помощью программы 4.59 можно найти обязательный вещественный корень  $x_1$  и свести его к уравнению шестой степени. Из решения последнего (см. выше) определяются остальные корни. Решения алгебраических уравнений любой степени могут выполняться методом Мюллера [13], а также с помощью программ для нахождения минимума функций двух переменных (в качестве функции рассматривается выражение для модуля или квадрата многочлена  $A(x)$ , а в качестве переменных берутся действительная и мнимая части комплексного аргумента).

## 5.7. Численное дифференцирование

Численное дифференцирование гладкой функции  $y = f(x)$ , заданной ординатами  $y_i$  и абсциссами  $x_i$ , следующими с шагом  $h = \Delta x = \text{const}$ , заключается в приближенном отыскании ее производной  $y'(x)$ . Для этого  $y = f(x)$  заменяется интерполяционным полиномом, аналитическое выражение для производной которого нетрудно пайти. Таким образом, выводятся формулы численного дифференцирования [17], используемые в приведенном ниже пакете программ. Отметим, что в них  $p = (x - x_0)/h$ .

**Программа 5.50.** Нахождение первой производной с интерполяцией при трех ординатах  $y(x)$ :

$$y'(x) = [(p - 1/2)y_{-1} - 2py_0 + (p + 1/2)y_{+1}].$$

Ввод:  $h = P9$ ,  $y_{-1}$ ,  $y_0$ ,  $y_{+1}$ ,  $x_0$  и  $x$  в регистр X (при смене только  $x$  вводится новое значение  $x = PX$ ).

П1	С/П	П0	С/П	ПА	С/П	П8	С/П	П7	ИП8
—	ИП9	÷	ПД	2	$F1/x$	—	ИП1	×	ИПД
2	×	ИП0	×	—	ИПД	2	$F/1x$	+	ИПА
×	+	ИП9	÷	БП	07				

Пример. Для  $h = 0,02$ ;  $y_{-1} = 0,3555325$ ;  $y_0 = 0,3520653$ ;  $y_{+1} = 0,3484925$ ;  $x_0 = 0,5$  и  $x = 0,49$  получим  $y'(x) = -0,17336$  для  $x = 0,52$   $y'(x) = -0,18128$  при точном значении  $y'(x) = -0,1812161$ .

**Программа 5.51.** Нахождение первой производной с интерполяцией при четырех ординатах  $y(x)$ :

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left( -\frac{3p^2 - 6p + 2}{6} y_{-1} + \frac{3p^2 - 4p - 1}{2} y_0 - \frac{3p^2 - 2p - 2}{2} y_{+1} + \frac{3p^2 - 1}{6} y_{+2} \right).$$

Ввод:  $h = P9$  и (после нажатия клавиш В/0 и С/П и индикации цифры 4)  $y_{-1}$ ,  $y_0$ ,  $y_{+1}$ ,  $y_{+2}$ ,  $x_0$  и  $x$  в регистр X.

0	П6	5	П0	4	С/П	КП6	FL0	05	С/П
П7	ИП5	—	ИП9	÷	ПД	Fx <sup>2</sup>	3	×	ПС
ИПД	4	×	—	1	—	2	÷	ИП2	×
ИПС	ИПД	6	×	—	2	+	6	÷	ИП1
×	—	ИПС	ИПД	2	×	—	2	—	2
÷	ИП3	×	—	ИПС	1	—	6	÷	ИП4
×	+	ИП9	÷	БП	09				

Пример. Дополнив данные примера к программе 5.50 значением  $y_{+2} = 0,344818$ , получим для  $x = 0,51$  значение  $y'(x) = -0,1786483$ , а для  $x = 0,52$   $y'(x) = -0,1812155$  при точном значении  $-0,1812161$ .

**Программа 5.52.** Нахождение первой производной с интерполяцией при пяти ординатах  $y(x)$ :

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left( \frac{2p^3 - 3p^2 - p + 1}{12} y_{-2} - \frac{4p^3 - 3p^2 - 8p + 4}{6} y_{-1} + \frac{2p^3 - 5p}{2} y_0 - \frac{4p^3 + 3p^2 - 8p - 4}{6} y_{+1} + \frac{2p^3 + 3p^2 - p - 1}{12} y_{+2} \right).$$

Ввод:  $y_{-2} = P2$ ,  $y_{-1} = P1$ ,  $y_0 = P0$ ,  $y_{+1} = PA$ ,  $y_{+2} = PB$ ,  $h = P9$ ,  $x_0 = P8$  и  $x = PX$ .

П6	ИП8	—	ИП9	÷	П7	2	×	3	—
ИП7	×	1	—	ИП7	×	1	+	1	2
÷	ИП2	×	ИП7	4	×	3	—	ИП7	×
8	—	ИП7	×	4	+	6	÷	ИП1	×
—	ИП7	Fx <sup>2</sup>	2	×	5	—	ИП7	×	2
÷	ИП0	×	+	ИП7	4	×	3	+	ИП7
×	8	—	ИП7	×	4	—	6	÷	ИП4
×	—	ИП7	2	×	3	+	ИП7	×	1
—	ИП7	×	1	—	1	2	÷	ИПВ	×
÷	ИП9	÷	С/П	БП	00				

**Пример.** Для  $y_{-2} = 0,35889029$ ;  $y_{-1} = 0,35553253$ ;  $y_0 = 0,35206533$ ;  $y_{+1} = 0,34849251$ ;  $y_{+2} = 0,34481800$ ;  $x_0 = 0,5$  и  $x = 0,51$  получим  $y'(x) = -0,1786488$ , а для  $x = 0,5$  получим  $y'(x) = -0,17603265$  при точном значении  $-0,17603266$ . В этом и двух предшествующих примерах вычислялись производные функции  $y(x) = z(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$  нормального распределения вероятностей по округленным данным таблиц [17].

Если достаточно определять производные в узлах, формулы численного дифференцирования резко упрощаются, особенно для центрального узла ( $p = 0$ ). При 5 узлах первые три производные для центрального узла определяются выражениями

$$y'(x_0) = \frac{1}{12h} (-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}) + \left[ \frac{h^4}{30} y^{\text{V}}(x_0) \right],$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{12h^2} (-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}) + \left[ \frac{h^4}{90} y^{\text{VI}}(x_0) \right],$$
(5.30)

$$y'''(x_0) = \frac{1}{2h^3} (y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}) + \left[ \frac{h^2}{4} y^{\text{V}}(x_0) \right].$$

Здесь в квадратных скобках указана погрешность вычисления производных (в программах этот член не вычисляется).

Аналогично для 7 узлов:

$$y'(x_0) = \frac{1}{60h} (y_3 - 9y_2 + 45y_1 - 45y_{-1} + 9y_{-2} - y_{-3}) - \left[ \frac{h^6}{140} y_0^{\text{VII}}(x_0) \right],$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{180h^2} (2y_3 - 27y_2 + 270y_1 - 490y_0 + 270y_{-1} - 27y_{-2} + 2y_{-3}) - \left[ \frac{h^6}{560} y_0^{\text{VIII}}(x_0) \right],$$

$$y'''(x_0) = \frac{1}{8h^3} (-y_3 + 8y_2 - 13y_1 + 13y_{-1} - 8y_{-2} + y_{-3}) + \left[ \frac{7h^4}{120} y_0^{\text{VII}}(x_0) \right].$$

В [23] можно найти соответствующие формулы для нахождения производных в других узлах.

**Программа 5.53.** Вычисление трех первых производных функции, заданной таблично, при пяти узлах. Ввод:  $y_{-2} = P2$ ,  $y_{-1} = P1$ ,  $y_0 = P0$ ,  $y_1 = PA$ ,  $y_2 = PB$  и  $h = P9$ . Вывод  $y'(x_0) \rightarrow PX$ ,  $y''(x_0) \rightarrow PX$  и  $y'''(x_0) \rightarrow PX$ .

ИПА	ИП1	-	8	×	ИП2	+	ИПВ	-	ИП9
1	2	×	П8	÷	С/П	ИП1	ИПА	+	1
6	×	ИП0	3	0	×	-	ИП2	-	ИПВ
-	ИП8	÷	ИП9	÷	С/П	ИП1	ИПА	-	2
×	ИПВ	+	ИП2	-	2	-	ИП9	↑	$Fx^2$
×	÷	С/П							

**Пример.** Для функции  $y(x) = z(x)$  при  $h = 0,02$  и  $x_0 = 0,7$  имеем из таблиц [17]:  $y_{-2} = 0,3208638$ ;  $y_{-1} = 0,3165929$ ,  $y_0 = 0,31225398$ ,  $y_1 = 0,3078513$  и  $y_2 = 0,3033893$ . Введя эти данные, получим (в скобках указаны точные значения):  $y'(0,7) = -0,21857625$  (0,2185777),  $y''(0,7) = -0,1589375$  (-0,1592495) и  $y'''(0,7) = 0,543377$  (0,543863).

**Программа 5.54.** Вычисление трех первых производных функции, заданной таблично, при семи узлах. Ввод:  $y_{-3} = P3$ ,  $y_{-2} = P2$ ,  $y_{-1} = P1$ ,  $y_0 = P0$ ,  $y_1 = PA$ ,  $y_2 = PB$ ,  $y_3 = PC$  и  $h = P9$ . Вывод  $y'(x_0) \rightarrow PX$ ,  $y''(x_0) \rightarrow PX$  и  $y'''(x_0) \rightarrow PX$ .

ИПС	ИПВ	9	×	—	ИПА	4	5	×	+
ИП1	4	5	×	—	ИП2	9	×	+	ИП3
—	ИП9	6	0	×	÷	С/П	ИПС	2	×
ИПВ	2	7	×	—	ИПА	2	7	0	П8
×	+	ИП0	4	9	0	×	—	ИП8	ИП1
×	+	ИП2	2	7	×	—	ИП3	2	×
+	ИП9	$Fx^2$	1	8	0	×	÷	С/П	ИПВ
8	×	ИПС	—	ИПА	1	3	×	—	ИП1
1	3	×	+	ИП2	8	×	—	ИП3	+
ИП9	↑	$Fx^2$	×	8	×	÷	С/П		

**Пример.** Дополнив данные примера к программе 5.53 значениями  $y_{-3} = 0,3250623$  и  $y_3 = 0,2988724$ , получим:  $y'(0,7) = -0,21857591$ ,  $y''(0,7) = -0,15881944$  и  $y'''(0,7) = 0,5421875$ . При малом  $h$  из-за ошибок округления точность вычисления производных при семи ординатах заметно не повышается. Преимущество при семи ординатах перед пятью проявляется при больших  $h$ .

Иногда полезно вычисление производных и для аналитически заданной функции. В этом случае вычисление ее ординат выполняется с помощью подпрограммы.

**Программа 5.55.** Вычисление первой производной аналитической функции  $y(x)$  по ее трем ординатам с помощью формулы

$$y'(x_0) = (y_1 - y_{-1})/2h.$$

Ввод: данные  $y(x)$ ,  $h/x_0 = PC$  и  $x_0 = PX$ .

ПД	ИПС	XY	÷	ПВ	ИПД	ИПВ	—	ПП	29
ПА	ИПД	ПП	29	С/П	ИПД	ИПВ	+	ПП	29
ИПА	—	2	÷	ИПВ	÷	С/П	БП	00	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	V/0

Так как значения  $x_0$  могут меняться в широких пределах, то задается не абсолютное изменение  $x$ , а относительное  $\Delta x/x_0 = h/x_0$ . Рациональное ориентировочное значение  $h/x_0$  для гладких функций на практике легко оценивается.

**Пример.** Пусть надо вычислить производную функцию  $y(x) = z(x) = e^{-x/2}/\sqrt{2\pi}$  в точке  $x_0 = 0,5$  при  $h/x_0 = 0,01$ . В текст

программы вписываем подпрограмму вычисления  $z(x)$ :  $Fx^2 \ 2 \ /- \rightarrow + \text{Fe}^x \ \text{Fl} \ 2 \ \times \ \text{FV} \ \overline{+}$ . Нажав клавиши В/0 и С/П, получим значение  $z(0,5) = 0,35206532$ , еще раз нажав клавишу С/П, получим  $z'(0,5) = -0,1760005$  при точных значениях  $z(0,5) = 0,35206533$  и  $z'(0,5) = -0,1760327$  соответственно.

**Программа 5.56.** Вычисление первой производной аналитически заданной функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  по пяти ее ординатам с помощью формулы (5.30). Ввод:  $h/x_0 = \text{PC}$  и  $x_0 = \text{PX}$ .

ПД	ИПС	ХУ	÷	ПВ	ИПД	ИПВ	2	×	—
ПП	56	ПА	ИПД	ИПВ	—	ПП	56	8	×
ИПА	ХУ	—	ПА	ИПД	ПП	56	С/П	ИПД	ИПВ
+	ПП	56	8	×	ИПА	+	ПА	ИПД	ИПВ
2	×	+	ПП	56	ИПА	ХУ	—	1	2
÷	ИПВ	÷	С/П	БП	00	...	...	...	В/0

**Пример.** Используя данные примера к программе 5.55, получим  $z(0,5) = 0,35206532$  и  $z'(0,5) = -0,1760325$ .

**Программа 5.57.** Вычисление трех первых производных аналитически заданной функции при пяти ее узлах. Ввод: данные  $y(x)$ ,  $x_0 - 3h = \text{P8}$ ,  $h = \text{P9}$ . Вывод:  $y'(x_0) \rightarrow \text{PX}$ ,  $y''(x_0) \rightarrow \text{PX}$  и  $y'''(x_0) \rightarrow \text{PX}$ .

ПП	68	П2	ПП	68	П1	ПП	68	П0	ПП
68	ПА	ПП	68	ПВ	ИПА	ИП1	—	8	×
ИП2	+	ИПВ	—	ИП9	1	2	×	П8	÷
С/П	ИП1	ИПА	+	1	6	×	ИП0	3	0
×	—	ИП2	—	ИПВ	—	ИП8	÷	ИП9	÷
С/П	ИП1	ИПА	—	2	×	ИП8	+	ИП2	—
2	÷	ИП9	↑	$Fx^2$	×	÷	С/П	ИП8	ИП9
+	П8	...	...	...	...	...	...	...	В/0

**Пример.** Для функции  $y(x) = z(x)$  (см. выше)  $x_0 - 3h = 0,44$  ( $x_0 = 0,5$  и  $h = 0,02$ ) получим:  $y'(x_0) = -0,17603275$ ,  $y''(x_0) = -0,26402083$  и  $y'''(x_0) = 0,48375$  при времени счета  $t_0 \approx 55$  с.

## 5.8. Вычисление частных производных и коэффициентов чувствительности

Нередко необходимо найти частные производные функции  $f(x, y, z \dots)$  нескольких переменных при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$  и т. д. В отличие от численного дифференцирования по одному параметру при вычислении частных производных необходимо выбирать один изменяемый параметр и фиксировать значения остальных параметров. Это можно обеспечить с помощью косвенной адресации регистров памяти, отведенных под ввод соответствующих параметров. Например, если  $x_0 = \text{P1}$ ,  $y_0 = \text{P2}$ ,  $z_0 = \text{P3}$  и т. д., то программу можно составить так, чтобы указание номера регистра

(кода переменной), например цифры 2 при вычислении  $\partial f/\partial y$  и т. д., непосредственно указывало на то, по какому параметру выполняется дифференцирование. В конце вычисления задается исходное значение.

**Программа 5.58.** Вычисление частных производных аналитически заданной функции  $f(x, y, z \dots)$  по трем ее ординатам. Ввод:  $h = PC$ , данные  $f(x, y, z \dots)$ , коды переменных.

ПД	КИПД	ПА	ИПС	—	КПД	ПП	27	ПВ	ИПА
ИПС	+	КПД	ПП	27	ИПВ	—	2	÷	ИПС
÷	ИПА	КПД	ХУ	С/П	БП	00	...	...	В/0

**Пример.** Пусть надо найти частные производные функции

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz \quad (5.31)$$

при  $x = x_0 = 0$ ,  $y = y_0 = 0$  и  $z = z_0 = 1$ . Фрагмент вычисления функции  $f(x, y, z)$  при  $x = P1$ ,  $y = P2$  и  $z = P3$ :

ИП1	$Fx^2$	2	×	ИП2	$Fx^2$	+	ИП3	$Fx^2$	3
×	—	ИП1	ИП2	×	3	×	—	ИП1	ИП3
×	2	×	—						

Вводим программу с этим фрагментом и исходные данные:  $h = 0,001 = PC$ ,  $0 = P1$ ,  $0 = P2$  и  $1 = P3$ . Для вычисления  $\partial f/\partial x$  набираем цифру 1 (код переменной  $x$ ) и, задав клавишу С/П, получим результат  $\partial f/\partial x = -2$  при времени счета около 20 с. Набрав цифру 2 (код переменной  $y$ ) и нажав клавишу С/П, получим  $\partial f/\partial y = 0$ . Наконец, набрав цифру 3 (код переменной  $z$ ), получим  $\partial f/\partial z = -6$ . Эти значения полностью совпадают с точными.

**Программа 5.59.** Вычисление частных производных аналитически заданной функции  $f(x, y, z, \dots)$  по пяти ее ординатам. Ввод:  $h = PC$ , данные  $f(x, y, z, \dots)$ , коды переменных.

ПД	КИПД	ПА	ИПС	—	КПД	ПП	53	ПВ	ИПА
ИПС	+	КПД	ПП	53	ИПВ	—	8	×	ПВ
ИПА	ИПС	2	×	—	КПД	ПП	53	ИПВ	+
ПВ	ИПА	ИПС	2	×	+	КПД	ПП	53	ИПВ
ХУ	—	1	2	÷	ИПС	÷	ИПА	КПД	ХУ
С/П	ЕП	00	...	...	...	...	...	...	В/0

Работу этой программы можно проверить по примеру к программе 5.58.

Нередко переменные функции  $f(x, y, z, \dots)$  имеют резко отличные исходные данные. В этом случае целесообразно задание относительного изменения  $h/p_0$  каждой переменной  $p$  ( $p = x, y, z, \dots$ ). Это допустимо, если  $p_0 \neq 0$ .

**Программа 5.60.** Вычисление частных производных аналитически заданной функции  $f(x, y, z, \dots)$  по трем ее ординатам при задании относительного приращения  $h/p_0$  каждого параметра. Ввод:  $h/p_0 = P9$ , данные  $f(x, y, z, \dots)$ , коды переменных.

ПД	КИПД	ПА	↑	ИПС	×	—	КПД	ПП	34
ПВ	ИПА	↑	ИПС	×	+	КПД	ПП	34	ИПВ
—	2	÷	ИПС	÷	ИПА	÷	ПВ	ИПА	КПД
ИПВ	С/П	БП	00	...	...	...	...	...	В/0

**Пример.** Используя данные примера к программе 5.58 получим при  $h/p_0 = 0,01$ ;  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = 2$  и  $z_0 = 3$  значения  $\partial f/\partial x = -8$ ,  $\partial f/\partial y = 1$  и  $\partial f/\partial z = -20$ , которые также совпадают с точными значениями.

Общее абсолютное приращение функции нескольких переменных при изменении каждой из них:

$$\Delta f(x, y, z, \dots) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \dots$$

Коэффициенты — частные производные при приращениях  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  и т. д. — называются абсолютными коэффициентами чувствительности функции к изменению соответствующего параметра.

В практике научно-технических расчетов предпочитают использовать безразмерные относительные коэффициенты неустойчивости по каждому параметру, например:

$$S_x = \frac{\partial f/f}{\partial x/x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f/f}{\Delta x/x}$$

и т. д. В этом случае легко вычисляются относительные общие приращения функции

$$\frac{\Delta f}{f(x_0, y_0, z_0, \dots)} = S_x \frac{\Delta x}{x_0} + S_y \frac{\Delta y}{y_0} + S_z \frac{\Delta z}{z_0} + \dots$$

Приведенные выше программы легко приспособить для вычисления относительных коэффициентов неустойчивости.

**Программа 5.61.** Вычисление значения функции  $f(x, y, z, \dots)$  и относительных коэффициентов неустойчивости при трех ее узлах. Ввод:  $p/h = PC$ , данные  $f(x, y, z, \dots)$ , коды переменных. Значение  $f(x_0, y_0, z_0, \dots) \rightarrow PA$ .

ПД	КИПД	ПА	↑	ИПС	×	—	КПД	ПП	37
ПВ	ИПА	↑	ИПС	×	+	КПД	ПП	37	ИПВ
—	ИПС	÷	2	÷	ПВ	ИПА	КПД	ПП	37
ПА	ИПВ	XY	÷	С/П	БП	00	...	...	В/0

**Пример.** Для иллюстрации вычислим коэффициенты относительной неустойчивости периода повторения импульсов, формируемых релаксационным генератором на однопереходном транзисторе,

$$t_n = RC \ln(1 - \eta)^{-1},$$

где  $R = 1 \cdot 10^5$  Ом — величина времязадающего резистора,  $C =$

$= 1 \cdot 10^{-8}$  Ф — емкость времязадающего конденсатора,  $\eta = 0,66$  — коэффициент деления.

Вписываемая в программу 5.60 подпрограмма вычисления  $t_n(R, C, \eta)$  при  $R = P1, C = P2$  и  $\eta = P3$  имеет вид

1 ИПЗ — F1/x Fln ИП1 × ИП2 ×

Введем значения  $R, C, \eta$  и  $h = 0,1$ , набираем код 1. Нажав клавишу С/П (спустя  $t_c \approx 25$  с), получим  $S_R = 0,99999999$ . Набрав код 2 и нажав клавишу С/П, получим  $S_c = 0,99999999$  и, наконец, набрав код 3, получим  $S_h = 1,8224953$ . Из регистра можно вызвать исходное значение  $t_n = 1,0788096 \cdot 10^{-3}$  с.

**Программа 5.62.** Вычисление значения функции  $f(x, y, z, \dots)$  и относительных коэффициентов неустойчивости при пяти ее узлах. Ввод:  $h/p_0 = PC$ , данные  $f(x, y, z, \dots)$ , коды переменных. Значение  $f(x_0, y_0, z_0, \dots) \rightarrow PA, PX$ .

ПД	КИПД	ПА	ПП	53	2	ПП	57	ПВ	ПП
52	ПП	58	8	/—/	ПП	48	+	ПП	59
8	ПП	48	2	×	+	ПП	59	ИПВ	ХУ
—	ИПС	÷	1	2	÷	ПВ	ИПА	КПД	ПП
59	ИПВ	ХУ	ПА	÷	С/П	БП	00	×	ИПВ
+	ПВ	ИПА	↑	ИПС	×	В/0	×	—	КПД
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

**Пример.** Используя данные примера к программе 5.61, при  $h = 0,01$  получим  $S_R = 0,99999949$ ;  $S_c = 0,99999949$ ,  $S_\eta = 1,7993745$  и  $t_n = 1,0788096 \cdot 10^{-3}$  с при  $t_c \approx 50$  с.

## 5.9. Вычисление определенных интегралов

Основная задача численного интегрирования сводится к нахождению значения собственного определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (5.32)$$

подынтегральная функция которого на отрезке  $[a, b]$  не имеет особенностей.

В общем случае интервал интегрирования  $[a, b]$  разбивается на  $m$  частей. В свою очередь каждая из них делится на  $n$  частей, в пределах каждой из которой  $y = f(x)$  аппроксимируется полиномом, интегрирование которого возможно по достаточно простым формулам [1, 5, 17]. Приведенные ниже программы отличаются степенью полинома и числом ординат  $f(x)$ , вычисляемых на каждой из  $m$  частей. Последний член приводимых формул характеризует погрешность интегрирования. Фрагмент программы, вычисляющий  $f(x)$ , вписывается на место многоточия.

**Программа 5.63.** Численное интегрирование методом прямоугольников по формуле

$$I = h \sum_{i=0}^{m-1} y_i = \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} y_i,$$

где  $h = (b-a)/m$ . Ввод: данные  $f(x)$ ,  $m$ ,  $b$  и  $a$  в регистр X. Текущие значения  $x \rightarrow PA$ , регистры 0, A, B и C заняты.

ПО	0	ПС	С/П	ПВ	С/П	ПА	—	ИПО	÷
ПО	...	...	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПО	+	ПА
ИПВ	—	$Fx \geq 0$	11	ИПС	ИПО	×	С/П	БП	00

**Пример.** Пусть надо вычислить значения интегралов, приведенных в табл. 5.4. Для первого интеграла фрагмент программы, вычисляющий  $f(x)$ , имеет вид (число 16 вводим в регистр 8):

ИПА ↑  $Fx^2$  ×  $FVx$   $Fx^2$  ИП8 + ÷

Для второго интеграла этот фрагмент следующий:

ИПА 2 × 1 +  $F\sqrt{\quad}$ .

Результаты вычислений для различных  $m$  даны в табл. 5.5.

**Программа 5.64.** Численное интегрирование модифицированным методом прямоугольников

$$I = h \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i + 0,5h) + \frac{h^2(b-a)}{24} f''(\xi),$$

где  $f''(\xi)$  — значение второй производной  $f(x)$  в точке  $x = \xi$  и  $f''(\xi)$  максимальна. Ввод аналогичен описанному для программы 5.63. Последний член формулы не вычисляется.

ПО	0	ПС	С/П	ПВ	С/П	ПА	—	ИПО	÷
ПО	2	÷	ИПА	+	ПА	...	...	...	...
...	...	...	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПО	+	ПА
ИПВ	—	$Fx \geq 0$	16	ИПС	ИПО	×	С/П	БП	00

Данные контрольных примеров см. в табл. 5.5.

**Программа 5.65.** Численное интегрирование методом трапеций

$$I = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (y_i + y_{i+1}) - \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi).$$

Ввод аналогичен описанному для программы 5.63. Регистры 0, A, B, и C заняты, текущее значение  $x \rightarrow PA$ .

ПО	С/П	ПВ	ПП	41	ПС	ИПВ	С/П	ПП	41
ИПС	+	2	÷	ПС	ИПВ	ИПА	—	ИПО	÷
ПВ	ИПО	1	—	ПО	ИПА	ИПВ	÷	ПП	41



Ввод: данные  $f(x)$  при  $x \rightarrow \text{PB}$ ,  $2m$  (четные числа),  $b$  и  $a$  в регистры X (ввод каждого параметра фиксируется нажатием клавиши С/П). Результат  $I \rightarrow \text{PX}$ .

ПО	С/П	ПВ	С/П	ПА	ПП	44	ПС	ИПВ	ИПА
ПВ	—	ИПО	÷	ПА	ПП	44	1	ПП	32
4	ПП	32	2	БП	18	ИПС	3	÷	ИПА
×	С/П	×	ИПС	+	ПС	FL0	40	БП	26
ИПВ	ИПА	+	ПВ	...	...	...	...	...	В/0

Численное интегрирование методом Симпсона возможно с переменным шагом, выбираемым автоматически из условия получения заданной точности  $\epsilon$  результата. Для этого величине 2 придаются значения 2, 4, 8, 16 и т. д. При каждом удвоении 2 точность улучшается приблизительно в 15 раз. Процесс прекращают при

$$(I_t - I_{t-1})/15 < \epsilon.$$

**Программа 5.67.** Численное интегрирование методом Симпсона с заданной точностью  $\epsilon$  результата. Ввод: данные  $f(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $(15\epsilon)^2 = \text{PД}$ ,  $b = \text{PB}$ ,  $a = \text{PA}$  и  $(b - a) = \text{P7}$ . После пуска нажатием клавиш В/0 и С/П получаем  $I \rightarrow \text{PX} = \text{P6}$ .

ИПВ	ПП	58	П9	ИПА	ПП	58	ИП9	+	П9
ИП7	2	÷	П7	ИПА	+	П8	0	ПС	ИП8
ПП	58	2	×	ИПС	+	ПС	ИП7	2	×
ИП8	+	П8	ИПВ	—	$Fx \geq 0$	19	ИПС	↑	ИП9
+	П9	+	3	÷	ИП7	×	ИП6	XY	П6
—	$Fx^2$	ИПД	—	$Fx < 0$	10	ИП6	С/П	..	В/0

По программе 5.67 интеграл 2 (см. табл. 5.5) вычисляется за 52 с при  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$  ( $I = 1,3986677$ ) и за 90 с при  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-5}$  ( $I = 1,3987138$ ).

Как видно из табл. 5.5, из простых методов интегрирования метод Симпсона дает наиболее высокую точность — ошибка пропорциональна  $h^5$  [1]. Он применяется наиболее часто. Однако если фрагмент программы вычисления  $f(x)$  вписывается в программу, то применение более точных методов (с  $n > 2$ ) позволяет сократить время интегрирования (при заданной точности). В приводимых ниже программах обозначено

$$h = (b - a)/n,$$

а отрезок  $[a, b]$  соответствует при  $m = 1$  отрезку  $[x_0, x_n]$ , в пределах которого равномерно расположены абсциссы  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Предусмотрена возможность разбивки общего интервала  $[a, b]$  на  $m$  частичных интервалов  $[x_0, x_n]$ .

**Программа 5.68.** Численное интегрирование методом Ньютона — Котеса при  $n = 4$  (формула Бодэ):

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) - \frac{8h^7}{945} f^{VI}(\xi).$$

Ввод: данные  $f(x)$  при  $x \rightarrow PA$ ,  $m$ ,  $b$  и  $a$  в регистр X (регистры 0, A, B и C запяты).

ПО	0	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИПО	÷
4	÷	ПВ	ПП	26	FL0	13	ИПС	ИПВ	×
2	×	4	5	÷	С/П	ИПА	ПП	58	7
ПП	50	3	2	ПП	50	1	2	ПП	50
3	2	ПП	50	7	×	ИПС	+	ПС	В/0
×	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПВ	+	ПА	...	В/0

**Программа 5.69.** Численное интегрирование методом Ньютона — Котеса при  $n = 6$ :

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{140} (41y_0 + 216y_1 + 27y_2 + 272y_3 + 27y_4 + 216y_5 + 41y_6) - \frac{9h^9}{1400} f^{VIII}(\xi).$$

Ввод см. в программе 5.68.

ПО	0	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИПО	÷
6	÷	ПВ	ПП	25	FL0	13	ИПС	ИПВ	×
1	4	0	÷	С/П	ИПА	ПП	70	4	1
ПП	62	2	1	6	ПП	62	2	7	ПП
62	2	7	2	ПП	62	2	7	ПП	62
2	1	6	ПП	62	4	1	×	ИПС	+
ПС	В/0	×	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПВ	+	ПА
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

**Программа 5.70.** Численное интегрирование методом Уэддл для  $n = 6$ :

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{3h}{10} (y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6) + \frac{47h^7}{12600} f^{VI}(\xi).$$

Ввод см. в программе 5.63.

ПО	0	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИПО	÷
6	÷	ПВ	ПП	26	FL0	13	ИПС	ИПВ	×
3	×	1	0	÷	С/П	ИПА	ПП	59	1
ПП	51	5	ПП	51	1	ПП	51	6	ПП

51	1	ПП	51	5	ПП	51	ИПС	+	ПС
В/0	×	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПВ	+	ПА	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

При интегрировании методом Чебышева интеграл (5.31) подстановкой

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t \quad (5.32)$$

приводится к виду

$$I = \int_{-1}^{+1} f(t) dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i). \quad (5.33)$$

Выбор значений  $t_i$  производится из условия, что (5.33) будет точной для  $f(t)$  вида,  $t, t^2, t^3, \dots, t^n$ , т. е. для полиномов вплоть до  $n$ -й степени. Для микро-ЭВМ представляют интерес случаи, когда  $n = 2$  ( $i = 1; 2$  и  $t_{1,2} = \mp \sqrt{3}/3 = \mp 0,57735$ ) и  $n = 3$  (для  $i = 1; 3$   $t_{1,3} = \mp \sqrt{2}/2 = \mp 0,707107$  и для  $i = 2, t_2 = 0$ ).

**Программа 5.71.** Интегрирование методом Чебышева для  $n = 2$ . Ввод: данные  $f(x)$  при  $x$  заносимом в начало фрагмента вычисления  $f(x)$ ,  $m$ ,  $b$  и  $a$  в регистр X (регистры 0, A, B, C и D заняты).

ПО	Cx	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИПО	÷
2	÷	ПВ	3	F√	÷	ПД	ИПА	ИПВ	—
ПА	ИПА	ИПВ	+	ИПВ	+	ПА	ПП	35	FLO
21	ИПС	ИПВ	×	С/П	ИПД	/—/	ПП	41	ИПА
ИПД	+	...	...	...	...	ИПС	+	ПС	В/0

**Программа 5.72.** Интегрирование методом Чебышева при  $n = 3$ . Ввод см. в программе 5.71.

ПО	0	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИПО	÷
ПВ	8	F√	÷	ПД	ИПА	ИПВ	2	÷	—
ПА	ИПА	ИПВ	+	ПА	ПП	35	FLO	21	ИПС
ИПВ	×	3	÷	С/П	ИПД	/—/	ПП	43	ИПА
ПП	45	ИПД	ИПА	+	...	ИПС	+	ПС	В/0

При интегрировании методом Гаусса также выполняется подстановка (5.32), причем

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i), \quad (5.34)$$

а  $t_i$  выбирается как корни полинома Лежандра. Абциссы  $t_i$  расположены неравномерно и выбраны из условия наилучшего при-

ближения  $f(t)$  полиномом Лсжандра. При этом (5.34) оказывается точной для полиномов до  $(2n - 1)$ -й степени.

**Пример.** При  $n = 2$ ;  $i = 1$  и  $2$  имеем  $A_{1,2} = 1$  и  $t_i = \mp 1/3 = \mp 0,57735027$ , а при  $n = 3$   $i = 1$ ;  $2$  и  $3$ , причем  $A_{1,3} = 5/9$ ;  $A_2 = 8/9$ ;  $t_{1,3} = \mp 0,6 = \mp 0,77459667$  и  $t_2 = 0$ . При  $n = 2$  для интегрирования методом Гаусса можно использовать программу 5.71 либо приведенную ниже программу.

**Программа 5.73.** Интегрирование методом Гаусса при  $n = 2$ . Ввод см. в программе 5.71.

ПО	0	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИПО	÷
2	÷	ПВ	3	F√	÷	ПД	ИПА	ИПВ	—
ПА	ИПА	ИПВ	+	ИПВ	+	ПА	ПП	35	FLO
21	ИПС	ИПВ	×	С/П	ИПД	/—/	ПП	41	ИПА
ИПД	+	ПП	48	ИПС	+	ПС	В/0	...	В/0

**Программа 5.74.** Интегрирование методом Гаусса при  $n = 3$ . Ввод см. в программе 5.71.

ПО	Cx	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИПО	÷
2	÷	ПВ	0	,	6	F√	×	ПД	ИПА
ИПВ	—	ПА	ИПА	ИПВ	+	ИПВ	+	ПА	ПП
39	FLO	23	ИПС	ИПВ	×	9	÷	С/П	ИПД
/—/	ПП	50	ИПА	ПП	60	8	ПП	55	ИПД
ИПА	+	ПП	60	5	×	ИПС	+	ПС	В/0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Погрешности, присущие методу численного интегрирования Гаусса при  $n = 2$  и  $3$ , определяются остаточными членами:

$$R_2 = \frac{1}{135} \left( \frac{b-a}{2} \right)^5 f^{IV}(\xi),$$

$$R_3 = \frac{1}{15750} \left( \frac{b-a}{2} \right)^7 f^{VI}(\xi).$$

Из табл. 5.5 и 5.6 следует, что с ростом  $n$  и  $m$  точность интегрирования растет. Обычно для получения требуемой точности находят  $I$  при разных возрастающих вдвое  $m$  (2, 4, 8, 16 и т. д.). Точными считают совпадающие знаки результата. Кроме точности при проведении интегрирования надо учитывать сложность программы, число занятых ее регистров памяти и наличие у подынтегральной функции особенностей, например вида  $0/0$ ,  $\infty/\infty$  или  $f(x) \rightarrow \infty$  (см. также примеры в разд. 1.7). Если особенность наблюдается при  $x \rightarrow a$  или  $x \rightarrow b$ , то предпочтение отдается методу Гаусса, так как у него абсциссы  $f(x)$  никогда не попадают на концы интервала  $[a, b]$ . Если особенность появляется в середине отрезка  $[a, b]$ , предпочтительней использование методов с равномерным и легко предсказываемым положением абсцисс (Симпсона, Ньютона — Котеса, Уэддля).

Интегрирование таблично заданных функций методами трапеций и Симпсона обеспечивает приведенный ниже пакет программ.

Таблица 5.6

**Результаты вычисления определенных интегралов сложными методами численного интегрирования**

Интеграл и его точное значение	Программа	Метод	$m$	Результат I	Время счета, мин
$I = \int_1^5 \frac{x^3}{x^4 + 16} dx = 0,9074539$	5.68	Бодэ	4	0,907455186	2
	5.69	Ньютона — Котеса при $n = 6$	4	0,90745414	3
	5.70	Уэддля	4	0,90745401	3
	5.71	Чебышева при $n = 2$	8	0,90745077	2
	5.72	Чебышева при $n = 3$	8	0,9074528	3
	5.73	Гаусса при $n = 2$	4	0,90737764	1,5
	5.74	Гаусса при $n = 3$	4	0,90745631	2,5
$I = \int_0^1 \sqrt{1 + 2x} dx = 1,3987175$	5.68	Бодэ	4	1,3987174	2
	5.69	Ньютона — Котеса при $n = 6$	4	1,3987175	3
	5.70	Уэддля	2	1,3987174	2
	5.71	Чебышева при $n = 2$	8	1,3987176	2,2
	5.72	Чебышева при $n = 3$	8	1,3987175	2,6
	5.73	Гаусса при $n = 2$	4	1,3987198	1,6
	5.74	Гаусса при $n = 3$	4	1,3987174	2

**Программа 5.75.** Интегрирование табличных данных при постоянном шаге методом трапеций. Ввод:  $h = P8$ ,  $y_0, y_1, \dots, y_n$  в регистр X. Вывод результатов по мере ввода и обработки  $y_i$ .

P9 0    ↑    C/P    ИП9 XY    P9 +    ИИ8 ×  
 2    ÷    †    БП    02

**Пример.** Для  $h = 0,25$  и  $y_i = 3; 4; 5; 6$  и  $7$  получим  $I = 5$ . Один отсчет функции  $y_i$  обрабатывается 5 с.

**Программа 5.76.** Интегрирование табличных данных при произвольном расположении узлов  $y_i(x_i)$  методом трапеций. Ввод:  $y_0 = PY$  и  $x_0 = PX$  В/0 С/П и далее  $y_i \uparrow x_i$  С/П. Вывод результатов по мере ввода и обработки  $y_i(x_i)$ .

П9	XY	П8	0	↑	С/П	XY	ИП8	XY	П8
+	XY	ИП9	XY	П9	XY	—	×	2	÷
+	БП	04							

**Пример.** Для  $y_i(x_i)$ , равных  $3(0); 4(1); 5(2); 6(3)$ , и  $7(4)$ , получим  $I = 20$ . Время обработки одного отсчета  $y_i(x_i)$  около 6 с.

**Программа 5.77.** Интегрирование таблично заданных функций методом Симпсона [19]. Ввод:  $h = P8$ , число интервалов разбиения  $n$ , ординаты  $y_0, y_1, \dots, y_n$  в регистр X. Результат:  $I \rightarrow PX$  после ввода и обработки  $y_i$ .

П0	С/П	П9	С/П	КИП0	XY	4	×	ИП9	+
П9	С/П	↑	ИП9	+	+	FLO	02	FBx	ИП8
×	3	÷	С/П	БП	00				

**Пример.** Если  $h = 0,25$ ;  $n = 4$ ,  $y_0 = 3$ ,  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 5$ ,  $y_3 = 6$  и  $y_4 = 7$ , получим  $I = 5$ .

**Программа 5.78.** Интегрирование таблично заданных функций по формуле Симпсона

$$I = h(f_i + 4f_{i-1} + f_{i-2})/3$$

для четных  $i \geq 2$  и по формуле Ньютона

$$I = 3h(f_i + 3f_{i-1} + 3f_{i-2} + f_{i-3})/8$$

для нечетных  $i \geq 3$  с суммированием текущего результата по формуле Симпсона [20]. Ввод:  $h = P0$ ,  $y_0 = PX$  и далее (после нажатия клавиш В/0 и С/П),  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П ... и т. д. Вывод результата  $I \rightarrow PX$  начиная с ввода и обработки  $y_2$ .

П1	Сx	ПД	С/П	П2	Сx	ПС	С/П	П3	ИПС
ИПД	+	ПД	ИП1	ИП2	4	×	+	ИП3	+
ИП0	×	3	÷	ПС	+	С/П	ИП1	ИП2	ИП3
П1	+	3	×	+	XY	П2	+	ИП0	×
3	×	8	÷	ИПД	+	БП	07		

Пример см. к программе 5.78.

Вычисление криволинейных интегралов

$$\int_{AB} P(x_1, x_2) dx_1 + Q(x_1, x_2) dx_2$$

с помощью подстановок  $x_1 = \varphi(t)$  и  $x_2 = \psi(t)$  сводится к вычислению обыкновенного интеграла

$$I = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt$$

по одной из описанных выше программ.

### 5.10. Вычисление двойных и тройных определенных интегралов

Программа 5.79. Вычисление двойного интеграла по формуле Симпсона:

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy =$$

$$= \frac{(b-a)(d-c)}{36} \{ [f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2)] +$$

$$+ 4 [f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)] + 16f(x_1, y_1) \},$$

где  $x_0 = a$ ,  $x_1 = (a+b)/2$ ,  $x_2 = b$ ,  $y_0 = c$ ,  $y_1 = (c+d)/2$  и  $y_2 = d$ . Ввод: 0 = P7, a = PA, b = PB, c = PC, d = PD,  $y_1 = P8$ ,  $x_1 = P9$ , данные  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow PX$  и  $y \rightarrow PY$ . Для вычисления  $f(x, y)$  можно использовать регистры 1 ÷ 6 (регистр 7 — суммирующий при разбивке области интегрирования на несколько прямоугольников).

0	ПО	ИПС	ПП	59	ИПС	ИПВ	ПП	60	ИПД
ПП	59	ИПД	ИПВ	ПП	60	4	÷	ПО	ИПС
ИП9	ПП	60	ИП8	ПП	59	ИП8	ИПВ	ПП	60
ИПД	ИП9	ПП	60	ИП8	ИП9	ПП	60	XY	1
2	×	ИПО	+	ИПВ	ИПА	—	×	ИПД	ИПС
—	×	3	6	÷	ИП7	+	П7	С/П	ИПА
...	...	↑	↑	4	×	ИПО	+	ПО	В/0

Пр и м е р. Для вычисления интеграла

$$I = \int_4^{4,4} \int_2^{2,6} \frac{dx dy}{xy} \quad (5.35)$$

фрагмент программы вычисления  $f(x, y) = 1/(xy)$  имеет вид: × F1/x. Вычисления дают  $I = 0,025006983$  при  $t_c \approx 43$  с и точном значении  $I = 0,025005985$ .

Программа 5.80. Вычисление двойного интеграла по формуле Гаусса

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy =$$

$$= hk [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4)],$$

где

$$x_{1,4} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad y_{1,2} = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2} \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$x_{2,3} = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad y_{3,4} = \frac{d+c}{2} - \frac{d-c}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ввод:  $0 = P_0$  и далее  $a = PA$ ,  $b = PB$ ,  $c = PC$ ,  $d = PD$ , данные  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow PX$ ,  $y \rightarrow PY$  и свободных регистрах 1 ÷ 9 (регистр 0 используется как суммирующий при разбивке области интегрирования на несколько прямоугольников).

ИПВ	ИПА	ПП	57	ПВ	ХУ	ИПА	+	ПА	ИПД
ИПС	ПП	57	ИД	ХУ	ИПС	+	ПС	ИПД	+
ИПА	ИПВ	+	ПП	67	ИПС	ИПД	+	ИПА	ИПВ
—	ПП	67	ИПС	ИПД	—	ИПА	ИПВ	—	ПП
67	ИПС	ИПД	—	ИПА	ИПВ	+	ПП	67	ИПО
ИПВ	×	ИПД	×	3	×	С/П	—	2	÷
↑	↑	3	F1/x	F√	×	В/0	...	...	...
...	...	...	...	...	...	ИПО	+	ПО	В/0

Пример. Для (5.35) получим  $I = 0,025005319$  при  $t_0 \approx 30$  с. Разбив область интегрирования на 4 равных прямоугольника, находим:  $I_1 = 0,0068189928$ ;  $I_1 + I_2 = 0,013320706$ ;  $I_1 + I_2 + I_3 = 0,019302485$  и  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I = 0,02500594$ .

Программа 5.81. Вычисление тройного интеграла по формуле

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h \int_{-h}^h f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= 4h^3 (f_{-100} + f_{010} + f_{0-10} + f_{001} + f_{00-1} + f_{100})/3,$$

где  $h$  — шаг интегрирования,  $f_{ijk}$  — значения подынтегральной функции в центрах граней элементарного куба [20]. Ввод: данные  $f(x, y, z)$  при  $x \rightarrow P1$ ,  $y \rightarrow P2$ ,  $z \rightarrow P3$ ,  $0 = P_0$ ,  $h = PA$  и далее (для каждого куба)  $x_0^{(1)} = P1$ ,  $y_0^{(1)} = P2$ ,  $z_0^{(1)} = P3$ ,  $x_{гр}^{(1)} = PB$  В/0 С/П (получаем  $I_1$ ), ...,  $x_0^{(n)} = P1$ ,  $y_0^{(n)} = P2$ ,  $z_0^{(n)} = P3$ ,  $x_{гр}^{(n)} = PB$  В/0 С/П (получаем  $I_n = I$ ).

Сх	ПС	ПП	73	ИПВ	ИП1	ИПА	+	П1	—
Fx<0	14	ИПО	С/П	ПП	69	ИП3	ИПА	+	П3
ИП2	ИПА	—	ПП	72	ИП3	ИПА	—	П3	ИП2
ИПА	—	ПП	72	ИП3	ИПА	—	П3	ПП	69
ИП3	ИПА	+	П3	ИП1	ИПА	+	П1	ПП	73
FВх	ПД	ИПС	ИПА	↑	Fx <sup>2</sup>	×	×	4	×
3	÷	ИПО	+	ПО	ИПД	ПС	БП	04	ИП2
ИПА	+	П2	...	...	ИПС	ХУ	+	ПС	В/0

**Пример.** Для вычисления интеграла

$$I = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \frac{dx dy dz}{\ln(x + y + z)}$$

фрагмент программы вычисления  $f(x, y, z) = 1/\ln(x + y + z)$  имеет вид: ИП1 ИП2 + ИП3 + Fln F1/x. Представив пространство интегрирования элементарным кубом с  $h = 0,5$  при  $x_0 = 0, y_0 = 1,5, z_0 = 2,5$  и  $x_{\text{гp}} = 1$ , получим  $I = 0,6713412$  при  $t_c \approx 1$  мин. Разбив пространство интегрирования на 8 кубов с  $h = 0,25$  при  $x_0^{(1)} = 0; y_0^{(1)} = 1,25; z_0^{(1)} = 2,25$  и  $x_{\text{гp}}^{(1)} = 1$ , получим  $I_1 = 0,18161187$  ( $t_c \approx 2$  мин), при  $x_0^{(2)} = 0; y_0^{(2)} = 1,25; z_0^{(2)} = 2,75$  и  $x_{\text{гp}}^{(2)} = 1$  получим  $I_1 + I_2 = 0,34863694$ , при  $x_0^{(3)} = 0; y_0^{(3)} = 1,5; z_0^{(3)} = 2,5$  и  $x_{\text{гp}}^{(3)} = 1$  получим  $I_1 + I_2 + I_3 = 0,51566201$  и при  $x_0^{(4)} = 0; y_0^{(4)} = 1,75; z_0^{(4)} = 2,75$  и  $x_{\text{гp}}^{(4)} = 1$  получим  $I = (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = 0,67154489$ . В программе обеспечивается суммирование элементарных интегралов для ряда кубов при изменении переменной  $x$  между координатами левой грани левого куба и правой грани правого куба с изменением начальных координат при каждом пуске программы.

Возможно вычисление кратных интегралов при границах интервалов, являющихся функциями переменных  $x, y$  и  $z$ . Если эти функции простейшие, вычисление границ можно организовать в программе. Возможно также их вычисление перед пуском программы. При криволинейных границах пространства интегрирования шаг  $h$  приходится существенно уменьшать. Число кубов и трудоемкость расчетов при этом возрастают, и последние целесообразно проводить на ЭВМ. Отметим, что для вычисления кратных интегралов большой кратности широко используется метод Монте-Карло [1, 13].

## 5.11. Решение дифференциальных уравнений первой степени

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (вида Коши)

$$y' = dy/dx = f(x, y) \quad (5.36)$$

включается в отыскании зависимости  $y(x)$  при известных начальных условиях  $x_0$  и  $y_0 = y(x_0)$ .

При одношаговых методах решения каждое новое значение  $y_{i+1}$  находится по известному предшествующему значению  $y_i$ . Этим методам присуще «самостартование», а также возможность изменения шага  $h = (x_{i+1} - x_i)$  в процессе вычислений. Реализация численных методов решения (5.36) заключается в разложении ис-



33 ИПД × ИПС + ПС ИПВ ИПД + ПВ  
 С/П БП 00 . . . . . В/0

Для ранее приведенного примера имеем:  $x_1 = 0,1$ ;  $y_1 = 0,905$ ;  $x_2 = 0,2$ ;  $y_2 = 0,819025$ ;  $x_3 = 0,3$ ;  $y_3 = 0,74121763$  и т. д.

Простейшей реализацией методов прогноза и коррекции является усовершенствованный метод Эйлера — Коши. При нем вначале вычисляется приближенное значение

$$y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i)$$

простым методом Эйлера (прогноз). Затем оно корректируется с помощью формулы

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)].$$

**Программа 5.85.** Решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом Эйлера — Коши. Ввод: данные  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow \text{PB}$ ,  $y \rightarrow \text{PA}$ ,  $x_0 = \text{PB}$ ,  $y_0 = \text{PC}$  и  $h = \text{PD}$ . Вывод:  $x_i \rightarrow \text{PX} = \text{PB}$ ,  $y_i \rightarrow \text{PY} = \text{PC}$ .

ИПС ПА ПП 29 ПО ИПД × ИПС + ПА  
 ИПВ ИПД + ПВ ПП 29 ИПО + 2 ÷  
 ИПД × ИПС + ПС ИПВ С/П БП 00 . . .  
 . . . . . В/0

Для использованного выше примера имеем:  $x_1 = 0,1$ ;  $y_1 = 0,905$ ;  $x_2 = 0,2$ ;  $y_2 = 0,819025$ ;  $x_3 = 0,3$ ;  $y_3 = 0,74121763$  и т. д.

**Программа 5.86.** Решение дифференциального уравнения методом Рунге — Кутта 4-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6,$$

где

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2), \\ k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

Ввод: данные  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow \text{P0}$  и  $y \rightarrow \text{PB}$ ,  $h/2 = \text{PA}$ ,  $x_0 = \text{P0}$ ,  $y_0 = \text{PX}$  (регистры 0, А, В, С и Д заняты). Вывод:  $x_i \rightarrow \text{PX} = \text{P0}$ ,  $y_i \rightarrow \text{PY} = \text{PB}$ .

ПВ ПС 8 × ПД ПП 34 ПД ПП 30  
 + ПД ПП 34 + ПД F, ИПВ + ПВ  
 ПП 30 3 ÷ ПВ ИПО С/П ИПВ БП 01  
 ИПА ИПО + ПО . . . . . ↑ ИПА ×  
 ↑ ИПС + ПВ F, ↑ ↑ ИПД + В/0

Для указанного выше контрольного примера будем иметь:  $x_1 = 0,1$ ;  $y_1 = 0,9048375$ ;  $x_2 = 0,2$ ;  $y_2 = 0,81873086$ ;  $x_3 = 0,3$ ;  $y_3 = 0,7408184$  и т. д.

В табл. 5.7 дано сравнение результатов решения (5.37) методами Эйлера и Рунге — Кутта. Хотя точность последнего существ-

венно выше, время вычисления также возрастает. Поэтому, если погрешность решения дифференциального уравнения относительно велика (порядка единиц процентов), то применение даже простого метода Эйлера вполне возможно.

К многошаговым методам решения дифференциальных уравнений относится метод Адамса. При нем по ряду предшествующих

Таблица 5.7

Результаты решения дифференциального уравнения различными методами

h	Метод				Точное решение
	Эйлера простой	Эйлера модифицированный	Эйлера-Коши	Рунге-Кутта	
0	1	1	1	1	1
0,1	0,9	0,905	0,905	0,9048375	0,90483743
0,5	0,59049	0,60707576	0,60707578	0,6065309	0,60653064
1,0	0,34867844	0,36854098	0,368541	0,36787976	0,36787944
1,5	0,20589114	0,2237323	0,22373232	0,22313042	0,22313016
2,0	0,12157667	0,13582248	0,13582247	0,13533549	0,13533529
Время, счета, с	5	13	12	30	—

значений  $y(x)$  с помощью полинома Лагранжа вычисляется очередное значение. В зависимости от числа предшествующих значений  $y(x)$  порядок метода Адамса может быть различным. Достоинство этого метода — вычисление очередного значения  $y_{i+1}$  — требует лишь одного обращения к функции  $f(x, y)$ , что заметно ускоряет счет при сложных  $f(x, y)$ . Однако этот метод лишен возможности «самостартования», так как предварительно надо найти ряд предшествующих значений  $y'(x)$  какими-либо другими методами.

Программа 5.87. Реализация метода Адамса 2-го порядка

$$y_{i+1} = y_i + h(3y'_i - y'_{i-1})/2.$$

Ввод: данные  $y' = f(x, y)$  при  $x \rightarrow PA$  и  $y \rightarrow PB$ ,  $(x_0 + h) = PA$ ,  $y_1 = PB$ ,  $y'_0 = PC$  и  $h = PD$ . Вывод:  $x_i \rightarrow PX = PA$ ,  $y_i \rightarrow PY = PB$ .

ПП 23 ИПС ХУ ПС З × — ИПД /—/  
 × 2 + ИПВ + ПВ ИПА ИПД + ПА  
 С/П БП 00 ... .. В/0

Решим уравнение (5.37) при  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $\tau = 1$  и  $h = 0,1$ . Для старта воспользуемся результатом расчета  $y_1 = 0,905$  при  $x_1 = 0,1$  методом Эйлера — Коши. Имеем также  $y'_0 = y_0/\tau = -1$ .

**Результаты решения дифференциального уравнения  
разного порядка методами Адамса**

n	Порядок метода				Точное значение
	Адамса 2	Адамса 3	Адамса 4	Эйлера—Адамса 2/2	
0	—	—	—	1	1
0,1	—	—	—	0,905	0,90483743
0,2	0,81925	—	—	0,81925	0,81873072
0,3	0,7416125	0,74078578	—	0,7416125	0,74081822
0,4	0,67133313	0,6702644	0,67032315	0,67133313	0,67032004
0,5	0,60771379	0,60645471	0,60653567	0,60771379	0,60653064
...	...	...	...	...	...
1,0	0,36940619	0,36775653	0,36789008	0,36940619	0,36787944
...	...	...	...	...	...
1,5	0,22454802	0,22300898	0,22314117	0,22454802	0,22313016
...	...	...	...	...	...
2,0	0,13649423	0,13523351	0,13534472	0,13649423	0,13533529
Время счета на одном шаге, с	8	10	13	9	—

Введя эти данные, будем получать значения  $x_i$  и  $y_i$  с  $i = 2$ , приведенные в табл. 5.8.

**Программа 5.88.** Реализация метода Адамса 3-го порядка

$$y_{i+1} = y_i + h(23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2})/12.$$

Ввод: данные  $y' = f(x, y)$  при  $x \rightarrow P0$  и  $y \rightarrow PA$ ,  $x_0 + 2h = P0$ ,  $y_2 = PA$ ,  $y'_1 = PB$ ,  $y'_0 = PC$  и  $h = PD$ . Вывод:  $x_i \rightarrow PX = P0$ ,  $y_i \rightarrow PY = PA$ .

ИПС 5    ×    ИПВ ПС    1    6    ×    —    П1  
 ПП 33    ПВ    2    3    ×    ИП1 +    ИПД ×  
 1    2    ÷    ИПА +    ПА    ИПО ИПД +    ПО  
 С/П БП 00    ...    ...    ...    ..;    ...    ...    В/0

Для контроля этой программы по приведенному выше примеру воспользуемся дополнительно результатами, полученными методом Рунге — Кутты:  $y_2 = 0,81873086$ ;  $y'_1 = -0,9048375$  и  $y'_0 = -1$ . Результаты вычислений даны в табл. 5.8.

**Программа 5.89.** Реализация метода Адамса 4-го порядка

$$y_{i+1} = y_i + h(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3})/24.$$

Ввод: данные  $y' = f(x, y)$  при  $x \rightarrow P1$  и  $y \rightarrow P0$ ,  $(x_0 + 3h) = P1$ ,  $y_3 = P0$ ,  $y'_2 = PA$ ,  $y'_1 = PB$ ,  $y'_0 = PC$  и  $h = PD$ . Вывод:  $x_i \rightarrow PX = P1$ ,  $y_i \rightarrow PY = P0$ .

ИПС /-/	9	×	ИПВ	ПС	3	7	×	+	
ИПА	ПВ	5	9	×	-	П2	ПП	40	ПА
5	5	×	ИП2	+	ИПД	×	2	4	÷
ИПО	+	ПО	ИП1	ИПД	+	П1	С/П	БП	00
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Результаты вычислений контрольного примера-решения (5.37) по этой программе даны в табл. 5.8. Значения  $y'_0 = -1$ ,  $y'_1 = -0,904837$ ,  $y'_2 = -0,81873086$  и  $y_3 = 0,7408184$  взяты из решения (5.37) методом Рунге — Кутта.

Как видно из сравнения табл. 5.7 и 5.8, метод Адамса дает существенный выигрыш во времени вычислений на одном шаге по сравнению с одношаговыми методами аналогичного порядка. Это достоинство можно сочетать с возможностью «самостартования» одношаговых методов, что иллюстрируется следующей программой.

**Программа 5.90.** Реализация комбинированного метода Эйлера — Адамса. Ввод: данные  $y' = f(x, y)$  при  $x \rightarrow PA$  и  $y \rightarrow PB$ ,  $x_0 = PA$ ,  $y_0 = PB$  и  $h = PD$ . Вывод:  $x_i \rightarrow PX = PA$ ,  $y_i \rightarrow PY = PB$ .

ПП	44	ПС	ПП	33	ПП	44	ИПС	+	ИПД
×	2	÷	ИПО	+	ПВ	ИПА	С/П	ПП	44
ИПС	ХУ	ПС	3	×	-	2	/-/	÷	ПП
33	БП	17	ИПД	×	ИПВ	ПО	+	ПВ	ИПА
ИПД	+	ПА	В/0	...	...	...	...	...	В/0

При нажатии клавиш В/0 и С/П эта программа вначале вычисляет  $y_i \rightarrow PB$  и  $y'_0 \rightarrow PC$  усовершенствованным методом Эйлера. Затем при нажатии только клавиши С/П значения  $x_i$  и  $y_i$  вычисляются методом Адамса. Если по ходу вычислений надо сменить шаг  $h$ , новое значение  $h$  заносится в регистр Д и нажимаются (как при первом пуске) клавиши В/0- и С/П (далее только С/П). Результаты вычислений приведены в табл. 5.8.

Помимо описанного ранее метода прогноза и коррекции (усовершенствованный Эйлера — Коши) на микрокалькуляторах просто реализовать двухшаговый метод [18], базирующийся на формуле прогноза

$$y_{i+1}^* = y_i + 2hf(x_i, y_i) \quad (5.38)$$

и коррекции

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i, y_{i+1}^*)]. \quad (5.39)$$

**Программа 5.91.** Реализация метода прогноза (5.38) и коррекции (5.39) второго порядка. Ввод: данные  $y' = f(x, y)$  при  $x \rightarrow PB$ ,

$y \rightarrow P1, f(x_1, y_1) = P0, y_0 = PA, x_1 = PB, y_1 = PC$  и  $h = PD$ . Вывод:  $x_1 \rightarrow PX = PB, y_1 \rightarrow PY = PC$ .

ИПВ	ИПД	+	ПВ	ИПО	ИПД	×	2	×	ИПА
ПП	30		ИПО	+	ИПД	×	2	÷	ИПС
30	ПО		ИПС	ПА	ИП1	ПС	ИПВ	С/П	БП
+	П1	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Взяв для старта данные модифицированного метода Эйлера (см. выше контрольный пример)  $x_0 = 0; y_0 = 1; x_1 = 0,1; y_1 = 0,905; f(x_1, y_1) = -y_1/\tau = -0,905$  при  $\tau = 1$  и  $h = 0,1$ , нажимаемая клавиши С/П (при первом пуске В/0 и С/П) в ХУ, будем получать данные:  $x_2 = 0,2; y_2 = 0,8188; x_3 = 0,3; y_3 = 0,740798; x_4 = 0,4; y_4 = 0,67022608$  и т. д.

Точность методов прогноза-коррекции можно несколько повысить, уточнив окончательное значение  $y_{i+1} = y_{i+1}^{(2)}$  по результатам вычисления  $y_{i+1}^{(0)}$  при прогнозе и  $y_{i+1}^{(1)}$  при коррекции по формуле [18]

$$y_{i+1}^{(2)} = [4y_{i+1}^{(1)} + y_{i+1}^{(0)}]/5. \quad (5.40)$$

**Программа 5.92.** Реализация метода прогноза и коррекции с уточнением результата по формуле (5.40). Ввод и вывод см. в программе 5.91.

ИПВ	ИПД	+	ПВ	ИПО	ИПД	×	2	×	ИПА
+	ПП	37	ИПО	+	ИПД	×	2	÷	ИПС
ПА	+	4	×	ИП1	+	5	÷	ПС	ПП
37	ПО	ИПС	ИПВ	С/П	БП	00	П1	...	В/0

Воспользовавшись для старта этой программы значениями  $y_1 = 0,9048375$  и  $f(x_1, y_1) = -0,9048375$ , полученными методом Рунге — Кутты, будем получать следующие данные:  $x_2 = 0,2; y_2 = 0,8187217; x_3 = 0,3; y_3 = 0,7408034; x_4 = 0,4; y_4 = 0,67030034$  и т. д.

Недостатком всех описанных выше методов является возникновение числовой неустойчивости решения при большом шаге  $h$ . Так, при решении дифференциального уравнения (5.37) неустойчивость возникает при  $h \geq \tau$ , поэтому следует брать  $h < \tau$ . Неустойчивость отсутствует у так называемых неявных методов, у которых  $y_{i+1}$  находится по значению  $f(x_i, y_{i+1})$ . Детальное рассмотрение этих специальных методов выходит за рамки данной книги. Отметим лишь, что сочетание явного и неявного методов Эйлера приводит к выражению

$$y_{i+1} = y_i + h[Af(x_i, y_i) + (1 - A)f(x_i, y_{i+1})], \quad (5.41)$$

причем при  $A = 1$  реализуется явный метод Эйлера, при  $A = 0$  — неявный, а при  $0 < A < 1$  — комбинированный [12]. При этом неустойчивость отсутствует, если  $0 < A < 0,5$ . Погрешности яв-

ного и неявного методов по модулю близки (пропорциональны  $h^2$ ), но по знаку различны. Поэтому (5.41) при  $A \approx 0,5$  имеет значительно меньшую погрешность, чем эти методы, используемые в отдельности.

В общем случае (5.41) решается итерационным методом. Однако иногда его можно разрешить относительно  $y_{i+1}$  в явном виде. Приведем пример такого рода.

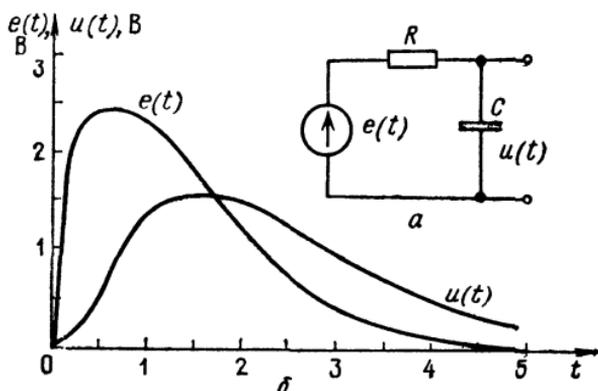


Рис. 5.5. Интегрирующая  $RC$ -цепь (а) и пример расчета ее реакции на заданное входное воздействие (б)

Реакция  $u(t)$  интегрирующей  $RC$ -цепи (рис. 5.5) на воздействие  $e(t)$  определяется из решения дифференциального уравнения

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \frac{e(t) - u}{\tau},$$

где  $\tau = RC$ . Для такого уравнения из (5.41) при  $x = e(t)$  и  $y = u(t)$  имеем

$$u_{i+1} = u_i + \frac{[e(t_i) - u_i] Ah}{\tau} + \frac{(1 - A)[e(t_{i+1}) - u_{i+1}] h}{\tau}.$$

Разрешая последнее уравнение относительно  $u_{i+1}$  получаем

$$u_{i+1} = \frac{u_i + [e(t_i) - u_i] Ah/\tau + (1 - A)e(t_{i+1}) h/\tau}{1 + (1 - A)h/\tau}. \quad (5.42)$$

**Программа 5.93.** Вычисление реакции  $RC$ -цепи на воздействие  $e(t)$  комбинированным (явным и неявным) методом Эйлера (5.42). Ввод: данные  $e(t)$  при  $t \rightarrow PB$ ,  $A = PA$ ,  $t_0 = PB$ ,  $u_0 = PC$ ,  $h = PD$  и  $\tau = RC = P9$ . Вывод:  $t_i \rightarrow PX$ ,  $u_i \rightarrow PY = PC$  и  $e(t_i) \rightarrow P6$ .

ИПВ	ПП	42	ИПС	—	ИПА	×	ИПД	ИП9	+
П8	×	ИПС	+	П7	ИПВ	ИПД	+	ПВ	ПП
42	ИП8	×	1	ИПА	—	×	ИП7	+	1
ИПА	—	ИП8	×	1	+	÷	ПС	ИПВ	С/П
БП	00	...	...	...	...	...	...	П6	В/0



$$z_{i+1}^* = z_i + \frac{h}{2} \varphi(x_i, y_i, z_i),$$

$$z_{i+1} = z_i + h\varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i, z_{i+1}^*\right)$$

и следующей программой.

**Программа 5.95.** Реализация модифицированного метода Эйлера для системы (5.43). Ввод: данные  $f(x, y, z)$  и  $\varphi(x, y, z)$  при  $x \rightarrow P0$ ,  $y \rightarrow PA$  и  $z \rightarrow PC$ ,  $h/2 = P9$ ,  $x_0 = P0$ ,  $y_0 = PA = PB$ ,  $z_0 = PC = PD$ . Вывод:  $x_i \rightarrow PX = P0$ ,  $y_i \rightarrow PY = PA$  и  $z_i \rightarrow PC$ .

ПП	24	×	П9	FBx	ИП0	+	П0	ПП	24
ХУ	÷	П9	ИП0	+	П0	ИПС	ПД	ИПА	ПВ
ИП0	С/П	БП	00	...	...	...	...	...	...
ИП9	×	ИПВ	+	П1	...	...	...	...	...
ИП9	×	ИПД	+	ПС	ИП1	ПА	2	ИП9	В/0

**Пример.** Для проверки двух последних программ решим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{n^2 y}{x} - z\right) \frac{1}{x} - y,$$

определяющих табулированные функции Бесселя  $n$ -го порядка [17]. При  $h/2 = 0,025$ ;  $n = 1$ ,  $x_0 = 0,2$ ;  $y_0 = 0,09950083$  и  $z_0 = 0,49235$  будем получать данные, приведенные в табл. 5.9 (даны выборочно).

Таблица 5.9

$x_i$	Метод		Точное решение $y(x) = J_1(x)$
	Эйлера простой	Эйлера модифицированный	
0,2	0,09950083	0,09950083	0,09950083
0,3	0,14855151	0,14832009	0,14831881
0,4	0,19667502	0,19603182	0,19602657
0,5	0,24350396	0,2422791	0,2422684
1	0,44633959	0,44008729	0,44005058
2	0,059549752	0,57669725	0,57672480
4	-0,074593343	-0,06634331	-0,66044332
4,5	-0,25419072	-0,23126802	-0,231060431

Системы из 2—4 дифференциальных уравнений могут решаться модифицированным методом Эйлера (Рунге — Кутта 2-го порядка) с помощью универсальной программы [21] с погрешностью, пропорциональной  $h^3$ .

**Программа 5.96.** Решение систем из 2—4 дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты 2-го порядка. Ввод см. при описании контрольных примеров.

V/0	*	*	ПО	КИП↑	КПО	С/П	КИПО	FLO	04
ПП	15	ИПД	+	П1	*	*	ПО	ПП	34
ИПД	×	2	÷	↑	КИП↑	+	КП↑	+	КПО
КИПО	FLO	20	V/0	...	...	...	...	...	V/0

При решении системы  $y' = f(x, y, z)$ ;  $z' = \varphi(x, y, z)$  на место знаков \*\* вписываются операторы Сх 6. Ввод:  $h = \text{РД}$ ,  $x_0 = \text{Р1}$ ,  $y_0 = \text{Р6} = \text{РХ}$  V/0 С/П  $z_0 = \text{Р3} = \text{РХ}$  С/П С/П ... (по мере нажатия клавиши С/П вычисляются значения  $y_1, z_1, y_2, z_2, \dots$ ). Подпрограмма должна вначале вычислять  $\varphi(x, y, z) \rightarrow \text{Р4}$ , затем  $f(x, y, z) \rightarrow \text{РХ}$  при  $x_i \rightarrow \text{Р1}$ ,  $y_i \rightarrow \text{Р5}$  и  $z_i \rightarrow \text{Р2}$  (свободны регистры 7, А, В и С). Для системы

$$y' = xy + z,$$

$$z' = x + yz$$

подпрограмма имеет вид

ИП1 ИП5 ИП2 × + П4 ИП1 ИП5 × ИП2  
+

**Пример.** Для  $h=0,05$ ;  $x_0=y_0=z_0=1$  будем получать:

$x$	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25
$y$	1	1,1064	1,2271	1,3645	1,5213	1,7006
$y$ (точно)	1	1,1066	1,2275	1,3653	1,5224	1,7024
$z$	1	1,1065	1,2280	1,3680	1,5308	1,7224
$z$ (точно)	1	1,1067	1,2284	1,3687	1,5320	1,7243

Время вычисления пары значений  $y$  и  $z$  — около 28 с.

При решении системы из трех дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y, z, \omega),$$

$$z' = \varphi(x, y, z, \omega),$$

$$\omega' = \kappa(x, y, z, \omega),$$

знаки \*\* следует заменить операторами Сх 9. Подпрограмма должна вычислять  $\varphi \rightarrow \text{Р7}$ ,  $\kappa \rightarrow \text{Р4}$  и  $f \rightarrow \text{РХ}$  при  $x_i \rightarrow \text{Р1}$ ,  $y_i \rightarrow \text{Р8}$ ,  $z_i \rightarrow \text{Р5}$  и  $\omega_i \rightarrow \text{Р2}$  (свободны регистры А, В и С, для записи промежуточных результатов можно использовать регистры 4 и 7).

Подпрограмма для решения системы

$$y' = x(z - \omega) + y,$$

$$z' = \omega(x + y) + z,$$

$$\omega' = y(z + \omega) + x$$

имеет вид

ИП2 ИП1 ИП8 + × ИП5 + П7 ИП8 ИП5  
ИП2 + × ИП1 + П4 ИП1 ИП5 ИП2 +  
× ИП8 +

Для  $h = 0,02$ ;  $x_0 = y_0 = z_0 = \omega_0 = 1$  получим

$x$	$y$	$y(\text{точно})$	$z$	$z(\text{точно})$	$\omega$	$\omega(\text{точно})$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,02	1,0622	1,0623	1,0626	1,0627	1,0627	1,0627
1,04	1,1293	1,1293	1,1311	1,1312	1,1313	1,1314
...	...	...	...	...	...	...
1,1	1,3642	1,3645	1,3797	1,3801	1,3821	1,3825

При решении системы из четырех дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y, z, \omega, v),$$

$$z' = \varphi(x, y, z, \omega, v),$$

$$\omega' = \kappa(x, y, z, \omega, v),$$

$$v' = \psi(x, y, z, \omega, v),$$

на место знаков \*\* следует занести операторы 1 2. Подпрограмма должна вычислять  $\varphi \rightarrow PA$ ,  $\kappa \rightarrow P7$ ,  $\psi \rightarrow P4$  и  $f \rightarrow PX$  при  $x_i \rightarrow P1$ ,  $y_i \rightarrow PB$ ,  $z_i \rightarrow P8$ ,  $\omega_i \rightarrow P5$  и  $v_i \rightarrow P2$  (свободных регистров нет, для записи промежуточных результатов можно использовать регистры 4, 7 и A).

Подпрограмма для решения системы

$$y' = x + y + v,$$

$$z' = yz + 2,$$

$$\omega' = z + \omega,$$

$$v' = \omega v$$

имеет вид

ИПВ ИП8  $\times$  2 + ПА ИП8 ИП5 + П7  
 ИП5 ИП2  $\times$  П4 ИП1 ИПВ + ИП2 +

Для  $h = 0,04$ ;  $x_0 = y_0 = z_0 = \omega_0 = v_0 = 1$  получим

1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,04	1,1240	1,1251	1,0840	1,0425
1,12	1,3982	1,4127	1,2791	1,1453
1,16	1,5496	1,5808	1,3921	1,2080

Время вычисления на одном шаге около 1 мин.

Методом Рунге — Кутты 4-го порядка на микрокалькуляторах класса «Электроника БЗ-34» возможно решение системы из двух дифференциальных уравнений. Расчетные формулы при этом имеют вид

$$y_{i+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$z_{i+1} = z_n + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i, z_i), \quad l_1 = h\varphi(x_i, y_i, z_i),$$

$$k_2 = h \left( x_i + \frac{1}{2} h; y_i + \frac{1}{2} k_1; z_i + \frac{1}{2} l_1 \right),$$

$$l_2 = h\varphi \left( x_i + \frac{1}{2} h_1; y_i + \frac{1}{2} k_1; z_i + \frac{1}{2} l_1 \right),$$

$$k_3 = hf \left( x_i + \frac{1}{2} h; y_i + \frac{1}{2} k_2; z_i + \frac{1}{2} l_2 \right),$$

$$l_3 = h\varphi \left( x_i + \frac{1}{2} h; y_i + \frac{k_2}{2}; z_i + \frac{l_2}{2} \right),$$

$$k_4 = hf(x_i + h; y_i + k_3; z_i + l_3),$$

$$l_4 = h\varphi(x_i + h; y_i + k_3; z_i + l_3).$$

Погрешность вычислений пропорциональна  $h^5$ .

**Программа 5.97.** Решение системы из двух дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты 4-го порядка [21]. Ввод:  $x_0 = P6$ ,  $h/2 = P7$ ,  $3y_0 = PC = PX$  и (после нажатия клавиш В/0 и С/П)  $3z_0 = PD = PX$ . Результат  $y_i \rightarrow PX$ ,  $z_i \rightarrow PX$  ( $x_i \rightarrow P6$ ) получаем, нажимая клавишу С/П. Подпрограмма должна вычислять  $\varphi(x, y, z) \rightarrow P3$  и  $f(x, y, z) \rightarrow PX$  при  $x \rightarrow P6$ ,  $y \rightarrow PA$ ,  $z \rightarrow PB$  (свободны регистры 0, 1 и 2, для записи промежуточных результатов можно использовать регистры 3, 4 и 5).

В/0	3	÷	П8	ПА	С/П	ИПД	3	÷	П9
ПВ	С/П	ПП	28	ПП	24	ПП	46	ПП	28
ИПВ	ИПА	ПП	39	ИП6	ИП7	+	П6	ПП	55
ИП7	×	П5	ИП3	ИП7	×	П4	ИП9	ИП8	ИП5
+	ПА	ХУ	ИП4	+	ПВ	ИПД	ИП4	+	ПД
ИПС	ИП5	+	ПС	В/0	...	...	...	...	В/0

Подпрограмма для решения системы

$$y' = xy + z,$$

$$z' = x + yx$$

имеет вид

ИП6	ИПА	ИПВ	×	+	П3	ИП6	ИПА	×	ИПВ
+									
Для $h = 0,1$ ; $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ получим									
$x$	1	1,1		1,2		1,3		1,4	
$y$	1	1,2275429		1,5224128		1,9091174		2,424564	
$z$	1	1,2284363		1,5320161		1,9537331		2,5744441	

Время вычислений на одном шаге около 70 с.

Дифференциальные уравнения высшего ( $n$ -го) порядка

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = b$$

или

$$y' = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$$

подстановками  $y_1 = y, y_2 = y_1', y_3 = y_2', \dots, y_n = y_{n-1}'$  сводятся к системе

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\dots \\ y_{n-1}' &= y_n. \end{aligned}$$

**Программа 5.98.** Решение дифференциального уравнения второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  методом Рунге — Кутты 2-го порядка. Ввод:  $h = P6, x_0 = P5, y_0 = P4, y_0' = P2$  (после чего нажать клавиши В/0 и С/П). Вывод результатов  $y_i \rightarrow PX (x_i \rightarrow P5)$ . Подпрограмма может занимать регистры  $8 \div D$  и должна заносить  $f(x, y, y') \rightarrow PX$  при  $x_i \rightarrow P5, y_i \rightarrow P3$  и  $y_i' \rightarrow P1$  (для записи промежуточных результатов можно использовать регистр 7).

В/0	ИП2	П1	ИП4	П3	С/П	ПП	12	ИП5	ИП6
+	П5	5	П0	ПП	32	П7	ИП1	ПП	21
ИП7	ИП6	×	2	÷	↑	КИПО	+	КП↑	+
КПО	В/0	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Подпрограмма для решения дифференциального уравнения

$$y'' = \frac{3}{4} \left( \frac{xy'}{\sqrt{y}} + 1 \right)$$

имеет вид

ИП5	ИП1	×	ИП3	F√	÷	1	+	3	×
4	÷								

При  $h=0,05; x_0=y_0=z_0=1$  получим

$x$	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25
$y$	1	1,05188	1,10769	1,16765	1,23193	1,30085
$y$ (точно)	1	1,05191	1,10770	1,16775	1,23210	1,30103

Время вычисления на одном шаге около 30 с.

**Программа 5.99.** Решение дифференциального уравнения второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  методом Рунге — Кутты 4-го порядка при четырех свободных регистрах [21]. Ввод:  $h/2 = P7, x_0 = P6, 3y_0 = PC, 3y_0' = PD = PX$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $y_i \rightarrow PX (x_i \rightarrow P6)$ . Подпрограмма может занимать свободные регистры  $0 \div 3$  и использовать для записи промежуточных результатов регистр 4 и 5 (значения  $x_i \rightarrow P6, y_i \rightarrow PA$  и  $y_i' \rightarrow PB$ ).

В/0	3	÷	П9	ПВ	ИПС	3	÷	П8	ПА
С/П	ПП	27	ПП	23	ПП	45	ПП	27	ИПВ
ИПА	ПП	38	ИП6	ИП7	+	И6	ПП	54	ИП7

×	П4	ИПВ	ИП7	×	П5	ИП9	ИП8	ИП5	+
ПА	ХУ	ИП4	+	ПВ	ИПС	ИП5	+	ПС	ИПД
ИП4	+	ПД	В/0	...	...	...	...	...	В/0

**Пр и м е р.** Для примера, приведенного к программе 5.98, подпрограмма записывается в виде:

ИП6	ИПВ	×	ИПА	FV <sup>-</sup>	÷	1	+	3	Ж
4	+								

При  $h=0,1$ ;  $x_0=y_0=y'_0=1$  будем получать:

$x$	$y$	$y$ (точно)
1,0	1,0000000	1,0000000
1,1	1,1077563	1,1077562
1,2	1,2321001	1,2321000
1,3	1,3747563	1,3747562
1,4	1,5376002	1,5376000
1,5	1,7226564	1,7226562

Время вычислений на одном шаге около 72 с.

**Программа 5.100.** Решение дифференциального уравнения второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  методом Рунге — Кутта 4-го порядка с шестью свободными регистрами [20]. Ввод:  $h/2 = P9$ ,  $x_0 = P0$ ,  $y_0 = P1 = P3$ ,  $y'_0 = P2 = P4$ ,  $3y_0 = P5$  и  $3y'_0 = P6$ . В подпрограмме вычисления  $f(x, y, y')$  можно использовать регистры 7, 8, А ÷ Д, она должна заносить  $f(x, y, y')$  в регистр Х при  $x_i \rightarrow P0$ ,  $y_i \rightarrow P1$  и  $y'_i \rightarrow P2$ . Вывод результатов:  $y_i \rightarrow PX$ ,  $y'_i \rightarrow PY(x_i \rightarrow P0)$ .

ПП	44	ПП	40	П6	F,	ИП5	+	П5	ПП
40	П6	FBx	ИП2	+	П2	F,	F,	ИП1	+
П1	F,	ИП5	+	П5	ПП	44	ИП6	3	÷
П2	П4	ИП5	3	÷	П1	П3	С/П	БП	00
ИП9	ИП0	+	П0	...	ИП9	×	ИП2	ИП9	×
↑	ИП3	+	П1	F,	↑	ИП5	+	П5	F,
ХУ	↑	ИП4	+	П2	F,	ИП6	ХУ	+	П6
FBx	+	В/0							

**Пр и м е р.** Подпрограмма для решения уравнения

$$y'' = 1 - 3y - 4y'$$

имеет вид

1	ИП1	3	×	-	ИП2	4	×	-
---	-----	---	---	---	-----	---	---	---

При  $h/2 = 0,025$ ;  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$  и  $y'_0 = 3$  будем получать

$x$	$y$	$y'$
0	0	3
0,05	0,1369513	2,4916049
0,1	0,25041171	2,0584397
0,15	0,34386863	1,6898102
0,2	0,4203151	1,3765221

Дифференциальные уравнения порядка выше второго на программируемых микрокалькуляторах класса «Электроника БЗ-34» могут решаться методом Рунге — Кутта 2-го порядка по приведенным ниже программам [21].

**Программа 5.101<sup>о</sup>.** Решение дифференциального уравнения 3-го порядка  $y''' = f(x, y, y', y'')$ . Ввод:  $h = P8, x_0 = P7, y_0 = P6, y'_0 = P4, y''_0 = P2$ . Вывод результатов (после нажатия клавиши В/0 и С/П):  $y_1, y_2, \dots, y_i$  в регистр X ( $x_i \rightarrow P7$ ). Для подпрограммы вычисления функции  $f(x, y, y', y'')$  можно использовать регистры А ÷ Д (для записи промежуточных результатов регистр 9) при  $x_i \rightarrow P7, y_i \rightarrow P5, y'_i \rightarrow P3$  и  $y''_i \rightarrow P1$ .

В/0	ИП2	П1	ИП4	ПЗ	ИП6	П5	С/П	ПП	14
ИП7	ИП8	+	П7	7	П0	ПП	37	П9	ИПЗ
ПП	26	ИП1	ПП	26	ИП9	ИП8	×	2	÷
↑	КИПО	+	КП ↑	+	КПО	В/0	...	...	В/0

**Пр и м е р.** Для решения дифференциального уравнения

$$y''' = \frac{xy}{(y')^2} (2y'' - 3/2)$$

подпрограмма имеет вид

ИП7	ИП5	×	ИПЗ	$Fx^2$	÷	ИП1	2	×	1
,	5	-	×						

При  $h=0,1, x_0=2, y_0=3,0625, y'_0=3,5$  и  $y''_0=3,75$  получим:

$x$	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$y$	3,0625	3,4313	3,8405	4,2936	4,7938	5,3446
$y$ (точно)	3,0625	3,4318	3,8410	4,2953	4,7961	5,3477

Время счета на одном шаге около 43 с.

**Программа 5.102<sup>о</sup>.** Решение дифференциального уравнения четвертого порядка  $y'''' = f(x, y, y', y'', y''')$ . Ввод:  $h = PA, x_0 = P9, y_0 = P8, y'_0 = P6, y''_0 = P4, y'''_0 = P2$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $y_1, y_2, \dots, y_i$  в регистр X ( $x_i \rightarrow P9$ ). В подпрограмме вычисления функции  $f(x, y, y', y'', y''')$  можно использовать регистры Д и С (для записи промежуточных результатов — регистр В) при  $x_i \rightarrow P9, y_i \rightarrow P7, y'_i \rightarrow P5, y''_i \rightarrow P3$  и  $y'''_i \rightarrow P1$ .

В/0	ИП2	П1	ИП4	ПЗ	ИП6	П5	ИП8	П7	С/П
ПП	16	ИП9	ИПА	+	П9	9	П0	ПП	42
ПВ	ИП5	ПП	31	ИПЗ	ПП	31	ИП1	ПП	31
ИПВ	ИПА	×	2	÷	↑	КИПО	+	КП ↑	+
КПО	В/0	...	...	...	...	...	...	...	В/0

**Пр и м е р.** Для решения дифференциального уравнения

$$y'''' = \frac{3}{2} \left[ \frac{3y''}{(y''')^2} - \frac{y}{(y')^2} \right]$$

подпрограмма имеет вид

ИПЗ 3 × ИП1 Fx<sup>2</sup> ÷ ИП7 ИП5 Fx<sup>3</sup> +  
 — 3 × 2 ÷

При  $h=0,1$ ;  $x_0=3$ ,  $y_0=9$ ,  $y'_0=9$ ,  $y''_0=7,5$  и  $y'''_0=4,5$  получим

$x$	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$y$	9	9,937	10,955	10,056	13,246	14,531
$y$ (точно)	9	9,938	10,956	10,050	13,250	14,535

**Программа 5.103<sup>o</sup>.** Решение дифференциального уравнения пятого порядка  $y^V = f(x, y, y', y'', y''', y'''' )$ . Ввод:  $h = PC$ ,  $x_0 = PB$ ,  $y_0 = PA$ ,  $y'_0 = P8$ ,  $y''_0 = P6$ ,  $y'''_0 = P4$ ,  $y''''_0 = P2$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $y_1, y_2, \dots, y_i$  в регистр X ( $x_i \rightarrow PB$ ). В подпрограмме вычисления функции  $f(x, y, y', y'', y''', y'''' )$  для записи промежуточных результатов можно использовать регистр Д (свободных регистров нет), причем  $x_i \rightarrow PB$ ,  $y_i \rightarrow P9$ ,  $y'_i \rightarrow P7$ ,  $y''_i \rightarrow P5$ ,  $y'''_i \rightarrow P3$  и  $y''''_i \rightarrow P1$ .

В/0	ИП2	П1	ИП4	П3	ИП6	П5	ИП8	П7	ИПА
П9	С/П	ПП	18	ИПВ	ИПС	+	ПВ	1	1
П0	ПП	48	ПД	ИП7	ПП	37	ИП5	ПП	37
ИПЗ	ПП	37	ИП1	ПП	37	ИПД	ИПС	×	2
÷	↑	КИПО	+	КП↑	+	КПО	В/0	...	В/0

**Пр и м е р.** Подпрограмма решения уравнения

$$y^V = 1,2y'''' + 13y'''' + 2x\sqrt{y}$$

имеет вид

ИП1 1 , 2 × ИПЗ 1 3 × +  
 ИПВ ИП9 F√ × 2 × +

При  $h = 0,05$ ;  $x_0 = y_0 = y'_0 = y''_0 = y'''_0 = y''''_0 = 1$  получим

$x$	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25
$y$	1	1,05125	1,10513	1,16177	1,22133	1,28399
$y$ (точно)	1	1,05127	1,10517	1,16184	1,22144	1,28415

### 5.13. Спектральный синтез

Временная периодическая функция  $y(t)$  с периодом  $T$ , удовлетворяющая условиям Дирихле [13], может быть представлена рядом Фурье

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)) \quad (5.44)$$

или

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \quad (5.45)$$

где  $n$  — номер гармоники,  $\omega_1 = 2\pi f_1$  — угловая частота повторения,  $f_1$  — частота повторения первой гармоники,  $a_0, a_n$  и  $b_n$  — коэффициенты ряда Фурье. Точное представление  $y(t)$  возможно при  $m \rightarrow \infty$ , однако на практике обычно используются укороченные ряды Фурье с конечным значением  $m$ .

**Программа 5.104.** Вычисление  $y(t)$  по разложению в ряд Фурье (5.44) с  $m \leq 6$ . Ввод:  $a_0 \div a_6 = P0 \div P6$ ;  $b_1 \div b_3 = P7 \div P9$ ;  $b_3 \div b_6 = PA \div PC$ ,  $t/T = PX$ . При смене  $t/T$  очищается операционный блок (нажатием клавиш  $Sx \uparrow \uparrow \uparrow$ ) и вводится новое значение  $t/T$ . Переключатель  $P - \Gamma$  устанавливается в положение  $P$ .

Фл	×	2	×	ПД	↑	Fcos	ИП1	×	XY
Fsin	ИП7	×	+	+	2	ИПД	×	↑	Fcos
ИП2	×	XY	Fsin	ИП8	×	+	+	3	ИПД
×	↑	Fcos	ИП3	×	XY	Fsin	ИП9	×	+
+	[4	ИПД	×	↑	Fcos	ИП4	×	XY	Fsin
ИПА	×	+	+	5	ИПД	×	↑	Fcos	ИП5
×	XY	Fsin	ИПВ	×	+	+	6	ИПД	×
↑	Fcos	ИП6	×	XY	Fsin	ИПС	×	+	+
ИПО	2	÷	+	С/П	БП	00			

Член  $a_0/2$  может быть вписан в текст программы. Тогда регистр 0 можно использовать для вычисления номеров гармоник  $n = 1, 2, \dots, m$  ( $m$  до 6) и организация косвенной адресации вызова  $a_n$  и  $b_n$  из регистров памяти.

**Программа 5.105.** Вычисление  $y(t)$  по разложению в ряд Фурье (5.44) с членом  $a_0/2$ , вписываемым на место многоточия. Ввод:  $a_1 = P1, b_1 = P2, \dots, a_5 = P9, b_5 = PA, a_6 = PB, b_6 = PC$  (вводятся коэффициенты до  $a_m, b_m$  включительно),  $m = PX$  и  $t/T = PX$ . При изменении  $t/T$  повторяется ввод только  $m$  и  $t/T$ . Переключатель  $P - \Gamma$  в положении  $P$ .

↑	2	×	1	+	П0	0	С/П	Фл	×
2	×	ПД	0	↑	XY	ИПД	ИПО	1	—
2	÷	×	↑	Fsin	КИПО	×	XY	Fcos	КИПО
×	+	+	ИПО	1	—	Fx=0	15	XY	...
+	С/П	БП	00						

**Пример.** Для контроля этих программ вычислим значение ряда (5.44) при  $m = 3$  и следующих данных:  $a_0 = 0$ ;  $a_1 = -5,23$ ;  $a_2 = 0$ ;  $a_3 = 5,1$ ;  $b_1 = 25,3$ ;  $b_2 = 0$  и  $b_3 = 3,47$ . Так как  $m = 3 < 6$ , то из программы 5.104 можно исключить фрагмент, заключенный в квадратные скобки. Введя коэффициенты  $a_n, b_n$ , с помощью программ 5.104 и 5.105 будем получать следующие значения  $y(t/T)$ :  $y(1/24) = 7,5562347$ ;  $y(8/24) = 29,625443$ ;  $y(13/24) = -7,5562351$ ;  $y(20/24) = 29,625444$  и т. д. Время вычисления одного значения  $y(t/T)$  составляет для этих программ соответственно 22 и 32 с.

**Программа 5.106.** Вычисление  $y(t)$  по ряду (5.45) с членом  $a_0/2$ , вписываемым на место многоточия. Ввод:  $A_1 = P1, \varphi_1 = P2, \dots, A_5 = P9, \varphi_5 = PA, A_6 = PB, \varphi_6 = PC$  (вводятся  $A_n$  и  $\varphi_n$  до  $A_m$  и  $\varphi_m$  включительно),  $m = PX$  и  $t/T = PX$ . При изменении  $t/T$  повторяется ввод только  $m$  и  $t/T$ .

↑	2	×	1	+	П0	0	С/П	Fl	×
2	×	ПД	0	↑	ХУ	ИПД	ИП0	1	—
2	+	×	КИП0	—	Fcos	КИП0	×	+	ИП0
1	—	Fx=0	15	ХУ	...	+	С/П	БП	00

**Пример.** Для  $a_0/2 = 0; A_1 = 25,9; \varphi_1 = -0,203$  рад;  $A_2 = 0; \varphi_2 = 0; A_3 = 6; \varphi_3 = 0,973$  рад, ввод  $m = 3$  и разные  $t/T$ , будем получать  $y(0) = 28,745108; y(1/24) = 29,047034; y(3/24) = 15,364754; y(7/24) = -12,728526$  и т. д.

**Программа 5.107.** Вычисление  $y(t)$  по ряду (5.44) при произвольном числе членов ряда. Ввод (после нажатия клавиши В/0):  $t/T = PX, a_0 = PX$  и далее  $a_n \uparrow b_n$  (при вводе каждой пары  $a_n, b_n$  нажимается клавиша С/П и индицируется номер  $n$ ). Результат:  $m \rightarrow PX$  и  $y(t/T) \rightarrow P0$ .

Fl	×	2	×	П7	0	П6	С/П	П0	С/П
П8	ХУ	П9	КИП6	ИП6	ИП7	×	↑	Fsin	ИП8
×	ХУ	Fcos	ИП9	×	+	ИП0	+	П0	ИП6
БП	00								

Работу этой программы можно проверить по примеру, приведенному к программе 5.105. Время обработки пары коэффициентов ряда  $a_n, b_n$  около 10 с.

**Программа 5.108.** Вычисление  $y(t)$  по ряду (5.45) при произвольном числе членов ряда. Ввод (после нажатия клавиши В/0):  $t/T = PX, a_0 = PX, A_n \uparrow \varphi_n$  (в радианах). После ввода каждой пары  $A_n$  и  $\varphi_n$  нажимается клавиша С/П и индицируется номер  $n$ . Результат:  $m \rightarrow PX$  и  $y(t/T) \rightarrow P0$ .

Fl	×	2	×	П7	0	П6	С/П	П0	С/П
КИП6	F,	ИП7	ИП6	×	—	Fcos	×	ИП0	+
П0	ИП6	БП	09						

Работу программы можно проверить по примеру, данному к программе 5.106. Время обработки пары параметров  $A_n$  и  $\varphi_n$  около 5 с. Переключатель Р — Г устанавливается в положение Р.

В электро-радиотехнических приложениях часто встречается задача вычисления усеченного ряда Котельникова [19]

$$y(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \frac{\sin \pi (\xi - n)}{\pi (\xi - n)}$$

при известных отсчетах  $y(n)$  функции  $y(\xi)$ .

**Программа 5.109.** Вычисление  $y(\xi)$  по ряду Котельникова для  $N < 13$ . Ввод (переключатель Р — Г в положении Р):  $y(0) = P0, \dots$   
 $y(12) = PС$  и далее  $\xi = PХ$ .

Fl	×	ПД	0	ИПО	ИПД	ПП	51	ИП1	ПП
47	ИП2	ПП	47	ИП3	ПП	47	ИП4	ПП	47
ИП5	ПП	47	ИП6	ПП	47	ИП7	ПП	47	ИП8
ПП	47	ИП9	ПП	47	ИПА	ПП	47	ИПВ	ПП
47	ИПС	ПП	47	С/П	БП	00	ИПД	Fl	—
ПД	Fsin	ИПД	÷	×	+	В/0			

**Пример.** Для  $y(n) = 5; 6; 7; 8; 9; 10; 0; 1; 2; 3; 4; 0; 0$ ; и  $\xi = 5,5$  получим  $y(5,5) = 5,0259$  при  $t_0 \approx 70$  с. Нельзя задавать целые  $\xi$  (при  $\xi = n$  значения  $y(\xi)$  заведомо известны — они совпадают с исходными).

Описанные выше программы обеспечивают интерполяцию функций  $y(t)$  или  $y(\xi)$  при представлении его тригонометрическим полиномом.

### 5.14. Спектральный анализ

Спектральный анализ заключается в получении коэффициентов  $a_0, a_n, b_n$  (или параметров  $A_n$  и  $\varphi_n$ ) — (5.44) и (5.45) для функции  $y(t)$ , заданной рядом значений  $y_i = y(t_i)$ .

При исследовании систем с малой нелинейностью функции  $y(x)$ , где  $x$  — входное воздействие в виде гармонического сигнала  $x = x_m \cos \omega t$ , применяется метод пяти ординат [8, 19]. С его помощью по 5-ти ординатам  $y(x)$  (рис. 5.6) определяются среднее значение  $y_0$  и амплитуды первых 4-х гармоник функции  $y(t)$ :

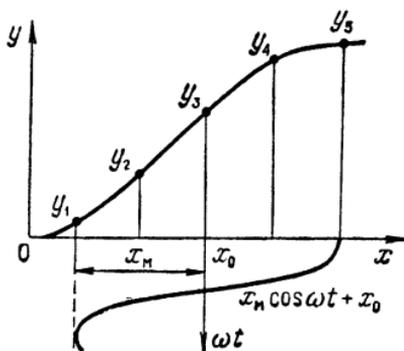


Рис. 5.6. Иллюстрация к методу пяти ординат

$$y_0 = [(y_1 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]/6,$$

$$y_{m1} = [(y_1 - y_5) + (y_2 - y_4)]/3,$$

$$y_{m2} = [(y_1 + y_5)/2 - y_3]/2,$$

$$y_{m3} = [y_{m1} - (y_2 - y_4)]/2,$$

$$y_{m4} = y_{m2} - y_0 + y_3.$$

Коэффициент нелинейных искажений

$$K_{\Gamma} = \sqrt{y_{m2}^2 + y_{m3}^2 + y_{m4}^2 / y_{m1}}.$$

**Программа 5.110.** Реализация метода пяти ординат. Ввод:  $y_1 = P9, y_2 = PA, y_3 = PB, y_4 = PC$  и  $y_5 = PD$ . Вывод:  $y_0 \rightarrow P0, y_{m1} \div \div y_{m4} \rightarrow P1 \div P4; K_{\Gamma} \rightarrow PX$ .

ИПА	ИПС	+	2	×	ИП9	ИПД	+	П6	+
6	÷	П0	ИП9	ИПД	—	П8	ИПА	ИПС	—

$\div 3 \quad \div \text{П1} \quad \text{ИП6} \quad 2 \quad \div \quad \text{ИПВ} \quad - \quad 2$   
 $\div \quad \text{П2} \quad \text{F}x^2 \quad \text{ИП1} \quad \text{ИПА} \quad - \quad \text{ИПС} \quad + \quad 2 \quad \div$   
 $\text{ПЗ} \quad \text{F}x^2 \quad + \quad \text{ИП2} \quad \text{ИПО} \quad - \quad \text{ИПВ} \quad + \quad \text{П4} \quad \text{F}x^2$   
 $+ \quad \text{F}\sqrt{\quad} \quad \text{ИП1} \quad \div \quad \text{С/П}$

Пусть функция  $U_c(U_3)$  каскада на мощном МДП-транзисторе задана значениями: 46,6(1); 38,9(3,5); 32(6); 26(8,5) и 21(11), причем  $U_{c1} \div U_{c5} \equiv y_1 \div y_5$ . Введя эти значения, получим  $K_r = 7,0177955 \cdot 10^{-2}$ ;  $y_0 = U_{c0} = 32,9$  В,  $y_{m1} = U_{cm1} = 12,833333$  В;  $y_{m2} = U_{cm2} = 0,9$  В;  $y_{m3} = U_{cm3} = -0,0333335$  В,  $y_{m4} = U_{cm4} = 0$ .

Если нелинейная функция  $y(x)$  при воздействии  $x = x_m \cos \omega t$  задана 12-ю ординатами, то коэффициенты  $a_0/2$ ,  $a_n$  и  $b_n$  ряда (5.44) могут быть определены методом 12-ти ординат по следующей методике [9, 17].

1. Записываем 12 ординат функции  $y(t)$  и определяем по-членно их суммы и разности по схеме:

$$\begin{array}{cccccc}
 y_1=P1 & y_2=P2 & y_3=P3 & y_4=P4 & y_5=P5 & y_6=P6 \\
 y_{12}=PC & y_{11}=PB & y_{10}=PA & y_9=P9 & y_8=P8 & y_1=P7
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{cccccc}
 S_0 \rightarrow PC & S_1 \rightarrow P1 & S_2 \rightarrow P2 & S_3 \rightarrow P3 & S_4 \rightarrow P4 & S_5 \rightarrow P5 & S_6 \rightarrow P6 \\
 d_1 \rightarrow PB & d_2 \rightarrow PA & d_3 \rightarrow P9 & d_4 \rightarrow P8 & d_5 \rightarrow P7
 \end{array}$$

2. Вычисляем суммы  $\sigma_i$  и разности  $\delta_i$  по схеме:

$$\begin{array}{cccc}
 S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\
 S_6 & S_5 & S_1 & \\
 \hline
 \sigma_0 \rightarrow PC & \sigma_1 \rightarrow P1 & \sigma_2 \rightarrow P2 & \sigma_3 \rightarrow P3 \\
 \delta_0 \rightarrow P6 & \delta_1 \rightarrow P5 & \delta_2 \rightarrow P4 &
 \end{array}$$

3. Вычисляем суммы  $\theta_1$ , и разности  $\eta$ , по схеме:

$$\begin{array}{ccc}
 d_1 & d_2 & d_3 \\
 d_5 & d_4 & \\
 \hline
 \theta_1 \rightarrow PB & \theta_2 \rightarrow PA & \theta_3 \rightarrow P9 \\
 \eta_1 \rightarrow P7 & \eta_2 \rightarrow P8 &
 \end{array}$$

4. Находим значение коэффициентов  $b_1 \div b_5$ ,  $a_0 \div a_5$  и значения  $2a_6$  по формулам:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{\theta_1/2 + \theta_3 + \theta_2 \sqrt{3}/2}{6}; & a_0 &= \frac{\sigma_0 + \sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3}{12}; \\
 b_2 &= \frac{(\eta_1 + \eta_2) \sqrt{3}/2}{6}; & a_1 &= \frac{\delta_2/2 + \delta_0 + \delta_1 \sqrt{3}/2}{6}; \\
 b_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\eta_1 - \eta_2); & a_3 &= \frac{\delta_0 - \delta_2}{6}; \\
 b_5 &= \frac{\theta_1/2 + \theta_3 - \theta_2 \sqrt{3}/2}{6}; & a_4 &= \frac{\sigma_0 - \sigma_2/2 - \sigma_1/2 + \sigma_3}{6}; \\
 & & a_5 &= \frac{\delta_2/2 + \delta_0 - \delta_1 \sqrt{3}/2}{6}; \\
 & & a_6 &= \frac{\sigma_0 + \sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{6};
 \end{aligned}$$

Эти расчеты на микрокалькуляторе «Электроника БЗ-34» реализуются двумя согласованными программами.

**Программа 5.111.** Подготовка данных для расчета методом 12-ти ординат. Ввод:  $y_1 \div y_{12} = P1 \div PC$ .

ИП1	ИПВ	—	ПВ	ИП1	FBx	+	П1	ИП2	ИПА
—	ПА	ИП2	FBx	+	П2	ИП3	ИП9	—	П9
ИП3	FBx	+	П3	ИП4	ИП8	—	П8	ИП4	FBx
+	П4	ИП5	ИП7	—	П7	ИП5	FBx	+	П5
ИПС	ИП6	—	П6	ИПС	FBx	+	ПС	ИП1	ИП5
—	П5	ИП1	FBx	+	П1	ИП2	ИП4	—	П4
ИП2	FBx	+	П2	ИПВ	ИП7	—	П7	ИПВ	FBx
+	ПВ	ИПА	ИП8	—	П8	ИПА	FBx	+	ПА
3	$F\sqrt{\quad}$	2	÷	ПД	2	С/П			

В конце этой программы значение  $\sqrt{3/2}$  заносится в регистр Д, а на индикацию выводится цифра 2, указывающая на окончание вычислений и необходимость ввода второй программы.

**Программа 5.112.** Расчет  $b_1 \div b_5$ ,  $a_0 \div a_5$  и  $2a_6$ .

ИПВ	2	÷	ИП9	+	П0	ИПА	ИПД	×	+
ПП	92	ИП7	ИП8	+	ИПД	×	ПП	92	ИПВ
ИП9	ПП	91	ИП7	ИП8	—	ИПД	×	ПП	92
ИП0	ИПА	ИПД	×	ПП	91	ИПС	ИП2	+	П9
ИП1	ИП3	+	П8	+	2	÷	ПП	92	ИП4
2	÷	ИП6	+	П7	ИП5	ИПД	×	ПА	+
ПП	92	ИПС	ИП2	2	÷	—	ПВ	ИП1	2
÷	ИП3	—	ПД	+	ПП	92	ИП6	ИП4	ПП
91	ИПВ	ИПД	ПП	91	ИП7	ИПА	ПП	91	ИП9
ИП8	—	6	÷	С/П	В/0				

**Пример.** Пусть  $y = f(x)$  задана ординатами:  $y_1 = 4$ ;  $y_2 = 4$ ;  $y_3 = 5$ ;  $y_4 = 4$ ;  $y_5 = 3$ ;  $y_6 = 3,5$ ;  $y_7 = 3,5$ ;  $y_8 = 3$ ;  $y_9 = 1$ ;  $y_{10} = 0,5$ ;  $y_{11} = 0,2$  и  $y_{12} = 0$ . Расчет по программе 5.111 дает:  $\sigma_0 = 3,5$ ;  $\sigma_1 = 7,7$ ;  $\sigma_2 = 11,5$ ;  $\sigma_3 = 6$ ;  $\theta_1 = 0,3$ ;  $\theta_2 = 4,5$ ;  $\theta_3 = 4$ ;  $\delta_0 = -3,5$ ;  $\delta_1 = -5,3$ ;  $\delta_2 = -2,5$ ;  $\eta_1 = 1,3$  и  $\eta_2 = 2,5$ . Расчет по программе 5.112 дает:  $b_1 = 1,3411857$ ;  $b_2 = 0,54848275$ ;  $b_3 = -6,16666666$ ;  $b_4 = -0,17320508$ ;  $b_5 = 0,042147616$ ;  $a_0 = 2,39166666$ ;  $a_1 = -1,5566557$ ;  $a_2 = -0,73333333$ ;  $a_3 = -0,016666666$ ;  $a_4 = -0,026677566$  и  $2a_6 = 0,21666666$ .

Часто нелинейная функция  $y = f(x)$  может быть представлена двумя отрезками прямых (рис. 5.7). Тогда действующая часть входного воздействия

$$x(t) = x_m \cos \omega t + x_0$$

характеризуется углом отсечки

$$\theta = \arccos [(x - x_0)/x_m].$$

Спектр выходных косинусоидальных импульсов для этого случая вычислен Бергом [8, 19] и задается относительными средним значением и амплитудами гармоник:

$$\alpha_0 = \frac{y_0}{y_M} = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)}, \quad \alpha_1 = \frac{y_{M1}}{y_M} = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)};$$

$$\alpha_n = \frac{y_{Mn}}{y_M} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\theta) \cos \theta - n \cos \theta \sin \theta}{n(n^2 - 1)(1 - \cos \theta)}.$$

**Программа 5.113.** Расчет коэффициентов  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_n$  Берга. Ввод:  $n$  и  $\theta$  (в градусах) в регистр X. Переключатель P — Г в положении P.

ПО	С/П	Fπ	×	1	8	0	÷	П9	Fcos
П7	1	—	Fπ	×	П8	ИП0	Fx=0	28	ИП9
ИП7	×	ИП9	Fsin	—	ИП8	÷	В/0	ИП0	Fx <sup>2</sup>
1	—	П5	Fx=0	44	ИП9	Fsin	ИП7	×	ИП9
—	ИП8	÷	В/0	ИП0	ИП9	×	Fcos	ИП9	Fsin
×	ИП0	×	ИП0	ИП9	×	Fsin	ИП7	×	—
2	×	ИП5	÷	ИП0	÷	ИП8	÷	В/0	

**Пример.** Найдем  $\alpha_0$  при  $\theta = 30^\circ$ . Введя  $n = 0 = PX$ , а затем  $\theta = 30 = PX$ , получим  $\alpha_0(30) = 0,11059842$ . Аналогично:  $\alpha_0(90) = 0,31830985$ ;  $\alpha_1(30) = 0,21522308$ ;  $\alpha_2(90) = 0,2122066$  и т. д.

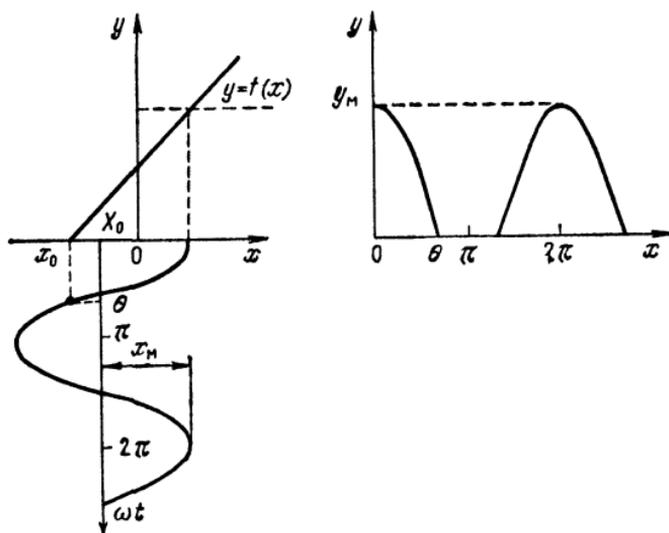


Рис. 5.7. Иллюстрация к методу Берга

При сильной нелинейности зависимости  $y(x)$  ее удобно аппроксимировать степенным многочленом (5.12) — см. программу 5.16. Тогда если  $x(t) = x_m \cos \omega t$  — гармоническое воздействие, то

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t),$$

где

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(x_m \cos(\omega t)) \cos(n\omega t) dt.$$

Поскольку  $x(t)$  — четная функция, то и  $y(t)$  будет четной функцией. Вычисление  $y(t)$  при

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

выполняется по формулам [19]:

$$y_0(t) = a_m; \quad y_1(t) = a_{m-1} + (x_m \cos(\omega t)) a_m; \dots;$$

$$y_n(t) = a_{m-n} + x_m \cos(\omega t) \sum_{i=0}^{n-1} A_i^{(n-1)} \cos(i\omega t) = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \cos(i\omega t).$$

Коэффициенты  $A_i^{(n)}$  можно находить по значениям  $A_i^{(n-1)}$  с помощью рекуррентных соотношений:

$$A_0^{(n)} = a_{m-n} + x_m A_1^{(n-1)} / 2; \quad A_1^{(n)} = x_m (A_0^{(n-1)} + A_2^{(n-1)} / 2);$$

$$A_2^{(n)} = x_m (A_1^{(n-1)} + A_3^{(n-1)} / 2); \dots;$$

$$A_i^{(n)} = x_m (A_{i-1}^{(n-1)} + A_{i+1}^{(n-1)} / 2); \dots;$$

$$A_{n-1}^{(n)} = x_m A_{n-2}^{(n-1)} / 2; \quad A_n^{(n)} = x_m A_{n-1}^{(n-1)} / 2.$$

При  $n = m$  коэффициенты  $A_i^{(m)}$  равны амплитудам гармоник спектра. Данный алгоритм реализует три приведенные ниже программы, обеспечивающие вычисление  $A_0, A_1, \dots, A_m$  для  $m \leq 12$  [19]. В первой программе запоминаются коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_m$  полинома, что позволяет проводить вычисления при изменении  $x_m$  без обновления ввода коэффициентов полинома. Вторая программа удобна при однократных вычислениях и  $m \leq 10$ , а третья — при  $m = 11$  и  $12$ .

**Программа 5.114.** Вычисление амплитуд гармоник реакции нелинейного объекта с передаточной характеристикой  $y(x)$  в виде степенного многочлена степени  $m \leq 6$  на гармоническое воздействие  $x(t) = x_m \cos(\omega t)$ . Ввод:  $a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_6 = P6, x_m = PX$ . Вывод результатов:  $A_0 \rightarrow P7, A_1 \rightarrow P8, A_2 \rightarrow P9, A_3 \rightarrow PA, A_4 \rightarrow PB, A_5 \rightarrow PC$  и  $A_6 \rightarrow PD = PX$ . При смене  $x_m$  вводится новое значение  $x_m = PX$  и нажимаются клавиши В/0 и С/П.

ПД	ИП6	×	П8	ИП5	П7	ИПД	2	÷	ПД
Сх	П9	ПА	ПВ	ПС	ИП8	ИП	78	ИП4	+
П7	ИП9	ПП	70	ИП3	+	П7	ИПА	ПП	62
ИП2	ПП	51	ИП1	ПП	51	ИП0	+	П7	ИПД
↑	↑	×	×	FX <sup>2</sup>	2	×	ИП6	×	ПД
С/П	+	П7	ИПД	ИПВ	×	ИПС	ХУ	ПС	ХУ

ИПА +	ИПД ×	ИПВ ХУ	ПВ ХУ	ИП9 +
ИПД ×	ИПА ХУ	ПА ХУ	ИП8 +	ИПД ×
ИП9 ХУ	П9 ХУ	ИП7 2	× +	ИПД ×
ИП8 ХУ	П8 ХУ	ИПД ×	В/0	

Пример. Для  $y(x) = 1 + 1000x + 200x^2 + 100x^3 + 20x^4 + 10x^5 + 2x^6$  и  $x_m = 4$  получим:  $A_0 = 6081$ ;  $A_1 = 15200$ ;  $A_2 = 8000$ ;  $A_3 = 4800$ ;  $A_4 = 2176$ ;  $A_5 = 640$ ;  $A_6 = 256$  ( $t_c \approx 70$  с).

**Программа 5.115.** Вычисление амплитуд гармоник реакции нелинейного объекта с передаточной характеристикой  $y(x)$  в виде степенного многочлена степени  $m \leq 10$  на гармоническое воздействие  $x(t) = x_m \cos(\omega t)$ . Ввод:  $x_m = \text{РД}$ ;  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$  в РХ. Вывод результатов:  $A_0 \rightarrow \text{P0}$ ,  $A_1 \rightarrow \text{P1}$ , ...,  $A_9 \rightarrow \text{P9}$ ,  $A_{10} \rightarrow \text{PA}$ .

ИПД ×	П1 С/П	П0	ИПД 2	ПС ÷	ПД
Сх КПС	С/П ИП1	ИПД ×	+	ИП0 ХУ	П0
ХУ 2	× 2	ПВ ХУ	КИПВ +	ИПД ×	
ИПВ 1	— ПВ	ИПС —	1 +	$Fx \neq 0$	50
ХУ КИПВ	ХУ КПВ	ХУ ИПВ 2	+	БП	24
ХУ КИПВ	ХУ КПВ	ХУ ИПД ×	КПС	ИПС	1
+	ПС БП	10			

Для проверки этой программы можно воспользоваться примером, приведенным к программе 5.114.

**Программа 5.116.** Вычисление амплитуд гармоник реакции нелинейного объекта с передаточной характеристикой  $y(x)$  в виде степенного многочлена степени  $m \leq 12$  на гармоническое воздействие  $x(t) = x_m \cos(\omega t)$ . Ввод: 0 в регистры 0 ÷ С,  $x_m = \text{РД}$ ,  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$  в РХ. Вывод результатов:  $A_0 \rightarrow \text{P0}$ ,  $A_1 \rightarrow \text{P1}$ , ...,  $A_{10} \rightarrow \text{PA}$ ,  $A_{11} \rightarrow \text{PB}$ ,  $A_{12} \rightarrow \text{PC}$ .

ИПД ×	П1 С/П	П0	ИПД 2	÷	ПД	С/П
ИП1 ПС	ИПД ×	+	ИП0 ХУ	П0 ХУ	2	
× ИП2	+ ИПД ×	П1 ИП3	ИП2	ПП	82	
П2 ИП4	ИП3	ПП 82	П3 ИП5	ИП4	ПП 82	
П4 ИП6	ИП5	ПП 82	П5 ИП7	ИП6	ПП 82	
П6 ИП8	ИП7	ПП 82	П7 ИП9	ИП8	ПП 82	
П8 ИПА	ИП9	ПП 82	П9 ИПВ	ИПА	ПП 82	
ПА ИПВ	ИПД ×	ИПС	ИПД ×	ПВ ХУ	ПС	
БП 09	ИПС ХУ	ПС F,	+ ИПД ×	В/0		

Для проверки этой программы можно воспользоваться примером, приведенным к программе 5.114. Время обработки одного  $a_i$  по двум последним программам до 1 мин.

В общем случае задача спектрального анализа заключается в проведении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). При этом функция  $y(t)$  задается рядом ее дискретных отсчетов  $y_i$ , где  $i$  — номер отсчета. Тогда коэффициенты ряда Фурье (5.44) опреде-

ляются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(n\omega_1 t) dt, \quad (5.46)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(n\omega_1 t) dt.$$

Применяя для вычисления интегралов метод прямоугольников, находим:

$$\frac{a_n N}{2} = \sum_{i=1}^N y_i \cos(2\pi n f_1 i \Delta t) = \sum_{i=1}^N y_i \cos\left(\frac{2\pi n i}{N}\right), \quad (5.47)$$

$$\frac{b_n N}{2} = \sum_{i=1}^N y_i \sin(2\pi n f_1 i \Delta t) = \sum_{i=1}^N y_i \sin\left(\frac{2\pi n i}{N}\right), \quad (5.48)$$

где  $\Delta t = T/N$  — приращение времени между двумя смежными отсчетами,  $N$  — число отсчетов и  $f_1 = 1/T$  — частота первой гармоники (повторения).

Если  $y(t)$  — непериодическая функция, определенная на конечном интервале времени  $[0, t_0]$ , то она характеризуется спектральной плотностью

$$S(i\omega) = S_c(\omega) + iS_s(\omega) = S(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad (5.49)$$

где

$$S_c(\omega) = \int_0^{t_0} y(t) \cos(\omega t) dt, \quad (5.50)$$

$$S_s(\omega) = \int_0^{t_0} y(t) \sin(\omega t) dt. \quad (5.51)$$

Интегрирование (5.50) и (5.51) методом прямоугольников с учетом условия  $t_0 = N\Delta t$  дает

$$S_c = \Delta t \sum_{i=1}^N y_i \cos(2\pi f \Delta t i), \quad (5.52)$$

$$S_s = \Delta t \sum_{i=1}^N y_i \sin(2\pi f \Delta t i). \quad (5.53)$$

Сравнивая (5.52) с (5.47) и (5.53) с (5.48) нетрудно заметить, что при  $f = nf_1$

$$\frac{S_c}{\Delta t} = \frac{a_n N}{2} = \sum_{i=1}^N y_i \cos(2\pi f i \Delta t), \quad (5.54)$$

$$\frac{S_s}{\Delta t} = \frac{b_n N}{2} = \sum_{i=1}^N y_i \sin(2\pi f i \Delta t). \quad (5.55)$$

Эти соотношения позволяют строить единые программы спектрального анализа как периодических, так и непериодических зависимостей  $y(t)$ . После определения (5.54) и (5.55) амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) спектра

$$\frac{S(f)}{\Delta t} = \frac{A(f) N}{2} = \frac{\sqrt{S_c(f)^2 + S_s(f)^2}}{\Delta t} \quad (5.56)$$

и фазо-частотная (ФЧХ)

$$\varphi(f) = -\arctg [S_s(f)/S_c(f)]. \quad (5.57)$$

При последовательном ДПФ вычисляется одновременно пара значений  $S_c/\Delta t$  и  $S_s/\Delta t$  (или  $a_n N/2$  и  $b_n N/2$ ). При смене  $f$  или  $n$  необходим повторный ввод всех значений  $y_i$  либо запоминание их в регистрах памяти с последующим вызовом. При параллельном ДПФ одновременно вычисляется ряд значений  $S_c/\Delta t$  и  $S_s/\Delta t$  для ряда  $f$  (или  $n$ ). При этом  $y_i$  используются лишь в одном цикле и запоминать их не требуется. Время проведения ДПФ значительно из-за необходимости многократного вычисления тригонометрических функций. Существуют алгоритмы, при которых эти вычисления проводятся по рекуррентным формулам, но это усложняет программы и ведет к возможности накопления ошибок округления чисел. При быстром преобразовании Фурье (БПФ) число отсчетов  $N$  берется таким, что значения  $\sin(2\pi ni/N)$  и  $\cos(2\pi ni/N)$  периодически повторяются (примером БПФ является схема гармонического анализа методом 12-ти ординат, описанным выше) [3, 10].

Для удобства вычислений программы последовательного спектрального анализа строятся так, чтобы по мере последовательного ввода  $y_i$  индцировался номер  $i$  ординаты  $y_i$ . Кроме того, если начиная с некоторого  $i > i_m$  ординаты  $y_i = 0$ , следует предусмотреть возможность прерывания вычислений.

**Программа 5.117.** Последовательное ДПФ. Ввод:  $\Delta t = P_A$ ,  $i_m = P_B$ ,  $f = P_X$  и (после нажатия клавиш В/0 и С/П и высвечивания цифры 1)  $y_1, y_2, \dots, y_m$  в регистр X. Переключатель P — Г в положении P. Вывод:  $S \rightarrow P_X = P_6$ ,  $\varphi \rightarrow P_Y = P_7$ ,  $Nb/2 \rightarrow P_8$ ,  $Na/2 \rightarrow P_9$ .

Fл	×	2	×	ИПА	×	ПС	0	P6	P8
P9	КИП6	ИП6	С/П	P7	ИПС	ИП6	×	P5	Fsin

×	ИП8	+	П8	ИП5	Fcos	ИП7	×	ИП9	+
П9	ИПВ	ИП6	—	Fx=0	11	ИП8	ИП9	÷	Farctg
1	8	0	/-/	×	Fл	÷	П7	ИП8	Fx <sup>2</sup>
ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	F√	ИПА	×	П6	С/П	БП	00

**Пример.** Вычислим  $S(f)$  и  $\varphi(f)$  для прямоугольного импульса с амплитудой, равной 1 (условная единица), длительностью 1 мкс и периодом повторения  $T = 4$  мкс. Взяв  $N = 32$ ,  $y_i$  задаем восемью единичными отсчетами (остальные нулевые). Вводим  $\Delta t = 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}/32 = 0,125 \cdot 10^{-6} \text{ с} = \text{РА}$ ,  $t_m = 8 = \text{РВ}$  и частоту  $f = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Гц} = \text{РХ}$ . Нажав клавиши В/0 и С/П, получим на индикаторе цифру 1, указывающую на необходимость ввода первого значения  $y_i = y_1 = 1$ . Введя  $y_1 = 1$ , нажимаем клавишу С/П и после обработки первого отсчета (за время около 10 с) получаем на индикаторе цифру 2 и т. д. После ввода последнего ненулевого отсчета  $y_8 = 1$  программа автоматически переходит к вычислению  $S = 9,0176423 \cdot 10^{-7}$ ;  $\varphi = -50,624991^\circ$ ;  $Nb/2 = 5,5765853$  (вызывается из регистра 8) и  $Na/2 = 4,5765856$  (вызывается из регистра 9).

Иногда для периодических функций  $y(t)$  удобно использовать разложение в ряд Фурье, содержащий только члены с синусами

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \sin [(2\pi n t/T) + \varphi_n]. \quad (5.58)$$

Для такого ряда при  $\Delta t = T/N$

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i,$$

$$A_{s_n} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N y_i \sin (2\pi n i/N),$$

$$A_{c_n} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N y_i \cos (2\pi n i/N),$$

$$A_n = \sqrt{A_{s_n}^2 + A_{c_n}^2},$$

$$\varphi_n = \text{arctg} (A_{c_n}/A_{s_n}).$$

**Программа 5.118.** Вычисление коэффициентов ряда Фурье (5.58). Ввод:  $N = \text{РВ}$ ,  $n$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , ...,  $y_N$  в регистр X. Вывод:  $A_n \rightarrow \text{РХ} = \text{РЗ}$ ,  $\varphi_n$  (в градусах)  $\rightarrow \text{РУ} = \text{Р4}$ ,  $\varphi_n$  (в радианах)  $\rightarrow \text{Р5}$ ,  $A_{s_n} \rightarrow \text{Р6}$ ,  $A_{c_n} \rightarrow \text{Р7}$ ,  $A_{s_n} N/2 \rightarrow \text{Р8}$  и  $A_{c_n} N/2 \rightarrow \text{Р9}$ . Переключатель Р—Г в положении Р.

ПА	0	П6	П8	П9	ИПА	Fx=0	25	КПП6	ИП6
С/П	ИП8	+	П8	ИПВ	ИП6	—	Fx=0	08	ИП8

ИПВ	÷	С/П	БП	00	2	×	Fl	×	ИПВ
÷	ПА	КИП6	ИИ6	С/П	ИД	ИПА	ИП6	×	ПС
Fsin	×	ИП8	+	И8	ИПД	ИПС	Fcos	×	ИП9
+	И9	ИПВ	ИП6	—	Fx=0	32	ИП9	ИП8	÷
Farctg	П5	1	8	0	×	Fl	÷	П4	ИП8
2	×	ИПВ	÷	П6	Fx <sup>2</sup>	ИП9	2	×	ИПВ
÷	П7	Fx <sup>2</sup>	+	F√	П3	БП	22		

**Пример.** Пусть надо найти спектральный состав функции  $y(t)$ , представленной на рис. 5.8, при  $n \leq 3$ . Поскольку  $y(t)$  симметрична относительно оси абсцисс, то  $A_0 = 0$  и  $A_2 = 0$ . Следовательно, достаточно найти  $A_1, A_3, \varphi_1$  и  $\varphi_3$ . Зададим  $y(t)$  при  $N = 24$  только положительными ординатами:  $y_1 = 7, y_2 = 11, y_3 = 13,5, y_4 = 15,4, y_5 = 17,4, y_6 = 20,5, y_7 = 25,4, y_8 = 32,5, y_9 = 27,7, y_{10} = 19,2, y_{11} = 10$  и  $y_{12} = 0$ . Введя  $N = 24 = PV$  и  $n = 1 = PX$ , нажимаем клавишу С/П. Высвечивается цифра 1, указывающая на необходимость ввода  $y_1$ . Вводим  $y_1 = 7 = P7$ , нажимаем клавишу С/П и т. д. После ввода  $y_{12} = 0$  и нажатия клавиши С/П высвечивается цифра 13. Теперь прерываем ввод, введя  $N/2 = 12 = PV$  и нажав клавиши БИ

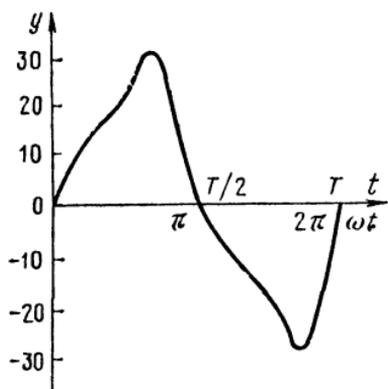


Рис. 5.8. Зависимость  $y(t)$

57 С/П. Получим  $A_1 = 25,836556$ ; нажав клавишу ХУ, получаем  $\varphi_1 = -11,407519^\circ$ . Кроме того, из регистров, указанных в инструкции к программе, получаем  $\varphi_1 = 0,1990988$  рад;  $A_{s1} = 25,326161$ ;  $A_{c1} = -5,1101083$ ;  $A_{s1}N/2 = 151,95697$  и  $A_{c1}N/2 = -30,66065$ .

Проведя аналогичные действия для  $n = 3$ , получим:  $A_3 = 6,1575834$ ;  $\varphi_3 = 56,131231^\circ$ ,  $\varphi_3 = 0,9796748$  рад;  $A_{s3} = 3,431579$ ;  $A_{c3} = 5,1127416$ ;  $A_{s3}N/2 = 20,58945$ ;  $A_{c3}N/2 = 30,67645$ .

Полученные результаты практически аналогичны приведенным в [2], откуда взят данный пример.

При использовании программ 5.117 и 5.118 усеченный  $m \leq N/2$  членами ряд Фурье дает приближение к  $y(t)$  с минимальной среднеквадратичной погрешностью. Однако эта погрешность значительна в силу двух причин: функция  $y(t)$  трактуется как ступенчатая кривая и интегрирование выражений (5.46), содержащих быстроосциллирующие множители, методом прямоугольников сопряжено с большими погрешностями.

Для повышения точности спектрального анализа целесообразно аппроксимировать  $y(t)$  ступенчатой кривой и сместить ее на половину шага  $\Delta t$ , добавив  $\Delta t/2$  к текущему времени. Кроме того, можно вычислять интегралы в (5.48) на каждом отрезке по точ-

ным аналитическим формулам. Так, для  $a_n$  в этом случае получим

$$a_n = \frac{2}{T \cdot 2\pi} \sum_{i=1}^N y_i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \cos \left[ 2\pi n f_1 \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] d \left[ 2\pi n f_1 \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right].$$

После аналитического вычисления интеграла находим окончательно [8]:

$$\frac{S_c}{\Delta t} = \frac{a_n N}{2} = \left( \frac{\sin \pi n f_1 \Delta t}{\pi n f_1 \Delta t} \right) \sum_{i=1}^N y_i \cos (2\pi n f_1 \Delta t i). \quad (5.59)$$

Аналогично этому

$$\frac{S_s}{\Delta t} = \frac{b_n N}{2} = \left( \frac{\sin \pi n f_1 \Delta t}{\pi n f_1 \Delta t} \right) \sum_{i=1}^N y_i \sin (2\pi n f_1 \Delta t i). \quad (5.60)$$

От (5.47) и (5.48) формулы (5.59) и (5.60) отличаются наличием корректирующего множителя, существенно повышающего точность вычисления  $a_n$  и  $b_n$ . Повторное умножение результата на корректирующий множитель соответствует кусочно-линейной аппроксимации  $y(t)$ .

**Программа 5.119.** Спектральный анализ повышенной точности с вычислением  $a_n$  и  $b_n$  по формулам (5.59) и (5.60). Ввод:  $\Delta t =$  = РА,  $i_m =$  РВ,  $f =$  РХ (после нажатия клавиш В/0 и С/П и высвечивания цифры 1)  $y_1, y_2, \dots, y_m$  в регистр X. Переключатель Р — Г в положении Р. Вывод:  $S(f) \rightarrow$  РХ = Р0,  $A_n(f) \rightarrow$  Р7,  $\varphi(f) \rightarrow$   $\rightarrow$  Р8 (в радианах),  $\varphi(f) \rightarrow$  Р9 = РУ (в градусах),  $\pi f \Delta t \rightarrow$  РС,  $\sin(\pi n f \Delta t) / (\pi n f \Delta t) \rightarrow$  Р4,  $N b_n / 2 \rightarrow$  Р5,  $N a_n / 2 \rightarrow$  Р6, нескорректированные значения  $N b_n / 2 \rightarrow$  Р1,  $N a_n / 2 \rightarrow$  Р2.

Fl	×	ИПА	×	ПС	0	П6	П1	П2	КИП6
ИП6	С/П	ПД	ИП6	ИПС	×	2	×	П3	Fsin
×	ИП1	+	П1	ИП3	Fcos	ИПД	×	ИП2	+
П2	ИПВ	ИП6	—	Fx=0	09	ИПС	Fsin	ИПС	÷
П4	ИП1	×	П5	Fx <sup>2</sup>	ИП2	ИП4	×	П6	Fx <sup>3</sup>
+	F√	П7	ИПА	×	П0	ИП5	ИП6	÷	Farctg
↑	/—/	П8	1	8	0	×	Fl	÷	П9
ИП0	С/П	БП	00						

Описанный метод спектрального анализа повышенной точности дает весьма малую погрешность, особенно в том случае, когда ступенчатая (или кусочно-линейная) аппроксимация  $y(t)$  точна: например, при вычислении спектра прямоугольных или треугольных импульсов. Так, для примера, приведенного к программе 5.117, вычисления по программе 5.119 при  $f = 2,5 \cdot 10^5$  Гц дают  $S(f) =$  = 9,0031637 · 10<sup>-7</sup>;  $\varphi(f) = -50,624991^\circ (-0,8835728$  рад);  $A_1(f) =$  = 7,202531;  $a_1 N / 2 = 4,5692374$ ;  $b_1 N / 2 = 5,5676318$  (нескорректиро-

ванные значения равны 4,5765854 и 5,5765854, корректирующий множитель равен 0,99835443). Из табл. 5 10 видно, что значение  $S(f)$  отличается от точного только последним знаком.

При небольшом числе отсчетов  $y_i$  их можно хранить в памяти микрокалькулятора (это число составляет 11 для калькулятора

Таблица 5.10

Частота $f$ , кГц	$S(f)$	$\varphi(f)$	$S(f)$ (точно)
250	$9,0031637 \cdot 10^{-7}$	$-50,624991^\circ$	$9,0031632 \cdot 10^{-7}$
500	$6,366198 \cdot 10^{-7}$	$78,750007^\circ$	$6,3661977 \cdot 10^{-7}$
750	$3,0010541 \cdot 10^{-7}$	$28,124997^\circ$	$3,0010544 \cdot 10^{-7}$
1000	$1,5835548 \cdot 10^{-14}$	—	0
1250	$1,8006325 \cdot 10^{-7}$	$-73,124981^\circ$	$1,8006326 \cdot 10^{-7}$

класса «Электроника БЗ-34», 17 для НР-11С, около 50 для НР-15С и ТИ-58С и до 90 для ТИ-59). Хранение  $y_i$  исключает необходимость в повторном вводе отсчетов при каждой смене значений  $f$  или  $n$ , что резко уменьшает затраты времени на спектральный анализ и делает проведение его более удобным.

**Программа 5.120°.** Последовательное ДПФ с хранением до 11 значений  $y_i$  в памяти. Ввод:  $y_1 = P1$ ,  $y_2 = P2$ , ...,  $y_{10} = PA$ ,  $y_{11} = PB$  и (после нажатия клавиш В/0 и С/П и индикации 0)  $n/N = PX$ . Вывод результатов:  $A_n N/2 \rightarrow PX$ ,  $k A_n N/2 \rightarrow PX$ ,  $k^2 A_n N/2 \rightarrow PX$ ,  $\varphi(nf_1) \rightarrow PX$  (в радианах),  $\varphi^\circ(nf_1) \rightarrow PX$ ,  $b_n N/2 \rightarrow PC$ ,  $a_n N/2 \rightarrow PD$ ,  $k = \sin(\pi n/N)/(\pi n/N) \rightarrow P0$  ( $k$  — корректирующий множитель). На место многоточия по адресам 10 и 11 записывается число ненулевых отсчетов  $y_i$ , а на место многоточия по адресам 15 и 16 — номер отсчета, предшествующего первому ненулевому отсчету (если первый ненулевой отсчет соответствует  $i = 0$ , то надо записать по адресам 15 и 16 операторы 1 /-/).

$S_x$	ПQ	ПД	С/П	Fl	$\times$	2	$\times$	$\uparrow$	$\uparrow$
...	...	П0	F,	ИП0	...	...	+	$\times$	Fsin
FBx	Fcos	КИП $\uparrow$	$\times$	ИПС	+	ПС	F,	КИП $\uparrow$	$\times$
ИПД	+	ПД	F,	FL0	13	F,	2	$\div$	Fsin
FBx	+	П0	ИПС	Fx <sup>2</sup>	ИПД	Fx <sup>2</sup>	+	F $\sqrt{\quad}$	С/П
$\times$	С/П	ИП0	$\times$	С/П	ИПС	ИПД	/-/	$\div$	Faictg
С/П	1	8	0	$\times$	Fl	$\div$	С/П		

**Пример.** Используя пример к программе 5.117, нужно по адресам 10 и 11 записать числа 0 и 8, а по адресам 15 и 16 — операторы 1 и /-/. Для  $n = 1$  и  $N = 32$  получим:  $S/\Delta t = 7,2141137$ ;  $kS/\Delta t = 7,2025308$ ;  $k^2 S/\Delta t = 7,1909665$ ;  $\varphi$  (рад) =  $-0,8835729$ ;  $\varphi^\circ = -50,624998$ ;  $b_n N/2 = 2,5765854$ ;  $a_n N/2 = 4,5765852$  и  $k = 0,99839441$ . Время обработки всех  $y_i$  ( $y_i = 1$  в регистрах 1  $\div$  8) около 1,5 мин.

**Программа 5.121°.** Параллельное ДПФ для 5 смежных гармоник с вычислением  $A_0 = \sum y_i$ . Ввод: после нажатия клавиш В/0 и С/П и индикации 0 номер начальной гармоники  $n_n = PC$ ,  $2\pi/N = PD$  (или  $360/N$  если переключатель Р — Г в положении Г) и (после нажатия клавиш В/0 и С/П и индикации 0) номер начального ненулевого отсчета  $t_n = PY$ ,  $y_{t_n} = PX$  С/П,  $y_{t_n + 1} = PX$  С/П и т. д. Вывод результатов (после ввода последнего  $y_i$ ):  $A_0 \rightarrow P0$ ,  $a_1N/2 \rightarrow P1$ ,  $b_1N/2 \rightarrow P2$ ,  $a_2N/2 \rightarrow P3$ ,  $b_2N/2 \rightarrow P4$ , ...,  $a_5N/2 \rightarrow P9$  и  $b_5N/2 \rightarrow PA$ .

1	0	П0	Сх	КП ↑	FLO	03	П0	С/П	ПВ
ИП0	+	П0	ПП	69	ИП1	+	П1	F,	ИП2
+	П2	ПП	69	ИП3	+	П3	F,	ИП4	+
П4	ПП	69	ИП5	+	И5	F,	ИП6	+	П6
ПП	69	ИП7	+	П7	F,	ИП8	+	П8	ПП
69	ИП9	+	П9	F,	ИПА	+	ПА	F,	ИПС
5	—	ПС	F,	1	+	↑	БП	08	F,
↑	ИПД	×	ИПС	×	ИПС	1	+	ПС	F,
Fcos	FVx	Fsin	ИПВ	×	ХУ	ИПВ	×	В/0	

**Пример.** Вычислим первые пять значений  $a_nN/2$  и  $b_nN/2$  прямоугольного импульса, заданного 8 единичными отсчетами  $y_{10} \div y_{17} = 1$  при остальных нулевых отсчетах и  $N = 32$ . Введя  $n_n = 1$ ,  $2\pi/32 = PD$  и  $t_n = 10$ , получим:  $A_0 = 8$ ;  $a_1N/2 = -6,3622798$ ;  $b_1N/2 = 3,4007106$ ;  $a_2N/2 = 2,8477578$ ;  $b_2N/2 = -4,2619737$ ;  $a_3N/2 = -0,23875957$ ;  $b_3N/2 = 2,424179$ ;  $a_4N/2 = 1 \cdot 10^{-8}$ ;  $b_4N/2 = 6,7 \cdot 10^{-7}$ ;  $a_5N/2 = -1,1595353$  и  $b_5N/2 = -0,95160494$ .

**Программа 5.122.** Быстрое преобразование Фурье при задании  $y(t)$  восемью отсчетами [19]. Ввод:  $y_0, y_1, \dots, y_7$  в регистр X (после ввода каждого  $y_i$  нажимается клавиша С/П). Вывод результатов:  $a_0 \rightarrow P2$ ,  $a_1 \rightarrow P3$ ,  $b_1 \rightarrow P4$ , ...,  $a_4 \rightarrow P9$ . Ввод каждого  $y_i$  (даже нулевого) обязателен.

П2	С/П	П9	С/П	П5	С/П	П6	ИП2	С/П	—
П3	FVx	ИП2	+	П2	ИП9	С/П	—	П8	FVx
ИП9	+	П9	ИП5	С/П	—	П4	FVx	ИП5	+
П5	ИП6	С/П	—	П7	FVx	ИП6	+	ИП9	ХУ
—	П6	ИП9	FVx	+	П9	ИП7	ИП8	+	П8
ИП7	FVx	—	П7	ИП2	ИП5	—	П5	ИП5	FVx
+	П2	ИП9	—	П9	ИП2	FVx	+	П2	ИП3
ИП7	2	$F\sqrt{\quad} \div$	+	П7	ИП3	FVx	—	П3	
ИП8	2	$F\sqrt{\quad} \div$	П8	ИП4	+	П4	ИП8	FVx	
—	П8	ИП2	С/П						

**Пример.** Для  $y_0 = 16$ ;  $y_1 = 9,752108$ ;  $y_2 = 5,943979$ ;  $y_3 = 3,622897$ ;  $y_4 = 2,20818$ ;  $y_5 = 1,3459$ ;  $y_6 = 0,8203356$  и  $y_7 = 0,5$  по-

лучим:  $a_0 = 40,1934$ ;  $a_1 = 17,527685$ ;  $b_1 = 13,275952$ ;  $a_2 = 11,443865$ ;  $b_2 = 6,975111$ ;  $a_3 = 10,055955$ ;  $b_3 = 3,0286652$  и  $a_4 = 9,75159$ .

Важным приложением спектрального анализа является расчет АЧХ и ФЧХ линейных систем по их переходным характеристикам, заданным в конечном интервале времени  $[0, t_0]$ . Связь ПХ  $a(t)$  с АЧХ и ФЧХ дается известными выражениями

$$A(i\omega) = a(0) + A_c(\omega) + iA_s(\omega),$$

где

$$A_c(\omega) = \int_0^{t_0} a'(t) \cos(\omega t) dt, \quad (5.61)$$

$$A_s(\omega) = \int_0^{t_0} a'(t) \sin(\omega t) dt, \quad (5.62)$$

$$A(f) = \sqrt{A_c(f)^2 + A_s(f)^2},$$

$$\varphi(f) = -\operatorname{arctg}[A_s(f)/A_c(f)].$$

Для повышения точности вычислений заменим  $a'(t)$  ступенчатой кривой, смещенной во времени на  $\Delta t/2$ . Это означает, что

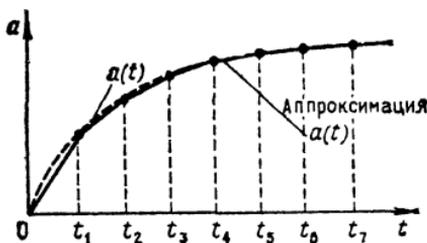


Рис. 5.9. К аппроксимации переходной характеристики  $a(t)$

ПХ  $a(t)$  аппроксимируется кусочно-линейной функцией (рис. 5.9). При этом в пределах каждого отрезка времени

$$a'(t) \approx \frac{\Delta a(t)}{\Delta t} = \frac{a_i - a_{i-1}}{\Delta t}.$$

Воспользуемся описанным выше приемом — интегрированием (5.61) и (5.62) в пределах каждого шага по точным аналитическим формулам. Тогда будем иметь [8]:

$$A_c(f) = \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) \cos(\pi f \Delta t (2i - 1)),$$

$$A_s(f) = \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) \sin(\pi f \Delta t (2i - 1)).$$

Для микрокалькуляторов «Электроника БЗ-34» объем памяти позволяет запомнить до 11 значений  $a_i$  (три оставшихся регистра

используются как служебные). Ввод и вывод  $a_i$  в процессе вычислений для упрощения программы целесообразно организовать с помощью косвенной адресации.

**Программа 5.123.** Расчет АЧХ и ФЧХ по ПХ, заданной 11-ю ординатами. Ввод:  $a_{10} = PY$ ,  $a_9, a_8, \dots, a_0, f\Delta t$  в регистр X. Переключатель P — Г в положении P. При смене  $f\Delta t$  после расчета  $A(f)$  и  $\varphi(f)$  вводится только новое значение  $f\Delta t$ .

1	1	ПО	XY	С/П	—	КПО	FBx	ИПО	1
—	Fx=0	03	С/П	Fπ	×	ПВ	1	1	ПО
0	ПС	ПД	ИПО	1	—	2	×	1	—
ИПВ	×	↑	Fsin	XY	Fcos	КИПО	XY	FBx	×
ИПС	+	ПС	F,	×	ИПД	+	ПД	ИПО	1
—	Fx=0	23	ИПС	Fx <sup>2</sup>	ИПД	Fx <sup>2</sup>	+	F√	ИПВ
÷	ИПВ	Fsin	×	С/П	ИПС	Fx<0	70	1	8
0	ПО	ИПД	ИПС	÷	ПВ	Fx>0	81	ИПО	/—/
ПО	ИПВ	Farctg	1	8	0	/—/	×	Fπ	+
ИПО	—	БП	13						

В этой программе путем анализа знаков  $A_c(f)$  и  $A_s(f)$  обеспечивается представление углов  $\varphi(f)$  в расширенном до  $\pm 180^\circ$  диапазоне.

Пусть надо построить АЧХ и ФЧХ системы, ПХ которой показана на рис. 5.10, а. Введя программу, нажимаем клавиши В/0

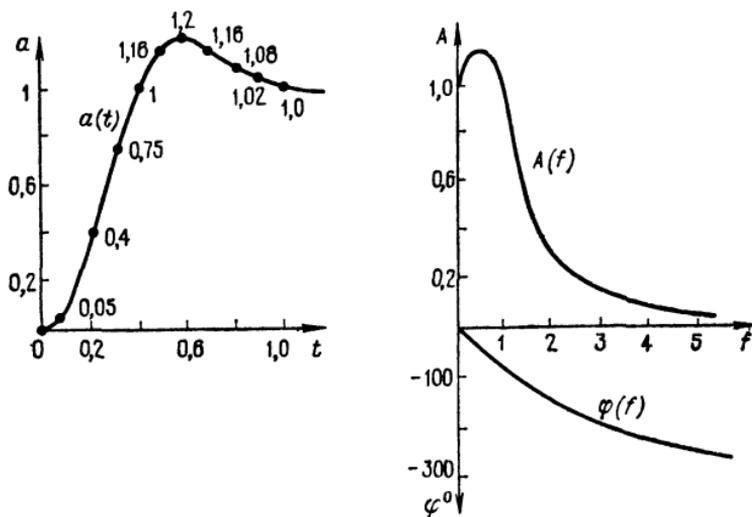


Рис. 5.10. Переходная характеристика (слева) и рассчитанные по ней АЧХ и ФЧХ (справа)

и С/П. Набираем  $a_{10} = 1$  и, нажав клавишу  $\uparrow$ , —  $a_9 = 1,02$ . Нажав клавишу С/П и дождавшись обработки отсчета (он вновь выводится на индикатор), вводим  $a_8 = 1,08$  и т. д. После ввода  $a_0$  и нажатия клавиши С/П высвечивается цифра 0. Вводим  $f\Delta t = 0,01$  и,

вновь нажав клавишу С/П, примерно через 2 мин получим результат  $A(f) = 1,0088276$ ; нажав еще раз клавишу С/П, получим  $\varphi(f) = -6,1442791^\circ$ . Значения  $A(f)$  и  $\varphi(f)$  для разных  $f\Delta t$  даны в табл. 5.11. Графики рассчитанных зависимостей  $A(f)$  и  $\varphi(f)$  показаны на рис. 5.10, б, в.

Таблица 5.11

$f\Delta t$	$A(f)$	$\varphi(f)$
0,01	1,0088276	-6,1442791
0,02	1,0331342	-12,82609
0,05	1,1341967	-38,690029
0,1	1,0438664	-96,20238
0,125	0,83008103	-125,96085
0,15	0,56762792	-151,63527
0,2	0,23672042	-160,43524
0,3	0,15961459	-198,81658*
0,5	0,050929582	-269,99994*

\*) От показаний индикатора отнимается  $180^\circ$ , так как  $\varphi(f)$  вышло за пределы определения отрицательных углов.

## 5.15. Статистические расчеты и построение гистограмм

Совокупность  $N$  некоторых случайных чисел  $x_i$  (например, данных эксперимента) характеризуется начальными и центральными моментами  $k$ -го порядка [17]:

$$m_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

$$M_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i - m_1(x)]^k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Центральный момент  $M_1(x) = 0$ . Обычно  $k \leq 4$ .

Для исключения запоминания всех  $x_i$  моменты  $M_k$  рассчитываются по значениям  $m_k$ :

$$M_2 = m_2 - m_1^2, \quad M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3,$$

$$M_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4.$$

Наиболее вероятное (среднее) значение числа в массиве

$$\bar{x} = m_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Вероятная степень отклонения  $x_i$  от  $\bar{x}$  — дисперсия

$$D = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = M_2.$$

Величина  $\sigma = \sqrt{D}$  являются стандартным отклонением (или среднеквадратичной погрешностью).

Для нормального распределения вычисления дисперсия является смещенной. Несмещенная дисперсия

$$D_0 = \sigma_{N-1}^2 = M_2 N / (N - 1).$$

Характер скошенности функции плотности распределения  $p(x)$  (рис. 5.11, а) определяется значением асимметрии

$$A = \frac{1}{ND^{3/2}} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3 = M_3 / M_2^{3/2}.$$

При  $A = 0$  кривая  $p(x)$  симметрична, при  $A > 0$  вытянут ее правый, а при  $A < 0$  — левый участок спада (5.11, б)

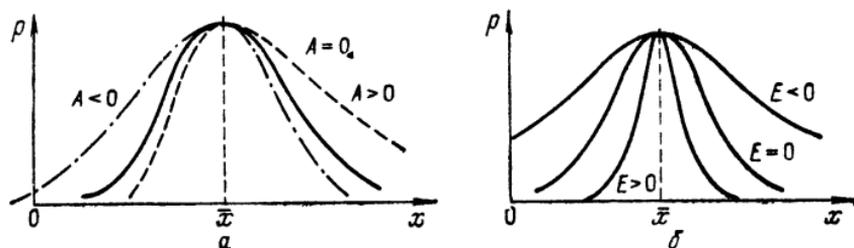


Рис. 5.11. Функции плотности распределения при разной асимметрии (а) и эксцессе (б)

Показателем остроты пика  $p(x)$  по сравнению с нормальным распределением является эксцесс

$$E = \frac{1}{ND^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3.$$

По вычисленным значениям  $\bar{x}$ ,  $D$ ,  $A$  и  $E$  можно в первом приближении судить о возможных законах распределения чисел  $x_n$ . Так, для наиболее часто встречающегося нормального закона  $A = 0$  и  $E = 0$ . Можно принять закон распределения за нормальный, если значения  $A$  и  $E$  в 2—3 раза меньше значений вспомогательных коэффициентов [18]:

$$U_3 = \sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}},$$

$$U_4 = \sqrt{\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}}.$$

**Программа 5.124.** Вычисление среднего  $\bar{x}$ , дисперсии  $D = \delta_x^2$  и несмещенной дисперсии  $D_0 = \sigma_{x_0}^2$  массива чисел  $x_i$ . Ввод: В/0 С/П (индицируется 0) и далее  $x_i$  С/П (индицируется номер  $i$  введенного числа). При вводе ошибочного числа до нажатия клавиши С/П его исключают нажатием клавиши Сх, а после нажатия клавиши С/П — повторным набором  $x_i$  и нажатием клавиш БП 18 С/П. Результат (после нажатия клавиш БП 34 С/П С/П и С/П):  $\bar{x}$ ,  $D$  и  $D_0$  в регистр X. Если нужно продолжить ввод  $x_i$ , следует нажать клавиши БП 04 С/П (индицируется номер  $i$  последнего из ранее введенных чисел), после чего перейти к вводу следующей партии чисел  $x_i$ .

Сх	П1	П2	П5	ИП5	С/П	↑	ИП1	+	П1
ХУ	$Fx^2$	ИП2	+	П2	КИП5	БП	04	П9	ИП1
ХУ	—	П1	ИП2	ИП9	$Fx^2$	—	П2	ИП5	1
—	П5	БП	04	ИП1	ИП5	÷	ПС	С/П	ИП2
ИП5	÷	ИПС	$Fx^2$	—	ПД	С/П	ИПД	ИП5	×
ИП5	1	—	÷	П0	С/П				

**Пример.** Для  $x_i = 9, 8; 10; 9$  и  $11$  получим  $\bar{x} = 9,4$ ;  $D = 1,04$  и  $D_0 = 3$ . Введя далее  $x_i = 12; 10; 10; 9$  и  $11$ , получим  $\bar{x} = 9,9$ ;  $D = 1,29$  и  $D_0 = 1,4333333$ . Время  $t_0 \approx 4$  с для обработки одного числа  $x_i$  и около 10 с для вычисления  $\bar{x}$ ,  $D$  и  $D_0$ .

Отказавшись от исключения ошибочно введенных чисел (что требует повышенного внимания при вводе), можно реализовать все приведенные выше статистические расчеты (кроме вычисления  $U_3$  и  $U_4$ ) с помощью одной программы.

**Программа 5.125<sup>o</sup>.** Вычисление основных статистических параметров массива чисел  $x_i$ . Ввод: В/0 С/П (индицируется 0),  $x_i$  С/П (индицируется  $i$ ). Результат (после нажатия клавиши БП 32 С/П):  $D_0 = \sigma_0^2 \rightarrow$  РХ,  $\bar{x} = m_1 \rightarrow$  РД,  $m_2 \rightarrow$  РС,  $m_3 \rightarrow$  РВ,  $m_4 \rightarrow$  РА,  $N \rightarrow$  Р5,  $M_2 = D = \sigma_x^2 \rightarrow$  Р7,  $M_3 \rightarrow$  Р8,  $M_4 \rightarrow$  Р9,  $A \rightarrow$  Р6,  $E \rightarrow$  Р0. Для ввода дополнительной партии чисел  $x_i$  нажимаются клавиши БП 06 С/П (индицируется номер  $i$  последнего числа ранее введенной партии), после чего вводятся числа  $x_i$  новой партии (ввод фиксируется нажатием клавиши С/П).

Сх	П1	П2	П3	П4	П5	ИП5	С/П	П6	ИП4
+	П4	ИП6	$Fx^2$	П7	ИП3	+	П3	ИП7	ИП6
×	ИП2	+	П2	ИП7	$Fx^2$	ИП1	+	П1	КИП5
БП	06	4	П0	ИП0	9	+	П7	КИП↑	ИП5
÷	КП7	FL0	34	ИПВ	ИПС	ИПД	$Fx^2$	П0	—
П7	3	×	ИП0	+	ИПД	×	—	П8	ИП7
↑	$F\sqrt{\quad}$	×	÷	П6	ИПА	ИП7	6	×	ИП0
+	ИПД	×	ИП8	4	×	+	ИПД	×	—
П9	ИП7	$Fx^2$	÷	3	—	П0	ИП7	ИП5	×
ИП5	1	—	÷	С/П					

Пример. Для  $x_i = 9; 8; 10; 9$  и 11 получим  $D_0 = 1,3; \bar{x} = m_1 = 9,4; m_2 = 89,4; m_3 = 860,2; m_4 = 8371,8; M_2 = D = 1,04; M_3 = 0,288; M_4 = 2,1152; N = 5; A = 0,27154543$  и  $E = -1,0443787$ . Введя дополнительную партию  $x_i = 12; 10; 10; 9$  и 11, получим  $D_0 = 1,4333333; \bar{x} = m_1 = 9,9; m_2 = 99,3; m_3 = 1008,9; m_4 = 10379,7; D = M_2 = 1,29; M_3 = 0,288; M_4 = 3,738; N = 10; A = 0,1965658$  и  $E = -0,7537408$ . Время  $t_c \approx 8$  с для ввода и обработки одного  $x_i$  и  $t_c \approx 35$  с для вычисления всех статистических параметров.

**Программа 5.126.** Вычисление коэффициентов  $U_3$  и  $U_4$ . Ввод:  $N = PX$ . Вывод:  $U_3 \rightarrow PX, U_4 \rightarrow PX$ .

П1	1	—	1	ИП1	+	÷	6	×	ИП1
3	ПО	+	÷	$F\sqrt{-}$	С/П	ИП1	4	×	ИП1
ИПО	—	FL0	18	$Fx^2$	÷	5	БП	04	

Пример. Для  $N = 10$  получим  $U_3 = 0,61450986$  и  $U_4 = 0,92244357$ .

Оптимизируя ввод  $x_i$  по числу шагов программы (при этом время ввода несколько увеличивается), можно все приведенные выше основные статистические параметры вычислять по одной программе.

**Программа 5.127°.** Расчет всех основных статистических параметров массива чисел  $x_i$ . Ввод:  $0 = P1 \div P5$  В/О С/П (индицируется 0)  $x_i$  С/П (индицируется номер  $i$ ). Результат (после нажатия клавиш БП 17 С/П):  $\bar{x} = m_1 \rightarrow P4, m_2 \rightarrow P3, m_3 \rightarrow P2, m_4 \rightarrow P1, D = M_2 \rightarrow P7, M_3 \rightarrow P8, M_4 \rightarrow P9, A \rightarrow P6$  и  $E \rightarrow PD = PX$ . Для получения  $U_3$  и  $U_4$  дважды нажимается клавиша С/П ( $U_3 \rightarrow PX$  и  $U_4 \rightarrow PX$ ).

4	ПО	ИП5	С/П	П6	КИП↑	XY	+	КИП↑	FBx
ИП6	×	FL0	05	КИП5	БП	00	КИП↑	ИП5	÷
КИП↑	FL0	17	ИП2	ИП3	ИП4	$Fx^2$	ПО	—	П7
3	×	ИПО	+	ИП4	×	—	П8	ИП7	↑
$F\sqrt{-}$	×	÷	П6	ИП1	ИП7	6	×	ИПО	÷
ИП4	×	ИП8	4	×	+	ИП4	×	—	П9
ИП7	$Fx^2$	÷	3	—	ПД	С/П	ИП5	1	—
1	ИП5	+	÷	6	×	ИП5	3	ПО	+
÷	$F\sqrt{-}$ С/П	ИП5	4	×	ИП5	ИПО	→	FL0	
85	$Fx^2$	÷	5	БП	71				

Эту программу можно проверить по примеру к программе 5.125 ( $t_c \approx 13$  с на обработку одного  $x_i$  и  $t_c \approx 40$  с для вычисления статистических параметров). Ввод дополнительной партии  $x_i$  (с сохранением данных о прежней партии) в этой программе не предусмотрен.

При большом количестве чисел  $x_i$  время вычисления статистических параметров можно значительно уменьшить, разбив общий диапазон изменения случайных величин на равные интервалы

$\Delta x$  и подсчитав количество чисел  $x_i$  в каждом интервале. В этом случае массив (выборка) чисел  $x_i$  характеризуется значениями  $x_j$  в центре каждого интервала и числом  $n_j$  чисел  $x_i$ , попавших в соответствующий интервал. Тогда формулы для первых четырех начальных и центральных моментов принимают вид [13]:

$$N = \sum_{j=1}^k n_j; \quad m_1 = M_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k n_j x_j; \quad m_2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k n_j x_j^2;$$

$$m_3 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k n_j x_j^3; \quad m_4 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k n_j x_j^4;$$

$$M_2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k n_j (x_j - m_1)^2 - \frac{1}{12} \Delta x; \quad M_3 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k n_j (x_j - M_1)^3;$$

$$M_4 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k n_j (x_j - M_1)^4 - \frac{1}{2} \Delta x^2 \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k (x_j - M_1)^2 + \frac{7}{240} \Delta x^4.$$

В выражениях для  $M_2$  и  $M_4$  учтены поправки Шеппарда на группирование выборки. Указанные параметры вычисляются по приведенной ниже программе [21].

**Программа 5.128°.** Вычисление первых четырех начальных и центральных моментов выборки, сгруппированной в классы. Ввод (после нажатия клавиш В/0 и С/П)  $x_1 \uparrow n_1$  С/П  $x_2 \uparrow n_2$  С/П и т. д. до  $x_k \uparrow n_k$ . Далее, нажав клавиши БП 27 и 4 раза клавишу С/П, получим значения  $m_1 \rightarrow \text{РХ} = \text{Р5}$ ,  $m_2 \rightarrow \text{РХ} = \text{Р4}$ ,  $m_3 \rightarrow \text{РХ} = \text{Р3}$  и  $m_4 \rightarrow \text{РХ} = \text{Р2}$ . Затем, введя  $\Delta x = \text{РХ}$ , нажав клавиши БП 36 и 4 раза клавишу С/П, получим  $M_1 \rightarrow \text{РХ} = \text{Р5}$ ,  $M_2 \rightarrow \text{РХ} = \text{Р4}$ ,  $M_3 \rightarrow \text{РХ} = \text{Р3}$  и  $M_4 \rightarrow \text{РХ} = \text{Р2}$ .

Сх	П2	П3	П4	П5	П6	6	П0	4	П1
ИП7	С/П	Ф,	П7	ИП6	FBx	+	П6	КИПО	ИП7
FBx	×	+	КП ↑	FL1	18	БП	06	П0	КИПО
ИП6	÷	КП ↑	С/П	БП	29	Fx <sup>2</sup>	2	÷	П1
ИП2	ИП3	ИП4	ИП5	Fx <sup>2</sup>	П7	—	П4	3	×
ИП7	+	ИП5	×	—	П3	4	×	ИП4	6
×	ИП7	+	ИП5	×	+	ИП5	×	—	ИП1
7	×	6	0	÷	ИП4	—	ИП1	×	+
П2	ИП4	ИП1	6	÷	—	П4	1	П6	БП
27									

**Пример.** Для выборки с  $\Delta x = 2$ , имеющей  $x_1 = 2$ ,  $n_1 = 8$ ,  $x_2 = 4$ ,  $n_2 = 2$ ,  $x_3 = 6$ ,  $n_3 = 3$ ,  $x_4 = 8$  и  $n_4 = 7$ , получим:  $m_1 = 4,9$ ;  $m_2 = 31$ ;  $m_3 = 221,2$ ;  $m_4 = 1660$ ;  $M_1 = 4,9$ ;  $M_2 = 6,6566667$ ;  $M_3 = 0,798$  и  $M_4 = 47,386367$ . Время обработки пары  $x_j, n_j$  около

13 с, вычисления моментов  $m_1 \div m_4$  около 9 с и  $M_1 \div M_4$  — около 20 с.

При статистической обработке двумерного массива чисел  $x_i$  и  $y_i$  вычисляются их средние значения

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i,$$

дисперсии

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2; \quad D_y = \sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

и выборочный коэффициент парной корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i \right) / N}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 / N \right) \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 / N \right)}}.$$

Значения  $r$  могут лежать в пределах от  $-1$  до  $+1$ . Близость  $r$  к  $1$  указывает на линейную связь  $y_i$  с  $x_i$ . При  $r = +1$   $y_i$  линейно растет с ростом  $x_i$ , при  $r = -1$   $y_i$  линейно уменьшается с ростом  $x_i$ .

**Программа 5.129.** Вычисление  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $D_x$ ,  $D_y$  и  $r$  для массивов чисел  $x_i$  и  $y_i$ . Ввод: В/О С/П (индицируется 0)  $y_i \uparrow x_i$  С/П (индицируется  $i$  для каждой пары чисел). Результат (после нажатия клавиш БП 37 С/П):  $r \rightarrow P_X = P_0$ ,  $\bar{x} \rightarrow P_2$ ,  $\bar{y} \rightarrow P_3$ ,  $D_x \rightarrow P_4$  и  $D_y \rightarrow P_5$ .

Сх	П1	П2	П3	П4	П5	П6	ИП6	С/П	П7
ХУ	П8	×	ИП1	+	П1	ИП8	ИП3	+	П3
ИП8	Fx <sup>2</sup>	ИП5	+	П5	ИП7	Fx <sup>2</sup>	ИП4	+	П4
ИП7	ИП2	+	П2	КИП6	БП	07	5	П0	ИП0
ПД	КИПД	ИП6	÷	КПД	FL0	39	ИП2	ИП3	×
—	ИП4	ИП2	Fx <sup>2</sup>	—	П4	ИП5	ИП3	Fx <sup>2</sup>	—
П5	×	F√	÷	П0	С/П				

**Пример.** Для  $y_i(x_i) = 2(0,95); 4,05(2,1); 5,8(3); 8,1(4,1)$  и  $9,2(4,9)$  получим  $r = 0,99872804$ ,  $\bar{x} = 3,01$ ,  $\bar{y} = 5,83$ ,  $D_x = 1,9664$  и  $D_y = 6,8696$  ( $t_c \approx 10$  с при обработке одной пары чисел  $y_i$  и  $x_i$  и  $t_c \approx 20$  с для вычисления  $r$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $D_x$  и  $D_y$ ).

Нередко массив случайных чисел характеризуют гистограммой их распределения, т. е. количеством чисел, попадающих в интервалы с границами  $d_1, d_2, \dots, d_M$ . Гистограммы интегрального распределения строятся путем подсчета числа попаданий в полуинтервалы  $(-\infty, d_1]$ ,  $(-\infty, d_2]$  и т. д.

**Программа 5.130.** Обработка массива случайных чисел  $x_1, x_2, \dots, \dots, x_N$  для построения гистограмм. Порядок ввода и вывода даны ниже в контрольном примере.

ПО	ИП0	С/П	ПО	ИП8	—	$Fx < 0$	13	ИП1	1
+	П1	В/0	ИП0	ИП9	—	$Fx < 0$	23	ИП2	1
+	П2	В/0	ИП0	ИПА	—	$Fx < 0$	33	ИП3	1
+	П3	В/0	ИП0	ИПВ	—	$Fx < 0$	40	КИП4	В/0
ИП0	ИПС	—	$Fx < 0$	47	КИП5	В/0	ИП0	ИПД	—
$Fx < 0$	54	КИП6	В/0	ИП7	1	+	П7	В/0	КНОП
ИП1	С/П	ИП2	+	С/П	ИП3	+	С/П	ИП4	+
С/П	ИП5	+	С/П	ИП6	+	С/П	ИП7	+	С/П
0	F1/x	С/П							

**Пример.** Пусть нужно построить гистограмму для двадцати случайных чисел 2,5; 5,15; 3,05; 1,1; 1,7; 3,6; 4,7; 4,65; 6,8; 5,6; 2,3; 2,9; 3,2; 3,8; 4,2; 3,5; 4,8; 5,7; 4,9; 7,5. Вводя программу, вводим затем границы  $d_1 = 1 = P8$ ,  $d_2 = 2 = P9$ ,  $d_3 = 3 = PA$ ,  $d_4 = 4 = PB$ ,  $d_5 = 5 = PC$  и  $d_6 = 6 = PD$  и записываем 0 в регистры 1 ÷ 7. Нажимаем клавиши В/0 и С/П (высвечивается 0), после чего последовательно вводим все значения  $x_i$ . Из регистров 1 ÷ 7 вызываем числа 0, 2, 3, 5, 5, 3 и 2, характеризующие число попаданий  $x_i$  в интервалы от 1-го по 7-й. Нажав клавиши БП 60 и С/П, переходим к вычислению данных для построения гистограммы интегральной функции распределения. По мере нажатия клавиши

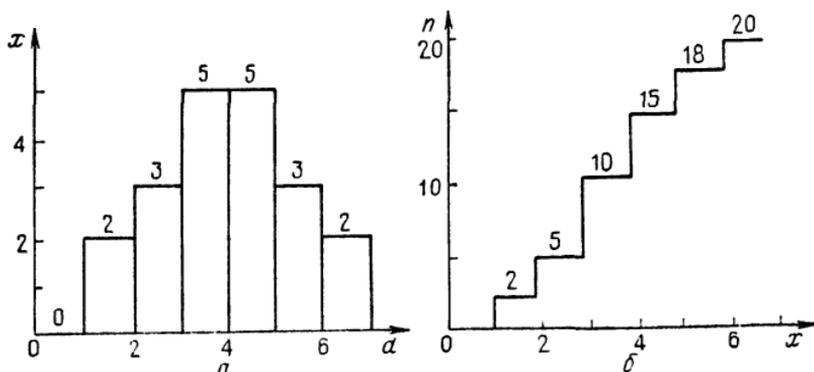


Рис. 5.12. Гистограммы распределения случайных величин (а) и интегральной функции распределения (б)

С/П (до появления знака ЕГГОГ, сигнализирующего конец вычислений) будет получать цифры 0; 2; 5; 10; 18; 20 — числа попаданий  $x_i$  в интервалы  $(-\infty, d_1]$ ,  $(-\infty, d_2]$ , ...,  $(-\infty, d_6]$ . На рис. 5.12 построены гистограммы данного примера.

Для построения гистограмм с большим числом интервалов (до 12—13) можно вписывать значения  $d_1, d_2, \dots, d_N$  непосредственно в программу либо формировать их в программе (см. пример ниже).

Пусть нужно построить гистограмму напряжений стабилизации кремниевых стабилитронов типа Д814А — Д814Д, изготавливаемых по единой технологии с разбивкой на группы по значениям  $U_{ст}$ . Такая разбивка, естественно, требует знания статистического разброса  $U_{ст}$ . Ограничимся рабочим диапазоном  $U_{ст} = 6 \div 15,5$  В и составим программу, позволяющую группировать  $U_{ст}$  в 13 интервалах с шириной каждого из них  $\Delta U_{ст} = 1$  В.

**Программа 5.131.** Обработка значений  $U_{ст}$  для построения гистограммы на 13-ти полупинтервалах  $(-\infty; 5В]$ ,  $[5; 6 В]$ ,  $[6; 7 В]$ , ...,  $[15; 16 В]$  и  $[16 В; \infty)$ . Ввод:  $U_{ст} = РХ$  (после нажатия клавиш В/0 и С/П).

1	3	ПО	0	КПО	ИПО	$F_x=0$	03	1	ПД
ИПО	С/П	ПО	ИПО	ИПД	4	+	-	$F_x<0$	26
КИПД	1	+	КПД	БП	08	ИПД	1	+	ПД
БП	13								

**Пример.** Пусть для  $U_{ст}$  имеем значения: 9,3; 10,5; 9,7; 5,6; 6,1; 15,5; 11,2; 8,9; 12,2; 8,3; 7,8; 9,2; 13,8; 9,05; 10,3. По окончании ввода из регистров 1 ÷ 9, А, В и С вызываем данные для построения функции  $p(U_{ст})$  в виде чисел: 0; 1; 1; 1; 2; 4; 2; 1; 1; 1; 0; 1.

Если ширина интервалов гистограммы постоянна и равна  $(b - a)/M$ , где  $b$  — максимальное,  $a$  — минимальное значение  $x$  и  $M$  — число интервалов, то для построения гистограмм можно использовать усечение чисел  $x_i$  при их записи в регистры памяти и вызове с помощью операторов косвенной адресации. При этом полученное число указывает на номер регистра, в который должна записаться единица [21].

**Программа 5.132.** Построение гистограмм при  $M \leq 10$  интервалах. Ввод:  $a \uparrow b$  В/0 С/П (индицируется  $a - b$ ),  $M = РХ$  и  $x_i$  С/П (при наборе  $x_i$  не обращать внимания на индицируемые числа). Вывод результатов (после нажатия клавиш БП 33 и С/П, С/П, ... .., С/П и т. д. до индикации надписи ЕГГОГ):  $p_1 \rightarrow РХ$ ,  $p_2 \rightarrow РХ$ , ... ..,  $p_M \rightarrow РХ$ .

-	С/П	ПО	ПВ	1	ВП	6	/-/	FBx	F,
-	÷	ПС	÷	1	-	ПД	Cx	КП ↑	FL0
18	С/П	ИПС	÷	ИПД	-	ПО	КИП ↑	1	+
КП ↑	БП	21	ИПВ	ПО	КИП ↑	С/П	FL0	35	

**Пример.** Для  $a = 5,2$ ;  $b = 25,2$ ;  $M = 10$  и  $x_i = 13$ ; 19; 9; 10; 10; 20; 8; 15; 13; 12; 10 и 11 получим  $p_i = 0$ ; 2; 4; 3; 1; 0; 1; 1; 0 и 0.

Если число чисел  $x_i$ , попадающих в каждый интервал, менее  $10^4$ , то каждый регистр можно использовать для построения двух счетчиков (4 разряда на 1 счетчик и 4 — на другой). Это позволяет выполнить программу для построения гистограмм с  $M = 20$  интервалами.

**Программа 5.133<sup>о</sup>.** Построение гистограммы при  $M = 20$  интервалов. Ввод:  $a \uparrow b$  В/О С/П  $x_i$  С/П (при наборе  $x_i$  не обращать внимания на индицируемые числа). Результат (после нажатия клавиш БП 44 С/П, С/П, ...):  $p_1 \rightarrow PX, p_2 \rightarrow PX, \dots, p_m \rightarrow PX$ .

—	1	0	ПО	1	ВП	4	/—/	ПВ	FB $x$
F,	—	÷	ПС	÷	1	КП ↑	FLO	16	—
ПД	КИП1	1	КИП ↑	+	КП ↑	С/П	ИПС	÷	ИПД
—	ПО	КИП ↑	XY	ИПО	—	2	F1/x	—	F $x \geq 0$
22	ИПВ	БП	23	1	1	ПО	КИПО	ПС	КИПС
XY	ИПС	—	ИПВ	÷	С/П	ИПС	1	—	С/П
БП	47								

**Пример.** Для  $a = 52,3; b = 92,3$  и  $x_i = 59; 55; 53; 56; 60; 54; 59; 66; 56; 58; 59; 56; 55; 61$  и  $56$  получим  $p_i = 2; 6; 1; 4; 1; 0; 1; 0; 0; \dots$  Очистка регистров занимает  $t_c \approx 13$  с, обработка одного числа  $x_i$  занимает  $t_c \approx 6$  с и расшифровка для каждого интервала занимает  $t_c \approx 1 \div 5$  с.

## 5.16. Генерирование случайных чисел и реализация метода Монте-Карло

В основе ряда статистических расчетов лежит метод Монте-Карло. Он заключается в многократном расчете выходных параметров  $y = f(x_i, y_i, z_i, \dots)$  системы под воздействием входных параметров  $x_i, y_i, z_i, \dots$  с заданными законами распределения. В результате получается информация о работоспособности системы, разбросе ее выходных параметров, законах их распределения и т. д.

Основой реализации метода Монте-Карло является генерация случайных чисел с равномерным в интервале  $[0; 1]$  распределением [21]. Путем соответствующих преобразований можно получить иные законы распределения. У микрокалькуляторов «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52» случайные числа с равномерным распределением генерируются микропрограммно — оператор КСЧ, но качество генерации не высокое.

**Программа 5.134.** Формирование случайных чисел с равномерным распределением мультипликативным способом

$$V_{n+1} = D(kV_n), \quad (5.69)$$

где  $k = 8t \pm 3$  и  $D(kV_n)$  — дробная часть  $kV_n$  (в программе взято  $t = 5$  и  $k = 8 \cdot 5 - 3 = 37$ ). Ввод: начальное случайное число  $V_0 < < 1 = PY$ .

3	7	×	1	+	ПД	КИПД	XY	ИПД	—
С/П	БП	00							

**Пример.** Так, введя  $V_0 = 0,1234567 = PY$ , нажимая клавишу С/П, будем получать числа: 0,5678979; 0,012222; 0,452214; 0,731918 и т. д. Время генерации одного числа 4 с.

**Программа 5.135.** Формирование до 9000 неповторяющихся случайных чисел с равномерным распределением по формуле

$$V_{n+1} = D(11V_n + \pi).$$

Ввод:  $V_0 < 1 = PY$ .

1 1 × Fл + ПД КИПД ХУ ИПД —  
С/П БП 00

**Пример.** Для  $V_0 = 0,002 = PY$ , нажимая клавишу С/П, будем получать числа: 0,1633926; 0,9411112; 0,493816 и т. д. Время генерации одного числа равно 3 с.

**Программа 5.136.** Формирование до  $8,9 \cdot 10^7$  неповторяющихся случайных чисел с равномерным распределением по формулам:

$$V_{n+1} = D(V_n/z_{n+1} + \pi),$$

где  $V_0 = 0$ ,  $z_{n+1} = z_n + 1 \cdot 10^{-8}$  и  $z_0 = 0,011$ . Ввод:  $0 = PD$ ;  $0,011 = P5$ . В/0 С/П С/П ... С/П (получаем  $V_n$ ).

КИП5 ИПД ИП5 ÷ Fл + ПД КИПД ХУ ИПД  
— ПД С/П БП 00

Получаем  $x_i = 0,1415926$ ;  $0,013645$ ;  $0,3820468$ ;  $0,873107$  и т. д. (время генерации одного числа равно 4 с).

**Программа 5.137.** Формирование до  $10^8$  неповторяющихся случайных чисел с равномерным распределением по формуле

$$V_{n+1} = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos(10^8 - i)V_n + \Delta),$$

где  $\Delta$  — случайная погрешность вычисления тригонометрической функции при большом аргументе. Ввод: (переключатель Р — Г установить в положение Р):  $1 \cdot 10^8 = P0$ ;  $0 = PD$  В/0 С/П С/П ... С/П (получаем  $V_n$ ).

КИП0 ИП0 ИПД ВП × Fcos Farccos Fл ÷ ПД  
С/П БП 00

**Пример.** При работе с этой программой получаем  $V_n = 0,021741641$ ;  $0,18830284$ ;  $0,25076656$ ;  $0,47029188$  и т. д. (время генерации одного числа около 6 с).

**Программа 5.138.** Формирование случайных чисел с равномерным распределением по формуле (5.69) преобразованием их в отрезок  $[a, b]$ :

$$X_n = a + (b - a)V_n.$$

Ввод:  $a = PA$ ,  $b = PB$ ,  $V_0 = P0$ .

ИПО	3	7	×	1	+	ПД	КИПД	ХУ	ИПД
—	ПО	ИПВ	ИПА	—	×	ИПА	+	С/П	БП
00									

Пример. При  $a = 2$ ,  $b = 3$  и  $V_0 = 0,1234567$ , нажимая клавишу С/П, будем получать числа 2,5678979; 2,012222; 2,452214 и т. д.

Случайные числа с некоторыми законами распределения можно получать с помощью простых формул преобразования [6, 8]. Наиболее часто встречается необходимость в генерации случайных чисел с нормальным распределением. Пару таких чисел  $R'_n$  и  $R''_n$ , имеющих  $\sigma = 1$  и  $\bar{x} = \bar{R} = 0$ , можно получить из пары чисел  $V_{n-1}$  и  $V_n$  с помощью формул

$$\begin{aligned} R'_n &= \sqrt{2 \ln (1/V_n)} \cos (2\pi V_{n-1}), \\ R''_n &= \sqrt{2 \ln (1/V_n)} \sin (2\pi V_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.70)$$

**Программа 5.139<sup>o</sup>.** Генерация чисел с нормальным распределением

$$r_n = \bar{R} + R_n \sigma \quad (5.71)$$

с заданным  $\bar{R}$  и  $\sigma$  по формулам (5.69) — (5.71). Ввод:  $V_0 = P0$ ,  $\bar{R} = PB$ ,  $\sigma = PC$ . Переключатель P — Г в положении P.

ИПО	3	7	×	1	+	ПД	КИПД	ХУ	ИПД
—	ИПО	2	×	Fл	×	Fsin	ХУ	ПО	F1/x
Fln	2	×	F√	×	ИПС	×	ИПВ	+	С/П
БП	00								

Пример. При  $V_0 = 0,1234567$ ;  $\bar{R} = 1$  и  $\sigma = 0,1$ , нажимая клавишу С/П, будем получать следующие числа: 1,0744877; 0,8771866; 1,0096652 и т. д. Время выдачи одного числа около 11 с.

Другие программы генерации случайных чисел с нормальным и иными законами распределения можно найти в [8, 19—21]. По данным испытания системы случайными числами (входными параметрами) обычно составляются гистограммы их выходных параметров, позволяющие судить о работоспособности системы и разбросе ее параметров.

Следует отметить, что реализация метода Монте-Карло на микрокалькуляторах из-за большого числа вычислений весьма трудоемка и рациональна в том случае, если  $f(x_i, y_i, \dots)$  является функцией не более 2—3 переменных, поэтому данный метод более рационально применять при расчетах на быстродействующих микро-ЭВМ. При этом нужно особое внимание уделять проверке необходимых законов распределения случайных чисел, которые нередко заметно отличаются от принимаемых при расчете. Это может приводить к значительным погрешностям.

## 5.17. Регрессионный анализ и приближение функций эмпирическими формулами

Пусть некоторая зависимость  $y(x)$  задана  $N$  парами значений  $y_i$  и  $x_i$ , известными с определенной (достаточно малой) погрешностью. Такая парная связь может быть близкой к линейной или заведомо нелинейной. Для почти линейных зависимостей  $y_i(x_i)$  регрессионный анализ сводится к нахождению параметров  $a$  и  $b$  линейной зависимости

$$y(x) = ax + b, \quad (5.72)$$

при которых достигается минимальное среднеквадратичное отклонение  $y(x)$  от точек  $y_i(x_i)$ , т. е.

$$U = \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min.$$

Это достигается, если

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial b} &= \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)] = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial a} &= \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]x_i = 0. \end{aligned}$$

Из этих условий получаем систему линейных уравнений для определения  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} bN + a \sum_{i=1}^N x_i &= \sum_{i=1}^N y_i, \\ b \sum_{i=1}^N x_i + a \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N (y_i x_i). \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i - N \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad (5.73)$$

$$b = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i \right). \quad (5.74)$$

**Программа 5.140.** Вычисление коэффициентов  $a$  и  $b$  линейного приближения (5.72) по формулам (5.73) и (5.74), среднего

квадрата погрешности

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2 = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 - a \sum_{i=1}^N y_i - b \sum_{i=1}^N x_i y_i \right)$$

и значений  $y$  по заданным в (5.72) значениям  $x$ . Ввод (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $y_i \uparrow x_i$  С/П (после ввода каждой пары  $y_i$  и  $x_i$  индицируется ее индекс  $i$ ). После ввода  $y_N, x_N$  с индикацией  $N$  нажимаются клавиши БП 37 С/П (получаем  $a \rightarrow PX = PA, b \rightarrow PY = PB$ ) С/П (получаем  $\sigma^2$ ). После этого можно вводить  $x = PX$  и, нажимая клавишу С/П, получать значения  $y(x)$ . Если возникла необходимость ввести дополнительные значения  $y_i, x_i$ , следует нажать клавиши БП 06 и после индикации  $N$  начать ввод  $y_i$  и  $x_i$ .

Сх	П1	П2	П3	П4	П5	П6	С/П	П7	ИП1
+	П1	ХУ	П8	ИП3	+	П3	ИП7	Fx <sup>2</sup>	ИП2
+	П2	ИП8	Fx <sup>2</sup>	ИП4	+	П4	ИП7	ИП8	×
ИП5	+	П5	КИП6	ИП6	БП	07	ИП1	ИП3	×
ИП5	ИП6	×	—	ИП1	Fx <sup>2</sup>	ИП6	ИП2	×	—
÷	ПА	↑	ИП1	×	ИП3	ХУ	—	ИП6	÷
ПВ	С/П	ИП4	ИПВ	ИП3	×	—	ИПА	ИП5	×
—	ИП6	÷	С/П	ИПА	×	ИПВ	+	БП	73

Пример. Для  $y_i(x_i)$ , равных 5,5(2), 6,3(4), 7,2(6), 8(8) и 8,6(10), получим  $a = 0,395, b = 4,75, \sigma^2 = 5,4 \cdot 10^{-3}$  и  $y(4) = 6,33, y(10) = 8,7$ .

Для многих нелинейных зависимостей с двумя параметрами  $a$  и  $b$  можно свести нелинейную зависимость к линейной,

$$y' = a'x + b',$$

с помощью преобразования  $x \rightarrow x'$  и  $y \rightarrow y'$  [14]. После проведения линейной регрессии получим значения  $a'$  и  $b'$ , которые после преобразования  $a'$  в  $a$  и  $b'$  в  $b$  дают искомые параметры  $a$  и  $b$  нелинейной зависимости. Преобразования, сводящие нелинейную регрессию к линейной, даны в табл. 5.12.

Нередко нелинейная зависимость  $y_i(x_i)$  может приближаться несколькими эмпирическими формулами. Чтобы оценить, какая из них лучше, следует провести регрессионный анализ для всех подходящих нелинейных зависимостей с вычислением коэффициента парной корреляции  $r$ . Чем ближе  $r$  к 1, тем лучше данная зависимость приближает  $y_i(x_i)$  после преобразования ее в линейную.

Приведенная ниже универсальная программа обеспечивает проведение нелинейных преобразований (они задаются командами, вписываемыми на место пропусков), вычисление средних значений  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , дисперсий  $D_x$  и  $D_y$ , коэффициента корреляции  $r$  и

параметров  $a$  и  $b$ . Программа может дополняться фрагментом вычисления  $y = f(a, b, x)$  по заданному значению  $x$ .

**Программа 5.141°.** Регрессионный и корреляционный анализ парных зависимостей  $y_i(x_i)$ . Ввод и вывод см. в инструкции после программы.

Сх	П1	П2	П3	П4	П5	П6	ИП6	С/П	...
...	...	...	...	П8	×	ИП1	+	П1	ИП8
ИП3	+	П3	ИП8	$Fx^2$	ИП5	+	П5	ИП7	$Fx^2$
ИП4	+	П4	ИП7	ИП2	+	П2	КИП6	БП	07
5	ПО	КИП↑	ИП6	÷	КП↑	FL0	42	ИП2	ИП3
×	—	ИП4	ИП2	$Fx^2$	—	ПС	ИП5	ИП3	$Fx^2$
—	ПД	×	$FV^-$	÷	ПО	ИПД	ИПС	÷	$FV^-$
×	ПА	↑	ИП2	×	ИП3	ХУ	—	ПВ	...

### Инструкция.

1. Используя приведенные в табл. 5.12 преобразования, составить фрагменты программ преобразования  $x$  в  $x'$  и  $y$  в  $y'$  (первый

Таблица 5.12

Преобразования  $x, y$  в  $x', y'$  и  $a', b'$  в  $a$  и  $b$

№	Функция $y(x)$	$x'$	$y'$	$a$	$b$
1	$ax + b$	$x$	$y$	$a'$	$b'$
2	$1/(ax + b)$	$x$	$1/y$	$a'$	$b'$
3	$b + a/x$	$1/x$	$y$	$a'$	$b'$
4	$x/(ax + b)$	$x$	$x/y$	$a'$	$b'$
5	$ba^x$	$x$	$\lg y$	$10^{a'}$	$10^{b'}$
6	$be^{ax}$	$x$	$\ln y$	$a'$	$e^{b'}$
7	$b10^{ax}$	$x$	$\lg y$	$a'$	$10^{b'}$
8	$1/(ae^x + b)$	$e^{-x}$	$1/y$	$a'$	$b'$
9	$bx^a$	$\lg x$	$\lg y$	$a'$	$10^{b'}$
10	$b + a \lg x$	$\lg x$	$y$	$a'$	$b'$
11	$b + a \ln x$	$\ln x$	$y$	$a'$	$b'$
12	$b/(a + x)$	$x$	$1/y$	$b'/a'$	$1/a'$
13	$bx/(a + x)$	$1/x$	$1/y$	$b'/a'$	$1/a'$
14	$be^{a/x}$	$1/x$	$\ln x$	$a'$	$e^{b'}$
15	$b10^{a/x}$	$1/x$	$\lg x$	$a'$	$10^{b'}$
16	$b + ax^n$	$x^n$	$y$	$a'$	$b'$

фрагмент) и  $a'$  в  $a$  и  $b'$  в  $b$  (второй фрагмент). Дополнить программу этими фрагментами (в первом фрагменте неиспользованные адреса заполнить оператором КНОП, значение  $x'$  должно заноситься в регистр 7, а  $y'$  — в регистр X). Примеры см. ниже.

2. Ввести программу и перейти в режим вычислений.

3. Очистить регистры, нажав клавиши В/0 и С/П (индицируется 0).

4. Ввести  $y_i$  и  $x_i$  по схеме:  $y_i \uparrow x_i$  С/П (после ввода и обработки каждой пары  $y_i$  и  $x_i$  индицируется номер  $i$ ).

5. По завершении ввода  $y_N$  и  $x_N$  нажать клавиши БП 40 С/П. Результаты вычислений заносятся в следующие регистры:  $b = = \text{PX} = \text{PB}$ ,  $a \rightarrow \text{PA} = \text{PY}$ ,  $\bar{x} \rightarrow \text{P2}$ ,  $\bar{y} \rightarrow \text{P3}$ ,  $\sigma_x^2 = D_x \rightarrow \text{PC}$ ,  $\sigma_y^2 = D_y \rightarrow \rightarrow \text{PD}$ ,  $r \rightarrow \text{P0}$  и  $N \rightarrow \text{P6}$ .

6. Для нахождения  $y$  по заданным  $x$  набрать  $x$  и нажать клавишу С/П.

7. Для ввода новых линеаризирующих преобразований нажать клавиши БП 09 F ПРГ и ввести первый фрагмент, затем нажать клавиши F АВТ БП 79 F ПРГ и ввести второй фрагмент. После этого, нажав клавиши F АВТ, перейти к новым вычислениям по пп. 3—6.

Для иллюстрации использования универсальной программы 5.141 приведем несколько примеров.

**Линейная регрессия.** Фрагмент 1 программы задаем в виде  
П7 ХУ КНОП КНОП КНОП

а фрагмент 2 (вычисление  $y(x) = ax + b$ ) — в виде  
С/П П9 ИПА  $\times$  ИПВ + БП 79

**Пример.** Для  $y_i(x_i) = 5,5(2), 6,3(3), 7,2(6), 8(8)$  и  $8,6(10)$  получим:  $a = 0,395$ ,  $b = 4,75$ ,  $D_x = 8$ ,  $D_{x_0} = D_x N / (N - 1) = 10$ ,  $D_y = 1,2536$ ,  $D_{y_0} = D_y N / (N - 1) = 1,567$ ,  $\bar{x} = 6$ ,  $\bar{y} = 7,12$ ,  $y(4) = = 6,33$  и  $y(10) = 8,7$ . Вычисляется также значение  $r = 0,99784389$ .

**Гиперболическая регрессия.** Фрагмент 1 имеет вид  
 $1/x$  П7 ХУ КНОП КНОП ,

а фрагмент 2 (вычисление  $y(x) = a/x + b$ ):  
С/П П9 ИПА ХУ  $\div$  ИПВ + БП 79

**Пример.** Для  $y_i(x_i)$ , равных  $12,2(1), 6,8(2), 5,2(3), 4,6(4), 3,9(5), 3,7(6), 3,5(7)$  и  $3,2(8)$ , получим  $a = 10,160173$ ,  $b = 1,9357628$ ,  $r = 0,99911733$ ,  $D_x = 0,07550984$ ,  $D_y = 7,808594$  и  $y(2,5) = 5,999832$ .

**Степенная регрессия.** Фрагмент 1 имеет вид  
Flg П7 ХУ Flg КНОП

а фрагмент 2 (вычисление  $y(x) = bx^a$ ):  
 $10^x$  ПВ С/П П9 ИПА ХУ  $x^y$  ИПВ  $\times$  БП  
81

**Пример.** Для  $y_i(x_i)$ , равных  $3(1), 12(2), 27(3), 48(4), 75(5)$  и  $108(6)$ , получим  $a = 2,0000003$ ,  $b = 2,9999979$ ,  $r = 0,99999985$ ,  $D_x = 0,0690156$ ,  $D_y = 0,2760626$ ,  $y(3) = 26,999984$ .

**Экспоненциальная регрессия.** Фрагмент 1 записываем в виде

П7 ХУ Fln КНОП КНОП

а фрагмент 2 (вычисление  $y(x) = be^{ax}$ ):

Fe<sup>x</sup> ПВ С/П П9 ИПА × Fe<sup>x</sup> ИПВ × БП  
81

**Пример.** Для  $y_i(x_i)$ , равных 3,5(2), 5(3), 6,2(4), 9(5), 13(6), 16(7), 23(8), 30(9) и 40(10), получим  $a = 0,30528348$ ,  $b = 1,9394793$ ,  $r = 0,99889451$ ,  $D_x = 6,6666666$ ,  $D_y = 0,622696$  и  $y(5) = 8,9248268$ .

**Показательная регрессия.** Фрагмент 1 имеет вид

П7 ХУ Flg КНОП КНОП

а фрагмент 2 (вычисление  $y = ba^x$ ):

F10<sup>x</sup> ПВ ИПА F10<sup>x</sup> ПА ХУ С/П ИПА Fx<sup>y</sup> ИПВ  
× БП 85

**Пример.** Для  $y_i(x_i)$ , равных 6(1), 7(2), 8,7(3), 10,4(4) и 12,4(5), получим  $a = 1,2029501$ ,  $b = 4,9419901$ ,  $r = 0,99896254$ ,  $D_x = 2$ ,  $D_y = 0,01290612$  и  $y(4) = 10,348854$ .

**Логарифмическая регрессия.** Фрагмент 1 имеет вид

Flg П7 ХУ КНОП КНОП

а фрагмент 2 (вычисление  $y(x) = a \lg x + b$ ):

С/П Flg ИПА × ИПВ + БП 79

**Пример.** Для  $y_i(x_i)$ , равных 1(1), 1,451(2), 1,176(3), 1,903(4), 2,048(5) и 2,167(6), получим  $a = 1,4997944$ ,  $b = 0,9999314$ ,  $r = 0,99999951$ ,  $D_x = 0,0690156$ ,  $D_y = 0,1552427$  и  $y(5) = 2,0482427$ .

Аналогичным образом могут быть получены приближения другими эмпирическими формулами (см. табл. 5.12). Следует отметить, что сведение нелинейной регрессии к линейной вносит некоторую погрешность в вычисление параметров  $a$  и  $b$ . При необходимости значения  $a$  и  $b$  могут уточняться с помощью итерационных процедур [21].

Параметры  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  приближения параболической функции

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

определяются из решения системы трех уравнений:

$$\begin{aligned} a_0N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + a_2 \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^N x_i^3 &= \sum_{i=1}^N x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^N x_i^4 &= \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i. \end{aligned}$$

**Программа 5.142.** Вычисление коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  параболической регрессии. Ввод (после очистки регистров команды БП 90 С/П):  $y_i \uparrow x_i$  С/П. После ввода каждой пары  $y_i$ ,  $x_i$  индицируется значение  $i$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш БП 27 С/П):  $a_0 \rightarrow P0$ ,  $a_1 \rightarrow P1$  и  $a_2 \rightarrow PX = PC$ .

КНОП С/П	ПЗ	ХУ	П2	1	2	П0	КИП4	4	
П1	ИП3	ПП	14	↑	КИП0	+	КП↑	ХУ	ИП3
×	FL1	14	3	П1	ИП2	В/0	8	6	ПД
ИПА	ИП9	ИП9	ИП8	÷	П2	КППД	П1	ИП4	ИПВ
ИП2	ИПА	КППД	ПВ	$Fx^2$	ИП1	÷	—	ИПА	ИПА
ИП8	÷	ПЗ	КППД	П4	ИП6	ИП2	ИП5	КППД	П6
ИП7	ИП3	ИП5	КППД	ИП6	ИПВ	×	ИП1	÷	—
ИП4	÷	П0	ИПВ	КППД	ИП1	÷	П1	ИП5	ИП8
÷	ИП2	ИП1	КППД	ИП3	ИП0	×	—	ПС	В/0
1	2	П0	$Cx$	КП↑	FL0	94	В/0		

**Пример.** Для  $y_i(x_i)$ , равных 3,76(2), 4,44(4), 5,04(6), 5,56(8), 6(10), 6,36(12) и 6,64(14), получаем  $a_0 = 3,0000021$ ,  $a_1 = 0,39999938$  и  $a_2 = -9,9999964 \cdot 10^{-3}$ . Время очистки регистров около 14 с, обработки каждой пары  $y_i(x_i)$  — около 27 с и вычисления коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  — около 35 с.

## 5.18. Сглаживание эмпирических данных с ошибками

Нередко зависимость  $y_i(x_i)$  задается значениями  $y_i$  для равноотстоящих абсцисс  $x_i$ . Значения  $y_i$  могут содержать случайные отклонения. По ряду  $y_i$ , используя усреднение на основе интерполяционных формул, можно уточнить значения ординат, т. е. провести сглаживание зависимости  $y_i(x_i)$ . Сглаженные ординаты записываются в виде  $\tilde{y}_i$ .

**Программа 5.143.** Линейное сглаживание по трем ординатам с помощью формул

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 &= (5y_0 + 2y_1 - y_2)/6, & t = 0, \\ \tilde{y}_i &= (y_{i-1} + y_i + y_{i+1})/3, & i \geq 1, i \neq N, \\ \tilde{y}_N &= (5y_N + 2y_{N-1} + y_{N-2})/6, & i = N. \end{aligned}$$

Ввод:  $y_0 = P7$ ,  $y_1 = P8$ ,  $y_2 = P9$  и далее (после нажатия клавиши В/0 и С/П)  $y_3, y_4, \dots, y_N$  в регистр X. Вывод  $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N$  в регистр X.

ИП7	5	×	ИП8	2	×	+	ИП9	—	6
÷	С/П	ИП7	ИП8	ИП9	+	÷	3	÷	С/П
П6	ИП8	П7	ИП9	П8	ИП6	П9	БП	12	ИП9
5	×	ИП8	2	×	+	ИП7	—	6	÷
С/П									

Пример. После ввода  $y_0, y_1$  и  $y_2$  нажимаем клавиши В/0 и С/П и получаем  $\tilde{y}_1$ . Еще раз нажав клавишу С/П, получаем  $\tilde{y}_1$ . Теперь вводим  $y_3$  и нажав клавишу С/П, получаем  $\tilde{y}_2$  и т. д. После ввода последнего значения  $y_N$  и получения  $\tilde{y}_{N-1}$  нажимаем клавиши БП 29 и С/П и получаем  $\tilde{y}_N$ . Результаты сглаживания для функции  $y(x) = 10x$  при  $x = 0,1 \div 1$  даны в табл. 5.13.

Таблица 5.13

$y_i$	Сглаживание по трем ординатам	Сглаживание по пяти ординатам	Точное значение $y = 10x$
0,9	0,97	0,922	1
2,12	1,98	1,995	2
2,92	3,0633333	2,998	3
4,15	3,99	4,038	4
4,9	5,05	4,998	5
6,1	5,9733333	6,044	6
6,92	7,0566666	7,024	7
8,15	8,04	8,004	8
9,05	9	8,957	9
9,8	9,825	9,91	10

Программа 5.144. Линейное сглаживание при пяти ординатах по формулам

$$\tilde{y}_0 = (3y_0 + 2y_1 + y_2 - y_4)/5, \quad i = 0,$$

$$y_1 = (4y_0 + 3y_1 + 2y_2 + y_3)/10, \quad i = 1,$$

$$y_i = (y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2})/5, \quad i \geq 2 \text{ до } N-1,$$

$$y_{N-1} = (y_{N-3} + 2y_{N-2} + 3y_{N-1} + 4y_N)/10, \quad i = N-1,$$

$$y_N = (3y_N + 2y_{N-1} + y_{N-2} - y_{N-4})/5, \quad i = N.$$

Ввод:  $y_0 = P5, y_1 = P6, y_2 = P7, y_3 = P8, y_4 = P9, y_5, y_6, \dots, y_N$  в регистр X (см. пояснения в контрольном примере).

ИП5	3	×	ИП6	2	×	+	ИП7	+	ИП9
—	5	÷	С/П	ИП5	4	×	ИП6	3	×
+	ИП7	2	×	+	ИП8	+	1	0	÷
С/П	ИП5	ИП6	+	ИП7	+	ИП8	+	ИП9	+
5	÷	С/П	П4	ИП6	П5	ИП7	П6	ИП8	П7
ИП9	П8	ИП4	П9	БП	31	ИП9	4	×	ИП8
3	×	+	ИП7	2	×	+	ИП6	+	1
0	÷	С/П	ИП9	3	×	ИП8	2	×	+
ИП7	+	ИП5	—	5	÷	С/П			

Пример. Проведем сглаживание значений  $y_i$ , приведенных в табл. 5.13. Введя  $y_0 \div y_4$  и нажав клавиши В/0 и трижды С/П (с перерывами на время счета), получим  $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, y_2$ . Далее вводим  $y_5$

и получаем  $\tilde{y}_3$  и т. д. Аналогично получаем  $\tilde{y}_4, \tilde{y}_5, \dots, \tilde{y}_{N-2}$ . После ввода  $y_N$  нажимаем клавиши БП 56 и С/П и получаем  $\tilde{y}_{N-1}$ , затем еще раз нажимаем клавишу С/П и получаем  $\tilde{y}_N$  (числовые данные см. в табл. 5.13).

Для функций  $y_i(x_i)$ , заметно отличающихся от линейных, используется нелинейное сглаживание с помощью полиномов высоких степеней  $n$ . При  $n = 3$  необходимое число ординат составляет 7.

**Программа 5.145.** Нелинейное сглаживание при семи ординатах по формуле

$$y_i = (a_7 y_{i-3} + a_8 y_{i-2} + a_9 y_{i-1} + a_A y_i + a_B y_{i+1} + a_C y_{i+2} + a_D y_{i+3})/42,$$

где индексы у коэффициентов  $a$  соответствуют номерам регистров, из которых они берутся. Ввод:  $y_0 \div y_6 = P0 \div P6$  и далее в соответствии с табл. 5.14 и указаниями контрольного примера.

ИПО	ИП7	×	ИП1	ИП8	×	+	ИП2	ИП9	×
+	ИП3	ИПА	×	+	ИП4	ИПВ	×	+	ИП5
ИПС	×	+	ИП6	ИПД	×	+	4	2	÷
С/П	ИП1	ПО	Ф,	ИП2	П1	Ф,	ИП3	П2	Ф,
ИП4	ПЗ	Ф,	ИП5	П4	Ф,	ИП6	П5	Ф,	П6
БП	00								

**Пример.** Пусть нужно провести нелинейное сглаживание зависимости  $y_i(x_i)$ , представленной табл. 5.15. Введем  $y_0 \div y_6$  в регистры 0 ÷ 6 и  $a_i$  для  $i = 0$  согласно табл. 5.14. Нажав клавиши

Таблица 5.14

$i$	P7	P8	P9	PA	PB	PC	PD	Пуск программы	
0	39	8	-4	-4	2	4	-2	V/0	С/П
1	8	19	16	6	-4	-7	4	V/0	С/П
2	-4	16	19	12	2	-4	1	V/0	С/П
3	-4	6	12	14	12	6	-4	V/0	С/П
4	-4	6	12	14	12	6	-4		С/П
...	...	...	...	...	...	...	...		С/П
$N-2$	1	-4	2	12	19	16	-4	V/0	С/П
$N-1$	4	-7	-4	6	16	19	8	V/0	С/П
$N$	-2	4	1	-4	-4	8	3	V/0	С/П

V/0 и С/П, получим  $\tilde{y}_0 = 0,70142857$ . Далее, не меняя значений  $y_0 \div y_6$ , вводим значения  $a_i$  для  $i = 1, 2$  и 3. Получим  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  и  $\tilde{y}_3$ . После этого, не меняя значений  $a_i$ , набираем очередное значение  $y_i = y_7, y_8, \dots, y_N$ . Нажимая в конце набора только клавишу С/П, будем получать значения  $\tilde{y}_4, \tilde{y}_5, \dots, \tilde{y}_{N-3}$ . Для получения  $\tilde{y}_{N-2}$ ,

$\tilde{y}_{N-1}$  и  $\tilde{y}_N$  вводим новые  $a_i$  и при каждом пуске нажимаем клавиши В/0 и С/П. Данные сглаживания приведены в табл. 5.15.

Таблица 5.15

$i$	$y_i$	$\tilde{y}_i$ (сглаженные)	$y_i$ (точные)
0	0,7	0,70142857	0,69314717
1	1,08	1,0807142	1,0986122
2	1,39	1,385	1,3862944
3	1,64	1,6242857	1,6094379
4	1,76	1,7995238	1,7917594
5	1,99	1,9509523	1,9459101
6	2,04	2,0733333	2,0794415
7	2,22	2,1914285	2,1972245
8	2,28	2,3028571	2,3025851
9	2,42	2,412619	2,3978952

### 5.19. Приближение и аппроксимация функций по Чебышеву

Пусть имеется заданная аналитически или графически функция  $f(x)$  и требуется приближенно описать ее с помощью достаточно простого многочлена. Среди множества многочленов особое место принадлежит многочленам Чебышева  $T_i(x)$  (см. разд. 4.4). Линейная комбинация таких многочленов, или составной многочлен

$$T(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \dots + a_nT_n(x),$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — коэффициенты Чебышева, обеспечивает (по сравнению с другими многочленами) минимальное отклонение  $T(x)$  от  $f(x)$  за счет оптимального выбора узлов интерполяции в заданном промежутке изменения  $[-1; 1]$  аргумента  $x$ . Кроме того, что особенно ценно, с добавлением каждого очередного члена у такого многочлена сохраняются значения предшествующих членов.

Для вычисления коэффициентов Чебышева  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  в интервале изменений  $[-1; 1]$  аргумента  $x$  зададим степень многочлена  $n$ . Далее для  $i = 0, 1, \dots, n$  формируем сетку оптимальных значений аргумента в узлах чебышевской интерполяции [13],

$$x'_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

и вычисляем  $f(x'_i)$ . Затем для  $k = 0, 1, \dots, n$  и  $i = 0, 1, \dots, n$  находим

$$a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x'_i) \cos\left[\frac{(2i+1)k\pi}{2(n+1)}\right].$$

**Программа 5.145.** Вычисление коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  Чебышева для  $n \leq 10$  в интервале изменения  $[-1; 1]$  аргумента  $x$ . Ввод: данные  $f(x)$ ,  $n = \text{РД}$ . Переключатель Р — Г установить в положение Р. Нажав клавиши В/0 и С/П, получаем  $-1 \rightarrow \text{РХ}$ ,  $f_i \rightarrow \text{Рi}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Далее, вводя  $k = 0, 1, \dots, n$  в регистр Х и нажимая (для каждого  $k$ ) клавишу С/П, получаем  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

Сх	ПС	ПП	49	Fcos	ПП	63	КПС	ИПД	1
ИПС	+	ПС	—	Fx < 0	02	0	ПВ	ХУ	С/П
ИПД	ПС	ХУ	ПП	49	×	Fcos	КИПС	×	ИПВ
+	ПВ	ХУ	ИПС	1	—	ПС	Fx < 0	22	ХУ
2	×	ИПД	1	+	÷	↑	БП	16	ИПС
2	×	1	+	ИПД	1	+	÷	Fπ	×
2	÷	В/0	...	...	...	...	...	↑	В/0

**Пример 1.** Вычислить коэффициенты  $a_0, a_1, a_2$  и  $a_3$  Чебышева для функции

$$f(x) = \ln(1,5 + x/2).$$

Фрагмент программы вычисления  $f(x)$ , вписываемой в текст программы 5.145, имеет вид:

2 ÷ 1 , 5 + Flп

Введя  $n = 3 = \text{РД}$ , получим после пуска программы  $f_0 = 0,67393369$ ,  $f_1 = 0,52552212$ ,  $f_2 = 0,26900291$ ,  $f_3 = 0,037353779$ . Далее, задавая  $k = 0, 1, 2$  и  $3$ , находим  $a_0 = 0,752906$ ,  $a_1 = 0,34314452$ ,  $a_2 = -0,02942875$  и  $a_3 = 0,00330763$ . Время счета для каждого  $k$  около 45 с.

Если функция  $f(x)$  задается в произвольном интервале изменения  $[a, b]$  аргумента  $x$ , то значения  $x$  пересчитываются через  $x'$  на отрезке  $[-1; 1]$  по формуле

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x'_i.$$

Для этого перед фрагментом программы вычисления  $f(x)$  следует записать фрагмент этого пересчета ( $a = \text{РА}$ ,  $b = \text{РВ}$ ):

ИП9 ИПА — × ИП9 ИПА + + 2 ÷

Максимальная степень многочлена  $T(x)$  в этом случае  $n = 8$ .

**Пример 2.** Для контрольного примера 1 при задании  $x$  в интервале  $[0; 3]$ , введя  $a = 0$  и  $b = 3$ , найдем  $a_0 = 1,5638361$ ;  $a_1 = 0,3431445$ ;  $a_2 = -0,002942883$  и  $a_3 = 0,00330763$ .

Если  $f(x)$  задана графически на отрезке  $[-1; 1]$ , то вместо фрагмента вычисления  $f(x')$  ставится оператор С/П. Тогда при пусках программы получаем значения  $x'_i \rightarrow \text{РХ}$ . Для этих значений с графика  $f(x')$  необходимо снять и ввести в регистр Х соответствующее значение  $f(x')$  и нажатием клавиши С/П пустить программу. Если  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$ , надо ввести  $a$  и  $b$

( $a = PA, b = PB$ ) и перед оператором С/П записать фрагмент пересчета  $x'_i$  в  $x$ .

Вычисление значений многочлена  $T(x')$  при  $x'$  на отрезке  $[-1; 1]$  выполняется по следующему алгоритму. Считая заданными  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , полагаем вспомогательные переменные  $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$  и находим

$$b_k = a_k - b_{k+2} + 2b_{k-1}x'$$

для  $k = n, n-1, \dots, 1$ . Тогда

$$T(x) = a_c/2 - b_2 + b_1x.$$

**Программа 5.146.** Вычисление значений  $T(x')$  при  $x'$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Ввод:  $a_i = Pi$  ( $i \leq 10$ ),  $n = PD$  и  $x = PX$  (при смене  $x$  вводится новое значение  $x = PX$  и нажимается клавиша С/П).

ПВ	ИПД	ПС	0	↑	↑	F,	XY	КИПС	XY
0	+	-	XY	2	×	ИПВ	×	+	ИПС
1	-	ПС	Fx=0	06	F,	ИПВ	×	XY	-
ИПО	2	÷	+	С/П	БП	00			

**Пример.** Используя пример к программе 5.145 и введя  $n$  и  $a_0 \div a_3$ , получим:  $T(-0,5) = 0,22290274$ ,  $T(0) = 0,40588175$ ;  $T(1) = 0,6934764$ . Время счета около 20 с.

**Программа 5.147.** Вычисление  $T(x)$  при  $x$  в интервале  $[a, b]$ , пересчитываемом в  $x'$  по формуле

$$x' = \frac{(x - (b + a)/2) 2}{(b - a)}.$$

Ввод:  $a = PA, b = PB$  и (для каждого  $x$ )  $n = PX$  С/П  $x = PX$  С/П. Максимальное значение  $n = 9$ .

ПС	С/П	ИПВ	ИПА	+	2	÷	-	2	×
ИПВ	ИПА	-	÷	ИД	0	↑	↑	F,	XY
КИПС	XY	0	+	-	XY	2	×	ИПД	×
+	ИПС	1	-	ПС	Fx=0	18	F,	ИПД	×
XY	-	ИПО	2	÷	+	С/П	БП	00	

Для контрольного примера 2 к программе 5.145 находим: при  $n = 2$  и  $x = 2$   $T(x) = 0,91918864$ , при  $n = 3$  и  $x = 2$   $T(x) = 0,91637103$  и при  $n = 3$  и  $x = 1$   $T(x) = 0,69324325$ .

Иногда желательна оценка относительной погрешности

$$\delta = \frac{T(x) - f(x)}{f(x)}$$

чебышевской аппроксимации при любых значениях  $x$ . Для этого необходимо вычислять  $T(x)$  и  $f(x)$ .

**Программа 5.148.** Вычисление  $T(x)$ ,  $f(x)$  и  $\delta$  при  $x$  в интервале  $[a, b]$ . Ввод: данные  $f(x)$ ,  $(b + a)/2 = PA$ ,  $(b - a)/2 = PB$ ,  $a_i = Pi$

( $i \leq 9$ ) и далее (для каждого  $x$ )  $n = \text{РХ С/П } x = \text{РХ С/П}$ . Получаем  $T(x)$ , нажав клавишу С/П, дважды получаем  $f(x)$  и  $\delta$  (далее можно вновь вводить  $n$  и  $x$ ).

ПС	С/П	ИПА	—	ИПВ	÷	ПД	0	↑	↑
F,	XУ	КИПС	XУ	0	+	—	XУ	2	×
ИПД	×	+	ИПС	1	—	ПС	$Fx = 0$	10	F,
ИПД	×	XУ	—	ИПО	2	÷	+	ПС	С/П
ПП	51	С/П	ИПС	XУ	—	FBx	÷	С/П	БП
00	ИПД	ИПВ	×	ИПА	+	...	...	...	V/0

Для примера 2 к программе 5.145 при  $a = 0$ ,  $b = 3$  и фрагменте вычисления  $f(x)$  вида

$$2 \div 1 \quad 5 + \text{Fln} \quad \uparrow$$

получим: при  $n = 2$  и  $x = 2$   $T(x) = 0,91918864$ ,  $f(x) = 0,9162907$  и  $\delta = 3,1626862 \cdot 10^{-3}$ , при  $n = 3$  и  $x = 2$   $T(x) = 0,91637103$ ,  $f(x) = 0,9162907$  и  $\delta = 8,7668684 \cdot 10^{-5}$ .

Часто желательно преобразовать многочлен  $T(x)$  в обычный степенной многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Для этого применим следующий алгоритм. Делим  $a_0$  на 2, т. е. получаем  $a_0 = a_0/2$ . Для  $j = 2, 3, \dots, n$  и  $k = n, n-1, \dots, j$  проводим преобразования по формулам

$$a_{k-2} = a_{k-2} - a_k; \quad a_k = 2a_k.$$

Полученные в результате этого коэффициента  $a_k$  соответствуют искомым коэффициентам многочлена  $P(x)$ .

**Программа 5.149.** Преобразование коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ( $n \leq 10$ ) многочлена  $T(x)$  в соответствующие коэффициенты степенного многочлена  $P(x)$ . Ввод:  $a_0 \div a_n = \text{P0} \div \text{Pn}$ . После пуска нажатием клавиш V/0 и С/П коэффициенты  $a_0 \div a_n$  многочлена  $P(x)$  заносятся на место исходных.

ИПО	2	ПС	÷	ИО	ИПД	ПВ	КИПВ	ИПВ	2
—	ПВ	XУ	КИПВ	XУ	—	КПВ	ИПВ	2	+
ПВ	КИПВ	2	×	КПВ	ИПВ	1	—	ПВ	ИПС
—	$Fx < 0$	07	ИПД	ИПС	1	+	ПС	—	$Fx < 0$
05	С/П								

**Пример.** Используя пример 1 к программе 5.145 ( $n = 3$ ), получим после преобразования следующие коэффициенты многочлена  $P(x)$ :  $a_0 = 0,40588175$ ,  $a_1 = 0,33322163$ ,  $a_2 = 0,0588575$  и  $a_3 = 0,01323052$ .

Обратное преобразование коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  степенного многочлена  $P(x)$  в коэффициенты Чебышева выполняется следующим образом. Для  $j = n, n-1, \dots, 2$  и  $k = j, j+1, \dots, n$

выполняем преобразования

$$a_k = a_{k/2}; a_{k-2} = a_{k-2} + a_k.$$

Умножаем  $a_0$  на 2, т. е. считаем  $a_0 = 2a_0$ . Полученные значения  $a_0, a_1, \dots, a_n$  равны коэффициентам Чебышева.

**Программа 5.150.** Преобразование коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  степенного многочлена  $P(x)$  в соответствующие коэффициенты Чебышева. Ввод:  $a_0 \div a_n = P0 \div Pn$  ( $n \leq 10$ ) и  $n = PД$ . После пуска нажатием клавиш В/0 и С/П коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  Чебышева заносятся на место исходных ( $a_0 \rightarrow PX = P0$ ).

ИПД	ПС	ИПС	ПВ	КИПВ 2	÷	КПВ	ИПВ 2	
—	ПВ	ХУ	КИПВ +	КПВ	ИПД	ИПВ 3	+	
ПВ	—	Fx < 0 04	ИПС 1	—	ПС 2	—		
Fx < 0 02	ИПО 2	×	ПО	С/П				

**Пример.** Для  $n = 4, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$  и  $a_4 = 5$  получим:  $a_0 = 8,75; a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = 1$  и  $a_4 = 0,625$ .

## 5.20. Многоинтервальная (сплайн) интерполяция и аппроксимация

При обычной полиномиальной интерполяции и аппроксимации с ростом числа точек зависимости  $f(x)$  растет степень полинома и усложняется его вычисление. Кроме того, полиномы высокой степени могут давать большую погрешность интерполяции. Поэтому находит применение многоинтервальная интерполяция и аппроксимация функций с помощью полиномов невысокой степени (сплайнов).

Простейшей многоинтервальной аппроксимацией является кусочно-линейная аппроксимация. При ней  $f(x)$ , заданная узлами  $(f_i, x_i)$ , в промежутке между  $i$ -м и  $(i+1)$ -м узлами вычисляется по формуле

$$f(i) = a_{i+1}x + b_{i+1},$$

где

$$a_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad b_{i+1} = \frac{y_i x_{i+1} - y_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

**Программа 5.151.** Вычисление коэффициентов  $a_{i+1}$  и  $b_{i+1}$  кусочно-линейной аппроксимации (интерполяции) функции  $f_i(x_i)$  по мере ввода ее отсчетов. Ввод:  $f_0 = P8, x_0 = P7$  и далее  $f_i \uparrow x_i$  В/0 С/П (получаем  $a_1 \rightarrow PX = P2, b_1 \rightarrow PY = P3$ ),  $f_2 \uparrow x_2$  В/0 С/П (получаем  $a_2 \rightarrow PX = P2, b_2 \rightarrow PY = P3$ ) и т. д. Для вычисления  $f(x)$  при заданном  $x$  надо набрать  $x = PX$  и нажать клавишу С/П.

ИП7	ХУ	П7	—	ХУ	ИП8	ХУ	П8	—	ХУ
÷	П2	ИП7	×	ИП8	ХУ	—	П3	ИП2	С/П
ИП2	×	ИП3	+	БП	19				

Пример. Для  $f_i(x_i)$ , равных 0(0), 4(1), 1(3) и 5(5), получим

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ -1,5x + 5,5 & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 2x - 5 & \text{при } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

и  $f(0,5) = 2$ ,  $f(2) = 2,5$  и  $f(4) = 3$ .

При постоянном шаге

$$h = (x_{i+1} - x_i) = \text{const}$$

и заданном  $x_0$  вычисление  $f(x)$  с узлами  $f_0 = f(x_0)$ ,  $f_1 = f(x_0 + h) = f(x_1)$ ,  $f_2 = f(x_0 + 2h) = f(x_2)$  и т. д. выполняется по формулам

$$i = \text{int}((x - a)/h),$$

$$f(x) = f_i + (f_{i+1} - f_i)(x - a - ih)/h.$$

При этом  $f(x)$  является сплайном первого порядка, обеспечивающим непрерывность нулевых производных  $f(x)$ , т. е. значений  $f(x_i)$  в узлах. В отличие от полиномиальной аппроксимации даже такая простейшая сплайн-аппроксимация обеспечивает монотонное уменьшение погрешности с ростом числа узлов, причем независимо от последнего вычисления выполняются по одним и тем же простым формулам. Однако число узлов ограничено числом регистров памяти микрокалькулятора.

**Программа 5.152.** Вычисление  $f(x)$ , заданной равномерно расположенными узлами  $f_0, f_1, \dots, f_9$ . Ввод:  $f_0 \div f_9 = P0 \div P9$ ,  $x_0 = PC$ ,  $h = PD$  и  $x = PX$  (при смене  $x$  вводится новое значение  $x = PX$ ),

ПВ ИПС — ИПД ÷ 1 + ПА КИПА ИПА  
 1 — ПА ХУ КИПА — ИПВ ИПА ИПД ×  
 — ИПС — × ИПД ÷ КИПА + С/П БП  
 00

Пример. Выполнить аппроксимацию  $N$ -образной вольт-амперной характеристики туннельного диода  $f(x) = I(U)$  при задании  $x_0 = U_0 = 0$ , шаге  $h = 0,1$  В и значениях  $f_i$ , равных 0; 10; 4; 2; 1,5; 2; 5; 9 и 13. Введя эти данные, будем иметь  $f(0,05) = 5$ ,  $f(0,1) = 10$ ,  $f(0,15) = 7$ ,  $f(0,65) = 7$  и т. д. Время счета для каждого  $x$  около 9 с.

Точность многоинтервальной аппроксимации нелинейных зависимостей существенно улучшается, если применять в каждом удвоенном интервале квадратичную интерполяцию, т. е. вычислять  $f(x)$  по формулам

$$i = 1 + 2 \text{int}((x - a)/h/2),$$

$$p = (x - a - ih)/h,$$

$$f(x) = p(p - 1)f_{i-1}/2 + (1 - p^2)f_i + p(p + 1)f_{i+1}/2.$$

Последняя формула есть формула Лагранжа квадратичной интерполяции для  $i$ -го узла.

**Программа 5.153.** Многоинтервальная квадратичная интерполяция-аппроксимация функции  $f(x)$ , заданной узлами  $f_0, f_1, \dots, f_8$ . Ввод:  $f_0 \div f_8 = P0 \div P8$ ,  $x_0 = PC$ ,  $h = PD$  и далее  $x = PX$  (при смене  $x$  вводится только новое значение  $x$ ).

ПА	ИПС	—	2	÷	ИПД	÷	1	+	ПВ
КИПВ	ИПВ	1	—	2	×	1	+	ПВ	ИПД
×	ИПС	+	ИПА	ХУ	—	ИПД	÷	ПА	$Fx^2$
1	ХУ	—	КИПВ	×	ИПВ	1	—	ПВ	ХУ
ИПА	ИПА	1	—	×	2	÷	КИПВ	×	+
ИПВ	2	+	ПВ	ХУ	ИПА	ИПА	1	+	×
2	÷	КИПВ	×	+	С/П	БП	00		

**Пример.** Используя пример к программе 5.152, получим:  $f(0,1) = 10$ ,  $f(0,25) = 2,8125$ ,  $f(0,35) = 1,5625$ ,  $f(0,75) = 11$  и т. д.

При описанной выше квадратичной многоинтервальной аппроксимации также непрерывны лишь нулевые производные в узлах. Однако, поскольку парабола, проведенная через три точки  $f(x)$ , значительно лучше описывает нелинейные зависимости  $f(x)$ , чем отрезки прямых, скачки первой производной при квадратичной аппроксимации заметны гораздо слабее, чем при кусочно-линейной аппроксимации.

Применяя специальные кубические сплайны, удастся обеспечить непрерывность не только нулевой, но и первой и даже второй производных  $f(x)$  в узлах. Такой сплайн можно мысленно уподобить гибкой линейке (splain), закрепленной в узлах  $f_i = f(x_i)$ . Такая сплайн-аппроксимация наиболее естественным образом приближает нелинейные функции  $f(x)$ .

Кубический сплайн вида

$$S(x) = f_{i+1}p + f_iq + (p - p^3)\sigma_{i+1} + (q - q^3)\sigma_i,$$

где  $p = (x - x_i)/h$  и  $q = (1 - p)$ , обеспечивает приближение  $f(x)$  при равномерном расположении узлов. Коэффициенты  $\sigma_i$  и  $\sigma_{i+1}$  находятся из решения системы уравнений, удовлетворяющих следующим свойствам: в узлах  $S(x_i) = f(x_i)$ , для узлов, кроме конечных, непрерывны первые и вторые производные,  $S''(x_0)$  и  $S''(x_n)$  вычисляются по формулам численного дифференцирования, использующим по четыре крайние ординаты  $f(x)$ . Эти расчеты реализуются по двум программам [20], приведенным ниже, при задании  $f(x)$  шестью узлами.

**Программа 5.154.** Вычисление коэффициентов  $\sigma_i$  для кубического сплайна с  $f(x)$ , заданной шестью узлами. Ввод (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $y_0, y_1, \dots, y_5$  в регистр X. Вывод результатов:  $0 \rightarrow PX$ ,  $f_0 \rightarrow P1$ ,  $f_1 \rightarrow P2$ ,  $f_2 \rightarrow P3$ ,  $f_3 \rightarrow P4$ ,  $f_4 \rightarrow P5$ ,  $f_5 \rightarrow P6$ ,  $\sigma_0 \rightarrow P8$ ,  $\sigma_1 \rightarrow P9$ ,  $\sigma_2 \rightarrow PA$ ,  $\sigma_3 \rightarrow PB$ ,  $\sigma_4 \rightarrow PC$  и  $\sigma_5 \rightarrow PD$ .

П1	1	П6	П7	5	П0	С/П	КП6	FL0	06
5	П0	ПП	86	П8	4	ПП	78	—	1

ИП7	F1/x	—	÷	ПД	ИПС	+	ИП7	ПО	÷
ПС	4	↑	7	+	П7	F,	КИП7	+	4
/—/	ИПО	—	F1/x	ПО	÷	КП7	ИП7	8	—
F <sub>x=0</sub>	33	С/П	ХУ	КИПО	КИПО	2	×	—	КИПО
+	+	ИПО	9	+	ПО	F,	КПО	4	/—/
ИП7	F1/x	—	П7	÷	ИПО	4	—	ПО	8
—	F <sub>x=0</sub>	53	ХУ	КИПО	ХУ	КИПО	КИПО	КИПО	—
3	×	—	КИПО	—	6	÷	В/0		

**Программа 5.155.** Вычисление сплайна  $S(x)$  по заданному значению  $x$ . Ввод:  $x_0 = P7$  и  $x = PX$  (значение  $h$  вписывается на место пробелов в программе).

ИП7	—	...	...	...	÷	1	0	+	ПО
КИПО	ХУ	ИПО	—	1	—	ХУ	FB <sub>x</sub>	F <sub>x</sub> <sup>2</sup>	1
—	×	×	ХУ	1	—	F <sub>x</sub> <sup>2</sup>	FB <sub>x</sub>	×	FB <sub>x</sub>
—	КИПО	×	—	ИПО	5	—	ПО	F,	ХУ
КИПО	×	ХУ	—	ХУ	1	—	КИПО	×	—
С/П	БП	00							

**Пример.** Выполнить интерполяцию сплайном гамма-функции  $f(x) = \Gamma(x)$ , заданной значениями (при  $x_0 = 1$  и  $h = 0,2$ )  $f_0 = 1$ ,  $f_1 = 0,9182$ ,  $f_2 = 0,8873$ ,  $f_3 = 0,8935$ ,  $f_4 = 0,9314$  и  $f_5 = 1$ . По программе 5.154 получим  $\sigma_0 = -1,0852891 \cdot 10^{-2}$ ,  $\sigma_1 = -8,5513452 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_2 = -5,8420549 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_3 = -5,1801583 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_4 = -5,1373014 \cdot 10^{-3}$  и  $\sigma_5 = -4,9706348 \cdot 10^{-3}$ . Не выключая микрокалькулятор, вводим программу 5.155 с фрагментом 0, 2 на место многоточия. Заносим  $x_0 = 0 = P7$  и задавая различные  $x$ , будем иметь  $S(1,326) = 0,89378245$ ,  $S(1,5) = 0,88626667$ ,  $S(1,9) = 0,96190952$ . Время вычислений по программе 5.154 1,5 мин, а по программе 5.155 — около 15 с.

**ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ**

**6.1. Интегральная показательная и родственные ей функции**

**Программа 6.1.** Вычисление интегральной показательной функции с предельной погрешностью  $\epsilon$  по ее разложению в ряд:

$$Ei(x) = -VP \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \gamma + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}. \quad (6.1)$$

Ввод: постоянная Эйлера  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = \text{РД}$ ,  $x = \text{РХ}$ .

П2	1	П4	Cx	П3	П5	КП5	ИП4	ИП2	×
ИП5	÷	П4	ИП5	÷	ИП3	+	П3	FBx	—
Fx=0	06	ИП3	ИПД	+	ИП2	Fx<0	29	/—/	Fln
+	С/П	БП	00						

**Пример.** Для различных  $x$  имеем:  $E_i(0,5) = 0,454199$  при  $t_c \approx 45$  с,  $E_i(-4,5) = -2,0732 \cdot 10^{-3}$  при  $t_c \approx 2$  мин и  $E_i(100) = 2,7155481 \cdot 10^{41}$  при  $t_c \approx 12$  мин.

**Программа 6.2.** Вычисление интегральной показательной функции с погрешностью не более  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $-3 \leq x \leq 15$  по разложению в усеченный ряд:

$$Ei(x) = \gamma + \ln|x| + \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n \cdot n!} + Q_{N+1},$$

где  $N = E(2|x| + 5)$  и  $Q$  — поправка на усечение ряда [21]. Ввод: постоянная Эйлера  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = \text{РД}$ ,  $x = \text{РХ}$ .

↑	Fx<0	04	/—/	П1	2	×	6	+	П2
0	FBx	×	×	ИП2	F1/x	+	FL2	11	×
ИП1	Fln	+	ИПД	+	С/П	БП	00		

**Пример.** Для  $x = 0,5$  имеем  $E_i(x) = 0,45421986$  при  $t_c \approx 20$  с, а для  $x = -2$   $E_i(x) = -4,889654 \cdot 10^{-2}$  при  $t_c \approx 27$  с.

**Программа 6.3.** Вычисление функции  $E_1(x)$  по ее разложению в ряд:

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^n \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!} \quad (6.2)$$

Ввод:  $\gamma = 5,771566 \cdot 10^{-1} = \text{РД}$ ,  $x = \text{РХ}$ ,

П2	1	П4	Сх	П3	П5	КИП5	ИП4	ИП2	/—/
×	ИП5	÷	И4	ИИ5	÷	ИП3	+	П3	FBx
—	Fx=0	06	ИП3	/—/	ИПД	—	ИП2	Fln	—
С/П	БП	00							

Пример. Для  $x = 0,5$  получим  $E_1(x) = 0,5597736$  при  $t_c \approx \approx 50$  с, а при  $x = 5$   $E_1(x) = 1,148 \cdot 10^{-1}$  при  $t_c \approx 140$  с.

Программа 6.4. Вычисление функции

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt$$

для  $n = 0, 1, 2, 3$  и т. д. по рекуррентной формуле

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n} [e^x - xE_n(x)], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.3)$$

при  $E_0(x) = e^{-x}/x$  и  $E_1(x)$ , вычисляем по разложению в ряд (6.2). Ввод:  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = \text{РД}$ ,  $x = \text{РХ}$ . Вывод:  $n \rightarrow \text{РХ}$ ,  $E_n(x) \rightarrow \text{РУ}$ .

П2	/—/	Fex	ИП2	÷	0	П3	П5	С/П	1
П4	КИП5	ИП4	ИП2	/—/	×	ИП5	÷	П4	ИП5
÷	ИП3	+	П3	FBx	—	Fx=0	11	ИП3	/—/
ИПД	—	ИП2	Fln	—	П0	1	П4	С/П	КИП4
ИП2	/—/	Fex	ИП0	ИП2	×	—	ИП4	1	—
÷	П0	ИП4	БП	38					

Пример. Для  $x = 0,5$  будем получать:  $n = 0$ ,  $E_0(0,5) = 1,2130612$  (1,2130612),  $n = 1$ ,  $E_1(0,5) = 0,5597736$  (0,559773595),  $n = 2$ ,  $E_2(0,5) = 0,32664384$  (0,3266439), ...  $n = 10$ ,  $E_{10}(0,5) = 0,063458298$  (0,06344583) и т. д.

Программа 6.5. Вычисление  $E_n(x)$  по заданному значению  $E_m(x)$  при  $n > m$ . Ввод:  $x = \text{РХ}$ ,  $E_m(x) = \text{РХ}$  и  $m = \text{РХ}$ . Вывод:  $n \rightarrow \text{РХ}$ ,  $E_n(x) \rightarrow \text{РУ}$ .

П5	С/П	П6	П9	С/П	П4	КИП4	ИП5	/—/	Fex
ИП6	ИП5	×	—	ИП4	1	—	÷	ИП6	ИП4
С/П	БП	06							

Эту программу можно проверить по примеру, приведенному для программы 5.4.

Программа 6.6. Вычисление функции

$$\alpha_n(x) = \int_1^{\infty} t^n e^{-xt} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

по рекуррентной формуле

$$\alpha_n(x) = [e^{-x} + n\alpha_{n-1}(x)]/x$$

при  $\alpha_0(x) = (\exp(-x))/x$ . Ввод:  $x = \text{PX}$ . Вывод результатов:  $n \rightarrow \text{PX}, \alpha_n(x) \rightarrow \text{PY} = \text{P0}$ .

П9	/—/	Fe <sup>x</sup>	П8	ИП9	÷	П0	0	П4	С/П
КИП4	ИП4	ИП0	×	ИП8	+	ИП9	÷	П0	ИП4
С/П	БП	10							

Пр и м е р. Для  $x = 2$  имеем  $\alpha_0(2) = 0,067667645$ ;  $\alpha_1(2) = 0,10150147$ ;  $\alpha_2(2) = 0,16916911$ ; ...  $\alpha_6(2) = 5,5994975$  и т. д.

Программа 6.7. Вычисление функций

$$\beta_n(x) = \int_1^{-1} t^n e^{-xt} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

по рекуррентной формуле

$$\beta_n(x) = [(-1)^n e^x - e^{-x} + n\beta_{n-1}(x)]/x$$

при  $\beta_0(x) = (e^x - e^{-x})/x$ . Ввод:  $x = \text{PX}$ . Вывод результатов:  $n \rightarrow \text{PX}, \beta_n(x) \rightarrow \text{PY} = \text{P0}$ .

П9	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	—	ИП9	÷	П0	0	П4
С/П	1	П8	КИП4	ИП4	ИП0	×	ИП9	/—/	Fe <sup>x</sup>
—	ИП9	Fe <sup>x</sup>	ИП8	/—/	П8	×	+	ИП9	÷
П0	ИП4	С/П	БП	13					

Пр и м е р. Для  $x = 4$  получаем:  $\beta_0(4) = 13,644957$ ;  $\beta_1(4) = -10,242876$ ;  $\beta_2(4) = 8,5235195$ ;  $\beta_3(4) = -7,2614757$  и т. д.

Если промежуточные значения  $E_n(x)$ ,  $\alpha_n(x)$  или  $\beta_n(x)$  не нужны, можно составить программы с остановкой вычислений по заданному значению  $n$ . Примером является приведенная ниже программа.

Программа 6.8. Вычисление функций  $\alpha_n(x)$  для заданных  $x$  и  $n$ . Ввод:  $x = \text{PX}$  и (после высвечивания цифры 0)  $n = \text{PX}$ .

П9	/—/	Fe <sup>x</sup>	П8	ИП9	÷	П0	0	С/П	П7
ИП0	П6	0	П4	КИП4	ИП4	ИП6	×	ИП8	+
ИП9	÷	П6	ИП7	ИП4	←	F <sub>x=0</sub>	14	ИП6	БП
08									

Пр и м е р. Пусть надо вычислить  $\alpha_6(2)$ . Введя  $x = 2$  и  $n = 6$ , получим  $\alpha_6(2) = 5,5994975$ .

Интегральная функция

$$\text{li}(x) = VP \int_0^{\infty} \frac{dt}{\ln t} = \text{Ei}(\ln x)$$

вычисляется по программе 6.1 или 6.2 при вводе вместо  $x$  значения  $\ln x$ ,

## 6.2. Интегральный синус и косинус (включая гиперболические)

Программа 6.9. Вычисление интегрального синуса по разложению в ряд

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Ввод:  $x = \text{PX}$  ( $x \leq 10$ ).

П9	$Fx^2$	П8	ИП9	1	П6	F,	КИП6	F,	ИП6
÷	КИП6	F,	ИП6	/-/	÷	ИП8	×	↑	ИП6
÷	ИП9	+	П9	$FVx$	-	$Fx = 0$	06	ИП9	С/П
БП	00								

Пример. Имеем  $\text{Si}(0,2) = 0,19955609$  при  $t_c \approx 23$  с,  $\text{Si}(1) = 0,94608314$  при  $t_c \approx 30$  с. Для  $x \leq 4$  погрешность вычислений менее  $10^{-6}$ . С увеличением  $x$  до 10 погрешность вычислений возрастает примерно до  $10^{-5}$ , а  $t_c$  — до 2 мин.

Программа 6.10. Вычисление интегрального синуса по разложению в ряд с конечным числом членов

$$\text{Si}(x) \approx x \left[ \sum_{n=0}^N \frac{(-x^2)^n}{(2n+1)(2n+1)!} + Q \right], \quad N = \text{int}(x + 5), \quad (6.4)$$

с коррекцией усечения ряда [21]. Ввод:  $x = \text{PX}$ .

$Fx^2$	6	$FVx$	+	П2	ИП2	↑	+	÷	$FVx$
1	-	$F1/x$	-	$FVx$	/-/	×	×	FL2	05
XY	$FV^-$	÷	С/П	БП	00				

Пример. Для  $x = 0,2$   $\text{Si}(x) = 0,19955608$  при  $t_c \approx 25$  с, для  $x = 1$   $\text{Si}(x) = 0,9460831$  при  $t_c \approx 35$  с и для  $x = 10$   $\text{Si}(x) = 1,658953$  при  $t_c \approx 75$  с. При  $0 < x \leq 5$  погрешность вычислений не превышает  $1 \cdot 10^{-5}$ , а при увеличении  $x$  до 10 — возрастает до  $5 \cdot 10^{-4}$ .

Программа 6.11. Вычисление интегрального синуса при больших  $x \geq 8$  по асимптотическому разложению

$$\text{Si}(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \left( 1 - \frac{2}{x^2} \left( 1 - \frac{12}{x^2} \left( 1 - \frac{12}{x^2} \right) \right) \right) - \frac{\sin x}{x^2} \left( 1 - \frac{6}{x^2} \left( 1 - \frac{20}{x^2} \left( 1 - \frac{20}{x^2} \right) \right) \right).$$

Ввод:  $x = \text{PX}$ . Переключатель Р — Г в положении Р.

П8	$Fx^2$	$F1/2$	П9	1	2	×	↑	↑	1
-	×	1	+	2	×	ИП9	×	1	-
ИП8	$F\cos$	×	ИП8	÷	ИП9	2	0	×	↑

↑	1	—	×	1	+	6	×	ИП9	×
1	—	ИП8	Fsin	×	ИП9	×	+	Fπ	2
÷	+	С/П	БП	00					

Пример. Для  $x = 10$  получим  $\text{Si}(x) = 1,6583685$  при  $t_c \approx \approx 20$  с.

Программа 6.12. Вычисление интегрального спнуса при любых  $x$  по разложению (6.4) для  $x < 8$  и асимптотическому разложению при  $x \geq 8$ . Ввод:  $x = \text{PX}$ . Переключатель Р — Г в положении Р.

ИП8	8	—	Fx < 0	32	ИП8	Fx <sup>2</sup>	6	FBx	+
П2	ИП2	↑	+	÷	FBx	1	—	F1/x	—
FBx	/—/	×	×	FL2	11	XY	FV <sup>—</sup>	÷	С/П
БП	00	ИП8	Fx <sup>2</sup>	F1/x	П9	1	2	×	↑
↑	1	—	×	1	+	2	×	ИП9	×
1	—	ИП8	Fcos	×	ИП8	÷	ИП9	2	0
×	↑	↑	1	—	×	1	+	6	×
ИП9	×	1	—	ИП8	Fsin	×	ИП9	×	+
Fπ	2	÷	+	БП	29				

Для проверки этой программы можно использовать контрольные примеры для программ 6.10 и 6.11.

Программа 6.13. Вычисление интегрального косинуса по разложению в ряд с конечным числом членов

$$\text{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt =$$

$$= \gamma + \ln x + \left[ \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!} + Q \right], \quad Q = \text{int}(x + 5),$$

п коррекцией погрешности от его усечения [21]. Ввод:  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = \text{РД}$  и  $x = \text{PX}$ .

П9	2	÷	Fx <sup>2</sup>	ИП9	8	+	П3	ИП3	2
F1/x	+	÷	ИП3	F1/x	+	FBx	/—/	×	×
FL3	08	ИП9	Fln	+	ИПД	+	С/П	БП	00

Пример. Для  $x = 1$   $\text{Ci}(x) = 0,33740391$  при  $t_c \approx 35$  с, а для  $x = 10$   $\text{Ci}(10) = -0,04545174$  при  $t_c \approx 70$  с. Погрешность вычислений от  $10^{-8}$  при  $x \approx 1$  до  $2 \cdot 10^{-5}$  при  $x \approx 10$ .

Интегральные гиперболические синус и косинус имеют разложения в ряды:

$$\text{Sh } i(x) = \int_0^x \frac{\text{sh } t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},$$

$$\text{Ch } i(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\text{ch } t - 1}{t} dt = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n \cdot (2n)!}.$$

Эти разложения отличаются от приведенных выше для  $Si(x)$  и  $ci(x)$  только отсутствием члена  $(-1)^n$ . Поэтому программы для вычисления  $Si(x)$  и  $ci(x)$  могут использоваться для вычисления  $Shi(x)$  и  $Chi(x)$ , если из них исключить оператор  $/-/,$  заменив его оператором КНОП: в программе 6.9 по адресу 14, в 6.10 по адресу 15, в 6.13 — по адресу 17.

Функции этого параграфа могут вычисляться и по программам численного интегрирования. Однако при этом время вычислений больше, чем в рассмотренных выше методах.

### 6.3. Гамма-функции (включая неполные) и родственные им функции

Вычисление гамма-функции

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

ввиду сложности разложения в ряд целесообразно выполнять по аппроксимациям с приведением аргумента в область, где аппроксимирующие функции дают приемлемую погрешность вычислений.

**Программа 6.14.** Вычисление гамма-функции  $\Gamma(x)$  при  $-66 \leq x \leq 70$  по формуле Стирлинга [21]

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x e^{1/12x} \sqrt{2\pi x} \quad \text{для } x \geq 9$$

с рекуррентным преобразованием значений аргумента  $x < 9$  в область  $9 \leq x \leq 10$  с помощью соотношения  $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ . Ввод:  $x = PX$ .

КНОП 1	—	П1	8	—	$Fx \geq 0$	11	1	БП
27	2	XY	—	П2	КИП2	ИП2	ИП1	+
1	FBx	1	+	÷	FL2	21	ИП1	Flп
—	ИП1	×	ИП1	1	2	×	F1/x	+
ИП1	Fl	×	2	×	FV <sup>—</sup>	×	×	С/П
00								БП

**Пример.**  $\Gamma(0,5) = 1,7724601$  (1,7724538),  $\Gamma(1,2) = 0,9181726$  (0,91816874),  $\Gamma(-3,2) = 0,68905904$  (0,68905641). В скобках указаны точные значения  $\Gamma(x)$ . Относительная погрешность вычислений не превышает  $\approx 10^{-5}$ ,  $t_c \approx 12$  с при  $x \geq 9$  и  $\approx (30-2x)$  с при  $x < 9$ .

**Программа 6.15.** Вычисление гамма-функции  $\Gamma(x)$  по формулам

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi/x} e^{-x} x^x H(x), \quad \text{где } H(x) = 1 + 1/12x,$$

с 9-кратным приведением аргумента с помощью выражения

$\Gamma(x+1) = x/\Gamma(x)$ , что дает значение

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{2\pi/(x+10)} \exp((x+10)(\ln(x+10) - 1) + 1/12(x+10))}{x(x+1)(x+2)\dots(x+9)}$$

при  $-10 < x < 60$ . Ввод:  $x = PX$ .

П1	9	П0	ИП1	ИП1	1	+	×	FBx	FL0
05	1	+	П1		Fln	1	-	×	ИП1
1	2	×	F1/x	+	Fe <sup>x</sup>	XY	÷	2	Fл
×	ИП1	÷	FV <sup>-</sup>	×	С/П	БП	00		

Пример.  $\Gamma(0,5) = 1,7724568$ ,  $\Gamma(1,2) = 0,91816969$ ,  $\Gamma(-3,2) = 0,68906236$ , время счета  $t_c \approx (25-40)$  с.

Введя дополнительные корректирующие члены в экспоненциальный множитель формулы для  $\Gamma(x)$  предшествующей программы и сократив до шести число преобразований по выражению  $\Gamma(x+1) = x/\Gamma(x)$ , получим более точную формулу ( $y = x+6$ ):

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{2\pi/y} \cdot \exp((y(\ln y - 1) + 1/12y + 1/360y^3 + 1/1260y^5))}{x(x+1)(x+2)\dots(x+5)}$$

справедливую для  $-6 < x < 64$ . При  $x < 50$  формула дает не менее пяти верных цифр.

**Программа 6.16.** Вычисление гамма-функции с пятью и более верными цифрами результата для  $-6 < x < 50$ . Ввод:  $x = PX$ .

П9	П8	6	+	П7	2	F1/x	7	ИП7	Fx <sup>2</sup>
×	F1/x	-	1	5	÷	ИП7	Fx <sup>2</sup>	÷	1
XY	-	1	2	÷	ИП7	÷	ИП7	Fln	1
-	ИП7	×	+	Fe <sup>x</sup>	2	Fл	×	ИП7	÷
FV <sup>-</sup>	×	5	П0	F,	ИП9	ИП0	+	ИП8	×
П8	FL0	44	÷	С/П	БП	00			

Пример. Для различных  $x$  имеем:  $\Gamma(0,5) = 1,772453$ ,  $\Gamma(1,5) = 0,88622677$ ,  $\Gamma(-3,2) = 0,68905658$  при  $t_c \approx 30 \div 40$  с.

Для вычисления  $\Gamma(x)$  применяются различные другие аппроксимации. Так, при  $0 < x \leq 1$  с погрешностью менее  $10^{-2}$

$$\Gamma(x) \approx x^{-1} \exp(x(x-1)/2),$$

а при  $1 \leq x \leq 4$  и погрешности менее  $2,5 \cdot 10^{-4}$

$$\Gamma(x) \approx b_0 x^{a_1 + a_2 x} e^{b_1 x},$$

где  $b_0 = 2,40176$ ,  $a_1 = -0,6604$ ,  $b_1 = -0,87636$  и  $a_2 = 0,96231$ . Ввиду простоты этих формул программы для вычисления по ним не приводятся. Более высокую точность обеспечивает полиномиальная аппроксимация с большим числом членов.

**Программа 6.17.** Вычисление  $\Gamma(x+1)$  при  $x \in [0; 1]$  с погрешностью не более  $2 \cdot 10^{-7}$  по аппроксимации

$$\Gamma(x+1) = (\dots (b_8x + b_7)x + b_6)x + b_5)x + b_4)x + b_3)x + b_2)x + b_1)x \cdot 10^{-8} + 1.$$

Ввод:  $b_1 = -57719165 = P1$ ,  $b_2 = 98820589 = P2$ ,  $b_3 = -89705694 =$   
 $= P3$ ,  $b_4 = 91820688 = P4$ ,  $b_5 = -75670408 = P5$ ,  $b_6 = 48219934 =$   
 $= P6$ ,  $b_7 = -19352782 = P7$ ,  $b_8 = 3586835 = P8$  и  $x = PX$ .

ПД 8 ПО ИП8 ↑ ХУ ИПД × КИПО +  
 ИП0 Fx = 0 05 ХУ 1 ВП 8 ÷ 1 +  
 С/П БП 00

**Пример.** При  $x = 0,2$   $\Gamma(1,2) = 0,9181689$  (точное значение 0,91816874), при  $x = 0,8$   $\Gamma(1,8) = 0,9313837$  (точное значение 0,931383771). Время счета около 22 с.

Неполные гамма-функции представлены соотношениями [17]

$$P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt,$$

$$\gamma(a, x) = P(a, x) \Gamma(a) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt,$$

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt,$$

$$\gamma^*(a, x) = x^{-a} P(a, x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)} \gamma(a, x) = \frac{x}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt.$$

**Программа 6.18.** Вычисление функции  $\gamma^*(a, x)$  по ее разложению в ряд

$$\Gamma(a) \gamma^*(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^n)}{(a+n) n!}, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots$$

Ввод:  $a = PX$  и  $x = PX$ .

П8 С/П П9 1 П3 П5 0 П6 П4 КИП4  
 ИП4 ИП5 × П5 ИП8 ИП4 + × П7 ИП9  
 /—/ ИП3 × П3 ХУ + ИП6 + ИП6 ХУ  
 П6 — Fx = 0 09 ИП8 F1/x ИП6 + ПО С/П

**Примеры.** Найти  $\gamma^*(1; 4)$  и  $\gamma^*(-0,5; -3)$ . Вводим  $a = 1$  и  $x = 4$ ; получаем  $\Gamma(1) \cdot \gamma^*(1; 4) = 0,2454211$  при времени счета около 2,5 мин. Но  $\Gamma(1) = \Gamma(1+0) = 0! = 1$ , следовательно  $\gamma^*(1; 4) = 0,2454211$ . Для второго случая, введя  $a = -0,5$  и  $x = -3$ , получим  $\Gamma(-0,5) \cdot \gamma^*(-0,5; -3) = 10,495471$ .

**Программа 6.19.** Вычисление неполной гамма-функции  $\gamma(a, x)$ , по разложению в усеченный ряд

$$\gamma(a, x) = e^{-x} \frac{x^a}{a} \left[ \sum_{i=0}^N \frac{x^i}{(a+1)(a+2)\dots(a+i)} + Q_{N+1} \right],$$

$$N = \text{int}(2x + 8),$$

с коррекцией погрешности от усечения [21]. Ввод:  $x \uparrow a$  С/П.

П1	XY	↑	↑	+	9	+	П2	ИП1	ИП2
+	÷	×	1	+	FL2	08	F,	F,	Fln
ИП1	×	—	Fe <sup>x</sup>	÷	ИП1	÷	С/П	БП	00

Пример. Для  $a = 2$  и  $x = 8$  получим  $\gamma(2; 8) = 0,9969824$  при точном значении  $0,9969807$ . Время счета  $t_c \approx (30 + 5x)$  с. При  $a \geq 0,5$  погрешность вычислений не превышает  $10^{-5}$ .

Функции  $P(a, x)$ ,  $\Gamma(a, x)$  и  $\gamma^*(a, x)$  легко выражаются через описанные выше функции  $\Gamma(a)$  и  $\gamma(a, x)$  и могут вычисляться по приведенным ранее программам (либо по универсальной программе 6.19).

**Программа 6.20.** Вычисление функций  $\Gamma(a)$  по алгоритму программы 6.15,  $\gamma(a, x)$  по алгоритму программы 6.18, а также остальных неполных гамма-функций:

$$P(a, x) = \frac{\gamma(a, x)}{\Gamma(a)}, \quad \Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x)$$

$$\gamma^*(a, x) = x^{-a}P(a, x).$$

Ввод:  $a \uparrow x$  С/П. Вывод результатов:  $\Gamma(a) \rightarrow PX = PA$ ,  $\gamma(a, x) \rightarrow PX = PB$ ,  $P(a, x) \rightarrow PX = PC$ ,  $\Gamma(a, x) \rightarrow PX = PD$  и  $\gamma^*(a, x) \rightarrow PX = P9$ .

П8	XY	П1	П2	9	П0	ИП2	ИП2	1	+
×	FBx	FL0	08	1	+	П2	↑	F ln	1
—	×	ИП2	1	2	×	F1/x	+	Fe <sup>x</sup>	XY
÷	2	Fπ	×	ИП2	÷	Fγ <sup>-</sup>	×	ПА	С/П
ИП8	↑	↑	+	9	+	П2	ИП1	ИП2	+
÷	×	1	+	FL2	47	F,	F,	F	ИП1
×	—	Fe <sup>x</sup>	÷	ИП1	÷	ПВ	С/П	ИПВ	ИПА
÷	ПС	С/П	ИПА	ИПВ	—	ПД	С/П	ИП1	/—/
ИП8	Fx <sup>y</sup>	ИПС	×	П9	С/П	БП	00		

Пример.  $a = 2$  и  $x = 8$  имеем  $\Gamma(a) = 1,0000003$ ,  $\gamma(a, x) = 0,9969824$ ,  $P(a, x) = 0,9969821$ ,  $\Gamma(a, x) = 3,0179 \cdot 10^{-3}$  и  $\gamma^*(a, x) = 1,5577848 \cdot 10^{-2}$ , а при  $a = 1$  и  $x = 4$   $\Gamma(a) = 1,0000011$ ,  $\gamma(a, x) = 0,98168743$ ,  $P(a, x) = 0,98168635$ ,  $\Gamma(a, x) = 1,83137 \cdot 10^{-2}$  и  $\gamma^*(a, x) = 0,24542159$ .

**Программа 6.21.** Вычисление логарифмической производной гамма-функции (диагамма-функции)

$$\psi(x) = \frac{d \ln [\Gamma(x)]}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

по разложению ее в усеченный  $N = 9$  членами ряд [21]:

$$\psi(x) = -\gamma + (x-1) \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+x-1)} + \frac{1}{N+x/2} \right].$$

Ввод:  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = PД$  и  $x = PХ$ .

П1	1	—	9	П2	ИП1	2	÷	+	F1/x
XY	ИП2	+	ИП2	×	F1/x	+	FL2	10	×
ИПД	—	С/П	БП	00					

Пример. Для  $x = 1,5$   $\psi(x) = 0,03652359$  при точном значении  $0,03648997$  в  $t_0 \approx 25$  с. При  $x \in [1, 2]$  погрешность вычислений не превышает  $10^{-4}$ .

Более высокую точность вычисления логарифмической производной гамма-функции в расширенном интервале изменения аргумента обеспечивает метод, основанный на использовании асимптотического выражения для  $\psi(x)$

$$\psi(x) = \ln x - 1/(2x) - 1/(12x^2) + \dots$$

в рекуррентной формулы

$$\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x.$$

При этом аргумент увеличивается до значения  $20 + \text{frac}(x)$ , где  $\text{frac}(x)$  — дробная часть  $x$ , при котором погрешность вычислений по асимптотическому выражению становится меньше  $10^{-6}$ . Затем с помощью рекуррентной формулы осуществляется приведение к значению  $\psi(x)$ .

**Программа 6.22.** Вычисление логарифмической производной гамма-функции с помощью асимптотического выражения и рекуррентной формулы с погрешностью не более  $10^{-5}$ . Ввод:  $x = \text{PX}$ .

П9	2	0	—	Fx < 0	22	ИП9	П2	↑	1
+	П7	КИП7	XY	ИП7	—	2	0	+	П3
БП	27	ИП9	1	+	П2	П3	ИП3	2	×
F1/x	П0	Fx <sup>2</sup>	3	/—/	÷	ИП0	—	ИП3	Fln
+	П0	ИП3	1	—	П3	ИП0	ИП3	F1/x	—
П0	ИП2	ИП3	—	Fx ≥ 0	42	ИП0	С/П	БП	00

Пример. Для различных  $x$  имеем:  $\psi(0,5) = -1,9635099$  ( $-1,963510026$ ),  $\psi(1,5) = 0,03649014$  ( $0,03648997$ ),  $\psi(100) = 4,6001618$  ( $4,600161853$ ). В скобках указаны точные значения  $\psi(x)$ . При  $x > 20$  время вычислений  $t_0 \approx 13$  с, при  $0 < x < 5$  — около 1,5 мин.

Полигамма-функции определяются как

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{d^n \psi(x)}{dx^n} = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} (x+k)^{-n-1},$$

причем функция  $\psi'(x)$  называется тригамма-функцией;  $\psi''(x)$  — тетрагамма-функцией;  $\psi'''(x)$  — пентагамма-функцией и т. д. Эта функция определена для всех  $x$ , кроме  $x = 0, -1, -2, -3$  и т. д. Приведенный для  $\psi^{(n)}(x)$  ряд имеет очень медленную сходимость. Поэтому вычисление полигамма-функций целесообразно проводить,

используя асимптотическое выражение [17]:

$$\psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \left[ 1 - \frac{n}{2x} + \frac{n(n+1)}{12x^2} + \dots \right].$$

При  $x > 10$  погрешность вычислений при учете указанных в асимптотическом выражении членов не превышает  $1 \cdot 10^{-6}$ . Поэтому при вычислениях аргумент  $x$  приводится к области  $x > 10$  прибавлением к дробной части  $x$  числа 10. Затем выполняется преобразование с исходному значению аргумента с помощью рекуррентной формулы:

$$\psi^{(n)}(x) = \psi^{(n)}(x+1) + (-1)^{n+1} n! / (x^{n+1}).$$

Приведенная ниже программа обеспечивает вычисление любой из полигамма-функций с не менее чем шестью верными знаками результата.

**Программа 6.23.** Вычисление полигамма-функций  $\psi^{(n)}(x)$ . Ввод:  $n = P4$  и  $x = PX$ .

P9	ИП4	ПО	1	ИПО	×	FL0	04	ИП4	1
+	Fπ	×	F cos	×	П6	ИП9	1	0	—
$Fx < 0$	37	ИП9	П2	1	+	ПД	КИПД	XY	ИПД
—	1	0	+	П3	БП	42	ИП9	1	+
П2	П3	ИП4	ИП3	÷	П5	ИП4	1	+	ИП4
×	6	÷	ИП3	$Fx^2$	÷	ИП5	+	2	+
П5	ИП4	ИП3	$Fx^y$	ИП4	×	$F1/x$	ИП5	×	2
÷	П5	ИП3	1	—	П3	ИП4	1	+	ИП3
$Fx^y$	$F1/x$	ИП5	+	П5	ИП2	ИП3	—	$Fx \geq 0$	72
ИП6	ИП5	×	С/П	БП	00				

**Пример.**  $\psi'(1) = 1,6449345$  (1,64493407),  $\psi''(1) = -2,404114$  (-2,40411381),  $\psi'''(1) = 6,4939398$  (6,4939340),  $\psi'(2) = 0,64493446$  (0,64493407),  $\psi''(2) = -0,40411402$  (-0,4041138),  $\psi'''(2) = 0,4939396$  (0,49393940). В скобках указаны точные значения,  $t_c \approx 100$  с.

**Программа 6.24.** Вычисление бета-функции  $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$  с применением для вычисления гамма-функций алгоритма программы 6.14. Ввод:  $a$  В/0 С/П (получаем  $\Gamma(a) \rightarrow PX = PA$ )  $b$  С/П (получаем  $\Gamma(b) \rightarrow PB$ ,  $\Gamma(a+b) \rightarrow PC$ ,  $B(a, x) \rightarrow PX = PD$ ).

P9	ПП	24	ПА	С/П	П8	ПП	24	ПВ	ИП8
ИП9	+	ПП	24	ПС	$F1/x$	ИПА	×	ИПВ	×
ПД	С/П	БП	00	↑	1	—	П1	8	—
$Fx \geq 0$	35	1	БП	51	2	XY	—	П2	КИП2
ИП2	ИП1	+	П1	1	$FVx$	1	+	÷	FL2
45	ИП1	$Fln$	1	—	ИП1	×	ИП1	1	2
×	$F1/x$	+	$Fe^x$	ИП1	$Fπ$	×	2	×	$F\sqrt{\quad}$
×	×	В/0							

Пример. Для  $a = 1$  и  $b = 2$  получим  $\Gamma(a) = 1,0000031$ ,  $\Gamma(b) = 0,50000153$  (точное значение 0,5),  $\Gamma(a+b) = 1,0000031$ ,  $\Gamma(a+b) = 2,0000062$ . Общее время счета  $\approx 1,5$  мин.

#### 6.4. Функции Бесселя (включая модифицированные)

Функции Бесселя являются решениями дифференциального уравнения [13, 16]

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} + (z^2 - \nu^2) \omega = 0 \quad (6.6)$$

при  $z = (x + iy)$ . Ограничимся вначале вычислением функций Бесселя для действительных  $z = x$  и целых  $\nu = n$  (порядок функции). Двум независимым решениям (6.6) соответствует функции Бесселя первого  $J_n(x)$  и второго  $Y_n(x)$  рода.

Программа 6.25. Вычисление  $J_n(x)$  по разложению в ряд

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[ 1 - \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+1)(n+2)} - \dots \right]. \quad (6.7)$$

Ввод:  $n = P5, x = PX$ .

П9	0	П4	1	П6	ИП5	$Fx \neq 0$	17	П8	ИП6
×	П6	ИП8	1	—	$Fx = 0$	08	ИП9	2	÷
П0	$Fx^2$	П9	ИП5	ИП0	$Fx^y$	ИП6	÷	П7	П8
КИП4	ИП4	ИП5	+	ИП4	×	ИП9	÷	ИП7	/—/
XY	÷	П7	ИП8	+	П8	FVx	—	$Fx = 0$	30
ИП8	С/П	БП	00						

Пример. Имеем  $J_0(0,5) = 0,93846981$  ( $t_c \approx 40$  с);  $J_0(4) = -0,39714976$ ;  $J_{30}(20) = 1,2401602 \cdot 10^{-4}$  ( $t_c \approx 3$  мин).

Ряд для  $Y_n(x)$  весьма сложен [16]. Кроме того, вычисления  $J_n(x)$  и  $Y_n(x)$  по разложениям в ряд занимают много времени. Поэтому целесообразно вычисление  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $Y_0(x)$  и  $Y_1(x)$  по аппроксимациям, с последующим вычислением  $J_n(x)$  и  $Y_n(x)$  по рекуррентным формулам.

Программа 6.26. Вычисление  $J_0(x)$  и  $Y_0(x)$  по аппроксимациям:

$$J_0(x) = 1 - a_1(x/3)^2 + a_2(x/3)^4 - a_3(x/3)^6 + a_4(x/3)^8 - a_5(x/3)^{10} + a_6(x/3)^{12}$$

для  $-3 \leq x \leq 3$  с погрешностью до  $5 \cdot 10^{-8}$  и

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} J_0(x) + b_0 + b_1(x/3)^2 - b_2(x/3)^4 + b_3(x/3)^6 - b_4(x/3)^8 + b_5(x/3)^{10} - b_6(x/3)^{12}$$

для  $0 \leq x \leq 3$  с погрешностью до  $1,4 \cdot 10^{-8}$ . Ввод:  $a_1 = 2,2499997 = P1$ ,  $a_2 = 1,2656208 = P2$ ,  $a_3 = 0,3163866 = P3$ ,  $a_4 = 0,0444479 =$

$= P_4, a_5 = 0,0039444 = P_5, a_6 = 0,00021 = P_6, b_0 = 3,67466 \cdot 91 \cdot 10^{-1} = P_7, b_1 = 6,0559366 \cdot 10^{-1} = P_8, b_2 = 7,4350384 \cdot 10^{-1} = P_9,$   
 $b_3 = 2,5300117 \cdot 10^{-1} = P_0, b_4 = 0,4261214 \cdot 10^{-1} = P_A, b_5 =$   
 $= 0,0427916 \cdot 10^{-1} = P_B, b_6 = 0,0024846 \cdot 10^{-1} = P_C$  и  $x = P_X.$

↑	3	÷	$Fx^2$	ИД	1	ИПД	ИП6	×	ИП5
—	ИПД	×	ИП4	+	ИПД	×	ИП3	—	ИПД
×	ИП2	+	ИПД	×	ИП1	—	ИПД	×	+
С/П	2	×	$F\pi$	÷	ИПД	$F\sqrt{-3}$	×	×	2
÷	$F \ln$	×	ИП7	+	ИПВ	ИПС	ИПД	×	—
ИПД	×	ИПА	—	ИПД	×	ИПО	+	ИПД	×
ИП9	—	ИПД	×	ИП8	+	ИПД	×	+	С/П
БП	00								

Пример (в скобках даны точные значения результатов).  
 $J_1(0,5) = 0,9384698$  (0,9384698072);  $Y_0(0,5) = -0,44451888$   
 $(-0,4445187335)$ ;  $J_0(1) = 0,7651977$  (0,7651976865);  $Y_0(1) =$   
 $= 0,088256943$  (0,0882569642);  $J_0(2) = 0,2238908$  (0,2238907791);  
 $Y_0(2) = 0,51037568$  (0,5103756726).

Программа 6.27. Вычисление функций  $J_1(x)$  и  $Y_1(x)$  по аппроксимациям:

$$x^{-1}J_1(x) = \frac{1}{2} - a_1 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + a_2 \left(\frac{x}{3}\right)^4 - a_3 \left(\frac{x}{3}\right)^6 + \\
 + a_4 \left(\frac{x}{3}\right)^8 - a_5 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + a_6 \left(\frac{x}{3}\right)^{12}$$

для  $-3 \leq x \leq 3$  при погрешности менее  $1,3 \cdot 10^{-8}$  и

$$xY_1(x) = \frac{2}{\pi} x \ln \left(\frac{x}{2}\right) J_1(x) - b_0 + b_1 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \\
 + b_2 \left(\frac{x}{3}\right)^4 - b_3 \left(\frac{x}{3}\right)^6 + b_4 \left(\frac{x}{3}\right)^8 - b_5 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + b_6 \left(\frac{x}{3}\right)^{12}$$

для  $0 \leq x \leq 3$  с погрешностью менее  $1,1 \cdot 10^{-7}$ . Ввод:  $a_1 =$   
 $= 5,6249985 \cdot 10^{-1} = P_1, a_2 = 2,1093573 \cdot 10^{-1} = P_2, a_3 = 0,3954239 \cdot$   
 $\cdot 10^{-1} = P_3, a_4 = 0,00443319 \cdot 10^{-1} = P_4, a_5 = 0,0031761 \cdot 10^{-1} = P_5,$   
 $a_6 = 0,0001109 \cdot 10^{-1} = P_6, b_0 = 0,5366198 = P_7, b_1 = 0,2212091 =$   
 $= P_8, b_2 = 2,1682709 = P_9, b_3 = 1,3164827 = P_0, b_4 = 0,3123951 =$   
 $= P_A, b_5 = 0,0400976 = P_B, b_6 = 0,0027873 = P_C$  и  $x = P_X.$

↑	↑	↑	3	÷	$Fx^2$	ИД	ИП6	×	ИП5
—	ИПД	×	ИП4	+	ИПД	×	ИП3	—	ИПД
×	ИП2	+	ИПД	×	ИП1	—	ИПД	×	2
$F1/x$	+	×	С/П	XY	×	$FVx$	2	÷	$F \ln$
×	2	×	$F\pi$	÷	ИПС	ИПД	×	ИПВ	—
ИПД	×	ИПА	+	ИПД	×	ИПО	—	ИПД	×
ИП9	+	ИПД	×	ИП8	+	ИПД	×	+	ИП7
—	ИПД	$F\sqrt{-3}$	×	÷	С/П	БП	00		

**Пример.** Для  $x = 0,5$  и  $3$  получаем (в скобках даны точные значения)  $J_1(0,5) = 0,24226846$  (0,2422684577);  $Y_1(0,5) = -1,4714725$  (-1,4714723927);  $J_1(3) = 0,33905898$  (0,3390589585);  $Y_1(3) = 0,3246744$  (0,324674448).

**Программа 6.28.** Вычисление функций Бесселя  $J_n(x)$  или  $Y_n(x)$  по рекуррентному соотношению

$$B_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} B_n(x) - B_{n-1}(x),$$

где  $B$  — соответствующая функция. Ввод:  $x$ ,  $B_{n-1}(x)$  и  $B_n(x)$  в регистр X. Вывод:  $n \rightarrow PX$ ,  $B_n(x) \rightarrow PY$ .

И7	С/П	П8	С/П	П9	0	П4	КИП4	ИП4	2
×	ИП9	×	ИП7	÷	ИП8	—	ИП9	П8	ХУ
П9	ИП4	1	+	С/П	БП	07			

**Пример.** Введя  $x = 1$ ,  $Y_0(1) = 8,8256943 \cdot 10^{-2}$  и  $Y_1(1) = -7,8121282 \cdot 10^{-1}$ , нажимая клавиши С/П и ХУ, будем получать следующие результаты (в скобках даны точные значения):

$$\begin{aligned} n = 2; & \quad Y_2(1) = -1,6506825; \quad (-1,65068261); \\ n = 3; & \quad Y_3(1) = -5,8215172; \quad (-5,8215); \\ n = 4; & \quad Y_4(1) = -33,27842; \quad (-33,278) \end{aligned}$$

и т. д.

При  $x \geq 3$  функции  $J_0(x)$  и  $Y_0(x)$  могут вычисляться с помощью аппроксимаций

$$J_0(x) = x^{-1/2} f_0 \cos \theta_0 \quad \text{и} \quad Y_0(x) = x^{-1/2} f_0 \sin \theta_0,$$

где

$$\begin{aligned} f_0 = & \left[ a_0 + a_1 \left( \frac{3}{x} \right) + a_2 \left( \frac{3}{x} \right)^2 + a_3 \left( \frac{3}{x} \right)^3 + a_4 \left( \frac{3}{x} \right)^4 + \right. \\ & \left. + a_5 \left( \frac{3}{x} \right)^5 + a_6 \left( \frac{3}{x} \right)^6 \right] / 10^8 \end{aligned}$$

вычисляется с погрешностью менее  $1,6 \cdot 10^{-8}$  и

$$\begin{aligned} \theta_0 = x - & \left[ b_0 + b_1 \left( \frac{3}{x} \right) + b_2 \left( \frac{3}{x} \right)^2 + b_3 \left( \frac{3}{x} \right)^3 + \right. \\ & \left. + b_4 \left( \frac{3}{x} \right)^4 + b_5 \left( \frac{3}{x} \right)^5 + b_6 \left( \frac{3}{x} \right)^6 \right] / 10^8 \end{aligned}$$

вычисляется с погрешностью менее  $7 \cdot 10^{-8}$ . Значения коэффициентов  $a_0 \div a_6$  и  $b_0 \div b_6$  указаны в табл. 6.1.

Функции  $J_1(x)$  и  $Y_1(x)$  при  $x > 3$  находятся по аппроксимациям

$$J_1(x) = x^{-1/2} f_1 \cos \theta_1 \quad \text{и} \quad Y_1(x) = x^{-1/2} f_1 \sin \theta_1,$$

где

$$f_1 = \left[ a_0 + a_1 \left( \frac{3}{x} \right) + a_2 \left( \frac{3}{x} \right)^2 + a_3 \left( \frac{3}{x} \right)^3 + a_4 \left( \frac{3}{x} \right)^4 + a_5 \left( \frac{3}{x} \right)^5 + a_6 \left( \frac{3}{x} \right)^6 \right] / 10^8$$

вычисляется с погрешностью менее  $4 \cdot 10^{-8}$  и

$$\theta_1 = x - \left[ b_0 + b_1 \left( \frac{3}{x} \right) + b_2 \left( \frac{3}{x} \right)^2 + b_3 \left( \frac{3}{x} \right)^3 + b_4 \left( \frac{3}{x} \right)^4 + b_5 \left( \frac{3}{x} \right)^5 + b_6 \left( \frac{3}{x} \right)^6 \right] / 10^8$$

вычисляется с погрешностью менее  $9 \cdot 10^{-8}$ . Значения коэффициентов  $a_0 \div a_6$  и  $b_0 \div b_6$  даны в табл. 6.1.

Таблица 6.1

n	Функции Бесселя			
	$J_0(x), Y_0(x)$		$J_1(x), Y_1(x)$	
	$a_n$	$b_n$	$a_n$	$b_n$
0	79788456	-78539816	79788456	-2,3561945 · 10 <sup>8</sup>
1	-77	-4166397	156	12499612
2	-552740	-3954	1659667	5650
3	-9512	262573	17105	-637879
4	137237	-54125	-249511	74348
5	-72805	-29333	113653	79824
6	14467	13558	-20033	-29166

**Программа 6.29.** Вычисление функций Бесселя  $J_0(x)$ ,  $Y_0(x)$ ,  $J_1(x)$  и  $Y_1(x)$  по аппроксимациям (6.8) ÷ (6.11) для  $x \geq 3$ . Ввод: см. в инструкции к программе (после текста). Переключатель Р — Г в положении Р.

```

F1/x 3   ×   ПД   ИП6 ×   ИП5 +   ИПД ×
ИП4 +   ИПД ×   ИП3 +   ИПД ×   ИП2 +
ИПД ×   ИП1 +   ИПД ×   7   9   7   8
8   4   5   6   +   1   ВП  8   ÷   ИПД
3   ÷   F1/x F√ ÷   ИПС ИПД ×   ИПВ +
ИПД ×   ИПА +   ИПД ×   ИПО +   ИПД ×
ИП9 +   ИПД ×   ИП8 +   ИПД ×   ИП7 +
1   ВП  8   ÷   ИПД 3   ÷   F1/x +   ПД
Fcos ХУ ×   С/П ХУ ИПД Fsin ×   С/П БП
00
    
```

Для вычисления функций  $J_0(x)$  и  $Y_0(x)$  вводятся коэффициенты  $a_1 \div a_6 = P1 \div P6$  (значение  $a_0$  занесено в текст программы),  $b_0 \div$

$\div b_2 = P7 + P9$ ,  $b_3 = P0$ ,  $b_4 \div b_6 = PA \div PC$  (см. табл. 6.1). Затем вводится значение  $x = PX$ , нажимаются клавиши В/0 и С/П (получаем  $J_0(x)$ ) и С/П (получаем  $Y_0(x)$ ). При смене  $x = PX$  нажимается дважды только клавиша С/П. Для вычисления  $J_1(x)$  и  $Y_1(x)$  все операции повторяются заново с вводом значений коэффициентов аппроксимаций для этих функций.

**Пример** (в скобках даны точные значения функций Бесселя).  $J_0(4) = -0,3971498$  ( $-0,3971498098$ );  $Y_0(4) = -0,01694076$  ( $-0,016969407393$ );  $J_0(10) = -0,24593577$  ( $-0,245937644$ );  $Y_0(10) = 0,055671124$  ( $0,0556711673$ );  $J_1(4) = -0,066043332$  ( $-0,0660433280$ );  $Y_1(4) = 0,3979257$  ( $0,3979257106$ );  $J_1(10) = 0,043472698$  ( $0,043727462$ );  $Y_1(10) = 0,24901544$  ( $0,2490154242$ ).

Решениями дифференциального уравнения

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} - (z^2 + \nu^2) \omega = 0$$

являются модифицированные функции Бесселя  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$ . Как и прежде, ограничимся вычислением этих функций для действительных  $z = x$  и целых  $\nu = n$ .

Функции  $I_n(x)$  имеют разложение в ряд

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n \left[ 1 + \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+1)(n+2)} + \dots \right]$$

и могут вычисляться по программе 6.14, если в ней оператор смены знака /-/ по адресу 39 заменить оператором КНОП (нет операции). Тогда получим:  $I_0(2) = 2,2795892$ ;  $I_1(2) = 1,5906368$ ;  $I_0(10) = 2815,7168$ .

**Программа 6.30.** Вычисление модифицированных функций Бесселя  $I_0(x)$  и  $I_1(x)$  при  $-3,75 < x < 3,75$  по аппроксимациям

$$I_0(x) = 1 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6 + a_4 t^8 + a_5 t^{10} + a_6 t^{12}$$

с погрешностью не более  $1,6 \cdot 10^{-7}$  и

$$x^{-1} I_1(x) = 0,5 + b_1 t^2 + b_2 t^4 + b_3 t^6 + b_4 t^8 + b_5 t^{10} + b_6 t^{12}$$

с погрешностью не более  $8 \cdot 10^{-9}$ , причем  $t = x/3,75$ , а также функции  $I_n(x)$  по рекуррентному соотношению

$$I_{n+1}(x) = -2nI_n(x)/x + I_{n-1}(x), \quad n \geq 2.$$

Ввод:  $a_1 = 3,5156229 = P1$ ,  $a_2 = 3,0899424 = P2$ ,  $a_3 = 1,2067492 = P3$ ,  $a_4 = 0,2659732 = P4$ ,  $a_5 = 0,0360768 = P5$ ,  $a_6 = 0,0045813$  (вписан в программу),  $b_1 = 0,87890594 = P7$ ,  $b_2 = 0,514988869 = P8$ ,  $b_3 = 0,15084934 = P9$ ,  $b_4 = 0,02658733 = P0$ ,  $b_5 = 0,00301532 = PA$ ,  $b_6 = 0,00032411 = PB$  и  $x = PX$ . Вывод:  $n \rightarrow PX = P6$ ,  $I_n(x) \rightarrow PY$ .

ПС	3	,	7	5	÷	Fx <sup>2</sup>	ПД	0	П6
ИПД	4	5	8	1	3	ВП	7	/-/	×

ИП5 +	ИПД ×	ИП4 +	ИПД ×	ИП3 +
ИПД ×	ИП2 +	ИПД ×	ИП1 +	ИПД ×
1 +	ИПД	ИПВ ×	ИПА +	ИПД ×
÷	ИПД ×	ИП9 +	ИПД ×	ИП8 +
×	ИП7 +	ИПД ×	2 F1/x +	ИПС ×
XY ПД 0	С/П F,	F,	КИП6 F,	ИП6 С/П
XY 2	/—/ ×	ИПС ÷	XY ×	FBx XY
ИПД +	XY ПД	XY БП	76	

**Пример.** Для  $x = 2$ , нажимая клавиши С/П и XY, будем получать:  $n = 0$ ;  $I_0(2) = 2,2795853$ ;  $n = 1$ ;  $I_1(2) = 1,5906369$ ;  $n = 2$ ;  $I_2(2) = 0,6889484$  и т. д.

**Программа 6.31.** Вычисление  $I_0(x)$  или  $I_1(x)$  по аппроксимациям

$$x^{1/2}e^{-x}I_{0;1}(x) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \frac{a_4}{t^4} + \frac{a_5}{t^5} + \frac{a_6}{t^6} + \frac{a_7}{t^7} + \frac{a_8}{t^8},$$

где  $t = x/3,75$  с погрешностью не более  $1,6 \cdot 10^{-7}$  для функции  $I_0(x)$  и  $2,2 \cdot 10^{-7}$  для  $I_1(x)$ . Ввод для вычисления  $I_0(x)$ :  $a_0 = 0,39894228 = P_A$ ,  $a_1 = 0,01328592 = P_1$ ,  $a_2 = 0,00225319 = P_2$ ,  $a_3 = -0,00157565 = P_3$ ,  $a_4 = 0,00916281 = P_4$ ,  $a_5 = -0,02057706 = P_5$ ,  $a_6 = 0,02635537 = P_6$ ,  $a_7 = -0,01647633 = P_7$ ,  $a_8 = 0,00392377 = P_8$ ,  $x = P_X$ . Ввод для вычисления  $I_1(x)$  в регистры, указанные выше:  $a_0 = 0,39894228$ ;  $a_1 = -0,03988024$ ;  $a_2 = -0,00362018$ ;  $a_3 = 0,00163801$ ;  $a_4 = -0,01031555$ ;  $a_5 = 0,02282967$ ;  $a_6 = -0,02895312$ ;  $a_7 = 0,01787654$ ;  $a_8 = -0,00420059$  и  $x = P_X$ .

ПД 3	,	7	5	÷	ПС 8	ПО	ИПВ
↑	XY	ИПС ÷	КИПО +	ИПО	Fx=0 11	XY	
ИПА +	ИПД	FV <sup>—</sup> ÷	ИПД	Fe <sup>x</sup> ×	С/П	БП	
00							

**Пример.** Для  $x = 10$ :  $I_0(10) = 2815,7168$  (точное значение 2815,7166),  $I_1(10) = 2670,9884$  (точное значение 2670,9884).

**Программа 6.32.** Вычисление модифицированных функций Бесселя  $K_0(x)$  при  $0 < x \leq 2$  по аппроксимации

$$K_0(x) = -\ln\left(\frac{x}{2}\right)I_0(x) - a_0 + a_1\left(\frac{x}{2}\right)^2 + a_2\left(\frac{x}{2}\right)^4 + a_3\left(\frac{x}{2}\right)^6 + a_4\left(\frac{x}{2}\right)^8 + a_5\left(\frac{x}{2}\right)^{10} + a_6\left(\frac{x}{2}\right)^{12}$$

с погрешностью не более  $8 \cdot 10^9$ . Ввод:  $a_0 = 0,57721566 = P_A$ ,  $I_0(x) = P_B$ ,  $a_1 = 0,42278420 = P_1$ ,  $a_2 = 0,23069756 = P_2$ ,  $a_3 = 0,03488590 = P_3$ ,  $a_4 = 0,00262698 = P_4$ ,  $a_5 = 0,00010750 = P_5$ ,  $a_6 = 0,00000740 = P_6$ ,  $x = P_X$ .

ПД 2	÷	Fx <sup>2</sup>	ПС 6	ПО	ИП6 ↑	XY
ИПС ×	КИПО +	ИПО	Fx=0 09	XY	ИПА —	
ИПД 2	÷	F ln	ИПВ ×	—	С/П	БП 00

**Пример.** Для  $x = 0,5$  учитывая, что  $I_0(0,5) = 1,0634834$ , получим  $K_0(0,5) = 0,9244191$ .

**Программа 6.33.** Вычисление модифицированных функций Бесселя  $K_1(x)$  при  $0 \leq x \leq 2$  по аппроксимации

$$xK_1(x) = x \ln(x/2)I_1(x) + 1 + a_1(x/2)^2 + a_2(x/2)^4 + a_3(x/2)^6 + a_4(x/2)^8 + a_5(x/2)^{10} + a_6(x/2)^{12}$$

с погрешностью не более  $8 \cdot 10^{-9}$ . Ввод:  $a_1 = 0,15443144 = P1$ ,  $a_2 = -0,67278579 = P2$ ,  $a_3 = -0,18156897 = P3$ ,  $a_4 = -0,01919402 = P4$ ,  $a_5 = -0,00110404 = P5$ ,  $a_6 = -0,00004686 = P6$ ,  $I_1(x) = P6$  и  $x = PX$ .

ИД	2	÷	Fx <sup>2</sup>	ПС	6	ПО	ИП6	↑	XY
ИПС	×	КИПО	+	ИПО	Fx=0 09	XY	1		+
ИПД	÷	ИПД	2	÷	F ln	ИПВ	×	+	С/П
БП	00								

**Пример.** Для  $x = 0,5$  и  $I_1(0,5) = 0,2578949$  получаем  $K_1(0,5) = 1,6564404$  при точном значении  $1,656441$

**Программа 6.34.** Вычисление модифицированных функций Бесселя  $K_0(x)$  и  $K_1(x)$  для  $x \geq 2$  по аппроксимации

$$e^x x^{1/2} K_{0,1}(x) = a_0 + a_1(2/x) + a_2(2/x)^2 + a_3(2/x)^3 + a_4(2/x)^4 + a_5(2/x)^5 + a_6(2/x)^6$$

с погрешностью не более  $8 \cdot 10^{-9}$  для  $K_0(x)$  и  $2,2 \cdot 10^{-7}$  для  $K_1(x)$ . Ввод для вычисления  $K_0(x)$ :  $a_0 = 1,2533141 = PA$ ,  $a_1 = -0,07832358 = P1$ ,  $a_2 = 0,02189568 = P2$ ,  $a_3 = -0,01062446 = P3$ ,  $a_4 = 0,0058872 = P4$ ,  $a_5 = -0,00251540 = P5$ ,  $a_6 = 0,00053208 = P6$  и  $x = PX$ . Ввод для вычисления  $K_1(x)$  в указанные выше регистры:  $a_0 = -1,2533141$ ;  $a_1 = 0,23498619$ ;  $a_2 = -0,03655620$ ;  $a_3 = 0,01504268$ ;  $a_4 = -0,00780353$ ;  $a_5 = 0,00325614$ ;  $a_6 = -0,00068245$  и  $x = PX$ .

ИД	2	XY	÷	ПС	6	ПО	ИП6	↑	XY
ИПС	×	КИПО	+	ИПО	Fx=0 09	XY	ИПА		+
ИПД	Fe <sup>x</sup>	÷	ИПД	F√	÷	С/П	БП	00	

**Пример.** Для  $x = 5$  и  $10$ :  $K_0(10) = 1,7780061 \cdot 10^{-5}$ ;  $K_0(5) = 3,6910982 \cdot 10^{-3}$ ,  $K_1(10) = 1,8648772 \cdot 10^{-5}$  и  $K_1(5) = 4,0446133 \cdot 10^{-3}$ .

Функции Бесселя дробного (и целого) порядка  $J_\nu(x)$  и  $I_\nu(x)$  могут вычисляться по разложению в ряд

$$\left. \begin{matrix} I_\nu(x) \\ J_\nu(x) \end{matrix} \right\} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\pm x^2/4)^i}{i! \Gamma(\nu + i + 1)} \quad (6.12)$$

где для  $I_\nu(x)$  перед  $x^2/4$  берется  $+$ , а для  $J_\nu(x)$  — соответственно  $-$ . При этом для вычисления  $\Gamma(\nu)$  один раз (с применением для вычисления  $\Gamma(\nu + i + 1)$  рекуррентного соотношения) можно воспользоваться алгоритмом программы 6.14 (или 6.15).

**Программа 6.35.** Вычисление функций Бесселя  $I_\nu(x)$  любого порядка (кроме  $\nu = 0$ ) по разложению в ряд (6.12). Ввод:  $\nu \uparrow x$  С/П. Результат:  $J_\nu(x) \rightarrow \text{РХ}$ ,  $\Gamma(\nu) \rightarrow \text{РД}$ .

П9	XY	П8	ИП9	$Fx^2$	4	/—/	÷	П4	ИП8
↑	1	—	П1	8	—	$Fx \geq 0$	21	1	БП
37	2	XY	—	П2	КИП2	ИП2	ИП1	+	П1
1	$FVx$	1	+	÷	FL2	31	ИП1	Fln	1
—	ИП1	×	ИП1	1	2	×	$F1/x$	+	$Fex$
ИП1	$F\pi$	×	2	×	$F\sqrt{\quad}$	×	ПД	ИП8	
×	$F1/x$	П7	П6	$Cx$	П5	КИП5	ИП6	ИП4	×
ИП5	÷	ИП5	ИП8	+	÷	П6	ИП7	П3	ИП7
ИП6	+	П7	—	$Fx=0$	66	ИП8	ИП9	2	÷
$Fx^y$	ИП7	×	П7	С/П	БП	00			

**Пример.**  $J_{1/3}(1,5) = 0,63712982$ ,  $\Gamma(1/3) = 2,6789505$ ,  $J_{-1/3}(1,5) = 0,23489859$ ,  $\Gamma(-1/3) = -4,0623705$  ( $t_c \approx 1,5$  мин),  $J_{-7/8}(10) = 0,10725115$  ( $t_c \approx 3$  мин).

По этой программе вычисляются и функции  $I_\nu(x)$  (вместо оператора /—/ по адресу 06 нужно вставить оператор КНОП). Тогда будем иметь:  $I_{1/3}(1,5) = 1,5014223$ ,  $I_{-1/3}(1,5) = 1,6228015$ .

Через функции Бесселя  $J_\nu(x)$  и  $I_\nu(x)$  первого рода могут выражаться функции второго рода:

$$Y_\nu(x) \equiv N_\nu(x) = [J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)] / \sin(\nu\pi),$$

$$K_\nu(x) = \pi [(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x))] / [2 \sin(\nu\pi)].$$

Эти формулы справедливы при дробном  $\nu$ . При целом  $\nu$  значения  $Y_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$  получаются из них предельным переходом. Для приведенных выше значений  $I_{1/3}(1,5)$  и  $I_{-1/3}(1,5)$  получим по второй формуле  $K_{1/3}(1,5) = 0,22015749$ .

Через функции  $J_\nu(x)$  и  $Y_\nu(x)$  выражаются сферические функции Бесселя первого рода

$$j_\nu(x) = \sqrt{\pi/(2x)} \cdot J_{\nu+1/2}(x)$$

и второго рода

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\pi/(2x)} \cdot Y_{\nu+1/2}(x).$$

Они также могут вычисляться с помощью программы 6.35 и приведенных формул.

## 6.5. Функции Струве (включая модифицированные)

Решением дифференциального уравнения Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} + (z^2 - \nu^2) \omega = \frac{4(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(\nu+1/2)}$$

является функция

$$\omega = aJ_\nu(z) + bY_\nu(z) + H_\nu(z),$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, функции Бесселя  $J_\nu(z)$  и  $Y_\nu(z)$  определены выше (разд. 6.4), а  $H_\nu(z)$  является функцией Струве. Ограничимся вычислением  $H_\nu(x)$  при действительном аргументе  $z = x$ . Для этого можно использовать разложение  $H_\nu(x)$  в ряд:

$$H_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + 3/2)} \left[ 1 - \frac{x^2}{3(2\nu + 3)} + \frac{x^4}{3 \cdot 5(2\nu + 3)(2\nu + 5)} - \dots \right].$$

Из этого выражения видно, что в программу должен входить фрагмент, вычисляющий значения  $\Gamma(\nu + 3/2)$ . В приведенной ниже программе этот фрагмент соответствует алгоритму программы 6.15, что обеспечивает вычисления для любых (целых и дробных)  $\nu$ .

**Программа 6.36.** Вычисление функции Струве  $H_\nu(x)$  при  $-10 < \nu < 60$ . Ввод:  $\nu \uparrow x$  С/П (при первом пуске В/0 и С/П).

П9	XY	П5	1	,	5	+	П1	9	П0
ИП1	ИП1	1	+	×	FBx	FL0	12	1	+
П1	↑	Fln	1	—	×	ИП1	1	2	×
F1/x	+	Fc <sup>x</sup>	XY	÷	2	Fл	×	ИП1	÷
F√ <sup>-</sup>	×	П7	ИП9	П0	ИП9	/—/	×	П1	1
П2	П4	П6	КИП6	КИП6	ИП2	ИП1	×	ИП6	÷
2	ИП5	×	ИП6	+	÷	П2	ИП4	+	П4
FBx	—	Fx=0	53	ИП5	1	+	ИП0	2	÷
J ' 2	×	Fл	F√ <sup>-</sup>	÷	ИП7	÷	ИП4	×	
С/П	БП	00							

**Пример.**  $H_0(10) = 0,11876862$ ,  $H_{-6}(4) = -8,2488002$  ( $t_c \approx \approx 2,5$  мин). Погрешность вычислений не превышает  $\approx 10^{-4}$ .

Модифицированная функция Струве  $L_\nu(x)$  имеет разложение в ряд, подобное приведенному для  $H_\nu(x)$  без перемены знаков у членов ряда (они все положительны). Поэтому функция  $L_\nu(x)$  также вычисляется по программе 6.36, если в ней оператор смены знака /—/ по адресу 46 заменить на оператор КНОП. Тогда получим:  $L_{-6}(6) = 3,3277686$ ,  $L_{1/2}(\pi) = 4,7680525$  ( $t_c \approx 2,5$  мин, погрешность вычислений менее  $10^{-5}$ ).

Для целых и полуцелых  $\nu$  значения  $H_\nu(x)$  и  $L_\nu(x)$  можно вычислять по более простой программе 6.37 [21], реализующей разложения в усеченные ряды,

$$\left. \begin{matrix} H_\nu(x) \\ L_\nu(x) \end{matrix} \right\} = \frac{2(x/2)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 3/2)} \left[ \sum_{i=0}^N \frac{(\pm x^2)^i}{(2i + 1)} \prod_{m=0}^{i-1} \frac{1}{2\nu + 2m + 1} + Q_{N+1} \right],$$

где  $N = \text{int}(2x + 2)$  и  $Q_{N+1}$  — член, корректирующий погрешность усечения.

**Программа 6.37.** Вычисление функций Струве  $H_\nu(x)$  и  $L_\nu(x)$  для целых и полуцелых  $\nu \geq 0$ . Ввод:  $-1 = PC$  при вычислении

$H_\nu(x)$ , 1 = РС при вычислении  $L_\nu(x)$  и далее  $x \uparrow \nu$  С/П (при первом пуске В/0 и С/П).

П0	1	+	П2	2	F1/x	ПВ	+	XY	↑
↑	+	3	+	П1	F,	Fx <sup>2</sup>	4	÷	ПД
F√	F ln	ПП2	×	Fe <sup>x</sup>	2	×	XY	1	—
÷	FBx	FL2	28	2	×	F1/x	Fπ	Fln	×
Fe <sup>x</sup>	÷	1	ИПД	×	ИП1	ИПВ	+	÷	FBx
ИП0	+	÷	ИПС	×	1	+	FL1	43	×
С/П	БП	00							

Пример.  $H_{1/2}(\pi) = 0,90031635$ ,  $L_{1/2}(\pi) = 4,7680534$ ,  $H_0(10) = 0,1187226$  Время вычислений  $t_c \approx (12x + 30)$  с, абсолютная погрешность до  $2 \cdot 10^{-5}$  при  $x < 10$  и до  $2 \cdot 10^{-4}$  при  $10 < x \leq 13$ .

## 6.6. Функции Кельвина

Функции Кельвина  $ber(x)$  и  $bei(x)$  относятся к классу функций Бесселя и являются решениями дифференциального уравнения

$$x^2 \frac{d^2 \omega}{dt^2} + x \frac{d\omega}{dt} - (ix^2 + y^2) = 0,$$

т. е.  $\omega = ber_\nu(x) + i bei_\nu(x)$ . Функция  $ber_\nu(x)$  вычисляется разложением в ряд:

$$ber_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(3\nu/4 + k/2)\pi]}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k.$$

Функция  $bei_\nu(x)$  имеет аналогичное разложение, но в числителе членов суммы стоит знак  $\sin$ , а не  $\cos$ . При целых  $\nu = n$  член  $\Gamma(\nu + k + 1)$  можно вычислять как  $(n + k)!$ , что существенно упрощает вычисления.

**Программа 6.38.** Вычисление функции Кельвина  $ber_\nu(x)$  при целых  $n = \nu$ . Ввод:  $n \uparrow x$  С/П (при первом пуске В/0 и С/П). Переключатель Р — Г в положении Р.

П9	Fx <sup>2</sup>	4	÷	ПВ	XY	П8	Cx	П5	1
П7	КИП5	ИП5	ИП7	×	П7	ИП5	ИП8	—	Fx ≥ 0
11	ИП7	F1/x	П1	3	ИП8	×	4	÷	Fπ
×	Fcos	ИП1	×	П4	Cx	П5	КИП5	ИП1	ИПВ
×	ИП5	÷	ИП5	ИП8	+	÷	П1	3	ИП8
×	4	÷	ИП5	2	÷	+	Fπ	×	Fcos
Fx ≠ 0	37	ИП1	×	ИП4	+	П4	FBx	—	Fx = 0
37	ИП8	ИП9	2	÷	Fx <sup>y</sup>	ИП4	×	С/П	БП
00									

Пример.  $ber_0(2) = 0,75173418$ ,  $ber_1(2) = -0,9970777$ ,  $ber_2(1,55) = 0,059944304$ . Верны все цифры результата  $t_c \approx 1 \div 1,5$  мин.

Функция  $\text{bei}_\nu(x)$  также вычисляется по данной программе, если в ней операторы Fcos по адресам 31 и 59 заменить операторами Fsin. Контрольные примеры:  $\text{bei}_0(2) = 0,9722916$ ,  $\text{bei}_1(2) = 0,29977545$ ,  $\text{bei}_2(1,55) = -0,29580292$ .

Функции  $\text{ber}_\nu(x)$  и  $\text{bei}_\nu(x)$  могут также с высокой точностью вычисляться по аппроксимациям степенными многочленами [17]. Это относится также к функциям Кельвина 2-го рода  $\text{ker}_\nu(x)$  и  $\text{kei}_\nu(x)$ , разложения которых в ряды сложны для вычислений на микрокалькуляторах.

## 6.7. Функции Эйри

Функции Эйри есть пара независимых решений  $\text{Ai}(x)$  и  $\text{Bi}(x)$  дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} - x\omega = 0.$$

Они вычисляются по следующим разложениям в ряды:

$$\text{Ai}(x) = C_1 f(x) - C_2 g(x),$$

$$\text{Bi}(x) = \sqrt[3]{3} [C_1 f(x) + C_2 g(x)],$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} x^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} x^9 + \dots,$$

$$g(x) = x + \frac{2}{4!} x^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} x^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} x^{10} + \dots,$$

где  $C_1 = 3,5502805 \cdot 10^{-1}$  и  $C_2 = 2,588194 \cdot 10^{-1}$ . При не очень больших  $x > 0$  эти ряды быстро сходятся. Однако при  $x < 0$  знаки у членов рядов оказываются знакопеременными и при  $x < -7$  сходимость рядов резко ухудшается. При  $x > 6$  сходимость также резко ухудшается и наступает переполнение регистров памяти с остановкой по сигналу ошибки.

**Программа 6.39.** Вычисление функций Эйри  $\text{Ai}(x)$ ,  $\text{Bi}(x)$  и вспомогательных функций  $f(x)$  и  $g(x)$  с предельной точностью. Ввод:  $C_1 = PC$ ,  $C_2 = PD$ ,  $x = PX$  В/0 С/П. Вывод результатов:  $\text{Bi}(x) \rightarrow PX = PB$ ,  $\text{Ai}(x) \rightarrow PY = PA$ ,  $f(x) \rightarrow P2$ ,  $g(x)/x \rightarrow P7$ .

П9	↑	$Fx^2$	×	П4	$Cx$	П1	1	П2	П3
П6	ИП1	3	+	П1	2	—	ИП4	×	ИП3
×	П3	ИП6	ИП1	×	ИП1	1	—	×	ИП1
2	—	×	П6	÷	ИП2	+	П2	$FVx$	—
$Fx=0$	11	1	П1	П7	П3	П6	ИП1	3	+
П4	2	—	П8	ИП3	×	ИП4	×	П3	П6
ИП1	×	ИП1	1	—	×	ИП8	×	ИП6	÷
ИП7	+	П7	$FVx$	—	$Fx=0$	47	ИПС	ИП2	×
П1	ИПД	ИП7	×	ИП9	×	П3	—	ПА	ИП1
ИП3	+	3	$F\sqrt{\quad}$	×	ПВ	С/П			

**Пример.**  $Ai(-0,5) = 0,4757281$ ,  $Bi(-0,5) = 0,38035267$ ,  
 $Ai(1) = 0,13529247$ ,  $Bi(1) = 1,2074236$ ,  $f(1) = 1,1723001$ ,  $g(1) =$   
 $= 1,0853396$ . Погрешность не превышает  $\pm 1$  последнего разряда,  
 $t_0 \approx 1,5 \div 2$  мин.

При  $-6,5 \leq x \leq 4,6$  с абсолютной погрешностью менее  $1 \cdot 10^{-4}$   
вычисление функций  $f(x)$  и  $g(x)$  может выполняться с помощью  
усеченных  $N = \text{int}(x^{1,5} + 5)$  членов рядов

$$f(x) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{1 \cdot 4 \dots (3i-2)}{(3i)!} x^{3i} + Q,$$

$$g(x) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{2 \cdot 5 \dots (3i-1)}{(3i+1)!} x^{3i+1} + Q$$

с коррекцией значения  $Q$  [21].

**Программа 6.40.** Вычисление функций Эйри с помощью усеченных рядов для вспомогательных функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Ввод:  $C_2 = P6$ ,  $C_1 = P7$ ,  $x = PX$  В/0 С/П. Вывод результатов:  $Ai(x) \rightarrow$   
 $\rightarrow PX = PA$ ,  $Bi(x) \rightarrow PY = PB$ .

↑	Fx <sup>2</sup>	FVx	×	ПА	Fx <sup>2</sup>	F√	F√	5	П5
+	ПВ	1	ПП	33	×	П4	ИПВ	1	/—/
ПП	33	П2	+	3	F√	×	ПВ	ИП2	ИП4
—	ПА	С/П	П2	F,	П3	Cx	ИП3	3	×
—	FVx	ИП2	+	÷	ИПА	×	1	+	FL3
37	КИП5	×	В/0						

**Пример.**  $Ai(3) = -0,37881453$  при точном значении  
 $-0,37881429$ ,  $Bi(3) = -0,19828955$  при точном значении  
 $-0,19828963$ . Время счета в зависимости от значений  $x$  лежит в  
пределах от 1 до 2,5 мин.

## 6.8. Гипергеометрические функции

**Программа 6.41.** Вычисление гипергеометрического ряда по  
разложению [21]:

$$F(a, b, c, x) = 1 + \sum_{i=1}^N \left[ \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(a+j)(b+j)}{(1+j)(c+j)} x \right] + Q_{N+1},$$

где  $Q_{N+1}$  — погрешность усечения ряда ( $N = 22$ ). Ввод:  $a, b, c$  и  
 $x$  в регистр X.

П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П	Fπ	Fe <sup>x</sup>	П0	Flg
ИП0	1	—	П1	ИП2	+	×	ИП1	ИП3	+
×	ИП1	ИП4	+	÷	ИП0	÷	×	1	+
FL0	10	С/П							

**Пример.** Для  $a = b = c = 1$  и  $x = 0,8$  получим  $F(1; 1; 1; 0,8) = 4,978539$  при точном значении, равном 5. Погрешность вычислений  $\delta < 0,5\%$  при  $-0,1 \leq x \leq 0,8$ , и  $0 \leq (a, b) \leq c$ . Время счета  $t_c \approx 2,5$  мин.

**Программа 6.42.** Вычисление вырожденной гипергеометрической функции  $F(a, c, x)$  разложением в усеченный ряд ( $N = 22$ ),

$$F(a, c, x) = 1 + \sum_{i=1}^N \left[ \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(a+j)}{(1+j)(c+j)} x \right] + Q_{N+1},$$

с учетом погрешности усечения  $Q_{N+1}$  [21]. Ввод:  $a, c$  и  $x$  в регистр X.

П2	С/П	П3	С/П	Fl	Fe <sup>x</sup>	П0	Flg	ИП0	1
—	П1	ИП2	+	×	×	ИП1	ИП3	+	÷
ИП0	÷	1	+	FL0	08	С/П			

Для  $a = c = 1$  и  $x = 5$  получим  $F(1; 1; 5) = 148,41315$  при точном значении 148,41316. Погрешность вычислений менее  $10^{-4}$  при  $0 \leq a \leq c$  и  $-5 \leq x \leq 10$ , время счета  $t_c \approx 2$  мин.

## 6.9. Дилогарифм

**Программа 6.43.** Вычисление дилогарифма по его разложению в ряд ( $x = PX$ ):

$$f(x) = - \int_1^x \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n^2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

↑	1	П8	—	П9	0	П6	П7	КИП6	ИП9
/—/	ИП8	×	П8	ИП6	Fx <sup>2</sup>	÷	ИП7	+	ИП7
XУ	П7	—	Fx=0	08	ИП7	С/П	БП	00	

**Пример** (в скобках указаны точные значения результатов).  $f(0,1) = 1,2997151$  (1,299714723),  $f(0,5) = 0,58224055$  (0,582240526). Время вычисления составляет 6,5 и 2,5 мин.

При точности меньшей предельной и малых  $x$  время вычисления дилогарифма можно существенно уменьшить, используя для этого программы численного интегрирования.

## 6.10. Интегралы Френеля

**Программа 6.44.** Вычисление интеграла Френеля  $C(x)$  по разложению в ряд при  $x < 3$  ( $x = PX$ ):

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n}}{(2n)! (4n+1)} x^{4n+1}.$$

П9	П8	Fx <sup>2</sup>	Fл	×	Fx <sup>2</sup>	4	÷	П7	Cx
П4	КИП4	ИП4	4	×	3	—	↑	↑	4
+	÷	ИП4	2	×	↑	↑	1	—	×
÷	ИП7	×	ИП8	/—/	×	П8	ИП9	+	П9
FBx	—	Fx = 0	11	ИП9	С/П	БП	00		

Пример.  $C(0,5) = 0,49234422$ ;  $C(1) = 0,77989341$  и  $C(2) = 0,48825334$  (время вычисления от 50 до 160 с).

Программа 6.45. Вычисление интеграла Френеля  $S(x)$  по разложению в ряд при  $x < 3$  ( $x = PX$ ):

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+3)} x^{4n+3}.$$

П8	Fx <sup>2</sup>	Fл	×	2	÷	Fx <sup>2</sup>	П5	FBx	ИП8
×	3	÷	П7	П8	Cx	П4	КИП4	ИП4	4
×	1	—	↑	↑	4	+	÷	ИП4	2
×	↑	↑	1	+	×	÷	ИП5	×	ИП7
/—/	×	П7	ИП8	+	П8	FBx	—	Fx = 0	17
ИП8	С/П	БП	00						

Пример.  $S(0,5) = 0,064732433$ ;  $S(1) = 0,43825912$  и  $S(2) = 0,34341539$  (время вычисления от 50 до 165 с).

С интегралами Френеля связаны вспомогательные функции

$$f(x) = \left[ \frac{1}{2} - S(x) \right] \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) - \left[ \frac{1}{2} - C(x) \right] \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right),$$

$$g(x) = \left[ \frac{1}{2} - C(x) \right] \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \left[ \frac{1}{2} - S(x) \right] \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right).$$

Программа 6.46. Вычисление  $f(x)$  и  $g(x)$  по аппроксимациям

$$f(x) = \frac{1 + a_0 x}{2 + a_1 x + a_2 x^2}$$

и

$$g(x) = \frac{1}{2 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

с погрешностью менее  $2 \cdot 10^{-3}$  ( $0 \leq x \leq \infty$ ), а также

$$S(x) = \frac{1}{2} - f(x) \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) - g(x) \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right),$$

$$C(x) = \frac{1}{2} + f(x) \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) - g(x) \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right).$$

Ввод:  $a_0 = 0,926 = P1$ ,  $a_1 = 1,792 = P2$ ,  $a_2 = 3,104 = P3$ ,  $b_1 = 4,142 = P4$ ,  $b_2 = 3,492 = P5$ ,  $b_3 = 6,67 = P6$  и  $x = PX$ . Вывод

результатов:  $f(x) \rightarrow \text{РА}$ ,  $g(x) \rightarrow \text{РВ}$ ,  $C(x) \rightarrow \text{РС}$  и  $S(x) \rightarrow \text{РХ} = \text{РД}$ .  
 Переключатель Р — Г в положении Р.

П9	ИП1	×	1	+	ИП9	ИП3	×	ИП2	+
ИП9	×	2	+	÷	ПА	ИП9	ИП6	×	ИП5
+	ИП9	×	ИП4	+	ИП9	×	2	+	F1/x
ПВ	ИП9	Fx <sup>2</sup>	Fл	×	2	÷	П8	Fsin	ПД
ИПА	×	ИП8	Fcos	П8	ИПВ	×	—	2	F1/x
+	ПС	FВx	ИПА	ИП8	×	—	ИПВ	ИПД	×
—	ПД	С/П	БП	00					

Пример. Имеем:  $S(0,5) = 0,06567349$  и  $C(0,5) = 0,49256592$   
 (время счета 23 с).

Программа 6.47. Вычисление  $C(x)$  и  $S(x)$  при больших  $x \gg 1$  по асимптотическим разложениям

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(\pi x^2/2)}{\pi x} \left(1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}\right) - \frac{\cos(\pi x^2/2)}{\pi^2 x^3} \left(1 - \frac{5}{(\pi x^2)^2}\right),$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(\pi x^2/2)}{\pi x} \left(1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}\right) - \frac{\sin(\pi x^2/2)}{\pi^2 x^3} \left(1 - \frac{5}{(\pi x^2)^2}\right)$$

с погрешностью менее  $5/\pi^4 x^7$  (при  $x \geq 4$  верны не менее пяти знаков результата). Ввод:  $x = \text{РХ}$ . Вывод результатов:  $C(x) \rightarrow \text{РХ}$ ,  $S(x) \rightarrow \text{РХ}$ . Переключатель Р — Г в положении Р.

↑	Fл	×	П8	×	П9	Fx <sup>2</sup>	П4	FВx	2
÷	Fsin	FВx	Fcos	П7	ХУ	П6	3	ПП	38
ХУ	5	ПП	38	ИП9	÷	2	F1/x	+	ХУ
—	С/П	ИП7	/—/	ИП6	/—/	БП	14	ИП4	÷
1	—	×	ИП8	÷	В/0				

Пример. Для  $x = 4$  имеем  $C(4) = 0,49841993$  и  $S(4) = 0,42051702$  при  $t_c \approx 28$  с.

## 6.11. Эллиптические интегралы

Программа 6.48. Вычисление полного эллиптического интеграла первого рода по его разложению в ряд:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m^2 + \dots \right].$$

Ввод:  $m = \text{РХ}$ . Переключатель Р — Г в положении Р.

П9	0	П5	1	П4	П6	П8	КИП5	КИП5	ИП4
ИП5	÷	Fx <sup>2</sup>	ИП9	×	ИП6	×	П6	КИП4	КИП4
ИП6	ИП8	+	П8	FВx	—	Fx=0	07	ИП8	Fл
×	2	÷	С/П	БП	00				

Пример (в скобках даны точные значения результатов).  $K(0,1) = 1,6124415$  (1,61244135),  $K(0,2) = 1,6596237$  (1,659623599),  $K(0,5) = 1,8540744$  (1,85407468). Время вычисления одного значения  $K(m)$  в этих примерах от 1 до 2,5 мин.

**Программа 6.49.** Вычисление полного эллиптического интеграла второго рода по его разложению в ряд:

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right) \frac{m^3}{5} - \dots \right].$$

Ввод:  $m=PX$ . Переключатель Р—Г в положении Р.

П9	0	П5	П8	1	П4	П6	КИП5	КИП5	ИП4
ИП5	÷	$Fx^2$	ИП9	×	ИП6	×	П6	ИП4	÷
П7	КИП4	КИП4	ИП7	ИП8	+	П8	$FVx$	—	$Fx=0$
07	1	ИП8	—	$F\pi$	×	2	÷	С/П	БП
00									

Пример (в скобках даны точные значения результатов).  $E(0,1) = 1,5307576$  (1,530757637),  $E(0,2) = 1,4890351$  (1,489035058),  $E(0,5) = 1,3506438$  (1,35064388). Время вычисления от 1 до 2,5 мин. Эллиптические интегралы общего вида (неполные)

$$F(\varphi/\alpha) = F(\varphi | m) = \int_0^{\varphi} (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta$$

и

$$E(\varphi | m) = \int_0^{\varphi} (1 - m \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta$$

могут вычисляться по программам численного интегрирования. Так, для вычисления  $F(\varphi | m)$  можно воспользоваться программой 5.74 интегрирования методом Гаусса, вписав в нее фрагмент вычисления функции ( $m = P9$ ):

$F\sin Fx^2$  ИП9  $\times$  1 XY —  $F\sqrt{\quad}$  F1/x

При  $m = 0,5 = P9$ ,  $\varphi = \pi/2 = b$  и  $a = 0$ , деля отрезок интегрирования на 8 частей, получим  $F(\pi/2 | 0,5) = 1,8540742$  при времени счета  $\approx 5$  мин. Для вычисления  $E(\varphi | m)$  достаточно убрать оператор F1/x в конце приведенного фрагмента.

## 6.12. Вычисление некоторых специальных функций с помощью численного интегрирования

Многие специальные функции могут вычисляться с помощью численного интегрирования. Однако нередко они представимы собственными интегралами, имеющими бесконечный один из пределов или особенности подынтегральной функции. Для вычисления численным интегрированием наиболее подходящими являются

ся специальные функции с конечными пределами интегрирования. Ниже даны определения ряда таких функций в интегральной форме (дополнительно к представлениям, уже рассмотренным выше).

1. Функция Лобачевского

$$L(x) = - \int_0^x \ln \cos(t) dt.$$

2. Интегралы Фрепеля

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt.$$

3. Интеграл вероятности

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

4. Функция Дебая

$$D_n(x) = \int_0^x \frac{nt^n}{x^n(e^t - 1)} dt.$$

5. Интеграл Зиверта

$$\operatorname{Zio}(\theta) = \int_0^\theta e^{-z/\cos x} dx.$$

6. Неполная гамма-функция

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt.$$

7. Функция Ангера

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta.$$

8. Функция Вебера

$$E_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta.$$

9. Интеграл Клаузена

$$f(\theta) = - \int_0^\theta \ln \left( 2 \sin \frac{t}{2} \right) dt.$$

Эти (и другие) интегральные функции удобно вычислять, используя метод Гаусса для численного интегрирования, поскольку при нем не вычисляются значения подынтегральной функции на пределах. Поэтому вычисления сводятся к составлению простых подпрограмм для подынтегральных функций. Ниже дан пример для вычисления функций Дробяка при  $n = 4$  (аналогичным образом нетрудно провести вычисления других специальных функций).

Для вычисления функции  $D_4(x)$  воспользуемся программой 5.74, вписав в нее фрагмент вычисления функции  $4t^4/(x^4(e^t - 1))$ :

```

P8  Fx^2  Fx^2  ИП8  Fe^x  1  —  ÷  4  ×
ИП9  Fx^2  Fx^2  ÷

```

Выполнив ввод ( $m = \text{PX}$ ,  $x = b = \text{P9}$  и  $a = 0$ ), для  $m = 2$  и  $x = 1$  получим  $D_4(1) = 0,6548742$  при точном значении  $0,654874$ , а для  $m = 4$  и  $x = 10$  —  $D_4(10) = 0,00967427$  при точном значении  $0,009674$ .

### 6.13. Интеграл вероятности и связанные с ним функции

К важнейшим функциям теории вероятности относятся плотность гауссовского стандартного распределения

$$\psi(x) = P(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi} \quad (6.13)$$

и функция распределения (интеграл вероятности)

$$\text{erf}(x) = \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (6.14)$$

Площадь между кривой  $\psi(x)$  и осью абсцисс слева от ординаты с абсциссой  $x$ :

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (6.15)$$

Полагая  $t\sqrt{2} = u$  и  $y = x/\sqrt{2}$ , получим

$$\Phi(y) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du. \quad (6.16)$$

Эта функция связана с  $\Pi(x)$  простым соотношением

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 2\Pi(x). \quad (6.17)$$

**Программа 6.50.** Вычисление функции  $\Phi(y)$  по ее разложению в ряд:

$$\Phi(y) = y\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{(y/2)^2}{1!3} + \frac{(y/2)^4}{2!5} - \frac{(y/2)^6}{3!7} + \dots\right). \quad (6.18)$$

Ввод:  $x = \text{PX}$ .

П9	Fx <sup>2</sup>	2	/—/	÷	П6	2	Fл	÷	F√ <sup>—</sup>
ИП9	×	П7	П8	Cx	П4	КИП4	1	ИП4	2
×	+	FVx	1	—	ИП6	×	ИП4	÷	XУ
÷	ИП7	×	П7	ИП8	+	П8	FVx	—	Fx=0
16	ИП8	С/П	БП	00					

**Примеры.**  $\Phi(0,1) = 0,079655675$  вычисляется за 28 с,  $\Phi(1) = 0,6826895$  вычисляется за 70 с и  $\Phi(4) = 0,99993495$  вычисляется за 5 мин.

**Программа 6.51.** Вычисление  $\Phi(y)$  при  $y > 4$  по асимптотическому разложению ( $y = PX$ ):

$$\Phi(y) = 1 - \frac{e^{-y^2/2}}{y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{y^2} + \frac{1 \cdot 3}{y^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{y^6} \right). \quad (6.19)$$

П9	Fx <sup>2</sup>	П8	2	/—/	÷	Fex	2	Fл	÷
F√ <sup>—</sup>	×	ИП9	÷	3	ИП8	÷	1	XУ	—
ИП8	÷	1	—	×	1	+	С/П	БП	00

**Пример.**  $\Phi(4) = 0,9999365$  вычисляется за 10 с.

**Программа 6.52.** Вычисление  $\Phi(y)$  при любых  $y$ : по разложению (6.18) для  $y < 4$  и (6.19) при  $y \geq 4$ . Ввод:  $y = PX$  В/0 С/П.

П9	4	—	Fx<0	48	ИП9	Fx <sup>2</sup>	2	/—/	÷
П6	2	Fл	÷	F√ <sup>—</sup>	ИП9	×	П7	П8	Cx
П4	КИП4	1	ИП4	2	×	+	FVx	1	—
ИП6	×	ИП4	÷	XУ	÷	ИП7	×	П7	ИП8
+	П8	FVx	—	Fx=0	24	БП	76	ИП9	Fx <sup>2</sup>
П8	2	/—/	÷	Fex	2	Fл	÷	F√ <sup>—</sup>	×
ИП9	÷	3	ИП8	÷	1	XУ	—	ИП8	÷
1	—	×	1	+	П8	ИП8	С/П	БП	00

**Пример.** При  $y = 0,1$  получим  $\Phi(0,1) = 0,079655675$ , а при  $y = 4 - \Phi(4) = 0,9999365$ .

Функцию  $\Pi(x)$  можно вычислить по соотношению (6.17). Для этого в конце вычислений нажимаем клавиши  $\uparrow 1 + 2 \div$ . Так, для  $x = 0,1$  имеем  $\Pi(0,1) = 0,53982785$ .

Если в описанные программы перед оператором С/П ввести фрагмент

1	+	2	÷	П0	ИП9	Fx <sup>2</sup>	2	/—/	÷
Fex	2	Fл	×	F√ <sup>—</sup>	÷	П1	ИП0		

то будут вычисляться функция  $\Pi(x) \rightarrow P1 = PX$  и ее производная  $\Pi'(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi} \rightarrow PY$ . Например, для  $x = 0,1$  получим  $\Pi(0,1) = 0,53982785$  и  $\Pi'(0,1) = 0,39695256$ .

Функция  $\Phi(x)$  также может вычисляться с помощью программ, вычисляющих  $\Phi(y)$ . Для нахождения  $\Phi(x)$  надо вместо  $y$

ввести значение  $x\sqrt{2}$ . Например, чтобы вычислить  $\Phi(x)$  при  $x = 0,5$ , перед пуском программы надо нажать клавиши 0, 5  $\uparrow$  2 FV  $\bar{\times}$ . Получим  $\Phi(x) = \Phi(0,5) = 0,52049986$ . Функция  $\Phi(x)$  может вычисляться и по ее разложению в ряд:

$$\operatorname{erf}(x) = \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)}.$$

**Программа 6.53.** Вычисление функций  $\operatorname{erf}(x) = \Phi(x)$  и  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$  по разложению в ряд. Ввод:  $x = \text{PX}$ .

П9	П7	Cx	П6	1	П8	КИП6	ИП8	/—/	ИП6
÷	П8	ИП6	2	×	1	+	÷	FBx	ИП9
Fx <sup>y</sup>	XУ	F,	×	ИП7	+	П7	FBx	—	Fx = 0
06	ИП7	2	×	Fл	FV <sup>—</sup>	÷	ПА	1	ИНА
—	ПС	XУ	C/П	БП	00				

**Пример.**  $\operatorname{erf}(0,1) = 0,11246292$ ,  $\operatorname{erfc}(0,1) = 0,8875371$  при  $t_c \approx 45$  с,  $\operatorname{erf}(0,5) = 0,52049989$ ,  $\operatorname{erfc}(0,5) = 0,4795001$  при  $t_c \approx 75$  с.

Для ускоренного вычисления функции  $\Phi(x)$  предложен ряд аппроксимаций [13, 17].

**Программа 6.54.** Вычисление  $\Phi(x)$  при  $x > 0$  по аппроксимации с погрешностью менее  $2,5 \cdot 10^{-5}$ :

$$\Phi(x) = 1 - (\lambda(a_1 + \lambda(a_2 + a_3\lambda))) / e^{x^2}, \quad (6.20)$$

где  $\lambda = 1/(1 + px)$ . Ввод:  $p = 0,47047 = \text{P0}$ ,  $a_1 = 0,3480242 = \text{P1}$ ,  $a_2 = -0,0958798 = \text{P2}$ ,  $a_3 = 0,7478556 = \text{P3}$  и  $x = \text{PX}$ .

↑	ИП0	×	1	+	F1/x	П9	ИП3	×	ИП2
+	ИП9	×	ИП1	+	ИП9	×	XУ	Fx <sup>2</sup>	Fex
÷	1	XУ	—	C/П	БП	00			

**Пример.** Имеем  $\Phi(0,1) = 0,1124832$ ;  $\Phi(0,5) = 0,5204876$ ;  $\Phi(1) = 0,8427168$  и  $\Phi(3) = 0,9999776$ . Время счета одного значения  $\Phi(x)$  около 10 с. При  $x < 0$  вычисления можно выполнить на основе соотношения

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Упростив коэффициенты в (6.20), эту формулу можно записать в виде

$$\Phi(x) = 1 - [(\lambda(348 + \lambda(-96 + 748\lambda)))] / e^{x^2} \cdot 10^3 \quad (6.21)$$

и провести расчет по программе с одним занятым регистром памяти.

**Программа 6.55.** Вычисление  $\Phi(x)$  по формуле (6.21) с погрешностью порядка  $1 \cdot 10^{-4}$ . Ввод  $x = \text{PX}$ .

↑	↑	0	,	4	7	×	1	+	F1/x
П9	7	4	8	×	9	6	—	ИП9	×

3 4 3 + ИП9 × 1 ВП 3 ÷  
 ХУ Fx<sup>2</sup> Fe<sup>x</sup> ÷ 1 ХУ — С/П БП 00

Пример. Для  $x = 0,1$  и  $1$  имеем:  $\Phi(0,1) = 0,1123962$ ;  
 $\Phi(1) = 0,8426262$ .

Программа 6.56. Вычисление  $\Phi(x)$  по аппроксимации

$$\Phi(x) = 1 - (a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + a_5\lambda^5)/e^{x^2},$$

где  $\lambda = 1/(1 + a_6x)$  с погрешностью не более  $1,5 \cdot 10^{-7}$ . Ввод:  $a_1 = 0,2548295 = P1$ ,  $a_2 = -0,28449673 = P2$ ,  $a_3 = 1,4214137 = P3$ ,  $a_4 = -1,453152 = P4$ ,  $a_5 = 1,0614054 = P5$ ,  $a_6 = 0,3275911 = P6$  и  $x = PX$ .

П9 ИП6 × 1 + F1/x П8 5 П0 ИП5  
 ↑ ХУ ИП8 × КИП0 + ИП0 Fx = 0 11 ХУ  
 ИП9 Fx<sup>2</sup> Fe<sup>x</sup> ÷ 1 ХУ — С/П БП 00

Пример. Для  $x = 0,1$  и  $2$  имеем:  $\Phi(0,1) = 0,1124632$ ;  
 $\Phi(2) = 0,9953221$ .

Программа 6.57. Одновременное вычисление функций  $\psi(x)$  по формуле (6.13),  $\Pi(x)$  с погрешностью до  $1 \cdot 10^{-5}$  по аппроксимации

$$\Pi(x) = 1 - \psi(x)(a_1\lambda - a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3),$$

где

$$\lambda = 1/(1 + px),$$

а также функций

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt = 1 - \Pi(x) \quad (6.22)$$

и

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt = 2\Pi(x) - 1. \quad (6.23)$$

Ввод:  $p = 0,33267 = P9$ ,  $a_1 = 0,4361836 = P1$ ,  $a_2 = 0,1201676 = P2$ ,  $a_3 = 0,937298 = P3$  и  $x = PX$ . Вывод:  $\lambda \rightarrow P8$ ,  $\psi(x) \rightarrow PX = PД$ ,  $\Pi(x) \rightarrow PX = PВ$ ,  $Q(x) \rightarrow PX = PС$  и  $A(x) \rightarrow PX = PА$ .

П7 ИП9 × 1 + F1/x П8 ИП7 Fx<sup>2</sup> 2  
 /—/ ÷ Fe<sup>x</sup> 2 Fл × F√— ÷ ПД С/П  
 1 ИП3 ИП8 × ИП2 — ИП8 × ИП1 +  
 ИП8 × ИПД × — ПВ С/П 1 ИПВ —  
 ПС С/П ИПВ 2 × 1 — ПА С/П БП  
 00

Пример. Для  $x = 1$  получим  $\psi(1) = 0,24197072$  (точное значение  $0,2419707245$ );  $\Pi(1) = 0,8413513$  (точное значение  $0,8413447$ );  $Q(1) = 0,1586487$  и  $A(1) = 0,6827026$ .

**Программа 6.58.** Вычисление функций  $\psi(x)$ ,  $\Pi(x)$ ,  $Q(x)$  и  $A(x)$  с применением аппроксимации

$$\Pi(x) = 1 - \psi(x) (a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_5\lambda^5),$$

где  $\lambda = 1/(1 + px)$ , с погрешностью не более  $1 \cdot 10^{-7}$ . Ввод:  $p = 0,2316419 = P9$ ,  $a_1 = 0,31938153 = P1$ ,  $a_2 = -0,35656378 = P2$ ,  $a_3 = 1,7814779 = P3$ ,  $a_4 = -1,821256 = P4$ ,  $a_5 = 1,3302744 = P5$  и  $x = PX$ . Вывод см. в программе 6.57.

P7	ИП9	×	1	+	F1/x	P8	ИП7	Fx <sup>2</sup>	2
/—/	÷	Fe <sup>x</sup>	2	Fл	×	F√—	÷	ПД	С/П
5	ПО	ИП5	↑	XУ	ИП8	×	КИПО	+	ИПО
Fx=0	24	XУ	ИПД	/—/	×	1	+	ПВ	С/П
1	ИПВ	—	ПС	С/П	ИПВ	2	×	1	—
ПА	С/П	БП	00						

**Пример.** Для  $x = 1$  получим  $\psi(1) = 0,24197072$ ;  $\Pi(1) = 0,8413448$ ;  $Q(1) = 0,1586552$ ;  $A(1) = 0,6826896$ .

Функции  $\psi(x)$ ,  $\Pi(x)$ ,  $Q(x)$  и  $A(x)$  могут вычисляться также через функцию  $\Pi(x)$ , разлагаемую в ряд:

$$\Pi(x) = \frac{1}{2} + \psi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1)}. \quad (6.24)$$

**Программа 6.59.** Вычисление функций  $\psi(x)$  (6.13),  $\Pi(x)$ ,  $Q(x)$  и  $A(x)$  с применением разложения  $\Pi(x)$  в ряд (6.24) и соотношений (6.22) и (6.23). Ввод:  $x = PX$ . Вывод результатов:  $\psi(x) \rightarrow PX = PA$  С/П  $\Pi(x) \rightarrow PX = PB$  С/П  $Q(x) \rightarrow PX = PC$  С/П и  $A(x) \rightarrow PX = PD$  (далее вводится новое значение  $x$ ).

P9	ИП9	/—/	×	2	÷	Fe <sup>x</sup>	2	Fл	×
F√—	÷	ПА	С/П	1	P7	Cx	P6	P5	ИП7
ИП5	2	×	1	+	×	P7	FVx	ИП9	Fx <sup>y</sup>
XУ	F,	XУ	÷	КИП5	XУ	ИП6	+	P6	FVx
—	Fx=0	19	ИП6	ИПА	×	2	F1/x	+	ПВ
С/П	1	ИПВ	—	ПС	С/П	ИПВ	2	×	1
—	ПД	С/П	БП	00					

**Пример.** Для  $x = 1$  имеем  $\psi(1) = 0,24197072$ ,  $\Pi(1) = 0,84134473$ ,  $Q(1) = 0,1586553$  и  $A(1) = 0,6826895$ . Время счета для  $\Pi(x)$  80 с, для остальных функций — несколько секунд.

## 6.14. Функции плотности вероятности и распределения случайных величин

Частота появления случайной величины  $x$  в интервале  $dx$

$$P(x) = dF(x)/dx$$

определяет плотность вероятности случайных величин. Интеграл

$$F(x) = \int_{-\infty}^x P(x) dx$$

задает функцию распределения случайных величин.

Для многих законов распределения  $P(x)$  и  $F(x)$  задаются простыми формулами [6] и составление программ для их вычислений не представляет трудностей. Ниже дан пакет программ вычисления  $P(x)$  и  $F(x)$  для тех законов, у которых вычисления  $P(x)$  и  $F(x)$  требуют специального подхода.

**Программа 6.60.** Вычисление  $P(x) = \psi'(x)$  (6.13) и  $\Pi(x)$  (6.15) для гауссовского стандартного распределения по аппроксимации

$$\Pi(x) = 1 - (1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_6x^6)^{-16/2}$$

с погрешностью до  $1,5 \cdot 10^{-7}$ . Ввод:  $c_1 = 49867347 \cdot 10^{-9} = P1$ ;  $c_2 = 21141006 \cdot 10^{-9} = P2$ ,  $c_3 = 3277626 \cdot 10^{-9} = P3$ ;  $c_4 = 38004 \cdot 10^{-9} = P4$ ,  $c_5 = 48891 \cdot 10^{-9} = P5$ ,  $c_6 = 5883 \cdot 10^{-9} = P6$  и  $x = PX$  (при смене  $x$  вводится только новое значение  $x$ ).

P9	$Fx < 0$	04	/-/	ПА	$Fx^2$	2	/-/	÷	$Fe^x$
Fл	2	×	$F\sqrt{-}$	÷	P8	С/П	6	Π0	ИП6
↑	XУ	ИПА	×	КИΠ0	+	ИΠ0	$Fx = 0$	21	XУ
4	+	1	6	/-/	XУ	$Fx^y$	2	/-/	÷
1	+	ИП9	$Fx \geq 0$	50	XУ	P7	С/П	БΠ	00
XУ	1	XУ	-	БΠ	46				

**Пример.** Для  $x = 0,5$   $P(x) = 0,35206532$ ;  $\Pi(x) = 0,6914625$ , а для  $x = -1$   $P(x) = 0,24197072$  и  $\Pi(x) = 0,1586552$ . При  $x < 0$  используется формула  $\Pi(x) = 1 - \Pi(|x|)$ .

**Программа 6.61.** Вычисление

$$P(x) = \exp \left[ - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] \left| \left( \sigma \sqrt{2\pi} \right) \right| \text{ и } F(x) = \Pi \left( \frac{x-m}{\sigma} \right)$$

для нормального (гауссовского) распределения с дисперсией  $\sigma$ . Ввод:  $c_1 \div c_6$  (см. программу 6.39),  $m = PC$ ,  $\sigma = PD$  и  $x = PX$ .

ИПС	-	ИПД	÷	P9	$Fx < 0$	08	/-/	ПА	$Fx^2$
2	/-/	÷	$Fe^x$	Fл	2	×	$F\sqrt{-}$	÷	ИПД
÷	P8	С/П	6	Π0	ИП6	↑	XУ	ИПА	×
КИΠ0	+	ИΠ0	$Fx = 0$	27	XУ	1	+	1	6

/—/	XY	$Fx^y$	2	/—/	÷	1	÷	ИП9	$Fx \geq 0$
56	XY	П7	С/П	БП	00	XY	1	XY	—
БП	52								

Пример. Для  $m = 1,5$  и  $\sigma = 0,5$   $P(1) = 0,483394144$ ,  $F(1) = 0,1586552$  и  $P(2) = 0,483394144$  и  $F(2) = 0,8413448$ .

**Программа 6.62.** Вычисление

$$P(x) = \frac{\lg c}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\lg x - m)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ и } F(x) = \Pi\left(\frac{\lg x - m}{\sigma}\right)$$

для логарифмического гауссовского распределения. Ввод см. в программе 6.61.

П9	Flg	ИПС	—	ИПД	÷	ПВ	$Fx < 0$	10	/—/
ПА	$Fx^2$	2	/—/	÷	$Fe^x$	1	$Fe^x$	Flg	×
ИП9	÷	ИПД	÷	Fл	2	×	$F\sqrt{\quad}$	÷	П8
С/П	6	П0	ИП6	↑	XY	ИПА	×	КИП0	+
ИП0	$Fx=0$	35	XY	1	+	1	6	/—/	XY
$Fx^y$	2	/—/	÷	1	+	ИПВ	$Fx \geq 0$	64	XY
П7	С/П	БП	00	XY	1	XY	—	БП	60

Пример. Для  $m = 1$  и  $\sigma = 0,1$   $P(8) = 0,13541585$ ,  $F(8) = 0,1662477$  и  $P(10) = 0,17325843$  и  $F(10) = 0,5$ .

**Программа 6.63.** Вычисление

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(x+m)^2}{2\sigma^2}\right] \right\}$$

и

$$F(x) = \Pi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \Pi\left(\frac{x+m}{\sigma}\right) - 1$$

для распределения модуля гауссовской случайной величины. Ввод см. в программе 6.62 ( $x > 0$ ).

П9	ИПС	—	ИПД	÷	П7	ИП9	ИПС	+	ИПД
÷	ПВ	$Fx^2$	2	/—/	÷	$Fe^x$	ИП7	$Fx^2$	2
/—/	÷	$Fe^x$	+	ИПД	÷	Fл	2	×	$F\sqrt{\quad}$
÷	С/П	ИП7	$Fx < 0$	36	/—/	ПП	59	ИП7	$Fx \geq 0$
44	XY	БП	48	XY	1	XY	—	ПА	ИПВ
ПП	59	ИПА	+	1	—	С/П	БП	00	П8
6	П0	ИП6	↑	XY	ИП8	×	КИП0	+	ИП0
$Fx = 0$	64	XY	1	+	1	6	/—/	XY	$Fx^y$
2	/—/	÷	1	+	В/0				

Пример. Для  $m = 2$  и  $\sigma = 1$   $P(1) = 0,24640257$ ,  $F(1) = 0,1573054$  и  $P(3) = 0,24197221$  и  $F(3) = 0,8413445$ .

**Программа 6.64.** Вычисление

$$P(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\mu)/2}$$

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\lambda|(x-\mu)|/2}, & -\infty < x < \mu, \\ 1 - e^{-\lambda|(x-\mu)|/2}, & \mu < x < \infty, \end{cases}$$

для распределения Лапласа. Ввод:  $\mu = P0$ ,  $\lambda = P1$  и  $x = PX$ .

П2	ИПО	—	Fx < 0	06	/—/	ИП1	/—/	×	Fe <sup>x</sup>
2	÷	П3	ИП1	×	С/П	ИП2	ИПО	—	Fx < 0
25	ИП3	С/П	БП	00	1	ИП3	—	БП	22

Пример. Для  $\mu = 1$  и  $\lambda = 2$   $P(-0,5) = 0,049787072$ ,  $F(-0,5) = 0,024893536$  и  $P(1,5) = 0,36787944$  и  $F(1,5) = 0,8160603$ .

Программа 6.65. Вычисление  $P(x) = x^m e^{-x}/m!$  для показательного-степенного распределения. Ввод:  $m = PA$ ,  $a = PX > 0$ .

П9	ИПА	ПО	Fx ≠ 0	12	1	ИПО	×	FL0	06
БП	13	1	П8	ИПА	ИП9	Fx <sup>y</sup>	ИП9	/—/	Fe <sup>x</sup>
×	ИП8	÷	П7	С/П	БП	00			

Пример. Для  $x = m = 3$   $P(3) = 0,22404176$ , а для  $x = m = 1$   $P(1) = 0,36787944$ .

Программа 6.66. Вычисление

$$P(x) = \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 ax} \text{ и } F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$$

для распределения  $\operatorname{sch}^2 x$ . Ввод:  $a = PA$ ,  $x = PX$ . Вывод результатов  $P(x) \rightarrow PX$ ,  $F(x) \rightarrow PY$ .

П9	ИПА	×	П6	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	—	2	÷
↑	Fx <sup>2</sup>	1	+	F√	÷	2	÷	2	F1/x
+	П8	ИП6	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	+	Fx <sup>2</sup>	F1/x	ИПА
×	2	×	П7	С/П	БП	00			

Пример. Для  $a = 1$  и  $x = -1$ :  $P(x) = 0,20998718$  и  $F(x) = 0,119202922$ .

Программа 6.67. Вычисление

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \cdot \frac{\Gamma[(N+1)/2]}{\Gamma(N/2)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{N}\right)^{-(N+1)/2}$$

для распределения Стьюдента с применением для гамма-функций формулы Стирлинга, т. е. [18]

$$P(x) \approx \sqrt{\frac{N(N+2)}{17,08}} \cdot \left(\frac{N+3}{N+2}\right)^N \cdot \frac{(6N+19)}{(N+1)(6N+13)} \left(1 + \frac{x^2}{N}\right)^{-\frac{N+1}{2}}$$

Ввод:  $N = P0$ ,  $x = PX$  (при первом пуске  $x = P9$ ).

ИПО	↑	↑	3	+	ИПО	2	+	÷	Fx <sup>y</sup>
×	ИПО	2	+	×	1	7	,	0	8

÷	F√	ИПО 6	×	П8 1	9	÷	×
ИПО 1	+	÷	ИП8 1	3	+	÷	П8
ИП9 П9	Fx <sup>2</sup>	ИПО	÷	1	+	ИПО 1	+
2	/—/	÷	ХУ Fx <sup>y</sup>	ИП8	×	С/П БП	41

Пример. Для  $N = 3$  и  $x = 2$   $P(x) = 0,067514971$ .

Программа 6.68. Вычисление

$$P(x) = x^{\alpha} e^{-x/\beta} / \beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1)$$

для гамма-распределения при целых  $\alpha$ , когда  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$ . Ввод:  $\alpha = PA$ ,  $\beta = PB$  и  $x = PX$  (при первом пуске  $x = P9$ ).

ИПА П0	Fx ≠ 0	11	1	ИПО	×	FLO 05	БП
12	1	П6	ИПА 1	+	ИПВ Fx <sup>y</sup>	ИП6	×
П5	ИП9 П9	ИПА ХУ	Fx <sup>y</sup>	ИП9	ИПВ /—/	÷	
Fe <sup>x</sup>	×	ИП5	÷	П7	С/П БП	22	

Пример. Для  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  и  $x = 0,2$   $P(x) = 0,81873072$ .

Программа 6.69. Вычисление

$$P(x) = x^{N-1} e^{-x^2/2} / 2^{N/2-1} \cdot \Gamma(N/2)$$

для  $\chi$ -распределения с применением для  $\Gamma(N/2)$  формулы Стирлинга, т. е.

$$P(x) \approx \frac{Nx^{N-1} e^{-x^2/2}}{2^{N/2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left(\frac{a}{e}\right)^a \left(1 - \frac{1}{12a}\right)}, \text{ где } a = 1 + \frac{N}{2}.$$

Ввод:  $N = P0$ ,  $x = PX$  (при первом пуске  $x = P9$ ).

ИПО 2	÷	П7 2	Fx <sup>y</sup>	Fπ 2	×	ИП7		
1	+	П7	÷	F√	×	1	ИП7 1	2
×	F1/x	—	×	ИПО	÷	П8	ИП7 1	Fe <sup>z</sup>
÷	ИП7 ХУ	Fx <sup>y</sup>	ИП8	×	П8	ИП9 П9	ИПО	
1	—	ХУ Fx <sup>y</sup>	ИП9 Fx <sup>2</sup>	2	/—/	÷	Fe <sup>z</sup>	
×	ИП8	÷	П7	С/П БП	38			

Пример. Для  $N = 1$  и  $x = 0,1$   $P(x) = 0,88796866$ .

Программа 6.70. Вычисление

$$P(x) = x^{N/2-1} e^{-x/2} / 2^{N/2} \cdot \Gamma(N/2)$$

для распределения  $\chi^2$  с применением соотношения

$$\Gamma(N/2) = 2\Gamma(1 + N/2) / N = 2\Gamma(a) / N$$

и формулы Стирлинга для  $\Gamma(a)$ , что дает

$$P(x) \approx \frac{Nx^{N/2-1} e^{-x/2}}{2^a \sqrt{2\pi/a} (a/e)^a (1 - 1/12a)}, \text{ где } a = 1 + \frac{N}{2}.$$

Ввод:  $N = P0$ ,  $x = PX$  (при первом пуске  $x = P9$ ).

ИПО	2	÷	1	+	П7	2	F <sub>2y</sub>	Fπ	2
×	ИП7	÷	F√ <sup>-</sup>	×	ИПО	÷	1	ИП7	1
2	×	F1/x	+	×	П8	ИП7	1	F <sub>сx</sub>	÷
ИП7	XY	Fx <sup>y</sup>	ИП8	×	П8	ИП9	П9	ИПО	2
÷	1	-	XY	Fx <sup>y</sup>	ИП9	2	/-/	÷	Fe <sup>x</sup>
×	ИП8	÷	С/П	БП	37				

Пример.  $P(x) = 1,8133276 \cdot 10^{-2}$  для  $N = 20$  и  $x = 10$ .

Программа 6.71. Вычисление плотности распределения Эрланга  $k$ -го порядка ( $k$  — целое число)

$$P(x) = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} x^k e^{-\lambda x} = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x}.$$

Ввод:  $\lambda = PA$ ,  $k = PB$ ,  $x = PX$  (при первом пуске  $x = P9$ ).

ИПВ	ПО	Fx ≠ 0	11	1	ИПО	×	FL0	05	БП
12	1	П6	ИПВ	1	+	ИПА	Fx <sup>y</sup>	ИП6	÷
П5	ИП9	П9	ИПВ	XY	Fx <sup>y</sup>	ИП9	ИПА	/-/	×
Fe <sup>x</sup>	×	ИП5	×	П7	С/П	БП	22		

Пример. Для  $k = 3$  и  $\lambda = 2$  имеем  $P(0,5) = 1,2262644$  и  $P(2) = 0,39073354$ .

**ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ  
ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ,  
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ  
И РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ**

**7.1. Расчет линейных электро-радиотехнических  
пассивных цепей**

Программа 7.1. Пересчет сопротивлений треугольника в сопротивление звезды (рис. 7.1) по  $R_4 = R_1 R_2 / R_0$ ,  $R_5 = R_2 R_3 / R_0$  и  $R_6 = R_3 R_1 / R_0$ , где  $R_0 = R_1 + R_2 + R_3$  (код 0), и обратный пересчет (код 1) по  $R_1 = R_0^* / R_5$ ,  $R_2 = R_0^* / R_6$  и  $R_3 = R_0^* / R_4$ , где  $R_0^* = (R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4)$ . Ввод:  $R_1 = P1$ ,  $R_2 = P2$ ,  $R_3 = P3$ , код 0 = PX для пересчета треугольника в звезду и  $R_4 = P4$ ,  $R_5 = P5$ ,  $R_6 = P6$ , код 1 для пересчета звезды в треугольник. Вывод результатов:  $R_4 \rightarrow PZ = P4$ ,  $R_5 \rightarrow PY = P5$ ,  $R_6 \rightarrow PX = P6$  при

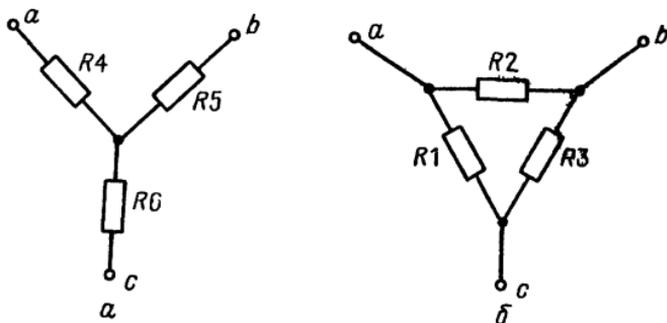


Рис. 7.1. К преобразованию звезды (а) в треугольник (б)

пересчете треугольника в звезду и  $R_1 \rightarrow PZ = P1$ ,  $R_2 \rightarrow PY = P2$  и  $R_3 \rightarrow PX = P3$  при пересчете звезды в треугольник.

Fx=0 27	ИП1	ИП2	ИП3	+	+	П9	ИП4	ИП2	
×	ИП9	÷	П4	ИП2	ИП3	×	ИП9	÷	П5
ИП3	ИП1	×	ИП9	÷	П6	С/П	ИП4	ИП5	×
ИП6	ИП5	ИП4	+	×	+	П9	ИП5	÷	П1
ИП9	ИП6	÷	П2	ИП9	ИП4	÷	П3	С/П	

Пример. Для  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом и кода 0 получим  $R_4 = 3,3333333$  Ом,  $R_5 = 10$  Ом,  $R_6 = 5$  Ом, а для кода 1 получим,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом (результаты округлены).

Программа 7.2. Расчет ослабления мощности Т- и П-образными аттенюаторами (рис. 7.2) по формулам [20]:

$$G_T = 20 \lg(((1 + AR_1/R_2)BR_3 + AR_1)/C),$$

$$G_{\Pi} = 20 \lg(((1 + AR_2/R_{\Pi})BR_{\Pi} + AR_{\Pi})/C),$$

где  $A = 1 + R_{\Pi}/R_1$ ,  $B = 1 + R_{\Pi}/R_3$  и  $C = R_{\Pi} + R_{\Pi}$ . Ввод:  $R_{\Pi} = P0$ ,  $R_1 = P1$ ,  $R_2 = P2$ ,  $R_3 = P3$ ,  $R_{\Pi} = P4$ . Нажав клавиши В/0 и С/П,

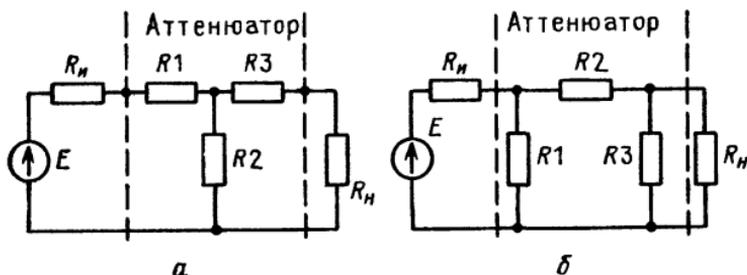


Рис. 7.2. Аттенюаторы: Т-образный (а) и П-образный (б)

получаем  $G_T \rightarrow PX$ , нажав клавишу С/П еще раз, получаем  $G_{\Pi} \rightarrow PX$  (если нужно вычислить сразу только  $G_{\Pi}$ , нужно нажать клавиши БП 33 С/П).

ИП3	ИП1	П5	ИП2	÷	ИП0	ИП1	÷	1	+
П6	×	×	+	ИП4	ИП3	÷	1	+	×
ИП5	ИП6	×	+	ИП0	ИП4	+	÷	Flg	2
0	×	С/П	ИП4	П5	ИП0	ИП2	ИП0	БП	04

Пример. Для  $R_{\Pi} = 100$  Ом,  $R_1 = 75$  Ом,  $R_2 = 38$  Ом,  $R_3 = 19$  Ом и  $R_{\Pi} = 50$  Ом получим  $G_T = 11,46924$  дБ и  $G_{\Pi} = 14,559761$  дБ.

Программа 7.3. Расчет сопротивлений резисторов  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  Т-образного аттенюатора (рис. 7.2, а) по заданному (в  $N$  раз) ослаблению

$$R_2 = \frac{2 \sqrt{NR_{\Pi}R_n}}{N-1}, \quad R_1 = R_{\Pi} \frac{N+1}{N-1} - R_3, \quad R_3 = R_{\Pi} \frac{N+1}{N-1} - R_2,$$

а также П-образного аттенюатора (рис. 7.2, б):

$$\frac{1}{R_2} = \frac{2}{N-1} \sqrt{\frac{N}{R_{\Pi}R_n}}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{\Pi}} \cdot \frac{N+1}{N-1} - \frac{1}{R_2},$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{\Pi}} \cdot \frac{N+1}{N-1} - \frac{1}{R_2}.$$

Ввод:  $R_{\Pi} = P0$ ,  $R_n = P4$ ,  $N \uparrow$  код В/0 С/П (код разев 0 при вы-

числении сопротивлений Т-образных аттенюаторов и равен 1 при вычислении сопротивлений П-образных аттенюаторов). Результат:  $R_1 \rightarrow P1, R_2 \rightarrow P2, R_3 \rightarrow PX = P3$ .

П8	XY	П7	1	+	↑	↑	2	-	÷
П9	FVx	2	XY	÷	ИП7	$F\sqrt{\quad}$	×	П6	ИП8
$F_x=0$	44	ИП6	ИП0	ИП4	×	$F\sqrt{\quad}$	×	П2	ИП0
ИП9	×	ИП2	-	П1	ИП4	ИП9	×	ИП2	-
П3	С/П	БП	00	ИП0	ИП4	×	$F1/x$	$F\sqrt{\quad}$	ИП6
×	П5	$F1/x$	П2	ИП9	ИП0	÷	ИП5	-	$F1/x$
П1	ИП9	ИП4	÷	ИП5	-	$F1/x$	БП	41	

**Пример.** При  $R_n = 200$  Ом,  $R_n = 100$  Ом,  $N = 50$  и коде 0 получаем сопротивления резисторов Т-образного аттенюатора:  $R_1 = 167,34694$  Ом,  $R_2 = 40,816324$  Ом и  $R_3 = 63,26531$  Ом. При  $R_n = 100$  Ом,  $R_n = 50$  Ом,  $N = 100$  и коде 1 получаем сопротивления резисторов П-образного аттенюатора:  $R_1 = 136,14661$  Ом,  $R_2 = 350,01788$  Ом и  $R_3 = 56,989659$  Ом.

**Программа 7.4.** Расчет сопротивлений аттенюаторов четырех типов (рис. 7.3) по заданному (в неперах) ослаблению. Ввод: заданное характеристическое сопротивление (входное и выходное)

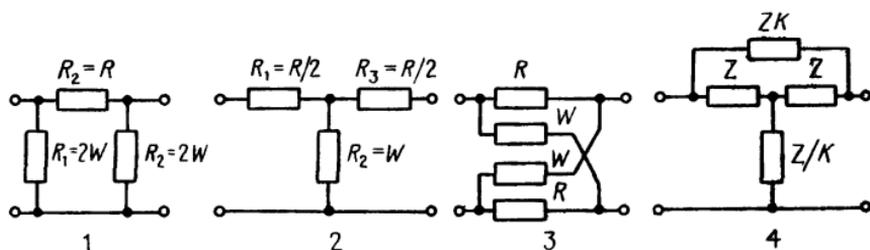


Рис. 7.3. Четыре типа аттенюаторов

$z = PX$  В/0 С/П, ослабление  $a = PX$  С/П. Вывод результатов:  $r = zsha \rightarrow P1, 2W = z/th(a/2) \rightarrow P4$  для аттенюатора типа 1;  $r/2 = zth(a/2) \rightarrow P2, W = z/sha \rightarrow P5$  для аттенюатора типа 2;  $r = zth(a/2) \rightarrow P3, W = z/th(a/2) \rightarrow P6$  для аттенюатора типа 3 и  $K = (e^a - 1) \rightarrow P0, zK \rightarrow PC$  и  $z/K \rightarrow PD = PX$  для аттенюатора типа 4.

П8	С/П	П9	$Fe^x$	↑	$F1/x$	-	2	÷	П7
ИП9	2	÷	$Fe^x$	↑	$F1/x$	--	2	÷	↑
$F_x^2$	1	+	$F\sqrt{\quad}$	÷	ПА	ИП8	×	П2	П3
ИП8	ИПА	÷	П4	П6	ИП8	ИП7	×	П1	ИП8
ИП7	÷	П5	ИП9	$Fe^x$	1	-	П0	ИП8	×
ПС	ИП8	ИП0	÷	ПД	С/П				

Пример. При  $z = 100$  Ом и  $a = 1$  неп получим:

Тип аттенюатора

1	2
$r = 117,52012$	$r/2 = 46,211718$
$2W = 216,39533$	$W = 85,091812$
3	
$r = 46,211718$	$K = 1,7182818$
$W = 216,39533$	$zK = 171,82818$
	$z/K = 58,197671$

Отметим, что ослабление в 1 неп соответствует ослаблению в  $e$  раз (или  $0,1151293$  неп = 1 дБ).

Общими методами расчета линейных цепей на постоянном токе являются методы контурных токов и узлов потенциалов. Их реализация сводится к составлению уравнений контурных токов или узловых потенциалов с последующим решением полученной системы линейных уравнений.

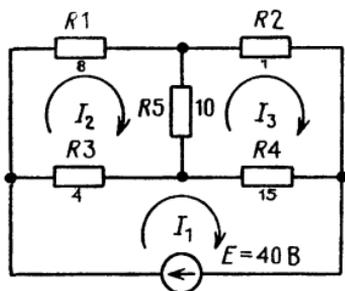


Рис. 7.4. Мостовая схема на постоянном токе

При расчетах на ПМК уравнения составляются вручную, причем для этого необходимы лишь операции сложения и вычитания.

Пример. Вычислить токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  в контурах мостовой схемы (рис. 7.4). По законам Кирхгофа составим систему

уравнений для трех контуров с искомыми токами:

$$\begin{aligned} R_3 I_1 - R_3 I_2 + R_4 I_1 - R_4 I_3 - E &= 0, \\ R_3 I_2 - R_3 I_1 + R_1 I_2 + R_5 I_2 - R_5 I_3 &= 0, \\ R_4 I_3 - R_4 I_1 + R_5 I_3 - R_5 I_2 + R_2 I_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Группируя члены уравнений системы (7.1), получаем окончательно следующую систему:

$$\begin{aligned} (R_3 + R_4) I_1 - R_3 I_2 - R_4 I_3 &= E, \\ -R_3 I_1 + (R_1 + R_3 + R_5) I_2 - R_5 I_3 &= 0, \\ -R_4 I_1 - R_5 I_2 + (R_2 + R_4 + R_5) I_3 &= 0. \end{aligned}$$

Пусть  $R_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 1$  Ом,  $R_3 = 4$  Ом,  $R_4 = 15$  Ом,  $R_5 = 10$  Ом и  $E = 40$  В. Тогда, подставляя в полученную систему эти конкретные данные, находим окончательно:

$$\begin{aligned} 19 I_1 - 4 I_2 - 15 I_3 &= 40, \\ -4 I_1 + 22 I_2 - 10 I_3 &= 0, \\ -15 I_1 - 10 I_2 + 26 I_3 &= 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись программой 5.2 для решения системы из трех линейных уравнений, вычислим:

$$I_1 = 7,8601156 \text{ А}, \quad I_2 = 4,2298079 \text{ А} \quad \text{и} \quad I_3 = 6,1615311 \text{ А}.$$

Максимальное число узлов или контуров рассчитываемой таким образом цепи не должно превышать 5, если предполагается решение системы в автоматическом режиме вычислений. При полуавтоматическом режиме это число можно увеличить.

Расчет линейных цепей на переменном токе в общем случае выполняется с применением аппарата функций комплексного переменного. Однако для многих практически важных цепей этот расчет целесообразно выполнять по известным аналитическим выражениям для основных параметров этих цепей. Ниже дан пакет программ для пассивных  $RC$ - и  $LCR$ -цепей.

Программа 7.5. Расчет частоты среза  $f_{ср} = 1/(2\pi RC)$  для простейших пассивных фильтров НЧ (рис. 7.5, а и код 0) и ВЧ

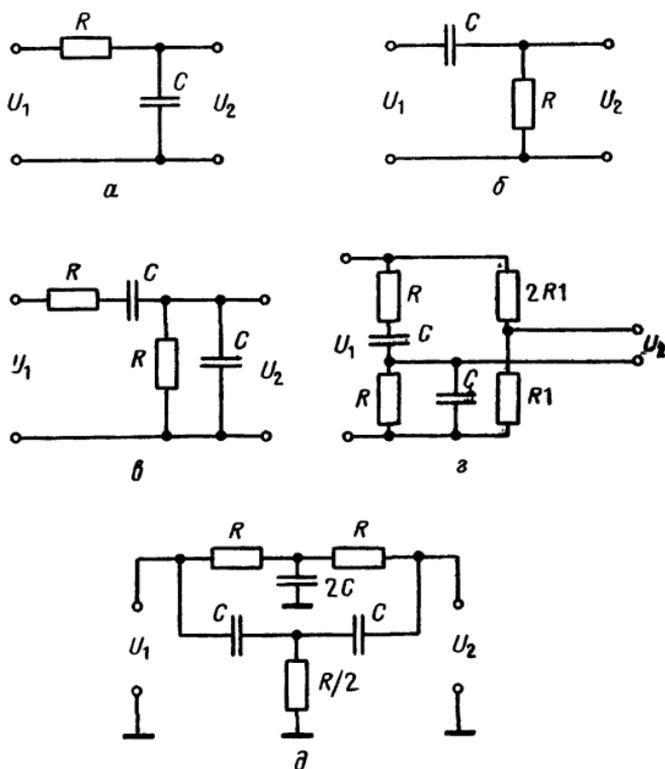


Рис. 7.5. Простейшие пассивные  $RC$ -фильтры: нижних (а) и верхних (б) частот, полосовой (в), на основе моста Винна — Робинсона (г) и в виде двойного Т-образного моста (д)

(рис. 7.5, б и код 1), а также коэффициента передачи  $A = 1/\sqrt{1 + \Omega^2}$  и фазового сдвига  $\varphi = -\text{arctg } \Omega$  при заданной частоте  $f$  для фильтра НЧ или  $A = 1/\sqrt{1 + 1/\Omega^2}$  и  $\varphi = \text{arctg } \Omega$  для фильтра ВЧ. Здесь  $\Omega = 2\pi fRC = f/f_{ср}$  — нормированная относительно  $f_{ср}$  частота. Ввод:  $R = RB$ ,  $C = PC$ , код = РД. Нажав клавиши В/0 и С/П, получим  $f_{ср} \rightarrow P9 = PX$ . Далее, вводя  $f$  и нажимая кла-

вику С/П, будем получать  $A \rightarrow PX$  и  $\varphi \rightarrow PY$  для фильтра, заданного кодом.

ИПВ	ИПС	×	П0	2	×	Fл	×	F1/x	П9
С/П	Fл	×	2	×	ПА	ИПД	Fx=0	33	XY
ИП0	/—/	×	П8	F arctg	ИП8	Fx <sup>2</sup>	1	+	F √—
F1/x	БП	10	XY	ИП0	×	F1/x	БП	23	

Пример. Для  $R = 10^5$  Ом и  $C = 1000 \cdot 10^{-12}$  Ф получим  $f_{ср} = 1591,5494$  Гц и далее для разных  $f$  (переключатель Р — Г в положении Г):

Частота, Гц $f$	ФНЧ (код 0)		ФВЧ (код 1)	
	A	φ	A	φ
500	0,95402824	-17,440594	0,29971679	72,559406
2 000	0,62267702	-51,48811	0,78247898	38,51189
10 000	0,15717672	-80,956939	0,98757053	9,0430605

Программа 7.6. Расчет средней частоты среза  $f_{ср} = 1/(2\pi RC)$  пассивного полосового фильтра (рис. 7.5, е), коэффициента передачи  $A$  и фазового сдвига  $\varphi$  на заданной частоте  $f$ :

$$A = \left( \sqrt{\left( \frac{1}{\Omega} - \Omega \right)^2 + 9} \right)^{-1}, \quad \varphi = \arctg \frac{1 - \Omega^2}{3\Omega},$$

где  $\Omega = f/f_{ср}$ . Ввод:  $R = PB$ ,  $C = PC$  В/0 С/П (получаем  $f_{ср}$ ) =  $PX$  С/П (получаем  $A \rightarrow PX$  и  $\varphi \rightarrow PY$ ). При смене  $f$  набирается новое значение  $f$  и нажимается только клавиша С/П.

ИПВ	ИПС	×	2	×	Fл	×	F1/x	П0	С/П
ИП0	÷	П9	1	XY	Fx <sup>2</sup>	—	3	÷	ИП9
÷	F arctg	ИП9	F1/x	ИП9	—	Fx <sup>2</sup>	9	+	F √—
F1/x	БП	09							

Пример. Для  $R = 10^5$  Ом и  $C = 1000 \cdot 10^{-12}$  Ф получаем  $f_{ср} = 1591,5494$  Гц, а для различных  $f$  имеем

$f$ , Гц	A	φ°
500	0,24090571	43,720733
1591,5494	0,33333333	0
5000	0,24274329	-43,261799

Программа 7.7. Расчет частоты максимума коэффициента передачи  $f_0 = 1/(2\pi RC)$  моста Винна — Робинсона (рис. 7.5, з), коэффициента передачи  $A$  и фазового сдвига  $\varphi$  на заданной частоте  $f$ :

$$A = \frac{1 - \Omega^2}{3 \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{3\Omega}{\Omega^2 - 1},$$

где  $\Omega = f/f_0$ . Ввод и вывод результатов см. для программы 7.6 (при первом пуске вычисляется  $f_0$ ).

ИНВ	ИПС	×	2	×	Fl	×	F1/x	П0	С/П
ИП0	÷	П9	Fx <sup>2</sup>	П8	1	XY	—	Fx≠0	41
↑	Fx <sup>2</sup>	ИП8	9	×	+	FV <sup>—</sup>	3	×	÷
ИП9	3	×	ИП8	1	—	÷	Farctg	XY	БП
09	0	↑	БП	01					

Пр и м е р. Для  $R = 10^5$  Ом и  $C = 1000 \cdot 10^{-12}$  Ф получаем  $f_0 = 1591,5494$  Гц, а для различных  $f$  имеем

$f$ , Гц	$A$	$\varphi^\circ$
500	0,23038132	-46,279271
1000	0,10190191	-72,199372
1591,5494	0	0
2000	-0,05061375	81,266455
5000	-0,22844432	46,738201

**Программа 7.8.** Расчет частоты подавления  $f_0 = 1/2\pi RC$  двойного Т-образного моста (рис. 7.5,  $\partial$ ), коэффициента передачи  $A$  и фазового сдвига  $\varphi$  при заданной частоте  $f$ :

$$A = \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{4\Omega}{\Omega^2 - 1},$$

где  $\Omega = f/f_0$ . Ввод и вывод результатов см. для программы 7.6 (при первом пуске вычисляется  $f_0$ ).

ИНВ	ИПС	×	2	×	Fl	×	F1/x	П0	С/П
ИП0	÷	П9	Fx <sup>2</sup>	П8	1	XY	—	Fx≠0	40
↑	Fx <sup>2</sup>	ИП8	1	6	×	+	FV <sup>—</sup>	÷	ИП9
4	×	ИП8	1	—	÷	Farctg	XY	БП	09
0	↑	БП	09						

Пр и м е р. Для  $R = 10^5$  Ом и  $C = 1000 \cdot 10^{-12}$  Ф получаем  $f_0 = 1591,5494$  Гц, для различных  $f$  имеем

$f$ , Гц	$A$	$\varphi^\circ$
500	0,58282401	-54,350589
1000	0,23411538	-76,460517
1591,5494	0	0
2000	-0,11445836	83,427614
5000	-0,57664957	54,784762

**Программа 7.9.** Расчет резонансной частоты  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  последовательного LCR-контура (рис. 7.6,  $a$ ), действительной  $x = R$  и мнимой  $y = (\omega L - 1/\omega C)$  составляющих комплексного сопротивления  $z = x + iy$  на заданной частоте  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ), модуля полного сопротивления  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  и фазового сдвига  $\theta = \arctg(y/x)$ . Ввод:  $R = PA$ ,  $L = PB$ ,  $C = PC$ . Нажав клавиши В/0 и С/П, получим  $f_0 \rightarrow PX = PD$ . Далее, введя  $f$  и нажав клавишу С/П, полу-

чим  $y \rightarrow PY$ ,  $x \rightarrow PX$ , еще раз нажав клавишу С/П, получим  $\theta \rightarrow PY$ ,  $|z| \rightarrow PX$  (после этого можно вводить новое значение  $f$ ).

ИПВ	ИПС	×	$F\sqrt{-}2$	×	Fl	×	F1/x	ПД	
С/П	П7	Fl	×	2	×	П8	ИПВ	×	ИП8
ИПС	×	F1/x	—	П6	ИПА	С/П	ИП6	ИПА	÷
Farctg	ИП6	$Fx^2$	ИПА	$Fx^2$	+	$F\sqrt{-}$	БП	10	

Пример. Для  $R = 100$  Ом,  $L = 2$  Гн и  $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$  Ф получим  $f_0 = 355,881128$  Гц. Задав  $f = 400$  Гц, находим  $x = 100$  Ом,

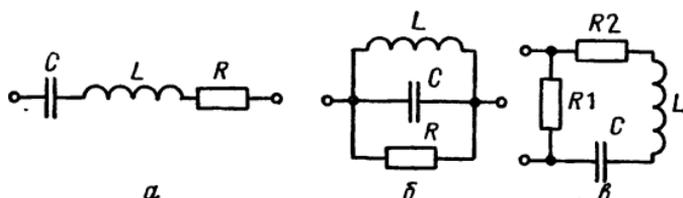


Рис. 7.6. Последовательная (а) и параллельная (б) LCR-цепи и колебательный контур (в)

$y = 1047,6743$  Ом,  $|z| = 1052,4359$  Ом и  $\theta = 84,547663^\circ$  (переключатель Р — Г в положении Г).

**Программа 7.10.** Расчет резонансной частоты  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ , параллельного LCR-контурa (рис. 7.6, б), действительной  $x$  и мнимой  $y$  составляющих его полного сопротивления на заданной частоте  $fz = x + iy$ ,

$$x = \frac{1}{RF}, \quad y = \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) F, \quad \text{где } F = \frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2,$$

модуля полного сопротивления  $|z| = 1/\sqrt{F}$  и фазового сдвига  $\theta = \arctg[R(1/(\omega L) - \omega C)]$ . Ввод:  $R = PA$   $L = PB$   $C = PC$  В/О С/П (получаем  $f_0$ )  $f = PX$  С/П (получаем  $y \rightarrow PY$ ,  $x \rightarrow PX$ ) С/П (получаем  $\theta \rightarrow PY$ ,  $|z| \rightarrow PX$ ). После этого можно вводить новые значения  $f$ .

ИПВ	ИПС	×	$F\sqrt{-}2$	×	Fl	×	F1/x	ПД	
С/П	П9	Fl	×	2	×	П8	ИПС	×	ИП8
ИПВ	×	F1/x	—	П7	$Fx^2$	ИПА	$Fx^2$	F1/x	+
П6	ИП7	/—/	ИП6	÷	ИП6	ИПА	×	F1/x	С/П
ИП7	/—/	ИПА	×	Farctg	ИП6	$F\sqrt{-}$	F1/x	БП	10

Пример. Для  $R = 100$  Ом,  $L = 2$  Гн и  $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$  Ф получим  $f_0 = 355,881128$  Гц; задав  $f = 400$  Гц, находим  $x = -99,99726$  Ом,  $y = -0,52382284$  Ом,  $|z| = 99,99864$  Ом и  $\theta = -0,300134^\circ$ . Для  $f = 50$  Гц имеем  $x = 97,623816$  Ом,  $y = 15,230618$  Ом,  $|z| = 98,804768$  Ом и  $\theta = 8,8674223^\circ$ .

**Программа 7.11.** Расчет резонансной частоты  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  резонансного контура (рис. 7.6, в), действительной  $x$  и мнимой  $y$  частей его полного сопротивления на заданной частоте

$$z = x + iy = \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + R_1 (\omega L - 1/\omega C)^2}{F} + i \frac{R_1^2 (\omega L - 1/\omega C)}{F},$$

где

$$F = (R_1 + R_2)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2,$$

модуля полного сопротивления  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  и угла сдвига фаз  $\theta = \text{arctg}(y/x)$ . Ввод:  $R_1 = P1$ ,  $R_2 = P2$ ,  $L = PB$ ,  $C = PC$  В/О С/П (получаем  $f_0$ ) С/П (получаем  $x \rightarrow PX = P4$ ,  $y \rightarrow PY = P5$ ) С/П (получаем  $|z| \rightarrow PX$  и  $\theta \rightarrow PY$ ). После этого можно вводить новое значение  $f$ .

ИПВ	ИПС	×	$F\sqrt{-2}$	×	$F\pi$	×	$F1/x$	ПД	
С/П	П9	$F\pi$	×	2	×	П8	ИПВ	×	ИП8
ИПС	×	$F1/x$	—	П7	$Fx^2$	ИП1	ИП2	+	$Fx^2$
+	П6	ИП7	ИП1	$Fx^2$	×	XY	÷	П5	ИП1
ИП2	×	ИП1	ИП2	+	×	ИП1	ИП7	$Fx^2$	×
+	ИП6	÷	П4	С/П	ИП5	ИП4	÷	$F\text{arctg}$	ИП5
$Fx^2$	ИП4	$Fx^2$	+	$F\sqrt{-}$	БП	10			

**Пример.** Для  $R_1 = 10000$  Ом,  $R_2 = 100$  Ом,  $L = 2$  Гн  $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$  Ф получим  $f_0 = 355,88128$  Гц. Задав  $f = 400$  Гц, находим  $x = 204,40985$  Ом,  $y = 1016,0978$  Ом,  $|z| = 1036,4545$  Ом и  $\theta = 78,625545^\circ$ .

В радиотехнических, в частности в радиоприемных, устройствах широкое применение нашли связанные контуры (рис. 7.7).

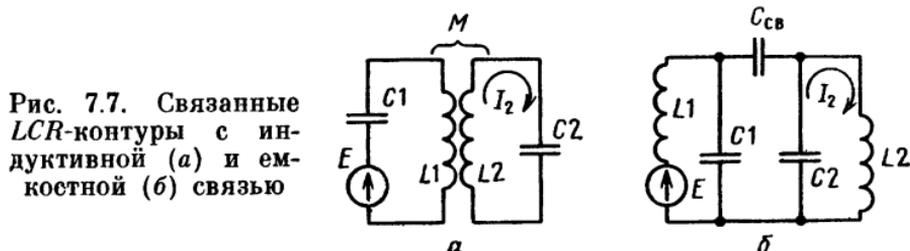


Рис. 7.7. Связанные LCR-контур с индуктивной (а) и емкостной (б) связью

Степень связи между ними характеризуется коэффициентом связи  $K_{св}$ . При индуктивной связи (рис. 7.7, а)  $K_{св} = M/\sqrt{L_1 L_2}$ , а при емкостной —  $K_{св} = C_{св}/\sqrt{(C_1 + C_{св})(C_2 + C_{св})}$ , где  $M$  — коэффициент взаимной индукции между катушками контуров, а  $C_{св}$  — емкость конденсатора связи. Обычно потери в контурах, обусловленные сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$ , учитывают с помощью добротности. Добротность  $Q = \omega_0 L/r$ , где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная круговая частота

( $\omega_0 = 2\pi f_0$ ),  $L$  — индуктивность контура (т. е.  $L_1$  или  $L_2$ ),  $r$  — сопротивление потерь ( $r_1$  или  $r_2$ ). Обычно применяются связанные контуры с  $L_1 = L_2 = L$ ,  $C_1 = C_2 = C$  и  $Q_1 = Q_2 = Q$ . Тогда  $K_{св} = M/L$  или  $K_{св} = C_{св}/(C + C_{св})$ . Степень связи удобно оценивать обобщенным параметром  $P_{св} = QK_{св}$ .

Зависимость тока  $I_2$  во втором контуре от частоты  $f$  при заданной э. д. с.  $E$  удобно представить в нормированном виде

$$K(\xi) = \frac{I_2}{I_{2p}} = \left[ \frac{1 + P_{св}^2}{\sqrt{(1 + P_{св}^2 - \xi^2) + 4\xi^2}} \right],$$

где  $I_{2p}$  — ток при  $f = f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ , т. е. при резонансной частоте,

$$\xi = Q[f/f_0 - f_0/f]$$

— обобщенная расстройка. Зависимость  $K(\xi)$  есть резонансная кривая связанных контуров.

**Программа 7.12.** Расчет резонансной частоты  $f_0$  связанных контуров, обобщенной расстройки  $\xi$  при заданной частоте  $f$  и относительно коэффициента передачи  $K(\xi)$ . Ввод:  $P_{св} = PA$ ,  $L = PB$ ,  $C = PC$ ,  $Q = PD$  В/О С/П (получаем  $f_0$ )  $f$  С/П (получаем  $K(\xi)$ ) →  $PX$  и  $\xi$  →  $PY$ ). Далее можно вводить новое значение  $f$ .

ИПВ	ИПС	×	$F\sqrt{\quad}$	2	×	Пл	×	$F1/x$	П9
С/П	ИП9	÷	↑	$F1/x$	—	ИПД	×	↑	$Fx^2$
П8	1	ИПА	$Fx^2$	+	П7	XY	—	$Fx^2$	ИП8
4	×	+	$F\sqrt{\quad}$	ИП7	XY	÷	БП	10	

**Пример.** Для  $P_{св} = 2$ ,  $L = 10^{-3}$  Гн,  $C = 10^{-9}$  Ф и  $Q = 100$  находим  $f_0 = 159154,94$  Гц. Далее для  $f = 160000$  Гц получаем  $K(\xi) = 1,1314685$  и  $\xi = 1,05912$ , для  $f = 161000$  Гц  $K(\xi) = 1,0819556$  и  $\xi = 2,30528$ , для  $f = 162000$  Гц  $K(\xi) = 0,48254229$  и  $\xi = 3,54381$  и т. д.

## 7.2. Расчет индуктивных элементов

Пакет программ, приведенных ниже, обеспечивает вычисление индуктивности  $L$  как функции от ряда конструктивных параметров индуктивных элементов  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Если можно выразить некоторый основной параметр  $x_0$  (обычно это число витков  $\omega$ ) через заданное значение  $L_0$ , то программа предусматривает два варианта расчета: 1 — расчет  $L$  по заданным  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и 2 — расчет  $x_0$  по заданным  $L_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если этого сделать нельзя, то  $x_0$  находится из решения нелинейного уравнения

$$L(x_0, x_1, \dots, x_n) - L_0 = 0.$$

Формулы для зависимости  $L(x_0, x_1, \dots, x_n)$  взяты из [8—10] и справочной литературы по расчету индуктивностей. Индуктивность

$L$  везде выражается в наногенри (нГн), конструктивные размеры — в сантиметрах (см).

**Программа 7.13.** Расчет индуктивности  $L$  отрезка кругового провода с длиной  $l$  и диаметром  $d$ :

$$L = 2l \left( \operatorname{arsh} \frac{l}{d} + \frac{d}{l} - \sqrt{\left(\frac{d}{l}\right)^2 + 1} \right).$$

**Ввод:**  $d = \text{РД}$  и  $l = \text{РХ}$ . После первого пуска (нажатием клавиш В/0 и С/П) можно вводить новое значение  $l = \text{РХ}$ .

↑	ИПД	÷	П9	↑	Fx²	1	+	FV√+
Fln	ИП9	F1/x	+	FBx	Fx²	1	+	FV√-
×	2	×	С/П	БП	00			

**Пример.** Для  $d = 0,1$  см и  $l = 1$  см получим  $L = 4,1864708$  нГн.

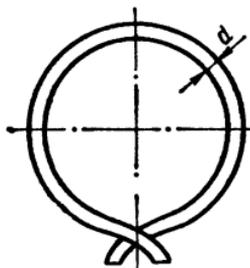
**Программа 7.14.** Расчет индуктивности  $L$  отрезка прямоугольного провода с длиной  $l$ , шириной  $b$  и толщиной  $t$

$$L = 2l \left( \ln \frac{2l}{b+t} + 0,447 \frac{t+b}{2l} + \frac{1}{2} \right).$$

**Ввод:**  $b = \text{РВ}$ ,  $t = \text{РС}$  и  $l = \text{РХ}$ . После первого пуска нажатием клавиш В/0 и С/П можно вводить новое значение  $l = \text{РХ}$ .

ПА	2	×	ИПВ	ИПС	+	П9	÷	Fln	ИП9
0	,	4	4	7	×	2	÷	ИПА	÷
+	2	F1/x	+	2	×	ИПА	×	С/П	БП
00									

**Пример.** Для  $b = 0,1$  см,  $t = 0,001$  см и  $l = 1$  см получим  $L = 7,0167108$  нГн.



**Рис. 7.8.** Виток в свободном пространстве

**Программа 7.15.** Расчет индуктивности  $L$  одиночного круглого витка со средним диаметром витка  $D$  и диаметром провода  $d$  (рис. 7.8):

$$L = 2\pi D \left( \ln \frac{8D}{d} - 1,75 \right).$$

**Ввод:**  $d = \text{РД}$  и  $D = \text{РХ}$ . После первого пуска нажатием клавиш В/0 и С/П можно вводить новое значение  $D = \text{РХ}$ .

↑ ИПД ÷ 8 × Flп 1 , 7 5  
 — × 2 × Fl × С/П БП 00

Пример. Для  $d = 0,1$  см и  $D = 2$  см находим  $L = 41,785364$  нГн.

Программа 7.16. Расчет индуктивности  $L$  тонкопленочного круглого витка с диаметром  $D$  и шириной полоски  $b$  ( $b \gg t$ , где  $t$  — толщина полоски):

$$L = 2\pi D \left( \ln \left( \frac{2\pi D}{b} \right) - 2,451 \right).$$

Ввод:  $b = PB$  и  $D = PX$ . После первого пуска программы нажатием клавиш В/0 и С/П можно вводить новое значение  $D = PX$ .

Flп × 2 × ↑ ИПВ ÷ Flп 2  
 4 5 1 — × С/П БП 00

Пример. Для  $b = 0,01$  см и  $D = 1$  см получим  $L = 25,082772$  нГн.

Программа 7.17. Расчет индуктивности тонкопленочного квадратного витка со стороной квадрата  $l$  и шириной полоски  $b$  ( $b \gg t$ , где  $t$  — толщина полоски):

$$L = 2l \left( \ln \frac{8l}{b} - 2,583 \right).$$

Ввод:  $b = PB$  и  $l = PX$ . После первого пуска программы нажатием клавиш В/0 и С/П можно вводить новое значение  $l$ .

↑ ИПВ ÷ 8 × Flп 2 , 8 5  
 3 — × 8 × С/П БП 00

Пример. Для  $b = 0,01$  см и  $l = 1$  см получим  $L = 30,652894$  нГн.

Программа 7.18. Расчет индуктивности  $L$  однослойной катушки круглого сечения (рис. 7.9) со средним радиусом  $R$  и длиной

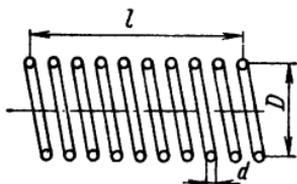


Рис. 7.9. Однослойная катушка (в разрезе)

катушки  $l$  или числа витков  $\omega$  по заданному  $L$ :

$$L = F\omega^2; \quad \omega = \sqrt{L/F},$$

где

$$F = 4\pi a \left[ \ln \left( 1 + \frac{\pi}{(b/a)} \right) + \frac{1}{2,3 + 1,6b/a + 0,44(b/a)} \right].$$

Ввод:  $R = PA$ ,  $l = PB$  В/0  $L = PX$  С/П  $\omega = PX$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вводить новые значения  $L$  и  $\omega$ .

ПЗ	С/П	П4	ИПВ	ИПА	÷	П5	1	,	6
×	2	,	3	+	0	,	4	4	ИП5
$Fx^2$	×	+	$F1/x$	1	$F\pi$	ИП5	÷	+	$Fln$
+	$F\pi$	×	ИПА	×	4	×	П6	ИП3	$Fx \neq 0$
48	ИП3	ИП6	÷	$F\sqrt{\quad}$	П4	БП	52	ИП6	ИП4
$Fx^2$	×	С/П	БП	00					

Пример. Для  $R = 1$  см,  $l = 2$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 10$  получим  $L = 1359,6268$  нГн.

**Программа 7.19.** Расчет индуктивности  $L$  однослойной катушки квадратного сечения со средней длиной стороны квадрата  $2a$ , длиной всей катушки  $l$  и числом витков  $\omega$  при заданной индуктивности:

$$L = F\omega^2, \quad \omega = \sqrt{L/F},$$

где

$$F = 16a \left[ \ln \left( 1 + \frac{\pi}{(l/a)} \right) + \frac{1}{3,64 + 2(l/a) + 0,51(l/a)^2} \right].$$

Ввод:  $a = PA$ ,  $l = PB$  В/0  $L = PX$  С/П  $\omega = PX$  С/П (исктому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вновь задавать  $L$  и  $\omega$ .

ПЗ	С/П	П4	ИПВ	ИПА	÷	П5	2	×	3
,	6	4	+	0	,	5	1	ИП5	$Fx^2$
×	+	$F1/x$	1	$F\pi$	ИП5	÷	+	$Fln$	+
1	6	×	ИПА	×	П6	ИП3	$Fx \neq 0$	46	ИП3
ИП6	÷	$F\sqrt{\quad}$	П4	БП	50	ИП6	ИП4	$Fx^2$	×
С/П	БП	00							

Пример. Для  $a = 1$  см,  $b = 2$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 40$  получим  $L = 26816,55$  нГн, а для  $L = 26816,55$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 39,999998$ .

**Программа 7.20.** Расчет индуктивности  $L = F\omega^2$  или числа витков  $\omega = \sqrt{L/F}$  тороидальной однослойной катушки круглого сечения (рис. 7.10) со средним диаметром  $D$  и диаметром сечения

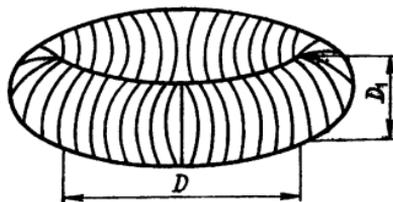


Рис. 7.10. Тороидальная катушка круглого сечения

$D_1 \left( F = 2\pi \left( D - \sqrt{D^2 - D_1^2} \right) \right)$ . Ввод:  $D = P0$ ,  $D_1 = P1$  В/0  $L = PX$  С/П  $\omega = PX$  С/П (исктому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вводить новые значения  $L$  и  $\omega$ .

П2	С/П	П3	ИПО	↑	$Fx^2$	ИП1	$Fx^2$	—	$F\sqrt{\quad}$
—	2	×	$F\pi$	×	П4	ИП2	$Fx \neq 0$	26	ИП2
ИП4	÷	$F\sqrt{\quad}$	П3	БП	30	ИП4	ИП3	$Fx^2$	×
С/П	БП	00							

Пример. Для  $D = 3$  см,  $D_1 = 1$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 300$  получим  $L = 97022,187$  нГн, а для  $L = 10^5$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 304,56901$ .

**Программа 7.21.** Расчет индуктивности  $L = F\omega^2$  или числа витков  $\omega = \sqrt{L/F}$  однослойной катушки квадратного сечения (рис. 7.11) с внутренним диаметром тора  $D_1$ , наружным  $D_2$  и высотой  $h$  ( $F = 2h \ln(D_2/D_1)$ ). Ввод:  $h = P0$   $D_1 = P1$   $D_2 = P2$  В/0  $L = PX$  С/П  $\omega = PX$  С/П (искомому параметру задается нулевое

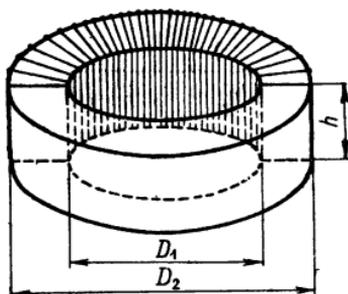


Рис. 7.11. Торoidalная катушка прямоугольного сечения

значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вводить новые значения  $L$  и  $\omega$ .

П3	С/П	П4	ИП2	ИП1	÷	$F\ln$	2	×	ИПО
×	П5	ИП3	$Fx \neq 0$	22	ИП3	ИП5	÷	$F\sqrt{\quad}$	П4
БП	26	ИП5	ИП4	$Fx^2$	×	С/П	БП	00	

Пример. Для  $h = 1$  см,  $D_1 = 1$  см,  $D_2 = 3$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 100$  получим  $L = 21972,244$  нГн, а для  $L = 21972,244$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 100$ .

**Программа 7.22.** Расчет индуктивности  $L = F\omega^2$  или числа витков  $\omega = \sqrt{L/F}$  многослойной торoidalной катушки со средним диаметром тора  $D$  (включая обмотку) и диаметром сечения тора  $D_1$ , где

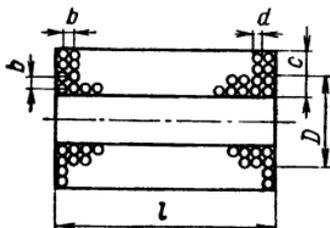
$$F = 2\pi D \left( \ln \frac{8D}{D_1} - 1,75 \right).$$

Ввод:  $D = P0$ ,  $D_1 = P1$  В/0  $L = PX$  С/П  $\omega = PX$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вводить новые значения  $L$  и  $\omega$ .

П2	С/П	П3	ИПО	ИПО	8	×	ИП1	÷	$F\ln$
1	,	7	5	—	×	2	×	$F\pi$	×
П4	ИП2	$Fx \neq 0$	31	ИП2	ИП4	÷	$F\sqrt{\quad}$	П3	БП
35	ИП4	ИП3	$Fx^2$	×	С/П	БП	00		

**Пример.** Для  $D = 4$  см,  $D_1 = 0,8$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 100$  получим  $L = 487293,55$  нГн, а для  $L = 10^7$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 453,00674$ .

**Программа 7.23.** Индуктивность  $L = F\omega^2$  или число витков  $\omega = \sqrt{L/F}$  многослойной цилиндрической катушки (рис. 7.12) со средним диаметром  $D$ , длиной  $l < D$  и толщиной  $c$  ( $F = 25\pi D / (3D + 9l + 10c)$ ). Ввод:  $l = \text{PB}$ ,  $c = \text{PC}$ ,  $D = \text{PD}$  В/0  $L = \text{PX}$  С/П



**Рис. 7.12.** Короткая многослойная цилиндрическая катушка

$\omega = \text{PX}$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вводить новые значения  $L$  и  $\omega$ .

П2	С/П	ПЗ	Фл	2	5	×	ИПД	$Fx^2$	×
ИПД	3	×	ИПВ	9	×	+	ИПС	1	0
×	+	÷	П4	ИП2	$Fx \neq 0$	34	ИП2	ИП4	÷
$F\sqrt{\quad}$	ПЗ	БП	38	ИП4	ИПЗ	$Fx^2$	×	С/П	БП
00									

**Пример.** Для  $l = 1$  см,  $c = 1$  см,  $D = 2,5$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 100$  получим  $L = 185235,41$  нГн, а для  $L = 2 \cdot 10^5$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 103,90895$ .

**Программа 7.24.** Расчет индуктивности  $L = F\omega^2$  или числа витков  $\omega = \sqrt{L/F}$  катушки с плотной равномерно распределенной на ферромагнитном сердечнике прямоугольного сечения обмоткой. Здесь

$$F = 4\mu h (d_n - d_b) / (d_n + d_b) \quad \text{при } d_n/d_b < 1,75,$$

$$F = 2\mu h \ln(d_n/d_b) \quad \text{при } d_n/d_b \geq 1,75$$

и  $d_n$  — наружный диаметр сердечника,  $d_b$  — внутренний диаметр его,  $h$  — высота сердечника и  $\mu$  — его магнитная проницаемость. Ввод:  $\mu = \text{PA}$ ,  $h = \text{PB}$ ,  $d_b = \text{PC}$ ,  $d_n = \text{PD}$  В/0  $L = \text{PX}$  С/П  $\omega = \text{PX}$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно задавать новые значения  $L$  и  $\omega$ .

П2	С/П	ПЗ	ИПД	ИПС	÷	1	,	7	5
—	$Fx \geq 0$	20	ИПД	ИПС	÷	$F \ln$	2	БП	28
ИПД	ИПС	—	ИПД	ИПС	+	÷	4	×	ИПА
×	ИПВ	×	П4	ИП2	$Fx \neq 0$	44	ИП2	ИП4	÷
$F\sqrt{\quad}$	ПЗ	БП	48	ИП4	ИПЗ	$Fx^2$	×	С/П	БП
00									

**Пример.** Для  $\mu = 1000$ ,  $h = 1$  см,  $d_b = 3$  см,  $d_n = 4$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 200$  получим  $L = 22857142$  нГн, при  $L = 2 \cdot 10^7$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 187,08286$ . При  $d_b = 2$  см и прочих исходных данных для  $L = 0$  и  $\omega = 120$  получим  $L = 19962637$  нГн, а при  $L = 2 \cdot 10^7$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 120,11224$ .

**Программа 7.25.** Индуктивность  $L = F\omega^2$  или число витков  $\omega = \sqrt{L/F}$  катушки на П- или Ш-образном замкнутом сердечнике (рис. 7.13). Здесь

$$F = 4\pi\mu F_c / (l_m (1 + \mu d_i / a l_m)),$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость сердечника,  $a = 1-2$  — поправочный коэффициент на рассеивание в зазоре,  $l_m$  — средняя длина

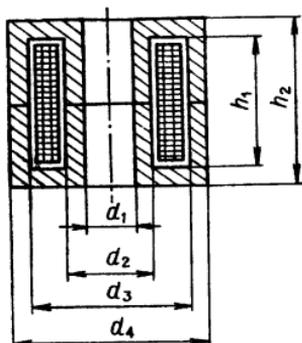


Рис. 7.13. Сердечник из элементов П-образной (а) и Ш-образной (б) формы

линии в сердечнике,  $F_c$  — площадь поперечного сечения сердечника,  $d_i$  — толщина зазора. Ввод:  $\mu = P0$ ,  $a = PA$ ,  $l_m = PB$ ,  $F_c = PC$ ,  $d_i = PD$  В/0  $L = PX$  С/П  $\omega = PX$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вводить новые значения  $L$  и  $\omega$ .

П2	С/П	П3	4	Фл	×	ИПС	×	ИПО	×
ИПВ	÷	ИП0	ИПД	×	ИПА	÷	ИПВ	÷	1
+	÷	П4	ИП2	$Fx \neq 0$	33	ИП2	ИП4	÷	$F\sqrt{\quad}$
П3	БП	37	ИП4	ИП3	$Fx^2$	×	С/П	БП	00

**Пример.** Для  $\mu = 1000$ ,  $a = 1,5$ ,  $l_m = 10$  см,  $F_c = 1$  см<sup>2</sup>,  $d_i = 0,05$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 400$  получим  $L = 46398904$  нГн, а для  $L = 5 \cdot 10^7$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 415,23229$ .

**Программа 7.26.** Индуктивность  $L = F\omega^2$  или число витков  $\omega = \sqrt{L/F}$  катушки на бронеовом цилиндрическом ферромагнитном сердечнике (рис. 7.14). Здесь

$$F = 19,74\mu / (A + B),$$

$$A = (h_1 + h_2) \left( \frac{1}{d_4^2 - d_3^2} + \frac{1}{d_2^2 - d_1^2} \right),$$

$$B = \frac{1}{h_2 - h_1} \ln \left( \frac{d_3 + d_4}{d_1 + d_2} \right).$$

Ввод:  $d_1 = P1$   $d_2 = P2$   $d_3 = P3$   $d_4 = P4$   $h_1 = P5$   $h_2 = P6$   $\mu = P7$   
 $B/0$   $L = PX$   $C/\Pi$   $\omega = PX$   $C/\Pi$  (искомому параметру задается нуле-

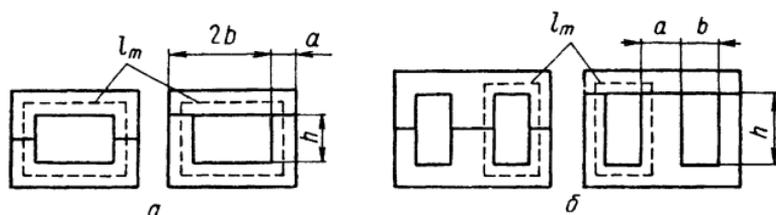


Рис. 7.14. Катушка на броневом ферромагнитном сердечнике

вое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вводить новые значения  $L$  и  $\omega$ .

П0	С/П	П8	ИП4	$Fx^2$	ИП3	$Fx^2$	—	$F1/x$	ИП2
$Fx^2$	ИП1	$Fx^2$	—	$F1/x$	+	ИП6	ИП5	+	×
ПА	ИП3	ИП4	+	ИП1	ИП2	+	÷	$Fln$	ИП6
ИП5	—	÷	ПВ	1	9	,	7	4	ИП7
×	ИПА	ИПВ	+	÷	ПС	ИП0	$Fx \neq 0$	56	ИП0
ИПС	÷	$F\sqrt{\quad}$	П8	БП	60	ИПС	ИП8	$Fx^2$	×
С/П	БП	00							

Пример. Для  $d_1 = 1$  см,  $d_2 = 2$  см,  $d_3 = 4$  см,  $d_4 = 5$  см,  $h_1 = 3$  см,  $h_2 = 4$  см,  $\mu = 10$ ,  $L = 0$  и  $\omega = 100$  получим  $L = 468914,42$  нГн, а для  $L = 5 \cdot 10^5$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 103,26144$ .

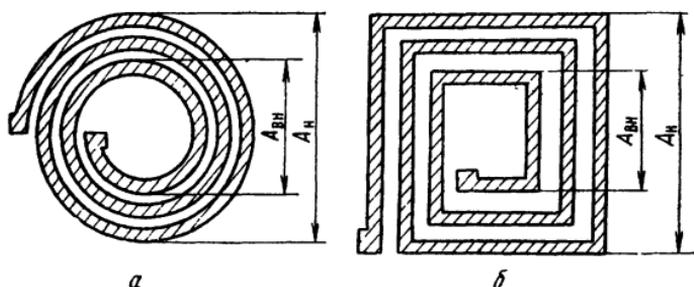


Рис. 7.15. Тонкопленочные катушки с витками круглой (а) и квадратной (б) формы

Программа 7.27. Расчет индуктивности  $L = F\omega^{5/3}$  или числа витков  $\omega = (L/F)^{3/5}$  тонкопленочной катушки с заданными размерами  $A_H$  и  $A_B$  (рис. 7.15). Здесь

$$F = K_1 (A_H + A_B) \ln \left( K_2 \frac{A_H + A_{ВН}}{A_H - A_{ВН}} \right),$$

где  $k_1 = 2,33$  и  $k_2 = 4$  для круглой катушки и  $k_1 = 12,05$  и  $k_2 = 8$  для квадратной. Ввод:  $k_1 = P1$ ,  $k_2 = P2$ ,  $A_H = P3$ ,  $A_B = P4$

**В/0**  $L = \text{РХ С/П } \omega = \text{РХ С/П}$  (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $L$  или  $\omega$  можно вводить новые значения  $L$  и  $\omega$ .

П5	С/П	П6	ИПЗ	ИП4	+	↑	ИПЗ	ИП4	—
÷	ИП2	×	Fln	×	ИП1	×	П7	ИП5	$Fx \neq 0$
32	3	↑	5	÷	ИП5	ИП7	÷	$Fx^y$	П6
БП	40	5	↑	3	÷	ИП6	$Fx^y$	ИП7	×
С/П	БП	00							

**Пример.** Для  $k_1 = 2,33$ ,  $k_2 = 4$ ,  $A_n = 1$  см,  $A_n = 0,5$  см,  $L = 0$  и  $\omega = 5$  получим  $L = 126,97177$  нГн, а для  $L = 200$  нГн и  $\omega = 0$  получим  $\omega = 6,5669484$ .

**Программа 7.28.** Расчет взаимной индуктивности  $M$  двух тонких проводов длиной  $l$ , расположенных параллельно на расстоянии  $h$  друг от друга:

$$M = 2l \left( \operatorname{arsh} \frac{l}{h} + \frac{h}{l} - \sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + 1} \right).$$

**Ввод:**  $h = \text{РА В/0 } l \text{ С/П}$  (после получения  $M \rightarrow \text{РХ}$  можно вводить новое значение  $l$ ).

ПВ	ИПА	÷	↑	↑	$Fx^2$	1	+	$F\sqrt{-}$	+
Fln	XY	$F1/x$	+	FBx	$Fx^2$	1	+	$F\sqrt{-}$	—
2	×	ИПВ	×	С/П	БП	00			

**Пример.** Для  $h = 1$  см и  $l = 10$  см получим  $M = 41,864708$  нГн.

**Программа 7.29.** Расчет взаимной индуктивности  $M$  двух тонких проводов длиной  $a$  и  $b$ , расположенными на одной прямой с расстоянием между стыкуемыми концами  $h$ :

$$M = (a + b + h) \ln(a + b + h) + h \ln h - (a + h) \ln(a + h) - (b + h) \ln(b + h).$$

**Ввод:**  $a = \text{РА } b = \text{РВ В/0 } h \text{ С/П}$  (после получения  $M \rightarrow \text{РХ}$  можно вводить новое значение  $h$ ).

ПС	ИПА	+	ИПВ	+	↑	F ln	×	ИПС	↑
Fln	×	+	ИПА	ИПС	+	↑	Fln	×	—
ИПВ	ИПС	+	↑	Fln	×	—	С/П	БП	00

**Пример.** Для  $a = 10$  см,  $b = 5$  см и  $h = 1$  см получим  $M = 7,234013$  вГн.

**Программа 7.30.** Расчет взаимной индуктивности  $M$  двух прямых проводов длиной  $l$ , сходящихся в одной точке, с расстоянием между сходящимися концами  $c$  и углом между ними  $\varphi$ :

$$M = 2l \cos \varphi \ln(1 + 2l/c).$$

Ввод:  $c = PC$ ,  $\varphi = PD$  В/0  $l = PX$  С/П (после получения  $M \rightarrow PX$  можно вводить новое значение  $l$ ).

ПВ 2 × ИПД Fcos × ИПВ 2 × ИПС  
 ÷ 1 + Fln × С/П БП 00

Пример. Для  $c = 5$  см  $\varphi = 30^\circ$  (переключатель Р — Г в положении Г) и  $l = 20$  см получим  $M = 76,114093$  нГн.

Программа 7.31. Расчет взаимной индуктивности двух тонких круглых катушек с диаметром  $D$  и расстоянием  $h$  между ними:

$$M = 0,6\omega_1\omega_2D^4/h^3,$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — число витков катушек. Ввод:  $\omega_1 = P1$ ,  $\omega_2 = P2$ ,  $D = PD$  В/0  $h = PX$  С/П (после получения  $M \rightarrow PX$  можно вводить новое значение  $h$ ).

ПА ↑ Fx<sup>2</sup> × ИП1 ИП2 × 0 , 6  
 × ИПД Fx<sup>2</sup> Fx<sup>2</sup> × ХУ ÷ С/П БП 00

Для  $\omega_1 = 50$ ,  $\omega_2 = 50$ ,  $D = 2$  см и  $h = 0,5$  см получим  $M = 192000$  нГн.

Программа 7.32. Расчет взаимной индуктивности двух коаксиальных катушек, намотанных на тороидальный ферромагнитный сердечник:

$$M = 4\pi\omega_1\omega_2F_{с\text{ ср}}/l_{ср},$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — число витков катушек,  $F_{с\text{ ср}}$  — площадь среднего поперечного сечения (с учетом толщины первой катушки, заполняющей весь сердечник),  $l_{ср}$  — длина средней окружности тора. Ввод:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $F_{с\text{ ср}}$  и  $l_{ср}$  в регистр X. Вывод результата:  $M \rightarrow PX$ .

С/П С/П С/П F1/x × 4 × Fl × ×  
 × С/П

Пример. Для  $\omega_1 = 200$ ,  $\omega_2 = 50$ ,  $F_{с\text{ ср}} = 1$  см<sup>2</sup> и  $l_{ср} = 8$  см получим  $M = 15707,963$ .

Программа 7.33. Расчет  $\omega$  тонкопленочной катушки (см. рис. 7.15) с заданным шагом  $l$  и размером  $A_{вн}$  из уравнения

$$L_0 - k_1 \left( 1 + \frac{2A_{вн}}{\omega l} \right) l \omega^{3/3} \ln \left[ k_2 \left( 1 + \frac{2A_{вн}}{\omega l} \right) \right] = 0.$$

Ввод:  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $A_{вн}$ ,  $l$  и  $L_0$  в регистр X. Для круглой катушки  $k_1 = 2,33$  и  $k_2 = 4$ , для квадратной  $k_1 = 12,05$  и  $k_2 = 8$ .

П7 С/П П9 С/П П4 С/П П5 С/П П6 0  
 П2 1 П3 ИП2 ИП3 + П2 ИП4 2 ×  
 ИП2 ÷ ИП5 ÷ 1 + П8 ИП9 × Fln  
 ИП5 × ИП8 × ИП7 × П8 8 ↑ 3  
 ÷ ИП2 Fx<sup>y</sup> ИП8 /—/ × ИП6 + Fx < 0 13  
 ИП2 ИП3 → П2 С/П ИП3 1 0 ÷ П3  
 БП 13

Пример. Для  $k_1 = 2,33$ ,  $k_2 = 4$ ,  $A_{вн} = 0,2$  см,  $l = 0,05$  см и  $L_0 = 100$  нГн получим  $\omega = 7,14$ , нажимая три раза (с перерывами на время счета) клавишу С/П.

Дроссель фильтра обычно выполняется на П- или Ш-образном сердечнике из стальных пластин (или ленты) (см. рис. 7.13). Он должен обеспечить заданную индуктивность  $L_0$  при токе, текущем через обмотку дросселя,  $I_0$ . Расчет дросселя выполняется по методике [8] с помощью двух программ.

Программа 7.34. Расчет ширины стержня  $a$ , поперечного сечения  $Q$ , оптимального зазора  $l_z/2$ , коэффициента  $M$ , относительной длины воздушного зазора  $l_z$  % (в % от  $l_m$ ), эффективной магнитной проницаемости материала сердечника  $\mu_z$  и толщины набора  $c$ . Ввод:  $I_0 = P0$ ,  $L_0 = P1$ .

ИП0	$Fx^2$	ИП1	×	П9	$F\sqrt{\quad}$	$F\sqrt{\quad}^2$	,	6	
×	С/П	$Fx^2$	1	,	5	×	С/П	ИПА ÷	
ПС	ИП9	ИП2	÷	ИП4	÷	П5	$Fx^2$	1 5	
ВП	3	×	П9	ИП5	3	3	0	×	ИП9
—	П6	ИП5	/—/	4	0	1	×	$Fe^x$	1
1	4	×	5	0	+	П7	ИП6	ИП4	×
2	0	÷	С/П						

Пример. Пусть нужно рассчитать дроссель, имеющий  $L_0 = 1 = 3 \cdot 10^{-4}$  Гн при рабочем токе  $I_0 = 15$  А. Введя  $I_0$  и  $L_0$  и нажав клавиши В/0 и С/П, находим  $a = 2,6 \sqrt[4]{L_0 I_0^2} = 1,3252545$  см. Еще раз нажав клавишу С/П, находим  $Q = 1,5 a^2 = 2,6344491$  см<sup>2</sup>. По нормам Н0.666.002 «Магнитопроводы ленточные» выбираем подходящий сердечник ШЛ 16 × 16. Вводим в машину его уточненные данные:  $a = 1,6$  см = РА,  $b = 1,6$  см = РВ,  $h = 4$  см = РЗ,  $l_m = 13,7$  см = Р4 и  $Q = 2,65 = P2 = PX$ . Нажав клавишу С/П, получим:  $M = L_0 I_0^2 / (acl_m) = 1,859248 \cdot 10^{-3} \rightarrow P5$ ,  $l_z \% = 330 M - 15 \cdot 10^3 M^2 = 0,56169979$  мм  $\rightarrow P6$ ,  $\mu_z = (114 \exp(-401 M) + 50) = 104,08949 \rightarrow P7$ ,  $c = Q/a = 1,65625$  см  $\rightarrow PC$  и  $l_z/2 = l_z \% l_m / 20 = 0,38476435$  мм  $\rightarrow PX$ . Переходим к следующей программе.

Программа 7.35. Расчет диаметра провода  $d$ , числа витков  $\omega$ , омического сопротивления  $r$  и коэффициента заполнения окна медью  $k_m$ . Ввод (после выполнения программы 7.34): допустимая плотность тока  $\delta = P8$ .

ИП0	ИП8	÷	$F\sqrt{\quad}$	1	,	1	3	×	П9	
С/П	ИП1	ИП4	×	1	,	2	6	÷	ИП7	
÷	ИП2	÷	$F\sqrt{\quad}$	1		ВП	4	×	ПД	С/П
ИПА	ИПС	+	2	×	ИПВ	$F\pi$	×	+	ИПД	
×	2	,	2	5	ВП	4	/—/	×	ИП9	
$Fx^2$	П9	÷	С/П	ИП9	ИПД	×	8	ВП	3	
/—/	×	ИПВ	÷	ИПЗ	÷	С/П				

Пример. Введя  $\delta = 3 \text{ А/мм}^2$  и нажав клавиши В/0 и С/П, найдем  $d = 1,13 \sqrt{I_0/\delta} = 2,5267567 \text{ мм}$ . Нажав еще раз клавишу С/П, получим  $\omega = 10^4 \sqrt{L_0 I_m} / 1,26 \mu_z a c = 34,388184$ , далее, дважды нажав клавишу С/П, получим  $r = 2,25 \cdot 10^{-4} \omega [2(a+c) + \pi b] / d = = 1,3984111 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$  и  $k_m = 8 \cdot 10^{-3} \omega d^2 / (bh) = 0,27443915$ .

Исходными данными при расчете силового трансформатора являются: габаритная мощность  $P_r$ , максимальная индукция в сердечнике  $B_m$ , число стержней сердечника с обмотками  $S$ , допустимая плотность тока  $\delta$ , коэффициент заполнения окна сердечника медью  $k_m$ , к. п. д. трансформатора  $\eta$ , напряжения  $U_1$  и  $U_2$  и токи  $I_1$  и  $I_2$  первичной и вторичной обмотки. Порядок технического расчета силового трансформатора следующий.

1. Находим произведение сечений стали  $Q_{ст}$  и окна  $Q_0$  сердечника

$$Q_{ст} Q_0 = P_r / (0,022 f B_m \delta \eta S k_c k_m).$$

Подбираем подходящий тип сердечника и уточняем для него значения  $Q_{ст}$  и  $Q_0$ .

2. Определяем э. д. с. одного витка  $e = 4,44 f B_m Q_{ст} k_c \cdot 10^4$ .

3. Находим число витков вторичной обмотки  $\omega_2 = U_2 / e$ .

4. Находим приближенное число витков первичной обмотки  $\omega_1 = U_1 / e$ .

5. Определяем диаметр провода вторичной обмотки (без изоляции)  $d_2 = 1,13 \sqrt{I_2 / \delta}$ .

6. Определяем диаметр провода первичной обмотки (без изоляции)  $d_1 = 1,13 \sqrt{I_1 / \delta}$ .

7. Находим длину провода первичной обмотки  $l_1 = \omega_1 [2(a+c) + \pi b] \cdot 10^{-2}$ , где  $a$  — ширина сердечника,  $b$  — ширина окна и  $c$  — толщина набора.

8. Рассчитываем падение напряжения на активном сопротивлении первичной обмотки  $\Delta U_1 = 2,25 \cdot 10^{-2} I_1 l_1 / d_1^2$ .

9. Уточняем число витков первичной обмотки  $\omega_1 = (U_1 - \Delta U_1) / e$ .

Программа 7.36. Расчет силового трансформатора. Ввод:  $f B_m = = P1$ ,  $\delta = P2$ ,  $\eta = P3$ ,  $S = P4$ ,  $k_c = P5$ ,  $k_m = P6$  и далее в соответствии с табл. 7.1.

ИП1	÷	ИП2	÷	ИП3	÷	ИП4	÷	ИП5	÷
ИП6	÷	4	5	×	С/П	ИПА	ИПС	×	ИП1
×	ИП5	×	4	4	4	ВП	6	/—/	×
ПО	С/П	ИП0	÷	С/П	П7	ИП0	÷	П8	С/П
ИП2	÷	$F\sqrt{\quad}$	1	,	1	3	×	С/П	П9
ИП2	÷	$F\sqrt{\quad}$	1	,	1	3	×	ПД	С/П
ИПА	ИПС	÷	2	×	ИПВ	Пл	×	+	ИП8

$\times$  1 0 0  $\div$  С/П ИП9  $\times$  0 ,  
 0 2 2 5  $\times$  ИПД  $Fx^2$   $\div$  С/П  $l-l$   
 ИП7 + ИПО  $\div$  С/П

Пример. Пусть нужно рассчитать силовой трансформатор при следующих исходных данных:  $fB_m = 60$  т·Гц ( $f = 50$  Гц,  $B_m = 1,2$  т);  $\delta = 2$  А/мм<sup>2</sup>,  $\eta = 0,96$ ;  $S = 2$ ,  $k_c = 0,95$ ;  $k_m = 0,32$ ; и  $P_r = 215$  Вт. Пустив программу нажатием клавиш В/0 и С/П, получим  $Q_{ст}Q_0 = 138,13218$  см<sup>2</sup>. Выбираем магнитопровод ленточный

Таблица 7.1

Порядок ввода исходных данных и вывода результатов

Ввод	$P_r = P_X$	$a = PA, b = PB, c = PC$	$U_2 = P_X$	$U_1 = P_X$	$I_2 = P_X$	$I_1 = P_X$	-	-	-
Вывод	$Q_{ст}Q_0$	$e$	$\omega_0$	$\omega_1$	$d_2$	$d_1$	$e$	$\Delta U_1$	$\omega_1$

ПЛ25  $\times$  50—65, имеющий  $Q_{ст}Q_0 = 140$  см<sup>2</sup> и  $a = 2,5$  см;  $b = 2$  см и  $c = 5$  см. Введя эти данные в регистры А, В и С, получим (нажав клавишу С/П)  $e = 0,31635$  В. Далее, введя  $U_2 = 450$  В, получим  $\omega_2 = 1422,4751$ ; введя  $U_1 = 127$  В, получим  $\omega_1 = 401,4540$  В; введя  $I_2 = 0,475$  А, получим  $d_2 = 0,55069387$  мм; введя  $I_1 = 1,7$  А, получим  $d_1 = 1,0418085$  мм и далее  $l_1 = 85,442214$  м,  $\Delta U_1 = 3,0111205$  В и  $\omega_1 = 391,93576$ .

### 7.3. Расчет емкостных элементов и конденсаторов

В программах, приведенных ниже, конструктивные размеры задаются в сантиметрах (см), емкость — в пикофарадах (пФ). Для многих емкостных элементов (конденсаторов) емкость легко выражается через известные конструктивные параметры и относительную диэлектрическую постоянную диэлектрика  $\epsilon_d$  ( $\epsilon_d = 1$  для вакуума).

**Программа 7.37.** Вычисление емкости  $C = FS$  или площади обкладок  $S = C/F$  плоского конденсатора в виде пластины диэлектрика с нанесенными на нее обкладками (краевые эффекты не учитываются,  $F = 0,0886 \epsilon_d/h$ , где  $h$  — толщина диэлектрика). Ввод:  $h = P_0$ ,  $\epsilon_d = P_1$  В/0 С С/П S С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $C$  или  $S$  можно вводить новые значения С и S.

П8 С/П П9 0 , 0 8 8 6 ИП1  
 $\times$  ИПО  $\div$  П7 ИП8  $F\tau=0$  22 ИПО ИП7  $\times$   
 БП 25 ИП8 ИП7  $\div$  С/П БП 00

**Пример.** Для  $h = 0,15$  см,  $\epsilon_d = 1$ ,  $C = 0$  и  $S = 2$  см<sup>2</sup> получим  $C = 1,181333$  пФ, а для  $C = 1$  пФ и  $S = 0$  получим  $S = 1,6930022$  см<sup>2</sup>.

**Программа 7.38.** Вычисление емкости  $C = FD$  или диаметра  $D = C/F$  плоского дискового конденсатора с обкладками, занимающими всю поверхность диэлектрического диска диаметром  $D$  ( $F = 0,0695 \epsilon_d/h$ ). Ввод:  $h = P0 \epsilon_d = P1$  В/0  $C$  С/П  $D$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $C$  или  $D$  можно вводить новые значения  $C$  и  $D$ .

П8	С/П	П9	0	,	0	6	9	5	ИП1
×	ИП0	÷	П7	ИП8	$Fx=0$	22	ИП9	ИП7	×
БП	25	ИП8	ИП7	÷	С/П	БП	00		

**Пример.** Для  $h = 0,1$  см,  $\epsilon_d = 4,7$ ,  $C = 0$  и  $D = 1$  см получим  $C = 3,2665$  пФ, а для  $C = 4$  пФ и  $D = 0$  получим  $D = 1,2245522$  см.

**Программа 7.39.** Вычисление емкости  $C = Fl$  или длины трубки  $l = C/F$  коаксиального (трубчатого) конденсатора без учета краевых эффектов (длина обкладок равна длине трубки диэлектрика,  $F = 0,241 \epsilon_d/\lg(D_n/D_{вн})$ , где  $D_n$  — внешний диаметр трубки,  $D_{вн}$  — внутренний диаметр трубки). Ввод:  $\epsilon_d = P1$ ,  $D_n = P2$ ,  $D_{вн} = P3$  В/0  $C$  С/П  $l$  С/П (искомому параметру задать нулевое значение). После вычисления  $C$  или  $l$  можно вводить новые значения  $C$  и  $l$ .

П8	С/П	П9	0	,	2	4	1	ИП1	×
ИП2	ИП3	÷	$F \lg$	÷	П7	ИП8	$Fx=0$	24	ИП9
ИП7	×	БП	27	ИП8	ИП7	÷	С/П	БП	00

**Пример.** Для  $\epsilon_d = 4,7$ ,  $D_n = 0,5$  см,  $D_{вн} = 0,4$  см,  $C = 0$  и  $l = 2$  см получим  $C = 23,376326$  пФ, а для  $C = 25$  пФ и  $l = 0$  получим  $l = 2,138916$  см.

**Программа 7.40.** Вычисление емкости  $C = (F_1 l + F_2)$  или длины электродов  $l = (C - F_2)/F_1$  коаксиального (трубчатого) конденсатора с электродами одинаковой длины и диэлектриком, длина трубки которого больше  $l$ , если  $F_1 = 0,241 \epsilon_d/\lg(D_n/D_{вн})$  и  $F_2 = 0,08 D_n/\lg(D_n/D_{вн})$ , где  $D_n$  и  $D_{вн}$  — внешний и внутренний диаметры трубки. Ввод:  $\epsilon_d = P1$ ,  $D_n = P2$ ,  $D_{вн} = P3$  В/0  $C$  С/П  $l$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $C$  или  $l$  можно задавать новые значения  $C$  и  $l$ .

П8	С/П	П9	0	,	2	4	1	ИП1	×
ИП2	ИП3	÷	$F \lg$	П6	÷	П7	ИП2	0	,
0	8	×	ИП6	÷	П6	ИП8	$Fx=0$	36	ИП9
ИП7	×	ИП6	+	БП	41	ИП8	ИП6	—	ИП7
÷	С/П	БП	00						

Пример. Для  $\epsilon_d = 4,7$ ,  $D_n = 0,5$  см,  $D_{вн} = 0,4$  см,  $C = 0$  и  $l = 2$  см получим  $C = 23,78908$  пФ, а для  $C = 25$  пФ и  $l = 0$  получим  $l = 2,1036022$  см.

Программа 7.41. Вычисление емкости  $C = F(l + 0,17D_n)$  или длины короткой обкладки  $l = (C/F - 0,17D_n)$  коаксиального (трубчатого) конденсатора с электродами разной длины, при  $F = 0,241 \epsilon_d \lg(D_n/D_{вн})$ , где  $D_n$  и  $D_{вн}$  — внешний и внутренний диаметр трубки диэлектрика. Ввод:  $\epsilon_d = P1$ ,  $D_n = P2$ ,  $D_{вн} = P3$  В/0  $C$  С/П  $l$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $C$  или  $l$  можно задавать новые значения  $C$  и  $l$ .

П8	С/П	П9	0	,	2	4	1	ИП1	×
ИП2	ИП3	÷	F lg	÷	П6	ИП2	0	,	1
7	×	П7	ИП8	Fx=0	33	ИП9	ИП7	+	ИП6
×	БП	38	ИП8	ИП6	÷	ИП7	—	С/П	БП
00									

Пример. Для  $\epsilon_d = 4,7$ ,  $D_n = 0,5$  см,  $D_{вн} = 0,4$  см,  $C = 0$  и  $l = 2$  см получим  $C = 24,369819$  пФ, а для  $C = 25$  пФ и  $l = 0$  получим  $l = 2,053916$  см.

Программа 7.42. Вычисление емкости шарового конденсатора  $C = 0,555\epsilon_d D_n / (D_n/D_{вн} - 1)$ ,

где  $D_n$  и  $D_{вн}$  — внешний и внутренний диаметры диэлектрической оболочки конденсатора. Ввод:  $\epsilon_d = P1$ ,  $D_{вн} = P2$  В/0  $D_n = PX$  С/П. После вычисления  $C \rightarrow PX$  можно задавать новые значения  $D_n$ .

↑	ИП2	÷	1	—	÷	0	,	5	5
5	×	ИП1	×	С/П	БП	00			

Пример. Для  $\epsilon_d = 4,7$ ,  $D_{вн} = 9$  см и  $D_n = 10$  см получим  $C = 234,76502$  пФ.

Программа 7.43. Вычисление емкости  $C = (F_1 l + F_2)$  или длины цилиндра  $l = (C - F_2)/F_1$  горшкового конденсатора, выполненного в виде цилиндра с наружным диаметром  $D_n$  и внутренним  $D_{вн}$ , заканчивающимся внизу полушаром с диаметром  $D_n$ :  $F_1 = 0,241 \epsilon_d l / \lg(D_n/D_{вн})$  и  $F_2 = 0,278 \epsilon_d D_n / (D_n/D_{вн} - 1)$ . Ввод:  $\epsilon_d = P1$ ,  $D_n = P2$ ,  $D_{вн} = P3$  В/0  $C$  С/П  $l$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $C$  или  $l$  можно задавать новые значения  $C$  и  $l$ .

П8	С/П	П9	0	,	2	4	1	ИП2	ИП3
÷	П6	F lg	÷	ИП1	×	П7	ИП2	0	,
2	7	8	×	ИП6	1	—	÷	ИП1	×
П6	ИП8	Fx=0	41	ИП9	ИП7	×	ИП6	+	БП
46	ИП8	ИП6	—	ИП7	÷	С/П	БП	00	

Пример. Для  $\epsilon_d = 4,7$ ,  $D_n = 5$  см,  $D_{вн} = 4$  см,  $C = 0$  и  $l = 10$  см получим  $C = 143,01363$  пФ, а при  $C = 150$  пФ и  $l = 0$  получим  $l = 10,59773$  см.

Емкость шара с диаметром  $D$  в свободном пространстве

$$C = 0,555 \epsilon_d D.$$

В связи с простотой этой формулы вычисление  $C$  или  $D$  целесообразно проводить в ручном режиме.

**Программа 7.44.** Вычисление емкости между двумя шарами с одинаковым диаметром  $D$  и междуцентровым расстоянием  $a$  ( $a > D$ ):

$$C = 0,278 \epsilon_d \left[ 1 + \frac{D(4a^2 - D^2)}{2a(4a^2 - 2aD - D^2)} \right]. \quad (7.2)$$

Ввод:  $\epsilon_d = P1$ ,  $D = PД$  В/0  $a = PX$  С/П. После получения  $C \rightarrow PX$  можно вводить новое значение  $a$ .

ПА	$Fx^2$	4	×	П9	ИПД	$Fx^2$	—	ИПД	×
2	÷	ИПА	÷	ИП9	ИПА	2	×	ИПД	×
—	ИПД	$Fx^2$	—	÷	1	+	ИП1	×	0
,	2	7	8	×	ИПД	×	С/П	БП	00

**Пример.** Для  $\epsilon_d = 1$ ,  $D = 10$  см и  $a = 15$  см получим  $C = 4,2626665$  пФ.

**Программа 7.45.** Вычисление емкости  $C = (F_1 D + F_2)$  или диаметра  $D = (C - F_2)/F_1$  круглого диска в свободном пространстве ( $F_1 = 0,353 \epsilon_d$ ,  $F_2 = 0,225 \epsilon_d h$ , где  $h$  — толщина диска). Ввод:  $\epsilon_d = P1$ ,  $h = P2$  В/0  $C$  С/П  $D$  С/П (искомому параметру задается нулевое значение). После вычисления  $C$  или  $D$  можно задавать новые значения  $C$  и  $D$ .

П8	С/П	П9	ИП1	0	,	3	5	3	×
П7	ИП1	0	,	2	2	5	×	ИП2	×
П6	ИП8	$Fx=0$	31	ИП9	ИП7	×	ИП6	×	БП
36	ИП8	ИП6	—	ИП7	÷	С/П	БП	00	

**Пример.** Для  $\epsilon_d = 1$ ,  $h = 1$  см,  $C = 0$  и  $D = 10$  см получим  $C = 3,755$  пФ, а для  $C = 5$  пФ и  $D = 0$  получим  $D = 13,526912$  см.

Расчет пленочных конденсаторов с заданной емкостью  $C$ , числом обкладок  $m$ , толщиной его диэлектрика  $d$  и относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_d$  сводится к определению удельной емкости  $C_0 = 0,0885 \epsilon_d (m - 1)/d$  и площади обкладок  $S = C/C_0$ . После этого по заданному отношению сторон  $Q = A/B$  прямоугольника обкладок находятся стороны  $A = \sqrt{QS}$  и  $B = \sqrt{S/Q}$ .

**Программа 7.46.** Расчет пленочного конденсатора. Ввод:  $m = P1$ ,  $d_2 = P2$ ,  $\epsilon = P3$ ,  $Q = P4$ , и  $C = PX$ . Вывод результатов:  $C_0 \rightarrow P0$ ,  $A \rightarrow PA$ ,  $B \rightarrow PB$ ,  $S \rightarrow PC \rightarrow PX$ .

ИП3	ИП1	1	—	×	ИП2	÷	0	,	0
8	8	5	×	П0	÷	ПС	ИП4	×	$F\sqrt{\quad}$
ПА	ИПС	ИП4	÷	$F\sqrt{\quad}$	ПВ	ИПС	С/П	БП	00

**Пример.** Для  $m = 3$ ,  $d = 0,01$  см,  $\epsilon_d = 4,7$ ,  $Q = 2$  и  $C = 100$  пФ получим  $C_0 = 83,19$  пФ/см<sup>2</sup>,  $A = 1,5505273$  см,  $B = 0,77526366$  см и  $S = 1,2020675$  см<sup>2</sup>.

Расчет емкости проводников в свободном пространстве проводится по формуле

$$C = k_1 \epsilon_d l / \lg(k_2 x / d),$$

где значения  $k_1$ ,  $k_2$  и наименование параметра  $x$  указаны в табл. 7.2,  $l$  — длина провода и  $d$  — его диаметр.

Таблица 7.2

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  для расчета емкости проводников

Емкость $C$	$k_1$	$k_2$	Наименование $x$
Между двумя проводами вдаль от земли	0,12	2	Расстояние между проводами
Между горизонтальным проводом и землей	0,24	4	Высота подвески
Между вертикальным проводом и землей при расстоянии от земли до нижнего конца $h > l/4$	0,24	1	Длина провода
Между вертикальным проводом и землей при расстоянии от земли до нижнего конца $h < l/4$	0,24	1,15	Длина провода
Между проводом и корпусом при вводе провода через отверстие	0,24	2	Диаметр отверстия

**Программа 7.47.** Расчет емкости проводника в свободном пространстве. Ввод:  $k_1 = P1$ ,  $k_2 = P2$ ,  $\epsilon_d = P3$ ,  $l = P4$ ,  $d = P5$  и  $x = PX$ .

ИП2 × ИП5 ÷ Flg ИП1 ИП3 × ИП4 ×  
ХУ ÷ С/П БП 00

**Пример.** Для  $k_1 = 0,24$ ,  $k_2 = 4$ ,  $\epsilon_d = 1$ ,  $l = 10^3$  см,  $d = 0,2$  см и  $x = 200$  см получаем  $C = 66,62854$  пФ.

Иногда некоторый конструктивный параметр  $x$ , определяющий емкость  $C_0$ , можно определить из решения нелинейного уравнения

$$C(x) - C_0 = 0$$

численными методами (см. пример ниже).

**Программа 7.48.** Расчет расстояния  $x$  между центрами двух шаров по заданной емкости  $C_0$  между ними при  $C(x)$  вида (7.2). Ввод:  $C_0$ , диаметр шаров  $D$  и  $\epsilon_d$  в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	П7	ИП8	П6	1	0	П5
ИП6	ИП5	+	П6	$Fx^2$	4	×	ИП8	$Fx^2$	—
П4	ИП8	×	2	÷	ИП6	÷	ИП4	ИП6	2
×	ИП8	×	—	÷	1	+	0	,	2
7	8	×	ИП7	×	ИП8	×	ИП9	—	$Fx < 0$
10	ИП6	ИП5	—	П6	С/П	ИП5	1	0	÷
П5	БП	10							

**Пример.** В этой программе  $x > D$  (при  $x = D$  шары соприкасаются и  $C(x) \rightarrow \infty$  возрастает поразрядно). Для  $C = 5$  пФ,  $D = 10$  см и  $\epsilon_d = 1$  получим  $x = 12,259$  см, нажав пять раз клавишу С/П с перерывами на время выдачи каждой цифры.

#### 7.4. Расчет линии передач и задержки

Линии передачи могут быть проводные, коаксиальные, полосковые и др. Полосковые несимметричные (рис. 7.16, а) и симметричные (рис. 7.16, б) линии широко используются в радиоэлектрон-

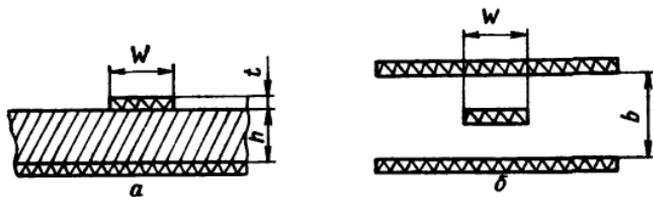


Рис. 7.16. Полосковые несимметричные (а) и симметричные (б) линии

ной аппаратуре. Расчет линий обычно сводится к определению некоторого конструктивного параметра  $x$  по заданному входному сопротивлению линии  $z_d$ , а также определению фазовой скорости  $v$ . Для длинных линий существенна оценка потерь на единицу геометрической длины линии.

Для некоторых линий

$$x = \frac{D}{d} = \frac{\exp(z_d \sqrt{\epsilon/60})}{K}, \quad (7.3)$$

где  $\epsilon_d$  — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика,  $d$  — диаметр внутреннего проводника, а  $D$  и  $K$  определяются следующим образом.

1. Для линии в виде круглого проводника, расположенного в середине между проводящими плоскостями, находящимися на расстоянии  $D$  друг от друга,  $K = 1,27$ .

2. Для линии в виде круглого проводника, помещенного в экран с квадратным сечением и стороной его  $D$ ,  $K = 1,08$ .

3. Для линии в виде круглого проводника, помещенного в экран круглого сечения с диаметром  $D$ ,  $K = 1$  (коаксиальная линия).

4. Для линии в виде круглого проводника, расположенного на биссектрисе прямого угла, образованного двумя полубесконечными проводящими плоскостями, на расстоянии  $D/2$  от каждой плоскости.  $K = 1,4$ .

**Программа 7.49.** Расчет  $x$  по формуле (7.3)

$$\epsilon_d \sqrt{z_n} \times 60 \div Fe^x K \div$$

Ввиду простоты (7.3) программа вычисления  $x$  записана в виде алгоритма ручных вычислений.

**Пример.** Для воздушной коаксиальной линии  $\epsilon_d = 1$ ,  $K = 1$  и  $z_n = 100$  Ом получим  $x = D/d = 5,2944895$ .

**Программа 7.50.** Расчет ширины полоски  $W$  и  $v/c$  (где  $c$  — скорость света в вакууме) несимметричной полосковой линии (см. рис. 7.16, а) по формулам

$$W = 1,25 \left[ \frac{5,98h}{\exp [z_n (\epsilon_d + 1,41)^{1/2}/87]} - t \right],$$

$$v/c = [(0,475\epsilon_d + 0,67)^{1/2}]^{-1}.$$

Ввод:  $z_n, h, t$  и  $\epsilon_d$  в регистр X. Вывод результатов:  $v/c \rightarrow PX, W \rightarrow PY = PD$ .

П7	С/П	П8	С/П	П9	С/П	П6	1	,	2
5	ИП8	5	,	9	8	×	ИП6	1	,
4	1	+	$F\sqrt{\quad}$	ИП7	×	8	7	÷	$Fe^x$
÷	ИП9	—	×	ПД	ИП6	0	,	4	7
5	×	0	,	6	7	+	$F\sqrt{\quad}$	F1/x	С/П
БП	00								

**Пример.** Для  $z_n = 75$  Ом,  $h = 1$  мм,  $t = 0,05$  мм и  $\epsilon_d = 4,7$  получим  $v/c = 0,58696727$  и (нажав клавишу XY)  $W = 0,82501161$  мм.

**Программа 7.50а.** Расчет  $v/c$  и ширина полоски  $W$  симметричной полосковой линии (см. рис. 7.16, б) по формулам

$$W = 0,59 \left[ \frac{4b}{\exp (z_n \sqrt{\epsilon_d}/60)} - 2,1t \right],$$

$$v/c = 1/\sqrt{\epsilon_d}.$$

Ввод:  $z_n, b, t$  и  $\epsilon_d$  в регистр X. Вывод:  $v/c \rightarrow PX, W \rightarrow PY$ .

П7	С/П	П8	С/П	П9	С/П	П6	0	,	5
9	ИП8	4	×	ИП6	$F\sqrt{\quad}$	ПД	ИП7	×	6
0	÷	$Fe^x$	÷	ИП9	2	,	1	×	—
×	ИПД	F1/x	С/П	БП	00				

**Пример.** Для  $z_n = 50$  Ом,  $b = 2,5$  мм,  $t = 0,5$  мм и  $\epsilon_d = 4,7$  получаем  $v/c = 0,46126561$  и (нажав клавишу XY)  $W = 0,34932508$  мм.

Для ряда линий передачи выражение для  $z_n$  неразрешимо или трудноразрешимо относительно конструктивного параметра  $x$ , определение которого является целью расчета. Тогда, задав требуемое значение  $z_{л0}$ , его можно найти из решения нелинейного уравнения  $z_{л0} - z_n(x) = 0$ , например, методом подекадного приближения, с выдачей каждой очередной цифры результата нажатием клавиши С/П.

**Программа 7.51.** Расчет диаметра  $d$  внутреннего проводника коаксиальной линии, смещенного относительно внешнего проводника, с отверстием, имеющим диаметр  $D$ , на расстояние  $l$ , из решения уравнения

$$z_{л0} - \frac{60}{\sqrt{\epsilon_d}} \operatorname{arch} \frac{D^2 + d^2 - 4l^2}{2dD} = 0.$$

Ввод:  $D$ ,  $l$ ,  $z_{л0}$  и  $\epsilon_d$  в регистр X.

П5	С/П	П6	С/П	П7	С/П	F√	6	0	XУ
÷	П4	0	П2	0	,	1	П3	ИП2	ИП3
+	П2	Fx <sup>2</sup>	ИП5	Fx <sup>2</sup>	+	ИП6	Fx <sup>2</sup>	4	×
-	2	÷	ИП2	÷	ИП5	÷	↑	Fx <sup>2</sup>	1
/—/	+	F√	+	F ln	ИП4	×	ИП7	-	Fx<0
18	ИП2	ИП3	-	П2	С/П	ИП3	1	0	÷
П3	БП	18							

**Пример.** Для  $D = 1$  см,  $l = 0,25$  см,  $z_{л0} = 100$  Ом и  $\epsilon_d = 1$  получим, нажав четыре раза клавишу С/П (с перерывами на время получения очередной цифры результата),  $d = 0,1403$  см.

**Программа 7.52.** Расчет параметра  $x = a/d$  линии в виде двух одинаковых проводников с диаметром  $d$ , расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга из решения уравнения

$$z_{л0} - \frac{120}{\sqrt{\epsilon_d}} \operatorname{arch} = 0.$$

Это уравнение имеет простое аналитическое решение

$$x = \operatorname{ch} (z_{л0} \sqrt{\epsilon_d} / 120),$$

которое и используется для вычисления  $x$ . Ввод:  $z_{л0}$  и  $\epsilon_d$  в регистр X.

↑	С/П	F√	×	1	2	0	÷	Fe <sup>x</sup>	↑
F1/x	+	2	÷	С/П					

**Пример.** Для  $z_{л0} = 300$  Ом и  $\epsilon_d = 1$  получим значение  $x = 6,1322895$ .

**Программа 7.53.** Расчет параметра  $x = D/d$  линии в виде круглого проводника с диаметром  $a$ , расположенного на расстоянии  $D$

от проводящей плоскости, путем решения уравнения

$$z_{\text{ло}} - \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{\text{д}}}} \operatorname{arch} x = 0.$$

Это уравнение также имеет простое аналитическое решение

$$x = \operatorname{ch} (z_{\text{ло}} \sqrt{\epsilon_{\text{д}}}/60),$$

используемое для вычисления  $x$ . Ввод:  $z_{\text{ло}}$  и  $\epsilon_{\text{д}}$  в регистр X.

↑	С/П	F√	×	6	0	÷	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x
+	2	÷	С/П						

**Пример.** Для  $z_{\text{ло}} = 300$  Ом и  $\epsilon_{\text{д}} = 1$  получим значение  $x = 74,20995$ .

**Программа 7.54.** Расчет расстояния  $a$  между двумя проводниками линии в виде двух проводников с диаметром  $d$ , расположенных на расстоянии  $D$  от проводящей плоскости, путем решения уравнения

$$z_{\text{ло}} - \frac{120}{\sqrt{\epsilon_{\text{д}}}} \left[ \operatorname{arch} \frac{a}{d} - \ln \sqrt{1 + \left( \frac{a}{2D} \right)^2} \right] = 0.$$

Ввод:  $D$ ,  $d$ ,  $z_{\text{ло}}$  и  $\epsilon_{\text{д}}$  в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	П6	С/П	F√	1	2	0
XY	÷	П5	0	П2	1	П3	ИП2	ИП3	+
П2	ИП8	÷	↑	Fx <sup>2</sup>	1	/—/	+	F√	+
F ln	ИП2	2	÷	ИП9	÷	Fx <sup>2</sup>	1	+	F√
F ln	—	ИП5	×	ИП6	XY	—	Fx < 0	17	ИП2
ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1	0	÷	П3	БП

47

**Пример.** Для  $D = 1,5$  см,  $d = 0,1$  см,  $z_{\text{ло}} = 200$  Ом и  $\epsilon_{\text{д}} = 1$  получим  $a = 0,275$  см после четырех нажатий клавиши С/П.

**Программа 7.55.** Расчет расстояния  $a$  между двумя проводами линии с диаметром  $d_1$  и  $d_2$ , расположенными в свободном пространстве, из решения уравнения

$$z_{\text{ло}} - \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{\text{д}}}} \operatorname{arch} \frac{4a^2 - d_1^2 - d_2^2}{2d_1 d_2} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$a = \sqrt{2d_1 d_2 \operatorname{ch} (z_{\text{ло}} \sqrt{\epsilon_{\text{д}}}/60) + d_1^2 + d_2^2} / 2.$$

Ввод:  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $z_{\text{ло}}$  и  $\epsilon_{\text{д}}$  в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	↑	С/П	F√	×	6	0
÷	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	+	ИП9	×	ИП8	×	ИП9
Fx <sup>2</sup>	+	ИП8	Fx <sup>2</sup>	+	F√	2	÷	С/П	

**Пример.** Для  $d_1 = 0,1$  см,  $d_2 = 0,05$  см,  $z_{л0} = 300$  Ом и  $\epsilon_d = 1$  получим  $a = 0,43433843$ .

Для получения больших  $z_n$  используются коаксиальные линии, внутренний проводник которых выполнен в виде спирали, содержащей  $n$  витков на 1 см длины линии. Для этой линии

$$z_n = z_{лн} F_w, \quad v = v_n F_w,$$

где  $z_{лн}$  и  $v_n$  — волновое сопротивление и фазовая скорость коаксиальной линии с обычным внутренним проводником, имеющим диаметр  $d$  (как и у внешнего диаметра спирали),  $F_w$  — поправочный коэффициент, равный

$$F_w = \sqrt{1 + n^2 \frac{(\pi d)^2}{2 \ln(D/d)} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right]}. \quad (7.4)$$

**Программа 7.56.** Расчет  $n$  для линии со спиральным проводником с внешним диаметром  $d$ , расположенным внутри проводящего экрана с внутренним диаметром  $D$ , путем решения уравнения

$$F_{w_0} - F_w(n) = 0,$$

где  $F_w(n)$  определяется выражением (7.4). Данное уравнение имеет аналитическое решение, при котором  $n$  определяется по формуле

$$n = \sqrt{(F_{w_0}^2 - 1) \ln((D/d)^2) / (1 - (d/D)^2)} / \pi d.$$

Ввод:  $F_{w_0}$ ,  $d$  и  $D$  в регистр X.

$Fx^2$	C/П	П8	C/П	XУ	÷	$Fx^2$	F ln 1	FBx
$F1/x$	—	÷	XУ	1	—	×	$F \sqrt{\quad}$	Fл ИП8
×	÷	C/П						

**Пример.** Для  $F_{w_0} = 4$ ,  $d = 0,5$  см и  $D = 1$  см получим  $n = 3,3521454$ .

Искусственные линии задержки строятся на основе LC-фильтров нижних частот. По заданным волновому сопротивлению  $z_n$ , времени задержки  $t_3$  и длительности фронта на выходе линии  $t_\Phi$  определяются число ее звеньев

$$n = K_1 (t_3/t_\Phi)^{1,5}$$

и значения индуктивности  $L$  и емкости  $C$  звеньев

$$C = t_3/K_2 n z_n, \quad L = t_3 z_n/K_2 n,$$

где  $K_1 = 1,1$  и  $K_2 = 1,07$  для линий на фильтрах К-типа и  $K_1 = 0,94$  и  $K_2 = 1,2$  для линий на фильтрах М-типа.

**Программа 7.57.** Расчет параметров  $n$ ,  $C$  и  $L$  искусственных линий задержки. Ввод:  $K_1 = P1$ ,  $K_2 = P2$ ,  $z_n$ ,  $t_3$  и  $t_\Phi$  в регистр X. После получения  $n$  число ячеек уточняется (в сторону увеличения), уточненное значение вводится в регистр X.

П7	С/П	П9	С/П	П8	÷	1	,	5	XY
Fx <sup>y</sup>	ИП1	×	С/П	П6	ИП9	ИП2	÷	ИП6	÷
П5	ИП7	÷	С/П	ИП5	ИП7	×	С/П	БП	00

Пример. Для  $K_1 = 0,94$ ,  $K_2 = 1,2$ ,  $z_n = 600$  Ом,  $t_3 = 1 \cdot 10^{-6}$  с,  $t_\phi = 0,05 \cdot 10^{-6}$  с получим  $n = 84,07614$ . Округляем до  $n = 85$  и набираем уточненное значение  $n$ . Получим  $C = 1,6339869 \cdot 10^{-11}$  Ф и  $L = 5,8823529 \cdot 10^{-6}$  Гн.

В общем случае линия передачи с распределенными параметрами может быть представлена в виде ячеек с длиной  $dx$  и погонными параметрами: сопротивлением  $R$  и проводимостью  $G$  потерь, индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$  (рис. 7.17). При передаче

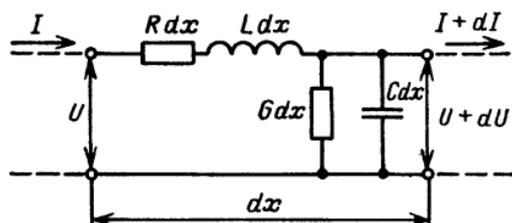


Рис. 7.17. Элементарный участок длинной линии с потерями

по линии гармонического сигнала постоянная распространения  $\gamma = \alpha + i\beta$ , причем  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из следующих формул:

$$\varphi_1 = \arctg(\omega L/R), \quad \varphi_2 = \arctg(\omega C/G),$$

$$\alpha = (\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2})^{1/2} \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right),$$

$$\beta = (\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2})^{1/2} \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Характеристическое сопротивление линии на частоте сигнала  $\omega = 2\pi f$

$$z_n = |z_n| e^{i\varphi},$$

где

$$|z_n| = (\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} / \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2})^{1/2}$$

и

$$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)/2.$$

**Программа 7.58.** Вычисление модуля характеристического сопротивления линии  $|z_n|$  на заданной частоте гармонического сигнала  $f$ , фазового сдвига  $\varphi$  и коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  постоянной распространения  $\gamma = \alpha + i\beta$ . Ввод:  $R = PA$ ,  $G = PB$ ,  $C = PC$ ,  $L = PD$  и  $f = PX$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $|z_n| \rightarrow PX = P3$ ,  $\varphi \rightarrow PY = P0$  и (после нажатия клавиши С/П)  $\alpha \rightarrow PX = P5$  и  $\beta \rightarrow PY = P4$  (после этого можно вводить новое значение частоты  $f$ ).

Fl	×	2	×	П0	ИПД	×	П8	ИПА	÷
F arctg П1		ИП0	ИПС	×	П9	ИПВ	÷	F arctg П2	
—	2	÷	П0	ИПА	Fx <sup>2</sup>	ИП8	Fx <sup>2</sup>	+	F√—
П7	ИП8	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	F√—	ИП6	÷	F√—
П3	С/П	ИП7	ИП6	×	F√—	П5	ИП1	ИП2	+
2	÷	Fcos	FBx	Fsin	ИП5	×	П4	XY	ИП5
×	П5	С/П	БП	00					

Пример. Для  $R = 167$  Ом/км;  $G = 1,66 \cdot 10^{-6}$  сим/км;  $C = 0,05 \cdot 10^{-6}$  Ф/км,  $L = 0,49 \cdot 10^{-3}$  Гн/км и  $f = 1000$  Гц получим  $|z_{л}| = 729,15047$  Ом,  $\varphi = -44,320543^\circ$  (переключатель Р — Г в положении Г),  $\alpha = 0,16091029$  и  $\beta = 0,16304024$ .

Когда однородная линия длиной  $l$  с потерями нагружена с одного конца на комплексное сопротивление  $z_{н} = R_{н} + iX_{н}$ , то коэффициент отражения  $|K_0|$ , фазовый сдвиг  $\varphi$  и относительное значение комплексного входного сопротивления  $z_{вх} = R_{вх} + iX_{вх}$  определяются выражениями

$$|K_0| = \sqrt{\frac{(R_{н} - z_{л})^2 + X_{н}^2}{(R_{н} + z_{л})^2 + X_{н}^2}},$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{2X_{н}z_{л}}{R_{н}^2 + X_{н}^2 - z_{л}^2} \right),$$

$$z_{вх} = z_{л} \frac{(1 - K_0^2 e^{-4\alpha l})}{F} - iz_{л} \frac{2K_0 e^{-2\alpha l} \sin(2\beta l - \varphi)}{F}$$

где  $F = (1 + K_0^2 e^{-4\alpha l}) - 2K_0 e^{-2\alpha l} \cos(2\beta l - \varphi)$  и  $z_{л} = \sqrt{L/C}$  — волновое сопротивление линии.

**Программа 7.59.** Вычисление модуля входного сопротивления  $|z_{вх}| = \sqrt{R_{вх}^2 + X_{вх}^2}$ , составляющих  $R_{вх}$  и  $X_{вх}$  комплексного входного сопротивления линии  $z_{вх} = R_{вх} + iX_{вх}$ , коэффициента отражения  $|K_0|$  и угла сдвига фаз  $\varphi$  линии заданной длины  $l$ , нагруженной на комплексное сопротивление  $z_{н} = R_{н} + iX_{н}$ . Ввод:  $z_{л} = P0$ ,  $R_{н} = P1$ ,  $X_{н} = P2$ ,  $\alpha = P3$ ,  $\beta = P4$  и  $l = P6$ . После пуска (нажатием клавиш В/0 и С/П) получаем:  $|z_{вх}| \rightarrow PX$ ,  $R_{вх} \rightarrow PC$ ,  $X_{вх} \rightarrow PD$ ,  $|K_0| \rightarrow P7$  и  $\varphi \rightarrow P8$ . При изменении  $l$  вводим  $l = PX$  и пускаем программу нажатием клавиши С/П.

ИП1	Fx <sup>2</sup>	ИП0	Fx <sup>2</sup>	—	ИП2	Fx <sup>2</sup>	+	FBx	ИП1
ИП0	+	Fx <sup>2</sup>	+	ПА	÷	ИП0	ИП2	2	×
×	ИПА	÷	ПВ	Fx <sup>2</sup>	XY	Fx <sup>2</sup>	+	F√—	П7
÷	F arccos	П8	ИПВ	Fx < 0	39	ИП8	/—/	П8	ИП7
ИП3	ИП6	2	×	ПА	×	Fe <sup>x</sup>	÷	ПВ	Fx <sup>2</sup>
1	+	ИП8	ИПА	ИП4	×	—	ПД	Fcos	ИПВ
×	2	×	—	ИП0	÷	П9	1	ИПВ	Fx <sup>2</sup>

— ИП 9 ÷ ПС Fx<sup>2</sup> ИПД Fsin ИПВ × 2  
 × ИП9 ÷ ПД Fz<sup>2</sup> + F√ C/П П6 БП  
 39

Пример. Для  $z_n = 75$  Ом,  $R_n = 50$  Ом,  $X_n = 30$  Ом,  $\alpha = 0,01$  Нп/м,  $\beta = 1$  рад/м (переключатель Р — Г в положении Р) и  $l = 0,1\pi$  получим  $|z_{вх}| = 82,343224$  Ом,  $R_{вх} = 68,887955$  Ом,  $X_{вх} = 45,109383$  Ом,  $|K_0| = 0,30378349$  и  $\varphi = 2,0299896$  рад.

## 7.5. Расчет нелинейных цепей в статическом режиме

При расчетах нелинейных цепей важное место занимают вопросы задания и аппроксимации вольт-амперных характеристик нелинейных приборов. Обширные возможности для этого представляет аппарат аппроксимации и интерполяции: с помощью полиномов (§ 5.2 и 5.19), методом наименьших квадратов (§ 5.17), сплайн-функций (§ 5.20) и др. Полезны и некоторые частные приемы аппроксимации, применяемые для конкретных типов нелинейных приборов.

Так, вольт-амперная характеристика реального полупроводникового диода может быть представлена в виде [19]

$$U(I) = R_0 I + (\ln((I + I_0)/I_0))/\Lambda; \quad (7.5)$$

где параметры  $R_0$ ,  $I_0$  и  $\Lambda$  могут находиться из заданных трех точек. Так, задав токи  $I_1$ ,  $I_2 = 2I_1$  и  $I_3 = 4I_1$  и определив (из эксперимента или графика характеристики) три напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ , получим для расчета искомых параметров при  $I \gg I_0$  систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_0 I_1 + (1/\Lambda) \ln(I_1/I_0), \\ U_2 &= 2R_0 I_1 + (1/\Lambda) \ln(2I_1/I_0), \\ U_3 &= 4R_0 I_1 + (1/\Lambda) \ln(4I_1/I_0). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Эта система имеет решение, отмеченное в нижеследующей программе.

Программа 7.60. Расчет параметров  $R_0$ ,  $I_0$  и  $\Lambda$  статической вольт-амперной характеристики полупроводникового диода из решения системы (7.6),

$$\begin{aligned} R_0 &= (U_1 - 2U_2 + U_3)/I_1; \quad \Lambda = \ln 2/(3U_2 - 2U_1 - U_3); \\ I_0 &= I_1 \exp(-\Lambda(2U_2 - U_3)), \end{aligned}$$

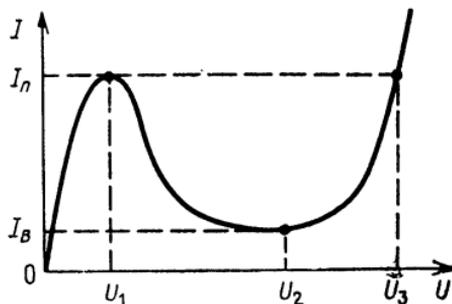
и вычисление  $U(I)$  по заданным  $I$  с помощью формулы (7.5). Ввод:  $U_1 = P1$ ,  $U_2 = P2$ ,  $U_3 = P3$ ,  $I_1 = P4$ . Вывод результата:  $R_0 \rightarrow PX = P6$ ,  $I_0 \rightarrow P5$ ,  $\Lambda \rightarrow P7$ . Для вычисления  $U(I)$  вводится ток  $I = PX$  и нажимается клавиша C/П (получаем  $U(I)$  и т. д.).

ИП3 ИП2 ↑ + — П9 ИП1 + ПА ИП1  
 + ИП2 — 2 F1/2 F ln XY ÷ П7 ИП9

×	Fe <sup>x</sup>	ИП4	×	П5	ИПА	ИП4	÷	П6	С/П
ИП6	XY	×	FVx	ИП5	÷	1	+	Fln	ИП7
÷	+	БП	29						

Пример. Для диода Д226 при  $I_1 = 0,05$  А,  $U_1 = 0,51$  В,  $U_2 = 0,56$  В и  $U_3 = 0,63$  В получим  $R_c = 0,4$  Ом,  $I_0 = 6,055455 \cdot 10^{-7}$  А и  $\Lambda = 23,10490$ . При  $I = 0,15$  А имеем  $U(I) = 0,59754903$  В, при  $I = 0,25$  А —  $U(I) = 0,65965793$  В и т. д. При практических вычислениях нужно как можно точнее задавать значения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ .

Рис. 7.18. N-образная вольт-амперная характеристика туннельного диода



Более сложный вид (рис. 7.18) имеет вольт-амперная характеристика туннельного диода. Она может аппроксимироваться выражением

$$I(U) = A_1 U e^{-\alpha_1 U} + A_2 (e^{\alpha_2 U} - 1). \quad (7.7)$$

Параметры  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  могут вычисляться по значениям  $U_1$ ,  $I_n$ ,  $U_2$ ,  $I_b$  и  $U_3$  (рис. 7.18) с учетом выполнения условия

$$\frac{dI(U)}{dU} = A_1 (1 - \alpha_1 U) e^{-\alpha_1 U} + \alpha_2 A_2 e^{\alpha_2 U} = 0 \quad \text{при } U = U_1.$$

Введя допущения  $A_2 (e^{\alpha_2 U_1} - 1) \approx 0$ ,  $A_1 U_3 e^{-\alpha_1 U_3} \approx 0$  и  $e^{\alpha_2 U_3} \gg \gg 1$ , получим систему уравнений [19]

$$A_1 (1 - \alpha_1 U_1) e^{-\alpha_1 U_1} = 0; \quad A_1 U_1 e^{-\alpha_1 U_1} = I_n,$$

$$A_1 U_2 e^{-\alpha_1 U_2} + A_2 e^{\alpha_2 U_2} = I_b; \quad A_2 e^{\alpha_2 U_3} = I_n,$$

решение которой выполняется по приведенной ниже программе.

**Программа 7.61.** Вычисление параметров ВАХ туннельного диода:  $\alpha_1 = 1/U_1$ ,  $A_1 = I_n e/U_1$ ,  $\alpha_2 = \ln(I_0/I_n - (U_2/U_1) \exp((U_1 - U_2)/U_1))/(U_2 - U_3)$  и  $A_2 = I_n \exp(-\alpha_2 U_3)$ . Ввод:  $U_1 = P1$ ,  $U_2 = P2$ ,  $U_3 = P3$ ,  $I_n = P4$ ,  $I_0 = P5$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $A_1 \rightarrow PX = PA$ ,  $A_2 \rightarrow PB$ ,  $\alpha_1 \rightarrow PC$  и  $\alpha_2 \rightarrow PD$ . Для вычисления далее  $I(U)$  по формуле (7.7) задается  $U = PX$  и нажимается клавиша С/П (получаем  $I(U) \rightarrow PX$ ).

ИП5	ИП4	÷	ИП1	F1/x	ПС	ИП2	×	↑	↑
1	—	Fe <sup>x</sup>	÷	—	Fln	ИП2	ИП3	—	÷
ПД	ИП3	×	Fe <sup>x</sup>	ИП4	XY	÷	ПВ	ИП4	1

$Fe^x \times$	ИПС $\times$	ПА	С/П	ПО	†	ИПС $\times$
$Fe^x \div$	ИПА $\times$	ИПО	ИПД	$\times$	$Fe^x$	1
ИПВ $\times$	+	БП	35			—

Пример. Для  $U_1 = 0,1$  В,  $U_2 = 0,55$  В,  $U_3 = 1,05$  В,  $I_n = 2 \cdot 10^{-3}$  А и  $I_b = 2 \cdot 10^{-4}$  А получим  $A_1 = 5,4365636 \cdot 10^{-2}$  1/Ом,  $A_2 = 2,1874398 \cdot 10^{-6}$  А,  $\alpha_1 = 10$  1/В и  $\alpha_2 = 6,493496$  1/В. Далее для  $U = 0,2$  В получим  $I(U) = 1,4773463 \cdot 10^{-3}$  А, для  $U = 0,8$  В получим  $I(U) = 4,068669 \cdot 10^{-4}$  А и т. д.

Значительные трудности представляет аппроксимация семейств вольт-амперных характеристик, которые являются функциями двух управляющих переменных. Для некоторых нелинейных приборов, например биполярных и маломощных полевых транзисторов, существуют аналитические выражения для описания семейств их вольт-амперных характеристик. Однако для некоторых приборов, например мощных МДП-транзисторов, таких выражений

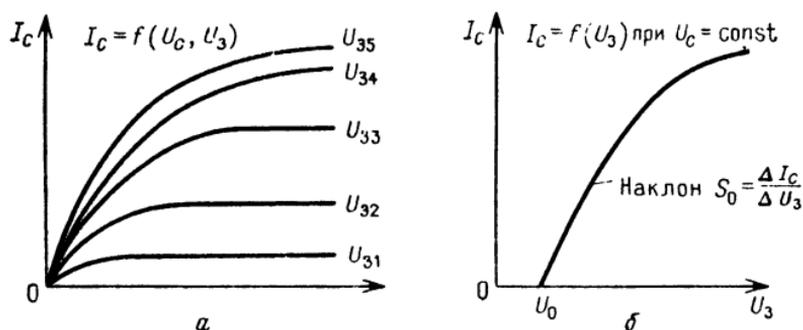


Рис. 7.19. Семейство выходных вольт-амперных характеристик мощного МДП-транзистора (а) и его передаточная характеристика (б)

нет либо они чрезмерно сложны. В этом случае полезны формальные аппроксимации с неформальным подходом к их реализации, основанным на учете конкретных особенностей аппроксимируемых зависимостей.

Например, семейство выходных вольт-амперных характеристик мощного МДП-транзистора с горизонтальным каналом (рис. 7.19, а) формально напоминает семейство экспоненциальных зависимостей вида

$$I_c(U_c, U_a) = I_c(U_a) \left( 1 - e^{-\mu U_c / (U_a - U_0 - bU_a^2)} \right). \quad (7.8)$$

Здесь зависимость  $I_c(U_a)$  — передаточная характеристика при больших  $U_c = \text{const}$  (рис. 7.19, б). Эта зависимость хорошо описывается параболой

$$I_c(U_a) = S_0 (\bar{U}_a - U_0 - bU_a^2), \quad (7.9)$$

где  $U_0$  — напряжение отсечки. Параметры  $S_0$ ,  $b$  и  $U_0$  этой зависимости легко найти с помощью программы параболической регрессии (см. разд. 5.17, программа 5.142).

Для вычисления коэффициента  $p$  можно воспользоваться паспортным значением тока  $I_c^* = I_c(U_a^*, U_c^*)$  для  $U_a^* = U_c^* = U^* = \text{const}$  (обычно  $U_c^* = U_a^* = 20$  В). Из приведенных уравнений нетрудно найти

$$p = \frac{U^* - U_0 - bU^{*2}}{U^*} \ln \left[ 1 - \frac{I_c^*}{S_0(U^* - U_0 - bU^{*2})} \right]^{-1}.$$

**Программа 7.62.** Вычисление коэффициента  $p$  и расчет зависимости  $I_c(U_a, U_c)$  для мощных МДП-транзисторов с горизонтальным каналом. Ввод:  $U_0 = P0$ ,  $b = PB$ ,  $S_0 = PC$ ,  $I_c^* = PD$ ,  $U^* = PX$ . Нажав клавиши В/0 и С/П, получим  $p \rightarrow PX$ . Теперь, вводя  $U_c = PY$  и  $U_a = PX$  и нажимая клавишу С/П, будем получать  $I_c(U_a, U_c)$ .

ПА	↑	Fx <sup>2</sup>	ИПВ	×	—	ИПО	—	П1	ИПА
÷	1	ИПД	ИП1	÷	ИПС	÷	—	F1/x	Fln
×	П1	С/П	↑	Fx <sup>2</sup>	ИПВ	×	—	ИПО	—
ПЗ	÷	ИП1	/—/	×	Fe <sup>x</sup>	1	XY	—	ИПЗ
×	ИПС	×	С/П	БП	23				

**Пример.** Для  $U_0 = 1$  В,  $b = 0,01$  1/В,  $S_0 = 0,15$  А,  $I_c^* = 2$  А и  $U^* = 20$  В получим  $p = 1,6479185$ . Для  $U_a = 10$  В и  $U_c = 40$  В находим  $I_c(U_a, U_c) = 1,1996832$  А.

Применение трансцендентных функций для описания вольт-амперных характеристик ведет к необходимости использования численных методов при решении ряда практических задач. Например, из (7.8) в явном виде нельзя найти напряжение на затворе  $U_a$  при заданных напряжении на стоке  $U_c$  и токе стока  $I_{c0}$ . Однако требуемое значение  $U_a$  находится из решения уравнения

$$I_{c0} - S_0(U_a - bU_a^2) \left[ 1 - e^{-pU_c/(U_a - bU_a^2)} \right] = 0.$$

В этом уравнении положено  $U_0 = 0$  (при  $U_0 \neq 0$  полученное значение  $U_a$  изменится на величину  $U_0$ ).

Это уравнение может решаться различными численными методами, например методом простых итераций. В последнем случае оно преобразуется к виду

$$U_{a_{n+1}} = \frac{I_{c0}}{S_0 \left[ 1 - e^{-pU_c/(U_{a_n} - bU_{a_n}^2)} \right]} + bU_{a_n}^2.$$

Часто необходимо определять максимальные параметры нелинейного активного прибора, например крутизну  $S = \Delta I_c / \Delta U_a$  при

$U_c = \text{const}$  и внутреннее сопротивление  $R_i = \Delta U_c / \Delta I_c$  при  $U_3 = \text{const}$  для полевого транзистора. Для этого вычисляется напряжение  $U_3 = U_{30}$  при заданном  $I_c = I_{c0}$  (см. выше). Затем находится  $U_3 = U'_{30}$  при  $I'_{c0} = I_{c0} + \Delta I_c$ , где  $\Delta I_c$  — заданное малое приращение  $I_c$ . Тогда

$$S = \Delta I_c / (U'_{30} - U_{30}).$$

Для вычисления  $R_i$  находим  $I_c$  из (7.8) при двух значениях  $U_c$ , отличающихся на заданную малую величину  $\Delta U_c$  при  $U_3 = U_{30}$ . Как отмечалось  $R_i = \Delta U_c / \Delta I_c$ , где  $\Delta I_c$  — разность найденных значений  $I_c$ .

**Программа 7.63.** Нахождение напряжения на затворе  $U_3$  мощного полевого транзистора по заданным  $I_c$  и  $U_c$ , его крутизны  $S$  и внутреннего сопротивления  $R_i$  в заданной рабочей точке. Ввод:  $I_{c0} = P1$ ,  $U_c = P2$ ,  $S_0 = P3$ ,  $p = P4$ ,  $b = P5$ ,  $\Delta U_c = PC$  и  $\Delta I_c = PD$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $U_{30} \rightarrow \rightarrow PX = P8$ ,  $R_i \rightarrow PY = P7$  и  $S \rightarrow P_3 = P9$ .

ИП1	ПВ	ИП3	÷	П0	ПП	47	П8	ИП7	ПА
ИП1	ИПД	+	ПВ	ПП	47	ИП8	—	ИПД	ХУ
÷	П9	ИП2	ИПС	+	ИП4	×	ИПА	÷	Fe <sup>x</sup>
ИП2	ИП4	×	ИПА	÷	Fe <sup>x</sup>	—	ИПА	×	ИП3
×	ИПС	ХУ	÷	П7	ИП8	С/П	ИП0	Fx <sup>2</sup>	ИП5
×	П9	ИП0	—	П7	ИП4	÷	ИП2	÷	F1/x
Fe <sup>x</sup>	1	ХУ	—	ИП3	×	ИПВ	ХУ	÷	ИП9
+	ИП0	ХУ	П0	—	Fx <sup>2</sup>	1	ВП	6	/—/
—	Fx < 0	47	ИП0	В/0					

**Пример.** Для мощного МДП-транзистора КП905, имеющего параметры  $S_0 = 0,03$  А/В,  $p = 1$ ,  $b = 0,02$  1/В при  $I_{c0} = 0,05$  А,  $U_c = 10$  В,  $\Delta U_c = 1$  В и  $\Delta I_c = 0,01$  А найдем  $U_{30} = 1,7307476$  В,  $R_i = 17629,492$  Ом и  $S = 2,6906775 \cdot 10^{-2}$  А/В.

Другой широко распространенной задачей является расчет токов и напряжений в электронной схеме с активным прибором. Такие задачи — расчет токов в схеме с диодом и с мощным полевым транзистором — уже рассматривались в разд. 5.4. Однако полезно рассмотреть ряд специальных приемов и методов, облегчающих решение данной задачи.

Прежде всего отметим, что в ряде случаев токи и напряжения в статическом режиме определяются неоднозначно. Например, в простой триггерной схеме с туннельным диодом (рис. 7.20, а),  $N$ -образная вольт-амперная характеристика которого описывается выражением (7.7), в общем случае могут быть три различных статических режима. Они отвечают решению нелинейного уравнения

$$(E - U)/R - I(U) = 0, \quad (7.10)$$

где  $I(U)$  дается формулой (7.7). Решение (7.10) в плоскости вольт-амперных характеристик  $(U, I)$  соответствует трем точкам пересечения линии нагрузки резистора  $R$  с вольт-амперной характеристикой  $I(U)$  (рис. 7.20, б).

В связи с этим желательно иметь программу, обеспечивающую поиск всех корней нелинейного уравнения на заданном отрезке

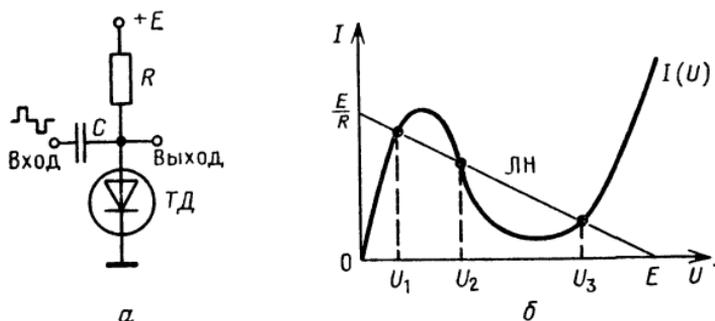


Рис. 7.20. Простейший триггер на туннельном диоде (а) и графический расчет его статического режима (б)

[ $a, b$ ]. Заметим, что для электро-радиотехнических цепей отрезок  $[a, b]$  нередко предопределен физическими соображениями. Например, для цепи рис. 7.20, а  $a = 0$  и  $b = E$ , поскольку напряжение  $U$  физически не может быть меньше 0 и больше напряжения питания  $E$ .

Алгоритмы ряда программ, описанных в разд. 5.4, можно усложнить с тем, чтобы они обеспечивали поиск всех корней на заданном отрезке  $[a, b]$ . Так, алгоритм метода поразрядного приближения, обеспечивающий такую возможность, следующий.

1. Задаем шаг  $h = h_0$ , где  $h_0$  — начальный шаг изменения аргумента  $x$  функции  $F(x)$  и  $x = a$ , и находим  $p = F(x)$ .

2. Задаем значение  $x = x + c$  и проверяем выполнение условия  $x - c \geq b$ . Если оно выполняется, заканчиваем счет выдачей сообщения ЕГГОГ, свидетельствующего о том, что больше корней нет (для выдачи этого сообщения может использоваться команда  $Sx F_1/x$ ). В противном случае идем далее к п. 3.

3. Вычисляем  $F(x)$  и проверяем выполнение условия  $F/(ph) > 0$ . Если оно выполняется, идем к п. 2, иначе — в п. 4.

4. Задаем  $h = -h/R$ , где  $R$  — показатель разрядности (дробления шага), и проверяем условие  $h^2 > (\varepsilon/R)^2$ . Если это условие выполняется, идем к п. 2, иначе — к п. 5.

5. Выводим на индикацию корень  $\bar{x}$ , задаем  $h = h_0$ ,  $p = -p$  и идем к п. 2 алгоритма.

Этот алгоритм при  $R = 4$  реализован приведенной ниже программой.

**Программа 7.64.** Вычисление всех корней нелинейного уравнения  $F(x) = 0$  на отрезке  $[a, b]$ . Ввод:  $a = PA$ ,  $b = PB$ ,  $h_1 = PD$

и  $(e/4)^2 = P2$ . Текущие значения  $x$  для подпрограммы вычисления  $F(x)$   $x \rightarrow P0$  (регистр 1 занят под хранение  $p$ ). Вывод результатов: корень  $\bar{x}_1 \rightarrow PX$  и ЕГГОГ, если поиск корней закончен.

ИПД	ПС	ИПА	ПО	ПП	48	П1	ИПС	ИПО	+
ПО	FBx	ИПС	—	ИПВ	—	$Fx \geq 0$	21	Cx	F1/x
С/П	ПП	48	ИП1	÷	ИПС	÷	$Fx < 0$	07	ИПС
/—/	4	÷	ПС	$Fx^2$	ИП2	—	$Fx < 0$	07	ИПО
С/П	ИПД	ПС	ИП1	/—/	П1	БП	07	...	В/0

**Пример.** Найти напряжения на туннельном диоде в схеме триггера (рис. 7.20, а), если  $E = 1$  В,  $R = 125$  Ом,  $A_1 = 0,2718$  1/Ом,  $\alpha_1 = 10$  1/В,  $A_2 = 1 \cdot 10^{-8}$  А,  $\alpha_2 = 20$  1/В. Таким образом,  $b = E$  и  $a = 0$ , подпрограмма вычисления функции ( $x = U$ )

$$F(U) = (E - U)/R - A_1 U e^{-\alpha_1 U} - A_2 (e^{\alpha_2 U} - 1)$$

имеет вид ( $A_1 = P3$ ,  $A_2 = P4$ ,  $\alpha_1 = P5$ ,  $\alpha_2 = P6$  и  $R = P7$ ):

ИПВ	ИПО	—	ИП7	÷	ИП5	/—/	ИПО	×	$Fe^x$
ИП3	×	ИПО	×	—	ИП6	ИПО	×	$Fe^x$	1
—	ИП4	×	—						

Введя программу и исходные данные ( $h_0 = 0,1$ ;  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ ), получим (после нажатия клавиш В/0 и С/П)  $\bar{x}_1 = U_1 = 0,04375$  В ( $t_c \approx 3,5$  мин), нажав еще раз клавишу С/П, получим  $\bar{x}_2 = U_2 = 0,23437502$  В ( $t_c \approx 3,5$  мин), нажав еще раз клавишу С/П, получим  $\bar{x}_3 = U_3 = 0,62500004$  В и, наконец, нажав еще раз клавишу С/П, получим индикацию знака ЕГГОГ (больше корней нет).

Большинство современных активных приборов широкого применения имеет монотонные вольт-амперные характеристики. Их удобно подразделить на два типа — триодные  $U(I)$  и пентодные  $I(U)$ . Такими характеристиками обладали первые активные приборы — электронные лампы триод (трехэлектродная лампа) и пентод (пятиэлектродная лампа). При фиксированном управляющем сигнале такие характеристики монотонны и в статическом режиме цепи с ними имеют одно состояние. Поэтому программы, описанные в разд. 5.4, вполне применимы для анализа таких нелинейных цепей. Однако в общем случае при этом необходим анализ сходимости.

Для специалистов по электротехнике и радиоэлектронике привычным является графический расчет режимов работы нелинейных цепей. Поэтому особый интерес для них имеют методы, обладающие графической интерпретацией процессов сходимости в плоскости вольт-амперных характеристик и заведомо монотонной сходимостью для указанных типов этих характеристик.

Одному из самых простых и удобных методов — методу простых итераций — можно придать электротехническую наглядность,

если в случае «триодной» вольт-амперной характеристики вычислять ток в цепи рис. 7.21, а по следующей итерационной формуле [8]:

$$I_{n+1} = \frac{E}{R + R_{ncp}} = \frac{E}{R + U(I_n)/I_n}.$$

Здесь на каждом шаге ток  $I_{n+1}$  определяется как ток, протекающий через два последовательно соединенных линейных резистора —  $R$  и усредненного сопротивления нелинейного прибора  $R_{ncp} = U(I_n)/I_n$ . Графическая иллюстрация процесса сходимости (рис. 7.21, а) показывает, что она монотонна.

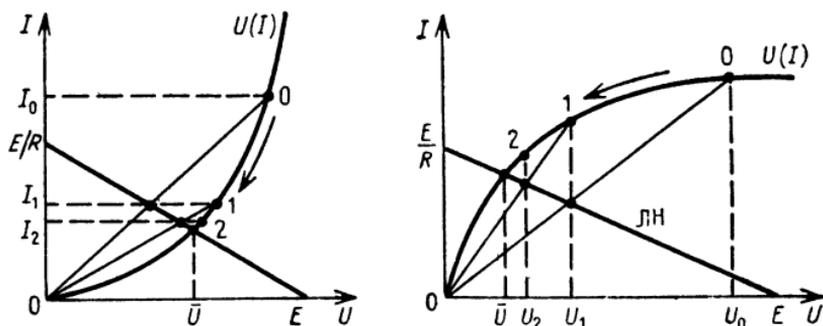


Рис. 7.21. Графическая иллюстрация решения нелинейного уравнения методом усреднения нелинейности при «триодной» (а) и «пентодной» (б) форме вольт-амперных характеристик

Для цепи с нелинейным прибором, имеющим «пентодную» вольт-амперную характеристику  $I(U)$ , итерационная формула записывается в виде

$$U_{n+1} = E \frac{R_{ncp}}{R_{ncp} + R} = E \left[ 1 + \frac{RI(U_n)}{U_n} \right]^{-1}.$$

При этом напряжение на нелинейном приборе рассматривается как выходное напряжение делителя, содержащего линейные резисторы  $R$  и  $R_{ncp} = U_n/I(U_n)$ . Графическая трактовка сходимости для этого случая (рис. 7.21, б) также показывает на то, что сходимость является монотонной.

Применение указанных преобразований превращают метод простых итераций в его особую разновидность — метод усреднения нелинейности. Отметим, что такой прием (представление нелинейных приборов на каждом шаге итераций в виде линейных резисторов с усредненным сопротивлением  $R_{ncp}$ ) позволяет свести анализ статического режима сложных нелинейных цепей к решению систем линейных уравнений. Для простых цепей с одним нелинейным прибором можно непосредственно применять программы 5.22 и 5.23, реализующие метод простых итераций.

Если вольт амперная характеристика допускает аналитическое представление в виде функций  $U(I)$  и  $I(U)$  одновременно, то сходимость итерационного метода с усреднением нелинейности можно значительно ускорить, обеспечив двустороннее сужение отрезка  $[a, b]$  путем одновременного смещения обеих границ  $a$  и  $b$  к корню. Покажем это на примере расчета напряжения на стоке мощного полевого транзистора в схеме ключа рис. 5.2, а.

Расчет будем проводить по следующему алгоритму.

1. Задаем  $U_c = U_{cn}$  и по формуле

$$I_c = S_0 (U_3 - U_0 - bU_3^2) \left[ 1 - e^{-pU_c / (U_3 - U_0 - bU_3^2)} \right] \quad (7.11)$$

находим  $I_{cn}$ .

2. Задаем  $I_c = I'_{cn}$  и по формуле

$$U_c = \frac{(U_3 - U_0 - bU_3^2)}{p} \ln \left[ \frac{I_c}{S_0 (U_3 - U_0 - bU_3^2)} + 1 \right] \quad (7.12)$$

находим  $U'_{cn}$ . Формула для  $U_c$  получена из (7.11) разрешением последней относительно искомой величины  $U_c$  при аргументе  $I_c$ .

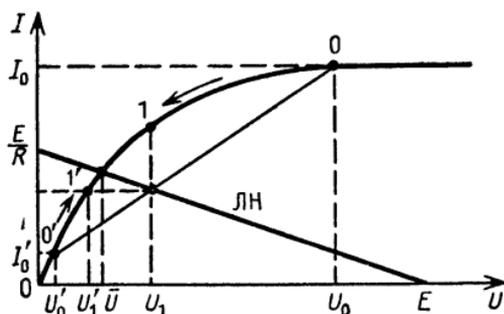


Рис. 7.22. Графическая иллюстрация решения нелинейного уравнения методом усреднения нелинейности с двухсторонним подходом к корню.

3. Определяем усредненное в интервале напряжений  $[U'_{cn}, U_{cn}]$  и токов  $[I'_{cn}, I_{cn}]$  сопротивление выходной цепи мощного полевого транзистора

$$R'_n = \frac{U_{cn} - U'_{cn}}{I_{cn} - I'_{cn}} = \frac{U'_{cn} - U_{cn}}{I'_{cn} - I_{cn}}.$$

Это сопротивление определяет наклон отрезка прямой с концевыми точками  $(U_{cn}, I_{cn})$  и  $(U'_{cn}, I'_{cn})$  (рис. 7.22).

4. Находим очередное приближение по току

$$I'_{c(n+1)} = \frac{E_c - U'_{cn} + I'_{cn} R'_n}{R'_n + R_c}.$$

5. Находим очередное приближение по напряжению (к корню)

$$U_{c(n+1)} = E - I'_{c(n+1)} R_c.$$

6. Проверяем выполнение условия

$$U_{c(n+1)} - U_{cn} > \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — заданная погрешность вычисления корня. Если данное условие выполняется, идем к п. 1 алгоритма и повторяем все вычисления. Если оно не выполняется, заканчиваем счет и выводим значение  $U_{c(n+1)} = \bar{U}_c$ .

При подготовке программы, вычисляющей  $\bar{U}_c$  при различных  $U_3$ , следует предварительно (после задания  $U_3$ ) вычислить значения  $S_0 (U_3 - U_0 - bU_3^2)$  и  $(U_3 - U_0 - bU_3^2)/\rho$ , что резко облегчает вычисления по громоздким формулам (7.11) и (7.12) и делает вычисления этих членов однократными.

**Программа 7.65.** Расчет напряжения на стоке мощного МДП-транзистора в схеме рис. 5.2, а методом усреднения нелинейности с двухсторонним подходом к корню. Ввод:  $\varepsilon = P0$ ,  $E_c = P1$ ,  $U_0 = P2$ ,  $R_c = P3$ ,  $S_0 = P4$ ,  $\rho = P5$ ,  $b = P6$ ,  $U_{c_0} = P7$ ,  $I'_{c_0} = P8$  и далее (после нажатия клавиши В/0)  $U_3 = PX$  (нажав клавишу С/П, получим  $\bar{U}_c \rightarrow PX$ ).

П9	Fx <sup>2</sup>	ИП6	×	ИП9	—	ИП2	+	↑	ИП4
×	П9	XY	ИП5	÷	П8	ИПВ	ИП8	÷	Fe <sup>x</sup>
1	—	ИП9	×	ПА	ИПС	ИП9	÷	1	+
F ln	ИП8	×	ПД	ИПВ	—	ИПС	ИПА	—	÷
П7	ИП1	ИПД	—	ИПС	ИП7	×	+	ИП7	ИП3
+	÷	ПС	ИП1	ИПС	ИП3	×	—	ИПВ	XY
ПВ	—	ИП0	—	Fx < 0	16	ИПВ	С/П	БП	00

**Пример.** Для  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ ,  $E_c = 40$  В,  $U_0 = 1$  В,  $R_c = 100$  Ом,  $S_0 = 0,1$  А/В,  $\rho = 1$ ,  $b = 0,02$  1/В (параметры транзистора КП901),  $U_{c_0} = 40$  В,  $I'_{c_0} = 0$  получим для зависимости  $U_c(U_3)$  следующие данные:  $U_c(2) = 30,8$  В,  $U_c(4) = 13,381808$  В,  $U_c(6) = 6,522966$  В и т. д. Время счета около 1 ÷ 2 мил для каждого значения  $U_3$ .

Если в цепь входит несколько нелинейных приборов, анализ сводится к решению систем нелинейных уравнений. Например, в типовой схеме интегрального стабилизатора тока рис. 7.23, а имеется две нелинейные цепи — цепь с диодами VD1 и VD2 и цепь смещения базы биполярного транзистора VT1. При  $U > U_{60}$ , где  $U_{60}$  — напряжение на базе VT1, транзистор работает в активном режиме (рис. 7.23, б). Используя законы Кирхгофа, итерационные уравнения метода простых итераций для данной схемы можно

$$I_{1(n+1)} = \left[ E - km\varphi_T \ln \left( \frac{I_{1n} - I_{2n}}{I_0} + 1 \right) \right] / R_1,$$

$$I_{2(n+1)} = \frac{km\varphi_T \ln \left( \frac{I_{1n} - I_{2n}}{I_0} + 1 \right) - m\varphi_T \ln \frac{(B+1)I_{2n}}{I_{\infty 0}} - R_3(B+1)I_{2n}}{R_2},$$

где  $k$  — число диодов ( $k = 2$  для данного примера),  $\varphi_T$  — тепловой потенциал,  $I_0$  — обратный ток диодов и  $I_{\infty 0}$  — обратный ток эмиттера VT1.

**Программа 7.66.** Расчет токов  $I_1$  и  $I_2$  интегральной схемы токоисточника (рис. 7.23), а также напряжения на базе

$$U_{60} = m\varphi_T \ln \frac{(B+1)I_2}{I_{\infty 0}} + R_3(B+1)I_2$$

и тока коллектора  $I_K = (B+1)I_2$  при  $U > U_{60}$ . Ввод:  $E = P0$ ,  $R_1 = P1$ ,  $R_2 = P2$ ,  $R_3 = P3$ ,  $k = P4$ ,  $m\varphi_T = P5$ ,  $I_0 = P6$ ,  $I_{\infty 0} = P7$ ,

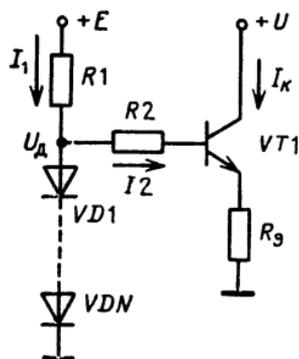


Рис. 7.23. Схема интегрального стабилизатора тока (а) и его выходная характеристика (б)

$B = P8$ ,  $\varepsilon^2 = P9$ ,  $I_{1(0)} = PA$  и  $I_{2(0)} = PB$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $U_{60} \rightarrow PX = PD$ ,  $I_K \rightarrow PY = PC$ ,  $I_1 \rightarrow PA$ ,  $I_2 \rightarrow PB$ .

ИПО	ИПА	ИПВ	—	ИП6	÷	1	+	F ln	ИП4
×	ИП5	×	ПС	—	ИП1	÷	ПА	ИПС	ИП8
1	+	ИПВ	×	ПС	ИП7	÷	F ln	ИП5	×
ИПС	ИП3	×	+	ПД	—	ИП2	÷	ИПВ	ХУ
ПВ	—	Fx <sup>2</sup>	ИП9	—	Fx < 0 00		ИПС	ИПД	С/П

**Пример.** Для  $E = 5$  В,  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 20$  кОм,  $R_3 = 0,1$  кОм,  $k = 2$ ,  $m\varphi_T = 0,05$  В,  $I_0 = 1 \cdot 10^{-6}$  мА,  $I_{\infty 0} = 1 \cdot 10^{-7}$  мА,  $B = 50$ ,  $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-12}$ ,  $I_{1(0)} = 1$  мА и  $I_{2(0)} = 0,01$  мА получим  $U_{60} = 0,94353623$  В,  $I_K = 1,2605433$  мА,  $I_1 = 1,7810627$  мА и  $I_2 = 0,02471692$  мА при  $t_c \approx 4$  мин.

## 7.6. Расчет и моделирование нелинейных безынерционных цепей в динамическом режиме

Расчет и моделирование нелинейных безынерционных цепей в динамическом режиме удастся свести к расчету их в статическом режиме, задавая мгновенные значения управляющего сигнала как значения постоянные. Таким образом строится сквозная динамическая характеристика цепи. Например, построение такой характеристики  $U_c = f(U_a)$  для каскада рис. 5.2, а было выполнено выше — см. программу 7.65 и пример к ней. Выбрав на динамической характеристике точку покоя и определив 5 или 7 ординат  $U_c$  при различных амплитудах  $U_{зм}$  косинусоидального напряжения  $U_a = U_{зм} \cos \omega t$ , можно воспользоваться методами 5 или 7 ординат для последующего спектрального и энергетического анализа (см. разд. 5.12).

К нелинейным безынерционным цепям относятся также детекторы и выпрямители, если можно пренебречь инерционностью их диодов.

Рассмотрим расчет  $m$ -фазной схемы выпрямителя, работающего на конденсатор фильтра (см. мостовую схему для  $m = 2$  на рис. 7.24). Угол отсечки  $\theta$  диодов при большой емкости конденсатора  $C$  определяется из решения трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \theta - \theta = \pi r / m R_n = A,$$

где  $r$  — внутреннее сопротивление открытых вентилях и обмотки трансформатора,  $R_n$  — сопротивление нагрузки.

После нахождения  $\theta$  определяются вспомогательные коэффициенты

$$K(\theta) = \sin \theta - \theta \cos \theta, \quad F(\theta) = \pi(1 - \cos \theta) / K(\theta),$$

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta},$$

$$D(\theta) = \frac{\sqrt{\pi [\theta (1 + \cos 2\theta/2) - 3 \sin 2\theta/4]}}{K(\theta)},$$

с помощью которых определяются: требуемое напряжение  $U_2 = U_0 B(\theta)$  на вторичной обмотке трансформатора, пиковое значение тока вентиля  $I_{вм} = I_0 F(\theta) / m$ , действующее значение тока вентиля  $I_v = D(\theta) I_0 / m$ , ток вторичной обмотки  $I_2 = \sqrt{2} I_v$  и

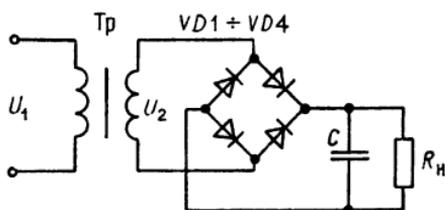


Рис. 7.24. Мостовой выпрямитель

емкость конденсатора фильтра

$$C = \left( \frac{1}{m} + \frac{\theta}{\pi} \right) / 2K_{\text{пв}} f R_{\text{н}},$$

где  $f$  — частота сети и  $K_{\text{пв}}$  — коэффициент пульсаций выходного напряжения.

**Программа 7.67.** Расчет выпрямителя, работающего на емкость. Ввод:  $r = P1$ ,  $R_{\text{н}} = P2$ ,  $m = P3$ ,  $f = P4$ ,  $K_{\text{пв}} = P5$ ,  $\varepsilon = P6$ . Вывод результатов:  $\theta$  (рад)  $\rightarrow P0$ ,  $A(\theta) \rightarrow PА$ ,  $B(\theta) \rightarrow PВ$ ,  $F(\theta) \rightarrow PС$ ,  $D(\theta) \rightarrow PД$  и  $C \rightarrow PХ$ . Переключатель  $P - \Gamma$  в положении  $P$ .

ИП1	ИП2	÷	ИП3	÷	$F\pi$	×	П9	0	П0
1	П8	ИП0	ИП8	+	П0	$Ftg$	ИП0	—	ИП9
—	$Fx \geq 0$	12	ИП0	ИП8	—	П0	ИП8	3	÷
П8	ИП6	—	$Fx < 0$	12	ИП0	$F\sin$	ИП0	$F\cos$	П7
ИП0	×	—	ПА	2	$F\sqrt{\quad}$	ИП7	×	$F1/x$	ПВ
1	ИП7	—	$F\pi$	×	ИПА	÷	ПС	ИП0	2
×	П8	$F\cos$	2	÷	1	+	ИП0	×	3
ИП8	$F\sin$	×	4	÷	—	$F\pi$	×	$F\sqrt{\quad}$	ИПА
÷	ПД	ИП3	$F1/x$	ИП0	$F\pi$	÷	+	2	÷
ИП4	÷	ИП2	÷	ИП5	÷	С/П			

**Пример.** Пусть  $r = 100$  Ом,  $R_{\text{н}} = 1000$  Ом,  $m = 2$ ,  $f = 50$  Гц,  $K_{\text{пв}} = 0,1$ ,  $U_{\text{с}} = 150$  В и  $I_0 = 0,15$  А. Введя первые пять параметров и задав  $\varepsilon = 10^{-4}$ , получим  $C = 7,29187 \cdot 10^{-5}$  Ф,  $\theta = 0,7200122$  рад,  $K(\theta) = 0,11809036$ ,  $B(\theta) = 0,94055459$ ,  $F(\theta) = 6,6029987$  и  $D(\theta) = 2,2940527$ . Следовательно,  $U_2 = 150 \cdot 0,94055459 = 141,08319$  В,  $I_{\text{нм}} = 0,15 \cdot 6,6029987/2 = 0,4952249$  А,  $I_{\text{в}} = 0,15 \cdot 2,2940527/2 = 0,17205395$  А и  $I_2 = \sqrt{2}I_{\text{в}} = 0,24332101$  А.

## 7.7. Пересчет параметров биполярных транзисторов

Иногда нужно найти физические параметры биполярных транзисторов (сопротивления эмиттера  $r_{\text{э}}$ , базы  $r_{\text{б}}$ , коллектора  $r_{\text{к}}$  и коэффициент передачи тока эмиттера  $a = r_{\text{м}}/r_{\text{к}}$ ) по  $h$ -параметрам транзистора, характеризующим его как 4-полюсник. Пересчет ведется по формулам табл. 7.3 [16] и реализуется одной программой.

**Программа 7.68.** Расчет физических параметров по  $h$ -параметрам. Ввод:  $h_{11} = PА$ ,  $h_{12} = PВ$ ,  $h_{21} = PС$ ,  $h_{22} = PД$  и код (0 для схемы с общей базой и 1 с общим эмиттером) в регистр  $X$ . Вывод результатов:  $r_{\text{б}} \rightarrow P1$ ,  $r_{\text{э}} \rightarrow P2$ ,  $r_{\text{к}} \rightarrow P3$ ,  $r_{\text{м}} \rightarrow P4$  и  $a \rightarrow P6 = PХ$ .

П5	ИПА	1	ИПС	+	ИПВ	×	ИПД	÷	—
П2	ИПВ	ИПД	÷	П1	ИПВ	ИПС	+	П9	ИПД
÷	П4	ИП5	$Fx=0$	44	1	ИПВ	—	ИПД	÷

ПЗ	ИП4	/—/	П4	ИП9	/—/	1	ИПВ	—	—
П6	С/П	БП	00	ИП1	ИП2	ХУ	П2	ХУ	П1
1	ИПС	+	ИИД	÷	ПЗ	ИП9	1	ИПС	+
÷	П6	БП	41						

Пример. Для  $h_{116} = 25$  Ом,  $h_{126} = 0.25 \cdot 10^{-3}$ ,  $h_{216} = -0.98$  и  $h_{226} = 3 \cdot 10^{-6}$  сим, вводя код 0 = РХ, получим  $r_6 = 83,333333$  Ом,  $r_3 = 23,333333$  Ом,  $r_K = 333250$  Ом,  $r_m = 326583,33$  Ом и  $a = 0,97999499$ . Для  $h_{113} = 2800$  Ом,  $h_{123} = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $h_{213} = 60$  и

Таблица 7.3

Физические параметры транзистора и их связь с  $h$ -параметрами

Параметр	Схема с общей базой	Схема с общим эмиттером
$r_3$	$h_{116} (1 + h_{216}) h_{126} / h_{226}$	$h_{123} / h_{223}$
$r_6$	$h_{126} / h_{226}$	$h_{113} - h_{123} (1 + h_{213}) / h_{223}$
$r_K$	$(1 - h_{126}) / h_{226}$	$(1 + h_{213}) / h_{223}$
$r_m$	$-(h_{126} + h_{216}) / h_{226}$	$(h_{123} + h_{213}) / h_{223}$
$a$	$-(h_{126} + h_{216}) / (1 - h_{126})$	$(h_{123} + h_{213}) / (1 + h_{213})$

$h_{22} = 5 \cdot 10^{-5}$  сим, введи код 1 = РХ, получим  $r_6 = 360$  Ом,  $r_3 = 40$  Ом,  $r_K = 1220000$  Ом,  $r_m = 1200040$  Ом и  $a = 0,98363934$ .

Обратное преобразование физических параметров в  $h$ -параметры проводится по формулам, приведенным в табл. 7.4.

Таблица 7.4

$h$  параметры транзистора и их связь с физическими параметрами

Параметр	Схема		
	С общим эмиттером	С общей базой	С общим коллектором
$h_{11}$	$r_6 + \frac{r_3 r_K}{r_3 + r_K - ar_K}$	$r_3 + \frac{(1-a)r_6 r_K}{r_6 + r_K}$	$r_6 + \frac{r_3 r_K}{r_3 + r_K - ar_K}$
$h_{12}$	$\frac{r_3}{r_3 + r_K - ar_K}$	$\frac{r_6}{r_K + r_6}$	$\frac{r_K - ar_K}{r_3 + r_K - ar_K}$
$h_{21}$	$\frac{ar_K - r_3}{r_3 + r_K - ar_K}$	$-\frac{r_6 + ar_K}{r_6 + r_K}$	$-\frac{r_K}{r_3 + r_K - ar_K}$
$h_{22}$	$\frac{1}{r_3 + r_K - ar_K}$	$\frac{1}{r_K + r_6}$	$\frac{1}{r_3 + r_K - ar_K}$

**Программа 7.69.** Расчет  $h$ -параметров биполярного транзистора по физическим параметрам. Ввод:  $r_6 = P1$ ,  $r_a = P2$ ,  $r_k = P3$  и  $a = P4$ . Вывод результатов:  $h_{11} \rightarrow PA$ ,  $h_{12} \rightarrow PB$ ,  $h_{21} \rightarrow PC = PX$  и  $h_{22} \rightarrow PD$ . При первом пуске получаем параметры схемы с общим эмиттером, при втором — схемы с общим коллектором и при третьем — схемы с общей базой.

ИП1	ИП3	+	F1/x	П9	ИП2	ИП3	+	ИП3	ИП4
×	П7	-	F1/x	П8	ПД	ИП2	×	ПВ	ИП2
ИП3	ИП8	×	×	ИП1	+	ПА	ИП7	ИП2	-
ИП8	×	ПС	С/П	ИП3	ИП7	-	ИП8	×	ПВ
ИП3	/-/	ИП8	×	ПС	С/П	1	ИП4	-	ИП4
×	ИП3	×	ИП9	×	ИП2	+	ПА	ИП9	ПД
ИП1	×	ПВ	ИП1	ИП4	ИП3	×	+	ИП9	/-/
×	ПС	С/П							

**Пример.** Для  $r_6 = 400$  Ом,  $r_a = 25$  Ом,  $r_k = 10^6$  Ом и  $a = 0,985$  получим, при первом нажатии клавиши С/П,  $h_{11a} = 2063,8935$  Ом,  $h_{12a} = 1,6638935 \cdot 10^{-3}$ ,  $h_{21a} = 65,55574$  и  $h_{22a} = 6,655574 \cdot 10^{-5}$  сим. При повторном нажатии клавиши С/П получим  $h_{11k} = 2063,8935$  Ом,  $h_{12k} = 0,9983361$ ,  $h_{21k} = -66,55574$  и  $h_{22k} = 6,655574 \cdot 10^{-5}$  сим. При третьем нажатии клавиши С/П получим  $h_{11b} = 30,997601$  Ом,  $h_{12b} = 3,9984006 \cdot 10^{-4}$ ,  $h_{21b} = -0,98500599$  и  $h_{22b} = 9,9960015 \cdot 10^{-7}$  сим.

## 7.8. Расчет малосигнальных усилительных каскадов на биполярных и полевых транзисторах

На рис. 7.25 представлены три упрощенные схемы усилительных каскадов на биполярных транзисторах. Цепи питания (по постоянному току) не показаны. Эквивалентные схемы этих каскадов даны на рис. 7.26.

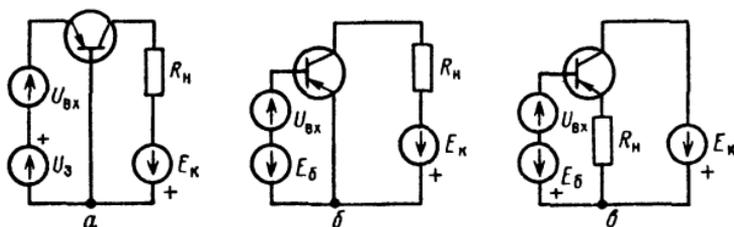


Рис. 7.25. Упрощенные (без цепей питания) схемы усилительных каскадов на биполярных транзисторах: с общей базой (а), с общим эмиттером (б) и общим коллектором (в)

Основными параметрами усилителей в области средних частот являются: входное сопротивление  $R_{вх} = U_{вх}/I_{вх}$ , коэффициент усиления по току  $K_I = I_{вых}/I_{вх}$ , коэффициент усиления по напряже-

нию  $K_U = U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$ , сквозной коэффициент усиления по напряжению  $K_E = U_{\text{вых}}/E_{\text{вх}}$  и выходное сопротивление  $R_{\text{вых}} = \Delta U_{\text{вых}}/\Delta I_{\text{вых}}$  при  $\Delta I_{\text{вых}}$ , задаваемом изменением нагрузки. Рассмотрим расчет этих параметров [16].

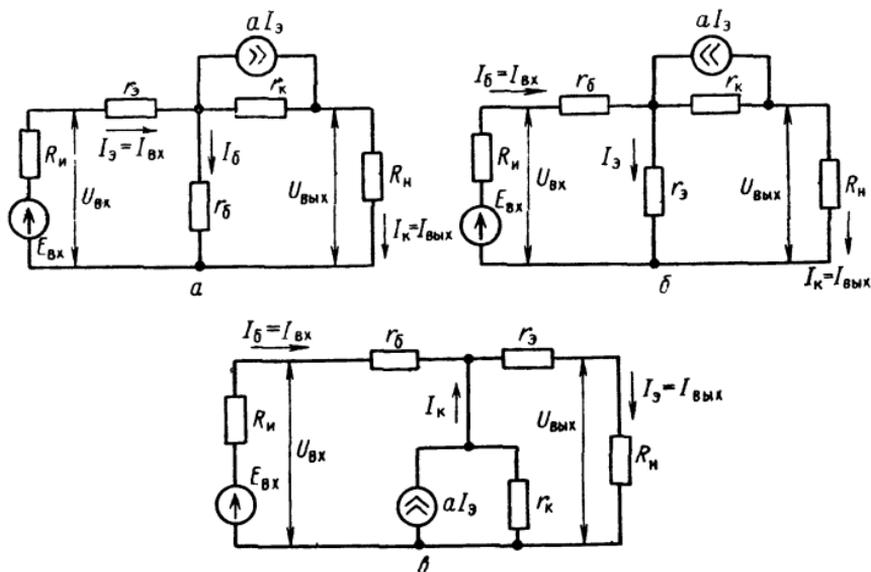


Рис. 7.26. Эквивалентные схемы каскадов с общей базой (а), общим эмиттером (б) и общим коллектором (в)

Для каскада с общей базой (рис. 7.25, а и рис. 7.26, а):

$$R_{\text{вх}} = r_{\text{э}} + r_{\text{б}} \frac{(1-a)r_{\text{к}} + R_{\text{н}}}{r_{\text{к}} + r_{\text{б}} + R_{\text{н}}},$$

$$K_I = \frac{ar_{\text{к}} + r_{\text{б}}}{r_{\text{к}} + r_{\text{б}} + R_{\text{н}}},$$

$$K_U = \frac{(ar_{\text{к}} + r_{\text{б}})R_{\text{н}}}{r_{\text{э}}(r_{\text{к}} + r_{\text{б}} + R_{\text{н}}) + r_{\text{б}}r_{\text{к}}(1-a) + r_{\text{б}}R_{\text{н}}},$$

$$K_E = \frac{(ar_{\text{к}} + r_{\text{б}})R_{\text{н}}}{(R_{\text{и}} + r_{\text{э}})(r_{\text{к}} + r_{\text{б}} + R_{\text{н}}) + r_{\text{б}}r_{\text{к}}(1-a) + r_{\text{б}}R_{\text{н}}},$$

$$R_{\text{вых}} = r_{\text{к}} + r_{\text{б}} \left( 1 - \frac{ar_{\text{к}} + r_{\text{б}}}{r_{\text{э}} + r_{\text{б}} + R_{\text{н}}} \right).$$

**Программа 7.70.** Расчет параметров каскада с общей базой.

Ввод:  $r_{\text{б}} = P1$ ,  $r_{\text{э}} = P2$ ,  $r_{\text{к}} = P3$ ,  $R_{\text{и}} = P4$ ,  $R_{\text{н}} = P5$  и  $a = P6$ . Вывод результатов:  $K_E \rightarrow P0 = PX$ ,  $K_U \rightarrow PA$ ,  $K_I \rightarrow PB$ ,  $R_{\text{вх}} \rightarrow PC$  и  $R_{\text{вых}} \rightarrow PD$ .

ИП6 ИП3 × ИП1 + П7 ИП3 ИП1 ИП5 +  
+ П8 ÷ ПВ 1 ИП6 - ИП3 × ИП5

+	П9	ИП1	×	ИП4	ИП2	+	ИП8	×	±
F1/x	ИП7	×	ИП5	×	П0	ИП7	ИП5	×	ИП2
ИП8	×	ИП1	ИП9	×	+	÷	ПА	ИП9	ИП8
÷	ИП1	×	ИП2	+	ПС	1	ИП7	ИП2	ИП1
+	ИП4	+	÷	-	ИП1	×	ИП3	+	ПД
ИПО	С/П								

**Пример.** Найдем параметры усилителя на грависторе, имеющем параметры:  $r_6 = 400$  Ом,  $r_3 = 25$  Ом,  $r_k = 10^6$  Ом и  $a = 0,98$ , если  $R_k = 100$  Ом и  $R_H = 5000$  Ом. При этих данных получим:  $K_U = 139,51899$ ,  $K_E = 36,130459$ ,  $K_I = 0,97512427$ ,  $R_{вх} = 34,94629$  Ом и  $R_{вых} = 253428,6$  Ом.

Для каскада с общим эмиттером (рис. 7.25, б и рис. 7.26, б):

$$R_{вх} = r_6 + \frac{r_3(r_k + R_H)}{r_k(1-a) + r_3 + R_H},$$

$$K_I = - \frac{(ar_k - r_3)}{r_k(1-a) + r_3 + R_H},$$

$$K_U = - \frac{(ar_k - r_3) R_H}{r_3(r_k + R_H) + r_6[(1-a)r_k + r_3 + R_H]},$$

$$K_E = \frac{-(ar_k - r_3) R_H}{r_3(r_k + R_H) + (R_{II} + r_6)[(1-a)r_k + r_3 + R_{II}]},$$

$$R_{вых} = r_k(1-a) + r_3 \left( 1 + \frac{ar_k + r_3}{r_3 + r_6 + R_M} \right).$$

**Программа 7.71.** Расчет параметров каскада с общим эмиттером. Ввод и вывод результатов см. в программе 7.70.

ИП6	ИП3	×	ИП2	-	П7	1	ИП6	-	ИП3
×	ИП2	+	ИП5	+	П8	ИП4	ИП1	+	П9
ИП8	×	ИП3	ИП5	+	ИП2	×	ПС	+	F1/x
ИП5	ИП7	/—/	×	ПВ	×	П0	ИПВ	ИП1	ИП8
×	ИПС	+	÷	ПА	ИП7	/—/	ИП8	÷	ПВ
ИП2	ИП5	ИП3	+	×	ИП8	÷	ИП1	+	ПС
ИП3	ИП6	×	ИП2	-	ИП9	ИП2	+	÷	1
+	ИП2	×	1	ИП6	-	ИП3	×	+	ПД
ИПО	С/П								

**Пример.** Найдем параметры каскада с общим эмиттером при  $r_6 = 400$  Ом,  $r_3 = 25$  Ом,  $r_k = 10^6$  Ом,  $R_k = 1000$  Ом,  $R_H = 5000$  Ом и  $a = 0,98$ . Для этих данных получим:  $K_U = -139,45851$ ,  $K_E = -81,447388$ ,  $K_I = -39,15984$ ,  $R_{вх} = 1403,996$  Ом и  $R_{вых} = 37217,544$  Ом.

Для каскада с общим коллектором (рис. 7.25, а и рис. 7.2б. а):

$$R_{вх} = r_б + \frac{r_к(r_э + R_H)}{r_к(1-a) + r_э + R_H},$$

$$K_I = \frac{r_к}{r_к(1-a) + r_э + R_H},$$

$$K_U = \frac{r_к R_H}{r_к(r_э + R_H) + r_б[r_к(1-a) + r_э + R_H]},$$

$$K_E = \frac{r_к R_H}{r_к(r_э + R_H) + (r_б + R_H)[r_к(1-a) + r_э + R_H]},$$

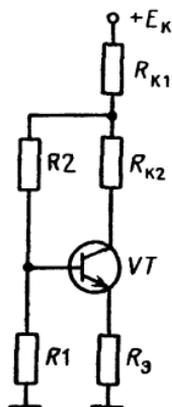
$$R_{вых} = r_э + (r_б + R_H) \frac{r_к(1-a)}{r_к + r_б + R_H}.$$

**Программа 7.72.** Расчет параметров каскада с общим коллектором. Ввод и вывод результатов см. в программе 7.70.

1	ИП6	—	ИП3	×	П8	ИП2	ИП5	+	П9
+	П7	ИП1	ИП4	+	ПД	×	ИП9	ИП3	×
ПВ	+	ИП3	ИП5	×	ПА	ХУ	÷	ПО	ИПА
ИП1	ИП7	×	ИПВ	+	÷	ПА	ИП3	ИП7	÷
ПВ	ИП3	ИП9	×	ИП7	÷	ИП1	+	ПС	ИПД
ИП3	×	1	ИП6	—	×	ИПД	ИП3	+	÷
ИП2	+	ПД	ИП0	С/П					

**Пример.** Найдем параметры каскада с общим коллектором при  $r_б = 400$  Ом,  $r_э = 25$  Ом,  $r_к = 10^6$  Ом,  $R_H = 10^4$  Ом,  $R_H = 500$  Ом и  $a = 0,98$ . Получим:  $K_U = 0,93771684$ ,  $K_E = 0,67708474$ ,  $K_I = 48,421071$ ,  $R_{вх} = 25978,562$  Ом и  $R_{вых} = 230,85906$  Ом.

Рис. 7.27. Обобщенная схема термостабилизации усилительных каскадов на биполярных транзисторах



Эти расчеты не учитывают влияния элементов задания и температурной стабилизации рабочей точки (рис. 7.27). Поскольку такой учет тривиален, остановимся на расчете коэффициента температурной неустойчивости

$$S_T = 1/[1 - 1/(1 - 1/B)(1 + D)],$$

где

$$D = \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_{K1}}{R_2} + \frac{R_3 R_{K2}}{R_1 R_2},$$

и общей нестабильности коллекторного тока при изменении температуры  $T$  на величину  $\Delta T$  при заданных  $\Delta B/B$ ,  $\xi = \Delta U_{60}/1^\circ\text{C}$  и  $\Delta I_{K0}$ :

$$\Delta I_K = S_T \left[ \Delta I_{K0} + \frac{\xi \Delta T}{R_3 + R_6} + (I_{60} + I_{K0}) \frac{\Delta B}{B} \right],$$

где  $R_6 = R_1(R_2 + R_{K1})/(R_1 + R_2 + R_{K1})$ ,  $I_{K0}$  — обратный ток коллектора,  $I_{60} \approx I_{0K}/B$  — ток базы и  $B$  — коэффициент передачи тока базы.

**Программа 7.73.** Расчет коэффициента нестабильности  $S$ , приращения коллекторного тока  $\Delta I_K$  и сопротивления базового делителя  $R_6$  для обобщенной схемы транзисторного каскада рис. 7.27. Ввод:  $\Delta I_{K0} = PA$ ,  $\Delta T = PB$ ,  $I_{60} = P0$ ,  $I_{K0}(20^\circ\text{C}) = P1$ ,  $\Delta B/B = P2$ ,  $\xi = P3$ ,  $B = P4$ ,  $R_3 = P5$ ,  $R_{K1} = P6$ ,  $R_{K2} = P7$ ,  $R_1 = P8$  и  $R_2 = P9$ . Вывод результатов (после нажатия клавиши В/0 и С/П):  $S_T \rightarrow PX = PД$  и (после нажатия клавиши С/П еще раз)  $\Delta I_K \rightarrow PX$  и  $R_6 \rightarrow PC$ .

ИП5	ИП7	×	ИП8	÷	ИП9	÷	ИП6	ИП9	÷
+	ИП5	ИП9	÷	+	ИП5	ИП8	÷	+	1
+	ИП4	F1/x	1	+	×	F1/x	1	XY	—
F1/x	ПД	С/П	ИП9	ИП6	+	ПС	ИП8	×	ИПС
ИП8	+	÷	ПС	ИП3	ИПВ	×	ИП5	ИПС	+
÷	ИПА	+	ИП0	ИП1	+	ИП2	×	+	ИПД
×	С/П								

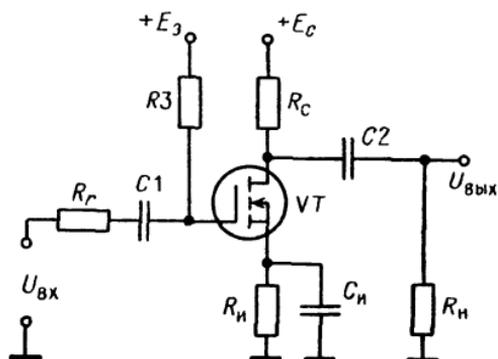
**Пример:** Для  $\Delta I_{K0} = 15$  мкА,  $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ ,  $I_{60} = 10$  мкА,  $I_{K0}(20^\circ\text{C}) = 1$  мкА,  $\Delta B/B = 0,1$ ,  $\xi = 2,5$  мВ/°С,  $B = 100$ ,  $R_3 = 2,7$  кОм,  $R_{K1} = 0$ ,  $R_{K2} = 2,7$  кОм,  $R_1 = 20$  кОм и  $R_2 = 10$  кОм получим  $S_T = 3,1936341$ ,  $\Delta I_K = 85,513244$  мкА и  $R_6 = 6,6666666$  кОм. Стабильность каскада обычно считается удовлетворительной, если  $S_T < (3 \div 5)$ . Иначе для уменьшения  $S_T$  необходимо уменьшать  $R_1$  и  $R_2$  и увеличивать  $R_3$  и  $R_{K1}$ . Следует помнить, что  $R_6$  шунтирует входное, а  $R_{K2}$  — выходное сопротивления каскада, вычисленные без их учета по программе 7.71.

Расчет каскадов на низких и высоких частотах сводится к вычислению постоянных времени  $RC$ -цепей и транзистора на этих частотах. Ввиду его простоты он может выполняться без ввода программ — см. [16].

Усилительные каскады строятся также на полевых транзисторах, имеющих на несколько порядков более высокое входное сопротивление, чем биполярные транзисторы. При расчете каска-

да с общим истоком (рис. 7.28) исходными являются следующие параметры схемы и транзистора: сопротивление генератора  $R_G$ , сопротивление в цепи затвора  $R_3$ , сопротивление в цепи стока  $R_C$ , выходное сопротивление транзистора  $R_{сн}$ , сопротивление нагрузки  $R_H$ , сопротивление в цепи истока  $R_H$ , входная  $C_{зи}$ , проходная  $C_{зс}$

Рис. 7.28. Каскад с общим истоком на полевом транзисторе



и выходная  $C_{сн}$  емкости транзистора, емкости разделительных конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ , емкость конденсатора  $C_H$ , устраняющего влияние отрицательной обратной связи, вызванной включением  $R_H$  в цепь истока, и крутизна  $S$  транзистора в рабочей точке (обычно определяется с помощью семейства вольт-амперных характеристик).

Входное сопротивление каскада  $R_{вх} = R_3$ , выходное  $R_{вых} = R_{сн}R_C/(R_{сн} + R_C)$ . Коэффициент усиления при  $R_G = 0$   $K_{U_0} = SR_{вых}R_H/(R_{вых} + R_H)$ , а при  $R_G \neq 0$   $K_U = K_{U_0}R_3/(R_3 + R_G)$ . Работа каскада в области малых времен определяется постоянными времени:

$$\begin{aligned} \tau_{вх} &= [C_{зи} + C_{зс}(1 + K_{U_0})] R_G R_3 / (R_G + R_3), \\ \tau_{вых} &= (C_{зс} + C_{сн}) R_H R_{вых} / (R_H + R_{вых}), \\ \tau_{вх_0} &= [C_{зи} + C_{зс} C_{сн} / (C_{зс} + C_{сн})] R_G, \\ \tau_{эКВ} &= \tau_{вх} + \tau_{вых}. \end{aligned}$$

С их помощью вычисляется коэффициент режима  $m = \tau_{вх_0} \tau_{вых} / \tau_{эКВ}^2$ . При больших  $C_H$  (выбирается исходя из устранения отрицательной обратной связи на низких частотах) у данного каскада  $m < 0,25$ , что соответствует апериодическому режиму работы. При этом время нарастания каскада  $t_n = 2,2 \tau_{эКВ} \sqrt{1 - 2m}$ , а добротность  $D = S/2,2(C_{зи} + C_{сн})$ . Отметим, что переходная характеристика каскада в операторной форме имеет вид

$$h(p) = (1 + p\tau_{эКВ} + p^2\tau_{эКВ}^2 m)^{-1}.$$

Работа каскада в области больших времен определяется постоянными времени:  $\tau_1 = C_1(R_r + R_3)$ ,  $\tau_2 = C_2(R_c + R_n)$  и  $\tau_n = C_n(R_n \parallel 1/S)$ , где знак  $\parallel$  означает параллельное соединение сопротивлений  $R_n$  и  $(1/S)$ . Спад вершины прямоугольного импульса, обусловленный влиянием  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_n$ ,  $\Delta = (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$ ; где  $\Delta_1 = t_n/\tau_1$ ,  $\Delta_2 = t_n/\tau_2$  и  $\Delta_3 = t_n/\tau_n$  ( $t_n$  — длительность импульса).

**Программа 7.74.** Расчет параметров каскада с общим истоком в области малых и средних времен. Ввод:  $R_r = P0$ ,  $R_3 = P1$ ,  $R_c = P2$ ,  $R_{cn} = P3$ ,  $R_n = P4$ ,  $R_n = P5$ ,  $C_{3n} = P6$ ,  $C_{3c} = P7$ ,  $C_{cn} = P8$  и  $S = PC$ . Вывод результатов (после нажатия клавиши В/0, С/П С/П ...) в регистр X:  $R_{вых}$ ,  $K_{U_0}$ ,  $K_U$ ,  $\tau_{вх}$ ,  $\tau_{вых}$ ,  $\tau_{экв}$ ,  $\tau_{вх_0}$ ,  $m$ ,  $t_n$  и  $D$ .

ИП3	ИП2	×	ИП3	ИП2	+	÷	ПД	С/П	ИП4
×	ИПД	ИП4	+	÷	П3	ИПС	×	ПД	С/П
ИП1	ИП0	ИП1	+	÷	П2	×	С/П	ИПД	1
+	ИП7	×	ИП6	+	ИП2	×	ИП0	×	С/П
ИП7	ИП8	+	ИП3	×	П3	С/П	+	ПД	С/П
ИП7	ИП8	×	ИП7	ИП8	+	÷	ИП6	+	ИП0
×	С/П	ИП3	×	ИПД	$Fx^2$	÷	П3	С/П	2
×	1	XY	—	$F\sqrt{\quad}$	ИПД	×	2	,	2
×	С/П	ИПС	2	,	2	÷	ИП6	ИП8	+
÷	С/П								

**Пример.** Для  $R_r = 10^3$  Ом,  $R_3 = 10^6$  Ом,  $R_c = 2 \cdot 10^3$  Ом,  $R_{cn} = 10^5$  Ом,  $R_n = 10^4$  Ом,  $R_n = 10^3$  Ом,  $C_{3n} = 10^{-11}$  Ф,  $C_{3c} = 10^{-12}$  Ф,  $C_{cn} = 5 \cdot 10^{-12}$  Ф и  $S = 5 \cdot 10^{-3}$  А/В получим  $R_{вых} = 1960,7843$  Ом,  $K_{U_0} = 8,196721$ ,  $K_U = 8,1885324$ ,  $\tau_{вх} = 1,9177543 \cdot 10^{-8}$  с,  $\tau_{вых} = 9,8360657 \cdot 10^{-9}$  с,  $\tau_{экв} = 2,9013608 \cdot 10^{-8}$  с  $\tau_{вх_0} = 1,0833333 \cdot 10^{-8}$  с,  $m = 0,12658435$ ,  $t_n = 5,5161449 \cdot 10^{-8}$  и  $D = 1,5151514 \cdot 10^8$  1/с.

**Программа 7.75.** Расчет параметров каскада с общим истоком в области больших времен (программа вводится после выполнения предшествующей программы без выключения ПМК). Ввод:  $C_1 = P9$ ,  $C_2 = PA$ ,  $C_n = PB$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 С/П С/П С/П) в регистр X:  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_n$ . Далее, вводя значения  $t_n = PX$  и нажимая клавишу С/П, получаем  $\Delta$ .

ИП0	ИП1	+	ИП9	×	П9	С/П	ИП2	ИП4	+
ИПА	×	ПА	С/П	ИП5	ИПС	$F1/x$	×	$FВx$	ИП5
+	÷	ИПВ	×	ПВ	С/П	ПД	ИП9	÷	ИПД
ИПА	÷	+	ИПД	ИПВ	÷	+	БП	25	

**Пример.** Для  $C_1 = 0,1 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $C_2 = 10^{-6}$  Ф и  $C_n = 100 \cdot 10^{-6}$  Ф получим  $\tau_1 = 1,001 \cdot 10^{-1}$  с,  $\tau_2 = 1,2 \cdot 10^{-2}$  с и  $\tau_n = 1,6666666 \cdot 10^{-2}$  с, а для  $t_n = 100 \cdot 10^{-6}$  с находим  $\Delta = 1,5332335 \cdot 10^{-2}$ .

Методика расчета ряда усилителей и активных фильтров, описанная в [10, 19] для персональных ЭВМ, может использоваться и при расчете их на программируемых микрокалькуляторах. Большое число программ по расчету усилителей и активных фильтров приведено в [19].

## 7.9. Расчет и моделирование релаксационных генераторов

В радиоэлектронике важное место занимают нелинейные цепи, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. К ним относятся релаксационные и  $LC$ -генераторы. Микро-ЭВМ являются удобным инструментом для математического моделирования таких цепей; например, см. рис. 7.29, а.

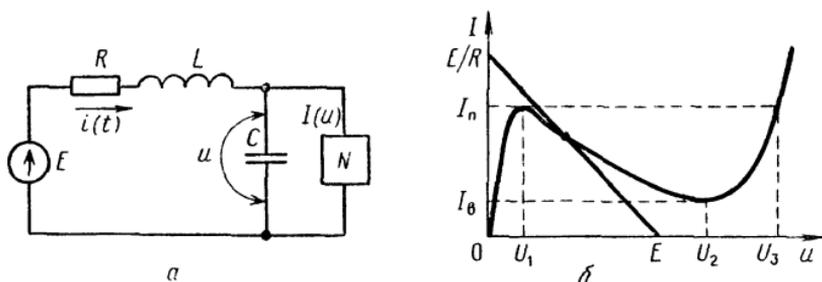


Рис. 7.29. Релаксационный генератор (а) и выбор положения рабочей точки на  $N$ -образной вольт-амперной характеристике нелинейного активного прибора (б)

Цепь рис. 7.29, а описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - iR - u}{L}, \quad (7.13)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{i - I(u)}{C} \quad (7.14)$$

относительно переменных состояния — тока  $i$  и напряжения  $u$ . Форма колебаний в первую очередь зависит от нелинейной зависимости  $i(I)$ , описывающей статическую вольт-амперную характеристику нелинейного прибора НЭ (рис. 7.29, б). Далее предполагается, что инерционность НЭ учитывается его емкостью, составляющей часть общей емкости  $C$ .

Пусть в качестве НЭ применен туннельный диод,  $N$ -образная вольт-амперная характеристика которого описывается выражением

$$I(u) = Aue^{-\alpha u} + D(e^{\beta u} - 1), \quad (7.15)$$

где параметры  $A$ ,  $\alpha$ ,  $D$  и  $\beta$  выражаются через напряжение  $U_1$  при

пике тока  $I_n$ , обратный ток  $I_0$  и тепловой потенциал  $\varphi_T$  в соответствии с формулами  $A = eI_n/U_1$ ;  $\alpha = 1/U_1$ ;  $D = I_0$  и  $\beta = 1/m\varphi_T$  ( $m$  — поправочный множитель ( $m \approx 2$ )).

Используя программу решения системы из двух дифференциальных уравнений (7.12) и (7.14), с учетом (7.15) получим нижеприведенную программу, позволяющую найти зависимости  $i(t)$  и  $u(t)$ .

**Программа 7.76.** Расчет зависимостей  $i(t)$  и  $u(t)$  автоколебательного релаксатора на туннельном диоде. Ввод:  $A = P2$ ,  $\alpha = P3$ ,

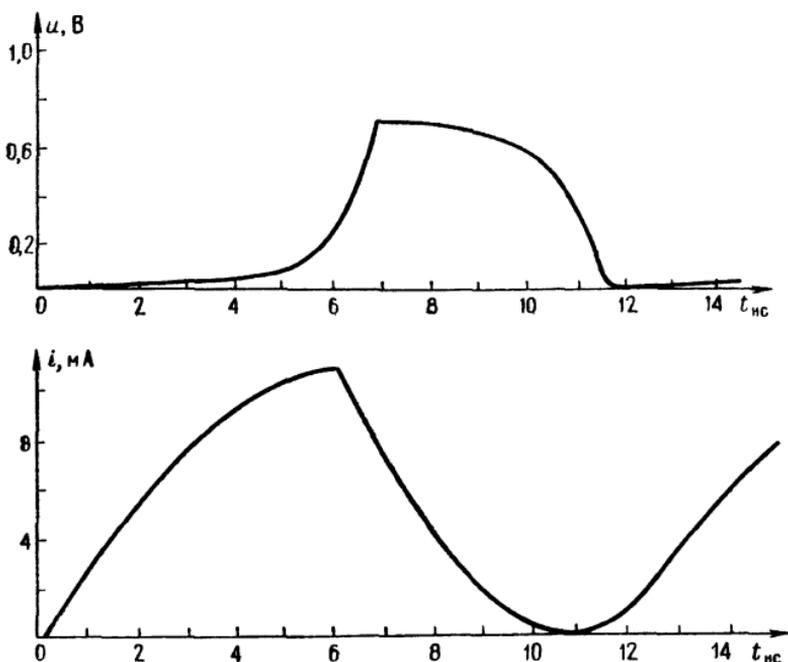


Рис. 7.30. Временные зависимости  $u(t)$  (вверху) и  $i(t)$  (внизу) для релаксационного генератора рис. 7.29, а на туннельном диоде

$D = P4$ ,  $\beta = P5$ ,  $E = P6$ ,  $R = P7$ ,  $L = P8$ ,  $C = P9$ ,  $i_0 = PВ$ ,  $u_0 = PC$ ,  $\Delta t = h = PД$  и  $t_0 = PА$ . Вывод результатов:  $t_n \rightarrow PХ$ ,  $i(t_n) \rightarrow PУ$  и  $u(t_n) \rightarrow PС$ .

ИП6	ИПВ	ИП7	×	—	ИПС	—	ИП8	÷	ИПД
×	ИПВ	+	ПО	ИПВ	ИПС	ИПЗ	/-/	×	$Fe^x$
ИПС	×	ИП2	×	—	ИП5	ИПС	×	$Fe^x$	1
—	ИП4	×	—	ИП9	÷	ИПД	×	ИПС	+
ПС	ИП0	ПВ	ИПА	ИПД	+	ПА	С/П	БП	00

**Пример.** При  $A = 0,2718$  В (диод с  $I_n = 10 \cdot 10^{-3}$  А и  $U_1 = 0,1$  В),  $\alpha = 10$  1/В,  $D = 1 \cdot 10^{-8}$  А,  $\beta = 20$  1/В,  $E = 0,3$  В,  $R = 10$  Ом,  $L = 100 \cdot 10^{-9}$  Гн,  $C = 10 \cdot 10^{-12}$  Ф,  $i_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$

и  $\Delta t = 0,1 \cdot 10^{-9}$  с, нажимая клавиши С/П, ХУ и ИПС, будем получать следующие данные:

$t_n$ , с	$i(t_n)$ , А	$u(t_n)$ , В
$1 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-4}$	0
$2 \cdot 10^{-10}$	$5,97 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$
$3 \cdot 10^{-10}$	$8,8803 \cdot 10^{-4}$	$1,0569807 \cdot 10^{-3}$
$4 \cdot 10^{-10}$	$1,1780927 \cdot 10^{-3}$	$7,0946111 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^{-10}$	$1,4592172 \cdot 10^{-3}$	$9,130329 \cdot 10^{-4}$ и т. д.

Внимательный просмотр значений  $u(t_n)$  обнаруживает характерную для моделирования таких систем периодическую численную неустойчивость решения. При выбранном  $\Delta t$  она проявляется, только когда рабочая точка туннельного диода попадает на крутые участки вольт-амперной характеристики. Усредняя значения  $u(t_n)$ , получим приведенные на рис. 7.30 графики зависимостей  $i(t)$  и  $u(t)$ , которые хорошо описывают реальную форму релаксационных колебаний. Для уменьшения числовой неустойчивости следует уменьшать шаг  $\Delta t$ , выбирая его меньше наименьшей постоянной времени у модулируемой нелинейной цепи.

## Приложение 1

### БИБЛИОТЕКА ПРОГРАММ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ «ЭЛЕКТРОНИКА МК-52» И «ЭЛЕКТРОНИКА МК-61»

В данном приложении приведены программы для микрокалькуляторов «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61», помеченные в основном тексте знаком °. Напоминаем, что последние содержат недопустимые для данных ПМК операторы КП↑ и КИП↑ либо операторы, которые у ПМК «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61» реализованы микропрограммно. Все остальные программы полностью пригодны для указанных моделей ПМК с учетом непринципиального различия в символике отдельных клавиш (см. разд. «Как пользоваться справочником»). Для облегчения восприятия этих различий и получения навыков автоматической трансляции программ (в уме) программы данного приложения записаны на языке моделей ПМК «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61». Контрольные примеры для приведенных ниже программ надо брать из описания основных программ (их номера указаны в скобках).

**Программа П1.1. (3.7).** Перевод целых чисел  $N_m$  с основанием  $m = 10$  в числа  $N_n$  с другим основанием  $n$  и наоборот. Ввод:  $m = P0$ ,  $n = P1$  и  $N_m = PX$ .

КНОП	1	$x \rightarrow P2$	Cx	$\leftrightarrow$
В ↑	$Px \rightarrow 1$	÷	K[x]	$x \rightarrow P3$
F.	$P \rightarrow x3$	$P \rightarrow x$	1	×
—	×	+	$P \rightarrow x2$	$P \rightarrow x0$
×	$x \rightarrow P2$	F.	$P \rightarrow x3$	$Fx=0$
05	F.	C/P		

**Программа П1.2. (3.12).** Нахождение наибольшего общего делителя  $(n, m)$  двух чисел  $n$  и  $m$  ( $n > m$ ) по алгоритму Евклида. Ввод: В/0 n C/P m C/P (получаем  $(n, m) \rightarrow PX$ ).

$x \rightarrow Pa$	C/P	$x \rightarrow Pb$	$P \rightarrow xa$	В ↑
$P \rightarrow xb$	÷	K[x]	$P \rightarrow xb$	$x \rightarrow Pa$
×	—	$x \rightarrow Pb$	$Fx=0$	03
$P \rightarrow xa$	C/P	ГП	00	

**Программа П1.3.** (3.17). Деление числа  $a$  на число  $b$  с произвольной точностью. Ввод: В/0  $a$  В↑  $b$  С/П С/П ... (первое нажатие клавиши С/П ведет к выдаче целой части результата, последующие нажатия приводят к выдаче очередной цифры дробной части результата).

$x \rightarrow П0 \leftrightarrow x \rightarrow П2 \quad П \rightarrow x0 \div \quad К[x] \quad П \rightarrow x2 \leftrightarrow \quad С/П \quad П \rightarrow x0$   
 $\times \quad - \quad 1 \quad 0 \quad \times \quad БП \quad 02$

**Программа П1.4.** (3.18). Преобразование десятичного числа  $b$  в цепную дробь. Ввод: В/0  $b$  С/П С/П ... (нажатие клавиши С/П ведет к выдаче значений  $a_0, a_1, a_2, \dots$ ).

$x \rightarrow П1 \quad В \uparrow \quad К[x] \quad С/П \quad - \quad F1/x \quad БП \quad 00$

**Программа П1.5.** (3.63). Вычисление юлианских дат, дней недели каждой из дат и числа дней между двумя датами. Ввод: 365,25 = Р4, 30,6001 = Р5, 1720994,5 = Р6 и далее первое число В↑ месяц В↑ год В/0 С/П (получаем день недели первой даты) второе число В↑ месяц В↑ год С/П (получаем день недели второй даты) БП 68 С/П (получаем число дней между датами). По окончании вычислений юлианские даты  $JD_1$  и  $JD_2$  заносятся в регистры  $d$  и 2 соответственно.

$x \rightarrow П0$	F.	$x \rightarrow П8$	F.	$x \rightarrow П9$
2	$П \rightarrow x8$	—	$Fx \geq 0$	16
КП $\rightarrow x0$	$П \rightarrow x8$	1	2	+
$x \rightarrow П8$	$П \rightarrow x0$	1	0	0
$\div$	$К[x]$	$x \rightarrow Па$	4	$\div$
$К[x]$	$П \rightarrow xa$	—	2	+
С/П	$x \rightarrow Пb$	$П \rightarrow x0$	$П \rightarrow x4$	$\times$
$К[x]$	$x \rightarrow Пc$	$П \rightarrow x8$	1	+
$П \rightarrow x5$	$\times$	$К[x]$	$П \rightarrow xb$	+
$П \rightarrow xc$	+	$П \rightarrow x9$	+	$П \rightarrow x6$
+	$x \rightarrow П2$	1	.	5
+	7	$\div$	$К\{x\}$	7
$\times$	$К[x]$	С/П	$П \rightarrow x2$	$x \rightarrow Пd$
F.	БП	00	$П \rightarrow x2$	$П \rightarrow xd$
—	С/П			

**Программа П1.6.** (3.64). Определение дня недели для двух дат и числа календарных дней между ними. Ввод: 0,4 = Р0, 2,3 = Р1, 0,75 = Р2, 100 = Р3, 365 = РД и далее первое число В↑ месяц В↑ год В/0 С/П (получаем день недели первой даты), второе число В↑ месяц В↑ год С/П (получаем день недели второй даты) БП 88 С/П (получаем число дней между датами).

$x \rightarrow П9$	F.	$x \rightarrow П8$	F.	$x \rightarrow П7$
ПП	12	$П \rightarrow x5$	$x \rightarrow П6$	F.
БП	00	$П \rightarrow xd$	$П \rightarrow x9$	$\times$

$\Pi \rightarrow x7$	+	$\Pi \rightarrow x8$	1	—
3	1	$\times$	+	$x \rightarrow \Pi 5$
2	$\Pi \rightarrow x8$	—	$Fx < 0$	55
$\Pi \rightarrow x5$	$\Pi \rightarrow x0$	$\Pi \rightarrow x8$	$\times$	$\Pi \rightarrow x1$
+	$K[x]$	—	$\Pi \rightarrow x9$	4
$\div$	$K[x]$	+	$\Pi \rightarrow x9$	$\Pi \rightarrow xc$
$\div$	$K[r]$	1	+	$\Pi \rightarrow x2$
$\times$	$K[x]$	—	БП	76
$\Pi \rightarrow x9$	1	—	$\Pi \rightarrow xc$	$\div$
1	—	$k[x]$	$\Pi \rightarrow x2$	$\times$
$K[x]$	$\Pi \rightarrow x9$	1	—	4
$\div$	$K[x]$	$\leftrightarrow$	—	$\Pi \rightarrow x5$
+	$x \rightarrow \Pi 5$	$\Pi \rightarrow x5$	7	$\div$
$K[x]$	7	$\times$	—	1
—	С/П	В/О	$\Pi \rightarrow x5$	$\Pi \rightarrow x6$
—	С/П			

**Программа П1.7. (3.65).** Преобразование  $x_t$  и  $y_t$  для графиков с линейным масштабом с усечением результата  $n$  числами после десятичной запятой. Ввод (после нажатия клавиши В/О):  $\varepsilon = 10^{-n} = Pd$ ,  $(l_{mx}/x_m) = P8$ ,  $(l_{my}/y_m) = P9$  и далее  $y_t$  В↑  $x_t$  С/П (получаем  $l_{y_t} \rightarrow PY$  и  $l_{x_t} \rightarrow PX$ ).

$\Pi \rightarrow x8 \times$  ПП 13  $\leftrightarrow$   $\Pi \rightarrow x9 \times$  ПП 13  $\leftrightarrow$   
С/П БП 00  $\Pi \rightarrow xd \div$   $K[x]$   $\Pi \rightarrow xd \times$  В/О

**Программа П1.8. (3.66).** Вычисление  $y_{дб}$ ,  $l_{ix}$  и  $l_{iy}$  для зависимости  $y(x)$ , заданной значениями  $y_t$  и  $x_t$  с усечением  $l_{ix}$  и  $l_{iy}$   $n$  знаками после десятичной запятой. Ввод: (после нажатия клавиши С/П)  $\varepsilon = 10^{-n} = Pd$ ,  $(l_{mx}/\log x_m) = P8$ ,  $(l_{my}/\log y_m) = P9$  и далее  $y_t$  В↑  $x_t$  С/П (получаем  $y_{дб} \rightarrow PX$ ) С/П (получаем  $l_{y_t} \rightarrow PY$  и  $l_{x_t} \rightarrow PX$ ).

Flg  $\Pi \rightarrow x8 \times$  ПП 21  $\leftrightarrow$  Flg 2 0  $\times$   
С/П FBx  $\div$   $\Pi \rightarrow x9 \times$  ПП 21  $\leftrightarrow$  С/П БП  
00  $\Pi \rightarrow xd \div$   $K[x]$   $\Pi \rightarrow xd \times$  В/О

**Программа П1.9. (4.54).** Вычисление значений степенного многочлена  $A(x)$  при степени  $n \leq 12$ . Ввод:  $a_0 = Pd$ ,  $a_1 \div a_n = P1 \div \div Pn$  и далее для каждого  $x$   $n = PX$  и  $x = PX$ .

$x \rightarrow \Pi 0$  С/П В↑ В↑ Сx  $\Pi \rightarrow x0$   $x \rightarrow \Pi e$  F. КП  $\rightarrow xe$  +  
 $\times$  FLO 05  $\Pi \rightarrow xd$  + С/П БП 00

**Программа П1.10. (4.55).** Вычисление значений степенного многочлена  $A(x)$  с автоматическим вводом его коэффициентов в регистры. Ввод (в регистр X):  $n$ ,  $a_n$ ,  $a_{n-1}$ , ...,  $a_0$  и  $x$  (при смене  $x$

ВВОДИТСЯ ТОЛЬКО НОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ  $\tau$ ) Степень многочлена  $n \leq 11$ .

$x \rightarrow Pd$	$x \rightarrow P0$	$\Pi \rightarrow x^0$	$C/\Pi$	$\Pi \rightarrow x0$
$x \rightarrow Pe$	F.	$Kx \rightarrow Pe$	FL0	02
Cx	C/П	$x \rightarrow Pc$	$\Pi \rightarrow xd$	$x \rightarrow P0$
Cx	C/П	$B \uparrow$	$B \uparrow$	Cx
$\Pi \rightarrow x0$	$x \rightarrow Pe$	F.	$K\Pi \rightarrow xe$	+
$\times$	FL0	20	$\Pi \rightarrow xc$	+
C/П	$\Pi \rightarrow xd$	$x \rightarrow P0$	$\leftrightarrow$	БП

17

**Программа П1.11.** (5.22). Решение уравнения  $F(x) = 0$  методом простых итераций с приведением его к виду  $x = f(x)$ . Ввод:  $\epsilon = PC$ ,  $x_0 = PX$  и данные  $f(x)$  при  $x$ , заносимом в начало фрагмента вычисления  $f(x)$ .

$x \rightarrow Pd$	...	...	...	...	...	...	...
$\leftrightarrow$	$x \rightarrow Pd$	-	$F x $	$\Pi \rightarrow xc$	-	$Fx < 0$	01 $\Pi \rightarrow xd$ C/П

**Программа П1.12.** (5.27). Решение уравнения  $F(x) = 0$  модифицированным методом Ньютона при  $\delta = \epsilon$ . Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $\delta = \epsilon = PC$  и  $x_0 = P0$ .

$\Pi \rightarrow x0$	$\Pi \rightarrow xc$	+	ПП	27	$x \rightarrow Pd$	$\Pi \rightarrow x0$	ПП	27	$B \uparrow$
$\Pi \rightarrow xd$	-	$\div$	$\Pi \rightarrow xc$	$\times$	$\Pi \rightarrow x0$	+	$x \rightarrow P0$	FVx	-
$K x $	$\Pi \rightarrow xc$	-	$Fx < 0$	00	$\Pi \rightarrow x0$	C/П	...	...	V/0

**Программа П1.13.** (5.30). Решение уравнения  $F(x) = 0$  комбинированным методом секущих-хорд. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $\epsilon = P0$ ,  $x_0 = Pa$  и  $x_1 = Pb$ .

$\Pi \rightarrow xa$	ПП	34	$x \rightarrow Pc$	$\Pi \rightarrow xb$
ПП	34	$x \rightarrow Pd$	$\Pi \rightarrow xa$	$\Pi \rightarrow xc$
$B \uparrow$	$\Pi \rightarrow xd$	$x \rightarrow Pc$	$\leftrightarrow$	-
$\div$	$\Pi \rightarrow xa$	$\Pi \rightarrow xb$	-	$\times$
+	$\Pi \rightarrow xb$	$\leftrightarrow$	$x \rightarrow Pb$	$\leftrightarrow$
$x \rightarrow Pa$	-	$K x $	$\Pi \rightarrow x0$	-
$Fx < 0$	04	$\Pi \rightarrow xb$	C/П	...
...	...	...	...	V/0

**Программа П1.14.** (5.101). Решение дифференциального уравнения третьего порядка  $y''' = f(x, y, y', y'')$ . Ввод:  $h = P8$ ,  $x_0 = P7$ ,  $y_0 = P6$ ,  $y'_0 = P4$ ,  $y''_0 = P2$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш V/0 и C/П):  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_t$  в регистр X ( $x_t \rightarrow P7$ ).

V/0	$\Pi \rightarrow x2$	$x \rightarrow P1$	$\Pi \rightarrow x4$	$x \rightarrow P3$
$\Pi \rightarrow x6$	$x \rightarrow P5$	C/П	ПП	14
$\Pi \rightarrow x7$	$\Pi \rightarrow x8$	+	$x \rightarrow P7$	7
$x \rightarrow P0$	ПП	40	$x \rightarrow P9$	$\Pi \rightarrow r3$
ПП	26	$\Pi \rightarrow x1$	ПП	26

П→x9	П→x8	×	2	÷
В↑	КП→x0	+	П→x0	x→Пе
Г.	Кx→Пе	+	Кx→П0	В/0
...	...	...	...	...
...	...	...	...	В/0

Правила оформления подпрограммы см. в описании программы 5.101.

**Программа П1.15.** (5.102). Решение дифференциального уравнения четвертого порядка  $y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$ . Ввод:  $h = Pa$ ,  $x_0 = P9$ ,  $y_0 = P8$ ,  $y'_0 = P6$ ,  $y''_0 = P4$ ,  $y'''_0 = P2$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i$  в регистр X ( $x_i \rightarrow P9$ ).

В/0	П→x2	x→П1	П→x4	x→П3
П→x6	x→П5	П→x8	x→П7	С/П
ПП	16	П→x9	П→xa	+
x→П9	9	x→П0	ПП	45
x→Пb	П→x5	ПП	31	П→x3
ПП	31	П→x1	ПП	31
П→x b	П→xa	×	2	÷
В↑	КП→x0	+	П→x0	x→Пе
Г.	Кx→Пе	+	Кx→П0	В/0
...	...	...	...	В/0

Правила оформления подпрограммы см. в описании программы 5.102.

**Программа П1.16.** (5.103). Решение дифференциального уравнения пятого порядка  $y^V = f(x, y, y', y'', y''', y^{IV})$ . Ввод:  $h = Pc$ ,  $x_0 = Pb$ ,  $y_0 = Pa$ ,  $y'_0 = P8$ ,  $y''_0 = P6$ ,  $y'''_0 = P4$ ,  $y^{IV}_0 = P2$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П):  $y_1, y_2, \dots, y_i$  в регистр X ( $x_i \rightarrow Pb$ ).

В/0	П→x2	x→П1	П→x4	x→П3
П→x6	x→П5	П→x8	x→П7	П→xa
x→П9	С/П	ПП	18	П→xb
П→xc	+	x→П6	1	1
x→П0	ПП	51	x→Пd	П→x7
ПП	37	П→x5	ПП	37
П→x3	ПП	37	П→x1	ПП
37	П→xd	П→xc	×	2
÷	В↑	КП→x0	+	П→x0
x→Пе	Г.	Кx→Пе	+	Кx→П0
В/0	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Правила оформления подпрограммы см. в описании программы 5.103.

**Программа П1.17. (5.120)** Последовательное ДПФ с хранением до 11 значений  $y_i$  в памяти. Ввод и правила работы с программой см. в описании программы 5.120.

$Cx$	$x \rightarrow \Pi c$	$x \rightarrow \Pi d$	$C/\Pi$	$F\pi$
$\times$	2	$\times$	$B \uparrow$	$B \uparrow$
...	...	$x \rightarrow \Pi 0$	F.	$\Pi \rightarrow x 0$
...	...	+	$\times$	Fsin
$FBx$	$F\cos$	$\Pi \rightarrow x 0$	$x \rightarrow \Pi e$	F.
$K\Pi \rightarrow xc$	$\times$	$\Pi \rightarrow xc$	+	$x \rightarrow \Pi c$
F.	$K\Pi \rightarrow xe$	$\times$	$\Pi \rightarrow xd$	+
$x \rightarrow \Pi d$	F.	$FL 0$	13	F.
2	$\div$	Fsin	$FBx$	$\div$
$x \rightarrow \Pi 0$	$\Pi \rightarrow xc$	$Fx^2$	$\Pi \rightarrow xd$	$Fx^2$
+	$F\sqrt{\quad}$	$C/\Pi$	$\times$	$C/\Pi$
$\Pi \rightarrow x 0$	$\times$	$C/\Pi$	$\Pi \rightarrow xc$	$\Pi \rightarrow xd$
$/- /$	$\div$	$Ftg^{-1}$	$C/\Pi$	1
8	0	$\times$	$F\pi$	$\div$
$C/\Pi$				

**Программа П1.18. (5.121).** Параллельное ДПФ для 5 смежных гармоник с вычислением  $A_0 = \sum y_i$ . Ввод и правила работы с программой см. в описании программы 5.121.

1	0	$x \rightarrow \Pi 0$	$\Pi \rightarrow x 0$	$x \rightarrow \Pi e$
$Cx$	$Kx \rightarrow \Pi e$	$FL 0$	03	$x \rightarrow \Pi 0$
$C/\Pi$	$x \rightarrow \Pi b$	$\Pi \rightarrow x 0$	+	$x \rightarrow \Pi 0$
ПП	71	$\Pi \rightarrow x 1$	+	$x \rightarrow \Pi 1$
F.	$\Pi \rightarrow x 2$	+	$x \rightarrow \Pi 2$	ПП
71	$\Pi \rightarrow x 3$	+	$x \rightarrow \Pi 3$	F.
$\Pi \rightarrow x 4$	+	$x \rightarrow \Pi 4$	ПП	71
$\Pi \rightarrow x 5$	+	$x \rightarrow \Pi 5$	F.	$\Pi \rightarrow x 6$
+	$x \rightarrow \Pi 6$	ПП	71	$\Pi \rightarrow x 7$
+	$x \rightarrow \Pi 7$	F.	$\Pi \rightarrow x 8$	+
$x \rightarrow \Pi 8$	ПП	71	$\Pi \rightarrow x 9$	+
$x \rightarrow \Pi 9$	F.	$\Pi \rightarrow xa$	+	$x \rightarrow \Pi a$
F.	$\Pi \rightarrow xc$	5	—	$x \rightarrow \Pi c$
F.	1	+	$B \uparrow$	БП
10	F.	$B \uparrow$	$\Pi \rightarrow xd$	$\times$
$\Pi \rightarrow xc$	$\times$	$\Pi \rightarrow xc$	1	+
$x \rightarrow \Pi c$	F.	$F\cos$	$FBx$	Fsin
$\Pi \rightarrow xb$	$\times$	$\leftrightarrow$	$\Pi \rightarrow xb$	$\times$
$B/0$				

**Программа П1.19. (5.125).** Вычисление основных статистических параметров массива чисел  $x_i$ . Ввод и правила работы с программой см. в описании программы 5.125.

$Cx$	$x \rightarrow \Pi 1$	$x \rightarrow \Pi 2$	$x \rightarrow \Pi 3$	$x \rightarrow \Pi 4$
$x \rightarrow \Pi 5$	$\Pi \rightarrow x 5$	$C/\Pi$	$x \rightarrow \Pi 6$	$\Pi \rightarrow x 4$
$+$	$x \rightarrow \Pi 4$	$\Pi \rightarrow x 6$	$Fx^2$	$x \rightarrow \Pi 7$
$\Pi \rightarrow x 3$	$+$	$x \rightarrow \Pi 3$	$\Pi \rightarrow x 7$	$\Pi \rightarrow x 6$
$\times$	$\Pi \rightarrow x 2$	$+$	$x \rightarrow \Pi 2$	$\Pi \rightarrow x 7$
$Fx^2$	$\Pi \rightarrow x 1$	$+$	$x \rightarrow \Pi 1$	$K\Pi \rightarrow x 5$
$\text{БП}$	06	4	$x \rightarrow \Pi 0$	$\Pi \rightarrow x 0$
9	$+$	$x \rightarrow \Pi 7$	$\Pi \rightarrow x 0$	$x \rightarrow \Pi e$
$K\Pi \rightarrow xe$	$\Pi \rightarrow x 5$	$\div$	$Kx \rightarrow \Pi 7$	$F \text{ L} 0$
34	$\Pi \rightarrow x b$	$\Pi \rightarrow x c$	$\Pi \rightarrow x d$	$Fx^2$
$x \rightarrow \Pi 0$	$-$	$x \rightarrow \Pi 7$	3	$\times$
$\Pi \rightarrow x 0$	$+$	$\Pi \rightarrow x d$	$\times$	$-$
$x \rightarrow \Pi 8$	$\Pi \rightarrow x 7$	$B \uparrow$	$F\sqrt{-}$	$\times$
$\div$	$x \rightarrow \Pi 6$	$\Pi \rightarrow x a$	$\Pi \rightarrow x 7$	6
$\times$	$\Pi \rightarrow x 0$	$+$	$\Pi \rightarrow x d$	$\times$
$\Pi \rightarrow x 8$	4	$\times$	$+$	$\Pi \rightarrow x d$
$\times$	$-$	$x \rightarrow \Pi 9$	$\Pi \rightarrow x 7$	$Fx^2$
$\div$	3	$-$	$x \rightarrow \Pi 0$	$\Pi \rightarrow x 7$
$\Pi \rightarrow x 5$	$\times$	$\Pi \rightarrow x 5$	1	$-$
$\div$	$C/\Pi$			

**Программа П1.20. (5.127).** Вычисление всех основных статистических параметров массива чисел  $x_i$ , включая  $U_3$  и  $U_4$ . Ввод и вывод результата (после нажатия клавиш БП 20) указан при описании программы 5.127.

4	$x \rightarrow \Pi 0$	$\Pi \rightarrow x 5$	$C/\Pi$	$x \rightarrow \Pi 6$
$\Pi \rightarrow x 0$	$x \rightarrow \Pi e$	$F.$	$K\Pi \rightarrow xe$	$\leftrightarrow$
$+$	$Kx \rightarrow \Pi e$	$FVx$	$\Pi \rightarrow x 6$	$\times$
$F \text{ L} 0$	05	$K\Pi \rightarrow x 5$	$\text{БП}$	00
$\Pi \rightarrow x 0$	$x \rightarrow \Pi e$	$K\Pi \rightarrow xe$	$\Pi \rightarrow x 5$	$\div$
$Kx \rightarrow \Pi e$	$F \text{ L} 0$	20	$\Pi \rightarrow x 2$	$\Pi \rightarrow x 3$
$\Pi \rightarrow x 4$	$Fx^2$	$x \rightarrow \Pi 0$	$-$	$x \rightarrow \Pi 7$
3	$\times$	$\Pi \rightarrow x 0$	$+$	$\Pi \rightarrow x 4$
$\times$	$-$	$x \rightarrow \Pi 8$	$\Pi \rightarrow x 7$	$B \uparrow$
$F\sqrt{-}$	$\times$	$\div$	$x \rightarrow \Pi 6$	$\Pi \rightarrow x 1$
$\Pi \rightarrow x 7$	6	$\times$	$\Pi \rightarrow x 0$	$+$
$\Pi \rightarrow x 4$	$\times$	$\Pi \rightarrow x 8$	4	$\times$
$+$	$\Pi \rightarrow x 4$	$\times$	$-$	$x \rightarrow \Pi 9$
$\Pi \rightarrow x 7$	$Fx^2$	$\div$	3	$-$
$x \rightarrow \Pi d$	$C/\Pi$	$\Pi \rightarrow x 5$	1	$-$
1	$\Pi \rightarrow x 5$	$+$	$\div$	6
$\times$	$\Pi \rightarrow x 5$	3	$x \rightarrow \Pi 0$	$+$
$\div$	$F\sqrt{-}$	$C/\Pi$	$\Pi \rightarrow x 5$	4

×	П→x5	П→x0	—	FL0
90	Fx <sup>2</sup>	÷	5	БП
76				

**Программа П1.21. (5.128).** Вычисление первых четырех начальных и центральных моментов выборки, сгруппированной в классы. Ввод (после нажатия клавиш В/0 и С/П)  $x_1$  В↑  $n_1$  С/П  $x_2$  В↑  $n_2$  С/П и т. д. до  $x_k$  В↑  $n_k$ . Далее, нажав клавиши БП 32 и 4 раза клавишу С/П, получим  $m_1 \rightarrow PX = P_5$ ,  $m_2 \rightarrow PX = P_4$ ,  $m_3 \rightarrow PX = P_3$  и  $m_4 \rightarrow PX = P_2$ . Затем, введя  $\Delta x = PX$ , нажав клавиши БП 44 и 4 раза клавишу С/П, получим:  $M_1 \rightarrow PX = P_5$ ,  $M_2 \rightarrow PX = P_4$ ,  $M_3 \rightarrow PX = P_3$  и  $M_4 \rightarrow PX = P_2$ .

Cx	$x \rightarrow П2$	$x \rightarrow П3$	$x \rightarrow П4$	$x \rightarrow П5$
$x \rightarrow П6$	6	$x \rightarrow П0$	4	$x \rightarrow П1$
П→x7	С/П	$x \rightarrow Пd$	F.	$x \rightarrow П7$
П→x6	П→xd	+	$x \rightarrow П6$	КП→x0
П→x7	П→xd	×	$x \rightarrow Пd$	+
П→x0	$x \rightarrow Пе$	F.	Кx→Пе	FL1
19	БП	06	$x \rightarrow П0$	КП→x0
П→x6	÷	П→x0	$x \rightarrow Пе$	F.
Кx→Пе	С/П	БП	34	Fx <sup>2</sup>
2	÷	$x \rightarrow П1$	П→x2	П→x3
П→x4	П→x5	Fx <sup>2</sup>	$x \rightarrow П7$	—
$x \rightarrow П4$	3	×	П→x7	+
П→x5	×	—	$x \rightarrow П3$	4
×	П→x4	6	×	П→x7
+	П→x5	×	+	П→x5
×	—	П→x1	7	×
5	0	÷	П→x4	—
П→x1	×	+	$x \rightarrow П2$	П→x4
П→x1	6	÷	—	$x \rightarrow П4$
1	$x \rightarrow П6$	БП	32	

**Программа П1.22. (5.132).** Построение гистограмм при  $M = 10$  интервалах. Ввод:  $a$  В↑  $b$  В/0 С/П (индицируется  $a - b$ ),  $M$  и далее  $x_1$  С/П  $x_2$  С/П ...  $x_i$  С/П (при наборе  $x_i$  не обращать внимания на индицируемые числа). Вывод результатов (после нажатия клавиш БП 36 и  $M$  раз С/П — до появления знака ЕГГОГ):  $P_1 \rightarrow PX$ ,  $P_2 \rightarrow PX$ , ...,  $P_M \rightarrow PX$ .

—	С/П	$x \rightarrow П0$	$x \rightarrow Пb$	1
ВП	6	/—/	FBx	F.
—	÷	$x \rightarrow Пc$	÷	1
—	$x \rightarrow Пd$	П→x0	$x \rightarrow Пе$	Cx
Кx→Пе	FL0	17	С/П	П→xc
÷	П→xd	—	$x \rightarrow П0$	$x \rightarrow Пе$

КП→ $x\epsilon$	!	..	К $x$ →Пе	БП
23	П→ $xb$	$x$ →П0	П→ $x0$	$x$ →Пе
КП→ $x\epsilon$	С/П	FL <sup>0</sup>	38	

**Программа П1.23.** (5.133). Построение гистограммы при  $M = 20$  интервалах. Ввод:  $a$  В↑  $b$  В/0 С/П и далее  $x_1$  С/П  $x_2$  С/П ...  $x_i$  С/П (при вводе  $x_i$  не обращать внимания на промежуточные результаты). Результат (после нажатия клавиш БП 53 и М раз С/П):  $P_1 \rightarrow PX, P_2 \rightarrow PX, \dots, P_{20} \rightarrow PX$ .

—	1	0	$x$ →П0	1
ВП	4	/—/	$x$ →Пb	FB $x$
F.	—	÷	$x$ →Пc	÷
1	П→ $x0$	$x$ →Пе	F.	К $x$ →Пе
FL0	16	—	$x$ →Пd	КП→ $x1$
1	П→ $x0$	$x$ →Пе	F.	КП→ $re$
+	К $x$ →Пе	С/П	П→ $xc$	÷
П→ $xd$	—	$x$ →П0	П→ $x0$	$x$ →Пе
F.	КП→ $x\epsilon$	↔	П→ $re$	—
2	F1/ $x$	—	F $r \geq 1$	25
П→ $rb$	БП	26	1	1
$x$ →П0	КП→ $x0$	$x$ →Пc	КП→ $xc$	↔
П→ $xc$	—	П→ $xb$	÷	С/П
П→ $xc$	1	—	С/П	БП

Использование программ генерации случайных чисел 5.134 ÷ ÷ 5.137 для ПМК «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61» не имеет смысла, поскольку они снабжены генератором случайных чисел, реализованным микропрограммно: оператор КСЧ.

**Программа П1.24.** (5.138). Формирование случайных чисел с равномерным распределением в интервале  $[a, b]$ . Ввод:  $a = PA, b = PB$  и  $V_0 = PX$ .

КСЧ П→ $xb$  П→ $xa$  — × П→ $xa$  + С/П БП 00

**Пример.** При  $a = 2, b = 3$  и  $V_0 = 0,1234567$  будем получать следующие числа (по мере нажатия клавиши С/П): 2,4654071; 2,9176371; 2,9919703; 2,1364101; 2,9510701 и т. д. (время генерации одного случайного числа 3 с).

**Программа П1.25.** (5.139). Генерация случайных чисел с нормальным распределением с помощью формул (5.70) и (5.71). Ввод:  $V_0 = P0, \bar{R} = P\bar{b}$  и  $\sigma = P\sigma$ . Переключатель Р — ГРД — Г в положении Р.

П→ $x0$  В↑ КСЧ  $x$ →П0 F1/ $x$  Fln 2 × F√ ↔  
 2 × Fπ × Fcos × П→ $xc$  × П→ $xb$  +  
 С/П БП 00

Пример. Для  $V_0 = 0,1234567$ ,  $\bar{R} = 1$  и  $\sigma = 0,1$  будем получать следующие числа (по мере нажатия клавиши С/П): 1,028069; 1,0631052; 1,0162722; 0,975379; 1,1894445; 1,1247942; 0,8807581; 0,8860195 и т. д. (время генерации одного числа 9 с).

Программа П1.26. (5.141). Регрессионный и корреляционный анализ парных зависимостей  $y_i(x_i)$ . Инструкцию по использованию программы см. после описания программы 5.141 (в п. 7 безсловный переход БП 79 заменить на БП 81).

Cx	$x \rightarrow П1$	$x \rightarrow П2$	$x \rightarrow П3$	$x \rightarrow П4$
$x \rightarrow П5$	$x \rightarrow П6$	$П \rightarrow x6$	С/П	...
...	...	...	...	$x \rightarrow П8$
$\times$	$П \rightarrow x1$	$+$	$x \rightarrow П1$	$П \rightarrow x8$
$\Gamma \rightarrow x3$	$+$	$x \rightarrow П3$	$П \rightarrow x8$	$Fx^2$
$П \rightarrow x5$	$+$	$x \rightarrow П5$	$П \rightarrow x7$	$Fx^2$
$П \rightarrow x4$	$+$	$x \rightarrow П4$	$П \rightarrow x7$	$П \rightarrow x2$
$+$	$x \rightarrow П2$	$KП \rightarrow x6$	БП	07
5	$x \rightarrow П0$	$П \rightarrow x0$	$x \rightarrow Пe$	$KП \rightarrow xe$
$П \rightarrow x6$	$\div$	$Kx \rightarrow Пe$	FL0	42
$П \rightarrow x2$	$П \rightarrow x3$	$\times$	—	$П \rightarrow x4$
$П \rightarrow x2$	$Fx^2$	—	$x \rightarrow Пc$	$П \rightarrow x5$
$П \rightarrow x3$	$Fx^2$	—	$x \rightarrow Пd$	$\times$
$F\sqrt{\quad}$	$\div$	$x \rightarrow П0$	$П \rightarrow xd$	$П \rightarrow xc$
$\div$	$F\sqrt{\quad}$	$\times$	$x \rightarrow Па$	$B \uparrow$
$Пx \rightarrow 2$	$\times$	$Пx \rightarrow 3$	XY	—
$x \rightarrow Пb$	...	...	...	

Для контроля данной программы можно привести линейную регрессию (см. пример к программе 5.141), записав первый вписываемый в программу фрагмент в виде

$$x \rightarrow П7 \leftrightarrow \text{КНОП КНОП КНОП}$$

а второй — в виде

$$\text{С/П } x \rightarrow П9 \quad П \rightarrow xa \quad \times \quad П \rightarrow xb \quad + \quad \text{БП } 81$$

С помощью ПМК «Электроника МК-52» можно проводить вычисления по нескольким программам, последовательно вызываемым из ППЗУ.

## Приложение 2

### БИБЛИОТЕКА ПРОГРАММ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ НР-11С и НР-15С

В библиотеку отобраны только те программы, получение которых переводом программ основной части справочника связано с заметными трудностями из-за наличия неформальных различий в

языках программирования зарубежных и отечественных ПМК с обратной бесскобочной записью вычислений. При небольшом навыке простые программы, не содержащие в операторах таких различий, могут набираться прямо по тексту программ основной части справочника с учетом формальных различий в символике клавиш: вместо П вводится STO, вместо III — RCL, вместо В/0 — RTN, вместо С/П — R/S, регистры А, В, С и Д соответствуют .0, .1, .2 и .3 и т. д. Из библиотеки исключены программы, вычисления по которым у ПМК HP-11C и HP-15C легко проводятся по встроенным микропрограммам (например, вычисление факториала, гамма-функции  $\Gamma(x)$ , выделение целой и дробной части чисел и т. д.), а также ряд редко применяющихся программ.

В скобках после номера программы указывается номер аналогичной по назначению программы в основной части справочника. По нему легко найти описание алгоритма и контрольные примеры (если они не даны). Время вычислений на ПМК HP-11C и HP-15C примерно в 5 раз меньше, чем для ПМК серии «Электроника БЗ-34». Пуск, если нет особых оговорок, обеспечивается нажатием клавиш  $g$  RTN и R/S.

Программы даны для ПМК HP-11C и пригодны для HP-15C, если операторы DSE и ISG вводить в виде DSE1 и ISG1. Операторы RCL и STO указаны сокращенно как R и S.

**Программа П2.1.** (3.10). Перевод чисел  $N_m$  в числа  $N_n$ . Ввод:  $N_m$  ENT  $m$  ENT  $n$  RTN R/S (получаем  $N_n$ ).

S8	R ↓	1	0	S1	GSB0	R7	S1	R8	GSB0
R/S	LBL0	S7	R ↓	S6	R ↓	1	S4	S5	CLx
XY	ENT	INT	S3	—	LBL3	R7	×	S2	INT
S1	R4	R6	×	S4	÷	+	R2	R1	—
$x=0$	GTO2	DSE	GTO3	LBL2	R ↓	R3	LBL4	ENT	ENT
R7	÷	INT	S1	R7	×	—	R5	×	+
R5	R6	×	S5	R ↓	R1	$x \neq 0$	GTO4	R ↓	RTN

Для  $N_2 = 1011,101$ ;  $m = 2$ ;  $n = 8$  получим  $N_8 = 13,5$ .

**Программа П2.2.** (4.37). Вычисление значений многочлена Лагерра  $L_n(x)$ . Ввод:  $x$  ENT  $n$  RTN R/S.

S1	XY	1	S0	LBL0	R0	1	S+0	R ↓	RI
$x^2$	÷	×	×	1	XY	—	DSE	GTO0	RTN

**Программа П2.3.** (4.39). Вычисление значений многочлена Лежандра  $P_n(x)$ . Ввод:  $x$  ENT  $n$  RTN R/S.

S1	XY	S2	0	S0	1	LBL0	R1	R0	×
XY	S1	R0	1S+0	R ↓	R0	+	R2	×	×
XY	—	R0	÷	DSE	GTO0	RTN			

**Программа П2.4.** (4.41). Вычисление значений многочлена Эрмита  $H_n(x)$ . Ввод:  $x$  ENT  $n$  RTN R/S.

S0	SI	XY	S1	1	LBL0	XY	R1	R0	—
×	XY	R1	×	+	2	×	DSE	GTO0	RTN

**Программа П2.5.** (4.53). Вычисление значений степенного многочлена  $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  при  $n \leq 19$ . Ввод:  $a_1 \div a_n = R0 + Rn$ ,  $x = RX$  RTN R/S (значение  $n$  вписывается на место многоточия).

ENT	...	SI	R ↓	ENT	ENT	0	LBL0	R(i)	+
×	DSE	GTO0	R0	+	RTN				

**Программа П2.6.** (4.58). Вычисление частного  $D(x)$  и остатка  $r_1 x + r_0$  от деления степенного многочлена  $A(x)$  степени  $n \leq 17$  на двучлен  $x^2 + b_1 x + b_0$ . Ввод:  $a_0 \div a_n = R0 \div Rn$ ,  $b_0 = R.8$ ,  $b_1 = R.9$  и  $n = RX$ . После пуска (нажатием клавиш RTN и R/S) получаем:  $r_0 \rightarrow RX$ ,  $r_1 = RY$ ,  $d_0 \div d_{n-2} \rightarrow R0 \div R(n-2)$ .

SI	R(i)	ENT	DSE	R(i)	DSE	LBL0	GSB1	DSE	GTO0
GSB1	RTN	LBL1	XY	R.9	×	—	XY	R(i)	XY
S(i)	R.8	×	—	RTN					

**Программа П2.7.** (4.60). Вычисление значений степенного многочлена  $A(z)$  мнимой переменной  $z = i\omega$  при степени многочлена  $n \leq 17$ . Ввод:  $a_0 \div a_n = R0 \div Rn$ ,  $n = R.9$  и  $\omega = PX$ .

S.8	R.9	SI	0	ENT	LBL0	R(i)	+	R.8	×
XY	R.8	×	CHS	DSE	GTO	R0	+	RTN	

**Программа П2.8.** (4.64). Вычисление значений степенного многочлена  $A(z)$  комплексной переменной  $z = a + ib$  при степени многочлена  $n \leq 15$ . Ввод:  $a_0 \div a_n = R0 \div Rn$ ,  $n = R.9$ ,  $a$  ENT  $b$  RTN R/S. Результат  $A(z) = c + id$ :  $d \rightarrow RY$  и  $c \rightarrow RX$ .

S.7	XY	S.6	R.9	SI	R ↓	R(i)	DSE	×	R(i)
+	R.7	ISG	0	R(i)	×	S.8	XY	DSE	DSE
LBL0	R(i)	GSB1	DSE	GTO0	R(i)	GSB1	RTN	LBL1	R.8
R.7	×	—	XY	R.6	×	+	XY	R.7	×
R.8	R.6	×	+	S.8	XY	RTN			

**Программа П2.9.** (4.67). Вычисление произведения степенного многочлена  $B(p)$  степени  $m \leq 8$  на многочлен  $A(p)$  произвольной степени. Ввод: CLEAR REG  $b_0 \div b_8 = P0 \div P8$   $a_n$  R/S (получаем  $c_{n+8}$ )  $a_{n-1}$  R/S (получаем  $c_{n+7}$ ) ...  $a_0$  R/S (получаем  $c_8 \rightarrow RX = R.8$  и  $c_7 \rightarrow R.7$  ...  $c_0 \rightarrow R.0$ ).

S9	R8	×	R.7	+	S.8	R9	R7	×	R.6
+	S.7	R ↓	R9	R6	×	R.5	+	S.6	R ↓
R9	R5	×	R.4	+	S.5	R ↓	R9	R4	×

R.3	+	S.4	R↓	R9	R3	×	R.2	+	S.3
R↓	R9	R2	×	R.1	+	S.2	R↓	R9	R1
×	R.0	+	S.1	R↓	R9	R0	×	S.0	R↓
R9	RTN								

**Программа П2.10.** (4.72). Вычисление АЧХ и ФЧХ линейной системы, описываемой операторной функцией  $F(i\omega) = A(i\omega)/B(i\omega)$  при  $m + n \leq 14$ , где  $m$  — степень  $B(i\omega)$  и  $n$  — степень  $A(i\omega)$ . Ввод:  $a_0 = R0, a_1 = R1, \dots, a_n = Rn, b_0 = R(n+1), b_1 = R(n+2), \dots, b_m = R(n+m+1), I = (n+m+1).00(n+1) = R.9$  и далее  $\omega = PX RTN R/S$ . Здесь:  $(n+m+1)$  — целая часть числа  $I, 00(n+1)$  — дробная часть  $I$  в виде трех цифр (например, если  $n = 11$ , то записывается как 011, если  $n = 8$ , то 009). Результат:  $A(\omega) \rightarrow PX$  и  $\varphi(\omega) \rightarrow PY$ .

S.8	R.9	SI	GSB1	→P	S.7	XY	S.6	RI	1
—	INT	SI	GSB1	→P	R.7	÷	XY	R.6	—
XY	→R	→P	RTN	LBL1	0	ENT	LBL0	R(i)	+
R.8	×	XY	R.8	×	CHS	DSE	GTO0	R(i)	+
RTN									

**Программа П2.11.** (4.74). Оценка устойчивости многочлена  $A(p)$  степени  $m \leq 19$ . Ввод:  $a_0 \div a_n = R0 \div Rn, (n-2) = R1$ . Вывод результата: 0 — многочлен устойчив, Error 0 — неустойчив.

RI	LBL1	2	+	SI	R(i)	S.9	RI	1	—
SI	R↓	R↓	R(i)	S.8	R↓	RI	2	—	LBL0
SI	R↓	R.9	R(i)	×	RI	1	+	SI	R↓
R.8	R(i)	×	XY	—	R.8	÷	S(i)	$\sqrt{x}$	R↓
3	RI	—	$x < 0$	GTO0	$x = 0$	GTO0	R↓	3	—
$x \neq 0$	GTO1	RTN							

**Программа П2.12.** (5.1). Решение системы из двух линейных уравнений методом Крамера. Ввод:

$$a_{11} = P7, \quad a_{12} = P8, \quad b_1 = P2,$$

$$a_{21} = P4, \quad a_{22} = P5, \quad b_2 = P3.$$

Вывод результатов:  $x_1 \rightarrow PY, x_2 \rightarrow PX$ .

R5	R7	×	R4	R8	×	—	S9	R2	R5
×	R3	R8	GSB0	SI	R1	R7	×	R4	R2
LBL0	×	—	R9	÷	RTN				

**Программа П2.13.** (5.2). Решение системы из трех линейных уравнений методом Гаусса. Ввод:

$$a_{11} = R7 \quad a_{12} = R8 \quad a_{13} = R9 \quad b_1 = R.0$$

$$a_{21} = R4 \quad a_{22} = R5 \quad a_{23} = R6 \quad b_2 = R.1$$

$$a_{31} = R1 \quad a_{32} = R2 \quad a_{33} = R3 \quad b_3 = R.2$$

Вывод результатов:  $x_1 \rightarrow PX = R.0, x_2 \rightarrow R.1, x_3 \rightarrow R.2$ .

R3	R6	R9	GSB0	S3	XY	S8	R.3	S9	3
SI	LBL1	R.2	R.1	R.0	GSB0	S.1	XY	S.0	R.3
S.2	R2	R5	R8	GSB0	S4	XY	S7	R.3	1
R9	S2	R6	S8	R3	S5	DSE	GTO1	R.0	RTN
LBL0	R7	÷	S.3	R4	×	—	XY	R.3	R1
×	—	RTN							

Программы П2.12 и П2.13 целесообразно применять только для ПМК НР-11С, так как ПМК НР-15С способны решать системы из  $n \leq 7$  линейных уравнений по встроенным микропрограммам.

**Программа П2.14.** (5.16). Интерполяция по Лагранжу для  $(n + 1) \leq 6$  произвольные расположенных узлов. Ввод (после нажатия клавиши RTN):  $y_i$  ENT  $x_i$  R/S. Получаем  $b_0 \div b_5 \rightarrow R7 \div R2$ ,  $x_0 \div x_5 \rightarrow R.3 \div R.8$ . Далее вводим значение  $x$  и, указав метку А, получаем  $y(x) \rightarrow SX$ .

REG	S.3	XY	S7	7	S1	LBL1	1	4	SI
R/S	S8	LBL0	R ↓	R8	DSE	R(i)	—	XY	RI
6	—	SI	R ↓	R(i)	—	XY	÷	RI	6
+	S0	SI	6	—	R1	—	$x \neq 0$	GTO0	R ↓
R1	1	—	S1	SI	R ↓	S(i)	1	S—0	R0
SI	R8	S(i)	GTO1	LBLA	S0	R9	—	R2	×
R3	+	R0	R.0	—	×	R4	+	R0	R.1
—	×	R5	+	R0	R.2	—	×	R6	+
R0	R.3	—	×	R7	+	RTN			

**Программа П2.15.** (5.17). Вычисление коэффициентов интерполирующего полинома

$$y(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

и интерполяция при равномерном расположении узлов и степени полинома  $m \leq 10$ . Ввод:  $y_0 = R0$ ,  $y_1 = R1$ , ...,  $y_{10} = R.0$ ,  $m = R.4$  и, после нажатия клавиши RTN и R/S и индикации 1,  $h = PX$  ( $h$  — расстояние между узлами). Вывод результатов по мере нажатия клавиши R/S:  $a_0 \rightarrow RX = R0$ ,  $a_1 \rightarrow RX = R1$ , ...,  $a_{10} \rightarrow RX = R.0$ . Далее вводится значение  $x = PX$  и нажимается клавиша А; получаем  $y(x)$ . Число  $K$ , выделенное жирным шрифтом, вычисляется как  $K = m / (m - q_0)$ , где  $q_0$  — положение узла, принятого за нулевой. Если  $K = 2$ , то нулевым будет центральный узел.

CLx	SI	LBL0	R(i)	S.1	RI	1	+	S.2	LBL1
ISG	PSE	R.1	R(i)	S.1	XY	—	R.2	÷	S(i)
RI	R.4	$x \neq y$	GTO1	R.2	SI	R.4	$x \neq y$	GTO0	R.4
<b>K</b>	÷	S.2	R.4	LBL3	1	—	S.3	SI	R.2
1	—	S.2	LBL2	ISG	R(i)	R(i)	R.2	×	DSE
R ↑	R(i)	XY	—	S(i)	ISG	RI	RI	R.4	$x \neq y$

GTO2	R.3	$x \neq 0$	GTO3	SI	1	S.2	R/S	S.1	LBL4
R(i)	R.2	$\div$	S(i)	R/S	R.2	R.1	$\times$	S.2	ISG
GTO4	GTO4	LBLA	R.4	SI	R ↓	ENT	ENT	ENT	0
LBL5	R(i)	+	$\times$	DSE	GTO5	R0	+		

**Программа П2.16.** (5.22). Вычисление корня уравнения  $x = f(x)$  методом простых итераций. Ввод: данные  $f(x)$ ,  $x_0 = R0$ ,  $\epsilon = R1$  ( $x_1 \rightarrow R0$ ).

S0	LBL0	...	...	...	...	...	...	...	...
R0	XY	S0	-	ABS	R1	$x \leq y$	GTO0	R0	RTN

**Программа П2.17.** (5.25). Вычисление корня уравнения  $F(x) = 0$  методом Ньютона. Ввод: данные  $F(x)/F'(x)$  при  $x \rightarrow R0$ ,  $x_0 = RX$  и  $\epsilon = R1$ .

S0	LBL0	...	...	...	...	...	...	...	0
XY	-	S0	LSTS	ABS	R1	$x \leq y$	GTO0	R0	RTN

**Программа П2.18.** (5.27). Вычисление корня уравнения  $F(x) = 0$  модифицированным методом Ньютона. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $\delta = \epsilon = R2$  и  $x_0 = RX$ .

S0	LBL0	R0	GSB1	S1	R0	R2	+	GSB1	R1
-	R1	$\div$	1/x	R2	$\times$	S-0	ABS	R2	$x \leq y$
GTO0	R0	RTN	LBL1	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.19.** (5.30). Вычисление корня уравнения  $F(x) = 0$  комбинированным методом секущих-хорд. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $x_0 = R0$ ,  $x_1 = R1$  и  $\epsilon = R2$ .

R0	GSB0	S3	LBL1	R1	GSB0	R0	R3	ENT	R ↑
S3	XY	-	$\div$	R0	R1	-	$\times$	+	R1
XY	S1	XY	S0	-	ABS	R2	$x \leq y$	GTO1	R1
RTN	LBL0	...	...	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.20.** (5.31). Вычисление корня  $F(x) = 0$  методом деления пополам. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x \rightarrow R0$ ,  $a = R0$ ,  $(b - a) = R1$ ,  $f(a) = R2$  и  $\epsilon = R3$ .

LBL0	R1	LBL1	2	$\div$	S1	S+0	R1	R0	$\div$
ABS	R3	GTO2	R0	RTN	LBL2	...	...	...	...
...	R2	XY	S2	$\times$	$x > 0$	GTO0	R1	CHS	GTO1

**Программа П2.21.** (5.33). Вычисление корня  $F(x) = 0$  методом подекадного приближения. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x \rightarrow R0$ ,  $x_0 = R0$ ,  $\Delta x_0 = R0$  и  $\epsilon = R2$  (если  $F(x_0) < 0$ , в конце фрагмента вычисления  $F(x)$  поставить оператор CHS).

LBL0	R1	S+0	...	...	R1	$\div$	$x > 0$	GTO0	1
0	CHS	S÷1	R1	ABS	R2	$x \leq y$	GTO0	R0	RTN



**Программа П2.27.** (5.41). Нахождение экстремумов функции  $F(x)$  методом квадратичной интерполяции — экстраполяции. Ввод: данные  $F(x)$  при  $x$ , запосимом в пачало подпрограммы,  $h = R1$ ,  $\varepsilon = R4$  и  $x_1 = RX$ .

S0	LBL0	R0	R1	—	GSB1	S2	R0	2	×	
R1	+	×	S3	R0	GSB1	S—2	S—2	4	×	
R0	×	S—3	R0	R1	+	GSB1	S+2	R0	2	
×	R1	—	×	S+3	R3	R2	÷	2	÷	
R0	XY	S0	—	ABS	R4	$x \leq y$	GTO0	R0	RTN	
LBL1	...	...	...	...	...	...	RTN	LBLA	S0	GTO1

Для вычисления  $F(x_m)$  по этой программе (после нахождения  $x_m$ ) следует нажать клавиши  $f$  и  $A$ .

**Программа П2.28.** (5.42). Минимизация функций  $F(x_i)$  с  $n \leq 12$  переменными  $x_i$  методом координатного спуска. Ввод: данные  $F(x_i)$  при  $x_i \rightarrow Ri$ ,  $1.00n = R1$ ,  $1 \cdot 10^{99} = R0$ ,  $\varepsilon/9 = R.3$ ,  $\Delta x = R.4 = R.5$  и  $x_i(0) = Ri$ . Результат (после пуска нажатием клавиш  $g$  RTN и R/S):  $F(x_{i \text{ мин}}) \rightarrow R0 = RX$ ,  $x_{i \text{ мин}} \rightarrow Ri$ .

LBL0	R.4	S+(i)	...	...	...	...	...	...	...
...	...	R0	XY	S0	XY	—	$x < 0$	GTO0	R.4
3	CHS	÷	S.4	ABS	R.5	ABS	3	÷	$x \leq y$
GTO0	R.5	S.4	ISG	GTO0	R1	FRAC	1	+	SI
R.5	9	÷	S.5	S.4	R.3	$x \leq y$	GTO0	R0	RTN

**Программа П2.29.** (5.43). Минимизация функций  $F(x_i)$  с  $n \leq 12$  переменными  $x_i$  методом спирального координатного спуска. Ввод: данные  $F(x_i)$  при  $x_i \rightarrow Ri$ ,  $1.00n = R1$ ,  $1 \cdot 10^{99} = R0$ ,  $\varepsilon/5 = R.3$ ,  $\Delta x = R.4 = R.5$  и  $x_i(0) = Ri$ . Результат (после пуска нажатием клавиш  $g$  RTN R/S):  $F(x_{i \text{ мин}}) \rightarrow R0 = RX$ ,  $x_{i \text{ мин}} \rightarrow Pi$ .

LBL0	R.4	S+(i)	...	R0	XY	S0	XY	—	$x < 0$
GTO0	ISG	GTO0	R1	FRAC	1	+	SI	R.4	CHS
5	÷	S.4	ABS	R.3	$x \leq y$	GTO0	R0	RTN	

**Программа П2.30.** (5.44). Решение квадратного уравнения. Ввод:  $a_0 = R0$ ,  $a_1 = R1$  и  $a_2 = R2$ . Результат: 7, если корни действительные (нажав клавишу XY, получаем  $x_2$ , из регистра 7 вызываем  $x_1$ ), и 4 — если корни мнимые  $x_{1,2} = d + im$  (нажав клавишу XY, получаем  $m$ , из регистра 4 вызываем  $d$ ).

R1	CHS	R2	÷	2	÷	S4	$x^2$	R0	R2
÷	—	$x > 0$	GTO0	CHS	$\sqrt{x}$	4	R/S	LBL0	$\sqrt{x}$
S3	R4	+	S7	R4	R3	—	7	RTN	

**Программа П2.31.** (5.46). Решение приведенного кубического уравнения. Ввод:  $a_0 = R0$ ,  $a_1 = R1$  и  $a_2 = R2$ . Результат: 7, если все корни действительные (вызывается из регистров 7, 8 и 9), и

4, если корни (два корня) комплексно-сопряженные  $x_{1,2} = d \pm im$  ( $x_3 \rightarrow R9$ ,  $d \rightarrow R4$  и  $m \rightarrow R5$ ).

S.0	0	×	LBL1	LSTx	ENT	ENT	ENT	R2	+
S6	×	R1	+	S3	×	R0	+	$x > 0$	GTO0
R ↓	R.0	+	ENT	LBL0	R ↓	R.0	2	÷	S.0
—	S9	—	$x \neq 0$	GTO1	R6	CHS	2	÷	S4
$x^2$	R3	—	$x > 0$	GTO2	CHS	$\sqrt{x}$	S5	4	RTN
LBL2	$\sqrt{x}$	S5	R4	+	S7	R4	R5	—	S8
7	RTN								

**Программа П2.32.** (5.47). Решение приведенного алгебраического уравнения четвертой степени. Ввод:  $a_0 = R0$ ,  $a_1 = R1$ ,  $a_2 = R2$ ,  $a_3 = R3$ ,  $2(1 + |a_{\max}|) = R8$ . Вывод результатов: первая пара корней (если дисплей мигает, корни комплексно сопряженные:  $x_{1,2} = d \pm im$ ; тогда, нажав клавиши R/S и A, получим  $d \rightarrow RX$  и  $m \rightarrow RY$ ; если дисплей не мигает, то корни в регистрах X и Y действительные); нажав клавишу R/S, получаем вторую пару корней (их расшифровка аналогична таковой для первой пары корней).

R3	CHS	2	÷	S9	LBL5	R9	ENT	ENT	ENT
R3	+	S6	×	R2	+	S5	×	R1	+
$x \neq 0$	GTO0	R1	R3	÷	ENT	$x^2$	R0	—	$x < 0$
GTO0	$\sqrt{x}$	+	LBL3	S7	LBL6	R9	2	÷	ENT
$x^2$	R7	—	$x > 0$	GTO1	CHS	$\sqrt{x}$	LBL7	PSE	GTO7
LBL1	$\sqrt{x}$	+	÷	LSTx	LBLA	R/S	R3	CHS	R9
—	S9	R0	R7	÷	GTO3	LBL0	XY	R6	+
$x = 0$	GTO4	÷	S7	ENT	ENT	R5	—	×	R0
+	$x > 0$	GTO4	R8	S-9	LBL4	2	S ÷ 8	R8	R9
+	S9	LSTx	—	$x \neq 0$	GTO5	R7	GTO6		

**Программа П2.34.** (5.48). Решение приведенного алгебраического уравнения пятой степени. Ввод:  $a_0 = R0$ ,  $a_1 = R1$ ,  $a_2 = R2$ ,  $a_3 = R3$ ,  $a_4 = R4$ ,  $2(1 + |a_{\max}|) = R.0 = R.1$ . Результат (после пуска нажатием клавиш g RTN R/S): 1 (корни действительные, причем  $x_1 \rightarrow RX$ ,  $x_2 \rightarrow RY$ ,  $x_3 \rightarrow R3$ ), 2 ERROR 0 (два корня — комплексно-сопряженные:  $x_{1,2} = d \pm im$ , и один корень,  $x_3$  — действительный; нажав клавиши R/S f B, получаем  $m \rightarrow RX$ ,  $d \rightarrow RY$  и  $x_3 \rightarrow R3$ ). Далее, нажав клавиши f A, получаем аналогично трактуемые данные для корней  $x_4$  и  $x_5$ .

CLx	S.2	×	LBL2	LSTx	ENT	ENT	ENT	R4	+
S8	×	R3	+	S7	×	R.2	$x \neq 0$	GTO0	R ↓
R2	+	S6	×	R1	+	S5	LBL5	×	R0
+	$x > 0$	GTO1	R ↓	R.0	+	ENT	LBL1	R ↓	LBL4
R.0	2	÷	S.0	—	S9	—	$x \neq 0$	GTO2	R.2
$x \neq 0$	GTOA	R.1	S.0	S.2	R9	S.3	R5	S0	R7

S3	R8	S4	CHS	2	÷	GTO4	LBL0	R↓	R6
+	XY	R8	+	÷	S5	ENT	ENT	R7	—
GTO5	LBLA	R0	R5	÷	S5	R4	CHS	R9	—
S9	2	÷	ENT	$x^2$	R5	—	$\sqrt{x}$	+	÷
LSTx	R/S	LBLB	CHS	$\sqrt{x}$					

**Программа П2.35.** (5.53). Вычисление трех первых производных таблично заданной функции при 5 узлах. Ввод:  $y_{-2} = R2$ ,  $y_{-1} = R1$ ,  $y_0 = R0$ ,  $y_1 = R.1$ ,  $y_2 = R.2$  и  $h = R9$ . Вывод результатов (при нажатии клавиш  $g$  RTN R/S R/S R/S):  $y'(x_0) \rightarrow RX$ ,  $y''(x_0) \rightarrow RX$  и  $y'''(x_0) \rightarrow RX$ .

R.1	R1	—	8	×	R2	+	R.2	—	R9
1	2	×	S8	÷	R/S	R1	R.1	+	1
6	×	R0	3	0	×	—	R2	—	R.2
—	R8	÷	R9	÷	R/S	R1	R.1	—	2
×	R.2	+	R2	—	2	÷	R9	ENT	$x^2$
×	÷								

**Программа П2.36.** Вычисление трех частных производных аналитически заданной функции по 5 ординатам. Ввод: данные  $f(x_4, x_5, \dots)$  значения  $x_{i0} = Ri$ ,  $h = R0$  и код  $k = RX$  переменной в виде номера регистра (например,  $k = 4$  при дифференцировании по переменной  $x_4$ ). Результат:  $f_0, f', f''$  и  $f''' \rightarrow RX$ .

S1	R0	S—(i)	S—(i)	GSB0
S1	CHS	S2	S3	R0
S+(i)	GSB0	2	×	S+3
4	×	S—1	2	×
S+2	R0	S+(i)	GSB0	R/S
3	0	×	S—2	R0
S+(i)	GSB0	2	×	S—3
4	×	S+1	2	×
S+2	R0	S+(i)	GSB0	S—1
S—2	S+3	R0	S—(i)	S—(i)
i	2	R0	×	S÷1
R0	×	S÷2	R1	R/S
R2	R/S	R3	R0	3
$y^x$	÷	2	÷	S3
R/S	LBL0	...	...	...
...	...	...	...	R/S

Для функции  $y(x) = z(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$  подпрограмма, вписываемая на место многоточия, имеет вид ( $x = x_4$ )

R4	$x^2$	2	÷	CHS	$e^x$	2	$\pi$	×	$\sqrt{x}$
									÷

**Пример.** При  $x_0 = x_0 = 2$  и  $h = 0,01$  получим

$$z(2) = 0,053990966 \quad (0,05399096651), \quad z'(2) = -0,107981933 \\ (-0,10798193302), \quad z''(2) = 0,1619727 \quad (0,1619728995), \\ z'''(2) = -0,107975 \quad (-0,10798193).$$

**Программа П2.37.** (5.61). Вычисленные значения функции  $f(x, y, z, \dots)$  ряда переменных и относительных коэффициентов неустойчивости при трех узлах. Ввод: данные  $f(x, y, z, \dots)$  при  $x = x_3 \rightarrow R3$ ,  $y = x_4 \rightarrow R4$  и т. д.,  $h/p = R2$ ,  $x_0 = x_{30} = R3$ ,  $y_0 = x_{40} = R4$  и т. д. и затем коды (номера регистров) переменных. Результат:  $f(x_0, y_0, z_0, \dots) \rightarrow R0$ ,  $\delta_i \rightarrow RX$ .

S1	R(i)	S0	ENT	ENT	R2	×	—	S(i)	GSB0
S1	R0	ENT	ENT	R2	×	+	S(i)	GSB0	R1
—	R2	÷	2	÷	S1	R0	S(i)	GSB0	S0
R1	XY	÷	RTN	LBL0	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.38.** (5.62). Вычисление значений функции  $f(x, y, z, \dots)$  ряда переменных и относительных коэффициентов неустойчивости при пяти узлах. Ввод и вывод результатов см. в программе П2.37.

S1	R(i)	S0	GSB0	2	GSB2	S1	GSB3	GSB4	8
CHS	GSB5	+	GSB6	8	GSB5	2	×	+	GSB6
R1	XY	—	R2	÷	1	2	÷	S1	R8
S(i)	GSB6	R1	XY	S0	÷	RTN	LBL5	×	S+1
LBL3	R0	LBL0	ENT	ENT	R2	×	RTN	LBL2	+
LBL4	—	LBL6	S(i)	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.39.** (5.66). Численное интегрирование методом Симпсона. Ввод: данные  $f(x)$  при  $x \rightarrow R2$ ,  $b$ ,  $a$  и  $n$  в регистр X.

R/S	S2	—	R/S	S1	÷	S3	GSB0	S0	LBL3
GSB1	4	×	S+0	2	S-1	GSB1	ENT	R0	+
+	S0	R1	$x \neq 0$	GTO3	LSTx	R3	×	3	÷
RTN	LBL1	R3	S+3	LBL0	...	...	...	ENT	RTN

**Программа П2.40.** (5.67). Численное интегрирование методом Симпсона с заданной погрешностью  $\epsilon$ . Ввод: данные  $f(x)$  при  $x$ , заносимом в начало подпрограммы,  $15\epsilon = R4$ ,  $b \rightarrow ENT$ ,  $a \rightarrow RTN$ ,  $R/S$ .

S0	XY	S1	GSB0	S5	R0	GSB0	S+5	0	S6
R1	R0	—	S7	LBL1	2	S÷7	R7	R0	+
S8	0	S2	LBL2	R8	GSB0	S+2	S+2	R7	S+8
S+8	R1	R8	$x \leq y$	GTO2	R2	S+5	R5	+	3
÷	R7	×	R6	XY	S6	—	ABS	R4	$x \leq y$
GTO1	R6	RTN	LBL0	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.41.** (5.68). Численное интегрирование по формуле Бодэ. Ввод: данные  $f(x)$  при  $x \rightarrow R1$ ,  $m$ ,  $b$  и  $a$  в RX.

S0	0	S3	R/S	ENT	R/S	S1	—	R0	÷
4	÷	S2	LBL3	GSB0	1	S—0	R0	$x \neq 0$	GTO3
R3	R2	×	2	×	4	5	÷	RTN	LBL0
R1	GSB1	7	GSB2	3	2	GSB2	1	2	GSB2
3	2	GSB2	7	×	S+3	RTN	LBL2	×	S+3
R2	S+1	LBL1							

**Программа П2.42.** (5.70). Численное интегрирование по формуле Уэддля. Ввод: данные  $f(x)$  при  $x \rightarrow R1$ ,  $m$ ,  $b$  и  $a$  в RX.

S0	0	S3	R/S	ENT	R/S	S1	—	R0	÷
6	÷	S2	LBL0	GSB1	1	S—0	R0	$x \neq 0$	GTO0
R3	R2	×	3	×	1	0	÷	RTN	LBL1
R1	GSB2	1	GSB3	5	GSB3	1	GSB3	6	GSB3
1	GSB3	5	GSB3	S+3	RTN	LBL3	×	S+3	R2
S+1	LBL2	...	...	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.43.** (5.72). Численное интегрирование методом Чебышева при  $n = 3$ . Ввод: данные  $f(x)$  при  $x$ , записанном в начало подпрограммы,  $m$ ,  $b$  и  $a$  в регистр X.

S0	2	$\sqrt{x}$	2	÷	S6	0	S5	R/S	ENT
R/S	S1	—	R0	÷	S2	LBL0	R2	R1	+
S1	LST $x$	GSB4	1	S—0	R0	$x \neq 0$	GTO0	R5	R4
×	2	×	3	÷	RTN	LBL4	S4	+	2
÷	S3	R4	—	S4	R6	CHS	GSB1	R3	GSB2
R4	R6	LBL1	×	R3	+	LBL2	...	S+5	RTN

**Программа П2.44.** (5.74). Численное интегрирование методом Гаусса при  $n = 3$ . Ввод см. в программе П2.43.

S0	.	6	$\sqrt{x}$	S6	0	S5	R/S	ENT	R/S
S1	—	R0	÷	S2	LBL0	R2	R1	+	S1
LST $x$	GSB3	1	S—0	R0	$x \neq 0$	GTO0	R5	RTN	LBL3
S4	+	2	÷	S3	R4	—	S4	R6	CHS
GSB1	R3	GSB2	8	GSB4	R4	R6	LBL1	×	R3
+	GSB2	5	LBL4	×	R4	×	9	÷	S+5
RTN	LBL2	...	...	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.45.** (5.75). Численное интегрирование табличных данных методом трапеций при постоянном шаге. Ввод:  $h = = P2$ , RTN  $y_0$  R/S  $y_1$  R/S  $y_2$  R/S и т. д. (после ввода  $y_1$  иницируются промежуточные результаты интегрирования).

S0	CL $x$	LBL0	S1	R/S	R0	XY	S0	+	2
÷	R2	×	R1	+	GTO0				

**Программа П2.46.** (5.76). Численное интегрирование табличных данных методом трапеций при переменном шаге. Ввод: RTN  $x_i$  ENT  $y_i$  R/S.

S1	XY	S0	CLx	LBL0	S2	R/S	R1	XY	S1
+	XY	R0	XY	v	XY	-	×	2	÷
R2	+	GTO0							

**Программа П2.47.** (5.77). Численное интегрирование табличных данных методом Симпсона. Ввод:  $h = R3$  и далее RTN  $n$  R/S  $y_0$  R/S  $y_1$  R/S ...  $y_n$  R/S.

S2	R/S	ENT	LBL0	XY	S8	R/S	ENT	4	×
S+8	R8	R/S	ENT	ENT	R8	+	S4	+	R2
2	-	S2	$x \neq 0$	GTO0	R4	R3	×	3	÷
RTN									

**Программа П2.48.** (5.84). Решение дифференциального уравнения первого порядка усовершенствованным методом Эйлера — Коши. Ввод: данные  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow R1$ ,  $y \rightarrow R3$ ,  $h = R0$ ,  $x_0 = R1$ ,  $y_0 = R2 = RX$ . Вывод результатов: RTN  $x_1$  R/S  $y_1$  R/S  $x_2$  R/S  $y_2$  и т. д.

S3	GSB0	+	S3	R0	S+1	R1	R/S	LBL0	GSB1
R0	×	2	÷	S+2	R2	RTN	LBL1	...	RTN

**Программа П2.49.** (5.85). Решение дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге — Кутта. Ввод: данные  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow R3$  и  $y \rightarrow R1$ ,  $y_0 = R0 = R1$ ,  $h/2 = R2$ ,  $x_0 = R3$  и  $y_0 = R4$ . Вывод результатов:  $x_i \rightarrow PX$ ,  $y_i \rightarrow RY$ .

GSB0	GSB1	+	S4	GSB0	+	S4	XY	S+1	GSB1
3	÷	S0	S1	R3	RTN	LBL1	R2	S+3	LBL0
...	...	...	...	...	...	...	R2	×	ENT
ENT	R0	+	S1	XY	ENT	ENT	S+4	R4	RTN

**Программа П2.50.** (5.95). Решение системы двух дифференциальных уравнений модифицированным методом Эйлера. Ввод: данные  $f(x, y, z)$  и  $\varphi(x, y, z)$  при  $x \rightarrow R0$ ,  $y \rightarrow R2$  и  $z \rightarrow R4$ ,  $x_0 = R0$ ,  $y_0 = R1 = R2$ ,  $z_0 = R3 = R4$  и  $h/2 = R7$ . Вывод результатов (по мере нажатия клавиши R/S):  $x_i \rightarrow RX$ ,  $z_i \rightarrow RX$  и  $y_i \rightarrow RX$ .

GSB0	S+0	S+6	GSB0	2	÷	S6	S+0	R0	R/S
R4	S3	R/S	R2	S1	RTN	LBL0	...	...	...
R6	×	R1	+	S5	...	...	...	...	...
...	R6	×	R3	+	S4	R5	S2	R6	RTN

**Программа П2.51.** (5.96). Решение систем из  $n = 2 \div 4$  дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутта второго порядка. Ввод и вывод результатов даны после текста программы.

N	S1	LBL0	R(i)	DSE	S(i)	R/S	DSE	DSE	GTO0
GSB1	R0	+	S1	LBL1	N	S1	GSB2	LBL3	R0
×	2	÷	S+(i)	R(i)	+	DSE	S(i)	DSE	R(i)
DSE	GTO3	RTN	LBL2	...	...	...	...	...	RTN

Для системы двух уравнений ( $N = 6$ )

$$y' = f(x, y, z),$$

$$z' = g(x, y, z)$$

подпрограмма должна записать  $g \rightarrow R4$  и  $f \rightarrow RX$  при  $x \rightarrow R1$ ,  $y \rightarrow R5$  и  $z \rightarrow R2$ . Вывод:  $h = R0$ ,  $x_0 = R1$ ,  $y_0 = R6 = RX$  RTN R/S  $z_0 = R3 = RX$  R/S R/S R/S ... (получаем значения  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ ).

Для системы трех уравнений ( $N = 9$ )

$$y' = f(x, y, z, t),$$

$$z' = g(x, y, z, t),$$

$$t' = p(x, y, z, t)$$

подпрограмма должна заносить  $g \rightarrow R7$ ,  $p \rightarrow R4$  и  $t \rightarrow PX$  при  $x \rightarrow R1$ ,  $y \rightarrow R8$ ,  $z \rightarrow R5$  и  $t \rightarrow R2$ ). Ввод:  $h = R0$ ,  $x_0 = R1$ ,  $y_0 = R9 = PX$  RTN R/S  $t_0 = R3 = RX$  R/S R/S ... (получаем  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  и  $t_i$ ).

Для системы четырех уравнений ( $N = 12$ )

$$y' = f(x, y, z, t, v),$$

$$z' = g(x, y, z, t, v),$$

$$y' = p(x, y, z, t, v),$$

$$v' = r(x, y, z, t, v).$$

Ввод: данные  $f$ ,  $g$ ,  $p$  и  $r$  при  $x \rightarrow R1$ ,  $y \rightarrow R2$ ,  $z \rightarrow R8$ ,  $t \rightarrow R5$ ,  $v \rightarrow R5$ ,  $g \rightarrow R.0$ ,  $p \rightarrow R7$ ,  $r \rightarrow R4$ ,  $f \rightarrow RX$ , начальные условия  $y_0 = R.2 = RX$  RTN R/S  $z_0 = R9 = RX$  R/S  $t_0 = R6 = RX$  R/S  $v_0 = R3 = RX$  R/S (дальнейшее нажатие клавиши R/S ведет к выдаче значений  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ ,  $t_i$ ,  $v_i$ ).

Аналогичным образом можно решать по программе П2.51 системы с большим числом уравнений ( $N = 15$  для 5 уравнений,  $N = 18$  для 6 уравнений и т. д., поскольку позволяет память микрокалькулятора, затраты которой зависят от вида уравнений).

**Программа П2.52. (5.97).** Решение системы двух дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты. Ввод: данные  $\varphi(x, y, z) \rightarrow R3$ ,  $f(x, y, z) \rightarrow PX$  при  $x \rightarrow R6$ ,  $y \rightarrow R.0$ ,  $z \rightarrow R1$ ,  $x_0 = R6$ ,  $h/2 = R7$ ,  $3y_0 = R2$  и  $3z_0 = R0$ . Вывод результатов:  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  и т. д. (по мере нажатия клавиши R/S).

R2	3	÷	S8	S.0	R/S	R0	3	÷	S9
S1	R/S	GSB0	GSB1	GSB2	GSB0	R1	R.0	GSB3	LBL1
R7	S+6	LBL0	GSB4	R7	×	S5	R3	R7	×
S4	R9	R8	LBL3	R5	+	S.0	XY	R4	+
S1	LBL2	R4	S+0	R5	S+2	R6	RTN	LBL4	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

**Программа П2.53. (5.98).** Решение дифференциального уравнения второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  методом Рунге — Кутты вто-

рого порядка. Ввод: данные  $f(x, y, y')$  при  $x \rightarrow R5, y \rightarrow R3$  и  $y' \rightarrow R1$  (свободны регистры R0, R8 ÷ R.9),  $h = R6, x_0 = R5, y_0 = R4, y'_0 = R2$ . Вывод результатов:  $y_0 \rightarrow RX, x_1 \rightarrow RX, y_1 \rightarrow RX$  и т. д. по мере нажатия клавиши R/S.

R2	S1	R4	S3	R/S	GSB0	R6	S+5	LBL0	5
SI	GSB1	S7	R1	GSB2	R7	LBL2	R6	×	2
÷	ENT	DSE	R(i)	+	S(i)	+	DSE	S(i)	R5
RTN	LBL1	...	...	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.54.** (5.99). Решение дифференциального уравнения второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  методом Рунге — Кутта четвертого порядка. Ввод: данные  $f(x, y, y')$  при  $x \rightarrow R6, y \rightarrow R0$  и  $y' \rightarrow R1, h/2 = R7, x_0 = R6, 3y_0 = R2, 3y'_0 = R3$ . Вывод результатов:  $y_0 \rightarrow RX, x_1 \rightarrow RX, y_1 \rightarrow RX$  и т. д. по мере нажатия клавиши R/S.

R3	3	÷	S9	S1	R2	3	÷	S3	S0
R/S	GSB0	GSB1	GSB2	GSB0	R1	R0	GSB3	LBL1	R7
S+6	LBL0	GSB4	R7	×	S4	R1	R7	×	S5
R9	R8	LBL3	R5	+	S0	XY	R4	+	S1
LBL2	R5	S+2	R4	S+3	R6	RTN	LBL4	...	

**Программа П2.55.** (5.101). Решение дифференциального уравнения третьего порядка  $y''' = f(x, y, y', y'')$  методом Рунге — Кутта второго порядка. Ввод: данные  $f(x, y, y', y'')$  при  $x \rightarrow R7, y \rightarrow R5, y' \rightarrow R3$  и  $y'' \rightarrow R1$  (свободны регистры R0, R.0 ÷ R.9),  $h = P8, x_0 = R7, y_0 = R6, y'_0 = R4, y''_0 = R1$ . Вывод результатов:  $y_0 \rightarrow RX, x_1 \rightarrow RX, y_1 \rightarrow RX$  и т. д. по мере нажатия клавиши R/S.

R2	S1	R4	S3	R6	S5	R/S	GSB0	R8	S+7
LBL0	7	SI	GSB1	S9	R3	GSB2	R1	GSB2	R9
LBL2	R8	×	2	÷	ENT	DSE	S+(i)	R(i)	+
DSE	S(i)	R7	RTN	LBL1	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.56.** (5.102). Решение дифференциального уравнения четвертого порядка  $y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$  методом Рунге — Кутта второго порядка. Ввод: данные  $f(x, y, y', y'', y''')$  при  $x \rightarrow R9, y \rightarrow R7, y' \rightarrow R5, y'' \rightarrow R3$  и  $y''' \rightarrow R1$  (свободны регистры R1 ÷ R.9),  $h = R0, x_0 = R9, y_0 = R8, y'_0 = R6, y''_0 = R4, y'''_0 = R2$ . Вывод результатов:  $y_0 \rightarrow RX, x_1 \rightarrow RX, y_1 \rightarrow RX$  и т. д. по мере нажатия клавиши R/S.

R2	S1	R4	S3	R6	S5	R8	S7	R/S	GSB0
R0	S+9	LBL0	9	SI	GSB1	S.0	R5	GSB2	R3
GSB2	R1	GSB2	R.0	LBL2	R0	×	2	÷	ENT
DSE	S+(i)	R(i)	+	DSE	S(i)	R9	RTN	LBL1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.57.** (5.103). Решение дифференциального уравнения пятого порядка  $y^V = f(x, y, y', y'', y''', y^{IV})$  методом Рун-

ге — Кутта второго порядка. Ввод: данные  $f(x, y, y', y'', y''', y^{IV})$  при  $x \rightarrow R0, y \rightarrow R9, y' \rightarrow R7, y'' \rightarrow R5, y''' \rightarrow R3$  и  $y^{IV} \rightarrow R1$  (свободны регистры R.3 ÷ R.9),  $h = R.1, x_0 = R0, y_0 = R.0, y'_0 = R8, y''_0 = R6, y'''_0 = R4, y^{IV}_0 = R2$ . Вывод результатов:  $y_0 \rightarrow RX, x_1 \rightarrow RX, y_1 \rightarrow RX$  и т. д. по мере нажатия на клавишу R/S.

R2	S1	R4	S3	R6	S5	R8	S7	R.0	S9
R/S	GSB0	R.1	S+0	LBL0	1	1	SI	GSB1	S.2
R7	GSB2	R5	GSB2	R3	GSB2	R1	GSB2	R.2	LBL2
R.1	×	2	÷	ENT	DSE	S+(i)	R(i)	+	DSE
S(i)	R0	RTN	LBL1	...	...	...	...	...	RTN

**Программа П2.58.** (5.105). Вычисление  $y(t)$  по разложению в ряд Фурье (5.44) с членом  $a_0/2$ , вписываемым на место многоточия. Ввод:  $2n$  g RTN R/S  $a_1$  R/S  $b_1$  R/S  $a_2$  R/S  $b_2$  R/S ...  $a_n$  R/S  $b_n$  R/S (при вводе  $a_i, b_i$  индицируется номер вводимого отсчета  $i$ , после ввода  $b_n$  индицируется 0)  $t/T$  R/S. Результат  $y(t) \rightarrow RX$  (при смене  $t/T$  вводится новое значение  $t/T$  и нажимается клавиша R/S). Значение  $n \leq 9$  для ПМК HP-11C и  $n \leq 30$  для HP-15C.

S0	0	SI	LBL0	ISG	0	R1	R/S	S(i)	R0
R1	$x \neq y$	GTO0	0	LBLA	R/S	$\pi$	×	S.9	R0
SI	CLS	LBL1	R.9	R1	×	SIN	R(i)	×	+
R.9	R1	×	COS	DSE	R(i)	×	+	DSE	GTO1
...	+	СТОА							

**Программа П2.59.** (5.106). Вычисление  $y(t)$  по разложению в ряд Фурье (5.45) с членом  $a_0/2$ , вписываемым на место многоточия. Ввод:  $2n$  R/S  $A_1$  R/S  $\varphi_1$  R/S  $A_2$  R/S  $\varphi_2$  R/S ...  $A_n$  R/S  $\varphi_n$  R/S (при вводе  $A_i, \varphi_i$  индицируется номер вводимого отсчета  $i$ , после ввода  $\varphi_n$  индицируется 0)  $t/T$  R/S. Результат  $t/T \rightarrow RX$  (при смене  $t/T$  вводится новое значение  $t/T$  и нажимается клавиша R/S). Значение  $n \leq 9$  для ПМК HP-11C и  $n \leq 30$  для HP-15C).

S0	0	SI	LBL0	ISG	0	R1	R/S	S(i)	R0
R1	$x \neq y$	GTO0	0	LBLA	R/S	$\pi$	×	S.9	R0
SI	CLx	LBL1	R(i)	R.9	R1	×	+	DSE	R(i)
×	+	DSE	GTO1	...	+	GTOA			

**Программа П2.60.** (5.110). Реализация метода 5 ординат. Ввод:  $y_1 \div y_5 = R1 \div R5$ . Вывод результатов:  $k_r \rightarrow RX, \tau_0 \div \tau_n \rightarrow R.0 \div R.4$ .

R1	R5	+	S6	R2	R4	+	2	×	+
6	÷	S.0	R1	R5	—	R2	R4	—	S7
+	3	÷	S.1	R6	2	÷	R3	—	2
÷	S.2	$x^2$	R.1	R7	—	2	÷	S.3	$x^3$
+	R.2	R.0	—	R3	÷	S.4	$x^4$	+	$\sqrt{x}$
R.1	÷	RTN							

**Программа П2.61.** (5.113). Расчет коэффициентов  $\alpha_0, \alpha_1$  и  $\alpha_n$  Берга. Ввод  $n = RX$  (включая  $n = 0$  и  $1$ )  $\theta = RX$  ( $\alpha_n(\theta) \rightarrow RX$ ).

S0	RAD	LBL0	R/S	→RAD	S3	COS	1	XY	—
S4	R0	$x \neq 0$	GTO1	R3	SIN	R3	ENT	COS	×
—	GTO4	LBL1	1	+	S5	R3	×	SIN	R5
R0	×	÷	S6	R0	1	—	$x \neq 0$	GTO2	R3
GTO3	LBL2	S5	R3	×	SIN	R5	R0	×	÷
LBL3	R6	—	LBL4	$\pi$	÷	ENT	R4	÷	GTO0

**Программа П2.62.** (5.114). Вычисление амплитуд гармоник нелинейного объекта с передаточной характеристикой  $y(x)$  в виде степенного многочлена степени  $m \leq 6$  на гармоническое воздействие  $x(t) = x_m \cos \omega t$ . Ввод:  $a_0 \div a_6 = R0 \div R6$ ,  $x_m = RX$ . Результат:  $A_0 \rightarrow R7$ ,  $A_1 \rightarrow R8$ ,  $A_2 \rightarrow R9$ ,  $A_3 \rightarrow R.0$ ,  $A_4 \rightarrow R.1$ ,  $A_5 \rightarrow R.2$ ,  $A_6 \rightarrow R.3 = RX$ . При смене  $x_m$  вводится новое значение  $x_m$  и нажимается клавиша R/S.

S.3	R6	×	S8	R5	S7	R.3	2	÷	S.3
0	S9	S.0	S.1	S.2	R8	GSB0	R4	+	S7
R9	GSB1	R3	+	S7	R.0	GSB2	R2	GSB3	R1
GSB3	R0	+	S7	R.3	ENT	ENT	×	×	$x^2$
2	×	R6	×	S.3	RTN	LBL3	+	S7	R.3
R.1	×	R.2	XY	S.2	XY	R.0	+	LBL2	R.3
×	R.1	XY	S.1	XY	R9	+	LBL1	R.3	×
R.0	XY	S.0	XY	R8	+	LBL0	R.3	×	R9
XY	S9	XY	R7	2	×	+	R.3	×	R8
XY	S8	XY	R.3	×	RTN				

**Программа П2.63.** (5.115). Вычисление амплитуд гармоник нелинейного объекта с передаточной характеристикой  $y(x)$  в виде степенного многочлена степени  $m \leq 16$  на гармоническое воздействие  $x(t) = x_m \cos \omega t$ . Ввод (для каждого  $x_m$ ):  $x_m = R.7$  g RTN  $a_m$  R/S  $a_{m-1}$  R/S ...  $a_0$  R/S. Результат:  $A_0 \div A_m \rightarrow R0 \div Rm$ .

R.7	×	S1	0	R/S	S0	R.7	2	S.8	SI
÷	S.7	LBL0	CLx	S(i)	R/S	R1	R.7	×	+
R0	XY	S0	XY	2	×	2	LBL2	SI	XY
R(i)	+	R.7	×	DSE	RI	R.8	—	1	+
$x=0$	GTO1	XY	R(i)	XY	S(i)	XY	RI	2	+
GTO2	LBL1	XY	R(i)	XY	S(i)	XY	R.7	×	R.8
SI	XY	S(i)	XY	1	+	S.8	SI	GTO0	

**Программа П2.64.** (5.120). Последовательное ДПФ. Ввод:  $\cdot 00i_m = R1$  ( $i_m$  — максимальный номер ненулевого отсчета),  $\Delta t = R.9$  и далее  $y_0 = RX$ ,  $y_1 = RX$ , ...,  $y_{i_m} = RX$  ( $i_m \leq 17$  для ПМК НР-11С и  $i_m \leq 56$  для НР-15С) и  $f = RX$ . Результат:  $S_0(f) \rightarrow PX$ , нажав клавишу R/S, получаем  $S_1(f) \rightarrow RX$  (если нужно получить  $S_2(f) \rightarrow PX$ , нажимаются клавиши LSTx и X), нажав клавишу XY,

получаем  $\Phi_{\text{рад}}(f) \rightarrow \text{RX}$  (если пужно получить  $\varphi^\circ(f)$ , нажимается клавиша  $\rightarrow \text{DEG}$ ). При смене  $f$  вводится новое значение  $f$  и повторяются операции вывода результатов.

S(i)	RI	INT	ISG	RTN	LBL0	R/S	R.9	×	2
×	$\pi$	×	RI	FRAC	1	+	SI	R0	S.7
0	S.8	R↑	ENT	LBL1	RI	INT	×	SIN	LSTx
COS	R(i)	×	S+0	R↓	R(i)	×	R.8	+	S.8
R↓	ISG	GTO1	ENT	R0	R.8	$\rightarrow$ P	R.9	×	R/S
R↑	2	÷	SIN	LSTx	÷	×	R.7	S0	R↓

GTO0

**Программа П2.65.** (5.124). Параллельное ДПФ для  $n = 7$  гармоник. Вывод: номер начальной гармоники  $n_n = \text{RI}$ , номер начального ненулевого отсчета  $i_n = \text{RX}$ ,  $y(0) = \text{RX}$  и далее  $y_i = \text{RX}$ ,  $y_{i+1} = \text{RX}$  и т. д. Вывод:  $A_0 \rightarrow \text{R0}$ ,  $A_{n_n} \rightarrow \text{R1}$ ,  $B_{n_n} \rightarrow \text{R2}$ ,  $A_{n_n+1} \rightarrow \text{R3}$ ,  $B_{n_n+1} \rightarrow \text{R4}$  и т. д. до  $A_{n_n+7} \rightarrow \text{R.3}$ ,  $B_{n_n+7} \rightarrow \text{R.4}$ .

S.6	R/S	1/x	$\pi$	×	2	×	S.7	LBL0	R.6
R/S	S.5	S+0	GSB1	S+1	XY	S+2	GSB1	S+3	XY
S+4	GSB1	S+5	XY	S+6	GSB1	S+7	XY	S+8	GSB1
S+9	XY	R.0	+	S.0	GSB1	R.1	+	S.1	XY
R.2	+	S.2	GSB1	R3	+	S.3	XY	R.4	+
S.4	RI	7	-	S	R.6	1	+	S.6	GTO0
LBL1	R.6	RI	×	R.7	×	COS	LSTx	SIN	R.5
×	XY	R.5	×	ISG	0	RTN			

**Пример.** Для  $n_n = 1$ ,  $i_n = 10$ ,  $N = 32$ ,  $y(0) = 0$  (после ввода  $y(0)$  индицируется номер  $i_n = 10$ ) и 8 единичных отсчетов  $y_{10} \div y_{17}$  получим приведенные ниже результаты:

$A_0 = 8$	
$A_1 = -6,362280155$	$B_1 = 3,400709586$
$A_2 = 2,847759070$	$B_2 = -4,261972622$
$A_3 = -0,238760744$	$B_3 = 2,424178878$
$A_4 = -4 \cdot 10^{-10} \approx 0$	$B_4 = -1,8 \cdot 10^{-9} \approx 0$
$A_5 = -1,159534832$	$B_5 = -0,9516056482$
$A_6 = 1,765366869$	$B_6 = 3,51133068$
$A_7 = -1,066623829$	$B_7 = 0,3235567959$

**Программа П2.66.** (5.123). Расчет АЧХ и ФЧХ при  $i \leq 19$  отсчетах (для HP-15C  $i \leq 60$ ). Ввод:  $1.00n = \text{RI}$  ( $n$  — число отсчетов, за исключением нулевого),  $a_0 = \text{R0}$  и далее  $a_1, a_2, \dots, a_n$  в  $\text{RX}$  (после ввода  $a_n$  индицируется 0). Затем вводим  $f\Delta t = \text{RX}$ , нажимается клавиша R/S и получаем  $A(f) \rightarrow \text{RX}$ ,  $\Phi_{\text{рад}}(f) \rightarrow \text{PY}$  (для получения  $\varphi^\circ(f)$  после вывода  $\Phi_{\text{рад}}(f)$  нажимается клавиша с оператором  $\rightarrow \text{DEG}$ ).

R0	CHS	XY	+	S(i)	LST <sub>r</sub>	S0	ISG	RTN	0
LBL0	R/S	$\pi$	$\times$	RI	FRAC	1	+	SI	0
S0	S.9	R $\uparrow$	R $\uparrow$	ENT	LBL1	RI	INT	2	$\times$
1	—	$\times$	SIN	LST <sub>x</sub>	COS	R(i)	$\times$	S $\uparrow$ -0	R $\downarrow$
R(i)	$\times$	R.9	+	S.9	R $\downarrow$	ISG	GTO1	R.9	CHS
R0	$\rightarrow$ P	R $\uparrow$	SIN	LST <sub>r</sub>	$\div$	$\times$	GTO0		

**Программа П2.67.** (5.125). Вычисление основных статистических параметров массива чисел  $x_i$ . Ввод: CLEAR REG и далее  $x_i = PX$  (при вводе  $x_i$  индицируется номер отсчета  $i$ ). Если введен ошибочный отсчет, надо повторить его ввод и нажать клавиши  $f$  и  $V$ . Результат:  $\bar{x}$  после нажатия клавиши  $f$  и  $A$ ;  $D$ ,  $D_0$ ,  $A$  и  $E$  после 4 нажатий клавиши R/S ( $m_1 \rightarrow R.1$ ,  $m_2 \rightarrow R.2$ ,  $m_3 \rightarrow R.3$ ,  $m_4 \rightarrow R.9$ ,  $M_2 \rightarrow R.2$ ,  $M_3 \rightarrow R.3$  и  $M_4 \rightarrow R.4$ ). После вызова результатов можно вводить новую серию  $x_i$ .

S0	S+5	ENT	$x^2$	S+6	$\times$	S+7	R0	$\times$	S+8
ISG	0	RI	RTN	LBLB	S0	S-5	ENT	$x^2$	S-6
$\times$	S-7	R0	$\times$	S-8	DSE	0	RI	RTN	LBLA
R8	RI	$\div$	S9	R7	RI	$\div$	S.3	R6	RI
$\div$	S.2	R5	RI	$\div$	S.1	R/S	$x^2$	—	S2
R/S	RI	$\times$	RI	1	—	$\div$	R/S	R.1	ENT
$x^2$	2	$\times$	R.2	3	$\times$	—	$\times$	R.3	+
S3	R2	1	.	5	$y^x$	$\div$	R/S	R.2	2
$\times$	R.1	$x^2$	—	R.1	$\times$	3	$\times$	4	$\div$
R.3	—	4	$\times$	R.1	$\times$	R9	+	S4	R2
$x^2$	$\div$	3	—	RTN					

**Программа П2.68.** (5.123). Элементарная статистическая обработка массива чисел  $x_i$  и построение гистограмм при 10 интервалах. Ввод: CLR $\Sigma$  CLRREG,  $a = R6$ ,  $b = R7$  и далее  $x_i = RX$  (при вводе  $x_i$  индицируется номер  $i$ ). Результат: числа попаданий чисел в заданные 10 интервалов заносятся в регистры R.0  $\div$  R.9 (число попаданий  $x_i < a$  заносится в R8, а число попаданий  $x_i > b$  — в регистр R9). Среднее, дисперсия и общее число чисел вычисляются, как при статических расчетах по встроенной микропрограмме.

$\Sigma x$	LST <sub>x</sub>	R6	$x > y$	GTO0	XY	R7	$x \leq y$	GTO1	XY
R6	—	R7	R6	—	$\div$	1	0	$\times$	LST <sub>x</sub>
+	INT	SI	1	S+(i)	LBL2	R0	RTN	LBL0	1
S+8	GTO2	LBL1	1	S+9	GTO2				

Линейная регрессия и корреляционный анализ на микрокалькуляторах HP-11C и HP-15C выполняются по встроенным микропрограммам. Для проведения нелинейной регрессии могут использоваться линеаризирующие преобразования, приведенные в табл. 5.12. При необходимости (см. примеры ниже) могут быть со-

ставлены простые программы для основных видов парной нелинейной регрессии.

**Программа П2.69.** Гиперболическая регрессия. Ввод: CLRΣ и далее  $y_i$  ENT  $x_i$  R/S (индицируется  $i$ ). Вывод результатов (после нажатия клавиш  $f$  и B):  $a \rightarrow RY$ ,  $b \rightarrow RX$ . После этого можно ввести  $x = RX$  и, нажав клавиши  $f$  и C, R/S, вычислить  $y(x)$ . Если пужно вычислить коэффициент корреляции, после вычисления  $a$  и  $b$  надо нажать клавиши  $f$ ,  $\tilde{y}$ ,  $r$  и XY.

1/x Σ+ RTN LBLB L.R S7 XY S8 XY RTN  
 LBLC 1/x R8 × R7 + RTN

**Программа П2.70.** Степенная регрессия. Ввод и вывод результатов см. в программе П2.69.

LOG XY LOG XY Σ+ RTN LBLB L.R 10<sup>x</sup> S7  
 XY S8 XY RTN LBLC R8  $y^x$  R7 × RTN

**Программа П2.71.** Экспоненциальная регрессия. Ввод и вывод результатов см. в программе П2.69.

XY LN XY Σ+ RTN LBLB L.R  $e^x$  S7 XY  
 S8 XY RTN LBLC R8 ×  $e^x$  R7 × RTN

**Программа П2.72.** Показательная регрессия. Ввод и вывод результатов см. в программе П2.69.

XY LOG XY Σ+ RTN LBLB L.R 10<sup>x</sup> S7 XY  
 10<sup>x</sup> S8 XY RTN LBLC R8 XY  $y^x$  R7 ×  
 RTN

**Программа П2.73.** Логарифмическая регрессия. Ввод и вывод результатов см. в программе П2.69.

LOG Σ+ RTN LBLB L.R S0 XY S1 XY RTN  
 LBLC LOG R1 × R0 + RTN

**Программа П2.74.** (5.142). Вычисление коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  параболы регрессии. Ввод: CLRREG  $g$  RTN и далее  $y_i$  ENT  $x_i$  R/S. Вывод результатов (после нажатия клавиш  $f$  и B):  $a_0 \rightarrow R7$ ,  $a_1 \rightarrow R8$  и  $a_2 \rightarrow R9$ . Далее, введя  $x = RX$  и нажав клавиши  $f$  и C, можно найти  $y(x)$ .

S.0 XY S.1 1 S.2 S1 GSB0 R3 S4 5  
 S1 GSB1 R.1 S.2 GSB0 RTN LBLA GSB2 GSB3 GSB4  
 RTN LBL2 R6 R4 ENT GSB5 S6 LBL3 R3 R2  
 GSB6 S3 LBL4 R8 R7 S.0 GSB6 S7 R9 R.0  
 R4 GSB5 S8 R.0 R1 ÷ S9 R5 R4 GSB6  
 S 0 R4 R1 ÷ S5 R2 R1 ÷ S4 R.0  
 S2 R3 S1 R6 S3 RTN LBL6 R2 LBL5 X

R1	÷	—	RTN	LBL0	GSB7	LBL1	GSB7	LBL7	R.2
S+(i)	R.0	×	S.2	1	RI	+	SI	RTN	LBLC
S0	$x^2$	R9	×	R0	R8	×	+	R7	+
RTN									

**Программа П2.75.** (6.1). Вычисление интегральной показательной функции  $Ei(x)$  с заданной погрешностью  $\epsilon$ . Ввод:  $\epsilon = R7$ ,  $x = RX$ .

LBLA	S2	1	S4	0	S3	S5	LBL0	1	S+3
R4	R2	×	R3	÷	S4	R3	÷	S+5	R5
÷	ABS	R7	$x \leq y$	GTO0	R2	ABS	LN	.	5
7	7	2	1	5	6	6	5	+	R5
+	RTN								

**Программа П2.76.** (6.2) Вычисление интегральной показательной функции  $Ei(x)$  разложением в усеченный ряд. Ввод:  $0,577215665 = R0$  и  $x = RX (-3 \leq x \leq 15)$ .

ENT	ABS	S1	2	×	6	+	INT	SI	0
LBL0	LST $x$	×	×	RI	$1/x$	+	DSE	GTO0	×
R1	LN	+	R0	+	RTN				

**Программа П2.77.** (6.4). Вычисление интегральной показательной функции  $E_n(x)$  с заданной погрешностью  $\epsilon$ . Ввод:  $\epsilon = R3$  и  $x = RX$ . Результат (при нажатии клавиши R/S):  $n \rightarrow RX$ ,  $E_n(x) \rightarrow PY$ .

S9	CHS	$e^x$	R9	÷	S0	0	SI	S6	R/S
1	S8	S5	LBL1	ISG	0	RI	S×5	R5	×
R9	CHS	R8	×	S8	XY	÷	S+6	ABS	R3
$x \leq y$	GTO1	R6	CHS	.	5	7	7	2	1
5	6	6	5	—	R9	LN	—	S0	1
SI	LBL2	R/S	ISG	0	R9	CHS	$e^x$	R0	R9
×	—	RI	1	—	÷	S0	RI	GTO2	

**Программа П2.78.** (6.6). Вычисление функции  $\alpha_n(x)$ . Ввод:  $x = RX$ . Вывод результатов:  $n \rightarrow RX$ ,  $\alpha_n(x) \rightarrow RY$ .

S9	CHS	$e^x$	S3	R9	÷	S0	0	SI	LBL0
R/S	ISG	0	RI	R0	×	R8	+	R9	÷
S0	RI	GTO0							

**Программа П2.79.** (6.7). Вычисление функции  $\beta_n(x)$ . Ввод:  $x = RX$ . Вывод результатов:  $n \rightarrow RX$ ,  $\beta_n(x) \rightarrow RY$ .

S9	$e^x$	ENT	$1/x$	—	R9	÷	S0	0	SI
R/S	1	S8	LBL0	ISG	0	RI	R0	×	RI
CHS	$e^x$	—	R9	$e^x$	R8	CHS	S8	×	+
R9	÷	S0	RI	R/S	GTO0				

Программа П2.80. (6.10). Вычисление интегрального синуса  $Si(x)$ . Ввод:  $x = RX$ .

$x^2$	6	LSTx	+	INT	SI	LBL0	RI	ENT	+
÷	LSTx	1	-	1/x	-	LSTx	CHS	×	×
DSE	GTO0	XY	$\sqrt{x}$	÷	RTN				

Программа П2.81. (6.13). Вычисление интегрального косинуса  $Ci(x)$ . Ввод:  $x = RX$ .

S1	2	÷	$x^2$	R1	8	+	INT	SI	LBL0
R1	2	1/x	+	÷	RI	1/x	+	LSTx	CHS
×	×	DSE	GTO0	R1	LN	+	R0	+	RTN

Программа П2.82. (6.19). Вычисление неполной гамма-функции  $\Upsilon(a, x)$ . Ввод:  $x$  ENT  $a$  R/S.

S1	XY	ENT	ENT	+	9	+	INT	SI	LBL0
R1	RI	+	÷	×	1	+	DSE	GTO0	R ↓
R ↓	LN	R1	×	-	$e^x$	÷	R1	÷	RTN

Программа П2.83. (6.62). Вычисление логарифмической производной гамма-функции  $\psi(x)$ . Ввод:  $x = RX$ .

ENT	2	0	$x \leq y$	GTO1	XY	S2	FRAC	2	0
+	S3	GTO2	LBL1	XY	1	+	S2	S3	LBL2
R3	2	×	1/x	S0	$x^2$	3	÷	CHS	R0
-	R3	LN	+	S0	LBL0	1	S-3	R3	1/x
CHS	S+0	R2	R3	$x > y$	GTO0	R0	RTN		

Программа П2.84. (6.23). Вычисление полигамма-функции  $\psi(x)$ . Ввод:  $n$  ENTER  $x$  R/S.

S9	XY	S4	$x1$	1	CHS	ENT	R4	1	+
$y^x$	×	S6	R9	1	0	$x \leq y$	GTO1	XY	S2
FRAC	1	0	+	S3	GTO2	LBL1	XY	1	+
S2	S3	LBL2	R4	R3	÷	S5	R4	1	+
R4	×	6	÷	R3	$x^2$	÷	R5	+	2
+	S5	R3	R4	$y^x$	LSTx	×	1/x	R5	×
2	÷	5	LBL0	1	S-3	R3	R4	1	+
$y^x$	1/x	S+5	R2	R3	$x > y$	GTO0	R6	S×5	R5
RTN									

Программа П2.85. (см. § 6.4). Вычисление функций Бесселя  $I_\nu(x)$  и  $J_\nu(x)$  при любых  $\nu$  и  $N_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$ , при целых  $\nu$ . Ввод:  $\nu = RY$ ,  $x = RX$   $fA$  при вычислении  $J_\nu(x)$ ,  $fB$  при вычислении  $I_\nu(x)$ ,  $fA/fC$  при вычислении  $N_\nu(x)$  и  $fB/fC$  при вычислении  $K_\nu(x)$ .

LBLA	SFO	GTO7	LBLB	CFO	LBL7	S1	XY	S9	GSB8
S7	RTN	LBLC	R9	CHS	GSB8	S4	RAD	R9	$\pi$
×	S6	XY	F70	GTO9	R7	-	$\pi$	×	2

÷	LBLD	R6	SIN	÷	RTN	LBL9	R7	R6	COS
×	XY	—	GTO0	LBL8	S0	R1	2	÷	S2
$x^2$	F70	CHS	S8	1	S3	S6	S4	R0	$x!$
$1/x$	S5	LBL0	R8	S×3	R4	S×6	R3	R6	÷
R0	R4	+	$x!$	÷	1	S+4	XY	R5	+
S5	LSTx	—	$x \neq 0$	GTO0	R5	R2	R0	$y^x$	×
RTN									

Пример: для  $v = 7,5$  и  $x = 10$  получим  $J_{7,5}(10) = 0,286088484$ ,  $N_{7,5}(10) = 0,107249094$ , для  $v = 1/3$  и  $x = 3$   $I_{1/3}(3) = 4,755956940$  и  $K_{1/3}(3) = 0,035305898$ .

**Программа П2.86.** (6.36). Вычисление функций Струве  $H_v(x)$  и  $L_v(x)$ . Ввод: SFO для  $H_v(x)$  или CFO для  $L_v(x)$ ,  $x$  ENT  $v$  R/S.

S5	XY	S0	$x^2$	F70	CHS	S1	1	S2	S3
S4	LBL0	2	S+3	R2	R1	×	R3	÷	2
R5	×	R3	+	÷	S2	S+4	ABS	1	EEX
9	CHS	$x \leq y$	GTO0	R0	2	÷	R5	1	+
$y^x$	2	×	$\pi$	$\sqrt{x}$	÷	R5	.	5	+
$x!$	÷	R4	×	RTN					

**Программа П2.87.** (6.39). Вычисление функций Эйри  $Ai(x)$  и  $Bi(x)$ . Ввод:  $c_1 = 0,35502805 = R.1$ ,  $c_2 = 0,2588194 = R.2$  и далее  $x = R.X$ . Вывод результатов: вспомогательные функции  $f(x) \rightarrow R.Y$  и  $g(x) \rightarrow R.Y$  при нажатии клавиш  $f$  и  $A$  и  $Ai(x)$  при нажатии затем клавиш  $f$  и  $B$  (или  $Bi(x)$  при нажатии затем клавиш  $f$  и  $C$ ).

LBLA	S0	0	S1	1	S2	S5	LBL1	3	S+1
R0	ENT	R1	$y^x$	R1	2	—	R5	×	S5
×	R1	$x!$	÷	S+2	ABS	R3	$x \leq y$	GTO1	R0
S4	1	S5	S1	LBL2	3	S+1	R0	ENT	R1
$y^x$	R1	2	—	R5	×	S5	×	R1	$x!$
÷	S+4	ABS	R3	$x \leq y$	GTO2	R2	R4	RTN	LBLB
R2	R.1	×	R4	R.2	×	—	RTN	LBLC	R2
R.1	×	R4	R.2	×	+	3	$\sqrt{x}$	×	RTN

**Программа П2.88.** (6.41). Вычисление гипергеометрического ряда  $F(a, b, c, x)$ . Ввод:  $g$  RTN  $a$  R/S  $b$  R/S  $c$  R/S  $x$  R/S (при смене  $x$  набирается новое значение  $x$  и нажимается клавиша R/S).

S2	R/S	S3	R/S	S4	R/S	ENT	2	3	SI
LOG	LBL0	RI	1	—	S1	R2	+	×	×
R1	R3	+	×	R1	R4	+	÷	RI	÷
1	+	DSE	GTO0	RTN					

**Программа П2.89.** (6.42). Вычисление вырожденной гипергеометрической функции  $F(a, c, x)$ . Ввод:  $g$  RTN  $a$  R/S  $c$  R/S  $x$  R/S (при смене  $x$  набирается новое значение  $x$  и нажимается клавиша R/S).

S2	R/S	S3	R/S	ENT	2	3	SI	LOG	LBL0
R1	1	—	S1	R2	+	×	×	R1	R3
+	÷	RI	÷	1	+	DSE	GTO0	RTN	

**Программа П2.90.** (6.43). Вычисление дилогарифма. Ввод: погрешность  $\varepsilon = R3$  и  $x = RX$  (при смене  $x$  вводится только новое значение  $x$ ).

1	S8	—	S9	0	SI	S7	LBL0	ISG	0
R9	CHS	S×8	R8	RI	$x^2$	÷	S+7	R3	$x \leq y$
GTO0	R7	RTN							

**Программа П2.91.** (6.44 и 6.45). Вычисление интегралов Френеля  $C(x)$  и  $S(x)$ . Ввод: CFO при вычислении  $C(x)$ , SFO при вычислении  $S(x)$  и далее  $x = RX$ .

$x^2$	LSTx	6	+	INT	SI	LBL0	RI	ENT	+
÷	1	F?0	CHS	LSTx	—	÷	×	RI	4
×	2	—	1	F?0	CHS	—	1/x	+	DSE
GTO0	XY	$\sqrt{x}$	LN	2	ENT	1	F?0	CHS	—
×	$e^x$	2	×	$\pi$	÷	$\sqrt{x}$	×	RTN	

**Программа П2.92.** (6.48). Вычисление эллиптического интеграла первого рода  $K(m)$ . Ввод: погрешность  $\varepsilon = R3$  и далее  $m = RX$ .

S9	0	S5	1	S4	S6	S8	LBL0	2	S+5
R4	R5	÷	$x^2$	R9	×	S×6	2	S+4	R6
S+3	R3	$x \leq y$	GTO0	R8	$\pi$	×	2	÷	RTN

**Программа П2.93.** (6.49). Вычисление полного эллиптического интеграла второго рода  $E(m)$ . Ввод: погрешность  $\varepsilon = R3$  и далее  $m = RX$ .

S9	0	S5	S8	1	S4	S6	LBL0	2	S+5
R4	R5	÷	$x^2$	R9	×	S×6	R6	R4	÷
S7	2	S+4	R7	S+8	R3	$x \leq y$	GTO0	1	R8
—	$\pi$	×	2	÷	RTN				

**Программа П2.94.** (6.50). Вычисление функций  $\Phi(y)$  и  $\operatorname{erf}(x)$ . Ввод: погрешность  $\varepsilon = R3$  и  $y$  или  $x = RX$ . Вывод результата:  $\Phi(y) \rightarrow RX$  при нажатии клавиш  $f$  и  $A$ ,  $\operatorname{erf}(x) \rightarrow RX$  при нажатии клавиш  $f$  и  $B$ .

LBLA	S9	$x^2$	2	CHS	÷	S6	2	$\pi$	÷
$\sqrt{x}$	R9	×	S7	S8	0	S4	LBL0	1	S+4
R4	2	×	1	+	S5	R4	2	×	1
—	R6	×	R4	÷	R5	÷	S×7	R7	S+8
ABS	R3	$x \leq y$	GTO0	R8	RTN	LBLB	2	$\sqrt{x}$	×
GTOA									

**Программа П2.95. (6.58).** Вычисление функций  $\psi(x)$ ,  $\Pi(x)$ ,  $Q(x)$  и  $A(x)$ . Ввод  $x = RX$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш  $g A$  и далее  $R/S$ ):  $\psi(x) \rightarrow RX = R7$ ,  $\Pi(x) \rightarrow RX = R6$ ,  $Q(x) \rightarrow RX = R8$  и  $A(x) \rightarrow RX = R0$ .

S7	R9	×	1	+	1/x	S8	R7	$x^2$	2
CHS	÷	$e^x$	2	$\pi$	×	$\sqrt{x}$	÷	S7	R/S
4	SI	R5	LBL0	R8	×	R(i)	+	DSE	GTO0
R8	×	R7	CHS	×	1	+	S6	R/S	1
R6	—	S8	R/S	R6	2	×	1	—	S0
RTN	LBLA	.	2	3	1	6	4	1	9
S9	.	3	1	9	3	8	1	5	3
S1	.	3	5	6	5	6	3	7	8
CHS	S2	1	.	7	8	1	4	7	7
9	S3	1	.	8	2	1	2	5	6
CHS	S4	1	.	3	3	0	2	7	4
4	S5	0	RTN						

**Программа П2.96. (6.60).** Вычисление функций  $\psi(x) = P(x)$  и  $\Pi(x)$  для гауссовского стандартного распределения вероятностей. Ввод:  $c_1 = 0,049867347 = R1$ ,  $c_2 = 0,021141006 = R2$ ,  $c_3 = 0,0032776626 = R3$ ,  $c_4 = 0,000038004 = R4$ ,  $c_5 = 0,000048891 = R5$ ,  $c_5 = 0,000005383 = R5$  и далее  $x = RX$ . Вывод результатов (после нажатия клавиш  $g$ ,  $RTN$  и  $R/S$ ):  $\psi(x) \rightarrow RX$  и (после нажатия клавиши  $R/S$  еще раз)  $\Pi(x) \rightarrow PX$ .

S9	ABS	S0	$x^2$	2	CHS	÷	$e^x$	$\pi$	2
×	$\sqrt{x}$	÷	S8	R/S	5	SI	R6	LBL0	R0
×	R(i)	+	DSE	GTO0	R9	×	1	+	1
6	CHS	$y^x$	2	÷	1	XY	—	R9	$x < 0$
GTO1	XY	RTN	LBL1	XY	1	XY	—	RTN	

**Программа П2.97. (6.61).** Вычисление  $P(x)$  и  $F(x)$  для нормального (гауссовского) распределения вероятностей с заданной дисперсией  $\sigma$ . Ввод:  $c_1 \div c_6 = R1 \div R6$  (см. в программе П2.96),  $m = R.1$ ,  $\sigma = R.0$  и  $x = RX$ .

R.1	—	R.0	÷	S9	ABS	S0	$x^2$	2	CHS
÷	$e^x$	$\pi$	2	×	$\sqrt{x}$	÷	R.0	÷	R/S
5	SI	R6	LBL0	R0	×	R(i)	+	DSE	GTO0
R0	×	1	+	1	6	CHS	$y^x$	2	÷
1	XY	—	R9	$x < 0$	GTO0	XY	RTN	LBL1	XY
1	XY	—	RTN						

**Программа П2.98. (6.62).** Вычисление  $P(x)$  и  $F(x)$  для логарифмического гауссовского распределения. Ввод:  $c_1 \div c_6 = R \div R6$  (см. программу П2.96),  $m = R.0$ ,  $\sigma = R.1$  и  $x = RX$ .

S9	LOG	R.0	—	R.1	÷	S0	ABS	S8	$x^2$
2	CHS	÷	$e^x$	1	$e^x$	LOG	×	R9	÷
R.1	÷	$\pi$	2	×	$\sqrt{x}$	÷	R/S	5	SI
R6	LBL0	R3	×	R(t)	+	DSE	GTO0	R8	×
1	+	1	6	CHS	$y^x$	2	÷	1	XY
—	RO	$x < 0$	GTO1	XY	RTN	LBL1	XY	1	XY
—	RTN								

**Программа П2.99 (6.63).** Вычисление  $P(x)$  и  $F(x)$  для распределения модуля гауссовской случайной величины. Ввод:  $c_1 \div c_6 = R1 \div R6$  (см. программу П2.96),  $m = R.0$ ,  $\sigma = R.1$  и  $x = RX$ .

S9	R.0	—	R.1	÷	S7	R9	R.0	+	R.1
÷	S.2	$x^2$	2	÷	CHS	$e^x$	R7	$x^2$	2
÷	CHS	$e^x$	+	R.1	÷	$\pi$	2	×	$\sqrt{x}$
÷	R/S	R7	ABS	GSB0	R7	$x < 0$	GTO1	XY	GTO2
LBL1	XY	1	XY	—	LBL2	S.3	R.2	GSB0	R.3
+	1	—	RTN	LBL0	S8	5	SI	R6	LBL3
R8	×	R(t)	+	DSE	GTO3	R8	×	1	+
1	6	CHS	$y^x$	2	÷	1	XY	—	RTN

**Программа П2.100 (6.64).** Вычисление  $P(x)$  и  $F(x)$  для распределения Лапласа. Ввод:  $\mu = R0$ ,  $\lambda = R1$  и  $x = RX$ .

S2	R0	—	ABS	R1	×	CHS	$e^x$	2	÷
S3	R1	×	R/S	R2	R0	$x \leq y$	GTO1	R3	RTN
LBL1	1	R3	—	RTN	RTN				

**Программа П2.101. (6.68).** Вычисление  $P(x)$  для гамма-распределения. Ввод:  $\alpha = R0$ ,  $\beta = R1$  и  $x = RX$ .

S2	ENT	R0	$y^x$	R2	R1	÷	CHS	$e^x$	×
R1	R0	1	+	$y^x$	÷	R0	$x!$	÷	RTN

**Программа П2.102. (6.69).** Вычисление  $P(x)$  для  $\chi$ -распределения. Ввод:  $N = R0$  и  $x = RX$ .

S1	ENT	R0	1	—	$y^x$	R1	$x^2$	2	÷
CHS	$e^x$	×	2	÷	1	—	S2	$y^x$	÷
R2	$x!$	÷	RTN						

**Программа П2.103. (6.70).** Вычисление  $P(x)$  для  $\chi^2$ -распределения. Ввод:  $N = R0$  и  $x = RX$ .

S1	ENT	R0	2	÷	S2	1	—	$y^x$	R1
2	÷	CHS	$e^x$	×	2	R2	$y^x$	÷	R2
1	—	$x!$	÷	RTN					

### Приложение 3

#### БИБЛИОТЕКА ВНЕШНИХ ПРОГРАММ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ TI-58C/59

Контрольные примеры (если они не даны) см. в соответствующих программах для калькулятора «Электроника БЗ-34».

**Программа ПЗ.1.** Вычисление значений многочлена Чебышева 1-го рода. Ввод:  $n = R01$ ,  $x = RX$ .

INV cos  $\times$  RCL 01 = cos R/S RST

**Программа ПЗ.2.** Вычисление значений многочлена Чебышева 2-го рода. Ввод:  $n = R01$ ,  $x = RX$ .

INV cos STO 00  $\times$  ( RCL 01 + 1  
) = sin  $\div$  RCL 00 sin = R/S RST

**Программа ПЗ.3.** Вычисление значений многочлена Эрмита. Ввод:  $i = (n - 1) = BX$ ,  $x = RX$ .

STO 01 R/S STO 04  $\times$  2 = STO 03  
1 STO 02 STO 05 RCL 05  $\times$  RCL 02  
+/- + RCL 04  $\times$  RCL 03 STO 02 =  
 $\times$  2 = STO 03 Op 25 Dsz 1 0  
15 R/S RST

**Программа ПЗ.4.** Вычисление значений многочлена Лагерра. Ввод:  $i = (n - 1) = RX$ ,  $x = RX$ .

STO 01 R/S STO 07 +/- + 1 STO 08  
STO 06 = STO 09 RCL 06  $\times$  RCL 08  
+/- + ( RCL 06  $\times$  2 + 1 -  
RCL 07 )  $\times$  RCL 09 STO 08 =  $\div$   
Op 26 RCL 06 = STO 09 Dsz 1 0  
15 R/S RST

**Программа ПЗ.5.** Вычисление значений многочлена Лежандра. Ввод:  $i = (n - 1) = RX$ ,  $x = RX$ .

STO 01 R/S STO 07 STO 09 1 STO 08  
STO 06 RCL 06 +/-  $\times$  RCL 08 + (  
RCL 06  $\times$  2 + 1 )  $\times$  RCL 07  
 $\times$  RCL 09 STO 08 =  $\div$  Op 26 RCL  
06 = STO 09 Dsz 1 0 12 R/S RST

**Программа ПЗ.6.** Вычисление гиперболических функций действительного переменного  $x = RX$ .

a) sh  $x$  (sh 1 = 1,1755201194):

INV ln  $x$  -  $1/x$  =  $\div$  2 = R/S RST

б) ch  $x$  (ch 1 = 1,543080635):

INV ln  $x$  +  $1/x$  =  $\div$  2 = R/S RST

в) th  $\tau$  (th 1 = 0,761594156):

$$\begin{array}{l} \text{INV } \ln x \quad x^2 \quad + \quad 1 \quad = \quad \div \quad 2 \quad = \quad 1/x \\ +/\text{---} + \quad 1 \quad = \quad \text{R/S} \quad \text{RST} \end{array}$$

г) Для вычисления  $\text{cth } x$  перед оператором R/S п. в) следует оператор  $1/x$ .

**Программа П3.7.** Вычисление обратных гиперболических функций действительного переменного  $x = \text{RX}$ .

а)  $\text{arsh } x$  ( $\text{arsh } 1 = 0,881373587$ ):

$$\begin{array}{l} + \quad ( \quad x^2 \quad + \quad 1 \quad ) \quad \sqrt{x} \quad = \quad \ln x \quad \text{R/S} \\ \text{RST} \end{array}$$

б)  $\text{arch } x$  ( $\text{arch } 2 = 1,316957897$ ) — вычисляется при замене знака + по адресу 003 на знак —.

в)  $\text{arth } x$  ( $\text{arth } 0,5 = 0,5493061443$ ):

$$\begin{array}{l} 1/x \quad - \quad 1 \quad = \quad \div \quad 2 \quad = \quad 1/x \quad + \quad 1 \\ = \quad \sqrt{x} \quad \ln x \quad \text{R/S} \quad \text{RST} \end{array}$$

г)  $\text{arcth } x$  ( $\text{arcth } 2 = 0,5493061443$ ):

$$\begin{array}{l} - \quad 1 \quad = \quad \div \quad 2 \quad = \quad 1/x \quad + \quad 1 \quad = \\ \sqrt{x} \quad \ln x \quad \text{R/S} \quad \text{RST} \end{array}$$

**Программа П3.8.** Вычисление гиперболических функций комплексного переменного  $z = a + ib$ . Ввод:  $a = \text{RX}$ ,  $b = \text{RX}$ . Ввод результата  $f(z) = c + id$ :  $c \rightarrow \text{RX}$ ,  $d \rightarrow \text{RX}$ .

а)  $\text{sh } z = \text{sh}(3 + i2) = -4,16890697 + i9,154499147$ :

$$\begin{array}{l} \text{STO } 02 \quad \text{R/S} \quad +/\text{---} \quad \text{STO } 01 \quad \text{Pgm } 06 \quad \text{B} \quad x \rightleftharpoons t \\ \text{R/S} \quad x \rightleftharpoons t \quad +/\text{---} \quad \text{R/S} \quad \text{RST} \end{array}$$

б)  $\text{ch } z = \text{ch}(3 + i2) = -4,189625681 + i9,109227894$ :

$$\begin{array}{l} \text{STO } 02 \quad \text{R/S} \quad +/\text{---} \quad \text{STO } 01 \quad \text{Pgm } 06 \quad \text{C} \quad \text{R/S} \\ x \rightleftharpoons t \quad \text{R/S} \quad \text{RST} \end{array}$$

в)  $\text{th } z = \text{th}(3 + i2) = 1,003238627 - i0,0037640256$ :

$$\begin{array}{l} \text{STO } 02 \quad \text{R/S} \quad +/\text{---} \quad \text{STO } 01 \quad \text{Pgm } 06 \quad \text{D} \quad x \rightleftharpoons t \\ \text{R/S} \quad x \rightleftharpoons t \quad +/\text{---} \quad \text{R/S} \quad \text{RST} \end{array}$$

**Программа П3.9.** Вычисление обратных гиперболических функций комплексного переменного  $z = a + ib$ . Ввод и вывод см. в программе П4.8.

а)  $\text{arsh } z = \text{arsh}(3 + i2) = 1,98338703 + 0,5706527843i$ :

$$\begin{array}{l} \text{STO } 02 \quad \text{R/S} \quad +/\text{---} \quad \text{STO } 01 \quad \text{Pgm } 06 \quad \text{B}' \quad x \rightleftharpoons t \\ \text{R/S} \quad x \rightleftharpoons t \quad +/\text{---} \quad \text{R/S} \quad \text{RST} \end{array}$$

б)  $\text{arch } z = \text{arch}(3 + i2) = \pm 1,968637926 \pm i0,6061378224i$ :

$$\begin{array}{l} \text{STO } 01 \quad \text{R/S} \quad \text{STO } 02 \quad \text{Pgm } 06 \quad \text{C}' \quad x \rightleftharpoons t \quad \text{R/S} \\ x \rightleftharpoons t \quad \text{R/S} \quad \text{RST} \end{array}$$

в)  $\text{arth } x = \text{arth } (0,3 + i0,2) = 0,2957499202 + i0,2154744937$ :

STO 02 R/S +/- STO 01 Pgm 06 D'  $x \rightleftharpoons t$   
 R/S  $x \rightleftharpoons t$  +/- R/S RST

**Программа ПЗ.10.** Интерполяция по формуле Лагранжа для трех точек. Ввод:  $y_{-1}, y_0, y_{+1}, h, x_0$  и  $x$  в регистр X.

STO 00 R/S STO 01 R/S STO 02 R/S STO  
 03 R/S STO 04 R/S — RCL 04 = ÷  
 RCL 03 = STO 05 × ( RCL 05 —  
 1 ) × RCL 00 ÷ 2 + ( 1  
 — RCL 05  $x^2$  ) × RCL 01 + RCL  
 05 × ( RCL 05 + 1 ) × RCL  
 02 ÷ 2 = GTO 0 14

**Программа ПЗ.11.** Интерполяция по формуле Лагранжа для пяти точек. Ввод:  $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2}, h, x_0$  и  $x$  в регистр X.

CMS 7 STO 00 R/S STOInd 0 Dsz 0 0  
 04 0 R/S — RCL 01 = ÷ RCL 02  
 = STO 08 ( RCL 08  $x^2$  — 1 )  
 STO 09 × RCL 08 × ( RCL 08 —  
 2 ) × RCL 07 ÷ 2 4 — ( )  
 RCL 08 — 1 ) × RCL 08 × ( )  
 RCL 08  $x^2$  — 4 ) STO 10 × RCL  
 06 ÷ 6 + RCL 09 × RCL 10 ×  
 RCL 05 ÷ 4 — ( RCL 08 + 1  
 ) × RCL 08 × RCL 10 × RCL 04  
 ÷ 6 + RCL 09 × RCL 08 × ( )  
 RCL 08 + 2 ) × RCL 03 ÷ 2  
 4 = GTO 0 12

**Программа ПЗ.12.** Вычисление корней нелинейного уравнения  $F(x) = 0$  методом подекадного приближения. Ввод: данные  $F(x)$ ,  $x_0 = R00, \Delta x_1 = R01, \varepsilon = R02$ .

CP RCL 01 SUM 00 SBR A ÷ RCL 01  
 =  $x \geq t$  0 00 1 0 +/- INV Prd 01  
 RCL 02  $x \rightleftharpoons t$  RCL 01 /x/  $x \geq t$  0 00 RCL  
 00 R/S Lbl A . . . . . INV SBR

**Программа ПЗ.13.** Вычисление корней нелинейного уравнения  $F(x) = 0$  комбинированным методом секущих — хорд. Ввод: данные  $F(x)$ ,  $x_0 = R00, \Delta x_1 = R01, \varepsilon = R02, R03$  запят.

RCL 00 SBR A  $x \rightleftharpoons t$  RCL 01 SBR A STO  
 03 RCL 01 — RCL 03 × ( RCL 01  
 — RCL 00 ) ÷ ( RCL 03 —  $x \rightleftharpoons t$   
 ) =  $x \rightleftharpoons t$  RCL 01 STO 00  $x \rightleftharpoons t$  STO 01  
 — RCL 00 = /x/  $x \rightleftharpoons t$  RCL 02 INV  $x \geq t$   
 0 00 RCL 01 R/S Lbl A . . . . . INV SBR

**Программа ПЗ.14.** Численное дифференцирование таблично заданной функции при трех точках. Ввод:  $f_{-1}$ ,  $f_0$ ,  $f_{+1}$ ,  $h$ ,  $x_0$  и  $x$  в регистр X.

STO	00	R/S	STO	01	R/S	STO	02	R/S	STO
03	R/S	STO	04	R/S	—	RCL	04	=	÷
RCL	03	=	STO	05	)	RCL	05	=	.
5	)	×	RCL	00	—	2	×	RCL	05
×	RCL	01	+	(	RCL	05	+	.	5
)	×	RCL	02	=	÷	RCL	03	=	GTO
0	14								

**Программа ПЗ.15.** Численное дифференцирование таблично заданной функции при пяти точках. Ввод:  $f_{-2}$ ,  $f_{-1}$ ,  $f_0$ ,  $f_{+1}$ ,  $f_{+2}$ ,  $h$ ,  $x_0$  и  $x$  в регистр X. Перед вводом нажать клавиши RST и R/S (высвечивается число 7).

7	STO	00	R/S	STOInd	0	Dsz	0	0	03
0	R/S	—	RCL	01	=	÷	RCL	02	=
STO	08	$x^2$	×	3	=	STO	10	RCL	08
$x^2$	×	RCL	08	×	2	=	STO	09	(
RCL	09	—	RCL	10	—	RCL	08	+	1
)	×	RCL	07	÷	1	2	—	(	2
×	RCL	09	—	RCL	10	—	8	×	RCL
08	+	4	)	×	RCL	06	÷	6	+
(	RCL	09	—	5	×	RCL	08	)	×
RCL	05	÷	2	—	(	2	×	RCL	09
+	RCL	10	—	8	×	RCL	08	—	4
)	×	RCL	04	÷	6	+	(	RCL	09
+	RCL	10	—	RCL	08	—	1	)	×
RCL	03	÷	1	2	=	÷	RCL	02	=
GTO	0	11							

**Программа ПЗ.16.** Вычисление частных производных и относительных коэффициентов неустойчивости по трем ординатам функции  $f(x_i)$ . Ввод: данные  $f(x)$ ,  $\Delta x_i/x_i \rightarrow R01$ , коды  $x_i$  (в виде номеров регистров, отведенных под переменные  $x_i$ ). Вывод результатов:  $s_i \rightarrow RX$ ,  $\partial f/\partial x_i \rightarrow R04$ ,  $f(x_{i0}) \rightarrow R05$ , регистры R00 ÷ R05 заняты.

STO	00	RCLInd	00	STO
02	×	RCL	01	+
STO	03	RCL	02	=
STOInd	00	SBR	A	STO
04	RCL	02	—	RCL
03	=	STOInd	00	SBR
A	INV	SUM	04	RCL
02	STOInd	00	SBR	A

STO	05	RCL	04	÷
2	÷	RCL	03	×
STO	04	RCL	02	÷
RCL	05	=	R/S	RST
Lbl	A	...	...	...
...	...	...	...	INVSBR

**Программа П3.17.** Вычисление частных производных и относительных коэффициентов неустойчивости по пяти ординатам функции  $f(x_i)$ . Ввод и вывод результатов см. в описании программы П4.16.

STO 00	RCLInd 00	STO 02	—	RCL 01	×
RCL 02	×	STO 03	2	SBR B	STO 04
RCL 02	—	RCL 03	SBR B	×	8 =
INV SUM	04	RCL 02	+	RCL 03	SBR B
×	8 =	SUM 04	RCL 02	+	2 ×
RCL 03	SBR B	INV SUM	04	RCL 02	SBR
B	STO 05	RCL 04	÷	1	2 ÷ RCL
03 =	STO 04	×	RCL 02	+	RCL 05
=	R/S RST	Lbl B	=	STOInd 00	... INVSBR

**Программа П3.18.** Численное интегрирование методом Гаусса ( $n = 3$ ). Ввод: данные  $f(x)$ ,  $b$ ,  $a$  и  $m$  в регистр X. Заняты регистры R00 ÷ R07. Подпрограмма вычисления  $f(x)$  должна начинаться со знака равенства = и заканчиваться операторами × INV SBR (см. конец программы). Текущее значение  $x$  получается после выполнения первого оператора = подпрограммы.

CMS	—	R/S	STO 01	=	÷	R/S	STO 00
=	SUM 07	.	6	$\sqrt{x}$	STO 03	Lbl B	
RCL 01	+	RCL 07	—	STO 02	RCL 01		
=	÷	2	+	STO 04	RCL 01	—	STO
05	(	RCL 04	×	RCL 03	)	SBR A	
5	=	SUM 06	RCL 05	SBR A	8	=	
SUM 06	RCL 04	×	RCL 03	+	RCL 05		
SBR A	5	=	SUM 06	RCL 02	STO 01		
Dsz 0	B	RCL 06	×	RCL 04	÷	9	
=	R/S	Lbl A	=	...	...	...	×
							INVSBR

**Программа П3.19.** Решение дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге — Кутты. Ввод: данные  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow R00$  и  $y$  заносим в начало подпрограммы (после знака =),  $x_0 = R00$ ,  $h/2 = R03$  и  $y_0 = RX$ . Заняты регистры R00 ÷ R04.

STO	01	STO	02	SBR
SBR	STO	04	RCL	03
SUM	00	RCL	04	SBR

E	SUM	04	SBR	E
SUM	04	$x \neq t$	RCL	03
SUM	00	$x \neq t$	X	2
SBR	E	RCL	04	X
RCL	03	÷	3	+
RCL	01	=	R/S	RST
Lbl	E	X	RCL	03
+	RCL	02	SBR	SBR
SUM	04	INVSBR	Lbl	SBR
=	...	...	...	...
...	...	...	=	INVSBR

**Программа ПЗ.20.** Гармонический анализ методом 5 ординат (§ 5.11). Ввод:  $y_1 + y_5 = R01 + R05$ . Вывод результатов:  $y_0 \rightarrow R10$ ,  $y_{m_1} \rightarrow R11$ ,  $y_{m_2} \rightarrow R12$ ,  $y_{m_3} \rightarrow R13$ ,  $y_{m_4} \rightarrow R14$ ,  $K_p \rightarrow RX$ ,

RCL 05	+	RCL 01	+	2	X	(	RCL
04	+	RCL 02	)	=	÷	6	= STO
10	RCL 05	-	RCL 01	+	RCL 04	-	
RCL 02	=	÷	3	=	STO 11	RCL 05	
+	RCL 01	-	2	X	RCL 03	=	÷
4	=	STO 12	RCL 11	-	RCL 04	+	
RCL 02	=	÷	2	=	STO 13	RCL 12	
-	RCL 10	+	RCL 03	=	STO 14	$x^2$	
+	RCL 13	$x^2$	+	RCL 12	$x^2$	=	$\sqrt{x}$
÷	RCL 11	=	R/S				

**Программа ПЗ.21.** Расчет  $S(f)$  и  $\varphi(f)$  — см. § 5.11. Ввод: 4 2nd Op17 N и затем  $y_1, y_2, \dots, y_N$  (при вводе отсчетов индицируется их текущий номер)  $\Delta t$  и  $f(N \leq 32)$

CMS	+	1	STO 0	=	STO 33	$x \neq t$	RCL
0	R/S	STOInd 00	Op 20	RCL 0	INV	$x=t$	
0	11	0	R/S STO 39	R/S STO 37	Rad	sin	X
RCL 39	=	X $\pi$	=	STO 36	0	STO 35	STO
÷	RCL 37	=	STO 38	sin X	RCLInd 00	=	X
34	1	STO 00	RCL 00	X	2	=	X
RCL 37	=	STO 38	cos X	RCLInd 00	=	SUM	
SUM 34	Op 20	RCL 00	INV	$x=t$	0	54	RCL
36	Prd 35	Prd 34	Deg	RCL 34	$x \neq t$	RCL	
35	INV P→R	+/-	INV Eng	R/S	$x \neq t$	X	RCL
39	=	STO 37	RCL 33	$x \neq t$	RCL 37	Eng	
GTO 0	26						

**Программа ПЗ.22.** Расчет амплитудно- и фазочастотной характеристики по переходной. Ввод: 4 2nd Op 17 в далее N,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N, \Delta t$  и  $f(N \leq 32)$

CMS	+	1	STO	00
=	STO	32	$x \leftrightarrow t$	RCL
00	R/S	STO	39	—
RCL	38	=	STOInd	00
RCL	39	STO	38	Op
20	RCL	0	INV	$x \leftrightarrow t$
0	11	0	R/S	STO
39	R/S	STO	38	×
RCL	39	=	×	$\pi$
=	STO	37	Rad	sin
÷	RCL	37	=	STO
36	0	STO	35	STO
34	1	STO	00	RCL
00	×	2	=	—
1	=	×	RCL	37
=	STO	33	sin	×
RCLInd	00	=	SUM	35
RCL	33	cos	×	RCLInd
0	=	SUM	34	Op
20	RCL	00	INV	$x=t$
0	64	RCL	36	Prd
35	Prd	34	Deg	RCL
34	$x \leftrightarrow t$	RCL	35	INV
P→R	+/-	R/S	$x \leftrightarrow t$	STO
31	RCL	32	$x \leftrightarrow t$	RCL
31	GTO	0	36	

**Программа ПЗ.23.** Статистическая обработка. Ввод (после нажатия клавиши RST)  $x_i = RX$ . Вывод результатов (после нажатия клавиши A):  $\bar{x}$ ,  $D$ ,  $D_0$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $U_3$  и  $U_4$  ( $m_1 \div m_4 \rightarrow R01 \div R04$ ,  $N \rightarrow R00$ ,  $M_2 \rightarrow R12$ ,  $M_3 \rightarrow R13$ ,  $M_4 \rightarrow R14$ ,  $D_0 \rightarrow R15$ ,  $A \rightarrow R16$ ,  $E \rightarrow R17$ ,  $U_3 \rightarrow R18$ ,  $U_4 \rightarrow R19$ ).

CMS	Lbl	B	STO	09	SUM	05	$x^2$	SUM	06
$x^2$	SUM	08	÷	RCL	09	=	SUM	07	Op
20	RCL	09	R/S	GTO	B	Lbl	A	RCL	05
÷	RCL	00	=	STO	01	R/S	RCL	06	÷
RCL	00	=	STO	02	RCL	07	÷	RCL	00
=	STO	03	RCL	08	÷	RCL	00	=	STO
04	RCL	02	—	RCL	01	$x^2$	=	STO	12
R/S	×	RCL	00	÷	(	RCL	00	—	1
)	=	STO	15	R/S	RCL	03	—	3	×
RCL	01	×	RCL	02	+	2	×	RCL	01
$y^x$	3	=	STO	13	÷	RCL	12	$y^x$	(
3	÷	2	)	=	STO	16	R/S	RCL	04
—	4	×	RCL	01	×	RCL	03	+	6

×	RCL 01	$x^2$	×	RCL 02	—	3	×
RCL 01	$x^2$	$x^2$	=	STO 14	÷	RCL 12	
$x^2$	—	3	=	STO 17	R/S	6	×
RCL 00	—	1	)	÷	(	RCL 00	+
1	)	÷	(	RCL 06	+	3	)
$\sqrt{x}$	STO 18	R/S	2	4	×	RCL 00	×
(	RCL 00	—	2	)	×	(	RCL 00
—	3	)	÷	(	RCL 00	—	1
$x^2$	÷	(	RCL 00	+	3	)	÷
RCL 00	+	5	)	=	$\sqrt{x}$	STO 19	R/S

**Примечание.** После вычисления статистических характеристик массива партии чисел  $x_i$  можно вернуться к вводу новой партии чисел, набрав ее первое число и нажав клавишу В.

**Программа ПЗ.24.** Генерация случайных чисел с повышенной сходимостью (в 3—4 выше, чем по программе МЛ-15).

1. Для чисел с равномерным распределением в интервале  $[0, 1]$ . Ввод:  $V_0 = RX < 1$ .

× 1 1 + π = INV Int R/S RST

**Пример.** Для  $V_0 = 0,123456789$ , нажимая клавишу R/S, будем получать  $V_1 = 0,4996173326$ ;  $V_2 = 0,6373833121$ ;  $V_3 = 0,1528090865$ ;  $V_4 = 0,8224926048$ ;  $V_5 = 0,189011306$  и т. д. (время генерации одного числа менее 1 с).

2. Для чисел с равномерным распределением в интервале  $[a, b]$ . Ввод:  $V_0 = R01 < 1$ ,  $a = R02$  и  $b = R03$ .

RCL 01 × 3 7 = INV Int STO 01  
 × ( RCL 03 — RCL 02 ) + RCL  
 02 = R/S RST

**Пример.** Для  $V_0 = 0,123456789$ ;  $a = 1$  и  $b = 2$  получим  $X_1 = 1,567901193$ ;  $X_2 = 1,012344141$ ;  $X_3 = 1,456733217$ ;  $X_4 = 1,899129029$  и т. д. (время выдачи одного числа 1,5 с).

3. Для чисел с нормальным распределением Ввод:  $V_0 = R01 < 1$ ,  $\sigma = R02$  и  $\bar{R} = R03$ . Перед пуском нажать клавиши 2nd и Rad.

RCL 01 × 3 7 = INV Int  $\pi \pm 1$  RCL  
 01 × 2 × π = sin × (  $\pi \pm 1$   
 STO 01  $1/x$  ln  $x$  × 2 )  $\sqrt{x}$  × RCL  
 02 + RCL 03 = R/S RST

**Пример.** Для  $V_0 = 0,1234567$ ;  $\sigma = 0,1$  и  $\bar{R} = 1$  получим, нажимая клавишу R/S  $R_0 = 1,074487657$ ;  $R_2 = 0,87778690012$ ;  $R_3 =$

= 1,00966529;  $R_4 = 1,023339944$ ;  $R_5 = 0,7849199467$  и т. д. (время выдачи одного числа 2 с).

**Программа ПЗ.25 \*).** Вычисление коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  приближения гиперболической функцией  $y = b_0 + b_1/x$ . Ввод (после нажатия клавиш RST и R/S):  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N$  в регистр X (после ввода каждой пары  $x_i, y_i$  высвечивается номер  $i$ ). Вывод результатов после нажатия клавиши A  $b_0$ , после нажатия клавиши  $x \rightleftharpoons t$   $b_1$ . Для вычисления  $y(x)$  набираем  $x = RX$ , нажимаем клавишу B и т. д.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	1/x	$x \rightleftharpoons t$	CLR
R/S	$\Sigma +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	R/S	Lbl
B	1/x	Op	14	R/S					

**Программа ПЗ.26.** Вычисление коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  приближения степенной функцией  $y = b_0 x^{b_1}$ . Ввод и вывод результатов см. в программе П4.25.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	log	$x \rightleftharpoons t$	CLR
R/S	log	$\Sigma +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	INV
log	$x \rightleftharpoons t$	$x \rightleftharpoons t$	R/S	Lbl	B	log	Op	14	INV
log	R/S								

**Программа ПЗ.27.** Вычисление коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  приближения показательной функцией  $y = b_0 b_1^x$ . Ввод и вывод результатов см. в программе П4.25.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	$x \rightleftharpoons t$	CLR	R/S
log	$\Sigma +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	INV	log
$x \rightleftharpoons t$	INV	log	$x \rightleftharpoons t$	R/S	Lbl	B	Op	14	INV
log	R/S								

**Программа ПЗ.28.** Вычисление коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  приближения экспоненциальной функцией  $y = b_0 \exp(b_1 x)$ . Ввод и вывод результатов см. в программе П4.25.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	$x \rightleftharpoons t$	CLR	R/S
ln x	$\Sigma +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	INV	ln x
$x \rightleftharpoons t$	$x \rightleftharpoons t$	R/S	Lbl	B	Op	14	INV	ln x	R/S

**Программа ПЗ.29.** Вычисление коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  приближения логарифмической функцией  $y = b_0 + b_1 \log x$ . Ввод и вывод результатов см. в программе П4.25.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	log	$x \rightleftharpoons t$	CLR
R/S	$\Sigma +$	STO	R/S	Lbl	A	Op	12	R/S	Lbl
B	log	Op	14	R/S					

\*) В программах П4.25 ÷ П4.29 приближение нелинейной функцией осуществляется с помощью линеаризирующих преобразований [14] и линейной регрессии, выполняемой оператором Op 12 и программой ML-1.

**Программа ПЗ.30.** Вычисление коэффициентов  $a$  и  $b$  приближения показательной функцией  $y = 10^{(a+bx)}$ . Ввод (после нажатия клавиш BST и R/S):  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N$  в регистр X. Для получения  $a$  нажать клавишу A, для получения  $b$  нажать клавишу R/S.

CMS	Lbl	E	STO	09	SUM	08	×	R/S	STO
02	log	SUM	06	=	SUM	03	RCL	09	$x^2$
SUM	05	Op	20	RCL	02	R/S	GTO	E	Lbl
A	RCL	00	×	RCL	05	—	RCL	08	$x^2$
=	STO	07	RCL	06	×	RCL	05	—	RCL
03	×	RCL	08	=	STO	10	RCL	03	×
RCL	00	—	RCL	06	×	RCL	08	=	STO
11	RCL	10	÷	RCL	07	=	R/S	RCL	11
÷	RCL	07	=	R/S					

**Программа ПЗ.31.** Вычисление коэффициентов  $b_0, b_1$  и  $b_2$  приближения параболической функцией  $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$ . Ввод: 2nd CMS и далее  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N$  в регистр X. Вывод результатов: нажав клавиши 2nd E' получим  $b_0$ , нажав клавишу R/S дважды получим  $b_1$  и  $b_2$ .

STO	24	SUM	09	SUM	11	$x^2$	SUM	10	SUM
12	SUM	14	$x^2$	SUM	16	÷	RCL	24	=
SUM	13	SUM	15	RCL	24	×	R/S	STO	25
SUM	30	=	SUM	31	×	RCL	24	=	SUM
32	Op	28	RCL	25	R/S	RST	Lbl	E'	3
Pgm	02	A	1	Pgm	02	B	Pgm	02	C
1	Pgm	02	D	RCL	30	SBR	D'	RCL	31
SBR	D'	RCL	32	SBR	D'	CLR	Pgm	02	E
1	Pgm	02	A'	SBR	D'	R/S	SBR	D'	R/S
SBR	D'	R/S	Lbl	D'	Pgm	02	R/S	INVSBR	

**Программа ПЗ.32.** Вычисление коэффициентов  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  интерполирующего многочлена Ньютона и коэффициентов полинома  $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  при равномерном расположении узлов  $y_i(x_i)$  с шагом  $h$ . Ввод (после нажатия клавиши RST):  $y_0 = R0, y_1 = R1, \dots, y_n = Rn$  ( $n \leq 15$ ) и  $n = X$ . Нажав клавишу R/S, получаем  $0 \rightarrow RX, \alpha_0 \rightarrow R0, \alpha_1 \rightarrow R1, \dots, \alpha_n \rightarrow Rn$ . Вводим  $h = X$  и, нажимая  $(n + 1)$  раз клавишу R/S, получаем  $a_0, a_1, \dots, a_n$  (они заносятся в регистры  $R0 \div Rn$ ). Для вычисления  $y(z)$ , где  $z = x - x_0$ , нажимаем клавишу A (получаем  $0 \rightarrow RX$ ), вводим  $z$  и нажав клавишу R/S получаем  $y(z) \rightarrow RX$ .

STO	16	0	STO	19
RCLInd	19	STO	17	RCL
19	+	1	=	STO
18	1	SUM	19	RCL

17	—	RCLInd	19	STO
17	=	+/-	÷	RCL
18	=	STOInd	19	RCL
19	$x\rightleftharpoons t$	RCL	16	INV
$x-t$	0	16	RCL	18
STO	19	$x\rightleftharpoons t$	RCL	16
INV	$x=t$	0	05	RCL
16	—	1	=	STO
18	STO	17	RCL	17
+	1	=	STO	19
RCLInd	17	—	RCLInd	19
×	RCL	18	=	STOInd
17	1	SUM	17	RCL
17	$x\rightleftharpoons t$	RCL	16	INV
$x=t$	0	63	0	$x\rightleftharpoons t$
RCL	18	—	1	=
INV	$x=t$	0	59	STO
19	R/S	STO	17	RCLInd
19	÷	RCL	18	=
STOInd	19	R/S	RCL	17
Prd	18	1	SUM	19
GTO	1	09	Lbl	A
RCL	00	STO	18	0
R/S	STO	17	RCL	16
STO	00	RCLInd	00	=
×	RCL	17	+	Dsz
0	1	42	RCL	18
=	GTO	1	35	

**Программа П3.33.** Решение системы из двух дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты. Ввод:  $x_0 = R00$ ,  $y_0 = R01 = R02$ ,  $z_0 = R03 = R04$ ,  $h/2 = R07$ , данные  $y'(x, y, z)$  и  $z'(x, y, z)$  при  $x \rightarrow R00$ ,  $y \rightarrow R02$  и  $z \rightarrow R04$ .

SBR	SBR	STO	06	+	RCL	03	=	STO	04
$x\rightleftharpoons t$	STO	05	+	RCL	01	=	STO	02	RCL
07	SUM	00	SBR	SBR	SUM	06	SUM	06	+
RCL	03	=	STO	04	$x\rightleftharpoons t$	SUM	05	SUM	05
+	RCL	01	=	STO	02	SBR	SBR	SUM	06
SUM	06	×	2	+	RCL	03	=	STO	04
$x\rightleftharpoons t$	SUM	05	SUM	05	×	2	+	RCL	01
=	STO	02	RCL	07	SUM	00	RCL	00	R/S
SBR	SBR	+	RCL	06	=	÷	3	+	RCL
03	=	STO	03	STO	04	R/S	$x\rightleftharpoons t$	+	RCL
05	=	÷	3	+	RCL	01	=	STO	01
STO	02	R/S	RST	Lbl	SBR	...	...	×	RCL
07	=	$x\rightleftharpoons t$	...	...	×	RCL	07	=	INVSBR

Пример. При  $x_0=0,2$ ;  $y_0=0,0995008326$  и  $z_0=0,49235$  получим при  $h=0,1$ :

$x$	$z$	$y$
0,3	0,4830182649	0,1483306594
0,4	0,4701061426	0,1960470049
0,5	0,45370158	0,2422954954
1,0	0,3249167333	0,4400859361
2	-0,0645123974	0,5766381962
3	-0,3729640568	0,3387656729
4	-0,3802246996	-0,0663510272
5	-0,1115787371	-0,327559877

Программа ПЗ.34. Решение системы из трех дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты. Ввод:  $x_0 = R00$ ,  $y_0 = R01 = R02$ ,  $z_0 = R03 = R04$ ,  $\omega_0 = R05 = R06$ ,  $h/2 = R11$ , данные  $y'(x, y, z, \omega)$ ,  $z'(x, y, z, \omega)$  и  $\omega'(x, y, z, \omega)$  при  $x \rightarrow R00$ ,  $y \rightarrow R02$ ,  $z \rightarrow R04$  и  $\omega \rightarrow R06$ .

```

SBR SBR STO 09 + RCL 05 = STO 06
x↔t STO 08 + RCL 03 = STO 04 RCL
10 STO 07 + RCL 01 = STO 02 RCL
11 SUM 00 SBR SBR SUM 09 SUM 09 +
RCL 05 = STO 06 x↔t SUM 08 SUM 08
+ RCL 03 = STO 04 RCL 10 SUM 07
SUM 07 + RCL 01 = STO 02 SBR SBR
SUM 09 SUM 09 × 2 + RCL 05 =
STO 06 x↔t SUM 08 SUM 08 × 2 +
RCL 03 = STO 04 RCL 10 SUM 07 SUM
07 × 2 + RCL 01 = STO 02 RCL
11 SUM 00 RCL 00 R/S SBR SBR + RCL
09 = ÷ 3 + RCL 05 = STO 05
STO 06 R/S x↔t + RCL 08 = ÷ 3
+ RCL 03 = STO 03 STO 04 R/S RCL
10 + RCL 07 = ÷ 3 + RCL 01
= STO 01 STO 02 R/S RST Lbl SBR ...
... .. × RCL 11 = STO 10
... .. × RCL 11 = x↔t
... .. × RCL 11 = INVSBR

```

Пример. Для системы:

$$\frac{dy}{dx} = z; \quad \frac{dz}{dx} = -6z - 11y - 6\omega; \quad \frac{d\omega}{dx} = y.$$

при  $x_0=0$ ,  $z_0=-11$ ,  $y_0=3$ ,  $\omega_0=0$  и  $h=0,1$  получим:

$x$	$z$	$y$	$\omega$	$\omega$ (точно)
0,1	-8,13280	2,05030	0,25010	0,2513
0,2	-5,98340	1,34971	0,41830	0,41833
0,5	-2,26691	0,19219	0,62202	0,62205
1,0	-0,25380	-0,31568	0,55062	0,55064
2,0	0,17508	-0,22660	0,24987	0,24988
3,0	0,08855	-0,09425	0,09697	0,09697
4,0	0,03523	-0,03523	0,03629	0,03629
5,0	0,01329	-0,01338	0,01343	0,01343

Точное решение  $\omega(x)=2e^{-x} - e^{-2x} - e^{-3x}$ .

**Программа ПЗ.35.** Вычисление интегральных показательных функций  $Ei(x)$  и  $li(x) = Ei(\ln x)$  заданной погрешностью  $\epsilon$ . Ввод:  $\epsilon = Rt$  и  $x = RX$ . Для вычисления  $Ei(x)$  нажать клавишу E, а для вычисления  $li(x)$  A.

Lbl	A	ln x	Lbl	E	CMS	STO	09	1	STO
08	STO	05	Op	24	RCL	04	Prd	05	RCL
05	×	RCL	04	=	STO	01	RCL	09	Prd
08	RCL	08	÷	RCL	01	=	SUM	06	/x/
$x \geq t$	0	13	RCL	06	+	RCL	09	/x/	ln x
+	.	5	7	7	2	1	5	6	6
4	9	=	R/S						

**Пример.**  $Ei(0,5) = 0,4542199049$  ( $t_c = 23$  с),  $Ei(-4,5) = -0,0020734007$ ,  $li 200 = 50,19217117$  ( $t_c = 2$  м).

**Программа ПЗ.36.** Вычисление интегральной показательной функции  $E_n(x)$ . Ввод:  $x = RX$ . После каждого двойного нажатия клавиши R/S получаем  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $E_n(x)$ .

CMS	STO	09	+/-	INV	ln x	÷	RCL	09	=
STO	00	0	R/S	RCL	00	R/S	1	STO	08
STO	05	Op	24	RCL	04	Prd	05	RCL	05
×	RCL	04	=	STO	01	RCL	09	+/-	Prd
08	RCL	08	÷	RCL	01	=	SUM	06	/x/
$x \geq t$	0	22	1	STO	04	RCL	06	+/-	-
.	5	7	7	2	1	5	6	6	4
9	-	RCL	09	ln x	=	STO	00	RCL	04
R/S	RCL	00	R/S	Op	24	RCL	09	+/-	INV
ln x	-	RCL	00	×	RCL	09	=	÷	(
RCL	04	-	1	)	=	STO	00	GTO	0

78

**Пример.**  $E_0(0,5) = 1,213061319$ ,  $E_1(0,5) = 0,5597735948$  ( $t_c = 20$  с),  $E_2(0,5) = 0,3266438623$ .

**Программа ПЗ.37.** Вычисление функций  $\alpha_n(x)$ . Ввод:  $x = RX$  и  $n = RX$  ( $n \geq 1$ ). Результат  $\alpha_0(x) \rightarrow R00$  и  $\alpha_n(x) \rightarrow RX$ .

```

CMS STO 09 +/- INV ln x STO 08 ÷ RCL
09 = STO 00 0 R/S x⇌t RCL 00 STO
06 Op 24 RCL 04 × RCL 06 + RCL
08 = ÷ RCL 09 = STO 06 RCL 04
INV x=t 0 21 RCL 06 GTO 0 15

```

**Пример.** Для  $x = 2$  и  $n = 6$  получим  $\alpha_6(2) = 5,599497344$ .

**Программа ПЗ.38.** Вычисление функции  $\beta_n(x)$ . Ввод:  $x = RX$  и  $n = RX$  ( $n \geq 1$ ). Результат:  $\beta_0(x) \rightarrow R00$  и  $\beta_n(x) \rightarrow RX$ .

```

CMS STO 09 INV ln x — 1/x = ÷ RCL
09 = STO 00 0 R/S x⇌t 1 STO 08
Op 24 RCL 04 × RCL 00 — RCL 09
+/- INV ln x + ( RCL 09 INV ln x ×
RCL 08 +/- STO 08 ) = ÷ RCL 09
= STO 00 RCL 04 INV x=t 0 20 RCL
00 GTO 0 15

```

**Пример.** Для  $x = 4$  и  $n = 3$  получим  $\beta_3(x) = -7,261476257$ .

**Программа ПЗ.39.** Вычисление интегрального синуса  $Si(x)$  с заданной погрешностью  $\varepsilon$  по разложению в ряд. Ввод:  $\varepsilon = Rt$  и  $x = PX$ .

```

CMS STO 02 STO 07 STO 08 x² ÷ 2
+/- = STO 03 Op 24 RCL 04 × 2
= + 1 = x² STO 05 RCL 04 ×
2 — 1 = × RCL 03 × RCL 07
÷ RCL 04 ÷ RCL 05 = STO 07 SUM
08 |x| x≥t 0 14 RCL 08 R/S RST

```

**Пример.** При  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$   $Si(0,1) = 0,0999444611$  ( $t_c = 8$  с),  $Si(3) = 1,848652528$  ( $t_c = 27$  с),  $Si(0) = 1,658347594$  ( $t_c = 50$  с).

**Программа ПЗ.40.** Вычисление интегрального косинуса  $Ci(x)$  с заданной погрешностью  $\varepsilon$  по его разложению в ряд. Ввод:  $\varepsilon = Rt$  и  $x = PX$ .

```

CMS STO 09 x² STO 08 1 STO 03 STO
07 Op 24 RCL 04 × 2 = STO 06
— 1 = × RCL 06 × RCL 07 +/-
= STO 07 × RCL 06 = STO 01 RCL
08 Prd 03 RCL 03 ÷ RCL 01 = SUM
05 |x| x≥t 0 11 RCL 05 + RCL 09
ln x + . 5 7 7 2 4 5 6
6 4 9 = R/S RST

```

**Пример.** При  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$   $Ci(1) = 0,3374039229$  ( $t_c = 5$  с),  $Ci(2) = 0,4229808188$  ( $t_c = 30$  с),  $Ci(10) = -0,045456433$  ( $t_c = 60$  с).

**Программа ПЗ.41.** Вычисление гамма-функции  $\Gamma(x)$ . Ввод:  $x = PX$ .

—	1	=	STO	01	—	2	0	=	INV
$x \geq t$	A	1	STO	04	GTO	B	Lbl	A	—
1	=	Int	x	STO	02	+	RCL	01	STO
03	=	STO	01	1	Lbl	C	÷	(	RCL
03	+	1	)	STO	03	=	STO	04	Dsz
2	C	Lbl	B	(	RCL	01	÷	1	INV
$\ln x$	)	$y^x$	RCL	01	=	×	(	1	2
×	RCL	01	)	1/x	INV	$\ln x$	×	(	2
×	$\pi$	×	RCL	01	)	$\sqrt{x}$	×	RCL	04
=	R/S	RST							

**Пример.**  $\Gamma(0,5) = 1,772454$  ( $t_c = 26$  с),  $\Gamma(50) = 608,28188 \cdot 10^{60}$  ( $t_c = 3,5$  с).

**Программа ПЗ.42.** Вычисление логарифмической производной гамма-функции  $\psi(x)$ . Ввод:  $x = PX$ .

$x \geq t$	2	0	INV	$x \geq t$	A	$x \geq t$	STO	02	INV
Int	+	2	0	=	STO	03	GTO	B	Lbl
A	$x \geq t$	+	1	=	STO	02	STO	03	Lbl
B	RCL	03	×	2	=	1/x	STO	00	$x^2$
÷	3	=	+/-	—	RCL	00	+	RCL	03
$\ln x$	=	STO	00	Lbl	C	Op	33	RCL	03
1/x	+/-	SUM	00	RCL	03	$x \geq t$	RCL	02	INV
$x \geq t$	C	RCL	00	R/S	RST				

**Пример.**  $\psi(0,5) = -1,9633510073$  ( $t_c = 24$  с),  $\psi(100) = -4,600161853$  ( $t_c = 4$  с).

**Программа ПЗ.43.** Вычисление неполной гамма-функции  $\gamma(a, x)$ . Ввод: RST a R/S x R/S.

STO	01	R/S	STO	00	×	2	+	9	=
Int	STO	02	Lbl	A	÷	(	RCL	01	+
RCL	02	)	×	RCL	00	+	1	=	Dsz
2	A	×	RCL	00	$y^x$	RCL	01	=	÷
RCL	01	×	RCL	00	+/-	INV	$\ln x$	=	R/S

**Пример.**  $\gamma(2; 8) = 0,9969825948$  ( $t_c = 28$  с),  $\gamma(0,5; 1) = 1,493648313$  ( $t_c = 13$  с).

**Программа ПЗ.45.** Вычисление функций Бесселя  $J_n(x)$  и  $I_n(x)$  для целых  $n$ . Ввод:  $-1 = R09$  при вычислении  $J_n(x)$  или  $1 = R09$  при вычислении  $I_n(x)$ , погрешность  $\epsilon = R10$  и далее  $n$  RST R/S x R/S.

Cp	STO	03	R/S	STO	02	CLR	STO	04	1
STO	06	RCL	03	$x=t$	A	Lbl	B	STO	08
Prd	06	RCL	08	—	1	=	INV	$x=t$	B

Lbl	A	RCL	02	÷	2	=	STO	00	$r^2$
STO	02	RCL	00	$v^x$	RCL	03	÷	RCL	06
=	STO	07	STO	03	Lbl	C	Op	24	RCL
03	+	RCL	04	=	×	RCL	04	÷	RCL
02	÷	RCL	07	×	RCL	09	=	$1/x$	STO
07	SUM	08	r	$x \rightleftharpoons t$	RCL	10	INV	$x \geq t$	C
RCL	08	R/S							

Пример. При  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}$   $J_0(0,5) = 0,93847$  ( $t_c = 9$  с),  
 $J_{30}(20) = 0,00012$ ,  $I_0(2) = 2,27959$ ,  $I_{30}(20) = 0,16475$ .

**Программа ПЗ.46.** Вычисление интегралов Френеля  $S(x)$  и  $C(x)$ . Ввод:  $x = PX$ . Для вычисления  $S(x)$  нажать клавишу A, для вычисления  $C(x)$  B.

RCL	00	$x^2$	STO	01	RCL	00	+	6	=
Int	STO	03	Lbl	÷	÷	(	2	×	RCL
03	)	STO	04	÷	(	RCL	05	-	RCL
04	)	×	RCL	01	+	(	RCL	03	×
4	-	2	-	RCL	05	)	$1/x$	=	Dsz
3	÷	STO	03	RCL	00	ln x	×	(	2
-	RCL	05	)	=	INV	ln x	×	2	÷
$\pi$	=	$\sqrt{x}$	×	RCL	03	=	R/S	Lbl	A
STO	00	1	+/-	STO	05	RST	Lbl	B	STO
00	1	STO	05						

Пример.  $S(2) = 0,5628489095$ ,  $C(2) = 0,7533024036$  ( $t_c = 20$  с).

**Программа ПЗ.47.** Вычисление гипергеометрической функции  $F(a, b, c, x)$ . Ввод:  $a \wedge b \vee c \ C \ x \ D \ E$ .

Lbl	A	STO	02	R/S	Lbl	B	STO	03	R/S
Lbl	C	STO	04	R/S	Lbl	D	STO	05	R/S
Lbl	E	2	3	STO	00	log	Lbl	A'	×
(	RCL	00	-	1	+	STO	01	RCL	02
)	×	(	RCL	01	+	RCL	03	)	÷
(	RCL	01	+	RCL	04	)	÷	RCL	00
×	RCL	05	+	1	=	Dsz	0	A'	R/S

Пример.  $F(1; 1; 2; 0,5) = 1,386294358$  ( $t_c = 1$  м) при точном значении 1,386294361.

Полный эллиптический интеграл  $K(m)$  может вычисляться по этой программе как  $K(m) = (\pi/2) \cdot F(0,5; 0,5; 1; m)$ , а  $E(m) = (\pi/2) \cdot F(-0,5; 0,5; 1; m)$ .

Пример. Для  $m = 0,5$  получим  $K(0,5) = 1,854074676$  при точном значении 1,85407467730 (при  $m = 0,9$  погрешность возрастает до  $1 \cdot 10^{-3}$ ).

**Программа ПЗ.48.** Вычисление вырожденной гипергеометрической функции  $F(a, b, x)$ . Ввод:  $a \ A \ b \ B \ x \ D \ E$ .

Lbl	A	STO	02	R/S	Lbl	B	STO	03	R/S
Lbl	D	STO	04	R/S	Lbl	E	2	3	STO
00	log	Lbl	C	×	(	RCL	00	—	1
+	STO	01	RCL	02	)	×	RCL	04	÷
(	RCL	01	+	RCL	03	)	÷	RCL	00
+	1	=	Dsz	0	C	R/S			

Пр и м е р.  $F(1; 1; 0,5) = 1,648721271$  ( $t_c = 45$  с) при точном значении 1,6487213.

**Программа ПЗ.49.** Вычисление функций  $\Phi(x)$ ,  $\Pi(x)$ ,  $\text{erf}(x)$  и  $\text{erfc}|x| = 1 - \text{erf}(x)$ . Ввод:  $\varepsilon = Rt$ ,  $x = PX$ . Вывод результатов:  $\Phi(x)$  при нажатии клавиши А,  $\Pi(x)$  при нажатии клавиши 2nd и А',  $\text{erf}(x)$  при нажатии клавиш Е и  $\text{erfc}(x)$  при нажатии клавиш 2nd и Е'.

Lbl	A	CMS	STO	02	$x^2$	÷	2	+/-	=
STO	03	2	÷	$\pi$	=	$\sqrt{x}$	×	RCL	02
=	STO	07	STO	08	Op	24	RCL	04	×
2	+	1	=	STO	05	RCL	04	×	2
-	1	=	×	RCL	03	÷	RCL	04	÷
RCL	05	×	RCL	07	=	STO	07	SUM	08
/x/	$x \geq t$	0	25	RCL	08	R/S	Lbl	A'	RCL
08	+	1	=	÷	2	=	R/S	Lbl	E
×	2	$\sqrt{x}$	=	RST	Lbl	E'	1	-	RCL
08	=	R/S							

Пр и м е р. При  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$  и  $x = 0,1$  получим  $\Phi(x) = 0,0796556746$  ( $t_c = 10$  с),  $\Pi(x) = 0,5398278373$ ,  $\text{erf}(x) = 0,112462916$  и  $\text{erfc}(x) = 0,887537084$  (все знаки результатов верные).

В микрокалькуляторах TI-58C/59 используются сменные модули ПЗУ с библиотеками прикладных программ. В некоторых из описанных ниже программ используются программы из модуля ML, описание которых дано в [9].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы.— М.: Наука, 1987.— 600 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники.— М.: Высшая школа, 1964.— 750 с.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов.— М.: Наука, 1986.— 976 с.
4. Варламов Р. Г. Эксплуатация и ремонт современных микрокалькуляторов.— М.: Легкая и пищевая промышленность, 1983.— 120 с.
5. Волков Е. А. Численные методы.— М.: Наука, 1985.
6. Горяинов В. Г., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи.— М.: Советское радио, 1980.— 544 с.
7. Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П., Смирнов Г. Л. Вычислительная математика.— М.: Высшая школа, 1985.— 472 с.
8. Дьяконов В. П. Расчет нелинейных и импульсных устройств на программируемых микрокалькуляторах.— М.: Радио и связь, 1984.— 176 с.
9. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.— М.: Наука, 1986.— 224 с.
10. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ.— М.: Наука, 1987.— 240 с.
11. Дьяконов В. П. Программируемые микрокалькуляторы в аппаратуре и технике эксперимента // ПТЭ.— 1985.— № 6.— С. 5.
12. Ильин В. Н. Основы автоматизации схемотехнического проектирования.— М.: Энергия, 1979.— 392 с.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников: пер. с англ.— М.: Наука, 1984.— 832 с.
14. Львовский Е. Н. Статистические методы построения эмпирических формул.— М.: Высшая школа, 1988.— 239 с.
15. Самарский А. А. Введение в численные методы.— М.: Наука, 1987.— 272 с.
16. Сигорский В. П., Петренко А. И. Основы теории электронных схем.— Киев: Выща школа, 1971.— 568 с.
17. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана.— М.: Наука, 1979.— 832 с.

18. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах.— Киев: Техника, 1980.— 383 с.

19. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах.— М.: Радио и связь, 1983.— 256 с.

20. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на программируемых микрокалькуляторах.— Киев: Техника, 1985.— 326 с.

21. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микро-ЭВМ «Электроника БЗ-34», «Электроника МК 56» и «Электроника МК-54».— М.: Финансы и статистика, 1984.— 176 с.

22. Финк Л. М. Целочисленные операции с помощью программируемых микрокалькуляторов // Известия вузов. Радиоэлектроника.— 1984.— № 7.— С. 55.

23. Щуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ.— М.: Мир, 1982.— 238 с.

## Справочная литература

*ДБЯКОНОВ Владимир Павлович*

### **СПРАВОЧНИК ПО РАСЧЕТАМ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ**

Заведующий редакцией *А. С. Косов*

Редактор *Л. Г. Полякова*

Художественный редактор *Г. М. Коросина*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 32689

Сдано в набор 06.04.88. Подписано к печати 01.09.89. Формат 84×108/32. Бумага типографская № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 24,36. Усл. кр.-отт. 24,36. Уч.-изд. л. 29,36. Тираж 300 000 экз. (2-й завод 100 001 — 200 000 экз.) Заказ № 145. Цена 1 р. 80 к.

Ордена Трудового **Красного Знамени**

издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»  
Новосибирск, 71, Станиславского, 25