

**Итеративные методы  
в теории игр  
и программировании**



# Итеративные методы в теории игр и программировании

Под общей редакцией

В. З. БЕЛЕНЬКОГО и В. А. ВОЛКОНСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1974

**Итеративные методы в теории игр и программировании.**  
В. З. Беленький, В. А. Волконский, С. А. Иванков,  
А. Б. Поманский, А. Д. Шапиро (Серия «Экономико-математическая библиотека»). Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1974.

Книга посвящена изучению итеративных методов решения игр и задач оптимального программирования. Развитый в ней математический аппарат позволяет охватить с единой точки зрения значительный класс применяемых в этой области итеративных процессов, в частности, алгоритмы решения игр, градиентные методы и др. В общую схему включаются также и стохастические методы, например методы стохастической аппроксимации, поскольку показано, что случайные ошибки не нарушают сходимости.

Специальный раздел посвящен конкретным алгоритмам решения задач линейного и целочисленного программирования. Рассмотрена экспериментальная модификация итеративного алгоритма, позволяющая существенно повысить скорость сходимости. Описан эффективный алгоритм для решения задач большой размерности, и приводится ряд практических задач хозяйственного планирования, решенных с его помощью.

Книга представляет интерес для математиков, работающих в области вычислительных методов, в теории управления, а также для экономистов, занимающихся применением математики в хозяйственном планировании. Она будет полезна аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.

Илл. 7, табл. 4, библи. 77 назв.

© Издательство «Наука», 1974.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	7
--------------------	---

*Раздел первый*

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

<b>Глава I. Предварительные сведения . . . . .</b>	<b>23</b>
§ 1. Основные понятия и определения выпуклого анализа . . . . .	23
1. Обозначения (23). 2. Выпуклые множества (24). 3. Выпуклые функции (26). 4. Обобщенный градиент выпуклой вверх функции (27). 5. Квазивыпуклые функции (29).	
§ 2. Точно-множественные отображения . . . . .	30
1. Замкнутость и полунепрерывность сверху (30). 2. Отображения типа $K$ (31). 3. Теорема Какутани (33). 4. Полунепрерывные сверху функции (33)	
§ 3. Некоторые сведения из теории функций вещественной переменной и теории вероятностей . . . . .	34
1. Функции на полуоси $t \geq 0$ (34) 2. Измеримые функции. Интеграл Лебега (35) 3. Производные числа (36) 4. Сведения из теории вероятностей (36)	
<b>Глава II. Итеративные процессы в общей форме . . . . .</b>	<b>40</b>
§ 4. Регулярные последовательности на выпуклых компактах. Признак сходимости . . . . .	41
1. Регулярная последовательность на выпуклом компакте (41). 2. Предельные траектории регулярной последовательности (42) 3. Первая основная теорема (43).	
§ 5. Стандартный процесс . . . . .	45
1. Регулярный алгоритм (45). 2. Процесс (46). 3. Стандартный процесс (47). 4. Основное поле (48). 5. Примеры (50). 6. Обсуждение (52) 7. Замечание о процессах с ошибками (53).	
§ 6. Интегральные кривые многозначного векторного поля . . . . .	55
1. Интегральные кривые (55). 2. Теорема вложения (56).	
§ 7. Функция Ляпунова как критерий сходимости итеративного процесса . . . . .	59
1. Индикатриса сходимости (59) 2. Функция Ляпунова (61) 3. Индикатриса сходимости в терминах верхней производной по полю направлений (61). 4. Дополнительная лемма (63).	

§ 8*.	Итеративные процессы при наличии случайных ошибок	64
	1 Случайный стандартный процесс (65). 2. Теорема об устойчивости процесса относительно случайных ошибок (66). 3. Две леммы (68). 4. Доказательство теоремы устойчивости (71).	
§ 9.	Теоремы о локальной сходимости. Простой процесс на неограниченном множестве . . . . .	73
	1. Детерминированный процесс (73). 2* Процесс со случайными ошибками (75).	
	Комментарии к главе II* . . . . .	78
Г л а в а III.	Игровые процессы . . . . .	81
§ 10.	Выпуклые игры с нулевой суммой . . . . .	81
	1. Выпуклая игра $N$ игроков (81). 2. Точки равновесия и связанное с игрой отображение (82). 3. Игра двух игроков (84). 4. Равноправные и симметричные игры (87). 5. Сведение игры $N$ лиц к равноправной игре двух лиц (88). 6. Матричные (полиэдральные) игры (89). 7. Игровой процесс (89). 8*. Игры в смешанных стратегиях (91).	
§ 11.	Теоремы о сходимости игровых процессов . . . . .	93
	1. Вторая основная теорема (93). 2 Теорема о сходимости игровых процессов (96). 3. Сходимость игрового процесса с поочередным выбором оптимальных ответов (96). 4* Обобщение для игр в смешанных стратегиях (97).	
§ 12*.	Распространение теоремы сходимости на процесс с ошибками. Ослабление условий выпуклости . . . . .	99
	1. Процесс с ошибками. Измерение ошибок (99). 2. Обобщение теоремы сходимости (100). 3. Некоторые побочные результаты (102).	
§ 13*.	Игровые процессы в случае единственности оптимального ответа . . . . .	104
	1. Доказательство сходимости (104). 2. Оценка скорости сходимости случайного игрового процесса (105). 3. Оценка скорости сходимости детерминированного игрового процесса (108). 4. Итеративный процесс специального вида (110).	

*Раздел второй*

## ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Г л а в а IV.	Задачи выпуклого программирования . . . . .	113
§ 14.	Сведение общей задачи к игре . . . . .	113
	1. Функция Лагранжа (113). 2. Преобразование Лежандра (116). 3. Использование преобразования Лежандра для сведения задачи максимизации к игре (118). 4. Задача максимизации на ограниченном множестве (121)	
§ 15.	Экономическая интерпретация задачи линейного программирования и методы декомпозиции . . . . .	124
	1. Экономическая интерпретация (124). 2. Блочная задача линейного программирования (127). 3. Первый метод декомпозиции (метод Данцига — Вольфа) (128). 4. Второй метод декомпозиции (метод Корнаи — Липтака) (129). 5. Использование преобразования Лежандра для построения алгоритмов декомпозиции в общем (нелинейном) случае (132).	

<b>Глава V. Градиентные методы . . . . .</b>	<b>134</b>
§ 16. Общие теоремы о методах градиентного типа . . . . .	135
1. Две геометрические леммы (135) 2. Проекционное поле (136). 3. Обобщение на случай неограниченного множества (139).	
§ 17. Некоторые известные методы . . . . .	141
1. Метод обобщенного градиента для решения задачи максимизации (141). 2. Метод обобщенного градиента для решения игры (142). 3. Метод «тяжелого шарика» (145).	
<b>Глава VI. Дополнительные примеры использования итеративных методов . . . . .</b>	<b>148</b>
§ 18*. Метод максимизации вдоль кривой спроса . . . . .	148
1. Постановка задачи (148). 2. Метод (150). 3. Доказательство сходимости (153).	
§ 19. Дополнительные примеры итеративных процессов . . . . .	156
1. Метод Неймана (156). 2. Метод Франка и Вольфа (157). 3. Метод Булавского (158).	
<b>Глава VII*. Стохастические методы . . . . .</b>	<b>160</b>
§ 20. Методы стохастической аппроксимации и стохастического градиента . . . . .	160
1. Метод стохастической аппроксимации (160). 2. Стохастический градиентный метод (161). 3. Вычисление градиента по значениям функции в узлах случайной сетки (162).	
§ 21. Минимизация сложной функции . . . . .	165
1. Постановка задачи (166). 2. Алгоритм в простейшем случае (167). 3. Нахождение минимума с условием в виде равенства (167).	

*Раздел третий***АЛГОРИТМЫ**

<b>Глава VIII. Вычислительные итеративные алгоритмы и их экспериментальное исследование . . . . .</b>	<b>170</b>
§ 22. Представление общей задачи линейного программирования как задачи минимизации неотрицательной линейно-квадратичной формы. Алгоритм «Заяц» . . . . .	170
1. Игровая формулировка задачи линейного программирования (170). 2. Сведение к задаче минимизации линейно-квадратичной формы (172). 3. Связь с исходной задачей (174). 4. Алгоритм «Заяц» (176). 5. Вычислительные эксперименты (179).	
§ 23. Построение высокоточного алгоритма на базе алгоритма малой точности . . . . .	181
1. Идея метода (181). 2. Схема отсекания (183). 3. Алгоритм «Белка» (184). 4. Вычислительные эксперименты (185). 5. Некоторые практические замечания (186).	
§ 24. Алгоритм решения матричных игр . . . . .	188
1. Алгоритм (189) 2. Обобщение (191). 3. Возможная реализация основной процедуры (195).	

Глава IX. Итеративные алгоритмы решения задач планирования, содержащих непрерывные и дискретные переменные . . . . .	197
§ 25. Основная модель . . . . .	202
1. Модель (202). 2. Экономическая интерпретация (203).	
§ 26. Примеры конкретных задач хозяйственного планирования, формализуемых с помощью основной модели . . . . .	205
1. Модели оптимального развития отрасли нефтяного машиностроения (205). 2. Задача развития крупного угольного бассейна (210). 3. Задача о реконструкции дороги (211).	
§ 27. Вычислительный алгоритм $L$ для расчетов по основной модели без условий целочисленности . . . . .	213
1. Сведение основной модели к игре (213). 2. Описание алгоритма $L$ (216). 3. Анализ работы алгоритма (219). 4. Две леммы о сходимости (222)	
§ 28. Алгоритм $D$ для решения задач с дискретными переменными . . . . .	228
1. Описание алгоритма (228). 2. О возможностях алгоритма (230).	
§ 29. Практическое применение алгоритмов $L$ и $D$ . . . . .	231
1. Практические приемы ускорения сходимости (232). 2. Некоторые результаты расчетов (233)	
Литература . . . . .	235

## ВВЕДЕНИЕ

1. Действие любого математического алгоритма совершается в виде последовательных в определенном смысле однотипных итераций, пока не будет получено решение задачи. В этом смысле термин «итеративные методы», строго говоря, не дает никакого ограничения класса изучаемых процедур. Однако в области математического программирования и в линейной алгебре за термином «итеративные» (методы, или алгоритмы) утвердился смысл противопоставления так называемым «конечным» методам, где решение получается за конечное число шагов и движение идет «от вершины к вершине» по границе множества допустимых точек (алгоритмы типа симплекс-метода или метода Гаусса для решения систем линейных уравнений). Термин «итеративные» понимается в книге именно в этом смысле.

Наиболее «древними» итеративными методами можно считать методы простой итерации для нахождения корня функционального уравнения

$$x = f(x) \quad (1)$$

или системы линейных уравнений

$$x = Ax + b, \quad (2)$$

а также метод градиентного спуска для нахождения минимума гладкой функции. Общую итеративную процедуру можно записать в виде

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n r(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $n$  означает номер итерации,  $r(x)$  — векторное поле, указывающее направление движения; обычно доказывается или предполагается, что это векторное поле есть в том или ином смысле поле направлений к решению задачи;  $\alpha_n$  — по-

ложительный скаляр, свободно выбираемый в достаточно широких пределах и показывающий длину «шага итерации». Его можно интерпретировать также как параметр «демпфирования колебаний» итеративного процесса: чем меньше величины  $\alpha_n$ , тем медленнее меняются значения  $x_n$ . Под термином «итеративные» методы в настоящей книге понимаются алгоритмы, которые сводятся к такой схеме, и их модификации.

Итеративные методы оказались достаточно универсальным инструментом, пригодным для решения многих задач в ряде областей математики и математической кибернетики. Особое значение итеративные процессы имеют для математической экономики, где они получают естественную интерпретацию как процессы согласования решений экономических агентов и могут быть использованы при построении вычислительных алгоритмов для решения задач планирования. Хотя итеративные методы и имеют много общего, в различных разделах науки они называются по-разному, и их изучение проводилось в значительной мере разрозненно. Настоящая книга представляет собой попытку исследовать эти методы с единой точки зрения. Мы рассматриваем многообразные итеративные алгоритмы как модификации для разных задач одной общей процедуры вида (3). Такое объединение оказалось весьма плодотворным. Оно дало возможность развить общую теорию сходимости таких процессов и дать общую схему построения широкого класса эффективных вычислительных процедур, позволяющих, в частности, использовать блочную структуру задач математического программирования.

2. Нахождение минимума гладкой функции, как и решение уравнений (1), (2), можно интерпретировать как решение системы (вообще говоря, нелинейных) уравнений:

$$r(x) = 0, \quad (4)$$

где в качестве  $r(x)$  взят антиградиент минимизируемой функции. Для уравнений (1) и (2), очевидно,  $r(x)$  надо положить равным  $f(x) - x$  и  $Ax + b - x$  соответственно. При этом метод простой итерации есть частный случай итеративной процедуры (3) при  $\alpha_n \equiv 1$ .

Для широкого класса задач отыскания корня системы уравнений (4) последовательность  $x_0, x_1, \dots$ , получаемая из рекуррентного соотношения (3), сходится к решению.

На последовательность  $\{\alpha_n\}$  обычно достаточно наложить требования

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty. \quad (5)$$

Соотношение (3) можно представить в форме

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_n} = r(x_n)$$

и рассматривать как конечноразностный аналог дифференциального уравнения

$$\dot{x} = r(x), \quad (6)$$

где  $\dot{x}$  — обозначение для производной  $\frac{dx}{dt}$  по некоторому естественно определяемому параметру  $t$  («время»). По аналогии с интегральными кривыми дифференциального уравнения (6), где  $r(x)$  — непрерывное векторное поле, можно определить понятие интегральных кривых для точечно-множественных отображений  $R$ . В этом случае интегральная кривая определяется включением

$$\dot{x} \Subset R(x). \quad (7)$$

Широкий класс итеративных методов решения задач теории игр и программирования может быть интерпретирован как движение по «ломаной Эйлера» для интегральной кривой отображения  $R$ . Вершины такой ломаной получаются путем рекуррентного решения уравнения

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n r_n, \quad r_n \Subset R(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Сходимость последовательности  $\{x_n\}$  к решению  $X^*$  исходной задачи обеспечивается в том случае, если значения некоторой неотрицательной функции  $U(x)$  строго убывают вдоль интегральных кривых отображения  $R$ . Функция  $U$  в этой схеме вполне аналогична по своей роли функции Ляпунова в теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому для нее в книге используется тот же термин. Строгому изложению необходимых определений и теорем указанной схемы и посвящены §§ 4—7 главы II. При этом специальный параграф (§ 6) посвящен доказательству утверждения, аналогичного теоремам о непрерывной зависимости от параметра решений обыкновен-

ных дифференциальных уравнений. Этот результат необходим, в частности, для анализа сходимости итеративных процессов при наличии случайных ошибок (§ 8).

В целом главу II можно рассматривать как своеобразное обобщение элементов теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений для решений включения (7) с неоднозначной правой частью, а также их конечноразностных аналогов

3. В случае обыкновенного дифференциального уравнения (6) (с однозначной и непрерывной правой частью) свойство убывания значений функции  $U(x)$  вдоль траектории следует из отрицательности верхней производной  $U_r^+(x)$  функции  $U(x)$  по направлению  $r(x)$ . В § 7 этот критерий сходимости обобщается на соотношение (7) в виде

$$U_R^+(x) = \max_{r \in R(x)} U_r^+(x) < 0.$$

Во втором разделе книги показано, что теорема сходимости, основанная на этом критерии, позволяет получить большую часть известных результатов о сходимости конкретных итеративных методов. Однако этот признак оказывается неприменимым для доказательства сходимости известного метода Брауна решения матричных игр (его сходимость доказана Дж. Робинсон, см. [60]) и ряда его обобщений. Доказательство сходимости итеративных методов, обобщающих процесс Брауна и применимых для решения игр и задач линейного и выпуклого программирования, оказывается более сложным (§ 11).

4. Важным достоинством итеративных процедур является их устойчивость по отношению к возмущениям и ошибкам в процессе движения к решению. Учету допустимых систематических (неслучайных) ошибок в определении направления движения посвящен § 12.

Значительный толчок развитию исследований и применений итеративных алгоритмов был дан работами, связанными с разработкой так называемого «метода стохастической аппроксимации», в которых доказывалось, что сходимость итеративной процедуры к решению уравнений (4) не нарушается, если на каждой итерации измерение функции  $r(x)$  содержит случайную ошибку.

Другими словами, в этих работах рассматривается семейство случайных величин (векторов)  $\zeta(x)$ , зависящих от

(векторного) параметра  $x$ , или семейство распределений вероятностей  $\mu_x$ , и  $r(x)$  есть его функция регрессии <sup>1)</sup>:

$$r(x) = M\zeta(x) = \int y \mu_x(dy). \quad (9)$$

В теории стохастической аппроксимации доказывается, что к корню  $x^*$  уравнения регрессии  $r(x) = 0$  сходится (по вероятности или с вероятностью единица) последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , получаемая из соотношения

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n \zeta(x_n), \quad (10)$$

где  $\zeta(x_n)$  — независимые реализации случайного вектора, соответствующего точкам  $x_n$ . Обзор основных результатов теории стохастической аппроксимации на русском языке и библиографию можно найти в работах [44], [11].

В последние годы было показано (см. [64]), что к методу стохастической аппроксимации сводятся алгоритмы метода потенциальных функций, предложенные ранее (см. [1]) для решения таких задач теории управления, как восстановление характеристики функционального преобразования, распознавание образов, автоматическая группировка и др.<sup>2)</sup>.

Для построения многих конкретных итеративных процедур используется также близкий к алгоритму стохастической аппроксимации стохастический градиентный метод [28], [29]. Общим теоремам о сходимости итеративных процессов со случайными ошибками посвящен § 8. В главе VII показано, что из них выводится ряд известных результатов о методах стохастической аппроксимации и стохастического градиента; § 21 этой главы посвящен методу минимизации сложной функции, к которому сводится ряд известных процессов из теории обучающихся автоматических систем.

5. Важной областью использования итеративных процессов является решение задач математического программирования, изучению которых посвящены главы IV, V. В них даны доказательства сходимости известных итеративных

<sup>1)</sup> Символ  $M\zeta$  здесь и дальше обозначает математическое ожидание величины  $\zeta$ .

<sup>2)</sup> Результаты, полученные в работах по стохастической аппроксимации, как правило, не могут быть непосредственно использованы для доказательства сходимости этих алгоритмов. Необходимое расширение этих результатов было получено позднее и потребовало усложнения математического аппарата (см. [42], [43]).

методов для задач линейного и выпуклого программирования и их обобщений.

Применение итеративных процессов к таким задачам идет по двум линиям:

1) путем замены ограничений в задаче программирования штрафными функциями для сведения задачи к минимизации функции без ограничений с последующим применением тех или иных модификаций метода градиентного спуска (см. [41]);

2) путем сведения задачи программирования к задаче отыскания точки равновесия (в смысле Нэша) в игре, к которой могут быть непосредственно применены итеративные алгоритмы вида (3).

Второй путь оказался особенно удобным для использования в теории оптимального планирования, так как позволял легко формировать *алгоритмы декомпозиции*, т. е. сводить решение большой задачи оптимального планирования, имеющей сложную структуру, к многократному решению более мелких задач, соответствующих отдельным частям (блокам) исходной задачи.

В силу большой сложности системы планирования и управления хозяйством ее функционирование практически возможно только благодаря тому, что она состоит из более или менее автономных подсистем. Отражением этого факта является подход теории оптимального планирования к описанию экономики с помощью системы взаимосвязанных моделей, каждая из которых представляет собой модель оптимального планирования или управления некоторой более или менее автономной частью всей системы. Каждое звено системы управления стремится к достижению оптимума в своих моделях. Процесс разработки оптимального плана всей системы можно представлять как итеративный процесс, на каждой итерации которого каждое звено системы управления уточняет свои модели на основе новой информации, полученной от других звеньев, и производит пересчет плана. Для формализации такого процесса можно использовать представление взаимоотношений между органами управления в виде игры многих игроков, а процесс согласования их планов — в виде итеративной процедуры отыскания точки равновесия в игре (см. [14]).

Впервые декомпозиционные алгоритмы для задач линейного программирования были разработаны Дж. Данцигом

и Ф. Вольфом (см. [25]) на основе конечного алгоритма, близкого к симплекс-методу. И. Корнаи и Т. Липтак (см. [39]) использовали для построения декомпозиционного алгоритма решения задачи оптимального планирования сведение к матричной игре и метод Брауна — Робинсон.

В нашей стране также велась интенсивная теоретическая и экспериментальная разработка итеративных методов для решения задач оптимального планирования большой размерности (см. [10], [12], [13], [46], [19], [41], [22], [23], [17], [52], [68], [40]). В настоящее время это направление исследований приобретает все большую актуальность в связи с расширением внедрения оптимальных расчетов в практику планирования. Сейчас в большей части отраслей народного хозяйства проводятся расчеты по оптимизационным моделям перспективного планирования (задачи линейного программирования и близкие к ним целочисленные задачи; см. [34], [45], [4], [51], [66], [55], [56], [37], [50], [2], [3]).

Методам сведения задач линейного и выпуклого программирования к игре, а также декомпозиционным алгоритмам и их экономической интерпретации посвящена глава IV. В § 18 описан еще один специальный итеративный алгоритм, представляющий значительный интерес с точки зрения экономического моделирования, в частности, потому, что его можно рассматривать как обоснование часто применяемого в теории и практике оптимального планирования критерия максимизации выпуска продукции в заданных пропорциях.

Глава V посвящена широко используемому классу итеративных методов — градиентным методам. Из общих теорем сходимости, доказанных в главе II, выводятся известные результаты о сходимости градиентных методов к решению задачи оптимизации и к решению выпуклой игры и их обобщения.

6. Построение четкой классификации используемых методов, видимо, невозможно, потому что каждый конкретный метод представляет собой комбинацию различных идей и приемов. Кроме того, с чисто формальной точки зрения большинство методов могут быть в том или ином смысле сведены друг к другу, так что всякая классификация является более или менее условной. Поэтому мы укажем

только несколько наиболее общих признаков, по которым различаются описанные в литературе алгоритмы.

Одним из таких признаков является предварительное (однократное) преобразование задачи: 1) в методах штрафных функций задача программирования сводится к отысканию экстремума функции без ограничений или с ограничениями простейшего вида; 2) в методах отсечения задача с целевой функцией сложной природы сводится к задаче с линейной функцией; 3) задача программирования заменяется задачей нахождения седловой точки функции Лагранжа, или точки равновесия в игре; 4) решается непосредственно исходная задача программирования.

Сам процесс приближения к решению исходной (или преобразованной) задачи программирования можно описать как последовательность итераций. На каждой итерации производится или уточняется модификация исходной задачи — замена ее существенно более простой задачей, в том или ином смысле аппроксимирующей исходную, решение которой дает новое приближение к решению всей задачи или направление такого приближения. Такое описание годится и для методов отсечения и их модификаций (см. обзор в работе [74]), и для методов возможных направлений (см. [30]), и для многочисленных методов отыскания экстремума функции без ограничений. Методы двойственности, сводящиеся к замене задачи программирования игрой, также, как правило, можно рассматривать как способ построения на каждой итерации линейной аппроксимации для элементов исходной задачи. Например, метод М. Франка и Ф. Вольфа (см. § 19) можно трактовать как построение на каждой итерации линейной аппроксимации для целевой функции и представлять как алгоритм нахождения точки равновесия в игре. Возможность получения ряда известных алгоритмов линейного и выпуклого программирования путем построения игры, эквивалентной исходной задаче, демонстрируется в главе IV книги.

В силу того, что многие методы могут быть формально сведены друг к другу, при обсуждении алгоритмов движения их можно рассматривать как различные языки для описания одного и того же процесса.

С точки зрения основных проблем настоящей книги для классификации алгоритмов движения важными признаками являются:

а) монотонность возрастания целевой функции вдоль траектории;

б) выбор длины шага в зависимости от структуры допустимого множества целевой функции или независимо от нее.

Требование строго монотонного возрастания целевой функции заставляет выбирать длину шага в зависимости от значения целевой функции, так что указанные два признака взаимно обусловлены. Во многих алгоритмах ввиду сложности выбора подходящего направления предлагается двигаться в выбранном направлении до тех пор, пока целевая функция возрастает (например, релаксационные методы, методы возможных направлений, см. [30]). К монотонным относятся также все конечно-шаговые методы (симплекс-метод и его модификации для линейного и нелинейного программирования). В итеративных методах длина шага может выбираться независимо от значений целевой функции, и поэтому они не являются монотонными. К этим методам следует отнести большинство градиентных методов (с независимым выбором шага), метод Брауна — Робинсон решения матричных игр, а также его обобщения, изучаемые в настоящей работе. Отказ от строгой монотонности движения к оптимуму оправдывается не только экономией на операции выбора длины шага. В ряде случаев требование строгой монотонности приводит к излишнему измельчению шагов и замедляет сходимость.

При использовании итеративных методов приближение к оптимуму достигается за счет корректировки и взаимной компенсации ошибок в процессе движения. Их сходимость обычно гарантируется при условии стремления к нулю длины шага по мере приближения к решению. При этом движение по *предельной траектории*, получающейся при бесконечно малом шаге, является монотонным, хотя предельные траектории, реализуемые в вычислительном процессе, этим свойством не обладают.

Для решения игр предлагались методы, которые указывают только направление предельной траектории в виде решения дифференциального уравнения, а не в конечно-шаговой реализации (метод Неймана). Однако применение метода Неймана дает траекторию, предельную для итеративного процесса общего типа.

В отношении выбора направления движения итеративные процессы могут быть разделены на два класса, в зависимости

от того, определяется ли выбор этого направления локальными свойствами максимизируемой функции или более сложными способами.

К первому классу относятся алгоритмы, выбирающие в том или ином смысле оптимальное направление с точки зрения поведения целевой функции и ограничений в малой окрестности исходной точки (градиентные методы, в частности, метод обобщенного градиентного спуска, методы проекции градиента, методы возможных направлений). При этом если длина шага достаточно мала, то значение целевой функции монотонно улучшается при каждом шаге.

Ко второму классу относится метод Брауна — Робинсон и его обобщения, где выбор направления связан с решением экстремальной задачи, которая определяется не только локальными свойствами, и движение по выбранному направлению при любой длине шага может приводить к ухудшению значения целевой функции, а улучшение гарантируется только по сумме большого числа достаточно малых шагов.

7. Итеративные методы нахождения экстремума, в частности, методы решения задач линейного и выпуклого программирования были предложены сравнительно давно. Однако их эффективность с вычислительной точки зрения для решения таких задач (особенно задач большой размерности) была обнаружена существенно позже. В настоящее время среди алгоритмов линейного программирования, применяемых в вычислительной практике, наибольшее распространение имеют методы, которые характеризуются «движением по вершинам многогранника условий» и монотонным изменением значения целевой функции. Благодаря тому, что множество допустимых планов представляет собой многогранник, а целевая функция линейна, такое движение через конечное число шагов приводит к точному решению задачи. «Движение по соседним вершинам многогранника» создает излишнюю жесткость, фактически предопределяя «шаг итерации» структурой многогранника условий. При большой размерности задачи это может приводить к слишком большому числу итераций. В ряде конечно-шаговых методов это, кроме того, затрудняет использование информации о приближенном значении оптимума, если она не соответствует «вершине многогранника». В то же время такие особенности задач экономического планирования, как отно-

нительно малая точность исходных данных и высокая вероятность их изменений в будущем, делают менее актуальными требования к точности решения по сравнению с требованием быстро и с возможно меньшими затратами машинного времени получить приближенное решение. Как раз таких свойств естественно ожидать от итеративных алгоритмов. Свобода в выборе шага итерации позволяет вначале, пока опасность «проскочить» оптимум мала, двигаться крупными шагами и уменьшать шаг по мере приближения к оптимуму (регулирование процесса должно постепенно становиться более точным). Это согласуется с результатами экспериментальных расчетов, показывающих, что число итераций сильно зависит от требуемой точности решения и слабо зависит от размерности задачи (см. § 29).

Следует отметить еще такое положительное качество итеративных методов, как предельная простота каждой итерации, благодаря чему машинное время для проведения необходимого числа итераций может быть сделано сравнительно малым и почти не требуется дополнительной памяти машины, как при некоторых конечно-шаговых методах. Кроме того, итеративные методы позволяют использовать практически любую точку в качестве начального приближения. Это делает их нечувствительными к накоплению ошибок вычислений и дает возможность использовать экспертную информацию о локализации решения для ускорения сходимости. Наконец, простота итеративной процедуры облегчает ее экономическую интерпретацию и использование для теоретических исследований в экономике.

Конечно, перечисляя достоинства итеративных алгоритмов, мы не хотим сказать, что конечно-шаговые методы должны быть полностью вытеснены итеративными. В разработке конечно-шаговых алгоритмов и их практическом использовании достигнуты такие успехи, что речь может идти только о рациональном сочетании тех и других, о расширении арсенала алгоритмов, применяемых для решения такой сложной проблемы, как оптимальное планирование хозяйства. Результаты теоретических исследований и применения в вычислительной практике, по-видимому, свидетельствуют, что при решении достаточно большого круга задач итеративные методы вполне могут конкурировать с конечно-шаговыми.

Как уже отмечалось, итеративные алгоритмы наиболее эффективны для нахождения приближенных решений. Наоборот, при нахождении точного оптимума в условиях, когда известно хорошее приближение, но целевая функция или граница допустимого множества не являются гладкими (например, в случае линейного программирования), эффективность итеративных методов должна быть ниже, чем конечно-шаговых. Эти выводы вполне согласуются с результатами экспериментов. Отсюда вытекает, что хорошие результаты при нахождении точных значений оптимума в задачах большой размерности может дать сочетание итеративного метода для нахождения приближенного решения с последующим уточнением решения при помощи конечно-шагового метода.

Найденные итеративным методом приближенное решение и оценки ограничений могут быть использованы для упрощения задачи путем отбрасывания заведомо излишних ограничений и замены неравенств равенствами (например, в задаче линейного программирования можно положить равными нулю многие компоненты вектора-плана, руководствуясь приближенными оценками). После этого приближенное решение следует улучшить каким-либо конечно-шаговым методом, в котором можно использовать в качестве начального более или менее любой план, а не только угловые точки (базисные решения), как в симплекс-методе. Вопрос о возможностях соединения монотонных и итеративных методов исследуется, например, в работе [19], посвященной анализу методов блочного программирования.

8. Ряд важных в теоретическом отношении методов, для которых доказан факт сходимости, не применяется на практике, поскольку эта сходимость слишком медленна. Имеются оценки скорости сходимости градиентного метода и его модификаций, которые проводятся при тех или иных предположениях о гладкости и кривизне минимизируемых функций. Такого типа оценка скорости сходимости дана также в настоящей книге в § 13, п. 3 для итеративного алгоритма общего вида.

К сожалению, для многих практически важных задач предположения гладкости не выполняются. Для таких ситуаций теоретических оценок скорости сходимости почти нет, а в тех случаях, когда они имеются, они оказываются

весьма неутешительными. Так, например, для метода Брауна — Робинсон решения матричных игр известны [77] оценки близости к точке равновесия после  $n$  итераций:  $O(n^{-1/(m+s-2)})$ , где  $m$  и  $s$  — количества чистых стратегий у первого и у второго игроков. Такая слабая оценка, безусловно, не может быть использована в практике. Причиной неудач является, по-видимому, не недостаточность теоретических исследований, а, скорее всего, отсутствие хороших «теоретических» оценок для широкого класса задач, т. е. для каждого конкретного итеративного процесса существуют задачи из данного класса, для которых этот процесс сходится очень медленно.

Однако это не может служить основанием для отрицания практической пригодности итеративных алгоритмов. Вычислительный опыт показывает (см., например, [71]), что итеративные алгоритмы в действительности достаточно быстро сходятся к приближенному решению, в частности, в задачах большого размера, к которым они применялись (см. § 29, п. 2). Видимо, основным доказательством эффективности алгоритма, по крайней мере для задач большой размерности, должны служить результаты его применения к решению большого числа практически интересных задач.

Следует отметить, что для получения эффективно работающих алгоритмов на базе того или иного итеративного метода важное значение имеют различные приемы ускорения сходимости.

Построению и экспериментальному изучению конкретных итеративных методов для решения задачи линейного программирования общего вида посвящена глава VIII третьего раздела книги. В ней предлагается, в частности (§ 23), метод ускорения сходимости процесса, состоящий в периодическом преобразовании координат (перенос начала координат и изменение масштабов), смысл которого как бы в «увеличении» картины, или в использовании все более «крупномасштабных карт» по мере приближения к оптимуму.

9. Область применения линейного программирования для моделирования хозяйственных ситуаций очень широка, но не всеобъемлюща. Широкий класс задач отраслевого перспективного планирования, оперативного управления производством, маршрутизации и т. д. требует введения в модель целочисленных переменных (см., например, [51])

и обычно сводится к задаче, отличающейся от модели линейного программирования только этим условием целочисленности, наложенным на часть переменных. Оказалось, что для приближенного решения таких задач могут с успехом применяться алгоритмы, близкие к итеративным алгоритмам линейного программирования, использующие искусственную рандомизацию на каждом шаге <sup>1)</sup>.

В главе IX описана специальная модель, содержащая непрерывные и дискретные переменные, хозяйственные задачи, для моделирования которых она может быть использована, итеративный алгоритм, используемый для расчетов по ней, и результаты его применения для решения конкретных задач планирования.

Экспериментальные работы, выполненные в последние годы, показывают возможность и эффективность применения описанного здесь алгоритма как метода декомпозиции для решения блочной целочисленной и смешанной задачи большой размерности, включающей блоки, которые представляют собой сетевые модели: задачи маршрутизации и задачи оптимизации сетевого графика типа модели PERT (см. § 26).

10. Настоящая книга является обобщением теоретических и экспериментальных исследований, которые проводились под руководством В. А. Волконского начиная с 1963 г. Впервые основные понятия, необходимые для разработки общей схемы изучения сходимости итеративных процессов (см. раздел первый), были введены в статье В. А. Волконского [13]. Там же были доказаны первая основная теорема (теорема 4.1) и слабый вариант второй основной теоремы (теорема 11.1) в предположении единственности оптимального ответа (см. § 13, п. 1). В [12] и [13] показана также возможность использования общей схемы итеративного процесса для построения алгоритмов декомпозиции и для доказательства сходимости некоторых известных итеративных методов (см. раздел второй).

Доказательство второй основной теоремы для общего случая без предположения единственности оптимального ответа (что позволяет охватить, в частности, важнейший класс задач — задачи линейного программирования) полу-

---

<sup>1)</sup> Исследование ряда стохастических алгоритмов для решения целочисленных задач было начато авторами совместно с И. И. Пятецким-Шапиро и Л. В. Левиной (см. [58], [57], [16], [12], [55]).

чено совместно В. А. Волконским и С. А. Иванковым. Процессы со случайными ошибками (§§ 8, 13) рассматривались в их работе [15]. С. А. Иванкову принадлежит рассмотрение процесса с ошибками (§ 12). Дальнейшее развитие этих результатов и построение общей концепции, связанной с понятием стандартного процесса, достигнуты после того, как В. З. Беленьким был предложен новый подход к доказательству второй основной теоремы, освободивший это доказательство от весьма специальной конструкции. Последующая совместная работа В. З. Беленького и В. А. Волконского привела к построению общей теоретической схемы, изложенной в первом разделе, опирающейся на понятия интегральных кривых многозначного поля  $R$  и присоединенного к  $R$  семейства отображений<sup>1)</sup>. Ими же были получены обобщения, связанные с рассмотрением неограниченного множества  $X$  (§§ 9, 16).

Основная часть материала первого и второго разделов написана В. З. Беленьким, В. А. Волконским и С. А. Иванковым. Главы VI и VII написаны В. А. Волконским. Обобщения, связанные с рассмотрением игр в смешанных стратегиях, выполнены А. Б. Поманским.

Глава VIII третьего раздела написана В. З. Беленьким. Алгоритмы решения общей задачи линейного программирования, описанные в §§ 22, 23, разработаны им совместно с Е. С. Пальцевой. Алгоритмы решения матричных игр, описанные в § 24, предложены С. А. Иванковым. Их практическая разработка проводится совместно с А. Я. Силиным.

Глава IX написана совместно А. Б. Поманским и А. Д. Шапиро. Идея использования стохастического итеративного алгоритма для решения задач целочисленного линейного программирования, реализованная в алгоритме  $D$ , описанном в § 28, впервые высказана В. А. Волконским [14]. Материалы главы IX написаны по публикациям А. Б. Поманского и А. Д. Шапиро [55], [56].

Большое значение для улучшения содержания и изложения материала, особенно первых двух разделов книги, имели советы и замечания Д. Б. Юдина, Э. М. Бравермана

---

<sup>1)</sup> Эти результаты изложены в статье В. З. Беленького, В. А. Волконского, С. А. Иванкова «Об одном общем подходе к исследованию сходимости итеративных процессов», опубликованной в журнале «Экономика и математические методы», т. X, вып. 1, 1974.

и А. В. Малишевского, которым авторы рады выразить глубокую признательность. Мы приносим благодарность также Ю. Б. Гермейеру, Е. Г. Гольштейну, Б. Т. Поляку. Их советы и критика позволили нам избавить книгу от ряда существенных недостатков. Мы выражаем признательность Л. М. Боруновой и О. А. Силиной за большую дружескую помощь, оказанную ими при подготовке рукописи к печати.

11. Для понимания основного математического содержания книги достаточно знакомства с обычным вузовским курсом высшей математики. Точные доказательства, однако, потребовали привлечения более тонких методов, в частности, теории интеграла Лебега и некоторых специальных разделов теории вероятностей (аксиоматика А. Н. Колмогорова, мартингалы). Кроме того, предполагается знакомство читателя с основными постановками задач теории игр и математического программирования.

Для удобства работы над книгой все необходимые сведения предварительного характера собраны в главе I. Хорошим теоретическим руководством читателю могут служить книги С. Карлина [36] и Х. Никайдо [48]. Те разделы книги, которые при первом чтении могут быть опущены без ущерба для понимания основного содержания, отмечены звездочкой (\*).

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

---

## ГЛАВА I

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

#### § 1. Основные понятия и определения выпуклого анализа

**1. Обозначения.** Пространством изменения аргументов  $x, y, p, \dots$  является *евклидово пространство*  $E^m$  конечной размерности  $m \geq 1$ , элементы которого называются *векторами* (или *точками*). Через  $\langle p, x \rangle$  обозначается *скалярное произведение*.

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^m p_i x_i,$$

а через  $\|x\|$  — *норма* (длина) вектора  $x$ , т. е.  $\langle x, x \rangle^{1/2}$ . Эта метрика порождает топологию и сходимость в  $E^m$ . Через  $x_\delta$  будем обозначать  $\delta$ -*окрестность точки*  $x$ , т. е. множество  $\{y \in E^m : \|y - x\| < \delta\}$ .

Пусть  $X \subset E^m$  — некоторое множество. Через  $\rho(x, X)$  обозначается *расстояние* от точки  $x$  до множества  $X$ :

$$\rho(x, X) = \inf_{y \in X} \|x - y\|,$$

в частности,  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

Через  $X_\varepsilon$  обозначается  $\varepsilon$ -*окрестность множества*  $X$ :

$$X_\varepsilon = \bigcup_{x \in X} x_\varepsilon = \{x \in E^m : \rho(x, X) < \varepsilon\}.$$

Точка  $x \in X$  называется *внутренней*, если она содержится в  $X$  вместе с некоторой окрестностью  $x_\delta$  в  $E^m$ . Остальные точки множества  $X$  суть его *граничные* точки.

Множество внутренних точек  $X$  обозначается через  $\text{int } X$ ; множество граничных точек — через  $\partial X$ ; замыкание множества  $X$  — через  $\bar{X}$ ; прямое (декартово) произведение множеств  $X$  и  $Y$  — через  $X \times Y$ :

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*.

Пусть  $f$  — числовая функция, определенная на  $X$ . Через  $\text{Arg max}_{x \in X} f(x)$  обозначается множество точек максимума функции  $f$ :

$$\text{Arg max}_{x \in X} f(x) = \{y \in X \mid f(y) = \max_{x \in X} f(x)\}; \quad (1.1)$$

через  $\text{arg max}_{x \in X} f(x)$  — одна (любая) из точек максимума функции  $f$ , т. е. какая-нибудь точка множества  $\text{Arg max}_{x \in X} f(x)$ . Соответствующие обозначения используются и для точек минимума.

**2. Выпуклые множества.** Отрезком  $[x, y]$  называется множество

$$\{z : z = \alpha x + \beta y, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1\}.$$

Точки  $z = x$  и  $z = y$  называются *концами* отрезка, а остальные точки — *внутренними* точками отрезка.

Множество  $X$  точек из  $E^m$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек  $x$  и  $y$  из  $X$  имеет место соотношение  $[x, y] \subset X$ .

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  — конечное или бесконечное множество точек из выпуклого множества  $X$ . Какие бы ни взять *весовые коэффициенты*  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$ , т. е. числа, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_k \geq 0, \quad \sum_k \alpha_k = 1,$$

точка

$$x = x(\alpha) = \sum_k \alpha_k x_k \quad (1.2)$$

входит в множество  $X$ . Множество точек  $x(\alpha)$ , получающееся когда  $\alpha$  пробегает все возможные значения, называется *выпуклой оболочкой* точек  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ . Таким образом, выпуклая оболочка любого подмножества выпуклого множества  $X$  содержится в  $X$ .

Выпуклая оболочка конечного числа точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется *многогранником (полиэдром)*; точки  $x_k, k = 1, \dots, n$ , — его *вершинами*. Если  $x$  — произвольная точка полиэдра, то ее представление в виде (1.2) называется *разложением по вершинам*, а коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — *барицентрическими координатами* относительно вершин  $x_1, \dots, x_n$ . Барицентрические координаты, вообще говоря, определяются неоднозначно.

*Стандартным симплексом  $S^m$   $m$ -го порядка* называется полиэдр, вершины которого суть  $e_1, \dots, e_m$ , т. е. орты репера в  $E^m$ :

$$S^m = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) : \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^m \alpha_k = 1 \right\}.$$

Множество

$$H = \{x \in E^m : \langle p, x \rangle = a\},$$

определяемое ненулевым вектором  $p \in E^m$  и скаляром  $a$ , называется *гиперплоскостью* в  $E^m$ . Гиперплоскость  $H$  определяет два полупространства:

$$H_1 = \{x : \langle p, x \rangle \leq a\}, \quad H_2 = \{x : \langle p, x \rangle \geq a\}.$$

Оба они являются замкнутыми выпуклыми множествами.

Гиперплоскость  $H$  называется *опорной* к выпуклому множеству  $X$ , если  $X$  содержится в одном из полупространств, определяемых  $H$ , и граница  $\partial X$  имеет с  $H$  хотя бы одну общую точку, называемую *точкой касания*. Более точно,  $X$  является опорной для множества  $X$ , если

$$\inf_{x \in X} \langle p, x \rangle = a. \quad (1.3)$$

(Здесь в качестве точки касания следует допустить и бесконечно удаленную точку.)

Имеют место следующие факты, которые для удобства ссылок мы сформулируем в виде лемм (доказательства см. в [36], стр. 780).

*Лемма 1.1. Пусть  $X$  — выпуклое множество и  $x_0 \notin \bar{X}$ . Тогда существует такая гиперплоскость  $H$ , что*

$$\langle p, x_0 \rangle < a; \quad \langle p, x \rangle \geq a, \quad \forall x \in X.$$

Гиперплоскость  $H$  называется *отделяющей*.

**Лемма 1.2.** Пусть  $x_0$  — граничная точка выпуклого множества  $X$ . Тогда существует опорная гиперплоскость  $H$ , проходящая через  $x_0$ , т. е. существует такой ненулевой вектор  $p = p(x_0)$ , что

$$\inf_{x \in X} \langle p, x \rangle = \langle p, x_0 \rangle$$

и гиперплоскость

$$\langle p, x \rangle = \langle p, x_0 \rangle \quad (1.4)$$

опорна к  $X$ .

Иными словами, любая граничная точка выпуклого множества может служить точкой касания некоторой опорной гиперплоскости. Отметим, что, вообще говоря, такая гиперплоскость не единственна.

Вектор  $p = p(x_0)$ , удовлетворяющий равенству (1.4), будем называть *обобщенной нормалью* к границе  $\partial X$  в точке  $x_0$ . Если  $\partial X$  — дифференцируемое многообразие, то обобщенная нормаль единственна и является нормалью в обычном смысле.

**Замечание.** Если опорная гиперплоскость определена как в (1.3), т. е. с помощью  $\inf$ , а не  $\sup$ , то

$$\langle p, x - x_0 \rangle \geq 0, \quad x \in X, \quad (1.5)$$

и, следовательно, вектор обобщенной нормали направлен в сторону полупространства, содержащего  $X$ .

Условие (1.5) можно принять за определение обобщенной нормали в точке  $x_0$ .

**3. Выпуклые функции.** Числовая функция  $f$ , определенная на выпуклом множестве  $X \subset E^m$ , называется *выпуклой вниз*, если

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall (x, y \in X), \\ \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Если при  $\alpha\beta > 0$  и  $x \neq y$  здесь имеет место строгое неравенство, то функция  $f$  называется *строго выпуклой вниз*. Функция  $f$  называется (*строго*) *выпуклой вверх*, если  $-f$  (*строго*) выпукла вниз.

Легко проверяются следующие свойства выпуклых вниз функций.

1) При  $\alpha_k \geq 0$ ,  $\sum_k \alpha_k = 1$  и при  $x_1, \dots, x_k \in X$  имеет место неравенство

$$f\left(\sum_k \alpha_k x_k\right) \leq \sum_k \alpha_k f(x_k) \leq \max_k f(x_k).$$

Отсюда следует, в частности, что если выпуклая вниз функция  $f$  определена на многограннике, то она ограничена сверху на нем.

2) Если функции  $f_k$  выпуклы и  $\alpha_k \geq 0$ , то  $\sum \alpha_k f_k$  — выпуклая функция.

3) Если функции  $f_k$  выпуклы вниз, то такова же и функция  $\sup_k f_k$ , в частности,  $\max(f_1, f_2)$ .

4) Если  $f$  строго выпукла вниз, то она имеет не более одного локального минимума, который является всегда глобальным минимумом.

5) При любом  $a$  множество  $\{x \in X : f(x) \leq a\}$  выпукло.

**4. Обобщенный градиент выпуклой вверх функции.** Обобщенным градиентом в точке  $x^0$  функции  $f$ , определенной и выпуклой вверх на некотором открытом множестве  $X \subset E^m$ , содержащем точку  $x^0$ , называется всякий вектор  $p$  из множества

$$\hat{f}(x^0) = \{p \in E^m : \langle p, x - x^0 \rangle \geq f(x) - f(x^0), \forall x \in X\}. \quad (1.6)$$

Покажем, что во-первых, множество  $\hat{f}(x^0)$  не пусто; во-вторых, данное определение корректно в том смысле, что множество  $\hat{f}(x^0)$  не зависит от того, какое именно открытое множество  $X$  фигурирует в (1.6), лишь бы  $x^0 \in X$ ; в-третьих, множество  $\hat{f}(x^0)$  ограничено.

1) Обозначим через  $(X, f)$  множество в пространстве  $E^{m+1}$  (точки которого будем обозначать греческими буквами):

$$(X, f) = \{\xi = (x, u) : x \in X, u \leq f(x)\}. \quad (1.7)$$

Дополнительную ось  $u$  называют *вертикальной*, а множество  $l_x = \{(x, u) : -\infty < u < \infty\}$  — *вертикалью*, проходящей через точку  $x \in E^m$ . С геометрической точки зрения  $(X, f)$  представляет собой полуцилиндр, ограниченный сверху графиком  $\{(x, f(x)) : x \in X\}$  функции  $f$ . Так как  $f$  выпукла вверх, то  $(X, f)$  — выпуклое множество,

причем точка  $\xi^0 = (x^0, f(x^0))$  является, очевидно, его граничной точкой. Согласно лемме 1.2 существует ненулевой вектор  $v \in E^{m+1}$  обобщенной нормали к множеству  $(X, f)$  в точке  $\xi^0$ . Если положить  $v = (p, v)$ ,  $p \in E^m$ ,  $v$  — скаляр, то можно записать (см. (1.5))

$$\langle p, x - x^0 \rangle + v(u - f(x^0)) \geq 0, \quad \forall (x, u) \in (X, f).$$

Это соотношение может выполняться только при  $v < 0$ . Действительно, если  $v > 0$ , то взяв любое  $x \in X$  и устремляя  $u$  к  $-\infty$ , приходим к противоречию; если  $v = 0$ , то должно быть и  $p = 0$ , поскольку точка  $x^0$  содержится в  $X$  вместе с некоторой окрестностью, но это невозможно, так как  $v \neq 0$ . Итак,  $v < 0$  и поэтому можно нормировать нормаль  $v$  так, чтобы было  $v = -1$ ; тогда  $v = (p, -1)$  и написанное выше соотношение эквивалентно соотношению (1.6).

Таким образом, множество  $\hat{f}(x^0)$  обобщенных градиентов функции  $f$  в точке  $x^0$  не пусто и каждый вектор  $p \in \hat{f}(x^0)$  определяет обобщенную нормаль  $v = (p, -1)$  к множеству  $(X, f)$  в точке  $\xi^0 = (x^0, f(x^0))$  или, иначе, гиперплоскость  $H_p$ , опорную к  $(X, f)$  в точке  $\xi$ , уравнение (1.4) которой запишется в виде

$$u = \langle p, x - x^0 \rangle + f(x^0). \quad (1.8)$$

Если множество  $\hat{f}(x^0)$  состоит из единственной точки  $p$ , то это означает, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^0$  и  $p = \text{grad } f(x^0)$ . Уравнение (1.8) является при этом обычным уравнением касательной плоскости.

2) Для доказательства инвариантности определения (1.6) относительно выбора открытого множества  $X \ni x^0$  достаточно показать, что множество (1.6) совпадает с множеством

$$f^\delta(x^0) = \{q \in E^m: \langle q, x - x^0 \rangle \geq f(x) - f(x^0), \quad \forall x \in x_\delta^0\}, \quad (1.6 \text{ а})$$

где  $x_\delta^0$  — (произвольная)  $\delta$ -окрестность точки  $x^0$ , содержащаяся в  $X$ . Ясно, что  $f^\delta(x^0) \supset \hat{f}(x^0)$ , так как  $x_\delta^0 \subset X$ . Покажем, что  $f^\delta(x^0) \subset \hat{f}(x^0)$ .

Пусть  $q \in f^\delta(x^0)$  и  $x$  — произвольная точка множества  $X$ . Если  $x \in x_\delta^0$ , то соотношение (1.6) для точки  $x$  выполнено в силу (1.6а). Если  $x \notin x_\delta^0$ , то возьмем в  $x_\delta^0$  любую

точку  $y$ , лежащую на отрезке  $[x^0, x]$ , т. е.

$$y = (1 - \lambda)x^0 + \lambda x, \quad 0 < \lambda < 1.$$

В силу выпуклости  $f$  вверх имеем

$$f(y) \geq (1 - \lambda)f(x^0) + \lambda f(x).$$

Записав эти соотношения в виде

$$y - x^0 = \lambda(x - x^0), \quad f(y) - f(x^0) \geq \lambda[f(x) - f(x^0)],$$

получим, исходя из (1.6а) с учетом того, что  $y \in x_\delta^0$ ,

$$\lambda \langle q, x - x^0 \rangle = \langle q, y - x^0 \rangle \geq f(y) - f(x^0) \geq \lambda[f(x) - f(x^0)],$$

т. е.  $q \in \hat{f}(x^0)$ , так как  $\lambda > 0$ .

Таким образом, множество  $\hat{f}(x^0)$  полностью определяется поведением функции  $f$  в сколь угодно малой окрестности точки  $x^0$  и, следовательно, понятие обобщенного градиента в принципе локально.

3) Для доказательства ограниченности множества  $\hat{f}(x^0)$  заметим, что если функция  $f$  определена в окрестности  $x_\delta^0$ , то она ограничена снизу на любом многограннике, содержащемся в  $x_\delta^0$  (см. п. 3), и, следовательно, ограничена на сфере  $S_\delta = \{x : \|x - x^0\| = \delta\}$  (поскольку можно вписать в  $x_\delta^0$  многогранник, содержащий в себе  $x_\delta^0$ ) некоторой константой  $M$ . Поэтому для любого  $p \in \hat{f}(x^0)$  можно подобрать точку  $x \in S_\delta$  так, что  $\langle p, x - x^0 \rangle = -\|p\|\delta$ , и тогда

$$-\|p\|\delta \geq f(x) - f(x^0),$$

т. е.

$$\|p\| \leq \frac{f(x^0) - f(x)}{\delta} < \frac{f(x^0) - M}{\delta}, \quad \forall p \in \hat{f}(x^0). \quad (1.9)$$

Все изложенное в этом пункте справедливо, конечно, для произвольной точки  $x = x^0$  открытого множества  $X$ , на котором определена выпуклая вверх функция  $f$ .

5. **Квазивыпуклые функции.** Функция  $f$ , определенная на выпуклом множестве, называется *квазивыпуклой вниз*, если ее значения внутри произвольного отрезка не превосходят максимального из значений на его концах или, иначе, ни на каком отрезке  $f$  не имеет внутренних максимумов. Формальное определение: из равенства

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.10)$$

следует  $f(z) \leq \max(f(x), f(y))$ . Эквивалентное определение: при любом  $a$  множество

$$\{x : f(x) \leq a\} \quad (1.11)$$

выпукло.

Квазивыпуклая вниз функция называется *сильно квазивыпуклой вниз*, если из (1.10) и условия  $f(x) \neq f(y)$  следует  $f(z) < \max(f(x), f(y))$ . Эквивалентное определение: при любом  $a$  множество (1.11) выпукло и множество  $\{x : f(x) < a\}$ , если оно не пусто, содержит все внутренние точки множества (1.11).

Функция  $f$  называется (*сильно*) *квазивыпуклой вверх*, если  $-f$  (*сильно*) квазивыпукла вниз.

Каждая выпуклая функция, очевидно, сильно квазивыпукла.

## § 2. Точечно-множественные отображения

1. **Замкнутость и полунепрерывность сверху.** Отображение  $V : X \rightarrow Y$  называется *точечно-множественным* (многозначным), если каждому элементу  $x \in X$  ставится в соответствие некоторое множество (образ)  $V(x) \subset Y$ . Такое отображение назовем *ограниченным*, если существует константа  $D$  такая, что

$$\|v\| \leq D, \quad \forall (x \in X, v \in V(x)).$$

Обобщением на точечно-множественные отображения понятия непрерывности обычных точечно-точечных (однозначных) отображений является понятие полунепрерывности сверху.

**Определение 2.1.** *Точечно-множественное отображение  $V : X \rightarrow Y$  называется полунепрерывным сверху в точке  $x \in X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что  $V(x_\delta) \subset V_\varepsilon(x)$ , где  $V(x_\delta)$  — образ  $\delta$ -окрестности точки  $x$ , а  $V_\varepsilon(x)$  —  $\varepsilon$ -окрестность множества  $V(x)$ . Это отображение называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке  $x \in X$ .*

Ясно, что если  $V$  — однозначное отображение, то понятия непрерывности и полунепрерывности сверху совпадают. Весьма близким к этому определению является понятие замкнутости.

Определение 2.2 (см. [48]). Точечно-множественное отображение  $V: X \rightarrow Y$  называется замкнутым в точке  $x \in X$ , если из условий  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ ,  $y_n \in V(x_n)$  следует  $y \in V(x)$ . Это отображение называется замкнутым, если оно замкнуто в каждой точке  $x \in X$ .

Неэквивалентность этих понятий иллюстрируется в [48] простым примером<sup>1)</sup> точечно-точечного отображения  $f: E^1 \rightarrow E^1$ , где

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

Соотношение между понятиями замкнутости и полунепрерывности сверху выясняет следующая

Лемма 2.1 (см. [48], стр. 95). Если

а) каждое множество-образ  $V(x)$  замкнуто в  $Y$  и отображение  $V$  полунепрерывно сверху, то

б)  $V$  замкнуто.

Если  $Y$  — компакт (т. е. если  $V$  ограничено), то из б) следует а).

Таким образом, если  $Y$  — компакт, то условия а) и б) леммы 2.1 эквивалентны. Второе из них легче для проверки, а первое удобнее для использования.

Весьма полезна также следующая лемма о продолжении замкнутого отображения (см. [48], § 4.4).

Лемма 2.2 Пусть  $V: X \rightarrow Y$  — замкнутое отображение множества  $X$  в компакт  $Y$  и  $\bar{X}$  — замыкание  $X$ . Тогда отображение  $\bar{V}: \bar{X} \rightarrow Y$ , определяемое равенством

$$\bar{V}(x) = \begin{cases} V(x) & \text{для } x \in X, \\ \{v: v = \lim v_n, v_n \in V(x_n), x_n \in X, x_n \rightarrow x\}, & \end{cases} \quad (2.1)$$

замкнуто и в силу леммы 2.1 полунепрерывно сверху.

## 2. Отображения типа $K$ .

Определение 2.3. Точечно-множественное отображение  $V: X \rightarrow Y$  назовем отображением типа  $K$  ( $K$ -отображением), если оно удовлетворяет условиям

<sup>1)</sup> В примечании переводчика к этому примеру указано на то, что в книге [36] понятия замкнутости и полунепрерывности сверху ошибочно считаются эквивалентными.

а) при каждом  $x \in X$  множество  $V(x)$  не пусто и выпукло;

б)  $V$  замкнуто.

Приведем пример важного  $K$ -отображения. Пусть  $X$  и  $Y$  — выпуклые компакты и  $f(y, x)$  — непрерывная функция, определенная на  $Y \times X$ , такая, что при каждом  $x \in X$  множество

$$Z(x) = \text{Arg} \max_{y \in Y} f(y, x) \quad (2.2)$$

выпукло. Тогда отображение  $x \rightarrow Z(x)$ ,  $x \in X$  является  $K$ -отображением. Действительно, так как  $Y$  — компакт, то множества  $Z(x)$  не пусты. Убедимся в замкнутости  $Z$ . Пусть  $x_n \rightarrow x$ ,  $z_n \rightarrow z$ ,  $z_n \in Z(x_n)$ . Тогда

$$f(z_n, x_n) \geq f(y, x_n), \quad \forall y \in Y, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя в этих соотношениях к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим в силу непрерывности  $f$

$$f(z, x) \geq f(y, x) \quad \forall y \in Y,$$

т. е.  $z \in Z(x)$ , что и требуется. Рассуждения такого рода стандартны, и в дальнейшем мы их воспроизводить не будем.

Заметим, в частности, что если функция  $f$  выпукла вверх по  $y$  при каждом фиксированном  $x$ , то выпуклость множеств (2.2) имеет место, так как (2.2) можно записать в виде

$$Z(x) = \{y \in Y: f(y, x) \geq F(x)\},$$

где

$$F(x) = \max_{y \in Y} f(y, x).$$

Из этого представления следует (см. § 1, п. 3, свойство 5), что  $Z(x)$  — выпуклые множества, и поэтому для выпуклой вверх по  $y$  функции  $f$  отображение (2.2) имеет тип  $K$ .

Другим примером  $K$ -отображения может служить непрерывное точно-точечное отображение компакта  $X$  в компакт  $Y$ .

Легко проверяется, что если отображения  $Z_i: X \rightarrow Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , суть  $K$ -отображения, то их декартово

произведение  $Z: X \rightarrow Y$ , определяемое равенствами

$$Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_N,$$

$$Z(x) = Z_1(x) \times Z_2(x) \times \dots \times Z_N(x),$$

тоже есть  $K$ -отображение.

**3. Теорема Какутани.** Введение понятия  $K$ -отображения связано с тем, что в нем объединены необходимые свойства точечно-множественных отображений, используемые на протяжении всей книги. Именно для таких отображений Какутани доказал классическую теорему о неподвижной точке, являющуюся одной из фундаментальных в теории игр и программировании (этим объясняется и наименование  $K$ : Kakutani). Насколько нам известно, доказательство этой теоремы впервые на русском языке появилось в уже упоминавшейся книге [48].

**Определение 2.4.** Пусть на множестве  $X$  задано точечно-множественное отображение  $Z: X \rightarrow X$ . Точка  $x \in X$  называется неподвижной точкой отображения  $Z$ , если  $x \in Z(x)$ .

**Теорема 2.1 (Какутани).** Пусть на (непустом) выпуклом компакте  $X \subset E^m$  задано точечно-множественное отображение  $Z: X \rightarrow X$ . Если  $Z$  является  $K$ -отображением, то оно имеет неподвижную точку.

**4. Полунепрерывные сверху функции.** Функция  $f$ , определенная на множестве  $X \subset E^m$ , называется полунепрерывной сверху, если

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x^0} f(x) \leq f(x^0), \quad \forall x^0 \in X.$$

Полунепрерывная сверху функция, заданная на компакте, достигает максимума (см. [36], стр. 791).

**Лемма 2.3.** Пусть  $V: X \rightarrow Y$  — замкнутое отображение, заданное на компакте  $X$ , причем множества  $V(x)$  не пусты и ограничены при всех  $x \in X$ . Пусть, кроме того, на  $Y$  определена непрерывная функция  $g(y)$ . Тогда функция

$$\gamma(x) = \max_{y \in V(x)} g(y), \quad x \in X,$$

ограничена на  $X$ .

**Доказательство.** Из условий леммы следует, что  $\gamma$  определена и полунепрерывна сверху на  $X$ . В силу

компактности  $X$  она достигает максимума и, следовательно, ограничена.

**Следствие.** Пусть  $X$  — выпуклый компакт и  $f$  — выпуклая вверх функция, определенная не только на  $X$ , но и на некотором открытом множестве  $\tilde{X} \supset X$ . Тогда всюду на  $X$  существует обобщенный градиент функции  $f$  и он равномерно ограничен.

Действительно, если  $x^0 \in X$ , то  $x^0 \in \tilde{X}$  и поэтому в точке  $x^0$  существует обобщенный градиент, т. е. множество

$$\hat{f}(x^0) = \{p : \langle p, x - x^0 \rangle \geq f(x) - f(x^0), \quad \forall x \in \tilde{X}\}$$

не пусто при любом  $x^0 \in X$ . Легко видеть, что отображение  $x \rightarrow \hat{f}(x)$ ,  $x \in X$ , замкнуто и, как показано в § 1, п. 4, при каждом  $x$  множество  $\hat{f}(x)$  ограничено. Если в лемме 2.3  $g(p) = \|p\|$ , то мы получим требуемое следствие.

### § 3. Некоторые сведения из теории функций вещественной переменной и теории вероятностей

В этом параграфе напоминаются некоторые результаты из теории функций вещественной переменной, которые нам понадобятся при доказательстве теорем о сходимости итеративных процессов.

**1. Функции на полуоси  $t \geq 0$ .** Рассмотрим множество непрерывных векторных функций  $x(t)$  вещественной переменной  $t$ , определенных на полуоси  $t \geq 0$ , со значениями в  $E^m$ . Мы будем говорить, что последовательность  $\{x^j(t)\}$  сходится на отрезке  $\Delta$  к предельной функции  $\bar{x}(t)$ , если имеет место равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{t \in \Delta} \|x^j(t) - \bar{x}(t)\| = 0. \quad (3.1)$$

Последовательность  $\{x^j(t)\}$  сходится к  $\bar{x}(t)$ , если соотношение (3.1) имеет место для любого конечного отрезка  $\Delta \subset [0, \infty)$ .

Функция  $x(t)$  удовлетворяет условию Липшица, если существует постоянная  $D$  такая, что

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| < D |t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \geq 0. \quad (3.2)$$

**Лемма 3.1.** Если семейство функций со значениями в компакте  $X \subset E^m$  таково, что все функции удовлетворяют условию (3.2) с одной и той же постоянной  $D$  то всякая бесконечная последовательность функций этого семейства содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой также удовлетворяет условию (3.2) с той же постоянной  $D$ .

**Доказательство.** Зафиксируем некоторый отрезок  $\Delta \subset [0, \infty)$ . В применении к отрезку  $\Delta$  лемма 3.1 есть не что иное, как вариант известной теоремы Арцела (см., например, [38]). Возьмем теперь бесконечную последовательность расширяющихся отрезков  $\Delta_k = [0, k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Пусть последовательность  $\{x_k^i(t)\}_{i=1}^{\infty}$  сходится на отрезке  $\Delta_k$ . Тогда диагональная последовательность  $\{x_k^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$  сходится на всей полуоси. Лемма доказана.

**2. Измеримые функции. Интеграл Лебега.** Мы не можем в рамках этой книги сколько-нибудь кратко изложить теорию измеримых множеств и интеграла Лебега (см., например, [47]). Ограничимся лишь необходимыми формулировками.

**Лемма 3.2.** Если  $v(\tau)$  — ограниченная измеримая функция, то неопределенный интеграл Лебега

$$\int_a^t v(\tau) d\tau$$

существует и является функцией, почти всюду дифференцируемой. При этом производная неопределенного интеграла почти всюду совпадает с подынтегральной функцией.

**Лемма 3.3.** Если функция  $x(t)$  удовлетворяет условию (3.2), то почти всюду на полуоси  $t \geq 0$  существует производная  $\dot{x}(t)$ , являющаяся измеримой функцией. При этом для любых  $s, t \geq 0$

$$x(t) = x(s) + \int_s^t \dot{x}(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

**Лемма 3.4.** Если на отрезке  $[a, b]$  числовой оси определены ограниченная измеримая векторная функция  $v(t)$  со значениями в выпуклом множестве  $X$  и числовая

весовая функция  $p(t)$ :

$$p(t) \geq 0, \quad \int_a^b p(t) dt = 1,$$

то

$$\int_a^b p(t) v(t) dt \in X. \quad (3.4)$$

Доказательство опускаем (ср. с формулой (1.2)).

**3. Производные числа.** Пусть  $u(t)$  — числовая функция вещественной переменной. Числа

$$u^+(t) = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau},$$

$$u^-(t) = \underline{\lim}_{\tau \rightarrow -0} \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau}$$

называются *верхней правой* и *верхней левой* производными функции  $u$  в точке  $t$ .

**Лемма 3.5** (см. [9], стр. 93). *Если  $u(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то*

$$\frac{u(b) - u(a)}{b - a} \leq \sup_{a \leq t \leq b} u^+(t),$$

$$\frac{u(b) - u(a)}{b - a} \leq \sup_{a \leq t \leq b} u^-(t).$$

**Лемма 3.6** (см. [47], стр. 187). *Если  $u(t)$  — убывающая функция, заданная на отрезке  $[a, b]$ , то она почти всюду имеет производную  $\dot{u}(t)$ , являющуюся измеримой функцией. При этом имеет место соотношение*

$$\int_a^b \dot{u}(t) dt \geq u(b) - u(a), \quad (3.5)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

**4. Сведения из теории вероятностей.** Предполагается, что читатель, интересующийся результатами о стохастических итеративных процессах (§§ 8, 9, 13, 20, 21), знаком с основами теории вероятностей и теории случайных последовательностей. При доказательствах теорем сходимости в §§ 8, 9 из теории случайных последовательностей используются только теоремы о мартингалах и полумар-

тингалах. Они будут приведены ниже вместе с определением условных вероятностей как случайных функций, которое часто оказывается незнакомым для нематематиков.

Пусть  $\Omega$  — пространство элементарных событий с вероятностной мерой  $P(A)$ , определенной на  $\sigma$ -алгебре (борелевском поле)  $\mathfrak{A}$  подмножеств  $\Omega$ :  $A \in \mathfrak{A}$ . Случайной величиной называется любая числовая функция  $x = x(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , измеримая относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{A}$ . Случайной величиной будет также называться векторная  $\mathfrak{A}$ -измеримая функция со значениями в конечномерном евклидовом пространстве  $E^m$ .

Условной вероятностью  $P(A|B)$  события  $A$  при условии, что осуществилось  $B$ , когда  $P(B) > 0$ , называется отношение  $\frac{P(AB)}{P(B)}$ . Следующее определение распространяет понятие условной вероятности на случай, когда условие имеет нулевую вероятность.

Пусть  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$  — некоторая  $\sigma$ -алгебра измеримых множеств (событий).

Определение 3.1. Условной вероятностью  $P(A|\mathfrak{B})$  события  $A \in \mathfrak{A}$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{B}$  называется случайная величина  $\zeta_A(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , измеримая относительно  $\mathfrak{B}$  и такая, что

$$\int_B \zeta_A(\omega) P(d\omega) = P(AB), \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Если  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{B}$  порождается некоторой случайной величиной  $\xi(\omega)$ , т. е. событиями вида  $\{\xi(\omega) \leq c\}$ , где  $c$  — произвольная константа, то говорят об условной вероятности  $P(A|\xi)$  события  $A$  относительно случайной величины  $\xi$ . Это определение является обобщением определения условной вероятности относительно случайной величины в виде

$$\begin{aligned} P(A|\xi = a) &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{P(A|\xi \in [a, a + \Delta a])}{P(\xi \in [a, a + \Delta a])} = \\ &= \frac{1}{p_\xi(a)} \frac{d}{da} P(A|\xi < a), \end{aligned}$$

где  $p_\xi(a) = \frac{d}{da} P(\xi < a)$  — плотность распределения величины  $\xi$ . Последнее определение удобно применять только в случае, когда плотность  $p_\xi(a)$  существует. Аналогично

определяется условная вероятность относительно векторной случайной величины.

**Определение 3.2.** Условным математическим ожиданием  $M(x|\mathfrak{B})$  (скалярной или векторной) случайной величины  $x(\omega)$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{B}$  называется случайная величина  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  (соответственно скалярная или векторная), измеримая относительно  $\mathfrak{B}$  и такая, что

$$\int_B \xi(\omega) P(d\omega) = \int_B x(\omega) P(d\omega), \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Если  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{B}$  порождается (скалярной или векторной) случайной величиной  $\xi(\omega)$ , то говорят об условном математическом ожидании  $M(x|\xi)$  величины  $x$  относительно величины  $\xi$ .

**Определение 3.3.** Пусть на пространстве с вероятностной мерой  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  задана последовательность  $x_0(\omega), x_1(\omega), \dots$  (скалярных или векторных) случайных величин. Эта последовательность называется мартингалом, если  $M(x_{n+1}|x_0, \dots, x_n)$  для  $n = 0, 1, \dots$  существует и равно  $x_n(\omega)$  с вероятностью единица, или почти наверное (п. н.):

$$M(x_{n+1}|x_0, \dots, x_n) = x_n \quad (\text{п. н.}).$$

**Определение 3.4.** Последовательность случайных величин  $x_0(\omega), x_1(\omega), \dots$  называется полумартингалом, если  $M(x_{n+1}|x_0, \dots, x_n)$  существует и подчиняется неравенству

$$M(x_{n+1}|x_0, \dots, x_n) \geq x_n \quad (\text{п. н.}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Очевидно, мартингал есть частный случай полумартингала. Из определения полумартингала следует, что

$$Mx_{n+1} \geq Mx_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Теорема 3.1.** Для неотрицательного полумартингала  $x_n \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , справедливо следующее неравенство (неравенство Колмогорова):

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} x_k \geq c\right) \leq \frac{Mx_n}{c}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.6)$$

для любого  $c > 0$ .

**Теорема 3.2.** Если  $\{x_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , — полумартингал и  $\lim_{n \rightarrow \infty} M|x_n| < \infty$ , то почти наверное существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega);$$

Если, кроме того,  $x_n \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , то для любого  $c > 0$

$$P\left(\sup_{n=0, 1, \dots} x_n \geq c\right) \leq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} Mx_n}{c}. \quad (3.7)$$

**Теорема 3.3.** Пусть последовательность векторных случайных величин  $\{x_n\}$  есть мартингал и последовательность  $\{M\|x_n\|^2\}$  ограничена. Тогда почти наверное существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega)$ .

Более подробные сведения о мартингалах и полумартингалах, включая доказательства приведенных теорем, можно найти, например, в [61] или в [26].

## ГЛАВА II

### ИТЕРАТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

В наиболее общей форме итеративный процесс есть процесс, генерирующий последовательность точек  $x_0, x_1, \dots$  в пространстве  $E^m$ , начальная из которых  $x_0$  задается, а последующие рекуррентно вычисляются согласно определенному алгоритму, предназначенному для решения некоторой задачи. Если искомое множество решений задачи обозначить через  $X^*$ , то процесс сходится, если

$$\rho(x_n, X^*) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Вряд ли можно получить содержательные утверждения о сходимости, если рассматривать класс алгоритмов такого общего вида. Однако задачи теории игр и программирования обладают определенной спецификой, позволяющей построить весьма общую схему итеративных процессов, охватывающую многие из известных в этой области итеративных методов и в то же время поддающуюся плодотворному анализу.

Прежде чем переходить к существу дела, сделаем несколько общих замечаний. Первое из них касается уточнения терминологии, именно различия между терминами «процесс» и «алгоритм». Выше мы не делали такого различия и употребляли оба термина как равноправные. Ниже под термином итеративный алгоритм мы будем понимать процедуру, однозначно генерирующую последовательность  $\{x_n\}$ , как только задано  $x_0$ , а под итеративным процессом будет пониматься семейство алгоритмов некоторого определенного вида, решающих одну общую задачу. Точный смысл этого замечания прояснится в § 5.

Второе замечание — относительно условия компактности основного множества  $X$ . В книге всегда (кроме § 9, § 16 п. 3) рассматриваются итеративные процессы на компактах. Условие компактности, по существу, не обед-

няет класс решаемых задач, так как искомое множество решений, если оно не пусто, всегда может быть локализовано, пусть в достаточно широкой, но ограниченной области. В то же время оно значительно облегчает изучение процесса, освобождая от трудностей, связанных с его поведением при удалении в бесконечность.

Наконец, третье замечание — относительно структуры изложения в данной главе. В §§ 4, 6 строится основной аппарат — теорема о сходимости регулярных последовательностей и теорема вложения для интегральных кривых многозначного векторного поля. В §§ 5, 7 формулируются основные понятия — стандартный процесс и функция Ляпунова — и результат — теорема 7.2 (критерий сходимости). §§ 8 и 9 посвящены рассмотрению процессов со случайными ошибками.

#### § 4. Регулярные последовательности на выпуклых компактах. Признак сходимости

**1. Регулярная последовательность на выпуклом компакте.** Пусть  $X \subset E^m$  — выпуклый компакт и  $\{x_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , — некоторая последовательность точек из  $X$ . С этой последовательностью естественным образом связывается понятие *траектории* — ломаной, звеньями которой являются отрезки  $[x_n, x_{n+1}]$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Так как  $X$  — выпуклое множество, то траектория целиком расположена в  $X$ . Точки  $x_n$  будем называть *вершинами* ломаной (траектории).

Если траекторию параметризовать каким-либо способом с помощью вещественного параметра  $t$ , то ее можно рассматривать как векторную функцию  $x(t)$ . Для параметризации ломаной достаточно указать значения параметра  $t$ , отвечающие вершинам  $x_n$ , т. е. достаточно задать последовательность вещественных чисел  $\{t_n\}$ . Тогда

$$x(t) = x_n + (t - t_n) \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.1)$$

где  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ ,  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ .

Если последовательность  $\{t_n\}$  удовлетворяет условиям

$$\text{а) } \Delta t_n > 0; \quad \text{б) } \Delta t_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \Delta t_n = \infty \quad (4.2)$$

и  $t_0 = 0$ , то такую последовательность и связанную с ней параметризацию назовем *правильной*. При правильной параметризации траектория  $x(t)$  представляет собой векторную функцию, определенную на полуоси  $t \geq 0$ . Параметр  $t$  при этом удобно называть *временем*.

**Определение 4.1.** Последовательность  $\{x_n\}$  точек на выпуклом компакте  $X$  назовем *регулярной*, если существует правильная последовательность вещественных чисел  $\{t_n\}$  такая, что

$$\left\| \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n} \right\| < D, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.3)$$

при некотором  $D > 0$ .

Соответствующую траекторию  $x(t)$  также будем называть *регулярной*. Легко видеть, что регулярная траектория  $x(t)$  удовлетворяет условию Липшица (3.2) на всей полуоси  $t \geq 0$ .

**2. Предельные траектории регулярной последовательности.** Пусть  $\{x_n\} \sim x(t)$  — регулярные последовательность и ее траектория. Рассмотрим семейство «хвостов» траектории  $x(t)$ , т. е. семейство функций

$$x^n(t) = x(t + t_n), \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Все функции этого семейства удовлетворяют условию (3.2) с одной и той же константой  $D$ . Поэтому согласно лемме 3.1 всякая бесконечная последовательность «хвостов» содержит сходящуюся подпоследовательность. Кривую  $\bar{x}(t)$  будем называть *предельной траекторией* последовательности  $\{x_n\}$ , если  $x^{n_k}(t) \rightarrow \bar{x}(t)$  для некоторой подпоследовательности номеров  $n_k \rightarrow \infty$ .

**Лемма 4.1.** Каждая точка предельной траектории есть точка накопления последовательности  $\{x_n\}$ . Обратное, каждая точка накопления есть начало некоторой предельной траектории.

**Доказательство.** Пусть подпоследовательность  $\{x^{n_k}(t)\} = \{x(t + t_{n_k})\}$  сходится при  $k \rightarrow \infty$  к предельной траектории  $\bar{x}(t)$ , и  $y = \bar{x}(s)$  — некоторая фиксированная точка на ней. Тогда  $x(s + t_{n_k}) \rightarrow y$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Обозначим через  $t_{m_k}$  ближайший к  $s + t_{n_k}$  момент времени в последовательности  $\{t_n\}$ . Так как согласно (4.2б)  $\Delta t_n \rightarrow 0$ , то

$$|t_{m_k} - (s + t_{n_k})| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Поскольку  $x(t)$  удовлетворяет условию (3.2), то

$$\|x_{m_k} - \bar{x}(s + t_{n_k})\| < D |t_{m_k} - (s + t_{n_k})| \rightarrow 0$$

и, следовательно,  $x_{m_k} \rightarrow y$ .

Обратное очевидно: если  $y$  есть точка накопления для последовательности  $\{x_n\}$ , т. е. если  $x_{n_k} \rightarrow y$ , то, взяв предельную траекторию  $\bar{x}(t)$  для семейства  $\{x(t + t_{n_k})\}$ , получим  $\bar{x}(0) = y$ .

**Следствие.** Если  $\bar{x}(t)$  — предельная траектория, то при любом фиксированном  $s > 0$  кривая  $\bar{x}(t) = \bar{x}(t + s)$ ,  $t \geq 0$ , тоже является предельной траекторией. Действительно, если  $\bar{x}(t)$  определяется сходящейся к ней подпоследовательностью  $\{x^{n_k}(t)\}$ , а  $x_{m_k} \rightarrow \bar{x}(s)$ , то согласно (4.4)  $t_{m_k} - t_{n_k} \rightarrow s$ , и поэтому подпоследовательность  $\{x^{m_k}(t)\}$  сходится к  $\bar{x}(t + s)$ .

**3. Первая основная теорема.** Следующая теорема дает достаточные условия сходимости регулярной последовательности  $\{x_n\}$  к некоторому интересующему нас замкнутому множеству  $\tilde{X} \subset X$ .

**Теорема 4.1 (признак сходимости).** Если на  $X$  можно определить непрерывную функцию  $U$  такую, что

а)  $U(x) = 0$  при  $x \in \tilde{X}$ ,  $U(x) > 0$  при  $x \notin \tilde{X}$ ;

б)  $U$  строго убывает вдоль любой предельной для последовательности  $\{x_n\}$  траектории в каждой ее (траектории) точке, не принадлежащей множеству  $\tilde{X}$ ,

то последовательность  $\{x_n\}$  сходится к множеству  $\tilde{X}$ , т. е.  $\rho(x_n, \tilde{X}) \rightarrow 0$ .

**Замечание.** В силу леммы 4.1 условие б) можно сформулировать так:  $U$  убывает вдоль любой предельной траектории в ее начальной точке, если она (точка) не принадлежит  $\tilde{X}$ .

**Доказательство.** Предположим, что теорема неверна. Тогда найдется точка накопления  $x$  последовательности  $\{x_n\}$ , не принадлежащая множеству  $\tilde{X}$ . Согласно лемме 4.1 существует предельная траектория  $\bar{x}(t)$  такая, что  $\bar{x}(0) = x$ . Так как  $x \notin \tilde{X}$ , то  $U(x) > 0$ , и согласно условию б) в любой окрестности точки  $x$  на предельной траектории  $\bar{x}(t)$  найдется некоторая другая точка  $y$  такая, что

$$U(x) > U(y).$$

В силу непрерывности  $U$  можно взять  $y$  настолько близким к  $x$ , чтобы было  $U(y) > 0$ , т. е.  $y \notin \tilde{X}$ .

Так как  $x$  и  $y$  находятся на предельной траектории, то по лемме 4.1 найдутся последовательности  $\{x_{n_k}\}$ ,  $\{x_{m_k}\}$  такие, что

$$x_{n_k} \rightarrow x, \quad x_{m_k} \rightarrow y.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что  $m_k < n_k$  и что, кроме того, найдется некоторое  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$U(x_{m_k}) < U(x_{n_k}) - \varepsilon \quad (4.5)$$

и

$$U(y) < U(x) - \varepsilon.$$

Пусть

$$\tau_k = \max \{t \mid t_{m_k} \leq t \leq t_{n_k}, U(x(t)) = U(x_{m_k})\}, \quad (4.6)$$

где  $x(t)$  — регулярная траектория, отвечающая последовательности  $\{x_n\}$ . Согласно этому определению моментов  $\tau_k$  (оно корректно, так как функция  $U$  непрерывна) имеем

$$U(x(t)) \geq U(x_{m_k}), \quad t \in [\tau_k, t_{n_k}], \quad (4.7)$$

причем в силу (4.5)

$$U(x(\tau_k)) = U(x_{m_k}) < U(x_{n_k}) - \varepsilon.$$

Из последнего неравенства в силу непрерывности  $U$  (а значит, и равномерной непрерывности, поскольку  $X$  — компакт) следует, что существует такое  $\delta > 0$ , что

$$\|x_{n_k} - x(\tau_k)\| > \delta. \quad (4.8)$$

Далее, так как точки  $x(\tau_k)$  и  $x_{n_k}$  находятся на регулярной траектории  $x(t)$ , удовлетворяющей условию Липшица с константой  $D$ , то из (4.8) следует, что

$$t_{n_k} - \tau_k \geq \frac{\|x_{n_k} - x(\tau_k)\|}{D} > \frac{\delta}{D}. \quad (4.9)$$

Пусть теперь  $r_k$  — номер звена ломаной  $x(t)$ , на которой находится точка  $x(\tau_k)$ , точнее

$$r_k = \min \{n: t_n \geq \tau_k\}. \quad (4.10)$$

Так как  $\Delta t_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то ясно, что

$$\left. \begin{aligned} t_{r_k} - \tau_k &\rightarrow 0, \\ \lim U(x_{r_k}) &= \lim U(x(\tau_k)) = \lim U(x_{m_k}) = U(y) > 0. \end{aligned} \right\} (4.11)$$

Построим семейство «хвостов»

$$y^k(t) = x(t + t_{r_k}), \quad t \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и пусть  $\tilde{x}(t)$  — предельная траектория этого семейства. Согласно (4.7), (4.10) при любом  $k$  на отрезке  $0 \leq t \leq \leq t_{n_k} - t_{r_k}$  будет выполняться неравенство

$$U(y^k(t)) \geq U(x(\tau_k)).$$

Отсюда и из (4.9), (4.11) следует, что в пределе на отрезке  $0 \leq t \leq \delta/D$  будет выполняться неравенство

$$U(\tilde{x}(t)) \geq U(\tilde{x}(0)) = U(y) > 0,$$

что несовместимо со свойствами функции  $U$ , определенными в условии теоремы. Теорема доказана.

## § 5. Стандартный процесс

**1. Регулярный алгоритм.** Как уже было отмечено в начале главы, в книге рассматриваются (итеративные) процессы на компактах. Пусть  $X \subset E^m$  — выпуклый компакт. Под *алгоритмом*  $A$  на  $X$  мы понимаем итеративную процедуру, начальная точка  $x_0$  для которой выбирается из  $X$  и которая генерирует последовательность  $\{x_n\} = A(x_0)$ , также содержащуюся в  $X$ . Алгоритм *регулярен*, если при любом  $x_0 \in X$  последовательность  $A(x_0)$  регулярна. Предельные траектории регулярного алгоритма  $A$  — это предельные траектории последовательностей  $A(x_0)$ . Если замыкание множества решений задачи, для которой предназначен алгоритм  $A$ , обозначить через  $X^*$ , то алгоритм  $A$  сходится, если при любом  $x_0 \in X$  последовательность  $A(x_0)$  сходится к  $X^*$ . Из теоремы 4.1 непосредственно следует

**Теорема 5.1.** *Если на  $X$  можно определить непрерывную функцию  $U$  такую, что*

$$а) U(x) = 0 \text{ при } x \in X^*, \quad U(x) > 0 \text{ при } x \notin X^*;$$

б)  $U(x)$  строго убывает вдоль любой предельной траектории регулярного алгоритма  $A$  в каждой ее точке, не принадлежащей  $X^*$ ,  
то алгоритм  $A$  сходится.

Эта теорема представляет собой наиболее общую формулировку критерия сходимости, охватывающую весь класс регулярных алгоритмов.

Однако понятие алгоритма не отражает специфику задач теории игр и программирования. Для развиваемых в этой области методов характерны следующие особенности:

1) вместе с последовательностью  $\{x_n\}$  точек из  $X$  генерируется последовательность  $\{\alpha_n\}$  значений параметра  $\alpha$ , называемого шагом итерации;

2) очередная пара  $(\alpha_{n+1}, x_{n+1})$  зависит только от точки  $x_n$  и номера итерации  $n$ , причем выбор этой пары не определен однозначно.

Эта неоднозначность дает простор для построения богатого разнообразия алгоритмов, решающих одну и ту же задачу и реализующих различные варианты некоторого общего метода. В связи с этим всякое сколько-нибудь общее исследование вопросов сходимости должно отправляться не от понятия алгоритма, а от понятия «процесс».

**2. Процесс.** В свете отмеченных выше особенностей, запишем общий процесс в виде

$$\left. \begin{aligned} x_0 \in X \text{ произвольно,} \\ \alpha_n \in I = (0, 1], \quad x_{n+1} \in V(\alpha_n, x_n), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где  $V(\alpha): X \rightarrow X$ ,  $\alpha \in I$  — некоторое заданное однопараметрическое семейство точекмножественных отображений компакта  $X$  в себя. (Можно было бы записать процесс несколько более общего вида:  $x_{n+1} \in V_n(\alpha_n, x_n)$ , но применяемые обычно методы укладываются в схему (5.1); относительно ошибок вычислений, которые могут зависеть от  $n$ , см. п. 7.)

Процесс (5.1) есть объединение алгоритмов, каждый из которых однозначным образом генерирует некоторую последовательность  $\{\alpha_n, x_n\}$ , удовлетворяющую условиям (5.1). Процесс же генерирует произвольную последовательность  $\{\alpha_n, x_n\}$ , удовлетворяющую условиям (5.1).

Поскольку процесс генерирует не только последовательность точек  $x_n$ , но и последовательность парамет-

ров  $\alpha_n$ , естественно использовать последнюю для параметризации траектории (как раз в этом смысл шага итерации). Именно, сопоставим последовательности  $\{\alpha_n, x_n\}$ , генерируемой процессом, траекторию  $x(t)$ , определяемую формулой (4.1) при  $t_0=0$  и  $\Delta t_n = \alpha_n$ . В этом смысле будем говорить, что процесс (5.1) генерирует траекторию  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ .

3. Стандартный процесс. В соответствии с требованиями (4.2), (4.3) назовем процесс (5.1) *регулярным*, если он генерирует правильные последовательности  $\alpha_n$ , т. е.

$$\text{а) } \alpha_n \in I; \quad \text{б) } \alpha_n \rightarrow 0; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad (5.2)$$

и при этом

$$\left\| \frac{\Delta x_n}{\alpha_n} \right\| = \left\| \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_n} \right\| < D, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.3)$$

при некотором  $D > 0$ . Все траектории регулярного процесса регулярны. Предельные траектории регулярного процесса суть, как и ранее, предельные траектории его траекторий.

Теперь мы можем сформулировать одно из основных для нас понятий — понятие стандартного процесса. Стандартным является фактически всякий регулярный процесс вида (5.1). Нижеследующая форма записи оказывается более удобной для дальнейшего анализа.

Определение 5.1. *Стандартный процесс (с. п.) есть итеративный процесс вида*

$$x_n \in X, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.4a)$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n r_n, \quad r_n \in Q(\alpha_n, x_n). \quad (5.4b)$$

Здесь

- а)  $X$  — выпуклый компакт в пространстве  $E^m$ ;
- б)  $\{\alpha_n\}$  — произвольная правильная, т. е. удовлетворяющая условиям (5.2), последовательность чисел;
- в)  $Q(\alpha)$ :  $X \rightarrow Y$ ,  $\alpha \in I$  — однопараметрическое семейство точечно-множественных отображений, действующих из  $X$  в (некоторый не зависящий от  $\alpha$ ) компакт  $Y \subset E^m$ , т. е. для каждой пары  $(\alpha, x) \in I \times X$  определено непустое множество  $Q(\alpha, x) \subset Y$ .

Условие (5.4a) обеспечивает корректность определения с. п., поскольку  $r_n$  имеет смысл только тогда, когда  $x_n \in X$ .

**Замечание 1.** Условие компактности  $Y$  есть просто условие ограниченности множеств  $Q(\alpha, x)$  равномерно по  $\alpha \in I$  и  $x \in X$ .

**Замечание 2.** Нетрудно видеть, что каждый «хвост»  $x^j(t)$  траектории  $x(t)$  (см. § 4, п. 1), генерируемой с. п., снова есть траектория с. п., отвечающая последовательности  $\{\beta_n, y_n\}$ , где  $\beta_n = \alpha_{n+j}$ ,  $y_n = x_{n+j}$ , которая удовлетворяет условиям (5.4а, б), (5.2), поскольку этим условиям удовлетворяет последовательность  $\{\alpha_n, x_n\}$ .

Легко видеть, что с. п. — регулярный процесс, так как условие (5.2) заложено в определение с. п., а (5.3) выполняется в силу ограниченности множества  $Y$ ; в качестве константы  $D$  в (5.3) может служить радиус множества  $Y$ :

$$D = \text{rad } Y = \max_{y \in Y} \|y\|.$$

С. п., который определяется семейством отображений  $Q(\alpha): X \rightarrow Y$ ,  $\alpha \in I$ , будет называться с. п.  $Q(\alpha)$ .

Остановимся подробнее на условии (5.4а). Это условие означает, что с. п. обладает какими-то внутренними механизмами, следящими за тем, чтобы траектория процесса не вышла за пределы компакта  $X$ . Природа этих механизмов нам безразлична, важен только результат — соблюдение условия (5.4а). Важным частным случаем является с. п., определяемый семейством  $Q(\alpha)$ , удовлетворяющим *условию согласования*

$$x + \alpha r \in X, \quad \forall (x \in X, r \in Q(\alpha, x)). \quad (5.5)$$

Очевидно, что условие согласования гарантирует, что процесс, начальная точка которого лежит в  $X$ , не покинет пределы компакта. В общем случае, когда условие согласования не выполняется, нужно специально заботиться о выполнении условия (5.4а).

**4. Основное поле.** Поскольку исследование сходимости регулярного процесса связано с рассмотрением его предельных траекторий, то понятно, что сходимость с. п. должна изучаться в терминах в каком-то смысле предельного отображения  $\lim Q(\alpha)$ ,  $\alpha \rightarrow +0$  (отметим, что  $\alpha = 0 \notin I$ ). Это предельное отображение, обозначим его через  $R$ , естественно интерпретировать как касательное поле направлений для предельных траекторий, ибо из

(5.4б) напрашивается предельное равенство

$$r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_n} = \frac{x(t_n + \alpha_n) - x(t_n)}{\alpha_n} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=t_n}.$$

Для того чтобы строго провести эту линию рассуждений (это будет сделано в следующем параграфе), необходимо потребовать определенной связи семейства  $Q(\alpha)$  с предельным отображением. Эта связь устанавливается условием присоединенности.

**Определение 5.2.** Пусть задано  $K$ -отображение  $R$  выпуклого компакта  $X$  в компакт  $Y$ . Семейство отображений  $Q(\alpha): X \rightarrow Y$ ,  $\alpha > 0$ , назовем присоединенным к  $R$ , если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $x \in X$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon, x)$  такое, что при любых  $\alpha, y$  таких, что  $0 < \alpha < \delta$  и  $y \in x_\delta$ ,  $y \in X$ , имеет место включение

$$Q(\alpha, y) \subset R_\varepsilon(x) = \{r: \rho(r, R(x)) < \varepsilon\}.$$

Если с. п.  $Q(\alpha)$  присоединен к отображению (полю)  $R$ , то пару  $\{R; Q(\alpha), \alpha \in I\}$  будем называть комплексом.

**Замечание 1.** Условие присоединенности с учетом полунепрерывности сверху отображения  $R$  может быть сформулировано так: отображение  $V: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ , определяемое равенством

$$V(\alpha, x) = \begin{cases} Q(\alpha, x) & \text{при } \alpha \in I, \\ & x \in X, \\ R & \text{при } \alpha = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

полунепрерывно сверху при  $\alpha = 0$ .

**Замечание 2.** Семейство отображений  $Q(\alpha) \equiv R$ ,  $\alpha > 0$ , присоединено к  $R$ , поскольку  $R$  полунепрерывно сверху.

**Замечание 3.** Отображения  $Q(\alpha)$  не обязаны иметь тип  $K$ .

Здесь необходимо дать некоторые неформальные пояснения. Изложение, принятое в разделе первом данной книги, преследует цель, с одной стороны, вскрыть аппарат изучения сходимости и, с другой стороны, построить возможно более общую схему итеративных процессов, для изучения которой развиваемый аппарат оказывается достаточным. Понятие с. п. описывает максимально широкие рамки применимости метода. При этом главную роль

при изучении сходимости с. п. играет основное поле  $R$ , к которому этот с. п. присоединен. Переход от отображений  $Q(\alpha)$  к полю  $R$  соответствует переходу от конечношагового процесса (5.46) к дифференциальному уравнению (включению)

$$\frac{dx}{dt} \in R(x). \quad (5.7)$$

Траектории с. п. являются ломаными Эйлера для интегральных кривых поля  $R$  (т. е. уравнения (5.7)), и сходимость с. п. к множеству  $X^*$  решений задачи, для которой он предназначен, эквивалентна сходимости к этому множеству интегральных кривых поля  $R$ ; поэтому сходимость комплекса определяется полем  $R$  и не зависит от присоединяемого семейства  $Q(\alpha)$ . В следующих параграфах будет показано, что условия присоединенности с. п. к  $K$ -полю  $R$  достаточно для строгого обоснования этих рассуждений.

Таким образом, для того чтобы с. п. сходил, поле  $R$  должно быть связано с задачей: интегральные кривые поля должны сходиться к  $X^*$ . Обычно поле  $R$  строится таким образом, что множество его *стационарных точек*

$$\text{stat}(R) = \{x \in X : R(x) \ni 0\} \quad (5.8)$$

совпадает с искомым множеством  $X^*$  решений задачи; иначе говоря, сама исходная задача формулируется как задача отыскания множества  $\text{stat}(R)$ . В этом смысле комплекс  $\{R; Q(\alpha), \alpha \in I\}$  есть задача и метод ее решения.

### 5. Примеры.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу максимизации выпуклой вверх и дифференцируемой функции  $f$ , заданной на всем пространстве  $E^m$ . Предположим, что с помощью некоторых априорных соображений удалось построить шар  $X \subset E^m$  настолько большого радиуса, что искомое множество  $X^* = \text{Arg max}_{x \in E^m} f(x)$  находится строго внутри  $X$ , т. е.  $X^* \subset \text{int } X$ . Тогда можно положить

$$R(x) = \text{grad } f(x), \quad x \in X.$$

Это — ограниченное отображение типа  $K$ , поскольку в рассматриваемом случае  $\|\text{grad } f(x)\|$  ограничен на любом компакте  $X$ , и при этом  $X^* = \text{stat}(R)$ .

Чтобы построить с. п., предположим, что для любого  $x \in X$  величина

$$\alpha(x) = \max \{ \alpha \in [0, 1] : x + \alpha \operatorname{grad} f(x) \in X \}$$

отлична от нуля. Тогда можно положить

$$Q(\alpha, x) = \begin{cases} \operatorname{grad} f(x) & \text{при } 0 < \alpha \leq \alpha(x), \\ \frac{\alpha(x)}{\alpha} \operatorname{grad} f(x) & \text{при } \alpha(x) < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что семейство  $Q(\alpha)$  удовлетворяет условию согласования (5.5) и присоединено к отображению  $R$ . Процесс (5.4а, б) при этом есть один из вариантов градиентного метода (см. § 17).

Во многих случаях с. п. строится с помощью основного отображения  $R$ , т. е. полагается

$$Q(\alpha) \equiv R, \quad \alpha \in I. \quad (5.9)$$

Это наверняка возможно в том случае, когда

$$x + r \in X, \quad \forall (x \in X, r \in R(x)),$$

поскольку при этом будет выполнено условие согласования (5.5). С. п., определяемый семейством (5.9), будем называть *простым*  $R$ -процессом.

Если определить отображение  $Z: X \rightarrow X$  равенством

$$Z(x) = \{z : z = x + r, r \in R(x)\}, \quad x \in X, \quad (5.10)$$

т. е. положить  $Z = R + E$ , где  $E$  — тождественное отображение, то всякий простой процесс (5.4б) может быть записан в виде

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n z_n, \quad z_n \in Z(x_n). \quad (5.11)$$

Очевидно и обратное: всякий процесс вида (5.11) может быть записан в стандартной форме (5.4б), определяемой семейством (5.9) при  $R = Z - E$ .

Множество  $\operatorname{stat}(R)$  в терминах отображения  $Z$  есть множество его неподвижных точек  $\{x \in X : x \in Z(x)\}$ .

Пример 2. В § 10 будет показано, что задача отыскания точки равновесия в игре с нулевой суммой на компакте  $X$  сводится к нахождению неподвижной точки определенным образом связанного с игрой отображения  $Z: X \rightarrow X$  типа  $K$ . При этом процесс (5.11) представляет

собой игровой процесс. Таким образом, всякий игровой процесс есть с. п. (присоединенный к отображению  $R = Z - E$ ).

6. Обсуждение. Понятие комплекса  $\{R; Q(\alpha), \alpha \in I\}$  может использоваться в двух противоположных аспектах.

С одной стороны, если мы имеем некоторый процесс, сходимость которого необходимо доказать, то надо представить его в виде с. п. Затем надо присоединить его к некоторому полю  $R$ , относительно которого удастся показать, что его интегральные кривые сходятся к искомому множеству  $X^*$  решений задачи. Таким способом будет доказана сходимость некоторых известных градиентных методов в § 17. Этим же способом доказывалась сходимость игровых процессов в § 11.

С другой стороны, если мы имеем задачу, то, для того чтобы построить процесс, решающий эту задачу, надо, во-первых, построить поле  $R$ , интегральные кривые которого сходятся к  $X^*$  (заметим, что это возможно лишь в том случае, когда  $\text{stat}(R) \subset X^*$ , ибо если  $x^* \in \text{stat}(R)$ , то кривая  $x(t) \equiv x^*$ ,  $t \geq 0$ , очевидно, удовлетворяет уравнению (5.7), т. е. является интегральной, и поэтому должно быть  $x^* \in X^*$ ); во-вторых, надо присоединить к  $R$  некоторый с. п., удовлетворяющий определению 5.1. Присоединяя к  $R$  различные семейства  $Q(\alpha)$  или меняя само поле  $R$ , можно получать разные методы решения задачи. Для построения игрового процесса достаточно свести исходную задачу к игре. Некоторые приемы такого сведения показаны в §§ 14, 15.

Несколько поясним смысл условий (5.2) правильности последовательности  $\{\alpha_n\}$ . Условие а), поскольку  $Q(\alpha)$  может зависеть от  $\alpha$ , есть просто условие нормировки. Такая нормировка особенно удобна в простых процессах, так как она допускает прямой переход от  $R$  к  $Z$  по формуле (5.10), приводящий к (5.11). Условия (5.26), в) являются в известном смысле необходимыми, если мы желаем охватить достаточно широкий класс отображений. Поясним это на примерах простых процессов в форме (5.11).

Пусть  $X$  — отрезок  $[-1, 1]$  числовой оси,

$$Z(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ -1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Это — отображение типа  $K$ , имеющее единственную неподвижную точку  $x^* = 0$ . Ясно, что для сходимости процесса (5.11) условие (5.26) необходимо. В самом деле, если оно нарушено, то существуют  $\varepsilon > 0$  и последовательность номеров  $n_k$  такие, что  $|x_{n_k}| > \varepsilon$ , т. е., даже подходя сколь угодно близко к точке  $x^*$  (и даже попав в нее, но беря в множестве  $Z(0)$  крайние точки), мы в какие-то моменты будем снова отскакивать от нее, и эти колебания не будут затухать.

Необходимость условия (5.2в) лучше показать, взяв на том же отрезке другое отображение  $Z(x) \equiv 0$ . В этом случае последовательность  $\{x_n\}$  выписывается явно:

$$x_n = x_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha_i),$$

и требование сходимости к  $x^* = 0$  совпадает с условием (5.2в)).

В общем случае можно сказать, что условие (5.26) обеспечивает затухание колебаний (т. е. исключает возможность заикливания), условие (5.2в) гарантирует, что процесс не остановится в точке, не являющейся неподвижной.

Заметим, наконец, что можно было бы уже сейчас сформулировать признак сходимости с. п. так же, как это было сделано в начале параграфа для регулярного алгоритма. Однако до выяснения структуры множества предельных траекторий использование такого критерия сходимости было бы затруднительно.

**7. Замечание о процессах с ошибками.** Поскольку допустимо расхождение между  $Q(\alpha)$  и  $R$  (т. е. семейство  $Q(\alpha)$  присоединено к  $R$ , но не обязательно  $Q(\alpha) = R$ ), а вопрос о сходимости связывается только с полем  $R$ , то, не нарушая сходимости процесса, можно варьировать семейство  $Q(\alpha)$ , сохраняя условие присоединенности. Этим можно пользоваться для «поглощения» всякого рода ошибок. Саму разность  $Q(\alpha) - R$  можно интерпретировать как «теоретическую» ошибку метода.

Допустим, однако, что теоретическая ошибка уже включена в  $Q(\alpha)$  (и при этом  $\{R; Q(\alpha), \alpha \in I\}$  — сходящийся комплекс), но при практической реализации этого теоретического метода на ЭВМ возможна еще

некоторая ошибка, приводящая к тому, что в итеративном процессе (5.46) очередной элемент  $r_n$  оказывается вычисленным не точно, а с некоторой погрешностью, т. е.

$$r_n = q_n + v_n,$$

где  $q_n \in Q(\alpha_n, x_n)$ , а  $v_n$  — ошибка, природа которой может быть самой разной. Например, в начале процесса вычисления могут проводиться грубо приближенно, а затем точность вычислений возрастает с течением времени. Покажем, что если выполнено условие

$$v_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.12)$$

то это не нарушает сходимости процесса.

В самом деле, пусть  $\{\bar{\alpha}_n, \bar{x}_n\}$  — конкретная последовательность, генерированная при описанной выше реализации, причем ошибки  $v_n$  удовлетворяют условию (5.12). Определим числовую функцию

$$b(\alpha) = \sup_{n \in N(\alpha)} \|v_n\|,$$

где

$$N(\alpha) = \{n: \bar{\alpha}_n \leq \alpha\}.$$

Из (5.12) и условия  $\alpha_n \rightarrow 0$  следует, что  $b(\alpha) \geq 0$  при  $\alpha > 0$  (так как  $N(\alpha)$  не пусты) и  $b(\alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow +0$ . Последовательность  $\{\bar{\alpha}_n, \bar{x}_n\}$  можно рассматривать как реализацию с. п.  $\tilde{Q}(\alpha)$ , где

$$\tilde{Q}(\alpha, x) = \{r: r = q + v, q \in Q(\alpha, x), \|v\| \leq b(\alpha)\}.$$

Так как  $b(\alpha) \rightarrow 0, \alpha \rightarrow +0$ , то из присоединенности к  $R$  семейства  $Q(\alpha)$  следует присоединенность к  $R$  семейства  $\tilde{Q}(\alpha)$ , т. е.  $\{R; \tilde{Q}(\alpha), \alpha \in I\}$  — комплекс. Поскольку сходимость комплекса зависит только от  $R$  (это будет показано в §§ 6, 7), то с. п.  $\tilde{Q}(\alpha)$  сходится; следовательно, сходится и всякая его конкретная реализация, в том числе последовательность  $\{\bar{\alpha}_n, \bar{x}_n\}$ .

Следует подчеркнуть, что это рассуждение касается только ошибок, удовлетворяющих условию (5.12). Возможны, конечно, и другого рода ошибки, зависящие, например, от  $x$  ( $v = v(x)$ ), или случайные ошибки. Влияние ошибок  $v(x)$  в общем случае оценить в конструктивных терминах не удастся. Это сделано для игровых процессов в § 12. Случайным ошибкам посвящен § 8.

## § 6. Интегральные кривые многозначного векторного поля

1. **Интегральные кривые.** Пусть  $X \subset E^m$  — выпуклый компакт,  $Y \subset E^m$  — компакт.

Обозначим через  $L = L(X, Y)$  семейство векторных функций, определенных на полуоси  $t \geq 0$  со значениями в  $X$  и удовлетворяющих условию Липшица (3.2) с константой  $D$ , равной радиусу множества  $Y$ :

$$D = \text{grad } Y = \max_{y \in Y} \|y\|. \quad (6.1)$$

Очевидно, что функции из  $L$  непрерывны. В силу леммы 3.1 семейство  $L$  замкнуто, т. е. если последовательность функций из  $L$  сходится, то ее предел есть функция из  $L$ . Функции из  $L$  почти всюду дифференцируемы по  $t$  и являются неопределенным интегралом Лебега своей производной (см. § 3, п. 2).

Пусть  $V: X \rightarrow Y$  — некоторое (произвольное) точечно-множественное отображение, которое будем интерпретировать как многозначное поле направлений на  $X$ .

**Определение 6.1.** Вектор-функцию  $g = g(t)$ ,  $t \geq 0$ , из семейства  $L$  назовем интегральной кривой поля  $V$ , если

$$\dot{g}(t) = \frac{dg}{dt} \in V(g(t)) \quad (6.2)$$

при всех  $t > 0$  таких, что производная  $\dot{g}(t)$  существует<sup>1)</sup>.

Множество интегральных кривых поля  $V$  обозначим через  $G(V)$ .

Отметим, что, вообще говоря, не через каждую точку множества  $X$  проходит интегральная кривая поля  $V$ , более того, поле  $V$  может вовсе не обладать интегральными кривыми. Например, пусть  $X$  есть отрезок  $[0, 1]$  числовой оси,  $V(x) = 2$ ,  $\forall x \in X$ . Тогда решения уравнения (6.2) суть  $x(t) = x_0 + 2t$ . Эти траектории за конечное

<sup>1)</sup> Дифференциальное уравнение с многозначной правой частью (т. е. вида (6.2)) принято называть дифференциальным включением. В такой форме могут быть записаны, в частности, задачи теории управления. В самом деле, уравнение  $\dot{x} = f(x, \lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , где  $\lambda$  — параметр управления, можно записать в виде  $\dot{x} \in F(x)$ , где  $F(x) = \{f(x, \lambda): \lambda \in \Lambda\}$ . Решение дифференциального включения понимается, по существу, в смысле определения 6.1 (см., например, [62]).

время покидают пределы компакта  $X$  (точнее, они непродолжаемы на  $X$  для всех  $t \geq 0$ ), в то время как в определении 6.1 кривые  $g(t)$  суть функции на полуоси  $t \geq 0$ .

Для интегральных кривых поля  $V$  имеет место представление (см. (3.3))

$$g(t) = g(s) + \int_s^t r(\tau) d\tau, \quad r(\tau) \in V(g(\tau)). \quad (6.3)$$

При этом  $r(\tau)$  — измеримая функция, почти всюду совпадающая с  $\dot{g}(\tau)$  (см. леммы 3.2, 3.3).

Применительно к комплексу  $\{R: Q(\alpha), \alpha \in I\}$  нас будут интересовать интегральные кривые полей  $R$  и  $Q^\delta$ ,  $\delta > 0$ , где

$$Q^\delta(x) = \bigcup_{\substack{y \in x_\delta, y \in X \\ \alpha \in I, \alpha < \delta/D}} Q(\alpha, y), \quad x \in X, \quad (6.4)$$

$D$  — константа, определенная в (6.1).

Лемма 6.1. Каждая траектория  $x(t) \sim \{\alpha_n, x_n\}$  с. п.  $Q(\alpha)$  есть интегральная кривая поля  $Q^\delta$  при

$$\delta = D \cdot \sup_n \alpha_n. \quad (6.5)$$

Доказательство. Траектория  $x(t)$ , будучи ломаной, дифференцируема по  $t$  в каждой точке, не являющейся вершиной. Пусть  $x$  — внутренняя точка отрезка  $[x_n, x_{n+1}]$ . Производная  $\dot{x}(t)$  в точке  $x$  есть

$$\frac{\Delta x_n}{\alpha_n} = r_n, \quad r_n \in Q(\alpha_n, x_n),$$

при этом  $\|x_n - x\| < \alpha_n r_n \leq \alpha_n D$ . Так как  $\alpha_n < \delta/D$ , то отсюда следует, что  $Q(\alpha_n, x_n) \subset Q^\delta(x)$ , т. е.  $r_n \in Q^\delta(x)$ , и поэтому (6.2), а вместе с этим и лемма доказаны.

**2. Теорема вложения.** Обозначим через  $G^\delta$  множество кривых  $g \in L$ , в  $\delta$ -трубке которых проходит хотя бы одна интегральная кривая отображения  $Q^\delta$ . Точнее,  $g \in G^\delta$ , если  $g \in L$  и для любого отрезка времени  $\Delta \subset [0, \infty)$  существует интегральная кривая  $h \in \hat{G}(Q^\delta)$  такая, что

$$\rho(h(t), g(t)) < \delta \quad \text{при } t \in \Delta. \quad (6.6)$$

Так как отображения  $Q^\delta$  сужаются при  $\delta \rightarrow +0$ , то и множества  $G^\delta$  также сужаются. Поэтому при  $\delta \rightarrow +0$

существует предел

$$G^0 = \lim_{\delta \rightarrow +0} G^\delta = \bigcap_{\delta > 0} G^\delta.$$

**Теорема 6.1** (теорема вложения). *Если  $R: X \rightarrow Y$  — поле типа  $K$ , семейство  $Q(\alpha)$ ,  $\alpha \in I$ , присоединено к нему и семейство  $Q^\delta$  определено равенством (6.4), то*

$$G(R) \supset G^0.$$

**Доказательство.** Теорема утверждает, что если некоторая кривая  $g$  принадлежит всем  $G^\delta$ ,  $\delta > 0$ , то она является интегральной кривой поля  $R$ .

Пусть  $g \in G^\delta$  при любом  $\delta > 0$ . Надо показать, что если при некотором  $t > 0$  производная  $\dot{g}(t)$  существует, то выполняется условие (6.2)

$$\dot{g}(t) \in R(g(t)). \quad (6.7)$$

Пусть в момент времени  $t^0 > 0$  производная  $\dot{g}(t^0)$  существует. Зафиксируем это значение  $t^0$ , положим  $x^0 = g(t^0)$  и возьмем некоторое  $\varepsilon > 0$ . Так как семейство  $Q(\alpha)$  присоединено к  $R$ , то найдется такое  $\beta = \beta(\varepsilon, x^0)$ , что

$$Q^{\beta\varepsilon}(x^0) \subset R_\varepsilon(x^0) = \{r: \rho(r, R(x^0)) < \varepsilon\}.$$

Пусть  $s < t^0$  таково, что отрезок кривой  $g(t)$ ,  $t \in \Delta = [s, t^0]$  целиком содержится в  $\beta$ -окрестности точки  $x^0$ . Такое  $s$  существует, ибо  $g(t)$  непрерывна. Возьмем теперь произвольное  $\delta$ ,  $0 < \delta < \beta$ . Так как  $g \in G^\delta$ , то найдется интегральная кривая  $h \in G(Q^\delta)$ , удовлетворяющая условию (6.6) на отрезке  $\Delta$ . По построению отрезок этой кривой  $h(t)$ ,  $t \in \Delta$ , будет целиком содержаться в  $2\beta$ -окрестности точки  $x^0$ .

Воспользуемся для траектории  $h(t)$  представлением (ср. (6.3))

$$h(t^0) = h(s) + \int_s^{t^0} r(\tau) d\tau, \quad r(\tau) \in Q^\delta(h(\tau)),$$

где  $s$  — произвольный момент времени из отрезка  $\Delta$ , и запишем его в виде

$$h(t^0) = h(s) + (t^0 - s)\eta, \quad (6.8)$$

где

$$\eta = \frac{1}{t^0 - s} \int_s^{t^0} r(\tau) d\tau, \quad r(\tau) \in Q^\delta(h(\tau)).$$

Так как  $h(\tau)$  лежит в  $2\beta$ -окрестности точки  $x^0$  и  $\delta < \beta$ , то

$$Q^\delta(h(\tau)) \subset Q^\beta(h(\tau)) \subset Q^{2\beta}(x^0) \subset R_\varepsilon(x^0),$$

и поэтому  $r(\tau) \in R_\varepsilon(x^0)$ ,  $\tau \in \Delta$ .

В силу выпуклости множества  $R_\varepsilon(x^0)$  точка  $\eta$  согласно лемме 3.4 также будет находиться в нем, и поэтому  $\rho(\eta, R(x^0)) < \varepsilon$ . В итоге получаем из (6.8)

$$\rho\left(\frac{h(t^0) - h(s)}{t^0 - s}, R(x^0)\right) < \varepsilon. \quad (6.9)$$

Неравенство (6.9) справедливо при любом  $\delta < \beta$ . Возьмем последовательность  $\delta \rightarrow 0$ . Тогда в силу (6.6) соответствующие кривые  $h^\delta(t) \in G(Q^\delta)$  будут сходиться на отрезке  $\Delta$  к кривой  $g(t)$ . В пределе получим из (6.9)

$$\rho\left(\frac{g(t^0) - g(s)}{t^0 - s}, R(x^0)\right) < \varepsilon. \quad (6.10)$$

Устремим теперь  $s$  к  $t^0 - 0$ . В силу выбора момента  $t^0$  предел отношения  $\frac{g(t^0) - g(s)}{t^0 - s}$  существует и равен  $\dot{g}(t^0)$ . Из (6.10) следует, что  $\rho(\dot{g}(t^0), R(x^0)) < \varepsilon$ . Поскольку  $\varepsilon$  произвольно, то  $\dot{g}(t^0)$  по необходимости принадлежит множеству  $R(x^0)$ . Условие (6.7), а вместе с ним и теорема доказаны.

**З а м е ч а н и е.** В доказательстве фактически показано, что если последовательность кривых  $h^\delta \in G(Q^\delta)$  сходится при  $\delta \rightarrow +0$  к некоторой кривой  $g$ , то  $g \in G(R)$ .

**С л е д с т в и е 1.** Если  $R$  является  $K$ -полем, то множество его интегральных кривых замкнуто.

Действительно, взяв в качестве присоединяемого семейства  $Q(\alpha) \equiv R$ , получим из (6.4), что  $R(x) \subset Q^\delta(x)$  при любом  $\delta > 0$ , т. е.  $G(R) \subset G(Q^\delta)$  при любом  $\delta > 0$ . Поэтому если последовательность кривых  $h^j \in G(R)$  сходится к  $g$ , то  $g \in G(R)$  в силу замечания к теореме 6.1.

Далее, пусть  $\{R; Q(\alpha), \alpha \in I\}$  — комплекс, т. е. семейство  $Q(\alpha)$  определяет с. п. Каждая предельная траектория с. п. есть предел последовательности «хвостов» некоторой

траектории. Согласно замечанию 2 к определению 5.1 каждый «хвост»  $x^j(t)$  сам представляет собой траекторию с. п. В силу леммы 6.1  $x^j \in G(Q^0 j)$ , где для «хвоста»  $x^j(t) \sim \{\beta_n, \gamma_n\}$

$$\delta_j = D \cdot \sup_n \beta_n = D \cdot \sup_n \alpha_{n+j}.$$

Поскольку  $\alpha_n \rightarrow 0$  (условие (5.26)), то  $\delta_j \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Поэтому из замечания к теореме 6.1 вытекает

**Следствие 2.** *Если с. п. присоединен к полю  $R$ , то каждая его предельная траектория является интегральной кривой поля  $R$ .*

## § 7. Функция Ляпунова как критерий сходимости итеративного процесса

В этом параграфе построения §§ 4—6 завершаются окончательными формулировками критериев сходимости с. п. Как видно из этих построений, исследование вопросов сходимости итеративных процессов тесно связано с изучением поведения их предельных траекторий, т. е. с вопросами устойчивости стационарных решений дифференциального уравнения (6.2).

**1. Индикатриса сходимости.** Функция  $U$ , фигурирующая в теореме 4.1, вполне аналогична по своей роли функции Ляпунова, используемой в теории устойчивости дифференциальных уравнений. Исходя из этой аналогии, введем следующие определения.

**Определение 7.1.** Пусть  $R$  — ограниченное многозначное поле направлений, заданное на выпуклом компакте  $X$ . Непрерывная неотрицательная функция  $U$ , определенная на  $X$ , называется индикатрисой (сходимости) поля  $R$ , если всюду вне множества

$$m(U) = \{x \in X: U(x) = 0\}$$

она строго убывает вдоль интегральных кривых поля  $R$ .

**Замечание 1.** Каждое поле обладает тривиальной индикатрисой  $U(x) \equiv 0$ ,  $x \in X$ .

**Замечание 2.** Если  $x^0 \in \text{stat}(R)$ , то  $g(t) \equiv x^0$ ,  $t \geq 0$ , есть интегральная кривая поля  $R$ . Так как на этой кривой  $u(t) = U(g(t)) = \text{const}$ , то  $x^0 \in m(U)$ . Таким образом,  $\text{stat}(R) \subseteq m(U)$ .

**Замечание 3.** Условие строгого убывания функции  $u(\tau) = U(g(\tau))$  эквивалентно каждому из двух следующих условий, которые должны выполняться на любой интегральной кривой поля  $R$ .

I. Если  $g(0) \notin m(U)$ , то существует такое  $t > 0$ , что  $u(\tau) < u(0)$  при  $\tau \in (0, t]$ .

II. Если  $g(t) \notin m(U)$  при некотором  $t > 0$ , то существует такое  $s$ ,  $0 \leq s < t$ , что  $u(\tau) > u(t)$  при  $\tau \in [s, t)$ .

Форма I допустима потому, что вместе с каждой интегральной кривой  $g(t) \in G(R)$  «сдвинутая» кривая  $g_1(t) = g(t+T)$  тоже входит в  $G(R)$  при любом  $T \geq 0$ .

В различных случаях оказывается удобным проверять какое-либо одно из этих «локальных» условий убывания.

**Лемма 7.1.** Пусть  $U$  — индикатриса поля  $R$ . Если  $g \in G(R)$  — интегральная кривая с условием  $g(0) \in m(U)$ , то  $g(t) \in m(U)$  при всех  $t \geq 0$ . Иначе говоря, интегральные кривые, начинающиеся в  $m(U)$ , целиком содержатся в нем.

**Доказательство.** Пусть

$$T = \max \{t: g(\tau) \in m(U) \text{ при } \tau \in [0, t]\}.$$

Предположим, что лемма неверна, и тогда  $T < \infty$  (отметим, что можно писать  $\max$ , а не  $\sup$ , поскольку  $U$  непрерывна, и, следовательно,  $m(U)$  — замкнутое множество). Функция  $u(t) = U(g(t))$  равна нулю на отрезке  $[0, T]$  и в некоторой правой окрестности точки  $T$  она положительна. Пусть  $T_1 > T$  таково, что  $U(T_1) > 0$ . Положим

$$T_2 = \min \{t \in [T, T_1]: u(t) = u(T_1)\}.$$

По построению  $u(t) \leq u(T_2)$  при  $t \in [T, T_2]$ , причем  $u(T_2) = u(T_1) > 0$ , т. е.  $x = g(T_2) \notin m(U)$ . Это противоречит определению 7.1 (ср. с условием II замечания 3). Лемма доказана.

**Следствие.** Если  $U$  — индикатриса поля  $R$  и  $g \in G(R)$ , то функция  $u(t) = U(g(t))$  — невозрастающая функция на всей полуоси  $t \geq 0$ .

Действительно, если  $u(t^0) > 0$ , то в точке  $t = t^0$  функция  $u(t)$  строго убывает согласно определению 7.1. Если же  $u(t^0) = 0$ , то в силу леммы 7.1 с учетом возможности сдвига интегральных кривых  $u(t) \equiv 0$  при  $t \geq t^0$ ,

**Теорема 7.1.** *Если с. п. присоединен к полю  $R$ , обладающему индикатрисой  $U$ , то его траектории сходятся к  $m(U)$ .*

**Доказательство.** Согласно следствию 2 из теоремы 6.1 предельные траектории с. п. являются интегральными кривыми поля  $R$ . В силу теоремы 4.1 траектории с. п. сходятся к  $m(U)$ .

**2. Функция Ляпунова.** Утверждение теоремы 7.1 становится наиболее содержательным в том случае, когда  $m(U)$  совпадает с множеством решений той задачи, для которой предназначен с. п. В связи с этим введем

**Определение 7.2.** *Пусть  $X^*$  — замкнутое множество решений интересующей нас задачи и  $U$  — индикатриса поля  $R$ . Если  $m(U) = X^*$ , то  $U$  называется функцией Ляпунова поля  $R$  (для данной задачи).*

Это определение позволяет, как следствие теоремы 7.1, сформулировать следующую теорему.

**Теорема 7.2.** *Если поле  $R$  обладает функцией Ляпунова, то всякий с. п., присоединенный к нему, сходится к  $X^*$ .*

Теорема 7.2 представляет собой основной критерий, позволяющий устанавливать сходимость итеративных процессов.

Подчеркнем, что этот критерий связан только с полем  $R$  и не зависит от с. п., решающего задачу (т. е. не зависит от семейства  $Q(\alpha)$ ). Это объясняется, конечно, тем, что все необходимые связи и требования включены в сами определения (определение 5.2 присоединенного семейства).

**3. Индикатриса сходимости в терминах верхней производной по полю направлений.** Теорема 7.2 сводит вопрос о сходимости с. п. к вопросу о наличии у поля  $R$  функции Ляпунова. В этом пункте будет дан критерий, позволяющий в ряде важных случаев строить простые функции Ляпунова (см., например, гл. V).

Обозначим через  $U_R^+$  верхнюю производную функции  $U$  по полю направлений  $R$ :

$$U_R^+(x) = \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow +0} \sup_{r \in R(x)} \frac{U(x + \alpha r) - U(x)}{\alpha}, \quad x \in X. \quad (7.1)$$

Это обозначение корректно, если предположить, что функция  $U$  определена в некоторой окрестности  $\tilde{X}$  множества  $X$ .

Лемма 7.2. Пусть  $R$  — ограниченное поле типа  $K$ , заданное на выпуклом компакте  $X$ , неотрицательная функция  $U$  определена в окрестности  $\tilde{X} \supset X$  и удовлетворяет на ней условию Липшица. Тогда, если  $g$  — интегральная кривая поля  $R$ , то

$$u^+(t) \leq U_R^+(g(t)),$$

где  $u^+(t)$  — верхняя производная справа (см. § 3, п. 3) функции  $u(t) = U(g(t))$ .

Доказательство. Зафиксируем некоторое  $t^0 \geq 0$ , обозначим  $x^0 = g(t^0)$  и для  $t > t^0$  запишем, исходя из интегрального представления (6.3),

$$g(t) = g(t^0) + \int_{t^0}^t r(\tau) d\tau, \quad r(\tau) \in R(g(\tau)),$$

равенство

$$g(t) = x^0 + \Delta t \cdot \tilde{r}(t), \quad \Delta t = t - t^0 > 0, \quad (7.2)$$

где

$$\tilde{r}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^0}^t r(\tau) d\tau, \quad r(\tau) \in R(g(\tau)).$$

При данном  $\Delta t$  существует такое  $\varepsilon = \varepsilon(\Delta t)$ , что  $R(g(\tau)) \subset R_\varepsilon(x^0)$ ,  $\tau \in [t^0, t]$ , где  $R_\varepsilon(x^0)$  —  $\varepsilon$ -окрестность множества  $R(x^0)$ . По условию леммы  $R$  — отображение типа  $K$ . Поэтому  $R_\varepsilon(x^0)$  — выпуклое множество вместе с  $R(x^0)$ . По лемме 3.4  $r(t) \subset R_\varepsilon(x^0)$ . Кроме того, в силу полунепрерывности сверху отображения  $R$  можно считать, что  $\varepsilon(\Delta t) \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т. е.

$$\rho(t) = \rho(\tilde{r}(t), R(x^0)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t^0. \quad (7.3)$$

Используя (7.2), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u}{\Delta t} &= \frac{u(t) - u(t^0)}{\Delta t} = \frac{U(x^0 + \Delta t \tilde{r}(t)) - U(x^0)}{\Delta t} \leq \\ &\leq \sup_{r \in R(x^0)} \frac{U(x^0 + \Delta t r) - U(x^0)}{\Delta t} + M \cdot \rho(t), \end{aligned}$$

где  $M$  — константа Липшица для функции  $U$ . Переходя здесь к верхнему пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим с учетом (7.3) утверждение леммы.

Непосредственным следствием этой леммы является

**Теорема 7.3.** Пусть  $R$  — ограниченное поле типа  $K$ , заданное на выпуклом компакте  $X$ , неотрицательная функция  $U$  определена в окрестности  $\dot{X} \supset X$  и удовлетворяет на ней условию Липшица. Тогда если  $U_R^+(x) < 0$  при  $x \notin m(U)$ , то  $U$  — индикатриса сходимости поля  $R$ .

**Доказательство.** В условиях доказываемой теоремы из лемм 7.2 и 3.5 следует, что вне  $m(U)$  функция  $u(t)$  — монотонно убывающая. В силу леммы 3.6 почти всюду существует производная  $\dot{u}(t)$ , которая (конечно) совпадает с  $u^+(t)$  и, следовательно, отрицательна. Из неравенства (3.5) получаем, что  $u(t)$  строго убывает. Теорема доказана.

**Следствие.** Если  $R$  — ограниченное поле типа  $K$ , заданное на выпуклом компакте  $X$ , неотрицательная функция  $U$  дифференцируема, ее градиент ограничен и выполняется условие

$$\langle \text{grad } U(x), r \rangle < 0, \quad \forall (x \in X \setminus m(U), r \in R(x)), \quad (7.4)$$

то  $U$  — индикатриса поля  $R$ .

**4. Дополнительная лемма.** Нам понадобится следующая

**Лемма 7.3.** Если  $U$  — индикатриса сходимости ограниченного поля  $R$  типа  $K$ , то

$$U(g(t)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

на любой интегральной кривой  $g \in G(R)$ . При этом убывание происходит равномерно по всему множеству  $G(R)$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $T(\varepsilon)$  такое, что при  $t \geq T(\varepsilon)$  на любой интегральной кривой  $g \in G(R)$  выполняется соотношение

$$U(g(t)) \leq \varepsilon.$$

**Доказательство.** Пусть  $g \in G(R)$  — некоторая интегральная кривая. Покажем, что  $u(t) = U(g(t)) \rightarrow 0$ . Пусть

$$\bar{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t).$$

Этот предел существует, так как согласно следствию из леммы 7.1  $u(t)$  убывает. Возьмем произвольную последовательность  $T_j \rightarrow \infty$  и рассмотрим семейство функций

$$g^j(t) = g(t + T_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

В силу замкнутости  $G(R)$  существует предельная кривая

$\bar{g} \in G(R)$ . Будем считать, что  $g^j \rightarrow \bar{g}$ . Тогда

$$U(\bar{g}(t)) = \lim_{j \rightarrow \infty} U(g^j(t)) = \lim_{j \rightarrow \infty} U(g(t + T_j)) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} U(g(t)) = \bar{u}, \quad \forall t \geq 0,$$

т. е.  $U(\bar{g}(t))$  постоянна вдоль интегральной кривой  $\bar{g}$ . Следовательно,  $\bar{u} = 0$ .

Вторая часть леммы доказывается аналогично. Предположим противное. Тогда при некотором  $\varepsilon > 0$  для любой последовательности  $T_j \rightarrow \infty$  найдется последовательность  $g^j \in G(R)$  такая, что  $U(g^j(T_j)) > \varepsilon$ . Пусть  $\bar{g} \in G(R)$  — предельная кривая для семейства  $\{g^j\}$ . При каждом фиксированном  $t$  для всех  $j$ , начиная с некоторого номера, будет выполняться условие  $T_j > t$ , что влечет за собой соотношение

$$U(g^j(t)) > U(g^j(T_j)) > \varepsilon.$$

Следовательно, на предельной кривой  $\bar{g}$  при всех  $t \geq 0$  будет

$$U(\bar{g}(t)) \geq \varepsilon,$$

что противоречит уже доказанной части леммы. Это противоречие доказывает лемму полностью.

*Следствие.* Если поле  $R$  типа  $K$  обладает функцией Ляпунова и множество  $G(R)$  его интегральных кривых не пусто, то не пусто и множество  $\text{stat}(R)$ .

Действительно, если  $g \in G(R)$ , то, взяв произвольную последовательность  $t_j \rightarrow \infty$  и рассмотрев точку накопления  $x^*$  последовательности  $g(t_j)$ , найдем

$$U(x^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} U(g(t_j)) = 0,$$

т. е.  $x^* \in m(U) = \text{stat}(R)$ .

Это следствие является аналогом теоремы Какутани (теорема 2.1) о существовании неподвижной точки.

## § 8\*. Итеративные процессы при наличии случайных ошибок

Как уже отмечалось во введении, одним из важных достоинств итеративных процессов является их устойчивость по отношению к ошибкам в определении текущего значения  $x_n$  (или направления движения  $r_n$ ). В настоящем

параграфе будет рассмотрено влияние случайных ошибок на сходимость стандартного процесса. В связи с этим определения, которые были даны прежде для детерминированного случая, должны быть переформулированы в стохастическом варианте. Обозначим через  $\Omega$  пространство элементарных событий и через  $\omega$  — его элементы. *Случайным итеративным алгоритмом* будет называться любая случайная последовательность  $\{x_n(\omega)\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , элементов множества  $X$  (фазового пространства), т. е. последовательность измеримых функций  $x_n(\omega)$  на  $\Omega$  со значениями в  $X$  и вероятностная мера  $P(d\omega)$  на  $\Omega$ . Случайный итеративный процесс есть совокупность случайных алгоритмов.

В большей части работ по теории стохастической аппроксимации рассматриваются вероятностные меры, соответствующие марковским случайным последовательностям вида

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n \zeta_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8.1)$$

причем  $\alpha_n$  не случайны, и почти наверное

$$P\{\zeta_n \in A \mid x_0, \dots, x_n\} = \mu_{x_n}(A),$$

где  $A$  — произвольное измеримое подмножество фазового пространства  $X$  и  $\mu_x(A)$ ,  $x \in X$ , заданное семейство распределений, определяющих переходные вероятности марковской цепи. Иначе говоря, рассматриваются случайные последовательности, порождаемые (в указанном смысле) семейством распределений  $\mu_x$ ,  $x \in X$ . Обычно для доказательства теорем сходимости важными оказываются только свойства функции регрессии (математического ожидания)

$$r(x) = \int_X y \mu_x(dy)$$

семейства распределений  $\mu_x$  и ограниченность их вторых моментов. В остальном вид распределений  $\mu_x$  оказывается несущественным.

1. **Случайный стандартный процесс.** В настоящем параграфе, как и прежде, будет предполагаться, что процесс не выходит за пределы ограниченного множества  $X$ , поэтому условие типа ограниченности вторых моментов векторов  $\zeta_n$  выполняется автоматически.

Марковское свойство последовательности  $\{x_n\}$  может быть заменено более слабым. Именно, требования, которым должен удовлетворять выбор направления  $\zeta_n$ , могут накладываться не на сами векторы  $\zeta_n$ , а на их условные математические ожидания

$$r_n = M(\zeta_n | x_0, \dots, x_n). \quad (8.2)$$

Это позволяет интерпретировать алгоритм типа (8.1) как итеративную процедуру, которая на каждой итерации определяет направление движения  $r_n$  (или множество возможных направлений) в зависимости от прошлого течения процесса, а вектор  $\zeta_n$  — как результат дополнительного воздействия ошибки  $\xi_n$ :

$$\zeta_n = r_n + \xi_n. \quad (8.3)$$

При этом ошибка  $\xi_n$  с вероятностью единица удовлетворяет условию

$$M(\xi_n | x_0, \dots, x_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8.4)$$

которое означает, что она «чисто случайная» (лишена систематической составляющей), вне зависимости от прошлого течения процесса.

Теперь можно дать стохастический вариант определения с. п., присоединенного к полю  $R$ .

Определение 8.1. Пусть на выпуклом компакте  $X$  задан неслучайный комплекс  $\{R; Q(\alpha), \alpha \in I\}$ . Тогда случайным стандартным процессом (с. с. п.), присоединенным к полю  $R$ , называется процесс вида

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n \zeta_n$$

удовлетворяющий условиям:

а)  $\{\alpha_n\}$  — неслучайная правильная последовательность; с вероятностью единица

б)  $x_n \in X$  при всех  $n = 0, 1, \dots$ ;

$$в) r_n = M(\zeta_n | x_0, \dots, x_n) \in Q(\alpha_n, x_n). \quad (8.5)$$

2. Теорема об устойчивости процесса относительно случайных ошибок. Ниже (теорема 8.1) приводятся два аналога общей теоремы 7.1 о сходимости с. п. в соответствии с двумя видами сходимости случайных последовательностей — по вероятности (п. в.) и почти наверное

(п. н.)<sup>1</sup>), т. е. с вероятностью единица. Чтобы утверждать сходимость с вероятностью единица (почти наврное), важна скорость стремления к нулю шага итерации  $\alpha_n$ . А именно, условия (5.2) должны быть дополнены требованием

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty. \quad (8.6)$$

**Теорема 8.1.** Пусть  $R$  — ограниченное отображение типа  $K$ , определенное на выпуклом компакте  $X$ , и  $U$  — его индикатриса сходимости. Тогда с. с. п., присоединенный к  $R$ , сходится к  $m(U)$  п. в.

Если выполняется условие (8.6), то сходимость происходит с вероятностью единица<sup>2</sup>).

Иными словами, случайная ошибка  $\xi_n$  в определении направления движения  $r_n$  не нарушает сходимости с. п. Поэтому для проверки сходимости с. с. п. могут быть использованы, в частности, теоремы §§ 7 и 11.

Доказательство теоремы 8.1 будет дано в п. 4.

Следующий пример показывает, что для сходимости почти наврное недостаточно обычного условия  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Процесс для простоты рассматривается на бесконечном множестве  $X$ . Однако это не мешает выявлению смысла.

**Пример.** Пусть  $X$  есть вся числовая прямая и для любого  $x \in X$  множество  $R(x)$  состоит из одной точки  $r(x) = -x$ . Легко проверить, что  $U(x) = |x|$  есть индикатриса поля  $R$ . Если  $x_0 = 0$ , то  $g(t) \equiv 0$  есть единственная предельная траектория, проходящая через  $x_0$ .

Пусть  $\xi_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) взаимно независимы и одинаково распределены:  $\xi_n$  принимает два значения  $+1$  и  $-1$  с вероятностями  $1/2$ . Очевидно, вероятность осуществления в последовательности  $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  серии из  $m$  после-

<sup>1</sup>) Говорят, что  $x_n \rightarrow X^*$  п. в., если  $P\{\rho(x_n, X^*) > \varepsilon\} \rightarrow 0$  для любого  $\varepsilon > 0$ ;  $x_n \rightarrow X^*$  п. н., если  $P\{x_n \rightarrow X^*\} = 1$ . Поскольку рассматриваются последовательности на ограниченном множестве  $X$ , то сходимость по вероятности эквивалентна сходимости в среднем квадратичном.

<sup>2</sup>) В статье В. А. Волконского и С. А. Иванкова [15] допущена ошибка: в теореме 1 утверждается сходимость  $x_n \rightarrow m(U)$  с вероятностью единица без предположения, что  $\alpha_n$  удовлетворяет условию (8.6).

довательных значений  $+1$ , начинающейся на фиксированном месте, есть  $1/2^m$ , а вероятность осуществления хотя бы одной такой серии среди первых  $2^m$  членов этой последовательности есть  $1 - (1 - 1/2^m)^{2^m} \approx 1 - e^{-1}$ . Пусть  $\alpha_n$  остается постоянным ( $\alpha_n = \alpha_0$ ) в течение первых  $[2^{1/\alpha_0}]$  шагов, затем в течение  $[2^{2/\alpha_0}]$  шагов сохраняет значение  $\alpha_0/2$  и т. д. Тогда на каждом отрезке траектории, где  $\alpha$  сохраняет постоянное значение, вероятность осуществления серии из  $[1/\alpha]$  единиц оказывается близкой к  $1 - e^{-1}$ , и с вероятностью единица указанные серии появятся на бесконечном числе таких отрезков траектории. Осуществление такой серии из единиц означает, что на отрезке единичной длины случайная ломаная  $x(t)$  удовлетворяет разностному уравнению

$$\Delta x_n = (-x_n + \xi_n) \Delta t_n = (-x_n + 1) \Delta t_n,$$

т. е. что  $1 - x(t_0 + 1) = (1 - x(t_0)) e^{-1}$ , где  $t_0$  — момент начала серии. Таким образом, траектория  $x(t)$  почти наверное имеет выбросы конечной высоты как угодно далеко от начала отсчета времени.

**3. Две леммы.** Для доказательства теоремы 8.1 будут использованы утверждения о вероятностном поведении последовательности «хвостов» траектории  $x(t, \omega)$ , т. е. функций

$$y_k(t, \omega) = x(\sigma_k(\omega) + t, \omega), \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.7)$$

где  $\sigma_k(\omega)$  — последовательность неотрицательных случайных величин таких, что  $\sigma_k(\omega) \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Эти утверждения представляют также самостоятельный интерес, поскольку позволяют любой вопрос об асимптотическом поведении случайных траекторий с. с. п. сводить к вопросу о поведении детерминированных функций — интегральных кривых поля  $R$ . Поэтому мы сформулируем их в виде двух отдельных лемм. Для доказательства сходимости  $U(x_n) \rightarrow 0$  по вероятности достаточно использовать лемму 8.1. В этой лемме рассмотрен случай, когда величины  $\sigma_k$  не случайные (например,  $\sigma_k \equiv k$ ) и функции  $y_k(t, \omega)$  могут не быть «хвостами» одной траектории. Поэтому в этой лемме речь идет о произвольной последовательности функций  $x'(t, \omega)$ , никак не связанных друг с другом. Для доказательства сходимости  $U(x_n) \rightarrow 0$  п. н. надо использовать лемму 8.2.

Лемма 8.1. Пусть  $x^j(t, \omega) \sim \{\alpha'_n, x'_n(\omega)\}$  — последовательность случайных траекторий, генерируемых с. с. п., присоединенным к полю  $R$ , причем

$$A^j = \sup_n \alpha'_n \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$x^j(t, \omega) \rightarrow G(R), \quad j \rightarrow \infty,$$

по вероятности, где  $G(R)$  — множество интегральных кривых поля  $R$ .

Лемма 8.2. Если  $x^j(t, \omega)$  — последовательность «хвостов» вида (8.7) траектории  $x(t, \omega) \sim \{\alpha_n, x_n(\omega)\}$ , генерируемой с. с. п., присоединенным к полю  $R$ , и выполнено условие (8.6), то

$$x^j(t, \omega) \rightarrow G(R), \quad j \rightarrow \infty,$$

почти наверное.

Доказательство лемм 8.1 и 8.2. Для произвольной траектории с. с. п. согласно равенствам (8.1), (8.3) имеем

$$x_n = \lambda_n + \theta_n,$$

где

$$\lambda_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k r_k,$$

$$\theta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \xi_k.$$

Из соотношения (8.4) вытекает, что последовательность  $\{\theta_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , есть мартингал, причем

$$\mathbf{M} \|\theta_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{M} \|\alpha_k \xi_k\|^2 \leq D^2 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2. \quad (8.8)$$

Согласно неравенству Колмогорова (см. (3.6)), при любом  $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{k \leq n} \|\theta_k\| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\mathbf{M} \|\theta_n\|^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{D^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2. \quad (8.9)$$

Так же как в (4.1) строилась ломаная  $x(t)$  со значениями  $x_n$  в точках  $t_n$ , можно построить ломаные  $\lambda^j(t, \omega)$

и  $\theta^j(t, \omega)$  со значениями  $\lambda_n^j$  и  $\theta_n^j$  в точках  $t_n^j$ . При этом

$$x^j(t, \omega) = \lambda^j(t, \omega) + \theta^j(t, \omega).$$

Зафиксируем некоторое  $T > 0$ . Применяя неравенство (8.9) к траекториям  $x^j(t, \omega)$ , получим для любого  $\varepsilon > 0$

$$P \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\theta^j(t, \omega)\| > \varepsilon \right\} \leq \frac{D^2 T}{\varepsilon^2} A^j \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad (8.10)$$

так что

$$\max_{t \in [0, T]} \|x^j(t, \omega) - \lambda^j(t, \omega)\| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad (8.11)$$

по вероятности.

Пусть теперь выполняется (8.6) и ломаные  $x^j(t, \omega)$  составляют последовательность «хвостов» одной траектории  $x(t, \omega)$ :

$$x^j(t, \omega) = x(\sigma_j(\omega) + t, \omega), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Применяя неравенство (8.8) к траектории  $x(t, \omega)$ , получим

$$\sup_{n \geq 0} M \|\theta_n\|^2 \leq D^2 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 < \infty,$$

откуда следует, что  $\lim \theta_n$  существует почти наверное (см. теорему 3.3). Поэтому

$$\theta^j(t, \omega) = \theta(\sigma_j(\omega) + t) - \theta(\sigma_j(\omega)) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad (8.12)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$ , и соотношение (8.11) выполняется с вероятностью единица.

Пользуясь обозначениями § 6, можно сказать, что если

$$\sup_n \alpha_n < \frac{\delta}{2D} \quad \text{и} \quad \max_{t \in [0, T]} \|x(t, \omega) - \lambda(t, \omega)\| < \frac{\delta}{2},$$

то

$$\lambda(t, \omega) = \int_0^t r(\tau, \omega) d\tau + x_0,$$

где с вероятностью единица  $r(\tau, \omega) \in Q^\delta(x(\tau, \omega))$ , т. е.  $x(\omega) \in G^\delta$ . Поэтому при любом  $\delta > 0$  если  $A^j < \frac{\delta}{2D}$ , то

$$\{x^j(\omega) \notin G^\delta\} \subset \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\theta^j(t, \omega)\| > \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Учитывая, что при любом  $T$  выполняется соотношение (8.10), получаем, что

$$x^j(\omega) \rightarrow G^\delta$$

по вероятности. Поскольку  $\lim G^\delta \subset G(R)$ , то отсюда следует утверждение леммы 8.1.

В условиях леммы 8.2, согласно (8.12), с вероятностью единица событие  $\left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\theta^j(t, \omega)\| > \frac{\delta}{2} \right\}$  не выполняется ни для одного значения  $j$ , начиная с некоторого номера  $j_0(\omega)$ . Поэтому почти наверное  $x^j(\omega)$  при  $j \rightarrow \infty$  стремится к множеству  $G^\delta$  при любом  $\delta > 0$ , а следовательно, и к множеству  $G(R)$ . (Надо учесть, что можно взять счетное множество отрезков  $[0, T_k]$ , покрывающих всю полуось  $t \geq 0$ , и счетную последовательность  $\delta_k \rightarrow 0$ .) Лемма 8.2 доказана.

**4. Доказательство теоремы устойчивости.** Докажем сначала утверждение о сходимости по вероятности. Допустим, что теорема 8.1 неверна, т. е. существуют  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  и последовательность  $\{t_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $t_k \rightarrow \infty$ , такие, что

$$P \{U(x(t_k, \omega)) > \varepsilon\} > \delta, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.13)$$

Согласно лемме 7.3 существует  $T = T(\varepsilon/2)$  такое, что для любой интегральной кривой  $g \in G(R)$

$$U(g(T)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим последовательность «хвостов» (8.7) при  $\sigma_k = t_k - T$ . Из лемм 7.3 и 8.1 вытекает, что с вероятностью единица

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} U(x^k(T, \omega)) \leq \sup_{g \in G(R)} U(g(T)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это противоречит предположению (8.13), так как  $x^k(T, \omega) = x(t_k, \omega)$ . Сходимость п. в. доказана.

Переходим к утверждению о сходимости п. н. Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и  $T = T(\varepsilon)$  такое, что  $U(g(T)) < \varepsilon$  для всех  $g \in G(R)$ . Докажем сначала, что почти наверное

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} U(x(t, \omega)) = \varepsilon. \quad (8.14)$$

Рассмотрим последовательность случайных ломаных

$$y^k(t, \omega) = x(k+t, \omega), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и выберем сходящуюся подпоследовательность

$$x^j(t, \omega) = y^{k_j(\omega)}(t, \omega), \quad j = 1, 2, \dots$$

В силу леммы 8.2

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x^j(\omega) \in G(R) \quad \text{п. н.}$$

Следовательно, п. н.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x(t, \omega)) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} U(x^j(T, \omega)) \leq \varepsilon.$$

Теперь покажем, что почти наверное  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} U(x(t, \omega)) \leq \varepsilon$ .

Рассмотрим множества  $A_1 = \{x \in X : U(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$  и  $A_2 = \{x \in X : U(x) \geq \varepsilon\}$ . Пусть  $\tau_1(\omega)$  — момент первого достижения траекторией  $x(t, \omega)$  множества  $A_1$ ,  $\tau_2(\omega)$  — момент первого достижения  $A_2$  после момента  $\tau_1(\omega)$  и т. д. Согласно уже доказанному неравенству (8.14) с вероятностью единица моменты  $\tau_{2k-1}(\omega)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , существуют. Возьмем теперь некоторое  $s > 0$ , рассмотрим последовательность ломаных  $y^k(t, \omega) = x(\tau_{2k}(\omega) - s + t, \omega)$  на отрезке  $[0, s]$  и выберем сходящуюся подпоследовательность. Для предельной функции  $g(t)$  существует  $\delta > 0$  такое, что  $U(g(t)) < U(g(s))$  для  $s - \delta \leq t < s$ . Согласно определению индикатрисы это означает, что  $g \notin G(R)$ . Таким образом, по построению с вероятностью единица имеет место включение событий

$$\{\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} U(x(t, \omega)) \geq \varepsilon\} \subset \{g = \lim_{k \rightarrow \infty} y^k(t, \omega) \notin G(R)\}.$$

Но согласно лемме 8.2  $P\{g \notin G(R)\} = 0$ , и поэтому почти наверное

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} U(x(t, \omega)) \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  отсюда следует требуемое утверждение. Теорема 8.1 доказана полностью.

## § 9. Теоремы о локальной сходимости. Простой процесс на неограниченном множестве

До сих пор изложение проводилось в предположении, что основное множество  $X$  ограничено и начальное значение  $x_0$  процесса есть его произвольный элемент. В данном параграфе будут сформулированы и доказаны некоторые результаты, имеющие, по существу, характер локальных теорем сходимости для простого процесса. Утверждение леммы 9.1 состоит в том, что траектория процесса никогда не уходит в бесконечность и что она будет оставаться в любой заданной окрестности множества  $X^*$  решений задачи, если только  $x_0$  выбрано достаточно близко к  $X^*$  и шаги  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  достаточно малы. Эта лемма дает возможность применить теорему 7.1 для обоснования локальной сходимости процесса (теорема 9.1) и для утверждения сходимости без предположения ограниченности множества  $X$  (теорема 9.2).

Лемма 9.2 и теоремы 9.3 и 9.4 содержат аналогичные утверждения для стохастического процесса.

Здесь рассматривается простой процесс на замкнутом выпуклом множестве  $X$ , которое не предполагается обязательно ограниченным. Напомним, что простой процесс имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x_n &\in X, \\ x_{n+1} &= x_n + \alpha_n r_n, \quad r_n \in R(x_n), \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где  $\{\alpha_n\}$  — правильная последовательность и  $R$  — заданное на  $X$  ограниченное точечно-множественное отображение типа  $K$ . Будем считать, что множества  $R(x)$ ,  $x \in X$ , равномерно ограничены константой  $D$ .

Нижеследующие результаты будут получены при дополнительном предположении относительно последовательности  $\{\alpha_n\}$ , именно, будет предполагаться, что выполнено условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = A < \infty. \quad (9.2)$$

### 1. Детерминированный процесс.

Лемма 9.1. Пусть процесс (9.1) удовлетворяет указанным выше условиям, и  $X^* \subset X$  — (замкнутое) множество решений задачи, для которой этот процесс предназначен.

Пусть на  $X$  можно определить функцию  $U$ , удовлетворяющую условиям:

а)  $U$  — дважды дифференцируемая функция с матрицей вторых производных, равномерно ограниченной по норме константой  $H$ ;

б)  $U(x) > 0$  при  $x \notin X^*$ ,  $U(x) = 0$  при  $x \in X^*$ ;

в) всюду вне  $X^*$  выполняется условие (ср. (7.4));

$$\langle \text{grad } U(x), r \rangle < 0, \quad \forall (x \in X \setminus X^*, r \in R(x)); \quad (9.3)$$

г)  $\text{grad } U(x) = 0, x \in X^*.$  (9.4)

Тогда

$$U(x_n) \leq U(x_0) + \frac{1}{2} HD^2 A.$$

Замечание. Условие г), по существу, не является дополнительным требованием. Действительно, если функция  $U$  удовлетворяет условиям а) — в) леммы 9.1, то этим же условиям удовлетворяет и функция  $\tilde{U} = F(U)$ , где  $F(U)$ ,  $U \geq 0$ , — произвольная дважды дифференцируемая монотонная функция с условием  $F(0) = 0$ . Подчинив еще  $F$  требованию  $F'(0) = 0$  (взяв, например,  $F(U) = U^2$  в окрестности точки  $U = 0$ ), получим, что  $\tilde{U}$  удовлетворяет и условию (9.4).

Доказательство. Условия (9.3) и (9.4) вместе дают

$$\langle \text{grad } U(x), r \rangle \leq 0, \quad \forall (x \in X, r \in R(x)). \quad (9.5)$$

Пусть  $\{\alpha_n, x_n\}$  — некоторая фиксированная последовательность процесса (9.1). Из (9.5) и условий а), в) следует  $U(x_{k+1}) - U(x_k) \leq \langle \text{grad } U(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle +$

$$+ \frac{1}{2} H \|x_{k+1} - x_k\|^2 = \langle \text{grad } U(x_k), \alpha_k r_k \rangle + \\ + \frac{1}{2} H \alpha_k^2 \|r_k\|^2 \leq \frac{1}{2} HD^2 \alpha_k^2. \quad (9.6)$$

Суммируя эти неравенства для  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , получим с учетом (9.2)

$$U(x_n) \leq U(x_0) + \frac{1}{2} HD^2 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \leq U(x_0) + \frac{1}{2} HD^2 A.$$

Лемма доказана.

Теорема 9.1. Пусть выполнены все условия леммы 9.1. Предположим, кроме того, что

д) множество  $X^*$  ограничено;

е) существуют  $\varepsilon > 0$  и выпуклый компакт  $\tilde{X}$  такие, что

$$X^* \subset \tilde{X} \subset X, \quad U(x) > \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in X \setminus \tilde{X}.$$

Тогда если  $U(x_0) < \varepsilon$ , то существует  $A_0$  такое, что если соотношение (9.2) выполняется при  $A \leq A_0$ , то  $x_n \rightarrow X^*$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Выберем  $A_0$  таким, что

$$U(x_0) + \frac{1}{2} HD^2 A_0 < \varepsilon.$$

Тогда согласно лемме 9.1 и условию е) траектория  $x(t) \sim \sim \{\alpha_n, x_n\}$  процесса (9.1) не выходит за пределы компакта  $\tilde{X}$ . Рассмотрим поле  $R$  и соответствующий простой процесс на компакте  $\tilde{X}$ . Траектория  $x(t)$  является одной из траекторий простого процесса на компакте  $\tilde{X}$ . В силу условия (9.3) применимо следствие из теоремы 7.3, согласно которому  $U$  — индикатриса поля  $R$ . Более того, в силу условия б) леммы 9.1  $U$  есть функция Ляпунова для решаемой задачи. В силу теоремы 7.2 траектория  $x(t)$  сходится к  $X^*$ . Теорема доказана.

**Теорема 9.2.** Пусть выполняются все условия леммы 9.1 и, кроме того, функция  $U$  неограниченно растет на бесконечности, т. е.

ж)  $U(x) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

Тогда

$$x_n \rightarrow X^*, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Замечание.** Из условий б) и ж) следует, что множество  $X^*$  ограничено.

**Доказательство.** Из леммы 9.1 и условия ж) следует, что последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, т. е. сосредоточена на некотором компакте  $\tilde{X}$  таком, что  $X^* \subset \tilde{X} \subset X$ . Рассматривая, как и в доказательстве теоремы 9.1, простой процесс на компакте  $\tilde{X}$ , приходим к требуемому утверждению. Теорема доказана.

**2\*.** Процесс со случайными ошибками. Рассмотрим случайный простой процесс

$$\left. \begin{aligned} x_n &\in X, \\ x_{n+1} &= x_n + \alpha_n \zeta_n, \quad r_n = M(\zeta_n | x_0, \dots, x_n) \in R(x_n) \text{ п. н.}, \end{aligned} \right\} (9.7)$$

где  $\{\alpha_n\}$  — правильная последовательность, удовлетворяющая условию (9.2),  $R$  — заданное на  $X$  ограниченное отображение типа  $K$ .

Предположим, кроме того, что

$$M \|\zeta_n\|^2 \leq D^2 < \infty, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9.8)$$

*Лемма 9.2.* Пусть задан случайный процесс (9.7), (9.8) и на множестве  $X$  определена функция  $U$ , удовлетворяющая условиям леммы 9.1. Тогда при любом  $c > 0$

$$P \left\{ \sup_n U(x_n) > U(x_0) + c \right\} < \frac{HD^2A}{2c}.$$

*Доказательство.* Как и в (9.6), получаем, что с вероятностью единица

$$U(x_{k+1}) - U(x_k) \leq \langle \text{grad } U(x_k), \alpha_k \xi_k \rangle + \frac{1}{2} H \alpha_k^2 \|\zeta_k\|^2,$$

где  $\xi_k = \zeta_k - r_k$ . Суммируя по  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ , находим

$$U(x_n) \leq z_n,$$

где

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \alpha_k \langle \text{grad } U(x_k), \xi_k \rangle + \frac{1}{2} H \alpha_k^2 \|\zeta_k\|^2 \right] + U(x_0).$$

Так как  $M(\xi_n | x_0, \dots, x_n) = 0$ , то почти наверное

$$M(z_{n+1} | z_0, \dots, z_n) = z_n + \frac{1}{2} H \alpha_n^2 M(\|\zeta_n\|^2 | z_0, \dots, z_n) \geq z_n.$$

Поэтому последовательность  $\{z_n\}$  есть полумартингал. Применяя неравенство Колмогорова (3.7) (с учетом неравенства  $z_n \geq U(x_n) \geq 0$ ), имеем для любого  $c > 0$

$$P \left( \sup_n z_n > c \right) \leq \frac{1}{c} \lim_{n \rightarrow \infty} M z_n = \frac{H}{2c} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 M \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{HD^2A}{2c}.$$

Лемма доказана.

*Теорема 9.3.* Пусть выполнены условия леммы 9.2 и условия д) и е) теоремы 9.1. Предположим, кроме того, что с вероятностью единица  $U(x_0) < \varepsilon$ . Тогда для любого  $\delta > 0$  существует  $A_0 = A_0(\delta)$  такое, что при  $A \leq A_0$  ( $A$  — константа в правой части (9.2))

$$P \{x_n \rightarrow X^*\} > 1 - \delta.$$

Доказательство. Возьмем произвольное  $\delta > 0$  и выберем  $\varepsilon_1 < \varepsilon$  такое, чтобы выполнялось соотношение

$$P \{U(x_0) > \varepsilon_1\} < \frac{\delta}{2}.$$

Положим

$$c = \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2}, \quad A_0 = \frac{c\delta}{HD^2}.$$

Тогда согласно лемме 9.2 имеем

$$P \left\{ \sup_n U(x_n) > \varepsilon - c \right\} \leq P \{U(x_0) > \varepsilon_1\} + \\ + P \left\{ \sup_n U(x_n) > U(x_0) + c \right\} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{HD^2 A_0}{2c} = \delta.$$

Иными словами, с вероятностью, большей чем  $1 - \delta$ , траектория не выходит из компакта  $\{x \in X : U(x) \leq \varepsilon - c\} \subset \tilde{X}$ . Поскольку в силу условия е) эта область ограничена, с той же вероятностью она (траектория) имеет в  $\tilde{X}$  точки накопления. Почти дословно повторяя доказательство теоремы 8.1, получим, что с вероятностью единица точки накопления последовательности  $\{x_n\}$  не могут лежать в множестве  $\tilde{X} \setminus X^*$ . Следовательно,

$$P \{x_n \rightarrow X^*\} > 1 - \delta.$$

Теорема доказана.

Теорема 9.4. Пусть заданы процесс (9.7), (9.8) и функция  $U$ , удовлетворяющая условиям а), б), в) леммы 9.1 и условию ж) теоремы 9.2. Тогда

$$x_n \rightarrow X^*, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{п. н.}$$

Доказательство. Возьмем произвольное  $\delta > 0$  и выберем константы  $c_1$  и  $c_2$  такие, что

$$P \{U(x_0) \geq c_1\} \leq \frac{\delta}{2},$$

$$P \left\{ \sup_n U(x_n) \geq U(x_0) + c_2 \right\} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Первое можно сделать в силу условия ж) теоремы 9.2, а второе — в силу леммы 9.2. Из этих двух неравенств

имеем для  $c = c_1 + c_2$

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_n U(x_n) > c \right\} &\leq P \{ U(x_0) \geq c_1 \} + \\ &+ P \left\{ \sup_n U(x_n) \geq U(x_0) + c_2 \right\} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству теоремы 9.3 получаем отсюда, что

$$P \{ x_n \rightarrow X^* \} > 1 - \delta.$$

Так как  $\delta$  произвольно, это доказывает теорему.

## КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ II\*

Результаты о сходимости итеративных процессов, полученные в этой главе, естественным образом могут быть обобщены на случай (бесконечномерных) линейных нормированных топологических пространств. Допустимо, в частности, следующее обобщение, которое будет использовано при рассмотрении игровых процессов в смешанных стратегиях (см. § 10, п. 8, § 11, п. 4).

Пусть  $E$  — пространство линейных непрерывных функционалов на сепарабельном банаховом пространстве  $C$  (с нормой  $\| \cdot \|_C$ ), т. е.  $E = C^*$ . Будем считать, что в  $E$  введена норма

$$\| \mu \|_E = \sup_{\| f \|_C \leq 1} |(\mu, f)|, \quad \mu \in E.$$

Известно (см. [38], стр. 189), что в рассматриваемом случае слабая топология в  $E$  может быть задана с помощью метрики

$$\rho(\mu, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(\mu - \xi, f_n)|, \quad \mu, \xi \in E, \quad (II.1)$$

где  $\{f_n\}$  — счетное всюду плотное множество в единичном шаре пространства  $C$ .

В качестве основного множества ( $X$ ) рассмотрим ограниченное выпуклое множество  $K \subset E$ . Множество  $K$  является компактом в слабой топологии, т. е. в метрике (II.1) (см. [38], стр. 188). Сохранив определение 4.1 регулярной последовательности  $\{\mu_n\} \subset K$ , можно убедиться, что понятие предельной траектории остается корректным в смысле слабой сходимости. Это следует из простого обобщения теоремы Арцела — имеет место

**Лемма II.1.** Пусть на отрезке  $\Delta \subset [0, \infty)$  задана последовательность равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций  $\mu_n(t)$  со значениями в  $E$ . Тогда можно выбрать подпоследовательность  $\mu_{n_k}(t)$ , которая при каждом  $t \in \Delta$  слабо сходится к непрерывной функции  $\mu(t)$ .

Если все функции  $\mu_n(t)$  удовлетворяют условию Липшица с константой  $D$ , то предельная функция  $\mu(t)$  также удовлетворяет этому условию.

**Доказательство.** Выберем в  $C$  счетную всюду плотную систему  $\{f_j\}$ . Рассмотрим функций  $\varphi_{nj}(t) = (\mu_n(t), f_j)$ . При каждом фиксированном  $j$  эти функции будут равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. По теореме Арцела для  $j=1$  можно выбрать подпоследовательность  $\varphi_{n_{k,1}}(t)$ , которая равномерно сходится. Далее, из функций  $\varphi_{n_{k,2}}(t)$  выберем равномерно сходящуюся подпоследовательность  $\varphi_{n_{s,2}}(t)$  и т. д. Теперь из построенной системы функций выберем диагональную подпоследовательность, которую обозначим через  $\varphi_r(t)$ . По построению для каждой  $f_j$  последовательность  $(\mu_r(t), f_j)$  равномерно сходится при  $r \rightarrow \infty$ . Положим  $(\mu(t), f_j) = \lim_{r \rightarrow \infty} (\mu_r(t), f_j)$ . При каждом  $t \in \Delta$  функционал  $\mu(t)$  — линейный ограниченный функционал, заданный на всюду плотной системе  $\{f_j\}$ . Следовательно, его можно продолжить по непрерывности на все  $C$ . Таким образом, мы построили подпоследовательность  $\mu_r(t)$ , которая слабо сходится к непрерывной функции  $\mu(t)$ . Выполнение условия Липшица для  $\mu(t)$ , когда ему удовлетворяют функции  $\mu_n(t)$ , легко проверяется. Лемма доказана.

С помощью доказанной леммы легко проверяется, что лемма 4.1 и теорема 4.1 (признак сходимости) остаются справедливыми, если понимать сходимость на  $K$  в смысле метрики  $\rho$ , определенной в (II.1), и непрерывность функции  $U$  также в смысле этой метрики.

Понятие стандартного процесса, введенное в § 5, опирается на свойство полунепрерывности сверху точечно-множественных отображений. Если в определении 2.1 понимать соответствующие окрестности в смысле метрики  $\rho$  (II.1), то понятия полунепрерывного сверху отображения и определение 5.2 сохраняются без изменений. Следует заметить, что лемма 2.1 остается в силе, поскольку  $K$  есть  $\rho$ -компакт.

Остановимся на понятиях производной и интеграла Лебега. Под производной функции на полуоси  $t \geq 0$  со значениями в  $E$  условимся понимать  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t}$ , если он, конечно, существует, причем предел понимается в смысле слабой сходимости.

**Определение II.1.** Функцию  $\xi(t)$  со значениями в  $E$  назовем измеримой, если существует всюду плотная в  $C$  счетная система  $F_\xi = \{f_n\}$  такая, что все функции  $\varphi_n(t) = (\xi(t), f_n)$  — измеримые (по Лебегу) числовые функции. Определенным интегралом на отрезке  $[a, b]$  функции  $\xi(t)$  назовем функционал  $\mu \in E$ , для которого  $(\mu, f_n) = \int_a^b \varphi_n(t) dt$ ,

$\forall f_n \in F_\xi$ . Поскольку  $F_\xi$  — база в пространстве  $C$ , то  $\mu$  определен однозначно и не зависит от системы  $F_\xi$ . Поэтому корректно следующее обозначение:  $\mu = \int_a^b \xi(t) dt$ .

Надо отметить, что определение 6.1 интегральной кривой опирается на леммы 3.2 и 3.3, справедливость которых в данном случае требует проверки. С этой целью докажем следующую лемму.

**Лемма II.2.** Пусть непрерывная функция  $\mu(t)$  на полуоси  $t \geq 0$  со значениями в  $E$  удовлетворяет по норме условию Липшица, т. е.  $\|\mu(t_1) - \mu(t_2)\|_E \leq D |t_1 - t_2|$  для любых  $t_1, t_2 \geq 0$ . Тогда для почти всех  $t \geq 0$  существует производная  $\dot{\mu}(t) \in E$ , причем  $\mu(t) = \mu(a) + \int_a^t \dot{\mu}(\tau) d\tau$  и  $\|\dot{\mu}(t)\| \leq D$ .

**Доказательство.** Выберем в  $C$  счетную всюду плотную систему  $F = \{f_n\}$ , и пусть  $\varphi_n(t) = (\mu(t), f_n)$ . По условиям леммы  $\varphi_n(t)$  удовлетворяют условию Липшица. В силу леммы 3.3 для почти всех  $t$  все функции  $\varphi_n(t)$  имеют производные  $\dot{\varphi}_n(t)$  (являющиеся измеримыми функциями) и  $|\dot{\varphi}_n(t)| \leq D \|f_n\|_C$ . Определим функционал  $\xi(t)$  на  $F$  равенством  $(\xi(t), f_n) = \dot{\varphi}_n(t)$ ,  $f_n \in F$ . Для почти всех  $t$  функционал  $\xi(t)$  есть ограниченный линейный функционал, заданный на всюду плотной системе  $F$ . Следовательно, его можно непрерывно продолжить на все пространство с сохранением этих свойств. Согласно

(3.3)  $(\mu(t), f_n) = (\mu(a), f_n) + \int_a^t (\xi(\tau), f_n) d\tau$ ,  $\forall f_n \in F$ . Поскольку

$F$  — счетная база, то по определению II.1  $\mu(t) = \mu(a) + \int_a^t \xi(\tau) d\tau$ . По

построению функционала  $\xi(t)$  имеем  $\left(\frac{\Delta\mu(t)}{\Delta t}, f_n\right) \rightarrow (\xi(t), f_n)$  при

$\Delta t \rightarrow 0$ . Так как  $\left\|\frac{\Delta\mu(t)}{\Delta t}\right\|_E \leq D$ , то отсюда следует слабая сходимость

$\frac{\Delta\mu}{\Delta t}$  к  $\xi(t)$  (см. [38], стр. 184). Лемма доказана.

## ГЛАВА III

### ИГРОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

#### § 10. Выпуклые игры с нулевой суммой

1. **Выпуклая игра  $N$  игроков.** Мы будем исходить из следующего определения выпуклой игры.

Определение 10.1. *Выпуклой игрой  $N$  лиц (игроков),  $N \geq 2$ , называется объект  $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^N$ , где  $X_k \subset E^{m_k}$  — выпуклые компакты, а  $\varphi_k$  — непрерывные функции, заданные на прямом произведении*

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_N): x_k \in X_k, \quad k = 1, \dots, N\}, \quad (10.1)$$

каждая ( $k$ -я) из которых удовлетворяет условиям:

а) при любых фиксированных значениях аргументов  $x_j \in X_j, j = 1, 2, \dots, N, j \neq k, \varphi_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_N)$  — выпуклая вверх функция аргумента  $x_k$ ;

б) при любом фиксированном значении  $x_k \in X_k$  функция  $\varphi_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_N)$  — выпуклая вниз функция аргументов  $x_j, j = 1, 2, \dots, N, j \neq k$ .

Векторы  $x_k \in X_k$  называются стратегиями  $k$ -го игрока, набор стратегий  $x = (x_1, \dots, x_N)$  называется партией, функция  $\varphi_k$  называется функцией выигрыша  $k$ -го игрока.

Интерпретация этих понятий такова. Каждый из игроков  $k = 1, 2, \dots, N$  может выбрать любую из имеющихся в его распоряжении стратегий, т. е. любую точку  $x_k \in X_k$ . Когда такой выбор произведен, составляется (играется) партия  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Выигрыши игроков в этой партии суть значения функций  $\varphi_k(x)$ .

Обозначим

$$F(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x).$$

Если  $F(x) \equiv 0$ ,  $x \in \Omega$ , то игра называется игрой с нулевой суммой<sup>1)</sup>. В настоящей книге мы будем иметь дело только с выпуклыми играми с нулевой суммой и, не оговаривая этого, называть их просто игрой. Противные случаи будут оговариваться особо<sup>2)</sup>.

**2. Точки равновесия и связанное с игрой отображение.** Для формулировки понятия решения игры введем следующее обозначение. Функцию  $\varphi_R(x_1, \dots, y_k, \dots, x_N)$  будем обозначать через  $\varphi_R(y_k; x)$ . В такой записи пара  $(y_k; x)$  образует партию, причем собственный (для  $k$ -го игрока) аргумент (стратегия) выделяется явно и ставится на первое место, а под  $x$  подразумевается совокупность стратегий остальных игроков, которую мы будем называть *ситуацией*. Условие б) определения 10.1 означает, что  $\varphi_k(y_k; x)$  выпуклы вниз по  $x$ . Отметим еще тождество  $\varphi_k(x_k; x) \equiv \varphi_k(x)$ .

Решением, или *точкой (партией) равновесия* Нэша игры  $\gamma$ , называется точка  $x^* \in \Omega$  такая, что для всех  $k=1, 2, \dots, N$

$$\max_{y_k \in X_k} \varphi_k(y_k; x^*) = \varphi_k(x_k^*; x^*). \quad (10.2)$$

Существование (вообще говоря, не единственной) точки равновесия немедленно следует из теоремы Какутани. Действительно, определим точечно-множественные

<sup>1)</sup> Несколько более общим является случай, когда  $F(x)$  — выпуклая вверх функция на  $\Omega$ . Однако этот случай приводится к игре с нулевой суммой введением фиктивного  $(N+1)$ -го игрока, множество  $X_{N+1}$  стратегий которого состоит из одной точки, а  $\varphi_{N+1} = -F$ . Такая расширенная игра будет удовлетворять определению 10.1 и будет игрой с нулевой суммой.

<sup>2)</sup> Наше определение выпуклых игр несколько уже обычного их понимания, во-первых, потому, что множества  $X_k$  предполагаются ограниченными, и, во-вторых, потому, что наложено условие б). Например, в [5] в определение выпуклой игры включено только условие а). Однако и наше узкое определение достаточно для возможности включения в игровую схему задач математического программирования (см. гл. IV). С другой стороны, именно для таких игр удается доказать теорему сходимости (см. § 11).

отображения  $Z_k: \Omega \rightarrow X_k$ , положив<sup>1)</sup>

$$Z_k(x) = \text{Arg max}_{y_k \in X_k} \varphi_k(y_k; x), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

и отображение  $Z: \Omega \rightarrow \Omega$  как декартово произведение отображений  $Z_k$ . Тогда условие равновесности (10.2) партии  $x^*$  можно записать в виде  $x^* \in Z(x^*)$ , и поэтому точки равновесия игры  $\gamma$  есть не что иное, как неподвижные точки отображения  $Z$ . Как показано в § 2,  $Z$  является  $K$ -отображением, и по теореме 2.1 множество его неподвижных точек не пусто.

Стратегии, входящие в множество  $Z_k(x)$ , называются *оптимальными ответами*  $k$ -го игрока на ситуацию  $x$  и обозначаются обычно через  $\hat{x}_k(x)$ . Построенное выше отображение  $Z$  будем называть отображением, *связанным с игрой*  $\gamma$ .

Определим функцию<sup>2)</sup>

$$\Phi(y, x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(y_k; x), \quad x, y \in \Omega. \quad (10.3)$$

Тогда отображение, связанное с игрой  $\gamma$ , можно записать в виде

$$Z(x) = \text{Arg max}_{y \in \Omega} \Phi(y, x), \quad x \in \Omega, \quad (10.4)$$

поскольку

$$\max_{y \in \Omega} \Phi(y, x) = \sum_{k=1}^N \max_{y_k \in X_k} \varphi_k(y_k; x)$$

(каждый игрок максимизирует свою функцию выигрыша и находит оптимальный ответ в ситуации  $x$  независимо от других игроков). Условие равновесия  $x^* \in Z(x^*)$  примет вид

$$\Phi(y, x^*) \leq \Phi(x^*, x^*), \quad \forall y \in \Omega.$$

1) Согласно определению функции  $\varphi_k(y_k; x)$ , ее аргумент  $x$  принимает значения из множества  $\Omega/X_k$ , т. е.  $\varphi_k(y_k; x)$  не зависит от  $x_k$ . Однако мы можем считать формально, что  $\varphi_k(y_k; x)$  зависит и от  $x_k$ , и тогда можно считать, что аргумент  $x$  принимает значения в множестве  $\Omega$ .

2) Насколько нам известно, функция  $\Phi(y, x)$  впервые была введена в рассмотрение в работе [49].

Так как мы рассматриваем игры с нулевой суммой, то

$$\Phi(x, x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x_k; x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

и поэтому окончательно условие равновесия можно записать в виде

$$\Phi(y, x^*) \leq 0, \quad \forall y \in \Omega. \quad (10.5)$$

**Замечание.** Если множество  $\Omega$  не есть прямое произведение множеств  $X_k$ , а является произвольным выпуклым множеством в произведении пространств  $E^{m_k}$ , то отображения  $Z_k$  не имеют смысла, в то время как отображение  $Z$ , определяемое формулой (10.4), сохраняет смысл. Неподвижные точки этого отображения называются нормализованными точками равновесия (см. [31], [75]). Существование таких точек также следует из теоремы Какутани. Условие (10.5) в этом случае есть условие нормализованного равновесия (в игре с нулевой суммой,  $\Phi(x, x) = 0$ ). Поскольку при доказательстве теоремы сходимости игровых процессов (теорема 11.2) мы будем иметь дело только с отображением  $Z$  в форме (10.4), эта теорема сохраняет силу и для случая произвольного множества  $\Omega$ .

**3. Игра двух игроков.** В игре двух игроков (с нулевой суммой)

$$\varphi_1(x_1, x_2) = -\varphi_2(x_1, x_2), \quad \forall (x_1 \in X_1, x_2 \in X_2).$$

Поэтому в этой игре задается только одна функция  $\varphi(x_1, x_2)$ , выпуклая вверх по первому аргументу и выпуклая вниз по второму (такие функции будем называть *выпукло-вогнутыми*). Функция  $\varphi$  интерпретируется как выигрыш первого игрока и одновременно как проигрыш второго, т. е.  $\varphi_1 = \varphi$ ,  $\varphi_2 = -\varphi$ .

В игре двух лиц стратегии игроков обозначаются обычно разными буквами, например  $x$  и  $p$ , а партия, которая раньше обозначалась через  $x$ , теперь есть просто пара  $(x, p)$ . Соответственно множества стратегий обозначаются через  $X, P$ , а сама игра —  $\{X, P, \varphi\}$ . Первый игрок (называемый максимизирующим) стремится максимизировать  $\varphi$ , варьируя стратегии  $x \in X$ , а второй (минимизирующий) — минимизировать, варьируя стратегии  $p \in P$ .

Таким образом, оптимальными ответами игроков в игре  $\{X, P, \varphi\}$  являются:

для первого игрока

$$\hat{x}(p) = \arg \max_{x \in X} \varphi(x, p), \quad p \in P,$$

для второго игрока

$$\hat{p}(x) = \arg \min_{p \in P} \varphi(x, p), \quad x \in X.$$

Условия равновесия (10.2) партии  $(x^*, p^*)$  в игре  $\{X, P, \varphi\}$  имеют вид

$$\varphi(x^*, p) \geq \varphi(x^*, p^*) \geq \varphi(x, p^*), \quad \forall (x \in X, p \in P) \quad (10.6)$$

и суть, следовательно, условия того, что точка  $(x^*, p^*)$  является седловой точкой выпукло-вогнутой функции  $\varphi(x, p)$ . Таким образом, партии равновесия в игре двух лиц являются седловыми точками ее функции выигрыша.

Отметим, что хотя равновесная партия может быть не единственной, но выигрыш  $\varphi(x^*, p^*)$  определяется игрой однозначно и называется *ценой* (или значением) игры. Действительно, пусть  $(\bar{x}, \bar{p})$  — другая равновесная партия. Подставляя в правое неравенство (10.6)  $x = \bar{x}$ , получим

$$\varphi(x^*, p^*) \geq \varphi(\bar{x}, p^*).$$

С другой стороны, применяя (10.6) к партии  $(\bar{x}, \bar{p})$  и подставляя в левое неравенство  $p = p^*$ , будем иметь

$$\varphi(\bar{x}, p^*) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{p}).$$

Сопоставляя это неравенство с предыдущим, получаем

$$\varphi(x^*, p^*) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{p}).$$

В силу равноправия равновесных партий здесь должно быть равенство.

Обозначим цену игры через  $v$ . Если  $(x^*, p^*)$  — партия равновесия, то

$$\varphi(x^*, p^*) = v$$

и условия (10.6) можно записать в виде

$$\varphi(x^*, p) \geq v, \quad \forall p \in P, \quad (10.7a)$$

$$\varphi(x, p^*) \leq v, \quad \forall x \in X. \quad (10.7b)$$

**Лемма 10.1.** Если число  $v$  таково, что множества  $X^*$  стратегий, удовлетворяющих условию (10.7а), и  $P^*$  стратегий, удовлетворяющих условию (10.7б), не пусты, то  $v$  — цена игры и при любых  $x^* \in X^*$ ,  $p^* \in P^*$  партия  $(x^*, p^*)$  является партией равновесия в игре  $\{X, P, \varphi\}$ , т. е. множество партий равновесия есть  $X^* \times P^*$ .

**Доказательство.** Пусть  $x^* \in X^*$ ,  $p^* \in P^*$ . Полагая в (10.7а)  $p = p^*$ , а в (10.7б)  $x = x^*$ , получим  $\varphi(x^*, p^*) = v$ . Теперь (10.7а, б) можно записать в виде условий равновесия (10.6). Лемма доказана.

Лемма 10.1 позволяет ввести естественным образом понятие оптимальных стратегий в игре двух лиц. Именно, множества  $X^*$  и  $P^*$ , определяемые леммой 10.1, т. е. условиями (10.7а, б), называются множествами *оптимальных стратегий* игроков, а условия (10.6) суть условия оптимальности.

Содержание леммы 10.1 коротко можно выразить так: партия  $(x^*, p^*)$  равновесна тогда и только тогда, когда стратегии  $x^*$  и  $p^*$  оптимальны.

Определим теперь функцию  $F_1$  на множестве  $X$ , положив

$$F_1(x) = \min_{p \in P} \varphi(x, p), \quad x \in X. \quad (10.8)$$

Это — выпуклая вверх функция.

**Лемма 10.2а.** Имеют место равенства

$$\max_{x \in X} F_1(x) = v, \quad \text{Arg} \max_{x \in X} F_1(x) = X^*,$$

где  $v$  — цена игры.

**Доказательство.** Пусть  $x^* \in X^*$ . В силу (10.7а) будет  $F_1(x^*) \geq v$ . С другой стороны, поскольку множество  $P^*$  не пусто, то в силу (10.7б)

$$F_1(x) \leq \varphi(x, p^*) \leq v, \quad \forall x \in X.$$

Эти неравенства доказывают оба утверждения леммы.

Совершенно аналогично доказывается

**Лемма 10.2б.** Имеют место равенства

$$\min_{p \in P} F_2(p) = v, \quad \text{Arg} \min_{p \in P} F_2(p) = P^*,$$

где

$$F_2(p) = \max_{x \in X} \varphi(x, p), \quad p \in P.$$

Функция  $F_2(p)$  выпукла вниз.

Смысл леммы 10.2а (леммы 10.2б) состоит в том, что она устанавливает эквивалентность задачи отыскания оптимальных стратегий первого (второго) игрока задаче максимизации (минимизации) функции  $F_1(x)$  ( $F_2(p)$ ). Для каждой точки  $x^* \in X^*$  имеем в силу этой леммы

$$F_1(x^*) = v = \max_{x \in X} \min_{p \in P} \varphi(x, p), \quad \forall x^* \in X^*, \quad (10.9a)$$

и поэтому оптимальные стратегии первого игрока называются максиминными.

Двойственное равенство

$$F_2(p^*) = v = \min_{p \in P} \max_{x \in X} \varphi(x, p), \quad \forall p^* \in P^* \quad (10.9б)$$

объясняет наименование оптимальных стратегий второго игрока минимаксными.

Сформулируем ряд следствий из лемм 10.2а, б.

Следствие 1.  $F_2(p) \geq F_1(x)$ ,  $\forall (x \in X, p \in P)$ , причем равенство имеет место только тогда, когда  $x \in X^*$  и  $p \in P^*$ .

Следствие 2. Условия (10.6) оптимальности стратегий  $x^*$ ,  $p^*$  можно записать в более слабой форме:

$$\varphi(x^*, p) \geq \varphi(x, p^*), \quad \forall (x \in X, p \in P). \quad (10.10)$$

Действительно, беря в (10.10)  $\min$  по  $p$  слева и  $\max$  по  $x$  справа, получим  $F_1(x^*) \geq F_2(p^*)$ , что вместе со следствием 1 означает, что  $x^* \in X^*$ ,  $p^* \in P^*$ .

Следствие 3 (правило перестановочности). Если  $X$  и  $P$  — выпуклые компакты и функция  $\varphi(x, p)$  выпукловогнута, то

$$\max_{x \in X} \min_{p \in P} \varphi(x, p) = \min_{p \in P} \max_{x \in X} \varphi(x, p). \quad (10.11)$$

Этим правилом мы будем пользоваться в дальнейшем.

4. Равноправные и симметричные игры. Назовем игру  $\{X, P, \varphi\}$  двух лиц равноправной, если  $P = X$  и

$$\varphi(x, x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

В равноправной игре цена  $v$  игры равна нулю, поскольку если  $(x^*, p^*)$  — партия равновесия, то, полагая в (10.6)  $x = p^*$ ,  $p = x^*$ , получим

$$0 = \varphi(x^*, x^*) \geq v = \varphi(x^*, p^*) \geq \varphi(p^*, p^*) = 0.$$

В равноправной игре условия (10.7а, б) оптимальности стратегий суть для первого игрока:

$$\varphi(x^*, p) \geq 0, \quad \forall p \in X, \quad (10.12a)$$

для второго игрока

$$\varphi(x, p^*) \leq 0, \quad \forall x \in X. \quad (10.12б)$$

Равноправную игру будем обозначать через  $\{X; \varphi\}$ .

Игра  $\{X, P, \varphi\}$  двух лиц с нулевой суммой называется *симметричной*, если  $P = X$  и

$$\varphi(x, p) = -\varphi(p, x), \quad \forall x, p \in X. \quad (10.13)$$

Очевидно, что всякая симметричная игра равноправна.

В симметричной игре множества оптимальных стратегий игроков совпадают, так как из (10.13) следует, что совпадают условия оптимальности (10.12а) и (10.12б).

Симметричную игру будем обозначать через  $\{X, \varphi\}$ , а множество ее оптимальных стратегий (общее для обоих игроков) — через  $X^*$ .

**5. Сведение игры  $N$  лиц к равноправной игре двух лиц.**

**Лемма 10.3.** *Игра  $N$  лиц (с нулевой суммой)  $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^N$  эквивалентна равноправной игре двух лиц  $\tilde{\gamma} = \{\Omega; \Phi\}$ , где  $\Omega$  определено в (10.1), а  $\Phi$  — в (10.3), в том смысле, что множество оптимальных стратегий второго игрока в игре  $\tilde{\gamma}$  совпадает с множеством партий равновесия игры  $\gamma$ .*

**Доказательство.** Прежде всего, заметим, что функция  $\Phi(y, x)$  выпукло-вогнута, так что  $\tilde{\gamma}$  — выпуклая игра. Условие равноправности игры  $\tilde{\gamma}$  также выполняется:  $\Phi(x, x) = 0$ , так как  $\gamma$  — игра с нулевой суммой. Остается добавить, что условие (10.12б) оптимальности стратегии второго игрока в игре  $\tilde{\gamma}$  совпадает с условием (10.5) равновесности партии в игре  $\gamma$ . Лемма доказана.

Если исходная игра  $\gamma$  была игрой двух лиц  $\{X, P, \varphi\}$ , то в игре  $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} \Omega &= X \times P, \quad \Phi(y, q, x, p) = \varphi(y, p) - \varphi(x, q), \\ &(x, p), (y, q) \in \Omega, \end{aligned}$$

и поэтому  $\tilde{\gamma}$  — не только равноправная, но и симметричная игра. Переход от игры  $\gamma$  к игре  $\tilde{\gamma}$  называется симметризацией игры. Так как в симметричной игре  $\tilde{\gamma}$  множества оптимальных стратегий совпадают (и обозначаются  $\Omega^*$ ), то из лемм 10.3, 10.1 следует

$$\Omega^* = X^* \times P^*. \quad (10.14)$$

В общем случае построение игры  $\tilde{\gamma}$  есть обобщение приема симметризации игры двух лиц.

**6. Матричные (полиэдральные) игры.** Игра  $\{X, Y, \varphi\}$  двух лиц с нулевой суммой называется *полиэдральной*, если множества стратегий  $X$  и  $Y$  — полиэдры, а функция  $\varphi(x, y)$  линейна по обоим аргументам. Если полиэдры  $X$  и  $Y$  — стандартные симплексы  $S^{m_1}$  и  $S^{m_2}$ , то игра называется *матричной*. Матричная игра полностью определяется платежной матрицей  $A (m_1 \times m_2)$ :

$$\varphi(x, p) = \langle p, Ax \rangle, \quad \forall (p \in S^{m_2}, x \in S^{m_1}).$$

Условия равноправности и симметричности матричной игры совпадают и выражаются требованием  $m_1 = m_2$  и

$$A^* = -A,$$

где  $A^*$  — транспонированная матрица (такие матрицы называются кососимметрическими).

Всякую полиэдральную игру можно представить в матричной форме. Для этого достаточно взять вершины полиэдров  $x^1, x^2, \dots, x^{m_1}; y^1, y^2, \dots, y^{m_2}$  и положить

$$A_{ij} = \varphi(x^j, y^i), \quad i = 1, \dots, m_2; \quad j = 1, \dots, m_1.$$

Тогда для произвольных  $x \in X, y \in Y$  будет

$$\varphi(x, y) = \langle \alpha, \beta \rangle,$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m_2})$  — барицентрические координаты точек  $x$  и  $y$  относительно вершин полиэдров  $X$  и  $Y$  соответственно. Поэтому мы не будем делать различия между полиэдральными и матричными играми и будем использовать для них общий термин «матричная игра».

**7. Игровой процесс.** Рассмотрим итеративный процесс (5.11) в применении к отображению  $Z$ , связанному с игрой  $N$  лиц  $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^N$ , т. е. *игровой процесс*.

Итерации процесса естественно интерпретируются как последовательность разыгрываемых игроками партий. Партия  $x_n$  возникает (разыгрывается) как результат одновременного предъявления всеми игроками своих стратегий:  $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{Nn})$ . После того как партия разыграна, игроки анализируют сложившуюся в ней ситуацию, т. е. находят свои оптимальные ответы — стратегии  $\hat{x}_{kn}$ , которые им следовало бы применить, если бы они предвидели эту ситуацию заранее. Используя эту новую информацию, игроки корректируют примененные ранее стратегии, немного сдвигаясь в множествах своих стратегий в направлении к полученным оптимальным ответам, т. е. вычисляют новые стратегии  $x_{k, n+1}$ , которые они собираются применить в следующей  $(n+1)$ -й партии:

$$x_{k, n+1} = (1 - \alpha_n) x_{kn} + \alpha_n \hat{x}_{kn}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (10.15)$$

Параметр  $\alpha_n$ , входящий в эту формулу, можно интерпретировать как меру осторожности игроков или степень доверия новой информации после опыта, накопленного в  $n$  сыгранных партиях. Если придерживаться слишком консервативной (пессимистической) политики, т. е. если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty,$$

то процесс обязательно сойдется, но он может не дойти до точки равновесия  $x^*$ . Факт сходимости в этом случае есть просто отражение усталости игроков, их нежелания или неспособности дальше пробовать свои силы. С другой стороны, если проявлять чрезмерную склонность к изменениям, т. е. если  $\alpha_n$  не стремится к нулю, то эта «прыткость» может привести к тому, что устойчивое состояние так и не будет найдено<sup>1)</sup>. Наиболее простой и естественной политикой выбора шага представляется политика, исходящая из принципа равного доверия ко всем возникающим в процессе игры оптимальным ответам, т. е. из принципа равного вклада оптимальных ответов в фор-

1) Каждый из игроков в принципе мог бы придерживаться своей политики выбора шага  $\alpha_{kn}$ , отличной от политики других игроков. Некоторые варианты такого процесса рассматриваются в § 13, п. 4 и в § 27, п. 2. В общем случае вопрос о поведении процесса в таких условиях остается открытым.

мируемую стратегию  $x_{k, n+1}$ . Если исходить из такого принципа, то должно быть

$$\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} = \frac{1}{n}, \quad \alpha_n = \frac{1}{n+1}.$$

Именно такой процесс предложен Брауном. Сходимость его для матричных игр доказана Дж. Робинсон [60].

В следующем параграфе мы докажем общую теорему о сходимости игрового процесса (5.11) при условиях (5.2).

**8\*. Игры в смешанных стратегиях.** Выпуклые игры имеют особое значение в теории игр, поскольку любая игра может быть сведена к выпуклой с помощью приема рандомизации при выборе стратегий (переход от чистых стратегий к смешанным). Мы рассмотрим сейчас этот прием на примере игры двух лиц с нулевой суммой, но с помощью описанной ниже конструкции можно аналогичный подход применить и к играм  $N$  лиц.

Пусть  $X$  — компакт в  $m$ -мерном пространстве (не обязательно выпуклый) и  $\varphi(y, x)$  — непрерывная, кососимметрическая, т. е. удовлетворяющая условию (10.13), функция на  $X \times X$ . Обозначим через  $C(X)$  линейное пространство всех непрерывных на  $X$  функций с нормой

$$\|f\|_C = \max_{x \in X} |f(x)|,$$

а через  $C^*(X)$  — пространство непрерывных линейных функционалов (сопряженное пространство) на  $C(X)$  с нормой

$$\|\mu\|_{C^*} = \sup_{\|f\|_C \leq 1} (\mu, f), \quad \mu \in C^*(X).$$

Известно ([67], стр. 439), что каждый непрерывный линейный функционал на  $C(X)$  представляет собой некоторую меру на  $X$ . Рассмотрим совокупность  $K(X) \subset C^*(X)$  вероятностных мер на  $X$ , т. е. таких линейных функционалов  $\mu$ , для которых выполнены условия:

$$(\mu, e) = 1, \quad e(x) \equiv 1, \quad x \in X;$$

$$(\mu, f) \geq 0, \quad \text{если } f \in C(X), \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

В развернутой интегральной форме  $(\mu, f)$  дается выражением

$$(\mu, f) = \int_X f(x) \mu(dx), \quad \forall (f \in C(X), \mu \in K(X)).$$

Эти вероятностные меры можно интерпретировать как смешанные стратегии в игре, в которой  $X$  — множество чистых стратегий. Множество  $K(X)$  смешанных стратегий — выпуклое, ограниченное множество в  $C^*(X)$  (ограничено по норме пространства  $C^*(X)$ <sup>1)</sup>). Функция выигрыша  $\Phi(\eta, \mu)$  в смешанных стратегиях следующим образом выражается через функцию выигрыша  $\varphi(y, x)$  в чистых стратегиях:

$$\Phi(\eta, \mu) = \int_X \int_X \varphi(y, x) \eta(dy) \mu(dx), \quad \eta, \mu \in K(X). \quad (10.16)$$

Из этого следует, что  $\Phi(\eta, \mu)$  — билинейная (линейная по каждому аргументу) кососимметрическая функция. В следующем параграфе будет показано, что к построенной симметричной игре в смешанных стратегиях  $\gamma = \{K(X), \Phi\}$  применима в определенном смысле общая теорема 11.2 о сходимости игрового процесса (5.11), (10.15).

Опишем множество оптимальных ответов в игре  $\gamma$  (общее для обоих игроков, поскольку игра симметрична). Пусть

$$\Psi(y, \mu) = (\mu, \varphi(y, x)), \quad y \in X, \quad \mu \in K(X), \quad (10.17)$$

и

$$Y(\mu) = \text{Arg max}_{y \in X} \Psi(y, \mu), \quad \mu \in K(X).$$

Тогда множество  $Z(\mu)$  оптимальных ответов на стратегию  $\mu$  есть совокупность вероятностных мер, носитель которых содержится в  $Y(\mu)$ , т. е.  $\hat{\eta} \in Z(\mu)$ , если  $(\hat{\eta}, f) = 0$  для любой функции  $f \in C(X)$ , равной нулю на  $Y(\mu)$ .

Важной особенностью игры в смешанных стратегиях является тот факт, что среди оптимальных ответов всегда имеется мера, сосредоточенная в одной точке, а именно в любой точке множества  $Y(\mu)$ .

Рассмотрим игровой процесс (5.11) в применении к игре  $\gamma$ . Если начальная смешанная стратегия  $\mu_0$  была сосредоточена в точке  $x_0$ , а в качестве оптимального ответа берется точечная мера  $\hat{\eta}(\mu)$ , сосредоточенная

<sup>1)</sup> И как следствие этого слабо компактно (см. [38]), т. е. из любой последовательности  $\mu_n \in K(X)$  можно выбрать подпоследовательность  $\{\mu_{n_k}\}$ , для которой  $(\mu_{n_k}, f) \rightarrow (\mu, f)$ , где  $\mu \in K(X)$  и  $f$  — любая функция из  $C(X)$ .

в точке  $y(\mu)$ , то  $\mu_n$  будет мерой, сосредоточенной в  $n+1$  точках:  $\mu_0, \hat{\eta}(\mu_0), \hat{\eta}(\mu_1), \dots, \hat{\eta}(\mu_{n-1})$ , где

$$\mu_{k+1} = (1 - \alpha_k)\mu_k + \alpha_k \hat{\eta}(\mu_k), \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

Итеративная процедура (5.11) в этом случае заключается в рекуррентном пересчете функций  $\psi(y, \mu_n)$ :

$$\psi(y, \mu_{n+1}) = (1 - \alpha_n)\psi(y, \mu_n) + \alpha_n \Phi(y, y(\mu_n)),$$

и нахождении их точек максимума по  $y$ . (Здесь  $\psi(y, \mu)$  — функция, определенная в (10.17).)

Описанный метод при  $\alpha_i = 1/n$  был предложен Дж. Данскином [24] как метод нахождения цены игры для игры двух лиц с нулевой суммой, сходимость которого выводилась из теоремы Дж. Робинсон о процессе Брауна.

Заметим, что применение этого метода целесообразно, видимо, только в случае, когда исходная игра в чистых стратегиях не является выпуклой. Для выпуклой игры всегда существует решение в чистых стратегиях, которое может быть найдено более экономным с вычислительной точки зрения процессом (5.11). Только что описанная процедура в отличие от процесса (5.11) требует запоминания всех оптимальных ответов, использованных на предыдущих итерациях.

## § 11. Теоремы о сходимости игровых процессов

### 1. Вторая основная теорема.

**Теорема 11.1 (теорема сходимости).** Пусть  $X$  — выпуклый компакт, функция  $\Phi(y, x)$  определена и непрерывна на  $X \times X$  и удовлетворяет условиям:

а) при каждом фиксированном  $y \in X$  функция  $\Phi(y, x)$  выпукла вниз по  $x$ ;

б) при каждом фиксированном  $x \in X$  множество (оптимальных ответов)

$$Z(x) = \text{Arg max}_{y \in X} \Phi(y, x), \quad x \in X, \quad (11.1)$$

выпукло;

в)  $\Phi(x, x) = 0, \quad x \in X$ .

Тогда функция

$$U(x) = \max_{y \in X} \Phi(y, x) = \Phi(z(x), x), \quad z(x) \in Z(x), \quad (11.2)$$

является функцией Ляпунова для поля  $R = Z - E$ , т. е.  $U$  — индикатриса сходимости поля  $R$  и  $m(U) = \text{stat}(R)$ .

Доказательство. А. Равенство  $m(U) = \text{stat}(R)$  следует из условия в) доказываемой теоремы. Действительно,

$$U(x) = \max_{y \in X} \Phi(y, x) \geq \Phi(x, x) = 0,$$

причем равенство здесь может быть тогда и только тогда, когда  $x \in Z(x)$ , т. е.  $x \in \text{stat}(R)$ . Остается показать, что  $U$  — индикатриса поля  $R$ .

Предварительно введем полезную для дальнейшего функцию (модуль непрерывности)

$$\psi(\varepsilon) = \max_{y \in X} \max_{\rho(x', x'') \leq \varepsilon} |\Phi(y, x') - \Phi(y, x'')| \quad (11.3)$$

и отметим, что  $\psi(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Б. Переходим к основной части доказательства. Запишем уравнение (6.2) интегральных кривых поля  $R$  в терминах отображения  $Z$ :

$$g(t) + \dot{g}(t) \in Z(g(t)),$$

или

$$e^{-t} \frac{d}{dt} (e^t g(t)) \in Z(g(t)).$$

Интегрируя это соотношение, получим интегральное представление

$$g(t) = e^{-(t-s)} g(s) + \int_s^t e^{-(t-\tau)} z(\tau) d\tau, \quad z(\tau) \in Z(g(\tau)). \quad (11.4)$$

Надо показать, что функция  $u(t) = U(g(t))$  убывает. Условие убывания функции  $u(t)$  будем доказывать в форме II (см. стр. 60). Пусть  $t^0 > 0$  и  $u(t^0) > 0$ . Положим  $x^0 = g(t^0)$ . В силу леммы 2.1 отображение  $Z$  полунепрерывно сверху. Поэтому, взяв произвольное  $\varepsilon > 0$ , найдем согласно определению 2.2 такое  $\delta > 0$ , что для множеств

$$Z^\delta(x^0) = \bigcup_{\rho(x, x^0) < \delta} Z(x)$$

и

$$Z_\varepsilon(x^0) = \{y \in X : \rho(y, Z(x^0)) < \varepsilon\}$$

будет иметь место вложение

$$Z^\delta(x^0) \subset Z_\varepsilon(x^0), \quad (11.5)$$

причем в силу условия б) доказываемой теоремы множество  $Z_\varepsilon(x^0)$  выпукло.

Пусть  $s^0 < t^0$  таково, что отрезок кривой  $g(t)$ ,  $t \in [s^0, t^0]$ , принадлежит  $\delta$ -окрестности точки  $x^0$ . Такое  $s^0$  найдется, так как  $g(t)$  — непрерывная функция.

Возьмем произвольное  $s \in [s^0, t^0]$  и применим к отрезку  $[s, t^0]$  интегральное представление (11.4), записав его в виде

$$g(t^0) = \omega g(s) + (1 - \omega) \eta, \quad (11.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega &= e^{-(t^0 - s)}, \\ \eta &= \int_s^{t^0} \rho(\tau) z(\tau) d\tau, \quad z(\tau) \in Z(g(\tau)), \\ \rho(\tau) &= \frac{e^\tau}{e^{t^0} - e^s}, \quad \rho(\tau) > 0, \quad \int_s^{t^0} \rho(\tau) d\tau = 1. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Из (11.5), (11.7) с учетом леммы 3.4 следует, что  $\eta \in Z_\varepsilon(x^0)$  и поэтому существует точка  $\eta^0 \in Z(x^0)$  такая, что

$$\rho(\eta, \eta^0) < \varepsilon. \quad (11.8)$$

Запишем теперь, исходя из (11.6),

$$u(t^0) = \Phi(\eta^0, g(t^0)) = \Phi(\eta^0, \omega g(s) + (1 - \omega) \eta) \leq$$

(в силу условия а) доказываемой теоремы)

$$\begin{aligned} &\leq \omega \Phi(\eta^0, g(s)) + (1 - \omega) \Phi(\eta^0, \eta) \leq \\ &\leq \omega u(s) + (1 - \omega) \Phi(\eta^0, \eta) \leq \end{aligned}$$

(в силу (11.3) и (11.8))

$$\begin{aligned} &\leq \omega u(s) + (1 - \omega) [\Phi(\eta^0, \eta^0) + \psi(\varepsilon)] = \\ &= \omega u(s) + (1 - \omega) \psi(\varepsilon). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Взяв  $\varepsilon$  настолько малым, чтобы было  $\psi(\varepsilon) < u(t^0)$ , получим из (11.9), что  $u(s) > u(t^0)$ , что и требовалось. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Из (11.9) следует более сильное утверждение. Именно, покажем, что не возрастает функция

$$\varphi(t) = e^t u(t),$$

т. е.

$$u(t) \leq u(0) e^{-t}.$$

Умножив обе части неравенства (11.9) на  $e^{t^0}$ , запишем

$$\varphi(t^0) \leq \varphi(s) + (e^{t^0} - e^s) \psi(\varepsilon)$$

или

$$\frac{\varphi(t^0) - \varphi(s)}{e^{t^0} - e^s} \leq \psi(\varepsilon).$$

Устремим  $\varepsilon$  к нулю. При этом размер  $\delta$  соответствующей окрестности точки  $x^0$  тоже можно устремить к нулю, и тогда  $s$  устремится к  $t^0$ . Из предыдущего неравенства получим

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow t^0 - 0} \frac{\varphi(t^0) - \varphi(s)}{e^{t^0} - e^s} = e^{-t^0} \overline{\lim}_{s \rightarrow t^0 - 0} \frac{\varphi(t^0) - \varphi(s)}{t^0 - s} \leq 0.$$

Это означает, что верхняя левая производная (см. § 3, п. 3) функции  $\varphi$  в точке  $t = t^0$  неположительна. В силу леммы 3.5 из неположительности  $\varphi^-(t)$  следует невозрастание  $\varphi(t)$ .

## 2. Теорема о сходимости игровых процессов.

**Теорема 11.2** (о сходимости игровых процессов). *Если  $\gamma$  — выпуклая игра  $N$  лиц с нулевой суммой, то игровой итеративный процесс (5.11), (5.2), где  $Z$  — связанное с игрой  $\gamma$  отображение, сходится к множеству точек равновесия игры  $\gamma$ .*

**Доказательство.** Построим, как описано в § 10, п. 2, отображение  $Z$ , связанное с игрой  $\gamma$ . Его можно представить в виде (10.4), совпадающем с (11.1), причем множество  $X = \Omega$  и функция  $\Phi$ , определенная в (10.3), удовлетворяют условиям теоремы 11.1 (условие б) следует из выпуклости  $\Phi(y, x)$  вверх по  $y$ ). Из теорем 11.1 и 7.1 следует, что игровой процесс (5.11), где  $Z$  — связанное с игрой  $\gamma$  отображение, сходится к множеству  $\text{stat}(R)$ , которое и есть множество точек равновесия игры  $\gamma$ . Теорема доказана.

**3. Сходимость игрового процесса с поочередным выбором оптимальных ответов.** Игровой процесс в той форме, которая описана в § 10, п. 7 и которая соответствует процессу (5.11), где  $Z$  — связанное с игрой отображение, предполагает одновременное предъявление всеми игроками своих стратегий  $x_{kn}$  в очередной партии и соответственно

одновременное «обдумывание очередного хода», т. е. выбор оптимальных ответов. Рассмотрим здесь игровой процесс с поочередным выбором и предъявлением оптимальных ответов.

Без ограничения общности проведем выкладки на примере игры двух лиц с нулевой суммой  $\{X, P, \varphi\}$ . Обычный игровой процесс (5.11) для такой игры есть (ср. (10.15))

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n \hat{x}(p_n), \\ \hat{x}(p_n) &\in \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \varphi(x, p_n) = Z_1(p_n), \\ p_{n+1} &= (1 - \alpha_n) p_n + \alpha_n \hat{p}(x_n), \\ \hat{p}(x_n) &\in \operatorname{Arg} \min_{p \in P} \varphi(x_n, p) = Z_2(x_n).\end{aligned}$$

Процесс же с поочередным выбором оптимальных ответов будет таким:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n \hat{x}(p_n), \\ \hat{x}(p_n) &\in Z_1(p_n), \\ p_{n+1} &= (1 - \alpha_n) p_n + \alpha_n \hat{p}(x_{n+1}), \\ \hat{p}(x_{n+1}) &\in Z_2(x_{n+1}).\end{aligned}$$

Этот процесс охватывается с. п.  $Q(\alpha)$ , где

$$\begin{aligned}Q(\alpha) &= \tilde{Z}(\alpha) - E, \\ \tilde{Z}(\alpha) &= \tilde{Z}_1(\alpha) \times \tilde{Z}_2(\alpha), \\ \tilde{Z}_1(\alpha, p) &= Z_1(p), \\ \tilde{Z}_2(\alpha, x) &= \bigcup_{y \in X} Z_2((1 - \alpha)x + \alpha y).\end{aligned}$$

Очевидно, что семейство отображений  $\tilde{Z}(\alpha)$  присоединено к отображению  $R = Z - E$ , где  $Z$  — связанное с игрой отображение. Поэтому в силу тех же оснований, что и теорема 11.2, имеет место

*Теорема 11.2а. Если  $\gamma$  — выпуклая игра с нулевой суммой, то игровой итеративный процесс с поочередным выбором ходов сходится к множеству ее точек равновесия.*

**4\*. Обобщение для игр в смешанных стратегиях.** Для доказательства сходимости игрового процесса для игры  $\gamma$  в смешанных стратегиях, описанной в § 10, п. 8, воспользуемся обобщением результатов главы II, указанным

в комментарии к этой главе. В данном случае основное пространство  $C$  есть пространство  $C(X)$  непрерывных функций на компакте  $X$  с равномерной метрикой, а  $E$  — сопряженное пространство  $C^*(X)$  — пространство мер на  $X$ ;  $K$  — множество вероятностных мер  $K(X)$ . Мы уже отмечали, что  $K(X)$  — выпуклое, слабокомпактное множество, т. е. компакт в метрике (II.1).

Нам нужно проверить выполнение следующих условий:

1) функция

$$U(\mu) = \max_{\eta \in K(X)} \Phi(\eta, \mu) = \max_{\eta \in K(X)} \int_X \int_X \varphi(y, x) \eta(dy) \mu(dx) = \\ = \max_{y \in X} \int_X \varphi(y, x) \mu(dx)$$

непрерывна в метрике (II.1);

2) точечно-множественное отображение

$$Z(\mu) = \text{Arg} \max_{\eta \in K(X)} \Phi(\eta, \mu), \mu \in K(X),$$

полу непрерывно в том же смысле.

Справедливость этих утверждений является простым следствием леммы о билинейных функциях на  $K(X)$ .

*Лемма 11.1. Пусть  $\Phi(\eta, \mu)$  — билинейная, непрерывная по каждому аргументу функция на  $K(X)$ , определяемая соотношением (10.16). Если  $\mu_n \rightarrow \mu$  и  $\eta_n \rightarrow \eta$ , то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\eta_n, \mu_n) = \Phi(\eta, \mu).$$

*Доказательство.* Непрерывную на  $X \times X$ ,  $X \subset E^m$ , функцию  $\varphi(y, x)$  можно равномерно приблизить функциями вида  $\sum_{k=1}^N f_k(y) g_k(x)$  (теорема Вейерштрасса); пусть

$$\varphi(y, x) = \sum_{k=1}^N f_k(y) g_k(x) + \Delta\varphi, \text{ причем } |\Delta\varphi| < \varepsilon/2. \text{ Тогда}$$

$$\Phi(\eta_n, \mu_n) = \sum_{k=1}^N (\eta_n, f_k)(\mu_n, g_k) + \Delta\Phi \text{ и } |\Delta\Phi| < \varepsilon/2. \text{ В силу}$$

ограниченности и сходимости последовательностей  $\{\mu_n\}$  и  $\{\eta_n\}$  можно выбрать такое  $n_0$ , что для всех  $n > n_0$

$$\left| \sum_{k=1}^N (\eta_n, f_k)(\mu_n, g_k) - \sum_{k=1}^N (\eta, f_k)(\mu, g_k) \right| < \varepsilon/2$$

и, следовательно,  $|\Phi(\eta_n, \mu_n) - \Phi(\eta, \mu)| < \varepsilon$ . Лемма доказана.

Согласно лемме 2.1 для полунепрерывности отображения  $Z$  достаточно проверить его замкнутость (поскольку  $K(X)$  — слабый компакт). Пусть  $\mu_n \rightarrow \mu$  и  $\eta_n \in Z(\mu_n)$ ,  $\eta_n \rightarrow \eta$ . Из леммы 11.1 следует, что  $\lim \Phi(\eta_n, \mu_n) = \lim U(\mu_n) = \Phi(\eta, \mu)$ . Если  $\eta' \in Z(\mu)$ , то  $\Phi(\eta_n, \mu_n) \geq \Phi(\eta', \mu_n)$  и  $\Phi(\eta, \mu) \geq \Phi(\eta', \mu) = U(\mu)$ . Это означает, что  $\eta \in Z(\mu)$ . Замкнутость отображения  $Z$  и тем более непрерывность  $U$  показаны.

Так же как отмечалось в комментарии к главе II, этих фактов достаточно для обобщения теоремы 11.2 на игру в смешанных стратегиях.

## § 12\*. Распространение теоремы сходимости на процесс с ошибками. Ослабление условий выпуклости

В данном параграфе теорема 11.1 будет обобщена в двух направлениях, указанных в заголовке.

**1. Процесс с ошибками. Измерение ошибок.** При реализации процесса (5.11) необходимо, вообще говоря, решать на каждом шаге некоторую задачу оптимизации для отыскания оптимального ответа. Поэтому весьма важным является вопрос о возможности избежать строгого решения этой задачи и обходиться ее приближенным решением.

Здесь мы исследуем этот вопрос в предположении, что ошибки неслучайные (систематические ошибки). Возможность возникновения случайных ошибок рассмотрена в § 8. Пусть в точке  $x$  выбирается ответ  $\zeta(x)$ , не являющийся оптимальным, так что

$$\zeta(x) = z(x) + v(x),$$

где  $z(x) \in Z(x)$ , а  $v(x)$  — систематическая ошибка. Вопрос состоит в том, чтобы описать множество допустимых ошибок, т. е. ошибок, не нарушающих сходимости итеративного процесса к множеству неподвижных точек отображения  $Z$ . Всякое такое описание связано с выбором некоторой «метрики», измеряющей погрешность, вносимую ошибкой  $v(x)$ .

Пусть  $\Delta(x)$  — неотрицательная непрерывная функция, являющаяся мерой допустимости ошибки. Мы рассмотрим

три способа описания множества допустимых ошибок (напомним, что  $\Phi(x, x) = 0$ ).

1) Множество  $V(x)$  ошибок, допустимых для точки  $x$ , выпукло, отображение  $x \rightarrow V(x)$  полунепрерывно сверху и для любого  $v \in V(x)$

$$\theta_1(v) = \max \{ \Phi(y, y+v) : y \in X, y+v \in X \} \leq \Delta(x).$$

2) Множество  $V(x)$  выпукло, отображение  $x \rightarrow V(x)$  полунепрерывно сверху и для любого  $v \in V(x)$

$$\theta_2(v) = \max \{ \Phi(y, y+v) : y \in Z(x), y+v \in X \} \leq \Delta(x).$$

Ясно, что условие 2) слабее, чем 1), так как  $\theta_2(v) \leq \theta_1(v)$ .

3) Множество  $W(x)$  допустимых ответов  $\zeta(x)$  выпукло, отображение  $x \rightarrow W(x)$  полунепрерывно сверху и для любого  $\zeta \in W(x)$

$$\theta(\zeta) = \min \{ \Phi(y, \zeta) : y \in Z(x) \} \leq \Delta(x). \quad (12.1)$$

Убедимся, что условие 3) слабее, чем условие 2). Действительно, пусть множество  $V(x)$  удовлетворяет условию 2). Тогда множество

$$W(x) = \{ \zeta : \zeta = z + v, z \in Z(x), v \in V(x), \zeta \in X \}$$

удовлетворяет условию 3), поскольку для любого  $\zeta \in W(x)$

$$\theta(\zeta) = \min_{y \in Z(x)} \Phi(y, z+v) \leq \Phi(z, z+v) \leq \theta_2(v) \leq \Delta(x).$$

Итак, условие  $\theta(\zeta) \leq \Delta(x)$  является наиболее слабым из рассмотренных. Поэтому нижеследующая теорема, доказываемая для метрики  $\theta(\zeta)$ , справедлива и для метрик  $\theta_1(v)$  и  $\theta_2(v)$ . В практических приложениях иногда может оказаться удобным проверить допустимость ошибок с помощью метрик  $\theta_1(v)$  или  $\theta_2(v)$ .

Естественно, что при удалении от множества точек равновесия, т. е. с ростом функции  $U(x)$  мера  $\Delta(x)$  допустимости ошибки может возрастать. Это подтверждает теорема 12.1.

## 2. Обобщение теоремы сходимости.

Теорема 12.1. Пусть выполнены все условия теоремы 11.1, кроме условия а), которое заменяется более слабым условием

а') при каждом фиксированном  $y$  функция  $\Phi(y, x)$  сильно квазивыпукла вниз по  $x$  (см. § 1, п. 5).

Пусть, кроме того,  $\Delta(x)$  — непрерывная функция с условием  $\Delta(x) < U(x)$  при  $x \notin t(U)$ , где  $U(x)$  определена в (11.2), и отображение  $W: X \rightarrow X$  удовлетворяет условию 3) п. 1. Тогда  $U(x)$  — индикатриса сходимости поля  $R = W - E$ .

Доказательство. Рассуждая как и в п. Б доказательства теоремы 11.1, но подразумевая сейчас под  $Z$  отображение  $W$ , а под элементами  $z \in Z(x)$  элементы  $\zeta \in W(x)$ , получим соответствующие равенства (11.6), (11.7) и точку  $\eta^0 \in W(x^0)$  такую, что (см. (11.8))

$$\rho(\eta, \eta^0) < \varepsilon$$

(необходимое условие выпуклости  $W(x)$  содержится в условии 3) п. 1).

Согласно условию 3) п. 1  $\theta(\eta^0) < \Delta(x^0)$ , т. е. существует точка  $y^0 \in Z(x^0)$  такая, что

$$\Phi(y^0, \eta^0) \leq \Delta(x^0),$$

откуда следует оценка (см. (11.3))

$$\Phi(y^0, \eta) \leq \Phi(y^0, \eta^0) + \psi(\varepsilon) \leq \Delta(x^0) + \psi(\varepsilon).$$

Обращаясь теперь к равенству (11.6), запишем

$$u(t^0) = \Phi(y^0, g(t^0)) = \Phi(y^0, \omega g(s) + (1 - \omega)\eta) \leq$$

(в силу условия а') доказываемой теоремы)

$$\leq \max[\Phi(y^0, g(s)), \Phi(y^0, \eta)] \leq \max[u(s), \Delta(x^0) + \psi(\varepsilon)],$$

причем при  $\varepsilon$  настолько малом, что  $\Delta(x^0) + \psi(\varepsilon) < u(t^0)$ , в силу условия сильной квазивыпуклости вниз по  $x$  оба знака неравенства не могут одновременно обратиться в равенство, т. е.  $u(t^0) < u(s)$ . Теорема доказана.

Если систематические ошибки будут настолько велики, что условие  $\Delta(x) < U(x)$  не будет выполняться всюду вне множества  $t(U)$ , то, естественно, в этом случае можно говорить о сходимости лишь до определенного предела.

Положим

$$\tilde{\Delta} = \max \{U(x) : U(x) \leq \Delta(x), \quad x \in X\},$$

$$\tilde{U}(x) = \max [U(x) - \tilde{\Delta}, 0].$$

Тогда теорема 12.1 может быть обобщена следующим образом.

**Теорема 12.2.** Пусть выполнены все условия теоремы 12.1, кроме условия  $\Delta(x) < U(x)$ . Тогда  $\tilde{U}$  — индикатриса поля  $R$ , определенного в теореме 12.1.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 12.1.

**3. Некоторые побочные результаты.** Отметим, что условие  $\Phi(x, x) = 0$  для теоремы 12.1 несущественно. Оно упоминалось только при введении метрики (см. п.1)

$$\theta(\zeta) = \min_{y \in Z(x)} \Phi(y, \zeta).$$

Тогда эта метрика представляется естественной. Однако для доказательства это условие не является необходимым, и его можно исключить из условий теоремы 12.1.

Предположим, например, что оптимальные ответы находятся без ошибок, т. е.  $\zeta \in Z(x)$ . Определим формально, как и раньше, непрерывную функцию  $\mu(x)$ , мажорирующую

$$\max_{\zeta \in Z(x)} \min_{y \in Z(x)} \Phi(y, \zeta)$$

(во избежание путаницы эту мажоранту будем обозначать не  $\Delta(x)$ , а  $\mu(x)$ ). Тогда, как следствие теоремы 12.1, имеет место

**Теорема 12.3.** Пусть  $X$  — выпуклый компакт, функция  $\Phi(y, x)$  определена и непрерывна на  $X \times X$  и удовлетворяет условиям:

- а)  $\Phi(y, x)$  сильно квазивыпукла вниз по  $x$ ;
- б) при любом  $x \in X$  множество  $Z(x)$  оптимальных ответов (см. (11.1)) выпукло;
- в) всюду в области  $X$  определена и непрерывна функция  $\mu(x)$  (мажоранта) такая, что

$$\max_{\zeta \in Z(x)} \min_{y \in Z(x)} \Phi(y, \zeta) \leq \mu(x)$$

и  $\mu(x) < U(x)$  при  $x \notin t(\tilde{U})$ , где функция  $U$  определена в (11.2), а

$$\tilde{U}(x) = U(x) - \min_{x \in X} U(x). \quad (12.2)$$

Тогда  $\tilde{U}$  — индикатриса поля  $R = Z - E$ .

Примечание. Условие в) можно заменить более сильным, но, возможно, легче проверяемым условием

$$\max_{y \in Z(x)} \Phi(y, y) < U(x).$$

Здесь уже нет необходимости требовать непрерывной мажоранты, поскольку функция, стоящая в левой части неравенства, полунепрерывна сверху (см. § 2, п. 4).

Замечание. Из теоремы Какутани следует, что в условиях теоремы 12.3 множество  $\text{stat}(R)$  не пусто. Если же условие б) теоремы 12.3 выполняется не всюду, а только при  $x \notin m(\tilde{U})$ , то  $\text{stat}(R)$  может оказаться пустым, но теорема тем не менее остается верной. Это следует из того, что в доказательстве все условия теоремы (в том числе и условие б)) используются только для  $x \notin m(\tilde{U})$ .

В качестве иллюстрации приведем следующий

Пример 1. Пусть  $X = [0, 1]$ ,  $\Phi(y, x) = (y - x)^2$ . В этом случае

$$Z(x) = \text{Arg} \max_{y \in [0, 1]} (y - x)^2 = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & 1/2 < x \leq 1, \\ \{0, 1\}, & x = 1/2, \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} (1 - x)^2, & x \leq 1/2, \\ x^2, & x \geq 1/2, \end{cases} \quad \tilde{U}(x) = U(x) - 1/4,$$

$$m(\tilde{U}) = \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \quad \mu(x) \equiv 0, \quad \text{stat}(R) = \emptyset.$$

Процесс сходится к точке  $x = 1/2$ .

Следующий пример иллюстрирует существенность условия в).

Пример 2.  $X = [0, 1]$ ,  $\Phi(y, x) = x^2 + y^2$ . В этом случае

$$Z(x) = 1,$$

$$U(x) = 1 + x^2, \quad \tilde{U}(x) = x^2,$$

$$m(\tilde{U}) = \{0\}, \quad \mu(x) \equiv 2, \quad \text{stat}(R) = \{1\}.$$

Условие в) нарушено. Процесс сходится, но не к точке  $x = 0$ , а к точке  $x = 1$  (отметим, что  $\text{stat}(R) \not\subset m(\tilde{U})$ ).

Приведем, наконец (без доказательства), еще одну модификацию теоремы 12.1, которую можно получить, несколько видоизменив ее доказательство.

**Теорема 12.4.** Пусть  $X$  — выпуклый компакт, функция  $\Phi(y, x)$  определена и непрерывна на  $X \times X$  и удовлетворяет условиям:

а)  $\Phi(y, x)$  сильно квазивыпукла вниз по  $x$ ;

б) существует непрерывная при  $x \notin t(\tilde{U})$  функция  $h(x)$  такая, что

$$\min_{y \in Z(x)} \max_{\zeta \in Z(x)} \Phi(y, \zeta) \leq h(x)$$

и  $h(x) < U(x)$  при  $x \notin t(\tilde{U})$ , где  $\tilde{U}$  — функция, определенная в (12.2). Тогда  $\tilde{U}$  — индикатриса поля  $R = Z - E$ .

В этом варианте условие выпуклости отображения  $Z(x)$  совсем не требуется, но зато условие б) несколько сильнее условия в) теоремы 12.3, так как  $h(x) \geq \mu(x)$ . Так, в примере 1

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1/2, \\ 1, & x = 1/2. \end{cases}$$

Условия теоремы 12.4 выполнены. В примере 2  $h(x) \equiv 2$ , условие б) нарушено.

### § 13\*. Игровые процессы в случае единственности оптимального ответа

В данном параграфе в предположении однозначности связанного с игрой отображения  $Z$ , определенного в (10.4) (или, что тоже самое, в (11.1)), дается, во-первых, доказательство сходимости игрового процесса (5.11) более простое, чем в общем случае (рассмотренном в § 11), и, во-вторых, оценивается скорость сходимости этого процесса.

Кроме того, в п.4 рассмотрен итеративный процесс некоторого специального вида.

**1. Доказательство сходимости.** Докажем теорему 11.1 при дополнительном к условиям а) — в) предположении г) отображение (11.1) — точно-точное (обозначим его  $z(x)$ ) и функция  $U$ , определенная в (11.2), удовлетворяет условию Липшица.

В этом случае вместо части Б доказательства теоремы 11.1 достаточно сослаться на теорему 7.3, если показать только, что

$$U_R^+ < 0 \quad \text{при} \quad U(x) > 0. \quad (13.1)$$

Докажем справедливость (13.1). Пусть  $U(x_0) > 0$  и  $x_\alpha = x_0 + \alpha r(x_0) = (1 - \alpha)x_0 + \alpha z(x_0)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . (13.2)

Тогда имеем

$$\begin{aligned} U(x_\alpha) - U(x_0) &= \Phi(z(x_\alpha), x_\alpha) - \Phi(z(x_0), x_0) \leq \\ &\leq \Phi(z(x_\alpha), x_\alpha) - \Phi(z(x_\alpha), x_0) \leq \end{aligned}$$

(в силу выпуклости  $\Phi(y, x)$  вниз по  $x$  и равенства (13.2))

$$\leq \alpha [\Phi(z(x_\alpha), z(x_0)) - \Phi(z(x_\alpha), x_0)].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} [U(x_\alpha) - U(x_0)] &\leq \\ &\leq -\Phi(z(x_\alpha), x_0) + \Phi(z(x_\alpha), z(x_0)). \quad (13.3) \end{aligned}$$

Функция  $z(x)$  непрерывна. Поэтому, переходя в (13.3) к верхнему пределу при  $\alpha \rightarrow +0$ , получим

$$U_R^+(x_0) = \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow +0} \frac{U(x_\alpha) - U(x_0)}{\alpha} \leq -U(x_0), \quad (13.4)$$

что доказывает (13.1), а вместе с этим и сходимость процесса (5.11).

**2. Оценка скорости сходимости случайного игрового процесса.** Рассмотрим случайный игровой процесс, т. е. с. с. п. в смысле определения 8.1 при  $R = Q(\alpha) = Z - E$ , где  $Z$  — отображение, связанное с игрой. Согласно теоремам 8.1 и 11.2 с. с. п. сходится к множеству партий равновесия по вероятности, а при выполнении условия (8.6) и почти наверное. Ниже будет проведена оценка скорости сходимости при следующих предположениях:

а) связанное с игрой отображение  $Z$  (оно же — отображение (11.1)) точно-точно и удовлетворяет условию Липшица

$$\|z(x) - z(y)\| \leq L_1 \|x - y\|, \quad x, y \in X; \quad (13.5)$$

б) функция  $U(x)$ , определенная в (11.2), дифференцируема и ее градиент, обозначим его  $p(x)$ , удовлетворяет условию Липшица

$$\|p(x) - p(y)\| \leq L_2 \|x - y\|, \quad x, y \in X. \quad (13.6)$$

Заметим, что при выполнении условия а) дифференцируемость функции  $U$  следует из дифференцируемости функций выигрыша  $\varphi_k$  по совокупности аргументов. Отметим, кроме того, что при сделанных предположениях справедливости выкладки п.1, в частности неравенство (13.4).

**Лемма 13.1.** *Справедливо неравенство*

$$U(x_{n+1}) \leq (1 - \alpha_n) U(x_n) + C\alpha_n^2 + \alpha_n \langle p(x_n), \xi_n \rangle, \quad (13.7)$$

где  $C = L_2 D^2$  и  $D$  — диаметр множества  $X$  возможных стратегий.

**Доказательство.** По теореме Ролля

$$U(x_{n+1}) - U(x_n) = \langle p(\bar{x}), x_{n+1} - x_n \rangle,$$

где  $\bar{x} = x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ . Так как

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \alpha_n \|z(x_n) + \xi_n - x_n\| \leq \alpha_n D, \quad (13.8)$$

то, используя (13.6), получим

$$U(x_{n+1}) - U(x_n) \leq \langle p(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle + \alpha_n^2 L_2 D^2. \quad (13.9)$$

Из основного рекуррентного соотношения процесса имеем

$$\begin{aligned} \langle p(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle &= \\ &= \alpha_n \langle p(x_n), r(x_n) \rangle + \alpha_n \langle p(x_n), \xi_n \rangle, \end{aligned} \quad (13.10)$$

где  $r(x) = z(x) - x$ .

Согласно неравенству (13.4)

$$\langle p(x_n), r(x_n) \rangle \leq -U(x_n). \quad (13.11)$$

Подставляя (13.11) в (13.10) и (13.10) в (13.9), получим утверждение леммы.

Заметим, что из предположения (8.4) следует

$$\mathbf{M} \langle p(x_n), \xi_n \rangle = 0, \quad \mathbf{M} (\langle p(x_i), \xi_i \rangle \langle p(x_j), \xi_j \rangle) = 0, \quad i \neq j. \quad (13.12)$$

Обозначим

$$s = \max_n \mathbf{M} \langle p(x_n), \xi_n \rangle^2. \quad (13.13)$$

Если  $\lambda_n$  — математическое ожидание максимального собственного значения матрицы  $\xi_n \xi_n^*$  (напомним, что элементы этой матрицы заведомо ограничены числом  $D^2$ ) и  $\rho = \max_{x \in X} \|p(x)\|$ , то  $s \leq \rho \sup_n \lambda_n$ .

Теорема 13.1. Если выполняются условия (13.5), (13.6), то

$$U(x_n) \leq U(x_0) \exp\left(-\sum_{k=0}^n \alpha_k^2\right) + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13.14)$$

где  $\beta_n$  — случайная величина, для которой <sup>1)</sup>

$$M\beta_n = C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i), \quad (13.15)$$

$$D\beta_n = s \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i)^2. \quad (13.16)$$

Прежде чем доказывать равенства (13.15) и (13.16), покажем, что выражения в правых частях этих равенств стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Обозначим

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k, \quad \alpha(t) = \alpha_{\nu(t)},$$

где  $\nu(t) = \max\{n : t_n \leq t\}$ . Так как  $1 - \alpha_n \leq e^{-\alpha_n}$ , то

$$\alpha_k^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i) \leq \alpha_k^2 e^{-(t_n - t_{k+1})} \leq \int_{t_{k+1}}^{t_{k+1} + \alpha_k} \alpha(\tau) e^{-(t_n - \tau) + \alpha(\tau)} d\tau,$$

поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i) \leq \int_0^{t_n} \alpha(\tau) e^{-(t_n - \tau) + \alpha(\tau)} d\tau. \quad (13.17)$$

Аналогично получается

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i)^2 \leq \int_0^{t_n} \alpha(\tau) e^{-2(t_n - \tau) + 2\alpha(\tau)} d\tau. \quad (13.18)$$

<sup>1)</sup> Под  $\prod_{i=n}^{n-1} (1 - \alpha_i)$  надо понимать единицу, D — знак дисперсии.

Заметим, что для любого  $T \in (0, t_n)$

$$\int_0^{t_n} \alpha(\tau) e^{-(t_n-\tau)+a(\tau)} d\tau \leq e^{-(t_n-T)+a(T)} + \sup_{\tau \geq T} \alpha(\tau). \quad (13.19)$$

Очевидно, что, выбирая достаточно большие  $T$  и  $t_n - T$ , можно сделать правую часть (13.19) как угодно малой. Аналогично доказывается сходимость к нулю правой части неравенства (13.18).

Пример. Пусть  $\alpha_n = 1/n$ . Тогда  $t_n \approx \ln n$ ,

$$\alpha(t_n) \approx \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty), \quad \alpha(t) \approx e^{-t}, \quad t \rightarrow \infty, \\ e^{-t_n} \approx \frac{1}{n}, \quad M\beta_n D\beta_n \leq \text{const} \frac{\ln n}{n}.$$

Доказательство неравенства (13.14). Записав неравенство (13.7) в виде

$$U(x_k) \leq U(x_{k-1})(1 - \alpha_{k-1}) + C\alpha_{k-1}^2 + \alpha_{k-1} \langle \rho(x_{k-1}), \xi_{k-1} \rangle,$$

умножив обе его части на  $\prod_{i=k}^{n-1} (1 - \alpha_i)$  и сложив полученные соотношения для  $k = 1, 2, \dots, n$ , получим

$$U(x_n) \leq U(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha_k) + \beta_n,$$

где

$$\beta_n = C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i) + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle \rho(x_k), \xi_k \rangle \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i).$$

Из соотношений (13.12) непосредственно следует равенство (13.15). Кроме того, имеем

$$D\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i)^2 D \langle \rho(x_k), \xi_k \rangle.$$

Отсюда следует (13.16). Теорема 13.1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости детерминированного игрового процесса. В детерминированном случае (процесс (5.11),  $\xi_n \equiv 0$ ), естественно, величина  $\beta_n$  в неравенстве

(13.14) является не случайной:

$$\beta_n = C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 - \alpha_i).$$

Эта оценка в детерминированном случае может быть получена в более слабых предположениях. А именно, не обязательно предполагать дифференцируемость функций выигрыша  $\varphi_k(y_k; x)$  по  $x$ . Вместо (13.6) достаточно предположить, что существует константа  $L_3$  такая, что

$$\left| \sum_{k=1}^N [\varphi_k(z_k(x); x) - \varphi_k(y_k; x)] \right| \leq L_3 \|z(x) - y\|^2 \quad (13.20)$$

для любых  $x, y \in X, y = (y_1, \dots, y_N)$ .

Соотношение (13.20) выполняется, например, в случае, если для любого  $k$  существует и удовлетворяет условию Липшица градиент функции  $\varphi_k(y_k; x)$  по собственным стратегиям игрока.

Соответствующая теорема для детерминированного процесса (5.11) получается из следующего аналога леммы 13.1.

Лемма 13.2. Если выполняются соотношения (13.5) и (13.20), то

$$U(x_{n+1}) \leq (1 - \alpha_n) U(x_n) + C\alpha_n^2,$$

где  $C = L_3 L_1^2 D^2$ .

Доказательство. Согласно (13.20) и (13.5)

$$\left| \sum_{k=1}^N [\varphi_k(z_k(x_{n+1}); x_{n+1}) - \varphi_k(z_k(x_n); x_{n+1})] \right| \leq \leq L_3 \|z(x_{n+1}) - z(x_n)\|^2 \leq L_3 L_1^2 \|x_{n+1} - x_n\|^2. \quad (13.21)$$

Из неравенств  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha_n D$  следует, что правая часть (13.21) не превышает  $C\alpha_n^2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} U(x_{n+1}) - U(x_n) &= \sum_{k=1}^N [\varphi_k(z_k(x_{n+1}); x_{n+1}) - \varphi_k(z_k(x_n); x_n)] \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^N [\varphi_k(z_k(x_n); x_{n+1}) - \varphi_k(z_k(x_n); x_n)] + C\alpha_n^2. \end{aligned} \quad (13.22)$$

В силу того, что функции  $\varphi_k(y_k; x)$  выпуклы вниз по

второму аргументу и  $x_{n+1, k} - x_{nk} = \alpha_n (z_k(x_n) - x_{nk})$ , имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k(z_k(x_n); x_{n+1}) - \varphi_k(z_k(x_n); x_n) &\leq \\ &\leq \alpha_n [\varphi_k(z_k(x_n); z(x_n)) - \varphi_k(z_k(x_n); x_n)]. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Применяя оценку (13.22) к правой части (13.23) и учитывая, что

$$\sum_{k=1}^N \varphi_k(z_k(x_n); z(x_n)) = 0, \quad \sum_{k=1}^N \varphi_k(z_k(x_n); x_n) = U(x_n),$$

получаем утверждение леммы.

Теперь формулировка и доказательство теоремы для процесса (5.11) вполне аналогичны теореме (13.1).

**4. Итеративный процесс специального вида.** Рассмотрим выпуклую игру двух лиц с нулевой суммой  $\gamma = \{Y, X, \varphi\}$ . Пусть, как обычно,

$$\hat{y}(x) = \arg \max_{y \in Y} \varphi(y, x), \quad \hat{x}(y) = \arg \min_{x \in X} \varphi(y, x)$$

суть оптимальные ответы первого и второго игроков соответственно. Предположим, что оптимальный ответ  $\hat{y}(x)$  первого игрока единствен при любом  $x \in X$ . Построим поле  $R$  по следующему правилу:

$$R(x) = \hat{x}(\hat{y}(x)) - x, \quad x \in X. \quad (13.24)$$

Поскольку оптимальный ответ  $\hat{x}(y)$  не предполагается однозначным,  $R$  есть точечно-множественное отображение. Легко проверить, что поле  $R$  ограничено и имеет тип  $K$ .

Простой стандартный  $R$ -процесс в этом случае может быть описан следующим образом<sup>1)</sup>. Второй игрок, выбирая на каждой итерации свой оптимальный ответ ( $\hat{x}$ ) на текущую стратегию противника, использует его для корректировки своей текущей стратегии  $x$ , как делают оба игрока в процессе, описанном в п. 1, т. е. сдвигает свою прежнюю стратегию в направлении вектора  $\hat{x}$ . Первый же игрок

<sup>1)</sup> Аналогичный итеративный процесс для матричных игр рассматривался Р. Б. Брэйтуайтом в статье «Конечный итеративный алгоритм для решения некоторых игр и соответствующих систем линейных уравнений» в сб. «Матричные игры» (Физматгиз, 1961). Им доказывается сходимость этого процесса для таких игр, у которых оптимальная смешанная стратегия каждого игрока содержит все чистые стратегии с положительными весами.

каждый раз выбирает в качестве своей текущей стратегии непосредственно оптимальный ответ  $\hat{y}$ , т. е.  $y = \hat{y}$ .

Определим в соответствии с леммами 10.2а, б функции

$$F_1(y) = \min_{x \in X} \varphi(y, x), \quad F_2(x) = \max_{y \in Y} \varphi(y, x)$$

и положим  $U(x) = F_2(x) - v$ , где  $v$  — цена игры  $\gamma$ . Согласно лемме 10.2б  $U$  — неотрицательная функция, выпуклая вниз на  $X$ , причем  $m(U)$  совпадает с множеством  $X^*$  оптимальных стратегий второго игрока. Для задачи отыскания оптимальных стратегий второго игрока в игре  $\gamma$  может быть использован простой стандартный  $R$ -процесс, где поле  $R$  определено в (13.24). Сходимость этого процесса к множеству  $X^*$  будет следовать из того, что введенная выше функция  $U$  оказывается функцией Ляпунова поля  $R$ .

Лемма 13.3. *Имеет место неравенство*

$$U_R^+(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \notin m(U),$$

где  $U_R^+$  — верхняя производная функции  $U$  по полю  $R$  (см. (7.1)).

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} x_\alpha &= x_0 + \alpha r(x_0) = (1 - \alpha)x_0 + \alpha z, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ z &= \hat{x}(\hat{y}(x_0)) \in Z(x_0) = \text{Arg} \min_{x \in X} \varphi(\hat{y}(x_0), x). \end{aligned}$$

Аналогично выкладкам п. 1 имеем

$$\begin{aligned} U(x_\alpha) - U(x_0) &= \varphi(\hat{y}(x_\alpha), x_\alpha) - \varphi(\hat{y}(x_0), x_0) \leq \\ &\leq \varphi(\hat{y}(x_\alpha), x_\alpha) - \varphi(\hat{y}(x_\alpha), x_0) \leq \\ &\leq \alpha [\varphi(\hat{y}(x_\alpha), z) - \varphi(\hat{y}(x_\alpha), x_0)]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} U_R^+(x_0) &= \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow +0} \sup_{r \in R(x_0)} \frac{U(x_\alpha) - U(x_0)}{\alpha} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow +0} \sup_{z \in Z(x_0)} [\varphi(\hat{y}(x_\alpha), z) - \varphi(\hat{y}(x_\alpha), x_0)] = \end{aligned}$$

(в силу непрерывности однозначной функции  $\hat{y}(x)$ )

$$\begin{aligned} &= \sup_{z \in Z(x_0)} [\varphi(\hat{y}(x_0), z) - \varphi(\hat{y}(x_0), x_0)] = \\ &= F_1(\hat{y}(x_0)) - F_2(x_0) \leq \end{aligned}$$

(в силу леммы 10.2а)

$$\leq v - F_2(x_0) = -U(x_0).$$

Лемма доказана.

Если предположить, что функция  $U$  может быть продолжена с сохранением выпуклости на некоторую окрестность  $\tilde{X}$  множества  $X$ , то применима теорема 7.3 (условие Липшица для функции  $U$  при сделанном предположении, очевидно, выполняется), а затем и теорема 7.2, поскольку, как было отмечено выше,  $m(U) = X^*$ . Сходимость процесса, таким образом, доказана.

Приведем пример, иллюстрирующий существенность условия единственности оптимального ответа первого игрока для сходимости предложенного процесса.

Пример. Рассмотрим матричную игру, в которой множеством  $Y$  стратегий первого игрока является отрезок в двумерной плоскости  $E^2$  с концами  $a_1 = (-1, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1)$ , а множество  $X$  стратегий второго игрока — треугольник в плоскости  $E^2$  с вершинами  $b_1 = (-1, 0)$ ,  $b_2 = (1, 0)$ ,  $b_3 = (0, 1)$ . Матрица выигрышей такова:

$$A = \begin{pmatrix} M & -\varepsilon \\ M & -\varepsilon \end{pmatrix},$$

где  $M \gg 1 \gg \varepsilon > 0$ .

Легко проверить, что оптимальным ответом  $\hat{y}(x)$  первого игрока на стратегию  $x = (x_1, x_2)$  при  $x_1 > 0$  является  $a_2$  и  $\hat{x}(\hat{y}(x)) = b_1$ , а при  $x_1 < 0$  получим  $\hat{y}(x) = a_1$  и  $\hat{x}(\hat{y}(x)) = b_2$ . Поэтому всегда существует последовательность, являющаяся траекторией простого  $R$ -процесса для поля (13.24) и сходящаяся к точке  $(0, 0)$ , в то время как минимаксной стратегией второго игрока является точка  $b_3 = (0, 1)$ .

**ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

В данном разделе на основе теории, развитой в разделе первом, будут рассмотрены методы решения задач математического программирования, в частности некоторых задач математической экономики.

## ГЛАВА IV

**ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Общая задача выпуклого программирования может быть записана в форме (задача максимизации  $[C, f]$ )

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in C, \quad (\text{IV.1})$$

где  $C \subset E^m$  — выпуклое множество и  $f$  — определенная на нем выпуклая вверх непрерывная функция. Ниже будет рассмотрено несколько вариантов более конкретных постановок и методов решения.

**§ 14. Сведение общей задачи к игре**

**1. Функция Лагранжа.** Специфика задачи обычно позволяет представить множество значений аргумента как пересечение двух выпуклых множеств, одно из которых задано системой неравенств

$$g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

где  $g_j$  — выпуклые вверх функции, а другое — каким-либо иным (достаточно простым) способом. В таком случае задача может быть записана в виде

$$f(x) \rightarrow \max, \quad G(x) \geq 0, \quad x \in X, \quad (14.1)$$

где  $G(x) = (g_1(x), \dots, g_s(x)) \in E^s$ , и неравенство между векторами понимается в покомпонентном смысле,

Известный подход Куна—Таккера связывает с задачей (14.1) функцию Лагранжа

$$L(x, p) = f(x) + \langle p, G(x) \rangle,$$

рассматриваемую в области  $x \in C$ ,  $p \in E_+^s = \{p \in E^s, p \geq 0\}$ . Эта функция выпукла вверх по  $x$  и линейна по двойственным переменным  $p$ , т. е. является выпукло-вогнутой функцией. Теорема Куна—Таккера (см., например, [36], п. 7.1) утверждает, что (при выполнении условия Слейтера) если  $(x^*, p^*)$  — седловая точка функции  $L$ , то  $x^*$  — решение задачи (14.1), и обратно, если  $x^*$  — решение задачи (14.1), то при подходящем значении  $p^*$  пара  $(x^*, p^*)$  образует седловую точку функции  $L$ .

Если множество  $X$  ограничено и из каких-либо априорных соображений можно задать верхние границы для неизвестных двойственных переменных  $p$ , т. е. задать компакт  $P \subset E_+^s$ , содержащий оптимальные значения  $p^*$ , то согласно теореме Куна—Таккера задача (14.1) эквивалентна игре двух игроков  $\gamma = \{X, P, L\}$  (см. § 10, п. 3). Тем самым всякий игровой процесс, решающий игру  $\gamma$ , решает и исходную задачу.

Важным частным случаем является задача линейного программирования (задача л. п.)

$$\left. \begin{aligned} Ax \leq b, \quad x \in E_+^m = \{x \in E^m, x \geq 0\}, \\ \langle c, x \rangle \rightarrow \max, \end{aligned} \right\} \quad (14.2a)$$

ограничения которой задаются системой линейных неравенств и функционал которой также линеен. Эта задача полностью определяется матрицей  $A (s \times m)$  и векторами  $b \in E^s$ ,  $c \in E^m$ .

Функция Лагранжа для задачи (14.2a) есть

$$L(x, p) = \langle c, x \rangle + \langle p, b - Ax \rangle, \quad x \in E_+^m, \quad p \in E_+^s.$$

Заметим, что формальные правила умножения матриц в линейной алгебре позволяют рассматривать скалярное произведение, например  $\langle p, b \rangle$ , как произведение вектора-строки  $p$  на вектор-столбец  $b$ . Поэтому будем считать векторы  $p$  и  $c$  строками, а векторы  $b$  и  $x$  — столбцами. Тогда (с учетом ассоциативности произведения матриц) функцию Лагранжа можно записать в виде

$$L(x, p) = cx + pb - pAx, \quad x \in E_+^m, \quad p \in E_+^s.$$

Поскольку эта функция линейна по обоим переменным  $x$  и  $p$ , то она порождает пару двойственных задач — задачу (14.2а) и двойственную ей задачу

$$pA \geq c, \quad p \in E_+^s, \quad pb \rightarrow \min. \quad (14.2б)$$

Обе эти задачи одновременно разрешимы тогда и только тогда, когда системы неравенств (14.2а, б) имеют хотя бы по одной допустимой точке.

Задача линейного программирования также сводится к (матричной, см. § 10, п. 6) игре двух лиц, причем это может быть сделано двумя способами. По первому способу, как и в общем (нелинейном) случае, рассмотренном выше, надо задать дополнительные ограничения на множестве стратегий. Эти ограничения проще всего задать в форме

$$X = \{x \in E^m : 0 \leq x \leq \xi\}, \quad P = \{p \in E^s : 0 \leq p \leq \eta\}, \quad (14.3)$$

где  $\xi \in E_+^m$  и  $\eta \in E_+^s$  — некоторые векторы с достаточно большими компонентами, в результате задача приведет к полиэдральной игре  $\gamma = \{X, P, L\}$ .

Следует еще раз подчеркнуть, однако, что как в линейном, так и в нелинейном случае игра  $\gamma$ , как и всякая выпуклая игра, всегда имеет решение. Это решение будет решением исходной задачи в том и только в том случае, когда исходная задача разрешима и априорные ограничения множеств стратегий выбраны достаточно большими.

Отметим, что при построении функции Лагранжа часть ограничений задачи можно отнести к описанию множества  $X$ , на котором она рассматривается. Например, если в задаче (14.2а) матрицу  $A$  представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad s = s_1 + s_2,$$

то эту задачу можно записать так:

$$A_1 x \leq b_1, \quad x \in \tilde{X} = \{x \in E_+^m : A_2 x \leq b_2\}, \\ cx \rightarrow \max.$$

Функция Лагранжа примет соответственно вид

$$L(x, p) = cx + pb_1 - pA_1 x, \quad x \in \tilde{X}, \quad p \in E_+^{s_1}.$$

Отмеченная свобода выбора широко используется для построения различных игровых алгоритмов, учитывающих

специфику задачи, например, в методах декомпозиции (см. § 15).

По второму способу задача л. п. сводится к симметричной матричной игре на стандартном симплексе  $S^{s+m+1}$  с кососимметрической матрицей<sup>1)</sup>  $\bar{A} [(s+m+1) \times (s+m+1)]$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^* & 0 & c^* \\ b^* & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Стратегии  $z = (\eta, \xi, \lambda)$  в такой игре связаны с переменными  $x, p$  соотношениями

$$\eta = \lambda p, \quad \xi = \lambda x, \quad (14.4a)$$

где  $\lambda > 0$  таково, что  $z \in S^{s+m+1}$ , т. е.

$$\lambda = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^s p_i + \sum_{j=1}^m x_j}. \quad (14.4b)$$

Если  $\bar{z}$  — решение этой игры и  $\bar{\lambda} > 0$ , то

$$\bar{p} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\lambda}}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\lambda}}$$

суть решения задач (14.2б, а). Обратно, если  $\bar{x}, \bar{p}$  — решения задач (14.2а, б), то соответствующий вектор  $\bar{z} = (\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\lambda})$ , вычисляемый из соотношений (14.4а, б), есть решение игры (подробнее см. [36], п. 5.5).

Другим аппаратом, позволяющим свести общую задачу (IV.1) к игре, является преобразование Лежандра. Напомним необходимые сведения.

**2. Преобразование Лежандра.** Пусть  $C \subset E^m$  — выпуклое замкнутое множество и  $f$  — выпуклая вверх непрерывная функция на  $C$ . Преобразованием Лежандра пары  $[C, f]$  называется пара  $[D, \psi]$ , определяемая следующим образом:

$$\psi(p) = \inf_{x \in C} (\langle p, x \rangle - f(x)), \quad (14.5)$$

$$D = \{p \in E^m : \psi(p) > -\infty\}. \quad (14.6)$$

Непосредственно проверяется, что  $[D, \psi]$  — пара того же типа, что и  $[C, f]$ , т. е.  $D$  — выпуклое замкнутое множе-

1) \* — знак транспонирования.

ство и  $\psi$  — выпуклая вверх непрерывная функция. Преобразование Лежандра пары  $[C, f]$  обозначается  $[C, f]^*$  и называется иначе сопряженной парой.

Зафиксируем некоторый вектор  $p$ . Пользуясь обозначениями § 1, п. 4, сопоставим паре  $[C, f]$  множество

$$(C, f) = \{\xi = (x, u) : u \leq f(x), x \in C\}.$$

Тогда равенство (14.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \inf_{\xi \in (C, f)} \langle v, \xi \rangle, \\ v &= (p, -1), \quad \xi = (x, u). \end{aligned}$$

Если  $\psi(p) > -\infty$ , т. е. если  $p \in D$ , то это равенство в соответствии с (1.3) определяет гиперплоскость в  $E^{m+1}$

$$H_p = \{\xi \in E^{m+1} : \langle v, \xi \rangle = \psi(p)\}, \quad (14.7)$$

опорную к  $(C, f)$ . Эта гиперплоскость невертикальна, так как вектор ее нормали  $v$  имеет вертикальную компоненту, равную  $-1$ , т. е. направлен вниз. Таким образом, элементы множества  $D$  могут быть отождествлены с невертикальными гиперплоскостями, опорными к  $(C, f)$ .

Пусть  $\xi^0 = (x^0, f(x^0))$  — точка касания, т. е.  $\psi(p) = \langle p, x^0 \rangle - f(x^0)$ . Тогда (14.5) можно записать в виде

$$\langle p, x - x^0 \rangle \geq f(x) - f(x^0), \quad \forall x \in C,$$

а уравнение (14.7) (или, что то же самое, (1.8)) опорной гиперплоскости в виде

$$H_p = \{(x, u) : u = \varphi(x, p)\}, \quad (14.8)$$

где

$$\varphi(x, p) = \langle p, x \rangle - \psi(p). \quad (14.9)$$

Зафиксируем теперь произвольную точку  $x \in E^m$ , и пусть  $p$  пробегает множество  $D$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $x \in C$ . Если при некотором  $p$  абсцисса точки касания гиперплоскости  $H_p$  не совпадает с  $x$ , то ордината  $u = \varphi(x, p)$  пересечения этой гиперплоскости с вертикалью  $l_x$  больше  $f(x)$ , поскольку  $f$  выпукла вверх, т. е.  $\varphi(x, p) > f(x)$ , но если абсцисса точки касания совпадает с  $x$ , то  $\varphi(x, p) = f(x)$ . Поскольку каждая внутренняя точка множества  $C$  может служить абсциссой точки касания некоторой невертикальной опорной гиперплоскости, именно

гиперплоскости, отвечающей обобщенному градиенту  $q \in \hat{f}(x)$ , то  $\hat{f}(x) \subset D$  и

$$f(x) = \varphi(x, q) = \min_{p \in D} \varphi(x, p), \quad x \in \text{int}(C). \quad (14.10)$$

**З а м е ч а н и е.** Зафиксируем попутно отмеченное выше важное обстоятельство: если  $x$  — внутренняя точка множества  $C$ , то  $\hat{f}(x) \subset D$ .

Если  $x \in \partial C$  (а так как  $C$  замкнуто, то  $x \in C$ ), то невертикальной опорной гиперплоскости с абсциссой точки касания  $x$  может и не существовать, но в силу непрерывности  $f$  в общем случае останется справедливым равенство

$$f(x) = \inf_{p \in D} \varphi(x, p) = \inf_{p \in D} (\langle p, x \rangle - \psi(p)), \quad x \in C. \quad (14.11)$$

Наконец, если  $x \notin C$ , то, каково бы ни было число  $a$ , в силу леммы 1.1 найдется невертикальная опорная к  $(C, f)$  гиперплоскость, отделяющая  $(C, f)$  от точки  $(x, a)$ . При этом ордината  $u = \varphi(x, p)$  пересечения этой гиперплоскости с вертикалью  $l_x$  меньше  $a$ . Устремляя  $a$  к  $-\infty$ , убеждаемся, что

$$\inf_{p \in D} \varphi(x, p) = -\infty, \quad x \notin C.$$

Сопоставляя это с (14.11) и определением (14.5), (14.6) преобразования Лежандра, заключаем, что

$$[D, \psi]^* = [C, f], \quad (14.12)$$

т. е. пары  $[C, f]$  и  $[D, \psi]$  являются взаимно сопряженными (принцип двойственности). Строгое доказательство этого результата см. в [36], п.7.5.

**3. Использование преобразования Лежандра для сведения задачи максимизации к игре.** Обратимся теперь к нашей цели, именно, к сведению общей задачи программирования в форме (IV.1)

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in C \quad (14.13)$$

(задачи  $[C, f]$ ) к выпуклой игре.

Преобразование Лежандра дает основу для построения искомой игры. Действительно, тройка  $\{C, D, \varphi\}$ , где  $D$  определено в (14.6), а функция выигрыша  $\varphi$  — в (14.9), есть фактически игра, но не выпуклая в смысле

определения 10.1, поскольку хотя бы одно из множеств  $C$  или  $D$  не ограничено (ибо если  $C$  ограничено, то из (14.6) следует, что  $D$  совпадает со всем пространством). Эта игра эквивалентна задаче  $[C, f]$  в силу (14.11) и леммы 10.2а. Данная выше геометрическая интерпретация преобразования Лежандра позволяет представить игру  $\{C, D, \varphi\}$  в следующих терминах. Первый игрок выбирает точку  $x \in C$ , второй — неvertикальную гиперплоскость  $H_p$ , опорную к множеству  $(C, f)$ . Выигрыш  $\varphi(x, p)$  первого игрока (он же — проигрыш второго) равен ординате  $u$  точки пересечения гиперплоскости  $H_p$  с вертикалью  $l_x$ , проходящей через точку  $x$ . При фиксированном  $x \in C$  оптимальным ответом второго игрока является гиперплоскость  $H_p$ , абсцисса точки касания которой совпадает с  $x$  (как было отмечено в п.2, при  $x \in \partial C$  такой гиперплоскости может и не существовать). При фиксированном  $p \in D$  оптимальным ответом первого игрока является решение задачи

$$\langle p, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in C.$$

Переходя к построению выпуклой игры, т. е. игры на компактах, будем предполагать, что исходная задача 14.13) разрешима, и обозначим

$$g = \max_{x \in C} f(x), \quad B = \text{Arg} \max_{x \in C} f(x). \quad (14.14)$$

Заметим, что если множество  $B$  не ограничено, то, естественно, нельзя построить игру с компактными множествами стратегий, эквивалентную исходной задаче в смысле совпадения с  $B$  множества  $X^*$  максиминных стратегий первого игрока. Однако если нас интересуют не все, а хотя бы одно решение, то достаточно, чтобы  $X^*$  имело с  $B$  общую точку. Мы будем строить выпуклую игру вида  $\gamma = \{X, P, \varphi\}$  с компактами  $X$  и  $P$ , удовлетворяющими условиям:

$$\text{а) } \tilde{B} = X \cap B \neq \emptyset; \quad \text{б) } P \subset D, \quad (14.15)$$

где  $D$  и  $\varphi$  определяются через преобразование Лежандра. В § 10, п.3 (лемма 10.2а) показано, что игра  $\gamma$  эквивалентна задаче максимизации на множестве  $X$  функции

$$F(x) = \min_{p \in P} \varphi(x, p) = \min_{p \in P} (\langle p, x \rangle - \psi(p)), \quad (14.16)$$

т. е. задаче  $[X, F]$ . Поэтому игра  $\gamma$  будет эквивалентна задаче (14.13), если задача  $[X, F]$  будет эквивалентна задаче  $[C, f]$ , т. е. если

$$\text{а) } F(x) = g, \quad x \in \tilde{B}; \quad \text{б) } F(x) < g, \quad x \in X \setminus \tilde{B}. \quad (14.17)$$

Отметим, что так как множество  $P$  ограничено, то

$$F(x) > -\infty, \quad \forall x \in E^m, \quad \text{т. е. } [P, \psi]^* = [E^m, F]$$

(ср. (14.16) с (14.5)). При этом на множестве  $C$  имеем

$$F(x) = \min_{p \in P} \varphi(x, p) \geq \inf_{p \in D} \varphi(x, p) = f(x), \quad x \in C. \quad (14.18)$$

Оптимальными ответами в игре  $\gamma$  будут: для первого игрока — решение задачи

$$\langle p, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in X,$$

для второго — решение задачи

$$\varphi(x, p) = \langle p, x \rangle - \psi(p) \rightarrow \min, \quad p \in P,$$

т. е., как показано в п.2 (см. (14.10)), — обобщенный градиент  $\hat{F}(x)$  функции  $F$  в точке  $x$ , поскольку  $[E^m, F]^* = [P, \psi]$ .

**Лемма 14.1** Пусть в каждой точке множества  $C$  существует обобщенный градиент функции  $f$  (например, если  $f$  может быть продолжена с сохранением выпуклости на некоторое открытое множество  $\tilde{C} \supset C$ ). Если игра  $\gamma = \{X, P, \varphi\}$  удовлетворяет условиям (14.15) и при некотором  $\varepsilon > 0$

$$P \supset \{p \in D : \|p\| < \varepsilon\},$$

то она эквивалентна задаче (14.13).

**Доказательство.** Заметим, что так как  $f$  ограничена сверху на  $C$ , то точка  $p=0$  (горизонтальная опорная плоскость) входит в  $D$  и, следовательно, в  $P$ . Надо показать, что выполняются условия (14.17а, б)). Для любого  $x \in X$  имеем

$$F(x) \leq \varphi(x, 0) = g.$$

Если к тому же  $x \in C$ , в частности, если  $x \in \tilde{B} \subset B \subset C$ , то согласно (14.18)  $F(x) \geq f(x)$ . Из этих двух неравенств следует (14.17а)).

Для доказательства (14.176)) зафиксируем произвольную точку  $x \in X \setminus \tilde{B}$  и рассмотрим два возможных случая.

1)  $x \in C$ . Тогда в точке  $x$  существует обобщенный градиент функции  $f$ , т. е. вектор  $q \in \hat{f}(x)$ . Как показано в п.2 (см. (14.10)),  $q \in D$  и

$$f(x) = \varphi(x, q) = \langle q, x \rangle - \psi(q).$$

В силу условия леммы  $P \ni p = \lambda q$  при некотором  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$  (ибо  $\lambda q \in D$  в силу выпуклости  $D$ ), причем в силу выпуклости  $\psi(p)$  вверх будет выполнено неравенство

$$\psi(\lambda q) \geq (1 - \lambda)\psi(0) + \lambda\psi(q) = -(1 - \lambda)g + \lambda\psi(q).$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} F(x) &= \inf_{p \in P} \varphi(x, p) \leq \varphi(x, \lambda q) = \\ &= \langle \lambda q, x \rangle - \psi(\lambda q) \leq \lambda \langle q, x \rangle - \lambda\psi(q) + (1 - \lambda)g = \\ &= \lambda\varphi(x, q) + (1 - \lambda)g = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g < g, \end{aligned}$$

так как  $f(x) < g$ , поскольку  $x \notin B$ .

2)  $x \notin C$ . Найдем в пространстве  $E^m$  гиперплоскость, отделяющую  $x$  от  $C$ :

$$\langle q, x \rangle < a; \quad \langle q, y \rangle \geq a, \quad y \in C.$$

При произвольном  $\lambda > 0$

$$\psi(\lambda q) = \inf_{y \in C} (\langle \lambda q, y \rangle - f(y)) > \lambda a - g$$

и, следовательно,  $\lambda q \in D$ . Далее,  $p = \lambda q \in P$  при некотором  $\lambda > 0$ , и поэтому

$$\begin{aligned} F(x) &= \inf_{p \in P} \varphi(x, p) \leq \varphi(x, \lambda q) = \\ &= \langle \lambda q, x \rangle - \psi(\lambda q) < \lambda a - (\lambda a - g) = g. \end{aligned}$$

Неравенство (14.176)), а вместе с ним и лемма доказаны.

4. Задача максимизации на ограниченном множестве. Рассмотрим важнейшие примеры.

Пример 1. Пусть множество  $C$  замкнуто и ограничено и функция  $f$  определена (или может быть продолжена) на некоторой его окрестности  $\tilde{C} \supset C$ . В этом случае всюду на  $C$  существует обобщенный градиент функции

$f$  и он ограничен некоторой константой  $M$  (см. следствие из леммы 2.3).

Рассмотрим игру  $\gamma = \{X, P, \varphi\}$ , где  $X \supset C$  и

$$P = \{p: \|p\| \leq M\}, \quad (14.19)$$

которая, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 14.1 и, следовательно, эквивалентна исходной задаче.

Изучим подробнее функцию  $F$ , отвечающую этой игре. Выпишем ее явное выражение. Согласно (14.16), (14.5), (14.19) имеем для любого  $x \in E^m$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \min_{p \in P} (\langle p, x \rangle - \psi(p)) = \\ &= \min_{p \in P} [\langle p, x \rangle - \min_{y \in C} (\langle p, y \rangle - f(y))] = \\ &= \min_{p \in P} \max_{y \in C} [f(y) - \langle p, y - x \rangle] = \end{aligned}$$

(в силу правила перестановочности (10.11))

$$\begin{aligned} &= \max_{y \in C} \min_{p \in P} [f(y) - \langle p, y - x \rangle] = \\ &= \max_{y \in C} [f(y) - M \|y - x\|]. \quad (14.20) \end{aligned}$$

Имеет место следующее утверждение относительно этой функции.

**Лемма 14.2.** а) На множестве  $C$  функция  $F$  совпадает с  $f$ . б) Вне множества  $C$  функция  $F$  дифференцируема, ее градиент равен

$$\text{grad } F(x^0) = \frac{y^0 - x^0}{\|y^0 - x^0\|} \cdot M, \quad x^0 \notin C, \quad (14.21)$$

где

$$y^0 \in \text{Arg} \max_{y \in C} [f(y) - M \|y - x^0\|]. \quad (14.22)$$

**Доказательство.** Пусть  $x^0 \in C$  и  $p^0 \in \hat{f}(x^0)$  — обобщенный градиент  $f$  в точке  $x^0$ . Тогда  $p^0 \in P$  и согласно (14.10)

$$f(x^0) = \varphi(x^0, p^0) \geq \min_{p \in P} \varphi(x^0, p) = F(x^0).$$

Сопоставляя это с (14.18), находим, что  $F(x^0) = f(x^0)$ ,  $x^0 \in C$ . Таким образом, первая часть леммы доказана.

Далее, так как  $F$  определена на всем пространстве, то обобщенный градиент функции  $F$  существует всюду, при этом из равенства  $[E^m, F]^* = [P, \psi]$  следует, что он ограничен на всем пространстве константой  $M$  (см. замечание к (14.10)). Пусть  $x^0 \notin C$ ,  $q$  — вектор обобщенного градиента функции  $F$  в точке  $x^0$ , т. е.

$$\langle q, x - x^0 \rangle \geq F(x) - F(x^0), \quad \forall x \in E^m, \quad (14.23)$$

и  $y^0 \in \text{Arg max}_{y \in C} [f(y) - M \|y - x^0\|]$ . Тогда, согласно (14.20)

$$F(x^0) = f(y^0) - M \|y^0 - x^0\|.$$

Полагая в (14.23)  $x = y^0$ , получаем с учетом уже доказанной части леммы

$$\begin{aligned} \langle q, y^0 - x^0 \rangle &\geq F(y^0) - F(x^0) = \\ &= f(y^0) - F(x^0) = M \|y^0 - x^0\|. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Так как  $\|q\| \leq M$  и  $\|y^0 - x^0\| \neq 0$ , поскольку  $x^0 \notin C$ ,  $y^0 \in C$ , то отсюда следует, что

$$q = \frac{y^0 - x^0}{\|y^0 - x^0\|} \cdot M \quad (14.25)$$

и в (14.24) имеет место равенство.

Равенство (14.25) должно выполняться для любого вектора обобщенного градиента в точке  $x^0$  и для любой точки  $y^0$  из множества (14.22). Это возможно только в том случае, когда вектор  $q$  определен однозначно (единствен), а множество (14.22) находится на луче  $l = \{y: y = x^0 + tq, t \geq 0\}$ . Единственность  $q$  означает дифференцируемость  $F$  в точке  $x^0$ . Лемма доказана.

Из доказательства леммы видна структура поверхности  $S = \{(x, u): u = F(x), x \in E^m\}$ . В самом деле, так как в (14.24) имеет место равенство, то точки  $\xi^0 = (x^0, F(x^0))$  и  $\eta^0 = (y^0, f(y^0))$  принадлежат  $S$  и касательной плоскости

$$H_q = \{(x, u): u = \langle q, x - x^0 \rangle + F(x^0)\}.$$

Поскольку  $F$  выпукла вверх, то это значит, что весь отрезок  $[\eta^0, \xi^0]$  принадлежит  $S$ . Поскольку исходная точка  $x^0$  могла быть взята сколь угодно далеко, то отсюда следует, что весь луч  $\{\xi: \xi = \eta^0 + t(\xi^0 - \eta^0), t \geq 0\}$  принадлежит поверхности  $S$ .

Окончательно структура поверхности  $S$  такова: на  $C$  эта поверхность есть график функции  $f$ , а вне  $C$  поверхность  $S$  представляет собой линейчатую поверхность, лучи которой направлены вниз с тангенсом угла наклона  $M$ . Таким образом, формальный переход

$$[C, f] \rightarrow [C, f]^* = [E^m, \psi] \rightarrow [P, \psi] \rightarrow [P, \psi]^* = [E^m, F], \quad (14.26)$$

где

$$P = \{p \in E^m: \|p\| \leq M\},$$

геометрически означает замену вертикальных образующих цилиндра  $(C, f)$  коническими образующими множества  $(E^m, F)$  с тангенсом угла наклона  $M$ .

Переход от задачи  $[C, f]$  к задаче  $[E^m, F]$  есть один из вариантов метода штрафных функций (см., например, [41]).

При построении игры  $\gamma$  множество  $X$  можно выбирать произвольно, лишь бы  $X \supset C$ . Используя специфику исходной задачи, надо стремиться к построению такой игры, чтобы было возможно легче решать задачи нахождения оптимальных ответов в игровом процессе.

Пример 2. Пусть множество  $C$  представлено в виде

$$C = C_1 \cap C_2$$

и задача  $[C_1, f]$  удовлетворяет условиям примера 1. Если, как в примере 1, свести задачу  $[C_1, f]$  к игре  $\{X_1, P_1, \varphi_1\}$ ,  $X_1 \supset C_2$ , то игра  $\{C_2, P_1, \varphi_1\}$  будет эквивалентна задаче  $[C, f]$ . Это обстоятельство удобно использовать для облегчения нахождения оптимальных ответов первого игрока (решение задачи  $\langle p, x \rangle \rightarrow \max, x \in C_2$ ). В качестве  $C_2$  надо выбирать множество достаточно простого вида, заведомо содержащее множество решений  $B$ .

## § 15. Экономическая интерпретация задачи линейного программирования и методы декомпозиции

1. Экономическая интерпретация. Многие экономические ситуации могут быть моделированы задачей линейного программирования, и соответственно задача л. п. может быть интерпретирована многими способами. Мы выберем один из них, удобный для изложения в последующем методов декомпозиции.

Рассмотрим задачу л. п.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \geq b_i, \quad x_j \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m c_jx_j \rightarrow \min, \quad i \in [1, s], \quad j \in [1, m] \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

как модель предприятия, производящего продукцию различных видов  $i \in [1, s]$ . Производство продукции может осуществляться  $m$  различными технологическими способами, описываемыми столбцами матрицы  $A = (a_{ij})$ . Именно, элементы  $j$ -го столбца матрицы  $A$  показывают количества продукции различных видов, производимые предприятием при единичной интенсивности  $j$ -го технологического способа,  $j \in [1, m]$ , при этом некоторые из продуктов действительно производятся данным способом ( $a_{ij} > 0$ ), другие же на самом деле потребляются ( $a_{ij} < 0$ ). Вектор правых частей  $b \in E^s$  интерпретируется как задание по выпуску продукции, а  $c_j$  — как затраты, связанные с функционированием  $j$ -го способа при единичной интенсивности,  $j \in [1, m]$ . Таким образом, ситуация, в которой находится предприятие, описывается тройкой  $(A, b, c)$ . Планом предприятия является вектор  $x \in E^m$ , компоненты которого показывают, с какими интенсивностями будут задействованы технологические способы. Предприятие стремится выбрать план, обеспечивающий выполнение задания при минимальных издержках.

Запишем для задачи (15.1) функцию Лагранжа

$$L(p, x) = - \sum_{j=1}^m c_jx_j + \sum_{i=1}^s p_i \left( \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j - b_i \right)$$

и рассмотрим игру  $\gamma = \{X, P, L\}$ , где множества  $X$  и  $P$  определены согласно (14.3). Если векторы  $\xi$  и  $\eta$ , определяющие множества  $X, P$ , достаточно велики, то игра  $\gamma$  эквивалентна исходной задаче.

Дадим интерпретацию игрового процесса (5.11) в игре  $\gamma$ . Оптимальными ответами игроков на ситуацию  $(x, p)$  будут: для первого (максимизирующего) игрока

$$\hat{x}_i(p) = \begin{cases} \xi_j & \text{при } y_j > 0, \\ 0 & \text{при } y_j < 0, \end{cases} \quad j = [1, m],$$

для второго (минимизирующего) игрока

$$\hat{p}_i(x) = \begin{cases} \eta_i & \text{при } q_i > 0, \\ 0 & \text{при } q_i < 0, \end{cases} \quad i \in [1, s], \quad (15.2)$$

где  $y = pA - c$ ,  $q = b - Ax$ .

Будем интерпретировать вектор двойственных переменных  $p$  как вектор цен на продукцию, а второго игрока как сбытовую базу, имеющую право назначать цены (в пределах  $0 \leq p \leq \eta$ ), но обязанную при этом скупать у предприятия всю производимую им продукцию или продавать предприятию продукцию, недостающую ему для выполнения плана (по ценам, устанавливаемым самой базой). Ограничения  $0 \leq x \leq \xi$  интерпретируются как пределы производственных возможностей предприятия.

Оптимальные ответы игроков получают следующую интерпретацию. Зная текущие цены  $p$ , предприятие вычисляет вектор  $y$ , компоненты которого суть прибыли, приносимые технологическими способами при единичной интенсивности их использования. Если прибыль  $j$ -го способа положительна, то этот способ включается в оптимальный ответ с максимально возможной интенсивностью  $\xi_j$ , если же  $y_j < 0$ , то  $j$ -й способ исключается. С другой стороны, база, зная текущий план предприятия  $x$ , вычисляет вектор  $q$ , компоненты которого суть невязки между плановым заданием  $b$  и фактическим производством продукции  $Ax$ . Если  $i$ -й продукт перепроизведен,  $q_i < 0$ , то на этот продукт устанавливается нулевая цена, если же  $q_i > 0$ , то цена устанавливается на верхнем пределе  $\eta_i$ .

Итеративный игровой процесс (5.11), (10.15) выглядит тогда следующим образом. Находясь в ситуации  $(x, p)$ , предприятие находит рентабельные, т. е. дающие положительную прибыль, технологические способы и повышает их интенсивности, а интенсивности убыточных способов понижает (взвешивая вектор  $x$  и вектор  $\hat{x}(p)$ ). В той же ситуации второй игрок (база) выявляет дефицитные продукты и повышает их цены, а цены на избыточную продукцию снижает (взвешивая вектор  $p$  и вектор  $\hat{p}(x)$ ). Функция Лагранжа  $L(x, p)$  есть, как обычно, выигрыш (в данном случае — выручка) первого игрока и одновременно проигрыш второго.

Теорема 11.2 утверждает, что итеративный процесс (10.15) при условиях (5.2) сходится к множеству партий равновесия. В партии равновесия  $x^*$  есть оптимальный план, а  $p^*$  — оптимальные цены, т. е. цены, равные стоимости производства единицы продукции на предприятии при условии выполнения задания  $b$ .

2. Блочная задача линейного программирования. Блочная модель линейного программирования записывается в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^N A_k x_k \geq b, \quad (15.3)$$

$$B_k x_k \leq b_k, \quad k \in [1, N], \quad (15.4)$$

$$\sum_{k=1}^N \langle c_k, x_k \rangle \rightarrow \min, \quad x_k \geq 0,$$

где  $b \in E^s$ ,  $b_k \in E^{s_k}$ ,  $c_k, x_k \in E^{m_k}$ ,  $A_k, B_k$  — матрицы соответствующих размерностей.

Дать экономическую интерпретацию этой задачи проще всего, рассматривая ее как модель отраслевого планирования. Блоки соответствуют предприятиям отрасли,  $k \in [1, N]$ , вектор  $x_k$  — интенсивности технологических способов, используемых на  $k$ -м предприятии, вектор  $A_k x_k$  — выпуск  $k$ -го предприятия,  $\langle c_k, x_k \rangle$  — затраты, связанные с планом  $x_k$ . Ограничения (15.3) соответствуют заданию по выпуску продукции в целом для всей отрасли. Ограничения (15.4) описывают множество производственных возможностей  $k$ -го предприятия:  $b_k$  — вектор наличных ресурсов,  $B_k$  — матрица технологических коэффициентов затрат ресурсов.

Ниже будут описаны два способа сведения блочной задачи к игре многих игроков, так что применение игрового итеративного процесса (5.11), (10.15) к решению этих игр дает процедуры, аналогичные алгоритмам декомпозиции Данцига — Вольфа и Корнаи — Липтака. Как уже говорилось во введении, таким образом получаются не сами эти алгоритмы (которые являются конечно-шаговыми), однако построенные процедуры с полным правом можно рассматривать как их итеративные аналоги. Эти процедуры будут описаны ниже в экономических терминах, как процесс разработки плана отрасли.

**3. Первый метод декомпозиции (метод Данцига — Вольфа).** Составим функцию Лагранжа блочной задачи (15.3), (15.4) в виде

$$L(x, p) = - \sum_{k=1}^N \langle c_k, x_k \rangle + \langle p, \sum_{k=1}^N A_k x_k - b \rangle, \quad (15.5)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{k=1}^N X_k$ ,  $p \in E_+^s$ ,

$$x_k \in X_k = \{x_k: B_k x_k \leq b_k, x_k \geq 0\}. \quad (15.6)$$

(Как было отмечено в § 14, п.1, мы вправе часть ограничений отнести к описанию множества  $X$ , на котором рассматривается функция Лагранжа. В данном случае в качестве таковых взяты ограничения (15.4).)

Предположим, что множества  $X_k$  ограничены. Тогда, взяв подходящие верхние границы для двойственных переменных (интерпретируемых как цены на продукцию)

$$p \in P = \{p: 0 \leq p \leq \eta\}, \quad (15.7)$$

мы получим выпуклую игру двух лиц  $\gamma_1 = \{X, P, L\}$ , эквивалентную согласно теореме Куна — Таккера исходной задаче.

Оптимальным ответом второго игрока в игре  $\gamma_1$  будет вектор  $\hat{p}(x)$ , вычисляемый по формуле (15.2) при

$$q = - \sum_{k=1}^N A_k x_k + b.$$

Что же касается оптимального ответа  $\hat{x}(p)$  первого игрока, то он складывается из оптимальных ответов  $x_k(p)$ , каждый из которых получается как решение задачи

$$\langle y_k, x_k \rangle \rightarrow \max, \quad x_k \in X_k, \quad (15.8)$$

где  $y_k = p A_k - c_k$ .

Идея декомпозиции (разложения) состоит как раз в том, что оптимальные ответы  $\hat{x}_k(p)$  не зависят друг от друга, а зависят только от  $p$ , и поэтому нахождение вектора  $\hat{x}(p)$  связано с решением серии малоразмерных задач вида (15.8). Это обстоятельство существенно с вычислительной точки зрения. С другой стороны, факт независимости  $x_k(p)$  позволяет рассматривать игровой процесс

в игре  $\gamma_1$  как игровой процесс в игре  $N+1$  лиц  $\gamma = \{X_k, \Phi_k\}_{k=1}^{N+1}$ , где множества стратегий  $X_k$ ,  $k \in [1, N]$ , определены в (15.6), а  $X_{N+1} = P$  в (15.7). Функции выигрыша суть

$$\varphi_k(x, p) = \langle pA_k - c_k, x_k \rangle, \quad k \in [1, N],$$

$$\varphi_{N+1}(x, p) = \langle p, b - \sum_{k=1}^N A_k x_k \rangle.$$

Игроками в игре  $\gamma$  являются предприятия и центральная отраслевая сбытовая база, наделенная полномочиями и обязанностями, сформулированными в п.1. Все введенные выше величины получают естественную интерпретацию:  $q$  — вектор дефицитности продукции,  $y_k$  — вектор прибыльности технологических способов на  $k$ -м предприятии. Выигрыш предприятия есть прибыль в ценах  $p$ , выигрыш базы  $\varphi_{N+1}$  есть разность между потребностями и планом суммарного выпуска продукции, измеренная в ценах  $p$ . Игровой процесс (5.11), (10.15) решения игры  $\gamma_1$  (он же процесс решения игры  $\gamma$ ) интерпретируется теперь естественным образом, подобно тому как это было сделано в п.1. При условиях (5.2) процесс сходится в силу теоремы 11.2.

Описанный здесь метод декомпозиции и его интерпретация близки к идеям известного метода Данцига — Вольфа [25].

**4. Второй метод декомпозиции (метод Корнай — Липтака).** Другой метод декомпозиции, близкий к методу Корнай — Липтака [39], можно построить следующим образом. Следуя работе [39], запишем блочную задачу (15.3), (15.4) в виде

$$\left. \begin{aligned} A_k x_k &\geq y_k, \quad x_k \in X_k, \quad k \in [1, N], \\ \sum_{k=1}^N y_k &= b, \\ \sum_{k=1}^N \langle c_k, x_k \rangle &\rightarrow \min, \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

где множества  $X_k$  определены в (15.6), а  $y_k \in E^s$  — дополнительные неизвестные. Переменные  $y_k$  естественно интерпретируются как распределение совокупного отраслевого задания  $b$  по предприятиям. Отметим, что компо-

ненты векторов  $y_k$  могут принимать и отрицательные значения. Это значит, что соответствующее предприятие не производит, а использует данный продукт и получает соответствующий лимит. Сама задача в этой интерпретации выступает как задача поиска такого распределения заданий, при котором суммарные отраслевые затраты на его выполнение будут минимальны. Очевидно, что эта задача эквивалентна исходной задаче (15.3), (15.4).

Запишем для этой задачи функцию Лагранжа в виде

$$L(x, y; p) = - \sum_{k=1}^N \langle c_k, x_k \rangle + \sum_{k=1}^N \langle p_k, A_k x_k - y_k \rangle,$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{k=1}^N X_k, \quad (15.10)$$

$$y = (y_1, \dots, y_N), \quad p = (p_1, \dots, p_N),$$

$$y \in \left\{ y_k \in E^s; \sum_{k=1}^N y_k = b \right\}, \quad p_k \in E_+^s.$$

Предположим опять, что множества  $X_k$  ограничены, и выберем достаточно большие границы изменения переменных  $p$  и  $y$ :

$$0 \leq p_k \leq \eta, \quad -\xi \leq y_k \leq \xi, \quad k \in [1, N],$$

где  $\xi, \eta \in E_+^s$ . Тогда задача (15.9) эквивалентна выпуклой игре двух лиц  $\gamma_1 = \{X \times Y, P, L(x, y; p)\}$ , где множество  $X$  определено в (15.10),

$$Y = \left\{ y: -\xi \leq y_k \leq \xi, \sum_{k=1}^N y_k = b \right\}, \quad P = \{p: 0 \leq p_k \leq \eta\}.$$

Нетрудно видеть, что игра  $\gamma_1$  эквивалентна игре  $\gamma_2 = \{Y, P, \varphi(y, p)\}$ , где

$$\varphi(y, p) = \max_{x \in X} L(x, y; p).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в силу леммы 10.2б обе игры,  $\gamma_1, \gamma_2$  эквивалентны задаче минимизации функции

$$F(p) = \max_{(x, y) \in X \times Y} L(x, y; p) = \max_{y \in Y} \varphi(y, p), \quad p \in P.$$

Рассмотрим игру  $\gamma_2$ . Запишем функцию выигрыша в виде

$$\varphi(y, \rho) = - \sum_k \langle \rho_k, y_k \rangle + \sum_k \max_{x_k \in X_k} \langle \rho_k A_k - c_k, x_k \rangle.$$

Тогда видно, что при фиксированном  $\rho$  оптимальным ответом  $\hat{y}(\rho)$  первого (максимизирующего) игрока будет решение задачи

$$\sum_k \langle \rho_k, y_k \rangle \rightarrow \min, \quad y \in Y. \quad (15.11)$$

Заметим, что эта задача решается фактически отдельно по каждому продукту, т. е. при нахождении оптимального ответа первого игрока имеет место декомпозиция по продуктам, и первый игрок может быть представлен как  $s$  игроков ( $s$  — количество видов продукции).

Если интерпретировать первого игрока как отраслевой центр, распределяющий задание  $b$  по предприятиям, то можно сказать, что задание по выпуску каждого данного продукта будет направляться на те предприятия, где этот продукт имеет меньшую оценку. Двойственные переменные  $\rho_k$  надо интерпретировать как стоимость производства единицы продукции на  $k$ -м предприятии.

Обратимся к оптимальному ответу второго игрока:

$$\hat{\rho}(y) = \arg \min_{\rho \in P} \varphi(y, \rho) = \arg \min_{\rho \in P} \max_{x \in X} L(x, y; \rho) = \\ = (\hat{\rho}_1(y_1), \dots, \hat{\rho}_N(y_N)),$$

где

$$\hat{\rho}_k(y_k) = \\ = \arg \min_{0 \leq \rho_k \leq \eta} \max_{x_k \in X_k} (-\langle c_k, x_k \rangle + \langle \rho_k, A_k x_k - y_k \rangle). \quad (15.12)$$

Из (15.12) видно, что второй игрок представляется как  $N$  игроков (предприятий), каждый из которых решает задачу минимизации (15.12), т. е. согласно теореме Куна — Таккера и лемме 10.26 получает оптимальные значения двойственных переменных в задаче (рассмотренной в п. 1):

$$A_k x_k \geq y_k, \quad x_k \in X_k, \\ \langle c_k, x_k \rangle \rightarrow \min, \quad k \in [1, N].$$

Таким образом,  $\hat{p}_k(y_k)$  суть стоимости производства единицы продукции при условии выполнения плана  $y_k$  (см. п. 1). Из (15.11) и (15.12) следует, что игра  $\gamma_2$  эквивалентна игре  $N+s$  игроков  $\gamma$  с множествами стратегий

$$P_k = \{p_k: 0 \leq p_k \leq \eta\}, \quad k \in [1, N],$$

$$Y_i = \left\{ y_i = (y_{i1}, \dots, y_{iN}): -\xi_i \leq y_{ik} \leq \xi_i, \sum_k y_{ik} = b_i \right\},$$

$$i \in [1, s],$$

и функциями выигрыша

$$\Phi_k(y, p) = \min_{x_k \in X_k} (\langle c_k, x_k \rangle - \langle p_k, A_k x_k - y_k \rangle), \quad k \in [1, N],$$

$$\Psi_i(y, p) = - \sum_{k=1}^N p_{ik} y_{ik}, \quad i \in [1, s].$$

Игровой итеративный процесс (5.11), (10.15) решения игры  $\gamma_2$  (он же процесс решения игры  $\gamma$ ) выглядит следующим образом. Находясь в ситуации  $(y, p)$ , отраслевой центр (состоящий из подразделений, отвечающих за отдельные виды продукции) находит оптимальное в ценах  $p$  распределение задания  $\hat{y}(p)$  и взвешивает его с прежним планом распределения  $y$ , т. е. перераспределяет отраслевое задание, увеличивая задание тем предприятиям, где продукция производится дешевле. В той же ситуации предприятия вычисляют стоимости производства продукции  $\hat{p}_k(y_k)$  при данном плановом задании  $y_k$ ,  $k \in [1, N]$ , и формируют новые значения цен, сдвигая прежние цены  $p_k$  в направлении  $\hat{p}_k$ . Так осуществляется переход к новой ситуации, затем итерации повторяются. В силу теоремы 11.2 процесс при условиях (5.2) сходится.

**5. Использование преобразования Лежандра для построения алгоритмов декомпозиции в общем (нелинейном) случае.** Обобщая рассмотрение пп. 2—4, сформулируем блочную модель выпуклого программирования в виде

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in X_0, \quad x_k \in X_k, \quad (15.13)$$

$$f(x) \rightarrow \max,$$

где  $X_k \subset E^{m_k}$ ,  $X_0 \subset E^{m_0}$  ( $m_0 = m_1 + \dots + m_N$ ) — выпуклые компакты и  $f$  — выпуклая вверх функция. Будем считать,

что  $f$  определена в некоторой окрестности множества  $X_0$ , так что всюду на  $X_0$  определен обобщенный градиент функции  $f$  и существует константа  $M$  такая, что отображение  $x \rightarrow \hat{f}(x)$ ,  $x \in X_0$ , действует из  $X_0$  в шар  $P = \{p \in E^{m_0}: \|p\| \leq M\}$ .

Для построения декомпозиционных алгоритмов решения задачи (15.13) можно использовать сведение ее к игре с помощью преобразования Лежандра, как это было сделано в § 14. (В линейном случае для этих целей удобнее пользоваться функцией Лагранжа; что и было сделано в пп. 3—4.) В примере 2 п. 4 § 14 показано, что задача максимизации (15.13) эквивалентна игре  $\gamma = \{X, P, \varphi\}$ , где

$$X = \prod_{k=1}^N X_k, \quad \varphi(x, p) = \langle p, x \rangle - \psi(p),$$

$\psi(p)$  — функция, лежандрово сопряженная к  $f$  на множестве  $X_0$ , т. е.  $[E^{m_0}, \psi] = [X_0, f]^*$ . В игре  $\gamma$  оптимальные ответы игроков суть (см. § 14, п. 3):

для первого игрока

$$\hat{x}(p) = \arg \max_{x \in X} \langle p, x \rangle,$$

для второго игрока  $\hat{p}(x) \in \hat{F}(x)$  — обобщенный градиент функции (см. (14.20))

$$F(x) = \max_{y \in X_0} (f(y) - M \|y - x\|), \quad x \in X. \quad (15.14)$$

Отсюда следует, что игровой итеративный процесс решения игры  $\gamma$  является декомпозиционным. Действительно, если представить вектор  $p$  суммарной размерности  $m_0$  в виде

$$p = (p_1, \dots, p_N), \quad p_k \in E^{m_k}, \quad k \in [1, N],$$

то оптимальный ответ первого игрока  $\hat{x}(p)$  представится как набор  $N$  независимых друг от друга оптимальных ответов

$$\hat{x}_k(p_k) = \arg \max_{x_k \in X_k} \langle p_k, x_k \rangle.$$

Что же касается второго игрока, то нахождение его оптимального ответа  $\hat{p}(x)$  связано (в силу (15.14)) с рассмотрением функции  $f$  только на множестве  $X_0$ .

## ГЛАВА V

### ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Для нахождения минимума выпуклой вниз функции издавна применяются градиентный метод и его многочисленные модификации. Если функция  $f$  дифференцируема, то простым градиентным спуском называется процесс вида

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n p_n, \quad p_n = \text{grad } f(x_n).$$

Если  $f$  не дифференцируема, то под  $p_n$  можно подразумевать любой вектор обобщенного градиента функции  $f$  в точке  $x_n$ , т. е.  $p_n \in \hat{f}(x_n)$ . Методы такого вида применяются обычно для нахождения минимума функции  $f$  на всем пространстве (или на достаточно большом множестве) в предположении, что множество точек минимума ограничено. Для решения задачи программирования (IV.1) на ограниченном множестве такой метод может быть применен, если предварительно свести задачу (IV.1) к задаче отыскания минимума без ограничений (на всем пространстве) путем введения штрафных функций. Один из вариантов такого сведения описан в примере 1 § 14, п. 4.

В работе [54] для решения задачи максимизации  $[X, f]$  на ограниченном выпуклом множестве  $X$  предложен процесс вида

$$x_{n+1} = \pi(x_n + \alpha_n p_n), \quad p_n \in \hat{f}(x_n), \quad (\text{V.1})$$

где  $\pi$  — оператор проектирования на множество  $X$ :

$$\pi(h) = \arg \min_{x \in X} \|h - x\|, \quad h \in E^m. \quad (\text{V.2})$$

В статье [20] показана возможность использования аналогичного метода и для решения игр. Ниже с точки зрения теории, развитой в разделе первом, будет рассмотрено несколько вариантов подобных методов.

## § 16. Общие теоремы о методах градиентного типа

1. **Две геометрические леммы.** Пусть  $X \subset E^m$  — выпуклый компакт,  $h \in E^m$  — некоторая точка. Через  $\pi(h)$  обозначим проекцию  $h$  на  $X$ , т. е. ближайшую к  $h$  точку в  $X$  (см. (V.2)).

*Лемма 16.1. Выполняется соотношение*

$$\langle h - \pi(h), y - \pi(h) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in X. \quad (16.1)$$

*Доказательство.* Пусть  $x = \pi(h)$ . Тогда  $x \in X$  и по определению

$$\|h - x\| = \min_{y \in X} \|h - y\|.$$

Пусть  $y \neq x$  — некоторая другая точка в  $X$ . Тогда квадратичная форма

$$f(\lambda) = \|h - (x + \lambda(y - x))\|^2$$

достигает минимума по  $\lambda \in [0, 1]$  при  $\lambda = 0$ , поскольку  $x + \lambda(y - x) \in X$  в силу выпуклости  $X$ . Поэтому

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -2 \langle h - x, y - x \rangle \geq 0,$$

что равносильно (16.1). Лемма доказана.

Записав (16.1) в виде

$$\langle h - y, \pi(h) - y \rangle \geq \|\pi(h) - y\|^2, \quad \forall y \in X,$$

получим

$$\|\pi(h) - y\| \leq \|h - y\|, \quad \forall y \in X. \quad (16.2)$$

*Лемма 16.2. Функция*

$$U(h) = \frac{1}{2} \rho^2(h, X) = \frac{1}{2} \|h - \pi(h)\|^2, \quad h \in E^m,$$

*выпукла вниз, дифференцируема и*

$$\text{grad } U(h) = h - \pi(h). \quad (16.3)$$

*Доказательство.* Сначала докажем выпуклость  $U$  вниз. Заметим, что если неотрицательная функция выпукла вниз, то ее квадрат обладает тем же свойством. Поэтому достаточно показать выпуклость вниз функции  $\rho(h, X)$ .

Пусть  $h_1, h_2 \in E^m$  — две произвольные точки. Обозначив  $x_1 = \pi(h_1)$ ,  $x_2 = \pi(h_2)$ , имеем при  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ .

$$\begin{aligned} \rho(\alpha h_1 + \beta h_2, X) &\leq \|\alpha h_1 + \beta h_2 - (\alpha x_1 + \beta x_2)\| \leq \\ &\leq \alpha \|h_1 - x_1\| + \beta \|h_2 - x_2\| = \alpha \rho(h_1, X) + \beta \rho(h_2, X), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Докажем теперь дифференцируемость  $U$ . Пусть  $x = \pi(h)$ ,  $x + \Delta x = \pi(h + \Delta h)$ ,  $\Delta U = U(h + \Delta h) - U(h)$ . Имеем

$$\|(h + \Delta h) - (x + \Delta x)\| \leq \|(h + \Delta h) - x\|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U(h + \Delta h) &\leq \frac{1}{2} \|(h + \Delta h) - x\|^2 = \\ &= U(h) + \langle h - x, \Delta h \rangle + \frac{1}{2} \|\Delta h\|^2. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} U(h + \Delta h) &= \frac{1}{2} \|(h - x) + (\Delta h - \Delta x)\|^2 = \\ &= U(h) + \langle h - x, \Delta h - \Delta x \rangle + \frac{1}{2} \|\Delta h - \Delta x\|^2 \geq \\ &\geq U(h) + \langle h - x, \Delta h - \Delta x \rangle \geq \\ (\text{в силу (16.1)}) & \geq U(h) + \langle h - x, \Delta h \rangle. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти два неравенства, находим

$$\frac{1}{2} \|\Delta h\|^2 \geq \Delta U - \langle h - x, \Delta h \rangle \geq 0.$$

Это означает, что  $\text{grad } U(h)$  существует и равен  $h - \pi(h)$ . Лемма доказана.

**2. Проекционное поле.** Имеем в виду рассмотрение ниже итеративных процессов вида (V.1) с участием операции проектирования, дадим здесь общую схему приведения этих процессов к стандартному виду.

Пусть на выпуклом компакте  $X \subset E^m$  задано ограниченное отображение (поле)  $R$  типа  $K$ . Ограниченность означает, что существует константа  $M$  такая, что  $R$  есть отображение в шар

$$Y = \{p \in E^m : \|p\| \leq M\}. \quad (16.4)$$

Рассмотрим процесс:

$$\begin{aligned} x_0 &\in X \text{ произвольно,} \\ x_{n+1} &= \pi(x_n + \alpha_n p_n), \quad p_n \in R(x_n), \end{aligned} \quad (16.5)$$

где  $\pi$  — оператор проектирования на  $X$  и  $\{\alpha_n\}$  — правильная, т. е. удовлетворяющая условиям (5.2), последовательность. Этот процесс можно записать в виде

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n q_n, \quad q_n \in Q(\alpha_n, x_n), \quad (16.6)$$

где для  $x \in X$ ,  $\alpha \in I = (0, 1]$ ,

$$Q(\alpha, x) = \left\{ q \in E^m : q = \frac{\pi(x + \alpha p) - x}{\alpha}, p \in R(x) \right\}. \quad (16.7)$$

Согласно следствию из леммы 16.1  $\|\pi(x + \alpha p) - x\| \leq \alpha \|p\|$ , и поэтому  $\|q\| \leq \|p\|$ , т. е. при всех  $\alpha \in I$  отображения  $Q(\alpha)$  действуют из  $X$  в  $Y$ . Это означает, что процесс (16.6) или, что то же самое, (16.5) есть с. п.  $Q(\alpha)$ ,  $\alpha \in I$ , в смысле определения 5.1.

Назовем *проекционным расширением поля  $R$*  отображение  $\pi R: X \rightarrow Y$ , заданное для  $x \in X$  равенствами

$$\pi R(x) = \{r \in Y : r = p - v, p \in R(x), v \in N(x)\}, \quad (16.8)$$

$$N(x) = \{v \in Y : \langle v, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in X\}. \quad (16.9)$$

Поясним, что  $N(x)$  — это множество направленных вовне нормалей  $v$  к множеству  $X$  в точке  $x$ , нормированных так, чтобы  $v \in Y$ . Если  $x \in \text{int}(X)$ , то  $N(x) = \{v = 0\}$ .

Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 16.3.** *Поле  $\pi R$  имеет тип  $K$  и семейство  $Q(\alpha)$ ,  $\alpha \in I$ , присоединено к нему.*

**Доказательство.** Множества  $\pi R(x)$  не пусты, так как  $v = 0 \in N(x)$  и, следовательно,  $\pi R(x) \supset R(x)$ . Выпуклость множеств  $\pi R(x)$  и замкнутость отображения  $\pi R$  следуют из аналогичных свойств отображений  $N$  и  $R$ . Поэтому  $\pi R$  есть  $K$ -отображение (см. определение 2.3).

Для доказательства присоединенности к  $\pi R$  семейства  $Q(\alpha)$  представим вектор  $q$  в (16.7) в виде (рис. 1)

$$q = p - v \quad v = \frac{h - \pi(h)}{\alpha},$$

$$h = x + \alpha p, \quad p \in R(x), \quad x \in X,$$

Ясно, что

$$\|v\| = \frac{\|h - \pi(h)\|}{\alpha} \leq \frac{\|h - x\|}{\alpha} = \|p\| \leq M.$$

Поэтому  $v \in Y$  и согласно лемме 16.1  $v \in N(\pi(h)) = N(\pi(x + \alpha p))$ . Таким образом, для отображения (16.7) имеет место включение

$$Q(\alpha, x) \subset \{q \in Y : q = p - v, p \in R(x), v \in N(\pi(x + \alpha p))\}. \quad (16.10)$$

Теперь присоединенность  $Q(\alpha)$  к  $R$  непосредственно

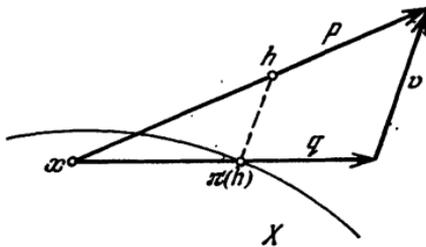


Рис. 1.

следует (при сопоставлении (16.10) с (16.8)) из полунепрерывности сверху отображений  $N$  и  $R$  (последнее имеет место, согласно лемме 2.1, в силу замкнутости и ограниченности этих отображений). Лемма доказана.

**Замечание.** Во всех этих рассуждениях основным препятствием является граничный эффект, поскольку для всякой внутренней точки  $x$  множества  $X$  имеем, очевидно,  $N(x) = \{v = 0\}$ ,  $\pi R(x) = R(x)$ , и поэтому при достаточно малых  $\alpha$  будет  $Q(\alpha, x) = R(x)$ .

В методах градиентного типа, как правило, оказывается возможным для доказательства сходимости использовать в качестве функции Ляпунова функцию

$$U(x) = \frac{1}{2} \rho^2(x, X^*), \quad (16.11)$$

где  $X^* \subset X$  — искомое замкнутое множество решений задачи. В связи с этим назовем поле  $R$  *положительно ориентированным*, если все его направления составляют острый угол с направлениями к множеству решений:

$$\langle p, x^* - x \rangle > 0, \quad \forall (x^* \in X^*, x \in X \setminus X^*, p \in R(x)). \quad (16.12)$$

Из леммы 16.2 и следствия из теоремы 7.3 вытекает, что если поле  $R$  положительно ориентировано, то функция  $U$ , определенная в (16.11), есть индикатриса сходимости, а следовательно, и функция Ляпунова (поскольку  $m(U) = X^*$ ) поля  $R$ . Поэтому из теоремы 7.2 следует

*Лемма 16.4. С. п., присоединенный к положительно ориентированному полю, сходится.*

Далее заметим, что положительная ориентация сохраняется при переходе от поля  $R$  к полю  $\pi R$ , точнее, если поле  $R$  положительно ориентировано, то и поле  $\pi R$  тоже. В самом деле, если  $r \in \pi R(x)$ , то  $r = p - v$ ,  $p \in R(x)$ ,  $v \in N(x)$ . Поэтому

$$\langle r, x^* - x \rangle = \langle p - v, x^* - x \rangle \geq \langle p, x^* - x \rangle,$$

и если условие (16.12) имеет место для поля  $R$ , то оно соблюдается и для поля  $\pi R$ . В итоге из лемм 16.3 и 16.4 вытекает

**Теорема 16.1.** *Если заданное на выпуклом компакте  $X$   $K$ -поле  $R$  ограничено и положительно ориентировано относительно множества  $X^* \subset X$ , то итеративный процесс (16.5) сходится к  $X^*$ .*

### 3. Обобщение на случай неограниченного множества.

**Теорема 16.2.** *Пусть на неограниченном множестве  $X$  задан процесс (16.5), где  $K$ -поле  $R$  ограничено на всем  $X$  константой  $M$  и положительно ориентировано относительно замкнутого (возможно, неограниченного) множества  $X^* \subset X$  решений задачи. Если правильная последовательность  $\{\alpha_n\}$  удовлетворяет дополнительному условию*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = A < \infty, \quad (16.13)$$

*то процесс (16.5) сходится к  $X^*$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\{\alpha_n, x_n\}$  — некоторая фиксированная траектория процесса (16.5). Надо показать, что  $\rho(x_n, X^*) \rightarrow 0$ . Рассмотрим два случая.

1) В последовательности  $\{x_n\}$  бесконечно много точек, принадлежащих  $X^*$ . Тогда если в последовательности  $\{x_n\}$  лишь конечное число точек, не входящих в  $X^*$ , то теорема доказана. В противном случае последовательность  $\{x_n\}$  бесконечное число раз покидает множество  $X^*$  и снова возвращается. Надо показать, что за периоды

«отсутствия» последовательность не может отдалиться. Пусть  $[t+1, s]$  — некоторый период отсутствия, т. е.

$$x_t \in X^*, \quad x_{s+1} \in X^*, \quad x_n \notin X^*, \quad n \in [t+1, s].$$

Тогда для  $k \in [t+1, s-1]$  имеем

$$\|x_{k+1} - x_t\|^2 = \|\pi(x_k + \alpha_k p_k) - x_t\|^2 \leq$$

(в силу (16.2))

$$\begin{aligned} &\leq \|x_k + \alpha_k p_k - x_t\|^2 = \|x_k - x_t\|^2 - \\ &\quad - 2\alpha_k (p_k, x_t - x_k) + \alpha_k^2 \|p_k\|^2 \leq \end{aligned}$$

(так как  $x_t \in X^*$ ,  $x_k \notin X^*$  и поле  $R$  положительно ориентировано;  $\|p_k\| \leq M$ )

$$\leq \|x_k - x_t\|^2 + M^2 \alpha_k^2. \quad (16.14)$$

Отсюда, складывая эти неравенства для  $k=t+1, \dots, (n-1)$ ,  $n \in [t+1, s]$ , получим

$$\begin{aligned} \rho^2(x_n, X^*) &\leq \|x_n - x_t\|^2 \leq \|x_{t+1} - x_t\|^2 + \\ &\quad + M^2 \sum_{k=t+1}^n \alpha_k^2 \leq M^2 \sum_{k=t}^n \alpha_k^2 \leq M^2 \sum_{k=t}^{\infty} \alpha_k^2. \end{aligned}$$

В силу условия (16.13) правая часть здесь стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Это значит, что удаление последовательности за очередной период отсутствия стремится к нулю, т. е. теорема в случае 1) доказана.

2) В последовательности  $\{x_n\}$  лишь конечное число точек принадлежит  $X^*$ . Без ограничения общности можно считать, что все точки последовательности  $\{x_n\}$  находятся вне  $X^*$ . Зафиксируем некоторую произвольную точку  $x^* \in X^*$ . Тогда можно записать неравенство, аналогичное (16.14), если подразумевать в последнем под  $x_t$  точку  $x^*$ , а под  $x_k$  — произвольную точку последовательности  $\{x_n\}$

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + M^2 \alpha_k^2.$$

Складывая эти неравенства для  $k=0, 1, \dots, (n-1)$ , получим с учетом (16.13)

$$\|x_n - x^*\|^2 \leq \|x^0 - x^*\|^2 + M^2 \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \leq \|x^0 - x^*\|^2 + M^2 A,$$

т. е. последовательность  $\{x_n\}$  ограничена. Это значит, что данная фиксированная траектория процесса (16.5) является траекторией того же процесса, но рассматриваемого на некотором компакте  $X$ . Поэтому в случае 2) теорема 16.2 прямо следует из теоремы 16.1.

Теорема доказана полностью.

## § 17. Некоторые известные методы

1. Метод обобщенного градиента для решения задачи максимизации. Пусть  $C \subset E^m$  — выпуклый компакт,  $f$  — выпуклая вверх непрерывная функция, определенная в некоторой окрестности  $\tilde{C}$  множества  $C$ . Тогда всюду на  $C$  существует обобщенный градиент функции  $f$ , т. е. множества обобщенных градиентов

$$\hat{f}(x) = \{p \in E^m : \langle p, y - x \rangle \geq f(y) - f(x), \forall y \in \tilde{C}\}, \\ x \in C, \quad (17.1)$$

не пусты. Рассмотрим итеративный процесс

$$x_0 \in C \text{ произвольно,} \\ x_{n+1} = \pi(x_n + \alpha_n p_n), \quad p_n \in \hat{f}(x_n), \quad (17.2)$$

где  $\pi$  — операция проектирования на  $C$  и  $\{\alpha_n\}$  — правильная, т. е. удовлетворяющая условиям (5.2), последовательность чисел. В [54] показано, что процесс (17.2) решает задачу максимизации  $[C, f]$ , т. е. сходится к множеству

$$B = \operatorname{Arg} \max_{x \in C} f(x).$$

Этот результат прямо следует из теоремы 16.1. В самом деле, отображение  $x \rightarrow \hat{f}(x)$ ,  $x \in C$ , замкнуто и ограничено на  $C$  (см. следствие из леммы 2.3). Кроме того, множества  $\hat{f}(x)$  выпуклы. Все это означает, что  $\hat{f}$  есть ограниченное  $K$ -отображение. Для применимости теоремы 16.1 остается показать, что поле  $\hat{f}$  положительно ориентировано, т. е. выполнено условие (16.12). Но это очевидно, ибо из (17.1) имеем

$$\langle p, x^* - x \rangle \geq f(x^*) - f(x) > 0$$

при  $x^* \in B$ ,  $x \notin B$ ,  $p \in \hat{f}(x)$ .

**2. Метод обобщенного градиента для решения игры.** Градиентные методы применяются также и для нахождения седловых точек выпукло-вогнутой функции  $\varphi(x, p)$ , заданной на прямом произведении выпуклых множеств  $X \subset E^m$ ,  $P \subset E^s$ . Впервые это было сделано в работе Эрроу, Гурвица, Удзавы [69]. Они рассмотрели случай дифференцируемой функции  $\varphi$  на произведении положительных ортантов  $E_+^m$  и  $E_+^s$ . В предположении, что  $\varphi$  строго выпукла по одному из аргументов, скажем по  $x$ , ими показано, что траектория  $(x(t), p(t))$  дифференциального уравнения

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= [\text{grad}_x \varphi(x, p)]^+, \\ \dot{p} &= [-\text{grad}_p \varphi(x, p)]^+, \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

где для вектора  $z$  символ  $z^+$  означает его проекцию на положительный ортант соответствующего пространства, сходится к седловой точке  $(x^*, p^*)$  функции  $\varphi$  (компонента  $x^*$  в этом случае определена однозначно).

В статье Е. Г. Гольштейна [20] этот результат был обобщен на случай непрерывной, но не дифференцируемой функции  $\varphi$  и произвольных выпуклых множеств  $X$  и  $P$ . При этом рассмотрено не дифференциальное уравнение (17.3), а непосредственно итеративная процедура

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= \pi_X(x_n + \alpha_n l_x^n), \\ p_{n+1} &= \pi_P(p_n - \alpha_n l_p^n) \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

(что с вычислительной точки зрения, конечно, более важно).

Здесь  $l_x^n$  — вектор обобщенного градиента в точке  $(x_n, p_n)$  функции  $\varphi$ , рассматриваемой при фиксированном  $p$  как функция  $x$ ;  $(-l_p^n)$  — вектор обобщенного градиента в точке  $(x_n, p_n)$  функции  $(-\varphi)$ , рассматриваемой при фиксированном  $x$  как функция  $p$ . Формально:  $l_x^n \in \hat{\varphi}_x(x_n, p^n)$ ,  $l_p^n \in \hat{\varphi}_p(x_n, p_n)$ , где

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}_x(x, p) &= \\ &= \{l_x \in E^m : (l_x, x' - x) \geq \varphi(x', p) - \varphi(x, p), \\ &\quad \forall x' \in \tilde{X}\}, \\ \hat{\varphi}_p(x, p) &= \\ &= \{l_p \in E^s : (-l_p, p' - p) \geq -\varphi(x, p') + \varphi(x, p), \\ &\quad \forall p' \in \tilde{P}\}. \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

Предполагается, что выполнено условие

а) выпукло-вогнутая функция  $\varphi(x, p)$  определена в некоторой окрестности  $\tilde{\Omega}$  множества  $\Omega = X \times P$ , так что запись (17.5) корректна.

Основная теорема в [20] утверждает, что при определенных предположениях последовательность (17.4) сходится к множеству  $\Omega^* = X^* \times P^*$  партий равновесия игры  $\gamma = \{X, P, \varphi\}$ . Главное предположение Е. Г. Гольштейна, названное им свойством *устойчивости* игры  $\gamma$ , состоит в том, что

$$\begin{aligned} \text{б) } \text{Arg} \max_{x \in X} \varphi(x, p^*) &= X^*, \quad \forall p^* \in P^*, \\ \text{Arg} \min_{p \in P} \varphi(x^*, p) &= P^*, \quad \forall x^* \in X^*. \end{aligned}$$

Отметим, что в общем случае вместо равенств имеют место лишь включения (см. леммы 10.2а, б)

$$\begin{aligned} \text{Arg} \max_{x \in X} \varphi(x, p^*) &\supset X^*, \\ \text{Arg} \min_{p \in P} \varphi(x^*, p) &\supset P^*. \end{aligned}$$

Условие устойчивости означает, что оптимальным ответом на оптимальную стратегию противника может быть только собственная оптимальная стратегия. Такое предположение выполняется обычно лишь для строго выпуклых функций. Функция Лагранжа для задачи линейного программирования не обладает этим свойством, в связи с чем в [20] предложен метод ее модификации, приводящий к устойчивой игре.

Ниже будет получен результат Е. Г. Гольштейна при дополнительном, как обычно в этой книге, условии, что  $X$  и  $P$  — компакты. В целях сокращения выкладок симметризуем игру  $\gamma$ , т. е. пару  $(x, p)$  обозначим одной буквой  $z = (x, p)$ ,  $z \in \Omega = X \times P$ , и введем функцию

$$\Phi(z', z) = \varphi(x', p) - \varphi(x, p'), \quad z = (x, p), \quad z' = (x', p').$$

Тогда процесс (17.4) совпадает с процессом

$$z_{n+1} = \pi(z_n + \alpha_n l_n), \quad (17.6)$$

где  $\pi$  — оператор проектирования на  $\Omega$ , а  $l_n$  — вектор

обобщенного градиента в точке  $z = z' = z_n$  функции  $\Phi(z', z)$ , рассматриваемой при фиксированном  $z$  как функция  $z'$ . Формально:  $l_n \in \hat{\Phi}(z_n)$ , где для  $z \in \Omega$

$$\hat{\Phi}(z) = \{l \in E^{m+s} : \langle l, w - z \rangle \geq \Phi(w, z) - \Phi(z, z), \forall w \in \Omega\}. \quad (17.7)$$

Учитывая, что  $\Phi(z, z) = 0$ , можно записать (17.7) в виде

$$\hat{\Phi}(z) = \{l \in E^{m+s} : \langle l, w - z \rangle \geq \Phi(w, z), \forall w \in \Omega\}. \quad (17.8)$$

Кроме того, надо отметить, что  $\pi_\Omega(z) = (\pi_X(x), \pi_P(p))$ .

Множество  $\Omega^*$  партий равновесия в игре  $\gamma = \{X, P, \varphi\}$  является одновременно множеством оптимальных стратегий игроков в симметричной игре  $\tilde{\gamma} = \{\Omega, \Phi\}$  (см. § 10, пп. 4, 5).

Отметим еще, что если функция  $\varphi$  дифференцируема, то

$$l_x = \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial x}, \quad l_p = \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p}, \quad l = \frac{\partial \Phi(w, z)}{\partial w} \Big|_{w=z}.$$

**Теорема 17.1.** *Если выполнены предположения а), б) и множество  $\Omega$  ограничено, то процесс*

$$z_{n+1} = \pi(z_n + \alpha_n l_n), \quad l_n \in \hat{\Phi}(z_n),$$

где  $\{\alpha_n\}$  — правильная (т. е. удовлетворяющая условиям (5.2)) последовательность, сходится к  $\Omega^*$ .

**Доказательство.** Из предположения а) и ограниченности множества  $\Omega$  следует, что  $\hat{\Phi}$  является ограниченным  $K$ -отображением (см. следствие из леммы 2.3). Из предположения б) следует, что поле  $\hat{\Phi}$  положительно ориентировано (в направлении  $\Omega^*$ ). Покажем это.

Условие оптимальности в симметричной игре  $\tilde{\gamma}$  — условие (10.12а) — утверждает, что  $w^* \in \Omega^*$  тогда и только тогда, когда

$$\Phi(w^*, z) \geq 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Условие устойчивости означает, что равенство здесь может быть только при  $z \in \Omega^*$ , т. е.

$$\Phi(w^*, z) > 0, \quad \forall (w^* \in \Omega^*, z \notin \Omega^*).$$

Поэтому из (17.8) имеем

$$\langle l, w^* - z \rangle \geq \Phi(w^*, z) > 0$$

при  $w^* \in \Omega^*$ ,  $z \notin \Omega^*$ ,  $l \in \hat{\Phi}(z)$ . Это и есть условие (16.12).

Таким образом, доказываемая теорема прямо следует из теоремы 16.1.

Заметим, что в исходной постановке функция  $\varphi$  могла быть определена не на произведении  $X \times P$ , а на произвольном выпуклом компакте  $\Omega \subset E^{m+s}$ . После перехода к функции  $\Phi$  все рассуждения сохраняют силу и в этом случае, поскольку  $\tilde{\gamma} = \{\Omega, \Phi\}$  остается симметричной выпуклой игрой. Под  $\Omega^*$  надо понимать множество оптимальных стратегий в игре  $\tilde{\gamma}$  (ср. с замечанием в конце п. 1 § 10).

Приведем пример, иллюстрирующий существенность условия устойчивости.

Пример. Пусть  $\Omega$  — круг на двумерной плоскости  $(x, p)$  и  $\varphi(x, p) = xp$ . В этом случае  $l_x = p$ ,  $l_p = x$ ,  $l = (p, -x)$ . Дифференциальным аналогом уравнений (17.4) будут (для внутренних точек  $\Omega$ ) уравнения

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -x.$$

Решения этих уравнений — интегральные кривые поля  $R = \hat{\Phi}$  — суть окружности. Эти кривые не сходятся к множеству  $\Omega^* = \{(0, 0)\}$ .

В заключение отметим, что теорема 16.2 позволяет обобщить рассмотрения пп. 1, 2 на случай неограниченных множеств  $S$  и  $\Omega$  соответственно.

**3. Метод «тяжелого шарика».** В работе [53] предложен метод ускорения сходимости градиентного спуска (для отыскания минимума выпуклой вниз функции), построенный как разностный аналог дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} = -\text{grad } f(x) - \lambda \dot{x}, \quad (17.9)$$

которое можно интерпретировать как уравнение движения тяжелой материальной точки по поверхности  $u = f(x)$ , именно:  $x$  — проекция на горизонтальную плоскость положения точки,  $\text{grad } f(x)$  — проекция реакции опорной поверхности,  $\lambda \dot{x}$  — торможение трения или вязкости,  $\lambda > 0$ ,

Если записать уравнение (17.9) как систему уравнений первого порядка

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\text{grad } f(x) - \lambda p,$$

то итеративный процесс, соответствующий конечноразностной аппроксимации этих уравнений, примет вид

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \alpha_n p_n, \\ p_{n+1} &= p_n - \alpha_n (\text{grad } f(x_n) + \lambda p_n). \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

В случае, когда  $f$  не дифференцируема, можно заменить здесь  $\text{grad } f$  на обобщенный градиент  $\hat{f}$ .

Преимуществом процесса (17.10) перед «безынерционными» градиентными методами является сокращение колебаний при спуске по «оврагу» с крутыми стенками. При резком изменении направления вектора антиградиента  $-\text{grad } f(x)$  направление движения  $p$  не меняется резко, а только немного отклоняется в сторону нового значения антиградиента. При движении по оврагу это приводит к тому, что поперечные колебания гасятся, а составляющая скорости  $p$ , направленная по дну оврага, возрастает. Это делает траекторию движения более плавной и в большинстве случаев ускоряет сходимость (см. [53]).

Преобразование Лежандра позволяет построить игровой процесс с аналогичными свойствами для решения задачи (IV.1) (а значит, и для задачи минимизации с заменой  $f$  на  $-f$ ).

Предположим, что функция  $f$  определена или может быть продолжена с сохранением выпуклости на окрестность  $\tilde{C} \supset C$ . Тогда множество обобщенных градиентов функции  $f$  на  $C$  ограничено некоторой константой  $M$ .

С помощью леммы 14.1 сведем задачу  $[C, f]$  к игре  $\gamma = \{X, P, \varphi\}$ , где  $X \subset E^m$  — шар достаточно большого радиуса  $R$ , заведомо пересекающийся с множеством  $B$  решений задачи  $[C, f]$  (см. (14.14));  $P \subset E^m$  — выпуклый компакт, являющийся пересечением шара радиуса  $M$  с множеством  $D$ , где  $[D, \psi] = [C, f]^*$ ; функция выигрыша  $\varphi$  также определяется с помощью преобразования Лежандра формулой (14.9).

В § 14, п. 3 показано, что оптимальными ответами игроков в игре  $\gamma$  являются:

для первого игрока — решение задачи

$$\langle p, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in X,$$

т. е.

$$\hat{x}(p) = \begin{cases} R \cdot \frac{p}{\|p\|} & \text{при } p \neq 0, \\ \text{любой вектор длины } R & \text{при } p = 0; \end{cases}$$

для второго игрока  $\hat{p}(x) \in \hat{F}(x)$ , где  $\hat{F}(x)$  — множество обобщенных градиентов функции  $F$ , определяемой через преобразование Лежандра  $[P, \psi]^* = [E^m, F]$ .

Игровой итеративный процесс

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n \hat{x}(p), \\ p_{n+1} &= (1 - \alpha_n) p_n + \alpha_n \hat{p}(x) \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

по своим свойствам аналогичен процессу (17.10). Если  $\|x\|$  мала в сравнении с  $R$ , то траектории процесса (17.11) близки к интегральным кривым системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{p}{\|p\|}, \quad \dot{p} \in (\hat{F}(x) - p).$$

## ГЛАВА VI

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ

#### § 18\*. Метод максимизации вдоль кривой спроса

1. **Постановка задачи.** В качестве примера применения теоремы 7.3 докажем сходимость одного итеративного процесса решения задачи выпуклого программирования, имеющего наглядную экономическую интерпретацию и представляющего значительный интерес для теории оптимального народнохозяйственного планирования.

Меняя, если необходимо, знаки неравенств и коэффициентов на обратные, ограничения модели производства можно записать в виде

$$By \leq b, \quad y \geq 0, \quad (18.1)$$

где  $B$  — матрица технологических коэффициентов затрат ресурсов,  $b$  — объемы имеющихся ресурсов (может быть, взятые со знаком минус),  $y$  — интенсивности производственных способов.

Конечный выпуск можно представить в виде

$$x = Ay. \quad (18.2)$$

Критерий оптимальности должен быть функцией от вектора  $x$ . Обозначим его  $U(x)$ :

$$U(x) \rightarrow \max. \quad (18.3)$$

Если речь идет о небольшой производственной единице, для которой можно считать известными цены на сырье и продукцию, то естественным критерием является прибыль:

$$U(x) = \langle c, x \rangle, \quad (18.4)$$

где  $c$  — вектор цен.

Другим случаем, когда вопрос о критерии оптимальности решается просто, является также производство, выпуск которого должен удовлетворять условию комплектности. Тогда критерием может быть максимизация выпуска в заданных пропорциях (максимизация числа комплектов):

$$U(x) = \min_j \frac{x_j}{\lambda_j}, \quad (18.5)$$

где  $x_j$  есть  $j$ -я компонента вектора  $x$ ;  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — заданные пропорции выпуска. Такой вид критерия широко используется в книге [35]. Задача (18.1) — (18.3), (18.5) сводится к линейной, если заменить (18.3), (18.5) на соотношения

$$x \geq \theta \lambda, \quad \theta \rightarrow \max.$$

Когда речь идет о крупном подразделении производства, т. е. когда цены и пропорции выпуска продукции могут существенно зависеть от изменений самого выпуска, указанные виды критерия оказываются непосредственно неприменимыми. Более общим является предположение о существовании некоторой нелинейной целевой функции, или функции предпочтения, со стороны общества или хозяйства в отношении планов производства данного производственного комплекса. Однако математическая формализация такой функции в общем случае представляется весьма сложной, не говоря уже о том, что полученные нелинейные модели во многом уступали бы линейным с точки зрения возможностей их анализа и алгоритмизации.

Критерий максимизации выпуска в заданных пропорциях может рассматриваться как упрощенная модель критерия общего вида, если указан способ корректировки пропорций в соответствии с действительным предпочтением. В работе В. Г. Медницкого [46] описан итеративный алгоритм нахождения оптимума, состоящий в решении на каждой итерации задачи на максимизацию выпуска в заданных пропорциях и последовательном уточнении этих пропорций.

Рассматриваемая ниже задача в общей постановке может быть записана в следующем виде:

$$U(x) \rightarrow \max, \quad x \in X, \quad (18.6)$$

где  $X \subset E^m$  — замкнутое, ограниченное выпуклое множество. Множество  $X$  будет интерпретироваться как множество производственных возможностей или как множество допустимых векторов потребительского выбора (см. п. 2). В описанной выше постановке множество  $X$  задается условиями (18.1), (18.2).

В данном параграфе рассматривается итеративный процесс, близкий к процессу, описанному В. Г. Медницким, и доказывается его сходимости к оптимуму в условиях строгой выпуклости и гладкости целевой функции  $U$  и границы множества  $X$ . Предположение гладкости границы множества  $X$ , которое существенно для доказательства сходимости, не позволяет гарантировать сходимости данного алгоритма в важнейшем практическом случае, когда производство описывается моделью линейного программирования. Однако это не означает, что предлагаемый алгоритм не может оказаться сходящимся во многих практически важных ситуациях. В основном же доказательство сходимости следует рассматривать как некоторый теоретический ориентир при разработке и исследовании итеративных процессов, применяемых на практике в плановых расчетах.

**2. Метод.** Предлагаемый процесс выглядит наиболее естественным в следующей интерпретации. В планировании личного потребления большое значение имеют функции зависимости спроса на предметы потребления от дохода потребителя. Пусть  $x$  — вектор объемов потребляемых товаров и  $U(x)$  — функция предпочтения, к максимизации которой стремится потребитель. Если  $s$  — доход потребителя и  $p$  — вектор «розничных» цен ( $p \in S^m$ , где  $S^m$  — стандартный симплекс), то потребитель выбирает вектор  $x_p(s)$ , являющийся решением задачи

$$U(x) \rightarrow \max, \quad \langle p, x \rangle \leq s.$$

Для простоты будем предполагать, что векторная функция  $x_p(s)$  однозначна. Очевидно,  $U(x_p(s))$  не убывает с ростом дохода  $s$ . Легко проверить, что если  $U(x)$  есть многочлен второго порядка, то  $x = x_p(s)$  при фиксированном векторе цен  $p$  есть прямая линия.

Функция  $x_p(s)$  (при фиксированных ценах  $p$ ) есть функция зависимости спроса от дохода. Будем называть ее *функцией* или *кривой* спроса.

Обозначим через  $\hat{x}_p$  решение задачи максимизации вдоль кривой спроса:

$$s \rightarrow \max, \quad x_p(s) \in X. \quad (18.7)$$

Будем считать, что  $\hat{x}_p$  лежит всегда на границе множества  $X$ .

Заметим, что если множество  $X$  задается уравнениями (18.1), (18.2) и функция спроса  $x_p(s)$  есть прямая, то задача (18.7) есть задача линейного программирования.

Назовем вектор  $v = v(x)$  *производственными оценками*, соответствующими плану  $x$ , если решение задачи

$$\langle v, y \rangle \rightarrow \max, \quad y \in X,$$

совпадает с  $x$ . Если  $x$  принадлежит границе множества  $X$ , то  $v(x)$  есть вектор направленной вонне нормали гиперплоскости, опорной к множеству  $X$  в точке  $x$ .

Теперь можно определить отображение  $V: S^m \rightarrow S^m$ , которое ставит в соответствие вектору розничных цен  $p$  вектор производственных оценок  $v(\hat{x}_p)$ .

Для корректности этого определения надо предположить (и это для экономических задач естественно), что производственные оценки  $v(\hat{x}_p)$  суть ненулевые векторы с неотрицательными компонентами. При этом предположении условие  $v(\hat{x}_p) \in S^m$  есть просто условие нормировки.

**Лемма 18.1.** *Если  $p$  есть неподвижная точка отображения  $V$ , то  $\hat{x}_p$  есть оптимальный план задачи (18.6).*

**Доказательство.** Из определения оценок  $V(p)$  следует, что для всех  $x \in X$

$$\langle v, x \rangle \leq \langle v, \hat{x}_p \rangle, \quad v \in V(p),$$

т. е. в случае  $V(p) \ni p$

$$\langle p, x \rangle \leq \hat{s}, \quad \text{где } \hat{s} = \langle p, \hat{x}_p \rangle. \quad (18.8)$$

Поскольку  $\hat{x}_p = x_p(\hat{s})$ , то согласно определению функции спроса для всех  $x$ , удовлетворяющих условию (18.8),

$$U(x) \leq U(\hat{x}_p).$$

Следовательно,  $\hat{x}_p$  — решение задачи (18.6), что и требовалось доказать.

Для нахождения неподвижной точки отображения  $V$  можно использовать простой процесс вида (5.11), т. е., процесс

$$p_{n+1} = (1 - \alpha_n) p_n + \alpha_n v_n, \quad v_n \in V(p_n). \quad (18.9)$$

Пусть множество  $X$  задается условиями (18.1), (18.2) и функция спроса  $x_p(s)$  есть прямая:

$$x_p(s) = a_p + b_p s,$$

где  $a_p = (a_{p1}, \dots, a_{p_m})$ ,  $b_p = (b_{p1}, \dots, b_{p_m})$ . Тогда задача (18.7) есть задача линейного программирования. Для определения вектора оценок  $v \in V(p)$  ее можно заменить эквивалентной задачей линейного программирования

$$\min_i \frac{x_j - a_{pj}}{b_{pj}} \rightarrow \max, \quad x \in X, \quad (18.10)$$

причем вектор  $v \in V(p)$  есть вектор двойственных оценок ограничений (18.2). Задача (18.10) имеет вид, совпадающий (с точностью до переноса начала координат) с задачей (18.1), (18.2), (18.5) максимизации выпуска в заданных пропорциях. Поэтому в условиях, когда задача (18.6) есть задача квадратичного программирования, процесс (18.9) может быть интерпретирован в точности как решение на каждой итерации задачи (18.10) максимизации выпуска в заданных пропорциях с корректировкой параметров ее критерия оптимальности (правда, не только пропорций, но и «начала отсчета»  $a_p$ ).

В общем случае такая интерпретация остается верной в том смысле, что в малой окрестности решения  $x_n$ , полученного на предыдущей итерации, функцию  $U$  в силу гладкости можно считать приближенно квадратичной, а функцию спроса  $x_p(s)$  аппроксимировать отрезком прямой. Таким образом, сходимость процесса (18.9) можно рассматривать как некоторое обоснование рациональности аппроксимации задачи (18.6) общего вида задач (18.10) максимизации в заданных пропорциях, имея в виду возможность корректировки параметров  $a_p$  и  $b_p$  ее критерия оптимальности.

Заметим, что одномерная задача (18.7) решается существенно проще, чем задача (18.10), и нахождение вектора двойственных оценок  $v \in V(p)$ , когда известен оптимальный план  $\hat{x}_p$ , обычно также не представляет труда. Поэтому

с точки зрения вычислительных целей нет смысла переходить от задачи (18.7) к задаче (18.10).

Отображение  $p \rightarrow V(p)$ ,  $p \in S^m$ , вообще говоря, неоднозначно. Однако, как уже говорилось, доказательство сходимости метода будет проведено только в предположении гладкости (дифференцируемости) границы множества  $X$ , которое обеспечивает однозначность функции  $V(p)$ .

Основной факт, который доказывается ниже, состоит в том, что при достаточно малом положительном шаге  $\alpha_n$  величина  $\frac{U(\hat{x}_{p_{n+1}}) - U(\hat{x}_{p_n})}{\alpha_n}$  положительна, какова бы ни была система цен  $p_n$ , если только она не оптимальна. Из этого будет следовать, что функция

$$\tilde{U}(p) = \max_{p \in S^m} U(\hat{x}_p) - U(\hat{x}_p) \quad (18.11)$$

является индикатрисой сходимости процесса (18.9) (т. е. поля  $R = V - E$ ), причем  $m(\tilde{U})$  обязано совпадать с множеством  $\text{stat}(R)$ , и поэтому процесс сходится к решению задачи (18.6).

**3. Доказательство сходимости.** Предположим, что функция  $U$  строго выпукла вверх и дважды непрерывно дифференцируема и что множество  $X$  выпуклое с трижды непрерывно дифференцируемой границей  $\Gamma$ . Предположим далее, что ни в какой точке границы  $\Gamma$  кривая спроса не является касательной к границе, а пересекает ее под некоторым ненулевым углом. Наконец, предположим, что значение  $U(x_p(s))$  строго возрастает по  $s$  вдоль функции спроса в окрестности точки ее пересечения с границей  $\Gamma$ . Последние два предположения можно записать аналитически в виде следующего соотношения. Аппроксимируем функцию  $U$  в окрестности некоторой точки, принятой за начало координат, с помощью разложения в ряд Маклорена до членов второго порядка в виде

$$U(x) = U(0) + \langle a, x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, Hx \rangle + o(\|x\|^2),$$

где  $a$  и  $-H$  суть градиент и матрица вторых производных в нулевой точке. Так как  $U$  строго выпукла вверх, то квадратичная форма  $\langle x, Hx \rangle$  положительно определена. Через точку  $x = 0$  проходит кривая спроса  $x_p(s)$  при  $p = a$ ,

Из определения функции спроса получаем ее параметрическую запись в окрестности этой точки:

$$p - Hx + o(\|x\|) = \beta p,$$

где  $\beta$  — переменный параметр. С точностью до малых высшего порядка

$$x = -H^{-1}p(\beta - 1)$$

(эта прямая есть касательная к кривой спроса в точке  $x=0$ ).

Для наглядности удобно перейти к другому параметру — доходу  $s$ :

$$s = \langle p, x \rangle = -pH^{-1}p(\beta - 1)$$

и

$$x = \frac{H^{-1}p}{pH^{-1}p} s.$$

Если  $x=0$  — точка пересечения границы  $\Gamma$  с кривой спроса  $x_p(s)$ , то сформулированные выше предположения можно записать в виде

$$pH^{-1}v > 0,$$

где  $v$  — вектор нормали к гиперплоскости, касательной к множеству  $X$ . На экономическом языке это означает, что положительный прирост дохода без изменения розничных цен  $p$  вызывает положительный прирост спроса  $x$ , исчисленного в производственных оценках:

$$\frac{\langle v, x \rangle}{\langle p, x \rangle} = \frac{vH^{-1}p}{pH^{-1}p}.$$

Обозначим через  $x_\alpha$  решение задачи (18.7), где функция спроса  $x_p(s)$  построена для цен  $p_\alpha = p + \alpha v$ .

**Лемма 18.2.** *В принятых обозначениях имеет место равенство*

$$\frac{\partial U(x_\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{(vH^{-1}v)(pH^{-1}p) - (pH^{-1}v)^2}{vH^{-1}p}.$$

**Доказательство.** Вектор  $x_\alpha$  есть точка пересечения границы  $\Gamma$  и кривой спроса, соответствующей ценам  $p_\alpha$  и удовлетворяющей уравнению

$$p - Hx_\alpha + \gamma(x_\alpha) = \beta_\alpha(p + \alpha v), \quad (18.12)$$

где  $\gamma(x) = o(\|x\|)$ .

С точностью до малых высшего порядка границу  $\Gamma$  можно заменить касательной гиперплоскостью

$$(v, x) = 0. \quad (18.13)$$

Умножая обе части равенства (18.12) на  $vH^{-1}$  слева и используя (18.13), имеем

$$vH^{-1}p + o(\|x_\alpha\|) = \beta_\alpha(vH^{-1}p + \alpha vH^{-1}v).$$

и

$$\beta_\alpha = \frac{1 + o(\|x_\alpha\|)}{1 + \alpha \frac{vH^{-1}v}{vH^{-1}p}}. \quad (18.14)$$

Из (18.12) и (18.14) получаем последовательно

$$-Hx_\alpha + o(\|x_\alpha\|) = -\alpha \left[ \frac{vH^{-1}v}{vH^{-1}p} p - v \right] + o(\alpha),$$

$$x_\alpha = \alpha \left[ \frac{vH^{-1}v}{vH^{-1}p} H^{-1}p - H^{-1}v \right] + o(\alpha),$$

$$\left. \frac{\partial U(x_\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\langle p, x_\alpha \rangle + o(\alpha)}{\alpha} = \frac{(vH^{-1}v)(pH^{-1}p) - (pH^{-1}v)^2}{vH^{-1}p},$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 18.1.** В любой точке границы  $\Gamma$ , за исключением точки оптимума,

$$\left. \frac{\partial U(x_\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} > 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $x=0$  есть точка границы  $\Gamma$ , не являющаяся точкой оптимума. Обозначим через  $\varphi$  угол между векторами  $H^{-1/2}p$  и  $H^{-1/2}v$ , соответствующими этой точке. Как известно,

$$\cos \varphi = \frac{pH^{-1}v}{\sqrt{(pH^{-1}p)(vH^{-1}v)}}.$$

Поэтому согласно лемме 18.2

$$\left. \frac{\partial U(x_\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) vH^{-1}p.$$

Так как векторы  $p$  и  $v$  коллинеарны только в точке оптимума, то  $\cos^2 \varphi < 1$ . Теорема доказана.

Теорема 18.1 означает, что  $\tilde{U}_R^*(p) < 0$  при  $p \notin m(\tilde{U})$ , где  $\tilde{U}$  — функция, определенная в (18.11). Согласно теореме 7.3 функция  $\tilde{U}$  есть индикатриса сходимости. Кроме того, из теоремы 18.1 следует, очевидно, что  $m(\tilde{U})$  совпадает с множеством неподвижных точек отображения  $p \rightarrow V(p)$ . В силу теоремы 7.1 процесс (18.9) сходится к множеству неподвижных точек отображения  $V$ , т. е. согласно лемме 18.1 к решению задачи (18.6).

## § 19. Дополнительные примеры итеративных процессов

**1. Метод Неймана.** Дж. фон Нейманом предложен метод решения матричных игр при помощи дифференциальных уравнений (см., например, [36], п. 6.7). Уравнения Неймана можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений типа (5.7)

$$\frac{dx}{dt} = r(x) \quad (19.1)$$

и доказывать сходимость ее интегральных кривых, а также ее конечноразностного аналога (5.11) с помощью теоремы 7.3.

Как известно (см. § 10, п. 5), решение произвольной матричной игры может быть сведено к решению симметричной игры, т. е. игры с кососимметрической матрицей выигрышей (см. § 10, п. 6). Пусть задана симметричная игра с матрицей  $A$  и множеством стратегий каждого из игроков  $X$ , представляющим собой стандартный симплекс  $S^m$ . Стратегия  $x \in X$  является оптимальной в том и только в том случае, если

$$Ax \leq 0.$$

Для достижения множества  $X^*$  оптимальных стратегий Нейманом предлагается использовать дифференциальное уравнение (19.1), где

$$\begin{aligned} r(x) &= z(x) - x, \quad z_j(x) = \\ &= \frac{\varphi_j(x)}{\sum_{k=1}^m \varphi_k(x)}, \quad \varphi_j(x) = \max [0, (Ax)_j], \end{aligned} \quad (19.2)$$

$(Ax)_j$  —  $j$ -я компонента вектора  $Ax$ .

Для доказательства сходимости интегральных кривых системы дифференциальных уравнений (19.1), (19.2) к множеству оптимальных стратегий достаточно проверить, что функция  $U(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \varphi_i^2(x)$  есть функция Ляпунова. Действительно, очевидно, что она равна нулю на множестве  $X^*$  и положительна вне этого множества. Кроме того, она непрерывно дифференцируема, и  $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j}$  можно записать в виде

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m a_{ij} \varphi_i(x),$$

где функция  $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}$  считается произвольным образом продолженной и на те точки, где  $\varphi_i(x)$  не дифференцируема. Такое произвольное продолжение функции  $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}$  не нарушает равенства, поскольку в тех точках, где функция  $\varphi_i(x)$  не дифференцируема, она равна нулю. Используя это равенство и учитывая кососимметричность матрицы  $A$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } U(x), r(x) \rangle &= \sum_{i,l} a_{ij} \varphi_i(x) \left( \frac{\varphi_j(x)}{\sum_k \varphi_k(x)} - x_j \right) = \\ &= \frac{1}{\sum_k \varphi_k(x)} \sum_{i,l} a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(x) - \sum_{i,l} a_{ij} \varphi_i(x) x_j = -2U(x). \end{aligned}$$

Согласно теореме 7.3  $U$  есть функция Ляпунова поля  $R$ , и, следовательно,  $x(t) \rightarrow X^*$ .

**2. Метод Франка и Вольфа.** Метод Франка и Вольфа для решения задач выпуклого программирования можно рассматривать как простой стандартный  $R$ -процесс для поля  $R$ , определенного соотношением (13.24). Рассмотрим задачу максимизации  $[C, f]$  (см. § 14) выпуклой вверх и дифференцируемой функции  $f$  на выпуклом компакте  $C \subset E^m$ .

Метод Франка и Вольфа состоит в следующем. Пусть  $x_n \in C$  — приближение к решению, полученное на  $n$ -й итерации процесса. Функция  $f$  заменяется ее линейным диф-

ференциалом  $df = \langle x, \text{grad } f(x_n) \rangle$  в точке  $x_n$ , и решается задача

$$\langle x, \text{grad } f(x_n) \rangle \rightarrow \max, \quad x \in C. \quad (19.3)$$

(Если  $C$  — многогранник, то это — задача линейного программирования.) Пусть множество ее решений есть  $Z(x_n)$ . Затем производится сдвиг в направлении  $z_n \in Z(x_n)$ :

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n z_n. \quad (19.4)$$

После этого следует  $(n+2)$ -я итерация.

Предположим, что градиент функции  $f$  ограничен по норме константой  $M$ , и рассмотрим игру  $\gamma = \{C, P, \phi\}$ , эквивалентную задаче  $[C, f]$ , построенную с помощью преобразования Лежандра так, как это было сделано в примере 1 п. 4 § 14. В игре  $\gamma$  оптимальным (и однозначным) ответом второго игрока на стратегию  $x \in C$  первого является  $\hat{p}(x) = \text{grad } f(x)$ , а оптимальным ответом первого игрока на стратегию  $\hat{p}(x)$  второго является решение  $z \in Z(x)$  задачи (19.3) (см. § 14). Поэтому при условии правильности последовательности  $\{\alpha_n\}$  процесс (19.4) есть простой  $R$ -процесс, где поле  $R$  определяется равенством (ср. (13.24))

$$R(x) = \hat{x}(\hat{p}(x)) - x.$$

Сходимость этого процесса к множеству оптимальных стратегий первого игрока доказана в § 13, п. 4 (с точностью до перемены игроков).

**3. Метод Булавского.** Итеративный процесс, описанный в § 13, п. 4 позволяет дать компактное качественное описание итеративного процесса, предложенного В. А. Булавским [10] для решения задач линейного программирования следующего типа:

**Задача А:**

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min, \quad Ax = p, \quad f \leq x \leq d \\ (c, x, f, d \in E^m, \quad p \in E^s).$$

Вместо задачи линейного программирования в [10] предлагается решать задачу квадратичного программирования.

**Задача Б:**

$$\langle c, x \rangle + \frac{\sigma}{2} \langle Bx, x \rangle \rightarrow \min, \quad Ax = p, \quad f \leq x \leq d,$$

где  $B$  — строго положительно определенная матрица ( $\langle Bx, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$  при некотором  $\gamma > 0$ ) и  $\sigma > 0$ . Доказывается, что решение задачи Б совпадает с решением задачи А при  $\sigma$ , достаточно близком к нулю. Для решения задачи Б предлагается итеративный процесс, близкий к простому процессу для поля (13.24).

Решение задачи Б совпадает с точкой равновесия игры двух лиц  $\{X, V, \varphi\}$  с множествами стратегий

$$X = \{x : f \leq x \leq d\}, \quad V = E^s$$

и с функцией выигрыша

$$\varphi(x, v) = \langle v, Ax - p \rangle - \langle c, x \rangle - \frac{\sigma}{2} \langle Bx, x \rangle.$$

Простой стандартный процесс для поля (13.24) в такой игре определяется равенствами:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \alpha_n \operatorname{grad}_v \varphi(x_n, v) = v_n + \alpha_n (Ax_n - p), \\ x_{n+1} &= z(v_n), \end{aligned}$$

где  $z(v)$  — решение задачи  $\varphi(x, v) \rightarrow \max, x \in X$ .

В [10], § 2 для решения задачи Б предлагается другой итеративный процесс:

$$v_{n+1} = v_n + \sigma (Ax_n - p), \quad x_{n+1} = T(v_n), \quad (19.5)$$

где  $T(v)$  не совпадает с  $z(v)$ . А именно, вектор  $T(v) = (T_1(v), \dots, T_m(v))$  определяется по точке  $\bar{x}$  безусловного максимума функции  $\varphi(x, v)$

$$\bar{x} = \arg \max_{x \in E^m} \varphi(x, v) = \frac{1}{\sigma} B^{-1}(vA - c)$$

следующим образом:

$$T_j(v) = \begin{cases} \bar{x}_j, & \text{если } f_j \leq \bar{x}_j \leq d_j, \\ f_j, & \text{если } f_j > \bar{x}_j, \\ d_j, & \text{если } d_j < \bar{x}_j \end{cases}$$

(ср. [10], формулы (10) — (12)).

Сходимость процесса (19.5) к решению задачи Б не следует из общих теорем, приведенных в настоящей книге. В работе [10] эта сходимость доказывается для матриц  $B$  специального треугольного вида, для которых вычисление координат векторов  $\bar{x}$  и  $T(v)$  может производиться последовательно, как в зейделевском процессе решения системы линейных уравнений.

## ГЛАВА VII\*

### СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

#### § 20. Методы стохастической аппроксимации и стохастического градиента

Как уже отмечалось, важный класс итеративных методов связан с присутствием случайной ошибки. К ним относятся методы стохастической аппроксимации, стохастический градиентный метод и их модификации.

1. Метод стохастической аппроксимации. Метод стохастической аппроксимации обычно описывается как метод нахождения корней системы уравнений регрессии

$$r(x) \equiv M\zeta(x) = 0,$$

где  $\zeta(x) \in E^m$  — система случайных величин, зависящих от векторного параметра  $x$ , или как метод нахождения минимума функции  $U$  с помощью процесса типа

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n \zeta(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (20.1)$$

Имеется много теорем о сходимости методов стохастической аппроксимации с различными предположениями относительно процесса и функции  $U$ , которая обычно является его индикатрисой. Наиболее общими теоремами сходимости такого типа являются, по-видимому, теоремы Блума [71] (см. также [11], стр. 101) и Бравермана — Розоноэра [1]. Эти результаты близки по своим предположениям к теореме 9.4. Основным предположением, обеспечивающим приближение  $x_n$  к множеству  $m(U)$ , служит условие типа (7.4). Ниже будет приведена теорема, которая отличается от теоремы Блума [71] и одной из наиболее известных теорем Бравермана — Розоноэра ([1], стр. 185) в основном условиями на бесконечности (т. е. при  $\|x\| \rightarrow \infty$ ).

**Теорема 20.1.** Пусть на выпуклом замкнутом множестве  $X \subset E^m$  задан с. с. п. в смысле определения 8.1, причем последовательность  $\{\alpha_n\}$  удовлетворяет условию 9.2. Предположим, что случайная последовательность  $\{\xi_n\}$  удовлетворяет условию (9.8) и почти наверное

$$M(\xi_n | x_0, \dots, x_n) = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где  $f(x)$ ,  $x \in X$ , — некоторая неслучайная (векторная) функция, равномерно ограниченная по норме константой  $D$ . Пусть на  $X$  определена неотрицательная дважды непрерывно дифференцируемая функция  $U$ , удовлетворяющая условиям:

а) множество  $m(U)$  нулей функции  $U$  состоит из единственной точки  $x^*$ ;

б) для любого  $\varepsilon > 0$

$$\delta(\varepsilon) \equiv \sup_{x \in X, \|x - x^*\| > \varepsilon} \langle \text{grad } U(x), f(x) \rangle < 0; \quad (20.2)$$

в)  $U(x) \rightarrow \infty, \|x\| \rightarrow \infty, x \in X$ ;

г) норма матрицы вторых производных равномерно ограничена на  $X$ .

Тогда почти наверное  $x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Положим

$$R(x) = \begin{cases} \{r \in E^m : \langle \text{grad } U(x), r \rangle \leq \delta\left(\frac{\|x - x^*\|}{2}\right), \|r\| \leq D\} \\ \text{для } x \in X, x \neq x^*; \\ \{r \in E^m : \|r\| \leq D\} \text{ для } x = x^*, \end{cases}$$

где функция  $\delta(\varepsilon)$  определена в (20.2). Так как  $\delta(\varepsilon)$  есть невозрастающая функция от  $\varepsilon$ , непрерывная справа и  $\text{grad } U(x)$  есть непрерывная вектор-функция от  $x$ , то отображение  $x \rightarrow R(x)$  замкнуто и является отображением типа  $K$ . Из условий теоремы следует, что  $U$  есть функция Ляпунова для отображения  $R$ . Легко проверить, что функция  $U$  удовлетворяет требованиям, которые накладываются на нее в теореме 9.4. Поскольку  $f(x) \in R(x)$ , для последовательности  $\{x_n\}$  выполняются все условия теоремы 9.4 и, следовательно,  $x_n$  п. н. сходится к  $x^*$ . Теорема доказана.

**2. Стохастический градиентный метод.** Большое значение в приложениях благодаря своей простоте имеет

стохастический градиентный метод (см. [27] — [29]). Это — случайный процесс типа

$$x_{n+1} = \pi(x_n + \alpha_n \zeta_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (20.3)$$

где п. н.  $M(\zeta_n | x_0, \dots, x_n) \in \hat{f}(x_n)$ ,  $\hat{f}(x)$  — множество обобщенных градиентов выпуклой вверх функции  $f$  и  $\pi$  — оператор проектирования на множество  $C \subset E^m$ . Процесс (20.3) представляет собой стохастический вариант метода обобщенного градиента (см. § 17). В работах [27] — [29] доказывается, что при тех же условиях, что и детерминированный процесс (17.2), и при выполнении условия (9.2) процесс (20.3) п. н. сходится к множеству  $X^*$  решений задачи максимизации  $[C, f]$ .

Из теорем 8.1 и 9.4 вытекает сходимость к  $X^*$  только простого процесса без проектирования:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \alpha_n \zeta_n, & n &= 0, 1, \dots, \\ M(\zeta_n | x_0, \dots, x_n) &\in \hat{f}(x_n). \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

Такой процесс естественно использовать, если выполняется условие согласования (см. (5.5)):

$$x + r \in C \quad \text{при} \quad r \in \hat{f}(x), \quad x \in C,$$

в частности, для задачи максимизации без ограничений ( $C = E^m$ ).

Для получения сходимости процесса (20.4) с вероятностью единица как следствия из теоремы 9.4 достаточно предположить, что выполняются условия (9.2) и (9.8), и взять

$$U(x) = \frac{1}{2} \rho(x, X^*).$$

Если множество  $C$  ограничено, то теорема 8.1 позволяет, кроме того, гарантировать сходимость процесса (20.4) по вероятности для произвольной правильной последовательности  $\{\alpha_n\}$ , не предполагая выполнения условия (9.2).

**3. Вычисление градиента по значениям функции в узлах случайной сетки.** Рассмотрим одну из возможностей применения стохастического градиентного метода минимизации гладкой функции, важную для теории планирования эксперимента и для оптимизации сложных систем (см. [59]). В практических приложениях часто нет

возможности определять непосредственно градиент минимизируемой функции и приходится вычислять его с помощью той или иной разностной формулы по значениям функции, измеряемым в узлах некоторой сетки. Если размерность пространства аргумента (скажем,  $m$ ) мала, то обычно узлы сетки выбирают, варьируя каждую координату в отдельности, т. е. проводят измерение функции в  $(m+1)$ -й точке. Когда размерность  $m$  относительно велика, то проводить такое число измерений на каждой итерации градиентного спуска может оказаться неэкономным. В этом случае целесообразно применять случайный выбор точек измерения, который позволяет получить случайный вектор с математическим ожиданием, близким к искомому градиенту, при произвольном числе измерений функции, не зависящем от размерности пространства.

Пусть требуется найти градиент функции  $f(x)$ . В качестве случайного аналога градиента может быть взят вектор

$$\zeta_{\Delta}(x) = \frac{1}{K\Delta} \sum_{k=1}^K [f(x + \Delta\theta_k) - f(x)] \theta_k, \quad (20.5)$$

где  $K$  — произвольное натуральное число,  $\Delta$  — положительное число и  $\theta_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) — случайный вектор-столбец с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей вторых моментов<sup>1)</sup>:  $M\theta_k = 0$ ,  $M\theta_k\theta_k^* = E$ .

Предположим, что функция  $f(x)$  дважды дифференцируема на всем пространстве  $E^m$ , и обозначим через  $V(x)$  матрицу ее вторых производных. Тогда

$$\frac{1}{\Delta} [f(x + \Delta\theta_k) - f(x)] = \langle \text{grad } f(x), \theta_k \rangle + \Delta\varphi_k, \quad (20.6)$$

где

$$\varphi_k = \frac{1}{2} \langle \theta_k, V(x + \lambda \Delta\theta_k) \theta_k \rangle, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \sup_{x \in E^m} \|V(x)\| < \infty, \quad \sup_{x \in E^m} \|\text{grad } f(x)\| < \infty, \\ \sup_k \|M(\varphi_k \theta_k)\| = d < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (20.7)$$

<sup>1)</sup> Символ \* здесь означает транспонирование.

Из (20.5), (20.6) имеем

$$\zeta_{\Delta}(x) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [\langle \text{grad } f(x), \theta_k \rangle \theta_k + \Delta \varphi_k \theta_k],$$

$$r(x) = M \zeta_{\Delta}(x) = \text{grad } f(x) + \Delta M(\varphi_k \theta_k).$$

Векторы  $\theta_k$  естественно предполагать ограниченными. Тогда, как легко проверить, выполняется условие (9.8)

$$\sup_{x \in E^m} M \|\zeta_{\Delta}(x)\|^2 < \infty.$$

Рассмотрим процесс

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \zeta_{\Delta}(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (20.8)$$

где  $\{\alpha_n\}$  — правильная последовательность с условием (9.2). В области

$$G_{\Delta} = \{x \in E^m : \|\text{grad } f(x)\| > \Delta d\},$$

где  $d$  — константа, определенная в (20.7), выполняется условие

$$\langle r(x), \text{grad } f(x) \rangle > 0.$$

Поэтому, выбирая в качестве индикатрисы функцию

$$U_{\Delta}(x) = [\max(f(x) - \delta_{\Delta}, 0)]^2,$$

где  $\delta_{\Delta} = \sup_{x \notin G_{\Delta}} f(x)$ , и предполагая, что  $f(x)$  неограниченно

возрастает при  $\|x\| \rightarrow \infty$ , получим ситуацию, полностью удовлетворяющую условиям теоремы 9.4. Поэтому при любом  $\Delta > 0$  процесс (20.8) сходится к множеству  $m(U_{\Delta}) = \{x \in E^m : f(x) \leq \delta_{\Delta}\}$  почти наверное. Пусть множество  $G_0 = \{x \in E^m : \text{grad } f(x) = 0\}$  совпадает с множеством

$$X^* = \text{Arg min}_{x \in E^m} f(x).$$

Тогда  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta} = \min_x f(x)$  и  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} m(U_{\Delta}) = X^*$ . Предусматривая достаточно медленное стремление  $\Delta$  к нулю с ростом номера итерации, можно добиться сходимости  $x_n$  к множеству  $X^*$ .

**Замечание 1.** Заметим, что формулу (20.5) можно использовать и при  $K = 1$ . Однако увеличение  $K$  приводит к сокращению разброса вектора  $\zeta_{\Delta}$  вокруг математи-

ческого ожидания. Если векторы  $\theta_k$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) взаимно независимы и одинаково распределены, то

$$M \|\zeta_{\Delta}\|^2 = \frac{\text{const}}{K}.$$

**Замечание 2.** Выше был рассмотрен случай, когда значение функции в каждой точке может быть измерено без ошибки. Предположим теперь, что при измерении функции в точке  $x$  допускается чисто случайная ошибка  $\xi(x)$  ( $M\xi(x)=0$ ), т. е. наблюдается значение  $f(x) + \xi(x)$ , причем ошибки  $\xi(x)$  при разных измерениях независимы между собой и не зависят от величин  $\theta_k$ , используемых при построении случайного аналога градиента. Тогда в качестве случайного аналога градиента берется вектор

$$\zeta'_{\Delta}(x) = \frac{1}{K\Delta} \sum_{k=1}^K [f(x + \Delta\theta_k) + \xi(x + \Delta\theta_k) - f(x) - \xi(x)]\theta_k. \quad (20.9)$$

Очевидно,

$$M\zeta'_{\Delta}(x) = M\zeta_{\Delta}(x),$$

где  $\zeta_{\Delta}(x)$  определяется формулой (20.5).

Заметим для дальнейшего, что случайные ошибки  $\xi(x)$  и  $\zeta'_{\Delta}(x) - M\zeta'_{\Delta}(x)$  в определении функции и ее градиента не коррелированы между собой. Действительно,

$$\begin{aligned} M[\xi(\zeta'_{\Delta} - M\zeta'_{\Delta})] &= M[\xi(\zeta_{\Delta} - M\zeta_{\Delta})] + \\ &+ \frac{1}{K\Delta} \sum_{k=1}^K M(M[\xi(x)(\xi(x + \Delta\theta_k) - \xi(x))|\theta_k]\theta_k). \end{aligned} \quad (20.10)$$

Поскольку  $\zeta_{\Delta}$  и  $\xi$  независимы,  $M[\xi(\zeta_{\Delta} - M\zeta_{\Delta})] = 0$ . Кроме того,

$$M[\xi(x)(\xi(x + \Delta\theta_k) - \xi(x))|\theta_k] = -M\xi^2(x).$$

Поэтому все слагаемые под знаком суммы в правой части равенства (20.10) равны нулю, т. е. ошибки  $\xi$  и  $\zeta'_{\Delta} - M\zeta_{\Delta}$  в определении функции  $f$  и ее градиента не коррелированы.

## § 21. Минимизация сложной функции

Рассмотрим задачу минимизации сложной функции при условии, что для каждого значения аргумента можно определить значение функции и ее градиента только со случайной ошибкой.

В [65] показано, что к такой задаче сводятся многие проблемы теории обучающихся систем. Для ее решения предлагается алгоритм градиентного типа [65], §§ 2.7, 2.8, который может быть использован для построения процессов обучения. К сожалению, условия сходимости алгоритма и доказательство его сходимости в работе не приводятся. По-видимому, общих условий типа выпуклости и гладкости функций недостаточно для сходимости этого алгоритма (возможно возникновение циклов).

Ниже для решений той же задачи предлагается несколько отличный градиентный процесс и доказывается его глобальная сходимость к решению в важном частном случае. В общем случае на основе модифицированного градиентного метода нахождения условного экстремума строится алгоритм, обладающий локальной сходимостью.

**1. Постановка задачи.** Задача состоит в минимизации сложной функции без ограничений, причем для каждого значения аргумента можно определить (со случайной ошибкой) значение функции и ее градиента. Пусть  $Q(y) = \{Q_1(y), \dots, Q_r(y)\}$  — векторная функция;  $\nabla Q(y)$  — матрица ее производных:  $\nabla Q(y) = \left| \frac{\partial Q_i(y)}{\partial y_j} \right|$ ;  $\Phi(Q, y)$  — скалярная функция;  $\nabla \Phi(Q, y) = (\nabla_Q \Phi, \nabla_y \Phi)$  — ее градиент. Требуется найти  $\text{Arg} \min_{y \in E^m} \Phi(Q(y), y)$  по наблюдениям случайных величин:  $Q(y) + \omega$ ,  $\nabla Q(y) + \eta$ ,  $\Phi(Q, y) + \nu$ ,  $\nabla \Phi(Q, y) + \mu$ . Предполагается, что последовательность случайных ошибок  $(\omega_n, \eta_n, \nu_n, \mu_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , удовлетворяет условию, аналогичному условию (8.4):

$$M \{ \omega_n, \eta_n, \nu_n, \mu_n \mid (\omega_k, \eta_k, \nu_k, \mu_k), k < n \} = 0, \quad (21.1)$$

и, кроме того, что векторы  $\omega_n$  и  $\eta_n$  при любом  $n$  не коррелированы между собой:

$$M \{ \langle \omega_n, \eta_n \rangle \mid (\omega_k, \eta_k, \nu_k, \mu_k), k < n \} = 0. \quad (21.2)$$

В замечании на стр. 165 было показано, что условие (21.2) соблюдается при использовании формулы (20.7) со случайным выбором точек измерения. Это верно, очевидно, не только для скалярной, но и для векторной функции  $f(x)$  и матрицы ее производных  $\nabla f(x)$ , если ошибки измерения разных ее компонент независимы друг от друга.

2. Алгоритм в простейшем случае. Сначала приведем алгоритм для решения описанной задачи при дополнительном предположении<sup>1)</sup>, что функция  $\Phi(Q, y)$  не зависит явно от  $y$ . Заметим, что сформулированная задача эквивалентна задаче минимизации функции

$$U(q, y) = \Phi(q) + \frac{1}{2} |Q(y) - q|^2.$$

Теперь для решения задачи может быть применен метод стохастического градиента типа (20.4):

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - \alpha_n [Q(y_n) + \omega_n - q_n] [\nabla Q(y_n) + \eta_n], \\ q_{n+1} &= q_n - \alpha_n [\nabla \Phi(q_n) + \mu_n - Q(y_n) - \omega_n + q_n]. \end{aligned}$$

Для доказательства сходимости может быть использована теорема 9.4.

Обозначим

$$\begin{aligned} x &= (y, q), \quad r(x) = -\operatorname{grad} U(x) = \\ &= (-[Q(y) - q] \nabla Q(y), Q(y) - q - \nabla \Phi(q)), \\ \xi_n &= -(\nabla Q(y_n) \omega_n + [Q(y_n) - q_n] \eta_n + \omega_n \eta_n, \mu_n - \omega_n). \end{aligned}$$

Условие (8.4) следует из предположений (21.1) и (21.2). Накладывая соответствующие условия на функции  $\Phi(q)$  и  $Q(y)$ , а также предполагая ограниченность моментов случайных ошибок  $\eta, \mu, \omega$ , легко удовлетворить всем требованиям теоремы 9.4 и обеспечить сходимость процесса к решению задачи.

3. Нахождение минимума с условием в виде равенства. К сожалению, для общего случая, когда функция  $\Phi(Q, y)$  явно зависит от  $y$ , такой метод не может быть применен, поскольку  $\min \Phi(Q(y), y)$  может, вообще говоря, не совпадать с  $\min_{(q, y)} \left[ \Phi(q, y) + \frac{1}{2} |Q(y) - q|^2 \right]$ .

В общем случае можно использовать стохастический вариант модифицированного градиентного метода нахождения условного минимума

$$(q^*, y^*) = \arg \min_{Q(y) - q = 0} \Phi(q, y).$$

Его детерминированный вариант предложен в работе [69],

<sup>1)</sup> В таком виде задача была предложена Д. Б. Юдиным.

гл. XI, § 4. Запишем задачу в более общем виде:

$$\left. \begin{aligned} f(y) \rightarrow \min, \\ g(y) = 0, \quad y \in E^N, \quad g \in E^m, \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

и обозначим через  $y^*$  ее решение. Метод состоит в использовании дифференциальных уравнений градиентного процесса для отыскания седловой точки функции

$$\varphi(y, p, \lambda) = f(y) - \frac{\lambda}{2} \|g(y)\|^2 + \langle p, g(y) \rangle, \quad \lambda > 0,$$

которая также дает решение задачи (21.3). Другими словами, предлагается использовать уравнение

$$\frac{dx}{dt} = r(x) \quad (21.4)$$

при  $x = (y, p)$ ,  $r(x) = (f_y(y) - \lambda g(y) g_y(y) + p g_y(y), -g(y))$ , где  $f_y(y) = \text{grad } f(y)$ ,  $g_y(y)$  — матрица  $\left| \frac{\partial g_i(y)}{\partial y_j} \right|$ . Предполагается, что функции  $f(y)$  и  $g(y)$  дважды непрерывно дифференцируемы и что точка  $y^*$  условного максимума является изолированной и регулярной, т. е. что для любого вектора  $z$ , удовлетворяющего условиям

$$g_y(y^*) z = 0, \quad z \neq 0,$$

квадратичная форма отрицательна:  $\langle f_{yy}(y^*) z, z \rangle < 0$  (здесь  $f_{yy}(y)$  есть матрица вторых производных  $\left| \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_i \partial y_j} \right|$ ). Кроме этого никаких условий выпуклости на функции  $f(y)$  и  $g(y)$  не накладывается. При этих условиях доказывается, что при достаточно больших значениях  $\lambda$  матрица  $\varphi_{yy}(y^*, p^*, \lambda)$  отрицательно определена.

В силу непрерывности существуют  $\varepsilon > 0$  и некоторая окрестность  $O_\varepsilon$  точки  $y^*$  такие, что  $\langle \varphi_{yy}(y, p^*, \lambda) z, z \rangle < -\varepsilon \|z\|^2$  при  $y \in O_\varepsilon$ . Поэтому для  $U(x) = \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2$  и  $y \in O_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \langle r(x), \text{grad } U(x) \rangle &= \langle f_y(y) - \lambda g(y) g_y(y) + p g_y(y), y - y^* \rangle + \\ &+ \langle -g(y), p - p^* \rangle = \langle f_y(y) - \lambda g(y) g_y(y) + \\ &+ p^* g_y(y), y - y^* \rangle + \langle p - p^*, g_y(y) (y - y^*) - g(y) \rangle \leq \\ &\leq -\varepsilon \|y - y^*\|^2 + \|p - p^*\| \sup_{\substack{y \in O_\varepsilon, \\ z \neq 0}} \frac{\langle g_{yy}(y) z, z \rangle}{\|z\|^2} \|y - y^*\|^2. \end{aligned}$$

При достаточно малой величине  $\|p - p^*\|$  правая часть неравенства становится меньше  $-\frac{\varepsilon}{2} \|y - y^*\|^2$ . Следовательно, соблюдается условие типа (7.4) (условие положительной ориентированности поля), обеспечивающее локальную сходимость (в некоторой окрестности седловой точки) траекторий уравнения (21.4).

Доказательство локальной сходимости конечноразностного аналога уравнения (21.4) при тех же требованиях к функциям  $f(y)$  и  $g(y)$  и при условии (9.2) можно получить с помощью теоремы 9.1. Как только что было показано, условие положительной ориентированности поля  $r$  выполняется в некоторой окрестности седловой точки  $(y^*, p^*)$ . Остальные условия теоремы 9.1 проверяются тривиально. Следовательно, при начальных значениях  $y_0$  и  $p_0$ , достаточно близких к  $y^*$  и  $p^*$ , и при достаточно малом  $\varepsilon$

$$y_n \rightarrow y^*, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для доказательства локальной сходимости в стохастическом варианте необходимо дополнительно потребовать, чтобы случайные ошибки в определении функций  $f(y)$  и  $g(y)$  и их производных обладали равномерно ограниченной дисперсией. Тогда будет выполнено условие (9.8) и применима теорема 9.3. Согласно этой теореме, если начальное распределение пары  $(y_0, p_0)$  сосредоточено в достаточно малой окрестности точки  $(y^*, p^*)$ , то, выбирая  $A$  достаточно малым, получаем сходимость  $y_n \rightarrow y^*$  с вероятностью, как угодно близкой к единице.

## ГЛАВА VIII

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ  
И ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Здесь будут описаны некоторые итеративные алгоритмы для решения общей задачи линейного программирования, а также алгоритмы для решения симметричной матричной игры (игры с кососимметрической матрицей). Теоретическая основа методов, реализуемых во всех алгоритмах, изложена в разделе первом.

§ 22. Представление общей задачи линейного программирования как задачи минимизации неотрицательной линейно-квадратичной формы.  
Алгоритм «Заяц»

1. Игровая формулировка задачи линейного программирования. Рассмотрим общую задачу линейного программирования

Задача I.

$$\begin{aligned} Ax &\leq b, & pA &\geq c, \\ \langle c, x \rangle &\rightarrow \max, & \langle p, b \rangle &\rightarrow \min, \\ x &\geq 0; & p &\geq 0. \end{aligned}$$

(Эта задача объединяет пару двойственных задач.) Известно (см. § 14), что решение задачи I эквивалентно нахождению седловой точки функции Лагранжа

$$L(x, p) = \langle c, x \rangle + \langle p, b \rangle - \langle p, Ax \rangle$$

в области  $x \geq 0, p \geq 0$ . Пусть размерности векторов  $x$  и  $p$  равны соответственно  $n$  и  $m$ . Функцию  $L$  можно рассматривать как функцию выигрыша в игре двух лиц: максимизирующего игрока  $I_x$ , обладающего стратегиями  $x \in E_+^n$

(т. е.  $x \in E^n$ ,  $x \geq 0$ ), и минимизирующего игрока  $I_p$ , обладающего стратегиями  $p \in E_+^m$ . Точка равновесия в этой игре и будет седловой точкой функции  $L$ .

Однако прямое применение игровых методов здесь неправомерно, так как множества стратегий игроков не ограничены. Применение итеративных игровых методов становится возможным, если «обрезать» множества стратегий, приняв дополнительные ограничения:

$$x \leq \xi, \quad p \leq \eta, \quad (22.1)$$

где  $\xi \in E_+^n$ ,  $\eta \in E_+^m$  — некоторые фиксированные векторы, выбираемые априорно. При этом оптимальным ответом игрока  $I_x$  на стратегию  $p$  игрока  $I_p$  будет стратегия  $\hat{x}(p)$ , определяемая так:

$$\hat{x}_j(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } (pA - c)_j \geq 0, \\ \xi_j, & \text{если } (pA - c)_j < 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

а оптимальным ответом игрока  $I_p$  на стратегию  $x$  игрока  $I_x$  будет стратегия  $\hat{p}(x)$ , где

$$\hat{p}_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (Ax - b)_i \leq 0, \\ \eta_i, & \text{если } (Ax - b)_i > 0. \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Таким образом, принятие ограничений (22.1) позволяет построить игровой итеративный процесс

$$\left. \begin{aligned} x^{k+1} &= (1 - \alpha_k) x^k + \alpha_k \hat{x}(p^k), \\ p^{k+1} &= (1 - \alpha_k) p^k + \alpha_k \hat{p}(x^k), \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, \quad (22.2)$$

который будет сходиться к множеству оптимальных стратегий, если выполнены необходимые условия на последовательность  $\alpha_k$ . Однако для того, чтобы предельные точки последовательности (22.2) (которые всегда существуют) давали решение исходной задачи, необходимо, чтобы исходная задача была разрешима и при этом имела решение, удовлетворяющее ограничениям (22.1).

Если априорные ограничения (22.1) слишком жестки, то мы получим игру, не эквивалентную исходной задаче. Поэтому во избежание ошибки приходится брать  $\xi$  и  $\eta$  в (22.1) достаточно большими. Как показывает опыт расчетов, это приводит к снижению скорости сходимости. Наилучшими с этой точки зрения оказываются границы

$$\xi \approx \sigma \bar{x}, \quad \eta \approx \sigma \bar{p}, \quad 1 < \sigma < 3, \quad (22.3)$$

где  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$  — решение исходной задачи (которая предполагается разрешимой).

Соотношение (22.3) можно объяснить следующим рассуждением. Когда границы намного превосходят решение, то при достаточно заметных значениях  $\alpha$  происходят сильные колебания, а при малых  $\alpha$  процесс идет слишком медленно. Если же граница слишком близка к решению, то возникает неустойчивость из-за неединственности при выборе наилучших вариантов. Поясним это подробнее.

**2. Сведение к задаче минимизации линейно-квадратичной формы.** Исходная задача с ограничениями (22.1) формально должна записываться как следующая пара двойственных задач линейного программирования:

Задача II.

$$\begin{aligned} Ax - y &\leq b, & pA + q &\geq c, \\ x &\leq \xi, & p &\leq \eta, \\ \varphi = \langle c, x \rangle - \langle \eta, y \rangle &\rightarrow \max, & \psi = \langle p, b \rangle + \langle q, \xi \rangle &\rightarrow \min, \\ x, y &\geq 0; & p, q &\geq 0. \end{aligned}$$

Здесь дополнительные неизвестные  $y$  и  $q$  имеют смысл невязок, а добавочные члены в критериях интерпретируются как штрафы за нарушение ограничений. Отсюда видно, что если  $\xi > \bar{x}$  и  $\eta > \bar{p}$ , то решением этой задачи будет только  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$ ,  $y = 0$ ,  $q = 0$  (для простоты изложения предполагаем, что решение исходной задачи единственно, однако это несущественно); если же, например,  $\eta = \bar{p}$ , то наряду с основным решением могут возникать и побочные решения с  $y \neq 0$ , что легко заметить, если учесть, что  $y$  — это оценки для ограничений  $p \leq \eta$  в двойственной задаче. Содержательно это означает, что при  $\eta = \bar{p}$  штраф  $\langle \eta, y \rangle$  за нарушение ограничений  $Ax \leq b$  оказывается равным выгоде, получаемой в результате этого нарушения, т. е. соответствующему увеличению линейной формы  $\langle c, x \rangle$ .

Заметим теперь, что в задаче II дополнительные переменные  $y$  и  $q$  могут быть явно выражены через  $x$  и  $p$ . Действительно, при данных  $x$  и  $p$

$$\left. \begin{aligned} y &= y(x) \equiv \max(Ax - b, 0), \\ q &= q(p) \equiv \max(-pA + c, 0) \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

будут наилучшими с точки зрения критериев. Поэтому задачу II можно записать в форме:

## Задача III.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \langle c, x \rangle - \langle \eta, y(x) \rangle \rightarrow \max, \\ & 0 \leq x \leq \xi; \\ \psi(p) &= \langle p, b \rangle + \langle q(p), \xi \rangle \rightarrow \min, \\ & 0 \leq p \leq \eta, \end{aligned}$$

где  $y(x)$  и  $q(p)$  определены в (22.4).

В итеративном процессе (22.2) на каждом шаге производится подсчет критериев  $\varphi$  и  $\psi$  в той форме, как они записаны в задаче III, по ним производится отбор (запоминание) наилучших состояний и проверяется условие окончания процесса

$$\psi - \varphi < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — требуемая точность вычислений; отметим, что при любых допустимых  $x$  и  $p$

$$\psi(p) \geq \varphi(x).$$

Возвращаясь к обоснованию соотношений (22.3), можно теперь сказать, что когда граница близка к решению, то при отборе наилучших состояний можно получить ложное побочное решение. Кроме того, сам процесс также оказывается замедленным.

Итак, желательно подобрать границы  $\xi$  и  $\eta$  так, чтобы выполнялись соотношения (22.3). Но  $x$ ,  $p$  нам не известны априори. Поэтому откажемся от постоянства  $\xi$  и  $\eta$  в итеративном процессе и будем считать их тоже переменными. Наложим на них условия:

$$\xi \geq \sigma x, \quad \eta \geq \sigma p, \quad 1 < \sigma < 3, \quad (22.5)$$

$$\xi \geq \tau e_n, \quad \eta \geq \tau e_m, \quad \tau > 0. \quad (22.6)$$

Здесь  $e_n \in E^n$ ,  $e_m \in E^m$  — векторы с единичными компонентами. Смысл параметра  $\sigma$  был уже выяснен выше; параметр  $\tau$  имеет смысл минимальной величины штрафа в критериальных функциях  $\varphi(x)$  и  $\psi(p)$ . Ясно, что все штрафы должны быть строго положительны.

Отказавшись от постоянства  $\xi$  и  $\eta$  и заменив условия

$$0 \leq x \leq \xi, \quad 0 \leq p \leq \eta$$

на (22.5), (22.6), мы от пары двойственных задач линейного программирования III приходим к одной задаче нелинейного программирования. Сформулируем ее строго.

Задача IV. Минимизировать функцию переменных  $z = \{x, p, \xi, \eta\}$

$$\delta(z) = \underbrace{[\langle p, b \rangle + \langle q(p), \xi \rangle]}_{\psi(p, \xi)} - \underbrace{[\langle c, x \rangle - \langle \eta, y(x) \rangle]}_{\varphi(x, \eta)}$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0, \quad \xi \geq \sigma x, \quad \xi \geq \tau e_n, \\ p \geq 0, \quad \eta \geq \sigma p, \quad \eta \geq \tau e_m. \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

Здесь  $q(p)$  и  $y(x)$  определяются равенствами (22.4).

3. Связь с исходной задачей. Установим некоторые свойства задачи IV и ее связь с исходной задачей (22.1).

Лемма 22.1. При любом допустимом  $z$

$$\delta(z) \geq 0.$$

Доказательство следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \delta &\geq \langle p, Ax - y \rangle + \langle q, \xi \rangle - \langle c, x \rangle + \langle \eta, y \rangle = \\ &= \langle pA - c, x \rangle + \langle \eta - p, y \rangle + \langle q, \xi \rangle \geq \\ &\geq \langle q, \xi - x \rangle + \langle \eta - p, y \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (22.8)$$

Из леммы 22.1 следует, что задача IV всегда разрешима, так как функционал  $\delta(z)$  ограничен снизу и допустимое множество, очевидно, не пусто.

Лемма 22.2. Имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^n q_j + \sum_{i=1}^m y_i \leq \frac{\delta}{\tau(1-1/\sigma)}. \quad (22.9)$$

Доказательство. Пусть  $\xi$  и  $x$  — скаляры (одномерные векторы), удовлетворяющие условиям допустимости (22.7). Тогда

$$\xi - x \geq (\sigma - 1)x, \quad \xi - x \geq \tau - x,$$

т. е.

$$\xi - x \geq \max [(\sigma - 1)x, \tau - x] \equiv f(x).$$

График функции  $f(x)$  изображен на рис. 2. В точке  $x = \tau/\sigma$  функция  $f(x)$  имеет минимум, равный

$$\frac{\sigma-1}{\sigma} \tau = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \tau.$$

Следовательно,

$$\xi - x \geq \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \tau \text{ при любом } x.$$

Применяя это рассуждение к каждой компоненте векторов  $\xi - x$  и  $\eta - p$ , получим из (22.8) неравенство

$$\delta \geq \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \tau \left[ \sum_{j=1}^n q_j + \sum_{i=1}^m y_i \right],$$

которое приводит к (22.9).

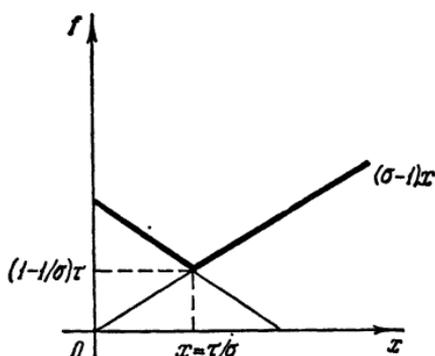


Рис. 2.

**Лемма 22.3.** Пусть задача I имеет решение  $(\bar{x}, \bar{p})$ , и оптимальное значение ее функционала равно  $\Phi$ . Тогда при  $\xi \geq \bar{x}$  и  $\eta \geq \bar{p}$  имеют место неравенства

$$\varphi \leq \Phi \leq \psi, \quad (22.10)$$

$$\left| \Phi - \frac{\varphi + \psi}{2} \right| \leq \frac{\delta}{2}. \quad (22.11)$$

**Доказательство.** Неравенство (22.11) следует из (22.10), так как  $\delta = \psi - \varphi$ . Правая часть неравенства (22.10) следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \psi &= \langle p, b \rangle + \langle q, \xi \rangle \geq \langle p, A\bar{x} \rangle + \langle q, \bar{x} \rangle + \langle q, \xi - \bar{x} \rangle = \\ &= \langle pA + q, \bar{x} \rangle + \langle q, \xi - \bar{x} \rangle \geq \langle c, \bar{x} \rangle + \langle q, \xi - \bar{x} \rangle = \\ &= \Phi + \langle q, \xi - \bar{x} \rangle \end{aligned}$$

и условия  $\xi \geq \bar{x}$ . Аналогично устанавливается справедливость и левой части неравенства (22.10).

Заметим теперь, что в задаче IV можно считать  $\delta$  функцией только от  $x$  и  $p$ , если положить

$$\xi = \xi(x) = \max(\sigma x, \tau e_n), \quad \eta = \eta(p) = \max(\sigma p, \tau e_m).$$

Положим  $\delta(x, p) = \delta(x, p, \xi(x), \eta(p))$ . Имеет место

**Теорема 22.1.** *Задача I разрешима тогда и только тогда, когда  $\min \delta(x, p) = 0$ . При этом множества решений задач I и IV совпадают.*

**Доказательство.** Пусть  $\bar{x}, \bar{p}$  — решение задачи I. Тогда  $y(\bar{x}) = 0$  и  $q(\bar{p}) = 0$ , поэтому

$$\delta(\bar{x}, \bar{p}) = \langle \bar{p}, b \rangle - \langle c, \bar{x} \rangle = 0,$$

т. е.  $\bar{x}, \bar{p}$  — решение задачи IV (в силу леммы 22.1), причем

$$\min \delta(x, p) = \delta(\bar{x}, \bar{p}) = 0.$$

Обратно, пусть  $\tilde{x}, \tilde{p}$  — решение задачи IV и  $\delta(\tilde{x}, \tilde{p}) = 0$ . Тогда в силу леммы 22.2  $q(\tilde{p}) = 0$  и  $y(\tilde{x}) = 0$ , т. е.  $\tilde{x}, \tilde{p}$  допустимы для задачи I. Далее, так как

$$\delta(\tilde{x}, \tilde{p}) = \langle \tilde{p}, b \rangle - \langle c, \tilde{x} \rangle = 0,$$

то  $\langle \tilde{p}, b \rangle = \langle c, \tilde{x} \rangle$  и, следовательно,  $\tilde{x}, \tilde{p}$  — решение задачи I (см. [36], стр. 153).

**4. Алгоритм «Заяц».** Из теоремы 22.1 следует, что если исходная задача I разрешима, то она эквивалентна задаче IV. Это фактически одна и та же задача в двух формах. Свойства задачи IV позволяют предположить для ее решения алгоритм «Заяц», схема которого представлена на рис. 3 (предполагается, что задача I разрешима).

На рис. 3

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \max(\sigma x, \tau e_n), & \eta(p) &= \max(\sigma p, \tau e_m), \\ \varphi(x, \eta) &= \langle c, x \rangle - \langle \eta, y \rangle, & y &= \max(Ax - b, 0), \\ \psi(p, \xi) &= \langle p, b \rangle - \langle q, \xi \rangle, & q &= \max(c - pA, 0), \\ \hat{x}_j(p) &= \begin{cases} 0, & \text{если } q_j = 0, \\ \xi_j, & \text{если } q_j > 0, \end{cases} & j &= 1, 2, \dots, n, \\ \hat{p}_i(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } y_i = 0, \\ \eta_i, & \text{если } y_i > 0, \end{cases} & i &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

$k$  — счетчик числа итераций.

В алгоритме «Заяц» различаются две стадии работы, разделяемые параметром  $\hat{\alpha}$ . При  $\alpha \geq \hat{\alpha}$  идет чистый игровой процесс, описанный в п. 1, при этом границы  $\xi$  и  $\eta$  постоянны и равны  $\xi_0, \eta_0$ . Начальные данные  $x_0, p_0$  этого процесса вводятся. Последовательность шагов  $\alpha_k$  определяется параметром  $L$  — шаг остается постоянным (равным  $\alpha$ )

## Алгоритм «Заяц»

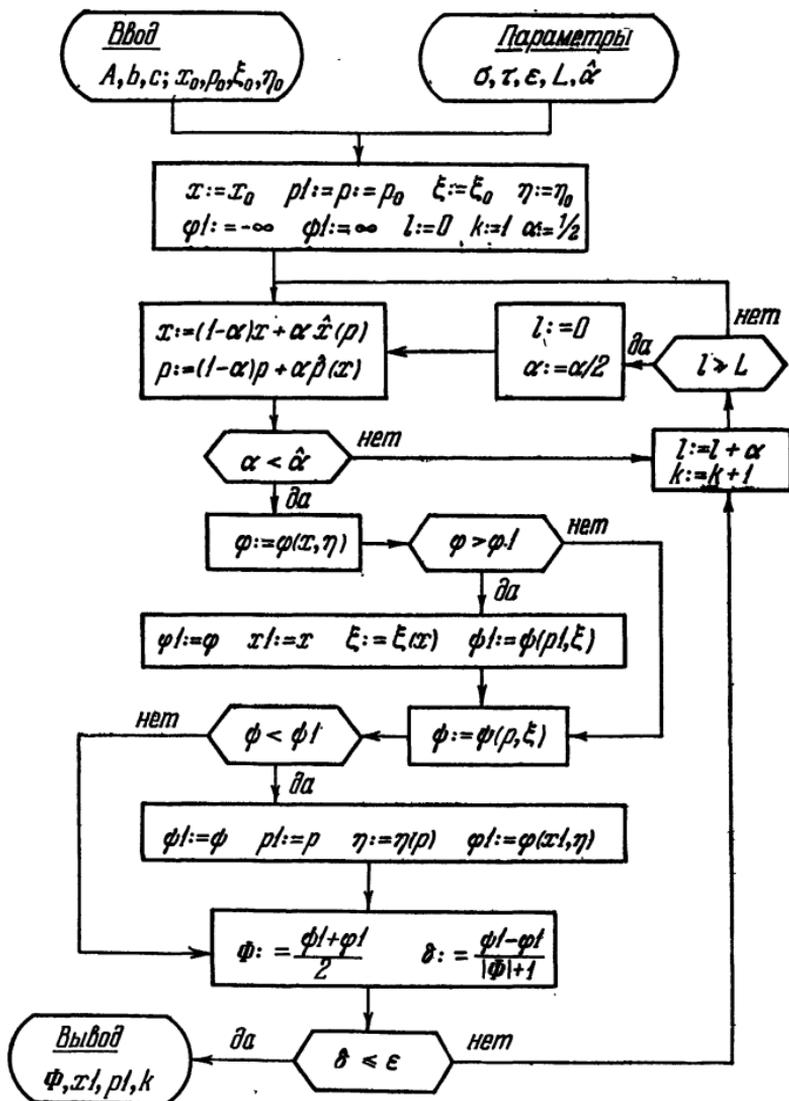


Рис. 3.

на отрезках пути длиной  $L$ , т. е. в течение  $s$  итераций, где  $sa = L$ . Как только очередной отрезок  $L$  оказывается пройденным, шаг делится пополам. Такая политика выбора удовлетворяет необходимым требованиям (см. условия (5.2)). Начальное значение  $\alpha$  берется равным  $1/2$ . Практика экспериментальных расчетов показала, что в общем случае этот выбор наиболее удовлетворителен.

Значения  $x$  и  $p$ , полученные в результате итеративного процесса на первой стадии расчетов, должны давать некоторое приближение к оптимальному решению  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$ . С этими данными входим во вторую стадию ( $\alpha < \hat{\alpha}$ ), где процесс идет уже с достаточно малыми шагами. Границы  $\xi$ ,  $\eta$  на второй стадии становятся переменными. На каждом шаге производится сравнение достигнутого состояния с наилучшим из предыдущих ( $x_1$ ,  $p_1$ ,  $\phi_1$ ,  $\psi_1$ ). В случае, если достигнутое состояние лучше, оно запоминается и пересчитываются границы  $\xi$ ,  $\eta$ . Подчеркнем, что в промежутках между моментами улучшений  $\xi$ ,  $\eta$  остаются постоянными.

Представление исходной задачи в форме IV удобно именно тем, что функция  $\delta(x, p)$  определена для любых неотрицательных  $x$  и  $p$  и, будучи понимаема как мера отклонения от оптимума, она дает возможность производить отбор наилучших состояний, возникающих в течение итеративного процесса, *безотносительно к тому, являются эти состояния допустимыми для задачи I или нет.*

Леммы 22.1—22.3 позволяют интерпретировать функцию  $\delta(x_1, p_1) = \psi_1 - \phi_1$  как меру отклонения состояния  $(x_1, p_1)$  от оптимального. При этом неравенство (22.9) дает явную оценку невязок  $y$  и  $q$  в зависимости от  $\delta$ , а неравенство (22.11) — оценку отклонения по критерию.

Имеется тесная связь между функцией  $\delta(x, p)$  и функцией Ляпунова  $U(x, p)$ , введенной в главе III.

Действительно, как уже отмечалось в п. 1, введя ограничения (22.1), мы свели задачу линейного программирования к игре двух игроков  $I_x$  и  $I_p$  с множествами стратегий

$$0 \leq x \leq \xi \quad \text{и} \quad 0 \leq p \leq \eta \quad (\xi, \eta - \text{постоянные})$$

и функцией выигрыша

$$L(x, p) = \langle c, x \rangle + \langle p, b \rangle - \langle p, Ax \rangle.$$

Если теперь симметризовать игру так, как это описано

в § 10, п. 5, т. е. построить функцию

$$\Phi(x', p'; x, p) = L(x', p) - L(x, p')$$

и затем функцию (см. (11.2))

$$U(x, p) = \max_{\substack{0 \leq x' \leq \xi \\ 0 \leq p' \leq \eta}} \Phi(x', p'; x, p),$$

то окажется, что

$$U(x, p) = \delta(x, p, \xi, \eta).$$

Это по-новому освещает тот факт, что функция  $\delta$  может служить мерой отклонения от оптимума. Однако при построении функции  $U$  предполагается, что  $\xi$  и  $\eta$  известны и постоянны. Как показывает последнее равенство, функция  $U$  фактически является функцией также и от  $\xi$  и  $\eta$ . Функция же  $\delta$  зависит только от  $x$  и  $p$ .

Поскольку приводимая здесь интерпретация функции  $\delta$  справедлива при постоянных границах  $\xi$  и  $\eta$ , то согласно теореме 11.2 итеративный процесс при фиксированных  $\xi$  и  $\eta$  должен вести к уменьшению  $\delta$ . В моменты же уменьшения  $\delta$  происходит изменение границ. Если исходная задача I разрешима, то рано или поздно наступит такой момент, когда оптимальная точка  $(\bar{x}, \bar{p})$  будет «охвачена» границами  $\xi, \eta$ , так как на протяжении всей второй стадии процесса выполняются условия

$$\xi = \xi(x_1) > \sigma x_1; \quad \eta = \eta(p_1) > \sigma p_1,$$

причем  $\sigma > 1$ . Когда границы «захватят» точку  $(\bar{x}, \bar{p})$ , процесс начнет сходиться к этой точке, т. е. к решению.

Если же задача I не имеет решения, то процесс будет сходиться к точке  $(\tilde{x}, \tilde{p})$ , минимизирующей функцию  $\delta(x, p)$ , т. е. дающей решение задачи IV. Однако при этом всегда  $\delta(x, p) \geq \delta(\tilde{x}, \tilde{p}) > 0$ . Описанный выше алгоритм в этом случае заикнется. Можно было бы дать то или иное расширение алгоритма, предусматривающее возможность отсутствия решения у задачи I. Мы, однако, не будем на этом останавливаться.

**5. Вычислительные эксперименты.** Вычислительные эксперименты, проведенные по алгоритму «Заяц», показали его надежную и быструю работу, когда требуемая точность  $\varepsilon$  невелика, скажем,  $\varepsilon \approx 0,01$ . При увеличении

точности до  $10^{-3}$  число итераций резко растет. Это вполне соответствует уже сложившейся точке зрения (см., например, [21]), что число итераций  $N(\varepsilon)$  в итеративных методах решения задачи линейного программирования обратно пропорционально  $\varepsilon$ :

$$N(\varepsilon) \approx \frac{\text{const}}{\varepsilon}.$$

Напротив, от размерности задачи величина  $N$  зависит слабо. Этот вывод подтверждается как практикой расчетов модельных примеров  $4 \times 6$ ,  $5 \times 50$ ,  $16 \times 32$ , так и расчетами реальных задач ( $103 \times 81$ , см. также главу IX).

Попытки добиться ускорения сходимости путем модификаций основной итеративной процедуры (22.2) не привели к успеху. Рассматривалась, в частности, такая модификация.

При  $\sigma = 2$ , точнее, при  $\xi = 2x$ , формулу пересчета (22.2) можно записать в виде

$$x_j^{k+1} = \begin{cases} (1 - \alpha_k) x_j^k & \text{при } (p^k A - c)_j \geq 0, \\ (1 + \alpha_k) x_j^k & \text{при } (p^k A - c)_j < 0 \end{cases} \quad (22.2')$$

(и аналогично для двойственных переменных). Эта формула была заменена другой:

$$x_j^{k+1} = \begin{cases} (1 - \alpha_k) x_j^k, & \text{если } (p^k A - c)_j \geq 0, \\ & (\hat{p}(x^k) A - c)_j \geq 0, \\ (1 + \alpha_k) x_j^k, & \text{если } (p^k A - c)_j < 0, \\ & (\hat{p}(x^k) A - c)_j < 0, \\ x_j^k & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (22.2'')$$

Формула (22.2'') определяет переход от  $x^k$  к  $x^{k+1}$ , исходя из сопоставления тенденций (т. е. по результатам «голосования» текущего двойственного вектора  $p^k$  и оптимального ответа  $\hat{p}(x^k)$  на текущий вектор  $x^k$ ). Эта модификация показала хорошие результаты для задач специальной структуры (см. главу IX), однако в задачах общего вида не привела к сокращению времени счета и в силу более сложной реализации была отвергнута в дальнейших экспериментах. Не привели к положительным результатам и попытки ввести разные формулы для

пересчетов  $x$  и  $p$ , например, для  $x$  формулу (22.2'), а для оценок  $p$  формулу (22.2'').

Существенного ускорения сходимости для достижения точности порядка  $10^{-3}$  и выше удалось добиться с помощью приема, описанного в следующем параграфе.

### § 23. Построение высокоточного алгоритма на базе алгоритма малой точности

1. **Идея метода.** Идея метода состоит в следующем. Решение  $(x, p)$  задачи I будет построено в результате решения последовательности задач типа I, каждая из которых будет решаться с малой точностью  $\varepsilon$  порядка  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ . Поэтому для решения каждой из этих задач может быть применен любой метод малой точности, в частности алгоритм «Заяц», описанный в § 22. Окончательное решение может быть получено с любой точностью.

Во всех решаемых задачах матрица  $A$  будет одна и та же, а векторы  $b$  и  $c$  будут меняться от задачи к задаче, но так, что их длины будут оставаться постоянными. Вследствие этого искомые неизвестные во всех задачах тоже будут одного порядка, т. е., так сказать, «масштаб» этих величин не будет ни убывать, ни возрастать при переходе от одной задачи к другой. Опишем теперь, как формируется последовательность задач.

Первоначальной решаемой 0-задачей является исходная задача I. Пусть в качестве ее решения получено приближение  $(x^{(0)}, p^{(0)})$ .

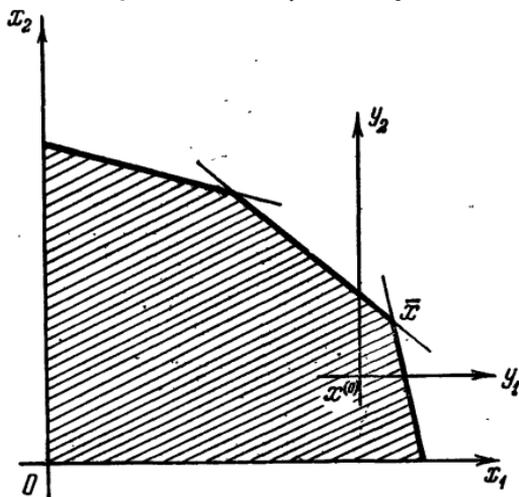


Рис. 4.

Дальнейшие рассуждения будем вести для переменных  $x$ ; для двойственных переменных они совершенно аналогичны.

Предположим, что полученное приближение  $x^{(0)}$  таково, что оно не превосходит искомого решения  $\bar{x}$ . Тогда в точку  $x^{(0)}$  можно пере-

нести начало координат, т. е. сделать замену переменных  $x = x^{(0)} + y$ , причем  $y$  можно считать по-прежнему неотрицательным:  $y \geq 0$ . Это означает, что от задачи I можно перейти к задаче относительно неизвестных  $y$  (рис. 4):

$$Ay \leq b - Ax^{(0)} = b', \quad y \geq 0, \quad \langle c, y \rangle \rightarrow \max.$$

Так как  $x^{(0)}$  близко к  $\bar{x}$ , то  $y$  должен быть мал в сравнении с  $\bar{x}$ . Это проявится в том, что правая часть  $b'$  в новой задаче будет мала, точнее, величина  $b'_i$  будет мала, если  $i$ -е ограничение существенно. О существенности ограничений можно судить по значениям двойственных переменных  $p^{(0)}$ . Если теперь сделать растяжение масштаба, т. е. заменить вектор  $b'$  на вектор

$$b^{(1)} = b' / M_1,$$

где  $M_1 = \|b'\| / \|b\|$ , а в качестве  $\|b'\|$  следует взять величину

$$\left( \sum_{p_i^{(0)} > 0} b_i'^2 \right)^{1/2}$$

(в качестве  $\|b\|$  можно взять полную евклидову длину, что несущественно), то мы завершим переход к новой задаче по  $x$ . Аналогичный переход делается и по  $p$ , после чего получаем 1-задачу для неизвестных  $x^1, p^1$ :

$$\begin{aligned} Ax^1 &\leq b^{(1)}, & p^1 A &\geq c^{(1)}, \\ \langle c^{(1)}, x^1 \rangle &\rightarrow \max, & \langle p^1, b^{(1)} \rangle &\rightarrow \min, \\ x^1 &\geq 0; & p^1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Так как  $y$  связан с  $x^1$  соотношением

$$y = M_1 x^1,$$

причем

$$M_1 = O(\|b'\|) \approx O(\varepsilon),$$

то, решив построенную задачу с точностью  $\varepsilon$  (а она совершенно аналогична исходной задаче), получим  $\bar{x}$  с точностью  $\varepsilon^2$ , т. е. приближение

$$x^{(1)} = x^{(0)} + M_1 x^1$$

будет отличаться от  $\bar{x}$  на величину  $O(\varepsilon^2)$ .

Используя приближение  $x^{(1)}$ , можно осуществить переход от 0-задачи к 2-задаче аналогично переходу  $0 \rightarrow 1$  и т. д. После решения  $k$ -задачи приближение

$$x^{(k)} = x^{(0)} + M_1 x^1 + M_2 x^2 + \dots + M_k x^k$$

будет отличаться от  $\bar{x}$  на  $O(\varepsilon^{k+1})$ .

Если предположить, что в каждой задаче число итераций  $N(\varepsilon)$  примерно постоянно, то для достижения точности  $E = \varepsilon^k$  потребуется решить  $k$  задач, что составит

$$kN(\varepsilon) = \frac{N(\varepsilon)}{|\lg \varepsilon|} |\lg E|$$

итераций, т. е. число итераций растет в зависимости от точности как  $|\lg E|$  в отличие от обычной оценки  $1/E$ .

2. Схема отсечения. Предыдущие рассуждения базировались на предположении, что получаемые приближения не превосходят искомого  $\bar{x}$ , т. е. что все переменные в новых задачах будут неотрицательны. Это предположение, конечно, ничем не оправдано и может не выполняться. Но это и не обязательно. Начало координат можно переносить не в точку  $x^{(0)}$ , а в некоторую другую точку  $w^0$ , получаемую из  $x^{(0)}$  и такую, что  $w^0 \leq \bar{x}$ . Важно только, чтобы точность  $\varepsilon$  была такова, чтобы вектор  $x^{(0)}$  давал достаточно верное представление о структуре вектора  $\bar{x}$ , точнее, необходимо, чтобы вектор  $x^{(0)}$  не содержал в себе значительных по величине положительных компонент там, где вектор  $\bar{x}$  имеет нулевые (или малые) компоненты. Если это условие выполняется, то вектор переноса  $w^0$  можно формировать по следующему правилу:

$$w_j^0 = \begin{cases} (1-\lambda) x_j^{(0)}, & x_j^{(0)} \geq \gamma x_{\text{ср}}^{(0)}, \\ 0, & x_j^{(0)} < \gamma x_{\text{ср}}^{(0)}, \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (23.1)$$

где  $x_{\text{ср}}^{(0)}$  — среднее значение ненулевых компонент вектора  $x^{(0)}$ ;  $\lambda, \gamma$  — параметры, выбираемые из интервала  $(0, 1)$ ;  $\gamma$  — параметр, определяющий величину порога: перенос делается только по тем компонентам, которые превосходят порог;  $\lambda$  — параметр, задающий долю отсечения. Чем больше значения параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ , тем больше мы страхуем себя от опасности «перешагнуть» через  $\bar{x}$ . Практически всегда достаточно положить  $\lambda = \gamma = 1/2$ .

После того как вектор переноса  $w^0$  получен, можно, как и выше, осуществить переход к 1-задаче, только вместо  $x^{(0)}$  использовать вектор  $w^0$ . После решения 1-задачи формируем вектор  $w^1$ , а затем вектор

$$w^{(1)} = w^0 + M_1 w^1$$

и т. д. После решения  $k$ -задачи получим приближенное решение

$$w^{(k)} = w^0 + M_1 w^1 + M_2 w^2 + \dots + M_k w^k.$$

Проведем прикидочный расчет числа итераций. Можно написать приближенное равенство

$$w^{(k)} \approx w^{(k-1)} + (1-\lambda)(\bar{x} - w^{(k-1)}).$$

Отсюда

$$w^{(k)} - \bar{x} = \lambda (w^{(k-1)} - \bar{x}),$$

т. е.  $\Delta^k = \lambda \Delta^{k-1} = \lambda^2 \Delta^{k-2} = \dots = \lambda^{k-1} \Delta^1 \approx \lambda^{k-1} \varepsilon$ . Здесь  $\Delta^k = \|w^{(k)} - \bar{x}\|$ .

Следовательно, число задач, необходимых для достижения точности  $E$ , определится из условия

$$\lambda^{k-1} \varepsilon < E,$$

т. е.

$$k \approx \left\lceil \frac{\lg(E/\varepsilon)}{\lg \lambda} \right\rceil + 1.$$

Таким образом, несмотря на то, что перенос делается не на полный вектор  $x^{(0)}$ , а на усеченный вектор  $w^0$ , число решаемых задач,

а вместе с этим и число итераций имеют порядок роста  $|\lg E|$ . Хотя проведенные выкладки весьма приблизительны, оценка числа  $k$  довольно хорошо совпадает с результатами экспериментальных расчетов (см. п. 4).

Алгоритм «Белка».

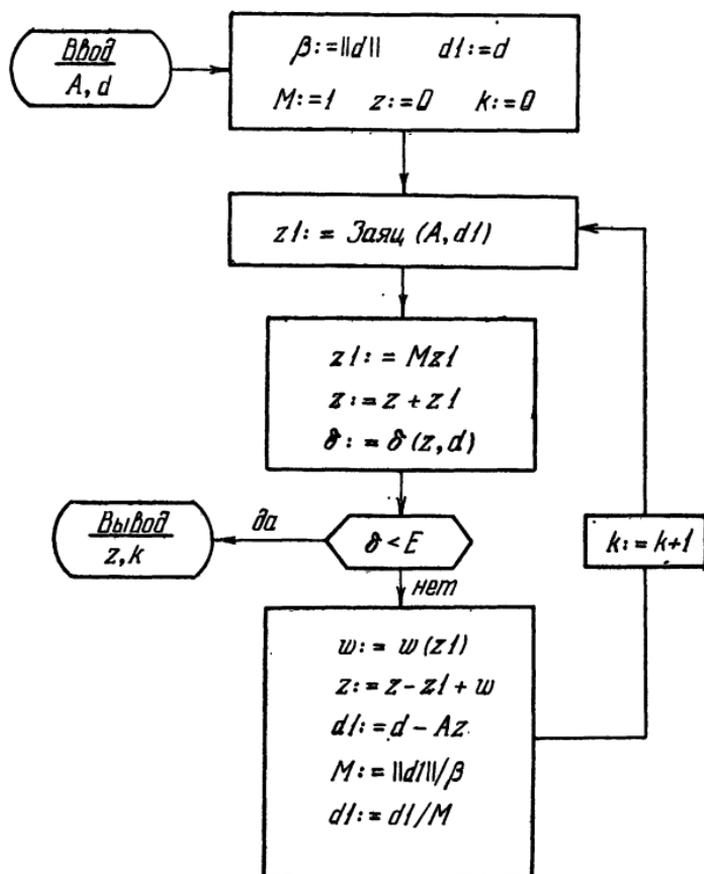


Рис. 5.

**3. Алгоритм «Белка».** Изложенные идеи были реализованы в алгоритме «Белка», схема которого приводится на рис. 5. Для большей наглядности пользуемся сокращенными обозначениями:

$$d = (b, c), \quad d1 = (b1, c1),$$

$$z = (x, p), \quad z1 = (x1, p1),$$

$w(z)$  — вектор, формируемый по правилу (23.1),

$\delta(z, d)$  — критериальная функция исходной задачи, описанная

в § 22 (отметим, что внутри программы «Заяц» критериальной функцией является  $\delta(z1, d1)$ -функция текущей задачи),

$E$  — конечная точность,

$k$  — номер задачи.

4. **Вычислительные эксперименты.** В этом пункте приведены некоторые результаты экспериментальных расчетов.

В п. 2 была выведена приближенная формула

$$k \approx \left| \frac{\lg(E/\varepsilon)}{\lg \lambda} \right| + 1,$$

где  $E$  — окончательная точность решения задачи;  $\varepsilon$  — точность решения подзадач;  $k$  — число подзадач, которые необходимо решить для достижения окончательной точности;  $\lambda$  — доля отсеечения при переходе к новой подзадаче.

Если задавать  $E$  в форме  $E = 10^{-s}$ , то вышеприведенную формулу удобно записать в виде

$$k \approx \frac{s - |\lg \varepsilon|}{|\lg \lambda|} + 1. \quad (23.2)$$

Соответствие фактических расчетов этой оценке иллюстрируется таблицами 23.1—23.3. В этих таблицах:  $k_{\text{теор}}$  — количество задач, подсчитываемое по формуле (23.2);  $N$  — общее число итераций;  $\Delta N / \Delta k_{\text{факт}}$  — число итераций, приходящихся на каждую дополнительно решаемую задачу. Таблицы 23.1, 23.2 составлены по расчетам двух пробных задач. Таблица 23.3 получена на основе обработки данных по расчетам пятидесяти задач. Каждая из этих задач генерировалась ЭВМ случайным образом: случайными были размеры задач, а также расположение и значения ненулевых элементов матрицы  $A$  (число этих элементов составляло 30%; значение каждого из них — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1]$ ).

В колонках  $k_{\text{факт}}$  и  $N$  в таблице 23.3 приведены средние по пятидесяти задачам значения соответствующих показателей. При вычислении показателей двух последних столбцов этой таблицы числители и знаменатели дробей также брались средними по пятидесяти задачам.

Отметим, что согласно статистике таблицы 23.3 каждая дополнительно решаемая задача обходится существенно дешевле предыдущей (число требуемых задач падает).

Т а б л и ц а 23.1

Задача размерности  $2 \times 3$ ,  $\varepsilon = 0,2$ ,  $\lambda = 0,5$

$s$	$k_{\text{теор}}$	$k_{\text{факт}}$	$N$	$\frac{\Delta N}{\Delta k_{\text{факт}}}$	$s$	$k_{\text{теор}}$	$k_{\text{факт}}$	$N$	$\frac{\Delta N}{\Delta k_{\text{факт}}}$
3	9	10	690	69	7	22	22	1670	80
4	12	13	881	60	8	25	26	1947	69
5	15	16	1149	89	9	29	29	2119	57
6	19	19	1431	94					

Таблица 23.2

Задача размерности  $4 \times 6$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ 

$s$	$k_{\text{теор}}$	$k_{\text{факт}}$	$N$	$\frac{\Delta N}{\Delta k_{\text{факт}}}$	$s$	$k_{\text{теор}}$	$k_{\text{факт}}$	$N$	$\frac{\Delta N}{\Delta k_{\text{факт}}}$
3	4	5	359	72	7	11	12	887	70
4	6	7	540	90	8	13	13	945	58
5	8	9	681	70	9	14	15	1090	73
6	9	10	748	67					

Таблица 23.3

Статистика случайных задач, средняя размерность  $48 \times 16$ ,  
 $\varepsilon = 0,01$ ,  $\lambda = 0,5$ 

$s$	$k_{\text{теор}}$	$k_{\text{факт}}$	$N$	$\frac{\Delta N}{\Delta k_{\text{факт}}}$	$\frac{N}{k_{\text{факт}}}$
2	1,0	1,7	2488	1464	1464
3	4,3	3,8	3524	497	928
4	7,7	7,4	4551	285	615
5	11,0	10,6	4981	134	470

5. Некоторые практические замечания. Выбор шагов. Итеративные алгоритмы довольно чувствительны к «политике» выбора шагов. Теоретическими условиями являются

$$\alpha_k \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty.$$

Для практики важно, чтобы шаги не слишком быстро убывали и внесенную погрешность можно было исправить за небольшое число итераций. Наиболее простой и удобной является реализация, принятая в алгоритме «Заяц».

Построение границы с текущим значением  $x$ , т. е. функции  $\xi(x)$  (и соответственно  $\eta(p)$ ), продолжался длительное время. Были испробованы различные варианты. Обязательными условиями являются

$$\xi \geq \sigma x, \quad \sigma > 1, \quad \xi > 0.$$

Они необходимы для обеспечения возможности «роста»  $x$ . Рассматривались функции вида

$$\xi(x) = \max(\sigma x, \tau), \quad \tau > 0,$$

причем  $\tau$  было переменным, зависящим от номера итерации. Из всех

вариантов устойчивее всего работал самый простой, в котором  $\tau = \text{const}$ . Этот вариант и описан в § 22.

При этом в общем случае наиболее удачен выбор  $\sigma = \tau = 2$ . Тогда функция  $\xi(x)$  имеет вид, изображенный на рис. 6, а).

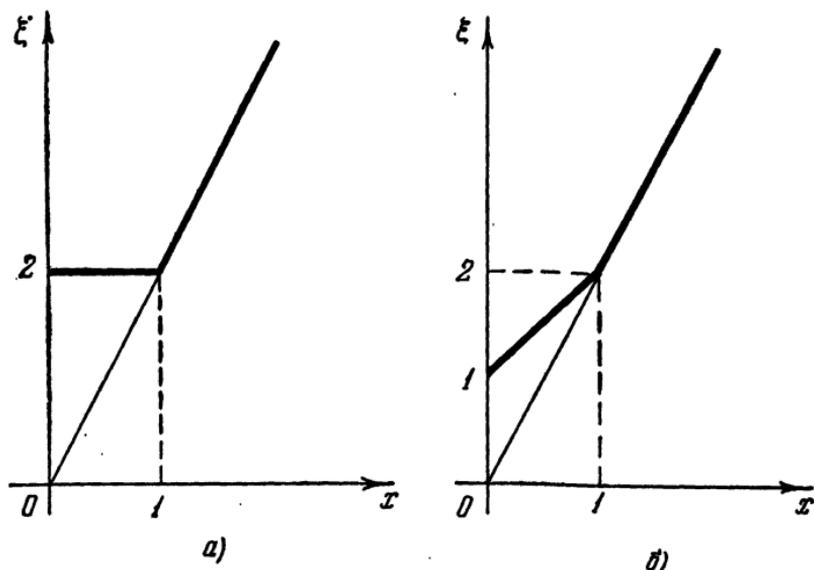


Рис. 6.

Другой подходящей функцией является  $\xi(x) = \max(\sigma x, x + \tau)$  с параметрами  $\sigma = 2$ ,  $\tau = 1$  (рис. 6, б).

В обоих случаях справедлива оценка (22.11)

$$\sum_{j=1}^n q_j + \sum_{i=1}^m y_i \leq \delta.$$

**Нормировка.** Существенную роль играет нормировка задачи. Исходная информация — матрица  $A$  и векторы  $b$ ,  $c$  — может объединять в себе параметры разного смысла, и поэтому значения элементов  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  могут быть весьма различны по масштабу. Такая разнокалиберная информация очень плоха для алгоритма, так как фиксированные значения параметров  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  едины для всех компонент. Поэтому исходная задача, прежде всего, нормируется, т. е. делается замена переменных

$$x = \lambda x', \quad p = p' \mu, \quad (23.3)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — невырожденные диагональные матрицы размеров  $n$  и  $m$  соответственно. Тогда исходная задача запишется так:

$$\begin{aligned} A \lambda x' &\leq b, & p' \mu A &\geq c, \\ \langle c, \lambda x' \rangle &\rightarrow \max; & \langle p' \mu, b \rangle &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Для приведения этой пары задач к двойственной форме запишем ее так:

$$\begin{aligned} \mu A \lambda x' &\leq \mu b, & p' \mu A \lambda &\geq c \lambda, \\ \langle c \lambda, x' \rangle &\rightarrow \max; & \langle p', \mu b \rangle &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Это соответствует тому, что над исходной информацией совершается преобразование

$$b := \mu b, \quad c := c \lambda, \quad A := \mu A \lambda,$$

после которого новая задача по форме совпадет с исходной

$$\begin{aligned} A x' &\leq b & p' A &\geq c, \\ \langle c, x' \rangle &\rightarrow \max; & \langle p', b \rangle &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Значение функционала в новой задаче совпадает с прежним, а искомые переменные связаны с прежними соотношением (23.3). Матрицы перехода  $\lambda$  и  $\mu$  можно выбирать различными способами, стремясь к тому, чтобы в новой задаче элементы матрицы «подравнялись». В алгоритме «Заяц» принято:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \left( \sqrt[4]{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2} \right)^{-1}, & j &= 1, 2, \dots, n; \\ \mu_i &= \left( \sqrt[4]{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \right)^{-1}, & i &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

т. е. каждый элемент матрицы делится на среднее геометрическое длин строки и столбца, в которых он находится.

**Формирование вектора переноса.** В алгоритме «Белка» самым тонким и деликатным местом является формирование вектора переноса  $\omega$  (см. п.2). Несмотря на отсечение, опасность «переступить порог» остается, и ее надо иметь в виду, выбирая точность  $\epsilon$  расчета отдельной задачи (по алгоритму «Заяц»). Если  $\epsilon$  задано слишком грубо, то алгоритм не выйдет на «останов», так как, переступив порог, мы теряем решение (т. е. оно оказывается вне области дальнейшего поиска) и возврата к нему нет.

Предложенный в п.2 и реализованный в алгоритме «Белка» механизм является наилучшим из уже испытанных методов отсеечения. Были попытки учитывать наряду со средним значением компонент вектора  $x^{(0)}$  и дисперсию их, но это не дало улучшения.

## § 24. Алгоритм решения матричных игр

В данном параграфе описывается итеративный алгоритм, весьма близкий по вычислительной схеме к алгоритму, описанному в [7], для решения симметричной матричной игры, т. е. игры с платежной матрицей  $A$ , удовлетворяющей равенству

$$A = -A^*$$

(\* — транспонирование). Известно (см. § 10), что задача линейного программирования может быть сведена к такой игре. В этом алгоритме шаг итерации выбирается не из априорных соображений, как это обычно делается в методах брауновского типа, а вычисляется в итеративном процессе в зависимости от ограничений задачи. Однако он (алгоритм) примыкает к итеративному процессу брауновского типа в том смысле, что траектория его движения совпадает с интегральной кривой дифференциального уравнения (5.7) или с предельной траекторией брауновского процесса при измельчении шага итерации, так как переходы строятся с помощью оптимальных ответов.

Этот алгоритм чрезвычайно прост с точки зрения машинной реализации. Его отдельная итерация не требует даже умножения матрицы на вектор. Фактически умножение матрицы на вектор происходит за  $m$  итераций, где  $m$  — порядок матрицы  $A$ .

**1. Алгоритм.** Задачу нахождения минимаксной стратегии можно записать в форме:

$$Ax \leq \sigma e, \quad e = (1, 1, \dots, 1),$$

$$\sigma \rightarrow \min, \quad x \in S^m = \left\{ x : x \geq 0, \sum_{j=1}^m x_j = 1 \right\}$$

с неизвестными  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  и скаляром  $\sigma$ . Если обозначить вектор  $Ax$  через  $\xi$ :

$$\xi = Ax,$$

то задача сводится к минимизации функции

$$\sigma(x) = \max_i \xi_i = \max_i (Ax)_i,$$

неотрицательной на симплексе  $S^m$  и обращающейся в нуль при  $x = \bar{x}$ . Итеративный процесс состоит в последовательном уменьшении  $\sigma$ .

Пусть имеется некоторая стратегия  $x \in S_n$  и  $\xi = Ax$ . Предположим, что  $\xi_i$  — единственная максимальная компонента вектора  $\xi$ . Тогда от стратегии  $x$  можно перейти к стратегии

$$x' = (1 - \alpha)x + \alpha e_i, \quad e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$$

(отметим, что  $e_i$  — оптимальный ответ на стратегию  $x$ ), которая при малых  $\alpha$  будет лучше  $x$  в том смысле, что  $\sigma(x') < \sigma(x)$  при малых  $\alpha$ . Действительно,

$$\xi' = Ax' = (1 - \alpha)\xi + \alpha a_i,$$

где через  $a_i$  обозначен  $i$ -й столбец матрицы  $A$ . Так как  $a_{ii} = 0$ , то  $i$ -я компонента вектора  $\xi'$  убывает с ростом  $\alpha$ . Но  $\xi'_i$  при малых  $\alpha$  будет оставаться (единственной по предположению) максимальной компонентой вектора  $\xi'$ , т. е.

$$\sigma' = \sigma(x') = \xi'_i = (1 - \alpha)\xi_i = (1 - \alpha)\sigma < \sigma.$$

Ясно, что  $\alpha$  можно увеличивать до тех пор, пока  $\xi'_i$  остается максимальной компонентой, т. е. пока не наступит равенство

$$\xi'_i = \xi'_k$$

при некотором  $k \neq i$  (если ни при каком  $0 < \alpha < 1$  это равенство не наступит, то можно взять  $\alpha = 1$ , тогда  $x' = e_i$  — решение игры, поскольку при этом  $\sigma' = 0$ ). Запишем это равенство подробнее

$$(1 - \alpha)\xi_i = (1 - \alpha)\xi_k + \alpha a_{ki}. \quad (24.1)$$

Отсюда видно, что конкурентной компонентой будет компонента с индексом

$$k = \arg \min_{j \neq i} \frac{\xi_i - \xi_j}{a_{ji} + \xi_i - \xi_j},$$

при этом величина шага будет равна

$$\alpha = \min_{j \neq i} \frac{\xi_i - \xi_j}{a_{ji} + \xi_i - \xi_j} = \frac{\xi_i - \xi_k}{a_{ki} + \xi_i - \xi_k}. \quad (24.2)$$

Отметим, что из равенства (24.1) следует, что  $a_{ki} > 0$ .

Перейдя от стратегии  $x$  к стратегии  $x'$ , можно повторить описанный процесс с  $x'$  вместо  $x$ . Надо только уточнить одно обстоятельство. Мы предполагали, что  $\xi_i$  — единственная максимальная компонента вектора  $\xi$ . Теперь их у нас по крайней мере две:  $\xi'_i$  и  $\xi'_k$ . Однако в новом состоянии роль  $i$  будет играть  $k$ , а  $i$  отходит на задний план и не может составить конкуренции  $k$ , поскольку  $a_{ik} = -a_{ki} < 0$ .

Эти рассуждения показывают, что возможен процесс последовательных переходов по чистым стратегиям. В  $r$ -м

переходе величина  $\sigma$  уменьшается в  $(1 - \alpha_r)$  раз, следовательно, процесс будет сходиться, если

$$\sum \alpha_r = \infty.$$

Этого, к сожалению, гарантировать нельзя, так как наше первоначальное предположение о единственности максимальной компоненты может не выполняться или будут возникать компоненты, близкие к максимальной, что приведет к слишком малым шагам. Для борьбы с таким «заеданием» можно делать нестандартный шаг: если при вычислении  $\alpha$  по формуле (24.2) окажется, что

$$\alpha < \rho\sigma,$$

где  $\rho$  — малая ( $\approx 0,01$ ) константа, то величина шага берется равной

$$\alpha = \rho\sigma.$$

При этом, конечно,  $\sigma'$  станет больше  $\sigma$ , но зато процесс выйдет из неопределенного состояния, когда не существует ни одной чистой стратегии  $e_i$ , к которой можно было бы двигаться с уменьшением  $\sigma$ . Следующий шаг опять приведет к уменьшению  $\sigma$  и процесс будет продолжаться регулярным образом.

Значительное ускорение процесса дает применение «вражеского шага». Он состоит в следующем. В последовательности сменяющих друг друга чистых стратегий  $e_i$  выявляется цикл. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — значения текущего вектора  $x$ , отвечающие двум последовательным моментам появления какой-либо (любой из повторяющихся) одной и той же чистой стратегии, причем  $\sigma_2 < \sigma_1$ . Тогда из состояния  $x_2$  делается переход в состояние  $x_\alpha$

$$x_\alpha = x_2 + \alpha(x_2 - x_1)$$

с некоторым шагом  $\alpha$ , который определяется как максимально возможный, не выводящий  $x_\alpha$  за пределы симплекса  $S^m$ . Возможны и другие приемы ускорения сходимости.

**2. Обобщение.** Процесс, описанный в п.1, можно обобщить, если интерпретировать его несколько иначе. Для этого нам потребуется следующая

*Лемма 24.1. Всякая игра с кососимметрической матрицей четного порядка имеет оптимальную стратегию, в которой по крайней мере одна из компонент равна нулю.*

**Доказательство.** Пусть  $B$  — матрица игры и  $x$  — оптимальная стратегия, т. е.

$$Bx \leq 0, \quad x \in S^m.$$

Предположим, что  $x$  не имеет нулевых компонент. Тогда (поскольку для любой кососимметрической матрицы имеем  $\langle x, Bx \rangle \equiv 0$ )

$$Bx = 0,$$

т. е. матрица  $B$  имеет нулевое собственное значение, для которого  $x$  — собственный вектор. Но кососимметрическая матрица имеет только чисто мнимые собственные значения, и так как их число четно, то нулевое собственное значение должно иметь четную кратность (поскольку элементы матрицы  $B$  действительны). Поэтому существует другой, линейно независимый с  $x$ , вектор  $y$  такой, что

$$By = 0.$$

Но тогда в двумерном подпространстве, натянутом на векторы  $x, y$ , точнее, в его пересечении с симплексом  $S^m$  (которое не пусто) легко построить вектор — оптимальную стратегию, удовлетворяющий требованиям леммы. Лемма доказана.

Эта лемма позволяет дать следующее обобщение предыдущего процесса. Представим себе, что в нашем распоряжении имеется процедура (подпрограмма)  $T$ , которая для произвольной кососимметрической матрицы  $B$  некоторого фиксированного порядка  $2l$  выдает оптимальную стратегию, о которой идет речь в лемме, и номер ее нулевой компоненты. Тогда можно построить следующий процесс.

Пусть  $A$  — матрица исходной симметричной игры размерности  $m \geq 2l$  и  $x$  — некоторая стратегия,  $x \in S^m$ . Через  $\xi$  по-прежнему будем обозначать вектор  $Ax$ , а через  $\sigma$

$$\sigma(x) = \max_i \xi_i.$$

Как и прежде, основная идея процесса состоит в последовательном уменьшении компонент вектора  $\xi$ . Среди  $m$  компонент вектора  $\xi$  выберем  $2l$  наибольших; множество номеров этих наибольших компонент обозначим через  $R$ . Сформируем матрицу  $B = (b_{ij})$ , где

$$b_{ij} = a_{r_i r_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2l, \quad r_i, r_j \in R.$$

Матрица  $B$  — кососимметрическая, порядка  $2l$ . Поэтому можно обратиться к процедуре  $T$ , которая выдаст  $2l$ -мерный вектор  $z = (z_1, \dots, z_{2l})$  (оптимальную стратегию игры  $B$ ) и номер  $k$  нулевой компоненты этого вектора (т. е.  $z_k = 0$ ). Перейдем теперь от стратегии  $x$  к стратегии

$$x' = (1 - \alpha)x + \alpha y,$$

где  $y = (y_1, \dots, y_m) \in S^m$ ,  $y_{r_i} = z_i$  для  $r_i \in R$  ( $i = 1, 2, \dots, 2l$ ) и  $y_r = 0$  для  $r \notin R$ . Посмотрим, что произойдет при этом с вектором  $\xi$ . Имеем

$$\xi' = (1 - \alpha)\xi + \alpha Ay = (1 - \alpha)\xi + \alpha \eta, \quad \eta = Ay.$$

Заметим, что

$$\eta_r = (Ay)_r = \sum_{i=1}^n a_{ri} y_i = \sum_{j=1}^{2l} a_{rr_j} y_{r_j} = \sum_{j=1}^{2l} a_{rr_j} z_j.$$

Поэтому  $(Ay)_{r_i} = (Bz)_i \leq 0$  (поскольку  $Bz \leq 0$ ) и, следовательно, компоненты вектора  $\xi$  с номерами, входящими в множество  $R$ , т. е. наибольшие компоненты вектора  $\xi$ , будут убывать при переходе от  $\xi$  к  $\xi'$ , точнее,

$$\xi'_r \leq (1 - \alpha)\xi_r, \quad \forall r \in R.$$

Остальные компоненты, вообще говоря, не будут убывать при возрастании  $\alpha$  от 0 к 1, и так как мы стремимся к уменьшению величины

$$\sigma' = \sigma(x') = \max_i \xi'_i,$$

то надо остановиться на том значении  $\alpha$ , при котором наступит равенство

$$\xi'_r = \sigma' = (1 - \alpha)\sigma, \quad r \notin R,$$

т. е.

$$(1 - \alpha)\xi_r + \alpha\eta_r = (1 - \alpha)\sigma, \quad r \notin R,$$

откуда

$$\alpha = \min_{r \notin R} \frac{\sigma - \xi_r}{\sigma - \xi_r + \eta_r}. \quad (24.3)$$

Если окажется, что  $\eta_r \leq 0$  при всех  $r = 1, 2, \dots, m$ , то можно взять  $\alpha = 1$  и тогда  $y$  — оптимальная стратегия

в исходной игре. Если же  $\eta_r > 0$  при некоторых  $r$ , то формулу (24.3) можно записать в виде

$$\alpha = \min_{\eta_r > 0} \frac{\sigma - \xi_r}{\sigma - \xi_r + \eta_r},$$

более удобном для алгоритмизации. Вычислив  $\alpha$  по этой

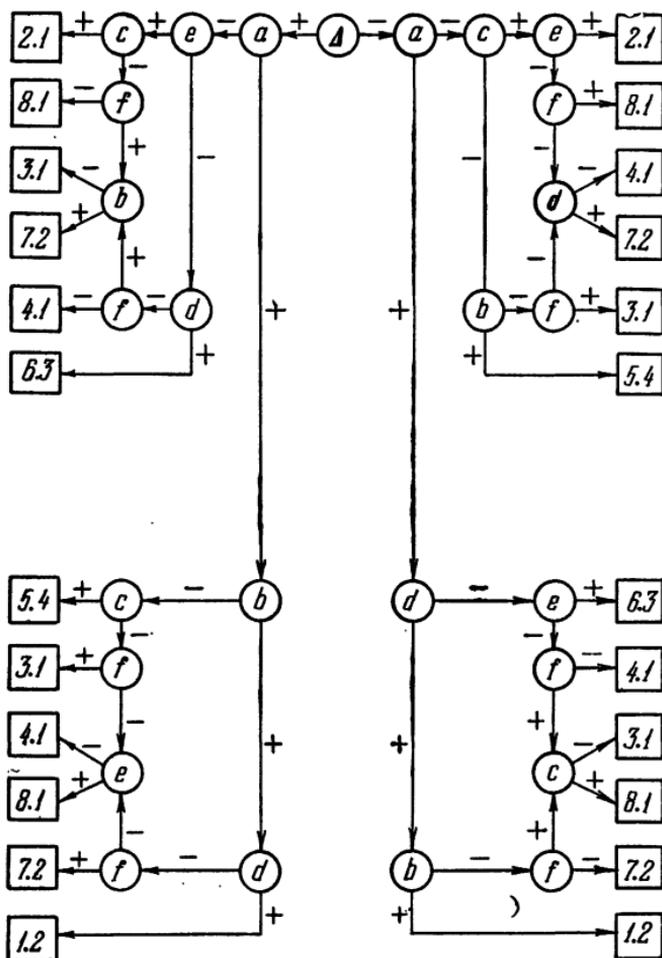


Рис. 7.

формуле и перейдя в точку  $x'$ , можно снова выбрать  $2m$  наибольших компонент вектора  $\xi'$  и повторить описанный шаг и т. д.

Уточним еще один момент. Если множество  $R'$  номеров наибольших компонент вектора  $\xi'$  не совпадет с  $R$ , то все в порядке — можно переходить к новой матрице  $B'$  и т. д. Если же  $R' = R$ , то следует исключить из  $R'$  номер  $r_k$  ( $k$  — номер, выданный процедурой  $T$ ; этот номер требуется только здесь) и ввести в  $R'$  компоненту с номером

$$r'_k = \arg \min_{r \notin R} \frac{\sigma - \xi_r}{\sigma - \xi_r + \eta_r}.$$

Заметим, что случай  $R' = R$ , вообще говоря, исключительный, так как всегда (по построению)

$$\xi'_{r'_k} = \sigma' = \sigma(x'),$$

т. е. компонента  $\xi'_{r'_k}$  является наибольшей, и если  $r_k$  с самого начала не войдет в  $R'$ , то это значит, что все компоненты  $\xi'_r$  с номерами  $r \in R$  и  $\xi'_{r'_k}$  равны между собой (и равны  $\sigma'$ ). Но так как  $z_k = 0$  (согласно процедуре  $T$ ), то, как правило, должно быть и

$$\eta_{r'_k} = (Bz)_{r'_k} < 0$$

и, следовательно,  $\xi'_{r'_k} < \sigma'$ .

К этому обобщенному процессу  $(2l - 1)$ -мерного спуска применимы те же приемы борьбы с заеданием (число приближенно равных друг другу наибольших компонент больше  $2l$ ) и ускорения сходимости («вражный шаг» в некоторой модификации), что и в одномерном случае.

**3. Возможная реализация основной процедуры.** В этом пункте в качестве иллюстрации приведем одну из возможных реализаций процедуры  $T$ , решающей задачу отыскания оптимальной стратегии симметричной четырехмерной игры ( $l = 2$ ) с нулевой компонентой. Пусть матрица игры есть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \cdot d \\ -a & 0 & c \cdot e \\ -b & -c & 0 \cdot f \\ -d & -e & -f \cdot 0 \end{pmatrix}.$$

Решением игры будет одна из следующих восьми стратегий:

$$z_1 = (1, 0, 0, 0),$$

$$z_2 = (0, 1, 0, 0),$$

$$z_3 = (0, 0, 1, 0),$$

$$z_4 = (0, 0, 0, 1),$$

$$z_5 = (|c|, |b|, |a|, 0) \cdot 1/(|a| + |b| + |c|),$$

$$z_6 = (|e|, |d|, 0, |a|) \cdot 1/(|e| + |d| + |a|),$$

$$z_7 = (|f|, 0, |d|, |b|) \cdot 1/(|f| + |d| + |b|),$$

$$z_8 = (0, |f|, |e|, |c|) \cdot 1/(|f| + |e| + |c|).$$

Поиск решения дается приведенной выше диаграммой (рис. 7). Через  $\Delta$  обозначена величина

$$\Delta = af - be + cd.$$

Кружок означает проверку знака соответствующей величины. Стрелка со знаком  $+$  указывает направление движения в случае неотрицательности проверяемой величины. Первая цифра в квадратиках — номер оптимальной стратегии  $z_i$ , вторая — номер ее нулевой компоненты.

## ГЛАВА IX

### ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ НЕПРЕРЫВНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Последние годы были годами бурного расширения исследований в области применения математических методов к решению конкретных задач хозяйственного планирования. Той областью, в которой достигнуты наибольшие успехи в смысле приближения научных разработок к решению актуальных практических вопросов, скорее всего следует считать отраслево-экономическое планирование. Модели отраслевого оптимального планирования разрабатываются во многих научных организациях применительно к большому числу разных отраслей народного хозяйства (см. [2], [4], [17], [34], [37], [45], [50], [51]). В области моделирования экономических задач основное значение как в смысле теоретического анализа, так и в практическом использовании принадлежит, безусловно, моделям линейного программирования. Именно при анализе этих моделей может быть полностью выяснен смысл цен и других связанных с ними экономических показателей, как важнейшего инструмента оптимального планирования и управления, а также методы их расчета. Однако не всегда можно адекватно отобразить реальные хозяйственные ситуации с помощью моделей линейного и даже выпуклого программирования. В частности, для моделирования широкого круга задач отраслевого планирования наиболее применимой оказалась схема оптимального программирования с линейными ограничениями (чаще всего и с линейным критерием), содержащая непрерывные и целочисленные переменные. Тем не менее ввиду тех огромных преимуществ, которые дает использование цен в планировании и управ-

лении хозяйством, представляется очень важным максимально расширить схему их использования и так или иначе распространить ее на ситуации, которые могут быть адекватно описаны не с помощью линейной или выпуклой модели, а только с помощью модели, в каком-то смысле близкой к ним.

В этом отношении значительный интерес представляет тот факт, что для приближенного решения широкого круга задач с линейными ограничениями, содержащих дискретные переменные, могут успешно использоваться итеративные методы, подобные тем, которые были описаны в первых главах книги. Основная идея распространения итеративных методов на задачи с дискретными переменными может быть кратко выражена следующим образом. Условие целочисленности переменных рассматривается как один из факторов, вызывающих «случайное» отклонение плана от решения некоторой задачи линейного программирования. Соответственно от итеративного процесса не ожидается сходимости к решению целочисленной задачи, а ожидается только получение распределения вероятностей такого случайного вектора, реализации которого с большой вероятностью были бы близки к этому решению. На каждой итерации процесса уточняется такое распределение вероятностей и находится реализация соответствующего случайного вектора, удовлетворяющего условиям целочисленности. Такой процесс можно рассматривать как упорядоченный случайный перебор, в котором итеративный процесс концентрирует распределение вероятностей в окрестности оптимального решения задачи, чем и достигается резкое сокращение времени поиска по сравнению со случайным перебором с постоянным распределением вероятностей, не сконцентрированным специально вокруг оптимального решения.

Модели экономических задач характеризуются обычно большой размерностью и относительно малой точностью исходных данных.

С точки зрения разработки вычислительных алгоритмов из вышесказанного следует, что нет смысла добиваться большей вероятностной надежности и большей точности числовых значений расчетных показателей модели, чем это позволяют точность и вероятностная надежность исходной информации. В этих условиях основной задачей

следует считать не нахождение строго оптимального решения, которое может оказаться неустойчивым, т. е. далеким от оптимума при изменении исходных данных, а скорее нахождение серии решений, близких к оптимуму, выбором из которых можно было бы ограничиться при дальнейшем анализе плана (например, при согласовании плана рассматриваемого хозяйственного комплекса с планами других комплексов).

При такой постановке задачи принципиальное значение приобретают задача нахождения приближенного оптимума и его корректировка при изменении исходных данных за достаточно короткий срок.

Известные методы точного решения задач целочисленного программирования часто оказываются неэффективными в условиях большой размерности <sup>1)</sup>. По-видимому, причина этого не только в малом сроке научных исследований в этой области. Есть даже некоторые основания для предположения, что принципиально не могут быть созданы алгоритмы, гарантирующие решение любой задачи линейного целочисленного программирования с объемом вычислительных операций меньшим, чем потребовал бы полный перебор всех вариантов.

В прикладных экономических исследованиях получили широкое распространение приближенные методы решения целочисленных задач. Один из таких методов (см. [34]), использующий неформальный анализ и корректировку решения соответствующей задачи линейного программирования, в большинстве случаев дает хорошие результаты. Сущность метода состоит в том, что вместо задачи целочисленного линейного программирования с переменными  $x$ , которые должны принимать только значения 0 или 1, решается задача линейного программирования, где условия целочисленности переменных заменены на условие  $0 \leq x \leq 1$ . А затем те из переменных, которые получили дробные значения, округляют до 0 или 1, руководствуясь неформальными соображениями. Обычно в отраслевых задачах число переменных значительно превосходит число ограничений. В этих условиях уже в оптимальном решении

---

<sup>1)</sup> Необходимо отметить также, что методы решения задач смешанного типа, содержащих целочисленные и непрерывные переменные, практически совсем не разрабатывались.

линейной задачи многие компоненты оказываются равными 0 или 1, так что процедура округления часто оказывается выполнимой вручную. Кроме того, качественный анализ решения с помощью двойственных оценок дает возможность достаточно надежно выделить те из переменных, которые и при соблюдении требования целочисленности для большинства решений вблизи оптимума должны принимать такие же значения. Таким образом, задача может быть значительно сокращена.

Однако все же «область неопределенности», в которой благодаря требованию дискретности переменных не могут быть использованы решение и оценки непрерывной задачи, может оказаться достаточно большой. Особенно это касается задач с большим числом ограничений, так как число переменных, не равных 0 или 1, равно (в общем случае) числу ограничений.

В связи с этим исследование стохастических методов, или методов случайного перебора, позволяющих благодаря предельной простоте каждой итерации перебирать с помощью ЭВМ большое число вариантов и получить серию решений, близких к оптимуму, представляет значительный интерес.

Искусственным введением случайности в алгоритм сложность точного решения задачи как бы признается бесконечной, и проблема формулируется на другом языке (на языке более высокого уровня управления).

В отношении сходимости стохастических алгоритмов для целочисленных задач можно сказать следующее. Распределение вероятностей, корректируемое в процессе итераций, не сходится к некоторому распределению на множестве точных решений задачи, как это утверждалось в теоремах относительно сходимости итеративных процессов для выпуклого программирования при наличии случайных ошибок. Таким образом, процесс не сходится к множеству решений. Однако для вычислительных целей нет необходимости в том, чтобы процесс, достигнув малой окрестности оптимума, никогда уже ее не покидал. Достаточно, чтобы процесс наверняка хоть раз достигал этой окрестности, т. е. речь должна идти о вероятности достижения окрестности оптимума. Стохастический итеративный процесс для целочисленной задачи можно изучать как неоднородную цепь Маркова с конечным множеством состояний. Известно,

что попадание системы в любое состояние за конечное число шагов с вероятностью единица можно гарантировать при условии, что при каждом шаге вероятность попасть из любого состояния в любое другое ограничена снизу некоторым положительным числом. При конструировании итеративного процесса это условие легко соблюсти и тем самым теоретически обеспечить достижение окрестности оптимума. Однако число состояний цепи Маркова для больших целочисленных задач оказывается огромным (порядка  $2^n$ , где  $n$  — число переменных), и теоретическая достижимость окрестности оптимума в процессе перебора ничего не доказывает, поскольку время достижения может оказаться несоразмерно большим. Поэтому содержательный смысл могут иметь только оценки времени достижения окрестности оптимума. Такие исследования для предлагаемых алгоритмов не проводились.

Стохастический метод решения целочисленных задач был предложен И. И. Пятецким-Шапиро и Л. В. Левиной совместно с В. А. Волконским, А. Б. Поманским и А. Д. Шапиро и испробован в ряде вычислительных экспериментов (см. [16], [58]). Идеи этого метода близки к идеям теории игр автоматов (см. [18], [63]).

В дальнейшем авторами под руководством В. А. Волконского был разработан алгоритм, в большей мере использующий линейный характер ограничений задачи и основанный на синтезе идей итеративных методов линейного и выпуклого программирования и стохастических методов. Алгоритм был разработан для модели специального вида, содержащей непрерывные и целочисленные переменные, и применялся для решения целого ряда конкретных задач достаточно большой размерности, полученных из разных областей планирования.

Параграф 25 настоящей главы посвящен описанию основной модели, § 26 — типовым задачам производственного планирования, которые могут быть сведены к ней.

В §§ 27, 28 описываются алгоритм решения основной модели без условий целочисленности переменных и его модификация для модели с целочисленными переменными.

В последнем параграфе приводятся результаты решения конкретных задач.

## § 25. Основная модель

**1. Модель.** Во введении уже говорилось, что наиболее удобной и широко применимой математической схемой для построения моделей отраслевого планирования является схема оптимального программирования с линейными ограничениями, содержащая непрерывные и целочисленные (дискретные) переменные. Структура такой схемы в наиболее общем виде может быть описана следующим образом.

Переменные, обозначаемые  $x_{jk}$ , разбиваются на блоки, причем  $j$  — номер блока, а  $k$  — номер переменной в блоке;  $j$  принимает значения от 1 до  $n$ , а  $k$  — в пределах  $j$ -го блока от 1 до  $r_j$ . Ограничения, определяющие область допустимых планов задачи, разбиваются на три группы. Первая группа ограничений (условимся их называть *производственными*) имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk} \geq b_i. \quad (25.1)$$

Здесь  $i$  — номер ограничения,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Ограничения второй и третьей групп (специальные) накладываются на переменные одного блока:

$$\sum_{k=1}^{r_j} x_{jk} = 1, \quad x_{jk} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (25.2)$$

$$x_{jk} \text{ принимают значения } 0 \text{ или } 1. \quad (25.3)$$

Ограничение (25.3) накладывается, вообще говоря, не на все блоки. Блоки, для которых оно должно выполняться, будем называть *целочисленными*. Блоки, для которых выполнение этого условия не обязательно, условимся называть *линейными*.

Задача состоит в минимизации линейной формы (функционала)

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} c_{jk} x_{jk}$$

на множестве наборов переменных  $\{x_{jk}\}$ , удовлетворяющих описанным выше ограничениям. Эту задачу будем называть *основной задачей* и обозначать задачей (A).

По числу блоков, для которых выполняется ограничение (25.3), задачи естественным образом разбиваются на три класса. Если ни для одного блока не выполняется ограничение (25.3), то имеем задачу линейного программирования. К задачам в такой форме сводятся обычно задачи текущего планирования. Если же все блоки целочисленные, то задача (А) представляет собой задачу целочисленного программирования, к которой могут быть сведены, как правило, задачи перспективного развития производства (в вариантной постановке). В промежуточном случае задача (А) — смешанная задача линейного программирования, пригодная, в частности, для формализации транспортно-производственных задач (см. [51]).

Ниже будет показано на конкретных примерах, каким образом задачи оптимального планирования развития и размещения отраслей производства, а также транспортно-производственная задача могут быть формализованы с помощью основной модели. Но для проведения общей схемы рассуждений нам удобно иметь одну стандартную экономическую интерпретацию основной модели для случая, когда все блоки целочисленные.

**2. Экономическая интерпретация.** Предположим, что имеется экономический комплекс, состоящий из группы предприятий (например, предприятий одной отрасли), выпускающих некоторый ассортимент продуктов, потребляющих некоторый ассортимент видов сырья и связанных общими ограничениями на выпуск и затраты.

Часто в качестве различных продуктов приходится рассматривать один и тот же вид продукции, производимый в разные единицы времени или в разных пунктах. Такая ситуация возникает в динамических задачах или в задачах, связанных с вопросами потребления.

Для каждого из предприятий имеется набор исходных вариантов строительства или реконструкции. При этом различными вариантами могут быть разные сроки начала строительства, реализации различных технических проектов, строительство в различных возможных пунктах и пр. Для каждого варианта предполагаются известными величины выпуска и капитальных и текущих затрат в случае его реализации.

Оптимальным планом развития экономического комплекса считается такой набор вариантов расширения или

модернизации существующих и строительства новых хозяйственных объектов, такие объемы и ассортимент выпускаемой продукции и применяемых технологических способов производства, при которых в течение некоторого рассматриваемого периода выполняются необходимые условия деятельности системы, а значение целевой функции достигает экстремума (см. [14], [51]).

В данном случае задача заключается в выборе для каждого предприятия одного из возможных вариантов таким образом, чтобы выполнялись все ограничения на затраты и выпуск и значение критерия было оптимальным.

Критерием оптимальности плана развития отдельных звеньев народного хозяйства является величина суммарных затрат. Однако ясно, что в этой схеме могут рассматриваться и другие экономические постановки, например максимизация прибыли.

Для некоторых предприятий в список возможных вариантов может быть включен так называемый «нулевой» вариант, т. е. вариант, при котором не требуется никаких затрат и не производится никакой продукции.

Включение такого варианта в план означает в конкретных случаях либо возможность закрытия предприятия, либо возможность не строить его вообще.

Пусть:

$i$  — номер продукта (вида сырья),  $i = 1, \dots, m$ ;

$j$  — номер предприятия,  $j = 1, \dots, n$ ;

$r_j$  — число вариантов развития  $j$ -го предприятия;

$k$  — номер варианта,  $k = 1, \dots, r_j$ ;

$a_{ij}^k$  — выпуск (затраты)  $i$ -го продукта (сырья)  $j$ -м предприятием при реализации  $k$ -го варианта<sup>1</sup>);

$b_i$  — общая потребность (ресурс) в  $i$ -м продукте (сырье),  $i = 1, \dots, m$ ;

$c_{jk}$  — приведенные затраты, связанные с  $k$ -м вариантом  $j$ -го предприятия.

Если для каждого предприятия ввести числа  $x_{jk}$  ( $k = 1, \dots, r_j$ ), удовлетворяющие условию

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если выбран } k\text{-й вариант,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

<sup>1</sup>) Выпуску соответствуют неотрицательные значения  $a_{ij}^k$ , потреблению — неположительные.

то условия задачи оптимального развития экономического комплекса, записанные с помощью введенных обозначений, совпадут с условиями основной задачи (А). При этом каждому предприятию соответствует один целочисленный блок.

## § 26. Примеры конкретных задач хозяйственного планирования, формализуемых с помощью основной модели

В этом параграфе будет рассмотрено несколько конкретных задач планирования, которые были решены на ЭВМ путем сведения к основной модели и применения итеративного алгоритма.

1. Модели оптимального развития отрасли нефтяного машиностроения (см. [4], [17]). Ниже будет рассмотрен пример такой модели, которая не совпадает с основной моделью предыдущего параграфа, но может быть сведена к ней с помощью введения дополнительных переменных. Важность этого примера состоит еще и в том, что получается смешанная задача линейного программирования со структурой, отличной от структуры транспортно-производственной задачи.

Перейдем к описанию модели. Пусть имеется  $n$  объектов, каждый из которых представляет собой проект строительства нового предприятия или реконструкцию одного из действующих. Номер объекта будем обозначать буквой  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Предполагается, что начатое строительство каждого объекта должно идти заранее заданным темпом, определяемым из условия максимального использования мощностей строительно-монтажных организаций, так что срок начала строительства объекта однозначно определяет и срок ввода его в действие, и распределение затрат на строительно-монтажные работы по годам планового периода.

Проектом строительства каждого объекта определяются объемы строительно-монтажных работ (СМР), которые должны быть выполнены в каждый год строительства, и оборудование, которое должно быть установлено в каждом году. Пусть  $g_j(\tau)$  — объем СМР и

$K_j(\tau) = \sum_{t=1}^{\tau} [g_j(t) + h_j(t)]$  — общие затраты, определяемые проектом  $j$ -го объекта за годы  $1, \dots, \tau$ , считая от начала строительства. Здесь  $h_j(t)$  — стоимость оборудования, определяемая проектом  $j$ -го объекта на  $t$ -й год строительства. Положим  $K_j(\tau) = 0$  для  $\tau \leq 0$ . Отметим, что поскольку допускается возможность приобретения части оборудования до начала строительства объекта, то затраты на его поставку в  $t$ -й год не обязательно равны  $h_j(t)$ . Обозначим через  $\theta_j$  год начала строительства  $j$ -го объекта.

Если  $z_j(t)$  — средства, выделенные на  $j$ -й объект за годы  $1, \dots, t$ , считая от начала планового периода, то должны выполняться следующие неравенства:

$$z_j(t) \geq K_j(t - \theta_j), \quad z_j(t) - z_j(t - 1) \geq g_j(t - \theta_j).$$

Предполагается, что на все  $n$  объектов в каждый год планового периода выделено определенное количество средств. Отсюда следует необходимость выполнения следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^n z_j(t) \leq f(t),$$

где  $f(t)$  — средства, отпущенные на всю отрасль за годы  $1, 2, \dots, t$ .

Кроме описанных выше ограничений, возможны дополнительные ограничения на сроки начала строительства  $\theta_j$ , обусловленные сроками окончания проектных работ или производства специализированного оборудования. Их можно записать в следующем виде:

$$\theta_j \geq \bar{\theta}_j,$$

где  $\bar{\theta}_j$  — заданные величины.

Иногда технический проект предусматривает строительство объекта несколькими очередями, которые удобно рассматривать как разные объекты. В этом случае необходимо ввести еще ограничения вида

$$\theta_{j_2} \geq \theta_{j_1} + \bar{\theta}_{j_1, j_2},$$

где  $j_1$  и  $j_2$  — номера объектов, являющихся первой и второй очередями (соответственно) одного объекта, а  $\bar{\theta}_{j_1, j_2}$  —

необходимый промежуток между моментами начала строительства очередей.

В работах [4], [17] рассматривались следующие две постановки задачи составления плана: 1) максимизация эффекта от использования выделенных отрасли лимитов капитальных вложений и мощностей подрядных организаций и 2) минимизация общей суммы капитальных вложений, приведенных к одному моменту времени и обеспечивающих заданный объем выпуска продукции по годам планового периода. Остановимся подробнее на первой постановке задачи. Критерий этой задачи зависит только от сроков начала строительства, т. е. от переменных  $\theta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Таким образом, возникает задача оптимизации критерия  $F(\theta_1, \dots, \theta_n)$  при условии, что неизвестные  $z_j(t)$  и  $\theta_j$  удовлетворяют описанным выше ограничениям. В работе [66] доказано, что при определенных предположениях на числа  $f(t)$ ,  $K_j(t)$  и  $g_j(t)$  с помощью введения дополнительных ограничений можно исключить непрерывные переменные  $z_j(t)$  и прийти к задаче только с целочисленными переменными  $\theta_j$ .

Решение общей задачи можно разбить на два этапа: сначала находим значения  $\theta_j$  (целочисленные переменные), удовлетворяющие соответствующим ограничениям и оптимизирующие критерий  $F(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , затем, считая значения  $\theta_j$  заданными, находим значения  $z_j(t)$ , удовлетворяющие описанным выше ограничениям.

Значение критерия  $F(\theta_1, \dots, \theta_n)$  не изменяется при изменении величин  $z_j(t)$ . Поэтому естественно ставить задачу выбора величин  $z_j(t)$  как задачу оптимизации некоторого критерия, например минимума приведенных капиталовложений. Легко видеть, что в этом случае получается задача линейного программирования.

Дополнительные ограничения, позволяющие исключить переменные  $z_j(t)$  на первом этапе, имеют следующий вид:

$$f(t) \geq \sum_{j=1}^n K_j(t_m - \theta_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{s=t_m+1}^t g_j(s - \theta_j), \quad \forall t_m \leq t.$$

Введем переменные  $x_{j\tau}$ ;  $x_{j\tau}$  равно 1, если строительство  $j$ -го объекта начинается в  $\tau$ -й год, считая от возможного срока начала строительства  $\bar{\theta}_j$ , в противном случае  $x_{j\tau}$  равно нулю.

Имеют место следующие соотношения:

$$\theta_j = \bar{\theta}_j + \tau - 1,$$

$$\theta_j = \sum_{\tau=1}^{r_j} (\bar{\theta}_j + \tau - 1) x_{j\tau},$$

где  $r_j$  определяет максимально возможный поздний срок начала строительства  $j$ -го объекта. Тогда ограничения целочисленной задачи примут вид

$$f(t) \geq \sum_{j=1}^n \sum_{\tau=1}^{r_j} K_j (t_m - \bar{\theta}_j - \tau + 1) x_{j\tau} +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \sum_{s=t_m+1}^t \sum_{\tau=1}^{r_j} g_j (s - \bar{\theta}_j - \tau + 1) x_{j\tau},$$

$$\sum_{\tau=1}^{r_{j_1}} (\bar{\theta}_{j_1} + \tau - 1) x_{j_1\tau} \geq \sum_{\tau=1}^{r_{j_2}} (\bar{\theta}_{j_2} + \tau - 1) x_{j_2\tau} + \bar{\theta}_{j_1/j_2},$$

$$\sum_{\tau=1}^{r_j} x_{j\tau} = 1.$$

Эти ограничения имеют вид ограничений основной модели.

Теперь остановимся более подробно на критерии этой задачи. Предположим, что имеется определенный план добычи нефти, а также план объемов бурения, установки насосных станций и т. д., обеспечивающих этот план добычи. Для выполнения этого плана необходимы определенные объемы каждого вида продукции нефтяного машиностроения. Можно принять, что номенклатура продукции выбрана так, что разные ее виды ни в какой мере не взаимозаменяемы и могут применяться только в определенном комплекте. Тогда сокращение выпуска каждого вида продукции на  $x\%$  должно привести к невыполнению плана бурения и т. д., а в конечном счете и плана добычи на те же  $x\%$ . Отсюда следует, что можно выразить все виды выпускаемой продукции в единицах условного топлива. При этом в качестве критерия принимается минимум невыполнения заданий по выпуску в единицах условного топлива. В работе [4] подробно анализируются факторы, которые необходимо учесть в критерии.

Для описания критерия введем следующие обозначения:

$\Pi_j(t)$  — потребность в  $j$ -м виде продукции по годам планового периода;

$c_j(t)$  — импорт (экспорт)  $j$ -го вида продукции по годам планового периода (импорт со знаком плюс);

$M_j(t, \theta_j)$  — выпуск продукции  $j$ -го объекта по годам планового периода, если его строительство начато в год  $\theta_j$  (определяется техническим проектом);

$\Lambda_j$  — количество единиц  $j$ -го вида продукции на один комплект;

$q_j$  — условный показатель, переводящий единицы  $j$ -го вида продукции в единицы условного топлива.

Тогда величина

$$d_t = \max_{1 \leq j \leq n} \left[ \frac{\Pi_j(t) - c_j(t) - M_j(t, \theta_j)}{\Lambda_j} \right] q_j$$

определяет недовыпуск единиц условного топлива в год  $t$ . В качестве критерия берется минимум недовыпуска единиц условного топлива за годы планового периода с приведением к первому году:

$$F(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum d_t (1 + E)^{-t},$$

где  $E$  — норматив приведения.

Величины  $M_j(t, \theta_j)$  можно представить следующим образом:

$$M_j(t, \theta_j) = V_j(t) + v_j(t, \theta_j),$$

где  $V_j(t)$  — выпуск  $j$ -го вида продукции по годам планового периода без привлечения капиталовложений, а  $v_j(t, \theta_j)$  прирост выпуска продукции, если строительство (реконструкция) начато в год  $\theta_j$ .

С помощью переменных  $x_{j\tau}$  величины  $M_j(t, \theta_j)$  могут быть записаны в таком виде:

$$M_j(t, \theta_j) = V_j(t) + \sum_{\tau=1}^{\tau_j} v_j(t, \bar{\theta}_j + \tau - 1) x_{j\tau}.$$

Если ввести обозначения

$$u_{jt} = \frac{[\Pi_j(t) - c_j(t) - V_j(t)] q_j}{\Lambda_j}$$

и

$$c_{jt\tau} = \frac{v_j(t, \bar{\theta}_j + \tau - 1) q_j}{\Delta_j},$$

то  $d_t$  примет следующий вид:

$$d_t = \max_{1 \leq j \leq n} \left[ u_{jt} - \sum_{\tau=1}^{r_j} c_{jt\tau} x_{j\tau} \right].$$

Теперь задача минимизации критерия  $F$  может быть сведена к смешанной задаче линейного программирования, записанной в форме основной модели. Для этого нужно считать  $d_t$  непрерывными переменными и ввести ограничения

$$d_t \geq u_{jt} - \sum_{\tau=1}^{r_j} c_{jt\tau} x_{j\tau}.$$

По описываемому ниже алгоритму  $D$  (см. § 28) была решена задача для 24 предприятий и семи лет планируемого периода. При этом число переменных было равно 73 (из них 66 целочисленных), а число ограничений 174.

**2. Задача развития крупного угольного бассейна.** Необходимо обеспечить заданный объем добычи угля с учетом потребностей в различных марках угля на планируемый период в отдельности. Задача ставится без учета изменений во времени, но промежуточные периоды могут быть учтены посредством введения дополнительных ограничений по периодам.

Выполнение плановых заданий может быть достигнуто как за счет действующих шахт и разрезов, так и за счет строящихся и проектируемых. В свою очередь каждое действующее и строящееся предприятие имеет несколько вариантов развития. Например, на действующей шахте можно осуществить капитальную реконструкцию с углубкой, реконструкцию без углубки, просто углубку и т. д. Строящиеся и перспективные шахты могут проектироваться как с гидравлическим способом добычи угля, так и с обычным. Для каждого способа могут быть заданы разные объемы добычи.

Каждый из возможных вариантов развития шахты и разреза характеризуется размером добычи угля с указанием марок и определенными экономическими показателями — себестоимостью и капиталовложениями — по пла-

нируемым мероприятиям, сроками реконструкции и строительства. При заданных условиях необходимо составить оптимальный план развития угольного бассейна, т. е. выбрать для каждой шахты один вариант развития таким образом, чтобы свести к минимуму затраты.

Описанный процесс может быть формализован в виде основной модели при следующих значениях символов:

$j$  — номер шахты или разреза, включенных в решение (сюда входят предприятия действующего фонда, строящиеся и перспективные);

$i$  — номер ограничения по общему объему добычи угля и по отдельным маркам;

$k$  — номер варианта развития шахты;

$a_{ij}^k$  — размер добычи угля  $i$ -й марки на  $j$ -й шахте при  $k$ -м варианте;

$b_j$  — заданный объем добычи угля  $i$ -й марки;

$c_{jk}$  — затраты на добычу одной тонны угля на  $j$ -й шахте при  $k$ -м варианте ее развития;

$x_{jk}$  — интенсивность, с которой входит в решение  $k$ -й вариант развития  $j$ -й шахты.

Первая группа условий (производственные) выражает ограничения по добыче отдельных марок угля. По описываемому ниже алгоритму  $D$  была решена подобная задача для Кузбасса. В задачу было включено 68 шахт, учитывались ограничения по семи сортам угля и капиталовложениям. Общее число переменных задачи 112.

В приведенной модели возможно учесть и другие условия, в частности, ограничение капитальных вложений, трудовых ресурсов, необходимость сохранения всех действующих шахт и др.

**3. Задача о реконструкции дороги.** Задача формулируется вкратце следующим образом. Имеется ряд участков дороги, подлежащих реконструкции. Для каждого участка имеется набор вариантов реконструкции, отличающихся друг от друга возможностью использования различных машин и материалов. Общие лимиты по материалам (щебень, цемент и пр.) считаются заданными. Имеющихся же дорожных машин в распоряжении строительной организации явно недостаточно. Предполагается, что выделены средства на закупку дефицитных машин. Тогда задача состоит в выборе вариантов реконструкции участков и определении необходимых закупок дефицитных

машин таким образом, чтобы выполнялись ограничения по материалам, по закупкам машин и общая сумма затрат на реконструкцию была бы минимальной.

Введем следующие обозначения:

$j$  — номер участка дороги ( $j = 1, \dots, n$ );

$k$  — номер варианта реконструкции  $j$ -го участка ( $k = 1, \dots, r_j$ );

$i$  — номер дорожной машины ( $i = 1, \dots, m$ );

$a_{ij}^k$  — необходимое число часов работы  $i$ -й машины по  $k$ -му варианту для  $j$ -го участка;

$s$  — номер вида материала;

$d_{sj}^k$  — необходимое количество  $s$ -го материала по  $k$ -му варианту для  $j$ -го участка;

$c_j^k$  — затраты (приведенные) на реконструкцию по  $k$ -му варианту для  $j$ -го участка;

$b_s$  — выделенные лимиты по материалам;

$K$  — выделенные средства на закупку новых машин;

$d_i$  — имеющееся количество машин  $i$ -го вида (выражено в часах);

$x_{jk}$  — переменная, определяющая выбор варианта ( $x_{jk} = 1$ , если выбран  $k$ -й вариант);

$z_i$  — количество закупаемых машин  $i$ -го вида (выражено в часах);

$\lambda_i$  — затраты на один час работы новой машины.

Математически задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} c_{jk} x_{jk} \rightarrow \min, \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk} \leq d_i + z_i, \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{r_j} d_{sj}^k x_{jk} \leq b_s, \\ & \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i \leq K, \quad z_i \geq 0, \\ & \sum_{k=1}^{r_j} x_{jk} = 1, \quad x_{jk} = 0, 1. \end{aligned}$$

Для сведения этой задачи к основной модели необходимо еще задать ограничения сверху на переменные  $z_i$ :

$$z_i \leq M_i.$$

Числа  $M_i$  могут быть получены различными способами, но наиболее естественной оценкой сверху является оценка, определяемая ограниченной возможностью закупки числа машин каждого вида.

Теперь задача может быть сведена к основной модели введением новых переменных:

$$z'_i = \frac{z_i}{M_i}.$$

## § 27. Вычислительный алгоритм $L$ для расчетов по основной модели без условий целочисленности

1. Сведение основной модели к игре. Рассмотрим пару сопряженных задач линейного программирования.

Задача А. Минимизировать величину

$$A(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} c_j^k x_{jk}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk} \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (27.1)$$

$$\sum_{k=1}^{r_j} x_{jk} = 1, \quad j = 1, \dots, n; \quad (27.2)$$

$$x_{jk} \geq 0. \quad (27.3)$$

Двойственная к задаче А

Задача Б. Максимизировать величину

$$B(p, q) = \sum_{i=1}^m p_i b_i - \sum_{j=1}^n q_j$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m p_i a_{ij}^k - q_j \leq c_j^k, \quad j = 1, \dots, n; \quad (27.4)$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (27.5)$$

Если  $p^* = \{p_i^*\}$  и  $q^* = \{q_j^*\}$  — оптимальное решение задачи Б, то справедливы соотношения

$$q_j^* = \max_{1 \leq k \leq r_j} \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^* a_{ij}^k - c_j^k \right\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что задача Б может быть переформулирована следующим образом:

максимизировать

$$B(p) = \sum_{i=1}^m p_i b_i - \sum_{j=1}^n \max_{1 \leq k \leq r_j} \left\{ \sum_{i=1}^m p_i a_{ij}^k - c_j^k \right\}$$

при условии, что  $p_i \geq 0$ .

Легко проверить, что пара двойственных (сопряженных) задач А и Б эквивалентна (см. § 14) игре Г двух лиц с нулевой суммой, в которой множеством стратегий первого (минимизирующего) игрока является множество  $X = \left\{ x: \sum_k x_{jk} = 1; x_{jk} \geq 0 \right\}$ , множеством стратегий второго игрока (максимизирующего) — множество  $P = \{p: p_i \geq 0\}$ , а функция выигрыша (второго игрока) есть функция Лагранжа задачи А

$$\tilde{\varphi}(x, p) = \sum_{i=1}^m p_i b_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} c_j^k x_{jk} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} p_i a_{ij}^k x_{jk}.$$

Этой паре задач можно дать наглядную экономическую интерпретацию. Условимся считать, что первый игрок — совокупность предприятий, выбирающих план производства продукции  $x = \{x_{jk}\}$ . Второй игрок — планирующий орган, отвечающий за сбыт продукции, стратегиями которого являются цены на продукцию и сырье.

Первый игрок выбирает план  $x$ , максимизирующий его прибыль  $\sum_{j,k} \left( \sum_i p_i a_{ij}^k x_{jk} - c_j^k x_{jk} \right)$ . Второй выбирает цены  $p$  с целью максимизировать свою прибыль от реализации продукции  $\sum_i \left( p_i b_i - \sum_{j,k} p_i a_{ij}^k x_{jk} \right)$ . Такая интерпретация согласуется с задачей линейного программирования и с ее игровой формализацией.

На каждую стратегию  $p$  второго игрока существует «оптимальный ответ»  $\hat{x}(p)$  первого игрока. Для нахождения

ния этого ответа первый игрок должен максимизировать свою функцию выигрыша  $\psi(x, p) = -\bar{\varphi}(x, p)$ .

Из формулы, определяющей функцию  $\bar{\varphi}(x, p)$  следует, что оптимальный ответ  $\hat{x}(p)$  имеет следующую структуру:

$$\hat{x}_{jk}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } -c_j^k + \sum_{i=1}^m p_i a_{ij}^k = S_j(p), \\ 0, & \text{если } -c_j^k + \sum_{i=1}^m p_i a_{ij}^k < S_j(p), \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{r_j} \hat{x}_{jk}(p) = 1,$$

где

$$S_j(p) = \max_{1 \leq k \leq l} \left\{ \sum_{i=1}^m p_i a_{ij}^k - c_j^k \right\}.$$

Если максимум выражения  $\sum_{i=1}^m p_i a_{ij}^k - c_j^k$  достигается при нескольких значениях  $k$ , то оптимальный ответ определяется не однозначно.

Величину  $\sum_{i=1}^m p_i a_{ij}^k - c_j^k$  можно интерпретировать как прибыль  $j$ -го предприятия при реализации  $k$ -го варианта, а  $S_j(p)$  — максимальная прибыль. Таким образом, «оптимальный ответ»  $\hat{x}(p)$  на стратегию второго игрока есть план, реализующий варианты с максимальной прибылью при ценах  $p$ .

На стратегии  $x = \{x_{jk}\}$  первого игрока, не удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk} \geq b_i,$$

существуют оптимальные ответы второго игрока, приводящие к сколь угодно большому значению функции  $\bar{\varphi}(x, p)$ . Поэтому множество стратегий второго игрока должно быть сужено неравенствами  $p_i \leq M_i$ , где  $M_i$  — любое число, превосходящее оптимальное значение  $p_i^*$ .

**2. Описание алгоритма  $L$ .** Описываемый ниже алгоритм  $L$  основан на применении игрового алгоритма (5.11), (10.15) к игре  $\Gamma$ . Перейдем к описанию алгоритма  $L$  для решения задачи  $A$ .

Задаемся начальными значениями переменных прямой и двойственной задач:  $x^0 = \{x_{jk}^0\}$  и  $p^0 = \{p_i^0\}$ , которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{k=1}^{r_j} x_{jk}^0 = 1, \quad x_{jk}^0 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$0 < p_i^0 \leq M_i.$$

После проведения предписанных алгоритмом действий получим значения переменных на первой итерации  $x = \{x_{jk}^1\}$  и  $p = \{p_i^1\}$ , затем на второй и т. д. Таким образом, получим последовательность векторов  $x^t = \{x_{jk}^t\}$  и  $p^t = \{p_i^t\}$ . Эту последовательность векторов условимся называть *траекторией* с начальными значениями  $x^0$  и  $p^0$  и обозначать  $T \{x^0, p^0\}$ .

Опишем теперь совокупность действий, производимых на  $(t+1)$ -й итерации.

1) Нахождение «оптимального ответа». Для каждого ( $j$ -го) блока переменных определяем номер  $k = k_j$ , для которого величина

$$s_{jk}^t = \sum_{i=1}^m p_i^t a_{ij}^k - c_j^k$$

максимальна:  $S_j^t = \max_k s_{jk}^t$ . Если максимум  $s_{jk}^t$  достигается для нескольких  $k$ , то выбираем произвольно одно из них. Затем полагаем

$$\hat{x}_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = k_j, \\ 0, & \text{если } k \neq k_j. \end{cases}$$

2) Формирование нового «текущего плана»  $x^{t+1}$ . Для каждого  $j$  и  $k$  полагаем

$$x_{jk}^{t+1} = (1 - \alpha_t) x_{jk}^t + \alpha_t \hat{x}_{jk}^t, \quad 0 < \alpha_t < 1.$$

3) Вычисление «невязок» для планов  $x^{t+1}$  и  $\hat{x}^t$ . Для каждого  $i$  вычисляем «невязки»:

$$\Delta_i^{t+1} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk}^{t+1} - b_i,$$

$$\hat{\Delta}_i^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k \hat{x}_{jk}^t - b_i.$$

4) Формирование нового вектора двойственных переменных  $p^{t+1}$ . Для каждого  $i$  полагаем

$$p_i^{t+1} = (1 - h_t) p_i^t + h_t \hat{p}_i^t, \quad (27.6)$$

где

$$\hat{p}_i^t = \begin{cases} M_i, & \text{если } \Delta_i^{t+1} < 0, \\ 0, & \text{если } \Delta_i^{t+1} \geq 0. \end{cases} \quad (27.7)$$

В главе III рассматривался только случай  $h_t \equiv \alpha_t$ . Для ускорения сходимости оказалось выгодно менять параметры  $\alpha_t$  и  $h_t$  по-разному. Для сходимости процесса к точке равновесия (совпадающей с решением исходной задачи) обе последовательности параметров  $\{\alpha_t\}$  и  $\{h_t\}$  должны удовлетворять условиям:

$$\alpha_t, h_t \rightarrow 0; \quad \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t = \sum_{t=1}^{\infty} h_t = \infty.$$

В настоящее время сходимость строго доказана для случая  $\alpha_t = h_t$  (см. § 11). Однако можно ожидать, что соответствующая теорема остается справедливой, когда последовательности  $\{\alpha_t\}$  и  $\{h_t\}$  различны, но удовлетворяют условию, что для любой последовательности номеров итераций  $\{t_k\}$  ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{t_k}$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} h_{t_k}$  сходятся или расходятся одновременно.

В процессе разработки практических методов решения задач линейного программирования оказалось целесообразным видоизменить алгоритм следующим образом (см. [23], [52]).

Так как обычно априори неизвестны более или менее точные оценки сверху  $M_i$  для двойственных переменных  $p_i$ , то соотношение (27.6) было заменено следующим:

$$p_i^{t+1} = (1 + \theta_i^t h_t) p_i^t, \quad (27.8)$$

где

$$\theta_i^t = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_i^{t+1} < 0, \\ -1, & \text{если } \Delta_i^{t+1} \geq 0. \end{cases} \quad (27.9)$$

Еще больший эффект в смысле ускорения сходимости дало использование предложенного А. К. Пителиным способа изменения, который учитывает не только сам факт выполнения или невыполнения ограничений, но и тенденцию к изменениям невязок. Вместо соотношения (27.9) используется соотношение

$$\theta_i^t = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_i^{t+1} < 0 \text{ и } \hat{\Delta}_i^t < 0, \\ -1, & \text{если } \Delta_i^{t+1} \geq 0 \text{ и } \hat{\Delta}_i^t \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (27.10)$$

где  $\hat{\Delta}_i^t$  — невязки, построенные по «оптимальному ответу»  $\hat{x}(p^t)$ .

В дальнейшем алгоритм, использующий такие формулы усреднения  $p_i$ , будем называть *алгоритмом L*.

Как уже отмечалось, необходимыми условиями сходимости алгоритма  $L$  являются стремление демпфирующих параметров  $\alpha_t$  и  $h_t$  к нулю и расходимость рядов

$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t$  и  $\sum_{t=1}^{\infty} h_t$ . Это можно пояснить следующим образом.

Если  $\alpha_t$  и  $h_t$  не стремятся к нулю, то у последовательности  $\{(x^t, p^t)\}$  может не существовать предела (незатухающие колебания). А если ряды  $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t$  и  $\sum_{t=1}^{\infty} h_t$  сходятся, то последовательность  $\{(x^t, p^t)\}$  «сойдется раньше времени», не дойдя до точки равновесия.

Проведенные эксперименты показывают зависимость скорости сходимости от характера изменения демпфирующих параметров  $\alpha_t$  и  $h_t$ . Возможно, не существует единого пригодного для всех задач способа изменения демпфирующих параметров.

В расчетах по алгоритму  $L$  был использован следующий способ изменения параметров  $\alpha_t$  и  $h_t$ . Сначала полагали  $\alpha_1 = 1/2$  и до итерации с номером  $d_1$  сохраняли это значение. Затем полагали  $\alpha_{d_1} = 1/4$  и не меняли его до итерации с номером  $2d_1$ , на которой полагали  $\alpha_{2d_1} = 1/8$ . Следующие изменения происходили на итерациях с номерами  $4d_1$ ,  $8d_1$  и т. д. На всех этих итерациях  $\alpha_t$  уменьшалось вдвое. Последовательность  $h_t$  строилась по такому же правилу, только деления происходили на итерациях  $d_2$ ,  $2d_2$ ,  $4d_2$ ,  $8d_2$  и т. д. Построенные таким образом последовательности демпфирующих параметров удовлетворяют необходимым условиям, которые обсуждались выше, т. е. последовательности  $\{\alpha_t\}$  и  $\{h_t\}$  стремятся к нулю, ряды  $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t$  и  $\sum_{t=1}^{\infty} h_t$  расходятся и по любой последовательности номеров  $\{t_k\}$  ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{t_k}$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} h_{t_k}$  сходятся или расходятся одновременно.

**3. Анализ работы алгоритма.** Разберем теперь подробнее механизм действия описываемого итеративного процесса. Сначала необходимо отметить, что для всех «текущих планов»  $x^t = \{x_{jk}^t\}$  выполняются специальные ограничения, т. е.

$$\sum_{k=1}^{r_j} x_{jk}^t = 1.$$

Это следует из того, что начальный план  $x^0$  и все «оптимальные ответы»  $\hat{x}^t$  удовлетворяют этим условиям.

Из формул, определяющих изменение двойственных переменных  $p^t$ , следует, что если на  $t$ -й итерации не выполняются для какого-нибудь  $i$  условия

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk}^{t+1} \geq b_i$$

и

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k \hat{x}_{jk}^t \geq b_i,$$

то  $p_i^{t+1}$  больше, чем  $p_i^t$ . Если эти условия не выпол-

няются на протяжении еще некоторого числа итераций, то  $p_i$  (в силу расходимости ряда  $\sum_{t=1}^{\infty} h_t$ ) может стать сколь угодно большим. Но тогда в «оптимальном ответе» значение компоненты, равной единице, будет соответствовать вариантам с большим значением элементов  $a_{ij}^k$  (при данном  $i$ ). Более точно это можно объяснить следующим образом. Пусть  $p_{i_0}^t$  очень велико по сравнению с остальными компонентами вектора двойственных переменных  $p^t$ . Тогда максимум выражения

$$\sum_{i=1}^m p_i^t a_{ij}^k - c_j^k$$

будет достигаться при значениях

$$k_j = \arg \max_{1 \leq k \leq r_j} a_{i_0 j}^k.$$

Но для такого «оптимального ответа» будет обязательно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{i_0 j}^k \hat{x}_{jk}^t > b_{i_0},$$

если, конечно, задача имеет допустимое решение. Из формул, определяющих итеративный процесс, следует, что левые части ограничений удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk}^{t+1} = (1 - \alpha_t) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk}^t + \alpha_t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k \hat{x}_{jk}^t.$$

Так как  $\sum_t \alpha_t = \infty$ , то если для «оптимальных ответов» на протяжении достаточно большого числа итераций выполняется  $i$ -е ограничение, то наступит момент, когда это ограничение выполняется и для «текущего плана»  $\{x_{jk}^t\}$ .

Если же какое-нибудь  $i$ -е ограничение все время выполняется для «текущих планов»  $x^t$  и «оптимальных ответов»  $\hat{x}^t$ , то оценка  $p_i^t$ , соответствующая этому ограни-

чению, будет уменьшаться и может достигнуть сколь угодно малого значения (опять же в силу расходимости ряда  $\sum_{t=1}^{\infty} h_t$ ). А это означает, что при формировании «оптимальных ответов» это ограничение не будет учитываться и, если оно вообще в задаче существенно, то в конце концов оно не будет выполняться для «оптимальных ответов».

Проиллюстрируем вышесказанное на простейшем случае «однопродуктовой» модели. Предположим, что требуется минимизировать  $\sum_{j=1}^n c_j x_j$  при условиях:

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b, \quad 0 \leq x_j \leq 1. \quad (27.11)$$

Обозначим через  $\bar{p}$  минимальное значение управляющего параметра  $p$ , при котором для «оптимального ответа»  $\hat{x}(p)$  выполняется ограничение

$$\sum_{j=1}^n a_j \hat{x}_j(\bar{p}) \geq b.$$

Можно показать, что такое  $\bar{p}$  существует и равно оптимальному значению  $p$  для соответствующей двойственной задачи.

Допустим, что на некоторой итерации  $t_0$  выполнены следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j^{t_0} < b$$

и

$$p^{t_0} < \bar{p}.$$

Так как на  $t_0$ -й итерации не выполняются ограничения для «текущего» плана и «оптимального ответа», то  $p^{t_0+1}$  будет больше, чем  $p^{t_0}$ . И вообще,  $p^t$  будет возрастать до тех пор, пока либо  $\sum_{j=1}^n a_j x_j^t$  станет больше, чем  $b$ , либо

$p^t$  станет не меньше  $p$ . Но пока  $p^t < p$  сумма  $\sum_{i=1}^n a_i x_i^t$  не может стать больше  $b$ . Пусть  $t_1$  — номер итерации, на которой впервые  $p^{t_1} \geq p$ . С этого момента  $p^t$  не изменяется до тех пор, пока  $\sum_{i=1}^n a_i x_i^t < b$ . Пусть  $t_2$  — номер итерации, на которой впервые  $\sum_{i=1}^n a_i x_i^t \geq b$ . Для  $t > t_2$  величина  $p^t$  будет уменьшаться и для некоторого  $t_3$  станет меньше  $p$ . С этого момента  $\sum_{i=1}^n a_i x_i^t$  начнет уменьшаться, так как  $\sum_{i=1}^n a_i \hat{x}_j(p^t) < b$ . На итерации с номером  $t_4$  сумма  $\sum_{i=1}^n a_i x_i^t$  станет меньше  $b$  и будет продолжать уменьшаться до момента  $t_5$ . На этом заканчивается полный «период» колебаний.

**4. Две леммы о сходимости.** Строгое доказательство сходимости алгоритма  $L$  пока неизвестно, но некоторые частные утверждения можно доказать. Эти утверждения являются достаточной базой (наряду с практическими результатами) для использования алгоритма  $L$ .

**Лемма 27.1.** *Если задача  $A$  совместна и существует план  $\{z\}$  такой, что  $\Delta_i(z) > 0$ , то для любой траектории  $T(x^0, p^0)$  найдется номер итерации  $t_i$ , на которой  $\Delta_i(x_{t_i}) > 0$ .*

Другими словами, для любой траектории: либо, начиная с некоторого  $t_0$ , будет  $\Delta_i^t > 0$  для всех  $t > t_0$ , либо  $\Delta_i^t$  бесконечное число раз меняет знак, т. е. колеблется вокруг нуля.

**Доказательство.** Доказательство этого утверждения приведем для простоты в приложении не к алгоритму  $L$ , а к алгоритму, задаваемому формулой (27.6) для расчета  $p_i^{t+1}$ , но сведение к алгоритму  $L$  не представляет затруднений.

Предположим обратное. Пусть для некоторых  $i$  (например,  $i = 1, \dots, r$ )  $\Delta_i(x^t) < 0$  для всех  $t > t_0$ .

Рассмотрим задачу  $A'$ :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} c_j^k x_{jk} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} \left( \sum_{i=1}^r p_i^t a_{ij}^k \right) x_{jk} \geq \sum_{i=1}^r p_i^t b_i, \quad (27.12)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk} \geq b_i, \quad i = r+1, \dots, m.$$

Очевидно, что, начиная с момента  $t_0$ , траектории задач  $A$  и  $A'$  совпадают, если начальное значение двойственной переменной, соответствующей условию (27.12), равно 1.

Таким образом, мы получаем задачу меньшей размерности. Поэтому достаточно разобрать случай, когда  $r=1$ .

Числа  $p_i^t/p_1^t$  образуют монотонно убывающую последовательность, пусть  $\lim_{t \rightarrow \infty} (p_i^t/p_1^t) = \lambda_i$ . Ясно, что  $\lambda_1 = 1$ , а  $\lambda_i < 1$ , если  $i \neq 1$ . Пусть  $p_i^t/p_1^t = \lambda_i + \delta_i^t$ , где  $\delta_i^t \rightarrow 0$ . Тогда «оценку» варианта  $q_{jk}^t$  и условие  $q_{jk}^t \geq q_{js}^t$  можно записать в следующем виде:

$$q_{jk}^t = \sum_{i=1}^m p_i^t a_{ij}^k - c_j^k = p_1^t \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \delta_i^t) a_{ij}^k - c_j^k,$$

$$p_1^t \left[ \sum_{i=1}^m \lambda_i (a_{ij}^k - a_{ij}^s) + \sum_{i=1}^m \delta_i^t (a_{ij}^k - a_{ij}^s) \right] \geq c_j^k - c_j^s.$$

В силу стремления  $p_i^t$  к бесконечности это неравенство будет выполняться (для достаточно больших  $t$ ), если только выражение, стоящее в квадратных скобках, будет неотрицательно.

Это означает, что, начиная с некоторого  $t$ , «оптимальный ответ»  $\hat{x}(p^t)$  определяется по правилу:

$$\hat{x}_{jk}(p^t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^m a_{ij}^k \lambda_i = \max_{1 \leq s \leq r_j} \sum_{i=1}^m a_{ij}^s \lambda_i, \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^m a_{ij}^k \lambda_i < \max_{1 \leq s \leq r_j} \sum_{i=1}^m a_{ij}^s \lambda_i. \end{cases}$$

Если мы покажем, что хотя бы одно из чисел  $\lambda_i = 0$ , то можно свести задачу к меньшей размерности. Пусть, наоборот, все  $\lambda_i > 0$ . Тогда можно показать, что любой «оптимальный ответ» строго допустим по «валу», т. е.

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k \hat{x}_{jk}(\rho^t) \right) > \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i.$$

Предположим противное, т. е.

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k \hat{x}_{jk}(\rho^t) \right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k \hat{x}_{jk} \right) &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}^k \right) \hat{x}_{jk} \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}^k \right) y_{jk}, \end{aligned}$$

где  $\{y_{jk}\}$  — произвольный план, удовлетворяющий условиям (27.2) и (27.3). Это неравенство следует из «оптимального» плана  $\hat{x}(\rho^t)$ . Объединяя два последних неравенства, получаем

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \left( b_i - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k y_{jk} \right) \geq 0.$$

Если план  $\{y_{jk}\}$  допустим, то предположение, что хотя бы одно из чисел  $b_i - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k y_{jk}$  строго меньше нуля, приводит к противоречию.

Обозначим теперь

$$R^t = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk}^t - b_i \right)$$

и

$$\hat{R}^t = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k \hat{x}_{jk}^t - b_i \right).$$

Числа  $R^t$  и  $\hat{R}^t$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$R^{t+1} = (1 - \alpha_t) R^t + \alpha_t \hat{R}^t.$$

Так как, начиная с некоторого  $t$ ,  $\hat{R}^t \geq c > 0$ , то и  $R^t$  будет строго больше нуля с некоторого момента.

Мы предположили, что первое ограничение никогда не выполняется. Следовательно, из положительности  $R^t$  следует, что в каждый момент по крайней мере одно из остальных ограничений обязательно выполняется.

Пусть  $T_i = \{t_k^i\}$  — последовательность номеров, при которых выполняется  $i$ -е ограничение ( $i \geq 2$ ). В силу расходимости ряда  $\sum_{t=1}^{\infty} h_t$  по крайней мере один из рядов

$\sum_{t \in T_i} h_t$  расходится.

Вернемся теперь к отношению  $p_i^t/p_1^t$

$$\frac{p_i^t}{p_1^t} = \frac{\prod_{\substack{\tau \leq t \\ \tau \notin T_i}} (1 + h_\tau) \prod_{\tau \in T_i} (1 - h_\tau)}{\prod_{\substack{\tau \leq t \\ \tau \notin T_i}} (1 + h_\tau) \prod_{\tau \in T_i} (1 + h_\tau)} = \frac{\prod_{\tau \in T_i} (1 - h_\tau)}{\prod_{\tau \in T_i} (1 + h_\tau)} \rightarrow 0,$$

если

$$\sum_{\tau \in T_i} h_\tau = \infty.$$

Таким образом, мы показали, что по крайней мере одно из чисел  $\lambda_i$  равно нулю.

Понижая последовательно размерность задачи, получим задачу с двумя ограничениями, для которой также  $\lambda_2 = 0$ . Следовательно, начиная с некоторого момента, «оптимальный ответ» определяется правилом

$$\hat{x}_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{1j}^k = \max_s a_{1j}^s, \\ 0, & \text{если } a_{1j}^k < \max_s a_{1j}^s. \end{cases}$$

Такой план (это предполагалось) строго допустим по первому ограничению. И следовательно, «накопленный» план  $x^t$ , начиная с некоторого момента, удовлетворяет этому ограничению. Лемма 27.1 доказана.

**Лемма 27.2.** Если траектория  $T(x^0, p^0)$  имеет предел  $(\bar{x}, \bar{p})$ , то  $\bar{x}$  и  $\bar{p}$  — оптимальные решения задач А и В.

Это утверждение показывает «корректность» алгоритма: если существует сходимость, то к оптимуму.

**Доказательство.** При доказательстве будем предполагать, что последовательности демпфирующих параметров  $\{\alpha_t\}$  и  $\{h_t\}$  удовлетворяют условиям, сформулированным в п. 2 настоящего параграфа.

Известно (см. [36]), что необходимым и достаточным для того, чтобы  $x^*$  и  $p^*$  были оптимальными решениями, является выполнение следующих условий:

$$а) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk}^* \geq b_i;$$

$$б) p_i^* = 0, \text{ если } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k x_{jk}^* > b_i;$$

$$в) x_{jk}^* = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^m p_i^* a_{ij}^k - c_j^k < q_j^*,$$

где

$$q_j^* = \max_{1 \leq k \leq r_j} \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^* a_{ij}^k - c_j^k \right\}.$$

В обозначениях п. 1 эти условия примут вид

$$а) \Delta_i(x^*) \geq 0;$$

$$б) p_i^* = 0, \text{ если } \Delta_i(x^*) > 0;$$

$$в) x_{jk}^* = 0, \text{ если } s_{jk}^* < q_j^*.$$

Последовательно докажем выполнение этих трех условий.

а) Предположим, что  $\Delta_i(x^*) < 0$ . Тогда существует номер  $t_0$  такой, что для всех  $t > t_0$

$$\Delta_i(x^*) \leq -\varepsilon < 0.$$

Так как  $i$ -е ограничение не выполняется для  $t > t_0$ , то  $p_i^t$  монотонно возрастает и

$$p_i^* = p_i^{t_0} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + h_{ik}),$$

где  $t_k$  — номера тех итераций, на которых

$$\Delta_i(\hat{x}^t) < 0.$$

Из конечности  $\rho_i^*$  и расходимости ряда  $\sum_{t=1}^{\infty} h_t$  следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_{t_k} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{t \neq t_k} h_t = \infty. \quad \text{А из условий на последовательности } \{\alpha_t\} \text{ и } \{h_t\} \text{ имеем, что}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{t_k} < \infty \quad \text{и}$$

$$\sum_{t \neq t_k} \alpha_t = \infty. \quad \text{Согласно формулам п. 2 } \Delta_i(x^{t+1}) = (1 - \alpha_t) \times$$

$$\times \Delta_i(x^t) + \alpha_t \Delta_i(\hat{x}^t) \text{ или } \Delta_i(x^{t+1}) - \Delta_i(x^t) = \alpha_t [\Delta_i(\hat{x}^t) - \Delta_i(x^t)].$$

Просуммировав эти соотношения по  $t$  от  $t_0$ , получим, что

$$\begin{aligned} \Delta_i(x^*) - \Delta_i(x^{t_0}) &= \sum_{t=t_0}^{\infty} \alpha_t [\Delta_i(\hat{x}^t) - \Delta_i(x^t)] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{t_k} [\Delta_i(\hat{x}^{t_k}) - \Delta_i(x^{t_k})] + \sum_{t \neq t_k} \alpha_t [\Delta_i(\hat{x}^t) - \Delta_i(x^t)]. \end{aligned}$$

Для  $t \neq t_k$  имеем  $\Delta_i(\hat{x}^t) - \Delta_i(x^t) \geq \varepsilon$  и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{t_k} [\Delta_i(\hat{x}^{t_k}) - \Delta_i(x^{t_k})] < \infty,$$

а

$$\sum_{t \neq t_k} \alpha_t [\Delta_i(\hat{x}^t) - \Delta_i(x^t)] = \infty.$$

Но тогда  $\Delta_i(x^*) - \Delta_i(x^{t_0}) = \infty$ , что невозможно.

б) Если  $\Delta_i(x^*) > 0$ , то для всех  $t > t_0$  имеем  $\Delta_i(x^t) \geq \varepsilon > 0$ . Тогда  $\rho_i^t$  убывают и  $\rho_i^* = \rho_i^{t_0} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - h_{t_k})$ , где  $t_k$  — номера тех итераций, на которых  $\Delta_i(\hat{x}^t) \geq 0$ . Если  $\sum_{k=0}^{\infty} h_{t_k}$  сходится (это эквивалентно условию  $\rho_i^* > 0$ ),

то сходится и  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{t_k}$ . Повторяя приведенные выше рас-

суждения, получим, что  $\Delta_i(x^*) - \Delta_i(x^{t_0}) = -\infty$ . Отсюда следует расходимость  $\sum_{k=0}^{\infty} h_{t_k}$  и, следовательно, утверждение  $p_i^* = 0$ .

в) Если  $s_{jk}^* < \max_{1 \leq k \leq r_j} \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^* a_{ij}^k - c_j^k \right\} = S_j^*$ , то для всех  $t$ , больших некоторого  $t_0$ ,

$$s_{jk}^t < S_j^t.$$

Тогда можно утверждать, что  $\hat{x}_j^k(p^t) = 0$  для  $t > t_0$  и, следовательно,  $x_{jk}^* = 0$ .

## § 28. Алгоритм $D$ для решения задач с дискретными переменными

1. Описание алгоритма. Описанный в § 27 алгоритм  $L$  является базой алгоритма  $D$  для решения задач линейного программирования, содержащих дискретные переменные. Основное различие состоит в том, что «текущие» планы  $x^t$  используются для получения плана, удовлетворяющего условиям целочисленности. Этот переход от «непрерывных» переменных к дискретным является не детерминированным, а случайным. При этом компоненты «текущего» плана  $x_{jk}^t$  принимаются за вероятности значений целочисленных переменных. При реализации алгоритма получается последовательность планов  $z^t$ , удовлетворяющих условиям целочисленности.

Опишем теперь порядок действий, предусматриваемых алгоритмом  $D$ , на  $(t+1)$ -й итерации.

1) Нахождение «оптимального ответа». Для каждого блока переменных определяем номер  $k_j$ , для которого

$$s_{jk}^t = \sum_{i=1}^m p_i^t a_{ij}^k - c_j^k \quad (28.1)$$

максимально. Если максимум  $s_{jk}^t$  достигается для нескольких значений  $k$ , то выбираем произвольно одно из них.

Затем полагаем

$$\hat{x}_{ik}^t = \begin{cases} 1, & \text{если } k = k_j, \\ 0, & \text{если } k \neq k_j. \end{cases}$$

2) Формирование нового «текущего» плана (вектора вероятностей)  $x^{t+1}$ . Для каждого  $j$  и  $k$  полагаем

$$x_{ik}^{t+1} = (1 - \alpha_t) x_{ik}^t + \alpha_t \hat{x}_{ik}^t,$$

где  $\alpha_t$  — число, большее нуля, но меньшее единицы.

3) Нахождение плана  $z^{t+1}$ , удовлетворяющего условиям целочисленности:

а) если для  $j$ -го блока нет условий целочисленности, то полагаем

$$z_{ik}^{t+1} = x_{ik}^{t+1};$$

б) если для  $j$ -го блока есть условие целочисленности, то берем реализацию случайной величины  $k^{t+1}(j)$ , принимающей значения 1, 2, ...,  $r_j$ , с распределением  $P\{k^{t+1}(j) = s\} = x_{js}^{t+1}$  (заметим, что в силу условий (27.2) вектор  $(x_{j1}^t, x_{j2}^t, \dots, x_{jr_j}^t)$  есть распределение вероятности) и полагаем

$$z_{ik}^{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } k^{t+1}(j) = k, \\ 0, & \text{если } k^{t+1}(j) \neq k. \end{cases}$$

Случайные величины  $k^t(j)$  предполагаются независимыми для разных  $j$  и  $t$ .

4) Вычисление «невязок» для планов  $z^{t+1}$  и  $\hat{x}^t$ . Для каждого  $i$  вычисляем «невязки»

$$\hat{\Delta}_i^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k \hat{x}_{jk}^t - b_i, \quad (28.2)$$

$$\Delta_i^{t+1} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j} a_{ij}^k z_{jk}^{t+1} - b_i. \quad (28.3)$$

5) Формирование нового вектора управляющих переменных  $p^{t+1}$  — «цен». Для каждого  $i$  полагаем

$$p_i^{t+1} = (1 + \theta_i^t h_i) p_i^t, \quad (28.4)$$

где

$$\theta_i^t = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_i^{t+1} < 0 \text{ и } \hat{\Delta}_i^t < 0, \\ -1, & \text{если } \Delta_i^{t+1} \geq 0 \text{ и } \hat{\Delta}_i^t \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (28.5)$$

На этом заканчивается  $(t + 1)$ -я итерация.

**2. О возможностях алгоритма.** Доказательством эффективности алгоритма  $D$  являются многочисленные вычислительные эксперименты, проведенные авторами. После проведения серии таких экспериментов стало ясным, что скорость сходимости слабо коррелирована с начальными значениями переменных  $x^0$  и  $p^0$ . Большое влияние на скорость сходимости оказывает характер изменения демпфирующих параметров  $\alpha_t$  и  $h_t$ .

Несмотря на более или менее обнадеживающие результаты вычислительных экспериментов, нельзя утверждать, что описываемый итеративный алгоритм справляется с любыми задачами описанного класса. Более того, существуют задачи, в которых вероятность достижения точки оптимума описанным алгоритмом равна нулю. Простейший пример такой задачи мы сейчас приведем.

Требуется минимизировать  $5x_1 + x_2 + 2x_3$  при условиях:

а)  $x_j$  равны 0 или 1 ( $j = 1, 2, 3$ );

б)  $100x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4$ .

Оптимальным решением этой задачи является вектор  $x^* = (0, 1, 1)$ . Допустимым будет также вектор  $z = (1, 0, 0)$ .

Если  $p^t$  меньше 0,5, то в «оптимальном ответе»

$$\hat{x}_1^t(p^t) = 0, \quad \hat{x}_3^t(p^t) = 0,$$

так как в этом случае

$$2p^t - 1 < 0 \text{ и } 3p^t - 2 < 0.$$

Но если  $p^t \geq 0,05$ , то

$$100p^t - 5 \geq 0$$

и, следовательно,  $\hat{x}_1^t(p^t) = 1$ . Отсюда следует, что  $\hat{x}_1^t(p^t)$  не возрастает, если  $0,05 \leq p^t \leq 0,5$ , так как в этом случае «оптимальный ответ» является допустимым планом. А это в свою очередь означает, что вторая и третья компоненты «текущего» плана  $x^t = \{x_1^t, x_2^t, x_3^t\}$  удовлетворяют

следующим соотношениям:

$$x_2^t = x_2^0 \prod_{\tau=1}^t (1 - \alpha_\tau), \quad x_3^t = x_3^0 \prod_{\tau=1}^t (1 - \alpha_\tau),$$

если только  $p^t < 0,5$ .

Вероятность на итерации с номером  $t$  получить вектор  $x^* = (0, 1, 1)$  равна  $(1 - x_1^*) x_2^t x_3^t$ .

Из совокупности этого и предыдущих соотношений следует, что вероятность за конечное число итераций достичь вектора  $x^*$  меньше 1 и среднее время достижения этого вектора бесконечно. Если же ограничить числа  $x_2^t$  и  $x_3^t$  снизу числом  $\varepsilon$  (большим нуля), то среднее время достижения будет конечным и порядка  $1/\varepsilon^2$ .

Таким образом, на этом примере можно убедиться в том, что описываемый итеративный процесс для некоторого класса задач дает результаты худшие, чем простой перебор.

Этот пример, а также результаты вычислительных экспериментов позволяют сделать вывод, что алгоритм  $D$  дает хорошие результаты в задачах, близких к линейным (см. § 29) и с достаточно большой областью допустимых целочисленных решений.

Эти условия, как правило, выполняются для тех задач, в которых: 1) число производственных ограничений много меньше числа переменных; 2) различные варианты сравнимы друг с другом по порядку величин  $a_{ij}^k$  и  $c_j^k$ ; 3) имеет место большая заполняемость матрицы (число ненулевых элементов матрицы  $\{a_{ij}^k\}$  составляет не меньше 20% от общего числа элементов).

Содержательный смысл условия о достаточно большой области допустимых решений может быть, например, таков: число различных потребностей хозяйства, обращенных к данному объекту, значительно меньше, чем число способов их удовлетворения, так что остается существенная свобода выбора.

## § 29. Практическое применение алгоритмов $L$ и $D$

Алгоритмы были запрограммированы для решения задачи на минимум. Поэтому в задачах, поставленных на максимум критерия, необходимо было изменять знаки коэффициентов критерия на противоположные. В некото-

рых задачах условие  $\sum_{k=1}^{r_j} x_{jk} = 1$  требовало включения «нулевых» вариантов, что увеличивает размерность. В программе была предусмотрена возможность двух случаев:

$$\sum_{k=1}^{r_j} x_{jk} = 1, \quad \sum_{k=1}^{r_j} x_{jk} \leq 1.$$

Во втором случае при определении «оптимального ответа» выбирается не просто вариант, дающий максимальную прибыль, а вариант, дающий неотрицательную и максимальную прибыль. Если все варианты имеют отрицательную прибыль, то в «оптимальном ответе» не выбирается ни один из возможных, явно представленных вариантов. Другими словами, выбирается «нулевой» вариант. При этом величина  $1 - \sum_{k=1}^{r_j} x_{jk}^t$  представляет интенсивность «нулевого» варианта на  $t$ -й итерации, а для алгоритма  $D$  — вероятность выбора «нулевого» варианта.

**1. Практические приемы ускорения сходимости.** Вывод о колебании невязок  $\Delta_i$  вокруг нулевых значений, сделанный в § 27, приводит к следующему специальному приему, резко повышающему скорость сходимости.

Естественно предположить, что указанные процессы колебания невязок  $\Delta_i$  для разных ограничений  $i$  слабо зависят друг от друга. Поэтому ситуации, при которых выполняются одновременно все ограничения (27.1), возникают очень редко. Амплитуды этих колебаний (с ростом номера итерации) должны уменьшаться. Поэтому, учитывая неточность исходных данных, можно было бы считать приемлемыми те планы  $x^t$ , для которых невязки  $\Delta_i^t$  удовлетворяют не неравенствам  $\Delta_i^t \geq 0$ , а равенствам

$$\Delta_i^t \geq -\delta_i, \quad (29.1)$$

где  $\delta_i$  — достаточно малое положительное число.

Если при этом сам алгоритм и процесс не изменяются, т. е. ослабление ограничений учитывается только при выборе момента окончания вычислений, а не при формировании величин  $p_i$ , то планы, допустимые с точки зрения

ограничений (27.1), будут встречаться гораздо чаще, чем допустимые с точки зрения исходной задачи.

Тот же прием можно использовать и для решения исходной задачи (с неослабленными ограничениями). Для этого, наоборот, надо внести изменение в алгоритм (и в траекторию процесса) и не менять определение допустимых планов. А именно, при определении величин  $\theta_i^t$  по формуле (28.5) вместо невязок  $\Delta_i^t$  и  $\hat{\Delta}_i^t$ , вычисленных по формулам (28.2), надо использовать меньшие величины:  $\Delta_i^t - \delta_i$  и  $\hat{\Delta}_i^t - \delta_i$ . При этом согласно лемме 27.1 невязки  $\Delta_i^t$  будут колебаться вокруг значений  $\delta_i$ , а так как  $\delta_i > 0$ , то будут чаще появляться допустимые планы (планы, для которых  $\Delta_i^t \geq 0$  одновременно для всех  $i$ ). Как было сказано выше, эксперименты подтверждают эффективность этого приема.

Алгоритмы  $L$  и  $D$  и их модификации использовались для решения целого ряда практических задач отраслевого планирования. Эти задачи были разными по числу производственных ограничений (от 3 до 174), по числу блоков (от 5 до 68) и по общему числу переменных (от 77 до 711). Алгоритмом  $L$  было решено также несколько задач с «плохой обусловленностью».

Независимо от размерности задач, решения, близкие к оптимуму, получались по алгоритму  $L$  за относительно небольшое число итераций (300—600 итераций). Выдача результата производилась в момент, когда разность критериев прямой и двойственной задач становилась меньше заданного  $\varepsilon$ . Число  $\varepsilon$  колебалось в зависимости от задач в пределах от 0,01% до 1% от величины критерия исходной задачи.

**2. Некоторые результаты расчетов.** В таблице 29.1 приводятся параметры задач целочисленного программирования, решенных алгоритмом  $D$ , и полученные результаты. Эти результаты показывают эффективность алгоритма  $D$ . К сожалению, нет возможности сравнить полученные решения с точными значениями оптимума решенных задач из-за отсутствия программ, позволяющих использовать известные точные методы целочисленного программирования для решения задач подобной размерности.

В связи с этим при решении задач линейного целочисленного программирования приходилось в качестве

Т а б л и ц а 29.1

№	<i>M</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>V</i>	<i>C</i>	<i>T</i>	<i>x</i>
1	8	112	68	398	399	2358	0,25
2	25	411	51	711	737	1219	5,2
3	174	73	31	314	333	1742	6,05
4	10	207	36	222	234	1765	5,4
5	46	199	67	812	911	2401	12,2
6	26	199	63	388	423	1700	9,28
7	10	438	36	247	258	3398	4,4
8	10	438	36	146	149	11	2,1
9	30	603	36	318	374	4700	17,6
10	10	201	36	221	253	2517	14,5
11	30	603	36	-198	-191	124	3,5

оценки точности решения брать значение критерия соответствующей задачи линейного программирования. Эта задача получалась из исходной задачи целочисленного программирования с помощью удаления условия целочисленности переменных.

В программе, реализующей на ЭВМ алгоритм *D*, заложен счет задачи, двойственной к соответствующей задаче линейного программирования. Выдача результатов задачи целочисленного программирования производилась, либо когда разность критериев целочисленной задачи и соответствующей двойственной задачи линейного программирования становилась меньше  $\epsilon$  ( $\epsilon$  колебалось в пределах от 1% до 5% от величины критерия соответствующей задачи линейного программирования), либо по числу итераций.

В таблице 29.1 использованы следующие обозначения:

*M* — число производственных ограничений;

*m* — общее число переменных;

*N* — число предприятий;

*V* — оптимальное значение критерия линейной задачи;

*C* — наилучшее значение критерия задачи с дискретными переменными, полученное в процессе счета;

*T* — номер итерации, на которой получено наилучшее решение;

$$x = (C - V)/V \cdot 100\%.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И., Метод потенциальных функций в теории обучения машин, «Наука», 1970.
2. Алексеев А. М., Козлов Л. А., Крючков В. Н., Увязка динамической модели развития отраслевой системы с сетевыми моделями развития ее производственных объектов (на примере шахтного фонда Южного Кузбасса), сб. «Оптимизация планов развития и размещения отраслей промышленности», ИЭ и ОПП СО АН СССР, 1971.
3. Алексеев А. М., Козлов Л. А., Крючков В. Н., Оптимизация сроков ввода производственных объектов при создании территориально-производственного комплекса, сб. «Проблемы территориального планирования», ИЭ и ОПП СО АН СССР, 1971.
4. Баширов С. А., Волконский В. А., Лоткин М. М., Манзон Ю. А., Поманский А. Б., Шапиро А. Д., Разработка оптимального плана перспективного развития отрасли, Химическое и нефтяное машиностроение 1 (1967).
5. Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, Физматгиз, 1961.
6. Боненбласт Х. Ф., Карлин С., Шепли Л. С., Игры с непрерывной выпуклой функцией выигрыша, сб. «Бесконечные антагонистические игры», Физматгиз, 1963.
7. Борисова Э. П., Магарик И. В., О двух модификациях метода Брауна решения матричных игр, Экономика и математические методы II, вып. 5 (1966).
8. Браверман Э. М., Розоноэр Л. И., Сходимость случайных процессов в теории обучения машин, Автоматика и телемеханика 1 (1970).
9. Брудно А. Л., Теория функций действительного переменного, «Наука», 1971.
10. Булавский В. А., Итеративный метод решения общей задачи линейного программирования, сб. «Численные методы оптимального планирования», вып. 1, эконом.-матем. сер., СО АН СССР, 1962.
11. Вазан М., Стохастическая аппроксимация, «Мир», 1972.
12. Волконский В. А., Система текущего планирования с помощью оценок ресурсов на основе матричных моделей, сб. «Планирование и экономико-математические методы», «Наука», 1964.
13. Волконский В. А., Оптимальное планирование в условиях большой размерности. Итеративные методы и принцип декомпозиции, Экономика и математические методы 1, вып. 2 (1965).

14. Волконский В. А., Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей, «Наука», 1967.
15. Волконский В. А., Иванков С. А., Сходимость итеративных процессов отыскания точки равновесия при наличии случайных ошибок и оценка ее скорости, Сиб. матем. ж. X, 4 (1970).
16. Волконский В. А., Левина Л. В., Поманский А. Б., Пятецкий-Шапиро И. И., Шапиро А. Д., Стохастические методы решения задач целочисленного программирования, Проблемы кибернетики 20, «Наука», 1968.
17. Волконский В. А., Поманский А. Б., Шапиро А. Д., Разработка моделей оптимального развития отрасли, Доклад на I Всесоюзной конференции по экономической кибернетике, Батуми, 1963.
18. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., Пятецкий-Шапиро И. И., О некоторых классах игр и игр автоматов, ДАН СССР 152, 4 (1963).
19. Гольштейн Е. Г., Методы блочного программирования, Экономика и математические методы II, вып. I (1966).
20. Гольштейн Е. Г. Обобщенный градиентный метод отыскания седловых точек, Экономика и математические методы, VIII, вып. 4 (1972).
21. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Новые направления в линейном программировании, М., «Сов. радио», 1966.
22. Данилов-Данильян В. И., Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования, сб. «Модели и методы оптимального планирования», ЦЭМИ АН СССР, 1966.
23. Данилов-Данильян В. И., Итеративный алгоритм решения задачи об оптимальной загрузке оборудования для производства с использованием полуфабрикатов, сб. «Модели и алгоритмы оптимального планирования», ЦЭМИ АН СССР, 1966.
24. Данскин Дж., Итеративный метод решения непрерывных игр, сб. «Бесконечные антагонистические игры», Физматгиз, 1963.
25. Данциг Дж., Вольф Ф., Алгоритм разложения для задач линейного программирования, сб. «Математика» 8, 1, 1964.
26. Дуб Дж., Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
27. Ермольев Ю. М., О методе обобщенных стохастических градиентов и стохастических квазифейеровских последовательностях, Кибернетика 2, Киев, 1969.
28. Ермольев Ю. М., Некрылова З. В., О некоторых методах стохастической оптимизации, Кибернетика 6, Киев, 1966.
29. Ермольев Ю. М., Некрылова З. В., Метод стохастических градиентов и его применение, сб. «Теория оптимальных решений» 1, Киев, 1967.
30. Зойтендейк Г., Методы возможных направлений, ИЛ, 1963.
31. Зуховицкий С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е., О вогнутой игре  $n$  лиц и одной модели производства, ДАН СССР 191, 6 (1970).
32. Зуховицкий С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е., Вогнутые игры многих лиц (численные методы), Экономика и математические методы VII, вып. 5 (1971).

33. И в а н к о в С. А., Теоремы о сходимости итеративных процессов решения игр, Труды третьей зимней школы по математическому программированию в г. Дрогобыче, М., ЦЭМИ АН СССР, 1970.
34. К а з а к е в и ч Д. М., Производственно-транспортные модели в перспективном отраслевом планировании, М., «Экономика», 1972.
35. К а н т о р о в и ч Л. В., Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., Изд-во АН СССР, 1960.
36. К а р л и н С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», 1964.
37. К о з л о в Л. А., Оптимальное планирование развития и размещения отраслей промышленности, Новосибирск, «Наука», 1970.
38. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1972.
39. К о р н а и И., Л и п т а к Т., Планирование на двух уровнях, сб. «Применение математики в экономических исследованиях» 4, М., «Мысль», 1965.
40. К о р о б о ч к и н Б. И., Двойственные методы решения задач выпуклого программирования, Труды Всесоюзного совещания и школы «Проблемы математического обеспечения решения задач оптимизации планирования народного хозяйства в АСПР», Москва, ГВЦ Госплана СССР, 1973.
41. Л е в и т и н Е. Ф., П о л я к Б. Т., Методы минимизации при наличии ограничений, Ж. вычислит. матем. и матем. физики 6, 5 (1966).
42. Л и т в а к о в Б. М., О сходимости рекуррентных алгоритмов обучения распознаванию образов, Автоматика и телемеханика 1 (1968).
43. Л и т в а к о в Б. М., Экстремальный подход к определению условий сходимости алгоритмов метода потенциальных функций, Автоматика и телемеханика 9 (1969).
44. Л о г и н о в Н. В., Методы стохастической аппроксимации, Автоматика и телемеханика 4 (1966).
45. М а н д р ы г и н а Ф. А., Экономико-математическая модель оптимального развития угольной промышленности, сб. «Модели и методы оптимального развития и размещения производства», вып. 3, Новосибирск, «Наука», 1965.
46. М е д н и ц к и й В. Г., О методе решения задачи оптимального распределения плановых заданий в отрасли, Экономика и математические методы I, вып. 6 (1965).
47. Н а т а н с о н И. П., Теория функций вещественной переменной, ГИТТЛ, 1950.
48. Н и к а й д о Х., Выпуклые структуры и математическая экономика, «Мир», 1972.
49. Н и к а й д о Х., Исода К., Заметка о бескоалиционных выпуклых играх, сб. «Бесконечные антагонистические игры», Физматгиз, 1963.
50. Оптимальный план отрасли. Под ред. И. Я. Б и р м а н а, М., «Экономика», 1970.
51. Основные положения оптимального планирования развития и размещения производства, Новосибирск, «Наука», 1968.

52. Пителин А. К., Построение итеративных алгоритмов для решения задач оптимального планирования, Доклад на Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов и ЭВМ в отраслевом планировании и управлении, М., ЦЭМИ АН СССР, 1966.
53. Поляк Б. Т., О некоторых способах ускорения сходимости итерационных методов, Ж. вычислит. матем. и матем. физики 4, 5 (1964).
54. Поляк Б. Т., Один общий метод решения экстремальных задач, ДАН СССР 174, 1 (1967).
55. Поманский А. Б., Шапиро А. Д., Итеративные методы для решения отраслевых задач, содержащих дискретные переменные, ДАН СССР 186, 1 (1969).
56. Поманский А. Б., Шапиро А. Д., Математические методы решения отраслевых экономических задач, М., Информэлектро, 1969.
57. Пятецкий-Шапиро И. И., Волконский В. А., Казакевич Д. М., Левина Л. В., Решение задач целочисленного программирования методом последовательного сокращения размерности, Научные труды НГУ, серия экономическая, вып. 7, ч. II, Новосибирск, 1967.
58. Пятецкий-Шапиро И. И., Волконский В. А., Левина Л. В., Поманский А. Б., Об одном итеративном методе решения задач целочисленного программирования, ДАН СССР 169, 6 (1966).
59. Растрингин Л. А., Статистические методы поиска, «Наука», 1968.
60. Робинсон Дж., Итеративный метод решения игр, сб. «Матричные игры», Физматгиз, 1961.
61. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, «Мир», 1967.
62. Филиппов А. Ф., Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью, Вестник МГУ, сер. матем. мех., 3, 1967.
63. Цетлин М. Л., Конечные автоматы и моделирование простейших форм поведения, УМН XVIII, 4 (1963).
64. Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, «Наука», 1968.
65. Цыпкин Я. З., Основы теории обучающихся систем, «Наука», 1970.
66. Шапиро А. Д., О решении задачи оптимального распределения во времени капитальных вложений, выделенных на развитие отрасли, М., ЦЭМИ АН СССР, 1968.
67. Шварц Л., Анализ — I, «Мир», 1972.
68. Шор Н. З., Применение обобщенного градиентного спуска в блочном программировании. Кибернетика 3, Киев, 1967.
69. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х., Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, 1962.
70. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, теория, методы, приложения, «Наука», 1969.
71. Blum T., Multidimensional stochastic approximation procedures, Ann. of Math. Statistics 25, 4 (1954).

72. Fan Ky, Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., USA 38 (1952), 121—126.
73. Frank M., Wolfe P., An algorithm for quadratic programming, Navel res. logistics quart 3, 1—2 (1956).
74. Kunzi R., Ottly W., Nichtlinear Optimierung, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New-York, 1969.
75. Rosen J. B., The gradient projection method for nonlinear programming, p. I, Linear constraints, Industr. Appl. Math. 8, 1 (1960).
76. Rosen J. B., Existence and uniqueness of equilibrium points for concave  $n$ -person games, Econometrica 33 (1965), 520—534.
77. Shapiro H. N., Note on a computation method in the theory of games, Comm. Pure and Appl. Math. 11, 4 (1958).

*Виталий Зиновьевич Беленький*  
*Виктор Александрович Волконский*  
*Сергей Александрович Иванков*  
*Алексей Борисович Поманский*  
*Аркадий Дмитриевич Шапиро*

Итеративные методы в теории игр  
и программировании

(Серия «Экономико-математическая библиотека»)

М., 1974 г., 240 стр. с илл.

Редактор *Н. П. Рябенская*

Техн. редактор *В. Н. Кондакова*

Корректоры

*С. Н. Емельянова, Т. С. Вайсберг*

---

Сдано в набор 24/XII 1973 г. Подписано к печати  
13/III 1974 г. Бумага  $84 \times 108 \frac{1}{32}$ , тип. № 1. Физ.  
печ. л. 7,5. Условн. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 11,63.  
Тираж 16 000 экз. Т-20808. Цена книги 74 коп.  
Зак. 527.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинград-  
ская типография № 1 «Печатный Двор» имени  
А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государ-  
ственном комитете Совета Министров СССР по  
делам издательств, полиграфии и книжной тор-  
говли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

---

Отпечатано с матриц во 2-й типографии издатель-  
ства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

Цена 74 к.