

А.Т. ФОМЕНКО

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТОПОЛОГИИ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.15
Ф 76
УДК 513.83

Фоменко А. Т. Вариационные методы в топологии. — М.: Наука, 1982. — 344 с.

Книга посвящена вопросам современного многомерного вариационного исчисления. Центральное место в ней занимает изложение качественно новых методов явного нахождения многомерных экстремалей функционалов и изучения их топологических свойств. Впервые в форме, доступной для широкого круга специалистов, излагается решение классической многомерной проблемы Плато.

Для математиков, специализирующихся в области топологии, глобального вариационного исчисления, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, групп и алгебр Ли. Может служить основой спецкурсов и спецсеминаров.

Ф 1702040000-151 46-82.
053(02)-82

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы,
1982

Предисловие	7
Некоторые часто встречающиеся обозначения	12
Глава 1. Простейшие классические вариационные задачи	13
§ 1. Уравнения экстремалей функционалов	13
§ 2. Геометрия экстремалей	17
2.1. Нульмерный и одномерный случаи (17). 2.2. Некоторые примеры простейших многомерных функционалов (18). 2.3. Классическая задача Плато в размерности 2 (26). 2.4. Вторая фундаментальная форма риманова подмногообразия (27). 2.5. Локальная минимальность (30). 2.6. Первые примеры глобально минимальных поверхностей (33).	
Глава 2. Многомерные вариационные задачи и экстраординарные теории (ко)гомологий	38
§ 3. Многомерная задача Плато	38
3.1. Классические постановки (о нахождении абсолютного минимума) (38). 3.2. Классические постановки (о нахождении относительного минимума) (40). 3.3. Трудности, возникающие при минимизации функционала объема vol_k при $k > 2$. Появление неустраимых стратов малых размерностей (40). 3.4. Постановки задачи Плато на языке обычных гомологий (43). 3.5. Классическая многомерная задача Плато (абсолютный минимум) и язык теории бордизмов (45). 3.6. Теория бордизмов — экстраординарная теория гомологий (51). 3.7. Формулировка решения классической задачи Плато (существование абсолютного минимума в задачах А и Б) (53).	
§ 4. Экстраординарные теории (ко)гомологий, определенные на «поверхностях с особенностями»	54
4.1. Характеристические свойства теорий (ко)гомологий (55). 4.2. Экстраординарные теории (ко)гомологий, определенные на конечных клеточных комплексах (56). 4.3. Построение экстраординарных теорий (ко)гомологий, определенных на «поверхностях с особенностями» (на компактах) (60). 4.4. Проверка характеристических свойств построенных теорий (61). 4.5. Дополнительные свойства экстраординарных спектральных теорий (63). 4.6. Приведенные группы (ко)гомологий на «поверхностях с особенностями» (64).	
§ 5. Кограница и граница пары пространств (X, A)	65
5.1. Кограница пары (X, A) (65). 5.2. Граница пары (X, A) (66).	
§ 6. Определение классов допустимых вариаций в терминах (ко)границы пары (X, A)	67
6.1. Вариационные классы $h(A, L, L')$ и $h(A, \tilde{L})$ (67). 6.2. Устойчивость вариационных классов (68).	
§ 7. Решение задачи о нахождении глобально минимальной поверхности (абсолютного минимума) в вариационных классах $h(A, L, L')$ и $h(A, \tilde{L})$	69
7.1. Постановка задачи (69). 7.2. Основная теорема существования глобально минимальных поверхностей (71). 7.3. Краткая схема доказательства теоремы существования (74).	
§ 8. Решение задачи о нахождении глобально минимальной поверхности (относительного минимума) в каждом гомотопическом классе	76

Глава 3. Вычисление в явном виде наименьших объемов (абсолютный минимум) топологически нетривиальных минимальных поверхностей	78
§ 9. Функции исчерпания и минимальные поверхности	78
9.1. Некоторые классические задачи (78). 9.2. Бордизмы и функции исчерпания (80). 9.3. ГМ-поверхности (81). 9.4. Постановка задачи об оценке снизу функции объема минимальной поверхности (82).	
§ 10. Определение и простейшие свойства коэффициента деформации векторного поля	83
§ 11. Формулировка основной теоремы об оценке снизу функции объема	85
11.1. Функции взаимодействия глобально минимальной поверхности с фронтом волны (85). 11.2. Формулировка основной теоремы об оценке объема (86).	
§ 12. Доказательство основной теоремы об оценке объема	87
§ 13. Некоторые геометрические следствия	93
13.1. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, проходящих через центр шара в евклидовом пространстве (93). 13.2. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, проходящих через фиксированную точку в многообразии (95). 13.3. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, образованных интегральными траекториями поля u (96).	
§ 14. Дефект риманова компактного замкнутого многообразия, геодезический дефект и наименьшие объемы глобально минимальных поверхностей реализующего типа	97
14.1. Определение дефекта многообразия (97). 14.2. Теорема о связи дефекта с наименьшими объемами поверхностей реализующего типа (100). 14.3. Доказательство гипотезы Райфенберга о существовании универсальной оценки сверху на «сложность» особых точек минимальных поверхностей реализующего типа (103).	
§ 15. Некоторые топологические следствия. Конкретные серии примеров глобально минимальных поверхностей нетривиального топологического типа	105
15.1. Глобально минимальные поверхности, реализующие нетривиальные (ко)циклы в симметрических пространствах (105). 15.2. Компактные симметрические пространства и явный вид геодезического диффеоморфизма (107). 15.3. Вычисление в явном виде коэффициента деформации радиального векторного поля на симметрических пространствах (110). 15.4. Явная формула для геодезического дефекта симметрического пространства (118). 15.5. Глобально минимальные поверхности наименьшего объема ($\text{vol}_k X_0 = \Omega_k^0$) в симметрических пространствах являются симметрическими пространствами ранга 1 (119). 15.6. Доказательство теоремы классификации поверхностей наименьшего объема в некоторых классических симметрических пространствах (121).	
Глава 4. Локально минимальные замкнутые поверхности, реализующие нетривиальные (ко)циклы и элементы гомотопических групп симметрических пространств	129
§ 16. Постановка задачи. Вполне геодезические подмногообразия в группах Ли	129
§ 17. Сводка необходимых результатов о топологической структуре компактных групп Ли и симметрических пространств	130
17.1. Алгебры когомологий компактных групп Ли (130). 17.2. Подгруппы, вполне негомологичные нулю (132). 17.3. Циклы Понтрягина в компактных группах Ли (136). 17.4. Необходимые сведения о симметрических пространствах (137).	
§ 18. Группа Ли, содержащая вполне геодезическое подмногообразие, автоматически содержит группу изометрий этого подмногообразия	142
§ 19. Редукция задачи об описании (ко)циклов, реализуемых вполне геодезическими подмногообразиями, к задаче описания (ко)гомотопических свойств картановских моделей	145

§ 20. Теорема классификации, описывающая вполне геодезические подмногообразия, реализующие нетривиальные (ко)циклы в (ко)гомологиях компактных групп Ли	148
20.1. Формулировка теоремы классификации (148). 20.2. Случай пространств типа II (149). 20.3. Случай пространств типа I. (Ко)гомологически тривиальные картановские модели. Свойства отображения возведения в квадрат симметрического пространства (150). 20.4. Случай пространств типа I. Пространства $SU(k)/SO(k)$ (153). 20.5. Случай пространств типа I. Пространства $SU(2m)/Sp(m)$ (158). 20.6. Случай пространств типа I. Пространства $S^{2l-1} = SO(2l)/SO(2l-1)$. Вычисление в явном виде коциклов, реализуемых вполне геодезическими подмногообразиями типа I (160). 20.7. Случай пространств типа I. Пространство E_6/P_4 (162).	
§ 21. Теорема классификации, описывающая коциклы в когомологиях групп Ли, реализующиеся вполне геодезическими сферами	168
21.1. Формулировка теоремы классификации (168). 21.2. Вполне геодезические сферы, реализующие периодичность Вотта (170). 21.3. Реализация элементов гомотопических групп компактных групп Ли вполне геодезическими сферами (172). 21.4. Необходимые сведения о спинорных и полуспинорных представлениях ортогональной группы (174). 21.5. Спинорное представление ортогональной группы $SO(8)$ и группа автоморфизмов чисел Кэли (176). 21.6. Описание вполне геодезических сфер, реализующих нетривиальные (ко)циклы в когомологиях простых групп Ли. Случай группы $SU(n)$ (180). 21.7. Случай групп $SO(n)$ и $Sp(2n)$ (181).	
§ 22. Теорема классификации, описывающая элементы гомотопических групп симметрических пространств типа I, реализующиеся вполне геодезическими сферами	185
22.1. Формулировка теоремы классификации (185). 22.2. Доказательство теоремы классификации. Связь между числом линейно независимых полей на сферах и числом элементов гомотопических групп, реализуемых вполне геодезическими сферами (186).	
Глава 5. Вариационные методы в некоторых топологических задачах	194
§ 23. Периодичность Вотта с точки зрения многомерного функционала Дирихле	194
23.1. Явное описание изоморфизма периодичности Вотта для унитарной группы (194). 23.2. Унитарная периодичность и одномерные функционалы (196). 23.3. Теорема периодичности для унитарной группы основана на двумерных экстремалах функционала Дирихле (196). 23.4. Теорема периодичности для ортогональной группы основана на восьмимерных экстремалах функционала Дирихле (202).	
§ 24. Три геометрические задачи вариационного исчисления	207
24.1. Минимальные конусы и особые точки минимальных поверхностей (207). 24.2. Эквивариантная задача Плато (211). 24.3. Представление эквивариантных особенностей в качестве особых точек замкнутых минимальных поверхностей, вложенных в симметрические пространства (227). 24.4. О существовании нелинейных функций, графики которых в евклидовом пространстве являются минимальными поверхностями (232). 24.5. Гармонические отображения сфер в нетривиальных гомотопических классах (234).	
Глава 6. Построение глобально минимальных поверхностей в вариационных классах $h(A, L, L')$, $h(A, \tilde{L})$	251
§ 25. Когомологический случай. Вычисление кограницы пары $(X, A) = \bigcup_r (X_r, A_r)$ через кограницы пар (X_r, A_r)	251
§ 26. Гомологический случай. Вычисление границы пары $(X, A) = \bigcup_r (X_r, A_r)$ через границы пар (X_r, A_r)	260
§ 27. Замкнутость, инвариантность и устойчивость вариационных классов	266
27.1. S-перестройки поверхностей в римановом многообразии (266). 27.2. Замкнутость вариационных классов относительно предельных переходов (267). 27.3. Инвариантность вариационных классов относительно S-перестроек поверхностей (271). 27.4. Устойчивость вариационных классов (274).	
§ 28. Общее изопериметрическое неравенство	279
28.1. Выбор специальной системы координат (279). 28.2. Симплициальные точки поверхностей (280). 28.3. Изопериметрическое неравенство (281).	

§ 29. Минимизирующий процесс в вариационных классах $h(A, L, L')$, $h(A, \tilde{L})$	290
29.1. Минимизирующая последовательность поверхностей. Функции плотности, связанные с поверхностями (290). 29.2. Краткая схема построения минимизирующего процесса (291). 29.3. Конструктивное построение минимизирующего процесса и доказательство его сходимости. Первый шаг (294). 29.4. Второй и последующие шаги в построении минимизирующего процесса (303). 29.5. Теорема о совпадении наименьшего стратифицированного объема с наименьшим λ -вектором в вариационном классе (307).	
§ 30. Свойства функций плотности. Минимальность каждого страта поверхности, полученной в процессе минимизации	308
30.1. Значение функции плотности всегда не меньше единицы на каждом страте и равно единице только в регулярных точках (308). 30.2. Каждый страт является гладким минимальным подмногообразием, за исключением, быть может, множества особых точек меры нуль (318).	
§ 31. Доказательство глобальной минимальности построенных стратифицированных поверхностей	319
31.1. Доказательство основной теоремы существования глобально минимальной поверхности (319). 31.2. Доказательство теоремы о совпадении наименьшего стратифицированного объема с наименьшим λ -вектором в вариационном классе (324).	
§ 32. Фундаментальные (ко)циклы: глобально минимальных поверхностей. Точная реализация и точная заклепка	324
32.1. Теорема о фундаментальных (ко)циклах (324). 32.2. Точная минимальная реализация и точная минимальная заклепка (328). 32.3. Минимальные поверхности с границей, гомеоморфной сфере (330).	
Литература	336
Предметный указатель	341

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге изучается класс многомерных вариационных задач, связанных в основном с функционалами многомерного риманова объема и функционалом Дирихле, определенными на «подмногообразиях с особенностями» в объемлющем римановом многообразии. Хорошо известен ряд принципиальных трудностей, возникающих при попытке развития качественных методов в вариационных задачах в тех случаях, когда область определения многомерна. Аналогов теории Морса для стационарных точек многомерных функционалов не существует даже в сравнительно простых примерах. Изучение абсолютно минимальных (глобально минимальных) экстремалей затруднено тем, что для доказательства глобальной минимальности нужно рассматривать не малые, а большие вариации, что требует разработки новых топологических и аналитических методов. Особенно ярко это обстоятельство проявилось при решении многомерной задачи Плато, потребовавшей не только «правильной постановки», но и внедрения новых аналитических идей, например понятия стратифицированного объема или вектора мер (см. главу 2). Все это привело к тому, что для решения вариационных задач типа Плато (минимизации функционала объема) потребовалось создать синтетический топологический и аналитический аппарат, находящийся на стыке нескольких математических областей: алгебраической топологии, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории групп и алгебр Ли.

Физическая мыльная пленка, затягивающая фиксированный проволочный контур в трехмерном евклидовом пространстве, является моделью так называемой минимальной поверхности, т. е. любое достаточно малое возмущение этой пленки увеличивает ее площадь. Математическое доказательство существования такой пленки для любого спрямляемого контура в трехмерном пространстве и составляло содержание известной проблемы Плато в размерности два. Эта задача была решена Дугласом, Радом, Курантом (см. обзор в [6]). Минимальная поверхность может иметь самопересечения и другие сингулярные точки, хотя, если контур не имеет особенностей, эта пленка допускает непрерывную параметризацию двумерным многообразием с краем, т. е. является образом этого многообразия при некотором непрерывном отобра-

жении. Для поверхностей размерностей, больших чем два, была поставлена многомерная задача Плато: пусть в римановом многообразии M фиксировано замкнутое гладкое $(k-1)$ -мерное подмногообразие-«контур» A , и пусть $\{X\}$ есть класс всех таких пленок X (вложенных в M) с границей A , что каждая пленка X допускает непрерывную параметризацию, т. е. представима в виде образа некоторого многообразия с краем; другими словами, $X = f(W)$, где W — некоторое k -мерное многообразие с краем ∂W , гомеоморфным A , и $f: W \rightarrow M$ — непрерывное отображение, совпадающее на крае ∂W с фиксированным гомеоморфизмом ∂W на A ; возникает вопрос: можно ли найти в классе $\{X\}$ такую пленку X_0 , которая была бы в каком-нибудь разумном смысле минимальной пленкой? Если отбросить классическое понятие многообразия-пленки с краем и сильно расширить понятия пленки и ее границы, в частности забыть о параметризации пленок и рассматривать непараметризованные пленки, то тогда задача Плато может быть сформулирована на языке обычных цепей и гомологий, а именно: найти минимальную пленку, аннулирующую фундаментальный цикл многообразия-«контура» A . В этой постановке решение задачи было получено в серии работ [16], [17], [35]—[46]. Однако такой перевод задачи на язык обычных цепей и гомологий означал игнорирование вопроса о существовании минимального «многообразия с краем», поскольку из существования решения в классе обычных гомологий в общем случае не следует существование минимальной пленки в классе $\{X\}$, т. е. в классе пленок, являющихся непрерывными образами многообразий с краем. Основная трудность, возникающая при попытке минимизации функционала k -мерного объема при $k > 2$ (в двумерном случае эта трудность отсутствует; см. обсуждение в § 3), состоит в том, что в процессе деформации пленки, стремящейся занять положение с наименьшим объемом, в этой пленке начинают возникать складки, схлопывания, приводящие к появлению кусков малых размерностей, не влияющих на k -мерный объем пленки, но играющих большую роль в топологической структуре пленки. Это приводит к необходимости рассматривать сразу все размерности (а не только одну, как это имеет место в постановке задачи в терминах цепей, см. выше) и минимизировать не только один старший объем, а все объемы меньших размерностей. Оказывается, эта задача может быть эквивалентно сформулирована на языке теории бордизмов (см. главу 2). Полное решение проблемы нахождения минимальной пленки в терминах образов «многообразий с краем» дано в цикле работ автора [21], [23], [24], [27], [29]—[32]. При этом оказалось, что многомерная варнационная задача нахождения абсолютного минимума решается не только в классах обобщенных бордизмов, но и в весьма широком классе краевых условий, определяемых произвольной так называемой экстраординарной теорией (ко)гомологий (см. главу 2). Кроме того, удастся решить и задачу

реализации нетривиальных (ко)циклов с помощью поверхностей наименьшего объема.

В книге излагаются следующие три основных направления: 1) доказательство конструктивных теорем существования глобально минимальных и топологически нетривиальных решений; 2) эффективное нахождение конкретных минимальных поверхностей (что является достаточно трудной задачей ввиду необходимости изучать большие, а не малые вариации); 3) установление связей между топологическими свойствами экстремалей многомерных функционалов типа функционала объема и функционала Дирихле и алгебро-топологическими свойствами тех римановых многообразий, на которых рассматривается данная вариационная задача.

Современный аппарат многомерных вариационных задач весьма разветвлен, поэтому мы ограничились рассмотрением только тех вопросов, которые связаны с геометрическим методом построения многомерных экстремалей, с методом минимизации стратифицированного объема и методом вычисления топологических свойств экстремалей и их явного построения. Эти методы разработаны автором в [21]—[32], где содержится также решение многомерной проблемы Плато в терминах теории бордизмов (соответствующие результаты изложены в главах 2, 3, 6 настоящей книги). Особое внимание мы уделили применению указанных методов к анализу некоторых топологических и аналитических задач, например к исследованию унитарной и ортогональной периодичности Ботта (см. главу 5). За рамками книги остались теории интегральных потоков, цепей и варифолдов, изложенные, например, в [17], [20], [41], [42].

Расположение материала и вся архитектура книги основаны на спецкурсе, который читался автором на механико-математическом факультете МГУ для студентов и аспирантов. При изложении материала мы старались определять и комментировать все основные понятия, используемые в тексте, не стремясь, однако, к полному самообеспечению. В частности, предварительное знакомство читателя с основными геометрическими идеями, изложенными в книге [2], облегчит усвоение излагаемых методов и результатов. Конструктивные теоремы существования глобально минимальных решений сформулированы нами в первых главах книги, поскольку на них основаны некоторые дальнейшие конструкции, но доказательства этих теорем помещены в последнюю главу 6, чтобы не прерывать естественное развитие событий, при котором из самого факта существования минимальных решений сразу извлекаются важные топологические и геометрические следствия.

В первой главе излагаются основные понятия многомерного вариационного исчисления — уравнения Эйлера — Лагранжа, свойства экстремалей функционалов риманова объема и Дирихле, уста-

навливаются взаимоотношения между локальной и глобальной минимальностью.

Вторая глава посвящена постановке и решению многомерной проблемы Плато в терминах экстраординарных теорий (ко)гомологий, в частности в терминах теории бордизмов. Здесь приведены формулировки основных теорем существования глобально минимальных поверхностей и краткая схема доказательства (полное доказательство изложено в заключительной главе 6).

В третьей главе разработан геометрический метод эффективного обнаружения глобально минимальных решений в конкретных геометрических ситуациях. Оказывается, для любого риманова многообразия можно вычислить точную универсальную оценку снизу на объем любой топологически нетривиальной минимальной поверхности, что позволяет в целом ряде случаев устанавливать глобальную минимальность конкретных подмногообразий, например в симметрических пространствах.

Четвертая глава содержит полную классификацию локально минимальных вполне геодезических подмногообразий, реализующих нетривиальные (ко)циклы и элементы гомотопических групп в симметрических пространствах. Это, в частности, дает классификацию стационарных точек функционала Дирихле на пространствах отображений дисков в симметрические пространства.

Разработанный аппарат позволяет получить известную топологическую периодичность Ботта, исходя из экстремалей двумерного и восьмимерного функционалов Дирихле, не в два или восемь шагов, как это получается при использовании теории Морса для геодезических, а в один шаг (см. главу 5). В этой же пятой главе рассматриваются три известные геометрические задачи вариационного исчисления: задача нахождения минимальных решений, инвариантных при действии некоторой компактной группы Ли (и задача о конусах); задача о существовании нелинейных функций, графики которых в евклидовом пространстве являются минимальными поверхностями; задача реализации при помощи гармонического отображения гомотопических классов отображений сферы в сферу.

В шестой главе содержится подробное изложение методов минимизации функционала стратифицированного объема и конструктивного построения глобально минимальных решений, что и позволяет решать задачу нахождения экстремалей в любом топологическом вариационном классе. Здесь мы приводим полное доказательство основной теоремы существования глобально минимальных поверхностей нетривиального топологического типа в произвольном классе бордизмов. Разработанные методы позволили эффективно описать топологию и геометрию многих конкретных минимальных и гармонических поверхностей в римановых многообразиях.

В списке литературы мы выделили книги учебного характера и более специальную литературу, которой читатель может пользоваться для дальнейшего изучения изложенных в книге вопросов. Книга рассчитана на студентов и аспирантов математических отделений университетов, а также может быть полезна для читателей, интересующихся вопросами минимизации многомерных функционалов с точки зрения приложений. Автор надеется, что настоящая книга в некоторой степени восполнит пробел, имеющийся в отечественной литературе по вопросам современного многомерного вариационного исчисления.

А. Т. Фоменко

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

$\mathbb{Z}$ — группа (кольцо) целых чисел.

$\mathbb{Z}_p$ — группа (кольцо) вычетов по модулю p .

M^n — объемлющее риманово многообразие.

$\langle, \rangle$ — скалярное произведение.

A^{k-1}, V^{k-1} — граница, «контур», $(k-1)$ -мерное гладкое подмногообразие.

W^k — пленка с «границей» A или V ; $X = f(W)$ — образ многообразия W при отображении $f: W \rightarrow M$.

AB — категория абелевых групп.

ABC — категория компактных абелевых групп.

P^2 — категория конечных клеточных комплексов и пар комплексов.

GFf — категория конечномерных векторных пространств над полем F .

GR — категория R -модулей над кольцом R .

GF — категория векторных пространств над полем F .

$\Delta_*(X, A)$ — максимальная граница пары (X, A) в размерности k для теории $\tilde{h}_*$.

$\nabla^*(X, A)$ — максимальная кограница пары (X, A) в размерности k для теории $\tilde{h}^*$.

$\mathcal{O} = h(A, L, L'), \tilde{\mathcal{O}} = h(A, \tilde{L})$ — вариационные классы.

G, H — алгебры Ли, $\tilde{G}, \tilde{H}$ — соответствующие односвязные группы Ли. В тех случаях, когда одновременно употребляются как алгебры, так и группы Ли, для групп Ли иногда используется обозначение $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$.

§ 1. Уравнения экстремалей функционалов

Вариационные задачи — один из важнейших классов математических задач, ведущих свое происхождение от механических и физических проблем движения и устойчивости. Так, например, геодезические линии, минимальные (мыльные) пленки, натянутые на контур, уравнения движения механических систем и т. д. являются решениями соответствующих вариационных задач.

Начнем с общего понятия функционала. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ ограниченную область D с гладкой или кусочно-гладкой границей ∂D ; пусть $x^1, \dots, x^k$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^k$; рассмотрим на D всевозможные гладкие вектор-функции $f(x^1, \dots, x^k) = f(x^\alpha) = \{f^1(x^\alpha), \dots, f^k(x^\alpha)\} = \{f^i(x^\alpha)\}$, $1 \leq i \leq k$. Область D будем называть областью изменения параметров $x^1, \dots, x^k$. Пространство $F = F(D)$ всех таких вектор-функций естественно снабжается структурой линейного пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; это пространство «бесконечномерное», так как нельзя выбрать конечного набора функций, по которым, как по базису, разлагалась бы (с постоянными коэффициентами) любая вектор-функция. Мы будем рассматривать на этом пространстве F различные функционалы I . При работе с функционалами полезно иметь в виду некоторую аналогию со свойствами обычных функций, которую мы опишем ниже.

Пусть задана гладкая функция $L(x^\beta, p^i, q_\alpha^i)$ от трех групп переменных: x^β, p^i, q_α^i , $1 \leq \alpha, \beta \leq k$, $1 \leq i \leq n$. Эту функцию L назовем лагранжианом. Построим функционал $I[f]$, где $f \in F(D)$, по следующему правилу: $I[f] = \int_D L(x^\beta, f^i(x^\beta), f_{x^\alpha}^i(x^\beta)) d\sigma_k$, где $\int$ обозначает k -кратный интеграл по k -мерной области D , $d\sigma_k = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ — стандартная k -мерная форма евклидова объема в $\mathbb{R}^k$. Сокращенно будем записывать $I[f]$ так: $I[f] = \int_D L(x^\beta, f^i, f_{x^\alpha}^i) d\sigma_k$, опуская аргументы у f^i и $f_{x^\alpha}^i$, где $f_{x^\alpha}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}$ — частные производные.

Пример: функционал длины дуги $\int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt}} dt$, где $D = [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$, $k=1$, $\gamma(t) = f(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$ — кривая в $\mathbb{R}^n$, снабженном римановой метрикой $g_{ij}(y)$; как всегда, в тензорной записи, мы считаем, что по повторяющимся верхним и

нижним индексам производится суммирование. Здесь лагранжиан имеет вид $L = L\left(y^i, \frac{dy^i}{dt}\right) = V g_{ij}(y) \dot{y}^i \dot{y}^j$. Если кривая $\gamma(t)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана в явном виде: $y = f(t)$, то $L = L(f_t) = V \sqrt{1 + (f_t)^2}$.

Пример: функционал площади $I[f] = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$, где параметры u, v изменяются в области D на плоскости $\mathbb{R}^2$, а отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ задает двумерную поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, снабженную индуцированной римановой метрикой $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$; $E = \langle f_u, f_u \rangle$, $F = \langle f_u, f_v \rangle$, $G = \langle f_v, f_v \rangle$; здесь $L = L(f_u, f_v)$. Если поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ задана в виде графика $z = z(u, v)$, т. е. $f(u, v) = (u, v, z(u, v))$, то $I[f] = \iint_D \sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2} du dv$.

При изучении функционалов нас будут в первую очередь интересоваться их «критические точки». Обратимся к аналогии

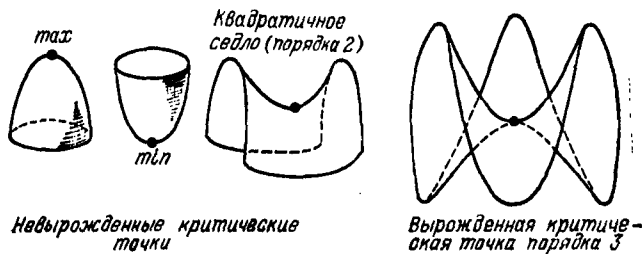


Рис. 1.

с обычными функциями, например, рассмотрим функции одной или двух переменных: $\alpha(t)$ или $\alpha(u, v)$. В большой степени поведение функции определяется количеством и расположением тех точек t_0 (или точек (u_0, v_0)), в которых $\alpha'_i(t_0) = 0$ (или $\alpha_u(u_0, v_0) = \alpha_v(u_0, v_0) = 0$), т. е. $\text{grad}(\alpha) = 0$. Такие точки, в которых $\text{grad}(\alpha) = 0$, обычно называются критическими или стационарными точками функции α . Для функции двух переменных среди критических точек содержатся, например, точки максимума, минимума и невырожденные седловые точки (рис. 1). В механике знание тех точек, в которых потенциальная энергия достигает минимума, имеет важное значение для нахождения равновесия механической системы.

Аналогично, при изучении функционалов вида $I[f]$ большое внимание уделяется нахождению тех стационарных «точек» — функций f_0 , в которых функционал достигает минимума, максимума или имеет седловую точку. Для точного определения нужно сначала понять, что такое «производная по направлению» от функционала I в некоторой «точке» $f \in F$. Нужно получить аналог уравнения $\text{grad}(\alpha) = 0$. Если в некоторой точке $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$

задано некоторое направление $a = (a^1, a^2)$, то производная функции $\alpha(u, v)$ по направлению a имеет вид $\frac{d\alpha}{da} = \langle a, \text{grad}(\alpha) \rangle = = a^1 \alpha_u + a^2 \alpha_v$. Таким образом, в случае обычной функции точка (u_0, v_0) является критической тогда и только тогда, когда $\frac{d\alpha(u_0, v_0)}{da} = 0$ для любого направления a . При этом производная

$\frac{d\alpha}{da}$ может быть вычислена так: $\frac{d\alpha(x)}{da} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\alpha(x + \varepsilon a) - \alpha(x)]$,

где $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Именно в такой форме мы и обобщим понятие производной по направлению на случай функционалов. Рассмотрим «точку» $f \in F(D)$ и вектор-функцию $\eta \in F(D)$, достаточно малую и такую, что $\eta|_{\partial D} \equiv 0$ (иногда требуют, чтобы $\eta \equiv 0$ в окрестности ∂D). Такие функции η мы будем называть возмущениями функции f . Сместимся из «точки» f в «точку» $f + \varepsilon \eta$ (рис. 2), т. е. рассмотрим малое возмущение исходной функции f .

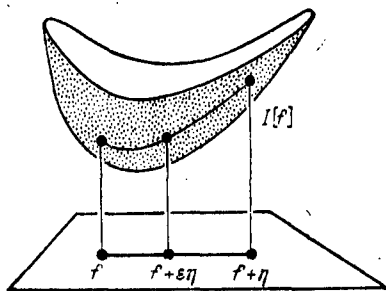


Рис. 2.

Функция η задает «направление смещения» из «точки» f (как вектор a задавал направление смещения из точки (u, v)). Построим следующее выражение: $\frac{1}{\varepsilon} (I[f + \varepsilon \eta] - I[f])$. Переходя к пределу, получаем функцию, которую обозначим через $\frac{dI[f]}{d\eta} = = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (I[f + \varepsilon \eta] - I[f])$ и назовем «производной функционала I в точке f по направлению η ». Иногда функцию $\frac{dI[f]}{d\eta}$ представляют в виде $\frac{dI[f]}{d\eta} = \int_D \left\langle \frac{\delta I}{\delta f}, \delta f \right\rangle d\sigma_n$, где $\delta f = \eta = (\eta^1, \dots, \eta^k)$,

а вектор $\frac{\delta I}{\delta f} = \left(\frac{\delta I}{\delta f^i} \right)$, определяемый предыдущим равенством, называют вариационной производной функционала $I[f]$. Развивая далее аналогию с обычными функциями, дадим следующее

Определение 1.1. Функцию $f_0 \in F$ назовем стационарной (или экстремальной, критической) функцией для функционала I , если $\frac{\delta I[f_0]}{\delta f} \equiv 0$ для любого возмущения $\delta f = \eta \in F$ такого, что $\eta \equiv 0$ в окрестности границы ∂D .

Перейдем к аналитическому исследованию производной $\frac{\delta I[f_0]}{\delta f}$. Имеем

$$\delta I[f] = I[f + \varepsilon \eta] - I[f] = \int_D \left[L(x^B; f' + \varepsilon \eta'; f'_{x^a} + \varepsilon \eta'_{x^a}) - \right. \\ \left. - L(x^B; f'; f'_{x^a}) \right] d\sigma_n.$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned}\delta I[f] &= \int_D \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial f^i} \varepsilon \eta^i + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \varepsilon \eta_{x^\alpha}^i + o(\varepsilon) \right] d\sigma_k = \\ &= \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} \eta^i + \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \eta_{x^\alpha}^i \right] d\sigma_k + \int_D o(\varepsilon) d\sigma_k.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\delta I[f] &= \varepsilon \int_D \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \eta^i \right) d\sigma_k + \\ &+ \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \right) \right) \eta^i d\sigma_k + \int_D o(\varepsilon) d\sigma_k.\end{aligned}$$

Так как мы считаем все участвующие в вычислениях функции гладкими (или кусочно-гладкими), то в первом интеграле интегрирование по переменной x^α можно отделить от интегрирования по всем остальным переменным $x^1, \dots, \hat{x}^\alpha, \dots, x^k$ (в силу теоремы о перемене порядка интегрирования). Знаком $\wedge$ мы указываем пропущенную координату. Получаем

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \eta^i \right) d\sigma_k = \int_{x^1, \dots, \hat{x}^\alpha, \dots, x^k} \left[\int_P^Q \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \eta^i \right) dx^\alpha \right] d\sigma_{k-1}$$

(точки P и Q зависят от $x^1, \dots, \hat{x}^\alpha, \dots, x^k$; $d\sigma_{k-1} = dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^\alpha \wedge \dots \wedge dx^k$). Поскольку во внутреннем интеграле $\int_P^Q$ переменные $x^1, \dots, \hat{x}^\alpha, \dots, x^k$ можно рассматривать как параметры, то

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \eta^i \right) d\sigma_k = \int_{x^1, \dots, \hat{x}^\alpha, \dots, x^k} \left[\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \eta^i \right]_Q - \left[\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \eta^i \right]_P d\sigma_{k-1} = 0,$$

так как $\eta^i(Q) = \eta^i(P) = 0$ (см. выше). Итак,

$$\delta I[f] = \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \right) \right] \eta^i d\sigma_k + \int_D o(\varepsilon) d\sigma_k.$$

Отсюда:

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f^i} = \frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x^\alpha}^i} \right),$$

так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_D o(\varepsilon) d\sigma_k = 0.$$

Если $f_0 \in F$ — стационарная (экстремальная) функция для функционала $I[f]$, то для любой функции η (где $\eta = 0$ около ∂D) выполнено тождество

$$\int_D \sum_{i=1}^n \eta^i \left[\frac{\partial L}{\partial f_0^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{0,x^\alpha}^i} \right) \right] d\sigma_k = 0,$$

откуда

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f_0^i} = \frac{\partial L}{\partial f_0^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{0,x^\alpha}^i} \right) = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Эта система дифференциальных уравнений называется системой уравнений Эйлера — Лагранжа для функционала I . Оформи́м предыдущие результаты в виде теоремы.

Теорема 1.1. *Функция $f_0 \in F$ является экстремальной функцией для функционала $I[f]$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений Эйлера — Лагранжа.*

§ 2. Геометрия экстремалей

2.1. Нульмерный и одномерный случаи. В случае обычных функций $f(x)$, рассматриваемых на гладком многообразии M^n , уравнение экстремальных (критических) точек функции f имеет вид $\text{grad } f = 0$. Если все критические точки невырождены (т. е. невырожден гессиан функции f ; см., например, [1]), то тогда, оказывается, топология многообразия M в значительной степени определяется количеством критических точек и их индексами; во всяком случае можно выяснить, из каких клеток склеено это многообразие. Соответствующая процедура описывается теорией Морса, изложенной, например, в [1].

Следующий шаг (по размерности вариационной задачи) приводит нас к функционалам, определенным на пространстве гладких (или кусочно-гладких) кривых. К числу важнейших одномерных функционалов принадлежат функционалы длины

$$l_a^b(\gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j} dt$$

и действия

$$S_a^b(\gamma(t)) = \int_a^b g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j dt,$$

определенные на пространстве кусочно-гладких кривых в римановом многообразии. Экстремальными этих функционалов являются геодезические, отнесенные к натуральному параметру (в случае функционала действия), и геодезические, отнесенные к произвольному (кусочно-гладкому) параметру (в случае функционала

длины); (см., например, [2]). И в этом случае знание экстремалей этих функционалов позволяет в значительной степени восстановить топологическую структуру многообразия, на котором рассматриваются кривые и функционалы. «Одномерная» теория сложнее «нульмерной», так как здесь приходится иметь дело с сопряженными точками вдоль геодезических, индекс которых вычислять сложнее, чем индекс критической точки в случае гладких функций.

В настоящей книге мы будем рассматривать многомерные функционалы (в основном функционалы площади и объема), для которых размерность D (см. § 1) больше двух. Это вызывает некоторое усложнение теории, но получаемые результаты оказываются зато более гибкими с точки зрения приложений. В дальнейшем мы будем четко различать понятия локальной минимальности и глобальной минимальности. В одномерном случае имеется, вообще говоря, много геодезических (разной длины), соединяющих две фиксированные точки P и Q на римановом многообразии M . Все эти траектории, как известно (см., например, [2]), локально минимальны, т. е. являются кратчайшими траекториями между любыми своими двумя достаточно близкими точками; с другой стороны, глобально минимальными траекториями, соединяющими точки P и Q , являются только геодезические наименьшей длины. Например, стандартный экватор на стандартной двумерной сфере локально минимален (как одномерная экстремаль), но не глобально минимален. Понятие глобальной минимальности для функционалов объема мы определим ниже.

2.2. Некоторые примеры простейших многомерных функционалов. Функционал объема. В качестве первого примера рассмотрим так называемые мыльные пленки, возникающие в том случае, когда фиксирован некоторый проволочный замкнутый контур, являющийся границей мыльной пленки. Соответствующим математическим описанием таких поверхностей служат минимальные поверхности. Напомним определение функционала объема на римановом многообразии M^n . В простейшем случае, когда рассматривается открытая ограниченная область D с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, в качестве объема $\text{vol}_n(D)$ берется интеграл $\int_D dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ (см., например, [2]). Если область D вложена в гладкое риманово многообразие M^n с римановой метрикой $g_{ij}(x)$, то в том случае, когда область D содержится в одной карте U , в качестве $\text{vol}_n(D)$ берется $\int_U \sqrt{\det A} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, где $A = (g_{ij}(x))$ — матрица метрического тензора (определяющая первую квадратичную форму). Если же область D содержится в нескольких картах, то объем области определяется как интеграл от указанной внешней дифференциальной формы объема; при этом нужно фиксировать некоторое гладкое разбиение единицы; в курсе

анализа доказывается, что от выбора этого разбиения объем не зависит.

В частных случаях приведенное выше определение объема превращается в классические определения. Так, если $M^n = \mathbb{R}^n$, $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты и $g_{ij} = \delta_{ij}$, то, очевидно, получаем определение обычного евклидова объема области.

Далее, если M^n — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^N$ и g_{ij} — индуцированная риманова метрика, то указанное выше определение совпадает с другим интуитивным представлением об объеме поверхности. Рассмотрим на M^n локальные координаты $x^1, \dots, x^n$ (в пределах одной карты) и представим D в виде объединения бесконечно малых параллелепипедов Π_i , каждый из которых образован поверхностями уровня локальных координат, т. е. поверхностями, задаваемыми уравнениями $x^i = \text{const}$ (рис. 3). Тогда

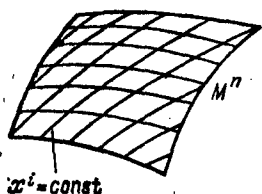


Рис. 3.

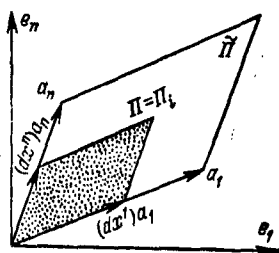


Рис. 4.

можно считать, что $\text{vol}_n(D) = \sum_i \text{vol}(\Pi_i)$. Докажем, что $\text{vol}_n(\Pi_i) =$

$= \sqrt{\det A} dx^1 \dots dx^n$, где через $dx^1, \dots, dx^n$ обозначены длины ребер параллелепипеда Π_i . Рассмотрим векторы $a_1, \dots, a_n$, касательные к многообразию M^n в точке $x \in D$ и являющиеся векторами скоростей координатных линий, проходящих через точку x . Обозначим через $\tilde{\Pi}(a_1, \dots, a_n)$ параллелепипед, расположенный в касательной плоскости и натянутый на векторы $a_1, \dots, a_n$. Тогда бесконечно малый параллелепипед Π можно считать натянутым на векторы $(dx^1)a_1, \dots, (dx^n)a_n$ (рис. 4). Докажем, что $\text{vol}_n(\tilde{\Pi}) = \sqrt{\det A}$; отсюда сразу будет следовать, что

$$\text{vol}_n(\Pi) = \text{vol} \Pi((dx^1)a_1, \dots, (dx^n)a_n) =$$

$$= (\text{vol} \tilde{\Pi}(a_1, \dots, a_n)) dx^1 \dots dx^n = \sqrt{\det A} dx^1 \dots dx^n.$$

В самом деле, рассмотрим в касательной плоскости к M^n ортобазис $e_1, \dots, e_n$, и пусть $B: (e_1, \dots, e_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)$ — линейное преобразование в касательной плоскости, порожденное заданной нами выше криволинейной системой координат $x^1, \dots, x^n$ и переводящее единичный куб в касательной плоскости в параллелепипед $\tilde{\Pi}(a_1, \dots, a_n)$. Тогда, если $A = (g_{ij})$, то из закона преобра-

зования квадратичной формы мы получаем $A = BV^T$ (знак T указывает транспонирование), т. е. $\det B = \sqrt{\det A}$. С другой стороны, из линейной алгебры известно, что $\text{vol } \tilde{P}(a_1, \dots, a_n) = \det B$, что и завершает доказательство. Таким образом, приведенное нами общее определение объема области на подмногообразии в $\mathbb{R}^N$ совпадает с интуитивным представлением об объеме, получающемся суммированием объемов бесконечно малых евклидовых параллелепипедов.

Рассмотрим гладкую гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, заданную, например, в виде графика $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$. Пусть область определения функции f является ограниченная область D в $\mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим на пространстве всех таких функций f функционал объема $\text{vol}(f) = \int_D \sqrt{|\det A|} d\sigma_{n-1}$.

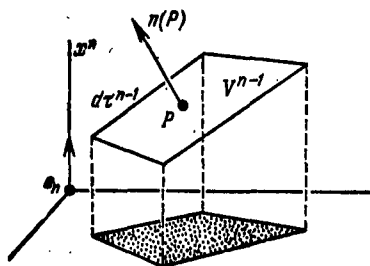


Рис. 5.

Здесь матрица $A = (g_{ij}(x))$, $x \in D$, — индуцированная риманова метрика на поверхности V^{n-1} , а $d\sigma_{n-1} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$, где $x^1, \dots, x^{n-1}$ — евклидовы координаты. Лагранжиан $\sqrt{|\det A|}$ можно записать в явном виде через функцию f . Пусть $d\tau^{n-1}$ — форма $(n-1)$ -мерного объема на V ; тогда $\text{vol}(f) = \int_D d\tau^{n-1}$. Пусть $P \in V^{n-1}$, $n(P)$ — единичная нормаль к V^{n-1} в точке P , $\alpha(P)$ — угол между $n(P)$ и $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ (рис. 5). Тогда

$$\text{vol}(f) = \int_D d\tau^{n-1} = \int_D \frac{d\sigma_{n-1}}{\cos \alpha(P)}.$$

Далее,

$$\cos \alpha(P) = \langle e_n, n(P) \rangle = \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2 \right)^{-1/2}.$$

Итак,

$$\text{vol}(f) = \int_D \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

Рассмотрим экстремальные поверхности V^{n-1} для функционала объема $\text{vol}(f)$ (т. е. графики экстремальных функций $x^n = f(x)$, $x \in D$). Уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(f_{x^i} \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} (f_{x^j})^2 \right]^{-1/2} \right) = 0.$$

Определение 2.2.1. Поверхности, являющиеся экстремальными для функционала объема $\text{vol}(f)$, называются минимальными (или локально минимальными) поверхностями.

Минимальные поверхности моделируются, например, в $\mathbb{R}^3$ с помощью мыльных пленок, затягивающих замкнутый проволочный контур (в отсутствие силы тяжести); в этом случае $\text{vol}(f)$ совпадает с площадью поверхности.

Лемма 2.2.1. Для двумерной минимальной поверхности, заданной в виде графика $z = f(x, y)$ в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, уравнение Эйлера — Лагранжа приобретает вид

$$(1 + f_x^2) f_{yy} - 2f_{xy} f_{xy} + (1 + f_y^2) f_{xx} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} (f_x \cdot [1 + (f_x)^2 + (f_y)^2]^{-1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (f_y \cdot [1 + (f_x)^2 + (f_y)^2]^{-1/2}) = 0.$$

Дифференцируя и приводя подобные члены, получаем искомое утверждение.

Уравнение минимальной поверхности V^{n-1} допускает запись на языке локальных инвариантов вложения этой поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.2.1. Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая гиперповерхность. Средняя кривизна H равна тождественно нулю тогда и только тогда, когда V^{n-1} можно представить в окрестности каждой своей точки в виде графика экстремальной функции для функционала объема (т. е. в виде решения уравнения минимальной поверхности).

Таким образом, условие $H = 0$ и есть условие минимальности поверхности $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Доказательство сводится к прямому вычислению средней кривизны $H = \text{Sp}(A^{-1}Q)$ для графика $x^n = f(x)$, где A, Q — соответственно матрицы первой и второй квадратичных форм, и проверке того факта, что уравнение $H = 0$ совпадает с уравнением Эйлера — Лагранжа.

Мы не будем проводить это вычисление в общем случае, а рассмотрим только специальную ситуацию: двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Зададим локально поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиус-вектором $r = r(u, v)$. Тогда $\text{vol}(r) = \int_{D(u, v)} \sqrt{EG - F^2} du dv$, где $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ — матрица первой квадратичной формы: $E = \langle r_u, r_u \rangle$, $F = \langle r_u, r_v \rangle$, $G = \langle r_v, r_v \rangle$. Средняя кривизна H имеет вид $H = \text{Sp}(A^{-1}Q) = (EG - F^2)^{-1} (GL + 2FM + EN)$, где $Q = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ — матрица второй квадратичной формы: $L = \langle r_{uu}, n \rangle$, $M = \langle r_{uv}, n \rangle$, $N = \langle r_{vv}, n \rangle$, n — единичная нормаль к поверхности. Выберем на V^2 (локально) так называемые конформные (изотермические) координаты. Докажем существование таких координат для вещественно-аналитических метрик A . Пусть двумерная поверхность

в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ задана параметрически: $x = x(p, q)$, $y = y(p, q)$, $z = z(p, q)$, где p, q изменяются в некоторой области пространства $\mathbb{R}^2$. Тогда на поверхности возникает индуцированная метрика

$$ds^2 = E(dp)^2 + 2F dp dq + G(dq)^2, \quad g = EG - F^2 > 0.$$

Теорема 2.2.2. Пусть E, F, G — вещественно-аналитические функции переменных (p, q) . Тогда можно ввести новые локальные координаты u, v такие, что в этих координатах метрика dl^2 примет следующий вид: $dl^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2)$. Такие координаты называются изотермическими или конформными.

Доказательство. Разложим квадратичную форму ds^2 на множители:

$$ds^2 = \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + i\sqrt{Vg}}{\sqrt{E}} dq \right) \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - i\sqrt{Vg}}{\sqrt{E}} dq \right).$$

Мы ищем новые координаты (u, v) как функции от p, q : $u = u(p, q)$, $v = v(p, q)$, такие, что $ds^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2)$. Этого можно добиться, если удастся подобрать интегрирующий множитель, т. е. такую комплекснозначную функцию $\lambda = \lambda(p, q)$, что будут выполнены два тождества:

$$\begin{aligned} \lambda \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + i\sqrt{Vg}}{\sqrt{E}} dq \right) &= du + i dv, \\ \bar{\lambda} \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - i\sqrt{Vg}}{\sqrt{E}} dq \right) &= du - i dv \end{aligned}$$

(второе из них получается из первого комплексным сопряжением). Действительно, если такая функция $\lambda(p, q)$ найдена, то, перемножив два тождества, получаем $ds^2 = |\lambda|^{-2}(du^2 + dv^2)$, и можно положить $f(u, v) = |\lambda|^{-2}$. Итак, неизвестными функциями являются u, v, λ ; они должны удовлетворять уравнению

$$\lambda \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + i\sqrt{Vg}}{\sqrt{E}} dq \right) = du + i dv = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) dq.$$

Отсюда

$$\lambda \sqrt{E} = \frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p}, \quad \lambda \frac{F + i\sqrt{Vg}}{\sqrt{E}} = \frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q}.$$

Исключение λ дает

$$(F + i\sqrt{Vg}) \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) = E \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right),$$

или

$$F \frac{\partial u}{\partial p} - \sqrt{Vg} \frac{\partial v}{\partial p} = E \frac{\partial u}{\partial q}, \quad \sqrt{Vg} \frac{\partial u}{\partial p} + E \frac{\partial v}{\partial p} = E \frac{\partial v}{\partial q}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial p} = \frac{F \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{g}}, & \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{G \frac{\partial u}{\partial p} - F \frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{g}}; \\ \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{E \frac{\partial v}{\partial q} - F \frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{g}}, & \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{F \frac{\partial v}{\partial q} - G \frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{g}}. \end{cases}$$

Поскольку $\frac{\partial^2}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2}{\partial q \partial p}$, то получаем следующие уравнения: $Lu=0$, $Lv=0$, где дифференциальный оператор L имеет вид

$$L = \frac{\partial}{\partial q} \left[\left(F \frac{\partial}{\partial p} - E \frac{\partial}{\partial q} \right) (EG - F^2)^{-1/2} \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\left(F \frac{\partial}{\partial q} - G \frac{\partial}{\partial p} \right) (EG - F^2)^{-1/2} \right].$$

Из теории дифференциальных уравнений известно (мы не будем здесь это доказывать), что если функции E, F, G аналитические, то уравнение $Lf=0$ (называемое уравнением Бельтрами) всегда имеет решение. Отсюда и определяются функции u, v, λ . Если мы положим $w=u+iv$, $\bar{w}=u-iv$, то метрика поверхности запишется в виде $ds^2=g(w, \bar{w})dw d\bar{w}$. Таким образом, локально нашу поверхность можно считать комплексно-аналитической. Изотермические координаты определяются неоднозначно. Теорема доказана.

Итак, будем считать, что (u, v) — уже конформные координаты на поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. В конформных координатах $F=0$, $E=G$, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{vol}(r) &= \iint_D \sqrt{\langle r_u, r_u \rangle \cdot \langle r_v, r_v \rangle} du dv = \\ &= \iint_D \sqrt{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)} du dv. \end{aligned}$$

Далее, $H = \frac{1}{E}(L+N) = \frac{1}{E}\langle r_{uu} + r_{vv}, n \rangle = \frac{1}{E}\langle \Delta r, n \rangle$, где Δ — оператор Лапласа. Рассмотрим уравнения Эйлера — Лагранжа для $\text{vol}(r)$ в координатах (u, v) . При этом следует иметь в виду, что возможность записать уравнение Эйлера — Лагранжа в конформных координатах следует из того, что при варьировании функционала $\text{vol}(r)$ с помощью возмущения η можно считать все функции $r(u, v) + \varepsilon \eta(u, v)$ отнесенными к конформным координатам. Для этого достаточно ввести конформные координаты на каждой поверхности $r(u, v) + \varepsilon \eta(u, v)$ (дело в том, что координаты (u, v) , вообще говоря, уже не конформны на возмущенной поверхности $r + \varepsilon \eta$). Координаты $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ можно считать гладко зависящими от ε . Уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид $\frac{\partial}{\partial u}(x_u) + \frac{\partial}{\partial v}(x_v) = 0$, $\frac{\partial}{\partial u}(y_u) + \frac{\partial}{\partial v}(y_v) = 0$, $\frac{\partial}{\partial u}(z_u) + \frac{\partial}{\partial v}(z_v) = 0$, т. е. $\Delta r = 0$. Радиус-векторы r , удовлетворяющие уравнению $\Delta r = 0$,

называют гармоническими. Итак, в конформных координатах «минимальность радиус-вектора», т. е. его экстремальность для функционала площади, означает его гармоничность. Говорить о гармоничности радиус-вектора $r(u, v)$ можно только относительно какой-либо системы координат. При изменении координат свойство гармоничности, вообще говоря, разрушается. Итак, поскольку $\Delta r = 0$, то $H = \frac{1}{E} \langle \Delta r, n \rangle = 0$, и мы доказали теорему

2.2.1 в одну сторону. Обратно, пусть $H \equiv 0$; мы должны доказать, что $\Delta r = 0$ (в конформных координатах). Так как $\langle \Delta r, n \rangle = 0$, то достаточно проверить еще два равенства: $\langle \Delta r, r_u \rangle = 0$, $\langle \Delta r, r_v \rangle = 0$. Отсюда будет следовать, что $\Delta r = 0$. В самом деле, векторы n, r_u, r_v образуют репер в любой регулярной точке поверхности $r(u, v)$ (по определению поверхности). В силу выбора координат $E = G$ и $F = 0$, т. е. $\langle r_u, r_u \rangle = \langle r_v, r_v \rangle = 0$. Дифференцируя по u и v , получаем: $\langle r_{uu}, r_u \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle$, $\langle r_{uv}, r_u \rangle = \langle r_{vv}, r_v \rangle$, $\langle r_{uu}, r_v \rangle + \langle r_{uv}, r_u \rangle = 0$, $\langle r_{uv}, r_v \rangle + \langle r_{vv}, r_u \rangle = 0$. Нам следует проверить тождества $\langle r_{uu}, r_u \rangle + \langle r_{vv}, r_u \rangle = 0$, $\langle r_{uu}, r_v \rangle + \langle r_{vv}, r_v \rangle = 0$. Эти уравнения, очевидно, вытекают из предыдущей системы. Тем самым, мы доказали не только теорему 2.2.1, но и следующее утверждение.

Утверждение 2.2.1. *Двумерная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве тогда и только тогда описывается минимальным радиус-вектором, когда средняя кривизна тождественно равна нулю. В конформных координатах минимальный радиус-вектор становится гармоническим.*



Рис. 6.

Топологическая структура минимальных поверхностей $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ довольно сложна, в частности, если граничный контур фиксирован, то, вообще говоря, на него можно натянуть много «мыльных пленок» — нет теоремы единственности решения для дифференциального уравнения $H \equiv 0$ или $\Delta r = 0$. Примеры см. на рис. 6 и рис. 7. Решения уравнений $H = 0$, $\Delta r = 0$ могут иметь особенности. Пример — тройной лист Мёбиуса — см. на рис. 8. Эта минимальная пленка содержит сингулярную окружность, заполненную тройными особыми точками.

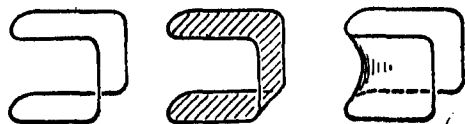


Рис. 7.

Гармонические радиус-векторы являются решениями уравнения Эйлера—Лагранжа еще для одного двумерного функционала —

функционала Дирихле. Рассмотрим трехмерный радиус-вектор $r(u, v)$ (координаты u, v произвольны). Функционалом Дирихле называется $D[r] = \int_{D(u, v)} \frac{E+G}{2} du dv$, где E, G — коэффициенты первой квадратичной формы для поверхности $r(u, v)$. Здесь $L(r_u, r_v) = \frac{1}{2}(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)$, а потому уравнение Эйлера—Лагранжа (в векторной записи) имеет вид $\Delta r = 0$, его решения — гармонические векторы. Так как $\frac{E+G}{2} \geq \sqrt{EG-F^2}$, то $D[r] \geq \text{vol}(r)$ для любого кусочно-гладкого радиус-вектора $r(u, v)$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда $E=G, F=0$, т. е. в конформной системе координат. Таким образом, любая экстремаль

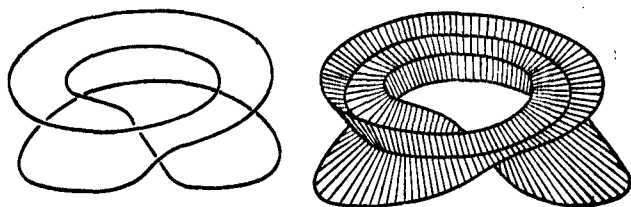


Рис. 8.

функционала $D(r)$, для которой координаты (u, v) оказались конформными, является экстремалью функционала $\text{vol}(r)$; обратное неверно. Для того чтобы получить все экстремали функционала $\text{vol}(r)$, следует рассмотреть все экстремали функционала $D[r]$ (т. е. гармонические радиус-векторы), отобрать из них только те, для которых (u, v) оказываются конформными координатами, а затем подвергнуть (u, v) произвольной регулярной замене координат. Гармонический радиус-вектор $r(u, v)$, для которого координаты (u, v) не конформны, не будет, вообще говоря, описывать минимальную поверхность. Пример: $r(u, v) = (u, v, \text{Re} f(u + iv))$ — график вещественной (или мнимой) части нелинейной комплексно-аналитической функции $f(u + iv)$.

Связь между функционалами $D[r]$ и $\text{vol}(r)$ во многом аналогична связи между функционалами длины $l_a^b[\gamma]$ и действия $S_a^b[\gamma] = \int_a^b |\dot{\gamma}|^2 dt$ пути γ . Ясно, что $(l_a^b[\gamma])^2 \leq (b-a) S_a^b[\gamma]$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда параметр t на траектории $\gamma(t)$ пропорционален длине дуги (такие экстремали $l_a^b[\gamma]$ будут геодезическими, если параметр натуральный). Это обстоятельство связано с тем, что функционалы длины и объема инвариантны относительно регулярных замен переменных, а функционалы действия и Дирихле не инвариантны.

2.3. Классическая задача Плато в размерности 2. «Задача Плато» — это термин, объединяющий серию задач, связанных с изучением экстремалей и абсолютных минимумов функционала k -мерного объема vol_k , определенного на k -мерных поверхностях, вложенных в n -мерное риманово многообразие M^n и удовлетворяющих тем или иным граничным топологическим условиям. В истории развития вариационных задач этого типа выделяются несколько периодов, характеризующихся различными подходами к понятиям «поверхность», «граница», «минимизация» и, соответственно, различными методами получения минимальных решений. Исторически первой была поставлена и решена задача Плато для случая двумерной поверхности в трехмерном (а затем в n -мерном) евклидовом пространстве. В параметрическом виде эта задача может быть сформулирована так. Пусть $f = f(u, v)$ — радиус-вектор двумерной поверхности X^2 в $M^n = \mathbb{R}^n$, т. е. $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает (локально) регулярное отображение области $U \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^n$; тогда $\text{vol}_2 f(U) = \int_U \sqrt{EG - F^2} du dv$ и экстремали этого функционала

являются решениями системы уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x^k}}{\frac{\partial}{\partial u}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x^k}}{\frac{\partial}{\partial v}} \right) = 0, \quad g = \sqrt{EG - F^2}, \quad 1 \leq k \leq n; \quad x^1, \dots, x^n —$$

декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$. В проблеме «о наименьшей площади» ставится вопрос: можно ли найти поверхность $X_0^2 = f_0(U)$ (и отображение f_0) такую, что эта поверхность имеет в качестве границы заданный заранее контур Γ (т. е. систему вложенных в $\mathbb{R}^n$ непересекающихся окружностей) и площадь этой поверхности — наименьшая по сравнению с площадями всех других поверхностей $X^2 = f(U)$, ограниченных этим же контуром Γ ? (См., например, [18].) Кроме этой задачи о нахождении абсолютного минимума (в классе всех поверхностей с заданной границей) рассматривалась также и задача о нахождении минимума в данном гомотопическом классе, т. е. в классе поверхностей (с заданной границей), гомотопных друг другу. Сравнительно давно было также доказано существование непрерывного отображения f_0 двумерной поверхности M^2 в $\mathbb{R}^3$, переводящего границу ∂M^2 поверхности M^2 в заданный контур $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ и минимизирующего двумерный функционал Дирихле (см. его определение выше), в частности минимизирующего и функционал двумерной площади vol_2 . Пленка $X_0^2 = f_0(M^2)$ может, конечно, иметь самопересечения и другие сингулярные точки (в зависимости от конфигурации контура Γ). Хотя эта пленка и допускает непрерывную параметризацию поверхностью M^2 (являясь ее непрерывным образом в $\mathbb{R}^3$ при отображении f_0), но, рассматриваемая как подмножество в $\mathbb{R}^3$, может быть не гомеоморфной этой исходной поверхности.

Литература по этой двумерной задаче и по связанным с ней вопросам огромна; здесь мы не в состоянии даже кратко коснуться

многих глубоких и интересных исследований, посвященных указанной тематике, поэтому отсылаем заинтересованного читателя к [5], [16], [17], [18], где, наряду с изложением этих вопросов, приведена значительная библиография. Описанный выше результат о существовании двумерного минимального решения (при заданном контуре) был распространен Морри (см., например, [16]) на случай контуров, вложенных в произвольное риманово многообразие.

А именно, пусть $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k S_i^1$ — набор из k ориентированных спрям-

ляемых замкнутых непересекающихся кривых в римановом многообразии M^n и пусть U — двумерная область типа k , т. е. граница области U является объединением k окружностей (U можно рассматривать как диск с $k-1$ дырками). Тогда существует такое отображение $f_0: U \rightarrow M$, что граница ∂U области U гомеоморфно отображается на набор кривых Γ , причем отображение f_0 гармонично, конформно и минимизирует функционалы Дирихле и двумерной площади. В частности, площадь $\text{vol}_2(X_0^u)$ поверхности $X_0^u = f_0(U)$ — наименьшая по сравнению со всеми значениями $\text{vol}_2(f(U))$, где f пробегает всевозможные кусочно-гладкие отображения области U типа k в M^n с фиксированной границей $\partial U \rightarrow \Gamma$.

2.4. Вторая фундаментальная форма риманова подмногообразия. Пусть $f: M^k \rightarrow W^n$ — гладкое вложение гладкого многообразия M^k в гладкое риманово многообразие W^n ; многообразие W^n будем предполагать ориентируемым, связным, без границы. Через TM обозначим касательное расслоение многообразия M , а через $T_m(M)$ — касательную плоскость к M в точке $m \in M$. Через $\langle x, y \rangle$ обозначим скалярное произведение пары векторов $x, y \in T_m(M)$, индуцированное заданной на W римановой метрикой g_{ij} . Через ∇ обозначим риманову связность на TM , т. е. симметричную связность, согласованную с этой индуцированной римановой метрикой (см., например, [2]). Напомним, что параллельный перенос, соответствующий этой связности, сохраняет скалярные произведения векторов. Как обычно, для произвольного тензорного поля P через $\nabla_X(P)$ будем обозначать ковариантную производную этого тензорного поля вдоль векторного поля X , заданного на M . Если через x обозначить значение векторного поля X в точке m (т. е. вектор $x = X(m) \in T_m(M)$), то тогда ковариантную производную тензорного поля P вдоль вектора x (в точке m) будем обозначать через $\nabla_x P$. Поскольку ∇ — тензорная операция, то $\nabla_x P$ является тензором (и зависит от точки m), причем имеет тот же тип, что и исходное тензорное поле P . Так как связность ∇ риманова (сохраняет скалярное произведение), то для любых двух векторных полей P, Z на M выполнено тождество $\nabla_x \langle P, Z \rangle = \langle \nabla_x P, Z \rangle + \langle P, \nabla_x Z \rangle$.

Обратимся теперь к подмногообразию $f(M^k) \subset W^n$; для упрощения обозначений обозначим $f(M^k)$ снова через M^k ; тогда,

наряду с касательным расслоением TM , однозначно определено нормальное расслоение NM (в каждой точке $m \in M$ определена плоскость $N_m^{n-h}(M)$, ортогональная к плоскости $T_m^h(M)$). Риманова метрика на W^n индуцирует скалярное произведение не только на TM , но и на NM ; кроме того, возникают две естественные римановы связности, индуцируемые на TM и NM вложением $M \rightarrow W$. Опишем эти связности. Пусть Y — гладкое векторное поле на M и $x \in T_m(M)$ — произвольный вектор. Положим, по определению, $\nabla_x(Y) = (\bar{\nabla}_x Y)^T$, где через $\bar{\nabla}$ обозначена риманова симметричная связность, заданная на объемлющем многообразии W (т. е. на TW), а $(\)^T$ — ортогональное проектирование на плоскость $T_m(M)$.

Лемма 2.4.1. *Операция ∇ , определенная выше, является римановой связностью без кручения на TM ; эта связность однозначно определяется римановой метрикой на M , индуцированной вложением $M \rightarrow W$.*

Доказательство. Алгебраические и дифференциальные свойства операции ∇ , характеризующие ковариантное дифференцирование, непосредственно следуют из определения. Проверим теперь, что эта операция сохраняет скалярные произведения. В самом деле, пусть Y и Z — два гладких векторных поля на M , $x \in T_m(M)$; тогда

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_x Z \rangle &= \langle (\bar{\nabla}_x Y)^T, Z \rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_x Z)^T \rangle = \\ &= \langle \bar{\nabla}_x Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_x Z \rangle = \bar{\nabla}_x \langle Y, Z \rangle = \nabla_x \langle Y, Z \rangle. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались тем, что поля Z, Y касаются подмногообразия M . Осталось проверить, что кручение у связности ∇ равно нулю. В самом деле,

$$\begin{aligned} \nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y, Z] &= (\bar{\nabla}_Y Z)^T - (\bar{\nabla}_Z Y)^T - [Y, Z] = \\ &= (\bar{\nabla}_Y Z)^T - (\bar{\nabla}_Z Y)^T - ([Y, Z])^T = (\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Z Y - [Y, Z])^T = 0, \end{aligned}$$

так как связность $\bar{\nabla}$ была симметричной. Лемма доказана.

Точно так же определяется риманова связность на нормальном расслоении NM . Рассмотрим произвольное гладкое сечение V расслоения NM , т. е. зададим в каждой точке $m \in M$ нормальный вектор $V(m) \in N_m(M)$. В силу гладкости сечения V мы получаем тем самым гладкое векторное поле, определенное на M . Пусть $x \in T_m(M)$; положим, по определению, $\nabla_x V = (\nabla_x V)^N$, где $(\)^N$ — ортогональная проекция на плоскость $N_m(M)$, ортогональную к $T_m(M)$.

Лемма 2.4.2. *Операция ∇ , определенная выше, является римановой связностью без кручения на NM , однозначно определяемой индуцированной на M римановой метрикой.*

Доказательство проводится, как и в случае леммы 2.4.1.

Перейдем к построению второй квадратичной формы; пусть $x \in T_m(M)$.

Определение 2.4.1. Пусть $v \in N_m(M)$, включим вектор v в произвольное гладкое векторное поле V на многообразии W так, чтобы поле V было ортогонально к подмногообразию M в некоторой окрестности точки $m \in M$. Определим линейное отображение $A^v: T_m(M) \rightarrow T_m(M)$ по формуле $A^v(x) = -(\bar{\nabla}_x V)^T$. Это отображение оказывается симметричным (см. доказательство ниже) и, следовательно, определяет некоторую билинейную форму A^v , которую мы и назовем второй фундаментальной формой подмногообразия $M \subset W$.

В действительности мы определили целое семейство A форм A^v , в котором вектор $v \in N_m(M)$ играет роль параметра: $A = \{A^v, v \in N_m(M)\}$.

Лемма 2.4.3. Форма A^v корректно определена, т. е. не зависит от способа включения вектора v в векторное поле V на W и гладко зависит от всех своих аргументов.

Доказательство. Пусть задано другое продолжение V' вектора v , где поле V' ортогонально подмногообразию M в окрестности точки m . Пусть $y \in T_m(M)$ и Y — произвольное гладкое векторное поле на W , касательное к подмногообразию M и продолжающее вектор y , т. е. $Y(m) = y$. Вычислим разность

$$\begin{aligned} \langle -(\bar{\nabla}_x V)^T, y \rangle - \langle -(\bar{\nabla}_x V')^T, y \rangle &= \\ = \langle \nabla_x V' - \nabla_x V, y \rangle &= \langle \nabla_x (V' - V), y \rangle = \\ = \langle \nabla_x (V' - V), Y \rangle &= \nabla_x \langle V' - V, Y \rangle - \langle V' - V, \nabla_x Y \rangle. \end{aligned}$$

Так как $V' - V \in N_m(M)$, $Y \in T_m(M)$ для любой точки m , достаточно близкой к точке m , то $\langle V' - V, Y \rangle = 0$. Так как $\nabla_x Y \in T_m(M)$, то $\langle V' - V, \nabla_x Y \rangle = 0$, т. е. $\langle -(\nabla_x V)^T, y \rangle = \langle -(\nabla_x V')^T, y \rangle$, что и доказывает корректность определения. Теперь проверим симметричность оператора A^v . Для этого продолжим векторы x и y векторными полями X и Y на W , касательными к M . Отсюда

$$\begin{aligned} \langle A^v(x), y \rangle - \langle A^v(y), x \rangle &= -\langle \bar{\nabla}_x V, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_y V, X \rangle = \\ = -\bar{\nabla}_x \langle V, Y \rangle + \bar{\nabla}_y \langle V, X \rangle + \langle V, \bar{\nabla}_x Y \rangle - \langle V, \bar{\nabla}_y X \rangle &= \\ = \langle V, \bar{\nabla}_x Y - \bar{\nabla}_y X \rangle = \langle V, [X, Y] \rangle &= 0, \end{aligned}$$

так как $\langle V, Y \rangle = \langle V, X \rangle = 0$; $V \in N_m(M)$, $[X, Y] \in T_m(M)$. Итак, $\langle A^v(x), y \rangle = \langle A^v(y), x \rangle$, что и требовалось.

Эквивалентным образом, форма A может быть интерпретирована как билинейная симметричная форма на касательном пространстве $T_m(M)$ со значениями в нормальном пространстве $N_m(M)$. В самом деле, если $x, y \in T_m(M)$, то можно определить форму $B(x, y) \in N_m(M)$ равенством $\langle B(x, y), v \rangle = \langle A^v(x), y \rangle$.

Лемма 2.4.4. Пусть $x, y \in T_m(M)$; включим вектор y в гладкое векторное поле Y на W , касательное к подмногообразию M . Тогда выполнено равенство $B(x, y) = (\bar{\nabla}_x Y)^N$, т. е. нужно ковариантно продифференцировать поле Y в направлении вектора x

и полученный результат (вектор в точке m) спроектировать на нормальную плоскость.

Доказательство. Поскольку $A^v(x) = -(\bar{\nabla}_x V)^T$, то

$$\begin{aligned}\langle B(x, y), v \rangle &= \langle A^v(x), y \rangle = -\langle (\bar{\nabla}_x V)^T, y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_x V, y \rangle = \\ &= -\langle \bar{\nabla}_x V, Y \rangle = -\bar{\nabla}_x \langle V, Y \rangle + \langle V, \bar{\nabla}_x Y \rangle = \\ &= \langle V, \bar{\nabla}_x Y \rangle = \langle (\bar{\nabla}_x Y)^N, v \rangle,\end{aligned}$$

так как $\langle V, Y \rangle \equiv 0$. Отсюда $\langle B(x, y) - (\bar{\nabla}_x Y)^N, v \rangle = 0$ для любого $v \in N_m(M)$, а так как $B(x, y) \in N_m(M)$, то это означает, что $B(x, y) = (\bar{\nabla}_x Y)^N$, что и требовалось доказать.

С помощью формы A мы можем теперь определить понятие средней кривизны H подмногообразия M , обобщающее понятие скалярной средней кривизны для случая гиперповерхности.

Определение 2.4.2. Рассмотрим вторую фундаментальную форму, представленную как форма B на касательном пространстве $T_m(M)$, $m \in M$, со значениями в нормальном пространстве $N_m(M)$. Поскольку на $T_m(M)$ определено скалярное произведение (см. выше), то можно рассмотреть след формы B , являющийся (в каждой точке m) некоторым вектором, принадлежащим $N_m(M)$. Таким образом, след формы B изображается некоторым сечением H нормального расслоения NM . Это сечение (след) H называется средней кривизной вложенного подмногообразия $M \subset W$. Если $e_1, \dots, e_k$ — некоторый ортобазис в плоскости $T_m(M)$, то $H = \sum_{i=1}^k B(e_i, e_i) \in N_m(M)$.

Замечание. В том случае, когда M — гиперповерхность в N , определение 2.4.2 совпадает с определением скалярной средней кривизны $H = \text{Sp}(\mathfrak{G}^{-1}Q)$, где $\mathfrak{G}$ — матрица первой квадратичной формы, Q — матрица второй квадратичной формы (проверьте!).

2.5. Локальная минимальность. Пусть M — подмногообразие в W ; определим понятие изотопической вариации этого подмногообразия в W .

Определение 2.5.1. Пусть задана гладкая гомотопия $f_t: M \rightarrow W$, $0 \leq t \leq 1$, такая, что каждое отображение f_t является вложением, причем $f_0 = f$, где f — исходное вложение M в W . Тогда гомотопию f_t назовем изотопической вариацией, $F: M \times [0, 1] \rightarrow W$; $F = \{f_t\}$.

Эта вариация f_t вложения f индуцирует гладкое векторное поле E , определенное на $F(M \times [0, 1])$ и являющееся образом стандартного векторного поля $\frac{\partial}{\partial t}$ на цилиндре $M \times [0, 1]$. нас будет интересовать ограничение этого поля на подмногообразии M , т. е. $E(m) = dF\left(\frac{\partial(m, 0)}{\partial t}\right)$, dF — дифференциал отображения F . Век-

торное поле $E(m)$ определяет два сечения: $E^T(m)$ расслоения TM и $E^N(m)$ расслоения NM , $m \in M$ (для этого достаточно ортогонально спроектировать поле $E(m)$ на $T_m(M)$ и $N_m(M)$ соответственно). Ясно, что эти два сечения являются гладкими. Рассмотрим сечение E^T как векторное поле на подмногообразии M . Поскольку на M имеется естественная k -мерная форма объема, индуцированная объемлющей римановой метрикой, то поле E^T однозначно определяет внешнюю дифференциальную форму $\theta(E^T)$ степени $k-1$ (с помощью оператора $\star$; см. [2]). Рассмотрим k -мерный сьем $\text{vol}_k(f_i M)$ подмногообразия $f_i M$; предположим для простоты, что M компактно; тогда $v_k(t) = \text{vol}_k(f_i M) < \infty$. Таким образом, каждой изотопической вариации F подмногообразия M отвечает гладкая функция $v_k(t)$, определенная на отрезке $0 \leq t \leq 1$.

Предложение 2.5.1. Пусть M — компактное подмногообразие в W и $v_k(t) = \text{vol}_k(f_i M)$ — функция k -мерного объема подмногообразия $f_i M$. Тогда имеет место равенство

$$v'_k(0) = - \int_M \langle E^N, N \rangle + \int_{\partial M} \theta(E^T),$$

где ∂M — граница многообразия M . Здесь первый интеграл от функции $\langle E^N, N \rangle$ берется по M относительно k -мерной формы риманова объема, а второй интеграл от формы $\theta(E^T)$ берется по $(k-1)$ -мерному подмногообразию ∂M относительно $(k-1)$ -мерного объема, индуцированного объемлющей метрикой.

Мы оставляем доказательство этого предложения читателю. Вероятно, самый простой способ состоит во введении локальных координат и последующего прямого вычисления (см., например, [19]).

Дадим теперь важное определение локально минимального подмногообразия.

Определение 2.5.2. Подмногообразие $M^k \subset W^n$ называется локально минимальным, если его средняя кривизна H тождественно равна нулю (во всех точках $t \in M$).

Если $k=1$, то одномерные локально минимальные подмногообразия являются геодезическими в W (см., например, [2]). Если $k=n-1$, то локально минимальная гиперповерхность $M^{n-1} \subset W^n$ является минимальным подмногообразием в смысле пункта 2.2. Если $k < n-1$, то условие локальной минимальности означает аннулирование вектора H средней кривизны. Как и в пункте 2.2, существует непосредственная связь между обращением в нуль вектора средней кривизны и обращением в нуль производной $v'_k(0)$ функции объема.

Теорема 2.5.1. Компактное подмногообразие $M^k \subset W^n$ является локально минимальным (т. е. $H \equiv 0$) тогда и только тогда, когда $v'_k(0) \equiv 0$ для любой изотопической вариации подмногообразия M , обращающейся в нуль на границе ∂M .

Доказательство. В силу предложения 2.5.1 имеем

$$v'_k(0) = - \int_M \langle E^N, H \rangle + \int_{\partial M} \theta(E^T).$$

Так как $f_t(\partial M) \equiv f(\partial M)$ при всех t , $0 \leq t \leq 1$, то $\theta(E^T) \equiv 0$ на ∂M , т. е. $v'_k(0) = - \int_M \langle E^N, H \rangle$. Если $H = 0$, то $v'_k(0) = 0$.

Обратно, если в некоторой точке $m_0 \in M$ имеем $H \neq 0$, то можно всегда подобрать такую вариацию, носитель которой сосредоточен около точки m_0 , что $v'_k(0)$ будет отлично от нуля. Это противоречит условию $v'_k(0) = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, подмногообразие, на которых вектор средней кривизны тождественно обращается в нуль, являются экстремалами функционала объема; это утверждение ранее, в пункте 2.2, мы доказали для случая гиперповерхностей. Другими словами, мы доказали, что система уравнений Эйлера—Лагранжа для функционала k -мерного объема (определенного на k -мерных подмногообразиях в W^n) эквивалентна уравнению $H \equiv 0$. Термин «локальная минимальность» означает, что объем подмногообразия «не изменяется в первом приближении» (т. е. первая производная объема равна нулю) при бесконечно малых (по амплитуде и по носителю) вариациях; в то же время, если вариация имеет конечную величину, то объем может, например, уменьшиться, как это имеет место в случае стандартного экватора на двумерной сфере, стягивающегося в точку по сфере. В дальнейшем мы введем понятие глобально минимального подмногообразия, объем которого не уменьшается уже при любой «сколь угодно большой» вариации (что потребует, конечно, определения понятия «большая вариация»).

В качестве примера локально минимальных подмногообразий приведем важный класс так называемых вполне геодезических подмногообразий.

Определение 2.5.3. Подмногообразие $M \subset W$ называется вполне геодезическим, если каждая геодезическая многообразия M (относительно римановой структуры и связности, индуцированной объемлющей римановой метрикой) является геодезической в многообразии W .

Теорема 2.5.2. Подмногообразие $M \subset W$ является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда его вторая фундаментальная форма тождественно обращается в нуль.

Доказательство. Обращение в нуль второй фундаментальной формы, очевидно, эквивалентно (см. определение выше) тому, что совпадают параллельные переносы относительно римановых структур на M и на W ; поскольку геодезические могут быть определены как траектории, поле скоростей которых сохраняется при параллельном переносе (см. [2]), то отсюда и следует, что каждая геодезическая на M является геодезической и с точки

зрения объемлющего многообразия W . Обратно, если M — вполне геодезическое подмногообразие, то из равенства $B(x, y) = (\bar{\nabla}_x Y)^N$ (см. лемму 2.4.4) получаем: $B \equiv 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем мы подробно изучим класс вполне геодезических подмногообразий, реализующих топологически нетривиальные гомотопические или гомотопические классы в симметрических пространствах.

2.6. Первые примеры глобально минимальных поверхностей. В качестве простейшего случая рассмотрим свободные гомотопические классы замкнутых петель на римановом многообразии W . Рассмотрим класс кусочно-гладких отображений $f: S^1 \rightarrow W$ окружности S^1 в W , гомотопных друг другу. Тогда легко доказать, что среди этих отображений существует такое отображение f_0 , для которого длина траектории $f_0(S^1)$ является наименьшей по сравнению с длинами кривых $f(S^1)$, где f гомотопно f_0 . Другими словами, если $f_t: S^1 \rightarrow W$ — произвольная гладкая гомотопия отображения f_0 , т. е. вариация произвольной величины, то длина траектории $f_t(S^1)$ не меньше длины $f_0(S^1)$. Это означает, что функционал длины достигает своего абсолютного минимума в данном гомотопическом классе на отображении f_0 .

В качестве второго, более нетривиального примера рассмотрим комплексные подмногообразия в кэлеровом многообразии. В качестве вариаций (деформаций) подмногообразия M мы рассмотрим значительно более широкий класс, чем описанный выше (гомотопии).

Определение 2.6.1. Пусть $M^k \subset W^n$ — гладкое компактное ориентируемое замкнутое подмногообразие. Мы скажем, что задана его бордизм-деформация, если задано $(k+1)$ -мерное гладкое компактное ориентируемое подмногообразие Z^{k+1} с краем $\partial Z \subset M \cup (-P)$, где P — некоторое гладкое компактное ориентируемое замкнутое подмногообразие (пленка) в W (через $-P$ обозначено это многообразие P с обратной ориентацией, индуцируемой на P ориентацией многообразия Z) (рис. 9). Многообразие P назовем бордизм-вариацией многообразия M . В случае некомпактного подмногообразия $M \subset W$ будем говорить, что задана его бордизм-деформация, если в W задано подмногообразие (пленка) P , совпадающее с M вне некоторой компактной области u , кроме того, задано $(k+1)$ -мерное подмногообразие Z с кусочно-гладким краем $\partial Z \subset M \cup (-P)$.

Напомним, что комплексное многообразие W называется кэлеровым, если его риманова метрика $g_{ij} dz^i dz^j$ (где $z^1, \dots, z^n$ — локальные координаты) определяет замкнутую внешнюю дифференциальную форму степени 2 $\omega = \frac{i}{2} g_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$.

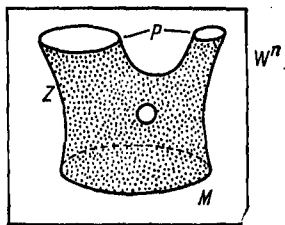


Рис. 9.

Теорема 2.6.1. Пусть W — кэлерово многообразие комплексной размерности n , $M \subset W$ — его комплексное k -мерное подмногообразие. Рассмотрим всевозможные вещественные бордизм-деформации этого подмногообразия в многообразии W , т. е. такие бордизм-деформации, что пленка Z^{2k+1} — вещественное $(2k+1)$ -мерное подмногообразие в W ; пусть P^{2k} — бордизм-вариация подмногообразия M . Тогда объем $\text{vol}_{2k}(M)$ подмногообразия M не больше объема $\text{vol}_{2k}(P)$, если M и P^{2k} — компактны; если же M и P некомпактны, то имеются в виду объемы тех областей (на M и на P), где M и P различны (не совпадают). Более того, если объем P совпадает с объемом M , то подмногообразие P также комплексное (в многообразии W).

Таким образом, в кэлеровых многообразиях компактные комплексные подмногообразия являются глобально минимальными подмногообразиями (т. е. экстремалами многомерной вариационной задачи на минимум объема). Так, например, в $\mathbb{C}P^n$ (комплексном проективном пространстве) глобально минимальными подмногообразиями являются комплексные подмногообразия $\mathbb{C}P^k$. Кэлеровым многообразием является также комплексное эрмитово пространство $\mathbb{C}^n$, а потому любое комплексное подмногообразие X в $\mathbb{C}^n$ минимально относительно любых возмущений, неподвижных вне некоторой ограниченной области в X . Напомним, что все комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ некомпактны. Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Лемма 2.6.1. Для произвольной внешней 2-формы ω на $\mathbb{R}^{2n}$ можно выбрать такой ортонормированный базис $e_1, \dots, e_{2n}$, в котором форма ω имеет вид $\lambda_1 \omega_1 \wedge \omega_2 + \dots + \lambda_n \omega_{2n-1} \wedge \omega_{2n}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — неотрицательные числа, а $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ — базис, сопряженный к базису $e_1, \dots, e_{2n}$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n}$ произвольный ортонормированный базис $e'_1, \dots, e'_{2n}$. Для заданной 2-формы ω построим матрицу $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \omega(e'_i, e'_j)$. Назовем матрицу A матрицей, ассоциированной с формой ω . Поскольку форма ω полностью определяется своими значениями на базисных векторах, то она полностью определяется своей матрицей A (с указанием соответствующего ортонормированного базиса $e'_1, \dots, e'_{2n}$). Ясно, что A — кососимметрическая матрица. Следовательно, для A существует такой ортонормированный базис $e_1, \dots, e_{2n}$, в котором матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — неотрицательные числа. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ — со-

пряженный базис к базису $e_1, \dots, e_{2n}$. Очевидно, что $\omega = \sum_{\alpha=1, 3, \dots, 2n-1} \lambda_\alpha \omega_\alpha \wedge \omega_{\alpha+1}$. Лемма доказана.

Лемма 2.6.2. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ задана эрмитова метрика (g_{ij}) . Пусть, далее, ω — внешняя 2-форма, соответствующая метрике g_{ij} , т. е. определяемая формулой $\omega(v_1, v_2) = \langle iv_1, v_2 \rangle$. Положим $\sigma_k = \frac{1}{k!} \omega^k = \frac{1}{k!} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_k$. Тогда выполнено неравенство $|\sigma_k(v_1, \dots, v_{2k})| \leq 1$, где $v_1, \dots, v_{2k}$ — произвольная ортонормированная система векторов в $\mathbb{R}^{2n}$. Кроме того, равенство $|\sigma_k(v_1, \dots, v_{2k})| = 1$ достигается тогда и только тогда, когда $v_1, \dots, v_{2k}$ порождают комплексное подпространство в $\mathbb{R}^{2n}$ (т. е. когда вещественная линейная оболочка векторов $v_1, \dots, v_{2k}$ инвариантна относительно умножения на i).

Доказательство. Рассмотрим случай $k=1$. Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ — ортогональные векторы длины 1. Ясно, что $|\omega(v_1, v_2)| = |\langle iv_1, v_2 \rangle| \leq |iv_1| \cdot |v_2| = 1$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\pm v_2 = iv_1$, т. е. векторы v_1, v_2 порождают комплексное одномерное подпространство (вещественной размерности 2). Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ — подпространство, порожденное векторами $v_1, \dots, v_{2k}$. Обозначим сужение $\omega|_V$ через $\tilde{\omega}$. Согласно лемме 2.6.1 можно выбрать ортонормированный базис $e_1, \dots, e_{2k}$ в подпространстве V и сопряженный ему базис $\omega_1, \dots, \omega_{2k}$ так, что $\tilde{\omega} = \lambda_1 \omega_1 \wedge \omega_2 + \dots + \lambda_k \omega_{2k-1} \wedge \omega_{2k}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — неотрицательные вещественные числа. Ясно, что $\tilde{\omega}(e_{2p-1}, e_{2p}) = \lambda_p$ ($1 \leq p \leq k$). Отсюда, согласно случаю $k=1$, получаем, что $\lambda_p \leq 1$, причем $\lambda_p = 1$ тогда и только тогда, когда $ie_{2p-1} = \pm e_{2p}$. Обозначим ограничение формы $\sigma_k = \frac{1}{k!} \omega^k$ на подпространство V через $\tilde{\sigma}_k$. Тогда $|\tilde{\sigma}_k(e_1, \dots, e_{2k})| = \left| \frac{1}{k!} \tilde{\omega}^k(e_1, \dots, e_{2k}) \right| = \lambda_1 \dots \lambda_k \leq 1$; равенство достигается тогда и только тогда, когда $\lambda_p = 1$ ($1 \leq p \leq k$), т. е. когда $ie_{2p-1} = \pm e_{2p}$ ($1 \leq p \leq k$). Последнее равенство в точности означает, что V — комплексное подпространство пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Лемма 2.6.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.6.1. Пусть φ — внешняя форма степени l на $\mathbb{R}^{2n}$, а V — линейное l -мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^{2n}$; пусть $v_1, \dots, v_l$ и $v'_1, \dots, v'_l$ — произвольные ортонормированные базисы пространства V одного класса ориентации. Из закона преобразования l -мерной внешней формы в l -мерном пространстве (а именно: умножение на определитель линейного преобразования) сразу следует, что $\varphi(v_1, \dots, v_l) = \varphi(v'_1, \dots, v'_l)$. Поэтому форму φ можно корректно определить как функцию на множестве классов ориентированных ортонормированных базисов одного и того же подпространства (при изменении подпространства будет меняться и функция φ). Другими словами, l -форма φ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ определяет функцию (обозначаемую

той же буквой φ) на вещественном многообразии Грассмана $\hat{G}_{2n,1}$ ориентированных 1 -мерных подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$. Класс ориентированных ортонормированных базисов подпространства V , т. е. точку из $\hat{G}_{2n,1}$, обозначим через $\hat{V}$. Пусть теперь M — комплексное подмногообразие в W и пусть P — бордизм-вариация. Обозначим, как и прежде, через $T_x(M)$ (соответственно $T_y(P)$) касательное пространство к подмногообразию M (соответственно P) в точке x (соответственно y). Пусть Z — подмногообразие в W такое, что $\partial Z = M \cup (-P)$ (рис. 10). Пусть $\omega = \frac{i}{2} g_{ij} dz^i \wedge dz^j$ — определенная выше замкнутая 2-форма на W , и пусть $\sigma_k = \frac{1}{k!} \omega^k$.

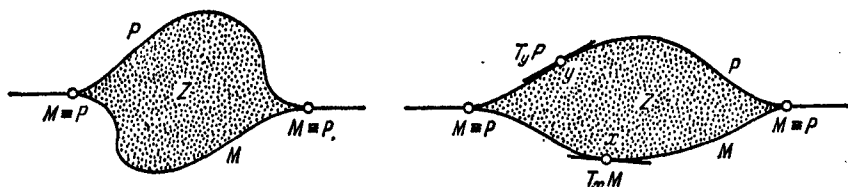


Рис. 10.

Тогда, очевидно, и $d\sigma_k = 0$. По формуле Стокса имеем $0 = \int_Z d\sigma_k = \int_{\partial Z} \sigma_k = \int_{M \cup (-P)} \sigma_k = \int_M \sigma_k - \int_P \sigma_k$, т. е. $\int_M \sigma_k = \int_P \sigma_k$. Обозначим $2k$ -мерные внешние формы объема подмногообразий M и P через dx и dy соответственно. Тогда $\int_M \sigma_k = \int_M \sigma_k(\hat{T}_x M) dx$, $\int_P \sigma_k = \int_P \sigma_k(\hat{T}_y P) dy$. Так как M — комплексное подмногообразие в W , т. е. $T_x(M)$ — комплексное подпространство в $T_x(W) = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, то, согласно лемме 2.6.2, $\sigma_k(\hat{T}_x M) \equiv 1$, $\sigma_k(\hat{T}_y P) \leq 1$ (напомним, что P — не обязательно комплексное подмногообразие). Отсюда

$$\text{vol}(M) = \int_M dx = \int_M \sigma_k(\hat{T}_x M) dx = \int_P \sigma_k(\hat{T}_y P) dy \leq \int_P dy = \text{vol}(P).$$

Таким образом, первая часть утверждения теоремы доказана. Далее, очевидно, что равенство $\text{vol}(M) = \text{vol}(P)$ достигается тогда и только тогда, когда на множестве полной меры выполнено тождество $\sigma_k(\hat{T}_y(P)) \equiv 1$. Согласно лемме 2.6.2 последнее тождество равносильно тому, что $T_y(P)$ — комплексное подпространство для $y \in P$ (для почти всех точек $y \in P$), т. е. P — комплексное многообразие в W . Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно: предположение о том, что подмногообразия $M \subset W$ являются неособыми, — несущественное

ограничение. Доказательство (в терминах подмножеств полной меры) проходит и для алгебраических комплексных поверхностей $M \subset W$ (т. е. поверхностей, задаваемых системой полиномиальных уравнений на W), несмотря на то что такие поверхности могут иметь особые точки (например, конические точки и т. д.). В этом случае условие бордантности M и P следует заменить более слабым отношением: M гомологично P в группе $H_{2k}(W, \partial M)$, т. е. M и P определяют один и тот же элемент в этой группе (об этом подробнее — ниже). В $\mathbb{C}P^n$ подмногообразие $\mathbb{C}P^k$ ($1 \leq k \leq n$) реализует образующую в группе $H_{2k}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и является глобально минимальным в этом гомологическом классе.

•

§ 3. Многомерная задача Плато

3.1. Классические постановки (о нахождении абсолютного минимума). После того, как двумерная задача Плато была решена (см. выше), возник вопрос о решении аналогичной вариационной задачи в более высоких размерностях. Рассмотрим риманово многообразие M^n и выделим в нем фиксированное $(k-1)$ -мерное гладкое компактное замкнутое подмногообразие — «контур» A^{k-1} . Предположим, что существует компактное гладкое подмногообразие $X^k \subset M^n$ такое, что оно имеет своим краем подмногообразие A . Тогда определен риманов объем $\text{vol}_k(X) < \infty$. Рассмотрим класс $\{X\}$ всех таких подмногообразий X , т. е. $\partial X = A$, $X \subset M$. Вопрос: существует ли такое подмногообразие X_0 , объем которого был бы наименьшим, т. е. $\text{vol}_k X_0 = \inf_{X \in \{X\}} \text{vol}_k X$? Ясно, что в такой

простейшей постановке ответ отрицателен, так как легко построить примеры, когда пленка X , стремясь занять положение, отвечающее наименьшему объему, начинает склеиваться и минимум достигается не на подмногообразии, а на «поверхности с особенностями». Поэтому постановку следует уточнить, чтобы учесть эти естественные эффекты склеек.

Рассмотрим всевозможные пары вида (W, f) , где W — гладкое компактное многообразие размерности k с краем ∂W , гомеоморфным A , а $f: W \rightarrow M$ — непрерывное (или кусочно-гладкое) отображение, тождественное на крае ∂W , т. е. совпадающее с фиксированным гомеоморфизмом вложения $i_0: A \rightarrow i_0(A) \subset M$; в дальнейшем обозначение i_0 будем опускать.

Задача А. Можно ли среди всех пар вида (W, f) , где W — всевозможные многообразия с краем A , а $f: W \rightarrow M$ — отображения W в M , тождественные на A , найти пару

(W_0, f_0) такую, чтобы отображение f_0 или пленка $X_0 = f_0(W_0)$ — образ многообразия W_0 в M — обладали бы разумными свойствами минимальности, в частности, чтобы $\text{vol}_k(X_0) \leq \text{vol}_k(X)$, где $X = f(W)$ — любая пленка из указанного выше класса (рис. 11)?

Задача А является, тем самым, задачей нахождения абсолютного минимума по всем пленкам $X \subset M$ (всех возможных топологических типов), заклеивающим данный «контур» $A \subset M$.

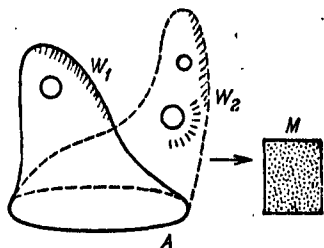


Рис. 11.

Под «разумными свойствами минимальности» образа $X_0 = f_0(W_0)$ в M , в дополнение к неравенству $\text{vol}(X_0) \leq \text{vol}(X)$, можно, например, понимать следующее свойство: существует нигде не плотное в пленке X_0 подмножество Z особых (сингулярных) точек такое, что каждая точка $P \in X_0 \setminus Z$ обладает окрестностью U в M , для которой $(X_0 \setminus Z) \cap U$ состоит из гладких подмногообразий V_α размерностей, не превосходящих k (максимально возможной размерности образа $X_0 = f_0(W_0)$), причем каждое V_α является минимальным подмногообразием в смысле классической дифференциальной геометрии, т. е. вектор H средней кривизны тождественно равен нулю.

Вторая задача является уточненной задачей о нахождении абсолютного минимума в классе всех бордизм-вариаций (см. пункт 2.6) данного замкнутого подмногообразия $V^k \subset M^n$.

Задача Б. Пусть (V, g) — пара, где $V = V^k$ — компактное замкнутое k -мерное многообразие, $g: V \rightarrow M$ — его непрерывное (или кусочно-гладкое) отображение в M^n , $X = g(V)$ — образ V в M . Мы скажем, что пара (V', g') является бордизм-вариацией пары (V, g) , если существует компактное многообразие Z с краем $\partial Z = V \cup (\pm V')$ и непрерывное отображение $F: Z \rightarrow M$ такое, что $F|_V \equiv g$, $F|_{V'} \equiv g'$ (рис. 12). Можно ли среди всех пар (V, g) указанного вида найти такую пару (V_0, g_0) , чтобы образ $X_0 = g_0(V_0)$ обладал разумными свойствами минимальности, в частности, чтобы $\text{vol}_k(X_0) \leq \text{vol}_k(X)$, где $X = g(V)$ — любая пленка из указанного класса?

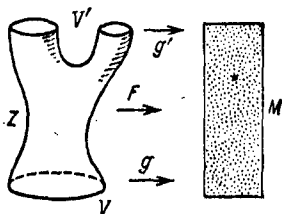


Рис. 12.

Эта задача, как и задача А, является задачей о нахождении абсолютного минимума в классе всех бордизм-вариаций заданной пары (V, g) . Ясно, что эта постановка является уточнением вариационной задачи, решенной в пункте 2.6 для случая комплексных подмногообразий в кэлеровом многообразии. В задачах А и Б топологический тип варьируемой пленки может меняться, хотя и не произвольно. Класс бордизм-вариаций естественно возникает не только в задаче о нахождении абсолютного минимума (например, по всем пленкам, заклеивающим данный «контур»), но и при изучении поверхностей уровня гладких функций на компактном многообразии. Предположим, что гладкая функция α , заданная на многообразии M , является функцией Морса, т. е. все ее критические точки невырождены; рассмотрим две произвольные поверхности уровня $V = \{\alpha = c\}$, $V' = \{\alpha = c'\}$, где c и c' не являются критическими значениями функции α (т. е. на поверхностях V и V' нет ни одной критической точки функции α); тогда, очевидно, многообразие V' получается из многообразия V

бордизм-деформацией. Соответствующая пленка Z с $\partial Z = V \cup (-V')$ задается так: $Z = \{c \leq \alpha \leq c'\}$.

3.2. Классические постановки (о нахождении относительного минимума). Снова рассмотрим вариационную задачу с фиксированной границей $A \subset M$, где A — заданное $(k-1)$ -мерное подмногообразие (без края). Рассмотрим всевозможные пленки, ограниченные этим подмногообразием и получающиеся друг из друга непрерывной деформацией. Более точно, сформулируем задачу о нахождении минимума в гомотопическом смысле.

Задача A' . Можно ли среди всех пар вида (W, f) , где W — некоторое фиксированное многообразие с краем A , а $f: W \rightarrow M$ — всевозможные непрерывные (или кусочно-гладкие) отображения, гомотопные некоторому фиксированному отображению f' и тождественные на крае A (т. е. совпадающие с фиксированным гомеоморфизмом A на себя), найти такую пару (W, f_0) , чтобы отображение f_0 или пленка $X_0 = f_0(W)$ — образ W в M — обладали бы свойствами минимальности, в частности, чтобы $\text{vol}_k(X_0) \leq \text{vol}_k(X)$, где $X = f(W)$ — любая пленка из данного гомотопического класса?

Это — задача о нахождении минимума в каждом гомотопическом классе; в этом смысле мы и говорим об относительном минимуме в отличие от абсолютного минимума задачи A , который должен отыскиваться среди всех гомотопических классов.

Задача B' . Можно ли среди всех отображений $g: V^k \rightarrow M^n$ (где V — некоторое фиксированное многообразие), гомотопных некоторому исходному отображению $f: V \rightarrow M$, найти такое отображение g_0 , которое обладало бы свойством минимальности, в частности, чтобы $\text{vol}_k g_0(V) \leq \text{vol}_k g(V)$, где g — любой представитель указанного класса отображений?

В рамках задач A' и B' мы рассматриваем задачу о нахождении минимума в гомотопическом классе заданного отображения (в случае A' — с фиксированным краем); в рамках задач A и B вариационная задача рассматривается в более широком классе допустимых вариаций, поскольку разрешено менять топологический тип пленки W в задаче A и многообразия V в задаче B .

Четыре указанные задачи не следуют друг из друга; например, из существования минимального отображения в каждом гомотопическом классе не следует существование абсолютного минимума (т. е. минимума по всем гомотопическим классам в задаче о заклеивании фиксированного контура), равно как и наоборот. Поэтому эти задачи надлежит рассматривать как различные; это разграничение подтверждается и отличием методик, приводящих к решению этих задач. Мы начнем с изучения задачи об абсолютном минимуме, поскольку во многих приложениях важно иметь информацию именно о наименьшей пленке, заклеивающей контур, при этом топологический тип этой пленки автоматически будет определяться условием абсолютной минимальности. Фиксн-

руем терминологию: задачи типа A и A' будем называть задачами «заклейки» (контура), а задачи B и B' — задачами реализации (например, нетривиального гомотопического класса). В случае задачи реализации нетривиального класса особый интерес представляют поверхности без особенностей.

Минимальные поверхности, которые мы обнаружим в этих задачах, назовем глобально минимальными (в отличие от локально минимальных, характеризующихся равенством нулю средней кривизны).

Один из возможных путей уточнения идеи минимизации отображения f (задачи A и A') или отображения g (задачи B и B') состоит в минимизации функционала Дирихле, рассматриваемого на этих отображениях. Этот путь иногда приводит к успеху в том случае, когда объемлющее многообразие M обладает дополнительной достаточно жесткой структурой, например является многообразием отрицательной кривизны. Тогда в каждом гомотопическом классе отображения $g: V \rightarrow M$ существует отображение g_0 , минимизирующее функционал Дирихле, т. е. задача B имеет решение (об этом — ниже). Однако в том случае, когда объемлющее многообразие произвольно, прежние методы, использующие функционал Дирихле, не позволяют гарантировать сходимость минимизирующих последовательностей, как показывают простые примеры.

3.3. Трудности, возникающие при минимизации функционала объема vol_k при $k > 2$. Появление неустранимых стратов малых размерностей. При решении двумерной задачи Плато игнорируется следующий эффект, начинающий играть существенную роль в больших размерностях. Рассмотрим изображенный на рис. 13

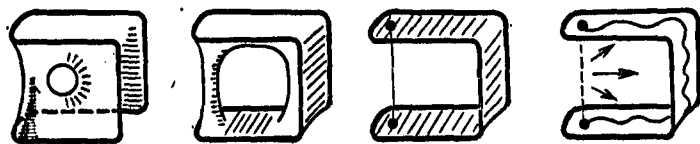


Рис. 13.

контур $A = S^1$ и пленку $X_t = f_t(W)$, стремящуюся занять в $\mathbb{R}^n$ положение, отвечающее наименьшей двумерной площади. Ясно, что в некоторый момент произойдет «схлопывание» пленки (склейка), при котором вместо тонкой трубки T появится (рис. 13) отрезок P , соединяющий верхнее и нижнее основания пленки. В двумерном случае от него легко избавиться, непрерывно отобразив P в двумерный диск, заклеивающий контур A . Другой способ — это выбросить P , сохранив только «двумерную часть» минимальной пленки. В случае $k > 2$, когда в качестве контура выступает $(k-1)$ -мерное подмногообразие A в M , возникновение

ситуации, аналогичной описанной, резко усложняет задачу минимизации. По мере того как k -мерный объем vol_k деформирующейся пленки X , стремится к минимуму, пленка $X_t = f_t(W)$ стремится занять соответствующее «минимальное положение», и при этом в ней могут возникнуть склейки, т. е. отображение $f_1: W \rightarrow M$, гомотопное исходному отображению f , может понижать размерность на некоторых открытых в W подмножествах (рис. 14), что приводит к появлению в образе $X_1 = f_1(W)$ кусков P размерностей s , где $s \leq k-1$. В отличие от двумерного случая, все такие куски P нельзя, вообще говоря, ни отбросить, ни непрерывно отобразить в «массивную» k -мерную часть $X^{(k)}$ пленки X_1 . Напомним, что мы хотим решить задачу на минимум в классе пленок $X = f(W)$, допускающих непрерывную параметризацию с помощью многообразий W ; поэтому

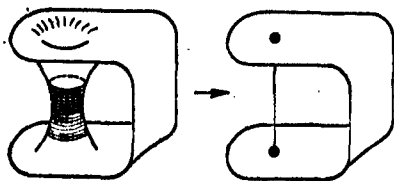


Рис. 14.

при любом варианте устраниения «маломерных кусков» $P \subset X$ мы должны гарантировать, что пленка $\tilde{X}$, получившаяся после такой перестройки, будет по-прежнему допускать непрерывную параметризацию: $\tilde{X} = \tilde{f}(\tilde{W})$, хотя, быть может, с помощью другого многообразия $\tilde{W}$. Отбрасывание «маломерных кусков» P (как один из вариантов перестройки), т. е. переход от пленки X к пленке $X^{(k)} = \tilde{X} = X \setminus P$ (черта обозначает замыкание), т. е. к k -мерной части пленки X , не удовлетворяет этому требованию, поскольку легко построить примеры, когда «остаток» $\tilde{X} = X^{(k)}$ вообще не допускает (при фиксированном контуре A) никакой непрерывной параметризации $\tilde{f}: \tilde{W} \rightarrow X^{(k)}$, где $\tilde{f}: \partial \tilde{W} \rightarrow A$ — гомеоморфизм.

Другой вариант перестройки мог бы быть таким: построить непрерывное отображение $\lambda: X \rightarrow \tilde{X} = X^{(k)}$ такое, что λ является тождественным отображением на замкнутом подмножестве $X^{(k)} \subset X$ и $\lambda(P) \subset X^{(k)}$, т. е. λ переводит все «маломерные куски» P в « k -мерную часть» пленки X . В двумерном случае такое отображение λ (если $X^{(2)}$ связно) всегда существует (см., например, рис. 13). Однако простые примеры показывают, что в больших размерностях это не так: достаточно в качестве X рассмотреть пространство, получающееся приклеивкой двумерного диска D^2 к некоторому пространству $X^{(k)}$, $k \geq 3$, по отображению h границы S^1 диска D^2 в $X^{(k)}$, где $h: S^1 \rightarrow X^{(k)}$ представляет ненулевой элемент фундаментальной группы $\pi_1(X^{(k)})$. Ясно, что препятствия к построению искомого отображения $\lambda: P \rightarrow X^{(k)}$ чисто топологические и возникают при продолжении непрерывного отображения с остова размерности $s-1$ на остов размерности s .

Итак (хотим мы этого или нет), мы не можем игнорировать куски малых размерностей, возникающие в процессе минимизации, и вынуждены считаться с ними, если мы желаем решить классическую задачу Плато, т. е. найти минимум, например, в гомотопическом классе данного отображения. Естественно ожидать, что у минимальной пленки $X_0 = f_0(W_0)$ (например, в гомотопическом классе данного отображения f) не только ее « k -мерная часть» $X^{(k)}$ должна быть k -мерным минимальным подмногообразием (быть может, с особенностями) в M , но и все «маломерные куски» P также должны быть (за исключением, быть может, некоторого множества особых точек меры нуль) минимальными подмногообразиями меньших размерностей. Как будет показано ниже, это ожидание действительно оправдывается. Однако, ввиду возникновения серьезных топологических трудностей в обращении с кусками меньших размерностей, можно было бы в целях упрощения задачи временно игнорировать «маломерные куски» P , ограничившись пока рассмотрением только k -мерного функционала объема vol_k , с точки зрения которого все эти «маломерные куски» несущественны, поскольку имеют нулевой k -мерный объем. Другими словами, можно сначала решать более узкую задачу: минимизировать только k -мерный объем пленки X , который сосредоточен на множестве $X^{(k)}$; при этом мы сохраняем за «маломерными кусками» только их топологические функции, а именно — они необходимы для существования непрерывной параметризации всей пленки X . Однако оказывается, что даже в этом случае решение задачи требует получения обширной информации о поведении «маломерных кусков» пленки (подробнее об этом см. ниже). Поэтому мы снова приходим к задаче одновременного изучения как функционала k -мерного объема vol_k , так и функционалов vol_s , где $s < k$. Следовательно, математическая природа многомерной задачи Плато в размерностях, больших чем два, вынуждает нас ввести: а) стратифицированные поверхности $X = X^{(k)} \cup X^{(k-1)} \cup \dots$, где каждое подмножество (страт) $X^{(s)}$ является s -мерной «поверхностью» в M , имеющей в каждой своей точке размерность s ; б) стратифицированный объем $SV(X) = (\text{vol}_k X^{(k)}, \text{vol}_{k-1} X^{(k-1)}, \dots)$, изображаемый вектором, каждая компонента которого равна объему соответствующего страта (в каждой размерности). Нахождение «минимальной поверхности X » означает доказательство существования такой стратифицированной поверхности, стратифицированный объем которой SV — наименьший. Под минимизацией вектора стратифицированного объема будем понимать следующее: сначала нужно минимизировать его первую координату (k -мерный объем), затем, фиксируя это минимальное значение первой координаты, минимизировать вторую координату, затем, фиксируя минимальные значения первых двух координат, минимизировать третью и т. д.

3.4. Постановки задачи Плато на языке обычных гомотопий. Вследствие указанных выше трудностей усилия многих математи-

ков были направлены на разработку нового языка, который позволил бы устранить влияние стратов малой размерности (см. пункт 3.3). Необходимые шаги были предприняты в серии работ [35]—[46], [16]. Задача заклейки контура — $(k-1)$ -мерного подмногообразия A в римановом многообразии M — была сформулирована на языке обычных гомологий следующим образом: обозначим через $H_{k-1}(A)$ группу $(k-1)$ -мерных гомологий замкнутого многообразия A (гомологии рассматриваются с целыми или с периодическими коэффициентами; см., например, [2]); пусть $A \subset X \subset M$, X — произвольная k -мерная «поверхность» в M , в качестве которой можно брать, например, подкомплексы или измеримые компакты; рассмотрим класс $\{X\}$ всех таких «поверхностей» X , для которых гомоморфизм $i_*: H_{k-1}(A) \rightarrow H_{k-1}(X)$, индуцированный вложением $i: A \rightarrow X$, аннулирует всю группу $H_{k-1}(A)$, т. е. A является гомологической границей поверхности X . Рассмотрим функционал k -мерного объема vol_k на классе $\{X\}$, и пусть $\lambda_k = \inf_{X \in \{X\}} \text{vol}_k X$. Тогда, оказывается, всегда существует минималь-

ная поверхность $X_0 \in \{X\}$, т. е. такая поверхность, что $\lambda_k = \text{vol}_k X_0$. Эта «поверхность» X_0 является абсолютным минимумом в классе всех поверхностей переменного топологического типа (с данной границей). Мы не можем здесь вдаваться в детали этой постановки, отсылая читателя к цитированной выше литературе. Отметим, что в рамках описанного подхода выделилось два направления: более геометрическое (см. [35]—[37], [16]) и более функциональное ([38]—[46]). В рамках каждого из этих двух направлений были доказаны замечательные теоремы существования абсолютного минимума (в гомологическом классе) и почти всюду регулярности минимальных решений.

При таком подходе существенно использовалось то, что если $X \supset Y$, где X, Y — компактные «поверхности» и $\dim(X \setminus Y) < k$, то $H_k(X) = H_k(Y)$ (и $\text{vol}_k X = \text{vol}_k Y$). Другими словами, это означает, что если многообразие A гомологично нулю в «поверхности» X , то оно гомологично нулю и в «поверхности» Y , получающейся из X выбрасыванием кусков $P = X \setminus Y$ малых размерностей, т. е. не возникает проблемы неустраимых кусков P (стратов) малых размерностей, характеризующей классическую задачу Плато (на языке пленок, параметризованных многообразиями). Это, конечно, упростило задачу (хотя полученные теоремы существования минимального решения весьма глубоки и нетривиальны), поскольку позволило ограничиться минимизацией только одного функционала vol_k и изучением только k -мерного куска поверхности X .

Однако использование обычных гомологий для определения понятий «граница» и «заклейка» (см. выше) значительно удалило нас от классической постановки задачи Плато, поскольку если A — $(k-1)$ -мерное подмногообразие в M и X_0 — минимальная

поверхность (в обобщенном смысле), заклеивающая A гомологически (т. е. A гомологично нулю в X_0), то, вообще говоря, не существует такого многообразия W с краем A , чтобы $X_0 = f(W)$, т. е. поверхность X_0 может не допускать непрерывной параметризации многообразием (в смысле пункта 3.1). Поэтому, решив задачу на минимум в классе гомологий, мы по-прежнему ничего не можем сказать о существовании минимальной поверхности, заклеивающей A в классическом смысле (см. пункт 3.1). Существенная разница между классической постановкой и постановкой на языке обычных гомологий видна также из того, что любое подмногообразие A в $\mathbb{R}^n$ гомологично нулю (так как $H_k(\mathbb{R}^n) = 0$), но в то же время может не существовать ни одной пленки X , $X \supset A$, такой, что $X = f(W)$, т. е. никакая заклеивающая (в смысле гомологий) пленка не параметризуется многообразием. Мы не будем сейчас более подробно описывать гомологические теоремы существования минимального решения, так как в дальнейшем докажем общую теорему, частными случаями которой будут как решение классической задачи Плато, так и решение ее в классах обычных гомологий.

3.5. Классическая многомерная задача Плато (абсолютный минимум) и язык теории бордизмов. Мы хотим снова вернуться к классическому пониманию задачи Плато в классе пленок, параметризованных многообразиями с заданным и фиксированным краем A^{k-1} . В отличие от всех использовавшихся ранее методов минимизации, мы будем минимизировать не один функционал k -мерного объема, а стратифицированный объем SV , т. е. вектор, составленный из всех объемов поверхности X (во всех ее размерностях). Для реализации этой программы нужен язык, на котором можно было бы точно поставить как задачу о заклейке контура, так и задачу реализации. Язык этот должен отличаться от языка, использующего обычную теорию гомологий (см. выше). Оказывается, материал, необходимый для введения такого нового языка в вариационные задачи, уже имеется. Напомним некоторые топологические определения.

Пусть V^{k-1} — замкнутое ориентированное многообразие; через $-V^{k-1}$ обозначим ориентированное многообразие, отличающееся от V^{k-1} ориентацией. Несвязным объединением $V_1^{k-1} \cup V_2^{k-1}$ двух замкнутых компактных ориентированных многообразий V_1 и V_2 назовем многообразие, являющееся несвязным объединением V_1 и V_2 с сохранением их ориентации.

Определение 3.5.1. Замкнутое ориентированное многообразие V^{k-1} называется бордантным нулю, $V^{k-1} \sim 0$, если существует компактное ориентированное многообразие W^k , край которого ∂W диффеоморфен с сохранением ориентации многообразию V^{k-1} . Два замкнутых ориентированных многообразия V_1^{k-1} и V_2^{k-1} называются бордантными, $V_1 \sim V_2$, если их несвязное объединение $V_1 \cup (-V_2)$ бордантно нулю.

В этом определении мы рассматриваем многообразия безотносительно к их вложению в какое-либо евклидово пространство.

Лемма 3.5.1. *Отношение бордантности является отношением эквивалентности на классе замкнутых ориентированных $(k-1)$ -мерных многообразий. Множество Ω_{k-1} классов эквивалентности является абелевой группой, в которой сложение индуцировано несвязным объединением многообразий.*

Доказательство. См. рис. 15. Класс эквивалентности, которому принадлежит многообразие V , обозначим $[V]$, а множество всех классов эквивалентности — через Ω_{k-1} ; тогда структура абелевой группы в Ω_{k-1} задается так: $[V_1] + [V_2] = [V_1 \cup V_2]$. Нулевой элемент состоит из многообразий, бордантных нулю; ясно, что $-[V] = [-V]$. Лемма доказана.

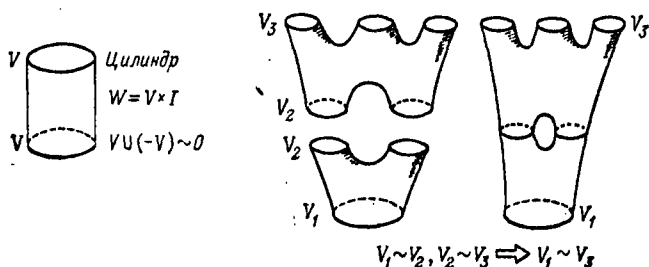


Рис. 15.

Прямую сумму групп $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \Omega_{k-1}$ обычно обозначают через Ω_* ; в этой прямой сумме естественно определена структура кольца, индуцированная прямым произведением многообразий (см., например, [47]). Группы Ω_{k-1} , вообще говоря, отличны от нулевой; можно показать (это нам не потребуется), что кольцо $\Omega_* \otimes \mathbb{Q}$ (где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел) является алгеброй полиномов, натянутой на классы бордизмов комплексных проективных пространств $\mathbb{CP}^{2m}$, $m = 1, 2, \dots$. Оказывается, наряду с теорией ориентированных бордизмов Ω_* большую роль для вариационных задач играет теория неориентированных бордизмов N_* . Для ее построения используются уже все замкнутые многообразия; никаких ограничений типа ориентируемости не накладывается; в остальном определение бордантности копирует приведенное выше определение для ориентируемого случая. Это дает возможность построить группы N_{k-1} (аналоги групп Ω_{k-1}) и группу $N_* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} N_{k-1}$, являющуюся коммутативной алгеброй над полем $\mathbb{Z}_2$.

Пусть теперь заданы пространство Y и его подпространство Z .

Определение 3.5.2. *Ориентированным сингулярным многообразием пары (Y, Z) назовем пару (V^{k-1}, f) , где V^{k-1} — компактное ориентированное многообразие с краем ∂V , а f — непрерывное*

отображение $(V, \partial V) \rightarrow (Y, Z)$ т. е. $f(V) \subset Y$, $f(\partial V) \subset Z$. Если $Z = \emptyset$, то полагаем, что и $\partial V = \emptyset$. Ориентированное сингулярное многообразие (V^{k-1}, f) пары (Y, Z) называется бордантным нулю, если существуют компактное ориентированное многообразие W^k и непрерывное отображение $F: W^k \rightarrow Y$ такие, что: а) многообразие V^{k-1} является регулярным подмногообразием края W^k

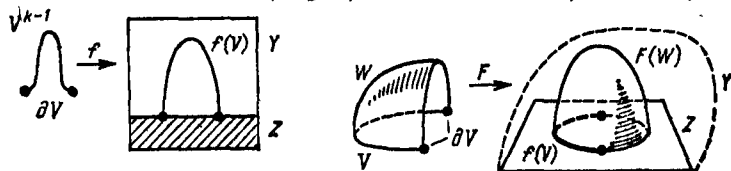


Рис. 16.

(т. е. $V \subset \partial W$) и ориентация V совпадает с ориентацией, индуцированной на нем ориентацией W ; б) $F|_V = f$, $F(\partial W \setminus V) \subset Z$ (рис. 16).

Для двух сингулярных ориентированных многообразий (V_1^{k-1}, f_1) и (V_2^{k-1}, f_2) несвязное объединение определяется как пара $(V_1 \cup V_2, f_1 \cup f_2)$, где $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $(f_1 \cup f_2)|_{V_1} = f_1$ и $(f_1 \cup f_2)|_{V_2} = f_2$. По определению будем считать, что $-(V, f) = (-V, f)$.

Определение 3.5.3. Два ориентированных сингулярных многообразия (V_1, f_1) и (V_2, f_2) пары (Y, Z) будем называть бордантными в том и только в том случае, когда несвязное объединение $(V_1 \cup V_2, f_1 \cup f_2)$ бордантно нулю (рис. 17).

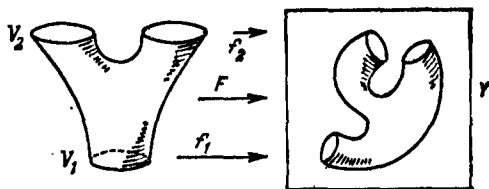


Рис. 17.

Как и выше, легко проверить, что эти определения задают транзитивное отношение эквивалентности на множестве всех ориентированных сингулярных многообразий пары (Y, Z) . Класс бордизмов сингулярного ориентированного многообразия (V, f) обычно обозначается символом $[V, f]$ (и называется сингулярным бордизмом), множество всех таких классов — символом $\Omega_{k-1}(Y, Z)$. Структура абелевой группы на $\Omega_{k-1}(Y, Z)$ индуцируется несвязным объединением, т. е. $[V_1, f_1] + [V_2, f_2] = [V_1 \cup V_2, f_1 \cup f_2]$. Класс бордантных нулю многообразий является нулем в этой группе и $-[V, f] = [-V, f]$. Группа $\Omega_p(Y, Z)$ называется p -мерной группой ориентированных бордизмов пары (Y, Z) . Прямая сумма $\bigoplus_p \Omega_p(Y, Z)$ обозначается через $\Omega_*(Y, Z)$; эта группа естественно

снабжается структурой градуированного модуля над кольцом Ω_* (см. выше), которое, очевидно, можно отождествить с кольцом $\Omega_*(x, \phi)$, где x — точка. Если рассмотреть пары (V, f) , где V — компактные замкнутые многообразия, но уже не обязательно ориентируемые (аналогично и пленки W могут быть неориентируемыми), то описанное построение приводит нас к группе $N_{k-1}(Y, Z)$ неориентированных бордизмов.

Рассмотрим задачу заклейки в проблеме Плато. Пусть A^{k-1} — компактное замкнутое ориентированное подмногообразие в M , $i: A \rightarrow X$ — вложение, $A \subset X$, где X — какой-либо компакт в M . Тогда задача Плато A (см. пункт 3.1) допускает эквивалентную переформулировку:

Задача А. Можно ли среди всех компактов X , содержащих A и обладающих тем свойством, что сингулярный бордизм (A, i) эквивалентен нулю в X , найти такой компакт X_0 , который обладал бы свойствами минимальности?

Поскольку тождественное отображение $e: A \rightarrow A$ определяет некоторый элемент $\sigma \in \Omega_{k-1}(A)$ (и элемент $\sigma \in N_{k-1}(A)$, если рассматриваются неориентированные бордизмы), то введенный выше класс пленок-компактов X характеризуется тем, что $i_*(\sigma) = 0$, где $i_*: \Omega_{k-1}(A) \rightarrow \Omega_{k-1}(X)$ (соответственно $i_*: N_{k-1}(A) \rightarrow N_{k-1}(X)$) — гомоморфизм, индуцированный вложением $i: A \rightarrow X$.

Вторая задача Плато — задача реализации — формулируется теперь следующим образом:

Задача Б. Можно ли среди всех сингулярных многообразий (V, g) , $g: V \rightarrow M$, бордантных (эквивалентных) данному сингулярному многообразию (V', g') , $g': V' \rightarrow M$, найти такое сингулярное многообразие (V_0, g_0) , чтобы пленка $X_0 = g_0(V_0)$ обладала свойствами минимальности? Другими словами, можно ли среди всех представителей (V, g) данного класса бордизмов $\alpha \in \Omega_k(M)$ (или $N_k(M)$) найти такой (V_0, g_0) , что пленка $X_0 = g_0(V_0)$ минимальна в M ?

Поскольку мы рассматриваем пленки переменного топологического типа (меняющегося в рамках фиксированного класса бордизмов),

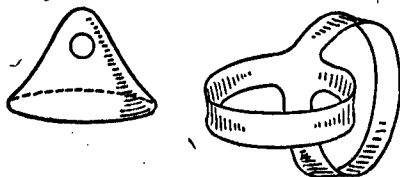


Рис. 18.

то обе эти задачи являются задачами о нахождении абсолютного минимума. Продемонстрируем теперь, что использование разных групп бордизмов позволяет охватить широкий класс геометрических вариационных задач.

Пример 1. Рассмотрим минимальную двумерную пленку X_0 (рис. 18). Эта пленка гомеоморфна гладкому двумерному многообразию с краем A (здесь $A = S^1$), реализующему абсолютный минимум двумерной площади в смысле задачи А. Эта пленка аннулирует сингулярное многообразие $(A, e) \in \Omega_1(A)$ (в смыс-

ле бордизмов). Итак, пленки такого (ориентированного) типа мы можем улавливать с помощью групп $\Omega_*(X, A)$.

Пример 2. Минимальная пленка X_0 , изображенная на рис. 19 (лист Мёбиуса), наиболее естественно улавливается с помощью групп неориентированных бордизмов, поскольку лист Мёбиуса является неориентируемым многообразием с краем A .

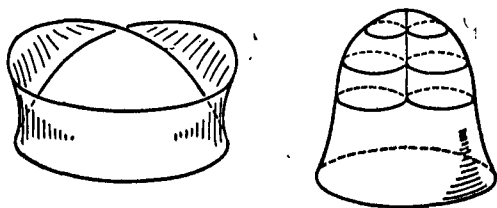


Рис. 19.

Пример 3. Существует класс минимальных пленок X_0 , для описания которых наиболее естественно использовать так называемые бордизмы «по модулю p ». На рис. 20 изображен тройной лист Мёбиуса X_0 с границей $A = S^1$. Ясно, что эта пленка дает абсолютный минимум двумерной площади при данной границе A , однако для описания таких пленок язык ориентированных

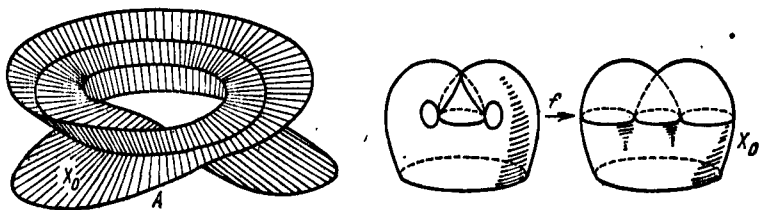


Рис. 20.

или неориентированных бордизмов недостаточен. Поэтому полезно рассмотреть новые группы, которые обозначаются через Ω_p^* и которые мы будем называть группами сингулярных бордизмов по модулю p .

Сингулярным многообразием по модулю p (где p — простое число) размерности $k-1$ пространства Z мы будем называть пару (V, f) , где V — $(k-1)$ -мерное компактное ориентированное многообразие с краем ∂V , который представлен в виде несвязного объединения p замкнутых ориентированных $(k-2)$ -мерных многообразий: $\partial V = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p$ (причем нумерация многообразий B_i фиксирована). Далее, для каждого номера i фиксирован некоторый диффеоморфизм $d_i: B_i \cong B$, где B — одно и то же многообразие для каждого номера i . Отображение $f: V \rightarrow Z$

непрерывно и обладает следующим свойством: $f|_{B_i} = f' d_i|_{B_i}$ для каждого i , $1 \leq i \leq p$, где $f': B \rightarrow Z$ — некоторое фиксированное непрерывное отображение, а через $f|_{B_i}$ обозначено ограничение f на B_i . Мы не требуем связности этих многообразий. Многообразие B может быть пусто, тогда V — замкнутое многообразие.

Два сингулярных многообразия $(V_1; f_1)$ и $(V_2; f_2)$ по модулю p называются эквивалентными, если существует k -мерное компактное ориентированное многообразие W с краем ∂W таким, что $\partial W \supset V_1 \cup (-V_2)$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $\partial W = V_1 \cup (-V_2) \cup \left[\bigcup_{i=1}^p C_i \right]$,

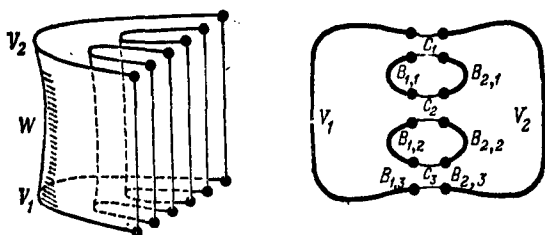


Рис. 21.

где каждое компактное ориентированное многообразие C_i диффеоморфно одному и тому же многообразию C (с помощью фиксированного диффеоморфизма $\alpha_i: C_i \cong C$), причем $\partial C_i = (B_{1,i}) \cup \cup (-B_{2,i})$ ($1 \leq i \leq p$), где $\partial V_1 = \bigcup_{i=1}^p B_{1,i}$, $\partial V_2 = \bigcup_{i=1}^p B_{2,i}$, и если, кроме того, существует непрерывное отображение $F: W \rightarrow Z$ такое, что $F|_{V_1} = f_1$, $F|_{V_2} = f_2$, $F|_{C_i} = F' \alpha_i|_{C_i}$, где $F': C \rightarrow Z$ — некоторое непрерывное отображение (рис. 21), $C_i \cap (V_1 \cup (-V_2)) = B_{1,i} \cup (-B_{2,i})$.

Сингулярное многообразие (V, f) по модулю p называется эквивалентным нулю, если оно эквивалентно $(\emptyset, f_0)$, где $f_0: \emptyset \rightarrow Z$. Операция замены ориентации на противоположную и операция взятия несвязного объединения превращают множество классов эквивалентности сингулярных многообразий по модулю p в абелеву группу, которая обозначается через $\Omega_{k-1}^p(Z)$. Бордантность нулю по модулю p замкнутого многообразия V означает, что $V \subset \partial W$, где k -мерная планка W — ориентированное многообразие такое, что $\partial W = V \cup \left[\bigcup_{i=1}^p T_i \right]$ (несвязное объединение), а каждая компонента T_i диффеоморфна одному и тому же многообразию T (возможно, $T = \emptyset$).

Пусть $Z = x$ (точка); тогда известно, что каждый элемент $\sigma \in \Omega_k^p(x)$ (при $p \neq 2$) имеет порядок p ; мы воспользуемся этим

при исследовании вопроса о 2-устойчивости нетривиальных элементов $\alpha \in \Omega_*^p(M)$ на 2-связных многообразиях M .

Вернемся к рассмотрению тройного листа Мёбиуса. Ясно, что минимальная пленка X_0 , заклеивающая $A = S^1$, заклеивает окружность S^1 по модулю 3, т. е. сингулярный бордизм $\sigma = (S^1; e)$ ($e = 1_A$ — тождественное отображение), $\sigma \in \Omega_1^p(S^1)$, переходит в нуль при гомоморфизме $i_*: \Omega_1^p(A) \rightarrow \Omega_1^p(X_0)$, где $i: A \rightarrow X_0$ — вложение.

Итак, классическая задача Плато требует использования групп $\Omega_{k-1}(A)$, $N_{k-1}(A)$, $\Omega_{k-1}^p(A)$ и их гомоморфизмов в группы $\Omega_{k-1}(X)$, $N_{k-1}(X)$, $\Omega_{k-1}^p(X)$ соответственно, возникающих при вложении $A \rightarrow X$.

3.6. Теория бордизмов—экстраординарная теория гомологий. Введение групп бордизмов в постановку многомерных вариационных задач обосновано тем, что, как мы сейчас покажем, группы $\Omega_*(X, A)$, $N_*(X, A)$, $\Omega_*^p(X, A)$ удовлетворяют аксиомам Стинрода—Эйленберга, образуя тем самым экстраординарные (обобщенные) теории гомологий. Для определенности рассмотрим группы $\Omega_*(X, A)$; в остальных случаях рассуждения полностью аналогичны. Рассмотрим пары компактных пространств (X, A) и непрерывные отображения φ . Если $\varphi: (X, A) \rightarrow (X_1, A_1)$ — непрерывное отображение, то определен индуцированный им естественный гомоморфизм $\varphi_*: \Omega_k(X, A) \rightarrow \Omega_k(X_1, A_1)$, где $\varphi_*[V^k, f] = [V^k, \varphi f]$. Кроме того, определен граничный гомоморфизм $\partial: \Omega_k(X, A) \rightarrow \Omega_{k-1}(A)$, где $\partial[V^k, f] = [\partial V^k, f|_{\partial V^k}]$. Ясно, что отображение ∂ определено корректно и является гомоморфизмом.

Предложение 3.6.1. *Тройка $(\Omega_*(X, A), \varphi_*, \partial)$ (в теории гомологий называемая ковариантным функтором) удовлетворяет первым шести аксиомам Стинрода—Эйленберга (см. [10]) и не удовлетворяет седьмой «аксиоме точки» (см. A7). Для одноточечного пространства x группа $\Omega_*(x)$ изоморфна группе ориентированных бордизмов Ω_* (см. пункт 3.5).*

Проверку аксиом выполним в том порядке, в каком они приведены в [10]. Первые три аксиомы очевидны.

Лемма 3.6.1. *Если отображение $i: (X, A) \rightarrow (X, A)$ тождественно, то $i_*: \Omega_k(X, A) \rightarrow \Omega_k(X_1, A_1)$ — тождественный автоморфизм.*

Лемма 3.6.2. *Если заданы два отображения $\varphi: (X, A) \rightarrow (X_1, A_1)$ и $\psi: (X_1, A_1) \rightarrow (X_2, A_2)$, то имеем $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$.*

Лемма 3.6.3. *Для любого отображения $\varphi: (X_1, A) \rightarrow (X_1, A_1)$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_{k-1}(A) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow (\varphi|_A)_* \\ \Omega_k(X_1, A_1) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_{k-1}(A_1) \end{array}$$

Лемма 3.6.4. Если отображение φ_0 гомотопно отображению φ_1 , где $\varphi_0, \varphi_1: (X, A) \rightarrow (X_1, A_1)$, то $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$.

Доказательство. Пусть $F: (X \times I, A \times I) \rightarrow (X_1, A_1)$ — гомотопия, соединяющая φ_0 и φ_1 ; пусть (V^k, f) — сингулярное многообразие пары (X, A) . Определим отображение $\psi: V^k \times I \rightarrow X_1$ формулой $\psi(x, t) = F(f(x), t)$; тогда $\psi(x, 0) = \varphi_0 f(x)$, $\psi(x, 1) = \varphi_1 f(x)$. Так как $V^k \times I$ — многообразие с краем $\partial(V^k \times I) = (V^k \times \partial I) \cup ((-\partial V^k) \times I)$, то многообразие $(V^k \times I) \cup ((-V^k) \times 0)$ является регулярным подмногообразием края и $\psi((-V^k) \times I) \subset A_1$. Отсюда следует, что $[V^k, \varphi_0 f] = [V^k, \varphi_1 f]$. Лемма доказана.

Лемма 3.6.5. Для любой пары (X, A) последовательность групп и гомоморфизмов $\dots \rightarrow \Omega_k(A) \xrightarrow{j_*} \Omega_k(X) \xrightarrow{i_*} \Omega_k(X, A) \xrightarrow{\partial} \Omega_{k-1}(A) \rightarrow \dots$ является точной.

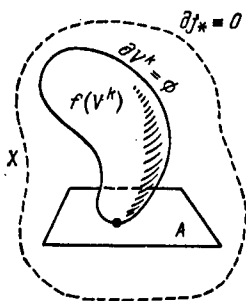


Рис. 22.

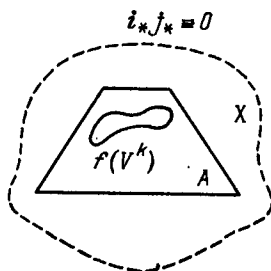


Рис. 23.

Доказательство. Равенство $\partial j_* = 0$ доказывается схемой, изображенной на рис. 22. Тожество $i_*j_* = 0$ доказывается на рис. 23. Тожество $i_*\partial = 0$ см. на рис. 24. Пусть теперь некоторый элемент $[V^k, f]$ принадлежит ядру оператора ∂ . Это означает, что существует сингулярное многообразие (Q^k, g) такое,

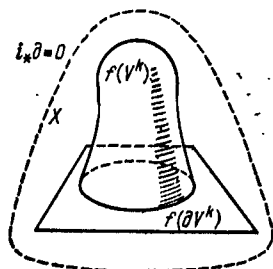


Рис. 24.

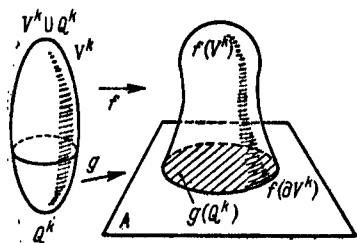


Рис. 25.

что $g(\partial Q^k) = f(\partial V^k)$, $\partial Q^k = \partial V^k$, $g(Q^k) \subset A$. Тогда, очевидно, $[V^k, f] = j_*[V^k \cup (-Q^k), f \cup g]$ (склейка по общей границе), т. е. $[V^k, f] \in \text{Im } j_*$ (рис. 25). Остальные равенства проверяются аналогично, что и завершает доказательство леммы.

Лемма 3.6.6 (аксиома вырезания). Вложение $i(X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$ для любого U такого, что $U \subset \text{Int } A$, индуцирует изоморфизм групп $i_*: \Omega_k(X \setminus U, A \setminus U) \cong \Omega_k(X, A)$.

Доказательство. Мономорфность i_* очевидна. Доказательство эпиморфности см. на рис. 26. В самом деле, если $[V^k, f]$ — элемент группы $\Omega_k(X, A)$, $f(\partial V^k) \subset A$, то $[V^k, f] = i_*[Q^k, g]$, где $Q^k \subset V^k$, $Q^k \supset f^{-1}(X \setminus \text{Int } A)$. Лемма доказана.

Последняя (7-я) аксиома не выполняется, так как $\Omega_k(x) \neq 0$ при $k > 0$, x — точка. Это обстоятельство сильно отличает теорию бордизмов от теории обычных гомологий H_* , для которой «аксиома точки» выполнена. Для вариационных задач нам потребуется группа приведенных бордизмов. отождествим группу Ω_k с группой $\Omega_k(x)$ для некоторой точки x и определим приведенную группу $\tilde{\Omega}_k(X)$ как ядро гомоморфизма $e_*: \Omega_k(X) \rightarrow \Omega_k(x)$, где e_* индуцировано проекцией пространства X в точку x . Очевидно, что $\Omega_k(X) \cong \Omega_k \oplus \tilde{\Omega}_k(X)$. Ориентированное сингулярное многообразие (V^k, f) пространства X является элементом группы $\tilde{\Omega}_k(X)$ тогда и только тогда, когда $[V^k] = 0$ в Ω_k .

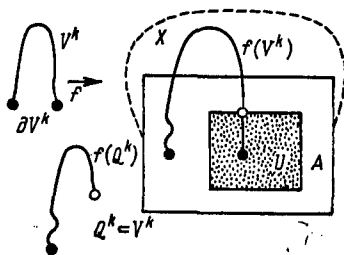


Рис. 26.

3.7. Формулировка решения классической задачи Плато (существование абсолютного минимума в задачах А и Б). В этом пункте мы сформулируем теорему, решающую классическую задачу Плато для произвольного «контура» A^{k-1} в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть A^{k-1} — фиксированное замкнутое гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$; обозначим через $A(\sigma)$ класс всех измеримых компактов (пленок) X , $X \subset \mathbb{R}^n$, которые аннулируют бордизм $\sigma = [A, e]$, $e: A \rightarrow A$ — тождественное отображение. Другими словами, сингулярное многообразие (A, i) ($i: A \rightarrow X$ — вложение) бордантно нулю в пленке X , т. е. $i_*(\sigma) = 0$, где i_* — гомоморфизм, отображающий группу $(k-1)$ -мерных бордизмов A в группу $(k-1)$ -мерных бордизмов X . Через vol_k обозначим либо риманов объем пленки X , либо k -мерную хаусдорфову меру в том случае, когда X — произвольный измеримый (по Хаусдорфу) компакт.

Теорема 3.7.1. (1) Пусть $\{X\}_k$ — класс всех компактов X , $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$, таких, что $X \in A(\sigma)$ и $\text{vol}_k X = d_k = \inf(\text{vol}_k Y)$, $Y \in A(\sigma)$. Тогда класс $\{X\}_k$ непуст, $d_k > 0$ и каждый компакт $X \in \{X\}_k$ содержит однозначно определенное k -мерное подмножество S^k (т. е. имеющее в каждой своей точке размерность k), $S^k \subset X \setminus A$, такое, что $A \cup S^k$ является компактом в $\mathbb{R}^n$, S^k содержит некоторое «особое» подмножество Z_k (которое может быть пусто), где $\text{vol}_k(Z_k) = 0$ и $S^k \setminus Z_k$ является гладким мини-

мальным k -мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$, причем $S^k \setminus Z_k$ всюду плотно в S^k и $\text{vol}_k(S^k) = \text{vol}_k X = d_k > 0$.

(2) Далее, если $\{X\}_{k-1}$ — класс всех компактов X , $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$, таких, что $X \in A(\sigma)$, $X \in \{X\}_k$ и $\text{vol}_{k-1}(X \setminus S^k) = d_{k-1} = \inf \text{vol}_{k-1}(Y \setminus S^k)$, $Y \in \{X\}_k$, то класс $\{X\}_{k-1}$ непуст, а в том случае, когда $d_{k-1} > 0$, каждый компакт $X \in \{X\}_{k-1}$ содержит однозначно определенное $(k-1)$ -мерное подмножество S^{k-1} (имеющее в каждой своей точке размерность $k-1$), $S^{k-1} \subset X \setminus A \setminus S^k$, такое, что $A \cup S^k \cup S^{k-1}$ есть компакт в $\mathbb{R}^n$, S^{k-1} содержит некоторое «особое» подмножество Z_{k-1} (которое может быть пусто), где $\text{vol}_{k-1}(Z_{k-1}) = 0$ и $S^{k-1} \setminus Z_{k-1}$ есть гладкое минимальное $(k-1)$ -мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$, всюду плотное в S^{k-1} , причем $\text{vol}_{k-1}(S^{k-1}) = \text{vol}_{k-1}(X \setminus A \setminus S^k) = d_{k-1} > 0$. Если же $d_{k-1} = 0$, то положим $S^{k-1} = \emptyset$.

(3), (4) ... И так далее, вниз по размерностям.

Следствие 3.7.1. В классе $A(\sigma)$ существует глобально минимальная поверхность $X_0 = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots$, стратифицированный объем которой $SV(X_0) = (\text{vol}_k S^k, \text{vol}_{k-1} S^{k-1}, \dots)$ является наименьшим среди стратифицированных объемов всех других пленок $X \in A(\sigma)$, т. е. пленка X_0 является глобально минимальной во всех размерностях.

Если ограничиться только первым утверждением теоремы 3.7.1, то получаем теорему существования параметризованной пленки X_0 , глобально минимальной в наибольшей своей размерности (равной k). Теорема, аналогичная теореме 3.7.1 (и следствию 3.7.1), имеет место и для задачи Плато Б (задачи реализации). Все эти теоремы являются частными случаями общей теоремы существования глобально минимальных (во всех размерностях) поверхностей, доказанной автором (см. [27] — [32]) для широкого класса вариационных задач на римановом многообразии.

§ 4. Экстраординарные теории (ко)гомологий, определенные на «поверхностях с особенностями»

В этом параграфе мы дадим описание экстраординарных теорий гомологий и когомологий, поскольку, как оказывается, каждой из них отвечает своя вариационная задача, допускающая полное решение. Поскольку решения вариационных задач имеют, вообще говоря, особенности (и иногда весьма сложные), то эти теории (ко)гомологий нужно определить на множестве поверхностей с особенностями; в качестве максимально широкого класса таких «поверхностей» мы возьмем класс компактов в римановом многообразии, заведомо включающий в себя все возможные решения вариационных задач. Настоящий параграф носит технический характер и может быть опущен при первом чтении; читатель может сразу перейти к постановке вариационных задач в терминах экстраординарных теорий.

4.1. Характеристические свойства теорий (ко)гомологий. Пусть фиксирована некоторая допустимая категория K (см. [10]), и пусть каждой паре $(X, A) \in K$ и каждому $q \in \mathbb{Z}$ сопоставлена абелева группа $h_q^{(q)}(X; A)$. Пусть каждому допустимому отображению $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ и каждому $q \in \mathbb{Z}$ сопоставлен гомоморфизм $f_*^{(q)}$, определенный на $h_q(X, A)$ (соответственно на $h_q(Y, B)$), и пусть для $(X, A) \in K$ определен (ко)границный оператор $\partial_q: h_q(X, A) \rightarrow h_{q-1}(A, \emptyset)$ (соответственно $\partial_q: h_{q-1}(A, \emptyset) \rightarrow h_q(X, A)$). Потребуем, чтобы тройка $(h_*^{(q)}(X, A); f_*^{(q)}; \partial(\delta))$ удовлетворяла шести аксиомам Стинрода — Эйленберга A1 — A6.

A1. Если $f \in K$ — тождественное отображение, то $f_*^{(q)}$ — тождественный гомоморфизм.

A2. Имеем $(gf)_* = g_* f_*$ (соответственно $(gf)^* = f^* g^*$).

A3. (Ко)границные операторы $\partial(\delta)$ естественны, т. е. коммутируют с индуцированными гомоморфизмами $f_*^{(q)}$.

A4 (аксиома точности). Если $(X, A) \in K$, то следующая последовательность точна:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow h_q(A, \emptyset) \xrightarrow{i_*} h_q(X, \emptyset) \xrightarrow{j_*} h_q(X, A) \xrightarrow{\partial} h_{q-1}(A, \emptyset) \rightarrow \dots \\ (\dots \leftarrow h_q(A, \emptyset) \xleftarrow{i^*} h_q(X, \emptyset) \xleftarrow{j^*} h_q(X, A) \xleftarrow{\delta} h_{q-1}(A, \emptyset) \leftarrow \dots), \end{aligned}$$

где гомоморфизмы $i_*^{(q)}$ и $j_*^{(q)}$ индуцированы вложениями.

A5 (аксиома гомотопии). Если отображения f и g гомотопны (в K), то $f_*^{(q)} = g_*^{(q)}$.

Для приложений полезна следующая переформулировка:

A5'. Пусть $(X, A) \in K$ и $g_i: (X, A) \rightarrow (X \times I; A \times I)$ ($i = 0, 1$, а I — единичный отрезок), где $g_0(x) = (x, 0)$, $g_1(x) = (x, 1)$. Тогда $(g_0)_*^{(q)} = (g_1)_*^{(q)}$.

A6 (аксиома вырезания). Пусть $(X, A) \in K$; $V \subset X$, $U \subset X$ — открытые подмножества такие, что $\bar{U} \subset V \subset A$ ($\bar{U}$ — замыкание U в X), и пусть вложение $i: (X \setminus U; A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ допустимо. Тогда все гомоморфизмы $i_*^{(q)}$ являются изоморфизмами.

Полезна следующая переформулировка этой аксиомы:

A6'. Пусть $X = \text{Int}(X_1) \cup \text{Int}(X_2)$, где X_1 замкнуто в X , и пусть вложение $i: (X_1; X_1 \cap X_2) \rightarrow (X, X_2)$ допустимо в K . Тогда все гомоморфизмы $i_*^{(q)}$ — изоморфизмы.

Определение 4.1.1. Функтор $h_*^{(q)} = \bigoplus_q h_q^{(q)}$, удовлетворяющий аксиомам A1 — A6, будем называть *экстраординарной теорией (ко)гомологий на категории K со значениями в категории абелевых групп AB* .

Для использования языка функторов $h_*^{(q)}$ в вариационных задачах потребуются функторы h ($= h_*^{(q)}$), удовлетворяющие более сильной форме аксиомы вырезания, а именно аксиоме $\tilde{A}6$.

$\tilde{A}6$ (относительная инвариантность). Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — относительный гомеоморфизм (X, A) на (Y, B) (т. е.

$X \setminus A \xrightarrow{\sim} Y \setminus B$ есть гомеоморфизм); тогда все гомоморфизмы f_{**} являются изоморфизмами.

Ясно, что если функтор h на K удовлетворяет $\tilde{A}6$, то он удовлетворяет $A6$ ($= A6'$); обратное, вообще говоря, неверно. Мы будем использовать еще один вариант аксиомы вырезания:

$A6^\circ$. Пусть (X, A, B) — допустимая тройка в K и $X = A \cup B$; $i: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ — вложение. Тогда все гомоморфизмы i_{**} являются изоморфизмами.

Если функтор h удовлетворяет на K аксиоме $\tilde{A}6$, то он удовлетворяет и $A6^\circ$, поскольку вложение $(A, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, B)$ — относительный гомеоморфизм. Обратное, вообще говоря, неверно. Если h на K удовлетворяет $A6^\circ$, то он удовлетворяет и $A6$. Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому аксиома $A6^\circ$ расположена «между» аксиомами $\tilde{A}6$ и $A6$.

Пусть x — одноточечное топологическое пространство, и пусть вложение $i: x \rightarrow X$ допустимо в категории K . Пусть на K фиксирована некоторая теория когомологий h^* .

Определение 4.1.2. Приведенной группой $\tilde{h}^q(X)$ когомологий размерности q по отношению к точке x назовем подгруппу $\text{Ker}(i^*) \subset h^q(X)$; $i^*: h^q(X) \rightarrow h^q(x)$.

Пусть $f: X \rightarrow x$ — проекция X в x , и пусть h_* — теория гомологий.

Определение 4.1.3. Приведенной группой $\tilde{h}_q(X)$ гомологий размерности q по отношению к точке x назовем подгруппу $\text{Ker}(f_*) \subset h_q(X)$; $f_*: h_q(X) \rightarrow h_q(x)$.

4.2. Экстраординарные теории (ко)гомологий, определенные на конечных клеточных комплексах. Рассмотрим произвольный спектр E , т. е. семейство $E = \{E_n; e_n\}$, где $n \in \mathbb{Z}$, E_n — топологические пространства, $e_n: \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ — некоторые отображения (через ΣX обозначена приведенная надстройка над пространством X). Спектр E можно описывать, задавая вместо отображений e_n отображения $\bar{e}_n: E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$ (через ΩX обозначено пространство петель на X). Спектр E иногда называют Ω -спектром, если все $\bar{e}_n$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Пример 1. $E = \{S^n; e_n\}$, где $e_n: \Sigma S^n \rightarrow S^{n+1}$ есть тождественное отображение, S^n — сфера размерности n .

Пример 2. Пусть E — некоторый спектр и X — произвольный CW -комплекс. Положим $E'_n = E_n \wedge X$ (напомним, что $A \wedge B = A \times B / A \vee B$, где через $A \vee B$ обозначен букет двух пунктированных пространств, в данном случае $A \vee B$ есть «координатный крест»); $e'_n: \Sigma E'_n \rightarrow E'_{n+1}$, где $e'_n: \Sigma E'_n = S^1 \wedge E'_n = S^1 \wedge E_n \wedge X \xrightarrow{e_n \wedge 1} E_{n+1} \wedge X = E'_{n+1}$ (здесь мы воспользовались очевидным соотношением $\Sigma A = S^1 \wedge A$). Тогда совокупность $\{E'_n; e'_n\}$ образует спектр (называемый надстройкой спектра E , если $X = S^1$), обозначаемый $E' = E \wedge X$.

Пример 3. Пусть E — спектр, X — CW -комплекс; положим $F_n = F(X, E_n)$, где $F(A, B)$ — пространство всех непрерывных отображений A в B ; определим отображения $\varphi_n: \Sigma F_n \rightarrow F_{n+1}$ так: $\varphi_n(s \wedge f)(x) = e_n(s \wedge f(x))$, где $E = \{E_n, e_n\}$; $f \in F_n$; $s \in S^1$; $x \in X$; $\Sigma F_n = S^1 \wedge F_n$. Получаем спектр $F(X, E) = \{F_n, \varphi_n\}$, который в случае $X = S^1$ называется спектром петель спектра E и обозначается ΩE .

Напомним, что спектр E называется сходящимся, если существует число N такое, что пространства E_{N+i} i -связны (т. е. $\pi_s(E_{N+i}) = 0$ при $s \leq i$) для всех $i \geq 0$. Например, спектр сфер (см. пример 1) — сходящийся. Пусть E — произвольный сходящийся спектр и $\alpha_k = (e_k)_* \Sigma_*$ — следующий гомоморфизм:

$$\pi_{n+k}(E_k) \xrightarrow{\Sigma_*} \pi_{n+k+1}(\Sigma E_k) \xrightarrow{(e_k)_*} \pi_{n+k+1}(E_{k+1}),$$

где Σ_* — гомоморфизм надстройки, а через $\pi_\alpha(A)$ обозначаются гомотопические группы пространства A . Ясно, что группы $\pi_{n+k}(E_k)$ с гомоморфизмами α_k образуют прямой спектр (стабилизирующийся при фиксированном n с точностью до гомоморфизмов $(e_k)_*$ ввиду сходимости E), что позволяет определить следующие группы: $\pi_n(E) = \lim_{(k)} \{\pi_{n+k}(E_k), \alpha_k\}$. Отметим, что число n может быть как

положительно, так и отрицательно. Если E — спектр из примера 1, то $\pi_n(E) = \pi_n^S(S^0)$ — n -мерная стабильная гомотопическая группа. Группы $\pi_n(E)$ называются гомотопическими группами спектра E .

Пусть P^2 — категория пар (X, A) , где X и A суть конечные клеточные комплексы, пусть P — категория всех конечных клеточных комплексов и P^0 — категория конечных клеточных комплексов с выделенными точками. Через AB обозначим категорию абелевых групп, а через ABC — категорию компактных абелевых групп. Пусть $E = \{E_n, e_n\}$ — сходящийся спектр, $X \in P^0$ — произвольный CW -комплекс, $x \in X$ — выделенная точка. Положим $\tilde{h}_q(X) = \tilde{h}_q(X, E) = \pi_q(E \wedge X)$, где через $E \wedge X$ обозначен спектр из примера 2. В спектре $E \wedge X$ имеется выделенная точка $\tilde{x} = (\dots \rightarrow x_k \rightarrow x_{k+1} \rightarrow \dots)$ ($x_k \in E_k \wedge X$), и группа $\pi_q(E \wedge X)$ вычисляется по отношению к этой точке. Если $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$, то возникает отображение $1 \wedge f: E \wedge X \rightarrow E \wedge Y$ и можно положить $\tilde{h}_q(f, E) = (1 \wedge f)_*: \pi_q(E \wedge X) \rightarrow \pi_q(E \wedge Y)$. Итак, мы построили ковариантный функтор $\tilde{h}_*(\cdot, E)$ на категории P^0 . Определим гомоморфизм $\sigma_q(X, E): \tilde{h}_q(X, E) \rightarrow \tilde{h}_{q+1}(\Sigma X, E)$ как композицию:

$$\tilde{h}_q(X, E) = \pi_q(E \wedge X) \xrightarrow{\Sigma_*} \pi_{q+1}(S^1 \wedge E \wedge X) \xrightarrow{\alpha_*} \pi_{q+1}(E \wedge S^1 \wedge X) = \tilde{h}_{q+1}(\Sigma X, E),$$

где α — перестановка сомножителей E и S^1 . Поскольку X — конечный CW -комплекс, то из определения групп $\pi_q(E \wedge X)$ следует, что гомоморфизм $\sigma_q(X, E)$ является изоморфизмом. Рассмотрим

пару (X, A) и $x \in A$, тогда $CA \cup X$ гомотопически эквивалентен X/A и существует каноническое непрерывное отображение $p: X \cup CA \rightarrow \Sigma A$ ($p(X) = x$, CA — конус над A). Определим оператор $\tilde{\partial}_q: \tilde{h}_q(X/A) \rightarrow \tilde{h}_{q-1}(A)$, положив $\tilde{\partial}_q = -\omega_q$, где ω_q — композиция:

$$\tilde{h}_q(X/A) = \tilde{h}_q(X \cup CA) \xrightarrow{p_*} \tilde{h}_q(\Sigma A) \xrightarrow{\tilde{\partial}_q^{-1}} \tilde{h}_{q-1}(A),$$

а σ_q^{-1} — построенный выше изоморфизм. Легко доказать, что:

- 1) если $f_0 \sim f_1$, то $\tilde{h}_*(f_0, E) = \tilde{h}_*(f_1, E)$;
- 2) если $(X, A) \in P^0$ (тогда $X/A \in P^0$), $i: A \rightarrow X$ — вложение и $f: X \rightarrow X/A$ — проекция, то следующая последовательность точна:

$$\dots \rightarrow \tilde{h}_q(A) \xrightarrow{\tilde{h}_q(i)} \tilde{h}_q(X) \xrightarrow{\tilde{h}_q(f)} \tilde{h}_q(X/A) \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} \tilde{h}_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

Итак, мы построили на категории P^0 приведенную теорию гомологий $\tilde{h}_*(\cdot, E)$, исходя из произвольного сходящегося спектра E . Построим теперь по теории $\tilde{h}_*$ на P^0 теорию гомологий h_* на P^2 . Пусть $(X, A) \in P^2$, тогда положим $h_q(X, A) = \tilde{h}_q(X/A)$, причем если $A = \emptyset$ (что допустимо в P^2), то будем считать, что $X/\emptyset = X \cup \{x\}$ (несвязное объединение). Оператор $\partial_q: h_q(X, A) \rightarrow h_{q-1}(A, \emptyset)$ определим так: $\partial_q = \tilde{\partial}_q: \tilde{h}_q(X/A) \rightarrow \tilde{h}_{q-1}(A/\emptyset) = \tilde{h}_{q-1}(A \cup x)$. Можно проверить, что этот функтор h_* является экстраординарной теорией на P^2 в смысле определения 4.1.1. Легко доказывается, что h_* на P^2 удовлетворяет не только A_6 , но и A_6^0 .

Существует взаимно однозначное соответствие между теориями h_* на P^2 и теориями $\tilde{h}_*$ на P^0 . Мы только что построили соответствие, относящее каждой теории $\tilde{h}_*$ на P^0 теорию h_* на P^2 . Построим обратное соответствие. Пусть h_* — теория на P^2 . Если $(X, x) \in P^0$, то можно положить $\tilde{h}_q(X) = h_q(X, x)$. Ясно, что оператор ∂_q порождает оператор $\tilde{\partial}_q$, так как $\sigma_q(X): \tilde{h}_q(X) \rightarrow \tilde{h}_{q+1}(\Sigma X)$ можно определить как композицию $-p_*\partial^{-1}$, где $\partial: h_{q+1}(CX, X) \rightarrow h_q(X, x)$ — граничный оператор в последовательности тройки (CX, X, x) :

$$p_*: h_{q+1}(CX, X) = \tilde{h}_{q+1}(CX/X) \rightarrow \tilde{h}_{q+1}(\Sigma X); p: CX/X \rightarrow \Sigma X.$$

Пусть h_* — экстраординарная теория гомологий на P^2 ; тогда группы $h_q(x)$, $q \in \mathbb{Z}$, называются группами коэффициентов теории h_* . Вопрос: любую ли теорию h_* на P^2 можно представить в виде $h_*(\cdot, E)$? Ответ дает следующее утверждение.

Предложение 4.2.1 (см. [48], [49]). Для произвольного спектра E функтор $h_*(\cdot, E)$ определяет экстраординарную теорию гомологий на P^2 , удовлетворяющую A_1 — A_6^0 . Обратно, пусть h_* — приведенная экстраординарная теория гомологий на P^0 такая,

что все группы коэффициентов $\tilde{h}_q(S^0)$ не более чем счетны. Тогда существует Ω -спектр E , для которого имеется естественный изоморфизм $T: \tilde{h}_*(X, E) \cong \tilde{h}_*(X)$ для любого $X \in P^0$. Спектр E определен однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности.

Аналогичное утверждение справедливо и для теорий h_* на P^2 .

Рассмотрим когомологический случай. Пусть $E = \{E_n, e_n\}$ — произвольный спектр, $X \in P^0$, $x \in X$ — отмеченная точка. Построим спектр $F(X, E)$ (см. пример 3) и положим $\tilde{h}^q(X) = \tilde{h}^q(X, E) = \pi_{-q}[F(X, E)]$. Каждое пространство $F_n(X, E) = F(X, E_n)$ содержит отмеченную точку x_n , где $x_n: X \rightarrow E_n$ есть отображение в точку (E_n можно считать связными). Любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает отображение $F(f): F(Y, E) \rightarrow F(X, E)$; поэтому можно положить $\tilde{h}^q(f) = (f_q)_*: \pi_{-q}[F(Y, E)] \rightarrow \pi_{-q}[F(X, E)]$, что и определяет на P^0 контравариантный функтор $\tilde{h}_x^*$. Определим гомоморфизм $\sigma^q(X, E): \tilde{h}^{q+1}(\Sigma X, E) \rightarrow \tilde{h}^q(X, E)$ как композицию:

$$\pi_{-q-1}[F(\Sigma X, E)] \xrightarrow{\psi^*} \pi_{-q-1}[\Omega F(X, E)] \xrightarrow{\omega} \pi_{-q}[F(X, E)].$$

Здесь $\psi: F(\Sigma X, E) \xrightarrow{\cong} \Omega F(X, E)$ — изоморфизм двух спектров, порожденный следующими гомеоморфизмами:

$$F(\Sigma X, E_k) \cong F(S^1 \wedge X, E_k) = F[S^1, F(X, E_k)] = \Omega F(X, E_k).$$

Далее, имеется изоморфизм $\omega_k: \pi_{-q+k-1}(\Omega F_k) \cong \pi_{-q+k}(F_k)$, и если φ_n — характеристические отображения спектра $\Omega F = \{\Omega F_n, \varphi_n\}$, то следующие диаграммы антикоммуутативны, т. е. $(-1)^k (e_k)_* \omega_k = \omega_{k+1} \cdot (\varphi_k)_*$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{-q-1+k}(\Omega F_k) & \rightarrow & \pi_{-q+k-1}(\Omega F_{k+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{-q+k}(F_k) & \rightarrow & \pi_{-q+k}(F_{k+1}) \end{array}$$

Заменив ω_k на $(-1)^k \omega_k$, получаем коммутативные диаграммы, что дает окончательный изоморфизм $\pi_{-q-1}(\Omega F) \cong \pi_{-q}(F)$. Отсюда следует, что построенный нами гомоморфизм $\sigma^q(X, E)$ — изоморфизм. Пусть $(X, A) \in P^0$, $p: X \cup CA \rightarrow \Sigma A$ — проекция; тогда можно определить кограничный оператор $\delta_q: \tilde{h}_x^q(A) \rightarrow \tilde{h}_x^{q+1}(X/A)$, положив $\delta_q = -\tau_q$, где τ_q — композиция:

$$\tilde{h}_x^q(A) \xrightarrow{(\sigma^q)^{-1}} \tilde{h}_x^{q+1}(\Sigma A) \xrightarrow{p_*} \tilde{h}_x^{q+1}(X \cup CA) \cong \tilde{h}_x^{q+1}(X/A).$$

Легко доказать, что: 1) если $f_0 \sim f_1$, то $h^*(f_0, E) = \tilde{h}^*(f_1, E)$; 2) если $(X, A) \in P^0$, $i: A \rightarrow X$ — вложение, $f: X \rightarrow X/A$ — проекция, то следующая последовательность точна:

$$\dots \rightarrow \tilde{h}_x^q(A) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}_x^{q+1}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}_x^{q+1}(f)} \tilde{h}_x^{q+1}(X) \xrightarrow{\tilde{h}_x^{q+1}(f)} \tilde{h}_x^{q+1}(A) \rightarrow \dots$$

Итак, мы сопоставили каждому спектру E теорию когомологий

на P^0 . Как и в случае гомотопий, исходя из $\tilde{h}^*$ на P^0 , можно построить h^* на P^2 . Пусть $(X, A) \in P^2$; положим $h^q(X, A) = \tilde{h}^q(X/A)$; $h^q(X) = h^q(X, \emptyset) = \tilde{h}^q(X/\emptyset) = \tilde{h}^q(X \cup \{x\})$. Оператор $\delta_q: h^q(A) \rightarrow h^{q+1}(X, A)$ положим равным оператору $\tilde{\delta}_q: h^q(A) = \tilde{h}^q(A \cup \{x\}) \rightarrow \tilde{h}^{q+1}(X/A) = h^{q+1}(X, A)$.

Полученный функтор h^* — экстраординарная теория когомологий на P^2 , удовлетворяющий A_6 и A_6^0 . Как и в случае гомотопий, существует взаимно однозначное соответствие между теориями $\tilde{h}^*$ на P^0 и теориями h^* на P^2 (см. [48], [49]).

4.3. Построение экстраординарных теорий (ко)гомологий, определенных на «поверхностях с особенностями» (на компактах). До сих пор мы рассматривали функторы h (через h мы обозначаем $h_*^{(*)}$), удовлетворяющие аксиомам A_1 — A_6 , со значениями в категории абелевых групп AB . Однако для построения теорий h на категории компактных пар U_C эти функторы не могут нас удовлетворить, так как переход к обратному пределу разрушает точность гомотопической последовательности пары.

а) Пусть на P^2 задан функтор h_* , удовлетворяющий аксиомам A_1 — A_6 , со значениями в категории Gff конечномерных векторных пространств над полем F , т. е. $h_q(X, A) \in Gff$. Будем предполагать, что все гомоморфизмы f_* и ∂ являются F -линейными отображениями.

б) Пусть на P^2 задан функтор h_* , удовлетворяющий A_1 — A_6 , со значениями в категории ABC топологических компактных абелевых групп, т. е. $h_q(X, A) \in ABC$. Будем предполагать, что все гомоморфизмы f_* и ∂ непрерывны.

в) Пусть на P^2 задан функтор h^* , удовлетворяющий A_1 — A_6 , со значениями в категории GR всех R -модулей над кольцом R , т. е. $h^q(X, A) \in GR$. Будем предполагать, что все гомоморфизмы f^* и δ R -линейны.

Любой когомологический функтор h^* в смысле определения 4.1.1 удовлетворяет условию в), поскольку можно считать, что $R = \mathbb{Z}$, тогда $AB = G\mathbb{Z}$. Вложим P^2 в категорию U_C и продолжим функторы h с P^2 на всю категорию U_C . Пусть на P^2 задана теория $\tilde{h}$, удовлетворяющая одному из условий а), б), в). Пусть $(X, A) \in U_C$ и $\text{Cov}^f(X, A)$ есть направленное множество всех открытых конечных покрытий пары (X, A) . Пусть $\alpha \in \text{Cov}^f(X, A)$ — произвольное конечное покрытие и (X_α, A_α) — нерв покрытия α . Так как $(X_\alpha, A_\alpha) \in P^2$, то положим $h_\alpha = h(X_\alpha, A_\alpha)$; тогда, если $\alpha < \beta$ (т. е. β вписано в α), возникают гомоморфизмы $\pi_\alpha^\beta: (h_q)_\beta \rightarrow (h_q)_\alpha$. Системы $\{(h_q)_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$ (соответственно $\{(h^q)_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$) назовем q -мерными (ко)гомологическими спектрами пары (X, A) . Элементарные рассуждения показывают, что гомотопический (когомологический) спектр является обратным (прямым) спектром групп h_α над направленным множеством $\text{Cov}^f(X, A)$.

Определение 4.3.1. Будем называть обратный (прямой) предел q -мерного (ко)гомологического спектра пары (X, A) над $\text{Cov}^f(X, A)$ q -мерной группой экстраординарных спектральных (ко)гомологий пары $(X, A) \in U_C$ и обозначать ее по-прежнему через $h_q^{(q)}(X, A)$.

Лемма 4.3.1. Если $h_q(X, A) \in GFf$ (случай а)), $(X, A) \in P^2$, то $h_q(X, A) \in GF$ при $(X, A) \in U_C$. Если $h_q(X, A) \in ABC$ (случай б)), $(X, A) \in P$, то $h_q(X, A) \in ABC$ при $q \in \mathbb{Z}$, $(X, A) \in U_C$. Если $h^q(X, A) \in GR$ (случай в)), $(X, A) \in P^2$, то $h^q(X, A) \in GR$ при $(X, A) \in U_C$. Тип категории групп h сохраняется в случаях б) и в) и может измениться в случае а).

Доказательство леммы 4.3.1 следует из теорем VIII.3.14 и VIII.4.12 в [10].

Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — непрерывное отображение в категории U_C и $f_0^{-1}: \text{Cov}^f(Y, B) \rightarrow \text{Cov}^f(X, A)$ — соответствующее отображение покрытий пары (Y, B) в покрытия пары (X, A) ; пусть $f_\alpha: (X_\alpha, A_\alpha) \rightarrow (Y_\alpha, B_\alpha)$ — соответствующее отображение нервов покрытий; здесь $\alpha \in \text{Cov}^f(Y, B)$ и $\alpha' = f_0^{-1}(\alpha)$, поэтому f_α — вложение нерва (X_α, A_α) в нерв (Y_α, B_α) . Можно показать, что гомоморфизмы $(f_\alpha)_*^{(*)}$ (где α пробегает все множество $\text{Cov}^f(Y, B)$) вместе с отображением f_0^{-1} образуют отображение $\Phi(f)$ (ко)гомологического спектра пары (X, A) в спектр пары (Y, B) . Доказательство сводится к проверке коммутативности соответствующих диаграмм, и мы его опускаем. Итак, построение спектральных групп и индуцированных гомоморфизмов полностью завершено. Проверим выполнение аксиом A1—A6.

4.4. Проверка характеристических свойств построенных теорий.

Лемма 4.4.1. Теории h , построенные в пункте 4.3, удовлетворяют на категории U_C аксиомам A1 и A2.

Доказательство леммы очевидно.

Лемма 4.4.2. Теории h , построенные в пункте 4.3, удовлетворяют на категории U_C аксиоме гомотопии A5 (=A5').

Доказательство. Докажем выполнение A5'. Пусть $g_i: (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$ определены так: $g_0(x) = (x, 0)$, $g_1(x) = (x, 1)$. Покрытие α отрезка $I = [0, 1]$ открытыми связными множествами α_i (где $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $n > 0$) называется регулярным, если $0 \in \alpha_0$, $0 \notin \alpha_1$, $1 \in \alpha_n$, $1 \notin \alpha_{n-1}$, $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ при $0 \leq i \leq n-1$, и $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ при $|i-j| > 1$. Тогда (см. лемму IX.5.4 в [10]) регулярные покрытия образуют конфинальное подмножество в множестве $\text{Cov}^f(I)$. Если $\alpha \in \text{Cov}^f(X, A)$, то через (V_α, V_α^A) мы обозначим его индексирующую пару (см. [10]). Предположим, что α таково, что каждому индексу $v \in V_\alpha$ сопоставлено некоторое конечное регулярное покрытие $\beta^v = \{\beta_i^v\}$ отрезка I с множеством индексов $N^v = \{0, 1, \dots, n^v\} = \{i\}$. Поскольку $V_\alpha^A \subset V_\alpha$, то может случиться, что $v \in V_\alpha^A$. Пусть W — множество всех пар (v, i) , где $v \in V_\alpha$, $i \in N^v$, т. е. над каждым индексом v мы под-

вешиваем набор индексов N^v . Пусть $W^A \subset W$ — подмножество, состоящее из всех таких пар (v, i) , что $v \in V_\alpha^A$. Покрытие $\gamma \in \text{Cov}^I(X \times I, A \times I)$ с индексирующей парой $(W, W^A)^\alpha$, определенное формулой $\gamma_{v,i} = \alpha_v \times \beta_i^v$ (где $v \in V_\alpha$, $0 \leq i \leq n^v$), называется брусчатым покрытием с базой α , а множества $\alpha_v \times \beta_i^v$ — брусками покрытия γ . Из леммы IX.5.6 в [10] следует, что брусчатые покрытия образуют конфинальное подмножество в $\text{Cov}^I(X \times I, A \times I)$. Пусть $\alpha \in \text{Cov}^I(X, A)$, $\gamma = \gamma(\alpha)$, и пусть γ является таким брусчатым покрытием, что множество индексов N^v не зависит от $v \in V_\alpha$; это означает, что $\gamma_{v,i} = \alpha_v \times \beta_i$, где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ — регулярное покрытие I ; $N^v \equiv N = \{0, 1, \dots, n\}$. Будем называть такое брусчатое покрытие прямым. Докажем, что прямые брусчатые покрытия образуют конфинальное подмножество в $\text{Cov}^I(X \times I, A \times I)$. Достаточно доказать конфинальность прямых брусчатых покрытий в множестве брусчатых покрытий. Пусть $\gamma \in \text{Cov}^I(X \times I, A \times I)$ — брусчатое покрытие; требуется найти вписанное в него прямое брусчатое покрытие. Покрытие $\gamma = \gamma(\alpha)$ определяет на отрезке I множества $\bar{\gamma}_{v,i} = p(\gamma_{v,i}) = p(\alpha_v \times \beta_i^v)$, где через $p: (X \times I) \rightarrow I$ обозначена проекция на сомножитель I . Тем самым, на I возникают интервалы β_i^v с концами (x_i^v, y_i^v) , где $0 \leq i \leq n^v$. Рассмотрим конечное множество точек $K = K(\gamma) = \bigcup_i \bigcup_v (x_i^v, y_i^v)$ и упорядочим их, начиная с точки 0, в порядке

возрастания до 1, т. е. $K = \bigcup_{q=0}^M z_q$, где $M = M(\gamma)$. Можно считать,

что $z_\alpha \neq z_\beta$ при $\alpha \neq \beta$ (в противном случае выбросим из K все лишние точки). Построим покрытие w отрезка I множествами w_q , где $w_q = (z_q, z_{q+2})$; $0 \leq q \leq M-2$; $w = \bigcup_q w_q$. Это покрытие поро-

ждает покрытие $\gamma' = \gamma'(\gamma)$, если взять в качестве элементов этого покрытия множества $(\alpha_v \times w_q) \subset X \times I$; тогда $\alpha_v \times I = \alpha_v \times \left(\bigcup_q w_q \right) =$

$= \bigcup_i (\alpha_v \times \beta_i^v)$, т. е. для каждого фиксированного v мы получаем

покрытие множества $\bigcup_i (\alpha_v \times \beta_i^v)$ новыми множествами $\{\alpha_v \times w_q\}$, более мелкими, чем $\alpha_v \times \beta_i^v$. Ясно, что для любых q и v множество $\alpha_v \times w_q$ содержится в некотором множестве вида $\alpha_v \times \beta_i^v$ (для некоторого i), а потому покрытие γ' вписано в покрытие γ и является прямым, что и требовалось. Отсюда следует, что при определении групп $h_q^{(q)}(X \times I, A \times I)$ можно пользоваться только пря-

мыми брусчатыми покрытиями. В то же время нерв $(X \times I, A \times I)_\gamma$ прямого брусчатого покрытия γ гомеоморфен прямому произведению $(X_\alpha \times I, A_\alpha \times I)$, где α — база покрытия γ и (X_α, A_α) — нерв покрытия α . Рассмотрим два симплициальных отображения

$\varphi_1, \varphi_2: (X_\alpha, A_\alpha) \rightarrow (X \times I, A \times I)_\gamma$, где $\gamma = \gamma(\alpha)$, α — база покрытия γ , $v \in \alpha$, $\varphi_1(v) = (v, 0)$, $\varphi_2(v) = (v, M-2)$ (напомним, что γ — прямое покрытие). Поскольку φ_1 и φ_2 гомотопны, то $\varphi_{1*}^{(*)} = \varphi_{2*}^{(*)}$, где $\varphi_i^*: h_*(X_\alpha, A_\alpha) \rightarrow h_*[(X \times I)_\gamma, (A \times I)_\gamma]$. Обозначим через Π подмножество в $\text{Cov}^f(X \times I, A \times I)$, составленное из прямых брусчатых покрытий, $\gamma \in \Pi$. Рассмотрим два покрытия $\gamma_0 = g_0^{-1}(\gamma)$ и $\gamma_1 = g_1^{-1}(\gamma)$ пары (X, A) и отображения вложения $g_{i\gamma}: (X_{i\gamma}, A_{i\gamma}) \rightarrow [(X \times I)_\gamma, (A \times I)_\gamma]$. Поскольку $\gamma_0 = \gamma_1$, то $\alpha = \gamma_i$ и $\varphi_i = g_{i\gamma}$, т. е. $g_{0\gamma*}^{(*)} = g_{1\gamma*}^{(*)}$. Переходя к пределу по $\gamma \in \Pi$, получаем $g_{0*}^{(*)} = g_{1*}^{(*)}$, что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 4.4.3. Теории h , построенные в пункте 4.3, удовлетворяют на категории U_C аксиоме вырезания $A_6 = A_6'$.

Доказательство. Рассмотрим вложение $i: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$, где $U \subset V \subset A$. Если $\alpha \in \text{Cov}^f(X, A)$, то пусть $\beta = i^{-1}(\alpha)$; тогда возникает вложение нерва (X'_β, A'_β) в нерв (X_α, A_α) , где через (X'_β, A'_β) обозначен нерв покрытия β пары $(X \setminus U, A \setminus U)$. Можно считать, что вложение $\varphi_\alpha: (X'_\beta, A'_\beta) \rightarrow (X_\alpha, A_\alpha)$ — относительный гомеоморфизм (см. [10]); поэтому, поскольку исходные теории h на P^2 удовлетворяют не только A_6 , но и A_6° , то гомоморфизмы $\varphi_{\alpha*}: h_q(X'_\beta, A'_\beta) \rightarrow h_q(X_\alpha, A_\alpha)$ (соответственно φ_α^*) являются изоморфизмами, откуда и следует утверждение леммы.

В дальнейшем мы докажем, что теории h не только удовлетворяют A_6 , но даже относительно инвариантны на U_C , причем для приложений нужна аксиома вырезания в форме $\widehat{A_6}$.

(Ко)границные операторы ∂ (δ) определяются как пределы соответствующих (ко)границных операторов из категории над множеством индексов $\text{Cov}^f(X)$.

Лемма 4.4.4. Теории h , построенные в пункте 4.3, удовлетворяют на категории U_C аксиоме точности A_4 .

Доказательство аналогично доказательству точности теорий $\check{H}$ в классическом случае (при выполнении A_7), поэтому проводится по схеме [10]. Мы не будем на этом останавливаться.

Далее, легко проверяется, что построенная нами теория h на категории P^2 , вложенной в U_C , совпадает с исходной теорией h .

4.5. Дополнительные свойства экстраординарных спектральных теорий. Рассмотрим обратный спектр $\{(X_\tau, A_\tau), \pi_\tau^{\tau_1}\}$, где $(X_\tau, A_\tau) \in U_C$ и $\pi_\tau^{\tau_1}$ — непрерывные отображения; пусть $(X, A) = \varprojlim \{(X_\tau, A_\tau), \pi_\tau^{\tau_1}\}$ — обратный предел пар (X_τ, A_τ) , $\omega_\tau: (X, A) \rightarrow (X_\tau, A_\tau)$ — проекции обратного спектра (X, A) . Тогда возникает отображение $\Omega_* h_*(X, A) \rightarrow \varprojlim h_*(X_\tau, A_\tau)$ (соответственно $\Omega^*: \varprojlim h^*(X_\tau, A_\tau) \rightarrow h^*(X, A)$). Напомним, что теория (ко)гомологий h_* на U_C называется непрерывной, если функтор h перестановочен с операцией перехода к обратному пределу.

Лемма 4.5.1. Пусть h — спектральная теория (ко)гомологий на U_C (построенная с помощью теории h на P^2). Тогда гомомор-

физм $\Omega_*^{(*)}$ — изоморфизм, т. е. теория h непрерывна на U_C (во всех случаях а), б), в)).

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для теорий H , удовлетворяющих $A7$ (см. теорему X.3.1 в [10]), поэтому мы его опускаем.

Лемма 4.5.2. Экстраординарные спектральные и непрерывные теории h на U_C удовлетворяют $\tilde{A}6$, т. е. относительно инвариантны на U_C . Более того, если $(X, A) \in U_C$ и $p: (X, A) \rightarrow (X/A, x)$ — естественная проекция, то $p_*^{(*)}$ — изоморфизм.

Доказательство. То, что h относительно инвариантны на U_C , следует из леммы 4.4.3 и теоремы X.5.4 в [10]. Пусть $(X, A) \in U_C$ и $f: X \setminus A \rightarrow Y = X \setminus A$ — тождественное отображение; тогда из относительной инвариантности h и из того, что $(Y \cup x, x) = (X/A, x)$, получаем, что $p_*^{(*)}$ — изоморфизм. Лемма доказана.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.5.1. Пусть на P^2 фиксирована теория h , удовлетворяющая $A1$ — $A5$, $A6^\circ$. Тогда теория h порождает (с помощью спектрального процесса) ковариантный (контравариантный) функтор h такой, что: 1) функтор h удовлетворяет на U_C аксиомам $A1$ — $A3$, $A5$, $A6$; 2) если h удовлетворяет одному из условий а), б), в), то h превращается в теорию (ко)гомологий, для которой выполнены аксиомы $A4$ и $\tilde{A}6$ и которая непрерывна на U_C и совпадает на $P^2 \subset U_C$ с исходной теорией h ; причем в случае а) имеем $h_* \in GF$, в случае б) $h_* \in ABC$, в случае в) $h^* \in GR$, где $(X, A) \in U_C$.

4.6. Приведенные группы (ко)гомологий на «поверхностях с особенностями». Пусть h — непрерывная теория (ко)гомологий на U_C ; тогда можно построить группы $\tilde{h}_*(X)$ и $\tilde{h}^*(X)$, где $x \in X$ — фиксированная точка, $i: x \rightarrow X$ — вложение и $f: X \rightarrow x$ — проекция. Тогда в гомологическом случае рассмотрим подгруппу $G_q(X) = i_* h_q(x)$, а в когомологическом случае — подгруппу $G^q(X) = f^* h^q(x)$. Изучим сначала когомологический случай. Ясно, что если $g: X \rightarrow Y$ непрерывно и $y = g(x)$, то $g^* h^q(Y) \subset \tilde{h}^q(X)$ и $\text{Ker}(g^*) \subset \tilde{h}^q(Y)$. Подгруппа $G^q(Y)$ при гомоморфизме g^* изоморфно отображается на $G^q(X)$. Поскольку f_i тождественно, то $h^q(X)$ распадается в прямую сумму $h^q(X) = \tilde{h}^q(X) \oplus G^q(X)$, причем f индуцирует изоморфизм между $G^q(X)$ и $h^q(x)$. Рассмотрим случай гомологий. Если $g: X \rightarrow Y$, $g(x) = y$, то $g_* \tilde{h}_q(X) \subset \tilde{h}_q(Y)$ и g_* изоморфно отображает подгруппу $G_q(X)$ на подгруппу $G_q(Y)$. Ясно, что группа $h_q(X)$ распадается в прямую сумму $h_q(X) = \tilde{h}_q(X) \oplus G_q(X)$, причем i индуцирует изоморфизм между $h_q(X)$ и $G_q(X)$.

Аксиома $A7$ требует, чтобы группы $h_q^{(q)}(x)$ равнялись нулю при $q \neq 0$; тогда группа $h_0^{(0)}(x) = G$ есть группа коэффициентов

теории h . Если h удовлетворяет $A7$, то это означает, что индекс q приобретает отчетливый геометрический смысл: q есть геометрическая размерность симплексов (или клеток), образующих q -мерные (ко)цепи.

§ 5. Кограница и граница пары пространств (X, A)

Мы введем понятие (ко)границы пары пространств (X, A) в общем случае произвольной экстраординарной теории (ко)гомологий на категории компактных пар U_C (см. построение этих теорий в § 4). Это позволит нам в дальнейшем охватить чрезвычайно широкий класс новых вариационных задач, включая классическую задачу Плато, переформулированную выше на языке теории бордизмов. Начнем с когомологического случая (важным примером экстраординарной теории когомологий является K -функтор), поскольку запас когомологических функторов, в терминах которых полностью решаются вариационные задачи, оказывается весьма широк.

5.1. Кограница пары (X, A) . Пусть h^* — непрерывная, относительно инвариантная теория когомологий на U_C (в частности, можно считать, что $h^* = H^*$, т. е. является обычной теорией когомологий, удовлетворяющей $A7$); в качестве другого примера можно взять K -функтор.

Определение 5.1.1. Пусть $(X, A) \in U_C$ и $x \in A$ — фиксированная точка. Кограницей $\nabla^k(X, A)$ пары (X, A) в размерности k (по отношению к точке x) назовем множество всех элементов $\alpha \in \tilde{h}^{k-1}(A)$ таких, что $\alpha \notin \text{Im}(\tilde{i}^*)$, где $i: A \rightarrow X$ — вложение, а гомоморфизм $\tilde{i}^*: \tilde{h}^{k-1}(X) \rightarrow \tilde{h}^{k-1}(A)$ индуцирован этим вложением. Число k , вообще говоря, не связано с топологической размерностью X . Затем положим $\nabla^*(X, A) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \nabla^k(X, A)$.

Если рассмотреть приведенную последовательность пары $h^k(X, A) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^{k-1}(A) \xrightarrow{i^*} \tilde{h}^{k-1}(X)$, то ясно, что $\alpha \in \nabla^k(X, A)$ тогда и только тогда, когда $\delta(\alpha) \neq 0$, т. е. $\nabla^k(X, A) = \tilde{h}^{k-1}(X, A) \setminus \text{Im}(i^*) = \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus \text{Ker}(\delta)$; в частности, $\nabla^k(X, A)$ не является подгруппой в группе $\tilde{h}^{k-1}(A)$. В этом существенное отличие когомологического варианта конструируемой нами теории от ее гомологического аналога, поскольку граница $\Delta_k(X, A)$, которую мы определим ниже, будет подгруппой в группе $\tilde{h}_{k-1}(A)$.

Введенное нами понятие кограницы соответствует интуитивному представлению о геометрической границе пленки X в том случае, когда говорить об этой границе имеет смысл. Например, если $X = CA$ (конус над A), то, очевидно, $\nabla^*(CA, A) = \bigcup_k [\tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0]$, т. е. конус CA полностью заклеивает A . Другой пример: пусть X — k -мерное многообразие с краем A , где $A \rightarrow$

замкнутое $(k-1)$ -мерное многообразие, и пусть $h^* = H^*$ (обычная теория коhomологий); тогда $\nabla^k(X, A) = H^{k-1}(A) \setminus 0$, что снова соответствует интуиции. В то же время использование экстраординарных теорий открывает большие возможности для выбора заклеивающих пленок X , которые уже не обязаны, например, иметь размерность k для того, чтобы кограница $\nabla^k(X, A)$ была непуста в размерности k .

5.2. Граница пары (X, A) . Пусть на U_C задана экстраординарная теория гоомологий h_* , удовлетворяющая A1 — A6 и непрерывная на U_C . Например, в качестве h_* можно взять теорию бордизмов.

Определение 5.2.1. Пусть $(X, A) \in U_C$ и $x \in A$ — фиксированная точка. Границей $\Delta_k(X, A)$ пары (X, A) в размерности k (по отношению к точке x) назовем подгруппу $\text{Ker}(\tilde{i}_*) \cap \tilde{h}_{k-1}(A)$, где $i: A \rightarrow X$ — вложение, а гооморфизм $\tilde{i}_*: \tilde{h}_{k-1}(A) \rightarrow \tilde{h}_{k-1}(X)$ индуцирован этим вложением. Затем положим $\Delta_*(X, A) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k(X, A)$.

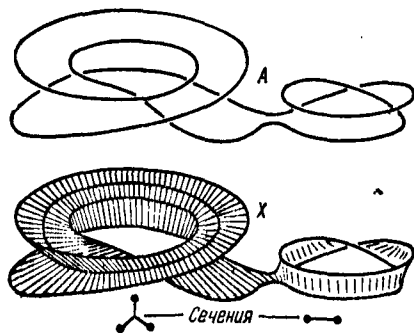


Рис. 27.

Из точной приведенной последовательности пары $h_k(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_{k-1}(A) \xrightarrow{\tilde{i}_*} \tilde{h}_{k-1}(X)$ следует, что $\Delta_k(X, A) = \text{Im}(\partial)$. В отличие от коhomологического случая, граница $\Delta_k(X, A)$ — подгруппа

в $\tilde{h}_{k-1}(A)$. Если $h_* = H_*$ — обычная теория гоомологий с компактными коэффициентами, то определение 5.2.1 превращается в определение, сформулированное и исследованное (применительно к вариационным задачам) в [35] Дж. Ф. Адамсом и Райфенбергом (понятием коhomологической границы они не владели). Как и в случае коhomологий, понятие границы соответствует интуитивному представлению о геометрической границе. Если $X = CA$ (конус над A), то $\Delta_k(CA, A) = \tilde{h}_{k-1}(A)$.

В то же время это понятие границы (например, в случае $h_* = H_*$) не позволяет перевести на алгебраический язык некоторые геометрические случаи; например, если $A = S^1$ (окружность) и X — связная сумма двойного и тройного листов Мёбиуса (рис. 27), то с точки зрения наглядной геометрии A — граница X , хотя граница $\Delta_2(X, A)$ равна нулю (дело в том, что A — ретракт X). В этом случае пленка X содержит одномерное подмножество сингулярных точек, гомеоморфное S^1 . Граница A является ретрактом X , но не является деформационным ретрактом.

§ 6. Определение классов допустимых вариаций в терминах (ко)границы пары (X, A)

6.1. Вариационные классы $h(A, L, L')$ и $h(A, \tilde{L})$. Пусть M^n — риманово многообразие без края (не обязательно компактное), $A \subset M$ — фиксированный компакт, $x \in A$ — фиксированная точка и h — непрерывная, относительно инвариантная теория (ко)гомологий на U_c . Пусть $(X, A) \subset M$ — компактная пара и $i: A \rightarrow X$, $j: X \rightarrow M$ — вложения. Рассмотрим сначала гомологический случай. Пусть $L = \{L_p\}$ — фиксированный набор подгрупп $L_p \subset \tilde{h}_p(A)$, где $p \in \mathbb{Z}$, а $L' = \{L'_q\}$ — фиксированный набор подгрупп $L'_q \subset \tilde{h}_q(M)$.

Определение 6.1.1. Через $\mathcal{O}_* = h_*(A, L, L')$ обозначим класс всех таких компактов X , $A \subset X \subset M$, что: 1) $L \subset \text{Ker}(\tilde{i}_*) = \Delta_*(X, A)$; 2) $L' \subset \text{Im}(\tilde{j}_*)$.

Рассмотрим когомологический случай. Пусть $L = \{L_p\}$ — фиксированный набор подмножеств $L_p \subset \tilde{h}_x^p(A) \setminus 0$, а $L' = \{L'_q\}$ — фиксированный набор подмножеств $L'_q \subset \tilde{h}_x^q(M) \setminus 0$.

Определение 6.1.2. Через $\mathcal{O}^* = h^*(A, L, L')$ обозначим класс всех таких компактов X , $A \subset X \subset M$, что: 1) $L \subset \tilde{h}^*(A) \setminus \text{Im}(\tilde{i})^* = \nabla^*(X, A)$; 2) $L' \subset \tilde{h}^*(M) \setminus \text{Ker}(\tilde{j}^*)$.

Класс $\mathcal{O}$ состоит из всех компактов $X \subset M$, заклеивающих (ко)гомологические «дырки» L в границе A и одновременно реализующих (ко)гомологические «дырки» L' в многообразии M . Теперь мы рассмотрим относительную задачу. Пусть $\alpha: (X, A) \rightarrow (M, A)$ — вложение и $\tilde{L} = \{\tilde{L}_r\}$ — фиксированный набор подгрупп $\tilde{L}_r \subset \tilde{h}_r(M, A)$.

Определение 6.1.3. Через $\tilde{\mathcal{O}}_* = h_*(A, \tilde{L})$ обозначим класс всех таких компактов X , $A \subset X \subset M$, что $\tilde{L} \subset \text{Im}(\tilde{\alpha}_*)$.

В случае когомологий будем считать, что $\tilde{L} = \{\tilde{L}_r\}$ — фиксированный набор подмножеств $\tilde{L}_r \subset \tilde{h}^r(M, A) \setminus 0$ (некоторые из $\tilde{L}_r$ могут быть пустыми).

Определение 6.1.4. Через $\tilde{\mathcal{O}}^* = h^*(A, \tilde{L})$ обозначим класс всех таких компактов X , $A \subset X \subset M$, что $\tilde{L} \subset \tilde{h}^*(M, A) \setminus \text{Ker}(\tilde{\alpha}^*)$.

В общем случае классы $\mathcal{O}$ и $\tilde{\mathcal{O}}$ слабо связаны друг с другом, хотя, например, если $A = x$, то можно считать, что $L = 0(\Phi)$, $L' = \tilde{L}$, а тогда $h(x, 0(\Phi), L') = h(x, \tilde{L})$. Этот частный случай относится к реализующим классам, т. е. к таким, каждый элемент которых реализует абсолютный (ко)цикл в многообразии. Если же $A \neq x$, то даже в том случае, когда $h = H$, знание всех компактов в классе $\mathcal{O}$ не позволяет описать компакты из классов $\tilde{\mathcal{O}}$, и наоборот.

Пусть $h = H$ (т. е. выполнена аксиома A7), и пусть в классе $\mathcal{O}$ набор L выбран так, что $L_p \neq 0(\Phi)$ только при $p = k - 1$, а на-

бор L' выбран так, что $L'_q \neq 0(\emptyset)$ только при $q = k$. Тогда число k приобретает геометрический смысл: в $\mathcal{O}$ можно выделить непустой подкласс таких компактов, что размерность каждого из них равна k .

Сосредоточим основное внимание на классах $\mathcal{O}$, поскольку изучение классов $\tilde{\mathcal{O}}$ на M сводится, как оказывается, к изучению классов $\mathcal{O}$ на M/A . Эта редукция обеспечивается инвариантностью теории h , т. е. если $\alpha: (X, A) \rightarrow (M, A)$ — вложение, то гомоморфизм $\alpha_*: h_*(X, A) \rightarrow h_*(M, A)$ совпадает с гомоморфизмом $\alpha'_*: \tilde{h}_*(X/A) \rightarrow \tilde{h}_*(M/A)$ (соответственно с гомоморфизмом $(\alpha')^*$ в случае когомологий). Иными словами, вместо классов $\tilde{\mathcal{O}}$ на многообразии M можно рассматривать классы $\mathcal{O}$ на пространстве M/A , которое является многообразием всюду, кроме одной точки x .

Рассмотрим два предельных случая: класс $h(x, 0(\emptyset), L')$ и класс $h(A, L, 0(\emptyset))$. В первом случае класс $\mathcal{O}$ состоит только из компактов X , реализующих «дырки» многообразия M без какого-либо дополнительного краевого условия, поскольку $A = x$; такие компакты мы назовем реализующими компактами (задача Плато Б, см. § 3). Во втором случае класс $\mathcal{O}$ состоит из компактов X , заклеивающих «дырки» в компакте A , и многообразии M играет в этом случае роль вмещающего пространства; такие компакты мы назовем заклеивающими компактами (задача Плато А, см. § 3).

6.2. Устойчивость вариационных классов. Понятие p -устойчивости мы вводим ввиду наличия обстоятельства, которое неоднократно отмечалось выше, а именно: размерность k элементов α из группы $h_k^{(k)}(X)$ имеет слабые связи с геометрической размерностью носителя элемента α в том случае, когда h — экстраординарная теория. Геометрия элемента α «размазана» по всем размерностям s таким, что $s \leq |k|$. Поскольку наши аналитические построения будут требовать от нас некоторой свободы в обращении с клетками малых размерностей (чаще всего — размерностей 1 и 2) в компактах X , то желательно, чтобы операции отсечения маломерных клеток не влияли на реализующие и заклеивающие свойства компакта X . Это приводит нас к понятию p -устойчивости.

Определение 6.2.1. Конечный симплициальный комплекс Z , вложенный в гладкое многообразие M^n , назовем гладким, если: 1) каждый открытый комплекс $\Delta^i \subset Z$ размерности i является гладким подмногообразием в M ; 2) существует положительное число $\varepsilon = \varepsilon(Z)$ такое, что для любой точки $P \in Z$ в шаре $B^n(P, \varepsilon)$ (с центром в P и радиуса ε) можно ввести такие локальные координаты $x^1, \dots, x^n$, что пересечение $Z \cap B(P, \varepsilon)$ является в этих координатах линейным симплициальным комплексом в шаре $B(P, \varepsilon)$.

Определение 6.2.2. Пусть в M^n фиксирован компакт A такой, что класс $h(A, L, L')$ (соответственно класс $h(A, \tilde{L})$) непуст. Класс $h(A, L, L')$ (соответственно $h(A, \tilde{L})$) и набор

(L, L') (соответственно $\tilde{L}$) мы назовем p -устойчивыми (где p — целое число, $1 \leq p \leq n-2$), если из того, что компакт X принадлежит $h(A, L, L')$ (соответственно $h(A, \tilde{L})$), следует, что и любой его подкомпакт $Y \subset X$ такой, что $X \setminus Y$ есть конечный гладкий симплицальный подкомплекс в M , размерности не большей, чем p , также принадлежит классу $h(A, L, L')$ (соответственно $h(A, \tilde{L})$).

Рассмотрим в качестве примера обычную теорию гомологий H на U_C . Пусть набор (L, L') обладает тем свойством, что $L_{p-1} \neq 0(\Phi)$ только при $p=k$ и $L'_q \neq 0(\Phi)$ только при $q=k$; тогда, если $X \in H(A, L, L') = H(A, L_{k-1}, L'_k)$ и $Y \subset X$, $\dim(\overline{X \setminus Y}) \leq k-1$, то, очевидно, $Y \in H(A, L_{k-1}, L'_k)$, т. е. любой класс $\mathcal{O}$ (или $\tilde{\mathcal{O}}$) указанного вида является $(k-1)$ -устойчивым в смысле нашего определения. Именно поэтому вариационные задачи в классах обычных гомологий H рассматривались до сих пор всегда в одной геометрической размерности, совпадающей с размерностью компактов-носителей X (см. [16], [17]).

В дальнейшем основную роль будут играть 2-устойчивые классы, поэтому интерес представляет вопрос: каковы должны быть топологические условия, накладываемые на аргументы $\{A, L, L'\}$, чтобы соответствующие классы $h(A, L, L')$ были 2-устойчивыми? Для простоты положим $A=x$ (тогда $L=0(\Phi)$) и рассмотрим устойчивость реализующих классов $h(x, 0(\Phi), L')$. Оказывается, любой класс $h(x, 0(\Phi), L')$ на 2-связном многообразии M (т. е. $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$) является 2-устойчивым. Эту теорему мы докажем позднее.

§ 7. Решение задачи о нахождении глобально минимальной поверхности (абсолютного минимума) в вариационных классах $h(A, L, L')$ и $h(A, \tilde{L})$

7.1. Постановка задачи. Излагаемая ниже постановка вариационных задач и их решение (доказательство существования глобально минимальных поверхностей) принадлежат автору. Рассмотрим компактное гладкое замкнутое риманово многообразие M . Пусть h — некоторая экстраординарная теория (ко)гомологий на U_C (непрерывная и относительно инвариантная на категории компактных пар), A — фиксированный компакт в M . Тогда определены вариационные классы $h(A, L, L')$, $h(A, \tilde{L})$ (см. § 6). В каждом из них возникает задача о нахождении глобально минимальной поверхности. Для каждого $X \in \mathcal{O}$ (или $\tilde{\mathcal{O}}$) построим его стратификацию $X = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots$, где S^k — максимальное подмножество в $X \setminus A$, имеющее в каждой своей точке размерность k , S^{k-1} — максимальное подмножество в $X \setminus A \setminus S^k$, имеющее в каждой своей точке размерность $k-1$, и т. д. Подмножества S^i назовем стратами; если они измеримы, то определен стратифицирован-

ный объем $SV(X) = (\text{vol}_k S^k, \text{vol}_{k-1} S^{k-1}, \dots)$, изображаемый вектором с k координатами. Варьируя «поверхность» X в классе допустимых вариаций (т. е. в классе $\mathcal{O}$ или $\tilde{\mathcal{O}}$), мы варьируем вектор стратифицированного объема поверхности; задача заключается в нахождении поверхности с наименьшим стратифицированным объемом. Наименьший вектор $SV = (d_k, d_{k-1}, \dots)$ мы понимаем в следующем смысле. Сначала попытаемся минимизировать первую координату вектора SV , т. е. будем искать в классе $\mathcal{O}$ поверхность (компакт) X_k , для которой $\text{vol}_k(S^k) = \text{vol}_k(X \setminus A) = d_k = \inf_{Y \in \mathcal{O}} \text{vol}_k(Y \setminus A)$. Если такие поверхности X_k существуют,

то приступим к минимизации второй координаты вектора стратифицированного объема, а именно будем искать в классе поверхностей X_k с минимальной первой координатой (т. е. таких, что $\text{vol}_k(X_k \setminus A) = d_k$) такую поверхность X_{k-1} , для которой

$$\text{vol}_{k-1}(X_{k-1} \setminus A \setminus S^k) = d_{k-1} = \inf_{X \setminus A = d_k} \text{vol}_{k-1}(X \setminus A \setminus S^k).$$

И так далее, т. е. каждый раз будем минимизировать следующую координату вектора стратифицированного объема при условии, что все предыдущие координаты уже минимизированы и фиксированы (т. е. минимизация производится по классу тех пленок, предыдущие объемы которых уже являются минимальными). Если этот процесс корректно определен (именно это мы и будем доказывать), то тогда он завершится на поверхности, стратифицированный объем которой глобально минимален в классе всех стратифицированных поверхностей из данного вариационного класса $\mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$).

Разработанный нами метод минимизации объема SV применим не только к вариационным классам бордизмов (классическая задача Плато), но и к любому классу вида $\mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$). При таком подходе каждая теория экстраординарных (ко)гомологий h и каждая тройка (A, L, L') (или пара $(A, \tilde{L})$) определяют в пространстве $\theta(M)$ всех компактов в многообразии M некоторое подмножество $\mathcal{O}$ (или $\tilde{\mathcal{O}}$); поэтому каждая теория h определяет свой тип «краевых условий», запас которых чрезвычайно велик ввиду большого разнообразия в множестве теорий h . Приведем здесь пример «контравариантной» вариационной задачи, определяемой K -функтором. Пусть на M задано стабильно нетривиальное векторное расслоение ξ . Рассмотрим класс всех компактов $X \subset M$ таких, что ограничение ξ на X по-прежнему стабильно нетривиально, т. е. X является носителем расслоения ξ (рис. 28). Вопрос: можно ли

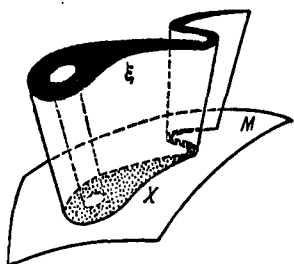


Рис. 28.

среди всех таких поверхностей X найти глобально минимальную (в смысле стратифицированного объема) поверхность X_0 ? Как будет показано, ответ положительный.

7.2. Основная теорема существования глобально минимальных поверхностей.

Теорема 7.2.1. Пусть M^n — компактное замкнутое риманово многообразие класса C^r , $r \geq 4$, и $A \subset M^n$ — фиксированный компакт, $x \in A$ — фиксированная точка. Пусть $\tilde{h}$ — приведенная, непрерывная и относительно инвариантная экстраординарная теория (ко-)гомологий на категории компактных пар U_C . Рассмотрим произвольный непустой и 2-устойчивый класс $\mathcal{O} = h(A, L, L')$ или $\tilde{\mathcal{O}} = h(A, \tilde{L})$ (например, для теории бордизмов и для 2-связных многообразий, т. е. $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$, любой непустой класс $\mathcal{O}$ или $\tilde{\mathcal{O}}$ 2-устойчив). Пусть k — наименьшее из целых чисел s , $s < n$, для которых $d_s = d_s(h(A, L, L')) < \infty$ (соответственно $\tilde{d}_s = \tilde{d}_s(h(A, \tilde{L})) < \infty$). Предположим, что $3 \leq k \leq n-1$. Тогда выполняется последовательность утверждений:

(1) Если $\{X\}_k$ — класс всех компактов X , $A \subset X \subset M$, таких, что $X \in \mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$) и $\text{vol}_k(X \setminus A) = d_k = \inf \text{vol}_k(Y \setminus A)$, $Y \in \mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$), то мы утверждаем, что $\{X\}_k \neq \emptyset$, $d_k < \infty$, а в том случае, когда $d_k > 0$, каждый компакт X из класса $\{X\}_k$ содержит однозначно определенное k -мерное (т. е. имеющее размерность k в каждой своей точке) подмножество $S^k \subset X \setminus A$, $S^k = S^k(X)$, такое, что $A \cup S^k$ — компакт в M ; S^k содержит подмножество Z_k (возможно, пустое), где $\text{vol}_k(Z_k) = 0$ и $S^k \setminus Z_k$ — топологическое k -мерное подмногообразие в M , без края и всюду плотное в S^k (т. е. множество Z_k есть множество всех k -мерных сингулярных точек поверхности X), причем $\text{vol}_k(S^k) = \text{vol}_k(X \setminus A) = d_k > 0$. Если же $d_k = 0$, то положим $S^k = \emptyset$.

(2) Далее, если $\{X\}_{k-1} \subset \{X\}_k$ есть класс таких компактов X , $A \subset X \subset M$, что $X \in \mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$), $X \in \{X\}_k$ и $\text{vol}_k(X \setminus A \setminus S^k) = d_{k-1} = \inf \text{vol}_{k-1}(Y \setminus A \setminus S^k)$, $Y \in \{X\}_k$, то мы утверждаем, что $\{X\}_{k-1} \neq \emptyset$, $d_{k-1} < \infty$, а в том случае, когда $d_{k-1} > 0$, каждый компакт $X \in \{X\}_{k-1}$ содержит однозначно определенное $(k-1)$ -мерное (т. е. имеющее размерность $k-1$ в каждой своей точке) подмножество $S^{k-1} \subset X \setminus A \setminus S^k$, $S^{k-1} = S^{k-1}(X)$, такое, что $A \cup S^k \cup S^{k-1}$ — компакт в M . Множество S^{k-1} содержит подмножество Z_{k-1} (возможно, пустое), где $\text{vol}_{k-1}(Z_{k-1}) = 0$ и $S^{k-1} \setminus Z_{k-1}$ есть топологическое $(k-1)$ -мерное подмногообразие в M , без края и всюду плотное в S^{k-1} (т. е. множество Z_{k-1} есть множество всех $(k-1)$ -мерных сингулярных точек компакта X), причем $\text{vol}_{k-1}(S^{k-1}) = \text{vol}_{k-1}(X \setminus A \setminus S^k) = d_{k-1} > 0$. Если же $d_{k-1} = 0$, то положим $S^{k-1} = \emptyset$.

(3) ...

$(k-2)$ Наконец, если $\{X\}_3 \subset \{X\}_4$ есть класс всех компактов X , $A \subset X \subset M$, таких, что $X \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$, $X \in \{X\}_4$ и $\text{vol}_3\left(X \setminus A \setminus \bigcup_{i=4}^k S^i\right) = d_3 = \inf \text{vol}_3\left(Y \setminus A \setminus \bigcup_{i=4}^k S^i\right)$, $Y \in \{X\}_4$, то мы утверждаем, что $\{X\}_3 \neq \emptyset$, $d_3 < \infty$, а в том случае, когда $d_3 > 0$, каждый компакт $X \in \{X\}_3$ содержит однозначно определенное трехмерное (т. е. имеющее размерность 3 в каждой своей точке) подмножество $S^3 \subset X \setminus A \setminus \bigcup_{i=4}^k S^i$, $S^3 = S^3(X)$, такое,

что $A \cup \left(\bigcup_{i=3}^k S^i\right)$ есть компакт в M (причем $S^i \cap S^j = \emptyset$ при $i \neq j$); S^3 содержит подмножество Z_3 , где $\text{vol}_3(Z_3) = 0$ и $S^3 \setminus Z_3$ — топологическое трехмерное подмногообразие в M , без края и всюду плотное в S^3 (т. е. множество Z_3 есть множество всех трехмерных сингулярных точек поверхности X), причем $\text{vol}_3(S^3) = \text{vol}_3\left(X \setminus A \setminus \bigcup_{i=4}^k S^i\right) = d_3 > 0$. Если же $d_3 = 0$, то положим

$S^3 = \emptyset$. В силу 2-устойчивости класса $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$ выполнено соотношение $\{X\}_3 = \{X\}_2 = \{X\}_1$. Далее, каждое множество $K^i = S^i \setminus Z_i$, $K^i \subset X$, $X \in \{X\}_3$, является в действительности подмногообразием класса C^{r-2} в многообразии M ; если же M — гладкое (или аналитическое) многообразие, то подмногообразия K^i (при $3 \leq i \leq k$) также являются гладкими (аналитическими) подмногообразиями в M , причем каждое подмногообразие K^i является i -мерным минимальным подмногообразием в M (т. е. средняя кривизна равна нулю). Если класс $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$ является q -устойчивым, где $q \geq 3$, то все множества S^i пусты при $3 \leq i \leq q$. Если $X \in \{X\}_3 \subset \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$,

$X = A \cup \left(\bigcup_{i=3}^k S^i\right)$ и $S^{i_0} \neq \emptyset$ при некотором i , то все компакты

$\tilde{X}_\alpha = A \cup \left(\bigcup_{i=\alpha}^k S^i\right)$, где $i_0 + 1 \leq \alpha \leq k$, не принадлежат классу $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$, т. е. в этом случае никакое непустое множество S^{i_0} не может быть выброшено из поверхности $X \in \{X\}_3$ без разрушения ее топологических свойств. Для каждой размерности i стандартная функция сферической плотности $\Psi_i(x, S^i)$, определенная на S^i , обладает свойством $\Psi_i(x, S^i) \geq 1$ для любого $x \in S^i$ и $\Psi_i(x, S^i) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in K^i = S^i \setminus Z_i$, т. е. x — регулярная точка поверхности S^i .

Замечание. Напомним, что если $d_s(h, A, L, L') = \infty$ при любом $s < n$, то задача на минимум в классе $\mathcal{O}$ теряет смысл ввиду тривиальности ответа, т. е. условие $s < n$ (см. формулировку теоремы) не является ограничением.

Как было указано в § 3, можно решать задачу о минимизации только одного, старшего по размерности, объема vol_k , не интересуясь (с метрической точки зрения) кусками меньших размерностей. Эта задача также решается теоремой 7.2.1: для этого достаточно ограничиться только первым пунктом этой теоремы.

Следствие 7.2.1. *В каждом классе $\mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$) в предположениях теоремы 7.2.1 всегда существует глобально минимальная поверхность X_0 , стратифицированный объем которой $SV = (d_k, d_{k-1}, \dots)$ является наименьшим (во всех размерностях). Эта поверхность X_0 имеет однозначно определенную стратификацию: $X_0 = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots$, где каждое подмножество S^i является (за исключением, быть может, множества меры нуль, состоящего из особых точек) гладким (для гладкого M) минимальным подмногообразием в M (т. е. средняя кривизна тождественно равна нулю). При этом $d_i = \text{vol}_i(S^i)$.*

Рассмотрим наиболее интересные частные случаи.

1. Если в качестве экстраординарной теории гомологий взять теорию бордизмов, то получаем решение классической задачи Плато (на абсолютный минимум) в классе поверхностей, заклеивающих данный «контур» A в M (см., в частности, теорему 3.7.1). В качестве основных теорий бордизмов можно взять Ω_* (ориентированные бордизмы), N_* (неориентированные бордизмы), Ω_p^* (бордизмы по модулю p). Эти группы (см. выше) определяют экстраординарные теории гомологий на категории P^2 . Поскольку минимальные поверхности, вообще говоря, имеют особенности (и иногда весьма сложные), то следует распространить эти теории с категории P^2 на категорию компактных пар U_C , что делается по схеме, описанной в § 4. Поскольку теории Ω_p^* и N_* принимают значения в категории компактных топологических групп ABC , то их распространение на U_C не встречает препятствий (см. § 4). С теорией Ω_* нужно поступить более аккуратно. Поскольку Ω_* на P^2 не удовлетворяет условиям а) и б) (см. пункт 4.3), то нужно рассмотреть группы $\Omega_* \otimes_{\mathbb{Z}} Q_p = {}^p\Omega_*$, где Q_p — группа целых p -адических чисел (так как Q_p — плоский модуль, то группы Ω_* образуют точную теорию гомологий). Так как любой бордизм может быть уловлен путем подбора подходящего p , мы не ограничиваем себя с геометрической точки зрения. Группы ${}^p\Omega_*$ образуют теорию гомологий со значениями в ABC , а поэтому эта теория может быть распространена с P^2 на U_C (т. е. на категорию «поверхностей с особенностями»). Итак, пусть $A^{k-1} \subset M^n$ — замкнутое многообразие, h_* — одна из следующих теорий: ${}^p\Omega_*$, N_* , Ω_p^* . Многообразие A определяет элемент $\sigma = [A, e] \in h_{k-1}(A)$, где $e: A \rightarrow A$ — тождественное отображение. Пусть L — подгруппа в $\tilde{h}_{k-1}(A)$, порожденная элементом σ (здесь $x \in A$).

Следствие 7.2.2. *Предположим, что класс $h_*(A, L, 0)$ непуст и 2-устойчив (например, многообразие M 2-связно). Тогда существует глобально минимальная поверхность X_0 (см. теорему 7.2.1), аннулирующая элемент σ . Эта поверхность (быть может, с особенностями) является решением классической задачи Плато в классе всех пленок X , заклеивающих A и допускающих непрерывную параметризацию с помощью многообразий (это — решение задачи эйклейки A). Если рассмотреть второй предельный случай, т. е. класс $h_*(x, 0, L')$, то получаем существование глобально минимальной поверхности X_0 в классе всех поверхностей, реализующих данный бордизм $\{\sigma'\} = L' \subset \tilde{h}_k(M)$ (это — решение задачи реализации B). Кроме того, в случае задачи A всегда выполнено неравенство $d_k > 0$.*

В задаче заклейки «контура» для минимальной пленки X_0 , имеющей сложные особенности, в общем случае существует спектр многообразий $\{W_\alpha\}$ с границей $\partial W_\alpha = A$, заклеивающих A в пленке X_0 (в смысле пунктов 4.2 и 4.3). Если же пленка X_0 является, например, клеточным комплексом (а наиболее типичные особенности, встречающиеся в приложениях, см. ниже, всегда соответствуют именно этому случаю), то тогда все многообразия W_α гомеоморфны одному и тому же многообразию W_0 , которое и параметризует пленку X_0 , т. е. $X_0 = f_0(W_0)$, $\partial W_0 = A$.

2. Если в качестве теории гомологий взять обычную теорию H_* (удовлетворяющую $A7$), то из теоремы 7.2.1 следуют результаты, полученные в [16], [35], [36].

3. Если в качестве теории когомологий взять K -функтор, то получаем теорему существования минимальной поверхности в классе поверхностей, ограничение на которые стабильно нетривиального расслоения ξ , заданного на M , по-прежнему нетривиально.

4. Если в качестве экстраординарной теории гомологий рассмотреть стабильные гомотопические группы π_*^S , то из теоремы 7.2.1 получаем теорему существования глобально минимальной поверхности в каждом гомотопическом классе $\sigma \in \pi_*^S(M)$, т. е. в классе стабильно гомотопных отображений сферы в M . В частности, существует глобальный минимум в стабильном гомотопическом (относительном) классе дисков, заклеивающих фиксированную сферу в многообразии M .

7.3. Краткая схема доказательства теоремы существования. В этом пункте мы кратко опишем основные шаги, ведущие к доказательству существования минимальной поверхности в классах $\mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$). Подробное доказательство будет дано в главе 6.

1 шаг. Сначала мы будем минимизировать старший объем vol_k . Для этого рассмотрим минимизирующую последовательность компактов $X_q \in \mathcal{O}$ таких, что $\text{vol}_k(X_q \setminus A) \rightarrow d_k = \inf_{Y \in \mathcal{O}} \text{vol}_k(Y \setminus A)$.

Желательно получить минимальную поверхность X_0 как предел

этой последовательности компактов. В то же время ясно, что исходную последовательность нужно соответствующим образом обработать, чтобы ее предел был разумно определен, так как хотя объемы $\text{vol}_k(X_q \setminus A)$ стремятся к минимуму, но сами поверхности X_q могут при этом «заметать» практически все многообразие M за счет «тонких усов», мера которых стремится к нулю, а сами эти «усы» заполняют все большую и большую область в M . Поэтому в первую очередь следует избавиться от таких «усов», срезав их у основания и заменив «шапочками» малого объема и малого диаметра (рис. 29). При этом важно так выполнить это сглаживание «усов», чтобы получившийся в результате этой операции компакт $\tilde{X}_q$ снова принадлежал тому же вариационному классу $\mathcal{O}$, что и исходный компакт X_q . Оказывается, такая операция (мы назвали ее S -сглаживанием) может быть корректно определена. Выполнив S -сглаживание всех поверхностей X_q , получаем новую минимизирующую последовательность $\{\tilde{X}_q\}$, для которой по-прежнему $\text{vol}_k(\tilde{X}_q \setminus A) \rightarrow d_k$, но $\tilde{X}_q$ имеют уже значительно более «правильную форму», чем исходные поверхности.



Рис. 29.

2 шаг. Переход к пределу осуществляется следующим образом. С каждой поверхностью $\tilde{X}_q$ связывается функция сферической плотности $\Psi_k(P, \tilde{X}_q)$, определяемая так:

$$\Psi_k(P, \tilde{X}_q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{vol}_k(\tilde{X}_q \cap B^n(P, \varepsilon))}{\gamma_k(\varepsilon)},$$

где точка $P \in M$, $B^n(P, \varepsilon)$ — n -мерный шар в M с центром в точке P и радиуса ε , $\gamma_k(\varepsilon)$ — k -мерный объем стандартного евклидова шара радиуса ε и размерности k . Если $P \notin \tilde{X}_q$, то, очевидно, $\Psi_k(P, \tilde{X}_q) = 0$; если же $P \in \tilde{X}_q$, то $\Psi_k(P, \tilde{X}_q) \geq 0$ (рис. 30). Ясно, что функция $\Psi_k(P, \tilde{X}_q)$ измеряет отклонение поверхности $\tilde{X}_q$ в точке P от k -мерного диска. Если $\tilde{X}_q$ в окрестности точки $P \in \tilde{X}_q$ является гладким подмногообразием в M , то, очевидно, $\Psi_k(P, \tilde{X}_q) = 1$, так как пересечение $B^n(P, \varepsilon) \cap \tilde{X}_q$ при малых ε мало отличается от k -мерного гладкого диска радиуса ε .

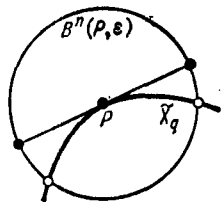


Рис. 30.

Таким образом, последовательность $\tilde{X}_q$ определяет последовательность функций $\Psi_k(P, \tilde{X}_q)$. Оказывается, можно определить предельную функцию $\Psi_k(P) = \lim_{q \rightarrow \infty} \Psi_k(P, \tilde{X}_q)$. Тогда в качестве предельной поверхности в размерности k берется носитель

предельной функции $\Psi_k(P)$, т. е. множество точек, в которых $\Psi_k(P) > 0$.

3 шаг. Доказывается, что множество $S^k = \{P: \Psi_k(P) > 0\}$ — компакт. Ясно, что, вообще говоря, S^k не принадлежит классу $\mathcal{O}$ (в этом отличие от случая обычных гомологий). После этого следует повторить описанную выше процедуру предельного перехода во всех низших размерностях, предшествующих размерности k . Это один из самых сложных этапов в доказательстве. В результате этого построения получается стратифицированное множество $X_0 = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots$

4 шаг. Доказывается, что X_0 — компакт в M .

5 шаг. Доказывается, что вариационные классы $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$ замкнуты относительно предельных переходов, т. е. если $X_0 = \lim_q \tilde{X}_q$, где $\tilde{X}_q \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$, то $X_0 \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$.

6 шаг. Доказывается, что стратифицированный объем поверхности X_0 — наименьший в классе $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$.

7 шаг. В каждой размерности $s \leq k$ доказывается, что функция $\Psi_s(P, X_0) \geq 1$ на всем S^s и $\Psi_s(P, X_0) = 1$ на открытом подмножестве в S^s , всюду плотном в S^s . Тогда те точки из S^s , в которых $\Psi_s > 1$, оказываются особыми (сингулярными) точками в S^s , заполняющими множество Z_s , s -мерный объем которого равен нулю.

8 шаг. Доказывается, что каждая поверхность $S^s \setminus Z_s$ является гладким минимальным подмногообразием в M .

§ 8. Решение задачи о нахождении глобально минимальной поверхности (относительного минимума) в каждом гомотопическом классе

В § 3 были сформулированы задачи A' и B' о нахождении минимальной поверхности в каждом гомотопическом классе. Например, в задаче о заклеяке (задача A') рассматриваются пленки постоянного топологического типа, гомотопные друг другу (в отличие от задачи A , в которой ищется абсолютный минимум по всем гомотопическим классам). Оказывается, введенные автором понятия стратифицированного объема и стратифицированных минимальных поверхностей, после подходящей переформулировки на функциональном языке варифолдов, позволяют решить и задачи A' и B' ; это решение принадлежит Дао Чонг Тхи, сформулировавшему задачу A' в таком виде: можно ли среди всех локально липшицевых отображений $g: W^k \rightarrow M^n$, гомотопных исходному отображению f и таких, что $g|_{\partial W} = f|_{\partial W}$, найти отображение g_0 , минимизирующее старший функционал k -мерного объема (при этом ∂W может быть пусто)? В такой постановке решается задача о минимизации старшего объема vol_k , поведение объемов мень-

ших размерностей не контролируется. Далее, Дао Чонг Тхи решил задачу A' в следующем виде: установлено существование локально липшицева отображения $g_0: W^k \rightarrow M^n$ (в терминах потоков), минимизирующего функционал старшего k -мерного объема в классе всех локально липшицевых отображений $g: W \rightarrow M$ таких, что $g|_{\partial W} = f|_{\partial W}$ (это — задача нахождения абсолютного минимума по всем гомотопическим классам). Как и в предыдущих случаях, минимизируется старший объем vol_k (в терминах потоков). Решение этих задач в указанной постановке оказалось возможным после того, как Дао Чонг Тхи ввел понятие мультиварифолдов, являющихся функциональными аналогами стратифицированных поверхностей $X = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots$. Такая постановка ближе к функциональному языку, разработанному в [38] — [40].

ВЫЧИСЛЕНИЕ В ЯВНОМ ВИДЕ НАИМЕНЬШИХ ОБЪЕМОВ (АБСОЛЮТНЫЙ МИНИМУМ) ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 9. Функции исчерпания и минимальные поверхности

9.1. Некоторые классические задачи. Опишем круг задач, приводящих к формулировке проблемы, решению которой в важном специальном случае посвящена настоящая глава. Во многих разделах многомерного вариационного исчисления, алгебраической геометрии, комплексного анализа часто возникает следующая ситуация:

а) Дано гладкое многообразие M^n и его исчерпание (например, в смысле [50]) n -мерными областями B_r^n , зависящими от вещественного параметра r и расширяющимися с ростом r , т. е. $B_{r_1}^n \supset B_{r_2}^n$ при $r_1 > r_2$. Эти области в процессе своего роста должны исчерпать (покрыть) все многообразие или открытую, всюду плотную область в этом многообразии.

б) В многообразии M^n задана k -мерная глобально минимальная поверхность (в дальнейшем будем называть ее ГМ-поверхностью), например X^k -комплексное алгебраическое подмногообразие или комплексное аналитическое подмножество в кэлеровом многообразии.

в) Ставится вопрос Н: как оценить снизу функцию объема $\text{vol}_k(X^k \cap B_r^n) = \Psi(X^k, r)$, зависящую от r ?

Частные случаи этой общей задачи Н изучались во многих работах. Например, для решения функциональных вопросов, рассмотренных в [52], необходимо следующее неравенство: $(2r)^{2n-2} \leq \leq \text{vol}_{2n-2}(X^{2n-2} \cap I_r^{2n})$, где I_r^{2n} — $2n$ -мерный стандартный куб в $\mathbb{C}^n(z^1, \dots, z^n) \cong \mathbb{R}^{2n}$, $I_r^{2n} = \{| \text{Re } z^i | \leq r; | \text{Im } z^i | \leq r\} = B_r^{2n}$, а $X^{2n-2} = \{f=0\}$, т. е. совпадает с нулевой поверхностью уровня комплексно-аналитической функции $f(z^1, \dots, z^n)$; поверхность X^{2n-2} проходит через начало координат $O \in \mathbb{C}^n$, $(2r)^{2n-2} = \text{vol}_{2n-2} I_r^{2n-2}$. Другими словами, объем части поверхности X^{2n-2} , содержащейся в кубе, должен оцениваться снизу $(2n-2)$ -мерным объемом минимального плоского сечения куба; таким сечением и является стандартный куб I_r^{2n-2} (той же размерности, что и сама поверхность). При $n=2$ этот результат доказан в [51]; его следствия см. в [52]. Для $n > 2$ утверждение пока не доказано.

Если $M = \mathbb{R}^n$ и $B_r^n = D_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq r\}$ — шар радиуса r с центром в точке O , то хорошо известен классический результат, согласно которому при $k=n-1$, $n-2$ выполняется оценка

$\text{vol}_k(X^k \cap D_r^n) \geq \text{vol}_k D_r^k = \gamma_k r^k$, X^k — ГМ-поверхность в $\mathbb{R}^n$; проходящая через точку O , γ_k — k -мерный объем единичного стандартного k -мерного шара. Для минимальной поверхности произвольной коразмерности $X^k \subset \mathbb{R}^n$ аналогичная нижняя оценка: $\text{vol}_k(X^k \cap D_r^n) \geq \text{vol}_k D_r^k$ — доказана в [30], [32]. См. также классические оценки Лелона при $k = n - 1$, $M = \mathbb{R}^n$, D_r^n — шар радиуса r (см. [50]). Сформулируем теперь общую гипотезу А:

Пусть $X^k \subset \mathbb{R}^n$ — ГМ-поверхность без границы (т. е. «уходящая на бесконечность» в $\mathbb{R}^n$), проходящая через точку O , пусть $B^n \subset \mathbb{R}^n$ — симметричная выпуклая область с кусочно-гладкой границей ∂B^n , точка $O \in B^n$ — центральная точка для B^n . Тогда выполняется неравенство

$$\text{vol}_k(X^k \cap B^n) \geq \min_{\mathbb{R}^k} \text{vol}_k(\mathbb{R}^k \cap B^n) = \text{vol}_k(\mathbb{R}_0^k \cap B^n),$$

где минимум берется по всем k -мерным плоским сечениям области B^n плоскостями $\mathbb{R}^k$, проходящими через точку O . Здесь $\mathbb{R}_0^k \cap B^n$ — минимальное (в смысле объема пересечения) плоское сечение области; таких наименьших сечений может быть, конечно, много. Интересен случай строго выпуклых областей B^n , центрально симметричных относительно точки O .

Комплексный вариант гипотезы А: пусть $X^k \subset \mathbb{C}^n$ — комплексно-аналитическая (а следовательно, глобально минимальная; см. пункт 2.6) поверхность без границы комплексной размерности k , $O \in X^k$, $B^n \subset \mathbb{C}^n$ — выпуклая симметричная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей; тогда выполняется неравенство $\text{vol}_{2k}(X \cap B) \geq \min_{\mathbb{C}^k} \text{vol}_{2k}(\mathbb{C}^k \cap B)$, где $\mathbb{C}^k \cap B$ — $2k$ -мерные (над $\mathbb{R}$)

плоские сечения области B k -мерными комплексными плоскостями $\mathbb{C}^k$, проходящими через O .

Если область B не выпукла, то легко видеть, что эта оценка в общем случае неверна. В самом деле, рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ шар D_r^n радиуса r ; пусть $X^k \subset D_r^n$ — произвольная ГМ-поверхность, проходящая через точку O (центр шара D_r^n) и отличная от плоскости. Пусть, далее, D_ε^n — шар достаточно малого радиуса ε . В качестве невыпуклой области B возьмем область $D_r^n \setminus U_s$, где U_s — трубчатая окрестность малого радиуса s поверхности $X^k \cap (D_r^n \setminus D_\varepsilon^n)$ (рис. 31). Положим $X^k = \tilde{X}^k \cap B$ и устремим число s к нулю, тогда область B стремится к области $D_r^n \setminus \tilde{X}^k$; ясно, что при достаточно малом s имеем $\text{vol}_k(\tilde{X}^k \cap D_\varepsilon^n) \cong \text{vol}_k X^k$. В то же время

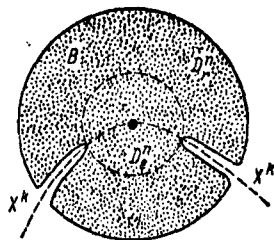


Рис. 31.

для любого k -мерного плоского сечения $T^k = \mathbb{R}^k \cap B$ имеем $\text{vol}_k T^k \cong \text{vol}_k D_r^k$. Выбирая ε достаточно малым, можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство $\text{vol}_k D_r^k \geq \text{vol}_k X^k$.

В том случае, когда M — комплексно-аналитическое многообразие и $X \subset M$ — дивизор комплексной коразмерности один, задача Н превращается в следующую: оценить снизу функцию объема $\Psi(X, r) = \text{vol}(X \cap \{f \leq r\})$, где $\{x \in M \mid f(x) \leq r\} = \{f \leq r\}$, f — функция исчерпания (см. определения в [50]). Пусть $M = \mathbb{C}^n$, $f(x) = |x|^2$; дивизор D алгебраичен тогда и только тогда, когда функция объема асимптотически (т. е. при больших r) имеет вид $\Psi(X, r) \sim O(1) \cdot r^{2n-2}$ (см. [50]). Аналогично, серия результатов, связанных с решением проблемы С. Н. Бернштейна (см., например, обзор в [33]), также содержит решение одного частного случая задачи Н: оказывается, что при больших r функция $\Psi(X^{n-1}, r)$ (где X^{n-1} — график произвольной локально минимальной поверхности, однозначно проектирующейся на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$) растет как r^{n-1} и $\Psi(X^{n-1}, r) \sim c \cdot r^{n-1}$, где c — плотность (или кратность) поверхности X^{n-1} в точке $O \in X^{n-1}$.

Ниже мы докажем общую теорему об оценке снизу функции объема $\Psi(X, r)$ для ГМ-поверхностей в M . Частными случаями этой теоремы являются некоторые из известных ранее результатов, описывающих поведение функции объема. Кроме того, эта теорема устанавливает некоторую единую общую точку зрения на перечисленные выше различные подходы к описанию глобальных свойств функции объема на ГМ-поверхностях.

9.2. Бордизмы и функции исчерпания. Пусть M^n — гладкое, компактное, ориентируемое, связное многообразие с краем $\partial M = M_1^{n-1} \cup M_2^{n-1}$, где M_i^{n-1} — гладкие связные ориентируемые многообразия, т. е. M_1 и M_2 бордантны. Будем рассматривать также и такие пленки M , для которых $M_1 = \emptyset$. Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на M , критические точки которой не лежат на крае ∂M ; пусть $f|_{M_1} = 0$, $f|_{M_2} = 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$. Будем рассматривать такие функции f , среди критических точек которых (если $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$) нет локальных максимумов и локальных минимумов. О существовании таких функций см. в [53]. Если $M_1 = \emptyset$, то будем считать, что множество уровня $\{f=0\}$ состоит из одной точки, являющейся точкой невырожденного минимума для f . Через $F_r = \{f=r\}$ будем обозначать гиперповерхность уровня $f^{-1}(r) \subset M$; в том случае, когда $M_1 = \emptyset$, гиперповерхности F_ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$ являются сферами S_ε^{n-1} .

Рассмотрим подмножества $B_r^n = \{x \in M \mid f(x) \leq r\}$; при изменении r от 0 до 1 области B_r , постепенно расширяясь, заполняют все многообразие M , исчерпывая его. Если $r \in [0, 1]$ — не критическое значение для функции f , то граница области B_r , т. е. $F_r = \partial B_r$, является подмногообразием. При переходе r через критическое значение $\tilde{r}$ многообразие F_r подвергается перестройке

Морса во всех критических точках, расположенных на F_r . Назовем f функцией исчерпания, область B_r — волной, а ее границу F_r — фронтом волны.

Рассмотрим на M гладкое векторное поле v , все особые точки которого изолированы, невырождены и не лежат на $M_1 \cup M_2$; предположим, что:

а) $v(f) > 0$ на дополнении к особым точкам поля v ;

б) множество критических точек функции f содержится в множестве особых точек поля v .

Например, в качестве v можно взять $\text{grad } f$. В силу а) в каждой неособой точке $x \in F_r$ вектор v направлен в область $\{f > r\}$. Предположим, далее, что:

в) индексы всех особых точек поля v (т. е. размерность сепаратрисного диска, заполненного входящими в особую точку поля интегральными траекториями этого поля) отличны от нуля и от n .

Назовем поле v , удовлетворяющее условиям а) — в), f -монотонным полем.

9.3. ГМ-поверхности. Пусть M — риманово многообразие с краем; тогда для любого k -измеримого подмножества $X^k \subset M^n$ определено число $\text{vol}_k X$ — k -мерная хаусдорфова мера. Если X — подмногообразие (быть может, с особенностями), то $\text{vol}_k X$ совпадает с его k -мерным римановым объемом. Напомним определение глобальной минимальности применительно к нашему случаю. Так как $\partial M = M_1 \cup M_2$, то для любого $X \subset M$ имеем $X \cap \partial M = (X \cap M_1) \cup (X \cap M_2)$; обозначим $\partial_1 X = X \cap M_1$, $\partial_2 X = X \cap M_2$, $\partial X = \partial_1 X \cup \partial_2 X$. Пусть $A = A^{k-1} \subset M_2$ — фиксированный $(k-1)$ -мерный компакт (подкомплекс), $H_{k-1}^{(k-1)}(A, G)$ — группа $(k-1)$ -мерных (ко)гомологий с коэффициентами в G ; пусть $H_{k-1}^{(k-1)}(A) \neq 0$ и $L \subset H_{k-1}^{(k-1)}(A)$, $L \neq 0$, — фиксированная подгруппа (или подмножество в $H_{k-1}^{(k-1)}(A)$) (см. § 5). Рассмотрим класс $\mathcal{O}(L)$ всех компактов (подкомплексов) $X \subset M$ таких, что: 1) $\dim X = k$, $\Psi(x, X) \geq 1$ для любой точки $x \in X \setminus \partial X$ (здесь через $\Psi_k(x, X)$ обозначена сферическая плотность подмножества в римановом многообразии; см. пункт 7.3 или [29]); 2) $A \supset \partial_2 X$; 3) при вложении $i: A \rightarrow \partial_2 X \rightarrow X/\partial_1 X$ имеем $i_*(L) = 0$, где $i_*: H_{k-1}(A) \rightarrow H_{k-1}(X/\partial_1 X)$, или $L \subset \text{Im } i^*$, где $i^*: H_{k-1}(X/\partial_1 X) \rightarrow H_{k-1}(A)$. Пусть $\mathcal{O}(L) \neq \emptyset$. Если $d_k(L) = \inf_{X \in \mathcal{O}(L)} \text{vol}_k X$, то (см. пункт 7.2) существует ГМ-поверхность $X_0 \in \mathcal{O}(L)$ такая, что $\text{vol}_k(X_0) = d_k(L)$. Класс $\mathcal{O}(L)$ состоит из всех поверхностей X , заклеивающих фиксированную подгруппу (подмножество) L , но разные поверхности $X, X' \in \mathcal{O}(L)$ не обязаны быть (ко)гомологичны в $H_k^{(k)}(W/M_1)$.

Все нижеследующие результаты верны и для произвольной экстраординарной теории (ко)гомологий h . Следующие свойства ГМ-поверхности X_0 (см. § 7) будут использоваться ниже: 1) $X_0 \supset Z$,

где $\text{vol}_k Z = 0$, $X_0 \setminus Z$ — открытое всюду плотное в X_0 подмножество, являющееся аналитическим подмногообразием размерности k ; для функции плотности выполнено соотношение $\Psi_k(x, X_0 \setminus Z) \equiv 1$, $x \in X_0 \setminus Z$; 2) $\Psi_k(x, X_0) \geq 1$ для $x \in X_0 \setminus \partial X_0$. Поэтому будем считать, что на ГМ-поверхности выполнено неравенство $\Psi_k(x, X_0) \geq 1$ (см. § 30).

Пусть поверхность $X_0/\partial_1 X_0$ проходит через особую точку $* = \pi M_1$ в факторе W/M_1 , где $\pi: W \rightarrow W/M_1$ — факторизация, т. е. $\partial_1 X_0 \neq \emptyset$ (рис. 32). Случай произвольной тройки (W, f, X_0) может быть сведен к такому, где $\partial_1 X_0 \neq \emptyset$. Нужно рассмотреть

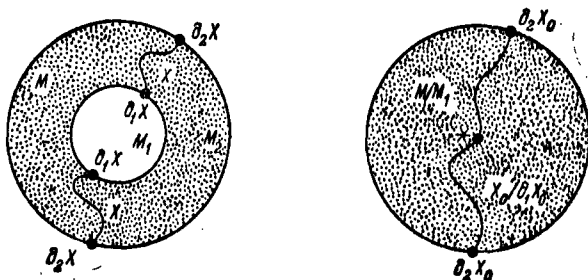


Рис. 32.

пленку $M' \subset M$, где $M' = \{x \in M \mid \rho \leq f(x) \leq 1\}$, $\rho = \inf_{x \in X_0} f(x)$.

Тогда $M' = M'_1 \cup M_2$, $M'_1 = F_\rho$, $X_0 \cap M'_1 \neq \emptyset$. Рассмотрим полезный для дальнейшего пример.

Пусть $M = D^n(b) \setminus D^n(a)$, где $a < b$, $D^n(s)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке O и радиуса s ; тогда ГМ-поверхности $X_0 \subset M$, удовлетворяющие условию $X_0 \cap M_1 \neq \emptyset$ (здесь $M_1 = S_a^{n-1}$, $M_2 = S_b^{n-1}$ — сферы), существуют при подходящем выборе $A \subset M_2$ (ввиду существования параллельного переноса в $\mathbb{R}^n$). Важный случай: $a \rightarrow 0$; тогда в качестве X_0 мы будем рассматривать ГМ-поверхность, проходящую через точку $O \in D^n(b)$.

9.4. Постановка задачи об оценке снизу функции объема минимальной поверхности. Пусть $M^n \supset X^k$, $* = X/\partial_1 X$ и X — ГМ-поверхность. Пусть задана функция исчерпания f на M ; построим функцию $\Psi(X, f, r) = \text{vol}_k(X \cap B_r^n)$, $0 \leq r \leq 1$. Ясно, что Ψ — неубывающая функция по r . Общая задача: дать точную оценку снизу функции Ψ в терминах римановой метрики многообразия независимо от топологического типа ГМ-поверхности $X \subset M$. Точность понимается в том смысле, что искомая оценка должна превращаться в точное равенство для достаточно богатых серий конкретных троек (M, f, X) . Участие ГМ-поверхностей во всех этих вопросах обусловлено многими причинами. В частности:

а) Комплексно-аналитические и алгебраические поверхности в $\mathbb{C}^n$ (важные для многих приложений) являются ГМ-поверхностями (см. выше).

б) Оказывается, что некоторые важные интегральные результаты о поведении комплексно-алгебраических и комплексно-аналитических поверхностей могут быть доказаны с использованием только их глобальной минимальности.

Нам придется опираться на теорему существования (и почти всюду регулярности) ГМ-поверхностей в данном классе (ко)гомологий, т. е. на достаточно нетривиальный факт.

§ 10. Определение и простейшие свойства коэффициента деформации векторного поля

Пусть дана тройка (M, f, X) и f -монотонное поле v . Обозначим через γ интегральные траектории поля v на M ; в силу f -монотонности поля v почти все траектории γ , начинающиеся на M_1 , достигают M_2 . Рассмотрим фронт F_r волны B_r , и пусть $x \in F_r$. Рассмотрим поле $-v$ и из каждой точки $x \in F_r$ выпустим интегральную траекторию $\gamma(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T'_x$, $\gamma(0) = x$, T'_x — верхняя грань тех τ , для которых определено решение $\gamma(\tau)$, выходящее из точки x . Возможны два варианта: а) траектория $\gamma(\tau)$, начинаясь в x , заканчивается на M_1 при $\tau = T'_x$; б) траектория $\gamma(\tau)$, начинаясь в x , заканчивается в некоторой особой точке поля v (т. е. $\gamma(\tau)$ является сепаратрисой нуля поля v). Мера множества сепаратрисных траекторий равна нулю, «типичная траектория» заканчивается на крае M_1 (при $\tau = T'_x$). Функция T'_x , вообще говоря, не постоянна на F_r .

Пусть $H_x(v)$ — $(n-1)$ -мерная гиперплоскость, ортогональная вектору $v \neq 0$ в точке x , $\Pi_x^{k-1} \subset H_x(v)$ — произвольная $(k-1)$ -мерная плоскость в $H_x(v)$; рассмотрим экспоненциальное отображение (вдоль геодезических) $\exp_x: T_x M \rightarrow M$. Пусть $S_\varepsilon^{k-1} = S_\varepsilon = \exp_x D^{k-1}(\varepsilon)$, где $D^{k-1}(\varepsilon) \subset \Pi^{k-1}$ — шар малого радиуса ε в плоскости Π^{k-1} с центром в точке O , $x = \exp_x(O)$. Тогда S_ε можно считать $(k-1)$ -мерным шаром радиуса ε с центром в x . Из каждой точки $y \in S_\varepsilon$ выпустим траекторию $\gamma_y(\tau)$ поля $-v$ и будем продолжать ее до тех пор, пока $\gamma_y(\tau)$ не выйдет (при $\tau = T'_y$) на M_1 либо не закончится (при $\tau = T'_y$) в какой-либо критической точке поля $-v$. Совокупность всех траекторий $\{\gamma_y(\tau) | y \in S_\varepsilon\}$ образует трубку CS_ε , являющуюся CW-комплексом размерности k (в силу f -монотонности поля v). Трубка CS_ε является почти всюду (в смысле объема vol_k) гладким k -мерным подмногообразием с краем в многообразии M (рис. 33).

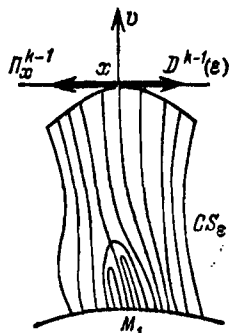


Рис. 33.

Положим $\kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) = \lim_{s \rightarrow 0} (\text{vol}_k C S_s) / (\text{vol}_{k-1} S_s)$. Пусть $\kappa_k(v, x) = \sup_{\Pi_x^{k-1}} \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1})$. Функцию $\kappa(v, x)$ назовем k -мер-

ным коэффициентом деформации поля v . В конкретных ситуациях коэффициент деформации поля v обычно легко вычисляется.

Пример 1. Пусть $M = D^n(R) \setminus D^n(0)$ (см. пример выше, где $a=0$); $M = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq |x| \leq R\}$; положим $f(x) = |x|$ и $v = \text{grad } f$. Тогда $\kappa_k(v, x) = r/k$, где $r = |x|$, коэффициент κ_k зависит только от r и не зависит от точки $x \in F_r$; траектории $\gamma(\tau)$ совпадают с радиусами шара $D^n(r)$.

Пример 2. Пусть $M = D^n(R) \setminus D^n(0)$, где $D^n(R)$ — шар геодезического радиуса R , вложенный в сферу $S^n(q)$ радиуса q ; тогда $R = q \cdot \varphi_0$, где φ_0 — угол сферической зоны, определяющей M . Если $f(x) = r$ (длина меридиана от N до x), $v = \text{grad } f$, то $B_r^n =$ (шар радиуса r), $r = \varphi \cdot q$ и

$$\kappa_k(v, x) = q \cdot \frac{\int_0^{r/q} \sin^{k-1} t \, dt}{\sin^{k-1}(r/q)}.$$

Совершенно аналогично вычисляется коэффициент κ_k в $\mathbb{R}P^n$, в пространстве постоянной отрицательной кривизны (тригонометрические функции заменяются здесь на гиперболические). Явная формула для κ_k в $\mathbb{C}P^n$ (снабженном стандартной инвариантной метрикой) легко получается из представления $\mathbb{C}P^n$ в виде фактора $U_{n+1}/U_1 \times U_n$.

Пример 3. Пусть v — f -монотонное поле на M такое, что $\text{div}(v) = 0$ (поток несжимаемой жидкости); интересен предельный случай: $k=n$. Рассмотрим $F_r \subset M$; тогда для почти всех $x \in F_r$ траектория γ_x поля $-v$ заканчивается при $t = T'_x$ на крае M_1 ; число T'_x (при условии $\gamma_x(0) = x$) определено однозначно и задает время, необходимое для того, чтобы вдоль траектории $\gamma_x(\tau)$ пройти путь от точки $x = \gamma_x(0)$ до точки $\gamma_x(T'_x) \in M_1$. Прямое вычисление дает, что $\kappa_n(v, x) = T'_x |v(x)|$. Если $v = \text{grad } f$, то $\kappa_n = -T'_x \cdot |\text{grad } f(x)|$. Легко вывести и общую формулу для коэффициента $\kappa_n(v, x)$ без предположения $\text{div}(v) = 0$; оказывается, κ_n выражается через интегралы вдоль траектории γ от $\text{div}(v)$. Результат имеет вид

$$\kappa = |v(y)| \int_{t_1}^{t_2} \exp\left(-\int_t^{t_2} \text{div}(v) \, d\tau\right) dt,$$

где y — конечная точка траектории, t_1 и t_2 — значения времени, отвечающие начальной и конечной точкам.

Пример 4. Если в качестве M взять внутренность эллипсоида в $\mathbb{R}^n$, заданную неравенством $a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq r^2$, где $f(x) =$

$= \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, $v = \text{grad } f$, то при $n=2$ имеем $\kappa_2 = \frac{|\text{grad } f(x)|}{2(a_1 + a_2)}$, где $M_1 = 0$ (начало координат). Для произвольного n имеем

$$\kappa_n = \frac{|\text{grad } f(y)|}{2 \sum_{i=1}^n a_i} \left(1 - \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n y_i} \right),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — координаты начальной точки, а $y_1, \dots, y_n$ — координатной точки траектории поля $v = \text{grad } f$.

Роль введенного нами коэффициента κ_k заключается в том, что универсальная оценка снизу функции объема $\Psi(X^k, r)$ существенно зависит от κ_k . Однако изучение κ_k представляет и самостоятельный интерес. Функция исчерпания g из [50] обладает тем свойством, что области $\{g \leq r\}$ псевдовыпуклы. Рассмотрим случай, когда функция $\lambda = \kappa_k(v, x)|v|$, $v = \text{grad } f$, рассмотренная на гиперповерхности $F_r = \partial B_r$, не зависит от точки $x \in F_r$. Например, это имеет место для шара в $\mathbb{R}^n$. Есть основания считать, что условие $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$ (для $x \in F_r$) аналогично условию псевдовыпуклости волны B_r в комплексном (кэлеровом) случае.

§ 11. Формулировка основной теоремы об оценке снизу функции объема

11.1. Функции взаимодействия глобально минимальной поверхности с фронтом волны. Пусть $x \in F_r$, $T_x F_r$ — касательная плоскость к фронту F_r , $n(x)$ — единичная внешняя нормаль к $T_x F_r$, направленная в область $\{f \geq r\}$. Если $v(x)$ — значение f -монотонного поля v в неособой точке x , то определен угол α между нормалью n и вектором v . Хотя угол α не определен в особых точках, это не повлияет на дальнейшие рассуждения.

Рассмотрим в M ГМ-поверхность $X \in \mathcal{O}(L)$. Поскольку $\partial_1 X \neq \emptyset$, то для почти всех значений $r \in [0, 1]$ поверхности X и F_r пересекаются трансверсально (в регулярных точках X), в частности, $\text{vol}_{k-1}(X \cap F_r) < \infty$. Пусть $x \in X \cap F_r$; положим $V_x^{k-1} = T_x X \cap T_x F_r$. Так как $V_x^{k-1} \subset T_x X$, то определена

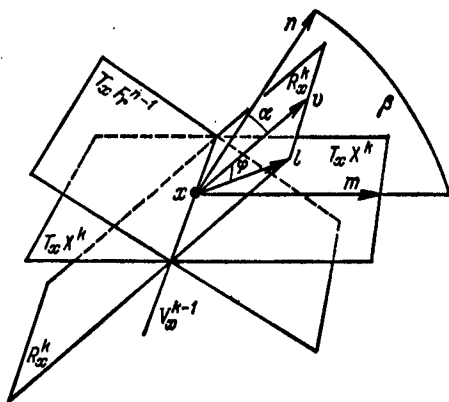


Рис. 34.

нормаль $m \in T_x X$, $m \perp V_x^{k-1}$, m — внешняя нормаль по отношению к F_r (рис. 34). Пусть β — угол между n и m . Так как v — f -монотонное поле, то $v \notin V_x^{k-1}$ и однозначно определена k -мерная плоскость R_x^k , натянутая на плоскость V_x^{k-1} и вектор v . Пусть l — внешняя нормаль в плоскости R_x^k к плоскости V_x^{k-1} (рис. 34). Нормаль l расположена по ту же сторону от $T_x F_r$, что и векторы v , n , m . Пусть φ — угол между l и v . Все три угла α , β , φ являются (почти всюду) на X гладкими функциями точки $x \in X$.

11.2. Формулировка основной теоремы об оценке объема.

Теорема 11.2.1. Пусть f — функция Морса на M^n , $0 \leq f(x) \leq 1$, $\partial M = M_1 \cup M_2$, $f|_{M_1} = 0$, $f|_{M_2} = 1$, v — f -монотонное поле на M ; все критические точки функции f являются особыми точками поля v , все особые точки x_λ поля невырождены и $0 < \lambda = \text{ind } x_\lambda \leq k-2$, где k — целое число, $k < n$. Пусть $X^k \subset M^n$ — глобально минимальная поверхность $X \in \mathcal{O}(L)$, $\partial_1 X \neq \emptyset$, $L \neq 0$. Тогда

$$\Psi(X, f, r) \geq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X, f, a)}{h(a)} \cdot h(r),$$

где постоянная $l' = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X, f, a)}{h(a)}$ не зависит от r и определяется только ГМ-поверхностью X ; функция $h(r)$ имеет вид

$$h(r) = \exp \int \max_{x \in F_r} [\kappa_k(v, x) |\text{grad } f(x)| \cos \varphi(x) \cos \beta(x)] \cdot dr.$$

Таким образом, поведение функции $\Psi(X, f, r)$ определяется ее поведением в момент времени $a=0$, т. е. на крае M_1 , и геометрией многообразия M . Эта оценка точна в том смысле, что существуют достаточно богатые серии четверок (M, X, f, v) , для которых неравенство превращается в равенство; в этих случаях мы получаем точное и явное (в терминах коэффициента деформации поля) выражение для функции объема $\Psi(X, f, r)$ на ГМ-поверхности, что позволяет, в частности, точно вычислять объем этой ГМ-поверхности.

Функция $h(r)$, задаваемая неопределенным интегралом, определена с точностью до постоянной, но это не влияет на оценку, так как в формулу для l' входит выражение $[h(a)]^{-1}$, что и компенсирует неопределенность.

Следствие 11.2.1. В условиях теоремы 11.2.1 имеем $\Psi(X, f, r) \geq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X, f, a)}{q(a)} \cdot q(r)$, где

$$q(r) = \exp \int \max_{x \in F_r} [\kappa_k(v, x) |\text{grad } f(x)|] \cdot dr.$$

Существуют достаточно богатые серии четверок (M, X, f, v) ,

для которых это неравенство превращается в равенство, что и дает явные формулы для объема таких ГМ-поверхностей.

Поскольку $h(r) \geq q(r)$ при всех r , то оценка в следствии 11.2.1 более грубая, чем в теореме 11.2.1, однако, как показывают многочисленные приложения, она достаточна для получения нетривиальных утверждений о поведении функции плотности $\Psi_h(x_0, X)$. Теорема 11.2.1 является следствием следующего более глубокого утверждения о поведении функции $\Psi(X, f, r)$.

Теорема 11.2.2. Пусть четверка (M, X, f, v) удовлетворяет всем условиям теоремы 11.2.1. Тогда кусочно-непрерывная функция $\frac{\Psi(X, f, r)}{h(r)}$ не убывает по r , т. е. $\frac{\Psi(X, f, r_1)}{h(r_1)} \leq \frac{\Psi(X, f, r_2)}{h(r_2)}$ при $r_1 < r_2$. Точно так же при $r_1 < r_2$ имеем $\frac{\Psi(X, f, r_1)}{q(r_1)} \leq \frac{\Psi(X, f, r_2)}{q(r_2)}$.

Теорема 11.2.1 и следствие 11.2.1 получаются из теоремы 11.2.2 при $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow 0$.

§ 12. Доказательство основной теоремы об оценке объема

Начнем с топологической части задачи. Отметим, что о ГМ-поверхности X мы знаем немного: 1) $X \in \mathcal{O}(L)$, $L \neq 0$; 2) X — ГМ-поверхность, где $\partial_1 X \neq \emptyset$. Наша ближайшая цель — перестроить ГМ-поверхность, заменив ее на другую (вообще говоря, не минимальную), о которой мы будем знать значительно больше, чем об X . В то же время, осуществляя перестройку, мы должны установить связь между объемом X и объемом перестроенной поверхности X' , чтобы затем, изучив X' , сделать выводы о функции объема на X . Отметим одну из трудностей, стоящих на пути к доказательству. Мы вынуждены опираться на теорему существования ГМ-поверхности $X \in \mathcal{O}(L)$, не являющейся, вообще говоря, подмногообразием ввиду возможного наличия сингулярных точек. Рассмотрим поверхность уровня $F_r = \{f = r\}$; в случае общего положения $A_r^{k-1} = F_r \cap X$ — $(k-1)$ -мерная поверхность (см. главу 6 и

[29] — [31]) в F_r . Введем функцию $\Phi(r) = \int_0^r \text{vol}_{k-1}(X \cap F_t) dt$;

тогда $\Phi(r)$ непрерывна по r (см. главу 6 и [31], [32]), в отличие от функции $\Psi(X, f, r)$, которая, вообще говоря, разрывна. В главе 6 будет доказано, что почти для всех $r \in [0, 1]$ выполнены соотношения $\text{vol}_{k-1} A_r < \infty$, $\text{vol } A_r = \Phi'_r = \text{vol}_{k-1}(X \cap F_r)$. Рассмотрим k -мерную трубку $CA_r = \bigcup_{x \in A_r} \gamma_x(r)$ (где $0 \leq r \leq T'_x$, см. § 10),

являющуюся объединением всех интегральных траекторий поля $-v$, выходящих из точек A_r . В случае общего положения трубка CA_r является k -мерной поверхностью (в смысле § 7), расположенной в области $\{f \leq r\}$. Построим новую поверхность $X' = [X \setminus (X \cap \{f \leq r\})] \cup CA_r$, т. е. заменим часть поверхности X , оказавшуюся в области $\{f \leq r\}$, на трубку CA_r .

Лемма 12.1. *Поверхность X' по-прежнему заклеивает L в группе $H_{k-1}^{(k-1)}(A)$ при вложении $A \rightarrow X'/X' \cap M_1 = X'/\partial_1 X'$. Другими словами, $X' \in \mathcal{O}(L)$, $L \neq 0$. Это означает, что указанная перестройка поверхности X не выводит нас за пределы вариационного класса $\mathcal{O}(L)$.*

Доказательство. Рассмотрим, для определенности, гомологический случай. Докажем, что при вложении $i_r: A \rightarrow CA_r$ имеет место соотношение $i_{r*}H_{k-1}(A_r) = 0$ в $H_{k-1}(CA_r)$. Предположим сначала, что k -мерная поверхность CA_r не содержит ни одной особой точки поля v ; тогда $CA_r \setminus (CA_r \cap M_1)$ гомеоморфно прямому произведению $I \times A_r$ (в силу f -монотонности поля v); но тогда очевидно, что вложение $i: A_r \rightarrow CA_r/CA_r \cap M_1$ полностью аннулирует группу $H_{k-1}(A_r)$, так как цикл $[A_r]$ гомологичен объединению циклов, лежащих в границе M_1 . Рассмотрим общий случай. Пусть $x_\lambda \in \{f < r\}$ — особые точки, $\text{ind } x_\lambda = \lambda$. По условию теоремы $0 < \lambda \leq k-2$. Пусть $r_0 = \max f(x_\lambda)$; тогда $0 < r_0 < r$; в интервале (r_0, r) нет особых точек поля v , а потому A_r гомеоморфно A_s при $s \rightarrow r_0$, $s > r_0$. В частности, A_r и A_s гомологичны в M . Докажем, что A_r гомологично A_s при $s = r_0 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Рассмотрим перестройку, которой подвергается A_s , $s > r_0$, при переходе s через критическое значение r_0 ; для этого достаточно изучить перестройку в окрестности одной особой точки x_λ , $f(x_\lambda) = r_0$. Так как x_λ — невырожденная точка, то достаточно малая окрестность $U(x_\lambda)$ диффеоморфна прямому произведению $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$. Все траектории $\gamma(\tau)$ (для поля $-v$), составляющие диск $D^{n-\lambda}$, останавливаются в точке x_λ , из которой выходят траектории, составляющие диск D^λ . Пусть $A_s^U = A_s \cap U(x_\lambda)$. Ясно, что $A_s^U \setminus (A_s^U \cap D^{n-\lambda})$ при $s > r_0$ гомеоморфно $A_b^U \setminus (A_b^U \cap D^\lambda)$ при $b < r_0$; этот гомеоморфизм устанавливается вдоль интегральных траекторий γ , не проходящих через x_λ . Пересечение $A_s^U \cap D^{n-\lambda}$ (где $s > r_0$) перестраивается и превращается в $A_b^U \cap D^\lambda$ (где $b < r_0$); так как $\lambda \leq k-2$, то $\dim(A_b^U \cap D^\lambda) \leq k-2$. Поскольку $A_b^U = [A_b^U \setminus (A_b^U \cap D^\lambda)] \cup (A_b^U \cap D^\lambda)$, то $\partial_{k-1}^* A_b^U = \partial_{k-1}^* [A_b^U \setminus (A_b^U \cap D^\lambda)] = A_b^U \setminus (A_b^U \cap D^\lambda)$, в силу равенства $\partial_{k-2}^* (A_b^U \cap D^\lambda) = 0$; здесь через ∂_{k-1}^* обозначен гомологический оператор взятия $(k-1)$ -мерного фундаментального цикла. При этом мы использовали то, что $(\partial_{k-2} A_b^U) \cap D^\lambda = 0$, $\dim(\partial_{k-2} A_b^U \cap D^\lambda) \leq k-3$, где ∂ — оператор взятия границы. Отсюда следует, что A_b^U гомологично A_s^U в $U(x_\lambda)$, причем гомологичность осуществляется k -мерной пленкой $CA_t \cap U(x_\lambda) \cap \{s \geq (t = f(x)) \geq b\}$. Отметим, что при $\lambda = k-1$ это утверждение о гомологичности в общем случае неверно. При $\lambda \leq k-2$ имеем: A_b (где $b = r_0 - \varepsilon$) гомологично A_s ($s = r_0 + \varepsilon$). Мы повторяем описанные перестройки на каждом критическом уровне (содержащем особые точки поля v) до тех пор, пока не

достигнем поверхности $M_1 = \partial_1 M$. Итак, A_r гомологично $\lim_{b \rightarrow 0} A_b \subset M_1$; следовательно, при вложении $j_r: A_r \rightarrow CA_r/\partial_1 CA_r$ мы имеем $(j_r)_* H_{k-1}(A_r) = 0$. Итак, операция перестройки $X \rightarrow X'$ является S -перестройкой в смысле главы 6 (см. также [29]—[31]). Поэтому, в силу теоремы 3.2 из [31] (см. также главу 6), получаем $X' \in \mathcal{O}(L)$, $L \neq 0$, что и требовалось.

Лемма 12.2. Пусть X' — поверхность, построенная в лемме 12.1. Тогда выполняются неравенства $\text{vol}_k X' \geq \text{vol}_k X$ и $\text{vol}_k(X \cap \{f \leq r\}) \leq \text{vol}_k CA_r$.

Доказательство. Так как в силу леммы 12.1 $X' \in \mathcal{O}(L)$, $L \neq 0$, то $\text{vol}_k X' \geq \text{vol}_k X = \inf_{Y \in \mathcal{O}(L)} \text{vol}_k(Y)$. Второе неравенство следует из того, что $X \cap \{f \geq r\} = X' \cap \{f \geq r\}$. Лемма доказана.

Мы воспользовались тем, что X — ГМ-поверхность в M , т. е. сослались на теорему существования ГМ-поверхностей в классе $\mathcal{O}(L)$. Если бы поверхность X была бы «допредельной», то неравенство $\text{vol}_k X' \geq \text{vol}_k X$ не было бы гарантировано. Нам известно топологическое поведение новой поверхности $X' \cap \{f \leq r\} = CA_r$ вдоль поля $v: CA_r = \bigcup \gamma_x(\tau)$, $x \in A_r$; это и позволит нам оценить $\text{vol}_k X'$.

Рассмотрим гиперповерхность F_r , и пусть $F_r \cap X = A_r$; через $d\Lambda^{k-1}$ обозначим внешнюю $(k-1)$ -мерную форму (быть может, с особенностями) $(k-1)$ -мерного объема на A_r . В силу общих свойств ГМ-поверхностей (см. § 7) можно считать (в случае общего положения), что $d\Lambda^{k-1}$ является обычной $(k-1)$ -формой на открытом подмногообразии T полной меры в A_r .

Лемма 12.3. Для почти всех r , $0 < r < 1$, выполняется равенство

$$\frac{d\Psi(X, f, r)}{dr} = \int_{A_r} \frac{1}{|\text{grad } f| \cos \beta} d\Lambda^{k-1}.$$

Доказательство. В силу общих свойств ГМ-поверхностей (§ 7) можно считать, что почти для всех r выполнено равенство

$$\Psi'_r = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} (\Psi(r + \Delta r) - \Psi(r)) = \lim_{\Delta r \rightarrow r} \frac{\Delta \Psi}{\Delta r}$$

(через $\Psi(r)$ обозначено $\Psi(X, f, r)$). Разобьем A_r в объединение непересекающихся бесконечно малых шаровых объемов $d\sigma(V_x^{k-1})$, где V_x^{k-1} — касательная плоскость к шару $d\sigma(V_x^{k-1}) \subset A_r$; здесь $x \in T$ — регулярная точка A_r . Пусть $\text{vol}_{k-1} d\sigma(V_x^{k-1}) = d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1})$ есть $(k-1)$ -мерная мера элементарного шара $d\sigma(V_x^{k-1})$; тогда $\text{vol}_{k-1} A_r = \int_{A_r} d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1})$. Рассмотрим две близкие гиперповерхности: F_r и $F_{r+\Delta r}$; пусть $\Delta X = X \cap \{r \leq f(x) \leq r + \Delta r\}$ — бесконечно

тонкий слой, заключенный между F_r и $F_{r+\Delta r}$; тогда $\Delta\Psi = \text{vol}_k(\Delta X)$. Для каждого шара $d\sigma(V_x^{k-1})$ построим бесконечно малый цилиндр $H d\sigma(V_x^{k-1})$, основанием которого является шар $d\sigma(V_x^{k-1})$, а вы-

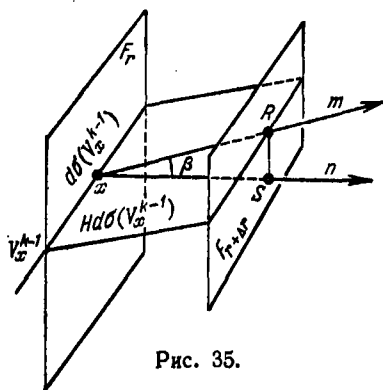


Рис. 35.

сотой — отрезок xR нормали m (рис. 35), высекаемый на нормали m двумя гиперповерхностями: F_r и $F_{r+\Delta r}$. Тогда ΔX разбивается в объединение непересекающихся цилиндров вида $H d\sigma(V_x^{k-1})$, т.е. $\Delta\Psi = \text{vol}_k(\Delta X) = \sum \text{vol}_k H d\sigma(V_x^{k-1})$. Найдем $\text{vol}_k H d\sigma(V_x^{k-1})$. Так как m ортогонально к $d\sigma(V_x^{k-1})$ в точке x (в силу инфинитезимальности всех этих рассуждений мы заменили все бесконечно малые поверхности, вложенные в M , их диффеоморфными образами, располо-

женными в касательных плоскостях), то отрезок xR ортогонален к $d\sigma(V_x^{k-1})$. Итак,

$$\text{vol}_k H d\sigma(V_x^{k-1}) = |xR| \text{vol}_{k-1} d\sigma(V_x^{k-1}) = |xR| d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1}).$$

В силу определения β имеем $|xR| = \frac{|xS|}{\cos \beta}$. Здесь отрезок xS направлен по нормали к F_r и однозначно определен приращением $\Delta r = \Delta f(x)$. Отсюда $\Delta r = |\text{grad } f(x)| \cdot |xS|$ (с точностью до бесконечно малых высших порядков), поскольку

$$\lim \frac{\Delta r}{|xS|} = \langle \text{grad } f, n \rangle = \left\langle \text{grad } f, \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} \right\rangle = |\text{grad } f|,$$

где через $\langle , \rangle$ обозначено скалярное произведение. Итак,

$$\text{vol}_k H d\sigma(V_x^{k-1}) = \frac{d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1}) \cdot \Delta r}{\cos \beta \cdot |\text{grad } f|},$$

что дает

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta r} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \cdot \text{vol}_k(\Delta X) = \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \sum_{A_r} \text{vol}_k H d\sigma(V_x^{k-1}) = \int_{A_r} \frac{d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1})}{\cos \beta \cdot |\text{grad } f|}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 12.4. Для почти всех r , $0 < r < 1$, выполнено равенство

$$\text{vol}_k CA_r = \int_{A_r} \cos \varphi \cdot \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1}),$$

где плоскость Π_x^{k-1} содержится в плоскости $R_x^k = V_x^{k-1} + v$ (см. рис. 34) и ортогональна вектору $v \in R_x^k$.

Доказательство. Снова рассмотрим разбиение $A_r = \cup d\sigma(V_x^{k-1})$ (см. лемму 12.3) и для каждого шара $d\sigma(V_x^{k-1})$ построим трубку $C d\sigma(V_x^{k-1}) = \cup \gamma_y(\tau)$, где $y \in d\sigma(V_x^{k-1})$. Тогда $CA_r = \cup C d\sigma(V_x^{k-1})$. Откуда $\text{vol}_k CA_r = \sum \text{vol}_k C d\sigma(V_x^{k-1})$, т. е. осталось рассмотреть $\text{vol}_k C d\sigma(V_x^{k-1})$ как функцию точки $x \in A_r$. Достаточно доказать равенство

$$\begin{aligned} \text{vol}_k C d\sigma(V_x^{k-1}) &= \\ &= \cos \varphi \cdot \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) \cdot d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1}). \end{aligned}$$

С точностью до малых высших порядков имеем $\text{vol}_k C d\sigma(V_x^{k-1}) = \text{vol}_k C d\sigma(\Pi_x^{k-1})$, где через $d\sigma(\Pi_x^{k-1})$ обозначен шар, касательный к плоскости Π_x^{k-1} в точке x (рис. 36). Мы используем то, что траектории $\gamma_y(\tau)$, $y \in d\sigma(V_x^{k-1})$, можно считать параллельными друг другу в окрестности точки x (если $v \neq 0$). В силу определения коэффициента деформации векторного поля v (см. § 10) мы имеем

$$\text{vol}_k C d\sigma(\Pi_x^{k-1}) = \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) \text{vol}_{k-1} d\sigma(\Pi_x^{k-1}).$$

Но так как угол между плоскостями V_x^{k-1} и Π_x^{k-1} в плоскости R_x^k равен φ , т. е. углу между v и l (рис. 34), то $\text{vol}_{k-1} d\sigma(\Pi_x^{k-1}) = \text{vol}_{k-1} d\sigma(V_x^{k-1}) \cos \varphi$ (рис. 36). Итак,

$$\text{vol}_k C d\sigma(\Pi_x^{k-1}) = \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) \cos \varphi \cdot \text{vol}_{k-1} d\sigma(V_x^{k-1}).$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \text{vol}_k CA_r &= \sum \text{vol}_k C d\sigma_x(V_x^{k-1}) = \sum \text{vol}_k C d\sigma_x(\Pi_x^{k-1}) = \\ &= \int_{A_r} \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) \cos \varphi \cdot d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 12.5. Имеет место неравенство

$$\text{vol}_k CA_r \leq \int_{A_r} \cos \varphi \cdot \kappa_k(v, x) d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1}).$$

Доказательство. Так как $\kappa_k(v, x) = \max_{\Pi_x^{k-1}} \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1})$ и $\cos \varphi \geq 0$, то утверждение следует из леммы 12.4.

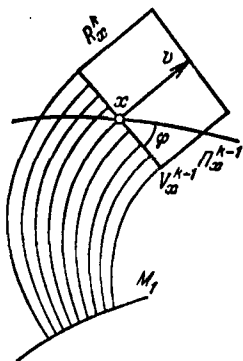


Рис. 36.

Лемма 12.6. Пусть функция $s=s(r)$, $0 \leq r \leq 1$, такова, что функция

$$F(v, f, x, X) = \frac{1}{\cos \beta \cdot |\operatorname{grad} f|} - s(r) \cos \varphi \cdot \kappa_k(v, x)$$

неотрицательна на каждой поверхности уровня F_r , $0 \leq r \leq 1$. Тогда выполнено неравенство $\frac{d}{dr} \Psi(X, f, r) \geq s(r) \Psi(X, f, r)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $\Psi'_r - s\Psi$; тогда в силу лемм 12.2, 12.4 имеем

$$\begin{aligned} \Psi'_r - s\Psi &\geq \Psi'_r - s \operatorname{vol}_k CA_r = \\ &= \int_{A_r} \left[\frac{1}{\cos \beta \cdot |\operatorname{grad} f|} - s \cos \varphi \cdot \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) \right] d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1}) \geq \\ &\geq \int_{A_r} \left[\frac{1}{\cos \beta \cdot |\operatorname{grad} f|} - s \cos \varphi \cdot \kappa_k(v, x) \right] d\Lambda^{k-1}(V_x^{k-1}) = \\ &= \int_{A_r} F(v, f, x, X) d\Lambda_x^{k-1} \geq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Лемма 12.7. Положим

$$s_m(r) = \left\{ \max_{x \in F_r} [\kappa_k(v, x) \cdot |\operatorname{grad} f| \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi] \right\}^{-1}.$$

Тогда $\Psi'_r - s_m \Psi \geq 0$.

Доказательство. Ясно, что в силу определения s_m выполнено неравенство $F(v, f, x, X) \geq 0$, а потому искомое утверждение вытекает из леммы 12.6.

Точно так же проверяется, что в качестве s можно взять функцию $s_m = \left(\max_{x \in F_r} [\kappa_k(v, x) |\operatorname{grad} f|] \right)^{-1}$; тогда

$$\begin{aligned} (\cos \beta \cdot |\operatorname{grad} f|)^{-1} - s_m \cdot \cos \varphi \cdot \kappa_k(v, x) &= \\ &= (\cos \beta \cdot |\operatorname{grad} f|)^{-1} \cdot (1 - [\cos \beta \cdot \cos \varphi \cdot \kappa_k |\operatorname{grad} f|] \times \\ &\quad \times [\max(\kappa_k |\operatorname{grad} f|)]^{-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Psi'_r - s_m \Psi \geq 0$; отсюда вытекает следствие 11.2.1.

Роль леммы 12.7 заключается в том, что мы исключили последний неизвестный нам параметр — границу A_r , определяемую поверхностью X . Это в сочетании с перестройкой $X \rightarrow X'$ (см. лемму 12.2) позволяет устранить влияние неизвестной нам топологической структуры X . При этом мы остаемся в том же топологическом классе ГМ-поверхностей. Это сглаживание поверхности (путем ее перестроек) во многих случаях оказывается тождественным преобразованием поверхности, поэтому полученная оценка часто оказывается точным равенством.

Доказательство теоремы 11.2.2. В силу леммы 12.7 имеем $\Psi'(X, f, r) \geq s_m(r) \cdot \Psi(X, f, r)$. Рассмотрим искомое неравенство $\left(\frac{\Psi}{h}\right)' \geq 0$; отсюда $\frac{\Psi'h - h'\Psi}{h^2} \geq 0$, что эквивалентно неравенству $\Psi' \geq \frac{h'}{h} \Psi$. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\frac{h'}{h} = s_m$; тогда $\exp \int s_m(r) dr = h(r)$. Для доказательства следствия 11.2.1 нужно вместо функции s_m рассмотреть функцию $\tilde{s}_m$. Итак, мы нашли функцию h , для которой $\left(\frac{\Psi}{h}\right)' \geq 0$. Если бы функция Ψ была дифференцируемой, отсюда уже следовало бы доказательство теоремы. Однако функция Ψ , вообще говоря, разрывна, поэтому монотонность функции $\frac{\Psi}{h}$ требует дополнительного доказательства.

Лемма 12.8. Функция $\frac{\Psi}{h}$ (и функция $\frac{\Psi}{q}$) не убывает по r .

Доказательство. Определим непрерывную функцию $\chi(r) = \int_0^r \Psi(t) dt$ и положим $\omega = \Psi - \chi$; тогда $\Psi = \chi + \omega$, где ω — сингулярная часть функции Ψ ; ясно, что $\omega' = 0$ почти всюду на интервале $(0, 1)$. Применяя, далее, рассуждения, использованные в [32] при доказательстве леммы 10.2 (см. также главу 6), получаем $d\omega(r) \geq 0$, откуда и следует утверждение теоремы 11.2.2.

§ 13. Некоторые геометрические следствия

13.1. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, проходящих через центр шара в евклидовом пространстве. Оценка, полученная в теореме 11.2.1, имеет вид $\Psi \geq c(M_1, X) \cdot h(r)$, где постоянная $c(M_1, X)$ определяется ГМ-поверхностью X и краем M_1 . Во многих случаях $c(M_1, X)$ может быть, в свою очередь, оценена снизу другой, более простой постоянной, уже не зависящей от X . В качестве простой иллюстрации рассмотрим минимальные поверхности произвольной коразмерности в $\mathbb{R}^n$. В качестве области возьмем шар с центром в начале координат и рассмотрим ГМ-поверхности, проходящие через центр шара. Напомню, что функция сферической плотности Ψ_k на ГМ-поверхностях не меньше единицы в каждой точке.

Следствие 13.1.1. Пусть $X^k \subset D_r^n \subset \mathbb{R}^n$ — ГМ-поверхность, проходящая через точку O — центр шара D_r^n радиуса r . Тогда

$$\Psi(X, r) = \text{vol}_k(X \cap D_r^n) \geq \Psi_k(O, X) \gamma_k r^k \geq \gamma_k r^k = \text{vol}_k D_r^k,$$

где γ_k — k -мерный объем стандартного k -мерного шара радиуса 1; $\Psi_k(O, X) \geq 1$ — сферическая функция плотности минимальной поверхности X в точке O , и $\Psi_k(O, X) = 1$ тогда и только тогда, когда точка O — регулярная точка поверхности X . Так как

шар D_r^k — стандартное k -мерное плоское сечение области D_r^n , то для шара верна гипотеза А (см. § 9), т. е. объем любой минимальной поверхности, проходящей через центр шара и имеющей границу на границе шара, не меньше, чем объем стандартного центрального плоского сечения шара (той же размерности).

Доказательство. Положим $M = D_r^n$; тогда $M_2 = S_r^{n-1}$, $M_1 = \emptyset$; в качестве f возьмем $f = |x|$; эта функция на $W \setminus O$ не имеет критических точек. Положим $v = \text{grad } f$; тогда $|v| = 1$ на $W \setminus O$; в силу примера 1 из § 10 имеем $\kappa_k(v, x) = r/k$, где $r = |x|$. Применяя следствие 11.2.1, получаем

$$\text{vol}_k(X \cap D_r^n) \geq \left(\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X, f, a)}{\gamma_k q(a)} \right) q(r) \gamma_k,$$

где

$$q(r) = \exp \int_0^r \frac{dr}{\max_{x \in F_r} [\kappa_k(v, x) |\text{grad } f(x)|]} = \exp \int_0^r \frac{dr}{\max_{x \in F_r} (r/k)},$$

так как $|\text{grad } f| = 1$. Итак, $q(r) = \exp \int_0^r \frac{k}{r} dr = r^k$; отсюда

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\Psi(X, f, a)}{\gamma_k a^k} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\text{vol}_k(X \cap D_a^n)}{\gamma_k a^k} \right) = \Psi_k(O, X).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{vol}_k(X \cap D_r^n) &\geq \Psi_k(O, X) \gamma_k q(r) = \Psi_k(O, X) \gamma_k r^k = \\ &= \Psi_k(O, X) \cdot \text{vol}_k \cdot D_r^k \geq \text{vol}_k D_r^k, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 13.1.2. Пусть $X^k \subset D_r^n \subset \mathbb{R}^n$ — ГМ-поверхность, проходящая через начало координат, O — центр шара D_r^n . Тогда $\text{vol}_{k-1} S_r^{k-1} \leq \text{vol}_{k-1}(X^k \cap \partial D_r^n)$, где $S_r^{k-1} = \mathbb{R}^k \cap \partial D_r^n$ — стандартный $(k-1)$ -мерный экватор в сфере $S_r^{n-1} = \partial D_r^n$. Пусть, в частности, задана комплексно-алгебраическая поверхность степени p , т. е. $X \subset D_r^n$, где $n = 2m$, $D_r^{2m} \subset \mathbb{R}^{2m} \cong (\mathbb{C}^m)^{\mathbb{R}}$. Рассмотрим пересечение $X^k \cap S_r^{2m-1} = \bigcup_{i=1}^N Y_i^{k-1}$, где (в случае общего положения) число компонент конечно, $N < \infty$, Y_i^{k-1} — $(k-1)$ -мерные связные гладкие компактные замкнутые подмногообразия в сфере S_r^{2m-1} . Тогда среди компонент Y_i^{k-1} найдется компонента $Y_{i_0}^{k-1}$, объем которой «велик», а именно: существует постоянная $c(k, p, n)$, не зависящая от радиуса r и от поверхности $X^k \subset \mathbb{C}^m$, такая, что для некоторого номера i_0 выполняется неравенство $c(k, p, n) r^{k-1} \leq \text{vol}_{k-1} Y_{i_0}^{k-1}$. В некоторых частных случаях неравенство превращается в равенство.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Psi(X, f, r)$, $f = |x|$; пусть $A_r = X \cap S_r^{n-1}$; тогда, в силу леммы 12.2, $\Psi(X, f, r) \leq \text{vol}_k CA_r$, где CA_r — конус над A_r с вершиной в O , составленный из радиусов. Так как $v = \text{grad} f$, то (см. § 10) $\kappa_k = \frac{r}{k}$, $r = |x|$, т. е.

$\text{vol}_k CA_r = \frac{r}{k} \cdot \text{vol}_{k-1} A_r$. В силу следствия 13.1.1 получаем

$\text{vol}_k(X \cap D_r^n) \geq \text{vol}_k D_r^k$; ясно, что $\frac{r}{k} \cdot \text{vol}_{k-1} S_r^{k-1} = \text{vol}_k D_r^k$, т. е.

имеем $\text{vol}_{k-1} S_r^{k-1} \leq \text{vol}_{k-1} A_r$, что и доказывает первую половину следствия 13.1.2. Второе утверждение следует из того, что, как известно, число N связных компонент Y_i^{k-1} пересечения $X \cap S_r^{2m-1}$ (в случае общего положения) ограничено сверху (при фиксированной степени p) постоянной $c_1(k, p, n)$ (независимо от выбора радиуса r и поверхности X данной степени).

Гипотеза В. Пусть $B^n \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей и $O \in B^n$. Тогда существует постоянная $c(B^n, k)$, зависящая только от B^n и от $k < n$, такая, что для любой ГМ-поверхности $X^k \subset \mathbb{R}^n$ без границы проходящей через точку O ($\Psi_k(O, X) \geq 1$, $q \in X^k$ и X^k глобально минимально в $\mathbb{R}^n$ относительно своей границы $A^{k-1} = X^k \cap \partial B^n$), существует хотя бы одна «достаточно большая» связная компонента $Y_{i_0}^{k-1}$ границы A , т. е. среди компонент Y_i^{k-1} , где $A = \bigcup_{i=1}^N Y_i^{k-1}$, существует компонента Y_{i_0} , для которой $\text{vol}_{k-1} Y_{i_0} \geq c(B^n, k)$.

13.2. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, проходящих через фиксированную точку в многообразии.

Следствие 13.2.1 Пусть четверка (M^n, f, v, X) удовлетворяет всем условиям теоремы 11.2.1; пусть $M_1 = \emptyset$ и $x_0 \in M$ — фиксированная точка (рис. 37). Пусть функция Морса f не имеет на $M \setminus x_0$ точек минимума и максимума (седловые точки допускаются), а в точке x_0 функция f достигает абсолютного минимума на M , $f(x_0) = 0$. Предположим, что в некоторых локальных координатах в окрестности точки x_0 функция f имеет вид $f(x) = |x|$, где $|x|$ — длина вектора $x_0 x$ в метрике M . Предположим, что интегральные траектории поля v в окрестности точки x_0 совпадают с интегральными траекториями поля $\text{grad} f$ (например, это имеет место для поля $v = \text{grad} f$ на M). Пусть $X^k \subset M$ — любая глобально минимальная поверхность в M , проходящая через точку x_0 (см. условия теоремы 11.2.1). Тогда имеем следующую оценку снизу функции объема $\Psi(X, f, r)$ (на поверхности X):



Рис. 37.

$$\text{vol}_k(X \cap \{f \leq r\}) = \Psi(X, f, r) \geq \Psi_k(x_0, X) \cdot \gamma_k \cdot q(r) \geq \gamma_k \cdot q(r),$$

где γ_k — k -мерный объем евклидова k -мерного шара радиуса 1, $\Psi_k(x_0, X)$ — функция плотности X в точке x_0 ,

$$q(r) = \exp \int_0^r \left[\max_{x \in F_r} (\kappa_k(v, x) \cdot |\operatorname{grad} f(x)|) \right]^{-1} dr.$$

Доказательство. Из следствия 11.2.1 получаем $\Psi(X, f, r) \geq \left(\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X, f, a)}{\gamma_k q(a)} \right) \cdot q(r) \cdot \gamma_k$. Осталось доказать, что $c = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X, f, a)}{\gamma_k q(a)} = \Psi_k(x_0, X)$. Рассмотрим достаточно малую окрестность V точки x_0 ; тогда, в силу предположений и поведения v и f в $V = V(x_0)$, можно считать, что подсчет постоянной c производится в окрестности O в $\mathbb{R}^n$, $O \in X^k$, причем $f(x) = |x|$. Так как при малых a имеем $F_a \cong S_a^{n-1}$, то поле v ортогонально к F_a , следовательно, $\kappa_k(v, x) = \frac{a}{k}$, $a = |x|$ и в силу следствия 13.1.1 имеем

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X, f, a)}{\gamma_k q(a)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\operatorname{vol}(X \cap \{|x| \leq a\})}{\gamma_k a^k} = \Psi_k(x_0, X).$$

Утверждение доказано.

13.3. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, образованных интегральными траекториями поля v . Рассмотрим важный случай, когда ГМ-поверхность $X^k \subset M^n$ составлена из интегральных траекторий $\gamma_x(t)$ поля v , проходящих через все точки $x \in A = \partial_2 X \subset M_2$.

Следствие 13.3.1. Пусть $X = \bigcup_{x \in A} \gamma_x(t)$. Тогда (в условиях теоремы 11.2.1) имеет место соотношение

$$\Psi(X, f, r) \geq \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\bar{h}(a)} \cdot \Psi(X, f, a) \right) \bar{h}(r),$$

где $\bar{h}(r) = \exp \int_0^r \left[\max_{x \in F_r} (\kappa_k |\operatorname{grad} f| \cos \alpha) \right]^{-1} dr$. Если $v = \operatorname{grad} f$, то $\cos \alpha = 1$.

Доказательство. Так как $X = \bigcup \gamma(t)$, то $T_x X^k = R_x^k$, $m = l$. Рассмотрим в плоскости $T_x M^n$ декартовы координаты $x_1, \dots, x_n$, в которых нормаль $n = (1, 0, \dots, 0)$. Пусть $a_1, \dots, a_{n-k}$ — ортобазис в $(n-k)$ -мерной плоскости $\mathbb{R}^{n-k}(a)$, ортогональной к $T_x X^k$. Тогда $\langle v, a_q \rangle = 0$, $\langle m, a_q \rangle = 0$, $1 \leq q \leq n-k$; в частности, $\mathbb{R}^{n-k}(a)$ ортогонально к V_x^{k-1} . Отсюда следует, что все векторы $a_1, \dots, a_{n-k}$, n , m содержатся в одной $(n-k+1)$ -мерной плоскости $\mathbb{R}^{n-k+1}(a, m)$, ортогональной плоскости V_x^{k-1} ; $\mathbb{R}^{n-k+1}(a, m) \oplus V_x^{k-1} = T_x M^n$. В случае общего положения можно считать, что $n \notin \mathbb{R}^{n-k}(a)$, т. е. что плоскость $T_x X^k$ трансверсально

пересекает плоскость $T_x F_r^{n-1}$. Тогда имеет место соотношение $m = bn + \sum_{q=1}^{n-k} m^q a_q$. Условие ортогональности m и a_s , $1 \leq s \leq n-k$, дает $b \langle n, a_s \rangle + \sum_q m^q \delta q_s = 0$, т. е. $ba_s^1 + m^1 = 0$. Отсюда $m = -b \sum_q a_q^1 a_q + b_n$. Пусть $r = v/|v|$. Тогда

$$\cos \varphi = \left\langle r, \frac{m}{|m|} \right\rangle = \frac{\langle r, bn \rangle}{|m|}; \quad \cos \alpha = \langle r, n \rangle; \quad \cos \beta = \left\langle \frac{m}{|m|}, n \right\rangle,$$

так как $\left\langle r, \sum_q a_q^1 a_q \right\rangle = 0$. Итак,

$$\frac{1}{\cos \beta} - \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} = \frac{|m|}{\langle m, n \rangle} - \frac{\langle r, bn \rangle}{|m| \langle r, n \rangle} = \frac{\langle m, m - bn \rangle}{|m| \langle m, n \rangle} = \frac{\langle m, \sum m^q a_q \rangle}{|m| \langle m, n \rangle} = 0.$$

Утверждение доказано.

Примеры ГМ-поверхностей вида $X = \bigcup \gamma_x(t)$, для которых оценка превращается в точное равенство (выражая, тем самым, объем поверхности), см. в следующих параграфах.

Пусть $M_1 = \Phi$, $x_0 \in M^n$ — фиксированная точка, поверхность X^k проходит через x_0 и $f(a) = |a|$, где точка a принадлежит некоторой достаточно малой окрестности $U(x_0)$, и $v = \text{grad } f$ на $U(x_0) \setminus x_0$. Тогда, соединяя вместе следствия 13.3.1 и 13.2.1, получаем $\Psi(X, f, r) \geq \Psi(x_0, X) \cdot \gamma_k \cdot \bar{h}(r)$, где $\bar{h}(r) \equiv q(r)$, если $v = \text{grad } f$ на всем M^n .

§ 14. Дефект риманова компактного замкнутого многообразия, геодезический дефект и наименьшие объемы глобально минимальных поверхностей реализующего типа

14.1. Определение дефекта многообразия. Пусть M — замкнутое связное компактное риманово многообразие, x_0 — произвольная точка на M . Тогда многообразие M можно представить в виде клеточного разбиения, содержащего только одну n -мерную клетку (максимальной размерности) D^n , гомеоморфную n -мерному диску, граница которой приклеена к некоторому клеточному комплексу C размерности, не превосходящей $n-1$, $M^n = D^n \cup C$, где $\partial D^n \rightarrow C$. Подкомплекс C определен неоднозначно. Тогда $M \setminus (x_0 \cup C)$ гомеоморфно диску D^n с выброшенной точкой x_0 . Рассмотрим, далее, на M непрерывную функцию f , гладкую на $M^n \setminus (x_0 \cup C)$, имеющую ровно один минимум в точке x_0 , $f(x_0) = 0$, принимающую максимальное значение, равное 1, на C и не имеющую критических точек на дополнении к $x_0 \cup C$, т. е. на $D^n \setminus x_0$; $0 \leq f \leq 1$. Такую функцию назовем центрированной в точке x_0 , а множество всех центрированных в x_0 функций обозначим $F(x_0)$. Пир этом

фиксирована только точка x_0 , а подкомплекс C меняется (рис. 38). Как и раньше, через v обозначаем f -монотонные векторные поля на $D^n \setminus x_0$; предположим, что поле v (как и функция f) не имеет особых точек на «кольце» $D^n \setminus x_0$. Если мы рассмотрим тройку $(D^n \setminus x_0, f, v)$, то попадаем в ситуацию, рассматривавшуюся в предыдущих параграфах, т. е. можем определить функцию

$$q_{x_0}(r) = \exp \int_0^r \left(\max_{x \in F_r} [\kappa_k(v, x) |\operatorname{grad} f(x)|] \right)^{-1} dr,$$

зависящую от точки x_0 , функции f и поля v .

Определение 14.1.1. Функцией k -мерного дефекта назовем функцию $\Omega(x_0, f, v) = \gamma_k q_{x_0}(1) \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a^k}{q_{x_0}(a)} \right)$; здесь $q_{x_0}(1) = \lim_{r \rightarrow 1} q_{x_0}(r)$.

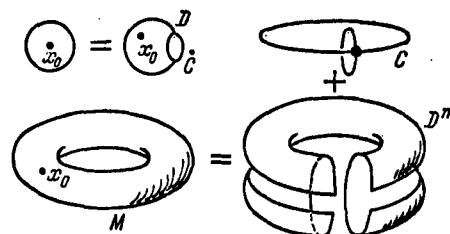


Рис. 38.

В каждой точке $x_0 \in M$ рассмотрим число $\Omega_k(x_0) = \sup_{v, f \in F(x_0)} \Omega(x_0, f, v)$. Назовем k -мерным дефектом многообразия M число $\Omega_k = \inf_{x_0 \in M} \Omega_k(x_0)$.

Построенное нами число зависит только от многообразия M и числа k ; ясно, что $\Omega_k > 0$. Если, например, $v = \operatorname{grad} f$ и функция f в малой окрестности точки x_0

имеет вид $f(x) = |x|$ (где точка x_0 принимается за начало координат в этой окрестности), то в силу следствия 13.2.1 имеем $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^k}{q_{x_0}(a)} = 1$ и $\Omega_k(x_0, f, v) = \gamma_k \cdot q_{x_0}(1)$.

Понятие геодезического диффеоморфизма мы сформулируем для случая произвольного гладкого компактного риманова многообразия M^n . Пусть $x_0 \in M^n$ — фиксированная точка, $\exp_{x_0}: T_{x_0}M \rightarrow M$ — отображение, определяемое пучком геодезических, исходящих из точки P , т. е. для точки $y \in T_{x_0}M$ ее образом в M при отображении $\exp_{x_0}$ является точка $\gamma(t)$, где t равно длине вектора Oy в $T_{x_0}M$, соединяющего O с y , а $\dot{\gamma}(0) = \frac{Oy}{t}$. Хорошо известно (см., например, [2]), что при малых ε отображение $\exp_{x_0}$ устанавливает диффеоморфизм между диском $D^n(O, \varepsilon)$, вложенным в $T_{x_0}M$ с центром в точке O и радиуса ε , и его образом в M , который мы обозначим через $Q^n(x_0, \varepsilon)$. Рассмотрим все те значения t , для которых $\exp_{x_0}$ устанавливает диффеоморфизм между $D^n(O, t)$ и $Q^n(x_0, t)$, и пусть $R(x_0) = \sup(t)$, т. е. при $t > R(x_0)$ отображение $\exp_{x_0}$ перестает быть диффеоморфизмом. В частности, это означает, что если $D^n(O, R(x_0))$ — замкнутый диск в $T_{x_0}M$, то отображение $\exp_{x_0}$ уже не является на нем

диффеоморфизмом и склеивает некоторые точки, расположенные на границе диска $D^n(O, R(x_0))$. Ясно также, что при всех $t < R(x_0)$ замыкание $\bar{Q}^n(x_0, t)$ открытого диска в M гомеоморфно замкнутому диску в M . Таким образом, число $R(x_0)$ есть максимальный радиус открытого геодезического диска $Q^n(x_0, t)$ с центром в точке x_0 , который можно вписать в M . Радиусами этого диска $Q^n(x_0, R(x_0))$ будем считать геодезические, исходящие из точки x_0 и являющиеся образами лучей, выходящих из точки O в касательной плоскости $T_{x_0}M$ (при отображении $\exp_{x_0}$). Для каждой точки $x \in Q^n(x_0, R(x_0))$ существует ровно один радиус, соединяющий ее с точкой x_0 . Описанный выше диффеоморфизм $D^n(O, R(x_0))$ на $Q^n(x_0, R(x_0))$ назовем геодезическим диффеоморфизмом. Ясно, что диск $Q^n(x_0, R(x_0))$ не обязан совпадать с M ; в общем случае дополнение к этому диску в M непусто. В то же время для некоторых симметрических пространств M (например, для пространств ранга 1) этот диск полностью исчерпывает собой все многообразие.

Рассмотрим компактное риманово многообразие M^n , и пусть $x_0 \in M$ — фиксированная точка. Рассмотрим геодезический диффеоморфизм и соответствующий ему диск $Q^n(x_0, R(x_0))$. Этот диск состоит из пучка радиусов-геодезических, исходящих из точки x_0 ; введем на этих геодезических натуральный параметр r , изменяющийся от 0 до $R(x_0)$, и рассмотрим на $Q^n(x_0, R(x_0)) \setminus x_0$ гладкую функцию $f(x) = r$, где $x = \gamma(r)$, т. е. значение этой функции в точке x равно расстоянию от этой точки до точки x_0 , измеренному вдоль единственного радиуса (геодезической), соединяющего x_0 с x . Очевидно, что эта функция не имеет критических точек на $Q(x_0, R(x_0)) \setminus x_0$; $0 \leq f \leq R(x_0)$. В качестве f -монотонного векторного поля v возьмем $\text{grad } f$. Ясно, что $|v| \equiv 1$ на $Q(x_0, R(x_0)) \setminus x_0$. Рассмотрим теперь тройку $(Q(x_0, R(x_0)) \setminus x_0, f, v)$; тогда, следуя § 10, можем подсчитать коэффициент деформации $\kappa_k(v, x)$ векторного поля v . Поступая по общей схеме определения k -мерного дефекта M , определим k -мерный геодезический дефект M следующим образом.

Определение 14.1.2. Функцией k -мерного геодезического дефекта $\Omega_k^0(x_0)$ назовем функцию

$$\Omega_k^0(x_0) = \gamma_k \gamma_{x_0}(R(x_0)) \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^k}{q_{x_0}(a)},$$

где

$$q_{x_0}(r) = \exp \int_0^r \left(\max_{x \in \{t=r\}} \kappa_k(v, x) \right)^{-1} dr.$$

Напомним, что $|\text{grad } f| \equiv 1$. Положим $\kappa_k(x_0, r) = \max_{x \in \{t=r\}} \kappa_k(v, x)$.

Назовем k -мерным геодезическим дефектом многообразия M число $\Omega_k^0 = \inf_{x_0 \in M} \Omega_k^0(x_0)$.

Так как поле ν имеет вид $\text{grad } f$ и так как $|\text{grad } f| = 1$, то получаем

$$\lim_{a \rightarrow 0} q_{x_0}(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \exp \left[\exp \int_0^a \frac{k \, dr}{r} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} (a^k).$$

Следовательно, мы доказали следующую лемму.

Лемма 14.1.1. Для $\Omega_k^0(x_0)$ имеет место формула

$$\Omega_k^0(x_0) = \gamma_k q_{x_0}(R(x_0)).$$

14.2. Теорема о связи дефекта с наименьшими объемами поверхностей реализующего типа. Рассмотрим, для простоты, обычную теорию (ко)гомологий $H_*^{(*)}$, и пусть $H(x, 0(\Phi), L')$ — произвольный вариационный класс, введенный нами в § 6. Для упрощения обозначим этот класс через $\mathcal{O}(L')$. Напомним, что класс $\mathcal{O}(L')$ образован теми поверхностями (компактами) X в M , которые реализуют в случае гомологий подгруппу L' в группе $H_k(M)$, а в случае когомологий — подмножество L' в группе $H^k(M)$. Хотя все нижеследующие результаты верны и для произвольной теории $h_*^{(*)}$ (например, для теории бордизмов) и произвольного класса $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$, мы сосредоточим свое внимание на этом простейшем случае. Геометрически глобально минимальная поверхность X из класса $\mathcal{O}(L')$ изображает собой наименьший (по объему) носитель L в M . Вопрос: в каких пределах может меняться объем наименьшего носителя L' для фиксированного многообразия M ? Оценка сверху дается объемом любого конкретного представителя из класса $\mathcal{O}(L')$; оценка снизу является нетривиальной задачей, которую мы решим, используя понятие дефекта многообразия M . Пусть размерность k заключена в интервале $3 \leq k \leq n-1$ (см. теорему существования ГМ-поверхности, § 7).

Теорема 14.2.1. Пусть $X_0^k \subset M^n$ — глобально минимальная поверхность, реализующая подгруппу (подмножество) $L' \neq 0$, т. е. $X_0 \in \mathcal{O}(L')$. Тогда имеет место неравенство $\text{vol}_k(X_0) \geq \left(\sup_{x_0 \in X_0} \Psi_k(x_0, X_0) \right) \Omega_k \geq \Omega_k > 0$. Тем самым, число $\Omega_k(M)$ называется универсальной постоянной, оценивающей снизу k -мерный объем любой замкнутой минимальной поверхности, реализующей нетривиальные циклы (коциклы) в многообразии M . В общем случае эта оценка неулучшаема, т. е. существуют богатые серии примеров, когда эта оценка достигается на конкретных минимальных поверхностях. Аналогичное неравенство имеет место и для геодезического дефекта Ω_k^0 , а именно: $\text{vol}_k X_0^k \geq \left(\sup_{x_0 \in X_0} \Psi_k(x_0, X_0) \right) \Omega_k^0 \geq \Omega_k^0 > 0$. Ясно, что $\Omega_k^0 \leq \Omega_k$.

Доказательство. Рассмотрим разбиение $M = D^n \cup C$, $x_0 \in C$, где X_0 — фиксированная минимальная поверхность из

класса $\mathcal{O}(L')$. Рассмотрим произвольную функцию f , центрированную в x_0 (см. пункт 14.1), и пусть v — f -монотонное поле без особенностей на $D^n \setminus x_0$. Поскольку все условия теоремы 11.2.1 выполнены, то из следствия 11.2.1 получаем неравенство

$$\begin{aligned} \text{vol}_k X_0 &\geq \text{vol}_k (X_0 \cap \{f \leq r\}) = \Psi(X_0, f, r) \geq \\ &\geq \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\Psi(X_0, f, a)}{q_{x_0}(a)} \right) \cdot q_{x_0}(r) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\Psi(X, f, a)}{\gamma_k a^k} \right) \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a^k}{q_{x_0}(a)} \right) \cdot \gamma_k q_{x_0}(r). \end{aligned}$$

Отсюда, устремляя r к 1, получаем

$$\text{vol}_k X_0 \geq \Psi_k(x_0, X_0) \cdot \gamma_k q_{x_0}(1) \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a^k}{q_{x_0}(a)} \right) = \Psi_k(x_0, X_0) \Omega_k(x_0, f, v).$$

Тогда

$$\text{vol}_k X_0 \geq \Psi_k(x_0, X) \Omega_k(x_0).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \text{vol}_k X_0 &\geq \sup_{x_0 \in X_0} [\Psi_k(x_0, X_0) \Omega_k(x_0)] \geq \\ &\geq \left(\sup_{x_0 \in X_0} \Psi_k(x_0, X_0) \right) \inf_{x_0 \in M} \Omega_k(x_0) = \left(\sup_{x_0 \in X_0} \Psi_k(x_0, X_0) \right) \Omega_k, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы. Напомним, что $\Psi_k(x_0, X_0) \geq 1$ на X_0 .

Как мы покажем ниже, существуют такие поверхности X_0 , для которых выполнено равенство $\text{vol}_k X_0 = \Omega_k > 0$. Оказывается, на таких поверхностях вообще нет особых точек.

Предложение 14.2.1. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(L')$ — минимальная поверхность, для которой неравенство теоремы 14.2.1 превращается в равенство, т. е. $\text{vol}_k X_0 = \Omega_k$ (или $\text{vol}_k X_0 = \Omega_k$). Тогда поверхность X_0 является гладким компактным замкнутым подмногообразием (без особенностей) в M .

Доказательство. Из теоремы 14.2.1 имеем $\Omega_k = \text{vol}_k X_0 \geq \left(\sup_{x_0 \in X_0} \Psi_k(x_0, X_0) \right) \Omega_k$, т. е. $\Psi_k(x_0, X_0) = 1$ на всей поверхности X_0 . В силу основной теоремы 7.2.1 отсюда следует, что все точки поверхности X_0 регулярны и X_0 — гладкое подмногообразие в M . Предложение доказано.

Далее, оказывается, что введенный нами выше класс минимальных поверхностей, образованных интегральными траекториями векторного поля v , также может быть охарактеризован в терминах функции k -мерного дефекта многообразия M .

Предложение 14.2.2. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(L')$ — минимальная поверхность, в точке x_0 которой выполнено равенство $\text{vol}_k X_0 = \Omega_k(x_0, f, v)$, где f — некоторая функция из класса $F(x_0)$ (или $\text{vol}_k X_0 = \Omega_k^f(x_0)$). Тогда поверхность X_0 является гладким подмногообразием в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того, в этой окрестности поверхность X_0 целиком состоит из интегральных траекторий векторного поля v , выходящих из точки x_0 .

Замечание. Условие предложения 14.2.2 отличается от условия предложения 14.2.1, так как

$$\Omega_k = \inf_{x_0 \in M} \sup_{v, f \in \bar{F}_{x_0}} \Omega(x_0, f, v).$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 14.2.1 имеем

$$\Omega_k(x_0, f, v) = \text{vol}_k X_0 \geq \Psi_k(x_0, X) \cdot \Omega_k(x_0, f, v),$$

т. е. $\Psi_k(x_0, X_0) = 1$ в точке x_0 . Следовательно, в силу теоремы 7.2.1 поверхность X_0 в некоторой окрестности точки x_0 является гладким минимальным подмногообразием в M . Так как

$$\begin{aligned} \Psi(X_0, f, 1) &\geq \Omega_k(x_0, f, v) = \gamma_k q_{x_0}(1) \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a^k}{q_{x_0}(a)} \right) = \\ &= \text{vol}_k X_0 \geq \Psi(X_0, f, 1), \end{aligned}$$

то

$$\Psi(X_0, f, 1) = q_{x_0}(1) \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\Psi(X_0, f, a)}{q_{x_0}(a)} \right),$$

поскольку в окрестности точки x_0 имеем $\lim_{a \rightarrow 0} \Psi(X_0, f, a) = \lim_{a \rightarrow 0} (\gamma_k a^k)$. Отсюда получаем, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\Psi(X_0, f, r)}{q_{x_0}(r)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X_0, f, a)}{q_{x_0}(a)};$$

следовательно, функция $\frac{\Psi(X_0, f, r)}{q_{x_0}(r)}$, являясь неубывающей на $(0, 1)$, в действительности постоянна. Итак, производная функции Ψ/q тождественно равна нулю; следовательно, в доказательстве леммы 12.6 имеем $\Psi' - s\Psi \equiv 0$, т. е. $\Psi' - s\Psi = \Psi' - s \text{vol}_k CA_r$. Поэтому для любого r имеем $\Psi = \text{vol}_k CA_r$. Это означает, что при достаточно малом r , когда поверхность уровня F_r можно считать сферой, на «контур» A_r , содержащийся в сфере F_r , натянуты две пленки: CA_r и $X_0 \cap B_r$, имеющие (при каждом r) один и тот же k -мерный объем. Так как пленка X_0 минимальна, то, следовательно, и пленка CA_r также минимальна, но тогда в силу теоремы единственности (справедливой в данной ситуации) $X_0 \cap B_r = CA_r$, что и доказывает предложение 14.2.2.

Этот результат будет вскоре применен нами для полного описания глобально минимальных поверхностей реализующего типа в симметрических пространствах ранга 1. В заключение объясним геометрический смысл дефекта Ω_k . Поскольку эта интерпретация не будет играть в дальнейшем важной роли, остановимся на этом вопросе кратко. Можно вычислить дефект $\Omega_k(x_0, f, v)$ через дифференциально-геометрические инварианты риманова многообразия M (например, через кривизну). Тогда оказывается, что максимальный коэффициент деформации вектор-

ного поля u реализуется вдоль таких траекторий поля, которые имеют максимальную кривизну и вдоль которых наиболее сильно изгибается k -мерный пучок ξ близких интегральных траекторий. Тогда число $\Omega_k(M)$ является k -мерным объемом тела вращения, получающегося вращением около некоторой плоскости Π^k пучка ξ . Этот пучок должен вращаться, оставаясь все время касательным к Π^k . Полученное многообразие (с краем) не совпадает, вообще говоря, с исходным многообразием M . Однако во многих важных случаях, например для симметрических пространств ранга 1, можно в некотором смысле считать, что это совпадение имеет место.

14.3. Доказательство гипотезы Райфенберга о существовании универсальной оценки сверху на «сложность» особых точек минимальных поверхностей реализующего типа.

Определение 14.3.1. Мы скажем, что особая точка x_0 минимальной поверхности X_0^k имеет «первый тип», если существует

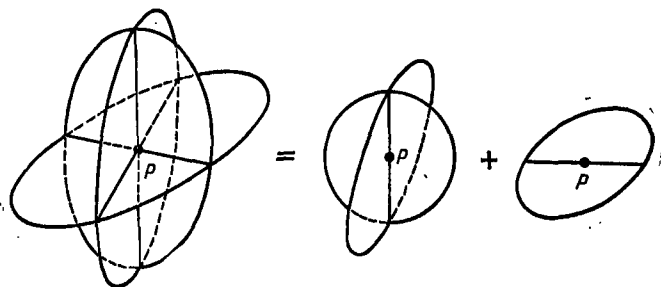


Рис. 39.

окрестность этой точки в X_0^k , являющаяся объединением некоторого числа $\tau(x_0) \geq 3$ k -мерных полудисков (рис.39).

Некоторые полудиски могут образовывать целые диски. Если $\tau(x_0)=2$, то точка x_0 является регулярной. Особые точки 1-го типа являются первыми по сложности точками на минимальной поверхности, следующими за регулярными точками.

Расширенная гипотеза Райфенберга. Пусть M — компактное гладкое замкнутое риманово многообразие и $X_0 \in \in \mathcal{O}(L')$ — минимальная поверхность реализующего типа. Тогда существует постоянная $F(M, k)=F$, зависящая только от размерности k и от многообразия M , такая, что $\tau(x_0) \leq F$ для любой особой точки 1-го типа на любой минимальной поверхности $X_0 \in \mathcal{O}(L')$.

Райфенберг сформулировал гипотезу для минимальных поверхностей заклеивающего типа в евклидовом пространстве, границей которых является гладкое $(k-1)$ -мерное подмногообразие A . В пользу гипотезы говорят многие наблюдения. Например, если

$k=2$, то действительно к каждому одномерному сингулярному ребру (отрезку) подходит ровно 3 листа пленки, встречающиеся на этом ребре под углами в 120° в трехмерном пространстве (рис. 40). Ясно, что изображенная на рис. 40 четырехкратная точка распадается (при минимизации поверхности) в две трехкратные особенности. В то же время следует отметить, что точки 1-го типа отнюдь не исчерпывают все типы особых точек минимальных поверхностей. Вскоре мы познакомимся с особыми точками «типа конусов», которые могут иметь значительно более сложную структуру, являясь конусами над довольно сложными

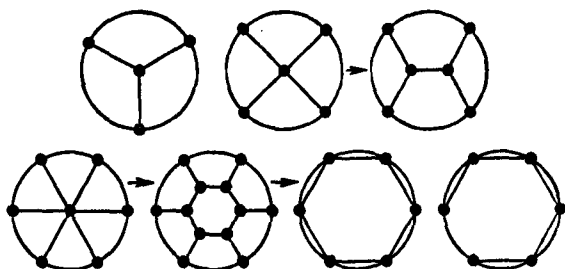


Рис. 40.

многообразиями. Поэтому уместно поставить вопрос об оценке сверху «сложности» особой точки независимо от ее типа. Важнейшей характеристикой особенности является, как показывает хотя бы теорема 7.2.1, ее функция сферической плотности $\Psi_k(x_0, X)$; поэтому естественно сразу решать задачу об оценке сверху этой функции плотности.

Предложение 14.3.1. Пусть M — гладкое замкнутое компактное риманово многообразие и $X_0 \in \mathcal{O}(L')$ — произвольная минимальная поверхность реализующего типа в M . Тогда существует постоянная $F = F(M, k)$, зависящая только от числа k и от многообразия M , такая, что для любого $X_0 \in \mathcal{O}(L')$, где $3 \leq k \leq n-1$ в любой точке $x_0 \in X_0$, выполняется неравенство $\Psi_k(x_0, X_0) \leq F(M, k)$. Постоянная $F(M, k)$ вычисляется в явном виде, и эта оценка в общем случае неулучшаема. В частности, для $X_0 \in \mathcal{O}(L')$ справедлива расширенная гипотеза Райфенберга.

Доказательство. Из теоремы 14.2.1 следует, что $\Psi_k(x_0, X_0) \leq \frac{\text{vol}_k(X_0)}{\Omega_k}$, где $\Omega_k > 0$ — дефект многообразия M . Поскольку многообразие M компактно, то существует конечное число минимальных поверхностей (см. теорему 7.2.1) $X_1, \dots, X_q$ таких, что поверхность $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^q X_i$ (объединение всех этих поверхностей) реализует любую подгруппу (подмножество) L' в группе

$H_k^{(k)}(M)$. Так как $\text{vol}_k(\tilde{X}) \leq \text{vol}_k\left(\bigcup_{i=1}^q X_i\right) < \infty$, то $\Psi_k(x_0, X_0) \leq \frac{\text{vol}_k(\tilde{X})}{\Omega_k}$. Таким образом, мы получаем универсальную оценку

сверху и можно положить $F(M, k) = \frac{\text{vol}_k(\tilde{X})}{\Omega_k}$. Из построения F и из примеров, которые будут приведены ниже, вытекает, что эта оценка в общем случае неулучшаема, т. е. существуют богатые серии примеров минимальных поверхностей, для которых указанная оценка превращается в равенство. Ясно также, что если особая точка $x_0 \in X_0$ является точкой 1-го типа (см. определение 14.3.1), то $\Psi_k(x_0, X_0) = \frac{1}{2} \tau(x_0)$. Предложение доказано.

Гипотеза Райффенберга может быть доказана для поверхностей реализующего типа и без использования теоремы 14.2.1, но тогда нужно опираться на технику, которую мы разработаем ниже при доказательстве основной теоремы существования минимальных поверхностей. Впрочем, этот второй вариант доказательства нам не потребуется (он не дает точной оценки).

§ 15. Некоторые топологические следствия.

Конкретные серии примеров глобально минимальных поверхностей нетривиального топологического типа

15.1. Глобально минимальные поверхности, реализующие нетривиальные (ко)циклы в симметрических пространствах. Значительная сложность вариационных задач описанного выше типа обусловила то обстоятельство, что до недавнего времени имелось сравнительно мало конкретных примеров глобально минимальных поверхностей, что связано с серьезными трудностями, стоящими на пути доказательства глобальной минимальности той или иной конкретной топологической поверхности. Замечательным фактом является то, что разработанная выше методика (основанная на конструкциях, с помощью которых доказывалась общая теорема 7.2.1 существования решения) позволяет не только получать теоремы существования, но и доказывать глобальную минимальность конкретных поверхностей. Мы продемонстрируем эффективность разработанного нами метода изучения и построения минимальных поверхностей в нескольких нетривиальных топологических ситуациях. Начнем с относительно простого случая, когда объемлющее риманово многообразие M является компактным симметрическим пространством ранга 1 (описание таких пространств см. ниже).

Теорема 15.1.1. (1) Пусть $M^{2n} = \mathbb{C}P^n$ — комплексное проективное пространство, $n > 1$, и пусть $\mathbb{C}P^k = X_0^{2k}$, $1 \leq k \leq n-1$, — стандартно вложенные комплексные проективные подпространства

(описание вложения см. ниже), каждое из которых реализует образующую в $2k$ -мерной группе когомологий кольца $H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_2]/(x_2^{n+1})$, где $\dim x_\alpha = \alpha$.

(2) Пусть $M^{4n} = \mathbb{QP}^n$ — кватернионное проективное пространство, $n \geq 1$, и пусть $\mathbb{QP}^k = X_0^{4k}$, $1 \leq k \leq n-1$, — стандартно вложенные кватернионные проективные подпространства (описание вложения см. ниже), каждое из которых реализует образующую в $4k$ -мерной группе когомологий кольца $H^*(\mathbb{QP}^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_4]/(x_4^{n+1})$.

(3) Пусть $M^n = \mathbb{RP}^n$ — вещественное проективное пространство, $n \geq 2$, и пусть $\mathbb{RP}^k = X_0^k$, $1 \leq k \leq n-1$, — стандартно вложенные вещественные проективные пространства, каждое из которых реализует образующую в k -мерной группе когомологий кольца $H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x_1]/(x_1^{n+1})$.

(4) Пусть $M^{16} = F_4/\text{Spin}(9)$ — симметрическое пространство, содержащее стандартно вложенную (описание вложения см. ниже) сферу $S^8 = X_0^8$, реализующую образующую в восьмимерной группе когомологий кольца $H^*(M^{16}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_8]/(x_8^2)$.

Тогда каждое из перечисленных выше подмногообразий X_0^p является не только вполне геодезическим подмногообразием в M , но и глобально минимальной поверхностью, причем выполняется точное равенство $\text{vol}_p X_0^p = \Omega_p^0(M)$, т. е. все эти поверхности имеют наименьший объем среди всех минимальных поверхностей в этой размерности (и реализующих нетривиальные (ко)циклы). Более того, любая глобально минимальная поверхность $X_0^p \subset M$, реализующая какой-либо нетривиальный коцикл в размерности p , совпадает (с точностью до изометрии в M) с указанным выше подмногообразием X_0^p , реализующим образующую группы когомологий в этой размерности. В частности, для каждой размерности p в многообразии M может быть только одна глобально минимальная поверхность X_0^p . Приведенный выше список многообразий M исчерпывает собой все симметрические пространства ранга 1.

Теорема 15.1.2. (1) Пусть $M = G_{p+q, q}^{\mathbb{C}}$, $1 \leq q \leq p$, — комплексное грасманово многообразие (q -мерных плоскостей в $(p+q)$ -мерном пространстве) и $\mathbb{CP}^s$, $1 \leq s \leq p$, — набор стандартно вложенных (эти вложения мы опишем ниже) вполне геодезических подмногообразий, каждое из которых диффеоморфно комплексному проективному пространству и реализует элемент x_2^s кольца когомологий $H^*(M, \mathbb{Z})$, которое до размерности $2p$ изоморфно кольцу полиномов $\mathbb{Z}[x_2, x_4, \dots, x_{2q}]$. Тогда все эти подмногообразия являются глобально минимальными поверхностями в $G_{p+q, q}^{\mathbb{C}}$ и, кроме того, их объем наименьший, т. е. $\text{vol}_{2s}(\mathbb{CP}^s) = \Omega_{2s}^{\mathbb{C}}(M)$. Более того, значения размерности $2, 4, 6, \dots, 2p$ являются единственными, в которых существует минимальная поверхность $X_0^k \subset M$ такая, что $\text{vol}_k X_0^k = \Omega_k^{\mathbb{C}}(M)$. Другими словами, $\text{vol}_k X_0^k >$

$> \Omega_k^0(M)$ при $k \neq (2, 4, 6, \dots, 2p)$ для любой поверхности $X_0 \in \mathcal{O}(L')$, $L' \neq 0$, $L' \subset H^k(M; \mathbb{Z})$.

(2) Пусть $M = G_{p+q, q}^{\mathbb{Q}}$, $1 \leq q \leq p$, — кватернионное грассманово многообразие, и пусть $\mathbb{Q}P^s$, $1 \leq s \leq p$, — набор стандартно вложенных вполне геодезических подмногообразий, каждое из которых диффеоморфно кватернионному проективному пространству и реализует элемент x_s^k кольца когомологий $H^*(M, \mathbb{Z})$, которое до размерности $4p + 2$ изоморфно кольцу полиномов $\mathbb{Z}[x_4, x_8, x_{12}, \dots, x_{4p}]$. Тогда все эти подмногообразия являются глобально минимальными поверхностями в $G_{p+q, q}^{\mathbb{Q}}$ и, кроме того, их объем наименьший, т. е. $\text{vol}_{4s}(\mathbb{Q}P^s) = \Omega_{4s}^0(M)$. Более того, значения $k = (4, 8, 12, \dots, 4p)$ являются единственными размерностями, в которых существует минимальная поверхность $X_0^k \subset M$ такая, что $\text{vol}_k(X_0^k) = \Omega_k^0(M)$.

Доказательства этих теорем будут даны в следующих пунктах.

15.2. Компактные симметрические пространства и явный вид геодезического диффеоморфизма. Рассмотрим теперь симметрические пространства. Напомним, что компактное многообразие M называется симметрическим, если оно представимо в виде однородного пространства $M = \tilde{G}/\tilde{H}$, где $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ — компактные группы Ли, $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ и на $\tilde{G}$ определен инволютивный автоморфизм σ , $\sigma^2 = 1$, такой, что $\tilde{H} = \{g \in \tilde{G} \mid \sigma(g) = g\}$. Для простоты будем рассматривать только односвязные и неприводимые симметрические пространства, т. е. не представимые в виде прямого произведения других симметрических пространств.

Нам потребуются некоторые простые факты из теории симметрических пространств, которые мы сообщим здесь без доказательства, отсылая читателя, например, к [8], [55].

Определение 15.2.1. Пусть $e \in M$; рассмотрим все геодезические γ , выходящие из точки e , и отметим на каждой из них первую точку, сопряженную с точкой e (вдоль этой геодезической). В силу компактности многообразия M , на каждой геодезической γ обязательно существует первая сопряженная точка. Множество всех таких точек обозначим через $C(e)$.

Определение 15.2.2. Точка минимума для точки e вдоль геодезической γ — это такая точка x на γ , что отрезок кривой γ от точки e до x минимален, т. е. минимизирует длину дуги между своими концами, но всякий больший отрезок уже не является минимальным. Множество $M(e)$ всех точек минимума для точки e называется геометрическим местом минимумов (или разрезов) для точки e .

Хорошо известно, что, например, для односвязного компактного симметрического пространства M всегда выполнено равенство $M(e) = C(e)$. Ясно, что $\dim C(e) \leq n - 1$, $n = \dim M$; поэтому многообразие M представимо в виде разбиения $M = C(e) \cup (M \setminus C(e))$, где (если $M(e) = C(e)$) многообразие $M \setminus C(e)$ гомеоморфно диску размерности n .

Пусть $M = \tilde{G}/\tilde{H}$, где $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ — компактные группы Ли (в силу односвязности M можно считать, что $\tilde{G}$ односвязна); пусть G и H — алгебры Ли групп $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ соответственно. Хорошо известно, что M можно вложить в группу $\tilde{G}$ как картановскую модель $V \subset M$, где $V = \{g\sigma(g^{-1})\}$ — вполне геодезическое подмногообразие, σ — инволютивный автоморфизм группы $\tilde{G}$; тогда $\tilde{H} = \{g \in \tilde{G} \mid \sigma(g) = g\}$ (из односвязности $\tilde{G}$ следует, что $\tilde{H}$ связна), а $V = \{g \in \tilde{G} \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$; проекция $p: \tilde{G} \rightarrow V$, $p(g) = g\sigma(g^{-1})$, определяет главное расслоенное пространство $\tilde{G} \xrightarrow{H} M \cong V$. В алгебре G возникает естественное ортогональное разложение $G = B + H$, где $H = T_e(\tilde{H})$, $B = T_e(V)$, $V = \exp(B)$ (e — единица в группе $\tilde{G}$). Пусть $P \subset B$ — картановская подалгебра, т. е. максимальное абелево подпространство в B . Тогда алгебра G допускает следующее разложение по отношению к действию присоединенного представления ad_P на G :

$$G = Z_0 + P + \sum V_{\hat{\alpha}},$$

где $Z_0 = C(P) \cap H$; $C(P)$ — централизатор подалгебры P в G ; $\hat{\alpha}$ — линейные функционалы на P , причем каждое подпространство $V_{\hat{\alpha}} \subset G$ является двумерным подпространством (над полем вещественных чисел), инвариантным при действии ad_P . В некотором подходящем базисе в плоскости $V_{\hat{\alpha}}$ операторы ad_P имеют следующий вид:

$$\text{ad}_P(G)|_{V_{\hat{\alpha}}} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi\hat{\alpha} \\ -2\pi\hat{\alpha} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\hat{\alpha}$ — функционал на P ; $\hat{\alpha}(p) \in \mathbb{R}$, если $p \in P$. Функционалы $\hat{\alpha}$ называются корнями симметрического пространства M . Поскольку среди корней $\hat{\alpha}$ могут быть совпадающие (с точностью до знака) корни, то мы введем подпространства $\tilde{V}_{\hat{\alpha}} = \sum_{\hat{\beta} = \pm \hat{\alpha}} V_{\hat{\beta}}$; в частности,

$\tilde{V}_{\hat{\alpha}} = \tilde{V}_{-\hat{\alpha}}$. Ясно, что $\tilde{V}_{\hat{\alpha}} = (\tilde{V}_{\hat{\alpha}} \cap H) + (\tilde{V}_{\hat{\alpha}} \cap B)$. Пусть $P' \subset G$ — картановская подалгебра в G ; тогда, как известно, можно считать, что $P' \supset P$, и если $\{\hat{\theta}_i\}$ — полный набор корней алгебры G (функционалы на P'), то все корни $\hat{\alpha}$ на P являются ограничениями на $P \subset P'$ тех корней $\hat{\theta}_i$, которые отличны от нуля на P , причем кратность корня $\hat{\alpha}$ равна числу корней $\hat{\theta}_i$, ограничениями которых на плоскость P он является. Диаграммой $D(G; H)$ ортогональной инволютивной алгебры Ли $G = H + B$, $\sigma(H) \equiv H$, $\sigma(B) = -B$, соответствующей односвязному симметрическому пространству $V \cong M$, называется множество всех точек $x \in P$ таких, что $\hat{\alpha}(x) \equiv 0 \pmod{1}$ (т. е. является целым числом) для некоторого $\hat{\alpha}$.

Для каждого $\hat{\alpha}$ обозначим через $h_{\hat{\alpha}}$ такой элемент алгебры P , что вектор $(O, h_{\hat{\alpha}})$ ортогонален гиперплоскости $\hat{\alpha}^{-1}(0)$ и, кроме того, $\hat{\alpha}(h_{\hat{\alpha}}) = 2$. Целочисленная решетка, порожденная элементами $\{h_{\hat{\alpha}}\}$, называется решеткой пары (G, H) . Сопряженные с точкой e точки многообразия M полностью описываются в терминах этой диаграммы $D(G; H)$.

Предложение 15.2.1 (см. [55]). Пусть $x \in P \subset B$. Точка $\exp(x) \in V$ сопряжена точке $e \in V$ вдоль геодезической $\gamma^*(t) = \exp(tx)$ тогда и только тогда, когда $x \in D(G; H)$ и $\hat{\alpha}(x) \neq 0$ (т. е. $\hat{\alpha}(x) \equiv 0 \pmod{1}$ и $\hat{\alpha}(x) \neq 0$ для некоторого корня $\hat{\alpha}$). Если $\hat{V}_{\hat{\alpha}} = \sum_{\beta = \pm \hat{\alpha}} V_{\beta}$, то ядро дифференциала отображения $\exp_e: B \rightarrow V$ в точке $x \in P \subset B$, $\exp_e x = e^x$, является линейным подпространством в B , полученным параллельным евклидовым переносом в точку x подпространства $\sum_{\hat{\alpha}} \hat{V}_{\hat{\alpha}} \cap B$, где суммирование выполнено по всем

корням $\hat{\alpha}$ таким, что $\hat{\alpha}(x) \equiv 0 \pmod{1}$, $\hat{\alpha}(x) \neq 0$. Кратность точки e^x как сопряженной точки вдоль геодезической $\exp(tx)$ равна $\dim [C(e^x) \cap \tilde{H}] / [C(x) \cap \tilde{H}]$, где $C(x)$ и $C(e^x)$ — централизаторы элементов x и e^x .

Поскольку в алгебре G фиксирована ортогональная метрика Картана — Киллинга $\langle x, y \rangle$, то все корни $\hat{\alpha}$ на P можно реализовать векторами α в подалгебре P , а именно: рассмотрим вектор $\alpha \in P$ такой, что $\hat{\alpha}(x) \equiv \langle x, \alpha \rangle$ при любом $x \in P$ (вектор α существует и определен однозначно). Тогда имеем $\hat{\alpha}(\alpha) = |\alpha|^2$, где $|\alpha|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle$. Поскольку нас интересует множество первых сопряженных точек $C(e) = M(e)$, то мы рассмотрим только такие векторы $x \in P$, для которых $\hat{\alpha}(x) = 1$ при некотором $\hat{\alpha}$ (тогда $C(e) = \{e^x\}$, где x выбраны указанным выше образом). Концы всех таких векторов $x \in P$ лежат на гиперплоскостях $\Pi_{\alpha'}$, ортогональных векторам α и проходящих через концы векторов $\alpha' = \alpha/|\alpha|^2$, так как $\hat{\alpha}(\alpha') = 1$. Ясно, что $|\alpha'| = 1/|\alpha|$ и $\alpha' = h_{\hat{\alpha}}/2$, т. е. все векторы α' полностью восстанавливаются по решетке пары $(G; H)$. Мы рассматриваем при этом совокупность всех корней $\alpha \in P$, не ограничиваясь только простыми корнями. Вектор α' мы будем называть s -корнем, соответствующим корню α . Отметим, что s -корень α' является настоящим корнем алгебры P тогда и только тогда, когда $|\alpha| = |\alpha'| = 1$. Рассмотрим открытое множество $\tilde{K}_1 \subset P$, состоящее из всех точек, лежащих на лучах, исходящих из O и заканчивающихся на первой встретившейся плоскости $\Pi_{\alpha'}$, где α' пробегает все s -корни алгебры $P \subset B$ (отметим, что ни одна из плоскостей $\Pi_{\alpha'}$ не проходит через точку O). Ясно, что $\tilde{K}_1$ диффеоморфно открытому шару B^1 , где $l = \dim P = \text{ранг } V$. Положим $\tilde{K}_t = t \cdot \tilde{K}_1$ (где t — коэффициент подобия, $0 \leq t \leq 1$), $\tilde{F}_t = \partial \tilde{K}_t$; ясно, что $\tilde{F}_t$ гомеоморфно сфере S^{l-1} . Рассмотрим присоединенное

действие группы $\tilde{H}$ на B ; тогда из каждой точки $x \in K$ вырастает орбита $\tilde{H}(x)$, ортогональная плоскости P в точке x . Положим $\tilde{B}_t = \bigcup_{x \in K_t} \tilde{H}(x)$, $\tilde{S}_t = \bigcup_{x \in F_t} \tilde{H}(x)$; тогда $\tilde{S}_t = \partial \tilde{B}_t$, причем $\tilde{B}_t$

и $\tilde{S}_t$ симметричны относительно начала координат — точки O . Рассмотрим $B_t = \exp_e(\tilde{B}_t)$ и $S_t = \exp_e(\tilde{S}_t)$, $S_t = \partial B_t$, $F_t = \exp_e(\tilde{F}_t)$; $K_t = \exp_e(\tilde{K}_t)$; $\partial K_t = F_t$.

Лемма 15.2.1. Пусть $M^n \cong V$ — компактное односвязное симметрическое пространство. Тогда $S_1 = C(e) = M(e)$, B_t диффеоморфно открытому диску D^n при $0 < t \leq 1$ с центром в точке $e \in M$, а S_t гомеоморфно сфере S^{n-1} при $0 < t < 1$.

Доказательство леммы очевидно.

Множество S_1 не гомеоморфно сфере и совпадает с предпоследним остовом многообразия M (в его разбиении на клетки), $\dim S_1 \leq n - 1$.

Итак, мы построили диффеоморфизм $D^n \rightarrow B_1 = B(e) \subset M$, причем радиусы шара B_1 являются геодезическими в M , т. е. это геодезический диффеоморфизм. Далее, замыкание $B_1 = M$ и $M \setminus \partial B_1 = M \setminus S_1 \cong B_1$, поскольку (см. [8]) дополнение к геометрическому месту разрезов на односвязном многообразии диффеоморфно открытому диску D^n . Итак, раздувая из точки e шар B_t , мы в конце концов исчерпываем все многообразие M с помощью замыкания шара B_1 .

15.3. Вычисление в явном виде коэффициента деформации радиального векторного поля на симметрических пространствах. Рассмотрим односвязное симметрическое пространство M^n , и пусть $e \in M$ — фиксированная точка (при реализации M в группе $\tilde{G}$ точку e можно отождествить с единицей группы $\tilde{G}$). Рассмотрим геодезический диффеоморфизм и соответствующий ему максимальный открытый диск $Q^n(e, R(e))$. Реализуем симметрическое пространство M в группе движений $\tilde{G}$ в виде картановской модели V ; пусть $B \subset G$ и шар $\tilde{B}_t \subset \tilde{B}_1 \subset B$. Впишем в шар $\tilde{B}_t$ (этот шар имеет, конечно, переменный радиус в общем случае) стандартный шар $\tilde{Q}_t$ наибольшего радиуса с центром в точке O . Тогда ясно, что радиус $r = r(t)$ этого шара будет равен $t |\alpha'_0|$, где α_0 — корень (не обязательно простой) наибольшей длины, т. е. s -корень α'_0 имеет наименьшую длину среди всех s -корней алгебры $P \subset V$ (рис. 41). Отметим, что таких s -корней α'_0 может быть и несколько. Спроектируем всю эту конструкцию в многообразие M ; положим $Q_t = \exp_e(\tilde{Q}_t)$. Тогда Q_t — открытый шар в M постоянного радиуса $r = r(t) = t |\alpha'_0|$, заполненный радиусами-геодезическими, исходящими из e , причем ∂Q_t — сфера, гладко вложенная в M при $0 < t < 1$ (иногда вместо Q_t мы будем писать $Q(r)$). В обозначениях предыдущих пунктов имеем $Q(e, R(e)) = Q_1$, $R(e) = |\alpha'_0|$. Положим

$R_t = \partial Q_t = \partial Q(r)$, тогда при $t < 1$ (т. е. при $r < |\alpha'_0|$) сфера R_t является диффеоморфным образом стандартной сферы $\tilde{R}_t = \partial \tilde{Q}_t \subset B$. Для дальнейшего мы фиксируем сферу $\tilde{R}_1 \subset B$ радиуса $|\alpha'_0|$; отметим, что отображение $\exp_e$ не является, вообще говоря, диффеоморфизмом на сфере R_1 .

Рассмотрим произвольную пару (x, Π_x^{k-1}) , где $x \in \partial Q(r)$, $r < |\alpha'_0|$; тогда однозначно определена пара $(x', \Pi_{x'}^{k-1})$, где $x' \in \tilde{Q}(r) \subset B$, $\exp_e(x') = x$, $d(\exp_e)(\Pi_{x'}^{k-1}) = \Pi_x^{k-1}$, а через $d(\exp_e)$

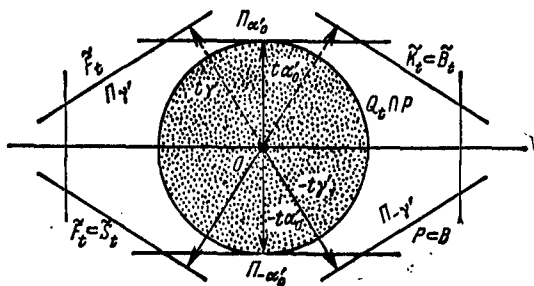


Рис. 41.

обозначен дифференциал отображения $\exp_e$ в точке $x' \in B$. Рассмотрим луч (O, x') в B и совершим параллельный перенос плоскости $\Pi_{x'}^{k-1}$ вдоль луча (O, x') в точку y , в которой продолжение этого луча встречает сферу $\tilde{R}_1 \subset B$. Полученную плоскость мы обозначим через $f_t(\Pi_{x'}^{k-1})$. В силу определения геодезического диффеоморфизма, вектор скорости $\dot{\gamma}$ в точке $x \in \partial Q(r)$ ортогонален $\partial Q(r)$, т. е. $\Pi_x^{k-1} \subset T_x^{n-1}(R_t)$. Но тогда, в силу свойств отображения $\exp$, мы имеем $\Pi_{x'}^{k-1} \subset T_{x'}^{n-1}(\tilde{R}_t)$, т. е. $f_t(\Pi_{x'}^{k-1}) \subset T_y(\tilde{R}_1)$, где через y обозначен конец луча (O, x') , встречающий сферу $\tilde{R}_1 \subset B$. Геодезическую γ , параметризованную длиной дуги r , мы будем обозначать через $\gamma = \gamma(r)$, а ту же геодезическую, но параметризованную с помощью t , $0 \leq t \leq 1$, будем обозначать через $\gamma^* = \gamma^*(t)$. Нас интересует коэффициент

$$\kappa_k(r) = \max_{x \in \partial Q(r)} (\kappa_k(v, x) | \text{grad } f(x) |) = \max_{x \in \partial Q(r)} \kappa_k(v, x),$$

входящий в формулировку всех основных теорем §§ 11—15. Поскольку коэффициент $\kappa_k(r)$ не меняется при автоморфизмах пространства M , сохраняющих точку e , и поскольку (см. выше)

$$\kappa_k(r) = \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}), \quad x = \gamma(r) \quad (r = r_\gamma = t | \gamma |)$$

для некоторой пары (x, Π_x^{k-1}) , то достаточно изучить поведение коэффициента $\kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1})$ только для точек $x' \in P \subset B$; тогда,

в силу выбора шара $Q(|\alpha'_0|)$, и вся геодезическая $\gamma^*(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(r) = x$, целиком принадлежит тору $T = \exp(P)$ и $x = \exp(x') \in T$.

З а м е ч а н и е. $\kappa_k(r) < \infty$, если $r < |\alpha'_0|$, так как обращение $\kappa_k(r_0)$ в бесконечность для некоторого r_0 означало бы возникновение в шаре $Q(|\alpha'_0|)$ сопряженных точек, что невозможно в силу выбора $Q(|\alpha'_0|)$. Напомним, что $M(e) = C(e)$, а потому никакие два геодезических радиуса в $Q(|\alpha'_0|)$ не пересекаются. Напомним также, что $\gamma^*(1) = \exp_e(\tilde{y})$, $\gamma = |(O, \tilde{y})|$, $y \in \tilde{F}_1$. Пусть $x \in T$ — регулярный элемент; тогда касательная плоскость $T_x(R_i)$ допускает следующее ортогональное разложение: $T_x(R_i) = A_x + A'_x + A''_x$, где $A_x = T_x(T \cap R_i)$, $(A'_x + A''_x)$ — касательная плоскость к орбите $\tilde{H}(x)$, вырастающей из точки x при присоединенном действии $\tilde{H}$ на M (орбита $\tilde{H}(x)$ ортогональна тору T в точке x). Опишем плоскости A'_x и A''_x . Орбита $\tilde{H}(x)$ содержит в себе орбиту $\tilde{H}'(x) = C\gamma^*(1)/C(x)$, где $\gamma(r) = x$, $\gamma^*(1) \in F_1 = \partial K_1$, $\gamma(0) = e$, $C(x)$ — централизатор x в группе вращений $\tilde{H}$, $C\gamma^*(1)$ — централизатор $\gamma^*(1)$ в $\tilde{H}$; ясно, что централизатор $C\gamma^*(1)$ совпадает с централизатором (в $\tilde{H}$) всей геодезической $\gamma(r')$, $0 \leq r' \leq |\alpha'_0|$, поскольку шар $Q(|\alpha'_0|)$ не содержит сопряженных с e точек. Отсюда следует в силу компактности симметрического пространства M , что плоскость $T_x\tilde{H}'(x)$ полностью заполнена векторами $W(x)$ якобиевых полей W , исчезающих только в двух точках: e и $\gamma^*(1)$, т. е. $\dim \tilde{H}'(x)$ равна кратности точки $\gamma^*(1)$ по отношению к точке e вдоль $\gamma^*(t)$. Положим $A'_x = T_x\tilde{H}'(x)$, а в качестве A''_x возьмем ортогональное дополнение к A'_x в плоскости $T_x\tilde{H}(x)$. Так как, по предположению, элемент x регулярен, то $\dim T + \dim \tilde{H}(x) = n$. Пусть теперь элемент $x \in T$ и сингулярен, т. е. $\dim T + \dim \tilde{H}(x) < n$. Построим разложение $A_x + A'_x + A''_x$ в этом случае. Положим (как и для регулярного элемента) $A_x = T_x(T \cap R_i)$, $\dim A = l - 1$, рассмотрим орбиту $\tilde{H}(x)$ и орбиту $\tilde{H}'(x) \subset \tilde{H}(x)$ (см. определение выше). Снова положим $A'_x = T_x\tilde{H}'(x) \subset T_x\tilde{H}(x)$ и определим A''_x как ортогональное дополнение к сумме $A_x + A'_x$ в $T_x(R_i)$. Ясно, что в случае сингулярного элемента x $(A'_x + A''_x) \supset T_x\tilde{H}(x)$, однако $A'_x + A''_x$ уже не совпадает с $T_x\tilde{H}(x)$ в отличие от регулярного случая. Отметим, что для произвольного $x \in T$ $\dim A_x = l - 1$, $\dim A'_x = v =$ (кратность сопряженной точки $\gamma^*(1)$ по отношению к точке e вдоль $\gamma^*(t)$). Отметим, что если $\gamma^*(t) = \exp_e(t\alpha')$, то v есть кратность корня α (в алгебраическом смысле), что следует из предложения 15.2.1, т. е. $v = \dim A'_x = \dim \left(\sum_{\hat{\alpha}} \hat{V}_{\hat{\alpha}} \cap B \right)$, где $\hat{\alpha}(\alpha) \equiv 0 \pmod{1}$, $\hat{\alpha}(\alpha) \neq 0$. Положим $A_y = f_t(A_x)$, $A'_y = f_t(A'_x)$, $A''_y = f_t(A''_x)$, где $y \in R_1 \subset B$ и является концом луча (O, x') . Отметим, что разложение $T_y(\tilde{R}_1) = A_y + A'_y + A''_y$ зависит только

от геодезической $\gamma(r) = \gamma^*(t)$, $r = t|\gamma|$, и не зависит от положения точки x на $\gamma^*(t)$; иными словами, это разложение полностью определяется заданием точки $y \in \tilde{R}_1$, поскольку лучи (O, y) и $\gamma^*(t)$ определяют друг друга (рис. 42).

Лемма 15.3.1. Пусть M — компактное односвязное симметрическое пространство, $e \in M^n$, $2 \leq k \leq n-1$. Рассмотрим описанный выше канонический геодезический диффеоморфизм с центром в точке e и рассмотрим геодезическую $\gamma^*(t) = \exp(t\alpha'_0)$, где $0 \leq t \leq 1$, α'_0 — любой из s -корней алгебры $P \subset \mathfrak{B}$ наименьшей длины; $\gamma(r) = \gamma^*(t)$, $r = t|\alpha'_0|$. Фиксируем в каждой точке $x = \gamma(r)$ разложение $T_x(R_t) = A_x + A'_x + A''_x$, и пусть $T_y(\tilde{R}_1) = A_y + A'_y + A''_y$ — соответ-

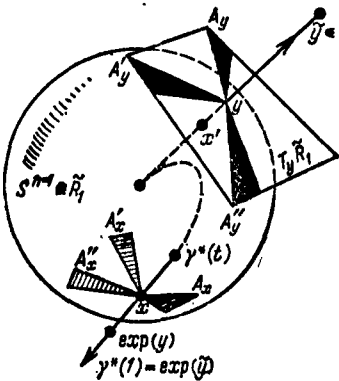


Рис. 42.

ствующее разложение в точке $y \in \tilde{R}_1$, не зависящее от r . В каждой точке $x = \gamma(r)$ рассмотрим плоскость Π_x^{k-1} такую, что плоскость $f_t(\Pi_x^{k-1}) = \Pi_y^{k-1}$ есть одна и та же фиксированная плоскость в $T_y(\tilde{R}_1)$, не зависящая от $r = t|\alpha'_0|$ (т. е. семейство плоскостей $\{\Pi_x^{k-1}\}$ является параллельным семейством вдоль геодезической $\gamma(r)$). В зависимости от значения k плоскость Π_y^{k-1} мы будем выбирать в соответствии со следующими тремя случаями:

- (1) если $2 \leq k \leq v+1$, где v — кратность корня α_0 (соответствующего s -корню α'_0), то в качестве плоскости Π_y^{k-1} возьмем любую $(k-1)$ -мерную плоскость такую, что $\Pi_y^{k-1} \subseteq A'_y$, $\dim A'_y = v$;
- (2) если $v+2 \leq k \leq n-l+1$, где $l = \dim P = \text{ранг}(M)$, то в качестве плоскости Π_y^{k-1} возьмем любую $(k-1)$ -мерную плоскость такую, что $A'_y \subset \Pi_y^{k-1} \subseteq (A'_y + A''_y)$, $\dim(A'_y + A''_y) = n-l$;
- (3) если $n-l+1 < k \leq n-1$ (этот случай возможен только при $l \geq 3$), то в качестве плоскости Π_y^{k-1} возьмем любую $(k-1)$ -мерную плоскость такую, что $A'_y + A''_y \subset \Pi_y^{k-1}$.

Тогда мы утверждаем, что коэффициент $\kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1})$, где $x = \exp(t\alpha'_0)$, а плоскость Π_x^{k-1} выбрана указанным способом, является максимальным коэффициентом $\kappa_k(r)$.

Обратно, пусть $\kappa_k(r)$ — максимальный коэффициент; тогда всегда существует пара (x, Π_x^{k-1}) такая, что $\kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) = \kappa_k(r)$, где $x = \gamma(r)$, γ — геодезический радиус. Оказывается, что $\gamma(r) = \gamma^*(t) = \exp(t\alpha'_0)$, $0 \leq t \leq 1$, где α'_0 — один из s -корней α' наименьшей длины, $r = t|\alpha'_0|$, и можно считать, что плоскость Π_x^{k-1} определяется только s -корнем α'_0 , а плоскость $f_t(\Pi_x^{k-1}) \subset T_y(\tilde{R}_1)$

не зависит от x , т. е. не меняет своего положения при изменении r от 0 до $|\alpha'_0|$. Кроме того, положение плоскости $f_t(\Pi_x^{k-1})$ описывается в соответствии со случаями 1) — 3).

Доказательство. Рассмотрим достаточно узкий k -мерный пучок геодезических $f_{\alpha'_0}$, исходящих из точки e , имеющий своей осью геодезическую $\exp(t\alpha'_0)$, а своим основанием — достаточно малый шар $\Delta_{\alpha'_0}$ размерности $k-1$, расположенный в $\exp_x(\Pi_x^{k-1})$, с центром в точке x , где Π_x^{k-1} выбрана в соответствии с требованиями леммы. Для сравнения возьмем второй пучок геодезических f_d с осью $\exp(td)$, $d \in P \subset B$, $d \in \tilde{F}_1$, $\alpha'_0 \in \tilde{F}_1 \cap \tilde{Q}(|\alpha'_0|)$, имеющий своим основанием малый шар Δ_d такого же радиуса, что и $\Delta_{\alpha'_0}$, и расположенный в точке $\gamma_d(r)$, где $d = \dot{\gamma}_d$ и $\gamma_{\alpha'_0}(r) = x$, $\alpha'_0 = \dot{\gamma}_{\alpha'_0}$. Необходимо сравнить k -мерные объемы $\text{vol}_k(f_{\alpha'_0})$ и $\text{vol}_k(f_d)$ пучков $f_{\alpha'_0}$ и f_d .

Поскольку $M \cong V \subset \tilde{G}$, то $\tilde{G}$ можно вложить в унитарную группу $U(N)$, а $U(N)$ вложить в сферу постоянного радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\Phi$, где $\Phi = 2N^2$ (пространство матриц размера $N \times N$). Тогда все метрические вычисления можно производить в стандартной евклидовой метрике, индуцирующей на $U(N)$ и на $\tilde{G}$ метрику Картана — Киллинга. При этом мы будем использовать то, что внутренние автоморфизмы группы $\tilde{G}$ являются ортогональными вращениями в пространстве $\mathbb{R}^\Phi$.

Среди геодезических направлений пучка f_d (как и в пучке $f_{\alpha'_0}$) естественно выделены три сорта направлений в соответствии с разложением $T_y(\tilde{R}_1) = A_y + A'_y + A''_y$, где y — точка встречи вектора d со сферой $\tilde{R}_1$, $y = y(d)$. Пучок f_d , поднятый в пространство B , превращается в узкий конус лучей $\tilde{f}_d$, идущих из точки O в достаточно малый шар на сфере $\tilde{R}_1$ и далее на $\tilde{S}_1$. Направления, идущие в точки плоскости A_y (достаточно близкие к точке y), являются евклидовыми, т. е. после проекции $\exp$ в M они попадают в тор T ; направления, идущие в точки плоскости A'_y , — это сопряженные (синусоидальные) направления (т. е. после применения $\exp$ они переходят в бесконечно близкие к $\exp(td)$ геодезические, пересекающие ее в конечной точке $\exp(d) = \exp(\tilde{y}_d) \in \partial B_1$). Направления, идущие в точки плоскости A''_y , в том случае, когда элемент $x = \gamma_d(r)$ является регулярным элементом, интерпретируются как орбитальные направления, т. е. после применения $\exp$ они переходят в геодезические, бесконечно близкие к $\exp(td)$ и получающиеся из нее при малых вращениях, сдвигающих точку $\exp(d) \in S_1 = \partial B_1$; иными словами, эти геодезические целиком содержатся в объединении проекций плоскостей, ортогональных плоскости $T_x \tilde{H}'(x)$ в $T_x \tilde{H}(x)$ по всем $x = \gamma_d(r)$, т. е. каждому такому направлению отвечает точка из $\tilde{H}(x)/\tilde{H}'(x)$.

Если же $x = \gamma_d(r)$ сингулярен, то $A'_x \supset T_x[\tilde{H}(x)/\tilde{H}'(x)]$, но не исчерпывается им полностью, поэтому не все направления вдоль A'_y являются орбитальными. Однако поскольку регулярные элементы всюду плотны в T и так как $\kappa_k(r) < \infty$ в $Q(|\alpha'_0|)$, то для наших целей нам достаточно рассматривать только регулярные элементы тора T (отметим, что в силу плотности регулярных элементов любое направление вдоль A'_y сколь угодно точно аппроксимируется орбитальными направлениями). Итак, с метрической точки зрения можно смотреть на все направления вдоль A'_y как на орбитальные направления.

Итак, в шаре Δ_d (как и в шаре $\Delta_{\alpha'_0}$) возникает разложение, согласованное с описанным выше разложением пучка f_d , что мы будем формально записывать так:

$$\Delta_d = s_d + s'_d + s''_d,$$

где

$$s_d = \Delta_d \cap \exp_e(A_y), \quad s'_d = \Delta_d \cap \exp_e(A'_y), \quad s''_d = \Delta_d \cap \exp_e(A''_y).$$

Положим $s(d) = s = \dim(s_d)$, $s'(d) = s' = \dim(s'_d)$, $s''(d) = s'' = \dim(s''_d)$; тогда $k-1 = s + s' + s''$. Рассмотрим первый случай леммы. Поскольку в пучке $f_{\alpha'_0}$ имеем $\tilde{\Pi}_y^{k-1} \subset A'_y$, то все траектории пучка $f_{\alpha'_0}$ сопряженные и $(k-1) = s'(\alpha'_0)$, $s = s'' = 0$, $f(s'_{\alpha'_0}) = f_{\alpha'_0}$. Рассмотрим произвольный пучок f_d , где $d \neq \alpha'_0$, и предположим, что $|d| > |\alpha'_0|$ (напомним, что $d \in \tilde{F}_1$); пусть $\Delta_d = s_d + s'_d + s''_d$ — каноническое разложение (см. выше). Поскольку $\text{vol}_{k-1}(\Delta_d) = \text{vol}_{k-1}(\Delta_{\alpha'_0})$ (в силу выбора дисков), то $\text{vol}_{s+1}f(s_d) < < \text{vol}_{s+1}f(s_1, \alpha'_0)$, где $k-1 = s'(\alpha'_0) = s_1 + s_2 + s_3$, $s_1 = s = s(d)$, $s_2 = s' = s'(d)$, $s_3 = s''(d)$, т. е. $\Delta_{\alpha'_0}$ разложен в сумму трех сопряженных пучков, соответствующих числам s_1, s_2, s_3 . Полученное выше неравенство следует из евклидовости пучка $f(s_d)$. Поскольку $|d| > |\alpha'_0|$, то $\text{vol}_{s'+1}f(s'_d) < \text{vol}_{s'+1}f(s_2, \alpha'_0)$, так как сопряженная точка $\exp(d)$ удалена от точки e дальше, чем сопряженная точка $\exp(\alpha'_0)$. Аналогично проверяется неравенство $\text{vol}_{s''+1}f(s''_d) < \text{vol}_{s''+1}f(s_3, \alpha'_0)$. Итак, в случае, когда $|d| > |\alpha'_0|$, мы имеем $\text{vol}_k f_d < \text{vol}_k f_{\alpha'_0}$, что и требовалось. Пусть теперь $|d| = |\alpha'_0|$; тогда d является s -корнем и, в силу транзитивности группы Вейля на корнях одинаковой длины, мы можем положить $d = \alpha'_0$. В этом случае $\text{vol}_{s'+1}f(s'_d) = \text{vol}_{s'+1}f(s_2, \alpha'_0)$, хотя два подпучка $f(s'_d)$ и $f(s_2, \alpha'_0)$ (имеющие теперь общую ось — $\exp(t\alpha'_0)$) могут и не совпадать. Однако для остальных двух пучков (если хотя бы один из них непуст) справедливы неравенства $\text{vol}_{s+1}f(s_d) < < \text{vol}_{s+1}f(s_1, \alpha'_0)$ (если $s_1 \neq 0$) и $\text{vol}_{s''+1}f(s''_d) < \text{vol}_{s''+1}f(s_3, \alpha'_0)$ (если $s_3 \neq 0$), т. е. если одно из чисел s_1 или s_3 отлично от нуля, то $\text{vol}_k f_d < \text{vol}_k f_{\alpha'_0}$. Если же $s_1 = s_3 = 0$, то весь пучок f_d заполнен

сопряженными направлениями, а потому распространяется вдоль зоны действия максимального коэффициента.

Прежде чем перейти к случаю (2), фиксируем вспомогательные утверждения. Рассмотрим на сфере S^n радиуса R n -мерный диск радиуса $R\varphi_0$, где φ_0 — угол сферической зоны. Тогда объем этого шара равен $V_n|_{\varphi_0} = R^n \alpha(n-1) \int_0^{\varphi_0} \sin^{n-1}(\varphi) d\varphi$, где $\alpha(n-1)$ есть $(n-1)$ -мерный объем единичной сферы S^{n-1} . Так, например, если $n=2$, то $V_2|_{\varphi_0} = 4\pi R^2 \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)$ и коэффициент $\kappa_2(r)$ равен $R \operatorname{tg}(r/2R)$.

Рассмотрим произвольный вектор $d \in F_1$, и пусть вдоль него представлены все три вида двумерных коэффициентов: евклидов, сопряженный и орбитальный; обозначим их через $\kappa_2^e(r, \Pi)$, $\kappa_2^s(r, \Pi)$, $\kappa_2^0(r, \Pi)$ соответственно, где Π — прямая, ортогональная вектору d и определяющая наклон двумерной площадки. Тогда легко видеть, что при $r \leq |\alpha'_0|$ (напомним, что $|\alpha'_0| \leq |d|$) выполнены строгие неравенства $\kappa_2^e(r, \Pi) < \kappa_2^0(r, \Pi) < \kappa_2^s(r, \Pi)$. Итак, рассмотрим случай (2). Здесь в пучке f_d к сопряженным направлениям (число которых равно v , т. е. кратности корня α_0) добавляются еще и орбитальные направления. Предположим сначала, что $|d| > |\alpha'_0|$. Пусть $k-1 = s + s' + s''$ для f_d ; положим $s_1 = s$, $s_2 = s'$, $s_3 = s''$; пусть $k-1 = s(\alpha'_0) + s'(\alpha'_0) + s''(\alpha'_0)$ для $f_{\alpha'_0}$; тогда $s(\alpha'_0) = 0$, $s'(\alpha'_0) = v$, т. е. $k-1 = v + s''(\alpha'_0)$ для $f_{\alpha'_0}$. Возможны следующие два случая: а) $s'(d) \leq s'(\alpha'_0)$; б) $s'(d) > s'(\alpha'_0)$. Рассмотрим случай а). Выделим в пучке f_d подпучок $\tilde{f}_d$ такой, что $\tilde{f}_d \supset f(s'_d)$ и $\dim \tilde{f}_d = \dim f(s'_d) = s'(\alpha'_0) = v$. Тогда, в силу случая (1) и так как $|d| > |\alpha'_0|$, мы имеем $\operatorname{vol}_{v+1} \tilde{f}_d < \operatorname{vol}_{v+1} f(s'_d)$. Так как $s'(d) \leq v$, то факторпучок $f_d/\tilde{f}_d$ не содержит сопряженных направлений, а факторпучок $f_{\alpha'_0}/f(s'_d)$ состоит только из орбитальных траекторий. Сравним между собой эти два пучка. Заменим в пучке $f_d/\tilde{f}_d$ все евклидовы направления (если они вообще имеются) орбитальными направлениями; тем самым мы можем только увеличить объем пучка $f_d/\tilde{f}_d$. Итак, теперь на каждое орбитальное направление в пучке $f_{\alpha'_0}/f(s'_d)$ приходится в точности одно орбитальное направление в новом пучке $[f_d/\tilde{f}_d]'$. Поскольку $|d| > |\alpha'_0|$, то кривизна пучка $f_{\alpha'_0}/f(s'_d)$ больше, чем кривизна пучка $[f_d/\tilde{f}_d]'$, откуда следует, что $\operatorname{vol}_{k-v-1} f_{\alpha'_0}/f(s'_d) > \operatorname{vol}_{k-v-1} [f_d/\tilde{f}_d]' \geq \operatorname{vol}_{k-v-1} f_d/\tilde{f}_d$. Поэтому окончательно получаем $\operatorname{vol}_k f_{\alpha'_0} > \operatorname{vol}_k f_d$.

Рассмотрим случай б), т. е. $s'(d) > s'(\alpha'_0)$. Существует такая открытая окрестность U s -корня α'_0 , что для любого вектора d , принадлежащего U и заканчивающегося на $\tilde{F}_1$, выполнено неравенство $s'(d) \leq s'(\alpha'_0)$; поэтому, если $s'(d) > s'(\alpha'_0)$, то $d \notin U$. Это замечание основано на том, что кратность $s'(d)$ определяется

гиперплоскостями, с которыми встречается вектор d , а если d близок к α'_0 , то он встречается с той же плоскостью, что и α'_0 . Построим два подпучка: $f' \subset f_{\alpha'_0}$, $\dim f' = s'(\alpha'_0) - 1$, $f' \subset f(s_{\alpha'_0})$, и $\tilde{f}_d \subset f_d$, где $\tilde{f}_d \subset f(s'_d)$ и $\dim \tilde{f}_d = \dim f'$, т. е. оба пучка f' и $\tilde{f}_d$ составлены из сопряженных направлений. Поскольку $|d| > |\alpha'_0|$, то в силу пункта (1) имеем $\text{vol}_{s'(\alpha'_0)} f' > \text{vol}_{s'(\alpha'_0)} \tilde{f}_d$. Увеличим объем пучка f_d , заменив в нем все евклидовы и орбитальные траектории сопряженными; полученный пучок обозначим через $\tilde{f}'_d$. В пучке $\tilde{f}'_d/f'$ осталась ровно одна сопряженная траектория γ_0 , а остальные — орбитальные. Сравним пучки $f_{\alpha'_0}/f'$ и $\tilde{f}'_d/\tilde{f}_d$, где $\tilde{f}'_d/\tilde{f}_d$ состоит только из сопряженных направлений. Добавим к траектории $\gamma_0 \subset f_{\alpha'_0}/f'$ (образующей вместе с траекторией $\exp(t\alpha'_0)$ двумерную площадку σ_2) еще одно орбитальное направление из пучка $f_{\alpha'_0}/f'$; получим некоторый трехмерный пучок ω_3 . В пучке $\tilde{f}'_d$ мы рассмотрим также трехмерный пучок τ_3 , состоящий из двух сопряженных направлений, лежащих в пучке $\tilde{f}'_d/\tilde{f}_d$, и оси пучка $\exp(td) \subset \tilde{f}_d$. Непосредственный подсчет показывает, что $\text{vol}_3(\tau_3) < \text{vol}_3(\omega_3)$ (напомним, что $|d| > |\alpha'_0|$). Это рассуждение открывает путь к индукции по числу орбитальных направлений в пучке $\tilde{f}'_d$. Оказывается, что коэффициент вдоль пучка ω_i (составленного из пучка σ_2 и $i-2$ орбитальных направлений в пучке $f_{\alpha'_0}$), $i = \dim \omega_i$, содержащего одно сопряженное направление, больше, чем коэффициент пучка τ_i , где $\tau_i \subset \tilde{f}'_d$, τ_i состоит из $i-1$ сопряженных направлений, содержащихся в $\tilde{f}'_d/\tilde{f}_d$, и траектории $\exp(td) \subset \tilde{f}_d$. В этом легко убедиться прямым вычислением.

Поскольку пучок $f_{\alpha'_0}/f' \cup (\gamma_0)$ уже состоит только из орбитальных направлений, то, добавляя по одному орбитальному направлению, мы в конце концов исчерпываем весь пучок $f_{\alpha'_0}$, что и завершает доказательство. Итак, случай $|d| > |\alpha'_0|$ разобран полностью.

Пусть теперь в ситуации (2) мы имеем $|d| = |\alpha'_0|$. Используя группу Вейля, можно считать, что $d = \alpha'_0$. Тогда всегда выполнено неравенство $s'(d) \leq s'(\alpha'_0)$, так как по условию пункта (2) $s'(\alpha'_0) = v$, а v — максимальная размерность пространства якобиевых полей вдоль $\exp(t\alpha'_0)$. Применим схему рассуждений, описанную выше; выделим в пучке f_d подпучок $\tilde{f}_d$, $\dim \tilde{f}_d = v+1 = s'(\alpha'_0) + 1$, $\tilde{f}_d \supseteq f(s'_d)$. В силу пункта (1), имеем $\text{vol}_{v+1}(\tilde{f}_d) < \text{vol}_{v+1}[f(s_{\alpha'_0})]$. Далее, переход от $\tilde{f}_d$ к пучку f_d осуществляется путем добавления орбитальных и евклидовых направлений. Поскольку на каждое евклидово направление в $\tilde{f}_d/\tilde{f}_d$ приходится орбитальное направление в $\tilde{f}_d/f(s_{\alpha'_0})$, то добавление евклидовых направлений к пучку $\tilde{f}_d$ продолжает увеличивать уже имеющуюся разницу в коэффициентах. Когда все евклидовы направления будут исчерпаны, мы будем добавлять орбитальные направления (в обоих пучках), что сохраняет уже накопившуюся разницу в коэффициентах, поскольку

$d = \alpha'_0$. Если же в пучке f_d вообще не было ни одного евклидова направления, то при $s'(d) < s'(\alpha'_0)$ имеем $\text{vol}_k(f_d) < \text{vol}_k(f_{\alpha'_0})$. Если $s'(d) = s'(\alpha'_0)$, тогда пучок f_d совпадает с максимальным пучком, описанным в условии леммы (хотя не обязательно совпадает с $f_{\alpha'_0}$). Переходим к случаю (3).

Ясно, что для любого $d \in \tilde{F}_1$ пучок f_d не может содержать больше чем $n-l$ орбитальных и сопряженных направлений; поэтому, если $n-l+1 < k \leq n-1$, то $s'(d) + s''(d) \leq n-l = s'(\alpha'_0) + s''(\alpha'_0)$. Рассмотрим два подпучка: $\tau = f(s_{\alpha'_0} \cup s_{\alpha'_0}^*) \subset f_{\alpha'_0}$, $\dim(\tau) = s'(\alpha'_0) + s''(\alpha'_0)$, и $\tilde{f}_d = f(s_d \cup s_d^* \cup \xi)$, где $\dim \tilde{f}_d = s'(d) + s''(d) = s'(d) + s''(d) + \dim \xi$. Тогда, в силу пункта (2), имеем $\text{vol}_{n-l+1}(\tau) > \text{vol}_{n-l+1} \tilde{f}_d$, если хотя бы одно из неравенств $s'(d) < s'(\alpha'_0)$, $s''(d) < s''(\alpha'_0)$ имеет место, т. е. если $\dim \xi > 0$. Поскольку оба факторпучка $f_{\alpha'_0}/\tau$ и $f_d/\tilde{f}_d$ состоят уже только из евклидовых направлений, то строгое неравенство сохранится и при переходе от τ и $\tilde{f}_d$ к $f_{\alpha'_0}$ и f_d соответственно, откуда $\text{vol}_k(f_{\alpha'_0}) > \text{vol}_k(f_d)$, что и требовалось. Если же $\dim \xi = 0$, то f_d — максимальный пучок (потому что в таком случае $s'(d) = s'(\alpha'_0) = v$, $s''(d) = s''(\alpha'_0) = n-l-v$).

В заключение отметим, что при $r \rightarrow |\alpha'_0| \kappa_k(r) \rightarrow \infty$ (при любом k), а если $\kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1})$ не максимален, то при $r > |\alpha'_0|$ имеем $\kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) < \infty$. Лемма доказана.

15.4. Явная формула для геодезического дефекта симметрического пространства. Итак, если M — компактное симметрическое пространство (односвязное), то $\Omega_k^0(e) = \omega_k |\alpha'_0|^k$, где $|\alpha'_0| = |\alpha_0|^{-1}$, α_0 есть любой из корней максимальной длины в M , причем явное аналитическое выражение для коэффициента ω_k можно получить из леммы 15.3.1. (Это выражение нам не потребуется.) Отметим, что характер изменения числа ω_k с ростом размерности k претерпевает два существенных излома: при значениях $k = v+1$ и $k = n-l+1$ (см. лемму 15.3.1).

Рассмотрим всевозможные движения $g \in \tilde{G}$ симметрического пространства M ; тогда с помощью подходящего g можно перевести точку $e \in M$ в любую точку $P \in M$. Поскольку движения g сохраняют метрику, то $\Omega_k^0(e) = \Omega_k^0(P)$, где $P = g(e)$; это общее значение, очевидно, совпадает с Ω_k^0 , т. е. с k -мерным геодезическим дефектом M .

Предложение 15.4.1. Пусть M^n — компактное риманово однородное пространство (не обязательно симметрическое), снабженное инвариантной метрикой, и пусть Ω_k^0 — k -мерный геодезический дефект M . Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(L')$, $L' \neq 0$, есть глобально минимальная поверхность, $\dim X_0 = k$. Предположим, что $\text{vol}_k(X_0) = \Omega_k^0$. Тогда поверхность X_0 является компактным замкнутым вполне геодезическим подмногообразием в M .

Доказательство. Пусть $P \in X_0$ — произвольная точка; тогда $\Omega_k^0 = \Omega_k^0(P)$, где $g(e) = P$, и в силу предложения 14.2.2

имеем, что существует окрестность $U = U(P)$ такая, что $U = \exp_P T_P(X_0)$ и U диффеоморфна открытому диску D^k . Поскольку это свойство выполнено для каждой точки $P \in X_0$ и интегральные траектории поля v являются геодезическими, исходящими из точки P , то X_0 — вполне геодезическое подмногообразие, что и требовалось.

15.5. Глобально минимальные поверхности наименьшего объема ($\text{vol}_k X_0 = \Omega_k^0$) в симметрических пространствах являются симметрическими пространствами ранга 1. Пока мы знаем о минимальных поверхностях X_0 со свойством $\text{vol}_k X_0 = \Omega_k^0$ (если такие поверхности вообще существуют) только то, что они — вполне геодезические подмногообразия в M (см. предложение 15.4.1). Теорема 15.5.1 дает полный ответ на поставленный выше вопрос в том случае, когда M — симметрическое компактное пространство.

Определение 15.5.1. Пусть $V^k \subset M^n$ — вполне геодезическое подмногообразие, $Q(e, R(e)) = Q(e)$ — максимальный открытый геодезический шар в M с центром в точке e радиуса $R(e)$. Пусть $x \in V^k \cap Q(e)$ и $\gamma(r)$ — геодезическая из точки e в точку x . Мы скажем, что подмногообразие V^k распространяется вдоль максимального коэффициента $\kappa_k(e, r)$ многообразия M , если $\kappa_k(e, r) \equiv \kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1})$, где x — произвольная точка из $V^k \cap Q(e)$, $\Pi_x^{k-1} \subset T_x(V^k)$ и плоскость Π_x^{k-1} ортогональна вектору скорости $\dot{\gamma} \in T_x(V^k)$ (рис. 43).

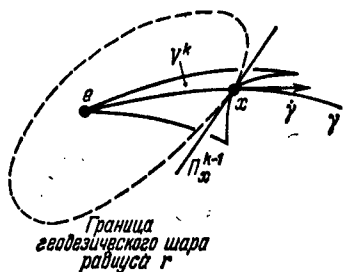


Рис. 43.

Теорема 15.5.1. Пусть M^n — компактное односвязное симметрическое пространство и $X_0 \subset M$ — k -мерная минимальная поверхность реализующего типа, т. е. $X_0 \in \mathcal{O}(L')$, $L' \neq 0$, $3 \leq k \leq n-1$. Предположим, что $\text{vol}_k(X_0) = \Omega_k^0(M)$, где Ω_k^0 — геодезический дефект многообразия M . Тогда минимальная поверхность X_0 является односвязным компактным вполне геодезическим подмногообразием в M (а потому X_0 является симметрическим пространством) ранга 1, т. е. многообразие X_0 диффеоморфно одному из следующих многообразий: 1) S^k ; 2) $\mathbb{CP}^{k/2}$; 3) $\mathbb{QP}^{k/4}$; 4) $F_4/\text{Spin}(9)$. Кроме того, вложение $X_0 \rightarrow M$ таково, что единственный корень α_0 симметрического пространства X_0 совпадает (после применения подходящего движения подмногообразия X_0 в M) с одним из корней наибольшей длины (т. е. с корнем, соответствующим некоторому минимальному s -корню) симметрического пространства M и многообразие X_0 целиком распространяется вдоль максимального коэффициента $\kappa_k(e, r)$ (в соответствии с описанием этой зоны в лемме 15.3.1). Обратно, пусть $X_0 \subset M$ — k -мерное односвязное вполне геодезическое подмногообразие ранга 1, единственный корень α_0

которого совпадает с некоторым корнем α максимальной длины в пространстве M , и пусть, кроме того, подмногообразие X_0 распространяется вдоль максимального коэффициента $\kappa_k(e, r)$ (в соответствии с описанием леммы 15.3.1). Предположим, далее, что $X_0 \in \mathcal{O}(L')$ (т. е. реализует некоторую нетривиальную подгруппу или подмножество в $H_k^{(k)}(M)$). Тогда X_0 — глобально минимальная поверхность в M и, кроме того, $\text{vol}_k(X_0) = \Omega_k(M) = \Omega_k^0(M)$.

Доказательство. Пусть $e \in X_0 \subset M$ — фиксированная точка. Тогда, в силу предложения 15.4.1, поверхность X_0 — вполне геодезическое подмногообразие в M . Из равенства $\text{vol}_k(X_0) = \Omega_k^0$ следует

$$\begin{aligned}\Omega_k^0 &= \text{vol}_k X_0 \geq \Psi(X_0, f, R(e)) \geq \\ &\geq \Psi_k(e, X_0) \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a^k}{q_e(a)} \right) \cdot \gamma_k q_e(R(e)) = \\ &= \Psi_k(e, X_0) \cdot \Omega_k^0(x_0) = \Psi_k(e, X_0) \Omega_k^0 \geq \Omega_k^0.\end{aligned}$$

Отсюда $\Psi_k(e, X_0) = 1$, $\frac{\Psi(X_0, f, R(e))}{q_e(R(e))} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Psi(X_0, f, a)}{q_e(a)}$, т. е. функция $\frac{\Psi(X_0, f, r)}{q_e(r)}$ постоянна. Значит, $\left(\frac{\Psi}{q}\right)' = 0$, $\Psi = \frac{q}{q'} \Psi'$, но поскольку $\frac{q}{q'} = \max_{x \in \{f=r\}} \kappa_k(v, x) = \kappa_k(e, r)$, то $\Psi(r) = \kappa_k(e, r) \Psi'(r)$.

Так как для геодезического диффеоморфизма вектор скорости $\dot{\gamma}$ ортогонален фронту волны $\partial Q(r)$, то отсюда следует, что X_0 распространяется вдоль максимального коэффициента $\kappa_k(e, r)$, ибо в противном случае мы имели бы при некотором r_0 строгое неравенство $\Psi(r_0) < \kappa_k(e, r_0) \Psi'(r_0)$. Из леммы 15.3.1 следует, что для любой геодезической $\gamma \subset X_0$, исходящей из e , $\kappa_k(v, x, \Pi_x^{k-1}) \equiv \kappa_k(e, r)$, $x = \gamma(r)$, $\Pi_x^{k-1} \subset T_x(X_0)$, а плоскость $f_t(\Pi_x^{k-1})$ не зависит от x (ее положение описано в лемме 15.3.1). Из этой же леммы следует, что каждая такая геодезическая $\gamma \subset X_0$ может быть совмещена посредством подходящего вращения с геодезической $\exp(t\alpha'_0)$, где α'_0 — некоторый минимальный s -корень в M . Так как всех минимальных s -корней α'_0 конечное число и все они изолированы, то все геодезические $\gamma \subset X_0$, проходящие через $e \in X_0$, можно совместить с одной и той же геодезической $\exp(t\alpha'_0) \subset X_0$. Отсюда следует, что группа движений пространства X_0 транзитивна на векторах плоскости $T_e(X_0)$, а потому ранг X_0 равен 1. Теперь докажем односвязность X_0 . Действительно, допустим, что $\pi_1(X_0) \neq 0$. Рассмотрим шар $Q[R(e)]$; тогда, так как $\text{vol}_k(X_0) = \Omega_k^0$, то $X_0 \subset \bar{Q}[R(e)]$. Пусть $\gamma(r)$ — геодезическая в X_0 , идущая из e на $\partial Q[R(e)] = R_1$. Поскольку $k > 2$, то универсальное накрытие $\tilde{X}_0$ над многообразием X_0 диффеоморфно одному из следующих многообразий: 1) S^k ; 2) $\mathbb{C}P^{k/2}$; 3) $\mathbb{Q}P^{k/4}$; 4) $F_4/\text{Spin}(9)$. Отсюда и из того, что $\pi_1(X_0) \neq 0$, следует, что существует такая геодезическая $\gamma_0 \subset X_0$, что первой сопряженной точкой на ней

будет исходная точка e (после полного оборота по замкнутой геодезической γ_0). Напомним, что X_0 получается из $\tilde{X}_0$ факторизацией по некоторой конечной подгруппе группы движений. Пусть $M(e, X_0)$ — множество точек минимума для X_0 , тогда $M(e, X_0) = M(e, M) \cap \bar{Q}(|\alpha'_0|) = M(e, X_0) \cap R_1$. Далее, так как M односвязно, то $M(e, M) = C(e, M)$, т. е. получаем, что каждая точка $\varphi \in M(e, X_0)$ обязана быть сопряженной точкой по отношению к e . Действительно, если какая-либо точка не сопряжена с e , то подмногообразие X_0 не может обслуживаться максимальным коэффициентом $\kappa_*(e, r)$ (напомним, что в силу леммы 15.3.1 пучок $f_{\alpha'_0}$, соответствующий $\kappa_*(e, r)$, должен содержать по крайней мере одно сопряженное направление). Это противоречит существованию геодезической γ_0 , первой сопряженной точкой вдоль которой является сама точка e . Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Обратно, пусть $X_0 \subset M$ — вполне геодезическое подмногообразие ранга 1, вложенное в M в соответствии с требованиями теоремы. Повторяя все указанные выше рассуждения в обратном порядке и используя схему доказательства теоремы 14.2.1, получаем цепочку точных равенств $\Psi(X_0, f, |\alpha'_0|) = \text{vol}_k X_0 = \Omega_k^0$, так как $X_0 \subset \bar{Q}(|\alpha'_0|)$. Поскольку $X_0 \in \mathcal{O}(L')$, то X_0 — глобально минимальная поверхность. Теорема доказана.

Мы использовали односвязность X_0 , сославшись на то, что X_0 полностью обслуживается максимальным коэффициентом, что (как это следует из первой части теоремы) невозможно для неодносвязного симметрического пространства X_0 . Отметим, что теорема 15.5.1 сводит задачу о нахождении минимальных поверхностей со свойством $\text{vol}_k(X_0) = \Omega_k^0$ (в случае симметрического пространства M) к изучению вполне геодезических подмногообразий ранга 1, что является уже алгебраической и довольно просто решаемой задачей.

З а м е ч а н и е. Пусть M^n — односвязное компактное симметрическое пространство ранга 1 и $\xi > 0$ — наибольшая размерность односвязного компактного вполне геодезического подмногообразия ранга 1 в M , корень α_0 которого совпадает с некоторым корнем максимальной длины в M . Тогда из теоремы 15.5.1 следует, что $\xi \leq n - l + 1$ и что для любой минимальной поверхности $X_0^* \in \mathcal{O}(L')$, где $\xi + 1 \leq k \leq n - 1$, выполнено строгое неравенство $\text{vol}_k(X_0) > \Omega_k^0(M)$.

15.6. Доказательство теоремы классификации поверхностей наименьшего объема в некоторых классических симметрических пространствах. Переходим к доказательству теорем 15.1.1 и 15.1.2. Начнем с теоремы 15.1.1. Последнее утверждение в этой теореме нужно понимать так: если $L'_k = \{\delta\}$ и $\tilde{L}'_k = \{\rho\sigma\}$ суть две подгруппы, порожденные элементами σ и $\rho\sigma$ соответственно, то минимальный компакт $\tilde{X}_0$, реализующий $\tilde{L}'_k$, будет отличаться от минимальной

поверхности X_0 , реализующей L'_k , в том и только в том случае, когда $\text{vol}_k(\tilde{X}_0) < \text{vol}_k(X_0)$, поскольку в противном случае поверхность X_0 обслуживает (в смысле минимальности) не только подгруппу L'_k , но и подгруппу $\tilde{L}'_k$. Из теоремы 15.1.1, в частности, следует, что в симметрических пространствах ранга 1 увеличение кратности класса (ко)гомологий по крайней мере не уменьшает объем носителя.

Доказательство теоремы 15.1.1. Рассмотрим случай, когда M односвязно. В случае 1) $M^{2n} = \mathbb{C}P^n$, $v = v(\alpha_0) = 1$ (v — кратность корня α_0), а потому $\kappa_k(e, r)$ соответствует пучку $f\alpha'_0$, содержащему ровно одно сопряженное направление и $k-2$ орби-

тальных. Поскольку $X_0^k = \mathbb{C}P^{k/2}$, то $\dim X_0^k - \dim(\mathbb{C}P^{k/2-1}) = 2$, а потому X_0 распространяется вдоль максимального коэффициента (см. определение 15.5.1), отсюда и из теоремы 15.5.1 следует утверждение (1) теоремы 15.1.1. В случае (2) $M^{4n} = \mathbb{Q}P^n$, $v =$

$= v(\alpha_0) = 3$ и $\dim(X_0^k) - \dim(\mathbb{Q}P^{k/4-1}) = 4$, откуда, как и в случае (1), следует требуемое утверждение. В случае (3) $v(\alpha_0) = 7$, $\dim(X_0^k) - 0 = 8$, что и требуется для применения теоремы 15.5.1. В случае (4) $M^n = \mathbb{R}P^n$ и $\pi_1(M^n) \neq 0$, поэтому формально нельзя применять разработанную выше технику, однако в данном случае имеем $M(e, M) = \mathbb{R}P^{n-1}$ (хотя $M(e) \neq C(e) = e$), и можно положить $Q[R(e)] = \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1}$, а затем повторить все рассуждения из доказательства теоремы 15.5.1 с $v(\alpha_0) = 0$. Далее поступаем,

как и в случаях (1) — (3). Обратно, пусть $\tilde{X}_0^k \subset M^n$ — произвольная минимальная поверхность из реализующего класса $\mathcal{O}$. Тогда в этой же размерности k обязательно имеется минимальная поверхность X_0^k , совпадающая с одним из элементов указанной выше фильтрации. Так как X_0^k реализует всю группу $H_k^{(k)}(M)$, то $\text{vol}_k(\tilde{X}_0^k) \geq \text{vol}_k(X_0^k)$. Поскольку в силу теоремы 14.2.1 $\text{vol}_k(\tilde{X}_0^k) \geq \geq \Omega_k(M) \geq \Omega_k^0(M)$, то $\text{vol}_k(X_0^k) = \text{vol}_k(\tilde{X}_0^k) = \Omega_k^0$, а тогда, в силу теоремы 15.5.1, $\tilde{X}_0^k$ должен получаться из подмногообразия X_0 некоторым движением многообразия M . Теорема 15.1.1 доказана.

Итак, если ранг $M = 1$, то числа Ω_k^0 всегда достигаются и полностью описывают минимальные поверхности в M .

Рассмотрим более сложную ситуацию теоремы 15.1.2. Пусть $M^n = \text{SU}(p+q)/S[U(p) \times U(q)]$ (где $p \geq q \geq 1$) — односвязное комплексное многообразие Грассмана $G_{p+q, q}^{\mathbb{C}}$. При $q = 1$ имеем $M^n = \mathbb{C}P^{n/2}$. Многообразие M^n моделируется в группе $\text{SU}(p+q)$ в виде картановской модели $V \cong M^n = \exp B$, где $B = \{b\}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ -\bar{Z}^T & 0 \end{pmatrix}$, Z — комплексная матрица с q строками и p столбцами.

Если через E_{ij} обозначить стандартный базис в алгебре $\mathfrak{su}(p+q)$, то максимальное абелево подпространство в плоскости B определяется

так: $\sum_{i=1}^q \mathbb{R}(E_{i, q+i} - E_{q+i, i})$ ($\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел). Положим $\tilde{\alpha} \in P$, $\tilde{\alpha} = 2\pi(E_{1, q+1} - E_{q+1, 1})$ и выделим в B плоскость

$$C_s = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} 0_q \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \text{штрихованная} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{штрихованная} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0_p \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} d \\ \\ -\tilde{d}^T \end{array}$$

где d — p -вектор следующего вида: $d = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s, 0, \dots, 0)$; здесь число s фиксировано, $1 \leq s \leq p$, а через 0_q и 0_p обозначены две нулевые квадратные матрицы порядков q и p соответственно. Тогда $\tilde{\alpha} \in C_s$ и $\exp(C_s) \subset \exp B = G_{p+q, q}^C$ является вполне геодезическим подмногообразием в $G_{p+q, q}^C$, диффеоморфным $\mathbb{CP}^s$. Это подмногообразие (после подходящего движения на M^n) может быть записано как $\mathbb{CP}^s = \{l\}$, где $l = A \oplus I_{p+q-s-1}$, I_α — единичная матрица порядка α , $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq s+1$; $a_{11} = -1 + 2|z_0|^2$; $a_{1, r+1} = -\bar{a}_{r+1, 1} = 2z_0 \cdot z_r$, $1 \leq r \leq s$; $a_{ii} = 1 - 2|z_{i-1}|^2$, $2 \leq i \leq s+1$; $a_{ij} = \bar{a}_{ji} = 2z_{i-1}\bar{z}_{j-1}$, $2 \leq i \leq s+1$, $2 \leq j \leq s+1$, $i \neq j$; $\sum_{i=0}^s |z_i|^2 = 1$.

Доказательство 1-го пункта теоремы 15.1.2. Рассмотрим $\mathbb{CP}^s \subset M$, и пусть $\gamma^*(t) = \exp(t\tilde{\alpha})$ — геодезическая в $\mathbb{CP}^s$; тогда первая сопряженная точка на $\gamma^*(t)$ возникает при $t = 1/2$. Положим $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}/2$; тогда орбита точки $\exp(\tilde{\alpha}')$ в $\exp(C_s) = \mathbb{CP}^s$ является подмногообразием, диффеоморфным $\mathbb{CP}^{s-1}$ (середины замкнутых геодезических $\gamma^*(t)$, $0 \leq t \leq 1$), т. е. вектор $\tilde{\alpha}'$ является единственным s -корнем пространства $\mathbb{CP}^s$. Итак, структура пучка $f_{\tilde{\alpha}'}$ в $\mathbb{CP}^s$ такова: пучок $f_{\tilde{\alpha}'}$ содержит одно сопряженное направление и $2s-2$ орбитальных. Ясно, что $\partial Q(|\alpha'_0|) \cap \mathbb{CP}^s = \mathbb{CP}^{s-1}$, где $|\alpha'_0|$ — длина минимального s -корня в M . Путем соответствующего поворота подмногообразия $\mathbb{CP}^s$ в M можно добиться того, чтобы вектор $\tilde{\alpha}'$ перешел в вектор $\alpha' = \pi i(E_{11} - E_{22})$. Рассмотрим в алгебре Ли $\mathfrak{su}(p+q)$ скалярное произведение $\langle X, Y \rangle = -(2\pi)^{-2} \operatorname{Re} \operatorname{Spur}(X \cdot Y)$. Хорошо известно, что корни алгебры $\mathfrak{su}(p+q)$ (в каноническом базисе) имеют вид $\{\lambda_i \pm \lambda_j\}$; $i \neq j$. В канонических координатах на торе T^{p+q-1} в $\mathfrak{su}(p+q)$ мы имеем $\alpha_{ij} = 2\pi i(E_{ii} - E_{jj})$, $i \neq j$, причем простыми корнями являются векторы $\alpha_{i, i+1}$. Так как $|\alpha_{ij}|^2 = 2$, то соответствующие s -корни имеют вид $\alpha'_{ij} = \pi i(E_{ii} - E_{jj})$. Ясно, что образ вектора $\tilde{\alpha}'$ после поворота (см. выше) совпал с s -корнем $\alpha'_{12} = \pi i(E_{11} - E_{22})$. Так как все s -корни в алгебре $\mathfrak{su}(p+q)$ имеют одинаковую

длину, то получаем, что s -корень α' подмногообразия $\mathbb{CP}^s$ (после подходящего поворота) совпал с минимальным s -корнем α'_{12} алгебры $\mathfrak{su}(p+q)$. Вычислим кратность первой сопряженной точки $\exp(\alpha')$ вдоль $\exp(t\alpha')$ в группе $SU(p+q)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} v &= \dim [C(\exp(\alpha'))/C(\alpha')] = \dim [C(\exp(\tilde{\alpha}'))/C(\tilde{\alpha}')] = \\ &= \dim \{SU(2)/S[U(1) \times U(1)]\} = 2. \end{aligned}$$

Тем самым, коэффициент, соответствующий пучку $f_{\tilde{\alpha}'}$ в $\mathbb{CP}^s \subset SU(p+q)$, не является максимальным в $SU(p+q)$, однако он окажется максимальным в подмногообразии $\exp B \cong G_{p+q,q}^C$. Легко подсчитать, что

$$\begin{aligned} v_1 &= \dim [C(\exp(\tilde{\alpha}')) \cap S(U(p) \times U(q)) / [C(\tilde{\alpha}') \cap S(U(p) \times U(q))]] = \\ &= \dim S^1 = 1, \end{aligned}$$

а поэтому пучок $f_{\tilde{\alpha}'} \subset \mathbb{CP}^s$ в многообразии $\exp(B)$ соответствует максимальному коэффициенту $\kappa_k(e, r)$ в $\exp(B)$. Так как все подмногообразия $\mathbb{CP}^s$, $1 \leq s \leq p$, реализуют аддитивные образующие в группах $H^{2s}(M, \mathbb{Z})$, то, в силу теоремы 15.5.1, все подмногообразия $\mathbb{CP}^s$ — минимальные поверхности в многообразии $\exp B \cong G_{p+q,q}^C$ и, кроме того, $\text{vol}_{2s}(\mathbb{CP}^s) = \Omega_{2s}^2$. Осталось доказать, что при $k \neq \{2, 4, 6, \dots, 2p\}$ $\text{vol}_k(X_0) > \Omega_k^2$ для любой поверхности $X_0 \in \mathcal{O}(L')$. Поскольку $H^*(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_2, x_4, \dots, x_{2q}]$ до размерности $2p$, то при $k \leq 2p$ для любой группы коэффициентов нетривиальные минимальные поверхности могут находиться только в четных размерностях, а тогда мы возвращаемся в рассмотренную выше ситуацию. Итак, пусть теперь $k \geq 2p+2$. Так как $\mathbb{CP}^p$ является максимальным по размерности симметрическим пространством ранга 1, которое можно вырастить в группе $SU(p+q)$ путем вращения геодезической $\exp(t\tilde{\alpha}')$, то, согласно замечанию к теореме 15.5.1, число ξ равно $2p$, а тогда $\text{vol}_k(X_0) > \Omega_k^2(M)$ при любом k , $2p+2 \leq k \leq n-1$. Доказан 1-й пункт теоремы 15.1.2.

Теперь рассмотрим кватернионный случай, который по технике доказательства будет несколько более деликатным. Пусть

$$M^n = G_{p+q,q}^{\mathbb{Q}} = \text{Sp}(p+q)/\text{Sp}(p) \times \text{Sp}(q), \quad p \geq q \geq 1,$$

есть кватернионное многообразие Грассмана. Тогда кольцо $H^*(M; \mathbb{Z})$ изоморфно до размерности $4p+2$ кольцу полиномов $\mathbb{Z}[y_4, y_8, y_{12}, \dots, y_{4q}]$. Рассмотрим стандартные вложения $\mathbb{CP}^r = G_{r+1,1}^{\mathbb{Q}}$ в $G_{p+q,q}^{\mathbb{Q}}$, $1 \leq r \leq p$, реализующие элементы $y_4, y_8^2, y_{12}^2, \dots, y_{4q}^2$ кольца $H^*(M; \mathbb{Z})$. Пусть группа $\text{Sp}(p+q)$ представлена стандартным образом в группу $SU(2p+2q)$, и пусть $V \cong G_{p+q,q}^{\mathbb{Q}} \subset \text{Sp}(p+q)$ — картановская модель многообразия M , $G = B + H$ — соответствующее разложение алгебры $\mathfrak{sp}(p+q)$, где

плоскость H составлена из матриц вида $\begin{pmatrix} A & D \\ -D & A \end{pmatrix}$, $A = X_{11} \oplus X_{22}$, $D = X_{13} \oplus X_{24}$, $X_{11} \in u(q)$, $X_{22} \in u(p)$, X_{13} — симметрическая матрица $(q \times q)$, X_{24} — симметрическая матрица $(p \times p)$. Плоскость B состоит из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} M & N \\ -N & M \end{pmatrix}, \text{ где } M = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ -Y_{12}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & Y_{14} \\ Y_{14}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальный тор $P \subset B$ получается, если положить $Y_{14} = 0$,

$Y_{12} = \sum_{i=1}^q \mathbb{R} \cdot E_{ii}$. Картановская подалгебра в $\mathfrak{sp}(p+q)$ образована элементами вида $Z \oplus Z$, где $Z \in u(p+q)$. Выделим в плоскости B подпространство C_r , состоящее из всех таких элементов, для которых $(Y_{12})_{1\beta} = \varphi_\beta$, $1 \leq \beta \leq r$; $(Y_{12})_{1\beta} = 0$, $r < \beta \leq p$; $(Y_{12})_{ij} = 0$, $i > 1$; $(Y_{14})_{1\beta} = \psi_\beta$, $1 \leq \beta \leq r$; $(Y_{14})_{1\beta} = 0$, $r < \beta \leq p$; $(Y_{14})_{ij} = 0$, $i > 1$; $\varphi_\beta, \psi_\beta \in \mathbb{C}$. Ясно, что $\exp(C_r)$ — вполне геодезическое подмногообразие в V , диффеоморфное $\mathbb{Q}P^r$, причем указанное вложение $\mathbb{Q}P^r \hookrightarrow V$ является топологически стандартным (отметим, что $\mathbb{Q}P^r$ можно задать в явном виде формулами, аналогичными тем, которые описывали $\mathbb{C}P^s$ в $G_{p+q, q}^{\mathbb{C}}$).

Доказательство 2-го пункта теоремы 15.1.2. Фиксируем в $\mathfrak{sp}(p+q)$ скалярное произведение $\langle X, Y \rangle = -(8\pi^2)^{-1} \times \times \operatorname{Re} \operatorname{Spur}(X \cdot Y)$, и пусть $e_i = 2\pi A_{ii}$, где $A_{ss} = i(E_{ss} - E_{p+q+s, p+q+s})$; тогда $|e_i| = 1$. Система всех корней в $\mathfrak{sp}(p+q)$ имеет вид $\{e_i \pm e_j\}$; корнями максимальной длины являются элементы $\{2e_i\}$. Спроектируем все корни $\mathfrak{sp}(p+q)$ на B' , где

$$B' = \operatorname{Ad}_C(B), \quad C = D \oplus D, \quad D \in u(p+q),$$

$$D = (i/\sqrt{2})M \oplus I_{p-q}, \quad M = \begin{pmatrix} I_q & -iI_q \\ I_q & iI_q \end{pmatrix}.$$

Тогда ясно, что $CPC^{-1} \subset P'$, где P' — картановская подалгебра в $\mathfrak{sp}(p+q)$. Плоскость CPC^{-1} натянута на векторы $\{e_i - e_{i+q}\}$, $1 \leq i \leq q$. Прямое вычисление (которое мы опускаем) показывает, что векторы $\{\pm(e_i - e_{q+i})\}$, $1 \leq i \leq q$, являются корнями наибольшей длины пространства $\exp B$. Положим $\alpha_i = e_i - e_{i+q}$, $\alpha'_i = \frac{1}{2} \alpha_i$ и $\mu'_i = C^{-1} \alpha'_i C$. Исследуем только s -корень μ'_i , так как все остальные s -корни μ'_i получаются из него при действии группы Вейля. Ясно, что $\exp(\mu'_i) = K \oplus K$, где $K = (-I_1) \oplus (I_{q-1}) \oplus (-I_1) \oplus \oplus (I_{p-1})$. Требуется вычислить размерность $C[\exp(\mu'_i)]/C(\mu'_i)$, что даст нам кратность точки $\exp(\mu'_i)$ в $SU(2p+2q)$. Оказывается, что пучок $f_{\mu'_i}$ не соответствует максимальному коэффициенту в $SU(2p+2q)$, однако легко убедиться прямым подсчетом, что

$$[C(\exp(\mu'_i)) \cap (\operatorname{Sp}(p) \times \operatorname{Sp}(q))]/[C(\mu'_i) \cap (\operatorname{Sp}(p) \times \operatorname{Sp}(q))] \cong S^3,$$

где подгруппа $S^3 \cong SU(2)$ вложена в $S^3 \times S^3$ в качестве диаго-

нали Δ . Итак, кратность ν точки $\exp(\mu'_1)$ в многообразии V равна 3. Поскольку $\dim \mathbb{Q}P^r - \dim \mathbb{Q}P^{r-1} = 4$, то отсюда, в силу леммы 15.3.1, следует, что подмногообразие $\exp(C_r)$ содержит 3 сопряженных направления вдоль геодезической $\exp(t\mu'_1)$, т. е. пучок $f_{\mu'_1}$ соответствует максимальному коэффициенту $\kappa_k(e, r)$ в многообразии M . Поскольку этот пучок при вращении вектора вокруг e порождает подмногообразие $\mathbb{Q}P^r$, то все подмногообразия $\mathbb{Q}P^r \subset M$ являются глобально минимальными поверхностями. Все остальные утверждения доказываются по аналогии с первым пунктом. Доказательство закончено.

Совершенно аналогично рассматривается и вещественный случай — односвязное и не односвязное грассмановы многообразия — однако мы не будем на этом останавливаться.

Теоремы 15.1.1 и 15.1.2 описывают ситуации, когда значение $\Omega_k^2(M)$ достигается при многих k . Разберем, для контраста, несколько ситуаций, когда числа Ω_k^2 достигаются в ограниченном количестве случаев или совсем не достигаются.

Пусть $M^n = \tilde{G}$ — компактная односвязная группа Ли, и пусть α_0 — произвольный корень максимальной длины в M (таких корней может быть несколько). Тогда из этого корня всегда вырастает подгруппа $SU(2)$, диффеоморфная сфере S^3 и реализующая свободную образующую в группе $H_3^{(3)}(\tilde{G}; \mathbb{Z})$ (напомним, что $H_1^{(1)}(\tilde{G}; \mathbb{Z}) = H_2^{(2)}(\tilde{G}; \mathbb{Z}) = 0$). Обозначим это подмногообразие через S_0^3 .

Предложение 15.6.1. Пусть $M^n = \tilde{G}$ — компактная односвязная группа Ли, S_0^3 — описанная выше подгруппа, и пусть $X_0 \in \mathcal{O}(L')$, $3 \leq k \leq n-1$, — произвольная минимальная поверхность в $\tilde{G}$. Тогда равенство $\text{vol}_k(X_0) = \Omega_k^2(\tilde{G})$ достигается только при $k=3$, причем в этом случае равенство $\text{vol}_3(X_0) = \Omega_3^2$ выполнено для подмногообразия $X_0 = S_0^3$ и только для него (с точностью до движений группы $\tilde{G}$); в частности, S_0^3 — глобальная минимальная поверхность в $\tilde{G}$.

Доказательство. Пусть X_0 — минимальная поверхность в $\tilde{G}$ такая, что $\text{vol}_k(X_0) = \Omega_k^2$. Тогда, в силу теоремы 15.5.1, поверхность X_0 является подмногообразием, диффеоморфным одному из следующих пространств: S^k , $\mathbb{C}P^{k/2}$, $\mathbb{Q}P^{k/4}$, $F_4/\text{Spin}(9)$, причем X_0 вырастает из некоторого s -корня α'_0 наименьшей длины в $\tilde{G}$. Отсюда следует, что кратность точки $\exp(\alpha'_0)$, как сопряженной точки, равна двум. В самом деле, кратность произвольного корня $\hat{\alpha}$ равна $\nu(\hat{\alpha}) = \sum \dim \tilde{V}_{\hat{\beta}}$, где $\hat{\beta}(\alpha') \equiv 0 \pmod{1}$ и $\hat{\beta}(\alpha') \not\equiv 0 \pmod{1}$ (см. предложение 15.2.1). Поскольку $\dim_{\mathbb{R}}(V_{\hat{\alpha}}) = 2$ и в указанную сумму заведомо входит слагаемое $\dim V_{\hat{\alpha}}$ (так как $\hat{\alpha}(\alpha') = 1$), то $\nu(\hat{\alpha}) \geq 2$. Так как α'_0 — наименьший s -корень, то не существует другого корня $\hat{\beta} \neq \hat{\alpha}_0$ такого, что $\hat{\beta}(\alpha'_0) \equiv 0 \pmod{1}$,

ибо в противном случае мы получили бы, что $|\beta'| < |\alpha'_0|$, а это невозможно. Итак, в группе $\tilde{G}$ имеем равенство $v(\alpha'_0) = 2$. Поскольку $k \geq 3$, то пучок $f_{\alpha'_0}$, соответствующий коэффициенту $\kappa_k(e, r)$, обязан (см. лемму 15.2.1) содержать два сопряженных направления. Так как эти направления уже содержатся в подгруппе S_0^1 и по лемме 15.3.1 и теореме 15.5.1 вся поверхность X_0 обслуживается $\kappa_k(e, r)$ и является вполне геодезическим подмногообразием, то $X_0 \equiv S_0^1$. Известно, что S_0^1 реализует свободную образующую в $H_3^{(n)}(\tilde{G}, \mathbb{Z})$, откуда следует, что какое-то из перечисленных выше симметрических пространств ранга 1 (совпадающее с X_0) должно содержать в своей трехмерной группе (ко)гомологий элемент бесконечного порядка, что возможно, только если $k=3$ и $X_0=S^3$. Минимальность подмногообразия S_0^1 следует из теоремы 15.5.1. Предложение полностью доказано.

На некоторых симметрических пространствах числа Ω_k^0 не достигаются ни при каком значении k . Например, рассмотрим симметрическое пространство $M^n = \text{SU}(2m)/\text{Sp}(m)$ ранга $m-1$; известно (см. [56]), что $H^*(M; \mathbb{Z}) \cong \Lambda(x_3, x_5, \dots, x_{4m-3})$. Пусть $m \geq 2$ и $X_0 \in \mathcal{O}(L')$ — глобально минимальная поверхность. Тогда выполнено строгое неравенство $\text{vol}_k(X_0) > \Omega_k^0(M)$. Еще один пример. Пусть $M^n = \text{SU}(2m+1)/\text{SO}(2m+1)$ и $X_0 \in \mathcal{O}(L')$; тогда всегда имеем $\text{vol}_k(X_0) > \Omega_k^0$. Доказательства получаются по схеме, изложенной при доказательстве предложения 15.6.1.

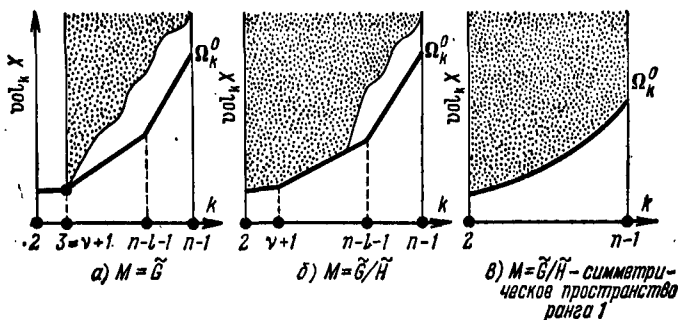


Рис. 44.

Теорема 15.5.1 позволяет получить полное описание k -мерных геодезических дефектов Ω_k^0 для любого компактного симметрического пространства (можно, например, опираться при этом на список этих пространств; см., например, [9]). Мы ограничимся приведенными выше примерами. Исследование значительного числа конкретных симметрических пространств позволило следующим образом описать качественное поведение функции Ω_k^0 .

На рис. 44 по горизонтальной оси отложены значения размерности k , $2 \leq k \leq n-1$, а по вертикальной оси — значения

объемов замкнутых поверхностей реализующего типа, т. е. $X \in \in \mathcal{O}(L')$, $L' \neq 0$, $L' \subset H_k^{(h)}(M)$. Оказывается, выделяются три случая: а) группы Ли; б) симметрические пространства, отличные от групп Ли и от симметрических пространств ранга 1; в) симметрические пространства ранга 1. В случаях а) и б) поведение функции Ω_k^n характеризуется наличием двух точек излома: $k_1 = v + 1$, $k_2 = n - l - 1$, где v (см. выше) — кратность корня α_0 максимальной длины, а l — ранг M . В случае а) функция Ω_k^n только в одной точке (при $k=3$) соприкасается с объемами замкнутых топологически нетривиальных поверхностей; в случае б) число таких соприкосновений увеличивается, т. е. имеется достаточно много минимальных поверхностей, объем которых совпадает с Ω_k^n , а в случае в) функция Ω_k^n полностью описывает все минимальные поверхности наименьшего объема.

Дальнейшие примеры глобально минимальных поверхностей, реализующих нетривиальные (ко)циклы в симметрических пространствах, были получены Дао Чонг Тхи (см. [57], [58]). Приведем здесь некоторые из этих примеров.

Теорема 15.6.2. *Перечисленные ниже вполне геодезические подмногообразия X_0 в компактных симметрических пространствах M являются глобально минимальными поверхностями реализующего типа в своем классе (ко)гомологий.*

$$(1) M = U(n)/(U(m) \times U(n-m)), \quad n \geq 2, \quad 1 \leq m \leq [n/2];$$

$$X_0 = U(p)/(U(q) \times U(p-q)), \quad p < n, \quad q < m,$$

где $U(p)$, $U(q)$, $U(p-q)$ — подгруппы, стандартно вложенные в соответствующие группы Ли $U(n)$, $U(p)$, $U(m)$.

$$(2) M = SO(n)/(SO(2) \times SO(n-2)), \quad n \geq 3;$$

$$X_0 = SO(p)/(SO(2) \times SO(p-2)), \quad 3 \leq p \leq n,$$

где $SO(p)$ и $SO(p-2)$ стандартно вложены соответственно в $SO(n)$ и $SO(n-2)$.

(3) $M = Sp(2n)/U(n)$, $n \geq 2$; $X_0 = Sp(2q)/U(q)$, $2 \leq q < n$; вложения $Sp(2q) \subset Sp(2n)$, $U(q) \subset U(n)$ стандартны.

(4) $M = SO(2n)/U(n)$, $n \geq 2$; $X_0 = SO(2q)/U(q)$, $2 \leq q < n$; вложения $SO(2q) \subset SO(2n)$, $U(q) \subset U(n)$ стандартны.

(5) Пусть X_0 — произвольное замкнутое кватернионное подмногообразие вещественной размерности 4 в кэлеровом кватернионном симметрическом связном компактном пространстве M . Тогда X_0 — глобально минимальная поверхность в своем классе (ко)гомологий.

Эта теорема является следствием общего результата, полученного Дао Чонг Тхи для описания потоков минимальной массы (см. терминологию в [17]) в симметрических пространствах (см. [57] — [60]).

**ЛОКАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ,
РЕАЛИЗУЮЩИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ (КО)ЦИКЛЫ И ЭЛЕМЕНТЫ
ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ**

§ 16. Постановка задачи.

Вполне геодезические подмногообразия в группах Ли

В предыдущих параграфах мы изучали в основном глобально минимальные поверхности. При этом мы обнаружили, что поверхности наименьшего объема (например, среди всех поверхностей, реализующих нетривиальные (ко)циклы в данной размерности) часто оказываются вполне геодезическими подмногообразиями. С другой стороны, вполне геодезические подмногообразия всегда являются локально минимальными (см. § 2), т. е. экстремалами функционала объема (быть может, не абсолютными минимумами, а «седлами»). Поэтому самостоятельный интерес представляет задача об описании (например, в симметрических пространствах, как в одном из наиболее важных для приложений классов римановых многообразий) вполне геодезических подмногообразий, реализующих нетривиальные (ко)циклы. Эту задачу мы полностью решим в настоящей главе. Затем мы дадим классификацию всех тех случаев, когда нетривиальные элементы гомотопических групп $\pi_i(M) \otimes \mathbb{Q}$ (где M — симметрическое пространство, $\mathbb{Q}$ — рациональные числа) реализуются вполне геодезическими сферами, т. е. опишем все те гомотопические классы симметрических пространств, в которых существует представитель, изображаемый стандартной сферой, т. е. локально минимальной поверхностью максимально простого вида. Оказывается, эта классификация вскрывает глубокие связи между свойствами компактных групп Ли и геометрией локально минимальных поверхностей.

Как было доказано в § 2, каждое вполне геодезическое подмногообразие локально минимально. Оказывается, если объемлющее многообразие является группой Ли, то вполне геодезические подмногообразия могут быть описаны (с локальной точки зрения) особенно просто. Обозначим через $[X, Y]$ операцию коммутирования в алгебре Ли. Поскольку нас будут интересовать компактные группы и алгебры Ли, то можно считать, что они реализованы как группы матриц, а тогда коммутатор двух элементов X и Y имеет вид $XY - YX$, где XY — произведение матриц.

Определение 16.1. Пусть G — алгебра Ли над полем вещественных чисел, и пусть B — подпространство в G . Подпространство B называется *тройной системой Ли*, если для любых трех элементов X, Y, Z , принадлежащих B , элемент $[[X, Y], Z]$ также принадлежит B .

Через $\exp$ обозначим каноническое отображение алгебры G в группу $\mathfrak{G}$. Пусть V — вполне геодезическое подмногообразие в $\mathfrak{G}$; тогда можно считать, что оно проходит через единицу группы e ; ясно, что $T_e(V) \subset G$.

Предложение 16.1 (см. [70]). Пусть $\mathfrak{G}$ — связная компактная группа Ли и V — вполне геодезическое подмногообразие в группе. Тогда подпространство $B = T_e(V)$ является тройной системой Ли и $\exp(B) = V$. Обратно, если $B \subset G$ — тройная система, то подмногообразие $V = \exp B$ является вполне геодезическим подмногообразием в группе Ли $\mathfrak{G}$.

Любая подгруппа Ли положительной размерности является вполне геодезическим подмногообразием в группе $\mathfrak{G}$.

§ 17. Сводка необходимых результатов о топологической структуре компактных групп Ли и симметрических пространств

17.1. Алгебры когомологий компактных групп Ли. Здесь мы собрали нужные нам для дальнейшего некоторые факты о гомологиях и когомологиях компактных групп.

Совокупность всех простых компактных групп Ли состоит из четырех больших серий и пяти особых классов групп. Классы локально изоморфных компактных связных простых групп Ли обычно обозначаются символами A_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 2$), C_n ($n \geq 3$), D_n ($n \geq 4$) — классические структуры; G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 — особые структуры. Классические серии определены для всех $n \geq 1$, но указанные ограничения на ранги групп объясняются изоморфизмами групп малых размерностей из разных серий: $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $A_3 = D_3$, $D_2 = A_1 + A_1$. Через $Z(\mathfrak{G})$ обозначим центр группы $\mathfrak{G}$. Каждый класс локально изоморфных групп содержит единственную односвязную компактную группу $\tilde{\mathfrak{G}}$; для классов A_n , B_n , C_n эти односвязные группы суть следующие: $SU(n+1)$, $Spin(2n+1)$, $Sp(n)$, где $Z(SU(n+1)) = \mathbb{Z}_{n+1}$, $Z(Spin(2n+1)) = \mathbb{Z}_2$, $Z(Sp(n)) = \mathbb{Z}_2$. Полными факторгруппами этих групп $\tilde{\mathfrak{G}}/Z(\tilde{\mathfrak{G}})$ являются группы $PU(n+1)$, $SO(2n+1)$, $PSp(n)$ проективных преобразований. Односвязной группой $\tilde{\mathfrak{G}}$ класса D_n является группа $Spin(2n)$, $Z(Spin(2n)) = \mathbb{Z}_4$, если $n = 2\alpha + 1$, $Z(Spin(2n)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, если $n = 2\alpha$. Полная факторгруппа $Spin(4\alpha+2)/Z$ является проективной ортогональной группой $PSO(2n)$, $n = 2\alpha + 1$. Кроме того, для $n = 2\alpha + 1$ существует еще одна группа: $Spin(2n)/\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_4$; эта группа изоморфна $SO(2n)$. Если n четно, то кроме $SO(2n)$ существуют еще две «полуспинорные группы», гомеоморфные друг другу при любом $n = 2\alpha$; в частности, при $n = 8$ эти две группы изоморфны группе $SO(8)$. Односвязными представителями в классах G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 являются группы, имеющие циклические центры 0 , 0 , $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2$, 0 соответственно. Ниже пере-

числены кольца вещественных когомологий простых компактных групп Ли:

$$\begin{aligned} H^*(\mathrm{SU}(n+1)) &= \Lambda(x_3, x_5, x_7, \dots, x_{2n+1}); \\ H^*(\mathrm{Spin}(2n+1)) &= \Lambda(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{4n-1}); \\ H^*(\mathrm{Sp}(n)) &= \Lambda(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{4n-1}); \\ H^*(\mathrm{Spin}(2n)) &= \Lambda(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{4n-5}, x_{2n-1}); \\ H^*(G_2) &= \Lambda(x_3, x_{11}); \\ H^*(F_4) &= \Lambda(x_3, x_{11}, x_{15}, x_{23}); \\ H^*(E_6) &= \Lambda(x_3, x_9, x_{11}, x_{15}, x_{17}, x_{23}); \\ H^*(E_7) &= \Lambda(x_3, x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{23}, x_{27}, x_{35}); \\ H^*(E_8) &= \Lambda(x_3, x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47}, x_{59}). \end{aligned}$$

Пусть $f: \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ — непрерывное отображение, определенное групповым умножением. Возникает гомоморфизм $f^*: H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}; \mathbb{R}) = H^*(\mathfrak{G}) \otimes H^*(\mathfrak{G})$. Элемент $x \in H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$ называется примитивным, если $f^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$; известно, что образующие $\{x_{2k-1}\}$ в $H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$ можно выбрать так, чтобы они были примитивными. В дальнейшем будем считать, что образующие примитивны.

Группы $\mathrm{SU}(n)$ и $\mathrm{Sp}(n)$ не имеют кручения и $H^*(\mathrm{SU}(n); \mathbb{Z}) = \Lambda(x_3, x_5, \dots, x_{2n-1})$, $H^*(\mathrm{Sp}(n); \mathbb{Z}) = \Lambda(x_3, x_7, \dots, x_{4n-1})$. Группа G_2 имеет только 2-кручение, и $H^*(G_2; \mathbb{Z})$ имеет две образующие h_3 и h_{11} , степеней 3 и 11, такие, что $h_3^2 = h_{11}^2 = 0$. Группа $H^*(G_2; \mathbb{Z})$ есть сумма бесконечных циклических групп, порожденных элементами 1, h_3 , h_{11} , $h_3 \cdot h_{11}$, и групп $\mathbb{Z}_2$, порожденных элементами h_3^2 и h_3^4 . Группа F_4 имеет только 2-кручение, 3-кручение и 6-кручение; алгебра $H^*(F_4, \mathbb{Z})$ изоморфна тензорному произведению $U \otimes H^*(G_2; \mathbb{Z}) \otimes \Lambda(x)$, $\deg(x) = 15$, где U — градуированная алгебра с единицей, определяемая так: $U^0 = U^{23} = \mathbb{Z}$, $U^8 = U^9 = U^{16} = \mathbb{Z}_3$, $U^i = 0$ во всех других размерностях. Группы $\mathrm{Spin}(n)$ при $n \leq 6$ не имеют кручения; группы $\mathrm{SO}(n)$ ($n \geq 3$) и $\mathrm{Spin}(n)$ ($n \geq 7$) имеют 2-кручение, и все их коэффициенты кручения равны 2.

Напомним определение простой системы образующих в кольце $H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{Z}_p)$. Множество $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ однородных элементов в $H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{Z}_p)$ с положительными степенями называется простой системой образующих, если одночлены $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_s$; $s \leq k$) образуют вместе с единицей базис векторного пространства $H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{Z}_p)$ над $\mathbb{Z}_p$. Будем обозначать $\mathbb{Z}_p$ -алгебру с простой системой образующих $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ ($\deg x_{i_q} = i_q$) через $\Delta(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$. Тогда $H^*(\mathrm{SO}^*(n); \mathbb{Z}_2) = \Delta(x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-1})$ и $H^*(\mathrm{Spin}(n); \mathbb{Z}_2) = \Delta(\{x_i \mid i \in S\}; y)$, где $\deg x_i = i$, S — множество всех целых чисел, меньших чем n и не являющихся степенями двойки, $\deg y = 2^s(n) - 1$, где целое число $s(n)$ таково, что $2^{s(n)-1} < n \leq 2^{s(n)}$.

Алгебры $H^*(G_2, \mathbb{Z}_2)$ и $H^*(F_4, \mathbb{Z}_2)$ также допускают простую систему образующих и

$$H^*(G_2; \mathbb{Z}_2) = \Delta(x_3, x_5, x_6), \quad H^*(F_4, \mathbb{Z}_2) = \Delta(x_3, x_5, x_6, x_{15}, x_{23}).$$

Мы не будем подробно описывать структуру алгебр $H^*(E_i; \mathbb{Z}_p)$, $i=6, 7, 8$; отметим только, что все группы, локально изоморфные E_6 (соответственно E_7, E_8), не имеют p -крючения для $p \geq 7$ (соответственно для $p \geq 11$) и группа E_8 имеет 2-крючение.

Умножение f в группе определяет гомоморфизм $f_*: H_*(\mathbb{G} \times \mathbb{G}) \rightarrow H_*(\mathbb{G})$; если в качестве группы коэффициентов взять поле, то получаем гомоморфизм $f_*: H_*(\mathbb{G}) \otimes H_*(\mathbb{G}) \rightarrow H_*(\mathbb{G})$. Если элементы a и b принадлежат $H_*(\mathbb{G}; C)$, то элемент $f_*(a \otimes b) \in H_*(\mathbb{G}; C)$ называется их понтрягинским произведением. Итак, группа $H_*(\mathbb{G}; C)$ превращается в кольцо, умножение в котором ассоциативно, дистрибутивно, имеет единицу, но не обязательно антикоммутативно. Так, например, алгебра $H_*(\text{Spin}(10); \mathbb{Z}_2)$ обладает простой системой образующих $x_3, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{15}$ с соотношениями: $x_i^2 = 0$ (при всех i), $x_i x_j = x_j x_i$ ($i < j$, $(i, j) \neq (6, 9)$), $x_6 x_9 = x_9 x_6 + x_{15}$ (см. [64]). Однако если $H^*(\mathbb{G}; C)$ имеет простую систему примитивных образующих $\{x_i\}$ ($1 \leq i \leq m$), то $H_*(\mathbb{G}; C) = \Delta(y_1, y_2, \dots, y_m)$, где $\deg y_i = \deg x_i$, $i=1, 2, \dots, m$; верно и обратное утверждение. Возьмем в качестве кольца коэффициентов поле вещественных чисел, и пусть $\mathbb{G}$ — компактная группа; тогда $H^*(\mathbb{G}; \mathbb{R})$ допускает простую систему примитивных образующих и имеет место двойственность групп $H_*(\mathbb{G}; \mathbb{R})$ и $H^*(\mathbb{G}; \mathbb{R})$; гомоморфизмы f^* и f_* сопряжены друг другу, причем образующие y_i двойственны образующим x_i , и наоборот, т. е. гомоморфизм f^* и понтрягинское произведение f_* полностью определяют друг друга.

17.2. Подгруппы, вполне негомологичные нулю. Рассмотрим связную компактную группу Ли $\mathbb{G}$, и пусть V — компактное, односвязное, вполне геодезическое подмногообразие в $\mathbb{G}$. Задача, которую мы решим в первой части настоящей главы, заключается в следующем: нужно выяснить, когда подмногообразие V реализует нетривиальный цикл гомотопий в $H_*(\mathbb{G}; C)$, т. е. когда элемент $i_*[V]$ отличен от нуля, где через $[V]$ обозначен фундаментальный класс многообразия V . Рассмотрим сначала частный случай, когда вполне геодезическое подмногообразие V является подгруппой. Пусть $i: V = \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{G}$ — вложение, тогда возникает гомоморфизм $i^*: H^*(\mathbb{G}; C) \rightarrow H^*(\mathfrak{H}; C)$.

Определение 17.2.1. Подгруппа $\mathfrak{H}$ называется вполне негомологичной нулю в группе $\mathbb{G}$ для группы коэффициентов C , если гомоморфизм i^* является эпиморфизмом.

Предложение 17.2.1. Связная компактная подгруппа $\mathfrak{H}$ в компактной группе Ли $\mathbb{G}$ реализует нетривиальный цикл в $H^*(\mathbb{G}; \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда она вполне негомологична нулю в группе $\mathbb{G}$ для вещественных коэффициентов.

Доказательство. Пусть $i_*[\mathfrak{H}] \neq 0$ в $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$. Группу $H^*(\mathfrak{H}; \mathbb{R})$ можно трактовать как пространство линейных функционалов на $H_*(\mathfrak{H}; \mathbb{R})$. Так как $i_*[\mathfrak{H}] = i_*(y_1 \cdot y_2 \dots y_r) = i_*(y_1) i_*(y_2) \dots i_*(y_r) \neq 0$, где $y_1, y_2, \dots, y_r$ — мультипликативные образующие в $H_*(\mathfrak{H}; \mathbb{R})$, то $i_*(y_\alpha) \neq 0$ при $1 \leq \alpha \leq r$. Рассмотрим в $H_*(\mathfrak{H}; \mathbb{R})$ линейное подпространство неразложимых элементов (они же — примитивные), которое обозначим через $P(\mathfrak{H})$. Аддитивным базисом в этой подгруппе являются элементы $y_1, y_2, \dots, y_r$. Легко видеть, что $P(\mathfrak{H})$ при гомоморфизме i_* отображается мономорфно. Поскольку $i_*(P(\mathfrak{H})) \subset P(\mathfrak{G})$, то образом алгебры $H_*(\mathfrak{H}; \mathbb{R})$ является внешняя подалгебра в алгебре $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$, порожденная подпространством $i_*(P(\mathfrak{H}))$, откуда следует, что i_* — мономорфизм на $H_*(\mathfrak{H}; \mathbb{R})$, что и требовалось.

Предложение 17.2.1 сводит нашу задачу в том случае, когда $V = \mathfrak{H}$, к исследованию подгруппы $\mathfrak{H}$ на полную негомологичность нулю. Мы изложим сейчас известную конструкцию, позволяющую давать ответ на вопрос о полной негомологичности нулю подгруппы $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ в терминах алгебр Ли.

Пусть $\mathfrak{G} \rightarrow E_{\mathfrak{G}} \rightarrow B_{\mathfrak{G}}$ — универсальное расслоенное пространство для группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим вложение подгруппы $\mathfrak{H}$ в группу $\mathfrak{G}$; тогда возникает проекция ρ пространства $B_{\mathfrak{H}}$ на пространство $B_{\mathfrak{G}}$, индуцирующая гомоморфизм $\rho^*(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}): H^*(B_{\mathfrak{G}}) \rightarrow H^*(B_{\mathfrak{H}})$.

Предложение 17.2.2 (см. [91]). Пусть $\mathfrak{H}$ — связная компактная подгруппа в $\mathfrak{G}$. Подгруппа $\mathfrak{H}$ вполне негомологична нулю для вещественных коэффициентов тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\rho^*(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$ является эпиморфизмом.

В случае вещественных коэффициентов гомоморфизм $\rho^*(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$ можно эффективно вычислить. Рассмотрим группу $\mathfrak{G}$ ранга R , и пусть T^R — максимальный тор группы $\mathfrak{G}$. Касательное пространство $T_e(T^R) = t^R$ (картановская подалгебра) является накрывающей группой тора T^R . Пусть $t \in T^R$ и $N(t)$ — централизатор элемента t . В t^R выделим множество S' всех таких элементов t' , что $\exp t' \in S$, где S — множество всех сингулярных элементов в T^R . Множество S' называется диаграммой группы $\mathfrak{G}$. Диаграмма S' содержит «единичную решетку» — совокупность всех таких элементов $t' = t^R$, что $\exp t' = e$. Ясно, что элементы группы Вейля $W(\mathfrak{G}) = N(t)/T$ переводят в себя и эту решетку, и диаграмму. Отсюда следует, что группа Вейля получает точное представление как группа преобразований $H^1(T^R; \mathbb{Z})$, а если в качестве кольца коэффициентов взять любое кольцо C' , то, как группа преобразований, $H^1(T^R; C') = H^1(T^R; \mathbb{Z}) \otimes C'$; в последнем случае следует указывать кольцо коэффициентов и писать $W(\mathfrak{G}; C')$. Выберем в группе $H^1(T; \mathbb{Z})$ базис $z_1, \dots, z_R$ и рассмотрим градуированное кольцо полиномов от коммутирующих переменных $z_1, \dots, z_R$ с коэффициентами из C' , т. е. $C'[z_1, \dots, z_R]$.

Тогда группа $W(\mathfrak{G}; C')$ получает точное представление как группа автоморфизмов кольца $C'[z_1, \dots, z_R]$; эту группу автоморфизмов мы обозначим $W^*(C')$. Пусть $I_Q(\mathbb{Z})$ — подалгебра полиномов в $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_R]$, инвариантных относительно действия группы $W^*(\mathbb{Z})$. Ясно, что подалгебра $I_Q(\mathbb{Z}) \otimes C'$ в алгебре $C'[z_1, \dots, z_R]$ содержится в подалгебре $I_Q(C')$ и что $I_Q(\mathbb{R}) = I_Q(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$. Пусть $C' = \mathbb{R}$. Тогда образующим $z_1, \dots, z_R$ группы $H^1(T; \mathbb{Z})$ можно взаимно однозначно сопоставить линейные формы на t^R , которые мы будем обозначать теми же буквами. Группа $W^*(\mathbb{R})$ получает точное представление как группа автоморфизмов кольца полиномов над t^R с вещественными коэффициентами.

Предложение 17.2.3 (см. [91]). *Если группа $\mathfrak{G}$ связна, то кольцо полиномов на картановской подалгебре, инвариантных относительно действия группы $W^*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$ (т. е. кольцо $I_Q(\mathbb{R})$), является свободной алгеброй с R (здесь R — ранг группы $\mathfrak{G}$) образующими $P_{k_1}, \dots, P_{k_R}$, где $\deg P_{k_i} = k_i$, $1 \leq i \leq R$, $P(\mathfrak{G}, t) = (1 + t^{2k_1} - 1) \dots (1 + t^{2k_R} - 1)$ (через $P(\mathfrak{G}, t)$ обозначен полином Пуанкаре).*

Рассмотрим вложение $i: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{G}$, и пусть T_1 — максимальный тор группы $\mathfrak{H}$. Обозначим через $z'_1, \dots, z'_r$ образующие в $H^1(T_1; \mathbb{R})$.

Предложение 17.2.4 (см. [91]). *Можно канонически отождествить $H^*(B_T; \mathbb{R})$ и $H^*(B_{T_1}; \mathbb{R})$ с кольцами $\mathbb{R}[z_1, \dots, z_R]$ и $\mathbb{R}[z'_1, \dots, z'_r]$ соответственно, причем таким образом, чтобы гомоморфизм $\rho_{\mathfrak{H}}^*(T_1; T)$ перешел в гомоморфизм кольца $\mathbb{R}[z_1, \dots, z_R]$ в кольцо $\mathbb{R}[z'_1, \dots, z'_r]$, индуцированный гомоморфизмом вложения $i^*: H^1(T; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(T_1; \mathbb{R})$. При этом отождествлении одномерным образующим $z_1, \dots, z_R$ следует приписать новую степень 2.*

Известно, что гомоморфизмы $\rho_{\mathfrak{H}}^*(T_1; \mathfrak{H})$ и $\rho_{\mathfrak{H}}^*(T; \mathfrak{G})$ являются мономорфизмами и их образы суть кольца $I_H(\mathbb{R})$ и $I_Q(\mathbb{R})$ соответственно.

Предложение 17.2.5 (см. [91]). *Пусть $\mathfrak{H}$ — связная компактная подгруппа в $\mathfrak{G}$. Если отождествить $H^*(B_{\mathfrak{G}}; \mathbb{R})$ и $H^*(B_{\mathfrak{H}}; \mathbb{R})$ с кольцами инвариантных полиномов $I_Q(\mathbb{R})$ и $I_H(\mathbb{R})$ соответственно, то гомоморфизм $\rho_{\mathfrak{H}}^*(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}): I_Q(\mathbb{R}) \rightarrow I_H(\mathbb{R})$ сопоставит каждому полиному $P \in I_Q(\mathbb{R})$ индуцированный им полином на t'_1 из $I_H(\mathbb{R})$ при вложении $t'_1 \rightarrow t^R$.*

Явный вид образующих полиномов P_{k_i} в кольце I_Q указан в [67]. Итак, мы получили утверждение: *компактная связная подгруппа $\mathfrak{H}$ реализует нетривиальный коцикл в $H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда гомоморфизм $i^*: I_Q \rightarrow I_H$ является эпиморфизмом.*

Применение этого утверждения для фактических вычислений в значительной степени облегчается наличием разработанной техники изучения колец I_Q (см. [67], [72], [78]). Конкретные вычисления гомоморфизма $\rho_{\mathfrak{H}}^*(\mathfrak{H}; \mathfrak{G})$ выполнены, например, в [67], [92].

Дадим обзор всех основных случаев полной негомологичности нулю. Сначала мы опишем большой класс подгрупп $\mathfrak{H}$, неприво-

димо действующих на касательном пространстве к однородному пространству $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Определим действие подгруппы $\mathfrak{H}$ на группе $\mathfrak{G}$ так: $h(g) = hgh^{-1}$, где $h \in \mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{G}$; это порождает линейное представление группы $\mathfrak{H}$ на линейном пространстве G . Линейное подпространство $H \subset G$ инвариантно относительно действия группы $\mathfrak{H}$ на G , а поэтому ортогональное дополнение B (напомним, что группы компактны) к подпространству H также инвариантно. Подпространства H и B будут инвариантны и относительно ad_H , откуда следуют свойства разложения $G = H + B$: 1) $[H, H] \subset H$; 2) $[H, B] \subset B$; 3) $\langle X, Y \rangle = 0$, где $X \in H$, $Y \in B$.

Рассмотрим класс Ψ всех таких пар $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, где $\mathfrak{G}$ — простая компактная группа Ли, а компактная подгруппа $\mathfrak{H}$ неприводимо действует на касательном пространстве к $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ (группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ связны). Отнесем к подклассу Ψ_1 те и только те пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, для которых выполнено условие $[B, B] \subset H$, т. е. $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ — симметрическое пространство. К подклассу Ψ_2 отнесем все остальные пары из класса Ψ . Все пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \Psi_1$ описаны в [70]; все пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \Psi_2$ описаны в [72]. Полное описание с гомологической точки зрения вложений $i: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{G}$, где $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \Psi_1$, имеется в [81]. Оказывается, единственными парами $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \Psi_1$ (где многообразие $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ не является группой Ли), для которых подгруппа $\mathfrak{H}$ вполне негомологична нулю для вещественных коэффициентов, являются следующие пары (вложения $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ описаны ниже): 1) $(\text{SU}(2m+1), \text{SO}(2m+1))$, $m \geq 1$; 2) $(\text{SU}(2m), \text{Sp}(m))$, $m \geq 2$; 3) $(\text{SO}(2l), \text{SO}(2l-1))$, $l \geq 4$; 4) (E_6, F_4) .

Класс Ψ_2 с гомологической точки зрения исследован в [67]. Оказалось, что парами $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \Psi_2$, где подгруппа $\mathfrak{H}$ вполне негомологична нулю для вещественных коэффициентов, являются только следующие пары (вложения см. в [67]):

- 1) (A_{N-1}, A_{n-1}) , $n \geq 3$, $N = \frac{n(n+1)}{2}$; 2) (A_{15}, D_5) ; 3) (A_{26}, E_6) ;
- 4) (B_N, B_n) , $n \geq 3$, если n нечетное, $N = \frac{n(2n+1)-1}{2}$; (D_N, B_n) , $n \geq 3$, если n четное, $N = \frac{n(2n+1)}{2}$; 5) (B_N, B_n) , $n \geq 2$, если n нечетное, $N = \frac{n(2n+3)-1}{2}$; (D_N, B_n) , $n \geq 2$, если n четное, $N = \frac{n(2n+3)}{2}$; 6) (B_N, C_n) , $n \geq 2$, если n нечетное, $N = \frac{n(2n+1)-1}{2}$;
- (D_N, C_n) , $n \geq 2$, если n четное, $N = \frac{n(2n+1)}{2}$; 7) (D_{21}, C_4) ;
- 8) (D_4, B_3) ; 9) (B_2, A_1) ; 10) (D_{124}, E_8) ; 11) (B_{88}, E_7) ; 12) (D_{13}, F_4) ;
- 13) (D_{26}, F_4) ; 14) (B_3, G_2) ; 15) (D_7, G_2) ; 16) (C_7, C_3) ; 17) (G_2, A_1) ;
- 18) (E_6, G_2) ; 19) (G_2, A_1) .

Согласно [79], вещественный полином Пуанкаре пространства $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где подгруппа $\mathfrak{H}$ вполне негомологична нулю в группе $\mathfrak{G}$, имеет вид $P(V, t) = \frac{P(\mathfrak{G}, t)}{P(\mathfrak{H}, t)}$.

17.3. Циклы Понтрягина в компактных группах Ли. Задача реализации циклов в группах Ли и в однородных пространствах тесно связана с вопросом о нахождении наиболее простого клеточного разбиения многообразия. Важные результаты были получены в [85], где исследована клеточная структура вещественных и комплексных многообразий Грассмана. Л. С. Понтрягин в [76] описал кольца $H^*(\mathbb{G}; \mathbb{R})$ и структуру целочисленных гомологий классических компактных простых групп Ли, построив базисные циклы в явном виде. Эти циклы, образующие базис когомологий в группах $U(n)$ и $Sp(n)$, не являются подмногообразиями.

Рассмотрим сферу S^{n-1} , точки которой будем задавать евклидовыми координатами $x_1, \dots, x_n$, $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Каждой точке $x \in S^{n-1}$ сопоставим точку $T_n(x) \in SO(n)$, $T_n(x) = \|t_{ij}\| E_{1,n-1}$, $t_{ij} = \delta_{ij} - 2x_i x_j$, где $E_{1,n-1} = (-E_1) \oplus E_{n-1}$, E_α — тождественный оператор. Ясно, что отображение T_n определяет вложение проективного пространства $\mathbb{RP}^{n-1}$ в группу $SO(n)$. Если n четно, то индекс пересечения двух циклов $X_{n-1} = \mathbb{RP}^{n-1}$ и подгруппы $SO(n-1)$ равен $+1$, откуда следует, что подмногообразие X_{n-1} реализует нетривиальный цикл в $H_*(SO(n); \mathbb{R})$. Если n нечетно, то можно построить цикл U_{2n-3} , также реализующий нетривиальный элемент в $H_*(SO(n))$. Рассмотрим две цепи X_{n-2} и X_{n-1} и построим цепь $U_{2n-3} = X_{n-2} \cdot X_{n-1}$ (понтрягинское произведение). Эта цепь является коциклом, и индекс пересечения U_{2n-3} и подгруппы $SO(n-2)$ равен $+1$.

Рассмотрим стандартное вложение $i: SO(2n-1) \rightarrow SO(2n)$. Тогда $H_*(SO(2n); \mathbb{R}) = \Lambda(x_3, \dots, x_{4n-5}) \otimes \Lambda(y_{2n-1})$ и образующая подкольца $H_*(S^{2n-1}; \mathbb{R})$ реализована подмногообразием $X_{2n-1} = \mathbb{RP}^{2n-1}$. Отсюда легко следует, что образующие кольца гомологий $H_*(SO(n); \mathbb{R})$ допускают следующее геометрическое описание.

Образующая $x_3 \in H_*(SO(2n+1); \mathbb{R})$ реализована в $SO(2n+1)$ подмногообразием $X_3 = \mathbb{RP}^3$. Все остальные образующие $x_7, x_{11}, \dots, x_{4n-1}$ реализованы циклами $U_7, \dots, U_{4n-1}$, $U_{4p-1} = X_{2p-1} \cdot X_{2p}$. Отметим, что $\mathbb{RP}^3 = U_3 = X_1 \cdot X_2 = S^1 \cdot \mathbb{RP}^3$ (это легко усмотреть и непосредственно). В кольце $H_*(SO(2n); \mathbb{R})$ образующие $x_3, \dots, x_{4n-5}, y_{2n-1}$ реализованы циклами $\mathbb{RP}^3, U_7, \dots, U_{4n-5}, \mathbb{RP}^{2n-1}$. Описанные выше канонические наборы образующих являются аддитивным базисом в линейном пространстве примитивных элементов.

Выделим теперь из этих реализаций локально минимальные вполне геодезические подмногообразия. Ясно, что циклы U_{2m-1} в группах $SO(n)$ при $2m-1 \neq 3$ не являются подмногообразиями, однако цикл U_3 является подгруппой, а потому — вполне геодезическим подмногообразием. Рассмотрим цикл X_{2n-1} , соответствующий образующей $y_{2n-1} \in H_*(SO(2n); \mathbb{R})$.

Предложение 17.3.1. *Подмногообразие $X_{n-1} \subset SO(n)$ является вполне геодезическим подмногообразием в группе $SO(n)$, $n \geq 3$.*

Доказательство. Ясно, что касательное пространство $T_e(X_{n-1})$ в алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$ образовано матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_2 & & & & \\ \vdots & & & 0 & \\ -a_n & & & & \end{pmatrix},$$

где a_i — произвольные вещественные числа. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $T_e(X_{n-1})$ — тройная система в алгебре $\mathfrak{so}(n)$. Легко проверяется, что $X_{n-1} = \exp(T_e(X_{n-1}))$, откуда и следует искомого утверждение.

Итак, единственными циклами среди понтрягинских циклов, реализуемыми вполне геодезическими подмногообразиями в группе, являются цикл $U_3 = \mathbb{RP}^3$ в $SO(n)$ при $n \geq 3$ и цикл $X_{2n-1} = \mathbb{RP}^{2n-1}$ в $SO(2n)$ при $n \geq 2$. Оказывается, эти локально минимальные циклы включаются в некоторую однотипную серию локально минимальных циклов, которые мы опишем ниже.

17.4. Необходимые сведения о симметрических пространствах.

Определение 17.4.1. *Связное риманово многообразие V называется симметрическим пространством, если для каждой точки $p \in V$ существует инволютивная изометрия $s_p: V \rightarrow V$, отличная от тождественной, для которой p — изолированная неподвижная точка.*

Связная компактная группа Ли с инвариантной римановой метрикой превращается в симметрическое пространство. Симметрические пространства допускают представление в виде $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{G}$ — связная группа Ли с инволютивным автоморфизмом σ , множество неподвижных точек которого совпадает со связной компонентой единицы подгруппы $\mathfrak{H}$. Обозначим через $I(V)$ множество всех изометрий симметрического пространства, тогда $I(V)$ — группа Ли. Через $\mathfrak{G} = I_0(V)$ обозначим связную компоненту единицы в группе $I(V)$. Тогда компактное односвязное симметрическое пространство представимо в виде $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — стационарная подгруппа, $\mathfrak{H} = \{g \in \mathfrak{G} \mid \sigma(g) = g\}$, а σ — инволюция. Обозначим через $\theta(d\sigma)_e$ соответствующий инволютивный автоморфизм алгебры Ли $G = T_e\mathfrak{G}$; тогда подалгебра $H = T_e\mathfrak{H} \subset G$ является подалгеброй неподвижных точек автоморфизма $\theta: G \rightarrow G$. Эта подалгебра является компактно вложенной; можно считать, что $H \cap Z(G) = 0$, где $Z(G)$ — центр G ; $G = B + H$, где $B = \{X \in G \mid \theta(X) = -X\}$.

Симметрическое пространство $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ называется неприводимым, если присоединенное представление ad_H на плоскости B (порожденное соотношением $[H, B] \subset B$) неприводимо.

Предложение 17.4.1 (см. [9]). *Компактное односвязное риманово симметрическое пространство V распадается в прямое произведение $V_1 \times \dots \times V_s$ неприводимых компактных симметрических пространств.*

Существует полная классификация компактных неприводимых симметрических пространств (см. [9]), разбивающихся на два типа: тип I и тип II.

Предложение 17.4.2. *Римановы компактные односвязные неприводимые симметрические пространства типа I перечислены в таблице 1.*

Таблица 1 (A)

Тип		Пространство V	G	H	Ранг V
${}^0A_{2m}I$	$m \geq 1$	$SU(2m+1)/SO(2m+1)$	A_{2m}	B_m	$2m$
$A_{2m-1}I$	$m \geq 2$	$SU(2m)/SO(2m)$	A_{2m-1}	D_m	$2m-1$
${}^0A_{2m-1}II$	$m \geq 2$	$SU(2m)/Sp(m)$	A_{2m-1}	C_m	$m-1$
$*A_lIII_m$	$l \geq 1, 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor$	$U(l+1)/U(m) \times U(l+1-m)$	A_l	$T^1 + A_{m-1} + A_{l-m}$	m
$*B_lI_2$	$l \geq 2$	$SO(2l+1)/SQ(2) \times SO(2l-1)$	B_l	$T^1 + B_{l-1}$	2
B_lI_{2m}	$l \geq 2, 2 \leq m \leq l-1$	$SO(2l+1)/SO(2m) \times SO(2l+1-2m)$	B_l	$D_m + B_{l-m}$	$\min(2m, 2l+1-2m)$
$*C_lI$	$l \geq 3$	$Sp(l)/U(l)$	C_l	$T^1 + A_{l-1}$	l
B_lII	$l \geq 3$	$SO(2l+1)/SO(2l)$	B_l	D_l	1
C_lII_m	$l \geq 3, 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$	$Sp(l)/Sp(m) \times Sp(l-m)$	C_l	$C_m + C_{l-m}$	m
$*D_lI_2$	$l \geq 4$	$SO(2l)/SO(2) \times SO(l-2)$	D_l	$T^1 + D_{l-1}$	2
D_lI_{2m}	$l \geq 4, 2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$	$SO(2l)/SO(2m) \times SO(2l-2m)$	D_l	$D_m + D_{l-m}$	$2m$
D_lI_{2m+1}	$l \geq 4, 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor$	$SO(2l)/SO(2m+1) \times SO(2l-2m-1)$	D_l	$B_m + B_{l-m-1}$	$2m+1$

Таблица 1 (А) (Продолжение)

Тип		Пространство V	g	H	Ранг V
${}^0D_l\text{II}$	$l \geq 4$	$\text{SO}(2l)/\text{SO}(2l-1)$	D_l	B_{l-1}	1
$*D_l\text{III}$	$l \geq 4$	$\text{SO}(2l)/U(l)$	D_l	$T^1 + A_{l-1}$	$\left[\frac{l}{2}\right]$
$E_6\text{I}$		$E_6/PS_p(4)$	E_6	C_4	6
$E_6\text{II}$		$E_6/\text{SU}(2) \cdot \text{SU}(6)$	E_6	$A_1 + A_5$	4
$*E_6\text{III}$		$\text{Ad}E_6/T^1 \cdot \text{Spin}(10)$	E_6	$T^1 + D_5$	2
${}^0E_6\text{IV}$		E_6/F_4	E_6	F_4	2
$E_7\text{V}$		$E_7/\text{SU}^*(8)$	E_7	A_7	7
$E_7\text{VI}$		$E_7/\text{SU}(2) \cdot \text{Spin}(12)$	E_7	$A_1 + D_6$	4
$*E_7\text{VII}$		$\text{Ad}E_7/T^1 \cdot E_6$	E_7	$T^1 + E_6$	3
$E_8\text{VIII}$		$E_8/\text{SO}(16)$	E_8	D_8	8
$E_8\text{IX}$		$E_8/\text{SU}(2) \cdot E_7$	E_8	$A_1 + E_7$	4
$F_4\text{I}$		$F_4/\text{SU}(2) \cdot \text{Sp}(3)$	F_4	$A_1 + C_3$	4
$F_4\text{II}$		$F_4/\text{Spin}(9)$	F_4	B_4	1
$G_2\text{I}$		$G_2/\text{SO}(4)$	G_2	$A_1 + A_1$	2

Таблица 1 (В)

Тип	$\chi(V)$	Полином Пуанкаре $P(V, t)$
${}^0A_{2m}\text{I}$	0	$(1+t^5)(1+t^9)(1+t^{13}) \dots (1+t^{4m+1})$
$A_{2m-1}\text{I}$	0	$(1+t^5)(1+t^9)(1+t^{13}) \dots (1+t^{4m-3})(1+t^{2m})$
${}^0A_{2m-1}\text{II}$	0	$(1+t^5)(1+t^9)(1+t^{13}) \dots (1+t^{4m-3})$
$*A_{l\text{III}}{}_m$	C_{l+1}^m	$(1-t^{2(l-m+2)})(1-t^{2(l-m+3)}) \dots (1-t^{2(l+1)})/(1-t^2) \times$ $\times (1-t^4) \dots (1-t^{2m})$
$*B_l\text{I}_2$	$2l$	$1+t^2+t^4+\dots+t^{4l-2}$

Таблица 1 (В) (Продолжение)

Тип	$\chi(V)$	Полином Пуанкаре $P(V, t)$
$B_l I_{2m}$	$2C_l^m$	$(1 - t^{4(l-m+1)}) (1 - t^{4(l-m+2)}) \dots (1 - t^{4l}) / (1 - t^4) \times$ $\times (1 - t^8) \dots (1 - t^{4(m-1)}) (1 - t^{2m})$
$*C_l I$	2^l	$(1 + t^2) (1 + t^4) (1 + t^6) \dots (1 + t^{2l})$
$B_l II$	2	$1 + t^{2l}$
$C_l II_m$	C_l^m	$(1 - t^{4(l-m+1)}) (1 - t^{4(l-m+2)}) \dots (1 - t^{4l}) / (1 - t^4) \times$ $\times (1 - t^8) \dots (1 - t^{4m})$
$*D_l I_2$	$2l$	$(1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2l-2}) (1 + t^{2l-2})$
$D_l I_{2m}$	$2C_l^m$	$\frac{(1 - t^{4(l-m)}) (1 - t^{4(l-m+1)}) \dots (1 - t^{4(l-1)})}{(1 - t^4) (1 - t^8) \dots (1 - t^{4(m-1)})} \times$ $\times \frac{1 - t^{2l}}{(1 - t^{2m}) (1 - t^{2(l-m)})}$
$D_l I_{2m+1}$	0	$(1 - t^{4(l-m)}) (1 - t^{4(l-m+1)}) \dots (1 - t^{4(l-1)}) (1 + t^{2l-1}) /$ $/ (1 - t^4) (1 - t^8) \dots (1 - t^{4m})$
$^0 D_l II$	0	$1 + t^{2l-1}$
$*D_l III$	2^{l-1}	$(1 + t^2) (1 + t^4) (1 + t^6) \dots (1 + t^{2l-2})$
$E_6 I$	0	$(1 + t^6 + t^{16}) (1 + t^9) (1 + t^{17})$
$E_6 II$	36	$(1 + t^4 + t^8 + \dots + t^{20}) (1 + t^6 + t^{12}) (1 + t^8)$
$*E_6 III$	27	$(1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{16}) (1 + t^8 + t^{16})$
$^0 E_6 IV$	0	$(1 + t^9) (1 + t^{17})$
$E_7 V$	72	$(1 + t^6 + t^{12} + \dots + t^{30}) (1 + t^8 + t^{16}) (1 + t^{10}) (1 + t^{16})$
$E_7 VI$	21	$(1 + t^4 + t^8 + \dots + t^{24}) (1 + t^8 + t^{16}) (1 + t^{12} + t^{24})$
$*E_7 VII$	56	$(1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{26}) (1 + t^{10}) (1 + t^{18})$
$E_8 VIII$	135	$(1 + t^8 + t^{16} + t^{24} + t^{32}) (1 + t^{12} + t^{24}) (1 + t^{16} + t^{32}) \times$ $\times (1 + t^{20} + t^{40})$
$E_8 IX$	120	$(1 + t^4 + t^8 + \dots + t^{36}) (1 + t^{12} + t^{24} + t^{36}) (1 + t^{20} + t^{40})$

Таблица 1 (В) (Продолжение)

Тип	$\chi(V)$	Полином Пуанкаре $P(V, t)$
$F_4 I$	12	$(1+t^4+t^8+\dots+t^{30})(1+t^8)$
$F_4 II$	3	$1+t^8+t^{16}$
$G_2 I$	3	$1+t^4+t^8$

Предложение 17.4.3. *Римановы компактные неприводимые симметрические пространства типа II — это компактные связные простые группы Ли, снабженные двусторонне инвариантной римановой метрикой.*

Пояснения к таблице 1.

1) Символом $*$ (слева) обозначены эрмитовы симметрические пространства. Символом 0 (слева) обозначены пространства, стационарные подгруппы которых вполне негомологичны нулю в объемлющей группе $\mathfrak{G}$.

2) В третьем столбце таблицы представление многообразия V в виде $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ не обязательно совпадает с представлением $\mathfrak{G}'/\mathfrak{H}'$, где $\mathfrak{G}' = I_0(V)$. Далее, $SU^*(8) = SU(8)/\{\pm 1\}$. Стационарные подгруппы в $E_6 II$, $*E_6 III$, $E_7 VI$, $*E_7 VII$, $E_8 IX$, $F_4 I$ не являются прямыми произведениями; пересечения сомножителей непусты и являются циклическими подгруппами порядков 2, 4, 2, 3, 2, 2 соответственно.

Ограничения, сделанные на индексы во втором столбце, преследуют цель: избежать совпадений между пространствами различных классов. Изоморфизмы в малых размерностях таковы: 1) $A_1 I = A_1 III_1 = C_1 I = B_1 I_2$; 2) $C_2 I = B_2 I_2$; 3) $C_2 II_1 = B_2 I_4$; 4) $A_3 I = D_3 I_3$; 5) $A_3 II = D_3 I_1$; 6) $A_3 III_2 = D_3 I_2$; 7) $A_3 III_1 = D_3 III$; 8) $D_4 I_2 = D_4 III$.

Хотя алгебра $D_2 = A_1 + A_1$ не проста, но пространства $D_2 III$ и $BDI (SO(p+q)/SO(p) \times SO(q))$ при $p+q=4$ можно определить, что дает еще три изоморфизма: 9) $D_2 I_1 = SO(4)/SO(1) \times SO(3) = SO(4)/SO(3) = SU(2)$; 10) $D_2 I_2 = SO(4)/SO(2) \times SO(2) = A_1 I \times A_1 I$; 11) $D_2 III = SO(4)/U(2) = A_1 I$.

Мы не будем описывать инволюции для всех пространств типа I; те из них, которые нам понадобятся, в соответствующем месте будут указаны.

Если неприводимое симметрическое пространство определяется (см. выше) группой $\mathfrak{G}$, полупростой и односвязной, и инволютивным автоморфизмом θ , действующим в алгебре Ли $\mathfrak{G}$, то эта группа является максимальной связной группой изометрий этого пространства (см. [9], [70]).

§ 18. Группа Ли, содержащая вполне геодезическое подмногообразие, автоматически содержит группу изометрий этого подмногообразия

Пусть $\mathfrak{G}$ — связная компактная группа Ли и $V \subset \mathfrak{G}$ — компактное односвязное вполне геодезическое подмногообразие. Требуется выяснить, когда цикл $i_*[V]$ отличен от нуля в группе $H_*(\mathfrak{G})$. Тот случай, когда V — подгруппа, полностью разобран в пункте 17.2. Так как любое вполне геодезическое подмногообразие V в группе $\mathfrak{G}$ является симметрическим пространством, то одним из путей решения задачи может быть следующий: мы должны рассмотреть все вложения компактных симметрических пространств в группы Ли и выяснить, какие из этих вложений реализуют нетривиальные циклы.

Теорема 18.1. Пусть V — компактное односвязное вполне геодезическое подмногообразие в компактной группе Ли $\mathfrak{G}$, и пусть $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$ — совокупность всех подгрупп группы $\mathfrak{G}$, содержащих подмногообразие V . Тогда подмногообразие V распадается в прямое произведение: $V = K \times V_{m+1} \times \dots \times V_s = K \times V'$, где K — компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, а каждое V_i ($m+1 \leq i \leq s$) является вполне геодезическим подмногообразием в группе $\mathfrak{G}$ и не является подгруппой в $\mathfrak{G}$. Кроме того, это разложение обладает свойством: если $A(V) = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{G}_\alpha$, то подгруппа $A(V)$ компактна и полупроста, а универсальная накрывающая $\tilde{A}(V)$ изоморфна прямому произведению групп: $\tilde{A}(V) \cong K \times \tilde{I}_0(V_{m+1}) \times \dots \times \tilde{I}_0(V_s)$.

Доказательство. В формулировке теоремы мы предполагаем, что V проходит через единицу группы. Если $V = K$, то теорема верна; поэтому в дальнейшем можно считать, что V не является подгруппой в $\mathfrak{G}$. Обозначим через B касательное пространство $T_e(V)$ к подмногообразию V в точке e . Тогда B — тройная система и $V = \exp B$. Коммутант плоскости B мы обозначим через $[B, B]$. Тогда $[B, B]$ — подалгебра в $\mathfrak{G}$. Рассмотрим подалгебру $G_1 = B + [B, B]$ (знаком «+» обозначена сумма подпространств). Подгруппу в $\mathfrak{G}$, алгеброй Ли которой является G_1 , обозначим через $\mathfrak{G}_1$; ясно, что $\mathfrak{G}_1 = A(V)$.

Рассмотрим в G_1 подпространство $H = B \cap [B, B]$, H — идеал в G_1 . Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ — подгруппа, являющаяся замыканием подгруппы $\mathfrak{G}_1$ в $\mathfrak{G}$; алгебру Ли подгруппы $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ обозначим через $\tilde{G}_1$; тогда $\tilde{G}_1 \supset G_1$. В силу компактности группы $\mathfrak{G}$ подгруппа $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ также компактна, а потому $\tilde{G}_1$ — компактная подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$. Ясно, что G_1 — идеал в $\tilde{G}_1$. Так как каждая компактная алгебра A является прямой суммой: $A = Z \oplus [A, A]$, где Z — центр в A , а идеал $[A, A]$ компактен и полупрост, то $\tilde{G}_1 = Z \oplus G_2$, $G_2 = [\tilde{G}_1, \tilde{G}_1]$. Рассмотрим односвязную группу $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ с алгеброй Ли $\tilde{G}_1$; она распа-

дается в прямое произведение двух групп: $\tilde{\mathfrak{G}}_1 = \tilde{R} \times \tilde{\mathfrak{G}}_2$, где $\tilde{R}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}_2$ односвязны, $\tilde{R}$ диффеоморфно евклидову пространству (центр группы $\tilde{\mathfrak{G}}_1$), $\tilde{\mathfrak{G}}_2$ компактна и полупроста. Так как V односвязно, то оно «поднимается» в группу $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ «не разворачиваясь», а потому мы получаем в $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ компактное и односвязное вполне геодезическое подмногообразие $\tilde{V}$, гомеоморфное V . Пусть π_1 и π_2 — проекции прямой суммы $Z \oplus G_2$ на слагаемые Z и G_2 соответственно; через p_1 и p_2 мы обозначим соответствующие проекции в группе $\tilde{\mathfrak{G}}_1$: $\tilde{R} \xrightarrow{p_1} \tilde{\mathfrak{G}}_1 \xrightarrow{p_2} \tilde{\mathfrak{G}}_2$. Так как Z и G_2 — идеалы в G_1 , то $\exp(\pi_1 B)$ и $\exp(\pi_2 B)$ суть вполне геодезические подмногообразия в $\tilde{R}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}_2$. Ясно, что подмногообразие $\exp(\pi_1(B))$ компактно и что $\exp(\pi_1 B) = p_1(\tilde{V})$, $\exp(\pi_2 B) = p_2(\tilde{V})$. Так как $\tilde{R}$ диффеоморфно евклидову пространству, то $p_1(\tilde{V}) = e$ в группе $\tilde{R}$, т. е. все подмногообразие $\tilde{V}$ целиком содержится в $\tilde{\mathfrak{G}}_2$. Отсюда следует, что $B \subset G_2$ и $[B, B] \subset G_2$, т. е. $B + [B, B] = G_1 \subset G_2$. Так как G_1 — идеал в G_1 , то G_1 — идеал и в G_2 ; тогда существует идеал N в G_2 такой, что $G_2 = N \oplus G_1$ (прямая сумма), т. е. N будет идеалом в G_2 , а потому алгебры G_1 и N являются компактными и полупростыми. Тогда компактная полупростая группа $\tilde{\mathfrak{G}}_2$ распадается в прямое произведение групп: $\tilde{\mathfrak{G}}_2 = \tilde{N} \times \tilde{\mathfrak{G}}_1$; $\tilde{N} = \exp(N)$, где $\tilde{N}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ — компактные односвязные полупростые группы и $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ покрывает $\mathfrak{G}_1$ конечное число раз. Итак, подгруппа $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ компактна и полупроста. Так как N — идеал в G_1 , то возникает прямое разложение алгебры G_1 в сумму двух идеалов: $G_1 = N \oplus I$, что дает разложение группы $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ в прямое произведение: $\tilde{\mathfrak{G}}_1 = \tilde{K} \times \tilde{I}$, где $\tilde{K}$ и $\tilde{I}$ компактны, полупросты и односвязны. Так как $N \subset B$, то возникает разложение B в прямую сумму двух подпространств: $B = N + (B \cap I) = N + H_1$, причем $[X, Y] = 0$ при любых $X \in N$, $Y \in H_1$ соответственно, $[B, B] = N \oplus H_2$, $H_1 \subset I$, $H_2 \subset I$ и H_2 — идеал в $[B, B]$. Все эти разложения ортогональны в метрике Картана. Идеал I распадается в прямую сумму подпространств: $I = H_1 + H_2$; $H_1 \cap H_2 = 0$. Отметим, что плоскости H_1 и H_2 не обязаны быть ортогональными друг другу. Поскольку $\tilde{\mathfrak{G}}_1 = \tilde{K} \times \tilde{I}$ и $\tilde{K} \subset \tilde{V}$, то $\tilde{V}$ допускает разложение в прямое произведение: $\tilde{V} = \tilde{K} \times \tilde{V}'$, $\tilde{V}' = \exp H_1 \subset \tilde{\mathfrak{G}}_1$. Так как I — идеал в G_1 , то H_1 — тройная система в I , а H_2 — подалгебра в I , т. е. $\tilde{K}$ и $\tilde{V}'$ — вполне геодезические подмногообразия в $\tilde{\mathfrak{G}}_1$, а потому и в $\tilde{V}$, и разложение $\tilde{V} = \tilde{K} \times \tilde{V}'$ означает распадание $\tilde{V}$ в прямое произведение симметрических пространств $\tilde{K}$ и $\tilde{V}'$. Рассмотрим группу $\tilde{I}$ с алгеброй Ли I и вполне геодезическое подмногообразие $\tilde{V}'$ с касательной плоскостью H_1 ; $\tilde{V}' \subset \tilde{I}$.

Легко видеть, что $H_2 = [H_1, H_1]$, и поэтому $I = H_1 + [H_1, H_1]$, $H_1 \cap [H_1, H_1] = 0$.

Определим инволютивный автоморфизм θ на алгебре I , полагая $\theta(X) = X$, если $X \in [H_1, H_1]$, и $\theta(X) = -X$, если $X \in H_1$. Поскольку I — компактная полупростая алгебра Ли, то непосредственным вычислением убеждаемся, что подалгебра $H_2 \subset I$ не содержит ненулевых идеалов алгебры I (а потому и идеалов алгебры G_1). Отсюда следует (см. [9]), что алгебра (I, θ) допускает разложение на неприводимые идеалы (I_j, θ_j) : $I = \bigoplus I_j$ (прямая сумма идеалов); идеалы I_j попарно ортогональны (в частности, $[X_i, X_j] = 0$, если $X_i \in I_i$, $X_j \in I_j$, $i \neq j$) и инвариантны относительно θ , причем $(I_j, \theta|_{I_j})$ — неприводимые алгебры.

Группа $\tilde{I}$ распадается в прямое произведение: $\tilde{I} = \tilde{I}_{m+1} \times \dots \times \tilde{I}_s$, где все $\tilde{I}_k$, $m < k \leq s$, суть простые компактные односвязные группы; в соответствии с этим пространство $\tilde{V}'$ распадается в произведение $\tilde{V}_{m+1} \times \dots \times \tilde{V}_s$, где $\tilde{V}_k$ — компактные неприводимые симметрические пространства, причем $\tilde{V}_k = \exp B_k$, $m < k \leq s$, где $B_k = H_1 \cap I_k$. Переходя от группы $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ к группе $\mathfrak{G}_1$ путем факторизации ее по некоторой дискретной подгруппе центра, мы видим, что подмногообразие $\tilde{V}$ диффеоморфно проектируется в группу $\mathfrak{G}_1$, т. е. V представляется в виде $K \times V_{m+1} \times \dots \times V_s$ ($K \approx \tilde{K}$, $V_k \approx \tilde{V}_k$), где K , V_k — вполне геодезические подмногообразия, причем $[H, B_k] = 0$, $[B_k, B_n] = 0$, $k \neq n$, $H = T_e$.

Вернемся снова к группе $\tilde{\mathfrak{G}}_1$. Подгруппа $\tilde{I} \subset \tilde{\mathfrak{G}}_1$ односвязна; поэтому автоморфизм θ однозначно продолжается до автоморфизма $\sigma = e^\theta$ и $\tilde{V}' = \tilde{I}/\tilde{\mathfrak{G}}_2$, где $\tilde{\mathfrak{G}}_2 = \exp H_2$ — подгруппа изотропии многообразия $\tilde{V}'$, т. е. множество неподвижных точек автоморфизма σ . Так как подалгебра H_2 не содержит ненулевых идеалов алгебры I , то подгруппа $\tilde{\mathfrak{G}}_2$ эффективно действует на $T_e(\tilde{V}')$, т. е. (I, θ) определяет риманову симметрическую пару $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{G}}_2)$, эффективно действующую на $\tilde{V}'$, а тогда $\tilde{I} = \tilde{I}_0(\tilde{V}')$, $\tilde{I}_k = \tilde{I}_0(\tilde{V}_k)$, т. е. $\tilde{\mathfrak{G}}_1 = \tilde{K} \times \tilde{I}_0(V_{m+1}) \times \dots \times \tilde{I}_0(V_s)$ (так как $\tilde{V}_k$ диффеоморфно V_k), что и требовалось.

Ни одно из пространств V_k не является подгруппой в $\mathfrak{G}$, хотя и может быть диффеоморфно группе Ли. Теорема 18.1 означает, что вложение $V \rightarrow \mathfrak{G}$ продолжается до гомоморфизма группы $K \times \tilde{I}_0(V')$ в группу $\mathfrak{G}$. Отметим, что группа $\tilde{A}(V) = K \times \tilde{I}_0(V')$ не изоморфна универсальной накрывающей группе группы изометрий $I_0(V)$, так как последняя изоморфна группе $K \times K \times \tilde{I}_0(V')$, т. е. $\tilde{A}(V) = \tilde{I}_0(V)/K$, где K — максимальная подгруппа в разложении симметрического пространства на неприводимые компоненты в группе $\mathfrak{G}$. Если $V = V'$, то $\tilde{A}(V) = \tilde{I}_0(V)$.

§ 19. Редукция задачи об описании (ко)циклов, реализуемых вполне геодезическими подмногообразиями, к задаче описания (ко)гомологических свойств картановских моделей

Из теоремы 18.1 извлекается важное следствие.

Следствие 19.1. Пусть V — компактное односвязное вполне геодезическое подмногообразие в компактной группе $\mathfrak{G} = A(V)$ и $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \times V_{m+1} \times \dots \times V_s$ — разложение V на неприводимые компоненты в группе $\mathfrak{G}$ (см. теорему 18.1). Тогда подмногообразие V реализует нетривиальный цикл в $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда все подмногообразия V_i , $1 \leq i \leq s$, реализуют нетривиальные циклы в $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$. (Предполагается, что ни одно многообразие V_i не является точкой.)

Доказательство. Обозначим через i_k вложение V_k в группу $\mathfrak{G}$, и пусть i — вложение V в $\mathfrak{G}$. Рассмотрим в $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$ элементы $i_{k*}[V_k]$. Так как в $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$ определена структура понтрягинского произведения, то определен элемент $u = i_{1*}[V_1] \dots i_{s*}[V_s]$, реализованный в группе $\mathfrak{G}$ в виде цикла $U = V_1 V_2 \dots V_s$, т. е. $U = \{x_1, \dots, x_s\}$, $x_k \in V_k$. Докажем, что $u = i_*[V]$. Сначала докажем, что $V = V_1 V_2 \dots V_s$. В теореме 18.1 было установлено, что $[B_k, B_n] = 0$ при $k \neq n$ и $[H, B_k] = 0$, $m < k \leq s$, откуда и следует требуемое соотношение. Следствие доказано.

Следствие 19.1 сводит исходную задачу к следующей: дана произвольная связная компактная группа Ли $\mathfrak{G}$ и компактное односвязное вполне геодезическое неприводимое подмногообразие; требуется выяснить, когда это подмногообразие реализует нетривиальный вещественный цикл. Выше было указано, что если V — подгруппа, то вопрос полностью решается исследованием гомоморфизма $\rho^*(V; \mathfrak{G})$; более того, при этом не предполагается односвязность V . Поэтому мы можем целиком сосредоточить свое внимание на изучении вложения в группу $\mathfrak{G}$ подмногообразия V' , где $V' = V_{m+1} \times \dots \times V_s$ (см. теорему 18.1). Вложение $i: V \rightarrow \mathfrak{G}$ имеет вид композиции: $i = i_2 i_1$, где $i_1: V \rightarrow A(V)$, $i_2: A(V) \rightarrow \mathfrak{G}$. Так как $i_* = i_{2*} i_{1*}$, то в первую очередь исследуем гомоморфизм i_{1*} . Эта задача будет нами ниже полностью решена: мы вычислим элемент $i_{1*}[V] \in H_*(A(V); \mathbb{R})$ для каждого неприводимого компактного симметрического пространства V . Поскольку вложение $i: V \rightarrow \tilde{A}(V)$ однозначно (с точностью до сопряженности), то пару $(A(V), V)$ можно рассматривать как элементарную ячейку, которую можно мономорфно отображать в компактные группы Ли.

Если $i_{1*}[V] = 0$, то и $i_*[V] = 0$. Если же $i_{1*}[V] \neq 0$, то это не означает, что и $i_*[V] \neq 0$; поэтому в том случае, когда $i_{2*}[A(V)] = 0$, требуется дополнительное исследование гомоморфизма i_{2*} на элементе $i_{1*}[V]$. Ясно, что в каждом конкретном случае этот вопрос может быть до конца изучен.

Итак, неприводимое односвязное компактное пространство V вложено как вполне геодезическое подмногообразие в группу $A(V)$,

которая, вообще говоря, не односвязна. Легко видеть, что подмногообразие V реализует нетривиальный цикл в $\tilde{A}(V)$ тогда и только тогда, когда нетривиальный цикл реализует подмногообразие $\tilde{V}$, диффеоморфное V , в накрытии $\tilde{A}(V)$. Достаточно изучить вложения многообразия V в односвязную группу $\tilde{I}_0(V) = \tilde{A}(V)$.

Эти вложения можно описать каноническим образом, используя наличие инволютивного автоморфизма θ , определяющего симметрическое пространство V . Вложение неприводимого симметрического пространства V в $\tilde{A}(V)$ порождает в алгебре G_1 инволютивный автоморфизм θ , $\theta(B) = -B$, $\theta(H) = H$. В силу односвязности $\tilde{A}(V)$ автоморфизм θ продолжается до инволютивного автоморфизма всей группы; тогда множество неподвижных точек автоморфизма σ связно (см. [9]), откуда следует, что это множество совпадает с подгруппой $\mathfrak{H}$. Вполне геодезическое подмногообразие $V \subset \tilde{A}(V)$ состоит, очевидно, из тех элементов, для которых $\sigma(g) = g^{-1}$.

Оказывается, что, и обратно, любое неприводимое симметрическое пространство V допускает вложение в группу $\tilde{I}_0(V)$ в виде вполне геодезического подмногообразия.

Предложение 19.1 (см. [71]). Пусть σ — инволютивный автоморфизм компактной связной группы Ли $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ множество всех его неподвижных точек и предположим, что на $\mathfrak{G}$ задана инвариантная метрика. Тогда отображение $g\mathfrak{H} \rightarrow g\sigma(g^{-1})$ является диффеоморфизмом многообразия $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ на замкнутое вполне геодезическое подмногообразие V в группе $\mathfrak{G}$, которое является симметрическим пространством в индуцированной римановой метрике.

Если группа $\mathfrak{G}$ односвязна, то и многообразие $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — множество неподвижных точек автоморфизма σ , также односвязно. Поскольку любое вложение $i: V \rightarrow \tilde{A}(V)$ определяет один и только один автоморфизм θ (с точностью до сопряженности), то из предложения 19.1 следует, что это вложение является картановским в том смысле, что подмногообразие V допускает представление в виде $\{g\sigma(g^{-1})\}$, где $\sigma = e^\theta$, а элемент g пробегает всю группу $\tilde{A}(V)$. Легко доказать, что действие группы $\tilde{A}(V)$ на V можно представить так: $g(a) = ga\sigma(g^{-1})$, где $a \in V$, $g \in \tilde{A}(V)$. Если $g \in V$, то $g(a) = gag$; если $g \in \mathfrak{H}$, то $g(a) = ga g^{-1}$, т. е. подгруппа $\mathfrak{H}$ действует посредством вращений, а подмногообразие V действует на V сдвигами. В дальнейшем через $\mathfrak{G}$ будем обозначать универсальную накрывающую максимальной связной группы изометрий $I_0(V)$ компактного односвязного неприводимого пространства V . Рассмотрим отображение $p: \mathfrak{G} \rightarrow V \subset \mathfrak{G}$, $p(g) = g\sigma(g^{-1})$.

Лемма 19.1. Непрерывное отображение p определяет главное расслоенное пространство $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G} \overset{p}{\rightarrow} V$ со слоем $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Рассмотрим в $\mathfrak{G}$ классы смежности $g\mathfrak{h}$ по подгруппе $\mathfrak{h}$. Если g_1 и g_2 принадлежат одному классу смежности, то, очевидно, $p(g_1) = p(g_2)$. Обратно, если $p(g_1) = p(g_2)$, то $g_1\sigma(g_1^{-1}) = g_2\sigma(g_2^{-1})$, или $\sigma(k^{-1}) = k^{-1}$, где $k = g_2^{-1}g_1$, т. е. $k \in \mathfrak{h}$ и $g_1 = g_2h$, так как множество неподвижных точек связно. Лемма доказана.

Лемма 19.2. *Каждый класс смежности $g_0\mathfrak{h}$ имеет с подмногообразием V непустое пересечение.*

Доказательство. Допустим противное: пусть существует такой класс $g_0\mathfrak{h}$, что $(g_0\mathfrak{h}) \cap V = \emptyset$. Рассмотрим на подмногообразии V точку $m_0 = p(g_0\mathfrak{h})$, и пусть $m' = \sqrt{m_0}$ есть обозначение такой точки из V , что $(m')^2 = m_0$. Если таких точек несколько, то возьмем любую из них. Если $v \in V$, то $v = g\sigma(g^{-1})$ для некоторого $g \in \mathfrak{G}$, а потому $\sigma(v) = (g\sigma(g^{-1}))^{-1}$, т. е. $\sigma(v) = v^{-1}$, причем выбор элемента g несуществен. Отображение p является отображением группы $\mathfrak{G}$ на подмногообразие V , что позволяет рассмотреть сквозное отображение $pi: V \rightarrow V$, $pi(v) = v\sigma(v^{-1})$, т. е. $pi(v) = v^2$ и отображение pi действует на V как «возведение в квадрат» в смысле операции в группе $\mathfrak{G}$. Поскольку $m_0 = (m')^2$, то $m_0 = pi(m')$. Рассмотрим класс $m'\mathfrak{h}$; тогда $m' \in m'\mathfrak{h} \cap V$ и $p(m'\mathfrak{h}) = m_0$, т. е. полный прообраз точки m_0 при проекции p содержит точки двух классов смежности: $m'\mathfrak{h}$ и $g_0\mathfrak{h}$. Из леммы 19.1 следует, что $m'\mathfrak{h} = g_0\mathfrak{h}$, а потому $g_0\mathfrak{h} \cap V \neq \emptyset$ и содержит, по крайней мере, точку m' , что противоречит исходному предположению. Лемма доказана.

Из леммы 19.2 следует, что произвольный класс $g\mathfrak{h}$ можно представить в виде $m\mathfrak{h}$, где $m \in V$. Если $g \in \mathfrak{G}$, то через $\sqrt{g}$ будем обозначать такой элемент g' , что $(g')^2 = g$, а через $\{\sqrt{g}\}$ — множество всех таких элементов из $\mathfrak{G}$.

Лемма 19.3. *Пусть $m\mathfrak{h}$ — произвольный класс смежности, $m \in V$. Тогда $m\mathfrak{h} \cap V = \{\sqrt{m^2}\} \cap V$.*

Доказательство. Докажем, что $\{\sqrt{m^2}\} \cap V \subset m\mathfrak{h} \cap V$. Действительно, пусть m_1 , $m \in V$ и $m_1^2 = m^2$; тогда $m_1\sigma(m_1^{-1}) = m\sigma(m^{-1})$ (см. выше) и $(m^{-1}m_1)\sigma(m_1^{-1}m) = e$, т. е. $k\sigma(k^{-1}) = e$, где $k = m^{-1}m_1$. Так как $p(k) = e$, то $k \in \mathfrak{h}$ и $m_1 = mh$, где $h \in \mathfrak{h}$. Обратно, покажем, что $\{\sqrt{m^2}\} \cap V \supset m\mathfrak{h} \cap V$. Пусть $v \in m\mathfrak{h}$, $v \in V$; тогда $v = mh$, $h \in \mathfrak{h}$ и $v^2 = v\sigma(v^{-1}) = m^2$, т. е. $v \in \{\sqrt{m^2}\}$. Лемма доказана.

Отметим, что «нулевой класс смежности» — подгруппа $\mathfrak{h}$ — пересекается с V по множеству таких точек v , что $v^2 = e$. Отображение «возведения в квадрат» можно было бы определить и вне зависимости от вложения $V \subset \mathfrak{G}$, используя представление произвольной точки $v \in V$ как точки на геодезической, исходящей из фиксированной точки $e \in V$, а затем удваивая значение t_0 параметра t , отвечающее точке v на этой геодезической. Выше мы

доказали корректность этого определения для симметрических пространств.

Утверждение 19.1. Пусть pi — отображение «возведения в квадрат» симметрического пространства $V = \mathbb{G}/\mathbb{H}$. Вполне геодезическое подмногообразие $V \subset \mathbb{G}$ реализует нетривиальный цикл в $H_*(\mathbb{G}; \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда степень отображения $pi: V \rightarrow V$ отлична от нуля.

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна. Докажем необходимость. Обозначим через f следующее отображение группы $\mathbb{G}$ на себя: $f(g) = g^2$. Так как $pi(v) = v^2$, где $v \in V$, то возникает коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} & \xrightarrow{f} & \mathbb{G} \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow{pi} & V \end{array}$$

Рассмотрим гомоморфизм $f_*: H_*(\mathbb{G}; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(\mathbb{G}; \mathbb{R})$. Хорошо известно, что $f_*(x) = 2x$ для любого примитивного элемента $x \in H_*(\mathbb{G}; \mathbb{R})$, поэтому f_* — изоморфизм. Если предположить, что $\deg(pi) = 0$, то $(pi)_*[V] = 0$ и $(i \circ pi)_*[V] = 0$, т. е. $(fi)_*[V] = 0$, что и дает $i_*[V] = 0$. Утверждение доказано.

§ 20. Теорема классификации, описывающая вполне геодезические подмногообразия, реализующие нетривиальные (ко)циклы в (ко)гомологиях компактных групп Ли

20.1. Формулировка теоремы классификации. Выше было показано, что наша основная задача данной главы — описание (ко)гомологически нетривиальных локально минимальных (вполне геодезических) подмногообразий в компактных группах Ли (и вообще в симметрических пространствах) — сводится к решению задачи: когда неприводимое компактное симметрическое пространство V , вложенное в свою группу изометрий $\tilde{I}_0(V)$ как картановская модель, реализует нетривиальный (ко)цикл в $H_*(\tilde{I}_0(V))$.

Теорема 20.1.1. Пусть $i: V \rightarrow \tilde{I}_0(V) \cong \tilde{A}(V)$ — некоторое вложение риманова компактного неприводимого односвязного симметрического пространства V как вполне геодезического подмногообразия в односвязную максимальную связную группу изометрий $\tilde{I}_0(V)$. Тогда это вложение — картановское, т. е. получается из стандартного картановского вложения применением некоторого автоморфизма группы $\tilde{I}_0(V)$. Ниже перечислены все случаи, когда это вложение (ко)гомологически нетривиально.

(1) Из симметрических пространств V типа I только следующие пространства реализуют нетривиальные (ко)циклы в группе $\tilde{I}_0(V)$:

1а. $V = \mathrm{SU}(2m+1)/\mathrm{SO}(2m+1)$, $m \geq 1$, в группе $I_0(V) = \tilde{I}_0(V) = \mathrm{SU}(2m+1)$, $i_*[V] \neq 0$ в $H^*(\tilde{I}_0(V), \mathbf{Z}_p)$, $p \neq 2$, и p — простое, если $p \neq 0$.

1б. $V = \mathrm{SU}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$, $m \geq 2$, в группе $I_0(V) = \tilde{I}_0(V) = \mathrm{SU}(2m)$, $i_*[V] \neq 0$ в $H^*(\tilde{I}_0(V), \mathbf{Z})$.

1в. $V = S^{2l-1} = (\text{сфера}) = \mathrm{SO}(2l)/\mathrm{SO}(2l-1)$, $l \geq 4$, в группе $\tilde{I}_0(V) = \mathrm{Spin}(2l)$, $i_*[V] \neq 0$ в $H^*(\tilde{I}_0(V), \mathbf{Z}_p)$, $p \neq 2$, и p — простое, если $p \neq 0$.

1г. $V = E_6/F_4$ в группе $\tilde{I}_0(V) = E_6$, $i_*[V] \neq 0$ в $H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbf{Z}_p)$, $p \geq 7$ и простое, либо $p = 0$.

Все остальные пространства типа I не реализуют никакого нетривиального коцикла в $H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{R})$, т. е. $i_*[V] = 0$.

(2) Любое симметрическое пространство V типа II всегда реализует нетривиальный (ко)цикл в $H^*(I_0(V); \mathbb{R})$.

Теорема 20.1.2. Пусть V — произвольное компактное односвязное вполне геодезическое подмногообразие в компактной группе Ли $\mathfrak{G}$, и пусть $V = K \times V_{m+1} \times \dots \times V_s = K \times V'$ — разложение многообразия V в прямое произведение (см. теорему 18.1). Многообразие V при вложении $i: V \rightarrow \tilde{A}(V)$ реализует нетривиальный коцикл в $H^*(\tilde{A}(V); \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда подгруппа $K \times \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — стационарная подгруппа многообразия V' (напомним: $\mathfrak{H} \subset \tilde{A}(V') \subset \tilde{A}(V)$), — вполне негомологична нулю в группе $\tilde{A}(V)$ для вещественных коэффициентов.

20.2. Случай пространств типа II. Утверждение 19.1 сводит исходную задачу к чисто геометрической задаче вычисления степени гладкого отображения $pi: V \rightarrow V$; $(pi)(v) = v^2$. Мы начнем с симметрических пространств типа II.

Пространства типа II — это в точности компактные связные простые группы Ли V с двусторонне инвариантной римановой метрикой. При изучении пространств типа II односвязность можно не предполагать. Группа $I_0(V)$ изоморфна прямому произведению групп $V \times V$ (см. [9]); инволютивный автоморфизм $\sigma: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = I_0(V)$, определяющий симметрическое пространство V , имеет вид $\sigma(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$; множество неподвижных точек автоморфизма σ есть подгруппа $\mathfrak{H} = \{(v, v)\}$, т. е. $\mathfrak{H}$ — диагональ в прямом произведении. Пусть G и K — алгебры Ли групп $\mathfrak{G}$ и V соответственно, тогда $G = K \oplus K$. С другой стороны, G распадается в прямую сумму двух собственных подпространств автоморфизма θ , где $\theta(X, Y) = (Y, X)$, $(X, Y) \in G$, $G = B + H$, $\theta(H) = H$.

Так как $\sigma(v, v^{-1}) = (v, v^{-1})^{-1}$, то пространство V вложено в группу $V \times V$ как вполне геодезическое подмногообразие, составленное из всех точек вида (v, v^{-1}) . Отображение $p: \mathfrak{G} \rightarrow V$ имеет вид $p(g) = (v_1 v_3^{-1}, v_2 v_1^{-1}) \in i(V)$, где $g = (v_1, v_2)$, откуда $pi(g) = g^2$ и отображение p устанавливает диффеоморфизм между V и $V \times V / \mathfrak{H}$. Отметим, что поскольку вложение $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ является вложением группы V как диагонали, то подгруппа $\mathfrak{H}$ вполне

негомологична нулю в группе $\mathfrak{G}$. Пусть $H_*(V; \mathbb{R}) = \Lambda(x_1, \dots, x_r)$, r — ранг V , а элементы $x_1, \dots, x_r$ являются примитивными образующими кольца $H_*(V; \mathbb{R})$. Тогда $j_*(x_\alpha) = x_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes x_\alpha$, где $j: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ — вложение, а потому мономорфным образом кольца $H_*(V; \mathbb{R})$ при гомоморфизме j_* является подкольцо $j_*H_*(V; \mathbb{R}) = \Lambda(x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1, \dots, x_r \otimes 1 + 1 \otimes x_r)$.

Известно, что степень отображения $f_k: V \rightarrow V$, $f_k(v) = v^k$, равна k^r , где r — ранг V , для произвольной компактной группы Ли V . В нашем случае $p_i = f_2$, поэтому $\deg(p_i) = 2^r$, и в силу свойств отображения p_i подмногообразие V реализует нетривиальный цикл в $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$. Вычислим элемент $i_*[V]$. Рассмотрим отображение $\alpha: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$, $\alpha(v_1, v_2) = (v_1, v_2^{-1})$; тогда гомоморфизм $\alpha_*: H_*(V) \otimes H_*(V) \rightarrow H_*(V) \otimes H_*(V)$ устроен так: $\alpha_*(a \times 1) = a \otimes 1$ при любом $a \in H_*(V)$ и $\alpha_*(1 \times x) = -(1 \otimes x)$ для любого элемента $x \in H_*(V)$. Рассмотрим в $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$ элементы $\omega_i = \frac{1}{2}(x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i)$; тогда $p_*(\omega_i) = x_i$ и, очевидно, $i_*[V] = 2^r \prod_{i=1}^r \omega_i$. Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема 20.2.1. Пусть $i: V \rightarrow \tilde{I}_0(V)$ — картановское вложение риманова компактного неприводимого односвязного симметрического пространства типа II в односвязную максимальную группу изометрий $\tilde{I}_0(V)$. Тогда вполне геодезическое подмногообразие $i(V)$ всегда реализует нетривиальный цикл в $H_*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{R}) = \Lambda(x_1, \dots, x_r) \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_r)$, r — ранг V , причем $i_*[V] = 2^r \prod_{i=1}^r \frac{1}{2}(x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i)$.

20.3. Случай пространств типа I. (Ко)гомологически тривиальные картановские модели. Свойства отображения возведения в квадрат симметрического пространства. Переходим к изучению пространств типа I (см. таблицу 1). Начнем с описания тех случаев, когда циклы $i_*[V]$ тривиальны.

Так как для пространств $A_l I_{III_m}$, $B_l I_2$, $B_l I_{2m}$, $B_l II$, $C_l I$, $C_l II_m$, $D_l I_2$, $D_l I_{2m}$, $D_l III$, $E_6 II$, $E_6 III$, $E_7 V$, $E_7 VI$, $E_7 VII$, $E_8 VIII$, $E_8 IX$, $F_4 I$, $F_4 II$, $G_2 I$ полином Пуанкаре содержит только четные степени t (см. [81]), то $i_*[V] = 0$. Рассмотрим пространства $D_l I_{2m+1}$, $l \geq 4$, $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor$, $P(V, t) = (1 + t^{2l-1})Q(t)$, где $Q(t) = Q(-t)$. Отсюда следует, что $H^*(V; \mathbb{R}) = \Lambda(u_{2l-1}) \otimes Q$, где подалгебра Q порождена образующими $q_1, \dots, q_r$ четных степеней. Так как $u_{2l-1}^2 = 0$, то любой элемент $x \in H^s(V; \mathbb{R})$, $x \neq 0$, где s нечетно, должен иметь вид $x = u_{2l-1}q$, где $q \in Q$. Односвязной группой изометрий $\tilde{I}_0(V)$ многообразия V является группа $\text{Spin}(2l)$. Рассмотрим гомоморфизм i_* , где $i: V \rightarrow \text{Spin}(2l)$ — картановское вложение. Вычислим элементы $i^*(x_\alpha)$, где $\alpha \in \{3, 7, 11, \dots, 4l-5, 2l-1\}$. Если

$\alpha < 2l - 1$, то $i^*(x_\alpha) = 0$. Элемент $i^*(x_{2l-1})$ не обязан быть тривиален; точно так же могут отобразиться не в нуль образующие x_α при $2l - 1 \leq \alpha \leq 4l - 5$ и «особая» образующая x_{2l-1} . Так как степени всех этих образующих нечетны, то $i^*(x_\alpha) = u_{2l-1} q'_\alpha$, $2l - 1 \leq \alpha \leq 4l - 5$; $i^*(x_{2l-1}) = a \cdot u_{2l-1}$, $a \in \mathbb{R}$, $q'_\alpha \in \mathbb{Q}$.

Легко видеть, что все произведения вида $x_\alpha x_\beta$ переходят в нуль, так что единственными элементами кольца $H^*(\text{Spin}(2l); \mathbb{R})$, которые могут перейти не в нуль, являются элементы x_α при $2l - 1 \leq \alpha \leq 4l - 5$ и x_{2l-1} . Так как $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor$, то $l > 2m \geq 2$, и, сопоставляя это с очевидным неравенством $2m \geq \frac{2(m^2+m-1)}{2m-1}$, получаем $l > \frac{2(m^2+m-1)}{2m-1}$, что дает $4l - 5 < \dim V$, т. е. $i_*[V] = 0$. Для пространства $E_6 I$ также имеем $i_*[V] = 0$, так как $\dim V = 42$.

Нам осталось рассмотреть следующие пространства: ${}^0 A_{2m} I$, ${}^0 A_{2m-1} I$, ${}^0 A_{2m-1} II$, ${}^0 D_l II$, ${}^0 E_6 IV$. Сначала построим специальные базисы $B(t_i)$ и $B(t^a)$.

Рассмотрим произвольное компактное симметрическое пространство V , и пусть T — некоторое максимальное абелево подмногообразие в V . Пусть $\mathfrak{G} = \tilde{I}_0(V)$, $\mathfrak{H}$ — стационарная группа некоторой точки $e \in T$. Будем считать, что V вложено в группу $\mathfrak{G}$ как картановская модель. Хорошо известно, что для любой точки $v \in V$ всегда существует такой элемент $h \in \mathfrak{H} \subset I_0(V)$, что $hvh^{-1} \in T$, где T — фиксированное максимальное плоское подпространство в V .

Группа $\mathfrak{H}$, действуя присоединенным образом на V , расслаивает его на орбиты, причем каждая орбита содержит точки подмногообразия T . Если t — произвольная точка из T , то орбита $O(t)$ диффеоморфна однородному пространству $\mathfrak{H}/\mathfrak{H} \cap C(t)$, где через $C(x)$ мы будем обозначать централизатор элемента x . Так как $V \subset \mathfrak{G}$, то подмногообразие T можно представить как пересечение $T_0 \cap V$, где T_0 — максимальный тор в группе $\mathfrak{G}$. Каждая орбита $O(t)$ встречается с тором T в конечном числе точек, и все эти точки сопряжены друг другу при действии на торе T нормализатора $N(T)$. Более того, орбита $O(t)$ встречает тор T в этих точках трансверсально и касательные пространства $T_t(O(t))$ и $T_t(T)$ ортогональны друг другу. Теперь рассмотрим отображение $pi: V \rightarrow V$, $pi(v) = v^2$, которое будем обозначать через f . Ясно, что $f(T) \subset T$.

Лемма 20.3.1. *Отображение f коммутирует с присоединенным действием группы $\mathfrak{H}$ на многообразии V .*

Эта лемма очевидна. Итак, при отображении f орбита точки t отображается в орбиту точки $t^2 = f(t)$.

Обозначим через $\Omega(V)$ множество сингулярных элементов пространства $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ (см. [9]). Дополнение $R(V) = V \setminus \Omega(V)$

называется регулярным множеством в V . Отметим для дальнейшего, что квадратный корень из регулярного элемента снова регулярен (является регулярным элементом).

Лемма 20.3.2. Пусть $t^2 \in T$ — регулярный элемент и t — произвольный квадратный корень из элемента t^2 . Тогда при отображении f орбита $O(t)$ гомеоморфно отображается на орбиту $O(t^2)$.

Доказательство. Допустим, что существуют две точки x_1 и x_2 , принадлежащие $O(t)$, такие, что $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$. Так как $x_1, x_2 \in O(t)$, то $x_1 = a_1 t a_1^{-1}$, $x_2 = a_2 t a_2^{-1}$ для некоторых элементов a_1 и a_2 из подгруппы $\mathfrak{H}$. Тогда $a_2^{-1} a_1 t^2 = t^2 a_2^{-1} a_1$, т. е. $a_2^{-1} a_1 \in C(t^2) \cap \mathfrak{H}$. Так как t и t^2 регулярны, то $C(t) \cap \mathfrak{H} = C(t^2) \cap \mathfrak{H}$ и поэтому $x_1 = x_2$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Отсюда следует, что достаточно исследовать свойства отображения f , ограниченного на тор T . Если $t^2 = f(t)$ и $t^2 \in R(V)$, то существует достаточно малая окрестность U точки t^2 такая, что $U \subset R(V)$ (множество Ω замкнуто в V) и $f^{-1}(U) \subset R(V)$. Отображение f является возведением в квадрат, поэтому оно гладкое и регулярное в окрестности $f^{-1}(U)$. Известно (см. [9]), что $\dim \Omega \leq \dim V - 2$, а потому множество R связно. Поскольку отображение f гладкое, то для определения степени $\deg f$ достаточно подсчитать его степень на множестве $R(V)$.

Пусть $\text{rang } V = l$. Если $t^2 \in R(V)$, то все прообразы t_i этого элемента при отображении f принадлежат тору T , причем все они различны и их число равно 2^l . Выберем на торе T ориентацию и поместим во все точки t_i l -реперы, ориентации которых совпадают с ориентацией T ; еще один l -репер с такой же ориентацией поместим в точку t^2 . Рассмотрим отображение $df: T_{t_i}(T) \rightarrow T_{t^2}(T)$; тогда очевидно, что при отображении f ориентация тора не меняется и l -реперы в точках t_i переходят в l -репер в точке t^2 с сохранением ориентации. Фиксируем точку t_i , в касательном пространстве $T_{t_i}(V)$ выделим подпространство $T_{t_i}(T)$, в котором мы уже выбрали базис $e_1(t_i), \dots, e_l(t_i)$; будем обозначать этот базис через $E(t_i)$. Дополним набор векторов $E(t_i)$ до базиса $B(t_i)$ во всем пространстве $T_{t_i}(V)$. Рассмотрим отображение $Q_i: \mathfrak{H} \rightarrow O(t)$, $t \in T$; $Q_i(h) = h t h^{-1}$, $Q_i(\mathfrak{H} \cap C(t)) = t$; через q_i обозначим дифференциал отображения Q_i ; $q_i: H \rightarrow T_{t_i}(V)$. Рассмотрим левый сдвиг $L_i: g \rightarrow t g$ и перенесем касательное пространство $T_{t_i}(V)$ в точку e с помощью отображения $l_{t^{-1}} = dL_{t^{-1}}$; тогда $l_{t^{-1}}(T_{t_i}(V)) \subset G$. Пусть $X \in H$, тогда $q_i(X) = l_{t^{-1}}(E - \text{Ad}(t))(X)$. В подалгебре H возьмем плоскость A , ортогональную подалгебре $N = T_e C(t)$; $H = N + A$. По определению отображения q_i $\text{Ker } q_i = N$, а потому q_i невырождено на плоскости A и эта плоскость линейно отображается на пространство $T_{t^2}(O(t))$.

Выберем в плоскости A произвольный базис $\{A_1, \dots, A_p\} = A(e)$ и в качестве базиса в $T_{t^2}(O(t))$ возьмем $q_i(A(e)) = \dot{A}(t)$. Теперь определим в каждой точке t_i базис $B(t_i)$ в $T_{t_i}(V)$ следу-

щим образом: $B(t_i) = \{E(t_i); A(t_i)\}$. Аналогично и в точке t^2 определим базис $B(t^2)$. Итак, будем считать, что ориентация многообразия определяется базисом $B(t^2)$ в точке t^2 . Базисы $E(t^2)$ и $E(t_i)$ можно выбрать так, что $df(e_\alpha(t_i)) = 2e_\alpha(t^2)$; формально будем записывать, что $df(E(t_i)) = 2E(t^2)$.

Лемма 20.3.3. Пусть $t^2 \in R(V)$, и пусть $B(t_i)$ и $B(t^2)$ — описанные выше базисы. Тогда $df(B(t_i)) = (2E(t^2); A(t^2))$.

Доказательство. Достаточно показать, что $df(A(t_i)) = A(t^2)$. Будем считать, что группа $\mathfrak{G}$ вложена в унитарную группу $U(M)$. Рассмотрим точку t_i и бесконечно близкую к ней точку $t_i + \varepsilon X$, где вектор $X \in T_{t_i}(V)$ имеет вид $X = \sum x_\alpha q_{t_i}(A_\alpha)$. Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} f(t_i + \varepsilon X) &= f[\text{Ad}(e + \varepsilon(\sum x_\alpha A_\alpha))(t_i)] = \\ &= \text{Ad}(e + \varepsilon(\sum x_\alpha A_\alpha))(t^2) = t^2 + \varepsilon \sum x_\alpha q_{t^2}(A_\alpha). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $df(q_{t_i}(A_\alpha)) = q_{t^2}(A_\alpha)$. Лемма доказана.

Итак, $\deg f = \sum_{i=1}^{2l} cB(t_i)$, где $cB(t_i) = +1$, если ориентация V , определяемая $B(t_i)$, совпадает с ориентацией V , определяемой $B(t^2)$, и $cB(t_i) = -1$ в противном случае.

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем следовать единой общей схеме, небольшие вариации в которой обусловлены конкретными особенностями симметрических пространств.

20.4. Случай пространств типа I. Пространства $SU(k)/SO(k)$. Рассмотрим пространство ${}^0A_{2m}I$: $V = SU(2m+1)/SO(2m+1)$, $m \geq 1$, ранг $V = 2m = \text{ранг } \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} = SO(2m+1)$ вполне негомологична нулю в группе $SU(2m+1)$ для вещественных коэффициентов; $P(V, t) = (1+t^5)(1+t^9)\dots(1+t^{4m+1})$. Пространство $A_{2m-1}I$ имеет вид $V = SU(2m)/SO(2m)$, $m \geq 2$, ранг $V = 2m-1 = \text{ранг } \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} = SO(2m)$, причем подгруппа $\mathfrak{H}$ уже не является вполне негомологичной нулю; $P(V, t) = (1+t^5)(1+t^9)\dots(1+t^{4m-3})(1+t^{2m})$. В обоих случаях группой изометрий $I_0(V)$ многообразия $V = SU(n)/SO(n)$, $n \geq 3$, является группа $SU(n)$. Инволютивный автоморфизм θ в алгебре A_{n-1} имеет вид $\theta(X) = \bar{X}$, где черта обозначает комплексное сопряжение; автоморфизм θ продолжается до инволютивного автоморфизма $\sigma(g) = \bar{g}$.

Рассмотрим в алгебре G плоскость B , на которой автоморфизм θ равен $-E$; эта плоскость составлена из симметрических чисто мнимых матриц порядка n со следом 0. Плоскость B — касательное пространство к картановской модели $V = \{g\sigma(g^{-1})\} = \{gg^T\}$, и так как $v^T = v$, $v \in V$, то модель симметрического пространства состоит из всех унитарных симметрических матриц s , и только из них. Максимально абелево подпространство S в пространстве B

состоит из всех диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} i\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_n \end{pmatrix},$$

где $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 0$, $\text{rang } V = \text{rang } \mathfrak{G}$, а потому $S = S_0$, $T = T_0$. Рассмотрим пересечение $\mathfrak{H} \cap V$. В силу леммы 19.3 достаточно описать все такие элементы $v \in V$, что $v^2 = e$. Легко видеть, что $\mathfrak{H} \cap V = \bigcup_{(p)} \text{SO}(n)/S(O(p) \times O(n-p))$; это означает, что мы не

можем использовать нулевой класс смежности для определения индекса пересечения двух циклов дополнительных размерностей V и $\mathfrak{H}$. Так как $T = T_0$, то $C(t) = T$, если $t \in R(V)$. Пусть $t \in \in R(V)$, тогда $O(t) = \text{SO}(n)/\Pi$, $\Pi = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2}_{(n-1)}$; отображение

$q_t: H \rightarrow T_t(O(t))$ является изоморфизмом линейных пространств, и в качестве базиса $A(e)$ мы должны взять базис подалгебры H .

Рассмотрим накрывающее пространство S , отнесенное к координатам $\varphi_1, \dots, \varphi_n$; $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 2\pi$. В качестве координат на торе T возьмем линейные формы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ такие, что $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$. Области на торе, заполненные регулярными элементами, описываются наборами $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, где $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$. Каждая такая область связна и гомеоморфна открытому $(n-1)$ -мерному симплексу. Рассматривая всевозможные наборы $(i_1, \dots, i_n)$, получаем покрытие множества $R(V)$ камерами Вейля. Рассмотрим группу Вейля $W(\mathfrak{G})$ (см. пункт 17.2). Эта группа переставляет между собой компоненты множества $R(V)$ и просто транзитивна на множестве всех камер Вейля.

Группа $\text{SU}(n)$ рассматривается нами в стандартном представлении минимальной размерности в линейном пространстве L с базисом $e_1, \dots, e_n$. Рассмотрим элемент n_{ij} , $i \neq j$, принадлежащий подгруппе $\text{SO}(n)$ и представленный в пространстве L следующим преобразованием: $n_{ij}(e_i) = e_j$, $n_{ij}(e_j) = -e_i$, $n_{ij}(e_k) = e_k$ при $k \neq (i, j)$; если $i = j$, то будем считать, что n_{ij} — тождественное преобразование. Тогда образующими группы Вейля являются преобразования $w_{ij}: T \rightarrow T$ такие, что $w_{ij}(t) = n_{ij} t n_{ij}^{-1}$, $t \in T$. Рассмотрим в подгруппе $\text{SO}(n)$ подгруппу W' , порожденную элементами n_{ij} , $i \neq j$, и n_{ii} . Тогда W' изоморфна группе Вейля. Каждый набор $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ определяет набор $\sigma = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, т. е. ориентацию тора, знак которой совпадает с четностью перестановки, переводящей набор σ в стандартный набор $(1, 2, \dots, n)$. Выберем теперь регулярный элемент t_0^s , для которого подсчитаем степень отображения f : 1) $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$; 2) $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 2\pi$; 3) $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-2s} < \varphi_{n-2s+1}$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Рассмотрим базисы $E(t_0^s)$ и $E(t_{0i})$, определяющие одну и ту же ориентацию тора. Для краткости ориентацию базиса $B(t)$

обозначим символом $\text{ог } B(t)$; если два базиса определяют одну и ту же ориентацию, то будем писать $\text{ог } B(t) = \text{ог } B'(t)$, если противоположную, то $\text{ог } B(t) = -\text{ог } B'(t)$.

Лемма 20.4.1. Пусть $t_0^{\sharp} \in \Delta_{12\dots n} \subset R(V)$, и предположим, что $t_{0i} \in \Delta_{12\dots n}$. Тогда $\text{ог } B(t_{0i}) = \text{ог } B(t_0^{\sharp})$.

Доказательство. Так как область $\Delta_{12\dots n}$ связна, то точки $t_0^{\sharp}$ и t_{0i} можно соединить гладким путем $\gamma(t)$, целиком содержащимся в $\Delta_{12\dots n}$. Репер $E(t_{0i})$ можно непрерывным образом перенести вдоль пути $\gamma(t)$ так, чтобы этот репер все время оставался касательным к тору и чтобы в момент времени $\tau=1$ он совпал с репером $E(t_0^{\sharp})$. Рассмотрим вдоль пути $\gamma(\tau)$ орбиты $O(\gamma(\tau))$. Определим непрерывную деформацию репера $A(t_{0i})$ вдоль пути $\gamma(\tau)$, положив $F_{\tau}(A(t_{0i})) = A(\gamma(\tau))$; $\gamma(0) = t_{0i}$, $\gamma(1) = t_0^{\sharp}$. В каждый момент времени репер $A(\gamma(\tau))$ ортогонален тору. Лемма доказана.

Рассмотрим симплекс $\Delta_{i_1\dots i_n}$ и обозначим через σ перестановку, переводящую набор $(1, 2, \dots, n)$ в набор $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Тогда симплекс $\Delta_{12\dots n}$ отображается в симплекс $\Delta_{i_1\dots i_n}$ преобразованием $\omega_{\sigma} \in W(\mathfrak{G})$, $\omega_{\sigma}(t) = n_{\sigma} t n_{\sigma}^{-1}$, $n_{\sigma} \in W'$, $n_{\sigma} = n_{i_1 i_1} n_{i_2 i_2} \dots n_{i_s i_s}$, где $\sigma = \sigma_{i_1 i_1} \dots \sigma_{i_s i_s}$ — разложение σ в композицию элементарных перестановок. Через $c(\sigma)$ обозначим четность перестановки σ .

Лемма 20.4.2. Пусть корень t_{0i} принадлежит симплексу $\Delta_{i_1\dots i_n}$, где $(i_1, \dots, i_n) = \sigma(1, 2, \dots, n)$. Тогда $\text{ог } B(t_{0i}) = \text{ог } B(t_0^{\sharp})$, если $c(\sigma) = +1$, и $\text{ог } B(t_{0i}) = -\text{ог } B(t_0^{\sharp})$, если $c(\sigma) = -1$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$, $\varphi(g) = n_{\sigma} g n_{\sigma}^{-1}$. Так как $n_{\sigma} \in \mathfrak{H}$, то $\varphi(v) \in V$ при любом $v \in V$. Рассмотрим отображение $d\varphi: T_{t_0^{\sharp}}(V) \rightarrow T_{\varphi(t_0^{\sharp})}(V)$. Так как группа $\mathfrak{H}$ связна, то элемент n_{σ} можно соединить гладким путем $\gamma(\tau)$ с единицей e , $\gamma(1) = e$, $\gamma(0) = n_{\sigma}$. Отсюда следует, что $\text{ог } B(t_0^{\sharp}) = \text{ог } (d\varphi B(t_0^{\sharp}))$. По определению отображения φ ясно, что $\text{ог } E(t_0^{\sharp}) = c(\sigma) \cdot \text{ог } d\varphi(E(t_0^{\sharp}))$.

Оказывается, отображение φ естественным образом действует на пространстве орбит $O(t)$, а именно: $\varphi(O(t)) = O(\varphi(t))$ для любого $t \in T$. В самом деле, пусть $x \in O(t)$; тогда $x = ata^{-1}$, $\varphi(x) = a_1 \varphi(t) a_1^{-1}$, где $a_1 = n_{\sigma} a n_{\sigma}^{-1} \in \mathfrak{H}$, так как $n_{\sigma} \in \mathfrak{H}$. Вычислим отображение $d\varphi: T_t(O(t)) \rightarrow T_{\varphi(t)}(O(\varphi(t)))$. Легко подсчитать, что $d\varphi(A_{\alpha}(t_0^{\sharp})) = q_{\varphi(t_0^{\sharp})}(n_{\sigma} A_{\alpha} n_{\sigma}^{-1})$. Так как точки t_{0i} и $\varphi(t_0^{\sharp})$ принадлежат одному и тому же симплексу $\Delta_{i_1\dots i_n}$, то эти точки можно соединить таким непрерывным путем $\psi(\tau)$, что $\psi(\tau) \in \Delta_{i_1\dots i_n}$ для любого τ и $\psi(0) = \varphi(t_0^{\sharp})$, $\psi(1) = t_{0i}$. Согласно лемме 20.4.1 базис $d\varphi B(t_0^{\sharp})$ можно непрерывно перенести вдоль пути $\psi(\tau)$ в точку t_{0i} так, что в процессе деформации базис $d\varphi B(t_0^{\sharp})$ все время остается касательным к V , репер $d\varphi E(t_0^{\sharp})$ остается касательным к T , а репер $d\varphi A(t_0^{\sharp})$ все время ортогонален тору.

Итак, получаем в точке t_{0i} базис $\overline{d\varphi B(t_{0i}^*)}$ такой, что $\text{ог } \overline{d\varphi B(t_{0i}^*)} = \text{ог } d\varphi B(t_{0i}^*) = \text{ог } B(t_{0i}^*)$. Репер $d\varphi E(t_{0i}^*)$ продеформируется в репер $\overline{d\varphi E(t_{0i}^*)}$, определяющий ту же ориентацию тора, что и репер $d\varphi E(t_{0i}^*)$, т. е. $\text{ог } \overline{d\varphi E(t_{0i}^*)} = c(\sigma) \cdot \text{ог } E(t_{0i}^*)$. Репер $d\varphi A(t_{0i}^*)$ продеформируется в репер $\overline{d\varphi A(t_{0i}^*)}$ в точке t_{0i} : $\overline{d\varphi A(t_{0i}^*)} = \{q_{t_{0i}}(n_\sigma A_\alpha n_\sigma^{-1})\}$.

Осталось сравнить ориентации, определяемые в касательном пространстве $T_{t_{0i}}(O(t_{0i}))$ двумя реперами $\{q_{t_{0i}}(n_\sigma A_\alpha \cdot n_\sigma^{-1})\}$ и $\{q_{t_{0i}}(A_\alpha)\}$. Так как $n_\sigma \in \mathfrak{F}$, то можно соединить точку n_σ гладким путем $\omega(\tau)$ с единицей группы e , целиком содержащимся в $\mathfrak{F}$. Рассмотрим в подалгебре H два репера $\{A_\alpha\}$ и $\{n_\sigma A_\alpha n_\sigma^{-1}\}$ и определим невырожденные линейные преобразования $F_\tau: H \rightarrow H$ следующим образом: $F_\tau(X) = \text{Ad}(\omega(\tau))(X)$. Тогда F_1 — тождественное отображение и гомотопия F_τ переводит репер $n_\sigma A(e) n_\sigma^{-1}$ в репер $A(e)$ и в процессе деформации репер не вырождается.

Рассмотрев отображение $q_{t_{0i}}: H \rightarrow T_{t_{0i}}(O(t_{0i}))$, мы и получаем, что взаимная ориентация базисов $B(t_{0i})$ и $\overline{d\varphi B(t_{0i})}$ определяется взаимной ориентацией реперов $E(t_{0i})$ и $\overline{d\varphi E(t_{0i}^*)}$, т. е. $\text{ог } B(t_{0i}) = c(\sigma) \text{ог } \overline{d\varphi B(t_{0i}^*)} = c(\sigma) \text{ог } B(t_{0i}^*)$.

Следствие 20.4.1. Искомая степень отображения $f: V \rightarrow V$ ($V = A_{n-1}I$) равна сумме $\Sigma(T^{n-1}) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} c(\sigma_i)$, где через σ_i обозначена такая перестановка набора $(1, 2, \dots, n)$, что $t_{0i} \in \Delta_{i_1 \dots i_n}$, $(i_1, \dots, i_n) = \sigma(1, 2, \dots, n)$; t_{0i} пробегает все прообразы точки $t_0^* \in R(V)$.

Лемма 20.4.3. Пусть $m \geq 1$; тогда $\Sigma(T^{2m}) = 2^m$, $\Sigma(T^{2m-1}) = 0$.

Доказательство. Пусть тор $T^{n-1} \subset \text{SU}(n)$ реализован матрицами следующего вида:

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}.$$

Обозначим элемент $t \in T$ так: $t = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Рассмотрим элемент $t' \in U(n)$, $t' = (\frac{1}{2}\varphi_1, \dots, \frac{1}{2}\varphi_n)$, $\det(t') = -1$, $0 < \frac{1}{2}\varphi_1 < \dots < \frac{1}{2}\varphi_n < \pi$. Хотя элемент $(t')^*$ не принадлежит $\text{SU}(n)$, из него можно получить все корни t_{0i} элемента t_0^* , если к нечетному числу аргументов $\{\frac{1}{2}\varphi_\alpha\}$ добавлять π . Рассмотрим некоторый корень $t_{0\alpha}$. Условимся, что если значение аргумента, стоящего на p -м месте, больше чем π , то на p -м месте поставим знак «+», а если значение аргумента меньше чем π , то поставим знак «—».

Пусть $n=2$, тогда для получения всех корней надо заменить нечетное число знаков «—» в строке (—, —) на «+», что дает:

$t_{01} = (-, +)$, $t_{02} = (+, -)$. Ясно, что $c(\sigma_1) = 1$, $c(\sigma_2) = -1$ и $\Sigma(T^1) = 0$.

Пусть $n = 3$, тогда имеется 4 корня t_{0i} : $t_{01} = (+, -, -)$, $t_{02} = (-, +, -)$, $t_{03} = (-, -, +)$, $t_{04} = (+, +, +)$. Имеем: $c(\sigma_1) = 1$, $c(\sigma_2) = -1$, $c(\sigma_3) = 1$, $c(\sigma_4) = 1$, $\Sigma(T^2) = 2$.

Пусть теперь n четно, $n = 2k + 2$, $k \geq 1$; докажем, что $\Sigma(T^{2k+2}) = \Sigma(T^2) \Sigma(T^{2k})$; $T^{2k+2} = T^2 \times T^{2k}$. Так как $\Sigma(T^2) = 2$, то отсюда будет следовать, что $\Sigma(T^{2m}) = 2^m$. Отметим, что число $\Sigma(T^{2k+2})$ не является степенью отображения $f|_{T^{2k+2}}$. Рассмотрим $t_0^3 \in T^{2k+2}$; $t_0^3 = (\varphi_1, \dots, \varphi_{2k+3})$, и пусть выполнены все условия, наложенные на t_0^3 . Определим проекции p_1 и p_2 : $p_1: T^{2k+2} \rightarrow T^2$, $p_2: T^{2k+2} \rightarrow T^{2k}$, положив $p_1(t_0^3) = (\varphi_1 + \dots + \varphi_{2k+1}; \varphi_{2k+2}; \varphi_{2k+3})$, $p_2(t_0^3) = (\varphi_1, \dots, \varphi_{2k}; \varphi_{2k+1} + \varphi_{2k+2} + \varphi_{2k+3})$. Элементы $p_1(t_{0i})$, $p_2(t_{0i})$ и $p_1(t_0^3)$, $p_2(t_0^3)$ регулярны. Рассмотрим элемент $p_2(t_0^3)$. Для него снова выполнены все условия, наложенные ранее на t_0^3 , что дает возможность применить индукцию. При применении элемента $w_\sigma \in W(\text{SU}(2k+3))$ к симплексу $\Delta_{12\dots(2k+3)}$ возникает индуцированное действие на симплексах $p_1(\Delta_{12\dots(2k+3)})$ и $p_2(\Delta_{12\dots(2k+3)})$. Итак, действие группы $W(\text{SU}(2k+3))$ на торе T^{2k+2} порождает индуцированное действие на T^2 и T^{2k} , совпадающее с действием $W(\text{SU}(2k+1))$ на T^{2k} и $W(\text{SU}(3))$ на T^2 . Кроме того, проекции корней t_{0i} на T^2 и T^{2k} дают полный набор корней из элементов $p_1(t_0^3)$ и $p_2(t_0^3)$.

а) Рассмотрим все такие корни $t_{0i} \in T^{2k+2}$, что $p_1(t_{0i}) = (+, -, -)$, и предположим, что $(t_{0i})_{2k+1, 2k+1} = \exp\left(\frac{1}{2} \varphi_{2k+1}\right)$.

Пусть корень t_{0i} имеет вид $t_{0i} = (*, *, \dots, *, -, -, -)$, тогда $p_2(t_{0i}) = (*, *, \dots, *, -)$. Пусть σ' — перестановка, приводящая элемент $(*, *, \dots, *, *)$ к «нормальному» виду, т. е. отображающая его в симплекс $\Delta_{12\dots 2k}$; тогда, чтобы привести к «нормальному» виду элемент $(*, *, \dots, *, *, -)$, необходимо применить еще $2s + 1$ транспозиций. Окончательная перестановка σ'' имеет вид $\sigma'' = \xi \sigma'$, где $c(\xi) = -1$. После перестановки σ' необходимо применить еще одну перестановку η такую, чтобы перестановка $\sigma(t_{0i}) = \eta \cdot \sigma'$ отобразила элемент t_{0i} в симплекс $\Delta_{12\dots(2k+3)}$. Так как перестановка η нечетна, то $c(\sigma(t_{0i})) = c(\sigma(p_2(t_{0i})))$.

а) Рассмотрим все такие корни $t_{0i} \in T^{2k+2}$, что $p_1(t_{0i}) = (+, -, -)$, и предположим, что $t_{0i} = (*, *, \dots, *, +, -, -)$. В таком случае $c(\sigma(t_{0i})) = c(\sigma(p_2(t_{0i})))$, т. е. в случае а) мы имеем $c(\sigma(t_{0i})) = c(\sigma(p_2(t_{0i})))$.

а) Пусть $p_1(t_{0i}) = (-, +, -)$. Предположим, что $t_{0i} = (*, *, \dots, *, -, +, -)$. Тогда $c(\sigma(t_{0i})) = -c(\sigma(p_2(t_{0i})))$.

а) Пусть $p_1(t_{0i}) = (-, +, -)$, $t_{0i} = (*, *, \dots, *, +, +, -)$. Тогда $c(\sigma(t_{0i})) = c(\sigma(p_2(t_{0i})))$.

а) Пусть $p_1(t_{0i}) = (-, -, +)$, $t_{0i} = (*, *, \dots, *, *, -, -, +)$. Тогда $c(\sigma(t_{0i})) = c(\sigma(p_2(t_{0i})))$.

а₃) Пусть $p_1(t_{0i}) = (-, -, +)$, $t_{0i} = (*, *, \dots, *, +, -, +)$. Тогда $c(\sigma(t_{0i})) = -c(\sigma(p_2(t_{0i})))$.

а₄) Пусть $p_1(t_{0i}) = (+, +, +)$, $t_{0i} = (*, *, \dots, *, *, -, +, +)$. Тогда $c(\sigma(t_{0i})) = c(\sigma(p_2(t_{0i})))$.

а₄) Пусть $p_1(t_{0i}) = (+, +, +)$, $t_{0i} = (*, *, \dots, *, *, +, +, +)$. Тогда $c(\sigma(t_{0i})) = c(\sigma(p_2(t_{0i})))$.

На рис. 45, изображающем прямое произведение $T^2 \times T^{2k}$ и объединяющем все рассмотренные выше случаи, через A обозначено множество корней t_{0i} , для которых $t_{0i} = (*, \dots, *, *, *, -)$, а через B — множество корней t_{0i} , для которых $t_{0i} = (*, \dots, *, *, *, +)$. Взяв алгебраическую сумму

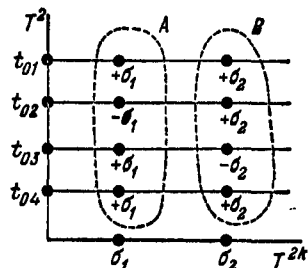


Рис. 45.

корней t_{0i} , мы получаем формулу $\Sigma(T^{2k+2}) = \Sigma(T^2) \Sigma(T^{2k})$. Все проведенные рассуждения можно повторить и для тора $T^{2k+1} = T^2 \times T^{2k-1}$, что дает формулу $\Sigma(T^{2k+1}) = \Sigma(T^2) \Sigma(T^{2k-1})$, а так как $\Sigma(T^1) = 0$, то $\Sigma(T^{2m-1}) = 0$. То, что $\Sigma(T^{2m-1}) = 0$ при $m \geq 1$, можно было бы доказать и непосредственно, не опираясь на формулу $\Sigma(T^n) = \Sigma(T^2) \Sigma(T^{n-2})$.

Следствие 20.4.2. Искомая степень отображения $f: V \rightarrow V$, где $V = \text{SU}(n)/\text{SO}(n)$, $n \geq 3$, равна 2^m , если $n = 2m + 1$, и равна нулю, если $n = 2m$.

20.5. Случай пространств типа I. Пространства $\text{SU}(2m)/\text{Sp}(m)$. Рассмотрим симметрические пространства $\text{SU}(2m)/\text{Sp}(m)$, $m \geq 2$, ранг $V = m - 1$, $\mathfrak{h} = \text{Sp}(m)$ вполне негомологична нулю в $\text{SU}(2m)$ для целых коэффициентов, $P(V, t) = (1 + t^2)(1 + t^4) \dots (1 + t^{4m-2})$. Максимальной связной и односвязной группой изометрий является группа $\text{SU}(2m)$. Инволютивный автоморфизм в алгебре G имеет вид $\Theta(X) = IXI^{-1}$, где $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Автоморфизм Θ продолжается до инволюции $\sigma(g) = I\bar{g}I^{-1}$. Множество неподвижных точек автоморфизма σ — стационарная подгруппа $\mathfrak{h}$. Вполне геодезическое подмногообразие V образовано всеми элементами вида $\{g\sigma(g^{-1})\}$, т. е. $\{gIg^T I^{-1}\}$. Ясно, что V — подмногообразие, составленное из всех кососимметрических матриц $g^T = -g$. Касательное пространство $B = T_e(V)$ имеет вид $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \bar{Z}_2 & -\bar{Z}_1 \end{pmatrix}$, где $Z_1 \in \mathfrak{su}(m)$, $Z_2 \in \mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$. Максимальное абелево подпространство — тор T — имеет (в обозначениях леммы 20.4.3) вид $(\varphi_1, \dots, \varphi_m; \varphi_1, \dots, \varphi_m)$, где $\varphi_1 + \dots + \varphi_m = 2k\pi$. В данном случае ранг $V < \text{ранг } \mathfrak{G}$, причем $T \subset \Omega(\mathfrak{G})$; $t \in T$, $t_{\alpha\alpha} = t_{m+\alpha, m+\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq m$. Легко подсчитать, что пересечение $\mathfrak{h} \cap V$ не дискретно и цикл $\mathfrak{h}$ нельзя использовать при подсчете индекса пересечения циклов V и $\mathfrak{h}$. Заметим, что элемент $t \in T$ полностью описывается элементом $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, где $\varphi_1 + \dots + \varphi_m = 2k\pi$. Выберем $t \in R(V)$

таким образом, что $0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$; тогда $C(t) = S(U(2) \times \dots \times U(2))$ (m сомножителей) и состоит из матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} x_1 & & 0 & y_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & x_m & 0 & & y_m \\ \hline z_1 & & 0 & w_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & z_m & 0 & & w_m \end{pmatrix}, \quad \text{где } \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ z_i & w_i \end{pmatrix} \in U(2).$$

Лемма 20.5.1. Если $t \in R(V)$, то $O(t) = \text{Sp}(m)/K$, где $K = \text{Sp}(m) \cap C(t) = \text{SU}(2) \times \dots \times \text{SU}(2)$ (m раз).

Доказательство. Пусть $c \in C(t) \cap \text{Sp}(m)$, $c = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$; тогда $Ic = cI$, что дает необходимое и достаточное условие принадлежности элемента c к подгруппе $\text{Sp}(m)$: $Z = -\bar{Y}$, $W = \bar{X}$. Так как $c \in C(t)$, то имеем $z_i = -\bar{y}_i$, $w_i = \bar{x}_i$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим отображение $f: V \rightarrow V$, $f(v) = v^2$, и пусть $t_0^2 \in R(V)$. Тогда на торе T существует 2^{m-1} решений уравнения $t^2 = t_0^2$; обозначим эти корни через t_{0i} . Построим в точках t_0^2 и t_{0i} базисы $B(t_0^2)$ и $B(t_{0i})$ (см. выше). В нашем случае подалгебра $N = \text{Ker } q_t$, $t \in R(V)$, является подалгеброй $K = \text{su}(2) \times \dots \times \text{su}(2)$ (m раз). Возьмем ортогональное дополнение A к N в подалгебре H и в A возьмем произвольный базис $A_1, \dots, A_s$, $s = m(2m-1)$. Так как $df B(t_{0i}) = B(t_0^2)$ (с точностью до умножения на 2 векторов репера $E(t_{0i})$), то необходимо сравнить ориентации базисов $B(t_{0i})$ и $B(t_0^2)$.

Рассмотрим тор $T \subset T_0$. Сбщая картина будет такой же, как и для тора $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Выделим в $W(\text{SU}(2m))$ подгруппу $W(V)$, переводящую в себя тор T . Так как элементы $t \in T$ имеют вид $t = t' \oplus t'$, $t' \in T' \subset \text{SU}(m)$, то образующими группы $W(V)$ являются такие преобразования $w_{ij}: T \rightarrow T$, что $w_{ij}(t) = n_{ij} t n_{ij}^{-1}$, $n_{ij} = n'_{ij} \oplus n'_{ij}$; $n'_{ij} \in \text{SU}(m)$ и элементы n'_{ij} совпадают с элементами n_{ij} , рассмотренными в предыдущем пункте. Элементы $w \in W(V)$, отвечающие произвольной перестановке σ , обозначим через w_σ .

Рассмотрим в группе $\text{SU}(2m)$ подгруппу W'' , порожденную элементами n_{ij} , $i \neq j$, $n_{ii} = e$. Подгруппа W'' изоморфна $W(V)$; она действует на торе T внутренним образом. Ориентация симплекса $\Delta_{i_1 \dots i_m}$ определяется четностью перестановки σ такой, что $(i_1, \dots, i_m) = \sigma(1, 2, \dots, m)$. Ясно, что $W'' \subset \text{Sp}(m) \cap N(T)$. Рассмотрим $t_0^2 \in R(V)$ и фиксируем какой-либо корень t_{0i} . Если $t_{0i} \in \Delta_{i_1 \dots i_m}$, то $\text{or } B(t_{0i}) = \text{or } B(t_0^2)$ (см. выше). Пусть $t_{0i} \in \Delta_{i_1 \dots i_m}$ и $(i_1, \dots, i_m) = \sigma(1, \dots, m)$. Рассмотрим элемент $n_\sigma = n'_\sigma \oplus n'_\sigma \in W''$ и определим отображение $\varphi: V \rightarrow V$, $\varphi(v) = n_\sigma v n_\sigma^{-1}$. Здесь $\varphi(v) \in V$ при любом $v \in V$, так как $W'' \subset \mathfrak{g}$.

Лемма 20.5.2. Пусть $t_0^i \in R(V)$; тогда $\text{ог } B(t_0^i) = \text{ог } B(t_{0i})$ для любого i , $1 \leq i \leq 2^{m-1}$.

Доказательство. Точно так же, как и в лемме 20.4.2, устанавливается, что $\text{ог } B(t_0^i) = \text{ог } (d\varphi B(t_0^i))$. Отображение φ действует на пространстве орбит $O(t)$, а именно: $\varphi O(t) = O(\varphi(t))$ для любого $t \in T$. При доказательстве леммы 20.4.2 было установлено, что $d\varphi A_\alpha(t_0^i) = q_{\varphi(t_0^i)}(n_\sigma A_\alpha n_\sigma^{-1})$. Является ли отображение $d\varphi: T_{t_0^i}(O(t_0^i)) \rightarrow T_{\varphi(t_0^i)}(O(\varphi(t_0^i)))$ невырожденным? Достаточно показать, что $n_\sigma A_\alpha n_\sigma^{-1} \in A$ при любом α . Рассмотрим отображение $\text{Ad}(n_\sigma): H \rightarrow H$. Если $n_\sigma = n_{ij}$ — преобразование, отвечающее элементарной перестановке, то подгруппа $K = \text{SU}(2) \times \dots \times \text{SU}(2) = C(t_0^i) \cap \mathfrak{H}$ переходит в себя и действие преобразования $g \rightarrow n_\sigma g n_\sigma^{-1}$ на подгруппе K сводится к перестановке двух сфер: S_i^1 и S_j^1 . Это означает, что $\text{Ad}(n_\sigma)(k) = k$, а поэтому переходит в себя и ортогональное дополнение к подалгебре k , что и требовалось. Орбита $O(t_0^i)$ диффеоморфно отображается на орбиту $O(\varphi(t_0^i))$, и мы знаем, что $d\varphi B(t_0^i) = \{d\varphi E(t_0^i); \{q_{t_{0i}}(n_\sigma A_\alpha n_\sigma^{-1})\}\}$, причем $\text{ог}(d\varphi E(t_0^i)) = c(\sigma) \text{ог}(E(t_{0i}))$. Поскольку отображение $q_{t_{0i}}$ является изоморфизмом и $A(e)$ и $n_\sigma A(e) n_\sigma^{-1}$ — базисы в A , то достаточно сравнить ориентации базисов $A(e)$ и $n_\sigma A(e) n_\sigma^{-1}$. Для этого рассмотрим в H базис $F = \{A(e); e_1, \dots, e_{3m}\}$, где $\{e_1, \dots, e_{3m}\}$ — базис в подалгебре k ; применим к базису F преобразование $\text{Ad}(n_\sigma)$; тогда, так как $n_\sigma \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ связна, получаем, что $\text{ог } F = \text{ог}(\text{Ad}(n_\sigma)(F))$. Действие $\text{Ad}(n_\sigma)$ на подгруппе K нам известно; отсюда следует, что $\text{ог}(\text{Ad}(n_\sigma)(\{e_i\})) = c(\sigma) \text{ог}(\{e_i\})$, а это означает, что $\text{ог}(n_\sigma A(e) n_\sigma^{-1}) = c(\sigma) \text{ог } A(e)$. Так как $\text{ог}(d\varphi A(t_0^i)) = c(\sigma) \text{ог}(A(t_{0i}))$, то $\text{ог } B(t_{0i}) = \text{ог}(d\varphi B(t_0^i)) = \text{ог } B(t_0^i)$. Лемма доказана.

Следствие 20.5.1. Искомая степень отображения $f: V \rightarrow V$, где $V = \text{SU}(2m)/\text{Sp}(m)$, $m \geq 2$, равна 2^{m-1} ; следовательно, $i_*[V] \neq 0$.

20.6. Случай пространств типа I. Пространства $S^{2l-1} = \text{SO}(2l)/\text{SO}(2l-1)$. Вычисление в явном виде коциклов, реализуемых вполне геодезическими подмногообразиями типа I. Рассмотрим симметрические пространства $V = \text{SO}(2l)/\text{SO}(2l-1)$, $l \geq 4$, $\text{ранг } V = 1$, $\mathfrak{H} = \text{Spin}(2l-1)$ вполне негомологична нулю в группе $\text{Spin}(2l)$ для вещественных коэффициентов, $P(V, t) = 1 + i^{2l-1}$. Максимальной связной и односвязной группой изометрий многообразия V является группа $\mathfrak{G} = \text{Spin}(2l)$. Плоскость $B = T_e(V)$ состоит из матриц $\|b_{ij}\|$, где $b_{ij} = -b_{ji}$ и $b_{ij} = 0$, если оба индекса отличны от 1. Поскольку $\text{ранг } V = 1$, то нет необходимости исследовать пространство орбит $O(t)$. Так как многообразие V диффеоморфно сфере S^{2l-1} , то очевидно, что $\deg f = 2$, если $f: S^{2l-1} \rightarrow S^{2l-1}$, и $\deg f = 0$, если $f: S^{2l} \rightarrow S^{2l}$. Из утверждения 19.1 получаем

Следствие 20.6.1. Искомая степень отображения $f: V \rightarrow V$, где $V = \text{SO}(2l)/\text{SO}(2l-1)$, $l \geq 4$, равна 2; следовательно, $i_*[V] \neq 0$.

Вычисление элементов $(i^*)^{-1}[V]$ выполняется теперь довольно просто. Мы рассмотрели все симметрические пространства, группы

изометрий которых не являются особыми группами Ли. Оказалось, что единственными пространствами, реализующими нетривиальные циклы в $H_*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$, являются следующие: ${}^0A_{2m}I$, $m \geq 1$; ${}^0A_{2m-1}II$, $m \geq 2$; 0D_lII , $l \geq 4$. Симметрическое пространство 0E_6IV , группой изометрий которого является особая группа E_6 , мы изучим ниже.

Рассмотрим главное расслоенное пространство $\mathfrak{G} \xrightarrow{1} \mathfrak{G} \rightarrow V$, где стационарная подгруппа $\mathfrak{H}$ связна, и предположим, что $\mathfrak{H}$ вполне негомологична нулю в $\mathfrak{G}$ для некоторого кольца коэффициентов K . Тогда гомоморфизм $p^*: H^*(V; K) \rightarrow H^*(\mathfrak{G}; K)$ является мономорфизмом, и мы можем рассмотреть в $H^*(\mathfrak{G}; K)$ подалгебру $p^*(H^*(V; K))$, изоморфную $H^*(V; K)$. В этих предположениях имеем следующее

Предложение 20.6.1 (см. [91]). а) Пусть $K = \mathbb{Z}$; $H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{Z})$ не имеет кручения и обладает простой системой примитивных образующих. б) Пусть $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{Z}_p$. Предположим, что $H^*(\mathfrak{G}; K)$ обладает простой системой примитивных образующих (для $K = \mathbb{R}$ это предположение всегда выполнено). Тогда в обоих случаях образ гомоморфизма p^* допускает простую систему примитивных образующих. Это означает, что в кольце $H^*(\mathfrak{G}; K)$ (при указанных предположениях) всегда можно выбрать простую систему примитивных образующих $x_1, \dots, x_k$ таких, что образующие $x_1, \dots, x_n$ (где $n \leq k$) принадлежат $p^*(H^*(V; K))$ и являются простой системой образующих в этой подалгебре. Так, например, $H^*(SU(n); \mathbb{Z})$ и $H^*(SO(n); \mathbb{Z}_p)$ обладают простыми системами примитивных образующих.

1) $V = {}^0A_{2m}I$. Пусть $K = \mathbb{Z}_p$, где $p \neq 2$ (p может равняться нулю). Известно (см. [91]), что подгруппа $\mathfrak{H} = SO(2m+1)$, $m \geq 1$, вполне негомологична нулю в группе $\mathfrak{G} = SU(2m+1)$ для кольца коэффициентов $\mathbb{Z}_p$. Тогда в $H^*(SU(2m+1); \mathbb{Z}_p)$ можно выбрать такую простую систему примитивных образующих $\{x_3, x_5, \dots, x_{4m+1}\}$, что подалгебра $p^*(H^*(V; \mathbb{Z}_p)) \cong \Lambda(u_5, u_9, \dots, u_{4m+1})$ допускает в качестве простой системы образующих элементы $\{x_5, x_9, x_{13}, \dots, x_{4m+1}\}$, причем $p^*(u_\alpha) = x_\alpha$; $\alpha = (5, 9, 13, \dots, 4m+1)$.

Утверждение 20.6.1. Пусть $i: V \rightarrow \tilde{I}_0(V) \cong \tilde{A}(V)$ — описанное выше вложение пространства $V = SU(2m+1)/SO(2m+1)$, $m \geq 1$, как вполне геодезического подмногообразия в группу изометрий $\tilde{I}_0(V) = SU(2m+1)$. Тогда подмногообразие $i(V)$ реализует нетривиальный коцикл в $H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{Z}_p)$, где $p \neq 2$ и простое, если $p \neq 0$. Рассмотрим элемент $\Omega = x_5 x_9 \dots x_{4m+1} \in H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{Z}_p)$. Тогда $[V] = i^*(N^{-1} \cdot \Omega)$, где $N = 2^m \pmod{p}$.

Доказательство очевидным образом вытекает из следствия 20.4.2 и из выбора образующих в $H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{Z}_p)$.

2) $V = {}^0A_{2m-1}II$. Пусть $K = \mathbb{Z}$. Тогда (см. [91]) подгруппа $\mathfrak{H} = Sp(m)$ вполне негомологична нулю в группе $\mathfrak{G} = SU(2m)$ для кольца коэффициентов $\mathbb{Z}$.

Утверждение 20.6.2. Пусть $i: V \rightarrow \tilde{I}_0(V) \cong \tilde{A}(V)$ — описанное выше вложение пространства $V = \text{SU}(2m)/\text{Sp}(m)$, $m \geq 2$, как вполне геодезического подмногообразия в группу изометрий $I_0(V) = \text{SU}(2m)$. Тогда подмногообразие $i(V)$ реализует нетривиальный коцикл в $H^*(I_0(V); \mathbb{Z})$. Рассмотрим элемент $\Omega = x_5 x_9 x_{13} \dots x_{4m-3} \in H^*(I_0(V); \mathbb{Z})$. Тогда $i^*(\Omega) = N[V]$, где $N = 2^{m-1}$.

Доказательство вытекает из следствия 20.5.1 и из выбора образующих в $H^*(I_0(V); \mathbb{Z})$.

3) $V = {}^0D_l \text{II}$. Пусть $K = \mathbb{Z}_p$, где $p \neq 2$ и простое, если $p \neq 0$. Тогда (см. [91]) подгруппа $\text{Spin}(2l-1)$, $l \geq 4$, вполне негомологична нулю в группе $\text{Spin}(2l)$ для кольца коэффициентов $\mathbb{Z}_p$.

Утверждение 20.6.3. Пусть $i: V \rightarrow I_0(V) \cong \tilde{A}(V)$ — описанное выше вложение пространства $V = \text{SO}(2l)/\text{SO}(2l-1)$, $l \geq 4$, как вполне геодезического подмногообразия в группу изометрий $\tilde{I}_0(V) = \text{Spin}(2l)$. Тогда подмногообразие $i(V)$ реализует нетривиальный коцикл в $H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{Z}_p)$, где $p \neq 2$ и простое, если $p \neq 0$. Рассмотрим элемент $\Omega = x_{2l-1} \in H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{Z}_p)$. Тогда $[V] = i^*\left(\frac{1}{2}\Omega\right)$.

Доказательство вытекает из следствия 20.6.1.

Следствие 20.6.2. В кольце $H^*(\text{SU}(2m+1); \mathbb{Z}_p)$, $m \geq 1$, $p \neq 2$, следующие коциклы ξ_q реализуются вполне геодезическими подмногообразиями типа ${}^0A_{2q}\text{I}$: $\xi_q = N_q^{-1}\Omega_q = N_q^{-1}x_5x_9x_{13}\dots x_{4q+1}$, где $1 \leq q \leq m$ и $N_q = 2^q \pmod{p}$.

Следствие 20.6.3. В кольце $H^*(\text{SU}(2m); \mathbb{Z}_p)$, $m \geq 2$, $p \neq 2$, следующие коциклы η_q реализуются вполне геодезическими подмногообразиями типа ${}^0A_{2q-1}\text{II}$: $\eta_q = N_q^{-1}\Omega_q = N_q^{-1}x_5x_9\dots x_{4q-3}$, где $2 \leq q \leq m$, $N_q = 2^{q-1} \pmod{p}$.

Рассмотрим вложение $j: \text{SU}(2m) \rightarrow \text{SU}(2m+1)$; тогда коциклы, реализуемые в $H^*(\text{SU}(2m+1); \mathbb{Z}_p)$ подмногообразиями типа ${}^0A_{2q}\text{I}$, $2 \leq q \leq m$, и $j({}^0A_{2q-1}\text{II})$, $2 \leq q \leq m$, когомологичны, $\eta_q = j^*(\xi_q)$.

20.7. Случай пространства типа I. Пространство E_6/F_4 . Рассмотрим пространство ${}^0E_6\text{IV}$, $V = E_6/F_4$, $\text{rang } V = 2$, $\dim V = 26$, $\mathfrak{g} = F_4$ вполне негомологична нулю в группе $\mathfrak{G} = E_6$ для вещественных коэффициентов, $P(V, t) = (1+t^9)(1+t^{17})$. Максимальной связной и односвязной группой изометрий многообразия V является особая группа E_6 с центром $\mathbb{Z}_3$. Рассмотрим поле F , и пусть K — алгебра чисел Кэли (алгебра октав) над полем F (см. [66]). Будем пока считать, что $F = \mathbb{C}$. Хотя алгебра K некоммутативна и неассоциативна, она удовлетворяет некоторому ослабленному условию ассоциативности, так называемому альтернативному закону, а именно: $x^2y = x(xy)$ и $yx^2 = (yx)x$ для любых элементов $x, y \in K$. Рассмотрим линейное пространство над F , обозначаемое обычно M_3^s и образованное всеми (3×3) -матрицами вида

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_8 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_8 & \xi_2 & x_1 \\ x_8 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix},$$

где $x_i \in K$, $\xi_i \in F$, $1 \leq i \leq 3$. Сложение матриц и умножение их на элементы поля F определены обычным образом, что превращает M_3^3 в 27-мерное пространство над F . Структура алгебры в M_3^3 вводится операцией $X \cdot Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$, где XY и YX — обычные произведения (3×3) -матриц. Операция умножения $X \cdot Y$ превращает M_3^3 в неассоциативную алгебру, причем: 1) $X \cdot Y = Y \cdot X$; 2) $(X^2 \cdot Y) \cdot X = X^2 \cdot (Y \cdot X)$. Пусть $A \in M_3^3$; через $R_A: M_3^3 \rightarrow M_3^3$ обозначим правый сдвиг $R_A(X) = X \cdot A$, а через $D_{A,B}$ обозначим следующее линейное преобразование M_3^3 : $D_{A,B} = [R_A, R_B] = = R_A R_B - R_B R_A$. Из тождеств 1) и 2) следует, что $D_{A,B}$ — дифференцирование алгебры M_3^3 . Обозначим через f_4^3 алгебру Ли (над F) всех дифференцирований алгебры M_3^3 ; тогда (см. [65]) алгебра f_4^3 изоморфна алгебре Ли особой группы F_4 , а потому односвязная группа F_4 (где $Z(F_4) = 0$) получает точное линейное представление в 27-мерном пространстве над F как группа автоморфизмов йордановой алгебры M_3^3 . Рассмотрим в M_3^3 три ортогональных идемпотента:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и выделим в алгебре f_4^3 подалгебру f_0^3 , составленную из всех таких дифференцирований d алгебры M_3^3 , для которых $d(e_1) = d(e_2) = = d(e_3) = 0$. Известно (см. [65], [66]), что алгебра f_0^3 изоморфна ортогональной алгебре Ли типа D_4 .

Теперь мы расширим алгебру f_4^3 , включив ее в алгебру e_6^3 , изоморфную алгебре Ли особой группы E_6 . Обозначим через e_6^3 линейное пространство всех линейных преобразований алгебры M_3^3 , имеющих вид $L = R_A + D$, где $A \in M_3^3$, $\text{Spur } A = 0$, $D \in f_4^3$. Операцию коммутирования в пространстве e_6^3 введем обычным образом: $[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, где через LN обозначена композиция преобразований L и N . Легко подсчитать, что если $\text{Spur } B = 0$, то $[R_A, R_B] \in f_4^3$, $[D, R_A] = R_{D(A)}$, где $D \in f_4^3$. Так как $[f_4^3, f_4^3] \subset f_4^3$, то пространство e_6^3 превращается в алгебру Ли над F , причем $[B', f_4^3] \subset B'$, $[B', B'] \subset f_4^3$, где через B' обозначено линейное пространство в e_6^3 , образованное преобразованиями R_A .

Алгебра Ли e_6^3 действует в M_3^3 неприводимо и имеет нулевой центр, а потому она полупроста; известно (см. [68]), что e_6^3 изоморфна некомпактной алгебре Ли некомпактной группы E_6 . Рассмотрим группу $SL(27; \mathbb{C})$, действующую в M_3^3 ; тогда $e_6^3 \subset sl(27; \mathbb{C})$ и можно рассмотреть подгруппу $E_6(\mathbb{C}) = \exp(e_6^3)$, являющуюся некомпактной формой группы E_6 . Перейдем к компактной форме группы E_6 . Обозначим через H_4' подалгебру Картана алгебры Ли f_4^3 и рассмотрим в e_6^3 подалгебру $H_6' = FR_{e_1 - e_3} + FR_{e_2 - e_3} + H_4'$, где $R_{e_1 - e_3}$ и $R_{e_2 - e_3}$ — два дополнительных вектора к H_4' . Тогда оказывается, что подалгебра H_6' является подалгеброй Картана в алгебре

Ли e'_6 . Если через h_j , $1 \leq j \leq 6$, обозначить базис в подалгебре H'_6 , то для того, чтобы получить базис в картановской подалгебре компактной формы группы E_6 , достаточно рассмотреть набор векторов $\{ih_j\}$. Компактную алгебру Ли группы $E_6 \subset SU(27)$ будем обозначать через e_6 , ее картановскую подалгебру — через H_6 , компактную алгебру группы $F_4 \subset E_6$ — через f_4 . Картановская подалгебра H_6 в алгебре e_6 имеет вид $H_6 = i\mathbb{R}R_{e_1 - e_2} + i\mathbb{R}R_{e_2 - e_3} + H_4$; здесь мы рассматриваем M_3^8 над $\mathbb{R}$. После перехода к компактной форме алгебры e'_6 плоскость B' перейдет в плоскость $B \subset e_6$, для которой имеют место соотношения $[B, B] \subset f_4$, $[B, f_4] \subset B$, т. е. B является тройной системой и совпадает с касательным пространством $T_e(V)$ к вполне геодезическому подмногообразию V , являющемуся картановской моделью пространства E_6/F_4 . Ясно, что двумерная плоскость $S = i\mathbb{R}R_{e_1 - e_2} + i\mathbb{R}R_{e_2 - e_3}$ содержится в B и является максимальным абелевым подпространством в B . Вычислим элемент $t \in T = \exp S$ как элемент тора $T_0 \subset SU(27)$. Пусть $\alpha = e_1 - e_2$, $\beta = e_2 - e_3$. Тогда, если обозначить координаты в плоскости S через φ_1 и φ_2 , то каждый вектор $s \in S$ имеет вид $s = i\varphi_1 R_\alpha + i\varphi_2 R_\beta$. Представим элемент $X \in M_3^8$ в виде

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \begin{vmatrix} 0 & x_3 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{vmatrix}$$

и в соответствии с этим разложением выберем в M_3^8 ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3; u_1, u_2, \dots, u_8; v_1, \dots, v_8; w_1, \dots, w_8\}$; тогда $M_3^8 = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$, где $\dim L_0 = 3$, $\dim L_i = 8$. В этом базисе оператор $t = \exp(s) \in T$ имеет вид

$$t = \begin{vmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} e^{-\frac{i\varphi_1}{2} E_8} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi_2}{2} E_8} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i\varphi_3}{2} E_8} \end{vmatrix},$$

где $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2k\pi$, $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$. Запись операторов t идентична записи элементов $t \in T^2 \subset SU(3)$. Рассмотрим $t \in T$ такой, что $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < 2\pi$, $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$. Если $C(t)$ — централизатор t в группе E_6 , то для орбиты $O(t)$ имеем $O(t) = F_4/F_4 \cap C(t)$. Подсчитаем подгруппу $F_4 \cap C(t)$. После перехода к компактной форме группы E_6 алгебра f'_6 переходит в вещественную ортогональную алгебру $\mathfrak{so}(8)$.

Рассмотрим в группе F_4 подгруппу $C = \exp(\mathfrak{so}(8))$; тогда элементы $c \in C$ обладают тем свойством, что $c(e_i) = e_i$, $1 \leq i \leq 3$. Известно (см. [65]), что $C \cong \text{Spin}(8)$.

Лемма 20.7.1. *Связная компонента единицы подгруппы $F_4 \cap C(t)$ совпадает с подгруппой C .*

Доказательство. Докажем, что $\mathfrak{so}(8) \subset T_e(F_4 \cap C(t))$. Пусть $d \in \mathfrak{so}(8)$; для этого необходимо и достаточно, чтобы $d(e_i) = 0$, $1 \leq i \leq 3$. Чтобы доказать, что $d \in T_e(C(t))$, достаточно доказать, что $[d, s] = 0$ для любого оператора $s \in S$. Это проверяется непосредственным вычислением (проверьте!). Обратно, пусть $g \in F_4 \cap C(t)$, где $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < 2\pi$. Отметим, что сингулярность элемента $t \in T$ заключается не только в том, что оператор t на подпространствах L_1, L_2, L_3 является скалярным оператором, но и в том, что могут совпадать и другие собственные значения, однако это приводит к увеличению $C(t)$ в $SU(27)$, но не увеличивает подгруппу $F_4 \cap C(t)$.

Так как $gt = tg$, то оператор g , действующий в M_3^s , имеет вид

$$g = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \alpha_2 & 0 & B \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \\ \hline & A & & P \end{array} \right\|, \quad \text{где } |\alpha_i| = 1, 1 \leq i \leq 3. \end{array}$$

Так как элемент e_i является идемпотентом в M_3^s , то $g(e_i) = g(e_i) \cdot g(e_i)$. Из явного вида оператора g следует, что $g(e_i) = \alpha_i e_i + X_i$, где $X_i \in L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$. Отметим, что для элементов $X \in L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ выполнено равенство $\xi_i = 0$, $1 \leq i \leq 3$, а потому $e_i \cdot X = 0$ для любого X и любого i , $1 \leq i \leq 3$. Отсюда следует, что $X_i = X_i^2$. Докажем, что подпространство $L' = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ не содержит ненулевых идемпотентов.

Действительно, если через $\|p_{ij}\|$ обозначить элемент X^2 , где $X \in L'$, то $p_{11} = 2|x_3|^2 + 2|x_2|^2$, $p_{22} = 2|x_3|^2 + 2|x_1|^2$, $p_{33} = 2|x_2|^2 + 2|x_1|^2$, и так как по предположению $X = X^2 \in L'$, то $p_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq 3$, что дает $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, т. е. $X = 0$.

Итак, $g = E_3 \oplus P$, что и доказывает лемму.

Рассмотрим элемент $t_0^s \in R(V)$ и предположим, что $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$. отождествим тор T с тором $T^2 \subset SU(3)$ и будем, как и раньше, задавать элемент $t \in T$ набором $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Элемент t_0^s имеет 4 прообраза при отображении $f: V \rightarrow V$: $t_{01} = (+, -, -)$, $t_{02} = (-, +, -)$, $t_{03} = (-, -, +)$, $t_{04} = (+, +, +)$. Рассмотрим действие группы $W(V)$ на торе T . Пусть группа Вейля $W(SU(27))$ реализована в группе $SU(27)$ как подгруппа W' (см. пункт 20.4), и в группе W' рассмотрим подгруппу W'' , элементы которой при присоединенном действии переводят в себя тор $T \subset T_0$. Подгруппа W'' порождена элементами n_σ вида $n_\sigma' \oplus n_\sigma''$, где операторы $n_\sigma' \in U(3)$, $n_\sigma'' \in U(24)$. Мы не будем описывать явный вид операторов n_σ , поскольку он достаточно громоздок.

Лемма 20.7.2. *Каждый оператор $n_\sigma \in W''$ является автоморфизмом алгебры M_3^s , и поэтому W'' — подгруппа в группе F_4 .*

Этот факт легко устанавливается непосредственной проверкой на основе явного вида операторов n_σ .

Рассмотрим $t_0^* \in R(V)$ и фиксируем какой-либо корень t_{0i} . Если $t_{0i} \in \Delta_{123}$, то $\text{ог } B(t_{0i}) = \text{ог } B(t_0^*)$ (см. лемму 20.4.1). Пусть $t_{0i} \in \Delta_{i_1, i_2, i_3}$, где $(i_1, i_2, i_3) = \sigma(1, 2, 3)$. Рассмотрим элемент $n_\sigma \in W''$ и определим отображение $\varphi: V \rightarrow V$, $\varphi(v) = n_\sigma v n_\sigma^{-1}$. Здесь $\varphi(v) \in V$ при любом $v \in V$, так как $W'' \subset \mathfrak{H}$.

Лемма 20.7.3. Пусть $t_0^* \in R(V)$; тогда $\text{ог } B(t_0^*) = \text{ог } B(t_{0i})$ для любого i , $1 \leq i \leq 4$.

Доказательство. Поскольку подгруппа $\mathfrak{H} = F_4$ связна и тор T отождествлен с тором T_2 в группе $\text{SU}(3)$, то $\text{ог } B(t_0^*) = \text{ог } d\varphi B(t_0^*)$. Далее, $\text{ог } E(t_0^*) = c(\sigma) \cdot \text{ог } d\varphi E(t_0^*)$ и $d\varphi A(t_0^*) = q_\varphi(t_0^*)(n_\sigma A(e) n_\sigma^{-1})$. Докажем, что отображение $d\varphi: T_{t_0^*} O(t_0^*) \rightarrow T_{\varphi(t_0^*)} O(\varphi(t_0^*))$ устанавливает изоморфизм этих касательных пространств. Достаточно показать, что $n_\sigma A_\alpha n_\sigma^{-1} \in A$ для любого α . Рассмотрим отображение $\text{Ad}(n_\sigma): H \rightarrow H$. Из леммы 20.7.1 получаем, что операторы $g \in C = (E_4 \cap C(t))_0$ имеют вид $E_3 + g''$, где g'' действует в ортогональном дополнении L' к плоскости L_0 (элемент $X \in L'$ тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$). Так как $n_\sigma = n_\sigma' \oplus n_\sigma''$, то $\text{Ad}(n_\sigma)(C) \subset C$, а потому $\text{Ad}(n_\sigma)(A) \subset A$, так как A — ортогональное дополнение к $\text{so}(8)$ в H . Поскольку $n_\sigma \in \mathfrak{H}$, то $\text{Ad}(n_\sigma)$ невырождено и $\text{Im } A = A$, что и требовалось.

Так как $t_{0i}, \varphi(t_0^*) \in \Delta_{i_1, i_2, i_3}$, то эти точки можно соединить гладким путем и гладко продеформировать $d\varphi B(t_0^*)$ в $d\varphi B(t_0^*)$ в точке t_{0i} , причем $\text{ог}(d\varphi E(t_0^*)) = c(\sigma) \text{ог } E(t_0^*)$. Осталось сравнить ориентации реперов $A(t_{0i})$ и $q_{t_{0i}}(n_\sigma A(e) n_\sigma^{-1})$ в пространстве $T_{t_{0i}}(O(t_{0i}))$. Достаточно сравнить ориентации базисов $A(e)$ и $n_\sigma A(e) n_\sigma^{-1}$ в плоскости A . Пусть $\{s_1, \dots, s_p\}$ — базис в подалгебре $\text{so}(8)$, тогда взаимная ориентация базисов $A(e)$ и $n_\sigma A(e) n_\sigma^{-1}$ совпадает с взаимной ориентацией базисов $\{s_1, \dots, s_p\}$ и $\{n_\sigma s_1 n_\sigma^{-1}, \dots, n_\sigma s_p n_\sigma^{-1}\}$. Итак, необходимо знать, как группа W'' действует на подгруппе C ; $n(g) = \text{Ad}(n)(g)$.

Рассмотрим симметрическую группу S_3 подстановок трех элементов $(1, 2, 3)$. Если через σ_{ij} обозначены элементарные перестановки, то S_3 состоит из элементов $\{1, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{12}\sigma_{23}, \sigma_{23}\sigma_{12}, \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}\}$. Обозначим элементы σ_{12} и $\sigma_{23}\sigma_{12}$ через φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда $S_3 = \{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^2, \varphi_1\varphi_2, \varphi_1\varphi_2^2\}$. В группе S_3 выделяются следующие коммутативные подгруппы: $\mathbb{Z}_3(\varphi_3)$, $\mathbb{Z}_2(\varphi_1)$, $\mathbb{Z}_2(\varphi_1\varphi_2)$, $\mathbb{Z}_2(\varphi_1\varphi_2^2)$. Как мы знаем, подгруппа C изоморфна группе $\text{Spin}(8)$. Решим следующую задачу: какова подгруппа $\bar{C} \subset F_4$ таких автоморфизмов $g \in F_4$, что $g(L_0) \subset L_0$, где L_0 — 3-мерное подпространство идемпотентов в M_3^2 . Так как $e_i \cdot e_j = 0$ при $i \neq j$, то из $(g(e_i))^2 = g(e_i)$ следует, что $g(e_i) = \sum \alpha_i e_i = \sum \alpha_i^2 e_i$, откуда $\alpha_i = \{0, 1\}$. Окончательно $\{g|_{L_0}\} = \{n'_\sigma\}$, что означает, что группа всех автоморфизмов подалгебры L_0 изоморфна симметрической группе S_3 . Поскольку $\bar{C} \subset C$ является нормальным делителем, то $\bar{C}/C \cong S_3 = \{n'_\sigma\}$. Итак, подгруппа $\bar{C}$ состоит из шести связных компонент, причем связной компонентой единицы является под-

группа C . Теперь рассмотрим в группе F_4 подгруппу $W'' = \{n_\sigma\}$. Так как $n_\sigma|_{L_0} = n'_\sigma|_{L_0}$, то $W'' \subset \tilde{C}$, и так как элемент n_σ полностью определяется перестановкой σ , то W'' изоморфна S_3 , т. е. мы реализовали факторгруппу $\tilde{C}/C$ как подгруппу $W'' \subset \tilde{C}$, причем в каждой связной компоненте $\tilde{C}$ содержится в точности один элемент подгруппы W'' . Ясно, что группа $\tilde{C}$ является полупрямым произведением подгрупп W'' и C .

Рассмотрим присоединенное действие W'' на подгруппе C . Поскольку каждый элемент n_σ действует на C как автоморфизм, то мы получаем гомоморфизм e группы W'' в группу $\text{Aut}(C)$ всех автоморфизмов группы C . Легко показать, что если $\text{Ad}(n_\sigma): C \rightarrow C$ является внутренним автоморфизмом, то $\sigma = 1$ (см. [65]), откуда следует, что e является мономорфизмом. Хорошо известно, что группа $\text{Aut}(C)$ состоит из шести связных компонент (см. [70], [68]), поэтому в каждой компоненте связности группы $\text{Aut}(C)$ содержится в точности по одному элементу подгруппы $e(W'')$. Поскольку W'' изоморфна S_3 , то будем обозначать элементы из W'' так: $\{n(1), n(\varphi_1), \dots, n(\varphi_1\varphi_2^3)\}$, а элементы из $e(W'')$ так: $\{\bar{1}, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2^3\}$. Легко видеть, что элемент $\bar{\varphi}_2$ сохраняет ориентацию группы C . Аналогично и автоморфизмы $\bar{1}, \bar{\varphi}_2^3$ не меняют ориентацию группы C . Так как компонента связности группы $O(8)$, не содержащая единицы, при действии внутренним образом на $SO(8)$ меняет ее ориентацию, то меняют ориентацию группы C и элементы $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2^3$.

Итак, элементы $\bar{1}, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_2^3$ не меняют ориентацию группы C , а элементы $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2^3$ меняют ориентацию группы C . Рассмотрим теперь корни $t_{01} = (+, -, -)$, $t_{02} = (-, +, -)$, $t_{03} = (-, -, +)$, $t_{04} = (+, +, +)$. Корни t_{03} и t_{04} приводятся к «нормальному» виду тождественной перестановкой, поэтому $\text{or } B(t_{03}) = \text{or } B(t_{04}) = \text{or } B(t_0^3)$. Корень t_{02} приводится к «нормальному» виду перестановкой σ_{23} , поэтому $\text{or } (d\varphi E(t_0^3)) = -\text{or } E(t_0^3) = -\text{or } E(t_{02})$. Перестановке σ_{23} отвечает элемент $n(\varphi_1\varphi_2^3)$, и поэтому $\text{or } (d\varphi B(t_0^3)) = \text{or } B(t_{02})$. Корню t_{01} отвечает перестановка $\sigma_{23} \cdot \sigma_{12}$, т. е. $\text{or } (d\varphi B(t_0^3)) = \text{or } B(t_{01})$. Лемма доказана.

Следствие 20.7.1. *Искомая степень отображения $f: V \rightarrow V$, где $V = E_6/F_4$, равна 4; следовательно, $i_*[V] \neq 0$.*

Выберем образующие в $H^*(E_6; \mathbb{R})$ точно так же, как мы это делали в пункте 20.6, воспользовавшись тем, что подгруппа F_4 вполне негомологична нулю в группе E_6 для $K = \mathbb{R}$.

Утверждение 20.7.1. Пусть $i: V \rightarrow \tilde{I}_0(V) \cong \tilde{A}(V)$ — описанное выше вложение пространства $V = E_6/F_4$ как вполне геодезического подмногообразия в группу изометрий $\tilde{I}_0(V) = E_6$. Тогда подмногообразие $i(V)$ реализует нетривиальный коцикл в $H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{Z}_p)$, где $p \geq 7$ и простое либо $p = 0$. Рассмотрим элемент $\Omega = x_9 \cdot x_{17} \in H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbb{Z}_p)$. Тогда $[V] = i^*\left(\frac{1}{4}\Omega\right)$.

Доказательство вытекает из следствия 20.7.1, из выбора образующих, а также из того, что группы E_6 и F_4 не имеют p -кручения при $p \geq 7$ (см. выше).

Доказательство теоремы 20.1.2. Если $V = V'$, то утверждение следует из теоремы 20.1.1; если $V = K \times V'$, то необходимо применить предложение 17.2.1 к подгруппе $K \times \mathfrak{H}$ и сослаться на следствие 19.1.

Эта теорема имеет следующий геометрический смысл.

Предложение 20.7.1. Пусть $V = V'$ и $\mathfrak{H} \subset \dot{A}(V)$ — стационарная подгруппа многообразия V . Если через $\text{ind}(x, y)$ обозначить индекс пересечения двух циклов x и y дополнительных размерностей, то $\text{ind}\{i_*[V], j_*[\mathfrak{H}']\} = \deg f$, $f: V \rightarrow V$, $f(v) = v^2$, где класс смежности $\mathfrak{H}'$ равен $t_0^3 \cdot \mathfrak{H}$, $t_0^3 \in R(V)$.

Доказательство легко следует из явного описания базисов $B(t_0^2)$ (см. выше).

До сих пор мы, как правило, предполагали, что вполне геодезическое подмногообразие V односвязно, и это позволяло использовать разложение $V = K \times V'$. В общем случае отказаться от этого предположения нельзя, однако в некоторых конкретных ситуациях, например в формулировке теоремы 20.2.1, предположение односвязности можно опустить. Точно так же предположение односвязности можно опустить и в формулировке теоремы 20.1.1.

Извлечем еще одно следствие.

Предложение 20.7.2. Пусть V — односвязное вполне геодезическое подмногообразие в компактной связной группе $\mathfrak{G}$. Предположим, что V реализует когомологическую образующую в $H^*(\mathfrak{G}; \mathbb{R})$. Тогда подмногообразие V диффеоморфно одному из следующих многообразий: S^{2l-1} , $l \geq 2$; $SU(3)/SO(3)$ (тип 0A_2I), причем каждое из этих многообразий реализует нетривиальный коцикл в своей группе изометрий.

Доказательство. Это утверждение следует из теорем 20.1.1, 18.1 и утверждения 19.1.

Другое доказательство некоторых результатов настоящего параграфа было дано впоследствии в [93] на основе анализа K -функтора однородных пространств.

§ 21. Теорема классификации, описывающая коциклы в когомологиях компактных групп Ли, реализующиеся вполне геодезическими сферами

21.1. Формулировка теоремы классификации. В этом параграфе решается задача, в некотором смысле обратная той, решению которой был посвящен предыдущий параграф. До сих пор мы исходили из заданного вполне геодезического подмногообразия V в компактной группе Ли $\mathfrak{G}$ и выясняли, когда оно реализует нетривиальный цикл в группе $H_*(\mathfrak{G})$. Полное решение этого вопроса получено в § 20.

Фиксируем теперь некоторое многообразие V_0 , и пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа Ли. Вопрос: какие нетривиальные циклы $x \in \in H_*(\mathfrak{G})$ могут быть реализованы в группе $\mathfrak{G}$ с помощью вполне геодезических подмногообразий, диффеоморфных многообразию V_0 ? Если группа $\mathfrak{G}$ является группой изометрий $I_0(V)$ пространства V (при условии, что $V_0 = V'_0$, см. теорему 18.1), то полный ответ на этот вопрос также содержится в § 20. Если же группа $\mathfrak{G}$ не является группой изометрий, то требуется дополнительный новый анализ.

В качестве «представляющего» многообразия V_0 мы выберем сферу. Этот выбор обусловлен не только тем, что сфера — наиболее простое из пространств V , которые вообще могут реализовывать нетривиальные циклы в группах Ли (см. теоремы 20.1.1 и 20.1.2), но и в значительно большей степени тем, что реализация циклов с помощью сфер тесно связана с реализацией нетривиальных элементов гомотопических групп $\pi_*(\mathfrak{G})$. Более того, в том случае, когда объемлющее многообразие является не группой, а симметрическим пространством типа I, мы сразу будем решать важную задачу о реализации вполне геодезическими сферами нетривиальных элементов гомотопических групп $\pi_*(M) \otimes \mathbb{R}$. Поскольку вполне геодезическую сферу можно рассматривать как экстремаль для многомерного функционала Дирихле (квадратичного по производным), то, следовательно, мы решаем вопрос о нахождении стационарных (критических) точек функционала Дирихле, определенного на функциональном пространстве отображений сферы в группу Ли. Задача эта имеет много самостоятельных приложений, описание которых выходит за рамки настоящей книги.

Замечательным образом описанная выше задача реализации вполне геодезическими сферами нетривиальных элементов гомотопических групп оказывается связанной с задачей о нахождении максимального числа линейно независимых векторных полей на сферах. Эта связь будет подробно описана. (Ниже через $[N]$ обозначается целая часть числа N .)

Теорема 21.1.1. Пусть $\mathfrak{G}$ — компактная простая группа Ли, и пусть $k = k(n) = [1 + \log_2 n]$. Тогда единственными (с точностью до умножения на вещественные числа и по модулю ядра гомоморфизма $H^*(\mathfrak{G}) \rightarrow H^*(S)$, индуцированного вложением сферы S в группу Ли $\mathfrak{G}$) элементами $x \in H^{*k}(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$, реализующимися в группе Ли $\mathfrak{G}$ вполне геодезическими сферами, являются следующие элементы:

- (1) в $H^*(SU(n), \mathbb{R})$, $n \geq 2$, элементы $(x_3, x_5, x_7, \dots, x_{2k-1})$;
- (2) в $H^*(SO(n), \mathbb{R})$, $n \geq 8$, элементы:
 - а) $(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{2k-1})$, если $k \equiv 0 \pmod{4}$,
 - б) $(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{2k-3})$, если $k \equiv 1 \pmod{4}$,
 - в) $(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{2k-5})$, если $k \equiv 2 \pmod{4}$,
 - г) $(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{2k-3})$, если $k \equiv 3 \pmod{4}$;

(3) в $H^*(\mathrm{Sp}(n), \mathbb{R})$, $n \geq 1$, элементы:

а) $(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{2k-1})$, если $k \equiv 0 \pmod{4}$,

б) $(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{2k+1})$, если $k \equiv 1 \pmod{4}$,

в) $(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{2k-1})$, если $k \equiv 2 \pmod{4}$,

г) $(x_3, x_7, x_{11}, \dots, x_{2k-3})$, если $k \equiv 3 \pmod{4}$;

(4) в $H^*(G_2; \mathbb{R})$ элемент x_3 ;

(5) в $H^*(F_4; \mathbb{R})$ элемент x_3 ;

(6) в $H^*(E_6; \mathbb{R})$ элементы (x_3, x_9) ;

(7) в $H^*(E_7; \mathbb{R})$ элементы (x_3, x_{11}) ;

(8) в $H^*(E_8; \mathbb{R})$ элемент x_3 .

В § 22 будет полностью решена аналогичная задача реализации нетривиальных элементов гомотопических групп $\pi_*(M) \otimes \mathbb{R}$ вполне геодезическими сферами для всех компактных неприводимых симметрических пространств типа I (т. е. не являющихся группами Ли).

21.2. Вполне геодезические сферы, реализующие периодичность Ботта. Оказывается, что построение вполне геодезических сфер, реализующих нетривиальные коциклы, тесно связано с известной периодичностью Ботта, которая, как оказывается, носит ярко выраженный «вполне геодезический характер» и, как выясняется (на основе проведенных выше исследований), непосредственно связана со спинорными представлениями ортогональной группы.

Эта связь периодичности Ботта с экстремалами многомерного функционала Дирихле позволяет, в частности, интерпретировать периодичность Ботта в терминах многомерных вариационных задач.

Если обозначить через U прямой предел унитарных групп $\lim U(n)$, то, согласно теореме периодичности Ботта (см. [1]), имеют место изоморфизмы $\pi_{i-1}(U) = \pi_{i+1}(U)$ при $i \geq 1$, причем $\pi_0(U) = 0$, $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$.

Пусть $f_{i-1}: S^{i-1} \rightarrow \mathrm{SU}(m)$ — непрерывное отображение, представляющее элемент $1 \in \mathbb{Z} = \pi_{i-1}(\mathrm{SU}(m))$, где $(i-1)$ нечетно. Выпишем в явном виде изоморфизм периодичности Ботта. Рассмотрим группу $\mathrm{SU}(2)$, представив ее элементы матрицами $p = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, и рассмотрим на сфере S^3 двумерный диск D^2 , определяемый следующим условием: $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$. Вложим этот диск D^2 в группу $\mathrm{SU}(2m)$ следующим образом:

$$p \rightarrow p \otimes E_m = \begin{pmatrix} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \alpha E_m \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим множество точек $g(\sigma, \alpha, \beta) = (E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)) \times \times (p(\alpha, \beta) \otimes E_m) \cdot (E_m \oplus f_{i-1}(\sigma))$. Ясно, что множество $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$ является сферой $S^{i+1} \subset \mathrm{SU}(2m)$, и можно показать, что соответствие $S^{i-1} \rightarrow S^{i+1}$ описывает изоморфизм периодичности. Подробное доказательство будет дано в § 23. Итак, если $f_{i-1}(\sigma) \in$

$\in \text{SU}(m)$, то

$$f_{i+1}(S^{i+1}) = \{g(\sigma, \alpha, \beta)\}, \text{ где } g(\sigma, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^T(\sigma) & \alpha E_m \end{vmatrix}.$$

Вместо вложения двумерного диска D^2 в группу можно рассмотреть вложение сферы $S^2 \rightarrow \text{SU}(2m)$; $p \mapsto p \otimes E_m$, где $p = p(\alpha, \beta)$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Подмногообразие $\{p \otimes E_m\}$ является вполне геодезическим в группе $\text{SU}(2m)$. Так как сфера $S^{i-1} \subset \text{SU}(m)$ допускает вложение в $\text{SU}(2m)$ в виде множества элементов $E_m \oplus f_{i-1}(\sigma)$, то получаем следующее представление для сферы S^{i+1} : $S^{i+1} = \{x \cdot S^2 \cdot x^{-1}\}$, где $x \in S^{i-1} \subset \text{SU}(2m)$, т. е. сфера S^{i+1} получается при присоединении действия сферы S^{i-1} на сферу S^2 .

Положим $m=2$ и за исходное отображение $f_3: S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$ возьмем стандартное отображение $f_3(\sigma) = \begin{vmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{vmatrix}$, где $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Применяя описанную выше процедуру, получаем отображение $f_{2k+1}: S^{2k+1} \rightarrow \text{SU}(2^k)$, представляющее элемент $1 \in \mathbb{Z} = \pi_{2k+1}(\text{SU}(2^k))$.

Лемма 21.2.1. *Сфера $f_{2k+1}(S^{2k+1})$ является вполне геодезическим подмногообразием в группе $\text{SU}(2^k)$, $k \geq 1$.*

Доказательство. Достаточно показать, что подпространство $T_e(S^{2k+1}) \subset \mathfrak{su}(2^k)$ является тройной системой Ли и что $S^{2k+1} = \exp T_e(S^{2k+1})$. Обозначим $\beta f_{2k-1}(\sigma)$ через g_{2k-1} ; тогда точки $g \in S^{2k+1}$ имеют вид

$$g = \begin{vmatrix} \alpha E_{2^{k-1}} & g_{2k-1} \\ -\bar{g}_{2k-1}^T & \alpha E_{2^{k-1}} \end{vmatrix}.$$

Если $g_{2k-1} = \|g_{ij}\|$, то $|\alpha|^2 + \sum_i |g_{ij}|^2 = 1$ при любом j , $1 \leq j \leq 2^{k-1}$.

Представим α в виде $|\alpha|e^{i\varphi}$, и пусть $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$ — вещественные параметры, описывающие сферу S^{2k-1} . Введем на сфере S^{2k+1} в окрестности матрицы E_{2^k} координаты $\{\varphi, x_1, \dots, x_{2k}\}$ и выберем в подпространстве $T_e(S^{2k+1})$ базис $\{A_1, \dots, A_{2k+1}\}$, где

$$A_1 = \frac{\partial g}{\partial \varphi} \Big|_e, \quad A_i = \frac{\partial g}{\partial x_{i-1}} \Big|_e, \quad 2 \leq i \leq 2k+1.$$

Докажем, что $A_i^2 = -E_{2^k}$ и $A_i A_j + A_j A_i = 0$ при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 2k+1$. Пусть $k=1$. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что оно доказано для сферы S^{2k-1} . Обозначим соответствующие ей базисные векторы через $C_1, C_2, \dots, C_{2k-1}$. Тогда векторы A_i , $1 \leq i \leq 2k+1$, имеют следующий вид:

$$A_1 = \begin{vmatrix} iE_{2^{k-1}} & 0 \\ 0 & -iE_{2^{k-1}} \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & F_{2^{k-1}} \\ -E_{2^{k-1}} & 0 \end{vmatrix},$$

$$A_{2+j} = \begin{vmatrix} 0 & C_j \\ C_j & 0 \end{vmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 2k-1.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $A_i A_j + A_j A_i = -2\delta_{ij} E_{2^k}$. Отсюда следует, что $[[A_i, A_j], A_l] = 0$, если $i \neq l$, $j \neq l$, и $[[A_i, A_j], A_l] = -4A_l$, т. е. $T_e(S^{2k+1})$ — тройная система Ли. Тот факт, что $S^{2k+1} = \exp T_e(S^{2k+1})$, проверяется прямым вычислением. Лемма доказана.

21.3. Реализация элементов гомотопических групп компактных групп Ли вполне геодезическими сферами. Рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ матриц $(n \times n)$ и превратим его в эрмитово пространство путем введения метрики $\varphi(A, B) = \operatorname{Re} \operatorname{Spur}(AB^*)$, $B^* = B^T$. Тогда унитарная группа изображается как гладкое подмногообразие в сфере S^{2n-1} радиуса $\sqrt{n}$, причем на подмногообразии $U(n)$ объемлющая эрмитова метрика индуцирует специальную риманову метрику, инвариантную относительно правых и левых сдвигов. Это простое наблюдение оказывается чрезвычайно полезным при изучении экстремалей многомерного функционала Дирихле на подмногообразиях в компактных группах Ли.

Рассмотрим пересечение $U(n) \cap u(n)$. Так как этому пересечению принадлежат те и только те элементы g , для которых $g^2 = -E_n$, то $U(n) \cap u(n) = (iE_n) \cup (-iE_n) \cup \left(\bigcup_{p=1}^n G_{n,p}^{\mathbb{C}} \right)$. Если же рассмотреть пересечение $SU(2m) \cap su(2m)$, то оно состоит из одного многообразия $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$. Если $X \in T_e(S^{2k+1})$, то любая точка сферы S^{2k+1} представима в виде $\cos|x| \cdot E_{2^k} + \frac{\sin|x|}{|x|} \cdot X$; в частности, $X = \exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot X\right)$.

Отсюда следует, что вполне геодезическая сфера S^{2k+1} пересекается с алгеброй Ли $su(2^k)$ по своему вполне геодезическому экватору $S^{2k} \subset G_{2^k, 2^{k-1}}^{\mathbb{C}}$, и эта $2k$ -мерная сфера вполне геодезична в подмногообразии $G_{2^k, 2^{k-1}}^{\mathbb{C}}$. Сфера S^{2k+1} является пересечением $SU(2^k) \cap \Pi_{2k+2}$, где плоскость Π_{2k+2} в пространстве $\mathbb{C}^n$ натянута на векторы (матрицы) $E_{2^k}, A_1, \dots, A_{2^{k+1}}$.

Предложение 21.3.1. Пусть $\mathfrak{G} = SU(n)$, $n \geq 2$, и пусть $k = [1 + \log_2 n]$. Рассмотрим стабильные гомотопические группы $\pi_{2(k-p)-1}(\mathfrak{G})$, где $0 \leq p \leq k-2$. Тогда в этих группах следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами: $\{1, 2, 3, \dots, 2^p\} \in \mathbb{Z} = \pi_{2(k-p)-1}(\mathfrak{G})$.

Доказательство. Рассмотрим в группе $SU(n)$ подгруппу $SU(2^{k-1})$, вложенную стандартным образом: $(E_{n-2^{k-1}}) \oplus \{g\}$. Вложение $SU(2^{k-1}) \rightarrow SU(n)$ индуцирует изоморфизм $(2k-1)$ -мерных гомотопических групп, что дает нам в группе $SU(n)$ вполне геодезическую сферу S^{2k-1} , реализующую элемент 1 ($p=0$). Рассмотрим два вложения группы $SU(2^{k-2})$ в группу $SU(2^{k-1})$: $i_1(g) = E_{2^{k-2}} \oplus g$; $i_2(g) = g \oplus E_{2^{k-2}}$. Тогда вложение i_1 дает вполне

геодезическую сферу S^{2k-3} , реализующую элемент $1 \in \pi_{2k-3} \times \times (SU(n))$ (тот же самый элемент реализуется и при вложении i_2). Рассмотрим вложение $j(x) = i_1(x) \oplus i_2(x) = i_1(x) \cdot i_2(x)$; $x \in S^{2k-3}$. Ясно, что отображение j определяет элемент $[i_1] + [i_2]$, так что вложение $j: S^{2k-3} \rightarrow SU(2^{k-1}) \subset SU(n)$ дает вполне геодезическую сферу S^{2k-3} , реализующую элемент $2 \in \pi_{2k-3}(SU(n))$. Аналогично возникают вложения $i_1, \dots, i_{s_p}$ группы $SU(2^{k-p-1})$ в группу $SU(2^{k-1})$, причем $[i_1] = \dots = [i_{s_p}] = 1 \in \pi_{2(k-p)-1}$ и $[i_1 \dots i_s] = [s] \in \pi_{2(k-p)-1}(SU(n))$. Предложение доказано.

Предложение 21.3.2. Пусть $\mathfrak{G} = SO(n)$, $n \geq 8$, и $k = [\log_2 n]$. Рассмотрим стабильные гомотопические группы, т. е. группы $\pi_{s_p}(\mathfrak{G})$, где $s_p = 2(k-p) - 1$, $0 \leq p \leq k-2$. Тогда в этих группах следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:

- (1) $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2^p\} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 3 \pmod{8}$;
- (2) $\{2, 4, 6, 8, \dots, 2^{p+1}\} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 7 \pmod{8}$;
- (3) $\{1\} \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k-1) \equiv 1 \pmod{8}$;
- (4) если $s_p \equiv 5 \pmod{8}$, то $\pi_{s_p}(\mathfrak{G}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим в группе $SO(n)$ стандартно вложенную подгруппу $SO(2^k)$ и рассмотрим вложение $j: SU(2^{k-1}) \rightarrow \rightarrow SO(2^k)$, $j(A + iB) = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. При вложении $SO(2^k) \rightarrow SO(n)$ индуцируется гомоморфизм гомотопических групп, являющийся изоморфизмом при $i \leq 2^k - 2$, $n \geq 8$, поэтому задача целиком сводится к изучению гомоморфизма j_* . Пусть $j: U(r) \rightarrow SO(2r)$ — вложение; тогда возникает расслоение $U(r) \rightarrow SO(2r) \rightarrow F_{2r}$, где через F_{2r} обозначено многообразие, диффеоморфное подмногообразию всех комплексных структур в $SO(2r)$, т. е. всех таких элементов $g \in SO(2r)$, что $g^2 = -E$ (см. [1]). Известно, что $\pi_i(F_{2r}) = \pi_{i+1}(SO(2r))$ при $i \leq 2r - 4$. Из точной гомотопической последовательности этого расслоения получаем:

- а) $\pi_{8\alpha+1}(U(r)) \rightarrow \pi_{8\alpha+1}(SO(2r))$, $j_*(1) = 1$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$;
- б) $\pi_{8\alpha+3}(U(r)) \rightarrow \pi_{8\alpha+3}(SO(2r))$, $j_*(1) = 1$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$;
- в) $\pi_{8\alpha+5}(U(r)) \rightarrow \pi_{8\alpha+5}(SO(2r))$, $j_*(1) = 0$, $\mathbb{Z} \rightarrow 0$;
- г) $\pi_{8\alpha+7}(U(r)) \rightarrow \pi_{8\alpha+7}(SO(2r))$, $j_*(1) = 2$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Положим $r = 2^{k-1}$; тогда $2k-1 \leq 2r-4$ при $k \geq 4$, т. е. в этом случае утверждение следует из предложения 21.3.1. Если $k=3$, то гомоморфизм $(j_*)_5$ не стабилен, но группа $\pi_5(SO(8))$ еще стабильна, а потому равна нулю. Предложение полностью доказано.

Предложение 21.3.3. Пусть $\mathfrak{G} = Sp(2n)$, $n \geq 6$, и пусть $k = [1 + \log_2 n]$. Рассмотрим стабильные гомотопические группы $\pi_{s_p}(\mathfrak{G})$, где $s_p = 2(k-p) - 1$, $0 \leq p \leq k-2$. Тогда в этих группах следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:

- (1) $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2^p\} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 7 \pmod{8}$;

- (2) $\{2, 4, 6, 8, \dots, 2^{p+1}\} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 3 \pmod{8}$;
 (3) $\{1\} \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k-1) \equiv 5 \pmod{8}$ и $n \geq 8$;
 (4) если $s_p \equiv 1 \pmod{8}$, то $\pi_s(\mathbb{S}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим вложение $j: U(n) \rightarrow \text{Sp}(2n)$, где $\text{Sp}(2n)$ реализована как подгруппа в $\text{SU}(2n)$, состоящая из таких элементов x , что $xI = Ix$, $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что $j(U(n)) = \text{SO}(2n) \cap \text{Sp}(2n)$. Задача сводится к вычислению гомоморфизма $j_*: \pi_s(U(n)) \rightarrow \pi_s(\text{Sp}(2n))$. Так как $xI = Ix$ для любого $x \in j(U(n))$, то кватернионный автоморфизм x переводит в себя собственные подпространства оператора I , а потому возникает расслоение $U(n) \rightarrow \text{Sp}(2n) \rightarrow K_{2n}$ (см. [1]). Из точной гомотопической последовательности этого расслоения легко получить:

- а) $\pi_{8\alpha+1}(U(n)) \rightarrow \pi_{8\alpha+1}(\text{Sp}(2n))$, $j_*(1) = 0$, $\mathbb{Z} \rightarrow 0$;
 б) $\pi_{8\alpha+3}(U(n)) \rightarrow \pi_{8\alpha+3}(\text{Sp}(2n))$, $j_*(1) = 2$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$;
 в) $\pi_{8\alpha+5}(U(n)) \rightarrow \pi_{8\alpha+5}(\text{Sp}(2n))$, $j_*(1) = 1$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$;
 г) $\pi_{8\alpha+7}(U(n)) \rightarrow \pi_{8\alpha+7}(\text{Sp}(2n))$, $j_*(1) = 1$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Если $n \geq 10$, то $2k-1 \leq n-3$, и поэтому утверждение следует из предложения 21.3.1. Если $n=9$, то гомоморфизм j_* не стабилен в размерности 7. Но при $n \geq 6$ гомоморфизм j_* стабилен в размерности 3, т. е. в группе $\pi_3(\text{Sp}(2n))$, $6 \leq n < 10$, и мы по-прежнему получаем требуемую реализацию. При $n=8$, 9 имеем $5 \leq n-3$, т. е. в группах $\text{Sp}(16)$ и $\text{Sp}(18)$ получаем требуемые реализации. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \text{SU}(8) & \xrightarrow{i_1} & \text{Sp}(16) & \xrightarrow{i_3} & \text{SU}(16) \\ & \searrow i_2 & & \nearrow i_4 & \\ & & \text{SO}(16) & & \end{array}$$

где $i_3 i_1 = i_4 i_2$, и пусть $i_{1*}: \pi_7(\text{SU}(8)) \rightarrow \pi_7(\text{Sp}(16))$ — соответствующий гомоморфизм. Так как i_{2*} и i_{4*} стабильны, то $i_{2*}(1) = 2$ и $(i_4 i_1)_*(1) = 2$, откуда $i_{1*}(1) = 1$. Аналогично рассматривается и случай $n=9$. Теорема доказана.

21.4. Необходимые сведения о спинорных и полуспинорных представлениях ортогональной группы. Для решения задачи о реализации циклов нам потребуются понятия, связанные со спинорными и полуспинорными представлениями ортогональной группы. Далее, общий прием, с помощью которого мы будем обнаруживать вполне геодезические сферы, реализующие нетривиальные элементы гомотопических групп $\pi_s(\mathbb{S})$, не будет действовать в размерности 7, что поставит нас перед необходимостью исследовать специфику группы $\text{SO}(8)$.

Рассмотрим комплексное евклидово пространство R_n^+ и обозначим через $\{e_1, \dots, e_n\}$ ортобазис в R_n^+ . Через $e_1, \dots, e_n$ будем обо-

значать базисные поливекторы, являющиеся косым произведением векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_s}$. Рассмотрим комплексное линейное пространство C_n^+ , элементами которого являются следующие формальные суммы (так называемые агрегаты):

$$A = a + \sum_{i_1} a^{i_1} e_{i_1} + \sum_{i_1 < i_2} a^{i_1 i_2} e_{i_1 i_2} + \dots + a^{12 \dots n} e_{12 \dots n}.$$

Умножение агрегатов A на комплексные числа и сложение агрегатов определены покомпонентно. В пространстве C_n^+ можно ввести ассоциативное умножение, обладающее следующими свойствами:

- 1) $(A+B)C = AC + BC$, $C(A+B) = CA + CB$;
- 2) $(AB)C = A(BC)$;
- 3) $AB = BA = a'B$, если $A = (a', 0, 0, \dots, 0)$, $a' \in \mathbb{C}$;
- 4) $aa = |a|^2$, где $a = (0, a, 0, \dots, 0)$;

5) $\frac{1}{k!} [a_1 a_2 \dots a_k] = P[a_1, a_2, \dots, a_k]$, где слева стоит альтернированное произведение векторов $a_1, \dots, a_k$, рассматриваемых как элементы C_n^+ , а справа — внешнее произведение векторов $a_1, \dots, a_k$, рассматриваемое как элемент C_n^+ . В частности, $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} = e_{i_1 i_2 \dots i_k}$; $i_1 < \dots < i_k$. Пространство C_n^+ с этой операцией умножения (см. [77]) называется клиффордовой алгеброй. Рассмотрим в алгебре C_n^+ гладкое подмногообразие W' , составленное из агрегатов вида $V = a_k \dots a_2 a_1$, где a_i — любые неизотропные векторы, т. е. $|a_i|^2 \neq 0$. Такие агрегаты иногда называются версорами. Ясно, что $V^{-1} = \frac{a_1}{|a_1|^2} \dots \frac{a_k}{|a_k|^2}$. Подмногообразие W' несвязно и состоит из двух связных компонент: подмногообразия четных версоров (k четно) и подмногообразия нечетных версоров (k нечетно).

Пусть теперь $n = 2v$, случай нечетного n сводится к этому. Рассмотрим группу $O(2v; \mathbb{C})$; тогда любое ортогональное преобразование в пространстве R_{2v}^+ может быть представлено в виде $y = VxV^{-1}$, где $x, y \in R_{2v}^+$, а V — некоторый версор, $V \in W'$. Подмногообразие W' является группой. Если $V = a_k \dots a_2 a_1$, положим $\tilde{V}^* = (-1)^k a_1 a_2 \dots a_k$; тогда $V\tilde{V}^* = (-1)^k |a_1|^2 \dots |a_k|^2$. По определению отнесем к подмногообразию W те и только те версоры, для которых $V\tilde{V}^* = 1$. Подмногообразие W является группой (называемой спинорной группой); можно определить проекцию $p: W \rightarrow O(2v; \mathbb{C})$, сопоставив каждому $V \in W$ вращение $x \rightarrow VxV^{-1}$. Так как $p(V) = p(-V)$, то группа W является, очевидно, двулистным накрытием над группой $O(2v; \mathbb{C})$. Компоненту единицы группы W будем обозначать через $\text{Spin}(2v; \mathbb{C})$, она состоит из четных версоров. Если рассмотреть в алгебре C_n^+ подалгебру четных агрегатов, то она изоморфна C_{n-1}^+ (для любого n) (см. [77]). При нечетном n алгебра C_n^+ распадается в прямую сумму двух

своих подалгебр, изоморфных C_{n-1}^+ . Алгебра $C_{2\nu}^+$ допускает так называемое спинорное представление в 2^ν -мерном комплексном векторном пространстве, более точно, клиффордова алгебра $C_{2\nu}^+$ изоморфна алгебре всех линейных однородных преобразований комплексного векторного пространства $S_{2\nu}$; этот изоморфизм единственный (с точностью до сопряженности) и называется спинорным представлением алгебры $C_{2\nu}^+$. Так как группа $\text{Spin}(2\nu; \mathbb{C})$ реализована в $C_{2\nu}^+$ посредством подмногообразия W_0 , то спинорное представление алгебры $C_{2\nu}^+$ индуцирует некоторое представление группы $\text{Spin}(2\nu; \mathbb{C})$, которое называется спинорным представлением ортогональной группы $\text{SO}(2\nu; \mathbb{C})$.

Рассмотрим касательное пространство $T_e(W_0)$ к подмногообразию W_0 в точке l и перенесем его параллельно самому себе в начало координат. Получаем подпространство T в алгебре $C_{2\nu}^+$, являющееся алгеброй Ли группы W_0 , натянутое на всевозможные простые бивекторы $e_{ij} = e_i e_j = \frac{1}{2}(e_i e_j - e_j e_i)$, а поэтому спинорное представление алгебры $C_{2\nu}^+$ индуцирует спинорное представление алгебры T . Спинорное представление группы $\text{SO}(2\nu; \mathbb{C})$ вполне приводимо и распадается в прямую сумму двух неприводимых представлений размерности $2^{\nu-1}$. Если рассмотреть клиффордову алгебру $C_{2\nu}^+$ над полем $\mathbb{R}$, то мономорфизм $\text{Spin}(2\nu; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{GL}(2\nu; \mathbb{C})$ заменяется на мономорфизм $\text{Spin}(2\nu) \rightarrow \text{SU}(2^\nu)$, где $\text{Spin}(2\nu)$ — компактная односвязная простая группа Ли при $2\nu \neq 4$. Итак, спинорное представление группы $\text{SO}(2\nu)$ унитарно. Распадение спинорного представления в прямую сумму обусловлено разложением $C_{2\nu}^+$ в прямую сумму двух подпространств: $X_1 \oplus X_2$, где X_1 — четные агрегаты, а X_2 — нечетные агрегаты; ясно, что X_1 и X_2 — инвариантные плоскости спинорного представления. На каждой из этих плоскостей представление группы $\text{Spin}(2\nu)$ уже не является, вообще говоря, точным. Так как центр $Z(\text{Spin}(2\nu))$ совпадает либо с $\mathbb{Z}_4$, либо с $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, то сужения представления на плоскости X_1 и X_2 являются точными представлениями двух полуспинорных групп: $\text{Spin}_1(2\nu)$ и $\text{Spin}_2(2\nu)$. Если ν нечетно, то группы $\text{Spin}_1(2\nu)$, $\text{Spin}_2(2\nu)$, $\text{SO}(2\nu)$ изоморфны; если ν четно, то группы $\text{Spin}_1(2\nu)$ и $\text{Spin}_2(2\nu)$ гомеоморфны, но не изоморфны группе $\text{SO}(2\nu)$.

21.5. Спинорное представление ортогональной группы $\text{SO}(8)$ и группа автоморфизмов чисел Кэли. Обозначим через $\text{Aut}(G)$ и $\text{Int}(G)$ соответственно группы всех автоморфизмов и внутренних автоморфизмов простой алгебры Ли G . Тогда $\text{Aut}(\text{so}(2\nu))/\text{Int}(\text{so}(2\nu)) = \mathbb{Z}_2$, если $\nu > 4$, и $\text{Aut}(\text{so}(8))/\text{Int}(\text{so}(8)) = S_3$ — группа подстановок третьей степени. Изучим группу $\text{Aut}(\text{so}(8))$. Если $\nu = 4$, то спинорное представление группы $\text{SO}(8)$ распадается в сумму двух неприводимых восьмерных представлений, причем на каждой из плоскостей X_1 и X_2 операторы полуспинорных представлений сохраняют симметричные билинейные формы, что приводит к изо-

морфизмам $SO(8) \cong Spin_1(8) \cong Spin_2(8)$ (см. [68]). Рассмотрим спинорное представление алгебры Ли $so(8)$; пусть $X \in so(8)$, а S обозначает спинорное представление; тогда $\tilde{S}(X) \in so(16) \subset su(16)$ для любого X и $\tilde{S}(X) = \tilde{S}_1(X) \oplus \tilde{S}_2(X)$, где операторы $\tilde{S}_i(X)$, $i=1, 2$, действуют на подпространствах X_i . Определим гомоморфизм $h: so(8) \rightarrow so(8)$, положив $h(X) = \tilde{S}_1(X)$; ясно, что h является автоморфизмом алгебры $so(8)$. Оказывается, что $h^3 = E$ и $h^2(X) = h(\tilde{S}_1(X)) = \tilde{S}_2(X)$, $h(\tilde{S}_2(X)) = X$ (см. [68]).

Рассмотрим алгебру чисел Кэли (см. пункт 20.7) и выберем в ней ортонормированный базис $\{1, e_2, e_3, \dots, e_8\}$, $e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$, $1 \cdot x = x \cdot 1$ для любого $x \in K$. Тогда умножение в алгебре K задается следующей таблицей (рис. 46), где стрелки указывают знак произведения. Например, $e_2 e_3 = e_8$, $e_4 e_2 = -e_8$ и т. д. Автоморфизм h оставляет неподвижной 14-мерную подалгебру G_2 , которая, как можно показать прямым вычислением, является алгеброй Ли особой группы G_2 — группы автоморфизмов алгебры октав (чисел Кэли). Рассмотрим теперь в алгебре $so(8)$ элементы $A[\alpha a, g]$, где $g = (g_2, g_3, \dots, g_8)$, $a = (a_2, \dots, a_8)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $A[\alpha a, g] = \|b_{pq}\|$, $b_{1p} = \alpha a_p$, $2 \leq p \leq 8$, $b_{pq} = g_r$ и числа p, q, r определяются соотношением $e_r = e_p e_q$, $2 \leq p < q$. Иными словами, матрица $A[\alpha a, a]$ определяется таблицей умножения в алгебре октав. Выделим в алгебре $so(8)$ три линейных подпространства: $A[a, a]$, $A[-a, a]$, $A[-2a, 0]$. Все эти три плоскости лежат в ортогональном дополнении к подалгебре G_2 . Из свойств автоморфизма h вытекает, что имеет место следующая цепочка изоморфизмов:

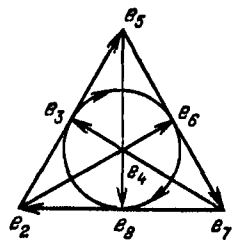


Рис. 46.

$$A[-2a, 0] \xrightarrow{h} A[-a, a] \xrightarrow{h} A[a, a] \xrightarrow{h} A[-2a, 0].$$

Введем новые обозначения: $B_0 = A[-2a, 0]$, $B_1 = A[-a, a]$, $B_2 = A[a, a]$. Подпространство B_0 совпадает с касательной плоскостью к подмногообразию $X_7 \subset SO(8)$ (см. пункт 17.3), являющемуся картановской моделью симметрического пространства типа ${}^0D_4/II$ в группе $SO(8)$. Ясно, что B_0 — тройная система, а потому тройными системами являются и подпространства B_1, B_2 , так как $B_1 = hB_0$, $B_2 = h^2 B_0 = hB_1$, $hB_2 = B_0$. Рассмотрим группу $SO(8)$ и подмногообразия $X_7 = \exp B_0, \exp B_1, \exp B_2$. Легко видеть, что $\exp B_1$ и $\exp B_2$ диффеоморфны сфере S^7 . Так как $X_7 = \mathbb{RP}^7$, то автоморфизм h алгебры $so(8)$ не может быть продолжен до автоморфизма всей группы $SO(8)$.

В группе $Spin(8)$ мы получили три вполне геодезических подмногообразия: $\exp B_0 = S_0^7$, $\exp B_i = S_i^7$, $i=1, 2$, диффеоморфных сфере S^7 ; если через H обозначить автоморфизм группы $Spin(8)$ такой, что $dH = h$, то $S_i^7 = H^3(S_0^7)$, $S_0^7 = H(S_i^7)$. Если π — проекция $Spin(8)$ на $SO(8)$, то $\pi(S_0^7) = \mathbb{RP}^7$, $\pi(S_i^7) = \exp B_i \subset SO(8)$.

Обозначим через p_1 и p_2 проекции $\text{Spin}(8)$ на группы $\text{Spin}_1(8)$ и $\text{Spin}_2(8)$ соответственно. Тогда h порождает три автоморфизма:

$$H_1: \text{SO}(8) \rightarrow \text{Spin}_1(8), \quad H_2: \text{Spin}_1(8) \rightarrow \text{Spin}_2(8), \\ H_3: \text{Spin}_2(8) \rightarrow \text{SO}(8),$$

причем автоморфизм $H_3 H_2 H_1$ является тождественным. Ясно, что $H_1 \pi = p_1 H$, $H_2 p_1 = p_2 H$, $H_3 p_2 = \pi H$ (рис. 47). Так как $Z(\text{Spin}(8)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, то в группе $\text{Spin}_1(8)$ имеем $\exp B_0 = S^7$, $\exp B_1 = \mathbb{RP}^7$, $\exp B_2 = S^7$, а в группе $\text{Spin}_2(8)$ имеем $\exp B_0 = S^7$, $\exp B_1 = S^7$,

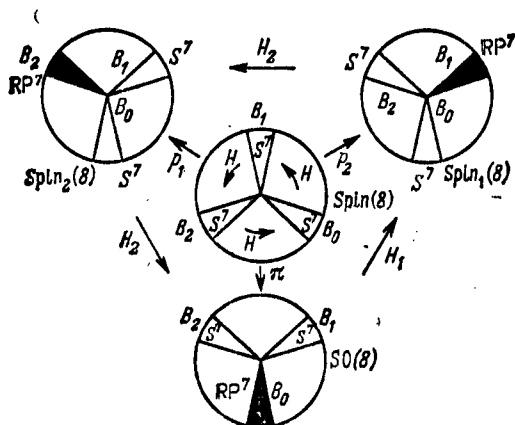


Рис. 47.

$\exp B_2 = \mathbb{RP}^7$. Ясно, что каждое из подпространств B_i является тройной системой и порождает всю алгебру $\mathfrak{so}(8)$. Группа $\text{SO}(8)$, если ее считать порожденной сферой $S^7 = \exp B_2$, должна рассматриваться как полуспинорная группа $\text{Spin}_2(8)$; сама группа $\text{SO}(8)$ порождается подмногообразием $\mathbb{RP}^7 = \exp B_0$.

Аutomорфизм h является внешним автоморфизмом и порождает подгруппу $\{I, h, h^2\}$. Легко подобрать такой автоморфизм $\omega: \mathfrak{so}(8) \rightarrow \mathfrak{so}(8)$, что $\omega^2 = I$ и $h\omega h = \omega$ (мы не будем описывать явный вид этого автоморфизма). Итак, группа S_8 реализована в группе $\text{Aut}(\mathfrak{so}(8))$ как подгруппа, порожденная элементами h и ω . Хорошо известно, что $\pi_7(\text{SO}(8)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (см. [74]). Выясним, какие элементы $x \in \pi_7(\text{SO}(8))$ допускают реализацию с помощью вполне геодезических подмногообразий типа ${}^0D_4 \text{II}$. Обозначим через e_1 и e_2 образующие группы $\pi_7(\text{Spin}(8))$, а через e — образующую группы $\pi_7(S^7)$. Тогда можно считать, что в точной последовательности

$$\pi_8(S^7) \rightarrow \pi_7(\text{Spin}(7)) \xrightarrow{I_*} \pi_7(\text{Spin}(8)) \xrightarrow{I_*} \pi_7(S^7) \rightarrow 0$$

выполнены следующие соотношения: $j_*(e_1) = e$, $i_*(e') = e_2$, где

e' — образующая группы $\pi_7(\text{Spin}(7)) = \mathbb{Z}$. Так как $\pi_6(S^7) = \mathbb{Z}_2$, то точная последовательность приобретает вид $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ (то, что $\pi_8(\text{Spin}(7)) = 0$, см. или в [74], или в [91]). Рассмотрим в группе $\text{Spin}(8)$ три вполне геодезические сферы S_0^7, S_1^7, S_2^7 ; они определяют элементы γ, α, β соответственно, принадлежащие $\pi_7(\text{Spin}(8))$. Ясно, что γ — это характеристический класс стандартного расслоения $\text{Spin}(8) \rightarrow \text{Spin}(9) \rightarrow S^8$. Обозначим через H_* автоморфизм группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порожденный автоморфизмом H .

Предложение 21.5.1. *Любая вполне геодезическая сфера $S^7 \subset \text{Spin}(8)$ может быть совмещена при помощи внутреннего автоморфизма группы $\text{Spin}(8)$ с одной из следующих трех сфер: S_0^7, S_1^7, S_2^7 . Кроме того, $H_*(\alpha) = -\beta$, $H_*(\beta) = \gamma$, $H_*(\gamma) = -\alpha$ и $\gamma = \alpha - \beta$, причем никакие два элемента из элементов α, β, γ не пропорциональны.*

Доказательство. Пусть V — произвольное вполне геодезическое подмногообразие в $\text{Spin}(8)$ типа 0D_4II ; тогда подпространство $B = T_e(V)$ определяет инволютивный автоморфизм θ , а потому θ сопряжен каноническому автоморфизму θ_0 , соответствующему вложению плоскости B_0 . Тогда V диффеоморфно S^7 и $B_0 = \rho(B)$, где $\rho \in \text{Aut}(\mathfrak{so}(8))$. Рассмотрим автоморфизм $\omega(X) = (-E_1 \oplus E_7) \cdot X \cdot (-E_1 \oplus E_7)$, $X \in \mathfrak{so}(8)$; ясно, что h и ω порождают с помощью группы $\text{Int}(\mathfrak{so}(8))$ всю группу $\text{Aut}(\mathfrak{so}(8))$. Так как ω не меняет ориентацию сферы S_0^7 , то «существенным» действием обладает только h , что и доказывает первое утверждение. Легко показать, далее, что $H_*(\alpha) = -\beta$, $H_*(\beta) = \gamma$, $H_*(\gamma) = -\alpha$. Если $d \in \pi_7(\text{Spin}(8))$, то $d = \varphi e_1 + \psi e_2$ и $j_*(d) = \varphi e$. Из явного вида сфер S_1^7 и S_2^7 следует, что $j_*(\alpha) = e$, $j_*(\beta) = -e$, а так как γ — характеристический класс, то $j_*(\gamma) = 2e$ (см. [80]). Отсюда следует, что $\alpha = e_1 + x e_2$, $\beta = -e_1 + y e_2$, $\gamma = 2e_1 + z e_2$; $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Пусть автоморфизм H_* представляется в базисе $\{e_1, e_2\}$ целочисленной матрицей $\begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$; тогда из условия $H_*^3 = I$, $H_* \neq I$ следует, что $n \neq 0$, $q = -(1+m)$, $p = -\frac{m^2+m+1}{n}$. Так как

$H_*(e_1 + x e_2) = e_1 - y e_2$, $H_*(-e_1 + y e_2) = 2e_1 + z e_2$, $H_*(2e_1 + z e_2) = -e_1 - x e_2$, то отсюда следует, что $x = y + z$, т. е. $\gamma = \alpha - \beta$. Предположим теперь, что $\gamma = 2\alpha$; тогда, применяя H_* , получаем $\alpha = 2\beta$, что невозможно. Аналогично доказывается, что никакие два из элементов α, β, γ не пропорциональны.

Следствие 21.5.1. *Любое вполне геодезическое подмногообразие типа 0D_4II в группе $\text{SO}(8)$ может быть совмещено при помощи внутреннего автоморфизма группы $\text{SO}(8)$ либо с подмногообразием $\mathbb{RP}^7 = \pi(S_0^7)$, либо со сферами $\pi(S_1^7)$, $\pi(S_2^7)$, причем $\gamma = \alpha - \beta$ и никакие два из трех элементов α, β, γ не пропорциональны.*

Так как $\pi_k(\text{SO}(8)) = \pi_k(\text{Spin}(8))$ при $k > 1$, то соответствующие элементы группы $\pi_k(\text{SO}(8))$ мы обозначили теми же самыми буквами.

21.6. Описание вполне геодезических сфер, реализующих нетривиальные (ко)циклы в когомологиях простых групп Ли. Случай группы $SU(n)$. Рассмотрим группу $SU(n)$, $n \geq 2$; тогда из предложения 21.3.1 следует, что когомологические образующие $x_3, x_5, x_7, \dots, x_{2k-1}$ кольца $H^*(SU(n); \mathbb{R})$ реализуются вполне геодезическими сферами, где $k = [1 + \log_2 n]$. Осталось доказать, что указанные элементы являются единственными элементами, допускающими такую реализацию.

Доказательство теоремы 21.1.1 (пункт (1)). Пусть S^{2p-1} — вполне геодезическая сфера в группе $SU(n)$; тогда (см. теорему 18.1) в группе $SU(n)$ содержится подгруппа $A(V)$, локально изоморфная группе $Spin(2p)$, если $p \geq 2$. Докажем, что группа $A(V)$ не может быть изоморфна ни группе $SO(2p)$, ни группе $PSO(2p)$ при $p > 4$. В самом деле, допустим, что $A(V) \cong SO(2p)$; тогда S^{2p-1} порождает тройную систему $B = T_e(S^{2p-1})$, соответствующую инволютивному автоморфизму θ , $\theta(B) = -B$. Существует такой автоморфизм $\rho: so(2p) \rightarrow so(2p)$, что $\rho\theta\rho^{-1} = \theta_0$, где θ_0 — стандартный инволютивный автоморфизм, определяющийся тройной системой B_0 . Поскольку $p > 4$, то любой автоморфизм алгебры $so(2p)$ однозначно продолжается до некоторого автоморфизма группы $SO(2p)$; пусть ρ — такое продолжение. Тогда $\bar{\rho}(S^{2p-1}) = \exp B_0 = \mathbb{R}P^{2p-1}$, что невозможно. Случай $p = 4$ вытекает из следствия 21.5.1. Если $p > 4$, то группа $A(V)$ не может быть изоморфна группе $PSO(2p)$, так как в противном случае мы получили бы вполне геодезическую сферу в группе $SO(2p)$.

Пусть $p = 4$; докажем, что $A(S^7)$ не изоморфна $PSO(8) = SO(8)/\mathbb{Z}_2$, где подгруппа $\mathbb{Z}_2$ состоит из элементов $\{E_8, -E_8\}$. Предположим, что $A(S^7) \cong PSO(8)$; тогда одна из компонент образа $\tau^{-1}(S^7) \subset SO(8)$ (τ — проекция $SO(8)$ на $PSO(8)$) является вполне геодезической сферой, а поэтому при помощи внутреннего автоморфизма ρ может быть переведена либо в сферу $\pi(S_1^7)$, либо в сферу $\pi(S_2^7)$. Поскольку автоморфизм внутренний, то он порождает автоморфизм $\text{тр}: PSO(8) \rightarrow PSO(8)$, дифференциал которого переводит $T_e(S^7)$ либо в B_1 , либо в B_2 ; но тогда $\text{тр}(S^7) = \exp B_i$ (i — либо 1, либо 2), где $\exp$ берется в группе $PSO(8)$. Рассмотрим в группе $SO(8)$ сферы $\pi(S_i^7)$, $i = 1, 2$; очевидно, что элемент центра $-E_8$ принадлежит обоим этим сферам (см. пункт 21.5), поэтому $\pi(S_i^7) \cong \mathbb{R}P^7 = \exp B_i$ в группе $PSO(8)$. Так как тр должен переводить S^7 в $\exp B_i$, получаем противоречие. Отсюда следует, что группа $A(S^{2p-1})$ при $p \geq 4$ изоморфна либо группе $Spin(2p)$, либо какой-нибудь из полуспинорных групп $Spin_i(2p)$. Напомним, что группа $SO(8)$ может рассматриваться как полуспинорная группа (см. пункт 21.5).

Рассмотрим группу $SU(n)$, $n \geq 4$, и пусть $S^{2p-1} \subset SU(n)$, где $p > k$, т. е. $p \geq 4$. Тогда вложение $A(S^{2p-1}) \rightarrow SU(n)$ порождает точное линейное представление C либо группы $Spin(2p)$, либо группы $Spin_i(2p)$, причем размерность этого представления равна n .

Представление C распадается в прямую сумму неприводимых представлений: $C = \bigoplus C_r$. Предположим сначала, что $A(S^{2p-1}) = \text{Spin}_i(2p)$, тогда $Z(A(V)) = \mathbb{Z}_2$. Хотя бы одно из представлений C_r является точным представлением группы $\text{Spin}_i(2p)$. Если бы это было не так, то каждое из представлений C_r было бы точным представлением группы $\text{PSO}(2p)$, а тогда и все представление C было бы точным представлением группы $\text{PSO}(2p)$, что противоречит исходному предположению. В то же время известно (см. [75], [77]), что размерность неприводимого точного линейного представления группы $\text{Spin}_i(2p)$ не меньше чем 2^{p-1} , откуда следует, что $2^{p-1} \leq \dim C_r \leq n$, т. е. $k < p \leq 1 + \log_2 n$, что противоречит выбору числа k . Итак, $A(S^{2p-1})$ при $p \geq 4$ не изоморфна $\text{Spin}_i(2p)$, $i = 1, 2$.

Предположим теперь, что $A(S^{2p-1}) = \text{Spin}(2p)$; тогда возникает точное линейное представление C группы $\text{Spin}(2p)$ размерности n . Раскладывая C в прямую сумму неприводимых представлений C_r , получаем, что по крайней мере одно из представлений C_r должно быть точным представлением либо группы $\text{Spin}(2p)$, либо какой-нибудь из групп $\text{Spin}_i(2p)$. Отсюда снова получаем оценку $2^{p-1} \leq n$, что противоречит выбору числа k . Так как тем самым исчерпан запас локально изоморфных простых компактных групп типа D_p , $p \geq 4$, то группа $\text{SU}(n)$ при $p \geq 4$ не может содержать вполне геодезическую сферу S^{2p-1} , где $p > k$, т. е. при $n \geq 4$ утверждение 1) теоремы 21.1.1 доказано. Доказательство для группы $\text{SU}(3)$ проводится элементарными средствами.

21.7. Случай групп $\text{SO}(n)$ и $\text{Sp}(2n)$. Теперь мы переходим к группам $\text{SO}(n)$ и $\text{Sp}(2n)$. В этих двух случаях имеются резкие отличия от группы $\text{SU}(n)$. Так, например, элементы кольца $H^*(\mathbb{S}; \mathbb{R})$, вполне геодезическая реализация которых уже установлена в предложениях 21.3.2 и 21.3.3, не исчерпывают все множество элементов, допускающих подобную реализацию. Обратимся снова к анализу унитарной периодичности Ботта. Рассмотрим сферу $f_{2k-1}(S^{2k-1})$ в группе $\text{SU}(2^{k-1})$ и выделим подгруппу $A(S^{2k-1})$.

Лемма 21.7.1. *Группа $A(S^{2k-1})$ изоморфна одной из полуспинорных групп $\text{Spin}_i(2k)$, $k \geq 4$.*

Отметим, что если k нечетно, то мы считаем, что группа $\text{Spin}_i(2k)$ изоморфна группе $\text{Spin}(2k)$ (см. пункт 21.4).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 21.1.1(1), получаем, что $A(S^{2k-1})$ изоморфна либо $\text{Spin}(2k)$, либо $\text{Spin}_i(2k)$, причем вложение $A(S^{2k-1}) \rightarrow \text{SU}(2^{k-1})$ порождает точное представление, которое неприводимо. Если k четно, то $\text{Spin}(2k)$ не имеет точных неприводимых представлений размерности 2^{k-1} (см. [75]), а потому $A(S^{2k-1}) \cong \text{Spin}_i(2k)$. Если k нечетно, то сразу получаем $A(S^{2k-1}) \supset \text{Spin}(2k) = \text{Spin}_i(2k)$. Лемма доказана.

Появление подалгебры $\mathfrak{so}(2k) \subset \mathfrak{su}(2^{k-1})$, порожденной тройной системой $B = T_r(S^{2k-1})$, можно усмотреть и непосредственно. В § 21 был указан базис $A_1, \dots, A_{2k-1}$ такой, что $A_i A_j + A_j A_i = -2\delta_{ij} E$.

Коммутант плоскости B натянут на базисные элементы $\left\{\frac{1}{2} A_i A_j\right\}$, $i \neq j$. Очевидно, что подалгебра $[B, B]$ изоморфна алгебре $so(2k-1)$.

Рассмотрим клиффордову алгебру C_{2k}^+ с базисом $e_1, \dots, e_{2k}$ в пространстве R_{2k} , и пусть она представлена спинорным образом в пространстве S_{2k} . Поскольку $T_e(W_0)$ натянуто на простые бивекторы $\{e_{ij}\}$, то достаточно задать спинорное представление алгебры $so(2k)$ только на бивекторах $\{e_{i, 2k}\}$, так как $e_{ij} = -e_{i, 2k} e_{j, 2k}$. В то же время $e_{i, 2k}^2 = -1$; поэтому ясно, что элементы $A_1, \dots, A_{2k-1}$ являются образами элементов $e_{i, 2k}$ ($i = 1, \dots, 2k-1$) при полуспинорном представлении алгебры C_{2k}^+ .

Следствие 21.7.1. *Вполне геодезическая сфера $f_{2k-1}^{2k-1}(S^{2k-1}) \subset \text{Spin}_i(2k)$ реализует образующую $x_{2k-1} \in H^*(\text{Spin}_i(2k); \mathbb{R})$.*

Доказательство следует из того факта, что отображение $f_{2k-1}: S^{2k-1} \rightarrow \text{Spin}_i(2k) \subset \text{SU}(2^{k-1})$ представляет образующую группы $Z = \pi_{2k-1}(\text{SU}(2^{k-1}))$.

Доказательство теоремы 21.1.1 (пункт (2)). а) Рассмотрим $\mathbb{G} = \text{SO}(n)$ и предположим, что $k = [1 + \log_2 n]$ нечетно. Из предложения 21.3.2 следует, что элементы $x_3, x_7, \dots, x_{2k-5}$ реализованы вполне геодезическими сферами. Допустим, что в $\text{SO}(n)$ содержится вполне геодезическая сфера S^{2p-1} , где $p > k-1$. Так как $n \geq 8$, то $p \geq 4$. Тогда подгруппа $A(S^{2p-1})$ изоморфна либо $\text{Spin}(2p)$, либо $\text{Spin}_i(2p)$ и вложение $A(S^{2p-1}) \rightarrow \text{SO}(n)$ порождает точное представление, откуда следует, что $2^{p-1} \leq n$, т. е. $2p-1 \leq 1 + 2 \log_2 n$. Так как группа π_{2p-1} стабильна; то, если сфера S^{2p-1} реализует нетривиальный элемент $H^*(\text{SO}(n); \mathbb{R})$, это означает, что $2p-1 \geq (4\omega-1) + 4 = 4\omega + 3$. Получаем неравенство $4\omega + 3 \leq 1 + 2 \log_2 n$, $k+1 \leq 1 + \log_2 n$, что противоречит выбору числа k . Для нечетного k пункт (2) теоремы доказан.

б) Пусть $\mathbb{G} = \text{SO}(n)$, и предположим, что k четно, $k = [1 + \log_2 n]$, $k = 2\omega$. В этом случае $p \geq 4$ и в группе $\text{SO}(n)$ содержится подгруппа $A(S^{2p-1})$, изоморфная либо $\text{Spin}(2p)$, либо $\text{Spin}_i(2p)$, что снова дает оценку $p \leq 1 + \log_2 n$. Из предложения 21.3.2 следует, что вполне геодезическими сферами уже реализованы элементы $x_3, x_7, \dots, x_{2k-5}$. Допустим, что $2p-1 \geq 2k+1$; тогда $k+1 \leq 1 + \log_2 n$, что противоречит выбору числа k . Осталось выяснить, можно ли реализовать вполне геодезической сферой образующую x_{2k-1} , где $k = 2\omega$.

Лемма 21.7.2. Пусть k четно и $k \geq 4$; тогда, если $\frac{k(k-1)}{2}$ четно, то существует вложение $\xi: \text{Spin}_i(2k) \rightarrow \text{SO}(2^{k-1})$ такое, что вполне геодезическая сфера $\xi f_{2k-1}^{2k-1}(S^{2k-1})$ реализует образующую $x_{2k-1} \in H^*(\text{SO}(2^{k-1}); \mathbb{R})$, а если $\frac{k(k-1)}{2}$ нечетно, то существует вложение $\eta: \text{Spin}_i(2k) \rightarrow \text{Sp}(2^{k-1})$ такое, что вполне геодезическая сфера $\eta f_{2k-1}^{2k-1}(S^{2k-1})$ реализует образующую $x_{2k-1} \in H^*(\text{Sp}(2^{k-1}); \mathbb{R})$.

Доказательство. Рассмотрим спинорное представление $\mathcal{S}: \text{Spin}(2k) \rightarrow \text{SU}(2^k)$. Так как k четно, то определена проекция $p_i: \text{Spin}(2k) \rightarrow \text{Spin}_i(2k)$. Рассмотрим в алгебре C_{2k}^+ операцию транспонирования агрегатов, при которой базисный поливектор $e_{i_1 i_2 \dots i_s}$ заменяется на $e_{i_s \dots i_2 i_1}$; транспонированный агрегат обозначим через $\bar{A}$. Рассмотрим автоморфизм $(\mathcal{S}(A))^T \rightarrow \mathcal{S}(\bar{A})$ полной матричной алгебры в пространстве S_{2k} , изоморфной C_{2k}^+ ; здесь через $(\mathcal{S}(A))^T$ обозначена обычная операция транспонирования в пространстве S_{2k} . Известно (см. [75], [77]), что любой автоморфизм алгебры C_{2k}^+ внутренний, а потому $\mathcal{S}(\bar{A}) = C(\mathcal{S}(A))^T C^{-1}$, где C — некоторая невырожденная постоянная матрица. Транспонирование агрегата $V \in W_0$ означает переход к обратному элементу: $\bar{V} = V^{-1}$. Отсюда получаем, что $C = (\mathcal{S}(V)) C (\mathcal{S}(V))^T$, $V \in W_0$. Легко показать, что тензор C определен однозначно с точностью до числового множителя $c \neq 0$. Итак, подгруппа $\text{Spin}(2k) \subset \text{SU}(2^k)$ сохраняет билинейную форму C , которая всегда является либо симметрической, либо кососимметрической, а именно: $c^{\mu\nu} =$

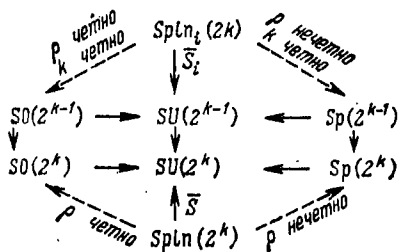


Рис. 48.

$= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} c^{\mu\nu}$ (см. [77]). Выделим в $\text{SU}(2^k)$ две подгруппы: $\text{SO}(2^k)$ и $\text{Sp}(2^k)$, где $\text{SO}(2^k) = \text{SU}(2^k) \cap \text{SO}(2^k; \mathbb{C})$, $\text{Sp}(2^k) = \text{SU}(2^k) \cap \text{Sp}(2^k; \mathbb{C})$. Тогда, если $\rho = \frac{k(k-1)}{2}$ четно, то представление $\mathcal{S}$ является вложением группы $\text{Spin}(2k)$ в группу $\text{SO}(2^k)$, а если ρ нечетно, то — вложением в группу $\text{Sp}(2^k)$. Для полуспинорных представлений $\mathcal{S}_i$ картина усложняется. Пространство представления S_{2k} разлагается в сумму двух инвариантных подпространств: $S_{2k} = X_1 \oplus X_2$ (см. пункт 21.4); поэтому необходимо выяснить, когда тензор C допускает разложение в прямую сумму $C = C_1 \oplus C_2$, где тензоры C_i суть ограничения тензора C на плоскости X_i и поэтому имеют тот же тип симметрии, что и C .

Рассмотрим в пространстве R_{2k}^+ ортобазис $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k}\}$, и пусть $\mathcal{S}$ — спинорное представление; обозначим операторы $\mathcal{S}(e_j)$ через E'_j ; тогда (см. [77]) тензор C для четного k имеет вид $C = E'_{k+1} \cdot E'_{k+2} \dots E'_{2k}$, а для нечетного k имеет вид $C = E'_1 E'_2 \dots E'_k$. Так как операторы E'_j переставляют подпространства X_1 и X_2 между собой, то тензор C допускает сужение на X_1 и X_2 в том и только в том случае, когда k четно. Мы можем подвести итог в виде следующей диаграммы (рис. 48). Так как отображение $f_{2k-1}: S^{2k-1} \rightarrow \text{SU}(2^{k-1})$ порождает полуспинорное представление $\mathcal{S}_i$ (см. лемму 21.7.1), то отображение ξf_{2k-1}

реализует образующую группы $\pi_{2k-1}(SO(2^{k-1}))$, а отображение η'_{2k-1} — образующую группы $\pi_{2k-1}(Sp(2^{k-1}))$. Лемма доказана.

Рассмотрим группу $\mathfrak{G} = SO(n)$. Пусть $k = 4\omega$, тогда ρ четно. Из леммы 21.7.2 получаем, что в группе $SO(2^{k-1})$ при $k \geq 4$ существует вполне геодезическая сфера S^{2k-1} , реализующая образующую x_{2k-1} . Так как $k-1 \leq \log_2 n$, то существует вложение $j: SO(2^{k-1}) \rightarrow SO(n)$, индуцирующее мономорфизм гомотопических групп $\pi_{2k-1}(SO(2^{k-1})) \rightarrow \pi_{2k-1}(SO(n))$ при $k \geq 5$. Отсюда вытекает, что при $k \geq 5$ вполне геодезическая сфера $j_*\eta'_{2k-1}(S^{2k-1})$ реализует образующую x_{2k-1} .

Пусть теперь $k = 4$, тогда гомоморфизм $j_*: \pi_7(SO(8)) \rightarrow \pi_7(SO(9))$ не является мономорфизмом. Хорошо известно (см. [80]), что ядром гомоморфизма $j_*: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ (см. пункт 21.5) является подгруппа, порожденная элементом γ , где γ — характеристический класс. Отсюда в силу следствия 21.5.1 получаем, что $j_*(\gamma) = j_*(\alpha) - j_*(\beta)$, т. е. $j_*(\alpha) = j_*(\beta)$; но так как элементы α и β не пропорциональны γ , то $j_*(\alpha) \neq 0$ и вполне геодезическая сфера $j\pi(S'_i)$ (точно так же, как и сфера $j\pi(S'_j)$) реализует образующую $x_7 \in H^*(SO(9); \mathbb{R})$. Так как группа $\pi_7(SO(9))$ уже стабильна, то при вложении $SO(9) \rightarrow SO(n)$ указанная сфера по-прежнему реализует образующую x_7 . Тем самым, доказана следующая

Лемма 21.7.3. Пусть $k = [1 + \log_2 n]$, $k \equiv 0 \pmod{4}$, $k \geq 4$. Тогда образующая $x_{2k-1} \in H^*(SO(n); \mathbb{R})$ реализуется вполне геодезической сферой.

Докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 21.7.4. Пусть $k = [1 + \log_2 n]$, причем k четно и $k \geq 6$. Предположим, что в группе $SO(n)$ содержится вполне геодезическая сфера S^{2k-1} . Тогда существует вложение $\text{Spin}_i(2k) \rightarrow SO(2^{k-1})$.

Доказательство. Рассмотрим группу $A(S^{2k-1})$; как уже было доказано выше, она изоморфна либо $\text{Spin}(2k)$, либо какой-нибудь из групп $\text{Spin}_i(2k)$ при $k > 4$. Разложим точное представление C группы $A(S^{2k-1})$ в прямую сумму неприводимых представлений: $C = \bigoplus C_r$. Тогда среди представлений C_r найдется по крайней мере одно такое C_r , которое является неприводимым двузначным представлением группы $SO(2k)$. Значит, его размерность кратна 2^{k-1} (см. [75]), а так как число k было выбрано максимальным, то $\dim C_r = 2^{k-1}$. Так как единственными двузначными неприводимыми представлениями размерности 2^{k-1} группы $SO(2k)$ являются полуспинорные представления $\tilde{S}_i$, то $C_r = \tilde{S}_i$ для некоторого i , что и доказывает лемму.

Пусть теперь $k \equiv 2 \pmod{4}$, ρ нечетно. Докажем, что образующая x_{2k-1} не может быть реализована вполне геодезической сферой.

Лемма 21.7.5. Пусть $k \equiv 2 \pmod{4}$, $k = [1 + \log_2 n]$, $k \geq 6$. Тогда в группе $SO(n)$ не существует вполне геодезической сферы S^{2k-1} .

Доказательство. Допустим противное: пусть в группе $SO(n)$ содержится вполне геодезическая сфера S^{2k-1} . В силу леммы 21.7.4 существует вложение $\zeta: \text{Spin}_i(2k) \rightarrow SO(2^{k-1})$, причем воз-

никающее представление неприводимо. Рассмотрим сквозное отображение $\kappa\xi: \text{Spin}_i(2k) \rightarrow \text{SU}(2^{k-1})$, где $\kappa: \text{SO}(2^{k-1}) \rightarrow \text{SU}(2^{k-1})$ — стандартное вложение. Получаем точное представление группы $\text{Spin}_i(2k)$ размерности 2^{k-1} , которое, очевидно, неприводимо, а потому эквивалентно одному из полуспиновых представлений $\mathcal{S}_i$. Так как p нечетно, то представление $\kappa\xi$ имеет кососимметрический билинейный инвариант C (см. лемму 21.7.2), а потому $\kappa\xi(\text{Spin}_i(2k)) \subset \subset \text{Sp}(2^{k-1})$, т. е. $\kappa\xi(\text{Spin}_i(2k)) \subset \text{SO}(2^{k-1}) \cap \text{Sp}(2^{k-1})$, т. е. мы получили точное неприводимое представление группы $\text{Spin}_i(2k)$ в группу $U(2^{k-2})$, что невозможно, так как наименьшая размерность такого представления равна 2^{k-1} . Лемма доказана.

Леммы 21.7.3 и 21.7.5 завершают доказательство теоремы 21.1.1(2). Мы не будем останавливаться на доказательстве теоремы 21.1.1(3), поскольку это доказательство в своих основных чертах воспроизводит приведенные выше рассуждения. Доказательство пунктов (4) — (8) теоремы 21.1.1 проводится по той же самой схеме и выполнено в [59]. Теорема 21.1.1 доказана полностью.

§ 22. Теорема классификации, описывающая элементы гомотопических групп симметрических пространств типа I, реализующиеся вполне геодезическими сферами

22.1. Формулировка теоремы классификации. Результаты § 21 описывают вполне геодезические сферы в компактных неприводимых симметрических пространствах типа II. Поскольку изучение вполне геодезических сфер в компактном односвязном симметрическом пространстве сводится к рассмотрению неприводимых пространств типа I и типа II (см. выше), то для выяснения общей картины нам осталось изучить неприводимые пространства типа I, что мы и сделаем в настоящем параграфе. Все эти пространства перечислены в таблице 1; объединяя в ней некоторые серии, получаем следующий список (не содержащий особые серии):

$$\begin{aligned} & \text{SU}(p+q)/\text{S}(\text{U}(p) \times \text{U}(q)), \quad \text{SO}(p+q)/\text{S}(\text{O}(p) \times \text{O}(q)), \\ & \text{Sp}(2(p+q))/\text{Sp}(2p) \times \text{Sp}(2q), \quad \text{SU}(n)/\text{SO}(n), \\ & \text{SU}(2n)/\text{Sp}(2n), \quad \text{SO}(2n)/\text{U}(n), \quad \text{Sp}(2n)/\text{U}(n). \end{aligned}$$

Обозначим через $\{x_s, y_s, \dots\}$ образующие группы $\pi_s(V) \otimes \mathbb{R}$; тогда $\pi_*(V) \otimes \mathbb{R} = \bigoplus_s \mathbb{R}(x_s, y_s, \dots)$, где через $\mathbb{R}(x_s, y_s)$ обозначена группа $\pi_s(V) \otimes \mathbb{R}$. Через $Q_N(V)$ будем обозначать подгруппу в группе $\pi_*(V) \otimes \mathbb{R}$, составленную из всех таких элементов x , что $\dim x < N$. Пусть $k = k(n) = [1 + \log_2 n]$. Определим следующую функцию:

$$f_i(n) = f_i(2^{k-1}) = \begin{cases} 2k - i - 1, & \text{если } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2k - i - 3, & \text{если } k \equiv 1 \pmod{4}, \\ 2k - i - 5, & \text{если } k \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2k - i - 3, & \text{если } k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Теорема 22.1.1 (А). Пусть V — компактное неприводимое симметрическое пространство типа I, группа движений которого не является особой группой Ли. Тогда единственными элементами группы $\pi_*(V) \otimes \mathbb{R}$, реализующимися вполне геодезическими сферами, являются следующие элементы (здесь $k = k(n)$):

(1) если $V = \mathrm{SU}(2n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n))$, $k \geq 3$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq k} \mathbb{R}(x_{2\alpha})$, то $\{x_{2\alpha}\}$, где $1 \leq \alpha \leq k$;

(2) если $V = \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(n))$, $k \geq 6$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq k/2} \mathbb{R}(x_{4\alpha})$, то $\{x_{4\alpha}\}$, где $4 \leq 4\alpha \leq f_7(16n)$;

(3) если $V = \mathrm{Sp}(2n)/(\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(n))$, $n = 2s$, $k \geq 8$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq k/2} \mathbb{R}(x_{4\alpha})$, то $\{x_{4\alpha}\}$, где $4 \leq 4\alpha \leq f_8(4n)$;

(4) если $V = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$, $k \geq 5$, $Q_{2k-1}(V) = \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq (k-1)/2} \mathbb{R}(x_{4\alpha+1})$, то $\{x_{4\alpha+1}\}$, где $5 \leq 4\alpha + 1 \leq f_9(8n)$;

(5) если $V = \mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(2n)$, $k \geq 5$, $Q_{2k+1}(V) = \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq k/2} \mathbb{R}(x_{4\alpha+1})$, то $\{x_{4\alpha+1}\}$, где $5 \leq 4\alpha + 1 \leq f_2(4n)$;

(6) если $V = \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$, $k \geq 5$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{2 \leq \alpha \leq (k-1)/2} \mathbb{R}(x_{4\alpha+2})$, то $\{x_{4\alpha+2}\}$, где $2 \leq 4\alpha + 2 \leq f_1(2n)$;

(7) если $V = \mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{U}(n)$, $k \geq 5$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq (k-1)/2} \mathbb{R}(x_{4\alpha+2})$, то $\{x_{4\alpha+2}\}$, где $2 \leq 4\alpha + 2 \leq f_5(8n)$.

(Б) Пусть V — компактное неприводимое симметрическое пространство типа I, группа движений которого является особой группой Ли (см. таблицу 1). Тогда единственными элементами $x \in H^*(V; \mathbb{R})$, реализующимися вполне геодезическими сферами, являются следующие элементы:

(1) $x_3 \in H^*(\mathrm{Ad} E_6/T^1 \cdot \mathrm{Spin}(10))$;

(2) $x_9 \in H^*(E_6/F_4)$;

(3) $x_2 \in H^*(\mathrm{Ad} E_7/T^1 \cdot E_6)$.

22.2. Доказательство теоремы классификации. Связь между числом линейно независимых полей на сферах и числом элементов гомотопических групп, реализуемых вполне геодезическими сферами. В пункте 21.3 мы представили группу $\mathrm{SU}(2p)$ как гладкое подмногообразие в сфере S^{8p^2-1} радиуса $\sqrt{2p}$. Аналогичным образом вложим группу $\mathrm{SO}(2p)$ в сферу S^{4p^2-1} радиуса $\sqrt{2p}$. Центральные плоские сечения групп $\mathrm{SU}(2p)$ и $\mathrm{SO}(2p)$ определим как пересечения $\Pi_s \cap \mathfrak{G}$, где Π_s — подпространство размерности s , проходящее через начало координат. Докажем следующий факт: максимально возможная размерность сферы $S^{s-1} = \Pi_s \cap \mathfrak{G}$, являющейся центральным плоским сечением, а потому вполне геодезической сферой в группе $\mathfrak{G}$, не может превосходить числа $s(4p)$ для группы $\mathrm{SU}(2p)$ и числа $s(2p)$ для группы $\mathrm{SO}(2p)$, где через $s(r)$ обозначено максимальное число линейно независимых векторных полей на сфере S^{r-1} . Более того, эти числа достигаются. Аналогичная оценка $s-1 \leq s(4p)$ имеет место и для группы $\mathrm{Sp}(2p)$.

Пусть $S^{s-1} = \Pi_s \cap \text{SU}(2p)$ (в дальнейшем для краткости будем говорить о C -сечениях). Ясно, что существует такой элемент $g_0 \in \text{SU}(2p)$, что сдвиг $g \rightarrow g_0 g$ группы $\text{SU}(2p)$ по себе переводит сферу S^{s-1} в другое C -сечение $g_0 S^{s-1}$, которое содержит оба элемента: E_{2p} и $-E_{2p} \in \text{SU}(2p)$. Тогда $g_0 S^{s-1}$ покрыта геодезическими, минимальными на сфере S^{8p-1} и соединяющими два полюса: E_{2p} и $-E_{2p}$. Эти траектории являются геодезическими и в группе $\text{SU}(2p)$, и длина их равна $\pi\sqrt{2p}$. Из леммы 21.2.1 и леммы 21.1 в [1] следует, что каждая такая геодезическая встречается вполне геодезическое подмногообразие $G_{2p,p}^C$. Отсюда следует, что сфера $g_0 S^{s-1}$ пересекается по экватору $'S^{s-2}$ с алгеброй Ли $\text{su}(2p)$. В плоскости $'\Pi_{s-1} = \Pi_s \cap \text{su}(2p)$, определяющей сферу $'S^{s-2}$, можно выбрать ортогональный базис $A_1, \dots, A_{s-1}$, где все векторы A_i принадлежат $'S^{s-2}$. Так как $A_i^2 = -E_{2p}$, то из условия ортогональности легко следует, что $A_i A_j + A_j A_i = 2\delta_{ij} E_{2p}$, откуда и получаем требуемую оценку. Доказательство для групп $\text{SO}(2p)$ и $\text{Sp}(2p)$ проводится совершенно аналогично.

В пункте 21.2 мы построили сферы $S^{2k+1} \subset \text{SU}(2^k)$ и с их помощью получили C -сечения в группе $\text{SO}(2^{k+1})$. Обозначим через r наибольшую размерность сфер S^s , являющихся C -сечениями в группе $\text{SO}(2^{k+1})$ и реализующих образующие в $H^*(\text{SO}(2^{k+1}); \mathbb{R})$. Тогда:

- 1) $s(2^{k+1}) = 2k + 1 > r = 2k - 1$, $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- 2) $s(2^{k+1}) = 2k + 1 = r = 2k + 1$, $k \equiv 1 \pmod{4}$;
- 3) $s(2^{k+1}) = 2k + 3 = r = 2k + 3$, $k \equiv 2 \pmod{4}$;
- 4) $s(2^{k+1}) = 2k + 2 > r = 2k + 1$, $k \equiv 3 \pmod{4}$.

Из доказательства предложения 21.3.1 видно, что в группе $\pi_{2(k-p)+1}(\text{SU}(2^k))$, $0 \leq p \leq k-1$, из элементов $\{1, 2, 3, \dots, 2^p\}$ только наибольший элемент 2^p реализован как C -сечение. Рассмотрев вложение $j: \text{SU}(2^k) \rightarrow \text{SO}(2^{k+1})$, мы получаем, что в группе $\text{SO}(2^{k+1})$ при $k \geq 3$ следующие элементы реализуются C -сечениями ($s_p = 2(k-p) + 1$):

- 1) $2^p \in \mathbb{Z} = \pi_{s_p}(\text{SO}(2^{k+1}))$, $s_p \equiv 3 \pmod{8}$, $0 \leq p \leq k-2$;
- 2) $2^{p+1} \in \mathbb{Z} = \pi_{s_p}(\text{SO}(2^{k+1}))$, $s_p \equiv 7 \pmod{8}$, $0 \leq p \leq k-2$;
- 3) $1 \in \mathbb{Z}_2 = \pi_{2k+1}(\text{SO}(2^{k+1}))$, если $k \equiv 0 \pmod{4}$, тогда $s_0 = (2k+1) \equiv 1 \pmod{8}$;
- 4) $\pi_{s_p}(\text{SO}(2^{k+1})) = 0$, $s_p \equiv 5 \pmod{8}$, $0 \leq p \leq k-2$.

Однако указанными сферами не исчерпываются вполне геодезические сферы в $\text{SO}(2^{k+1})$, реализующие нетривиальные циклы. Пусть $k \equiv 2 \pmod{4}$; тогда из леммы 21.7.2 следует, что существует вложение $S^{2k+3} \rightarrow \text{SO}(2^{k+1})$, реализующее образующую x_{2k+3} в $H^*(\text{SO}(2^{k+1}); \mathbb{R})$ и являющееся C -сечением.

Лемма 22.2.1. Рассмотрим многообразие $V = \text{SU}(2n)/S(U(n) \times U(n))$, где $2^k \leq 2n < 2^{k+1}$, $k \geq 3$, $s_p = 2(k-p)$, $0 \leq p \leq k-1$. Тогда в группах $\pi_{s_p}(V)$ элементы 2^p реализуются вполне геодезическими сферами.

Доказательство. Рассмотрим многообразие $V' = G_{2^k, 2^{k-1}}^{\mathbb{C}}$, реализованное в группе $SU(2^k)$ как пересечение $SU(2^k) \cap su(2^k)$. Пусть $S^3, \dots, S^{2^{k+1}}$ — вполне геодезические сферы, реализующие элементы 2^p в группах $\pi_{2(k-p)+1}(SU(2^k))$, $0 \leq p \leq k-1$, и являющиеся C -сечениями. Все сферы $S^{2^{\alpha+1}}$ ($1 \leq \alpha \leq k$) содержатся в пространстве минимальных геодезических $\Omega(SU(2^k); E_{2^k}; -E_{2^k})$ (см. [1]). Каждая сфера $S^{2^{\alpha+1}}$ высекает на $G_{2^k, 2^{k-1}}^{\mathbb{C}}$ вполне геодезическую сферу $S^{2^{\alpha}}$. В силу теоремы 23.3 из [1] сферы $S^{2^{\alpha}}$ определяют элементы 2^p в группах $\mathbb{Z} = \pi_p(G_{2^k, 2^{k-1}}^{\mathbb{C}})$ при $\alpha = k-p$, $k \geq 1$.

Рассмотрим теперь многообразие $V = G_{2n, n}^{\mathbb{C}}$, где $2^k \leq 2n < 2^{k+1}$, и определим вложение $j: G_{2^k, 2^{k-1}}^{\mathbb{C}} \rightarrow G_{2n, n}^{\mathbb{C}}$, положив $j(A) = (iE_{n-2^{k-1}}) \oplus (-iE_{n-2^{k-1}}) \oplus A$. Поскольку подмногообразие $j(G_{2^k, 2^{k-1}}^{\mathbb{C}})$ является вполне геодезическим, то все сферы $S^3, \dots, S^{2^k}$ переходят во вполне геодезические сферы, реализующие нетривиальные элементы групп $\pi_{2\alpha}(G_{2n, n}^{\mathbb{C}})$, $1 \leq \alpha \leq k$. Лемма доказана.

Для изучения симметрических пространств типа I, отличных от $G_{2n, n}^{\mathbb{C}}$, мы привлечем ортогональную периодичность Ботта. Рассмотрим группу $SO(n)$ и положим $n = 2^{k+1}$, $k \geq 3$. В группе $SO(n)$ выделим гладкое подмногообразие $\Omega_1(n)$, состоящее из всех комплексных структур I в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим пространство минимальных геодезических γ в группе $SO(n)$, соединяющих E с $-E$, тогда (см. [1]) это пространство гомеоморфно $\Omega_1(n)$. Зафиксируем элементы $\{I_1, I_2, \dots, I_{p-1}\} \in \Omega_1(n)$ такие, что $I_{\alpha}I_{\beta} + I_{\beta}I_{\alpha} = -2\delta_{\alpha\beta}E$. Определим пространство $\Omega_p(n)$ как множество всех таких комплексных структур I , что $II_{\alpha} + I_{\alpha}I = 0$ при $1 \leq \alpha \leq p-1$. Получаем вложения $\Omega_p(n) \rightarrow \Omega_{p-1}(n) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_1(n) \rightarrow SO(n)$. В [1] доказано, что каждое пространство $\Omega_p(n)$ является вполне геодезическим подмногообразием в группе $SO(n)$, причем пространство минимальных геодезических, соединяющих I_q с $-I_q$ в $\Omega_q(n)$, гомеоморфно $\Omega_{q+1}(n)$ при $0 \leq q < p$. Возникает вложение $\Omega_{q+1} \rightarrow \Omega\Omega_q$, где через $\Omega\Omega_q$ обозначено пространство петель. Многообразия $\Omega_p(n)$ диффеоморфны следующим симметрическим пространствам:

$$\begin{aligned}\Omega_0(n) &= SO(2^{k+1}), & \Omega_1(n) &= SO(2^{k+1})/U(2^k), \\ \Omega_2(n) &= U(2^k)/Sp(2^k), & \Omega_3(n) &= \bigcup_s Sp(2^k)/(Sp(2s) \times Sp(2^k - 2s)), \\ \Omega_4(n) &= Sp(2^{k-1}), & \Omega_5(n) &= Sp(2^{k-1})/U(2^{k-2}), \\ \Omega_6(n) &= U(2^{k-2})/O(2^{k-3}), & \Omega_7(n) &= \bigcup_s SO(2^{k-3})/S(\cup(s) \times O(2^{k-2} - s)), \\ \Omega_8(n) &= O(2^{k-3}).\end{aligned}$$

Мы видим, что среди многообразий Ω_p содержатся симметрические пространства всех интересующих нас типов (с неособыми группами движений). Рассмотрим следующие числа m_p : $m_0 = 1$, $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 4$, $m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = 8$, $m_8 = 16$. Пусть $p \neq 0$, $p \not\equiv 2 \pmod{4}$; тогда имеет место важное утверждение (см. [1]): вложение $\Omega_{p+1}(n) \rightarrow \Omega\Omega_p(n)$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп в размерностях, не превосходящих $\frac{n}{m_{p+1}} - 3$, а вложение $\Omega_1(n) \rightarrow \Omega\Omega_0(n)$ индуцирует соответствующий изоморфизм в размерностях, не превосходящих $n - 4$. В случае, когда $p \equiv 2 \pmod{4}$, оценка несколько сложнее и будет приведена в соответствующем месте.

Лемма 22.2.2. *Рассмотрим многообразие $\Omega_1(2^{k+1}) = \text{SO}(2^{k+1})/U(2^k)$. Пусть $k \geq 3$, $s_p = 2(k-p)$, $-1 \leq p \leq k-1$. Тогда в группах $\pi_p(\Omega_1(2^{k+1}))$ следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:*

- (1) $2^p \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 2 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (2) $2^{p+1} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 6 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (3) $1 \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k) \equiv 0 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- (4) $1 \in \mathbb{Z}$, если $s_{-1} = (2k+2) \equiv 6 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Доказательство. Рассмотрим подмногообразие Ω_1 и вполне геодезические сферы в группе $\text{SO}(2^{k+1})$, являющиеся C -сечениями. Экваторы каждой из этих сфер содержатся в подмногообразии Ω_1 и соответствуют исходным сферам при изоморфизме периодичности. Описание элементов в случаях 1)–4) получается из соответствующего описания C -сечений в группе $\text{SO}(2^{k+1})$ (см. выше). Лемма доказана.

Лемма 22.2.3. *Рассмотрим многообразие $\Omega_2(2^{k+1}) = U(2^k)/\text{Sp}(2^k)$. Пусть $k \geq 5$, $s_p = 2(k-p) - 1$, $-1 \leq p \leq k-1$. Тогда в группах $\pi_p(\Omega_2(2^{k+1}))$ следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:*

- (1) $2^p \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 1 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (2) $2^{p+1} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 5 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (3) $1 \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k-1) \equiv 7 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- (4) $1 \in \mathbb{Z}$, если $s_{-1} = (2k+1) \equiv 5 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Доказательство. Поскольку экватор сферы $S^{2(k-p)+1}$ — сфера $S^{2(k-p)}$ — состоит из таких элементов g , что $g^2 = -E$, то на сфере $S^{2(k-p)}$ можно выбрать $2(k-p) + 1$ антикоммутирующих структур $A_1^{(p)}, A_2^{(p)}, \dots, A_{2(k-p)+1}^{(p)}$. Для определения пространства Ω_2 нам нужно выбрать какую-либо комплексную структуру. Фиксируем элемент $I_1 = A_{2(k-p)+1}^{(p)}$ и рассмотрим на сфере $S^{2(k-p)}$ экватор $S^{2(k-p)-1}$, порожденный элементами $A_1^{(p)}, \dots, A_{2(k-p)}^{(p)}$; тогда $S^{2(k-p)-1} \subset \Omega_2(2^{k+1})$. Геодезические γ , соединяющие I_1 с $-I_1$ по сфере $S^{2(k-p)}$, минимальны в $\text{SO}(2^{k+1})$; поэтому сфера $S^{2(k-p)-1}$ определяет такой же элемент в группе $\pi_p(\Omega_2(2^{k+1}))$.

что и сфера $S^{2(k-p)}$ в группе $\pi_{2(k-p)}(\Omega_1(2^{k+1}))$ при $s_p \leq \frac{n}{m_2} - 3 = 2^{k-1} - 3$. Повторяя эту конструкцию для каждого p , $-1 \leq p \leq k-1$ ($p = -1$ только при $k \equiv 2 \pmod{4}$), получаем требуемый набор вполне геодезических сфер в $\Omega_2(2^{k+1})$.

Лемма 22.2.4. Рассмотрим многообразие $\Omega_3(2^{k+1})$ и выделим в нем компоненту наибольшей размерности $\Omega_3^0(2^{k+1}) = \text{Sp}(2^k)/\text{Sp}(2^{k-1}) \times \text{Sp}(2^{k-1})$. Пусть $k \geq 8$, $s_p = 2(k-p) - 2$, $-1 \leq p \leq k-2$. Тогда в группах $\pi_s(\Omega_3^0(2^{k+1}))$ следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:

- (1) $2^p \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 0 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (2) $2^{p+1} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 4 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (3) $1 \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k-2) \equiv 6 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- (4) $1 \in \mathbb{Z}$, если $s_{-1} = (2k) \equiv 4 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Доказательство. Пространство Ω_2 состоит из бесконечного числа компонент, и оно по мере роста k все более и более точно аппроксимируется несвязным пространством $\Omega_3(2^{k+1})$, содержащим конечное число компонент. Достаточно ограничиться рассмотрением $\Omega_3^0(2^{k+1})$ и соответствующей компоненты $\Omega^0\Omega_2(2^{k+1})$. Мы не будем останавливаться на дальнейших рассуждениях, поскольку они в основном аналогичны доказательству леммы 22.2.3.

Мы опустим доказательства лемм 22.2.5 — 22.2.8, поскольку они отличаются от изложенных выше рассуждений только необходимостью тщательно следить за индексами геодезических, заполняющих фиксированные сферы, а также необходимостью вовремя отбрасывать лишние несимметрические компоненты пространств петель.

Лемма 22.2.5. Рассмотрим многообразие $\Omega_4(2^{k+1}) = \text{Sp}(2^{k-1})$. Пусть $k \geq 7$, $s_p = 2(k-p) - 3$, $-1 \leq p \leq k-2$. Тогда в группах $\pi_s(\Omega_4(2^{k+1}))$ следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:

- (1) $2^p \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 7 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (2) $2^{p+1} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 3 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (3) $1 \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k-3) \equiv 5 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- (4) $1 \in \mathbb{Z}$, если $s_{-1} = (2k-1) \equiv 3 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Лемма 22.2.6. Рассмотрим многообразие $\Omega_5(2^{k+1}) = \text{Sp}(2^{k-1})/U(2^{k-2})$. Пусть $k \geq 6$, $s_p = 2(k-p) - 4$, $-1 \leq p \leq k-3$. Тогда в группах $\pi_s(\Omega_5(2^{k+1}))$ следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:

- (1) $2^p \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 6 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (2) $2^{p+1} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 2 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (3) $1 \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k-4) \equiv 4 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- (4) $1 \in \mathbb{Z}$, если $s_{-1} = (2k-2) \equiv 2 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Лемма 22.2.7. Рассмотрим многообразие $\Omega_6(2^{k+1}) = U(2^{k-2})/O(2^{k-2})$. Пусть $k \geq 6$, $s_p = 2(k-p) - 5$, $-1 \leq p \leq k-3$.

Тогда в группах $\pi_{s_p}(\Omega_6(2^{k+1}))$ следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:

- (1) $2^p \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 5 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (2) $2^{p+1} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 1 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (3) $1 \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k-5) \equiv 3 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- (4) $1 \in \mathbb{Z}$, если $s_{-1} = (2k-3) \equiv 1 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Лемма 22.2.8. Рассмотрим многообразие $\Omega_7(2^{k+1})$ и выделим в нем компоненту наибольшей размерности $\Omega_7^+(2^{k+1}) = SO(2^{k-2})/S(O(2^{k-3}) \times O(2^{k-3}))$. Пусть $k \geq 8$, $s_p = 2(k-p) - 6$, $-1 \leq p \leq k-4$. Тогда в группах $\pi_{s_p}(\Omega_7^+(2^{k+1}))$ следующие элементы реализуются вполне геодезическими сферами:

- (1) $2^p \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 4 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (2) $2^{p+1} \in \mathbb{Z}$, если $s_p \equiv 0 \pmod{8}$, $p \geq 0$;
- (3) $1 \in \mathbb{Z}_2$, если $s_0 = (2k-6) \equiv 2 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- (4) $1 \in \mathbb{Z}$, если $s_{-1} = (2k-4) \equiv 0 \pmod{8}$, тогда $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Переходим к доказательству теоремы 22.1.1. Нам осталось доказать только единственность (с точностью до множителя) построенных выше реализаций для групп $\pi_*(V) \otimes \mathbb{R}$.

Лемма 22.2.9. Пусть S^{2p} — вполне геодезическая сфера в произвольной компактной группе $\mathfrak{G}$. Рассмотрим подгруппу $A(S^{2p})$ (см. теорему 18.1), и пусть $p \geq 4$. Тогда группа $A(S^{2p})$ изоморфна группе $\text{Spin}(2p+1)$.

Доказательство. Этот факт аналогичен уже использовавшемуся выше утверждению о том, что $A(S^{2p-1})$ изоморфна либо $\text{Spin}(2p)$, либо $\text{Spin}_1(2p)$.

Лемма 22.2.10. Пусть $p \geq 4$ и $p = [\log_2 n]$. Предположим, что в группе $SO(n)$ содержится вполне геодезическая сфера S^{2p} . Тогда существует вложение $\text{Spin}(2p+1) \rightarrow SO(2^p)$.

Этот факт доказывается аналогично доказательству леммы 21.7.4.

Лемма 22.2.11. Пусть $p \geq 4$, $p = [1 + \log_2 n]$. Предположим, что в группе $\text{Sp}(2n)$ существует вполне геодезическая сфера S^{2p} . Тогда существует вложение $\text{Spin}(2p+1) \rightarrow \text{Sp}(2^p)$.

Лемма 22.2.12. Пусть $p = [\log_2 n]$ и $p \geq 4$. Предположим, что $\frac{p(p-1)}{2}$ нечетно, если p четно, и что $\frac{p(p+1)}{2}$ нечетно, если p нечетно. Тогда в группе $SO(n)$ не существует вполне геодезической сферы S^{2p} .

Доказательство. Допустим противное: пусть в группе $SO(n)$ содержится сфера S^{2p} , тогда, согласно лемме 22.2.10, существует вложение $\text{Spin}(2p+1) \rightarrow SO(2^p) \subset SU(2^p)$. Сквозное вложение $\text{Spin}(2p+1) \rightarrow SU(2^p)$ порождает неприводимое представление C' группы $\text{Spin}(2p+1)$ размерности 2^p . Известно (см. [75]), что существует только одно точное представление группы $\text{Spin}(2p+1)$ размерности 2^p , а именно спинорное представление $\mathcal{S}$. Итак, C' эквивалентно $\mathcal{S}$. В [77] установлено, что представление $\mathcal{S}$ имеет два билинейных инварианта C и E' в зависимости

от четности p . Более точно, если p четно, то

$$C = (\mathcal{S}(V)) C (\mathcal{S}(V))^T, \quad V \in \text{Spin}(2p+1), \quad C^T = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} C;$$

если p нечетно, то

$$E' = (\mathcal{S}(V)) E' (\mathcal{S}(V))^T, \quad E'^T = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \cdot E'.$$

В силу предположений нашей леммы представление $C' \sim \mathcal{S}$ сохраняет либо кососимметрический инвариант C (если p четно), либо кососимметрический инвариант E' (если p нечетно). Итак, в обоих случаях подгруппа $\text{Spin}(2p+1)$ содержится в подгруппе $\text{Sp}(2^p) = \text{SU}(2^p) \cap \text{Sp}(2^p; \mathbb{C})$, откуда $\text{Spin}(2p+1) \subset \text{SO}(2^p) \cap \text{Sp}(2^p) = U(2^{p-1})$, т. е. мы получили точное представление $\text{Spin}(2p+1)$ в $U(2^{p-1})$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 22.2.13. Пусть $p = [1 + \log_2 n]$, $p \geq 4$. Предположим, что $\frac{p(p-1)}{2}$ четно, если p четно, и что $\frac{p(p+1)}{2}$ четно, если p нечетно. Тогда в группе $\text{Sp}(2n)$ не существует вполне геодезической сферы S^{2p} .

Доказательство аналогично предыдущему.

Доказательство теоремы 22.1.1 (А), (1). Нам осталось доказать, что нетривиальный элемент $x \in \pi_*(V) \otimes \mathbb{R}$, не пропорциональный никакому $x_{2\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq k$, не может быть реализован вполне геодезической сферой. Допустим противное. Пусть в V содержится вполне геодезическая сфера S^{2p} , где $p \geq k+1$. Вложив пространство V как вполне геодезическое подмногообразие в группу $\text{SU}(2n)$ (картановская модель), получаем в группе $\text{SU}(2n)$ вполне геодезическую сферу S^{2p} . В силу леммы 22.2.9 возникает точное представление группы $\text{Spin}(2p+1)$. С другой стороны, $2n \geq 2^p$ (см. [75]), т. е. $2^{k+1} > 2n \geq 2^p \geq 2^{k+1}$, что невозможно.

Доказательство теоремы 22.1.1 (А), (6). Рассмотрим многообразие $\Omega_1(2^{k+1})$ и построим вложение $i: \Omega_1(2^{k+1}) \rightarrow \Omega_1(2^{k+1} + n')$, где $n' = 2s$. Для этого нужно фиксировать в группе $\text{SO}(n')$ комплексную структуру I'_1 и положить $i(g) = g \oplus I'_1$, $g \in \Omega_1(2^{k+1})$. Так как $\Omega_1(2^{k+1} + n') = \text{SO}(2n)/U(n)$, $n = 2^k + s$, то мы построили вложение $\text{SO}(2^{k+1})/U(2^k) \rightarrow \text{SO}(2n)/U(n)$, где $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Вложение $\Omega_1(2^{k+1}) \rightarrow \Omega_1(2n)$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп при $i \leq 2^{k+1} - 4$. Итак, в пространстве $V = \text{SO}(2n)/U(n)$, где $2^{k-1} \leq n < 2^k$ (мы заменили k на $k-1$), $k \geq 4$, вполне геодезическими сферами реализованы следующие элементы группы $\pi_*(V) \otimes \mathbb{R}$ (см. лемму 22.2.2):

- а) $\{x_2, x_6, x_{10}, \dots, x_{2k-2}\}$, $k \equiv 0 \pmod{4}$;
- б) $\{x_2, x_6, x_{10}, \dots, x_{2k-4}\}$, $k \equiv 1 \pmod{4}$;
- в) $\{x_2, x_6, x_{10}, \dots, x_{2k-2}\}$, $k \equiv 2 \pmod{4}$;
- г) $\{x_2, x_6, x_{10}, \dots, x_{2k}\}$, $k \equiv 3 \pmod{4}$.

Рассмотрим картановскую модель пространства V в группе $SO(2n)$. Тогда, если допустить существование в V вполне геодезической сферы S^{2p} , $p \geq k+1$, то она переходит во вполне геодезическую сферу в $SO(2n)$. Так как $p \geq k+1 \geq 5$, то в силу леммы 22.2.9 существует вложение $Spin(2p+1) \rightarrow SO(2n)$, а тогда $2^{k+1} \leq 2^p \leq 2n$, что невозможно. В случаях а), в), г) теорема доказана. Осталось рассмотреть случай б). Здесь неясен вопрос с образующей x_{2k} . Предположим, что в пространстве V содержится вполне геодезическая сфера S^{2k} ; тогда мы получаем вполне геодезическую сферу S^{2k} в $SO(2n)$, что невозможно по лемме 22.2.12.

Доказательство теоремы 22.1.1 (А), (5). Рассмотрим многообразие $\Omega_2(2^{k+1}) = U(2^k)/Sp(2^k)$, $k \geq 5$. Оно содержит вполне геодезическое подмногообразие $\Omega'_2(2^{k+1}) = SU(2^k)/Sp(2^k)$, и все вполне геодезические сферы из леммы 22.2.3 при $s_p > 1$ содержатся в этом подмногообразии. Легко строится вполне геодезическое вложение $i: \Omega'_2(2^{k+1}) \rightarrow \Omega'_2(4n) = SU(2n)/Sp(2n)$, где $4n = 2^{k+1} + n'$, $n' = 4s$. Фактическую реализацию мы осуществляем с помощью леммы 22.2.3. Далее, из леммы 22.2.9 следует, что в пространстве V не существует вполне геодезической сферы S^{2p} , где $p \geq k+1$. Тем самым, теорема доказана в случае, когда $k \not\equiv 0 \pmod{4}$. В этом же последнем случае неясен вопрос с образующей x_{2k+1} .

Предположим, что в пространстве $V = SU(2n)/Sp(2n)$ содержится вполне геодезическая сфера S^{2k+1} . Рассмотрим картановскую модель $V \subset SU(2n)$ и сдвинем сферу S^{2k+1} так, чтобы она проходила через единицу e . Обозначим через $S^{2k} \subset S^{2k+1}$ вполне геодезический экватор в S^{2k+1} , т. е. совокупность точек $\left\{ \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$, где $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = g_0$; g_0 — точка, «диаметрально противоположная» точке e . Тогда для любой точки $g \in S^{2k}$ имеем $g^2 = g_0$, и в силу леммы 19.3 все такие точки принадлежат одному классу смежности по подгруппе $Sp(2n)$, т. е. мы получаем вполне геодезическую сферу S^{2k} в группе $Sp(2n)$. В силу леммы 22.2.13 это невозможно.

Доказательство пунктов (2), (3), (4), (7) теоремы 22.1.1 (А) во многом аналогично разобранным выше случаям (1), (5), (6), и мы не будем приводить его здесь во всех подробностях.

Вторая часть (Б) теоремы 22.1.1 доказана применением такой же техники и приемов в [59]. Теорема 22.1.1 доказана.

Интересно отметить, что функция $f_i(n)$, построенная нами выше и, как было показано, самым непосредственным образом связанная с максимальным числом линейно независимых векторных полей на сферах, является «универсальной» для любого компактного неприводимого симметрического пространства, несмотря на большие алгебраические различия между пространствами типа I и пространствами типа II.

§ 23. Периодичность Ботта с точки зрения
многомерного функционала Дирихле

23.1. Явное описание изоморфизма периодичности Ботта для унитарной группы. Особенный интерес представляет изучение многомерных функционалов (например, функционала Дирихле и функционала объема) на функциональных пространствах отображений гладких многообразий в компактные группы Ли и симметрические пространства. Так, например, в настоящем параграфе будет показано, что известная периодичность Ботта для групп $U(n)$ (соответственно $O(n)$, $Sp(n)$) наиболее естественным образом возникает при рассмотрении стационарных (критических) точек функционала Дирихле на пространстве $\Pi(D^2, U(n))$ отображений двумерного диска D^2 с фиксированной и достаточно симметричной границей (соответственно $\Pi(D^2, O(n))$, $\Pi(D^2, Sp(n))$) в группу, что позволяет получать соответствующий изоморфизм периодичности не в несколько приемов, как это обычно делается, а в «один шаг». При этом оказывается, что периодичность Ботта «оседает» на многообразии абсолютных минимумов многомерного функционала Дирихле.

Сначала мы опишем периодичность Ботта в удобном для нас виде. Рассмотрим унитарную группу $SU(2m)$ и через $\Omega(SU(2m); E_{2m}, -E_{2m})$ (где $E_{2m} \in SU(2m)$ — тождественное преобразование) обозначим пространство кусочно-гладких путей, идущих из точки E_{2m} в точку $-E_{2m}$; через $\Omega^*(SU(2m); E_{2m}, -E_{2m})$ обозначим полное пространство всех непрерывных путей из точки E_{2m} в точку $-E_{2m}$; тогда вложение $\Omega \rightarrow \Omega^*$ является гомотопической эквивалентностью (см. [1]).

В пространстве $\Omega^*(SU(2m); E_{2m}, -E_{2m})$ рассмотрим подпространство $\tilde{\Omega}$, образованное всеми минимальными геодезическими, идущими из E_{2m} в $-E_{2m}$; хорошо известно (см. §§ 21, 22), что $\tilde{\Omega}$ гомеоморфно многообразию $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$ (комплексное многообразие Грассмана). Кроме того, естественное вложение $G_{2m, m}^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega(SU(2m); E_{2m}, -E_{2m}) \rightarrow \Omega^*(SU(2m); E_{2m}, -E_{2m})$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп в размерностях, не превосходящих $2m$ (см. [1]).

С другой стороны, из стандартного расслоения $U(m) \rightarrow V_{2m, m} \rightarrow G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$ следует, что граничный оператор $\partial: \pi_i(G_{2m, m}^{\mathbb{C}}) \rightarrow \pi_{i-1}(U(m))$ является изоморфизмом при всех $i \leq 2m$. Окончательно, комбини-

руя эти два изоморфизма, мы и получаем изоморфизм периодичности:

$$\pi_{i-1}(U(m)) \xrightarrow{\partial} \pi_i(G_{2m,m}^C) \xrightarrow{\pi} \pi_i[\Omega^*(SU(2m); E_{2m}, -E_{2m})] \approx \\ \approx \pi_{i+1}(SU(2m)).$$

Выпишем в явном виде эту цепочку изоморфизмов. Пусть $f_{i-1}: S^{i-1} \rightarrow U(m)$ — непрерывное отображение, представляющее класс $[f] \in \pi_{i-1}(U(m))$; построим по этому отображению $f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow SU(2m)$. Представим группу $SU(2)$ как группу матриц $\{p\}$, где $p = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, и выделим в группе $SU(2)$ двумерный диск $'D^2$ следующим условием: $p \in 'D^2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$. Вложим этот диск $'D^2$ в группу $SU(2m)$ следующим образом:

$$'i: p \rightarrow p \otimes E_m = \begin{pmatrix} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \alpha E_m \end{pmatrix},$$

затем на диске $'D^2$ рассмотрим кривую $'\gamma(\beta) = \{p(\alpha, \beta) | \alpha = i\tau, \tau \in \mathbb{R}, \tau \geq 0\}$; положим $\gamma(\beta) = 'i['\gamma(\beta)]$. Точки пространства $G_{2m,m}^C$ будем изображать инвариантными плоскостями, отвечающими собственному значению $\lambda = i$ операторов $g: \mathbb{C}^{2m} \rightarrow \mathbb{C}^{2m}$, $g \in SU(2m)$, $g^2 = -E_{2m}$. Тогда для точки $\gamma \in \gamma(\beta)$ мы имеем $\gamma^2 = -E_{2m}$, т. е. $\gamma(\beta) \in G_{2m,m}^C \subset SU(2m)$ при $0 \leq \beta \leq 1$. Рассмотрим в многообразии $G_{2m,m}^C$ множество элементов g следующего вида:

$$g = g(\sigma, i\tau, \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)] \cdot [p(i\tau, \beta) \otimes E_m] \cdot [E_m \oplus f_{i-1}(\sigma)],$$

где $\sigma \in S^{i-1}$, $f_{i-1}(\sigma) \in U(m)$. При $\beta = 1$ мы получаем отображение сферы S^{i-1} , задаваемое формулой

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & f_{i-1}(\sigma) \\ -f_{i-1}^{-1}(\sigma) & 0 \end{pmatrix},$$

а при $0 \leq \beta \leq 1$ множество $\{g(\sigma, i\tau, \beta)\}$ представляется в виде образа сферы S^i , причем $\{g(\sigma, i\tau, \beta)\} \subset G_{2m,m}^C$, $\partial S^i = S^{i-1}$ (где $\partial: \pi_i(G_{2m,m}^C) \rightarrow \pi_{i-1}(U(m))$). Теперь рассмотрим множество точек $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$, где $g(\sigma, \alpha, \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)][p(\alpha, \beta) \otimes E_m] \times [E_m \otimes f_{i-1}(\sigma)]$. Тогда $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$ можно представить как образ сферы S^{i+1} при некотором отображении $f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow \{g(\sigma, \alpha, \beta)\} \subset SU(2m)$. Итак, если $f_{i-1}(\sigma) \in U(m)$, то $f_{i+1}(S^{i+1}) \subset SU(2m)$ и из описанной выше конструкции, очевидно, следует, что соответствие $f_{i-1} \rightarrow f_{i+1}$ и порождает искомый изоморфизм периодичности. Отметим, что

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\sigma) & \alpha E_m \end{pmatrix}.$$

Если $m=2$, то за исходное отображение $f_3: S^3 \rightarrow SU(2)$ можно взять тождественное отображение $f_3(\sigma) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & x \end{pmatrix}$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$;

тогда $[f_3] = 1 \in \pi_3(\mathrm{SU}(2))$. Переходя теперь к $m = 2^2, 2^3, 2^4, \dots$, получаем отображения $f_{2k+1}: S^{2k+1} \rightarrow \mathrm{SU}(2^k)$, где $[f_{2k+1}] = 1 \in \pi_{2k+1}(\mathrm{SU}(2^k))$, $k \geq 1$.

23.2. Унитарная периодичность и одномерные функционалы. Заметим, что при описанном выше обычном подходе изоморфизм унитарной периодичности распадается в композицию двух изоморфизмов, каждый из которых повышает размерность сферы (и, следовательно, гомотопической группы) на единицу. Тот факт, что требуемое повышение размерности сферы на 2 получается в результате выполнения этих двух шагов, соответствует методике обычного доказательства теоремы периодичности, при котором используется одномерный функционал действия и одномерный функционал длины, определенные на функциональном пространстве отображений отрезка (одномерного диска) D^1 . Рассмотрим этот процесс более подробно. Пусть фиксирован диск D^1 , где $\partial D^1 = S^0$ (нульмерная сфера, двоеточие); тогда $\Omega^*(\mathrm{SU}(2m); E_{2m}, -E_{2m}) = \Pi_1$ есть пространство непрерывных отображений f диска D^1 в группу $\mathrm{SU}(2m)$, при которых $f|_{S^0} \equiv i_0|_{S^0}$, где $i_0(S^0) = \{E_{2m}, -E_{2m}\}$. Функционал действия на пространстве $\Pi'_1 = \Omega(\mathrm{SU}(2m); E_{2m}, -E_{2m})$ определяется так: $E_0^1(\omega) = \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt$, где $\omega(0) = E_{2m}$, $\omega(1) = -E_{2m}$.

С этим функционалом естественно связан функционал длины $l_0^1(\omega) = \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt$. Известно, что критические (стационарные) точки

функционала длины l могут быть обнаружены при помощи функционала E . Множество точек, на которых функционал действия E (и следовательно, функционал длины l) достигает абсолютного минимума, является подпространством в Π'_1 , гомеоморфным многообразию Грассмана $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$, а потому (как это следует из теории Морса) $2m$ -мерный остов пространства Π_1 гомотопически эквивалентен $2m$ -мерному остову пространства $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$. Иными словами, можно сказать, что «аналитическая часть» изоморфизма периодичности заключена в изоморфизме $\pi_i(G_{2m, m}^{\mathbb{C}}) \approx \pi_i(\Pi'_1) \approx \pi_i(\Pi_1) \approx \pi_{i+1}(\mathrm{SU}(2m))$, поскольку следующий (второй) шаг: $\pi_i(G_{2m, m}^{\mathbb{C}}) \approx \pi_{i-1}(U(m))$ — является следствием чисто гомотопического утверждения, не имеющего какого-либо отношения к функционалу E и его критическим точкам.

Оказывается, изоморфизм периодичности можно получить не в «два шага», а в «один шаг», если использовать не одномерный функционал, а подходящий двумерный функционал

23.3. Теорема периодичности для унитарной группы основана на двумерных экстремалах функционала Дирихле. Мы получим изоморфизм периодичности, рассматривая двумерные функционалы на специально подобранном пространстве отображений. Рассмотрим

рим в унитарной группе $SU(2m)$ окружность $S_0^1 = \left\| \begin{smallmatrix} \alpha E_m & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} E_m \end{smallmatrix} \right\|$, $|\alpha| = 1$, являющуюся однопараметрической подгруппой, и зафиксируем ее (здесь мы поступаем по аналогии с одномерным случаем, когда в группе $SU(2m)$ фиксировалась нульмерная сфера $S^0 = \{E_{2m}, -E_{2m}\}$). Пусть, далее, D^2 есть двумерный диск с границей S^1 в своей стандартной евклидовой метрике. Фиксируем отображение $j_0: S^1 \rightarrow SU(2m)$, переводящее окружность S^1 изометрично в окружность S_0^1 в группе. Пусть $i'': D^2 \rightarrow {}'D^2$ есть гладкое отображение, сохраняющее полярную систему координат на диске и такое, что $i''(s) = j_0(s)$ для $s \in S^1$.

Через Π_2 обозначим топологическое пространство всех непрерывных отображений $f: D^2 \rightarrow SU(2m)$ таких, что $f|_{S^1} \equiv j_0$; пространство Π_2 имеет гомотопический тип CW -комплекса (клеточного комплекса). Рассмотрим подпространство $\Pi_2' \subset \Pi_2$, образованное всеми отображениями f такими, что они принадлежат соболевскому пространству $H_1^2(D^2)$. Напомним определение этого функционального пространства.

Пусть G — область в $\mathbb{R}^v (x^1, \dots, x^v)$. Мы скажем, что функция $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $H_m^p(G)$ тогда и только тогда, когда: 1) $u \in L_p(G)$; 2) существуют функции $r_\alpha \in L_p(G)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_v)$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, такие, что $\int_G g(x) r_\alpha(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G [D^\alpha g(x)] u(x) dx$ при любом $g \in C_0^\infty(G)$. Здесь $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_v$, $D^\alpha g = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^v)^{\alpha_v}}$. Если $m=1$, то $\alpha = \alpha_1$. Если $f: D^2 \rightarrow SU(m)$,

то $f \in H_1^2(D^2)$ в том и только в том случае, когда все координатные функции, задающие это отображение, принадлежат функциональному пространству $H_1^2(D^2)$. Этим требованием принадлежности отображения f к классу $H_1^2(D^2)$ мы заменяем требование кусочной гладкости отображения f в одномерном случае.

Определим теперь на пространстве Π_2' функционал Дирихле $D: \Pi_2' \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющий каждому отображению $f \in \Pi_2'$ значение интеграла Дирихле $D[f]$ на отображении f . Напомним определение интеграла Дирихле.

Пусть $u \in H_m^p(G)$; тогда функции $r_\alpha(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_v)$, определенные, вообще говоря, неоднозначно, но с несущественной для нас степенью произвола, называются производными функции u и обозначаются $D^\alpha(u)$ или $u_{,\alpha}$; если $\alpha = 0$, то $u_{,\alpha} = u$. Пусть теперь M и V — римановы многообразия с метрическими тензорами $g_{ij}(x)$, $x \in M$, $\hat{g}_{\alpha\beta}(v)$, $v \in V$. С каждым отображением $f: V \rightarrow M$, где $f \in H_1^2[V, M]$, связываются тензоры смешанного типа. Так, например, $x_\alpha^i = x_{,\alpha}^i$, где x^i — локальные криволинейные координаты точки $x = f(v) \in M$, а дифференцирование понимается в указанном выше смысле. Через ∇_α будем обозначать полную ковариантную произ-

водную от смешанного тензора. Определим скалярное произведение двух тензоров x_α^i и y_β^j , положив $(x_\alpha^i, y_\beta^j) = \hat{g}^{\alpha\beta} g_{ij} x_\alpha^i y_\beta^j$. Пусть теперь $f \in H_1^n[V, M]$, положим $D[f] = \int_V \left[\frac{(x_\alpha^i x_\beta^j)}{n} \right]^{n/2} dv$, где dv — элемент объема на римановом многообразии V , а $n = \dim V$.

Отображение $f \in H_1^n[V, M]$ называется гармоническим, если $\delta D[f; \eta] = 0$ для любого векторного поля $\eta(f)$ класса H_1^n , определенного на образе $f(V)$. Соответствующее уравнение Эйлера для функционала Дирихле $D[f]$ имеет вид $\nabla^\alpha \nabla_\alpha x^i = 0$. В нашем случае в качестве многообразия V мы возьмем двумерный диск D^2 ; тогда $\hat{g}^{\alpha\beta}(v) = \delta^{\alpha\beta}$ и функционал Дирихле $D[f]$ принимает следующий вид:

$$D[f] = \frac{1}{2} \int_V [(x_1^i, x_1^i) + (x_2^i, x_2^i)] dv = \frac{1}{2} \int_V g_{ij} (x_1^i x_1^j + x_2^i x_2^j) dv.$$

Первая вариация δD имеет вид $\delta D[f; \eta] = \int_V (x_\alpha^i, \nabla_\beta \eta^i) dv$. Если диск D^2 параметризован с помощью евклидовых координат u, v , то

$$D[f] = \frac{1}{2} \int [(x_u, x_u) + (x_v, x_v)] du dv,$$

$$x = (x^1, \dots, x^p), \quad p = \dim M,$$

$$\delta D[f; \eta] = \int \left[\left(\frac{D\eta}{du}, x_u \right) + \left(\frac{D\eta}{dv}, x_v \right) \right] du dv, \quad \eta \in H_1^1.$$

На пространстве Π_2^1 рассмотрим также функционал площади $\text{vol}_2 f$, сопоставляющий каждому отображению $f \in \Pi_2^1$ значение интеграла

$$\int_V \sqrt{\det \Omega} du dv, \quad \text{где } \Omega = \begin{vmatrix} (x_u, x_u) & (x_u, x_v) \\ (x_u, x_v) & (x_v, x_v) \end{vmatrix}.$$

Как мы уже видели выше, имеет место неравенство $\text{vol}_2 f \leq D[f]$ и равенство достигается в том и только в том случае, когда отображение f обобщенно-конформное (см. [16]). Отметим, что здесь также соблюдается аналогия с одномерным случаем (пространство путей с фиксированными концами), а именно функционалы действия E_0^1 и длины l связаны аналогичным неравенством: $[l_0^1(\omega)]^2 \leq E_0^1(\omega)$ — и равенство достигается тогда и только тогда, когда ω — минимальная геодезическая из точки $\omega(0)$ в точку $\omega(1)$.

Как и функционал действия, функционал Дирихле позволяет отбросить «лишние» стационарные точки функционала объема, т. е. все те отображения, которые отличаются от гармонического непрерывной заменой параметров в двумерном диске, что, конечно, не меняет значение функционала площади (но меняет функционал Дирихле).

Отметим для дальнейшего, что имеет место изоморфизм $\beta_2: \pi_s(\Pi_2) \approx \pi_{s+2}(SU(2m))$ и что пространство Π_2 гомотопически эквивалентно пространству $\tilde{\Pi}_2$ всех непрерывных отображений $S^2 \rightarrow SU(2m)$ с фиксированной точкой.

Теорема 23.3.1. *Рассмотрим группу $SU(2m)$ и пространства Π_2 и Π'_2 . В пространстве Π'_2 рассмотрим множество W всех точек f , на которых функционал Дирихле $D[f]$ достигает абсолютного минимума. Тогда: а) множество W гомеоморфно группе $U(m)$; б) вложение $i: W \rightarrow \Pi'_2 \rightarrow \Pi_2$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп $(i_*)_s: \pi_s(U(m)) \rightarrow \pi_s(\Pi_2)$ при $s \leq 2m$, поэтому $2m$ -мерный остов пространства Π_2 гомотопически эквивалентен $2m$ -мерному остову группы $U(m)$ и композиция $\beta_s \circ (i_*)_s: \pi_s(U(m)) \xrightarrow{\sim} \pi_{s+2}(SU(2m))$ является изоморфизмом периодичности Ботта при $s \leq 2m$.*

Доказательство. Рассмотрим в группе $SU(2m)$ двумерную сферу

$$S_0^2 = \left\| \begin{array}{cc} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \alpha E_m \end{array} \right\|, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Одна из полусфер, а именно полусфера $\beta \geq 0$, совпадает с диском D_0^2 , вложение которого в группу $SU(2m)$ было осуществлено выше. Экватором $\beta = 0$ сферы S_0^2 является окружность S_0^1 . Поскольку вложение сферы $S_0^2 \rightarrow SU(2m)$ продолжается до мономорфизма $SU(2) \rightarrow SU(2m)$, то очевидно, что сфера S_0^2 является геодезическим подмногообразием в группе $SU(2m)$ и тем более локально минимальным. Следовательно, и диск D_0^2 является вполне геодезическим подмногообразием в $SU(2m)$. Рассмотрим множество W' вполне геодезических дисков $D^2(x) \subset SU(2m)$, имеющих вид $D^2(x) = x D_0^2 x^{-1}$, где $x \in SU(2m)$ и $xsx^{-1} = s$ при любом $s \in S_0^1$.

Лемма 23.3.1. *Множество W' гомеоморфно пространству $U(m)$.*

Доказательство. Пусть $D^2(x) \in W'$, тогда $xs = sx$ для любого $s \in S_0^1$. Так как $S_0^1 = \{\alpha E_m \oplus \bar{\alpha} E_m\}$, то отсюда следует, что $x = A \oplus D$, где $A, D \in U(m)$, т. е. $x = (E_m \oplus DA^{-1}) \cdot (A \oplus A) = x_1 \cdot (A \oplus A)$, $x_1 = E_m \oplus DA^{-1}$. Поскольку $(A \oplus A) \cdot d = d \cdot (A \oplus A)$ при любом $d \in D_0^2$ и при любом $A \in U(m)$, то имеем

$$D^2(x) = D^2(x_1) = \left\| \begin{array}{cc} \alpha E_m & \beta C \\ -\beta C^{-1} & \alpha E_m \end{array} \right\|, \quad C = DA^{-1}.$$

Так как $\beta \geq 0$, то этим условием матрица C определяется однозначно. Итак, каждому диску $D^2(x)$ мы сопоставили элемент $C \in U(m)$, $C = C[D^2(x)]$. Пусть $C[D^2(x)] = C[D^2(x')]$; тогда очевидно, что $x' \cdot x^{-1} \in \{A \oplus A\}$, а потому диски $D^2(x)$ и $D^2(x')$ совпадают. Обратно, если $C \in U(m)$, то $C = C[D^2(x)]$, где $x = E_m \oplus C$, т. е. построенное нами соответствие $D^2(x) \rightarrow C[D^2(x)]$ и является требуемым гомеоморфизмом между множеством W' и пространством $U(m)$. Лемма доказана.

Построим вложение $i: U(m) \rightarrow \Pi'_2$. Пусть $g \in U(m)$; тогда по этому элементу однозначно строится диск

$$D^2(E_m \oplus g) = \left\| \begin{array}{cc} \alpha E_m & \beta g \\ -\beta g^{-1} & \alpha E_m \end{array} \right\|,$$

причем если $g_1 \neq g_2$, то $D^2(E_m \oplus g_1) \cap D^2(E_m \oplus g_2) = S^1_0$. Пусть $i_0: D^2 \rightarrow D^2_0$ есть фиксированное выше отображение $i_0 = i' \cdot i''$, $i_0|_{S^1_0} \equiv j_0: S^1 \rightarrow S^1_0$. Положим $i(g)(\xi) = (E_m \oplus g) \cdot i_0(\xi) \cdot (E_m \oplus g^{-1})$, где $\xi \in D^2$. Ясно, что $i: g \mapsto i(g)$ есть искомое вложение $U(m) \rightarrow \Pi'_2$. Из леммы 23.3.1 следует, что множество отображений $i(U(m)) \subset \Pi'_2$ совпадает с множеством отображений вида $\{A_d x \cdot i_0\}$, где элемент x пробегает всю группу $G = \{A \oplus A\} \subset U(2m)$, $G \approx U(m)$, т. е. множество $i(U(m))$ является орбитой точки $i_0 \in \Pi'_2$ при присоединенном действии группы G на множестве отображений Π_2 .

Лемма 23.3.2. Гомоморфизм $\beta_2 \cdot (i_*)_s: \pi_s(U(m)) \rightarrow \pi_{s+2}(SU(2m))$ совпадает с изоморфизмом периодичности.

Доказательство. Пусть $f: S^s \rightarrow U(m)$, $f \in [f] \in \pi_s(U(m))$, $\sigma \in S^s$. Тогда

$$[(\beta_2)_* \cdot (i_*)_s](f)(\sigma) = \bigcup_{\sigma \in S^s} (D^2[E_m \oplus f(\sigma)]) = \left\| \begin{array}{cc} \alpha E_m & \beta f(\sigma) \\ -\beta f^{-1}(\sigma) & \alpha E_m \end{array} \right\|.$$

Из пункта 23.1 и из теории Морса (см. [1]) немедленно следует, что гомоморфизм $\beta_2 \cdot (i_*)_s$ есть в точности изоморфизм периодичности, если $s \leq 2m$. Поскольку β_2 является изоморфизмом в любой размерности, то отсюда следует, что гомоморфизм $(i_*)_s: \pi_s(U(m)) \rightarrow \pi_s(\Pi_2)$ тоже является изоморфизмом при $s \leq 2m$, а потому $2m$ -мерный остов пространства Π_2 гомотопически эквивалентен $2m$ -мерному остову пространства $i(U(m))$. Лемма доказана.

Итак, вложение $i: U(m) \rightarrow \Pi_2$ удовлетворяет всем необходимым требованиям. Осталось показать, что $i(U(m)) = W$.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^{8m^2}$, отвечающее комплексному пространству $\mathbb{C}^{4m^2}$ всех матриц $(2m \times 2m)$ с формой $\varphi(A, B) = \text{Re Spur}(AB^*)$. Тогда группа $SU(2m)$ (как мы уже отмечали выше) изометрично вкладывается в сферу S^{8m^2-1} радиуса $\sqrt{2m}$ как гладкое подмногообразие, на котором евклидова метрика индуцирует специальную биинвариантную риманову метрику на группе $SU(2m)$. Поэтому многие метрические соотношения в группе $SU(2m)$ выгодно рассматривать с точки зрения объемлющей сферы S^{8m^2-1} . Извлечем первое следствие из этого замечания. Так, например, в группе $SU(2m)$ не существует бесконечно малых вариаций диска D^2_0 , оставляющих границу $S^1_0 = \partial D^2_0$ неподвижной и таких, чтобы возмущенный диск $\tilde{D}^2_0$ был бы минимальным диском в группе $SU(2m)$, но не вполне геодезическим. В самом деле, пусть такая вариация существует. Заметим, что окружность $S^1_0 \subset SU(2m) \subset S^{8m^2-1}$ является окружностью большого круга в сфере S^{8m^2-1} , а диск D^2_0 является центральным

плоским сечением объемлющей сферы трехмерной плоскостью через начало координат в $\mathbb{R}^{8m^2}$. Так как диск $\tilde{D}_0^2$ не является вполне геодезическим в группе $SU(2m)$, то он не вполне геодезический и в сфере S^{8m^2-1} , т. е. он не получается из диска D_0^2 путем поворота вокруг окружности S_0^1 , а тогда очевидно, что его площадь строго больше площади диска D_0^2 (в линейном приближении), т. е. $\delta(\text{vol}_2) > 0$ и диск $\tilde{D}_0^2$ не является минимальным диском, что противоречит предположению. Итак, вариация любого диска $D^2(x) \in W'$ (неподвижная на его граничной окружности) либо оставляет диск $D^2(x)$ вполне геодезическим в группе, и тогда она сводится к повороту диска вокруг окружности S_0^1 , либо разрушает его минимальность (и тем более полную геодезичность).

Лемма 23.3.3. *Верно соотношение $i(U(m)) \subset W$.*

Доказательство. Поскольку каждое отображение $f \in i(U(m))$ имеет вид $f = \text{Ad}_x \cdot i_0$, $x \in G$, то достаточно проверить, что точка i_0 является точкой абсолютного минимума для функционала Дирихле. Так как $SU(2m) \subset S^{8m^2-1}$ и D_0^2 есть центральное плоское сечение сферы S^{8m^2-1} , то i_0 есть точка абсолютного минимума для функционала vol_2 , а так как любой минимальный вектор является и гармоническим, то i_0 — критическая точка и для функционала Дирихле (впрочем, обобщенная гармоничность отображения i_0 очевидна из конструкции i_0). Так как всегда $\text{vol}_2[f] \leq D[f]$, то ясно, что i_0 есть точка абсолютного минимума для функционала Дирихле. Лемма доказана.

Лемма 23.3.4. *Верно соотношение $i(U(m)) \supset W$, а поэтому $i(U(m)) = W$, где W — множество точек абсолютного минимума для функционала Дирихле.*

Доказательство. Пусть $f: D^2 \rightarrow SU(2m)$, $f|_{S^1} = j_0$ есть точка абсолютного минимума функционала D . Из леммы 23.3.3 вытекает, что значение D в точках абсолютного минимума равно $D[i_0]$ и что это значение равно $\text{vol}_2[i_0]$. Так как $\text{vol}_2[f] \leq D[f] = D[i_0] = \text{vol}_2[i_0]$, то $\text{vol}_2[f] \leq \text{vol}_2[i_0]$, но поскольку это соотношение можно рассматривать в метрике сферы S^{8m^2-1} , то очевидно, что $\text{vol}_2[f] = \text{vol}_2[i_0]$, а тогда $f(D^2) \subset S^{8m^2-1}$ является плоским центральным сечением; кроме того, отображение f гармонично. Продолжим вполне геодезический диск $f(D^2)$ до сферы $\tilde{S}^2$, являющейся вполне геодезической в сфере S^{8m^2-1} (и подавно в группе $SU(2m)$). Мы получили в $SU(2m)$ две вполне геодезические сферы S_0^2 и $\tilde{S}^2$, причем $S_0^2 \cap \tilde{S}^2 \supset S_0^1 \ni E_{2m}$. Минимальными подгруппами, содержащими сферы S_0^2 и $\tilde{S}^2$, являются подгруппы G_1 и G_2 , изоморфные группе $SU(2)$. Вложения $\alpha_1: G_1 \rightarrow SU(2m)$, $\alpha_2: G_2 \rightarrow SU(2m)$ определяют два точных представления группы $SU(2)$ в группу $SU(2m)$. Так как ранг $SU(2) = 1$, то можно считать, что окружность S_0^1 является образом одномерного тора $T^1 \approx S^1 \subset SU(2)$, причем $S_0^1 \subset T^{2m-1}$, где T^{2m-1} — максимальный тор в группе $SU(2m)$. Так как два представления j_1 и j_2 совпадают

на торе T^1 , то они эквивалентны, т. е. существует элемент $x \in \text{SU}(2m)$ такой, что $j_1 = \text{Ad}_x \cdot j_2$. Две сферы S_0^2 и $xS_0^2x^{-1}$, вложенные в группу G_1 , можно совместить еще одним внутренним автоморфизмом Ad_{x_1} ; тогда в сфере S_0^2 мы получаем две геодезические S_0^1 и $x_1xS_0^1x^{-1}x_1^{-1}$. Значит, существует элемент $x_2 \in G_1$ такой, что $S_0^1 \equiv x_2x_1xS_0^1x^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$, и, следовательно, автоморфизм Ad_y , где $y = x_2x_1x$, переводит отображение f в отображение i_0 , оставляя на месте окружность S_0^1 , т. е. $f \in i(U(m))$. Лемма доказана.

Тем самым, доказательство теоремы 23.3.1 закончено.

Отметим, что все точки множества W являются не просто минимальными для функционалов площади и Дирихле, но даже «вполне геодезическими» точками. Это обстоятельство имело место и в одномерном случае, но там минимальность какой-либо траектории автоматически влечет за собой ее геодезичность; в двумерном же случае из минимальности диска вовсе не следует его полная геодезичность. Более того, единственными вполне геодезическими дисками D^2 с границей S_0^1 являются диски множества W' . Иными словами, если $f \in \Pi_1^1$ является критической точкой для функционала Дирихле и если, кроме того, $f(D^2)$ — вполне геодезический диск, то $f \in W$.

23.4. Теорема периодичности для ортогональной группы основана на восьмимерных экстремальных функционала Дирихле. Рассмотрим евклидово пространство вещественных матриц $(p \times p) - \mathbb{R}^{p^2}$; $\varphi(A, B) = \text{Spur}(A \cdot B^T)$. Тогда группа $\text{SO}(p)$ изометрично вкладывается в сферу S^{p^2-1} радиуса $\sqrt{p}$ как гладкое подмногообразие, на котором объемлющая евклидова метрика $\varphi(A, B)$ индуцирует двусторонне инвариантную риманову метрику. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(p)$ группы $\text{SO}(p)$ вложена в $\mathbb{R}^{p^2}$ как линейное подпространство матриц $X, X^T = -X$, и пересечение $\mathfrak{so}(p) \cap \text{SO}(p)$ является компактным симметрическим пространством $\text{SO}(p)/U(p/2)$, если p четно. Обозначим $\mathfrak{so}(p) \cap \text{SO}(p)$ через $\Omega_1(p)$; тогда очевидно, что $\Omega_1(p)$ состоит в точности из тех элементов $g \in \text{SO}(p)$, для которых $g^2 = -E$, т. е. $\Omega_1(p)$ является множеством комплексных структур в группе $\text{SO}(p)$ (см. [1]).

Положим теперь $p = 16r$; тогда в группе существуют 8 антикоммутирующих комплексных структур, которые мы обозначим через $I_1, I_2, \dots, I_8$; $I_s^2 = -E$; $I_s I_k + I_k I_s = 0$, $k \neq s$. Все векторы I_s ($1 \leq s \leq 8$) лежат в плоскости $\mathfrak{so}(16r)$, и в силу условия антикоммутативности все они попарно ортогональны. Кроме того, каждый вектор I_s ортогонален вектору $E \in \text{SO}(16r)$, поэтому сфера $S_0^8 = \{x \in \text{SO}(16r) \mid x = a^0 E + a^1 I_1 + \dots + a^8 I_8; (a^0)^2 + (a^1)^2 + \dots + (a^8)^2 = 1\}$ является плоским сечением сферы S^9 (где $q = 256r^2 - 1$), проходящим через начало координат, и, следовательно, вполне геодезична в сфере S^9 и в $\text{SO}(16r) \subset S^9$. Ясно, что $S_0^8 \cap \mathfrak{so}(16r) = S_0^8 \cap \Omega_1(16r) = S_0^7$, где S_0^7 — вполне геодезический экватор $a^0 = 0$. Фиксируем в группе $\text{SO}(16r)$ вполне геодезиче-

скую сферу $S_0^7 = \{x = a^0 E + a^1 I_1 + \dots + a^7 I_7; (a^0)^2 + \dots + (a^7)^2 = 1\}$; сфера S_0^7 является границей вполне геодезического диска $D_0^8 \subset S_0^8$, $D_0^8 = \{x \in S_0^8; a^8 \geq 0\}$. Пусть D^8 — стандартный диск в евклидовой метрике, $S^7 = \partial D^8$, i'' — стандартное отображение D^8 на полусферу, тождественное на границе ∂D^8 , i' — единственное изометричное вложение полусферы $i''(D^8)$ в $SO(16r)$, совпадающее на $i''(S^7)$ с фиксированным изометричным вложением $j_0: S^7 \rightarrow S_0^7$; положим $i_0 = i' \cdot i''$, $i_0: D^8 \rightarrow SO(16r)$. Рассмотрим пространство Π_8 всех непрерывных отображений $f: D^8 \rightarrow SO(16r)$ таких, что $f|_{S^7} \equiv j_0$. Пусть $\Pi'_8 \subset \Pi_8$ — подпространство, составленное из всех отображений f класса $H_1^1(D^8)$. На Π'_8 рассмотрим функционал объема $\text{vol}_8 f = \int_{D^8} \sqrt{\det \Omega} dv$ и функционал Дирихле $D[f] =$

$$= \int_{D^8} \left[\frac{1}{8} \sum_{\alpha=1}^8 g_{ij}(x'_\alpha \cdot x'_\alpha) \right]^4 dv. \text{ Тогда } \text{vol}_8 f \leq D[f] \text{ при любом } f \in \Pi'_8.$$

Через β_s обозначим стандартный изоморфизм $\pi_s(\Pi_8) \approx \pi_{s+8}(SO(16r))$.

Теорема 23.4.1. *Рассмотрим группу $SO(16r)$ и пространства Π_8 и Π'_8 . В пространстве Π'_8 рассмотрим множество W всех тех точек f , на которых функционал Дирихле $D[f]$ достигает абсолютного минимума. Тогда:*

- а) множество W гомеоморфно группе $O(r)$;
- б) вложение $i: W \rightarrow \Pi'_8 \rightarrow \Pi_8$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп $(i_*)_s: \pi_s(O(r)) \rightarrow \pi_s(\Pi_8)$ при $s \leq r-2$, поэтому $(r-2)$ -мерный остов пространства Π_8 гомотопически эквивалентен $(r-2)$ -мерному остову группы $O(r)$ и композиция $\beta_s \circ (i_*)_s: \pi_s(O(r)) \xrightarrow{\sim} \pi_{s+8}(SO(16r))$ является изоморфизмом периодичности Ботта при $s \leq r-2$.

Замечание. Так как $\pi_2(U(2m)) = 0$, то пространство Π_2 связно. Так как $\pi_8(SO(16r)) = \mathbb{Z}_2$, то Π_8 несвязно и состоит из двух связных компонент; как будет видно из доказательства, и множество W тоже состоит из двух компонент, причем каждая компонента пространства Π_8 содержит по одной компоненте множества W и стягивается (при $r \rightarrow \infty$) именно на эту компоненту.

Доказательство теоремы. Рассмотрим в группе $SO(16r)$ множество Ω_8 всех комплексных структур I , антикоммутирующих со структурами $I_1, I_2, \dots, I_7$, т. е. антикоммутирующих с каждой точкой шестимерной сферы $S_0^8 \subset S_0^7$ ($a^0 = 0$). Так, например, $I_8 \in \Omega_8$. Хорошо известно (см. [1]), что Ω_8 состоит из двух связных компонент и гомеоморфно группе $O(r)$, кроме того, Ω_8 содержится в плоскости, ортогональной к векторам $E, I_1, \dots, I_7$. Ясно, что $S_0^8 \cap \Omega_8 = \{I_8, -I_8\}$, а потому $D_0^8 \cap \Omega_8 = I_8$ (одна точка).

Поставим в соответствие каждой точке $x \in \Omega_8$ вполне геодезическую сферу $S_0^8(x)$, имеющую своим экватором сферу S_0^7 . Если $x \in \Omega_8$, то x ортогонален векторам $E, I_1, \dots, I_7$ ($xI_s = -I_s x$, $1 \leq s \leq 7$), а вектор E ортогонален всем комплексным структу-

рам. Поэтому сфера, натянутая на базисные векторы $E, I_1, \dots, I_7, x$, является центральным плоским сечением в сфере S^9 и вполне геодезична в группе $SO(16r)$. В сфере $S^8(x)$ рассмотрим диск $D^8(x) = \{y \in S^8(x); y = y^0 E + \dots + y^7 I_7 + y^8 x; y^8 \geq 0\}$. Тогда каждому $x \in \Omega_8$ однозначно соответствует вполне геодезический диск $D^8(x)$ такой, что $\partial D^8(x) = S_0^7$, и если $x_1 \neq x_2$, то $D^8(x_1) \cap D^8(x_2) = S_0^7$. Точно так же, как и в случае унитарной периодичности, можно определить вложение $i: O(r) \cong \Omega_8 \rightarrow \Pi_8' \rightarrow \Pi_8$, так как для каждого диска $D^8(x)$, $x \in \Omega_8$, существует единственная изометрия $\omega(x): i''(D^8) \rightarrow D^8(x)$, $\omega(x) \cdot i''|_{S_0^7} \equiv j_0$; тогда $i(x) = \omega(x) \cdot i''$.

Лемма 23.4.1. Вложение $i: O(r) \rightarrow \Pi_8$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп до размерности $r-2$.

Доказательство. Пусть $f: S^s \rightarrow O(r)$, тогда в $SO(16r)$ мы получаем множество $\{D^8(x)\}$, $x \in f(S^s)$; $\Pi_8' \ni i(x)$. Так как сфера S_0^7 фиксирована, то в группе $SO(16r)$ возникает множество $\tilde{S} = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^8(x)$, которое определяет отображение $F: S^{s+8} \rightarrow SO(16r)$

такое, что $F|_{S^s} \equiv f$ (где S^s — экватор в сфере S^{s+8}). Теперь рассмотрим последовательность нульмерных сфер $S_k^0 = \{I_k, -I_k\}$, $1 \leq k \leq 7$. Зафиксировав сферу S_7^0 , мы можем построить соответствие $\gamma_7: x \rightarrow D^1(x)$, где $x \in \Omega_8$, $D^1(x)$ есть минимальная геодезическая из точки I_7 в точку $-I_7$, середина которой есть точка x . Тогда $D^1(x) \in \Omega_7$ (см. [1]) и существует отображение $F_7: S^{s+1} \rightarrow \Omega_7$ такое, что $F_7(S^{s+1}) = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^1(x)$, $F_7|_{S^s} \equiv f$, причем из теории

Морса следует, что соответствие $f \mapsto F_7$ определяет изоморфизм $\pi_s(\Omega_8) \xrightarrow{\sim} \pi_{s+1}(\Omega_7)$. Зафиксировав сферу S_0^6 , получаем соответствие $\gamma_6: y \rightarrow D^1(y)$, $y \in \Omega_7$; при этом существует отображение $F_6: S^{s+2} \rightarrow \Omega_6$ такое, что $F_6(S^{s+2}) = \bigcup_{y \in F_7(S^{s+1})} D^1(y)$, $F_6|_{S^{s+1}} \equiv F_7$. Продол-

жая этот процесс, мы получаем соответствия $\gamma_7, \gamma_6, \dots, \gamma_1, \gamma_0$, где $E = I_0$. Отображение $F_0: S^{s+8} \rightarrow \Omega_0 = SO(16r)$ соответствует отображению f при изоморфизме периодичности $F_0(S^{s+8}) = F(S^{s+8})$, так как $\bigcup_{x \in f(S^s)} [\gamma_0 \cdot \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_7(x)] = \tilde{S}$. Поэтому можно считать, что

$F_0 \equiv F$, что и завершает доказательство леммы, поскольку $\pi_s(\Pi_8) \approx \pi_{s+8}(SO(16r))$.

Тем самым, для подпространства $i(O(r)) \subset \Pi_8$ выполнены все утверждения пункта б) теоремы 23.4.1. Осталось доказать, что $W = i(O(r))$.

Лемма 23.4.2. Верно соотношение $i(O(r)) \subset W$.

Доказательство. Поскольку $i(x)D^8$ является центральным плоским сечением, то утверждение леммы полностью аналогично утверждению леммы 23.3.3 и так же, как и раньше, следует из оценки $\text{vol}_8 f \leq D[f]$.

Лемма 23.4.3. Верно соотношение $i(O(r)) = W$.

Доказательство. Пусть $f \in W$, т. е. функционал Дирихле принимает на отображении f свое минимальное значение. Пусть $i_0: D^8 \rightarrow D_0^8$ (см. выше); тогда очевидно, что $\text{vol}_8 i_0 = D[i_0]$. Так как $\text{vol}_8 f \leq D[f] = D[i_0] = \text{vol}_8 i_0$, то точно так же, как и при доказательстве леммы 23.3.4, устанавливается, что образ $f(D^8)$ является центральным плоским сечением, содержащим сферу S_0^7 . Пусть $x \in f(D^8)$, и пусть вектор x ортогонален векторам $E, I_1, \dots, I_7$. Тогда $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, где γ — геодезическая на диске $f(D^8)$, $\gamma(0) = E$, $\gamma(1) = -E$. Так как длина $l(\gamma)$ равна длине $l(\gamma')$, где геодезическая $\gamma' \subset f(D^8)$ такова, что $\gamma'(0) = E$, $\gamma'(1) = -E$, $\gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = I_1$, то γ — минимальная геодезическая из точки E в точку $-E$ в группе $SO(16r)$, а потому $x = \gamma'\left(\frac{1}{2}\right) \in \Omega_1$ (см. [1]), т. е. $x^2 = -E$. Так как вектор x ортогонален векторам I_s ($1 \leq s \leq 7$), то $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + I_s) \in \Omega_1$, т. е. $\frac{1}{2}(x + I_s)^2 = -E$, откуда $xI_s + I_sx = 0$, т. е. $x \in \Omega_8$, но тогда $f \in i(O(r))$, так как $f(D^8) = D^8(x)$. Лемма доказана. Тем самым, доказательство теоремы 23.4.1 закончено.

Ясно, что совершенно аналогичная теорема имеет место и в случае симплектической группы $Sp(n)$.

В случае унитарной периодичности мы имели утверждение: множество $i(U(m)) \subset \Pi_2$ является орбитой точки $i_0 \in \Pi_2$ при присоединенном действии группы $G \subset U(2m)$, $G \cong U(m)$, на множестве отображений Π_2 . В случае ортогональной периодичности также существует такое представление для $i(O(r))$, хотя оно и не используется при доказательстве.

Лемма 23.4.4. Множество $W = i(O(r))$ является орбитой точки $i_0 \in \Pi_8$ при присоединенном действии группы $G \subset SO(16r)$ на множестве отображений Π_8 , где $G = I_8\Omega_8 \approx O(r)$.

Доказательство. Достаточно установить, что для любого вполне геодезического диска $D^8(x)$, $x \in \Omega_8$, существует элемент $g \in SO(16r)$ такой, что $gI_s = I_sg$ ($1 \leq s \leq 7$) и $g x g^{-1} = I_8$. Рассмотрим этот элемент; для него имеем соотношение $g\Omega_8 g^{-1} \subset \Omega_8$ и $(gD_0^8 g^{-1}) \cap \Omega_8 = gI_8 g^{-1}$, т. е. $gD^8(x)g^{-1} = D^8(g x g^{-1})$. Пусть R — подгруппа всех элементов $g \in SO(16r)$ таких, что $gI_s = I_sg$ ($1 \leq s \leq 7$), и пусть $p(g) = gI_8 g^{-1}$ — естественная проекция $p: R \rightarrow \Omega_8$. Рассмотрим в группе $SO(16r)$ сдвиг $g \rightarrow I_8 g$. Пусть $g \in R$, $g = \exp A$, $A \in T_E(R)$, а так как $gI_s = I_sg$, то и $AI_s = I_s A$.

Но тогда легко видеть (см. [62]), что $I_8 g$ антикоммутирует с элементами I_s ($1 \leq s \leq 7$), т. е. $I_8 g \in \Omega_8$, $I_8 R \subset \Omega_8$. Обратно, пусть $I_8 \exp A \in \Omega_8$; тогда $AI_s = I_s A$ ($1 \leq s \leq 7$), т. е. $gI_s = I_sg$, где $g = \exp A$, $g \in R$, $I_8 R \supset \Omega_8$, $\Omega_8 = I_8 R$, а тогда проекция p

является диффеоморфизмом и для любого $x \in \Omega_s$ существует элемент $g \in R$ такой, что $x = g I_s g^{-1}$. Лемма доказана.

В заключение сделаем несколько общих замечаний. Наряду с пространством Π_2 естественно рассмотреть пространство $\tilde{\Pi}_2$ — пространство всех непрерывных отображений сферы S^2 в группу $SU(2m)$, переводящих фиксированную точку $x_0 \in S^2$ в точку $E_{2m} \in SU(2m)$. Пространства Π_2 и $\tilde{\Pi}_2$ гомотопически эквивалентны. В пространстве $\tilde{\Pi}_2$ можно выделить подпространство $\tilde{\Pi}'_2$, составленное из всех отображений $f \in \tilde{\Pi}_2$ таких, что $f \in H^1_1[S^2, SU(2m)]$. Поскольку окружность $S^1_0 \subset SU(2m)$ переходит в себя при отображении $\varphi: g \mapsto -g, g \in SU(2m)$, то возникает непрерывное отображение $\psi: \Pi_2 \rightarrow \tilde{\Pi}_2$, сопоставляющее каждому диску D_2 сферу $S^2 = D^2 \cup (\varphi D^2)$. Отображение ψ является расслоением с дискретным слоем, гомеоморфным нульмерной сфере. В частности, каждый вполне геодезический диск $D^2, \partial D^2 = S^1_0$, перейдет во вполне геодезическую сферу S^2 , экватором которой является окружность S^1_0 , причем эта же сфера является образом и диска φD^2 . Отсюда следует, что $\psi(W) \subset W_1$, где W_1 — связная компонента множества экстремалей функционала Дирихле на пространстве $\tilde{\Pi}'_2$, содержащая изометрию $\psi(i_0)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_s(W) & \xrightarrow{\xi'} & \pi_s(\Pi_2) & \xrightarrow[\cong]{\beta_2} & \pi_{s+2}(SU(2m)) \\
 \downarrow \xi & \swarrow \eta & \downarrow \psi_* & & \downarrow \psi_* \\
 \pi_s(U(m)) & & \pi_s(\tilde{\Pi}_2) & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\beta}_2} & \pi_{s+2}(SU(2m)) \\
 & \searrow \eta' & & & \\
 & \pi(W_1) & & &
 \end{array}$$

Здесь гомоморфизмы $\xi, \beta_2, \tilde{\beta}_2$ являются изоморфизмами при любом s , а гомоморфизм ξ' является изоморфизмом при $s \leq 2m$; $\xi' = i_*$. Гомоморфизм $\beta_2 \xi' \xi$ является изоморфизмом периодичности, а гомоморфизм, соответствующим ему при отображении ψ , является гомоморфизм $\beta_2 \eta' \eta = \Psi_*(\beta_2 \xi' \xi)$. Оказывается, что, хотя пространство $\tilde{\Pi}_2$ гомотопически эквивалентно пространству Π_2 , картина распределения критических точек функционала Дирихле резко меняется при переходе от пространства Π_2 к пространству $\tilde{\Pi}_2$, в частности, $\psi'_* \equiv 0, \psi_* \equiv 0, \Psi_* \equiv 0$ при $s \leq 2m$, поэтому $\beta_2 \eta' \eta: \pi_s(U(m)) \rightarrow \pi_{s+2}(SU(2m))$ является нулевым гомоморфизмом при $s \leq 2m$. Это легко вытекает из явного вида изоморфизма периодичности, полученного нами выше.

Множество W_1 уже не является множеством точек абсолютного минимума для функционала Дирихле, и кроме W_1 возникает много других критических точек и подмногообразий для

функционала Дирихле на $\tilde{\Pi}_2$. Аналогичная ситуация наблюдается и на пространстве $\tilde{\Pi}_8 = \{S^8 \rightarrow SO(16r)\}$. Было бы интересно выяснить до конца эту геометрическую картину, которая в значительной степени прояснила бы поведение функционала Дирихле на пространствах $\tilde{\Pi}_2$ и $\tilde{\Pi}_8$.

Из доказанных нами двух основных теорем этого параграфа следует, что механизм возникновения как унитарной, так и ортогональной периодичности один и тот же, а окончательный результат зависит только от того, пространство отображений каких дисков мы рассматриваем: двумерных или восьмимерных.

Было бы интересно получить прямое доказательство этих теорем, не использующее информации, связанной с одиомерными функционалами длины и действия. Такое прямое доказательство немедленно следовало бы из факта стягиваемости $(2m)$ -мерного остова пространства Π_2 (соответственно $(r-2)$ -мерного остова пространства Π_8) на подпространство $i(U(m))$ (соответственно $i(O(r))$), являющееся множеством точек абсолютного минимума функционала Дирихле. Именно соответствующая теорема стягиваемости для одномерного функционала действия (см. [1]) позволила осуществить переход в периодичности Ботта. Аналогичное утверждение для многомерных функционалов отсутствует, в этом и заключается основная трудность, препятствующая прямому доказательству теорем 23.3.1 и 23.4.1.

§ 24. Три геометрические задачи вариационного исчисления

24.1. Минимальные конусы и особые точки минимальных поверхностей. Рассмотрим окружность S^1 и прямое произведение двух нульмерных сфер $S^0 \times S^0 \subset S^1$ (рис. 49). На рис. 49, а изображена одномерная минимальная поверхность (два отрезка), граница которой совпадает с $S^0 \times S^0$. С другой стороны, одномерный «конус» (два диаметра, изображенные на рис. 49, б), очевидно, не является минимальной одномерной поверхностью, так как в вершине «конуса» — в начале координат — существует вариация, уменьшающая длину кривой. Как видно, четырехкратная точка распадается на две трехкратные точки (рис. 49, в).

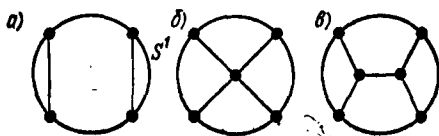


Рис. 49.

Рассмотрим теперь двумерную сферу S^2 и в ней контур — прямое произведение $S^0 \times S^1$. На рис. 50, а изображена двумерная минимальная поверхность (катеноид — поверхность вращения, образованная «цепной линией»), граница которой совпадает с $S^0 \times S^1$. С другой стороны, как и в одномерном случае, ясно,

что конус (рис. 50, б) не минимален с точки зрения функционала двумерной площади — в вершине конуса существует вариация, уменьшающая площадь конуса (вариацию можно понимать, например, в терминах гомотогических вариаций). Сравнивая двумерную минимальную поверхность — катеноид (см. рис. 50, а) с одномерной — двумя отрезками (см. рис. 49, а), мы видим, что двумерная пленка провисает и образует горловину (перетяжку), диаметр которой меньше диаметра граничных окружностей. В одномерном же случае «горловина» имела тот же «диаметр», что и граничные нульмерные сферы.

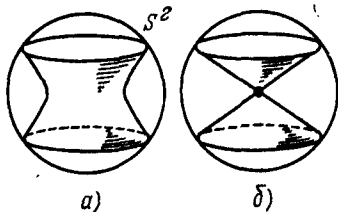


Рис. 50.

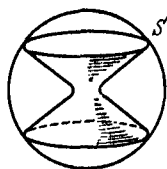


Рис. 51.

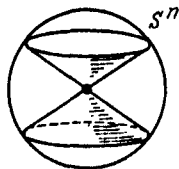


Рис. 52.

Рассмотрим трехмерную сферу S^3 и в ней «контур» — двумерное подмногообразие $S^1 \times S^1 = T^2$ (тор), стандартно вложенное с евклидовой индуцированной римановой метрикой. Можно подсчитать (этот подсчет мы здесь опустим), что трехмерная минимальная пленка (условно изображенная на рис. 51) имеет еще более узкую горловину, чем горловина двумерного катеноида. Другими словами, вскрывается интересный эффект: с ростом размерности граничного контура минимальная пленка провисает все больше и больше (рис. 52). Точную формулировку этого явления и соответствующие формулы и вычисления мы дадим ниже. Интуитивно ясно, что с ростом размерности в этом монотонном процессе наступит момент, когда минимальная пленка с границей $S^p \times S^q$ (граница вложена в сферу S^{p+q+1}) провиснет настолько, что «схлопнется» и превратится в конус с вершиной в точке O (начало координат). Эта вершина, очевидно, будет особой точкой этой минимальной поверхности. При обратном процессе (понижении размерности) происходит «разрешение особенности» и особая поверхность — конус — превращается в неособую поверхность — «катеноид», на котором появляется исчезающий цикл.

Таким образом, можно ожидать, что в достаточно больших размерностях существуют глобально минимальные поверхности — конусы, имеющие в начале координат существенно особую точку (окрестность которой не гомеоморфна диску).

Вопрос: в каких размерностях в евклидовом пространстве существуют минимальные конусы?

Оказывается, от решения этой задачи зависят некоторые другие важные геометрические и аналитические вопросы в теории

дифференциальных уравнений, в геометрии групп и алгебр Ли. Простые примеры, приведенные выше, показывают, что в малых размерностях можно ожидать отсутствия минимальных конусов (отличных от стандартного диска, который, конечно, является минимальным конусом). Это предположение оправдывается. Приведем здесь известную «теорему о конусах» (см. [20]).

Теорема 24.1.1. Пусть A^{n-2} — замкнутое локально минимальное подмногообразие в стандартной сфере S^{n-1} , стандартно вложенной в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть многообразие A^{n-2} не является стандартной вполне геодезической сферой (экватором) $S^{n-2} \subset S^{n-1}$. Тогда, если $n \leq 7$, то конус CA (т. е. $(n-1)$ -мерная поверхность, образованная всеми радиусами, идущими из точки O в точки многообразия A^{n-2}) не является глобально минимальной поверхностью; другими словами, не является наименьшей экстремалью функционала $(n-1)$ -мерного объема, рассматриваемого на классе поверхностей X с фиксированной границей — подмногообразием A^{n-2} , т. е. $X \in \mathcal{O}(H_{n-2}(A))$.

Кратко изложим схему доказательства (подробности см. в [20]). Достаточно построить вариацию конуса, которая равнялась бы нулю на границе конуса (т. е. на подмногообразии $A^{n-2} \subset S^{n-1}$) и уменьшала бы объем конуса CA . Для этого следует изучить формулу второй вариации функционала vol_{n-1} , что и выполнено в [20]. Легко проверить, что если A^{n-2} — локально минимальное подмногообразие в сфере S^{n-1} , то $CA \setminus O$ — также локально минимальное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ относительно вариаций с малым носителем; поэтому для обнаружения вариации, уменьшающей объем конуса, нужно рассматривать возмущения конуса, обладающие достаточно большим носителем; при этом они могут, вообще говоря, сдвигать вершину конуса (например, производить описанное выше «разрешение особенности»). Под «вариацией конуса» мы можем понимать здесь вариации, введенные нами в § 6, т. е. конус и возмущенная поверхность должны быть, например, гомологичны (в смысле обычных гомологий). В [20] вариации конуса понимаются в смысле «потоков».

Пусть $x \in A$, $t \in [0, 1]$; тогда на конусе CA можно ввести координаты (x, t) , где $(x, 0)$ есть вершина O конуса CA (при любом $x \in A$), а все точки вида $(x, 1)$ принадлежат границе A конуса, $A \subset S^{n-1}$. Обозначим через CA_ε подмногообразие $CA \setminus (D^n(O, \varepsilon) \cap CA) \subset \mathbb{R}^n$, где $D^n(O, \varepsilon)$ — шар радиуса ε с центром в точке O (рис. 53). Если мы фиксируем единичное нормальное к подмногообразию CA векторное поле $N(x, t)$, то любая гладкая вариация $V(x, t)$ подмногообразия CA_ε (с фиксирован-

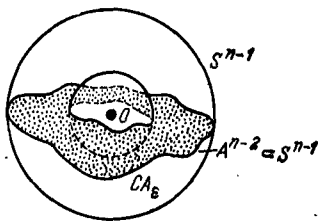


Рис. 53.

ными краями A_1 и A_2) однозначно определяется гладкой функцией $F(x, t)$ такой, что $F(x, 1) = F(x, \varepsilon) = 0$ для всех $x \in A$, т. е. $V(x, t) = F(x, t) \cdot N(x, t)$.

Задача сводится к изучению свойств функции $F(x, t)$. Мы приведем здесь только окончательный результат. Рассуждения, необходимые для его доказательства, носят чисто аналитический характер (см. [20]).

Пусть $A^{n-2} \subset S^{n-1}$ есть замкнутое локально минимальное подмногообразие в сфере S^{n-1} , не являющееся вполне геодезической сферой (экватором) S^{n-2} . Тогда мы можем выбрать функцию $F(x, t)$ таким образом, что $I(V, V)$ (здесь через $I(V, V)$ обозначена вторая вариация функционала объема) будет строго меньше нуля в том и только в том случае, когда выполнено неравенство $-(n-2) + \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\log \varepsilon}\right)^2 < 0$.

Теорема 24.1.1 немедленно следует из этого вспомогательного утверждения, поскольку число $-5 + 4 + \left(\frac{\pi}{\log \varepsilon}\right)^2$ можно сделать отрицательным, выбрав достаточно малое ε .

Таким образом, при $n \leq 7$ среди всех поверхностей с границей A^{n-2} конус CA не является минимальным. Как видно из схемы доказательства и оценки для $I(V, V)$, при $n=8$ доказательство не проходит. И действительно, оказывается, в восьми-мерном евклидовом пространстве уже существуют конусы, являющиеся, как мы покажем ниже, не только локально, но и глобально минимальными поверхностями. Пример такого конуса:

рассмотрим прямое произведение двух сфер $S^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times S^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; это многообразие может быть естественным образом вложено в сферу S^7 как локально минимальное подмногообразие A (доказательство см. в [20], а также в следующем пункте). Явная формула вложения:

$$\sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = \sum_{i=5}^8 (x^i)^2 \cap \left(\sum_{i=1}^8 (x^i)^2 = 1 \right) = A.$$

Тогда каждая вариация этого конуса CA , сохраняющая его границу A , первоначально увеличивает объем конуса, т. е. CA — минимальная поверхность с особой точкой в начале координат.

Сформулированная выше «теорема о конусах» дает возможность доказывать внутреннюю регулярность глобально минимальных поверхностей коразмерности один в евклидовом пространстве. Приведем один такой результат. Хотя эти результаты были получены в терминах потоков, варифолдов и цепей, мы будем по-прежнему пользоваться языком глобально минимальных поверхностей, разработанным выше, так как в данном случае эти два языка эквивалентны.

Предложение 24.1.1 (см. [20]). *Фиксируем $(n-2)$ -мерное компактное ориентированное подмногообразие A в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n \leq 7$. Через $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(H_{n-2}(A))$ обозначим класс поверхностей, заклеивающих многообразие A в смысле теории потоков. Тогда существует глобально минимальная поверхность $X_0 \in \mathcal{O}(A)$, имеющая наименьший $(n-1)$ -мерный объем и такая, что во всех своих внутренних точках она является вещественно-аналитическим минимальным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.*

Краткая схема доказательства. Сначала доказывается (в терминах теории потоков, см. [17]) существование глобально минимальной поверхности X_0 с заданной границей A ; эта поверхность оказывается почти всюду (в смысле объема vol_{n-1}) гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ (имеется в виду носитель минимального потока). Затем доказывается, что в каждой особой точке этой поверхности (не лежащей на границе A) корректно определено множество касательных конусов, которые должны быть минимальны по отношению к своей границе (если эта граница фиксирована). По индукции доказывается, что каждый из этих конусов можно рассматривать как конус над регулярным минимальным подмногообразием A^{n-2} в стандартной сфере S^{n-1} . Затем применяется теорема 24.1.1, согласно которой такой конус может быть только стандартным диском, высекающим на сфере S^{n-1} вполне геодезическую сферу S^{n-2} . На последнем шаге доказывается, что если касательный конус в особой точке является диском, то тогда поверхность в этой точке регулярна.

Другие следствия из «теоремы о конусах» см., например, в [96]. Отметим, что в перечисленных выше результатах самопересечение минимального погруженного подмногообразия не рассматривается, конечно, как особая точка поверхности, так как в этом случае касательный конус превращается в набор стандартных дисков, каждый из которых отвечает своему листу поверхности, проходящему через точку самопересечения.

24.2. Эquivариантная задача Плато. Рассмотрим риманово многообразие M^n , на котором гладко действует его группа изометрий $I(M)$ (напомним, что группа изометрий является группой Ли). Мы будем рассматривать подгруппы G в группе изометрий $I_0(M)$, где через $I_0(M)$ обозначена связная компонента единицы в группе $I(M)$. Пусть $V^p \subset M^n$ — некоторая поверхность, инвариантная относительно действия группы G . Такие поверхности будем называть G -инвариантными. Возникает естественный вопрос: можно ли среди этих поверхностей (реализующих, кроме того, например, нетривиальный (ко)цикл) найти глобально минимальную поверхность? Другими словами, можно ли гарантировать существование минимальной поверхности, обладающей заданной группой симметрий (если ее граница инвариантна относительно этой группы)?

Предложение 24.2.1 (см. [97]). *G -инвариантное многообразие $V \subset M$ является локально минимальным (по отношению ко всем малым вариациям η) тогда и только тогда, когда оно является локально минимальным по отношению к малым эквивариантным вариациям η_G (т. е. инвариантным относительно действия группы).*

Это важное наблюдение позволяет редуцировать задачу о нахождении минимальных подмногообразий в M к задаче о нахождении минимальных поверхностей на пространстве орбит M/G .

Напомним, что если $x \in M$ и $G(x)$ — орбита точки x при действии группы G , то $G(x) = G/G_x$, где G_x — стационарная подгруппа точки x в группе G . Две орбиты $G(x)$ и $G(y)$ называются орбитами одного типа, если подгруппы G_x и G_y сопряжены друг другу в G , т. е. $G_x = gG_yg^{-1}$ для некоторого $g \in G$. Классы сопряженности подгрупп $\{G_x\}$ называются орбит-типами. Говорят, что класс (G_y) следует за классом (G_x) (будем писать: $(G_y) \geq (G_x)$), если существует (G_y) такой, что $G_x \supseteq gG_yg^{-1}$. Хорошо известно, что если M связно, то существует единственный класс (H) такой, что $(H) \geq (G_x)$ для любого $x \in M$. Далее, объединение всех орбит этого класса является открытым плотным подмногообразием $M^* = \{x \in M \mid G_x \in (H)\}$.

1) Класс (H) называется главным орбит-типом.

2) Если $(H') \neq (H)$, но $\dim H' = \dim H$, то класс (H') называется особым орбит-типом.

3) Если $(H'') \neq (H)$ и $\dim H'' > \dim H$, то класс (H'') называется сингулярным орбит-типом.

Довольно просто доказывается, что если $\bigcup_{\alpha \in D} (H_\alpha)$ — произвольный набор классов (H_α) , каждый из которых не является главным орбит-типом, и если множество $K = \{x \in M \mid G_x \in (H_\alpha) \text{ при некотором } \alpha \in D\}$ является многообразием, то K — локально минимальное подмногообразие. Отсюда следует, что сингулярное множество в M является локально минимальной поверхностью, стратифицированной локально минимальными поверхностями меньших размерностей. В частности, если некоторая орбита $G(x_0)$ такова, что в окрестности точки x_0 больше нет ни одной орбиты этого же типа, то орбита $G(x_0)$ автоматически является локально минимальным подмногообразием.

Пусть $\pi: M \rightarrow M/G$ — каноническая проекция на пространство орбит M/G ; тогда в M/G содержится открытое плотное подмногообразие M^*/G , являющееся подмногообразием. Если $\varphi(X, Y)$ — скалярное произведение на $T_x(M)$, то можно построить новое скалярное произведение (риманову метрику) на M^*/G . Для этого фиксируем распределение R нормальных плоскостей к орбитам $G(x)$, и пусть $X', Y' \in T_{\pi(x)}[M^*/G]$. Тогда существуют единственные векторы X, Y — прообразы векторов X', Y' , принадлежащие R , и можно положить $\varphi'(X', Y') = \varphi(X, Y)$. Тем самым,

расстояние между точками из M^*/G равно длине ортогональной траектории, соединяющей соответствующие орбиты. Далее, мы определим на M/G функцию объема $v(a)$, положив

$$v(a) = \begin{cases} \text{объем } \pi^{-1}(a), & \text{если } \pi^{-1}(a) \text{ — главная орбита,} \\ m \cdot \text{объем } \pi^{-1}(a), & \text{если } \pi^{-1}(a) \text{ — особая орбита, где } m \text{ —} \\ & \text{число точек в однородном пространстве } H'/H \text{ и } H' \text{ со-} \\ & \text{ответствует точке } x \in \pi^{-1}(a), \\ 0, & \text{если } \pi^{-1}(a) \text{ — сингулярная орбита.} \end{cases}$$

Пусть $V^p \subset M$ — G -инвариантное подмногообразие; положим $k = p - v = \dim V - v$, где v — размерность главной орбиты. Тогда при проекции $\pi: V \rightarrow M/G$ подмногообразие $V \cap M^*$ проектируется в k -мерное подмногообразие в M^*/G .

Если ds — метрика на M^* и $\tilde{ds}$ — метрика на M/G , то построим новую риманову метрику на факторе M/G , положив $dl_k = v^{1/k} \cdot \tilde{ds}$. Поскольку $v(a) \rightarrow 0$, когда точка a стремится к образу сингулярной орбиты, то можно считать, что метрика dl_k задана на всем пространстве M/G (рис. 54).

Заметим (см. [97]), что объем G -инвариантного подмногообразия $V \subset M$ в точности равен объему многообразия V^*/G (где $V^* = V \cap M^*$), вычисленному на пространстве M^*/G в метрике dl_k . Отсюда следует

Предложение 24.2.2 (см. [97]). Пусть $V^p \subset M$ — некоторое G -инвариантное подмногообразие. Подмногообразие V локально минимально в M тогда и только тогда, когда подмногообразие $V^*/G \subset M^*/G$ локально минимально в факторе M/G относительно метрики dl_k , где $k = p - v$.

Замечание. Пусть $k = 0$, тогда $V \subset M$ совпадает с какой-то орбитой $G(x)$. Следовательно, все локально минимальные орбиты $G(x)$ в многообразии M находятся так: нужно рассмотреть на многообразии M^*/G гладкую функцию объема $v(a)$ и вычислить все ее критические точки. Эти точки и являются экстремальными (локально минимальными) орбитами. Отсюда вытекает важное

Предложение 24.2.3 (см. [97]). Каждое компактное однородное пространство G/H можно погрузить в некоторую стандартную сферу S^{n-1} как локально минимальное подмногообразие.

Замечание. Если для $V \subset M$ имеем $k = 1$, то подмногообразие V локально минимально тогда и только тогда, когда траектория $\pi(V^*) \subset M^*/G$ является геодезической в конформной метрике $dl_1 = v(a) \tilde{ds}$. Ниже мы специально изучим этот случай.

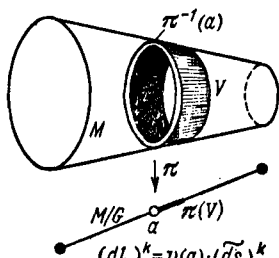


Рис. 54.

Пусть G — компактная группа Ли, действующая ортогонально на $\mathbb{R}^n$ без изменения ориентации (т. е. $G \subset SO(n)$), и пусть $A^{n-2} \subset \mathbb{R}^n$ — компактное ориентированное замкнутое G -инвариантное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ (тогда $A^{n-2} \subset S^{n-1}$). Рассмотрим $A^{n-2} \subset S^{n-1}$ как «контур» — границу в многомерной задаче Плато. Фиксируем класс поверхностей $X \in \mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(H_{n-2}(A))$, т. е. заклеивающих границу A в смысле обычных гомологий; гомоморфизм $H_{n-2}(A) \rightarrow H_{n-2}(X)$ тривиален. Тогда всегда существует глобально минимальная поверхность $X_0^{n-1} \in \mathcal{O}(A)$ такая, что ее объем наименьший. Естественно ожидать, что наличие какого-либо типа симметрии у границы A (например, G -инвариантность границы) повлечет за собой соответствующую симметрию минимальной поверхности, заклеивающей эту границу. Это предположение оправдывается для случая многообразий A , вложенных в сферу.

Теорема 24.2.1 (см. [98]). *Пусть G — замкнутая подгруппа в группе $SO(n)$, и пусть многообразие A^{n-2} вложено в сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и G -инвариантно. Тогда существует глобально минимальная поверхность X_0^{n-1} с границей A^{n-2} (граница здесь понимается в смысле теории потоков), инвариантная относительно группы G . Если эта G -инвариантная поверхность единственна, то тогда решение задачи Плато единственно и в классе всех поверхностей $X^{n-1} \in \mathcal{O}(A)$ (уже не обязательно G -инвариантных).*

Таким образом, в том случае, когда граница A допускает нетривиальную группу симметрий, для нахождения абсолютно минимальной поверхности, заклеивающей A , иногда бывает достаточно найти минимальную поверхность в классе G -инвариантных пленок; если получившееся G -инвариантное решение единственно, это влечет за собой единственность и в классе всех поверхностей, т. е. наша G -инвариантная поверхность реализует и абсолютный минимум (уже в классе всех несимметричных пленок). Различные уточнения этой теоремы на языке потоков см. в [98]. Требование, чтобы группа G содержалась в группе $SO(n)$, существенно. Отказ от него невозможен, как показывает простой пример. Возьмем в качестве границы A двумерный тор T^2 , вложенный в трехмерную сферу S^3 следующим образом: $T^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z| = |w|\}$. В качестве группы G возьмем группу $Z_2 \subset O(4)$, образующая которой реализована ортогональным отображением $(z, w) \rightarrow (w, z)$. Тогда, как можно подсчитать, минимальные поверхности, заклеивающие тор T^2 в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$, не инвариантны относительно действия группы G , хотя тор инвариантен (см. [98], [17]).

Итак, в случае G -инвариантной границы A (где $G \subset SO(n)$) для нахождения глобально минимальной поверхности достаточно найти G -инвариантную минимальную поверхность; если эта поверхность единственна, то она автоматически реализует абсолют-

ный минимум во всем классе $\mathcal{O}(A)$. Воспользуемся этим обстоятельством в задаче о конусах.

Предположим, что многообразие $A^{n-2} \subset S^{n-1}$ является главной орбитой действия группы G , тогда $\pi(A) \subset \mathbb{R}^n/G$ является некоторой точкой q (мы считаем, что A связно). Тем самым, задача о нахождении минимальной пленки, натянутой на A^{n-2} и выдерживающей действие группы G , эквивалентна нахождению кратчайшей геодезической, идущей из точки q на границу двумерного многообразия $\mathbb{R}^{n*}/G$, рассматриваемого с метрикой $v^2(a) \dot{ds}^2$. Выделяются две задачи: (А) дать список всех возможных ортогональных действий связных компактных групп Ли G на $\mathbb{R}^n$ с главными орбитами коразмерности два ($k=1$); (Б) в рамках этого списка описать все интересующие нас геодезические γ , идущие из точки q на границу $\partial\mathbb{R}^{n*}/G$. Оказывается, что метрика ds на факторе $\mathbb{R}^{n*}/G$ всегда евклидова и, следовательно, $dl_1^2 = v^2(a)(dx^2 + dy^2)$, где (x, y) — декартовы координаты на $\mathbb{R}^{n*}/G \subset \mathbb{R}^2(x, y)$.

Используем простую механическую аналогию. Поскольку $v(a) = n(x, y)$ — гладкая функция, равная нулю на границе $\partial\mathbb{R}^{n*}/G$, то геодезические метрики dl_1 — это в точности траектории световых лучей, распространяющихся в соответствии с принципом Ферма в двумерной сплошной прозрачной среде, заполняющей конус $\mathbb{R}^{n*}/G$, с показателем преломления $n(x, y) = c/v(x, y)$, где c — скорость света, а $v(x, y)$ — скорость распространения луча в точке (x, y) . Прозрачная среда предполагается изотропной в каждой точке, но неоднородной на конусе. Принцип Ферма утверждает, что световой луч, распространяющийся из точки A в точку B , выбирает путь с наименьшим временем прохождения от A до B при фиксированной энергии. Сделаем одно общее замечание. Если

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}, \quad n(x, y) = n(y), \quad n(y_1) > n(y_2)$$

при $y_1 > y_2$ и $n(0) = 0$, то световые лучи, выпущенные из фиксированной точки $q \in D$ по направлению к границе ∂D , распространяются так, как показано на рис. 55. Приведем полный список компактных групп Ли G , ортогонально действующих на пространстве $\mathbb{R}^n$ с коразмерностью два. Мы укажем также и стационарные подгруппы H , соответствующие главным орбитам этого действия, т. е. орбитам G/H :

- 1) $(SO(r) \times SO(s))/(SO(r-1) \times SO(s-1))$; 2) $(SO(2) \times SO(k))/(Z_2 \times SO(k-2))$; 3) $(SU(2) \times SU(k))/(T^1 \times SU(k-2))$;
- 4) $(Sp(2) \times Sp(k))/(Sp^2(1) \times Sp(k-2))$; 5) $U(5)/(SU(2) \times SU(2) \times T^1)$;
- 6) $SO(3)/Z_2$; 7) $SU(3)/T^2$; 8) $Sp(3)/Sp^3(1)$; 9) $Sp(2)/T^2$; 10) G_2/T^2 ;
- 11) $F_4/Spin(8)$; 12) $(Spin(10) \times U(1))/(SU(4) \times T^1)$.

Способ вложения $H \rightarrow G$ на языке теории представлений описан в [97], [98]. В приведенном списке пространства 1) и 2) разнятся представлением $H \rightarrow G$.

Вернемся к конусам. Положим $n=2m$ и в $\mathbb{R}^{2m}$ рассмотрим конус $C_{2m-1} = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=m+1}^{2m} x_i^2 \right\}$. Тогда $C_{2m-1} \cap S^{2m-1} = S^{m-1} \times S^{m-1}$

и $\partial C_{2m-1} = S^{m-1} \times S^{m-1}$. Легко показать, что $A^{n-2} = S^{m-1} \times S^{m-1}$ вложено в сферу S^{n-1} как локально минимальное подмногообразие, а потому конус C_{2m-1} локально минимален, т. е. аннулирует оператор Эйлера для функционала объема. Кам мы уже знаем,

при $m < 4$ конус C_{2m-1} не минимален, так как в его вершине существует сокращающая деформация (уменьшающая объем). Однако при $m \geq 4$ положение резко меняется.

Пусть $A^{2m-2} = S^{m-1} \times S^{m-1}$ — стандартное минимальное подмногообразие в сфере S^{2m-1} (см. выше), и пусть $m \geq 4$. Тогда любая малая вариация конуса $C_{2m-1} = CA^{2m-2}$ увеличивает его объем, т. е. C_{2m-1} минимален по отношению к любой малой вариации

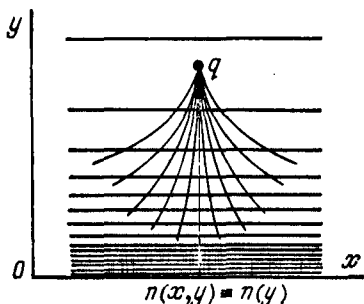


Рис. 55.

и, значит, является локальным минимумом (см. [20]). Тем самым, конусы C_{2m-1} при $m \geq 4$ являются явными кандидатами на то, чтобы опровергать теорему о внутренней регулярности минимальных поверхностей коразмерности один при $n \geq 8$. Остается пока открытым вопрос об их глобальной минимальности при фиксированной границе $S^{m-1} \times S^{m-1}$. Эта задача полностью решается на основе эквивариантной задачи Плато.

Рассмотрим в качестве примера какую-либо одну серию (G, H) , например, положим $r=s$ в серии 1) (см. список выше). Изучим соответствующие минимальные поверхности T_0 с границей $\partial T_0 = S^{m-1} \times S^{m-1} \subset S^{2m-1} \subset \mathbb{R}^{2m}$. Здесь мы считаем, что $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m(x) \oplus \mathbb{R}^m(y)$, где $x = (x^1, \dots, x^m)$, $y = (y^1, \dots, y^m)$, и $A^{2m-2} = \{|x| = |y|\}$, группа $SO(m)$ действует на $\mathbb{R}^m(x)$ и группа $SO(m)$ на $\mathbb{R}^m(y)$. Ясно, что $\mathbb{R}^{2m}/G$ есть первый квадрант на плоскости $\mathbb{R}^2(x \geq 0, y \geq 0)$. Мы будем обозначать координаты на плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{2m}$ также через x и y . Конформная метрика dl_1^2 имеет вид $dl_1^2 = (xy)^{4m-4} \cdot (dx^2 + dy^2)$. Многообразие A^{2m-2} изображается на $K = \mathbb{R}^{2m}/G$ точкой q с координатами $(1, 1)$. Абсолютно минимальная поверхность T_0 с границей A^{2m-2} изображается в K минимальной геодезической, идущей из точки q на границу области K . Элементарно доказывается, что $A^{2m-2} \subset S^{2m-1}$ является локально минимальным подмногообразием (эта орбита — критическая точка функции объема орбит). Отсюда следует, что биссектриса $x=y$ является геодезической, соединяющей точку q с O (это следует и из симметрии метрики dl_1 относительно переменных x

и y), поэтому конус SA^{2m-2} для любого m является локально экстремальным и аннулирует оператор Эйлера. Однако вопрос о нахождении минимальной геодезической и, следовательно, абсолютно минимальной поверхности T_0 требует специального исследования, достаточно нетривиального.

Прямое вычисление показывает (проверить!), что если минимальная геодезическая γ_0 , идущая из точки q на границу ∂K , выходит на границу $\partial K \setminus \{O\}$, то она встречается с соответствующей координатной осью под прямым углом, и, следовательно, соответствующая минимальная поверхность $T_0 = \pi_*^{-1}(\gamma_0)$ является аналитическим подмногообразием без углов и особенностей, имеющим границу A^{2m-2} .

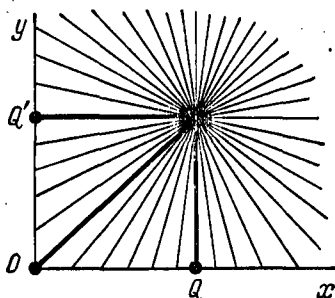


Рис. 56.

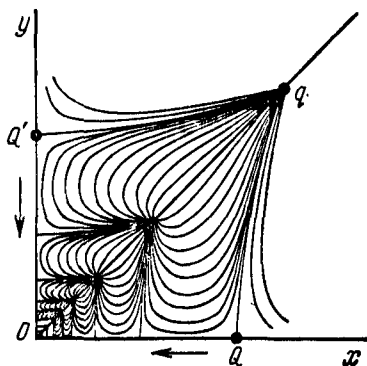


Рис. 57.

Будем считать размерность m непрерывным параметром, $1 \leq m < \infty$. При $m=1$ имеем $dl^2 = dx^2 + dy^2$ и световые лучи, входящие из точки-источника q , изображены на рис. 56. В этом случае Oq — не минимальная геодезическая: таковыми являются линии Qq и $Q'q$. Пусть $m = \varepsilon + 1$, $\varepsilon > 0$; тогда мы покажем, что точки Q и Q' начинают двигаться по направлению к вершине O и распределение световых лучей, выходящих из точки-источника, качественно выглядит так, как изображено на рис. 57. Сначала дадим качественное объяснение этой картины (аналитическое доказательство будет дано ниже). В самом деле, рассмотрим линии уровня $n(x, y) = \text{const}$; тогда, поскольку коэффициент преломления убывает при приближении к границе ∂K , световой пучок деформируется в соответствии с принципом Ферма (рис. 55) и дает картину, изображенную качественно на рис. 57. Минимальные геодезические Qq и $Q'q$ прогибаются по направлению к точке O . Световой луч, отличный от Qq и $Q'q$, не может выйти на границу области, ибо при взаимодействии его с линиями уровня коэффициента преломления $n(x, y)$, очевидно, всегда наступает момент перегиба луча, меняется знак второй

производной, вследствие чего луч меняет направление и начинает двигаться обратно внутрь области к биссектрисе координатного угла, встречаясь с ней в сопряженной с q точке (точные вычисления см. ниже).

При $m > 0$ возникает четырехугольник $OQ'qQ$, внутри которого поведение световых лучей — геодезических — отличается от поведения лучей вне четырехугольника. Легко усматривается, что с ростом t точки Q и Q' перемещаются к вершине конуса

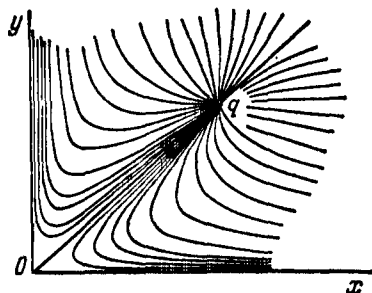


Рис. 58.

O и четырехугольник $OQ'qQ$ начинает сжиматься, схлопываться на биссектрису Oq . Прямые вычисления показывают, что это событие — окончательное сплющивание четырехугольника — происходит при $t = t_0 = 2,5 + \sqrt{2} \approx 3,9$ (рис. 58), и при $t > t_0$ качественная картина распределения световых лучей, исходящих из точки q , остается неизменной.

Следовательно, при $t \geq 4$ существует единственная геодезическая, соединяющая точку q с границей ∂K , это отрезок Oq , следовательно, она минимальна, а поэтому при $t \geq 4$ конусы $C_{2m-1} = C(S^{m-1} \times S^{m-1}) = \pi^{-1}(Oq)$ являются G -инвариантными минимальными поверхностями. В силу единственности геодезической Oq , т. е. единственности G -инвариантного решения, где $G = SO(m) \times SO(m)$, из теоремы 24.2.1 вытекает, что конус C_{2m-1} ($m \geq 4$) является глобально минимальной поверхностью (а в терминологии [17] — минимальным целочисленным потоком) с границей $S^{m-1} \times S^{m-1}$, имеющей одну сингулярную точку O — вершину конуса.

Геодезическая Oq изображает минимальную пленку $\pi^{-1}(Oq)$ с границей $S^{m-1} \times S^{m-1}$; при $m=1$ эта пленка состоит из двух отрезков, с ростом t пленка начинает прогнбаться (провисать по направлению к началу координат) и ее горловина (см. катеноид) начинает постепенно приближаться к точке O , и, наконец, при $t \approx 3,9$ происходит схлопывание горловины в точку (исчезающий цикл аннулируется) и при $t \geq 4$ возникают минимальные конусы C_{2m-1} . Тем самым полностью решается вопрос о глобальной минимальности конусов C_{2m-1} .

Мы подробно рассмотрели случай $r=s$, однако при $r \neq s$ качественная картина поведения пучка геодезических существенно не изменяется, только теперь точка q лежит на прямой, задаваемой уравнением $\operatorname{tg} \alpha = r/s$.

Перейдем к задаче полной классификации минимальных конусов коразмерности один в евклидовом пространстве, являющихся G -инвариантными, где группа G действует в $\mathbb{R}^n$ с коразмерностью

два. Большая часть этой задачи решена в [97], [98]. Однако доказанная в этих работах теорема не дает полной классификации конусов, поскольку оставались неизученными некоторые важные частные случаи, среди которых, как оказалось, имеются глобально минимальные, ранее неизвестные конусы. Полное решение этой задачи и окончательная теорема классификации будут получены на основе описанной выше и предложенной нами схемы, т. е. на основе изучения сопряженных точек и качественного поведения пучка геодезических, выпущенных из точки, являющейся критической для функции объема орбит (см. выше), см. также [32]. На основе этой идеи мы полностью решим вопрос о глобальной минимальности конусов, возникающих из классификационного списка, полученного в [97]. При этом для каждого конуса либо будет доказана его глобальная минимальность, либо будет построена вариация, уменьшающая объем конуса. При этом оказывается, что качественная картина распределения пучка геодезических и связанный с ней механизм перестройки минимальных поверхностей с ростом размерности (см. также [32]) являются универсальными и «обслуживают» все остальные минимальные конусы коразмерности один из списка [97]. Соответствующие вычисления и полный анализ уравнения Якоби проведены студентом А. В. Тыриным.

Предложение 24.2.4 (см. [97], [98]). Пусть $G \subset SO(n)$ — связная компактная подгруппа, главные орбиты действия которой на $\mathbb{R}^n$ имеют коразмерность два. Тогда группа G является одной из групп, перечисленных в таблице 2 (см. с. 220).

Главные орбиты, определяемые главным орбит-типом (см. выше), являются орбитами «общего положения» максимальной размерности. Факторпространство $\mathbb{R}^n/G$ во всех случаях действия группы с соразмерностью два является конусом на двумерной плоскости, т. е. имеет вид $C(\alpha) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) \leq \alpha, \right.$

$x \geq 0 \}$. Пусть $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/G \approx C(\alpha)$ — стандартная проекция на пространство орбит (см. выше). Введем функцию объема орбит (см. [97], [98]) $v: \mathbb{R}^n/G \approx C(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^1$ с помощью следующей формулы: $v(q) = \operatorname{vol}_{n-2} \pi^{-1}(q)$, где $q \in \mathbb{R}^n/G$. Обозначим через $dl^2 = v(x, y)(dx^2 + dy^2)$ конформную метрику на конусе $C(\alpha) = \mathbb{R}^n/G$ (см. выше). Очевидно, что на границе конуса $C(\alpha)$ эта метрика вырождается, поскольку из границы двумерного конуса «вырастают» орбиты меньшей размерности (по сравнению с орбитами общего положения). Если γ — кривая на конусе $C(\alpha)$, то длина γ в метрике dl задает объем орбиты, т. е. $\operatorname{vol}_{n-1} \pi^{-1}(\gamma) = l(\gamma)$. Если кривая γ является геодезической, то ее прообраз $\pi^{-1}(\gamma)$ является локально минимальной поверхностью в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что если многообразие M^{n-2} реализуется как некоторая главная орбита в $\mathbb{R}^n$, то проекция π устанавливает биективное соответ-

ствие между G -инвариантными поверхностями с границей M^{n-2} и геодезическими метрики dl , идущими из точки $q = \pi(M^{n-2})$ на границу конуса $C(\alpha)$ (см. [98]). Единственность такой геодезической (при фиксированной начальной точке в области $C(\alpha)$) влечет за собой единственность решения задачи на абсолютный минимум в классе всех пленок, уже не обязательно инвариантных при действии группы, т. е. данное инвариантное решение является и глобально минимальным.

Таблица 2

№	G	$\dim_{\mathbb{R}} \Phi$	H	α	$\lambda = (\text{vol})^2$
1	$\text{SO}(r) \times \text{SO}(s)$	$r+s$	$\text{SO}(r-1) \times \text{SO}(s-1)$	$\frac{\pi}{2}$	$x^{2r-2} y^{2s-2}$
2	$\text{SO}(2) \times \text{SO}(k)$	$2k$	$\mathbb{Z}_2 \times \text{SO}(k-2)$	$\frac{\pi}{4}$	$(xy)^{2k-4} (x^2 - y^2)^2$
3	$\text{SU}(2) \times \text{SU}(k)$	$4k$	$T^1 \times \text{SU}(k-2)$	$\frac{\pi}{4}$	$(xy)^{4k-6} (x^2 - y^2)^4$
4	$\text{Sp}(2) \times \text{Sp}(k)$	$8k$	$(\text{Sp}(1))^2 \times \text{Sp}(k-2)$	$\frac{\pi}{4}$	$(xy)^{8k-10} (x^2 - y^2)^8$
5	$U(5)$	20	$\text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \times T^1$	$\frac{\pi}{4}$	$(xy)^2 \text{Im} \{(x + iy)^4\}^8$
6	$\text{SO}(3)$	5	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\frac{\pi}{3}$	$\text{Im} \{(x + iy)^3\}^2$
7	$\text{SU}(3)$	8	T^2	$\frac{\pi}{3}$	$\text{Im} \{(x + iy)^3\}^4$
8	$\text{Sp}(3)$	14	$(\text{Sp}(1))^3$	$\frac{\pi}{3}$	$\text{Im} \{(x + iy)^3\}^8$
9	$\text{Sp}(2)$	10	T^2	$\frac{\pi}{4}$	$\text{Im} \{(x + iy)^4\}^4$
10	G_2	14	T^2	$\frac{\pi}{6}$	$\text{Im} \{(x + iy)^6\}^4$
11	F_4	26	$\text{Spin}(8)$	$\frac{\pi}{3}$	$\text{Im} \{(x + iy)^3\}^8$
12	$\text{Spin}(10) \times U(1)$	32	$\text{SU}(4) \times T^1$	$\frac{\pi}{3}$	$\text{Im} \{(x + iy)^3\}^{20}$

На глобальную минимальность достаточно проверять только локально минимальные конусы. Нетрудно видеть, что в нашем случае такими конусами будут в точности конусы над орбитами максимального объема в сфере S^{n-1} . Эти орбиты определяют точки максимума для функции объема на пространстве орбит. При проекции π конус над орбитой переходит в отрезок на факторе $C(\alpha)$, идущий из точки $q = \pi(M^{n-2})$ в вершину O фактора $C(\alpha)$.

Пояснения к таблице 2. (См. [97], [98].)

Через $\dim_{\mathbb{R}} \varphi$ обозначена размерность линейного представления $\varphi: G \rightarrow \mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{GL}(n)$; через α обозначен угол раствора двумерного фактора $C(\alpha) \approx \mathbb{R}^n/G$. Далее, v^2 — квадрат функции объема v ; H — главная стационарная подгруппа данного действия, т. е. подгруппа, отвечающая главному орбит-типу. Таким образом, многообразие M^{n-2} диффеоморфно однородному пространству G/H . Более детальная информация о представлении φ приведена в [97], [98].

Теорема 24.2.2 (теорема классификации минимальных конусов коразмерности два). *Единственными глобально минимальными поверхностями с границей M , где M — орбиты, представленные в таблице 2, являются конусы над следующими многообразиями $G/H = M$:*

$$\text{а) } S^{r-1} \times S^{s-1} = \frac{\mathrm{SO}(r) \times \mathrm{SO}(s)}{\mathrm{SO}(r-1) \times \mathrm{SO}(s-1)} \text{ в } \mathbb{R}^{r+s} \text{ для } r+s \geq 8;$$

$$\text{б) } \frac{\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(k)}{\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(k-2)} \text{ в } \mathbb{R}^{2k} \text{ для } k \geq 8;$$

$$\text{в) } \frac{\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(k)}{T^1 \times \mathrm{SU}(k-2)} \text{ в } \mathbb{R}^{4k} \text{ для } k \geq 4;$$

$$\text{г) } \frac{\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(k)}{(\mathrm{Sp}(1))^2 \times \mathrm{Sp}(k-2)} \text{ в } \mathbb{R}^{8k} \text{ для } k \geq 2;$$

$$\text{д) } \frac{U(5)}{\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times T^1} \text{ в } \mathbb{R}^{20};$$

$$\text{е) } \mathrm{Sp}(3)/(\mathrm{Sp}(1))^3 \text{ в } \mathbb{R}^{14};$$

$$\text{ж) } F_4/\mathrm{Spin}(8) \text{ в } \mathbb{R}^{26};$$

$$\text{з) } \frac{\mathrm{Spin}(10) \times U(1)}{\mathrm{SU}(4) \times T^1} \text{ в } \mathbb{R}^{32}.$$

Для всех остальных многообразий G/H , указанных в таблице 2, соответствующие конусы над ними не являются минимальными, т. е. существует вариация, уменьшающая их объем. Перечисленные выше глобально минимальные конусы являются G -инвариантными относительно соответствующих групп, указанных в таблице 2.

Замечание. По сравнению с [98] новыми здесь являются результаты о глобальной минимальности конусов над многообразиями $S^4 \times S^2$ и $S^5 \times S^1$ в $\mathbb{R}^8$, $S^6 \times S^1$ в $\mathbb{R}^9$, $(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(8))/(\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(6))$ в $\mathbb{R}^{16}$, $(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(9))/(\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(7))$ в $\mathbb{K}^{18}$, $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(4))/(T^1 \times \mathrm{SU}(2))$ в $\mathbb{R}^{16}$, а также результаты о неминимальности конусов для групп из серии 2 в таблице 2 при $4 \leq k \leq 7$, из серии 3 при $k=2, 3$ и для случаев 6, 7, 9, 10 в таблице 2. Тем самым, теорема 24.2.2

дополняет результаты [98] и дает полную классификацию инвариантных конусов коразмерности два.

Перейдем к доказательству теоремы 24.2.2. Пусть G — одна из групп классификационного списка (см. таблицу 2). Рассмотрим локально минимальный конус CM над орбитой максимального объема M^{n-2} в сфере S^{n-1} . Как было показано выше, ему соответствует геодезическая Oq на факторе $C(\alpha)$, а точнее, тот ее отрезок, который выходит на границу фактора. Выясним, когда отрезок Oq является геодезической наименьшей длины, идущей из точки q на границу фактора $C(\alpha)$. Для этого опишем качественную картину поведения пучка всех геодезических, исходящих из точки q . Найдем все точки, сопряженные с точкой q вдоль отрезка геодезической Oq .

Лемма 24.2.1. Пусть в плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2(x, y)$ задана область $\tilde{U}$ с конформной метрикой $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$, $q \in \tilde{U}$, $\gamma(t)$ — геодезическая, $\gamma(0) = q$. Точки, сопряженные с точкой q вдоль геодезической γ , отвечают в точности тем значениям параметра t , при которых функция $\omega(t)$, определенная как решение уравнения

$$\ddot{\omega} - K\omega = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad (1)$$

обращается в нуль (здесь K — скалярная кривизна). В конформных координатах выполнено тождество

$$-K = \frac{1}{\lambda} \cdot R_{2,12}^1, \quad (2)$$

где $R_{2,12}^1$ — компонента тензора Римана.

Доказательство. Функция $\omega(t)$ задает длину вектора якобиева поля вдоль геодезической. В нашей ситуации тензор кривизны полностью определяется одной своей компонентой $R_{2,12}^1$. Если $V = (V^1, V^2)$, $W = (W^1, W^2)$, $U = (U^1, U^2)$ — векторные поля вдоль геодезической γ , то $(T^1, T^2) = T = R(V, U)W$ — векторное поле вдоль γ , задаваемое формулами

$$\begin{aligned} T^1 &= R_{2,12}^1(V^1U^2 - V^2U^1)W^1, \\ T^2 &= R_{2,12}^1(-V^1U^3 + V^2U^1)W^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Если поле $V = (V^1, V^2)$ параллельно вдоль геодезической γ , то поле $U = (V^2, -V^1)$ также параллельно вдоль γ . Так как γ — геодезическая, то $V = V_t = \dot{\gamma}(t)$ параллельно вдоль γ . Положим $V = (V^1, V^2)$, $U = (V^2, -V^1)$. Тогда уравнение Якоби примет вид

$$\frac{D^2 J}{dt^2} - R(V, J)V = 0. \quad (4)$$

Существуют функции $\alpha(t)$ и $\omega(t)$ такие, что $J_t = \alpha(t)V_t + \omega(t)W_t$. Подставляя в (4), получаем

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} V + \frac{d^2 \omega}{dt^2} U - \omega R(V, U)V = 0. \quad (5)$$

Из (3) легко следует, что $T = -\mu U$, где $\mu = \frac{R_{3,12}^1}{\lambda}$. Теперь (5) распадается в систему уравнений

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\omega}{dt^2} + \mu\omega = 0. \quad (6)$$

Напомним, что точки $\gamma(0)$ и $\gamma(t_0)$ сопряжены вдоль траектории тогда и только тогда, когда существует якобиево поле J такое, что $J(0) = 0$, $J(t_0) = 0$ и $J \not\equiv 0$. Лемма полностью доказана.

Для простоты будем считать, что параметр t вдоль геодезической является натуральным, т. е. $|\dot{\gamma}(t)| \equiv 1$. Несложные вычисления показывают, что

$$R_{3,12}^1 = -\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2\lambda^2} \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right). \quad (7)$$

В нашем случае $\lambda = v^2$. Заметим, что во всех случаях функция v^2 является однородным многочленом степени $2n-4$ (см. таблицу 2). Пусть $y = \theta(x)$ — функция, определяющая геодезическую на плоскости в декартовых координатах. Тогда на траектории γ координата x зависит от параметра t , а функции $R_{3,12}^1$ и $\lambda = v^2$ зависят от x . Из (7) видно, что на траектории γ выполнено равенство $R_{3,12}^1 = \frac{c'}{x^2}$, где c' — некоторый числовой коэффициент; поэтому $-K = \frac{R_{3,12}^1}{\lambda} = \beta x^{-2n-4+2}$, где β — некоторый числовой коэффициент.

Изучим зависимость координаты x от параметра t на траектории γ . Имеем $1 = |V|^2 = \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = x^n \dot{x}^2 \lambda(1, \theta)(1 + \theta^2)$. Отсюда, если обозначить размерность $2n-4$ через p , получим $\left(x^{\frac{p+2}{2}}\right)' = \frac{p+2}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\theta^2} \cdot \frac{1}{\lambda(1, \theta)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Итак, $x^{\frac{p+2}{2}} = At + B$, где

$$A = \frac{p+2}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\theta^2} \cdot \frac{1}{\lambda(1, \theta)}\right)^{1/2}, \quad (8)$$

а B определяется из условия $\gamma(0) = q$. Поэтому $-K = \frac{C}{(At+B)^2}$. Таким образом, уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{\omega} + \frac{C}{(At+B)^2} \omega = 0, \quad (9)$$

где A и C определяются из (8). Уравнение (9) сводится к уравнению $\ddot{\omega} = \frac{D}{t^2} \omega$ очевидной подстановкой $u = At + B$. Для D получаем $D = \frac{-C}{A^2}$. Выпишем в явном виде решения этого последнего

уравнения:

$$\omega = \begin{cases} C_1 t^{\frac{1}{2}+s} + C_2 t^{\frac{1}{2}-s} & \text{при } 4D+1 > 0, \\ C_1 \sqrt{t} + C_2 \sqrt{t} \ln t & \text{при } 4D+1 = 0, \\ C_1 \sqrt{t} \cos(s \ln t) + C_2 \sqrt{t} \sin(s \ln t) & \text{при } s = \sqrt{4D+1}. \end{cases}$$

См., например, [100]. Отсюда сразу следует, что либо на траектории γ вообще нет сопряженных точек (с точкой q), либо их бесконечно много и они сгущаются к точке O , имея эту точку своей предельной точкой. Если $\frac{4C}{A^2} > 1$, то сопряженные точки есть, в противном случае их нет.

Изучение коэффициентов A и C позволяет в каждом конкретном случае решить, какая из этих двух возможностей имеет место. Рассмотрим последовательно все случаи таблицы 2.

Серия 1 (см. таблицу 2). Здесь

$$G = \text{SO}(r) \times \text{SO}(s) \subset \text{SO}(r+s), \quad r \geq 2, s \geq 2,$$

$$\mathbb{R}^n/G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$v^2 = x^{2r-2} \cdot y^{2s-2} = x^p y^m, \quad y = \sqrt{\frac{m}{p}} x$$

— геодезическая. Легко вычислить, что $R_{2,12}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{x^2} + \frac{m}{y^2} \right)$. Поэтому

коэффициент C имеет вид $C = \frac{\frac{1}{2} (p + m (V \overline{p/m})^2)}{(V \overline{m/p})^m}$, а для коэффи-

циента A получаем $A = \frac{2}{p+m+2} \left(\frac{1}{1 + (V \overline{m/p})^2} \frac{1}{(V \overline{m/p})^m} \right)^{1/2}$. Поэтому

$-D = \frac{C}{A^2} = \frac{4(p+m)}{(p+m+2)^2}$. Поскольку сопряженные точки существуют

тогда и только тогда, когда $\frac{4C}{A^2} > 1$, то в качестве необходимого

и достаточного условия существования сопряженных точек полу-

чаем $16(p+m) > (p+m)^2 + 4(p+m) + 4$, т. е. $5 - 2\sqrt{2} < r+s <$

$< 5 + 2\sqrt{2}$ ($p=2r-2$, $m=2s-2$). Мы рассматриваем только тот случай, когда $r > 1$, $s > 1$. В соответствии с этим получаем,

что при $r+s < 5 + 2\sqrt{2} \approx 7,82$ сопряженные точки есть. При этом мы считаем, что r и s являются непрерывными параметрами.

При стремлении $r+s \rightarrow 5 + 2\sqrt{2}$ (слева от этого критического значения) сопряженные точки начинают приближаться к точке O .

При $r+s \geq 5 + 2\sqrt{2}$ сопряженные точки исчезают.

Серии 5—12 (см. таблицу 2). Все соответствующие конформные метрики приводятся к виду $ds^2 = y^m (x^2 + y^2)^{\frac{1-p}{p}} \cdot (dx^2 + dy^2)$.

При этом метрика задана на верхней полуплоскости $y > 0$. В случае 5 имеем $p = 4$, $m = 8 + \frac{1}{2}$. В остальных случаях p и m совпадают с соответствующими числами в записи метрики в виде $ds^2 = \frac{i\pi}{m} \{ \operatorname{Im} (x + iy)^p \}^m (dx^2 + dy^2)$. Рассмотрим точку $q = \pi (M^{n-2}) = e^p$ на факторе и сделаем замену $w = z^p$. Запишем в полярных координатах $w = re^{i\varphi}$ интересующую нас метрику. Тогда получим $ds^2 = r^{m + \frac{2}{p} - 2} \sin^m \theta \cdot (r^2 d\theta^2 + dr^2)$. Подсчитаем коэффициент C . Для этого выполним следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \Big|_{Oy} &= 2 \cdot \frac{1-p}{p} y^m (y^2)^{\frac{1-2p}{p}}, \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \Big|_{Oy} &= m(m-1) y^{m-2} (y^2)^{\frac{1-p}{p}} + m y^{m-1} \frac{1-p}{p} 2y (y^2)^{\frac{1-2p}{p}} + \\ &\quad + \frac{1-p}{p} 2(m+1) (y^2)^{\frac{1-2p}{p}} + 2 \cdot \frac{1-p}{p} y^{m+1} \frac{1-2p}{p} 2y (y^2)^{\frac{1-3p}{p}}. \end{aligned}$$

На оси Oy компонента $R_{2,12}^1$ и функция λ зависят от y , а y в свою очередь, есть функция от t . Если $f(y) = Cy^n$, то положим, $K(f) = C$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K \left(\left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \right]_{Oy} \right) &= \\ &= \frac{1-p}{p} + \frac{1}{2} m(m-1) + m \frac{1-p}{p} + (m+1) \frac{1-p}{p} + 2 \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1-2p}{p}, \\ \frac{1}{2} K \left(\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right]_{Oy} \right) &= \frac{1}{2} \left(m + 2 \cdot \frac{1-p}{p} \right)^2. \end{aligned}$$

Теперь имеем

$$K(R_{2,12}^1|_{Oy}) = \frac{1}{2} K \left(\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right]_{Oy} \right) - \frac{1}{2} K \left(\left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \right]_{Oy} \right) = \frac{1}{2} m.$$

Вычислим коэффициент A на оси Oy . Получаем

$$\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 1, \quad \lambda \dot{y}^2 = 1, \quad A = \left(y^{\frac{m}{2} + \frac{1}{p}} \right)' = \frac{m}{2} + \frac{1}{p}.$$

Поэтому $\frac{C}{A^2} = \frac{1}{A^2} K(R_{2,12}^1|_{Oy}) = \frac{2p^2 m}{(mp+2)^2}$. Отсюда сразу видно, что $\frac{4C}{A^2} > 1$ только в случаях 6, 7, 9, 10 (см. таблицу 2). В этих случаях сопряженные точки есть. В случаях 5, 8, 11, 12 сопряженных точек нет.

Теперь рассмотрим серии 2, 3, 4 (таблица 2). Для удобства вычислений эти метрики переписываются в виде $ds^2 = \frac{x^p y^m}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times (dx^2 + dy^2)$ на квадранте $x \geq 0, y \geq 0$. Геодезической является

прямая $y = \sqrt{\frac{m}{p}} x$. Заметим, что в прежней метрике тангенс угла наклона геодезической равнялся $\sqrt{\frac{p+m}{m}} - \sqrt{\frac{p}{m}}$. В серии 2 имеем $p=2$, $m=2k-4$; в серии 3 имеем $p=4$, $m=4k-6$; в серии 4 имеем $p=8$, $m=8k-10$. Как и в случае серии 1, применяя явную формулу для $R_{1,12}^1$, легко вычислить, что $R_{1,12}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{x^2} + \frac{m}{y^2} \right)$. Для коэффициента A получаем $x^{p+m-1} \lambda^2(1, \theta)(1+\theta^2) = |V| = 1$, отсюда $A = \left(x^{\frac{p+m+1}{2}} \right)' = \frac{p+m+1}{2\sqrt{\lambda(1, \theta)(1+\theta^2)}}$. Так как $C = \frac{1}{2\lambda(1, \theta)} \left(p + \frac{m}{\theta^2} \right)$, то $\frac{4C}{A^2} = \frac{8 \left(p + \frac{m}{\theta^2} \right) (1+\theta^2)}{(p+m+1)^2} = \frac{16(p+m)}{(p+m+1)^2}$. Следовательно, сопряженные точки существуют тогда и только тогда, когда $\frac{4C}{A^2} > 1$, т. е. в тех и только в тех случаях, когда

$$\begin{array}{ccc} 7 - 4\sqrt{3} \leq p+m \leq 7 + 4\sqrt{3} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ 2,072 & & 13,928 \end{array}$$

Итак, в серии 2 при $2k < 9 + 4\sqrt{3} \approx 15,928$ сопряженные точки есть. При $2k \geq 9 + 4\sqrt{3}$ сопряженных точек нет. В частности, если рассматривать только целые k (т. е. геометрический случай), то сопряженных точек нет, начиная с $k=8$. В серии 3 при $4k < 9 + 4\sqrt{3} \approx 15,928$ сопряженные точки есть, а при $4k \geq 9 + 4\sqrt{3}$ их нет. Для целых k сопряженных точек нет, начиная с $k=4$. В серии 4 по смыслу задачи имеем $k \geq 2$. Поэтому здесь при всех целых k сопряженных точек нет.

Теперь мы, пользуясь полученной информацией о распределении сопряженных точек, выясним качественное поведение геодезических для всех метрик из таблицы 2.

Серия 1. Считаем p и m (r и s) непрерывными параметрами, $m/p = \text{const}$. При $r+s < 5 + 2\sqrt{2}$ картина распределения геодезических, исходящих из точки q , имеет вид, показанный на рис. 59. Геодезические qQ и qQ' выходят на границу фактора $C(\alpha)$ под углом $\pi/2$. Геодезические, отличные от qQ и qQ' , сразу не могут выйти на границу, поскольку любая геодезическая, отличная от Oq , должна выходить на границу под углом $\pi/2$; поэтому эти геодезические возвращаются обратно к геодезической Oq , пересекая ее в точке, сопряженной с точкой q . С ростом $r+s$ точки Q и Q' стремятся к O , и при $r+s = 5 + 2\sqrt{2} \approx 7,82$ сопряженные точки исчезают (рис. 60). Далее картина остается качественно неизменной, единственной геодезической, выходящей на границу фактора, является отрезок Oq .

Серию 6 см. на рис. 61.

Покажем, что наличие сопряженных точек влечет существование вариаций, уменьшающих объем локально минимального (при вариациях с малым носителем, не затрагивающих начала координат) конуса. На факторе, очевидно, существуют вариации, уменьшающие длину геодезической, входящей в начало координат.

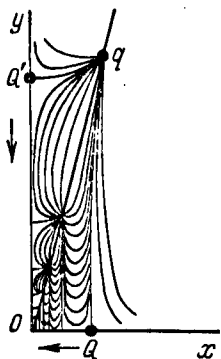


Рис. 59.

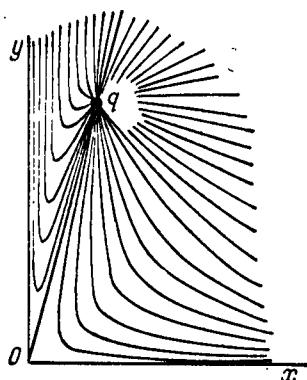


Рис. 60.

Напомним, что длина кривой в $\mathbb{R}^n/G$ равна объему ее прообраза в $\mathbb{R}^n$. Поэтому, взяв вариацию на факторе, получаем вариацию усеченного конуса со стационарной границей, уменьшающую его объем. Продолжив эту вариацию тождественно на область у вершины конуса, получаем искомую вариацию (даже не смещающую вершины конуса!), уменьшающую объем конуса.

24.3. Представление эквивариантных особенностей в качестве особых точек замкнутых минимальных поверхностей, вложенных в симметрические пространства. Оказывается, что минимальные конусы, изучению которых был посвящен пункт 24.2, являются касательными конусами, аппроксимирующими поведение некоторых замкнутых минимальных поверхностей в их особых точках. Решим следующую задачу: каковы те глобально минимальные замкнутые поверхности, в которые можно естественно вклеить описанные выше локальные особенности? Иными словами, как продолжить (проинтегрировать) эти особенности до замкнутых минимальных поверхностей в римановом многообразии? В качестве примера приведем полное описание всех стационарных (локально минимальных)

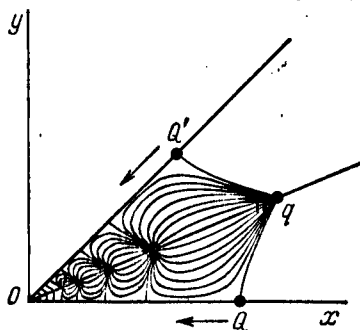


Рис. 61.

замкнутых гладких $SO(n-2)$ -инвариантных подмногообразий в стандартной сфере S^{n-1} .

Пусть $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $G = SO(n-1)$ действует посредством представления $\rho = t_{n-1} \oplus 2\Theta_1$, где t_{n-1} — стандартное действие на $\mathbb{R}^{n-1}$ и Θ_1 — тождественное представление. Ясно, что S^n/G — двумерный диск D^2 со стандартной сферической метрикой $\widehat{ds}^2 = d\Theta^2 + \cos^2 \Theta d\varphi^2$, где Θ — радиус, а φ — угол поворота в полярной системе координат; при $\Theta = 0$ мы получаем границу диска D^2 . Прямое вычисление дает $dl_1^2 = \sin^{2n} \Theta (d\Theta^2 + \cos^2 \Theta d\varphi^2)$. Для полного описания всех G -инвариантных минимальных гиперповерхностей в S^n нужно найти все замкнутые геодезические на диске D^2 (Θ, φ) с метрикой dl_1^2 . Это исследование выполнено в [97], [99]. Положим $a_0 = \cos^{-1}(1/\sqrt{n+1})$. Замкнутые геодезические на D^2 могут быть двух типов: 1) диаметры, т. е. $\varphi = \text{const}$; 2) траектории вида

$$\varphi = \pm \int_a^{\Theta(\varphi)} \frac{d\Theta}{\cos \Theta \sqrt{\frac{\sin^{2n}(\Theta) \cdot \cos^2(\Theta)}{\sin^{2n}(\Theta_0) \cdot \cos^2(\Theta_0)} - 1}}, \quad \Theta_0 = a_0,$$

где $a \geq a_0$. При $a \rightarrow a_0$ геодезическая стремится к пунктирной окружности на рис. 62. Следовательно, соответствующие G -инвариантные минимальные поверхности имеют вид: 1) гиперсферы

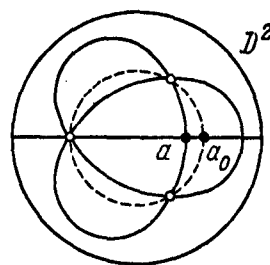


Рис. 62.

экваторы $S^{n-1} \subset S^n$; 2) подмногообразия $S^1 \times S^{n-2} \subset S^n$ с самопересечениями (рис. 62).

В этой задаче удается полностью описать поведение геодезических на двумерном диске, на границе которого метрика dl_1^2 аннулируется, т. е. фактически мы рассматривали двумерную сферу S^2 , на которой фиксирована метрика с одной особенностью. В общем случае симметрических пространств (см. ниже) сфера, оказывается, заменяется на двумерный тор,

на котором также задана риманова метрика с особенностью.

Пусть $M^n = G/H$ — компактное симметрическое пространство. Рассмотрим соответствующее разложение Картана для алгебры Ли группы движений (см. описание в пункте 17.4). Подгруппа H действует на $M \cong V$ посредством вращений $v = hvh^{-1}$, расслаивая многообразие V (как и ранее, через M мы обозначаем картановскую модель симметрического пространства, вложенную в группу изометрий) на орбиты.

Пусть B — касательная плоскость к картановской модели в алгебре Ли и $K \subset B$ — камера Вейля симметрического пространства (см. пункт 17.4). Рассмотрим присоединенное действие H на плоскости B : $b \rightarrow h b h^{-1}$. Из каждой точки $k \in K$ вырастает

орбита $O(k)$, ортогональная плоскости $P \subset V$, где P — картановская подалгебра в V (максимальная коммутативная плоскость). Пусть $C = \bigcup_{b \in K} O(b)$, и пусть $\tilde{C} = \exp(C) \subset M^n$; тогда (см. пункт

17.4) множество $\tilde{C}$ гомеоморфно C в случае односвязного M и дополнение $M \setminus \tilde{C}$ есть в точности множество всех первых сопряженных с точкой e точек в M (где $e = \exp(0)$ — центр шара). Итак, любое компактное односвязное симметрическое пространство M можно получить из n -мерного шара C , профакторизовав его граничную сферу ∂C

по некоторому подходящему действию компактной группы. Поскольку все многообразие M целиком заматается максимальным тором $\tilde{P} = \exp(P)$ при вращении этого тора вокруг точки e присоединенным действием H , то почти все интересующие нас события

мы будем изучать на этом торе, размерность которого называется рангом симметрического пространства. Выясним структуру минимальных эквивариантных поверхностей в симметрическом пространстве.

Выше мы привели полный список всех эквивариантных минимальных конусов коразмерности один в евклидовом пространстве. Оказывается, эти конусы являются «линеаризациями» глобальных минимальных пленок, расположенных в симметрических пространствах ранга два. Более точно: евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ мы естественно отождествим с касательным пространством V к симметрическому пространству $M = G/H$; минимальный конус CA^{n-2} оказывается тогда касательным минимальным конусом, ассоциированным с особой точкой минимальной гиперповерхности, содержащейся в M^n , причем многообразие A^{n-2} совпадает с однородным пространством H/N — главной орбитой присоединенного действия стационарной группы H на многообразии M (рис. 63). Эти замкнутые минимальные поверхности допускают очень простое описание в терминах некоторой гладкой функции, заданной на многообразии M^n , а именно: минимальные поверхности являются ее поверхностями уровня. Более точно: пусть $f(t)$ — гладкая функция, заданная на максимальном торе $\tilde{P} \subset M$ (ниже мы предельно эту функцию), размерность которого в нашем случае равна двум. По этой функции $f(t)$ можно построить новую функцию $\tilde{f}(x)$ на всем многообразии M , положив $\tilde{f}(x) = f(t)$, где $t = hxh^{-1}$ для некоторого $h \in H$. При этом выбранная нами вначале функция $f(t)$ на торе должна быть инвариантной относительно группы Вейля,

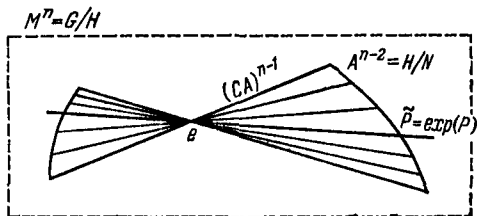


Рис. 63.

которая действует на этом торе. Другими словами, функция $\tilde{f}(x)$ постоянна на орбитах присоединенного действия группы H на M .

Рассмотрим поверхности уровня $\tilde{f}(x) = \text{const}$ тем самым определено слоение многообразия M на замкнутые гиперповерхности, являющиеся многообразиями без особенностей, за исключением единственной гиперповерхности, являющейся минимальной. На ней лежат особые точки описанных выше типов (конусы). Поскольку функция $\tilde{f}(x)$ была H -инвариантной, то все ее поверхности уровня также H -инвариантны. Какие функции $\tilde{f}(t)$ достаточно задать на торе $\tilde{P}$, чтобы получить полное описание набора всех минимальных конусов коразмерности один?

Оказывается, достаточно рассмотреть функции вида $\text{Re}(z^p)$, $p = 2, 3, 4, \dots$, на торе $\tilde{P}$. В частности, если $p = 2$, то мы получим минимальные конусы над произведением сфер, подробно изученные в пункте 24.2.

Итак, все эквивариантные особенности минимальных поверхностей коразмерности один описываются целыми степенями комплексной переменной z на двумерном торе со стандартной комплексной структурой.

Рассмотрим подробно только случай конусов над прямым произведением сфер, т. е. при $p = 2$. Рассуждения при $p > 2$ проводятся аналогично. Возьмем основную серию $G/H = (\text{SO}(r+1) \times \text{SO}(s+1))/(\text{SO}(r) \times \text{SO}(s))$, положим $M = G/H$. Тогда M — компактное симметрическое пространство ранга два: $M = S^r \times S^s$, $N = \text{SO}(r-1) \times \text{SO}(s-1)$, и, следовательно, главная орбита действия H на M такова: $H/N = S^{r-1} \times S^{s-1}$. Если рассмотреть касательное пространство $B = T_e(M)$, то обнаружим, что конус над $A^{n-2} = C(S^{r-1} \times S^{s-1})$ совпадает с рассмотренным в пункте 24.2.

Поскольку мы ищем N -инвариантные минимальные гиперповерхности в M , то достаточно изучить геодезические на двумерном торе $T^2 \subset M$ в метрике $dl_1^2 = v^2(a) \tilde{ds}^2$. Известно (см. пункт 17.4), что $\tilde{ds}^2$ — обычная евклидова метрика на торе, поэтому осталась только вычислить функцию объема. Прямое вычисление показывает, что $v(x, y) = \sin^{r-1}(x) \sin^{s-1}(y)$, где x, y — декартовы координаты на торе. В данном случае легко усматривается, что M/N есть плоский квадрат со сторонами $(0, \pi)$, являющийся открытой клеткой K — камерой Вейля. Здесь имеются только два различных корня a_1 и a_2 ; они ортогональны и имеют одинаковую длину, хотя и различные кратности: $r-1$ и $s-1$. Мы должны изучить поведение геодезических на квадрате $(0, \pi)$ с метрикой $dl_1^2 = \sin^{2r-2}(x) \cdot \sin^{2s-2}(y)$. Будем считать r и s непрерывными параметрами и положим $r+s = n = \text{const}$. Если $r = s$, то диагональ $x = y$, очевидно, является геодезической; на рис. 64 изображены линии уровня функции $\tilde{f}$ на торе. Тор представлен в виде факторизуемой плоскости. Одна из линий уровня является объединением

двух диагоналей-геодезических (в метрике dl_1). Так как линии уровня выходят на границу квадрата ортогонально, то построенная нами функция инвариантна относительно группы Вейля. Так как оси Ox , Oy соответствуют корням a_1 и a_2 , то тор получается из квадрата $(-\pi, \pi)$ отождествлением противоположных сторон с сохранением ориентации. Пусть $r > s$, тогда линии уровня функции f начинают искажаться в соответствии с рис. 65. Прямое

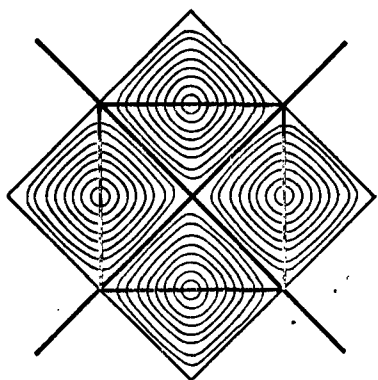


Рис. 64.

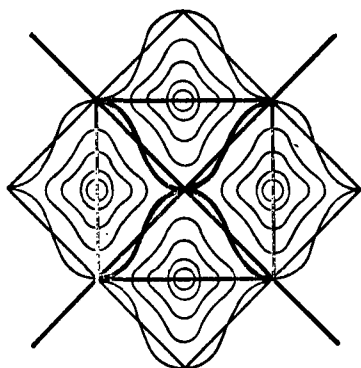


Рис. 65.

вычисление показывает, что геодезическая $x=y$ деформируется в геодезическую, задаваемую уравнением $y \operatorname{tg} y = \frac{s}{r} x \operatorname{tg} x$. На рис. 65 жирными линиями отмечены геодезические γ и стороны основного квадрата; геодезические входят в вершину квадрата под углом α , $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{s/r}$. Если же $r < s$, то картина получается симметричным отражением относительно диагонали. Пусть s непрерывно изменяется от 0 до ∞ . На рис. 66 показана соответствующая эволюция геодезической, изображающей замкнутую минимальную гиперповерхность в $S^r \times S^s$. Полученная нами функция $f(x)$ на торе имеет один минимум, один максимум и два седла; все критические точки невырождены, и седла функции описываются векторным полем $\operatorname{grad} \operatorname{Re}(z^2)$ (нуль второго порядка). Прообраз геодезической γ при проекции $\pi: M \rightarrow M/N$ есть в точности N -инвариантная минимальная поверхность коразмерности один в $S^r \times S^s$.

Продолжим функцию $f(x)$ с тора на все многообразие $S^r \times S^s$ до N -инвариантной функции $\tilde{f}(x)$, значения которой заполняют отрезок $[0, 1]$. Тогда гиперповерхности уровня этой функции расслаивают M и при $\tilde{f}(x) = 1/2$ мы получаем N -инвариантную минимальную замкнутую поверхность — прообраз траектории γ , — содержащую ровно две особые точки. Подмногообразие $\{\tilde{f} = 0\}$ является сферой S^s , подмногообразие $\{\tilde{f} = 1\}$ — сферой S^r , оба эти подмногообразия минимальны и являются экстремальными

изолированными орбитами действия группы N . Если $\tilde{f}(x) = c$, $c \neq (0, 1/2, 1)$, то гиперповерхность $\tilde{f}(x) = c$ не имеет особых точек. N -инвариантная поверхность $\{\tilde{f}(x) = 1/2\}$ — не глобально минимальна, однако минимальна относительно любых вариаций, носитель которых охватывает не более «половины» всей поверхности (рис. 66).

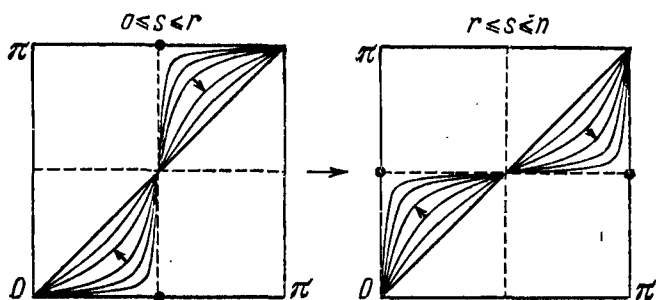


Рис. 66.

Аналогичным образом доказывается, что все остальные особенности, описанные выше, могут быть включены в замкнутые минимальные поверхности в соответствующем симметрическом пространстве. Все эти гиперповерхности — поверхности уровня гладких функций, инвариантных относительно действия группы N и группы Вейля. Линии уровня этих функций на двумерном торе могут быть представлены как интегральные траектории векторных полей вида $\text{grad Re}(z^p)$; тогда минимальная гиперповерхность, содержащая конические особенности, будет задаваться сепаратрисной диаграммой вырожденного седла (нуль, порядка p) потока $\text{grad Re}(z^p)$.

24.4. О существовании нелинейных функций, графики которых в евклидовом пространстве являются минимальными поверхностями. Пусть $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ — гладкая вещественнозначная функция, определенная на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})$; тогда ее график в пространстве $\mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n)$ есть подмногообразие коразмерности один. Предположим, что этот график — локально минимальная поверхность, т. е. функция f удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{f_{x^i}}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} (f_{x^j})^2}} \right) = 0.$$

Вопрос: если функция f определена на всей гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$, то обязана ли она быть линейной? Эта задача называется проблемой С. Н. Бернштейна, который дал положительный ответ на этот вопрос при $n=3$. В этом частном случае он доказал, что

если $z = f(x, y)$ есть график гладкой функции, заданной на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, и если гауссова кривизна K этого графика неположительна и существует точка, в которой кривизна K строго отрицательна, то тогда $\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |f| = +\infty$. Отсюда легко следует

решение описанной выше задачи. Действительно, если $z = f(x, y)$ — локально минимальная поверхность, то можно рассмотреть функцию

$u = \operatorname{arctg}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$; функция f является решением уравнения $(1 + f_x^2) \times \times f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2) f_{xx} = 0$ (напомним, что такой вид приобретает уравнение минимальной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве). Простое вычисление показывает, что график функции $u(x, y)$ имеет неположительную гауссову кривизну K . Если функция u не является постоянной, то существует точка, в которой $K < 0$, но тогда $\sup |u| = +\infty$, что невозможно ввиду ограниченности функции u . Следовательно, функция u постоянна,

но тогда $\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{const}$. Точно так же доказывается, что $\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{const}$,

откуда и следует, что $f = ax + by + c$, т. е. функция f линейна. Конечно, это рассуждение не действует в размерностях, больших чем три, поэтому для решения вопроса о существовании нелинейных локально минимальных графиков потребовалось развитие нового, достаточно серьезного аппарата; при этом оказалось, что ответ зависит от размерности n : при малых n любой локально минимальный график линейен, а при больших n существуют существенно нелинейные локально (и даже глобально) минимальные графики. Более точно, имеет место следующая теорема.

Теорема 24.4.1 (см. [46]). Пусть $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ — гладкая функция, определенная всюду на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть ее график является локально минимальной поверхностью в $\mathbb{R}^n$, т. е. его средняя кривизна равна нулю. Тогда при $n \leq 8$ функция f линейна. Если же $n \geq 9$, то существуют нелинейные функции f , графики которых являются локально (и глобально) минимальными поверхностями.

Замечательным обстоятельством является то, что решение этой задачи тесно связано с задачей о существовании минимальных конусов (см. предыдущие пункты). Мы поясним доказательство этой теоремы при $n \leq 8$.

Можно считать, что график X^{n-1} функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ проходит через начало координат в $\mathbb{R}^n$. Оказывается, часть графика, заключенная внутри любой компактной границы, расположенной на этом графике, реализует абсолютный минимум объема vol_{n-1} ; другими словами, график X^{n-1} является глобально минимальной поверхностью в $\mathbb{R}^n$ относительно возмущений с компактным носителем в данном классе гомотопий. Возьмем затем пересечение графика X^{n-1} с шаром радиуса r , имеющим свой центр в точке O — в начале координат. Выполним затем преобра-

зование подобия с коэффициентом $1/r$, что даст нам поверхность X_r^{n-1} , заключенную в шаре радиуса единица и имеющую границу на сфере радиуса единица, причем эта граница является локально минимальным подмногообразием в сфере (рис. 67). При изменении r поверхность X_r в шаре $D^n(O, 1)$ будет, вообще говоря, изменяться. Рассмотрим «предел» этих минимальных поверхностей при $r \rightarrow \infty$. Оказывается, этот предел существует и является конусом CA над

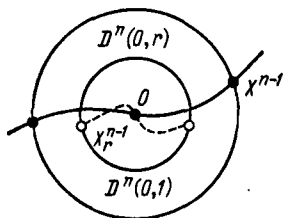


Рис. 67.

некоторым $(n-2)$ -мерным множеством A в сфере радиуса 1. Поскольку исходный график был глобально минимален, то, оказывается, этот конус также будет глобально минимален по отношению к своей границе. Но в силу теоремы 24.1.1 (и в силу ограничения сверху на размерность, а именно $n \leq 7$) этот конус должен быть диском. Отсюда уже довольно легко следует, что график являлся гиперплоскостью, что и

завершает доказательство при $n \leq 7$. В размерности 8 требуется некоторое дополнительное рассуждение, которое мы опускаем и отсылаем читателя, например, к [20].

Существование нелинейных минимальных графиков в размерностях, больших чем 8, доказано в [46]. Это доказательство носит более аналитический характер, и мы не будем здесь на нем останавливаться.

24.5. Гармонические отображения сфер в нетривиальных гомотопических классах. В настоящем пункте мы рассмотрим гармонические отображения римановых многообразий и в некоторых случаях решим задачу нахождения гармонического отображения в заданном гомотопическом классе отображений. Поскольку гармонические отображения являются экстремалами многомерного функционала Дирихле, то предварительно мы опишем основные свойства этого функционала и его экстремалей.

Через M и N мы будем обозначать гладкие римановы многообразия, причем многообразие M будет предполагаться компактным и ориентируемым. Нас будут интересовать свойства отображений $f: M \rightarrow N$ с точки зрения функционала Дирихле. Через TM и TN мы обозначим касательные расслоения над многообразиями M и N соответственно, через $C^\infty(\xi)$ — пространство гладких сечений некоторого векторного гладкого расслоения ξ над многообразием M . Далее, через $C^\infty(M, N)$ обозначим пространство гладких отображений $f: M \rightarrow N$. Тогда для каждого отображения $f \in C^\infty(M, N)$ определено риманово векторное расслоение над многообразием M , индуцированное из расслоения TN при помощи отображения f . Это означает, что слоем этого индуцированного расслоения над точкой $x \in M$ является линейное простран-

ство $T_{f(x)}N$, при этом риманова структура переносится из касательного расслоения TN .

Через $\text{Hom}(TM, f^*TN)$ мы обозначим векторное расслоение над M линейных гомоморфизмов расслоений TM и f^*TN . Другими словами, слоем этого расслоения над точкой $x \in M$ является пространство непрерывных линейных отображений пространства $T_x M$ в пространство $T_{f(x)}N$. Опишем риманову структуру в расслоении $\text{Hom}(TM, f^*TN)$. Если $a, b \in C^\infty(\text{Hom}(TM, f^*TN))$, т. е. a, b — гладкие сечения, то в локальных системах координат на многообразиях M и N эти сечения могут быть записаны в матричном виде a_i^j, b_i^j . Если теперь $g_{ij}, \hat{g}_{ij}$ — метрические тензоры на многообразиях M и N (записанные в этих же системах координат) соответственно, то риманову структуру мы введем по формуле

$$(a, b) = g^{ij} \hat{g}_{\alpha\beta} a_i^\alpha b_j^\beta. \quad (1)$$

Таким образом, здесь участвуют оба метрических тензора рассматриваемых римановых многообразий. Поскольку для каждого гладкого отображения $f \in C^\infty(M, N)$ определен его дифференциал df , то очевидно, что $df \in C^\infty(\text{Hom}(TM, f^*TN))$. Это позволяет определить неотрицательную гладкую функцию $\|df\|^2 = (df, df)$, используя введенную выше риманову структуру (1). Поскольку многообразие M компактно и ориентируемо, то мы можем проинтегрировать эту функцию по всему многообразию M . Полученное при этом число мы и принимаем, по определению, за значение функционала Дирихле на отображении f :

$$D[f] = \int_M \|df\|^2 * 1, \quad D: C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}_+^1, \quad \mathbb{R}_+^1 = \{x \geq 0\}. \quad (2)$$

Здесь через $*1$ обозначена стандартная форма риманова объема на многообразии M . Мы записали эту форму в виде $*1$, используя оператор $*$, переводящий внешние формы степени k в формы степени $m - k$, где $m = \dim M$. Тогда m -мерная форма риманова объема является образом скалярной функции 1 после применения к ней оператора $*$. Такая запись формы объема будет удобна для дальнейших вычислений. Хотя данное нами здесь построение функционала Дирихле (2) отличается от определения, данного в § 23 (мы здесь не возводим подынтегральное выражение в степень), с точки зрения экстремалей эти два подхода эквивалентны. Возведение подынтегрального выражения в степень (см. § 23) удобно для сравнения интеграла Дирихле с функционалом объема, что в настоящем пункте для нас несущественно.

Определение 24.5.1. Гармоническими отображениями называются экстремали функционала Дирихле $D[f]$.

Отметим, что эти экстремали совпадают с экстремалими функционала Дирихле, определенного в § 23. Далее, из определения

24.5.1 следует, что если $N = \mathbb{R}^1$ (вещественная прямая со стандартной евклидовой метрикой) и $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^1) = C^\infty(M)$, то $\|d\varphi\| = |\text{grad } \varphi|$ и мы получаем обычный функционал Дирихле, определенный на скалярных функциях:

$$D: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}_+^1, \quad D[\varphi] = \int_M |\text{grad } \varphi|^2 * 1. \quad (3)$$

Поскольку экстремалами функционала (3) являются гармонические функции на многообразии, т. е. элементы ядра оператора Лапласа Δ на $C^\infty(M)$, то определение 24.5.1 дает естественное расширение понятия гармонических функций на случай гладких отображений в некоторое риманово многообразие.

Ниже мы в явном виде найдем для функционала Дирихле (2) уравнения Эйлера — Лагранжа, укажем некоторые важные частные решения этих уравнений и рассмотрим затем проблему отыскания гармонических отображений в классах отображений евклидовых сфер. Для более подробного знакомства с теорией гармонических отображений рекомендуем, например, обзор [101].

Предположим теперь, что в касательных расслоениях TM и TN введены симметричные и согласованные с римановой метрикой связности. Определим риманову связность $\hat{\nabla}$ в расслоении f^*TN , индуцированном при отображении $f: M \rightarrow N$. Если $v \in \in C^\infty(f^*TN)$ и $E_1, \dots, E_n$ — локальные базисные гладкие векторные поля в TN , то локально можно записать следующее разложение: $v = v^i E_i$, где $v^i \in C^\infty(U)$, т. е. v^i — функции, определенные локально на $U \subset M$. Пусть $a \in T_x M$, тогда положим

$$\hat{\nabla}_a v = (av^i) E_i + v^i \hat{\nabla}_{df(a)} E_i, \quad (4)$$

где через av^i обозначено действие векторного поля a (как дифференциального оператора) на функцию v^i ; здесь $\hat{\nabla}$ — связность в TN . То, что равенство (4) действительно определяет риманову связность в расслоении f^*TN , следует из приведенных нами ниже свойств этой операции. Доказательство этих свойств во многом аналогично доказательству свойств аналогичных связностей, введенных нами в § 2. Читатель может выполнить проверку самостоятельно или обратиться к [102]. Итак, пусть $a, b \in C^\infty(TM)$, $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$, $v, w \in C^\infty(f^*TN)$; тогда

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{\varphi a + \psi b} v &= \varphi \hat{\nabla}_a v + \psi \hat{\nabla}_b v, \quad \hat{\nabla}_a (v + w) = \hat{\nabla}_a v + \hat{\nabla}_a w, \\ \hat{\nabla}_a (\varphi v) &= (a\varphi) v + \varphi \hat{\nabla}_a v, \quad a(v, w) = (\hat{\nabla}_a v, w) + (v, \hat{\nabla}_a w). \end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что введенная нами связность риманова (т. е. согласована с метрикой).

Перейдем теперь к расслоению $\text{Hom}(TM, f^*TN)$ и определим в нем риманову связность $\hat{\nabla}$ следующим образом. Пусть $a, b \in$

$\in C^\infty(TM)$, $h \in C^\infty(\text{Hom}(TM, f^*TN))$; тогда положим

$$(\tilde{\nabla}_a h)b = \tilde{\nabla}_a^* h(b) - h(\nabla_a b), \quad (5)$$

где ∇ — связность в расслоении TM .

Перечислим основные свойства этой связности. Доказательства этих свойств, как и в предыдущем случае, аналогичны схеме рассуждений, проведенных в § 2, или могут быть извлечены из [102]. Форма $\tilde{\nabla}h$ является билинейным (относительно сложения и умножения на скалярные функции) отображением из прямого произведения $C^\infty(TM) \times C^\infty(TM)$ в пространство $C^\infty(f^*TN)$. Кроме того, если $h' \in C^\infty(\text{Hom}(TM, f^*TN))$, $\varphi \in C^\infty(M)$, то имеем равенства

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(h+h') &= \tilde{\nabla}_a h + \tilde{\nabla}_a h', & \tilde{\nabla}_a(\varphi h) &= (a \cdot \varphi) \cdot h + \varphi \tilde{\nabla}_a h, \\ a(h, h') &= (\tilde{\nabla}_a h, h') + (h, \tilde{\nabla}_a h'). \end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что введенная нами связность риманова.

Определение 24.5.2. *Второй фундаментальной формой $A(f)$ отображения $f: M \rightarrow N$ называется градиент дифференциала этого отображения, т. е. выражение вида $\tilde{\nabla} df$. Этот градиент является гладкой билинейной формой на прямом произведении $TM \times TM$ со значениями в индуцированном расслоении f^*TN .*

Определение 24.5.3. *Средней кривизной $H(f)$ отображения $f: M \rightarrow N$ называется след второй квадратичной формы этого отображения, т. е. выражение вида*

$$H(f) = \text{tr } A(f) \in C^\infty(f^*TN).$$

Как будет показано ниже, эти два определения естественно обобщают на случай произвольного гладкого отображения определения второй квадратичной формы и средней кривизны для случая погружения многообразия M в многообразие N . Если $f: M \rightarrow N$ — погружение, то определения 24.5.2 и 24.5.3 превращаются в определения, сформулированные в § 2. Докажем теперь основные и необходимые для дальнейшего свойства второй фундаментальной формы.

Лемма 24.5.1. *Вторая форма $A(f)$ является симметричной формой на $TM \times TM$.*

Доказательство. Поскольку форма $A(f)(a, b)$ на прямом произведении $TM \times TM$, очевидно, линейна относительно умножения на скалярные функции, то равенство $A(f)(a, b) = A(f)(b, a)$ достаточно доказать для локальных базисных векторных полей $e_1, \dots, e_n$. Воспользовавшись приведенными выше определениями и свойствами римановой связности $\tilde{\nabla}^*$, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} A(f)(e_i, e_j) &= (\tilde{\nabla}_i df) e_j = \tilde{\nabla}_i^* df(e_j) - df(\tilde{\nabla}_i e_j) = \\ &= \tilde{\nabla}_i^*(f_j^\alpha E_\alpha) - df(\nabla_i e_j) = f_{ij}^\alpha E_\alpha + f_i^\beta f_j^\gamma \tilde{\nabla}_\beta E_\gamma - df(\nabla_i e_j). \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы следует из симметричности связностей ∇ и $\hat{\nabla}$ в расслоениях TM и TN соответственно. Лемма доказана.

Лемма 24.5.2. Если f — изометрическое погружение многообразия M в многообразие N , то форма $A(f)$ и средняя кривизна $H(f)$ совпадают со второй фундаментальной формой A и средней кривизной H подмногообразия $f(M)$ в многообразии N (см. определения в § 2). А именно, если $a, b \in T_x M$, то $A(f)_x(a, b) = A_{f(x)}(df(a), df(b))$.

Доказательство. Пусть $Q = f(P) \in f(M)$. Введем в окрестности $U(P)$ точки P в многообразии M нормальную (геодезическую) относительно точки P систему координат $x^1, \dots, x^n$. Тогда, если $e_1, \dots, e_n$ — базисные векторные поля в этой окрестности, то $x^i(P) = 0$, $(e_i, e_j)_P = \delta_{ij}$, $(\nabla_i e_j)_P = 0$. Введем затем локальные координаты $y^1, \dots, y^n$ в окрестности $f(U) \subset f(M)$ по следующему правилу: $y^i(f(P')) = x^i(P')$, $P' \in U$. Пусть $E_1, \dots, E_n$ — базисные векторные поля в этой окрестности. Поскольку отображение f — изометрия, то мы получаем соотношения $(E_i, E_j)_Q = \delta_{ij}$, $1, j \leq n$. Дополним координаты $y^1, \dots, y^n$ до набора координат $y^1, \dots, y^{n+k}$ в некоторой окрестности $V \subset N$ такой, что $V \cap f(M) = f(U)$, причем так, чтобы $y^i(Q) = 0$, $(E_i, E_j)_Q = \delta_{ij}$, $f(U) = \{y^{n+j} = 0, j = 1, \dots, k\}$. В этих координатах отображение f задается следующими формулами:

$$y^i(x) = f^i(x) = \begin{cases} x^i, & i = 1, \dots, n, \\ 0, & i = n+1, \dots, n+k. \end{cases}$$

Кроме того, отображение f — изометрия; следовательно, получаем, что $(\nabla_i E_j)_Q^T = 0$; $1 \leq j \leq n$, где через $(\cdot)^T$ обозначена ортогональная проекция на $Tf(M)$ в TN . Найдем явный вид второй формы $A(f)$ в точке $P \in M$ в введенных нами выше координатах. При этом мы воспользуемся определениями 24.5.2, 24.5.3 и указанными выше свойствами выбранных нами систем координат. Получаем

$$A(f)(e_i, e_j) = (\hat{\nabla}_i df) e_j = \hat{\nabla}_i df(e_j) = \hat{\nabla}_i E_j = \hat{\nabla}_i E_j = \hat{\Gamma}_{ij}^k E_k.$$

Поскольку $(\nabla_i E_j)_Q^T = 0$ при $i, j \leq n$, то мы получаем, что $A(f)(e_i, e_j) = (\hat{\nabla}_i E_j)^N$, где через $(\cdot)^N$ обозначена проекция на нормальное расслоение к $f(M)$ в TN . Стоящая справа в последнем равенстве величина равна, по определению, значению второй фундаментальной формы подмногообразия $f(M)$ в N на векторах $E_i, E_j \in T_Q f(M)$. Совпадение средних кривизн $H(f)$ и H теперь прямо следует из изометричности погружения f . Лемма доказана.

Перейдем к выводу уравнений Эйлера — Лагранжа для функционала Дирихле и к изучению вполне геодезических отображений и локально минимальных погружений.

Лемма 24.5.3. Уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала Дирихле (2) является следующее уравнение: $H(f) = 0$, где $H(f)$ — средняя кривизна отображения f . Другими словами, отображение f гармонично тогда и только тогда, когда его средняя кривизна равна нулю.

Доказательство. Рассмотрим локальную вариацию отображения $f \in C^\infty(M, N)$, т. е. такое гладкое отображение $F: M \times [0, \varepsilon] \rightarrow N$, что $F(x, 0) = f(x)$ и $F(x, t) = f(x)$ вне некоторой компактной области $\Omega \subset M$, удовлетворяющей условию $\Omega \cap \partial M = \emptyset$. Отображение f является гармоничным (см. определение выше), если $\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} D[f_t] = 0$, $f_t = F|_{M \times \{t\}}$ для любой локальной вариации F . Рассмотрим риманово многообразие $M \times [0, \varepsilon]$, где отрезок $[0, \varepsilon]$ снабжен стандартной евклидовой метрикой. Введем в окрестности U точки $P \in M$ нормальную относительно точки P систему координат (см. доказательство леммы 24.5.2) и дополним ее координатой t до нормальной системы координат в $U \times [0, \varepsilon]$. Пусть $e_1, \dots, e_n, \frac{\partial}{\partial t}$ — базисные векторы. Тогда, исходя из определения 24.5.1 и того факта, что в точке P матрица метрического тензора является единичной, мы получаем в этой точке следующие соотношения:

$$\|df_t\|^2 = \sum_{i=1}^n (df_t(e_i), df_t(e_i)) = \sum_{i=1}^n (dF(e_i), dF(e_i)),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|df_t\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (dF(e_i), dF(e_i)) = \sum_{i=1}^n (\nabla_t^* dF(e_i), dF(e_i)),$$

где ∇^* — связность в расслоении F^*TN . В последнем равенстве мы воспользовались тем, что эта связность риманова. Из леммы 24.5.1 и равенства $\left(\nabla_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)_P = (\nabla_t e_t)_P = 0$ мы получаем, что $\nabla_t^* dF(e_i) = \nabla_t^* dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$. Следовательно, выполнено равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|df_t\|^2 \Big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^n \left(\nabla_t^* dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(e_i) \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(e_i) \right) \Big|_{t=0} - \sum_{i=1}^n \left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_t^* dF(e_i) \right) \Big|_{t=0} = \\ &= -\delta\omega - (v, H(f)). \end{aligned}$$

Здесь $\omega \in \Lambda^1(T^*M)$ — внешняя 1-форма, действующая по следующей формуле: $\omega(a) = (v, df(a))$, $\delta\omega$ — кодифференциал этой формы, $v = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \Big|_{t=0} \in C^\infty(f^*TN)$ — направляющее векторное поле

вариации F . Таким образом,

$$\frac{d}{dt} 2D[f_t]_{t=0} = - \int_M (H(f), v) * 1 - \int_M \delta \omega * 1.$$

Известно, что $*\delta = \varepsilon d*$, где $\varepsilon = \pm 1$; следовательно, $\delta \omega * 1 = * \delta \omega = \varepsilon d * \omega$ и по теореме Стокса имеем $\int_M \delta \omega * 1 = \varepsilon \int_M d * \omega = \varepsilon \int_{\partial M} * \omega = 0$, поскольку носитель формы ω — область Ω — не пересекается с границей ∂M . Таким образом, отображение f гармонично тогда и только тогда, когда $\int_M (H(f), v) * 1 = 0$ для любого локального поля $v \in C^\infty(f^*TN)$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 24.5.3 и из самого определения локальной вариации видно, что для случая компактного многообразия без края требование локальности излишне и вариации можно брать произвольными (в смысле величины носителя).

Определение 24.5.4. *Отображение $f \in C^\infty(M, N)$ называется вполне геодезическим, если оно переводит геодезические многообразия M в геодезические многообразия N .*

Лемма 24.5.4. *Отображение $f \in C^\infty(M, N)$ вполне геодезично тогда и только тогда, когда $A(f) = 0$, т. е. когда вторая фундаментальная форма тождественно равна нулю.*

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая в многообразии M , т. е. $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Рассмотрим кривую $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ в многообразии N , тогда $\dot{\Gamma} = df(\dot{\gamma})$. Следовательно, по определению связностей $\hat{\nabla}, \tilde{\nabla}$ имеем

$$\hat{\nabla}_{\dot{\Gamma}} \dot{\Gamma} = \hat{\nabla}_{df(\dot{\gamma})} df(\dot{\gamma}) = \hat{\nabla}_{\dot{\gamma}} df(\dot{\gamma}) = (\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} df) \dot{\gamma} = A(f)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

Поэтому, если $A(f) = 0$, то кривая $\Gamma(t)$ — геодезическая в N , и наоборот, если $\Gamma(t)$ — геодезическая в N , то $A(f)(a, a) = 0$ для любого $a \in C^\infty(TM)$. Отсюда следует, что $A(f) = 0$, поскольку $A(f)$ является симметричной формой. Лемма доказана.

Следствие 24.5.1. *Вполне геодезические отображения и локально минимальные погружения являются гармоническими отображениями (в последнем случае имеются в виду изометричные погружения).*

Доказательство. Если f — вполне геодезическое отображение, то по лемме 24.5.4 имеем $A(f) = 0$. Следовательно, $H(f) = \text{tr } A(f) = 0$. Если f — локально минимальное погружение, то f изометрично отображает M на $f(M)$ и средняя кривизна многообразия $f(M)$ в N равна нулю. По лемме 24.5.2 это утверждение эквивалентно равенству нулю средней кривизны $H(f)$ отображения f . Утверждение доказано.

Одной из главных геометрических проблем теории гармонических отображений римановых многообразий является проблема нахождения гармонического представителя в гомотопическом классе, а именно: можно ли данное отображение $f \in C^\infty(M, N)$ непрерывно продеформировать в гармоническое отображение? В терминах предыдущих обозначений этот вопрос формулируется так: существует ли отображение $F \in C^\infty(M \times [0, 1], N)$ такое, что $F|_{M \times \{0\}} = f$, $F|_{M \times \{1\}}$ — гармоническое отображение? Ниже мы перечислим некоторые важные случаи, когда ответ на поставленный вопрос положителен, и подробно остановимся на нахождении гармонических отображений в гомотопических классах отображений сфер, т. е. на вопросе гармонической реализации элементов гомотопических групп $\pi_i(S^n)$. Легко построить примеры таких гомотопических классов отображений M в N , в которых нет гармонического отображения (представителя).

Пусть M, N — гладкие римановы компактные замкнутые ориентируемые многообразия. Положительный ответ на поставленный выше вопрос о существовании гармонического отображения, гомотопного данному, можно получить в следующих частных случаях (см., например, [101]):

1) $\dim M = 1$; 2) $\dim N = 1$; 3) $\dim M = 2$, $\pi_2(N) = 0$; 4) многообразие N имеет неположительную секционную кривизну.

Поясним пункт 4). Пусть $R(\cdot, \cdot)$ — тензор кривизны римановой симметрической связности в касательном расслоении TN многообразия N . Двумерной (секционной) кривизной вдоль площадки, натянутой на векторы $X, Y \in T_x N$, называется величина $\rho_x(X, Y) = -\langle R(X, Y)X, Y \rangle_x$. Здесь скобки обозначают скалярное произведение в $T_x N$. Говорят, что многообразие N имеет неположительную секционную кривизну (по двумерным направлениям), если $\rho_x(X, Y) \leq 0$ в каждой точке $x \in N$; $X, Y \in T_x N$. Отметим, что риманову метрику неположительной кривизны можно ввести на замкнутых двумерных ориентируемых поверхностях рода $g \geq 1$. На сферах S^n при $n \geq 2$ метрик неположительной секционной кривизны не существует. Довольно просто построить пример отображения, которое не имеет гомотопного ему гармонического отображения. Для этого нужно рассмотреть гладкое отображение двумерного тора в двумерную сферу степени ± 1 (см., например, [101]). В этом примере римановы метрики на торе и на сфере могут быть выбраны произвольно.

Теорема 24.5.1 (см. [103]). *В следующем ниже списке перечислены те гомотопические группы сфер, которые допускают гармоническую реализацию, т. е. каждый элемент которых (каждый гомотопический класс) содержит гармоническое отображение:*

- 1) $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \dots, 7$;
- 2) $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$, $n = 3, 4, \dots, 8$;
- 3) $\pi_7(S^5) = \mathbb{Z}_2$;
- 4) $\pi_9(S^6) = \mathbb{Z}_{24}$;
- 5) $\pi_7(S^3) = \mathbb{Z}_2$;
- 6) $\pi_{15}(S^9) = \mathbb{Z}_2$.

Далее, существуют группы, в которых лишь часть элементов имеет гармоническую реализацию. Например: 7) в группе $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$

гармонически реализованы элементы вида $\pm k^2$, где k — целое число; 8) в группе $\pi_7(S^4) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{12}$ гармонически реализованы элементы вида $(\pm k^2, 0)$, где k — целое число; 9) в группах $\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{24}$ при $n = 5, 6, \dots, 10$ реализованы гармонически лишь единицы (кроме группы $\pi_9(S^6)$, которая реализована гармонически полностью, см. выше).

Будем называть отображение $f: S^n \rightarrow S^p$ гармоническим полиномом, если $f = F|_{S^n}$, где $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$ таково, что функции F^i ($i = 1, \dots, p+1$) являются гармоническими однородными полиномами (одной и той же степени однородности). В этом случае отображение f также оказывается гармоническим (см. [103]).

Джойном двух отображений евклидовых сфер $f_1: S^n \rightarrow S^p$ и $f_2: S^m \rightarrow S^q$ мы будем называть отображение $f_1 * f_2: S^{n+m+1} \rightarrow S^{p+q+1}$, которое в декартовых координатах $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$ и $(x', y') \in \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$ имеет следующий вид:

$$f_1 * f_2(x, y) = \left(|x| f_1\left(\frac{x}{|x|}\right), |y| f_2\left(\frac{y}{|y|}\right) \right).$$

Теорема 24.5.2 (теорема о джойне). (См. [103].) Пусть $f_1: S^n \rightarrow S^p$ и $f_2: S^m \rightarrow S^q$ являются гармоническими полиномами степеней однородности k_1 и k_2 соответственно. Тогда:

(1) если $k_1 > \theta(n-1)$, $k_2 > \theta(m-1)$, где $\theta = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, то существует гармоническое отображение $\Phi: S^{n+m+1} \rightarrow S^{p+q+1}$, гомотопное джойну $f_1 * f_2$;

(2) если $k_1 = k_2$, $n = m$, то также существует гармоническое отображение, гомотопное джойну $f_1 * f_2$.

Доказательство теоремы о джойне будет дано ниже. Здесь мы покажем, как из этого утверждения следует теорема 24.5.1.

Обозначим через I_n тождественное отображение $I_n: S^n \rightarrow S^n$, через $\Sigma^k f: S^{n+k} \rightarrow S^{p+k}$ обозначим k -мерную надстройку над отображением $f: S^n \rightarrow S^p$, определяемую формулой $\Sigma^k f = I_{k-1} * f$. Через $d_k: S^1 \rightarrow S^1$ (где k — положительное целое число) обозначим ограничение на окружность единичного радиуса отображения комплексной прямой $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(z) = z^k$. Через $H_3: S^3 \rightarrow S^2$, $H_7: S^7 \rightarrow S^4$ обозначим расслоения Хопфа. Очевидно, что отображения I_n и d_k являются гармоническими полиномами. Можно показать, что отображения H_3 и H_7 также являются гармоническими полиномами (см. [103]). Гладкое локально-тривиальное расслоение $\pi: M \rightarrow N$, где многообразия M и N римановы, назовем римановым расслоением, если для любой точки $x \in M$ ограничение дифференциала проекции $(d\pi)_x$ на подпространство V_x в TM , ортогональное к слою, проходящему через точку x , является ортогональным линейным преобразованием пространства V_x на $T_{\pi(x)}N$. Нетрудно показать, что расслоения Хопфа H_3 и H_7 римановы (это следует, например, из того, что они являются расслоениями на орбиты действия групп изометрий расслоенного про-

странства, именно групп $U(1) \subset SO(4)$ и $Sp(1) \subset SO(8)$). В [103] доказан следующий факт.

Лемма 24.5.5 (см. [103]). Если $\pi: M \rightarrow N$ является гармоническим римановым расслоением и отображение $f: N \rightarrow N'$ гармоническое, то отображение $f \circ \pi: M \rightarrow N'$ также гармоническое.

Это утверждение позволяет получить гармоническую реализацию перечисленных выше элементов гомотопических групп сфер. Используемые ниже явные выражения для представителей гомотопических классов через комбинации отображений I_n, d_k, H_3, H_7 можно найти в [105].

(1) $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, где элемент $k \in \mathbb{Z}$ представляется отображением $\Sigma^{n-1}d_k$.

(2) $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$ при $n \geq 3$; единица группы представляется отображением $\Sigma^{n-2}H_3$.

(3) Взяв джойны $H_3 * H_3$ и $H_7 * H_7$, мы получаем реализации элементов групп $\pi_7(S^6) = \mathbb{Z}_2$ и $\pi_{15}(S^9) = \mathbb{Z}_2$.

(4) Класс $k \in \mathbb{Z}_{24} = \pi_9(S^6)$ представляется отображением $H_7 * d_k$.

(5) Гармоническое отображение, гомотопное $\Sigma^{n-4}H_7$, реализует единицу $1 \in \mathbb{Z}_{24} = \pi_{n+3}(S^n)$.

(6) Пусть $(\Sigma H_3)'$ — гармоническое отображение, гомотопное ΣH_3 ; тогда отображение $(\Sigma H_3)' \cdot H_7$ гармонично по лемме 24.5.5 и представляет элемент $1 \in \mathbb{Z}_2 = \pi_7(S^6)$.

(7) Отображения $(\Sigma d_k)' \cdot (\pm H_3)$ и $(\Sigma^3 d_k)' \cdot (\pm H_7)$ также гармонические согласно лемме 24.5.5 и представляют элементы вида $\pm k^2 \in \mathbb{Z} = \pi_3(S^2)$ и $(\pm k^2, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} = \pi_7(S^4)$. Здесь k — целое число и через $(\Sigma d_k)'$ и $(\Sigma^3 d_k)'$ обозначены гомотопные соответствующим надстройкам над d_k гармонические отображения.

Доказательство теоремы о джойне (теорема 24.5.2). Имея два гармонических полинома $f_1: S^n \rightarrow S^p$ и $f_2: S^m \rightarrow S^q$, для которых выполнены условия теоремы 24.5.2, мы должны построить гармоническое отображение $\Phi: S^{n+m+1} \rightarrow S^{p+q+1}$, гомотопное отображению $f_1 * f_2$. Следуя [103], мы будем искать это отображение в виде

$$\Phi(x, y) = \left\{ \sin \alpha(t) \cdot f_1\left(\frac{x}{|x|}\right), \cos \alpha(t) \cdot f_2\left(\frac{y}{|y|}\right) \right\}, \quad (6)$$

где $t = \ln\left(\frac{|x|}{|y|}\right) \in (-\infty, +\infty)$, $\alpha(t)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^1$ такая, что $0 < \alpha(t) < \pi/2$ и существуют пределы при $t \rightarrow \pm\infty$, $\alpha(-\infty) = 0$, $\alpha(+\infty) = \pi/2$. Можно проверить, что для того, чтобы представить джойн $f_1 * f_2$ в виде (6), нужно взять $\alpha(t) = \arcsin(e^t/(e^t + e^{-t}))^{1/2}$, откуда следует, что отображение вида (6), где функция $\alpha(t)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, действительно гомотопно джойну $f_1 * f_2$.

Далее мы будем предполагать, что $n, m \geq 1$. Случай $n = 0$ (или $m = 0$) соответствует однократной надстройке над отображением f_2 (или f_1) и разбирается совершенно аналогично. Кроме того, мы будем предполагать, что отображения f_1, f_2 не постоянны.

Сейчас мы редуцируем проблему нахождения гармонического отображения (6) к задаче решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Известно (см. [104]), что если $i: N \rightarrow N'$ — изометрическое вложение и $f \in C^\infty(M, N)$, то f гармонично тогда и только тогда, когда поле средней кривизны $H(i \cdot f)$ ортогонально к $T(i(N))$ в TN' . В применении к сферам это означает, что для гармоничности отображения $\Phi: S^{n+m+1} \rightarrow S^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $H(\Phi) = \varphi \Phi$, где $\varphi \in C^\infty(S^{n+m+1})$ и Φ рассматривается как отображение в евклидово пространство $\mathbb{R}^{p+q+2}$. В этом случае, как было отмечено выше, $H(\Phi)^i = \Delta_s \Phi^i$, $i = 1, \dots, p+q+2$, где Δ_s — оператор Лапласа на сфере. Теперь заметим, что отображение $\Phi(x, y)$ (см. (6)) определено, вообще говоря, в $\mathbb{R}^{n+m+2} \setminus \{0\}$, и используем связь между оператором Δ_s и оператором Лапласа Δ_R в $\mathbb{R}^{n+m+2}$, которая задается следующей формулой: если $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m+2})$, то

$$\Delta_s(\psi|_{S^{n+m+1}}) = \left[(\Delta_R \psi) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - (n+m+1) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \Big|_{S^{n+m+1}}.$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial r}$ — производная вдоль радиус-вектора. В силу того, что $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$, мы получаем, что для того, чтобы отображение $\Phi|_{S^{n+m+1}}$ было гармоническим, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$(\Delta_R \Phi)|_{S^{n+m+1}} = \varphi \Phi|_{S^{n+m+1}}, \quad (7)$$

где $\varphi \in C^\infty(S^{n+m+1})$. Обратимся теперь к отображению $\sin \alpha(t) \times \times f_1\left(\frac{x}{|x|}\right): \mathbb{R}^{n+m+2} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$. На произведение функций оператор Лапласа Δ_R действует следующим образом:

$$\Delta_R(\sin \alpha \cdot f_1) = f_1 \Delta_R \sin \alpha + 2 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \sin \alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^i} + \sin \alpha \cdot \Delta_R f_1. \quad (8)$$

Отображение $f_1\left(\frac{x}{|x|}\right)$ можно рассматривать как композицию

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\beta} S^n \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^{p+1}, \quad \beta(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Рассмотрим формулу средней кривизны композиции двух отображений:

$$H(f_1 \circ \beta) = df_1(H(\beta)) + \text{tr } A(f)(d\beta, d\beta).$$

Легко установить, что проекция β гармоническая, т. е. $H(\beta) = 0$. Кроме того, на касательных пространствах сфер дифференциал $d\beta$ является конформным преобразованием с коэффициентом конформности $1/r^2$, где r — радиус сферы. Другими словами, если $a, b \in T_x S(r)$, то $\langle d\beta(a), d\beta(b) \rangle = \frac{1}{r^2} \langle a, b \rangle$. Таким образом, $\Delta_R f_1\left(\frac{x}{|x|}\right) =$

$= H(f_1 \cdot \beta) = \frac{1}{r^2} \Delta_s f_1$. Поскольку f_1 — гармонический однородный полином степени однородности k_1 , то это означает, что функции $f_1^t|_{S^n}$ являются собственными функциями оператора Лапласа Δ_s , соответствующими собственному числу $\lambda_1 = k_1(k_1 + n - 1)$. Следовательно, $\Delta_s f_1 = \lambda_1 f_1$ и $\Delta_R f_1\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} \lambda_1 f_1$.

Рассмотрим второе слагаемое в (8). Оно равно нулю в силу нулевой однородности $f\left(\frac{x}{|x|}\right)$. Действительно,

$$\sum_i \frac{\partial \sin \alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^i} = \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \sum_i \frac{x^i}{|x|^3} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^i} = \dot{\alpha} \cos \alpha \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} = 0.$$

Прямым вычислением мы находим далее $\Delta_R \sin \alpha$. Проводя подсчет для отображения $\cos \alpha(t) \cdot f_2\left(\frac{y}{|y|}\right): \mathbb{R}^{n+m-2} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{q+1}$, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta_R (\sin \alpha \cdot f_1) &= \\ &= \left\{ \frac{\lambda_1 \sin \alpha}{|x|^2} + \frac{(\sin \alpha) \dot{\alpha}^2 - (\cos \alpha) \ddot{\alpha}}{|x|^2 |y|^2} + (\cos \alpha) \dot{\alpha} \left[\frac{(m-1)}{|y|^2} - \frac{(n-1)}{|x|^2} \right] \right\} f_1; \\ \Delta_R (\cos \alpha \cdot f_2) &= \\ &= \left\{ \frac{\lambda_2 \cos \alpha}{|y|^2} + \frac{(\cos \alpha) \dot{\alpha}^2 + (\sin \alpha) \ddot{\alpha}}{|x|^2 |y|^2} - (\sin \alpha) \dot{\alpha} \left[\frac{(m-1)}{|y|^2} - \frac{(n-1)}{|x|^2} \right] \right\} f_2, \end{aligned}$$

где $\lambda_1 = k_1(k_1 + n - 1)$, $\lambda_2 = k_2(k_2 + m - 1)$, k_1 , k_2 — степени однородности полиномов f_1 и f_2 соответственно. Подставив в эти равенства величины $|x|^2 = \frac{e^t}{e^t + e^{-t}}$, $|y|^2 = \frac{e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ и используя условие (7) пропорциональности $\Delta_R \Phi$ и Φ на сфере S^{n+m+1} , мы приходим к следующему уравнению на функцию $\alpha(t)$, эквивалентному условию (7):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) + (e^t + e^{-t})^{-1} \{[(n-1)e^{-t} - (m-1)e^t] \dot{\alpha}(t) + \\ + (\lambda_2 e^t - \lambda_1 e^{-t}) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t)\} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что условия теоремы о джойне, а именно: $k_1 > \theta(n-1)$ и $k_2 > \theta(m-1)$ — можно переписать в виде

$$(n-1)^2 < 4\lambda_1, \quad (m-1)^2 < 4\lambda_2. \quad (10)$$

Предложение 24.5.1. При выполнении условий (10) существует решение уравнения (9) $\alpha(t)$ такое, что $0 < \alpha < \pi/2$ и существуют пределы $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \pi/2$. Такое решение существует также в симметрическом случае, когда $n = m$, $k_1 = k_2$.

Перепишем уравнение (9) в виде $\ddot{\alpha} = F(t, \alpha, \dot{\alpha})$. Тогда существует некоторая постоянная C_0 такая, что $|F| \leq C_0(1 + |\dot{\alpha}|)$ и $F(t, 0, 0) = F(t, \pi/2, 0) = 0$. Можно проверить (см. [106]), что

в этом случае для любого положительного T существует решение α_T уравнения (9), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\alpha_T(-T) = 0, \quad \alpha_T(T) = \pi/2, \quad (11)$$

$0 < \alpha_T(t) < \pi/2$ и $|\dot{\alpha}_T| \leq C$ на $(-T, +T)$, где постоянная C зависит только от C_0 . Рассмотрим некоторую последовательность $T_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку члены соответствующей последовательности α_{T_n} равномерно ограничены вместе со своими производными до третьего порядка включительно, существует подпоследовательность α_k , которая в равномерной топологии $C^2(\mathbb{R}^1)$ сходится к решению $\alpha_0(t)$ уравнения (9), определенному на всей прямой $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяющему неравенствам $0 \leq \alpha_0(t) \leq \pi/2$.

Докажем, что решение $\alpha_0(t)$ нетривиально, т. е. не равно тождественно нулю или $\pi/2$. Допустим, что $\alpha_0(t) \equiv 0$. Перепишем уравнение (9) в виде

$$\ddot{\alpha}(t) = h(t) \dot{\alpha}(t) - g(t) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t). \quad (12)$$

Решения $\alpha_{T(k)}(t)$ равномерно на каждом отрезке сходятся к нулю. В силу условий теоремы $4\lambda_2 > (m-1)^2$, кроме того $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lambda_2$, отсюда следует существование таких чисел $t_0 > 0$ и k_0 , что

$$\left| g(t) \frac{\sin \alpha(t) \cos \alpha(t)}{\alpha(t)} - \lambda_2 \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{(m-1)^2}{4} - \lambda_2 \right|.$$

На некотором отрезке $[t_0, t_1]$ для $\alpha = \alpha_k$ при $k > k_0$ это неравенство выполнено. Выберем теперь число λ_2^- , исходя из следующих двух условий:

(А) $\left| \frac{(m-1)^2}{4} - \lambda_2^- \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{(m-1)^2}{4} - \lambda_2 \right|$, что означает, что на отрезке $[t_0, t_1]$ выполнено неравенство

$$\lambda_2^- < g(t) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) (\alpha(t))^{-1}.$$

(Б) $4\lambda_2^- > (m-1)^2$ и λ_2^- настолько близко к $\frac{(m-1)^2}{4}$, что период уравнения $\ddot{\beta} = (m-1)\dot{\beta} - \lambda_2^- \beta$ меньше $t_1 - t_0$, т. е. решение этого уравнения имеет на отрезке $[t_0, t_1]$ хотя бы один корень.

Пусть $\beta(t)$ — решение уравнения $\ddot{\beta} = (m-1)\dot{\beta} - \lambda_2^- \beta$, удовлетворяющее начальным условиям $\beta(t_0) = \alpha(t_0) > 0$, $\dot{\beta}(t_0) = \dot{\alpha}(t_0)$. Рассмотрим функцию $\omega = \dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta}$. Для этой функции имеем

$$\dot{\omega} = \alpha\beta \left\{ \left[\frac{h\dot{\alpha}}{\alpha} - \frac{(m-1)\dot{\beta}}{\beta} \right] + \left(\lambda_2^- - g \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} \right) \right\},$$

$\omega(t_0) = 0$, $\dot{\omega}(t_0) < 0$, поскольку $h \leq (m-1)$. До тех пор, пока выполняются два неравенства: $\omega \leq 0$, т. е. $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \leq \frac{\dot{\beta}}{\beta}$ и $\beta > 0$, будет выполнено неравенство $\dot{\omega} < 0$. Первое неравенство не может нарушиться раньше второго, а β имеет на отрезке $[t_0, t_1]$ корни.

Пусть t_3 — первый из них. В этой точке, очевидно, $\omega < 0$, т. е. $\alpha\dot{\beta} > 0$, что невозможно, поскольку $\alpha > 0$ и $\dot{\beta}(t_3) \leq 0$.

Совершенно аналогично, с использованием условия $4\lambda_1 > (n-1)^2$, доказывается невозможность ситуации $\alpha_0(t) \equiv \pi/2$.

В симметрическом случае из теоремы работы [106] следует, что решения $\alpha_T(t)$ удовлетворяют равенству $\alpha_T(-t) + \alpha_T(t) = \pi/2$ на $(0, T)$. Поэтому эти решения не могут сходиться к нулю или $\pi/2$. Из проведенных рассуждений и теоремы о единственности решения дифференциального уравнения следует выполнение строгих неравенств $0 < \alpha_0(t) < \pi/2$ для предельного решения $\alpha_0(t)$ уравнения (9).

Доказательство предложения 24.5.1 будет закончено, если мы докажем следующую лемму.

Лемма 24.5.6. Если $\alpha(t)$ — нетривиальное решение уравнения (9) такое, что $0 < \alpha(t) < \pi/2$ и $|\dot{\alpha}(t)| \leq C$, то $\dot{\alpha}(t) > 0$ при достаточно больших по модулю значениях t и существуют пределы $\alpha(-\infty) = 0$, $\alpha(+\infty) = \pi/2$.

Доказательство. Мы рассмотрим случай $t \rightarrow \infty$. Если t достаточно велико и $m-1 > 0$, то из (12) видно, что $\ddot{\alpha}(t) < 0$, т. е. если $\dot{\alpha}(t) \leq 0$, то $\alpha(t)$ достигнет нулевого значения, что невозможно. Следовательно, $\alpha(t) > 0$. Пусть $m-1 = 0$ и $\dot{\alpha}(t_0) \leq 0$ (здесь t_0 велико). Учитывая, что в этой ситуации $h(t) < 0$ и близко к нулю при больших t , из анализа уравнения (12) мы получаем, что при $t > t_0$ значение $\dot{\alpha}$ начнет уменьшаться, если $|\dot{\alpha}(t_0)|$ достаточно мал, или увеличиваться, но не достигнет нуля и начнет уменьшаться. В результате будут происходить колебания $\dot{\alpha}(t)$ в отрицательной области, которые приведут к тому, что, начиная с некоторого $t_1 > t_0$, значение $\alpha(t)$ будет сколь угодно мало. Рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве нетривиальности, приводят к противоречию. Следовательно, $\dot{\alpha}(t_0) > 0$.

Монотонность $\alpha(t)$ при достаточно больших по модулю значениях t обуславливает существование пределов $\alpha(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t)$ и $\alpha(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$. Докажем, что эти пределы равны 0 и $\pi/2$ соответственно.

Рассмотрим $\alpha(\infty)$. Пусть $m = 1$ и $\alpha(\infty) < \pi/2$; тогда из (12) следует, что при больших t $\ddot{\alpha}(t) < 0$ и значения отделены от нуля, что невозможно. Пусть теперь $m-1 > 0$. Предположим, что $\alpha(\infty) \leq \pi/4$. Функция $g(t)$ растет, $h(t) < m-1$ и функция $\sin \alpha \cos \alpha$ монотонна на отрезке $[0, \pi/4]$. Следовательно, для достаточно большого значения t_0 и $t \geq t_0$ имеем $\ddot{\alpha}(t) \leq (m-1)\dot{\alpha}(t) - g(t_0) \sin \alpha(t_0) \cos \alpha(t_0)$. Следовательно, $\dot{\alpha}(t) \geq (m-1)^{-1}(g(t_0) \times \sin \alpha(t_0) \cos \alpha(t_0) + \ddot{\alpha}(t))$, т. е. $\dot{\alpha}(t)$ отделено от нуля (так как $\ddot{\alpha} \rightarrow 0$), что невозможно. Предположение $\pi/4 < \alpha(\infty) < \pi/2$ приводит к противоречию по тем же соображениям. Следовательно, $\alpha(\infty) = \pi/2$. Равенство $\alpha(-\infty) = 0$ доказывается аналогично.

В силу предложения 24.5.1 мы имеем непрерывное в $\mathbb{R}^{n+m+2} \setminus \{0\}$ отображение (6) $\Phi(x, y)$, которое принадлежит классу C^∞ на множестве $M = \mathbb{R}^{n+m+2} \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})$ и гармонично на множестве $M \cap S^{n+m+1}$. Нашей целью является доказательство гладкости отображения $\Phi(x, y)$ на всей сфере S^{n+m+1} .

Предложение 24.5.2. Пусть μ — произвольное число из интервала $(0, 1)$ и $\alpha(t)$ — решение уравнения (9), описанное в предложении 24.5.1; тогда:

(1) существуют такие постоянные $b_1, b_2 > 0$, что при достаточно больших по модулю отрицательных t ($t \rightarrow -\infty$) выполняются неравенства

$$(k_1 - O(e^{2t})) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) \leq \dot{\alpha}(t) \leq (k_1 + O(e^{2t})) \sin \alpha(t);$$

$$b_1 e^{k_1 t} \leq \sin \alpha(t) \leq b_2 e^{\mu k_1 t};$$

(2) существуют такие постоянные $C_1, C_2 > 0$, что при достаточно больших положительных t ($t \rightarrow +\infty$) выполнены неравенства

$$(k_2 - O(e^{-2t})) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) \leq \dot{\alpha}(t) \leq (k_2 + O(e^{-2t})) \cos \alpha(t),$$

$$C_1 e^{-k_2 t} \leq \cos \alpha(t) \leq C_2 e^{-\mu k_2 t}.$$

В леммах 24.5.7, 24.5.8 мы докажем неравенства из предложения 24.5.2. Доказательство остальных проводится аналогично.

Лемма 24.5.7. При $t \rightarrow \infty$ имеем $\dot{\alpha}(t) \leq (k_2 + O(e^{-2t})) \cos \alpha(t)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $k^+(t)$, являющуюся решением уравнения $\lambda_2 = k^+(t)^2 + k^+(t)h(t)$. При фиксированном большом t рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $\dot{\beta}(s) = k^+(t) \cos \beta(s)$, $\beta(t) = \alpha(t)$, $s \geq t$. Эта задача имеет решение $\beta(s) = 2 \operatorname{arctg}(e^{k^+(t)s}) - \pi/2$, которое стремится при $s \rightarrow \infty$ к $\pi/2$, монотонно возрастаая. Далее, при $s \geq t$ имеем

$$\dot{\beta}(s) = k^+(t)h(t) \sin \beta(s) \cos \beta(s) - \lambda_2 \sin \beta(s) \cos \beta(s) <$$

$$< h(s) \dot{\beta}(s) - g(s) \sin \beta(s) \cos \beta(s) < 0,$$

поскольку $h(t) \leq h(s)$, $\lambda_2 > g(s)$ и $0 < \sin \beta < 1$. Следовательно, скорость убывания $\dot{\beta}(s)$ больше, чем скорость убывания $\dot{\alpha}(s)$. Поэтому, если $\dot{\alpha}(t) > \dot{\beta}(t)$, то разность $\dot{\alpha}(s) - \dot{\beta}(s) > 0$ не уменьшится при $s \geq 0$ и $\dot{\alpha}(s)$ останется отделенной от нуля, что невозможно. Следовательно $\dot{\alpha}(t) \leq \dot{\beta}(t) = k^+(t) \cos \alpha(t)$. Нам осталось доказать, что $k^+(t) = k_2 + O(e^{-2t})$. Для этого рассмотрим уравнение $\lambda_2 = k^+(t)^2 + k^+(t)h(t)$ и положим $k^+(t) = k_2 + \varepsilon$, $h(t) = (m-1) - \gamma$. Тогда, учитывая, что $\lambda_2 = k_2^2 + k_2(m-1)$, мы получаем следующее равенство: $0 = (2k_2 + m-1)\varepsilon - k_2\gamma + \varepsilon^2 - \varepsilon\gamma$. Во-первых, $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, поскольку $h(t) \rightarrow (m-1)$. Во-вторых, поскольку $h(t) < m-1$, мы получаем, что $\varepsilon > 0$. Возьмем некоторую постоянную C такую, что $-(2k_2 + m-1) < C < 0$. Тогда при больших t имеем $C < \varepsilon - \gamma$, т. е. $\varepsilon - \gamma \rightarrow 0$, и, следовательно,

$(2k_2 + m - 1 + C)\varepsilon < k_2\gamma$, т. е. $\varepsilon < C_1 \cdot \gamma$, где $C_1 > 0$. Тот факт, что $\gamma = O(e^{-2t})$, устанавливается теперь непосредственно.

Лемма 24.5.8. При $t \rightarrow \infty$ имеем $\cos \alpha(t) \leq C_2 e^{-\mu k_2 t}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = \cos \alpha(t)$; тогда

$$\dot{f}(t) = -\sin \alpha(t) \cdot \dot{\alpha}(t) \leq -\sin \alpha(t) [k_2 - O(e^{-2t})] \sin \alpha(t) \cos \alpha(t),$$

т. е. $-\frac{\dot{f}}{f} \geq [k_2 - O(e^{-2t})] \sin^2 \alpha(t) > 0$. Следовательно, при достаточно больших t имеем $-\dot{f}/f > \mu [k_2 - O(e^{-2t})] > 0$. Интегрируя это неравенство, мы получаем, что $-\ln f > \mu k_2 t - C'$, где $C' > 0$. Следовательно, $f(t) < C_2 e^{-\mu k_2 t}$, где $C_2 = e^{C'}$.

Предложение 24.5.3. Первые и вторые частные производные отображения $\Phi(x, y)$ (6) являются непрерывными функциями в $\mathbb{R}^{n+m+2} \setminus \{0\}$.

Следствие 24.5.2. Отображение $\Phi|_{S^{n+m+1}}$ является аналитическим и гармоническим.

Доказательство. Из предложения 24.5.3 следует, что $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^{n+m+2} \setminus \{0\})$. Из непрерывности функции $H(\Phi)$ и того, что $H(\Phi) = 0$ на множестве $S \cap M = [\mathbb{R}^{n+m+2} \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})] \cap S$, следует, что $H(\Phi) = 0$ всюду на сфере, т. е. $\Phi|_{S^{n+m+1}}$ является гармоническим отображением класса C^2 , откуда следует, что это отображение аналитическое, так как S^{n+m+1} является аналитическим многообразием.

Следствие 24.5.2 полностью завершает доказательство теоремы о джойне.

Перейдем к доказательству предложения 24.5.3. Как уже отмечалось выше, нам достаточно установить непрерывность первых и вторых частных производных функции $\Phi(x, y)$ при $x \rightarrow 0$ (параметр y отделен от нуля) и при $y \rightarrow 0$ (параметр x отделен от нуля). Мы проведем доказательство в следующем частном случае: рассмотрим производные $\frac{\partial^2 H}{\partial x^{i^2}}$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) отображения

$$H(x, y) = \sin \alpha(t) \cdot f_1\left(\frac{x}{|x|}\right) \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ (} y \text{ отделен от нуля).}$$

Доказательства непрерывности производных в других случаях проводятся аналогично.

В силу однородности отображения f_1 имеем $H(x, y) = f_1(x) \times \psi(x, y)$, где $\psi(x, y) = \frac{\sin \alpha(t)}{|x|^{k_1}}$. В силу того, что $\frac{\partial^2 H}{\partial x^{i^2}} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^{i^2}} \psi + \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + f_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{i^2}}$ и f_1 — полином степени однородности $k_1 \geq 1$, нам достаточно доказать, что при $x \rightarrow 0$ (y отделен от нуля) функции $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ и $|x| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{i^2}}$ непрерывны. Это будет доказано ниже (см. леммы 24.5.9, 24.5.10).

Лемма 24.5.9. Функция $\psi(x, y)$ имеет продолжение класса C^1 на множество $\{x=0, y \neq 0\}$.

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что $\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{(\dot{\alpha} \cos \alpha - k_1 \sin \alpha) x^i}{|x|^{k_1+2}}$. Случай $x \rightarrow 0, y \neq 0$ соответствует $t \rightarrow -\infty$. Из предложения 24.5.2 следует, что $\dot{\alpha} - k_1 \sin \alpha = O(e^{(2+\mu k_1)t}) = O(|x|^{\mu k_1+2})$. Кроме того, поскольку $1 - \cos \alpha = O(\sin^2 \alpha)$, мы получаем, что $\dot{\alpha} - \dot{\alpha} \cos \alpha = O(|x|^{3\mu k_1})$. При $k_1 \geq 1$ $3k_1 \geq k_1 + 2$, следовательно, $\dot{\alpha} \cos \alpha - k_1 \sin \alpha = O(|x|^{\mu(k_1+2)})$. Поэтому, если мы выберем μ так, что $(1-\mu) \times (k_1+2) < 1$, то выполняется равенство $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0$, что и требовалось.

Лемма 24.5.10. Выполнено равенство $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} |x| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{i^2}} = 0$.

Доказательство. Непосредственный подсчет приводит к следующему выражению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{i^2}} = \frac{1}{|x|^{k_1+2}} \left\{ [\dot{\alpha} \cos \alpha - k_1 \sin \alpha] (1 - |x|^{-2} (k_1+2) (x^i)^2) + \right. \\ \left. + (\ddot{\alpha} - \dot{\alpha} k_1) \cos \alpha \frac{(x^i)^2}{|x|^2} - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \frac{(x^i)^2}{|x|^2} \right\}.$$

Для первого и третьего слагаемых равенство предела нулю следует из леммы 24.5.9. Для второго слагаемого имеем

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{\ddot{\alpha} - k_1 \dot{\alpha}}{|x|^{k_1+1}} = 0$. Из предложения 24.5.2 следует, что $\dot{\alpha} \leq k_1 \sin \alpha + O(|x|^{\mu k_1+2})$ и $\sin \alpha = O(|x|^{\mu k_1})$. Следовательно, с точностью до $O(|x|^{\mu k_1+2})$ мы можем записать следующее неравенство:

$$\ddot{\alpha} \simeq -(n-1) \dot{\alpha} + \lambda_1 \sin \alpha \cos \alpha \leq \\ \leq -(n-1) k_1 \sin \alpha + \lambda_1 \sin \alpha = k_1^* \sin \alpha \simeq k_1 \dot{\alpha}.$$

Таким образом, $\ddot{\alpha} - k_1 \dot{\alpha} = O(|x|^{\mu k_1+2})$ и выбором μ , близкого к единице, можно добиться выполнения требуемого условия $\ddot{\alpha} - k_1 \dot{\alpha} = o(|x|^{k_1+1})$. Лемма доказана.

Тем самым, доказательство теоремы полностью завершено.

ПОСТРОЕНИЕ ГЛОБАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
В ВАРИАЦИОННЫХ КЛАССАХ $h(A, L, L')$, $h(A, \tilde{L})$ § 25. Когомологический случай. Вычисление кограницы
пары $(X, A) = \bigcup_r (X_r, A_r)$ через кограницы пар (X_r, A_r)

Теперь мы дадим доказательство теоремы существования глобально минимальных поверхностей нетривиального топологического типа в римановых многообразиях.

Основная геометрическая идея настоящего параграфа состоит в следующем: мы будем склеивать поверхность X с границей A из отдельных кусков X_α с границами A_α и затем выясним связь между A и $\bigcup_\alpha A_\alpha$. Сначала отметим, что если $X = A$, то

$\nabla^*(X, A) = \emptyset$ при любом $x \in A$; а если $X \supset A$ и X стягиваемо, то $\nabla^*(X, A) = \tilde{h}^*(A) \setminus 0$ при любом $x \in A$.

Лемма 25.1. Пусть $X = \bigvee_{r=1}^N X_r$, где $X_r \cap X_s = \emptyset$ при $r \neq s$, а через $A \vee B$ обозначается букет двух пунктированных пространств. Пусть, далее, A_r — такие компакты, что $A_r \subset X_r$ при $1 \leq r \leq N$, $x \in A_r$ для каждого r . Положим $A = \bigvee_{r=1}^N A_r$, и пусть $i_r: (X_r, A_r) \rightarrow (X, A)$ — вложения. Тогда гомоморфизмы $i_r^*: \tilde{h}^k(X, A) \rightarrow \tilde{h}^k(X_r, A_r)$ образуют проективное представление группы $\tilde{h}^k(X, A)$ в виде прямой суммы $\bigoplus_r \tilde{h}^k(X_r, A_r)$, т. е. для любой последовательности элементов $u_r \in \tilde{h}^k(X_r, A_r)$ существует единственный элемент $u \in \tilde{h}^k(X, A)$ такой, что $i_r^* u = u_r$ при $1 \leq r \leq N$.

Доказательство. Если рассмотреть несвязное объединение $X' = \bigcup_r X_r$ (т. е. $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$ в компакте X'), то получим, что $h^k(X') = \bigoplus_r h^k(X_r)$. Хотя отображения $j_r: (X_r, A_r) \rightarrow (X \bigcup_r A_r, A)$ не являются вырезаниями в смысле аксиомы A_6 ($= A_6'$), но они являются относительными гомеоморфизмами, а поскольку теория h^* относительно инвариантна на категории U_c (см. лемму 4.5.2), то гомоморфизмы j_r^* являются изоморфиз-

мами, а тогда, повторяя схему рассуждений доказательства теоремы 1.13.2 (см. [10]) для случая категории пунктированных пространств, получаем утверждение леммы.

Отметим, что если (в рамках условий леммы 25.1) предположить, что все компакты X_i стягиваемы, то $\nabla^*(X, A) = \tilde{h}^*(A) \setminus 0$.

Лемма 25.2. Пусть $X = \bigcup_{r=1}^N X_r$, $A = \bigcup_{r=1}^N A_r$, где $A_r \subset X_r$, $X_r \cap X_s = A_r \cap A_s$ при $r \neq s$ и $x \in A_r$ при каждом r ; пусть $i_r: (X_r, A_r) \rightarrow (X, A)$ — вложения. Тогда гомоморфизмы $i_r^*: \tilde{h}^k(X, A) \rightarrow \tilde{h}^k(X_r, A_r)$ образуют проективное представление группы $\tilde{h}^k(X, A)$ (для любого k) в виде прямой суммы $\bigoplus_r \tilde{h}^k(X_r, A_r)$.

Это утверждение немедленно следует из относительной инвариантности теории h^* на U_C , что позволяет перейти от пары (X_r, A_r) к паре $(X_r/A_r, x)$, и из леммы 25.1.

Сделаем еще одно простое замечание. Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — непрерывное отображение, $x \in A$, $y = f(x)$, $L \subset \subset \nabla^k(X, A)$ — произвольное подмножество. Рассмотрим новое подмножество $L_1 \subset \tilde{h}^{k-1}(B) \setminus 0$, положив, по определению, $L_1 = = (f^*)^{-1}L$. Тогда мы утверждаем, что $L_1 = \nabla^k(Y, B)$, т. е. $L_1 \cap \cap \text{Ker } \tilde{\delta}_B = \emptyset$. Доказательство следует из диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^{k-1}(A) & \xrightarrow{i_1^*} & \tilde{h}^{k-1}(X) \\ \downarrow f_2^* & & \downarrow i_1^* \\ \tilde{h}^{k-1}(B) & \xrightarrow{i_2^*} & \tilde{h}^{k-1}(Y) \end{array}$$

В самом деле, если допустить противное и предположить, что существует элемент $\alpha \in L_1$ такой, что $\alpha = i_2^*(\omega)$, то получим, что $f_2^*(\alpha) \in L$ и $f_2^*(\alpha) = i_1^* f_1^*(\omega)$, т. е. $f_2^*(\alpha) = L \cap \text{Im } i_1^*$, что противоречит определению L , в силу которого $L \cap \text{Im } i_1^* = \emptyset$.

Извлечем следствие из этого замечания. Пусть $x \in A \subset X$, $L \subset \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0$, $L \subset \subset \nabla^k(X, A)$, и пусть $Y \supset X$; тогда мы утверждаем, что $L \subset \subset \nabla^k(Y, A)$. Ясно, что это следует из доказанного выше замечания, поскольку $B = A$ и $f = i$. В дальнейшем через $i(A, B)$ мы будем обозначать вложение $i: B \rightarrow A$, а через $(\alpha^*)^{-1}C$ — полный прообраз подмножества C в группе K при гомоморфизме $\alpha^*: N \rightarrow K$.

Лемма 25.3. Пусть $X = \bigcup_{r=1}^N X_r$, $A_r \subset X_r$, $A \subset X$, $x \in A_r$ при каждом r . Положим $B = A \cup \left(\bigcup_r A_r \right)$, и пусть $L \subset \subset \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0$ и $L_r \subset \subset \nabla^k(X_r, A_r)$. Предположим, что $i^*(B, A)^{-1}L \subset \bigcup_r i^*(B, A_r)^{-1}L_r$. Тогда $L \subset \subset \nabla^k(X, A)$.

Доказательство. Требуется показать, что $L \cap \text{Im } i^* = \emptyset$, где $i = i(X, A)$, т. е. что $i^*(X, A)^{-1}L = \emptyset$. Имеем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} i^*(X, A)^{-1}L &= \\ &= i^*(X, B)^{-1}[i^*(B, A)^{-1}L] \subset \bigcup_r i^*(X, B)^{-1}[i^*(B, A_r)^{-1}L_r] = \\ &= \bigcup_r i^*(X, A_r)^{-1}L_r = \bigcup_r i^*(X, X_r)^{-1}[i^*(X_r, A_r)^{-1}L_r] = \emptyset, \end{aligned}$$

поскольку по предположению $i^*(X_r, A_r)^{-1}L_r = \emptyset$. Лемма доказана.

Отметим, что лемма 25.3 может быть доказана иным путем, который более длинен, чем описанный выше, но зато он более универсален и будет неоднократно применяться в дальнейшем. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}^{k-1}(X_r) & \xrightarrow{i_r^*} & \tilde{h}^{k-1}(A_r) & \xrightarrow{\delta_r} & h^k(X_r, A_r) \\ \downarrow \omega & & \downarrow \gamma_r & & \downarrow \tau_r \\ \tilde{h}^{k-1}(X) & \xrightarrow{i_2^*} & \tilde{h}^{k-1}(B) & \xrightarrow{\delta_2} & h^k(X, B) \\ \downarrow \xi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \tilde{h}^{k-1}(X) & \xrightarrow{i_1^*} & \tilde{h}^{k-1}(A) & \xrightarrow{\delta_1} & h^k(X, A) \end{array}$$

Пусть $h \in L$, $h \neq 0$. Требуется доказать, что $\delta_1(h) \neq 0$. Допустим противное, пусть $\delta_1(h) = 0$; тогда $h = i_1^*(\varphi)$ и $h = i_1^*\xi(\varphi') = \alpha i_2^*(\varphi')$, т. е. $i_2^*(\varphi') \in i^*(B, A)^{-1}h$, т. е. по условию $i_2^*(\varphi') \in \bigcup_r i^*(B, A_r)^{-1}L$, откуда следует существование номера

r такого, что $i_2^*(\varphi') \in i^*(B, A_r)^{-1}L_r$. Пусть в нашей диаграмме в верхней строке взято именно это значение r . Тогда $\gamma_r i_2^*(\varphi') \in L$, т. е. $\delta_r \gamma_r i_2^*(\varphi') \neq 0$. В то же время мы имеем $\delta_r \gamma_r i_2^*(\varphi') = \tau_r \delta_2 i_2^*(\varphi') = 0$ в силу точности. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Следующая лемма важна для дальнейшего геометрического приложения наших алгебраических конструкций, поскольку она позволяет вычислять алгебраическую кограницу пары (X, A) , составленной из отдельных кусков (X_r, A_r) , через алгебраические кограницы этих кусков, которые предполагаются известными.

Лемма 25.4. Пусть $X = \bigcup_{r=1}^N X_r$, $A_r \subset X_r$, $A \subset X$, $A \cap X_r \subset A_r$, $X_r \cap X_s = A_r \cap A_s$, если $r \neq s$, $x \in A$ и $x \in A_r$ при каждом r . Положим $B = \bigcup_r A_r$ (тогда $B \supset A$) и $\Gamma_r = \nabla^k(X_r, A_r) \subset \tilde{h}^{k-1}(A_r) \setminus 0$. Тогда имеет место соотношение

$$\nabla^k(X, A) = \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus \left\{ i^*(B, A) \left[\tilde{h}^{k-1}(B) \setminus \left[\bigcup_r i^*(B, A_r)^{-1} \Gamma_r \right] \right] \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}^{k-1}(X_r) & \xrightarrow{i_r^*} & \tilde{h}^{k-1}(A_r) & \xrightarrow{\delta_r} & h^k(X_r, A_r) \\ \uparrow & & \uparrow \gamma_r & & \uparrow \tau_r \\ \tilde{h}^{k-1}(X) & \xrightarrow{i_2^*} & \tilde{h}^{k-1}(B) & \xrightarrow{\delta_2} & h^k(X, B) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \tilde{h}^{k-1}(X) & \xrightarrow{i_1^*} & \tilde{h}^{k-1}(A) & \xrightarrow{\delta_1} & h^k(X, A) \end{array}$$

Выделим в $\tilde{h}^{k-1}(A)$ следующее подмножество элементов (коциклов) $\Phi = i^*(B, A) \left[\tilde{h}^{k-1}(B) \setminus \left[\bigcup_r i^*(B, A_r)^{-1} \Gamma_r \right] \right]$ и докажем, что $\nabla^k(X, A) = \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus \Phi$. Отметим, что поскольку $\Gamma_r = \tilde{h}^{k-1}(A_r) \setminus \text{Кер } \delta_r$, то подмножество Φ в действительности является подгруппой в $\tilde{h}^{k-1}(A)$. Докажем сначала, что $\nabla^k(X, A) \subset \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus \Phi$. Пусть $a \in \nabla^k(X, A)$. Это эквивалентно тому, что $\delta_1(a) \neq 0$. Допустим теперь, что $a \in \Phi$; отсюда следует, что $a = \alpha(\varphi)$, где $\varphi \in \tilde{h}^{k-1}(B)$ и $\varphi \notin \bigcup_r i^*(B, A_r)^{-1} \Gamma_r = \bigcup_r \gamma_r^{-1}(\Gamma_r)$, т. е. $\gamma_r(\varphi) \notin \Gamma_r$ при любом r . Это означает, что $\delta_r \gamma_r(\varphi) = 0$ при любом r , т. е. $\tau_r \delta_2(\varphi) = 0$ при любом r , а тогда, в силу леммы 25.2, мы имеем $\delta_2(\varphi) = 0$, т. е. $\varphi = i_2^*(m)$, $a = \alpha(\varphi) = \alpha i_2^*(m) = i_1^* \xi(m)$, т. е. $\delta_1(a) = \delta_1 i_1^* \xi(m) = 0$, что противоречит выбору элемента a . Итак, $\nabla^k(X, A) \subset \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus \Phi$. Обратно, докажем, что $\nabla^k(X, A) \supset \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus \Phi$. Пусть $a \in \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus \Phi$; предположим, что $a \notin \nabla^k(X, A)$, т. е. $\delta_1(a) = 0$; тогда $a = i_1^*(m') = i_1^* \xi(m) = \alpha i_2^*(m)$. Поскольку $\delta_2 i_2^*(m) = 0$, то $\gamma_r i_2^*(m) \notin \Gamma_r$ при каждом r , так как для любого r выполнено соотношение $\delta_r \gamma_r i_2^*(m) = 0$. Поэтому $i_2^*(m) \in \tilde{h}^{k-1}(B) \setminus \left[\bigcup_r \gamma_r^{-1}(\Gamma_r) \right] = \tilde{h}^{k-1}(B) \setminus \left[\bigcup_r i^*(B, A_r)^{-1} \Gamma_r \right]$. Отсюда следует, что $\alpha i_2^*(m) = a \in \Phi$, что противоречит выбору элемента a . Лемма доказана.

Если гомоморфизм α является эпиморфизмом, то лемма 25.4 может быть сформулирована в несколько иной форме, а именно имеет место соотношение:

$$\nabla^k(X, A) = \delta_1^{-1} \left\{ \beta \left[\bigcup_r \tau_r^{-1} \delta_r(\Gamma_r) \right] \setminus 0 \right\}.$$

Докажем это равенство. Обозначим правую часть через L и докажем сначала, что $L \subset \nabla^k(X, A)$. Пусть $l \in L$; тогда $\delta_1(l) \in \beta \left[\bigcup_r \tau_r^{-1} \delta_r(\Gamma_r) \right] \setminus 0$, т. е. $\delta_1(l) \neq 0$, а потому $l \in \nabla^k(X, A)$.

Итак, $L \subset \nabla^k(X, A)$. Обратно, докажем, что $L \supset \nabla^k(X, A)$. Пусть $h \in \nabla^k(X, A)$; это эквивалентно тому, что $\delta_1(h) \neq 0$. Поскольку α — эпиморфизм, то существует элемент m такой, что $h =$

$= \alpha(m)$, т. е. $\delta_1(h) = \beta\delta_2(m)$, откуда имеем, что $\delta_2(m) \neq 0$. Поскольку гомоморфизмы τ_r образуют проективное представление группы $h^k(X, B)$ в виде прямой суммы $\bigoplus_r h^k(X_r, A_r)$ (см. лемму 25.2), то существует номер r такой, что $\tau_r\delta_2(m) \neq 0$. Пусть в нашей диаграмме (см. диаграмму леммы 25.4) взято именно это значение r . Поскольку $\tau_r\delta_2(m) \neq 0$, то и элемент $\delta_r\gamma_r(m)$ отличен от нуля, т. е. $\gamma_r(m) \in \nabla^k(X_r, A_r) = \Gamma_r$. Итак, мы доказали существование r такого, что $\varphi = \delta_2(m) \neq 0$, $\varphi \in h^k(X, B)$, $\delta_1(h) = \beta(\varphi)$, $\tau(\varphi) = \delta_r\gamma_r(m) \neq 0$, т. е. $\tau_r(\varphi) \in \delta_r(\Gamma_r)$, или $\delta_1(h) \in \beta[\tau_r^{-1}\delta_r(\Gamma_r)] \setminus 0$, т. е. $h \in \delta_1^{-1}\left\{\beta\left[\bigcup_r \tau_r^{-1}\delta_r(\Gamma_r)\right]\right\} \setminus 0$, что и требовалось. Доказательство закончено.

В дальнейших применениях гомоморфизм α часто будет эпиморфизмом, и мы будем опираться на доказанное здесь утверждение. При изучении гомологического случая мы увидим, что формулировка леммы 25.4 весьма удалена от своего гомологического аналога, но приобретает в некоторой степени двойственный характер, если α — эпиморфизм.

Выясним, что происходит с кограницей $\nabla^k(X, A)$ в тех случаях, когда $X = I \times Y$, а $A = (0 \times Y) \cup (1 \times Y)$ (через I обозначен единичный отрезок). Рассмотрим два естественных вложения $j_0: Y \rightarrow 0 \times Y \subset A$ и $j_1: Y \rightarrow 1 \times Y \subset A$ и выделим в группе $h^{k-1}(A)$, изоморфной группе $h^{k-1}(Y) \oplus h^{k-1}(Y)$, диагональ $\Delta = (h, h)$, $h \in h^{k-1}(Y)$. Тогда оказывается, что $(h^{k-1}(A) \setminus \Delta) \cap \text{Im } i^* = \emptyset$, где $i^*: h^{k-1}(X) \rightarrow h^{k-1}(A)$, $i: A \rightarrow X$ — вложение, т. е. $i^*h^{k-1}(X) \subset \Delta$.

Докажем, что если $(h_1, h_2) \notin \Delta$, то $(h_1, h_2) \notin \text{Im } i^*$. Допустим противное: пусть $h_1 \neq h_2$ и $(h_1, h_2) = i^*(\gamma)$, $\gamma \in h^{k-1}(X)$. Но тогда $h_1 = j_0^*(h_1, h_2) = j_0^*i^*(\gamma) = (ij_0)^*(\gamma) = (ij_1)^*(\gamma) = j_1^*(h_1, h_2) = h_2$, т. е. $h_1 = h_2$, что невозможно. Здесь мы воспользовались тем, что ij_0 гомотопно ij_1 . Доказательство закончено.

Вспомним теперь о наличии отмеченной точки x . Тогда мы получаем $\nabla^k(X, A) = (h^{k-1}(A) \setminus \Delta) \cap \tilde{h}^{k-1}(A) = \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus (\Delta \cap \tilde{h}^{k-1}(A))$, причем подгруппа $\tilde{h}^{k-1}(A)$ зависит, вообще говоря, от выбора точки x , в то время как подгруппа Δ от выбора x не зависит. В дальнейшем, при изучении гомологического случая, мы увидим существенную разницу между гомологическим и когомологическим вариантами теории. Разница эта особенно ярко проявляется в только что изученной ситуации $X = I \times Y$. Рассмотрим еще один вопрос: поведение алгебраической кограницы при непрерывных деформациях компактов.

Пусть $f: I \times Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение и $x \in X$ — точка, не принадлежащая образу $f(I \times Y)$. Если весь компакт X покрыт образом $I \times Y$, то заменим X на $X' = X \cup x$, где $x \notin X$. Положим $A_0 = f(0 \times Y) \cup x$, $A_1 = f(1 \times Y) \cup x$, $A = A_0 \cup A_1$ (A_0 и A_1 могут пересекаться) и предположим, что $f|_{0 \times Y}$ — гомеоморфизм.

Пусть $L_0 \subset \tilde{h}^{k-1}(A_0) \setminus 0$ и $\Gamma = \nabla^k(X, A)$. Тогда существует подмножество $L_1 \subset \tilde{h}^{k-1}(A_1) \setminus 0$ такое, что $\Gamma \cup i^*(A, A_0)^{-1}L_0 = \Gamma \cup i^*(A, A_1)^{-1}L_1$. Докажем это равенство. Достаточно подобрать такое множество L_1 , чтобы $(i^*(A, A_0)^{-1}L_0) \setminus \Gamma = (i^*(A, A_1)^{-1}L_1) \setminus \Gamma$. Отображение f есть гомотопия φ_t отображения $\varphi_0 = f|_{0 \times Y}$ в отображение $\varphi_1 = f|_{1 \times Y}$, а потому (так как φ_0 есть, по предположению, гомеоморфизм множества Y на некоторое подмножество в X) существует непрерывное отображение $g': f(0 \times Y) \rightarrow f(1 \times Y)$, где $g' = \varphi_1 \varphi_0^{-1}$, которое может быть единственным образом продолжено до непрерывного отображения $g: A_0 \rightarrow A_1$, поскольку $x \notin f(0 \times Y)$ и можно положить $g(x) = x$. Следующая диаграмма гомотопно коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{g} & A_1 \\ & \searrow i_0 & \swarrow i_1 \\ & X & \end{array}$$

(где i_0, i_1 — вложения). Положим $L_1 = (g^*)^{-1}L_0 \subset \tilde{h}^{k-1}(A_1) \setminus 0$ и покажем, что это и есть искомое подмножество. Рассмотрим следующую (вообще говоря, некоммутативную) диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{h}^{k-1}(X) & & \\ & \swarrow i_0^* & \downarrow i^* & \searrow i_1^* & \\ & \tilde{h}^{k-1}(A_0) & \tilde{h}^{k-1}(A) & \tilde{h}^{k-1}(A_1) & \\ & \nwarrow j_0'^* & \swarrow j_1'^* & \nwarrow j_1'^* & \\ & \tilde{h}^{k-1}(A_0) & & \tilde{h}^{k-1}(A_1) & \\ & \xleftarrow{g^*} & & \xrightarrow{g^*} & \end{array}$$

Здесь $i: A \rightarrow X$, $j'_0: A_0 \rightarrow A$, $j'_1: A_1 \rightarrow A$ — вложения, $i_0 = i'_0 j'_0$, $i_1 = i'_1 j'_1$, i_0 гомотопна $i_1 g$, но, вообще говоря, $j_1'^* \neq g^* j_0'^*$, поскольку отображения j'_0 и $j'_1 g$ никак друг с другом не связаны. Покажем сначала, что $(i^*(A, A_0)^{-1}L_0) \setminus \Gamma \subset (i^*(A, A_1)^{-1}L_1) \setminus \Gamma$, т. е. что $((j_0'^*)^{-1}L_0) \setminus \Gamma \subset ((j_1'^*)^{-1}L_1) \setminus \Gamma$. Пусть $z \in ((j_0'^*)^{-1}L_0) \setminus \Gamma$, т. е. $j_0'^*(z) \in L_0$, и $z = i^*(\alpha)$, $\alpha \in \tilde{h}^{k-1}(X)$; тогда имеем $j_0'^*(z) = i_0^*(\alpha) = g^* i_1^*(\alpha) \in L_0$, т. е. $i_1^*(\alpha) \in L_1$ (по определению L_1). Отсюда следует, что $j_1'^*(z) = j_1'^* i^*(\alpha) = i_1^*(\alpha) \in L_1$, т. е. $z \in (j_1'^*)^{-1}L_1$, и $z \notin \Gamma$, т. е. $z \in ((j_1'^*)^{-1}L_1) \setminus \Gamma$, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть $((j_0'^*)^{-1}L) \setminus \Gamma \neq \emptyset$ и требуется доказать, что $((j_0'^*)^{-1}L_0) \setminus \Gamma \supset ((j_1'^*)^{-1}L_1) \setminus \Gamma$ (если $((j_0'^*)^{-1}L_0) \setminus \Gamma = \emptyset$, то тогда $(j_0'^*)^{-1}L_0 \subset \Gamma$ и в качестве L_1 можно взять, например, пустое множество). Пусть $z \in ((j_1'^*)^{-1}L_1) \setminus \Gamma$, т. е. $g^* j_1'^* i^*(\alpha) \in L_0$. Отсюда получаем $g^* i_1^*(\alpha) \in L_0$, т. е. $i_0^*(\alpha) \in L_0$, $j_0'^* i^*(\alpha) = j_0'^*(z) \in L_0$, т. е. $z \in (j_0'^*)^{-1}L_0$, что и требовалось доказать. Отметим, что если $((j_0'^*)^{-1}L_0) \setminus \Gamma \neq \emptyset$, то и $L_1 \neq \emptyset$.

Теорема 25.1. Пусть $A = \bigcup_{r=1}^N A_r$, $A_r \cap A_{r+1} = D_r$, $1 \leq r \leq N-1$, $A_r \cap A_s = x$, если $|r-s| > 1$ (где точка x принадлежит каждому D_r). Положим $\Gamma_r = \tilde{h}^{k-2}(D_r) \setminus 0$, и пусть B_r — такие компакты, что $\nabla^{k-1}(B_r, D_r) = \Gamma_r$, $1 \leq r \leq N-1$. Рассмотрим компакты $C_r = A_r \cup B_r \cup B_{r-1}$, причем $B_0 = B_N = x$, $D_0 = D_N = \emptyset$, $C = A \cup \bigcup_{r=1}^{N-1} B_r = \bigcup_{r=1}^N C_r$. Тогда выполнено соотношение

$$\bigcup_{r=1}^N i^*(C, C_r)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0) \supset i^*(CA)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0).$$

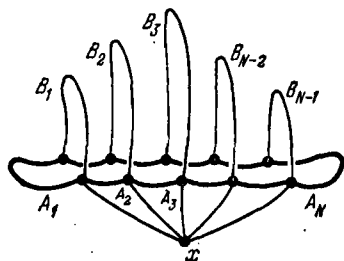
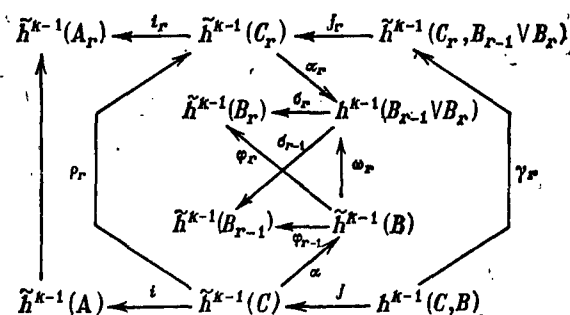


Рис. 68.

Доказательство. Рассмотрим компакт C и предположим сначала, что $A \cap B_r = D_r$ для всех r , $1 \leq r \leq N-1$, и что $B_r \cap B_s = x$, если $r \neq s$; в дальнейшем мы докажем, что это ограничение можно снять. Пусть $B = \bigcup_{r=1}^{N-1} B_r$, $D = \bigcup_{r=1}^{N-1} D_r$ (рис. 68). Рассмотрим для каждого r , $1 \leq r \leq N$, коммутативную диаграмму:



Пусть $z \in i^*(C, A)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0) = i^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0)$ (в частности, $z \neq 0$). Требуется доказать, что существует номер r такой, что $z \in \rho_r^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0)$, т. е. $\rho_r(z) \neq 0$ в $\tilde{h}^{k-1}(C_r)$. Допустим противное, пусть $\rho_r(z) = 0$ для любого r ; тогда, поскольку $\alpha, \rho_r = \omega, \alpha$, имеем $0 = \alpha, \rho_r(z) = \omega, \alpha(z)$, где $\alpha(z) \in \tilde{h}^{k-1}(B)$. Но тогда получаем $\varphi_r \alpha(z) = \sigma, \omega, \alpha(z) = 0$ и $\varphi_{r-1} \alpha(z) = 0$. Поскольку это верно при любом r , то $\varphi_r \alpha(z) = 0$ при $1 \leq r \leq N$, а так как $B = \bigcup_{r=1}^{N-1} B_r$, где $B_r \cap B_s = x$ при $r \neq s$ по предположению, то в силу леммы 25.2 $\alpha(z) = 0$. В силу точности последователь-

ности $\tilde{h}^{k-1}(B) \leftarrow \tilde{h}^{k-1}(C) \leftarrow h^{k-1}(C, B)$ отсюда следует, что $z = j(m)$, $m \in h^{k-1}(C, B)$. Возьмем элементы $\gamma_r(m) \in h^{k-1}(C_r, B_{r-1} \vee B_r)$; тогда, так как $\rho_r(z) = 0$, то $0 = \rho_r j(m) = j_r \gamma_r(m)$ при каждом r . Расс отрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^{k-1}(C_r) & \xleftarrow{j_r} h^{k-1}(C_r, B_{r-1} \vee B_r) & \xleftarrow{\delta_r} \tilde{h}^{k-2}(B_{r-1} \vee B_r) \\ \downarrow & \downarrow \psi_r & \downarrow e_r \\ \tilde{h}^{k-1}(A_r) & \leftarrow h^{k-1}(A_r, D_{r-1} \vee D_r) & \xleftarrow{\delta'_r} \tilde{h}^{k-2}(D_{r-1} \vee D_r) \end{array}$$

Поскольку $A_r \cap A_s = x$ при $|r-s| > 1$, то $D_r \cap D_s = x$ при $r \neq s$, а так как $B_r \cap B_s = x$ и $r \neq s$, то следующая диаграмма также коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^{k-2}(B_{r-1} \vee B_r) & \simeq & \tilde{h}^{k-2}(B_{r-1}) \oplus \tilde{h}^{k-2}(B_r) \\ \downarrow e_r & & \downarrow \\ \tilde{h}^{k-2}(D_{r-1} \vee D_r) & \simeq & \tilde{h}^{k-2}(D_{r-1}) \oplus \tilde{h}^{k-2}(D_r) \end{array}$$

Так как $\nabla^{k-1}(B_r, D_r) \supset \tilde{h}^{k-2}(D_r) \setminus 0$, то получаем, что $e_r \equiv 0$, а тогда $\psi_r \delta_r = \delta'_r e_r \equiv 0$ на группе $\tilde{h}^{k-2}(B_{r-1} \vee B_r)$. Поскольку вложение $(A_r, D_{r-1} \vee D_r) \rightarrow (C_r, B_{r-1} \vee B_r)$ является относительным гомеоморфизмом (напомним, что $A \cap B_r = D_r$), то, в силу относительной инвариантности теории h^* , имеем, что ψ_r является изоморфизмом, а тогда $\delta_r \equiv 0$, т. е. j_r — мономорфизм. Выше было установлено, что $j_r \gamma_r(m) = 0$, откуда $\gamma_r(m) = 0$ при любом r . Поскольку, в силу леммы 25.2, $h^{k-1}(C, B) = \bigoplus_r h^{k-1}(C_r, B_{r-1} \vee B_r)$,

то это означает, что $m = 0$, а тогда $z = j(m) = 0$, что противоречит исходному предположению. Итак, в предположении, что $B_r \cap B_s = x$ при $r \neq s$ и $A \cap B_r = D_r$, мы доказали значительно более сильное утверждение, чем то, которое было сформулировано выше, а именно мы доказали, что если $z \in \tilde{h}^{k-1}(C) \setminus 0$, то существует r такое, что $z \in \rho_r^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0)$, т. е. $\rho_r(z) \neq 0$; иными словами, $\tilde{h}^{k-1}(C) \setminus 0 = \bigcup i^*(C, C_r)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0)$, а потому и подавно

$$i^*(C, A)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0) \subset \bigcup i^*(C, C_r)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0). \quad \text{В общем}$$

случае первое равенство, конечно, разрушается, но оказывается, что второе включение сохраняется, что и обеспечит нам доказательство теоремы. Итак, пусть теперь $A \cap B_r \supset D_r$ и $B_r \cap B_s = x$. Расклеим лишние точки, чтобы вернуться в ситуацию, изученную выше, т. е. построим компакты $\tilde{C} = \bigcup \tilde{C}_r$, $\tilde{C}_r = \tilde{A}_r \cup \tilde{B}_{r-1} \cup B_r$, где

$\tilde{A}_r \approx A_r, \tilde{B}_r \approx B_r$ (гомеоморфизмы), $\tilde{B}_r \cap \tilde{B}_s = x$ при $r \neq s$, $A \cap \tilde{B}_r = \tilde{D}_r$, $\tilde{A} \approx A$, и построим непрерывное отображение $f: \tilde{C} \rightarrow C$, являющееся гомеоморфизмом на $\tilde{A}$ и на каждом из $\tilde{B}_r$ и осуществляющее необходимую склейку для получения прежнего

компакта C . Если положить $f_r = f|_{\tilde{C}_r}$, то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \tilde{h}^{k-1}(\tilde{C}_r) & \xleftarrow{f_r^*} & \tilde{h}^{k-1}(C_r) & \\
 i_r^* \nearrow & & & & \nwarrow i_r^* \\
 \tilde{h}^{k-1}(\tilde{C}) & \xleftarrow{f^*} & & \tilde{h}^{k-1}(C) & \\
 i^* \searrow & & & & \swarrow i^* \\
 & \tilde{h}^{k-1}(\tilde{A}) & \xleftarrow{a^* = I} & \tilde{h}^{k-1}(A) &
 \end{array}$$

Пусть $a \in i^*(C, A)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0) \subset \tilde{h}^{k-1}(C)$, $i^*(a) \neq 0$; тогда $e^*i^*(a) \neq 0$, т. е. $i^*f^*(a) \neq 0$, $f^*(a) \in i^*(\tilde{C}, A)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0)$, а тогда, по доказанному выше, существует r такое, что $f^*(a) \in i^*(\tilde{C}, \tilde{C}_r)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(\tilde{C}_r) \setminus 0)$, т. е. $i_r^*f^*(a) \neq 0$, но тогда $f_r^*i_r^*(a) \neq 0$, т. е. $i_r^*(a) \neq 0$; иными словами, мы указали номер r такой, что $a \in i^*(C, C_r)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0)$, что и требовалось. Теорема доказана.

Теперь мы докажем алгебраический аналог геометрического факта: при склейке двух (или более) компактов по их общей границе получается компакт без границы.

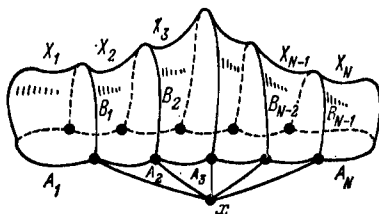


Рис. 69.

Теорема 25.2. Пусть $A = \bigcup_{r=1}^N A_r$, $A_r \cap A_{r+1} = D$, (здесь $1 \leq r \leq N-1$), $A_r \cap A_s = x$, если $|r-s| > 1$. Положим $\Gamma_r = \tilde{h}^{k-2}(D_r) \setminus 0$; пусть B_r — такие компакты, что $\nabla^{k-1}(B_r, D_r) = \Gamma_r$. Положим $C_r = A_r \cup B_{r-1} \cup B_r$, здесь $B_0 = B_N = x$, и пусть X_r — такие компакты, что $\nabla^k(X, A) = \tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0$. Тогда, если $X = \bigcup_{r=1}^N X_r$, то имеет место соотношение $\nabla^k(X, A) = \tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0$.

Геометрический смысл этого утверждения иллюстрируется рис. 69.

Доказательство. Поскольку компакты A_r, B_r, D_r удовлетворяют всем условиям теоремы 25.1, то

$$\bigcup_r i^*(C, C_r)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0) \supset i^*(C, A)^{-1}(\tilde{h}^{k-1}(A) \setminus 0),$$

где $C = \bigcup_r C_r$. Положим $X' = X$, $X'_r = X_r$, $A'_r = C_r$, $A' = A$, $B' = A' \cup \left[\bigcup_r A'_r \right] = A \cup \left[\bigcup_r C_r \right] = C$. Пусть, далее, $L = \tilde{h}^{k-1}(A') \setminus 0$,

$L_r = \tilde{h}^{k-1}(A'_r) \setminus 0$; тогда ясно, что $L_r = \tilde{h}^{k-1}(C_r) \setminus 0 = \nabla^k(X_r, C_r) = \nabla^k(X'_r, A'_r)$, и утверждение теоремы 25.1 приобретает следующий вид: $i^*(B', A')L \subset \bigcup_r i^*(B', A')^{-1}L_r$. Так как все предположения леммы 25.3 выполнены, мы получаем $L \subset \nabla^k(X', A')$, т. е. $\tilde{h}^{k-1}(A') \setminus 0 \subset \nabla^k(X, A)$, что и требовалось. Теорема доказана.

§ 26. Гомологический случай. Вычисление границы пары $(X, A) = \bigcup_r (X_r, A_r)$ через границы пар (X_r, A_r)

Для $h_* = H_*$ некоторые из следующих ниже лемм совпадают с полученными в [35]. Оказывается, что все они вписываются в некоторую очень общую и прозрачную схему, охватывающую даже классическую задачу Плато — пленки с параметризацией.

Лемма 26.1. Пусть $X = \bigvee_{r=1}^N X_r$, где $X_r \cap X_s = x$ при $r \neq s$, и пусть $A_r \subset X_r$ — такие компакты, что $x \in A_r$ при каждом r . Тогда гомоморфизмы $i_{r*}: h_k(X_r, A_r) \rightarrow h_k(X, A)$ (где i_r — вложение) образуют инъективное представление группы $h_k(X, A)$ в виде прямой суммы $\bigoplus_r h_k(X_r, A_r)$, т. е. любой элемент $u \in h_k(X, A)$ однозначно представим в виде суммы $u = \sum_{r=1}^N i_{r*}(u_r)$, где $u_r \in h_k(X_r, A_r)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 25.1 и приводится на основе рассуждений доказательства теоремы 1.13.2 (см. [10]).

Лемма 26.2. Пусть $X = \bigcup_{r=1}^N X_r$, $A = \bigcup_{r=1}^N A_r$, где $A_r \subset X_r$, $X_r \cap X_s = A_r \cap A_s$ при $r \neq s$. Пусть $x \in A$ при каждом r и $i_r: (X_r, A_r) \rightarrow (X, A)$ — вложения. Тогда гомоморфизмы $i_{r*}: h_k(X_r, A_r) \rightarrow h_k(X, A)$ образуют инъективное представление группы $h_k(X, A)$ в виде прямой суммы $\bigoplus_r h_k(X_r, A_r)$.

Это следует из относительной инвариантности теории h_* на категории U_c и из леммы 26.1.

Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — непрерывное отображение, $x \in A$, $y = f(x) \in B$, $L \subset \Delta_k(X, A)$ — произвольная подгруппа. Рассмотрим подгруппу $L_1 = f_*(L)$. Тогда мы утверждаем, что $L \subset \Delta_k(Y, B)$. Доказательство, очевидно, следует из коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_{k-1}(A) & \rightarrow & \tilde{h}_{k-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{h}_{k-1}(B) & \rightarrow & \tilde{h}_{k-1}(Y) \end{array}$$

В частности, если $L \subset \Delta_k(X, A)$, $x \in A \subset X \subset Y$, то $L \subset \Delta_k(Y, A)$.

Лемма 26.3. Пусть $X = \bigcup_{r=1}^N X_r$, $A_r \subset X_r$, $A \subset X$, $x \in A_r$ при каждом r . Положим $B = A \cup \left[\bigcup_r A_r \right]$, и пусть $L \subset \tilde{h}_{k-1}(A)$ и $L_r \subset \Delta_k(X_r, A_r)$. Предположим, что $i_*(B, A)L \subset \sum_r i_*(B, A_r)L_r$. Тогда $L \subset \Delta_k(X, A)$.

Доказательство. Требуется доказать, что $L \subset \text{Ker } i_*$, где $i = i(X, A)$. Имеем

$$\begin{aligned} i_*(L) &= i_*(X, B) i_*(B, A)L \subset i_*(X, B) \sum_r i_*(B, A_r)L_r = \\ &= \sum_r i_*(X, A_r)L_r = \sum_r i_*(X, X_r) i_*(X, A_r)L_r = 0, \end{aligned}$$

поскольку $i_*(X_r, A_r)L_r = 0$. Лемма доказана.

Здесь и в дальнейшем через $A+B$ обозначается подгруппа C , составленная из элементов вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$, A и B — две подгруппы в абелевой группе.

Лемма 26.4. Пусть $X = \bigcup_{r=1}^N X_r$, $A_r \subset X_r$, $A \subset X$, $A \cap X_r \subset A_r$, $X_r \cap X_s = A_r \cap A_s$, если $r \neq s$, $x \in A$ и $x \in A_r$ при каждом r . Положим $B = \bigcup_r A_r$; тогда $B \supset A$ и $\Gamma_r = \Delta_k(X_r, A_r) \subset \tilde{h}_{k-1}(A_r)$. Имеет место следующее соотношение:

$$\Delta_k(X, A) = i_*(B, A)^{-1} \left(\sum_r i_*(B, A_r) \Gamma_r \right).$$

Доказательство. Обозначим через L подгруппу $i_*(B, A)^{-1} \left(\sum_r i_*(B, A_r) \Gamma_r \right)$; тогда ясно, что $i_*(B, A)L \subset \sum_r i_*(B, A_r) \Gamma_r$ (точного равенства здесь может и не быть), и, поскольку выполнены все предположения леммы 26.3, отсюда следует, что $L \subset \Delta_k(X, A)$. Осталось доказать, что $L \supset \Delta_k(X, A)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} h_k(X_r, A_r) & \xrightarrow{\partial_r} & \tilde{h}_{k-1}(A_r) & \xrightarrow{\omega_r} & \tilde{h}_{k-1}(X_r) \\ \downarrow \tau_r & & \downarrow \nu_r & & \downarrow \varphi'_r \\ h_k(X, B) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{k-1}(B) & \xrightarrow{\omega} & \tilde{h}_{k-1}(X) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \xi \\ h_k(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{k-1}(A) & \xrightarrow{\omega} & \tilde{h}_{k-1}(X) \end{array}$$

Пусть $h \in \Delta_k(X, A)$, т. е. $\omega(h) = 0$; это означает, что $h = \partial(m)$, $m \in h_k(X, A)$. Отсюда имеем $\alpha(h) = \partial'\beta(m)$, т. е. $\omega'\alpha(h) = 0$. Так как $\beta(m) \in h_k(X, B)$, то, в силу леммы 26.2, гомоморфизмы τ_r разлагают группу $h_k(X, B)$ в прямую сумму, а потому $\beta(m)$ допускает однозначное представление в виде $\beta(m) = \sum_r \tau_r(t_r)$,

где $t_r \in h_k(X_r, A_r)$; отсюда следует, что $\partial'\beta(m) = \sum_r \partial'\tau_r(t_r) = \sum_r \gamma_r \partial_r(t_r)$, причем ввиду точности $\omega_r \partial_r(t_r) = 0$, $\varphi_r = \partial_r(t_r)$ принадлежит Γ_r , т. е. $\partial'\beta(m) = \sum_r \gamma_r(\varphi_r)$, где $\varphi_r \in \Gamma_r$, $\alpha(h) \in \sum_r \gamma_r(\Gamma_r)$.

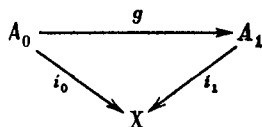
Окончательно получаем, что $h \in \alpha^{-1}\left[\sum_r \gamma_r(\Gamma_r)\right]$, что и требовалось доказать.

Отметим, что хотя формулировки лемм 26.4 и 25.4 не являются двойственными, тем не менее их утверждения можно связать некоторой формальной аналогией, а именно: если гомоморфизм $\alpha: \tilde{h}^{k-1}(B) \rightarrow \tilde{h}^{k-1}(A)$ является эпиморфизмом, то формула $\nabla_k(X, A) = \delta_1^{-1}\left\{\left[\beta\left[\bigcup_r \tau_r^{-1}\delta_r(\Gamma_r)\right]\right] \setminus 0\right\}$ аналогична формуле леммы 26.4.

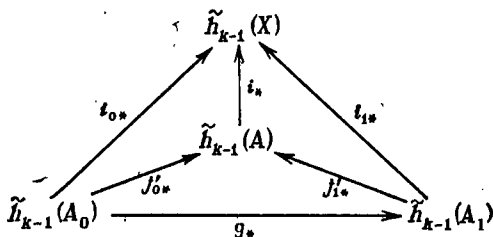
Рассмотрим поведение границы $\Delta_k(X, A)$ в тех случаях, когда $X = I \times Y$, $A = (0 \times Y) \cup (1 \times Y)$, j_0 и j_1 — два вложения Y на нижнее и верхнее основания цилиндра. Выделим в $\tilde{h}_{k-1}(A)$ подгруппу $\Delta' = \{j_{1*}(h) - j_{0*}(h)\} \cong \{j_{1*}(h), -j_{0*}(h)\}$, где $h \in \tilde{h}_{k-1}(Y)$, $\tilde{h}_{k-1}(A) = \tilde{h}_{k-1}(Y) \oplus \tilde{h}_{k-1}(Y)$, а точка x — произвольная точка в A . Напомним, что подгруппа $\tilde{h}_{k-1}(A)$ вообще не зависит от выбора точки x . Тогда оказывается, что $\Delta_k(X, A) \supset \Delta'$. Действительно, поскольку два вложения $i(X, A)j_0$ и $i(X, A)j_1$ гомотопны, то $\Delta' \subset \text{Ker } i_*(X, A)$, что и требовалось. Если вспомнить соответствующий кохомологический факт, то мы увидим, что в случае кохомологий основную роль играет диагональ $\Delta \subset h^{k-1}(A)$, а в случае гомологий оценка снизу на алгебраическую границу пары (X, A) выражается через побочную диагональ $\Delta' \subset \tilde{h}_{k-1}(A)$.

Как и в кохомологическом варианте, рассмотрим поведение границы Δ_k при деформации компактов. Пусть $f: I \times Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение и $x \in X$ — такая точка, что $x \notin f(I \times Y)$ (в противном случае можно всегда заменить X на $X' = X \cup x$). Положим $A_0 = f(0 \times Y) \cup x$, $A_1 = f(1 \times Y) \cup x$, $A = A_0 \cup A_1$ и предположим, что отображение $f|_{0 \times Y}$ — гомеоморфизм. Пусть $\tilde{h}_{k-1}(A_0) \supset L$ и $\Gamma = \Delta_k(X, A)$. Тогда существует подгруппа $L \subset \tilde{h}_{k-1}(A_1)$ такая, что $\Gamma + i_*(A, A_0)L = \Gamma + i_*(A, A_1)L$. Пусть $g: A_0 \rightarrow A_1$ — непрерывное отображение, определенное нами в § 25 и такое, что

диаграмма



гомотопно коммутативна (где i_0 и i_1 — вложения). Положим $L = g_* L_0$ и рассмотрим следующую диаграмму (вообще говоря, некоммутативную в нижнем треугольнике):



Здесь $i_0 = ij_0$, $i_1 = ij_1$, $i_0 \sim i_1 g$. Покажем сначала, что $\Gamma + j'_{0*}(L) \supset \Gamma + j'_{1*}(L_1)$. Пусть $\alpha \in \Gamma + j'_{1*}(L_1)$, тогда $\alpha = \gamma + j'_{1*} g_*(m)$, где $m \in L_0$. Положим $m' = j'_{0*}(m) \in \tilde{h}_{k-1}(A)$, тогда получим $i_*(m') = i_* j'_{0*}(m) = i_{0*}(m)$ и, кроме того, $i_* j'_{1*} g_*(m) = i_{1*} g_*(m) = i_{0*}(m)$, т. е. $i_*(m') = i_* j'_{1*} g_*(m)$, откуда следует, что $m' - j'_{1*} g_*(m) \in \text{Ker } i_* = \Gamma$ (по определению Γ), т. е. $m' - j'_{1*} g_*(m) = \gamma_1 \in \Gamma$.

Отсюда $\alpha = \gamma + j'_{1*} g_*(m) = \gamma + m' - \gamma_1 = \gamma_2 + m'$, где $\gamma_2 \in \Gamma$, т. е. $\alpha = \gamma_2 + j'_{0*}(m)$, где $m \in L_0$, т. е. $\alpha \in \Gamma + j'_{0*}(L_0)$, что и требовалось доказать. Обратно, докажем, что $\Gamma + j'_{0*} L_0 \subset \Gamma + j'_{1*} L_1$. Пусть $a = \gamma + j'_{0*}(m)$, где $m \in L_0$, $\gamma \in \Gamma$. Тогда определен элемент $j'_{1*} g_*(m) \in \tilde{h}_{k-1}(A)$, который можно сравнить с $j'_{0*}(m)$. Ясно, что $i_* j'_{0*}(m) = i_{0*}(m)$ и в то же время $i_* j'_{1*} g_*(m) = i_{1*} g_*(m) = i_{0*}(m)$, т. е. $i_* j'_{0*}(m) = i_* j'_{1*} g_*(m)$, $j'_{0*}(m) = \gamma_1 + j'_{1*} g_*(m)$, где $\gamma_1 \in \Gamma$; отсюда следует, что $a = \gamma + j'_{0*}(m) = \gamma + \gamma_1 + j'_{1*} g_*(m) = \gamma_2 + j'_{1*}(q)$, где $\gamma_2 \in \Gamma$, $q \in L_1$, что и требовалось доказать.

Теорема 26.1. Пусть $A = \bigcup_{r=1}^N A_r$, $A_r \cap A_{r+1} = D_r$, $1 \leq r \leq N-1$, $A_r \cap A_s = x$, если $|r-s| > 1$ (где точка x принадлежит каждому D_r). Положим $\Gamma_r = \tilde{h}_{k-2}(D_r)$, $1 \leq r \leq N-1$, и пусть B_r — такие компакты, что $\Delta_{k-1}(B_r, D_r) = \Gamma_r$. Рассмотрим компакты $C_r = A_r \cup B_r \cup B_{r-1}$, где $1 \leq r \leq N$, причем $B_0 = B_N = x$, $D_0 = D_N = \emptyset$, $C = A \cup \left[\bigcup_{r=1}^{N-1} B_r \right] = \bigcup_{r=1}^N C_r$. Тогда выполнено соотно-

$$\text{шение } \sum_{r=1}^N i_*(C, C_r) \tilde{h}_{k-1}(C_r) \supset i_*(C, A) \tilde{h}_{k-1}(A).$$

Доказательство. Рассмотрим компакт C и предположим сначала, что $A \cap B_r = D_r$ для всех r , $1 \leq r \leq N-1$, и что $B_r \cap B_s = x$, если $r \neq s$; в дальнейшем мы редуцируем общую ситуацию к этому частному случаю. Пусть $B = \bigvee_{r=1}^{N-1} B_r$, $D = \bigvee_{r=1}^{N-1} D_r$ (см. рис. 65); построим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_r h_{k-1}(C_r, B_{r-1} \vee B_r) & \xleftarrow{\bigoplus_r \varphi_r} & \bigoplus_r \tilde{h}_{k-1}(C_r) & \xleftarrow{\bigoplus_r \gamma_r} & \bigoplus_r \tilde{h}_{k-1}(B_r \vee B_{r-1}) \\
 \downarrow \omega = \bigoplus_r \omega_r & & \downarrow \alpha = \sum_r \alpha_r & & \downarrow \beta = \sum_r \beta_r \\
 h_{k-1}(C, B) & \xleftarrow{\xi} & \tilde{h}_{k-1}(C) & \xleftarrow{\psi} & \tilde{h}_{k-1}(B)
 \end{array}$$

Строки этой диаграммы являются точными последовательностями, а через $\bigoplus_r \varphi_r$ и $\bigoplus_r \gamma_r$ обозначены прямые суммы гомоморфизмов $\varphi_r: h_{k-1}(C_r) \rightarrow h_{k-1}(C_r, B_{r-1} \vee B_r)$ и $\gamma_r: \tilde{h}_{k-1}(B_{r-1} \vee B_r) \rightarrow \tilde{h}_{k-1}(C_r)$ соответственно. Отметим, что, хотя $B = \bigvee_r B_r$, гомомор-

физм β не изоморфизм и имеет ядро, изоморфное $\tilde{h}_{k-1}(B)$. Гомоморфизм β не является прямой суммой гомоморфизмов $\beta_r: \tilde{h}_{k-1}(B_{r-1} \vee B_r) \rightarrow \tilde{h}_{k-1}(B)$, поэтому мы использовали обозначение $\beta = \sum_r \beta_r$. Докажем, что в наших предположениях (т. е. $A \cap B_r =$

$= D_r$, $B_r \cap B_s = x$, $r \neq s$) выполнено более сильное утверждение, чем сформулированное в условии теоремы, а именно докажем,

что $\tilde{h}_{k-1}(C) = \sum_{r=1}^N i_*(C, C_r) h_{k-1}(C_r)$. Предварительно установим,

что $\text{Ker}(\xi) \subset \sum_r i_*(C, C_r) \tilde{h}_{k-1}(C_r)$. Пусть $a \in \tilde{h}_{k-1}(C)$ и $\xi(a) = 0$;

тогда $a = \psi(b)$, $b \in \tilde{h}_{k-1}(B)$, и поскольку гомоморфизм β является эпиморфизмом, то $b = \beta(b')$, где $b' = \sum_r b'_r$, $b'_r \in \tilde{h}_{k-1}(B_r \vee B_{r-1})$, и

разложение $b' = \sum_r b'_r$ однозначно. Отсюда следует, что $a =$

$= \alpha(\bigoplus_r \gamma_r) b' = \sum_r \alpha \gamma_r(b'_r) = \sum_r \alpha(\xi_r)$, где $\xi_r \in \tilde{h}_{k-1}(C_r)$, т. е. $a \in$

$\in \sum_r \alpha_r(\xi_r)$, что и требовалось. Пусть теперь $a \in \tilde{h}_{k-1}(C_r)$ и $\xi(a) \neq 0$.

Поскольку для пары $(C, B) = \bigcup_r (C_r, B_{r-1} \vee B_r)$ выполнены все предположения леммы 26.2, то гомоморфизм ω устанавливает изоморфизм между $h_{k-1}(C, B)$ и $\bigoplus_r h_{k-1}(C_r, B_{r-1} \vee B_r)$, т. е. $\xi(a) =$

$= \omega(c)$, где $c = \sum_r c_r$, причем элемент c и его разложение опре-

делены однозначно. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{h}_{k-1}(C_r) & \xrightarrow{\varphi_r} & h_{k-1}(C_r, B_{r-1} \vee B_r) & \xrightarrow{\partial_r} & \tilde{h}_{k-2}(B_{r-1} \vee B_r) & = & \tilde{h}_{k-2}(B_{r-1}) \oplus \tilde{h}_{k-2}(B_r) \\ \downarrow \tau_r & & \approx \downarrow u_r & & \downarrow \rho_r \equiv 0 & & \downarrow \nu_r \equiv 0 \\ \tilde{h}_{k-1}(A_r) & \xrightarrow{\varepsilon_r} & h_{k-1}(A_r, D_{r-1} \vee D_r) & \xrightarrow{\partial'_r} & \tilde{h}_{k-2}(D_{r-1} \vee D_r) & = & \tilde{h}_{k-2}(D_{r-1}) \oplus \tilde{h}_{k-2}(D_r) \end{array}$$

В этой диаграмме гомоморфизм u_r является изоморфизмом (поскольку вложение $(A_r, D_{r-1} \vee D_r) \rightarrow (C_r, B_{r-1} \vee B_r)$ является относительным гомеоморфизмом), а гомоморфизм ν_r тривиален, ибо $\Delta_{k-1}(B_r, D_r) = \Gamma_r = \tilde{h}_{k-2}(D_r)$. Следовательно, $\rho_r \equiv 0$ для любого r . Так как $\rho_r \partial'_r = \partial_r u_r = 0$ и u_r — изоморфизм, то $\partial_r \equiv 0$ на всей группе $h_{k-1}(C_r, B_{r-1} \vee B_r)$, т. е. гомоморфизм φ_r является эпиморфизмом.

Отсюда следует, что любой элемент c_r (где $c = \sum_r c_r$, см. выше) представим в следующем виде: $c_r = \varphi_r(c'_r)$, а тогда $c = \left(\bigoplus_r \varphi_r\right)c'$, где

$c' = \sum_r c'_r$; отсюда имеем $\xi\alpha(c') = \omega\left(\bigoplus_r \varphi_r\right)c' = \omega(c) = \xi(a)$, т. е. $\xi(a - \alpha(c')) = 0$, $a = \alpha(c') + t$, где $t \in \text{Ker}(\xi)$. По доказанному выше $t = \alpha(c'')$, т. е. $a = \alpha(c' + c'') = \sum_r \alpha_r(c'_r + c''_r)$, что и требовалось

доказать.

Переходим теперь к общему случаю: пусть $A \cap B_r \supset D_r$ и $x \in B_r \cap B_s$. Расклеивая лишние точки, мы можем вернуться в предыдущую ситуацию, обладая комплектами $\tilde{C} = \bigcup_r \tilde{C}_r$, $\tilde{D}_r = D_r$, $\tilde{B}_r = B_r$, $\tilde{A}_r = A_r$ и отображением $f: \tilde{C} \rightarrow C$, осуществляющим исходную склейку. Получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & \bigoplus_r \tilde{h}_{k-1}(\tilde{C}_r) & \xrightarrow{\oplus f_*} & \bigoplus_r \tilde{h}_{k-1}(C_r) & \\ \swarrow \Sigma i_{r*} & & & & \searrow \Sigma i_{r*} \\ \tilde{h}_{k-1}(\tilde{C}) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{h}_{k-1}(C) & & \\ \nwarrow i_* & & \nearrow i_* & & \\ & \tilde{h}_{k-1}(\tilde{A}) & \xrightarrow{e_* = I} & \tilde{h}_{k-1}(A) & \end{array}$$

Здесь, по доказанному выше, $\tilde{h}_{k-1}(\tilde{C}) = \sum_r i_{r*} \left(\bigoplus_r \tilde{h}_{k-1}(\tilde{C}_r) \right)$. Пусть

$c \in \tilde{h}_{k-1}(C)$ и $c = i_*(a)$; тогда

$$c = i_* e_*(\tilde{a}) = f_* i_*(\tilde{a}) = f_*(\Sigma i_{r*})(m) = \Sigma i_{r*}(\oplus f_*) m = \sum_r i_{r*}(c_r),$$

где $c_r \in \tilde{h}_{k-1}(C_r)$, что и завершает доказательство.

Теорема 26.2. Пусть $A = \bigcup_{r=1}^N A_r$, $A_r \cap A_{r+1} = D_r$ (здесь $1 \leq r \leq N-1$), $A_r \cap A_s = x$, если $|r-s| > 1$. Положим $\Gamma_r = \tilde{h}_{k-2}(D_r)$, и пусть B_r — такие компакты, что $\Delta_{k-1}(B_r, D_r) = \Gamma_r$. Положим $C_r = A_r \cup B_{r-1} \cup B_r$ ($1 \leq r \leq N-1$), здесь $B_0 = B_N = x$, и пусть X_r — такие компакты, что $\Delta_k(X_r, C_r) = \tilde{h}_{k-1}(C_r)$. Тогда, если $X = \bigcup_{r=1}^N X_r$, то имеет место соотношение

$$\Delta_k(X, A) = \tilde{h}_{k-1}(A).$$

Доказательство. Поскольку выполнены все предположения теоремы 26.1, то имеем $\sum_i i_*(C, C_r) \tilde{h}_{k-1}(C_r) \supset i_*(C, A) \tilde{h}_{k-1}(A)$. Положим $X' = X$, $A' = A$, $X'_r = X_r$, $A'_r = C_r$, $L'_r = \tilde{h}_{k-1}(C_r) = \Delta_k(X'_r, A'_r)$, $B' = C = A' \cup \left[\bigcup_r A'_r \right]$. Тогда в этих новых обозначениях мы имеем $i_*(B', A') \tilde{h}_{k-1}(A') \subset \sum_r i_*(B', A'_r) L'_r$, т. е. мы попадаем в ситуацию, когда применима лемма 26.3. Применяя ее, получаем, что $\tilde{h}_{k-1}(A) = \tilde{h}_{k-1}(A') \subset \Delta_k(X, A)$, что и требовалось доказать.

§ 27. Замкнутость, инвариантность и устойчивость вариационных классов

27.1. S-перестройки поверхностей в римановом многообразии. До сих пор все наши построения происходили в категории компактных пар. Теперь наступил момент, когда мы введем в рассмотрение риманово многообразие M и будем изучать компактные пары (X, A) , вложенные в это многообразие.

Определение 27.1.1. Пусть $(X, A) \subset M$ — произвольная компактная пара, $x \in A$, $\tilde{h}$ — непрерывная и относительно инвариантная теория (ко)гомологий на U_C , и пусть $\sigma = \{k_i\}$ — фиксированный набор попарно различных целых чисел, G — открытое множество в M такое, что $\bar{G} \cap A = \emptyset$ (через $\bar{G}$ обозначено замыкание G в M). Рассмотрим следующие компакты в M : $X_1 = (X \cap \bar{G}) \cup x$, $A_1 = (X \cap \partial G) \cup x$ (тогда $A_1 \subset X_1$), $Y = Y_1 \cup Y_2$, где $Y_2 = X \setminus G$, а Y_1 — такой компакт в M , что $\Delta_{k_i}(Y_1, A_1) \supset \Delta_{k_i}(X_1, A_1)$ для каждого $k_i \in \sigma$ (соответственно в случае когомологий должно выполняться включение $\nabla^{k_i}(Y_1, A_1) \supset \nabla^{k_i}(X_1, A_1)$). Мы будем говорить, что компакт $Y = Y_1 \cup Y_2$ получен S -перестройкой компакта X (с помощью открытого множества G , компакта $Y_1 \subset M$ и теории (ко)гомологий $\tilde{h}$) в алгебраических размерностях $\sigma = \{k_i\}$, и будем

обозначать его через $Y_1(X)$. Будем говорить, что компактная пара (Y, A) получена S -перестройкой пары (X, A) (рис. 70).

Множество компактов Y_1 с указанным в определении 27.1.1 свойством, непусто: так, например, можно взять в качестве Y_1 компакт X_1 , тогда $Y = X$. Поскольку $Y_1 \supset A_1$, то точка x также должна принадлежать Y_1 , т. е. $Y_1 \not\subset \bar{G}$.

Среди множества всех S -перестроек пары (X, A) естественно выделен класс перестроек, обладающих важным дополнительным свойством: они целиком заклеивают компакт A_1 . Такие специальные перестройки будут играть важную роль, а потому мы оформим эту ситуацию в виде следующего определения.

Определение 27.1.2. Пусть $(X, A) \subset M$ — компактная пара, и пусть задана S -перестройка этой пары $Y = Y_1(X)$. Предположим, что компакт Y_1 обладает следующим дополнительным свойством: $\Delta_{k_1}(Y_1, A_1) \supset \tilde{h}_{k_1-1}(A_1)$ (соответственно в случае когомологий $\nabla^{k_1}(Y_1, A_1) \supset \tilde{h}^{k_1-1}(A_1) \setminus 0$). Тогда мы будем называть такую S -перестройку полной ' S -перестройкой компакта X в размерностях $\sigma = \{k_l\}$, а компакт Y будем обозначать через ' $Y_1(X)$ '.

Компакт Y_1 с указанным в определении 27.1.2 свойством может и не существовать (например, если множество ∂G высекает из компакта X множество A_1 , на котором оседает какой-либо нетривиальный (ко)цикл многообразия M), однако в наших дальнейших приложениях множество G мы будем выбирать достаточно малым, что гарантирует существование таких компактов Y_1 , например, можно взять $Y_1 = \bar{C}A_1$.

27.2. Замкнутость вариационных классов относительно предельных переходов. Рассмотрим множество всех непустых замкнутых подмножеств в римановом многообразии M , обозначим это множество через $\Theta(M)$. Пусть $d(x, y)$ — расстояние на многообразии M между двумя точками x и y . Тогда множество $\Theta(M)$ можно превратить в локально компактное метрическое пространство (а в том случае, когда многообразие M компактно, — в компактное метрическое пространство) путем введения в $\Theta(M)$ метрики $\rho(X, Y)$ (где $X, Y \in \Theta(M)$) по следующей формуле: $\rho(X, Y) = \sup_{x \in X} d(x, Y) + \sup_{y \in Y} d(X, y)$, где через $d(z, B)$ обозначено расстояние точки z до замкнутого множества B .

Все введенные нами вариационные классы $\mathcal{O}$ и $\tilde{\mathcal{O}}$ являются подмножествами в пространстве $\Theta(M)$, а потому наследуют метрику $\rho(X, Y)$, превращаясь в метрические пространства. В дальнейшем все сходимости в пространстве $\Theta(M)$ мы будем понимать

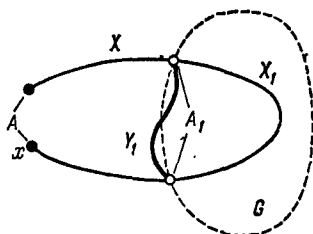


Рис. 70.

как сходимости в метрике $\rho(X, Y)$. Оказывается, что классы $\mathcal{O}$ и $\tilde{\mathcal{O}}$ являются замкнутыми подмножествами в метрическом пространстве $\Theta(M)$. К доказательству этого важного для приложений факта мы и переходим.

Теорема 27.2.1. Пусть M — риманово многообразие без края и $A \subset M$ — фиксированный компакт. Пусть $X_n, n = 1, 2, 3, \dots$, — некоторая последовательность компактов в M , причем все компакты X_n принадлежат одному и тому же классу $\mathcal{O}$ (или $\tilde{\mathcal{O}}$), построенному по некоторой теории h , непрерывной и относительно инвариантной на категории компактных пар. Предположим, что существует компакт $X_0, X_0 \subset M$ и $X_0 \supset A$, такой, что $\rho(X_0, X_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда компакт X_0 принадлежит тому же самому классу $\mathcal{O}$ (или $\tilde{\mathcal{O}}$), что и компакты X_n .

Доказательство. Рассмотрим сначала гомологический случай. Пусть $i_0: A \rightarrow X_0, j_0: X_0 \rightarrow M, i_n: A \rightarrow X_n, j_n: X_n \rightarrow M, n = 1, 2, 3, \dots$, суть вложения, и пусть $X_n \in \mathcal{O} = h_*(A, L, L')$, где $L = \{L_p\}, L' = \{L'_q\}$. Нам дано, что $L_p \subset \text{Ker}(i_{n*}) = \Delta_*(X_n, A)$ и $L'_q \subset \text{Im}(j_{n*}) \subset \tilde{h}_*(M)$. Требуется установить, что $L_p \subset \text{Ker}(i_{0*})$.

Рассмотрим новые компакты $Y_n = \left[\bigcup_{\alpha \geq n} X_\alpha \right] \cup X_0$, и пусть $i'_n: A \rightarrow Y_n,$

$j'_n: Y_n \rightarrow M$ — вложения. Поскольку $X_n \subset Y_n$, то $L_p \subset \text{Ker } i'_{n*}$ и $L'_q \subset \text{Im } j'_{n*}$, т. е. $Y_n \in \tilde{h}_*(A, L, L')$. Ясно, что $Y_n \supset Y_{n+1}$ при любом n и что выполнено соотношение $X_0 = \bigcap_n Y_n = \varprojlim Y_n$, где

через $\varprojlim Y_n$ обозначен обратный предел обратного спектра $\dots \supset Y_n \supset Y_{n+1} \supset \dots$. Далее, ясно, что гомоморфизм i_{0*} является обратным пределом гомоморфизмов i'_{n*} , и, в силу непрерывности теории h_* на категории U_C , мы имеем $\tilde{h}_p(X_0) = \tilde{h}_p(\varprojlim Y_n) = \varprojlim \tilde{h}_p(Y_n)$, откуда получаем, что $\text{Ker } i_{0*} = \varprojlim \text{Ker } i'_{n*}$, а поскольку $L_p \subset \text{Ker } i'_{n*}$ при любом n , то $L_p \subset \text{Ker } i_{0*}$, что и требовалось доказать.

Теперь мы докажем, что $L'_q \subset \text{Im } j_{0*}$. Поскольку теория h^* точна на U_C , то $L'_q \subset \text{Ker } \alpha_{n*}$, где $\alpha_{n*}: \tilde{h}_*(M) \rightarrow h_*(M, Y_n)$, а потому достаточно установить, что $L'_q \subset \text{Ker } \alpha_{0*}$, где $\alpha_{0*}: \tilde{h}_*(M) \rightarrow h_*(M, X_0)$, $\text{Im } j_{0*} = \text{Ker } \alpha_{0*}$. Так как $(M, X_0) = \varprojlim (M, Y_n)$, то $\alpha_{0*} = \varprojlim \alpha_{n*}$, и тогда требуемое утверждение следует из приведенных выше рассуждений для набора L . Рассмотрим теперь когомологический случай.

Сохраним все обозначения, введенные нами выше, и докажем сначала, что $Y_n \in h^*(A, L, L')$, где $L_p \cap \text{Im } i_n^* = \emptyset$ и $L'_q \cap \text{Ker } j_n^* = \emptyset$. Установим, что $\text{Im } i_n^* \cap L_p = \emptyset$. В самом деле, допустим, что существует $l \neq 0$ такой, что $l \in L_p$, и $l = i_n^*(y_n)$, где $y_n \in \tilde{h}^p(Y_n)$. Пусть $\varphi_q^p: X_0 \rightarrow Y_n$ — вложение (это вложение определено при

$\beta \geq \alpha$); тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^p(A) & \xleftarrow{i_n^*} & \tilde{h}^p(Y_n) \\ & \searrow i_m^* & \swarrow \varphi_n^{m*} \\ & \tilde{h}^p(X_m) & \end{array}$$

(здесь m — любое целое число, $m \geq n$) следует, что $l = i_m^* \varphi_n^{m*}(y_n)$, т. е. $l \in \text{Im } i_m^*$, что противоречит выбору элемента l . Рассмотрим теперь все такие номера q , что $L'_q \neq \emptyset$, и докажем, что $j_n^{**}(l') \neq 0$ для любого $l' \in L'_q$, $l' \neq 0$. В самом деле, допустим противное: пусть существует элемент $l' \in L'_q$, $l' \neq 0$, такой, что $j_n^{**}(l') = 0$. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^q(Y_n) & \xleftarrow{j_n^{**}} & \tilde{h}^q(M) \\ & \searrow \varphi_n^{m*} & \swarrow j_m^* \\ & \tilde{h}^q(X_m) & \end{array}$$

(где $m \geq n$) следует, что $j_m^*(l') = 0$, что противоречит выбору элемента l' . Итак, $Y_n \in h^*(A, L, L')$ для любого n .

Теперь установим, что $L_p \cap \text{Im } i_0^* = \emptyset$, где $i_0: A \rightarrow X_0$. Допустим противное: пусть существует элемент $l \neq 0$, $l \in L_p$, такой, что $l = i_0^*(z)$, где $z \in \tilde{h}^p(X_0)$. Тогда из теоремы 2.6 гл. X в [10] следует, что существует номер α такой, что $z = \psi_\alpha^*(u_\alpha)$ для некоторого элемента $u_\alpha \in \tilde{h}^p(Y_\alpha)$, где $\psi_\alpha: X_0 \rightarrow Y_\alpha$ — вложение. Отсюда и из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^p(A) & \xleftarrow{i_0^*} & \tilde{h}^p(X_0) \\ & \searrow i_\alpha^* & \swarrow \psi_\alpha^* \\ & \tilde{h}^p(Y_\alpha) & \end{array}$$

следует, что $l = i_0^*(z) = i_0^* \psi_\alpha^*(u_\alpha) = i_\alpha^*(u_\alpha)$, т. е. $L_p \cap \text{Im } i_\alpha^* \neq \emptyset$ (так как $l \neq 0$), что противоречит доказанному выше утверждению, что $Y_\alpha \in h^*(A, L, L')$ при любом α .

Осталось доказать, что $L'_q \cap \text{Ker } j_0^* = \emptyset$ при любом q . Пусть $L'_q \neq \emptyset$; допустим, что существует элемент $l' \neq 0$, $l' \in L'_q$, такой, что $j_0^*(l') = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму (где α —

любое целое число)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^q(X_0) & \xleftarrow{\psi_\alpha^*} & \tilde{h}^q(Y_\alpha) \\ & \nwarrow j_\beta^* \quad \nearrow j_\beta'^* & \\ & \tilde{h}^q(M) & \end{array}$$

Тогда $0 = j_\beta^*(l') = \psi_\alpha^* j_\beta'^*(l')$, т. е. $\psi_\alpha^*(u_\alpha) = 0$, где $u_\alpha = j_\beta'^*(l')$. Отсюда и из теоремы 2.6 гл. X в [10] следует, что существует номер β такой, что $\beta > \alpha$ и $\pi_\alpha^{\beta*}(u_\alpha) = 0$, где π_α^β — вложение Y_β в Y_α ; тем самым, $j_\beta'^*(l') = \pi_\alpha^{\beta*} j_\beta'^*(l') = \pi_\alpha^{\beta*}(u_\alpha) = 0$, т. е. мы указали компакт Y_β такой, что он не реализует элемент $l' \in L'_q$, $l' \neq 0$. а это противоречит тому, что $Y_\beta \in \tilde{h}^*(A, L, L')$ при любом β (см. выше). Полученное противоречие окончательно доказывает теорему.

Мы доказали теорему 27.2.1 для того случая, когда функтор h удовлетворяет аксиомам A1—A6 и непрерывен на U_C . Этот уровень общности вполне устраивает нас с точки зрения исследования вариационных задач в классах $\mathcal{O}$, $\tilde{\mathcal{O}}$. Однако теорема 27.2.1 затрагивает интересный вопрос о предельных реализациях, который представляет самостоятельный интерес. Можно доказать более сильное утверждение, чем теорема 27.2.1 (см. доказательство в [31]).

Теорема 27.2.2. Пусть дана последовательность компактов X_n , $n=1, 2, 3, \dots$, $X_n \supset A$ для любого n , и пусть существует компакт $X_0 \subset M$ такой, что $\rho(X_n, X_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (тогда $X_0 \supset A$), пусть $A \xrightarrow{i_0} X_0 \xrightarrow{j_0} M$, $A \xrightarrow{i_n} X_n \xrightarrow{j_n} M$ — вложения.

(1) Пусть на U_C задан контравариантный непрерывный функтор $h^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} h^k$ (со значениями в GR), удовлетворяющий аксиомам A1, A2; пусть $L = \{L_p\}$, $L' = \{L'_q\}$, где $L_p \subset h^p(A) \setminus 0$, $L'_q \subset h^q(M) \setminus 0$, и пусть $L \cap \text{Im } i_n^* = \emptyset$, $L' \cap \text{Ker } j_n^* = \emptyset$ при любом n . Тогда $L \cap \text{Im } i_0^* = \emptyset$ и $L' \cap \text{Ker } j_0^* = \emptyset$.

(2) Пусть на U_C задан ковариантный непрерывный функтор $h_* = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} h_k$, удовлетворяющий аксиомам A1, A2. Пусть $L = \{L_p\}$, где $L_p \subset h_p(A)$, и пусть $L_p \subset \text{Ker } i_{n*}$ при любом n . Тогда $L \subset \text{Ker } i_{0*}$. Предположим теперь, что функтор h_* удовлетворяет одному из следующих двух условий: 1) $h_k(X, Y) \in ABC$ при любых $(X, Y) \in U_C$, $k \in \mathbb{Z}$, и все индуцированные гомоморфизмы непрерывны; 2) $h_k(X, Y) \in GF$ для любых $(X, Y) \in U_C$, $k \in \mathbb{Z}$, все индуцированные гомоморфизмы F линейны и, кроме того, $h_k(X, Y) \in GFf$ для любых $(X, Y) \in P^2 \subset U_C$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $L' = \{L'_q\}$, где $L'_q \subset h_q(M)$, и пусть $L' \subset \text{Im } j_{n*}$ при любом n . Тогда $L' \subset \text{Im } j_{0*}$.

27.3. Инвариантность вариационных классов относительно S-перестроек поверхностей.

Теорема 27.3.1. Пусть M — риманово многообразие, $A \subset M$ — фиксированный компакт, $x \in A$. Пусть $G \subset M$ — такое открытое множество, что $\bar{G} \cap A = \emptyset$. Пусть класс $h(A, L, L')$ непуст и X — произвольная поверхность (компакт) из этого класса.

(1) Пусть пара (Y, A) получена из пары (X, A) какой-либо S-перестройкой в размерностях $\sigma = \{k_i\}$, где множество целых чисел $\{k_i\}$ содержит все числа p , для которых $L_{p-1} \neq 0(\emptyset)$. Тогда имеем $Y \in h(A, L, 0(\emptyset))$.

(2) Пусть пара (Y, A) получена из пары (X, A) какой-либо полной S-перестройкой в размерностях $\{k_i\}$, где множество целых чисел $\sigma = \{k_i\}$ содержит все числа q, p , для которых $L_{p-1} \neq 0(\emptyset)$ и $L'_q \neq 0(\emptyset)$. Предположим, далее, что вложение $\alpha: X_1 \cup Y_1 \rightarrow M$ (где, напомним, $X_1 = (X \cap \bar{G}) \cup x$) обладает следующим свойством: $\tilde{h}_{k_i}(X_1 \cup Y_1) \subset \text{Ker } \alpha_* = \Delta_*(M, X_1 \cup Y_1)$ для каждого k_i (соответственно в случае когомологий предположим, что $\text{Im } \alpha^* = 0$ в $\tilde{h}^{k_i}(X_1 \cup Y_1)$, т. е. что $\tilde{h}^{k_i}(X_1 \cup Y_1) \setminus 0 \subset \nabla^*(M, X_1 \cup Y_1)$ для каждого k_i). Тогда $Y \in h(A, L, L')$.

(3) Пусть класс $h(A, \tilde{L})$ непуст и X — произвольный компакт из этого класса. Пусть пара (Y, A) получена из пары (X, A) какой-либо полной S-перестройкой в размерностях $\sigma = \{k_i\}$, где набор σ содержит все целые числа r , для которых $\tilde{L}_r \neq 0(\emptyset)$. Пусть вложение $\alpha: X_1 \cup Y_1 \rightarrow M$ удовлетворяет предположениям пункта 2, и предположим, что $Y_1 \cap A = x$. Тогда $Y \in h(A, \tilde{L})$.

Замечание. Из теоремы 27.3.1 следует, что основной интерес для вариационных задач будут представлять полные S-перестройки, так как они сохраняют классы $h(A, L, L')$, в то время как S-перестройки сохраняют только классы $h(A, L, 0(\emptyset))$. Теорема 27.3.1 об устойчивости классов $\mathcal{O}$, $\tilde{\mathcal{O}}$ может быть доказана, по-видимому, и для обычных S-перестроек, однако все конкретные примеры S-перестроек, которые мы будем конструировать в дальнейшем, окажутся полными перестройками.

Доказательство теоремы. Докажем сначала пункт 1. Пусть $p \in \sigma = \{k_i\}$ есть любое число такое, что $L_{p-1} \neq 0(\emptyset)$. Разберем гомологический вариант. Предположим для простоты, что $Y_1 \cap Y_2 = A_1$, в дальнейшем мы обнаружим несущественность этого предположения. Напомним, что $X_1 = (X \cap \bar{G}) \cup x$, $A_1 = (X \cap \partial G) \cup x$, $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_2 = X \setminus G$. Положим $X_2 = Y_2$, $A_2 = A \cup A_1$, $A_2 = B$, $L_1 = \Delta_p(X_1, A_1)$, $L_2 = \Delta_p(X_2, A_2)$, $L'_1 = \Delta_p(Y_1, A_1)$, $L'_2 = \Delta_p(Y_2, A_2)$, где фиксированное число p из набора σ , определяющего перестройку, указано выше. Отметим, что $L'_1 = L_2$ и, кроме того, для троек (X, X_1, X_2) и (Y, Y_1, Y_2) выполнены все предположения леммы 26.4. В самом деле, $X = X_1 \cup X_2 = (X \cap \bar{G}) \cup (X \setminus G)$, $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, так как

$A \cup (X \cap \partial G) \subset X \setminus G$, $A \cap X_1 \subset A_1$, так как $A \cap X_1 = x \subset A_1$, $A \cap X_2 \subset A_2$, так как $A \cap (X \setminus G) = A \subset A \cup A_1$, $X_1 \cap X_2 = A_1 \cap A_2$, так как $(X \cap \partial G) \cup x \cap (X \setminus G) = A_1 = A_1 \cap A_2$, $\Gamma_1 = L_1$, $\Gamma_2 = L_2$. Отсюда и из леммы 26.4 мы имеем $\Delta_p(X, A) = i_*(B, A)^{-1}[i_*(B, A_1)L_1 + i_*(B, A_2)L_2]$. Рассмотрим тройку (Y, Y_1, Y_2) ; тогда $Y = Y_1 \cup Y_2$ (по определению Y), $A_1 \subset Y_1$, $A_2 \subset Y_2$, так как $A \cup A_1 \subset X \setminus G$, $A \cap Y_1 \subset A_1$, так как $A \subset Y_2$, а $Y_2 \cap Y_1 = A_1$ (см. предположение выше), т. е. $A \cap Y_1 = x \subset A_1$, $A \cap Y_2 \subset A_2$, так как $A \cap (X \setminus G) = A \subset A \cup A_1 = A_2$, $Y_1 \cap Y_2 \subset A_1 \cap A_2$, так как $Y_1 \cap Y_2 = A_1 \subset A_2$, $\Gamma_1 = L'_1$, $\Gamma_2 = L'_2$. Отсюда и из леммы 26.4 мы имеем $\Delta_p(Y, A) = i_*(B, A)^{-1}[i_*(B, A_1)L'_1 + i_*(B, A_2)L'_2]$. Поскольку $L'_2 = L_2$, а $L'_1 \supset L_1$, то немедленно получаем, что $\Delta_p(Y, A) \supset \Delta_p(X, A) \supset L_{p-1}$ (где $L_{p-1} \subset L$), т. е. $Y \in h_*(A, L, 0)$. Теперь откажемся от предположения $Y_1 \cap Y_2 = A_1$, и пусть $A_1 \subset Y_1 \cap Y_2$. Как и при доказательстве теоремы 26.1, расклеим лишние точки в компакте $L = X \cup Y_1$ и представим компакт Z в виде непрерывного образа нового компакта $\tilde{Z}$, где $\tilde{Z} = \tilde{X} \cup \tilde{Y}_1$, $f: \tilde{Z} \rightarrow Z$, $f|_{\tilde{X}}$ и $f|_{\tilde{Y}_1}$ — гомеоморфизмы, и $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2 = \tilde{A}_1$, $Y_2 = \tilde{Y}_2$ и $A_1 = \tilde{A}_1$ (причем заметим, что нет необходимости вкладывать компакт $\tilde{Z}$ в многообразие M). Тогда к компакту $\tilde{Z}$ применимы предыдущие рассуждения и можно записать, что

$\Delta_p(\tilde{Y}, \tilde{A}) \supset L_{p-1}$ (при каждом p). Теперь, применяя гомоморфизм f_* , получаем в силу замечания к лемме 26.2, что $\Delta_p(Y, A) \supset \supset L_{p-1}$, что и требовалось доказать. Гомологический вариант полностью разобран. Рассмотрим теперь когомологический случай.

Снова рассматриваем две тройки (в предположении, что $Y_1 \cap Y_2 = A_1$): (X, X_1, X_2) и (Y, Y_1, Y_2) и убеждаемся, что они удовлетворяют всем условиям леммы 25.4, причем $L'_1 = \nabla^p(Y_1, A_1)$, $L_1 = \nabla^p(X_1, A_1)$, $L'_2 = L_2 = \nabla^p(X_2, A_2) = \nabla^p(Y_2, A_2)$.

Из леммы 25.4 получаем

$$\nabla^p(X, A) =$$

$$= \tilde{h}^{p-1}(A) \setminus \{i^*(B, A)[\tilde{h}^{p-1}(B) \setminus [i^*(B, A_1)^{-1}(L_1) \cup i^*(B, A_2)^{-1}(L_2)]]\},$$

$$\nabla^p(Y, A) =$$

$$= \tilde{h}^{p-1}(A) \setminus \{i^*(B, A)[\tilde{h}^{p-1}(B) \setminus [i^*(B, A_1)^{-1}(L'_1) \cup i^*(B, A_2)^{-1}(L'_2)]]\},$$

и так как $L'_1 \supset L_1$, то отсюда следует, что $\nabla^p(Y, A) \supset \nabla^p(X, A) \supset \supset L_{p-1}$ (где $L_{p-1} \subset L$), т. е. $Y \in h^*(A, L, \phi)$. Как и в гомологическом случае, отказ от предположения $Y_1 \cap Y_2 = A_1$ осуществляется построением непрерывного отображения $f: \tilde{Z} \rightarrow Z = X \cup Y_1$ (см. выше). Тогда $\nabla^p(\tilde{Y}, \tilde{A}) \supset L_{p-1}$ и из замечания к лемме 25.2 получаем, что $\nabla^p(Y, A) \supset L_{p-1}$, что и требовалось. Итак, пункт 1 настоящей теоремы полностью доказан.

Переходим к пункту 2. Рассмотрим сначала гомологический случай. Пусть задана S -перестройка пары (X, A) . Требуется

установить, что $Y \in h_*(A, L, L')$, если α_* — тривиальный гомоморфизм. Поскольку каждая $'S$ -перестройка является S -перестройкой, то в силу пункта 1 настоящей теоремы мы получаем, что $Y \in h_*(A, L, 0)$; осталось доказать, что $L'_q \subset i_*(M, Y)\tilde{h}_q(Y)$ для любого $q \in \sigma = \{k_i\}$, где $L'_q \neq 0$. Рассмотрим компакты $\tilde{A}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{D}_1, \tilde{B}_1$, где $\tilde{D}_1 = A_1, \tilde{A}_1 = Y_2 = X \setminus G$ (тогда $\tilde{A}_1 \supset \tilde{D}_1$, поскольку $X \setminus G \supset (X \cap \partial G) \cup x$), $\tilde{A}_2 = X_1$ (тогда $\tilde{A}_2 \supset \tilde{D}_1$, поскольку $X_1 \supset A_1$), $\tilde{B}_1 = Y_1, \tilde{A} = X$. Тогда выполнены все условия теоремы 26.1, а именно: $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2$ (так как $X = X_1 \cup (X \setminus G)$), $\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 = \tilde{D}_1$ (так как $(X \setminus G) \cap (X \cap \partial G) = X \cap \partial G, x \in \tilde{D}_1, \Gamma_1 = \tilde{h}_{q-1}(\tilde{D}_1) = \tilde{h}_{q-1}(A_1) = \Delta_q(X_1, A_1) = \Delta_q(Y_1, A_1) = \Delta_q(\tilde{B}_1, \tilde{D}_1)$). Рассмотрим компакты $\tilde{C}_1 = \tilde{A}_1 \cup \tilde{B}_1, \tilde{C}_1 = Y_2 \cup Y_1, \tilde{C}_2 = \tilde{A}_2 \cup \tilde{B}_1 = X_1 \cup Y_1, \tilde{C} = \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 = Y \cup X_1 = X \cup Y_1$. Из теоремы 26.1 следует, что $i_*(X \cup Y_1, Y)\tilde{h}_q(Y) + i_*(X \cup Y_1, X_1 \cup Y_1)\tilde{h}_q(X_1 \cup Y_1) \supset i_*(X \cup Y_1, X)\tilde{h}_q(X)$.

Рассмотрим вложение $\varphi: X \cup Y_1 \rightarrow M$; тогда получаем $i_*(M, Y)\tilde{h}_q(Y) + i_*(M, X_1 \cup Y_1)\tilde{h}_q(X_1 \cup Y_1) \supset i_*(M, X)\tilde{h}_q(X)$.

В силу условий пункта 2 имеем

$$i_*(M, X_1 \cup Y_1)\tilde{h}_q(X_1 \cup Y_1) = \alpha_*\tilde{h}_q(X_1 \cup Y_1) = 0,$$

так что $i_*(M, Y)\tilde{h}_q(Y) \supset i_*(M, X)\tilde{h}_q(X) \supset L'_q$, что и требовалось доказать. Теперь рассмотрим когомологический случай.

Пусть задана $'S$ -перестройка пары (X, A) . Требуется установить, что $Y \in h^*(A, L, L')$, если $\text{Im } \alpha^* = 0$. Поскольку каждая полная перестройка является обычной перестройкой, то из доказанного выше пункта 1 следует, что $Y \in h^*(A, L, \emptyset)$; поэтому осталось доказать, что $L'_q \cap \text{Ker } i^*(M, Y) = \emptyset$ для любого $q \in \sigma = \{k_i\}$, где $L'_q \neq \emptyset$. Как и в гомологическом случае, рассмотрим компакты $\tilde{A}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{D}_1, \tilde{B}_1, \tilde{C}, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$, связанные с $'S$ -перестройкой (см. выше). Если положить

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \tilde{h}^{q-1}(\tilde{D}_1) \setminus 0 = \tilde{h}^{q-1}(A_1) \setminus 0 = \\ &= \nabla^q(X_1, A_1) = \nabla^q(Y_1, A_1) = \nabla^q(\tilde{B}_1, \tilde{D}_1), \end{aligned}$$

то, очевидно, выполнены все условия теоремы 25.1 и, следовательно, мы получаем

$$\begin{aligned} i^*(X \cup Y_1, Y)^{-1}[\tilde{h}^q(Y) \setminus 0] \cup \\ \cup i^*(X \cup Y_1, X_1 \cup Y_1)^{-1}[\tilde{h}^q(X_1 \cup Y_1) \setminus 0] \supset \\ \supset i^*(X \cup Y_1, X)^{-1}[\tilde{h}^q(X) \setminus 0]. \end{aligned}$$

Если $\varphi: X \cup Y_1 \rightarrow M$ — вложение, то мы имеем

$$\begin{aligned} i^*(M, Y)^{-1}[\tilde{h}^q(Y) \setminus 0] \cup \\ \cup i^*(M, X_1 \cup Y_1)^{-1}[\tilde{h}^q(X_1 \cup Y_1) \setminus 0] \supset i^*(M, X)^{-1}[\tilde{h}^q(X) \setminus 0]. \end{aligned}$$

В силу предположений настоящей теоремы получаем $i^*(M, X_1 \cup Y_1)^{-1}[\tilde{h}^q(X_1 \cup Y_1) \setminus 0] = \emptyset$, т. е. $i^*(M, Y)^{-1}[\tilde{h}(Y) \setminus 0] \supset \supset i^*(M, X)^{-1}[\tilde{h}^q(X) \setminus 0]$. Пусть $l' \in L'_q$; тогда $i^*(M, X)l' \neq 0$, т. е. $l' \in i^*(M, Y)^{-1}[\tilde{h}^q(Y) \setminus 0]$, $i^*(M, Y)l' \neq 0$ в $\tilde{h}^q(Y)$ для любого $l' \in L'_q$, что и завершает доказательство пункта 2.

Переходим к пункту 3. Рассмотрим вложение $(X \cup Y_1)/A \rightarrow M/A$; при этом заметим, что так как $x = A_1 \cap A$ и $Y_1 \cap A = x$, то компакт $\tilde{Y}_1 = Y_1/(A \cap Y_1) = Y_1$ по-прежнему полностью заклеивает компакт A_1 в размерностях $\{k_i\}$, т. е. мы получаем полную S -перестройку компакта $X/A = \tilde{X}$ с помощью G и $\tilde{Y}_1$ в объемлющем пространстве M/A . Поскольку теория h относительно инвариантна, то $\tilde{L}_r \subset \tilde{h}^{(r)}(M/A) \setminus 0 \cong \tilde{h}^{(r)}(M, A) \setminus 0$ и $\tilde{X}$ реализует набор $\tilde{L}$ в пространстве M/A . Тем самым, мы полностью свели доказательство к рассмотрению пункта 2 для того случая, когда $L = 0(\emptyset)$, $L' = \tilde{L}$. То, что M/A не многообразие, не влияет на рассуждения, поскольку вложение $X_1 \cup Y_1 = (X_1 \cup Y_1)/(X_1 \cup Y_1) \cap A \rightarrow M/A$ по-прежнему (ко)гомологически тривиально. Теорема полностью доказана.

Мы доказали теорему 27.3.1 для S -перестроек пар (X, A) , однако оказывается, что классы $\mathcal{O}$ и $\tilde{\mathcal{O}}$ выдерживают и несколько иной вид перестроек, а именно: определим $X'_1 = (\overline{X \cap G}) \cup x$, $A'_1 = X_1 \setminus G$, $Y' = Y'_1 \cup Y_2$. Отличие этих перестроек от S -перестроек состоит в том, что $X_1 \supset X'_1$ и $A_1 \supset A'_1$. Оказывается, что компакт Y' снова принадлежит классам $\mathcal{O}$, $\tilde{\mathcal{O}}$. Доказательство проводится по указанной выше схеме.

Замечание. Пусть дана область $G \subset M$; положим $A_1 = X \cap \partial G$, пусть $\dot{x} \in A_1$, $\tilde{Y}_1$ — компакт, осуществляющий полную заклею компакта A_1 в размерностях $\sigma = \{k_i\}$ по отношению к точке $\dot{x}$. Так, например, в дальнейших приложениях теоремы 27.3.1 компакт $\tilde{Y}_1$ будет содержаться в $\bar{G}$. Построим компакт Y_1 , который осуществляет полную заклею в размерностях σ компакта $A_1 = x \cup A_1$ и по отношению к точке $x \in A$. Для этого рассмотрим какой-либо гладкий путь γ , соединяющий точки x и $\dot{x}$, и положим $Y_1 = \gamma \cup \tilde{Y}_1$. Тогда очевидно, что компакт Y_1 является искомым компактом. Настоящее замечание играет техническую роль, однако оно необходимо ввиду того, что мы работаем в категории пунктированных пространств.

27.4. Устойчивость вариационных классов. Введем в рассмотрение специальный класс экстраординарных теорий (ко)гомологий h , удовлетворяющих следующему условию.

Условие К. Пусть h — непрерывная и относительно инвариантная теория (ко)гомологий на категории компактных пар, и пусть $\varphi: S^1 \rightarrow B$ — вложение окружности в двумерный конечный клеточный комплекс B , причем элемент $\varphi_*[S^1]$ либо равен нулю в группе $H_1(B, \mathbb{Z})$ (случай 1), либо является образующей конеч-

ного порядка в группе $H_1(B, \mathbb{Z})$ (случай 2). Мы скажем, что теория h удовлетворяет условию К на $P^2 \subset U_C$, если в случае 1 (для всех таких компактов B) все гомоморфизмы $\varphi_{k*}: \tilde{h}_k(S^1) \rightarrow \tilde{h}_k(B)$ тривиальны (соответственно в когомологическом случае тривиальны все гомоморфизмы $\varphi_k^*: \tilde{h}^k(B) \rightarrow \tilde{h}^k(S^1)$), а в случае 2 (для всех таких B) гомоморфизм φ_{k*} (при каждом k) или тривиален, или является мономорфизмом (соответственно в когомологическом случае гомоморфизм φ_k^* либо тривиален, либо является эпиморфизмом). Здесь через $[S^1]$ обозначен фундаментальный целочисленный класс гомологий окружности.

Условие К легко проверяемо. Так, например, очевидно, что теория $h_* = N_*$ неориентированных бордизмов удовлетворяет условию К. В дальнейшем мы покажем, что теория бордизмов по модулю p также удовлетворяет условию К.

Предложение 27.4.1. Пусть M — компактное замкнутое гладкое многообразие, и пусть $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$. Рассмотрим непрерывную и относительно инвариантную теорию (ко)гомологий h на U_C , удовлетворяющую условию К на $P^2 \subset U_C$, и пусть $L' \neq 0(\emptyset)$ — произвольный набор подгрупп (подмножеств в случае когомологий) в $\tilde{h}_*(M)$ (соответственно в $\tilde{h}^*(M) \setminus \{0\}$). Тогда класс $h(x, 0(\emptyset), L')$ непуст и 2-устойчив.

Доказательство. Непустота $h(x, 0(\emptyset), L')$ очевидна. Рассмотрим сначала когомологический случай. Пусть $X \in U_C$, $X \in h_*(x, 0, L')$ и $Y \subset X$ — такой подкомпакт, что $N = \overline{X \setminus Y}$ — конечный симплициальный комплекс в M , где $\dim N \leq 2$. Рассмотрим последовательность Π_n , составленную из замкнутых полиэдральных окрестностей компакта Y в M , и пусть Π_n выбраны так, что $\bigcap_n \Pi_n = Y$. Если мы докажем, что $\Pi_n \in h_*(x, 0, L')$ при каждом n , то в силу теоремы 27.2.1 компакт $Y = \lim_n \Pi_n$ также принадлежит $h_*(x, 0, L')$. Поскольку $\Pi_n \cup N \supset X$, то $\Pi_n \cup N \in h_*(x, 0, L')$ при каждом n . Положим $N_n = (\Pi_n \cup N) \setminus \Pi_n$; тогда можно считать, что N_n , так же как и N , является конечным симплициальным комплексом в M . Фиксируем n и положим $\Pi_n \cup N = X'$, $\Pi_n = Y'$, $N' = N_n$. Если $\dim N' = 1$, то N' состоит из конечного числа отрезков откуда следует, что $Y' \in h_*(x, 0, L')$, что и требовалось доказать. Пусть теперь $\dim N' = 2$. Тогда всегда можно построить настолько мелкое разбиение N' (если это потребуется), что каждая замкнутая двумерная клетка этого разбиения будет гладким двумерным диском D^2 , вложенным в M . Для наших целей достаточно показать, что из компакта $X' = Y' \cup N'$ можно безболезненно для реализации набора L' удалить произвольный такой диск $D^2 \subset N'$. Итак, можно считать, что $X_1 = Y_1 \cup N_1$, где $N_1 = D^2$, $N_1 = \overline{X_1 \setminus Y_1}$, $X_1 \in h_*(x, 0, L')$, $Z = \partial N_1 = S^1$. Рассмотрим вложе-

ние $\varphi: S^1 \rightarrow Y_1$. При этом возможны следующие случаи: А) $\varphi_*[S^1] = 0$ в группе $H_1(Y_1, \mathbb{Z})$; Б) $\varphi_*[S^1] \neq 0$ в группе $H_1(Y_1, \mathbb{Z})$. Если имеет место случай А, то существует двумерный подкомплекс $B \subset Y_1$ такой, что $\varphi_*[S^1] = 0$ в $H_1(B, \mathbb{Z})$, где $\varphi: S^1 \rightarrow B$ — вложение. Поскольку теория h_* удовлетворяет условию К, то все гомоморфизмы $\varphi_{k*}: \tilde{h}_k(S^1) \rightarrow \tilde{h}_k(B)$ тривиальны; следовательно, положив $D = Z$, $B = B$, $A_1 = Y_1$, $A_2 = N_1$, $C_1 = Y_1$, $C_2 = N_1 \cup B$, мы, в силу теоремы 26.1 (все условия которой выполнены), получаем $i_*(M, Y_1)\tilde{h}_k(Y_1) + i_*(M, B \cup N_1)\tilde{h}_k(B \cup N_1) \supset i_*(M, X)\tilde{h}_k(X) \supset \supset L'_k$. Так как многообразие M 2-связно, то $i_*(M, X)\tilde{h}_k(B \cup N_1) = 0$, т. е. $L' \subset \text{Im } i_*(M, Y_1)$, $Y_1 \in h_*(x, 0, L')$, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай Б. Так как $\varphi_*[S^1] \neq 0$, то $\varphi_*[S^1] = \sum_i m_i e_i$, где e_i — образующие в группе $H_1(Y, \mathbb{Z})$. Поскольку $Y_1 \in P^2$, то можно построить непрерывную деформацию $\varphi(S^1)$ в Y_1 так, чтобы новое отображение (уже не вложение, вообще говоря) $\varphi': S^1 \rightarrow Y_1$ переводило окружность S^1 в одномерный остов Y_1 и $\varphi'(S^1) = \bigvee_{\alpha} S^1_{\alpha}$, где S^1_{α} — окружности одномерного

остова. Деформацию φ в φ' можно продолжить до деформации диска N_1 в многообразии M . Ясно, что полученный компакт $X'_1 = Y_1 \cup N'_1$ (где N'_1 — продеформированный диск) снова реализует набор L' . Поскольку $\pi_1(M) = 0$, то каждая из окружностей S^1_{α} стягивается по многообразию M в точку, а потому можно рассмотреть компакт $T = \bigcup_{\alpha} CS^1_{\alpha}$, где CS^1_{α} — конусы над окружно-

стями S^1_{α} в M . Поскольку компакт T полностью заклеивает компакт $\varphi'(S^1)$, то в силу теоремы 26.1 мы получаем, что компакт Y'_1 , полученный из компакта Y_1 заменой компакта N'_1 на компакт T , снова принадлежит классу $h_*(x, 0, L')$. Итак, сохраняя старые обозначения, можно считать, что $X_1 = Y_1 \cup N_1$, где $N_1 = CZ$ и $Z = S^1 = \partial N_1$, $N_1 = \overline{X_1 \setminus Y_1}$, $X_1 \in h_*(x, 0, L')$, и вложение $\psi: S^1 \rightarrow Y_1$ таково, что $\psi_*[S^1] \neq 0$ и этот элемент является образующей в группе $H_1(Y_1, \mathbb{Z})$.

Пусть $i: X_1 \rightarrow M$, $j: Y_1 \rightarrow M$ — вложения, и пусть $l' \neq 0$, $l' \in L'$; тогда $l' = i_*(a)$, $a \in \tilde{h}_*(X_1)$. Требуется доказать, что $l' \in \text{Im } j_*$. Допустим противное, пусть $l' \notin \text{Im } j_*$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_k(X_1) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{h}_k(M) & \xrightarrow{\varphi_*} & \tilde{h}_k(M/X_1) \\ \uparrow & & \uparrow \chi_* & & \uparrow \tau_* \\ \tilde{h}_k(Y_1) & \xrightarrow{j_*} & \tilde{h}_k(M) & \xrightarrow{\alpha_*} & \tilde{h}_k(M/Y_1) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_{k-1}(Y_1) \\ \uparrow & & \uparrow \rho_* & & \uparrow \pi_* \\ \tilde{h}_k(Z) & \longrightarrow & \tilde{h}_k(N_1) & \xrightarrow{\omega_*} & \tilde{h}_k(N_1/Z) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_{k-1}(Z). \end{array}$$

Здесь χ_* — изоморфизм и $X_1/Y_1 = N_1/Z = S^2$, поэтому гомоморфизмы τ_* и π_* расположены в точной последовательности тройки (M, X_1, Y_1) . Поскольку $l' = i_*(a)$, то $\varphi_*(l') = 0$, а так как $l' \notin \text{Im } j_*$, то $\alpha_*(l') \neq 0$, $\chi_*(l') = l'$ и $\tau_*\alpha_*(l') = 0$, т. е. $\alpha_*(l') = \pi_*(\omega)$. Так как $N_1 = D^2$, то $\tilde{h}_k(N_1) = 0$ и ∂ — мономорфизм, а потому $\partial(\omega) \neq 0$, так как $\omega \neq 0$ (напомним, что $\pi_*(\omega) \neq 0$). Ясно, что $\psi_*\partial(\omega) = \partial'\pi_*(\omega) = \partial'\alpha_*(l') = 0$, т. е. мы построили элемент $\xi \in \tilde{h}_{k-1}(Z)$, $\xi \neq 0$, такой, что $\psi_*(\xi) = 0$, где $\psi: S^1 \rightarrow Y_1$ — вложение. Рассмотрим элемент $\alpha = \psi_*[S^1] \in H_1(Y_1, \mathbb{Z})$. Напомним, что мы сейчас находимся в ситуации Б, т. е. $\alpha \neq 0$ и α — образующая в группе $H_1(Y_1, \mathbb{Z})$. Возможны два варианта: Б₁) α — элемент бесконечного порядка; Б₂) α — элемент конечного порядка. Разберем сначала вариант Б₁. Поскольку $Y_1 \in P^0$, то существует непрерывное отображение $f: Y_1 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$ такое, что $f_*(\alpha) = [S^1]$. Здесь мы воспользовались тем, что порядок образующей α равен бесконечности. Но тогда сквозное отображение $f\psi: S^1 \rightarrow S^1$ гомотопно тождественному и, следовательно, все гомоморфизмы $\psi_p: \tilde{h}_p(S^1) \rightarrow \tilde{h}_p(Y_1)$ являются мономорфизмами при каждом $p \in \mathbb{Z}$, что противоречит доказанному выше факту существования элемента $\xi \in \tilde{h}_{k-1}(Z)$ такого, что $\psi_{k-1,*}(\xi) = 0$. Итак, в случае Б₁ предположение о том, что $l' \notin \text{Im } j_*$, приводит нас к противоречию.

Перейдем к варианту Б₂. Поскольку $m\alpha = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, то существует двумерный подкомплекс $B \subset Y_1$ такой, что $\varphi_*[S^1] \in H_1(B, \mathbb{Z})$ имеет порядок m и является образующей в группе $H_1(B, \mathbb{Z})$ (здесь $\varphi: S^1 \rightarrow B$ — вложение). Так как теория h_* удовлетворяет К, то гомоморфизм $\varphi_{k-1,*}: \tilde{h}_{k-1}(Z) \rightarrow \tilde{h}_{k-1}(B)$ является либо мономорфизмом, либо тривиален. С другой стороны, $\xi \neq 0$ и $\xi \in \text{Ker } \varphi_{k-1,*}$, а потому $\varphi_{k-1,*}$ не может быть мономорфизмом и, следовательно, тривиален.

Положим $D = Z$, $B = B$, $A_1 = Y_1$, $A_2 = N_1$, $C_1 = A_1 \cup B = Y_1 \cup B = Y_1$ (так как $B \subset Y_1$), $C_2 = A_2 \cup B$, $C_2 = N_1 \cup B$, $C = C_1 \cup C_2 = X_1 \cup B = X_1$, $A = A_1 \cup A_2 = Y_1 \cup N_1 = X_1$, $A_1 \cap A_2 = D$. Тогда компакт B целиком заклеивает $Z = S^1$ в размерности k , т. е. $\Delta_k(B, D) = \tilde{h}_{k-1}(D)$, а тогда в силу теоремы 26.1 (все условия которой выполнены) мы получаем $i_*(C, C_1)\tilde{h}_k(C_1) + i_*(C, C_2)\tilde{h}_k(C_2) \supset i_*(C, A)\tilde{h}_k(A) \equiv \tilde{h}_k(X_1)$, поскольку $A = C = X_1$. Это означает, что $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in i_*(X, Y_1)\tilde{h}_k(Y_1)$, $a_2 \in i_*(X, B \cup N_1)\tilde{h}_k(B \cup N_1)$. Применяя к полученному выше включению гомоморфизм i_* , мы получаем $l' = i_*(a) = i_*(a_1) + i_*(a_2)$, где $i_*(a_1) \in i_*(M, Y_1)\tilde{h}_k(Y_1)$, а $i_*(a_2) = 0$, так как $i_*(M, B \cup N_1)\tilde{h}_k(B \cup N_1) = 0$, поскольку $\dim B \cup N_1 = 2$ и $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$, так что комплекс $B \cup N_1$ стягивается по M в точку. Итак, $l' \in \text{Im } j_*$, что противоречит исходному предположению. Утверждение доказано.

Теперь перейдем к когомологическому случаю. Доказательство проводится по схеме, изложенной выше. Можно считать, что вло-

жение $\varphi: S^1 \rightarrow Y_1$ с точки зрения групп целочисленных гомологий описывается либо случаем А), либо случаем Б). Так как в случае А) $\varphi_*[S^1] = 0$, то $\text{Im } \varphi^* = 0$ в группе $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ и можно указать двумерную пленку $B \subset Y_1$ такую, что $\varphi: S^1 \rightarrow B$ — вложение и $\text{Im } \varphi_* = 0$ в $H_1(B, \mathbb{Z})$. Тогда в силу условия К все гомоморфизмы φ_k^* тривиальны и в силу теоремы 25.1 компакт Y_1 реализует L' , что и требовалось. Пусть теперь реализован случай Б). Как и раньше, можно считать, что вложение $\psi: S^1 \rightarrow Y_1$ реализует образующую в группе $H_1(Y_1, \mathbb{Z})$. Воспользуемся прежними обозначениями для компактов и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{h}^k(Y_1) & \xrightarrow{\alpha^*} & \tilde{h}^k(X_1) & \xrightarrow{\rho^*} & \tilde{h}^k(X_1/Y_1) & \xrightarrow{\delta^*} & \tilde{h}^{k-1}(Y_1) \\ \downarrow & & \downarrow \xi^* & & \downarrow \tau^* & & \downarrow \\ \tilde{h}^k(Z) & \xleftarrow{\omega^*} & \tilde{h}^k(N_1) & \xleftarrow{\omega^*} & \tilde{h}^k(N_1/Z) & \xleftarrow{\delta} & \tilde{h}^{k-1}(Z) \end{array}$$

Пусть $l' \neq 0$, $l' \in L'_k$ и $i^*(l') \neq 0$, где $i: X_1 \rightarrow M$ — вложение. Мы должны доказать, что $j^*(l') \neq 0$, где $j: Y_1 \rightarrow M$ — вложение. Допустим противное; тогда $i^*(X_1, Y_1) i^*(l') = 0$, т. е. $\alpha^*(\sigma) = 0$, $\sigma = i^*(l') \neq 0$. Ясно, что $\sigma = \rho^*(\omega)$ и $\omega^* \tau^*(\omega) = 0$, где τ^* — изоморфизм (так как $X_1/Y_1 = N_1/Z$). Тогда $\tau^*(\omega) = \delta(\xi)$, где $\xi \notin \text{Im } \psi^*$ (в противном случае $\tau^*(\omega) = \delta\psi^*(\xi) = \tau^*\delta'(\chi)$, т. е. $\sigma = \rho^*\delta'(\chi) = 0$). Итак, мы показали, что гомоморфизм ψ_{k-1}^* не эпиморфен.

Поскольку мы находимся в ситуации Б), то возможны два случая: Б₁) и Б₂). Если α — свободная образующая (случай Б₁)), то, как и раньше, построив отображение $\tilde{f}: Y_1 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 1)$, мы получаем, что ψ_{k-1}^* обязан быть эпиморфизмом, что противоречит полученному выше утверждению.

Пусть теперь реализуется случай Б₂). Тогда существует двумерный подкомплекс $B \subset Y_1$ такой, что $m\varphi_*[S^1] = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, где $\varphi: S^1 \rightarrow B$ — вложение, и в силу условия К получаем, что гомоморфизм $\varphi_{k-1}^*: \tilde{h}^{k-1}(B) \rightarrow \tilde{h}^{k-1}(Z)$ обязан быть либо тривиальным, либо эпиморфным, однако эпиморфность противоречит существованию элемента $\xi \notin \text{Im } \psi^*$, следовательно, гомоморфизм φ_{k-1}^* тривиален. Применяя теорему 25.1, получаем, что Y_1 по-прежнему реализует L' , что и завершает доказательство.

Мы сформулировали предложение 27.4.1 только для случая реализующих классов $h(x, 0(\phi), L')$; однако из доказательства этого предложения видно, что аналогичное утверждение о 2-устойчивости выполнено и для произвольных классов $h(A, \tilde{L}, L')$, $h(A, \tilde{L})$.

В заключение сделаем важное замечание. Рассмотрим класс $h(A, L_{k-1}, L'_k)$, где $L_{k-1} \subset \tilde{h}_{k-1}^{(k-1)}(A) \setminus \{0\}$, $L'_k \subset \tilde{h}_k^{(k)}(M) \setminus \{0\}$. Тогда может случиться, что класс $\mathcal{O}$ является $(k-1)$ -устойчивым, несмотря на то что теория h — экстраординарная теория (ко)гомологий. Элементы $l' \in L'_k$ и $l \in L_{k-1}$, являющиеся $(k-1)$ -устойчивыми, похожи на элементы обычной теории (ко)гомологий (см.,

например, предложение 27.4.1, из которого видно, что условие 2-устойчивости в действительности означает, что теория h ведет себя на двумерных комплексах в большой степени как обычная теория (ко)гомологий. К вопросу о 2-устойчивости мы вернемся еще раз при изучении бордизмов по модулю p . Отметим, что на односвязном компактном замкнутом многообразии M любой непустой класс $\mathcal{O}$, $\tilde{\mathcal{O}}$ является 1-устойчивым.

Предложение 27.4.2. Пусть $h_* = \Omega_*^p$ — теория гомологий сингулярных бордизмов по модулю p , где p — простое нечетное число. Тогда теория Ω_*^p удовлетворяет условию К на категории $P^2 \subset U_c$.

Доказательство. Пусть $\varphi: S^1 \rightarrow B$ — вложение окружности S^1 в двумерный конечный клеточный комплекс B , где $\varphi_*[S^1]$ либо равен нулю, либо является образующей конечного порядка в группе $H_1(B, \mathbb{Z})$. Если $\varphi_*[S^1] = 0$, то очевидно, что все гомоморфизмы $\alpha: \tilde{\Omega}_k^p(S^1) \rightarrow \tilde{\Omega}_k^p(B)$ тривиальны. Пусть теперь $\alpha = \varphi_*[S^1]$ — образующая конечного порядка m в группе $H_1(B, \mathbb{Z})$, $m\alpha = 0$. Допустим, что m и p взаимно просты; тогда, так как группа $\tilde{\Omega}_k^p(S^1)$ изоморфна группе $\tilde{\Omega}_{k-1}^p(x)$, то каждый элемент $\gamma \in \tilde{\Omega}_k^p(S^1)$ имеет порядок p , а потому представим в виде $\gamma = m\varphi'$, где $\varphi' \in \tilde{\Omega}_k^p(S^1)$, а так как $m\alpha = 0$, то элемент $\gamma = m\varphi'$ также переходит в нуль при гомоморфизме α , следовательно, все гомоморфизмы α тривиальны. Пусть теперь $m = sp$, где $s \geq 1$ — целое число. Тогда существует отображение $g: B \rightarrow K(\mathbb{Z}_m, 1)$ такое, что сквозное отображение $S^1 \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{g} K(\mathbb{Z}_m, 1)$ гомотопнo тождественному отображению окружности S^1 в одномерный остов $S^1 \subset \subset K(\mathbb{Z}_m, 1)$. Далее, поскольку порядок каждого элемента $\gamma \in \tilde{\Omega}_k^p(S^1)$ равен p , то гомоморфизм $(g\varphi)_*: \tilde{\Omega}_k^p(S^1) \rightarrow \tilde{\Omega}_k^p(K(\mathbb{Z}_m, 1))$ является мономорфизмом, а тогда мономорфизмом является и φ_* , что и требовалось доказать. Предложение доказано.

Следствие 27.4.1. Пусть M — замкнутое риманово многообразие, и пусть $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$ и $L' \neq 0$ — произвольный набор подгрупп в $\tilde{\Omega}_*(M)$. Тогда класс $\Omega_*^p(x, 0, L')$ непуст и 2-устойчив.

Доказательство немедленно вытекает из предложений 27.4.1 и 27.4.2.

§ 28. Общее изопериметрическое неравенство

28.1. Выбор специальной системы координат. Пусть M — полное риманово многообразие, гладкое или класса C^r , где $r \geq 4$. Напомним, что система координат $\omega: D^n \rightarrow M^n$ (где $D^n \subset \mathbb{R}^n$ — стандартный открытый шар с центром в начале координат) класса C^r называется нормальной системой координат, центрированной в точке $P \in M$, если $\omega(0) = P$, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$, где g_{ij} — компоненты

метрического тензора в системе координат ω , и если радиусы шара D^n изометрично переходят при отображении ω в дуги геодезических, исходящих из точки P .

В дальнейшем через $B(P, R)$ мы будем обозначать открытый n -мерный шар с центром в точке $P \in M$ и радиуса R , а через $C(P, A)$ — конус над A с вершиной в точке P , составленный из всех геодезических отрезков, идущих из точки P в A (при условии, что $C(P, A) \subset B(P, R)$). Известно (см. [35]), что любое полное риманово многообразие M класса C^r , $r \geq 4$, удовлетворяет некоторым метрическим условиям, которые мы сейчас перечислим и будем называть в дальнейшем условиями (M).

1. Для любой точки $P \in M$ существует система координат $\tau = \tau(y^1, \dots, y^n)$, центрированная в точке P , такая, что $h_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $h_{ij, y^k}(0) = 0$, $1 \leq k \leq n$, где h_{ij} — компоненты метрического тензора в системе τ , а h_{ij, y^k} — частные производные этих компонент. Далее, существуют пять постоянных (не зависящих от точки $P \in M$) $R_0, C_0, \eta_0, K_0, K_1$, которые удовлетворяют формулируемым ниже соотношениям.

2. Если $P_0 \in M$ и τ — центрированная в P_0 система координат, удовлетворяющая условию 1, то в любой точке $P \in B(P_0, 4R_0)$ выполнено неравенство $\sum_{ij} |\nabla^2 h_{ij}| + |\nabla^3 h_{ij}| \leq K_0$, где через ∇z обозначен градиент вектор-функции z . Кроме того, постоянные R_0 и C_0 связаны следующими неравенствами:

$$(1 + C_0 r^2)^{-2} \leq h_{ij} \lambda^i \lambda^j \leq (1 + C_0 r^2)^2, \quad 1 + C_0 16R_0^2 \leq \frac{5}{4},$$

где $P \in B(P_0, 4R_0)$, $r = |\gamma|$, $|\gamma|$ — длина отрезка γ геодезического радиуса, соединяющего P_0 с P , $\sum_i (\lambda^i)^2 = 1$.

3. Пусть τ и $B(P_0, 4R_0)$ выбраны так, как в условиях 1 и 2; тогда можно задать в каждой точке $P \in B(P_0, 4R_0)$ нормальную систему координат ω_P такую, что $(1 + \eta_0 r)^{-2} \leq g_{ij}(Q, P, \omega_P) \lambda^i \lambda^j \leq (1 + \eta_0 r)^2$, где $\sum_i (\lambda^i)^2 = 1$, $Q \in B(P, R_0)$, $r = |\gamma| \leq R_0$, γ — геодезический отрезок радиуса шара $B(P, R_0)$, соединяющий P с Q (в системе ω_P), $|\Gamma'_{jk}(Q, P) \lambda^j \mu^k| \leq \eta_0 \cdot |\lambda| \cdot |\mu|^2$, $g_{ij}(Q, P, \omega_P)$ — компоненты метрического тензора в точке Q , вычисленные в координатной системе ω_P . Рассмотрим функцию перехода $U(Q, P, T) = \omega_T^{-1} \omega_P(Q)$. Тогда вторые производные этого отображения равномерно ограничены (по модулю) постоянной K_1 для каждой точки $P_0 \in M$ и при всех $P, Q, T \in B(P_0, 4R_0)$.

28.2. Симплициальные точки поверхностей.

Определение 28.2.1. Пусть $X \subset M$ — некоторый компакт. Мы скажем, что точка $P \in X$ является симплициальной s -точкой, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что замкнутая окрест-

ность $U(P, \varepsilon') = X \cap \overline{B(P, \varepsilon')}$ точки P в компакте X допускает представление в виде конечного s -мерного симплицального подкомплекса класса C^r в многообразии M (определение подкомплекса класса C^r см. в § 6) для любого числа ε' , $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Иными словами, точка P принадлежит хотя бы одному замкнутому s -мерному симплексу подкомплекса $X \cap \overline{B(P, \varepsilon)}$, вложенного в M .

Множество всех симплицальных точек компакта X (для всех возможных s) мы обозначим через X_c , а множество $X \setminus X_c$ обозначим через X^* . Тогда можно сказать, что точки множества X^* — это «плохие», не симплицальные точки компакта. Мы получили однозначное представление компакта X в виде объединения $X = X^* \cup X_c$, где $X^* \cap X_c = \emptyset$, множество X_c открыто в компакте X , а X^* замкнуто в X . Обозначим через X_c^s множество всех симплицальных s -точек компакта X ; тогда $\dim X_c^s = s$ (в каждой точке $P \in X_c^s$) и возникает однозначное представление множества X_c в виде объединения $X_c = X_c^p \cup X_c^{p-1} \cup \dots \cup X_c^0$ (здесь некоторые из множеств X_c^s , $0 \leq s \leq p$, могут быть пустыми), $p = \dim X_c$, причем $X_c^\alpha \cap X_c^\beta = \emptyset$, если $\alpha \neq \beta$.

28.3. Изопериметрическое неравенство. Напомним определение k -мерной сферической меры Хаусдорфа. Мы будем обозначать ее тем же символом vol_k , который используется для риманова объема. Пусть S — подмножество в M и $k \geq 1$ — целое число. Если $S = \emptyset$, то положим $\text{vol}_k(S) = 0$. Пусть $S \neq \emptyset$; тогда мы определим сначала числа ${}^*\Lambda_r^k(S)$, где $r > 0$ — фиксированное число,

положив по определению ${}^*\Lambda_r^k(S) = \inf \sum_{i=1}^N \gamma(k) r_i^k$, где $N \leq \infty$,

$\gamma(k)$ — k -мерный объем единичного k -мерного шара D^k в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ и $\inf$ берется по всем покрытиям множества S не более чем счетным семейством открытых шаров $B(P_i, r_i)$, причем $r_i < r$ для любого i . Поскольку при стремлении r к нулю числа ${}^*\Lambda_r^k(S)$ не убывают, то можно определить внешнюю меру Хаусдорфа ${}^*\Lambda^k(S)$, положив ${}^*\Lambda^k(S) = \lim_{r \rightarrow +0} {}^*\Lambda_r^k(S)$.

Пусть $B \subset M$ — некоторое подмножество. Мы скажем, что множество $S \subset M$ измеримо по Хаусдорфу, если для любого B выполнено следующее равенство: ${}^*\Lambda^k(B) = {}^*\Lambda^k(S \cap B) + {}^*\Lambda^k(B \cap (M \setminus S))$. В этом случае вместо ${}^*\Lambda^k(S)$ будем писать $\text{vol}_k(S)$. Если $p < q$, то $\text{vol}_p(S) \geq \text{vol}_q(S)$, и если $\text{vol}_p(S) < \infty$, то $\text{vol}_q(S) = 0$.

Пусть на U_c фиксирована теория (ко)гомологий h . Докажем простое, но важное свойство меры vol_k .

Лемма 28.3.1. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая k -мерная плоскость, проходящая через точку P , и $A = S^{k-1} = \Pi \cap \partial B(P, r)$, $D = D^k = \Pi \cap \overline{B(P, r)}$. Пусть $x \in A$ и $Y \supset A$ — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\nabla^m(Y, A) \neq \emptyset$ (соответственно в гомоло-

гическом случае предположим, что $\Delta_m(Y, A) \neq \emptyset$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Тогда $\text{vol}_k(Y) \geq \text{vol}_k(D)$.

Доказательство. Рассмотрим ортогональную проекцию $p: (Y, A) \rightarrow (D, A)$ и положим $Y' = p(Y)$; тогда ясно (см., например, замечания к леммам 25.2 и 26.2), что $\nabla^m(Y', A) \supset \nabla^m(Y, A)$ (соответственно $\Delta_m(Y', A) \supset \Delta_m(Y, A) \neq \emptyset$), а поэтому компакт Y' должен содержать весь компакт D (иначе можно было бы осуществить деформационную ретракцию Y' на S^{k-1}), т. е. $\text{vol}_k(Y') \geq \text{vol}_k(D)$ и, кроме того, $\text{vol}_k(Y) \geq \text{vol}_k(Y')$. Лемма доказана.

Теорема 28.3.1 (теорема о шапочке). Пусть M^n — полное риманово многообразие класса C^r , $r \geq 4$, и пусть R_0 — постоянная из условий (M). Пусть $A \subset M$ — некоторый компакт такой, что $A \subset B(P_0, R_0)$ для некоторой точки P_0 , и пусть $x \in A$ — фиксированная точка. Пусть k — целое число, $2 \leq k \leq n-1$, и пусть компакт A представлен в виде объединения $A = A_c \cup A^*$ (см. пункт 28.2). Предположим, что $0 \leq \text{vol}_{k-1}(A) = l^{k-1} < \infty$ (отсюда следует, что $A_c = A_c^s \cup \dots \cup A_c^0$, где $s \leq k-1$). Тогда мы утверждаем, что:

а) Если $l > 0$, то существует компакт $X = X^* \cup X_c^k \cup \dots \cup X_c^0$, содержащий A , сам содержащийся в ε -окрестности выпуклой геодезической оболочки компакта A (где ε можно считать заданным наперед сколь угодно малым и фиксированным числом) и такой, что: 1) $\nabla^m(X, A) = \tilde{h}^{m-1}(A) \setminus 0$ (соответственно в гомологическом случае $\Delta_m(X, A) = \tilde{h}_{m-1}(A)$) при всех $m \in \mathbb{Z}$, т. е. компакт X полностью заклеивает A во всех размерностях; 2) существуют две постоянные $C = C(k, M)$ и $D = D(k, M)$, не зависящие от компакта $A \subset B(P_0, R_0)$ и от точки P_0 и обладающие следующими свойствами: $\rho(X^*, A^*) \leq Cl$, $\rho(X^* \cup X_c^k, A^* \cup A_c^{k-1}) \leq Cl$, множество $X \setminus [X \cap (A^* \cup A_c^{k-1}, Cl)]$ является конечным симплициальным подкомплексом класса C^r в многообразии M , имеющим размерность $s \leq k-1$ (заметим, что X_c^k может быть непусто даже в том случае, когда $A_c^{k-1} = \emptyset$), и, наконец, $0 \leq \text{vol}_k(X) = \text{vol}_k(X^* \cup X_c^k) \leq Dl^k$.

б) Если $l = \text{vol}_{k-1}(A) = 0$ (тогда заведомо $A_c^{k-1} = \emptyset$ и $A = A_c^\alpha \cup \dots \cup A_c^0$, $\alpha \leq k-2$), то для любого $\delta > 0$ существует компакт $X = X(\delta) = X^* \cup X_c^k \cup \dots \cup X_c^0$, $X \supset A$, содержащийся в ε -окрестности выпуклой геодезической оболочки компакта A (где ε сколь угодно малое число, не зависящее от δ) и зависящий, вообще говоря, от выбора числа δ , такой, что: 1) $\nabla^m(X, A) = \tilde{h}^{m-1}(A) \setminus 0$ (соответственно в гомологическом случае $\Delta_m(X, A) = \tilde{h}_{m-1}(A)$) при всех $m \in \mathbb{Z}$; 2) существуют две постоянные $C = C(k, M)$ и $D = D(k, M)$, не зависящие ни от компакта $A \subset B(P_0, R_0)$, ни от числа δ , обладающие следующими свойствами: $\rho(X^*, A^*) \leq C \cdot \delta$, $\rho(X^* \cup X_c^k, A^*) \leq C \cdot \delta$, множество $X \setminus [X \cap (A^*, C \cdot \delta)]$ является

конечным симплицальным подкомплексом класса C^r в многообразии M , имеющим размерность $s \leq k-1$ (напомним, что $A_c^{k-1} = \emptyset$), и $0 \leq \text{vol}_k(X) = \text{vol}_k(X^* \cup X_c^k) \leq D\delta^k$. Здесь X_c^k может быть пусто и может оказаться, что $\text{vol}_k(X) = 0$.

В отличие от случая обычной теории гомологий H_* , соотношение $\rho(X, A) \leq C(k) \cdot l$ неверно, так как даже тогда, когда $l \rightarrow 0$, вдаль от границы A могут находиться куски пленки X , о которых известно только то, что их размерность не выше чем $k-1$ и что они полностью составлены из симплицальных точек, и стянуть эти куски в малую окрестность компакта A в общем случае невозможно.

Доказательство теоремы 28.3.1. Можно считать, что $A \subset \mathbb{R}^n$. Доказательство проводится индукцией по k . Пусть $k=2$, $l>0$. Определим функцию $\varphi(a) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \text{vol}_0(A \cap \Pi_{a+1, 1ls})$, где $\Pi_t = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = t\}$; т. е. Π_t — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Из теоремы 10.2.3 в [16] следует, что $\int_0^l \varphi(a) da \leq \text{vol}_1(A) = l > 0$

(мы рассматриваем случай а)), а поэтому существует число $\bar{a}$, $0 \leq \bar{a} \leq 1, 1l$, такое, что $\varphi(\bar{a}) < 1$; тогда $\varphi(\bar{a}) = 0$, т. е. $\text{vol}_0(A \cap \Pi_{\bar{a}+1, 1ls}) = 0$ при каждом $s \in \mathbb{Z}$. Повторяя эту конструкцию вдоль каждой оси x^i , $1 \leq i \leq n$, в $\mathbb{R}^n$, мы разбиваем $\mathbb{R}^n$ на кубы со стороной $1, 1l$, ни один из которых не содержит на своей границе точек из A , и так как A — компакт, то существует ко-

нечное число кубов $R_1, R_2, \dots, R_s$ таких, что $A \subset \bigcup_{s=1}^s R_s$. В каж-

дом кубе R_s выберем точку P_s , лежащую внутри выпуклой геодезической оболочки компакта $A_s = A \cap R_s$, и рассмотрим $X_s = C(P_s, A_s)$ (конус с вершиной в точке P_s) для значения s_0 такого, что $x \in R_{s_0}$. Положим $P_{s_0} = x$. Соединим все точки P_s при $s \neq s_0$ гладкими путями γ_s с точкой x таким образом, чтобы все пути содержались в выпуклой геодезической оболочке A . Получаем вложение $A \rightarrow X = \bigcup_s (X_s \cup \gamma_s)$, где компакт X , очевидно,

полностью заклеивает A во всех размерностях и содержится в выпуклой оболочке A . Очевидно, что $\rho(X^*, A^*) \leq Cl$ и $\rho(X^* \cup X_c^2, A^* \cup A_c^2) \leq Cl$, $0 \leq \text{vol}_2(X) = \text{vol}_2(X^* \cup X_c^2) \leq Dl^2$. Рассмотрим теперь случай б). Пусть $l=0$, $\delta>0$; тогда $0 =$

$\text{vol}_1(A) \geq \int_0^{\delta} \varphi(a) da$. Отсюда снова следует, что существует $\bar{a}$,

$0 \leq \bar{a} \leq 1, \delta$, такое, что $\varphi(\bar{a}) < \delta$, а потому все дальнейшие рассуждения можно провести, как и в случае а), с заменой l на δ .

Пусть теперь $k>2$, $n \geq k+1$, и предположим, что теорема доказана для всех чисел $k' \leq k-1$ (число n в индукции не уча-

ствуется, т. е. любой компакт A , для которого $\text{vol}_{k-1}(A) < \infty$, может быть заклеен пленкой X , будучи вложен в $\mathbb{R}^{n'}$, где n' любое). Рассмотрим случай а). Определим функцию $\varphi^1(a^1) = \sum_{s^1=-\infty}^{+\infty} \text{vol}_{k-2}(A \cap \Pi_{a^1+l_{s^1}})$, тогда $\int_0^l \varphi^1(a^1) da^1 \leq \text{vol}_{k-1}(A) = l^{k-1}$ (см. теорему 10.2.3 в [16]). Отсюда следует, что существует $\bar{a}^1$, $0 \leq \bar{a}^1 \leq l$, такое, что $\varphi^1(\bar{a}^1) \leq l^{k-2}$. Положим $\Pi_{s^1} = \Pi_{\bar{a}^1+l_{s^1}}$, $D_{s^1} = A \cap \Pi_{s^1}$, где $s^1 \in \mathbb{Z}$. Тогда $\sum_{s^1} \text{vol}_{k-2}(D_{s^1}) = \varphi^1(\bar{a}^1) \leq l^{k-2}$. Пусть $l_{s^1}^{k-2} = \text{vol}_{k-2}(D_{s^1})$, тогда $\sum_{s^1} l_{s^1}^{k-2} \leq l^{k-2}$ (некоторые числа l_{s^1} могут равняться нулю). Рассмотрим $D_{s^1} \cap A^*$ и обозначим этот компакт

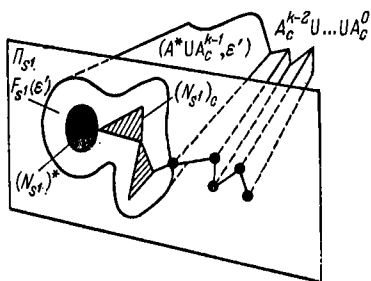


Рис. 71.

через $(D_{s^1})^*$. Отметим, что $D_{s^1}^* \subset (D_{s^1})^*$, однако в $(D_{s^1})^*$ могут оказаться и симплициальные точки. Далее, положим $(D_{s^1})_c = D_{s^1} \setminus (D_{s^1})^*$; здесь мы снова имеем, что $D_{s^1,c} \supset (D_{s^1})_c$, причем $(D_{s^1})_c$, вообще говоря, не исчерпывает весь компакт $D_{s^1,c}$. Рассмотрим e' -окрестность $(A^* \cup A_c^{k-1}, e')$ компакта $A^* \cup A_c^{k-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $F_{s^1}(e') = \Pi_{s^1} \cap (A^* \cup A_c^{k-1}, e')$, $N_{s^1} = \Pi_{s^1} \cap (A^* \cup A_c^{k-1})$, $F_{s^1}(e') \supset N_{s^1} = (N_{s^1})^* \cup (N_{s^1})_c$, $(N_{s^1})^* = \Pi_{s^1} \cap A^*$, $(N_{s^1})_c = N_{s^1} \setminus (N_{s^1})^*$, $(N_{s^1})^* \supset N_{s^1}^*$, $(N_{s^1})_c \subset N_{s^1,c}$, $\dim(N_{s^1})_c \leq k-2$ (рис. 71).

Тогда $D_{s^1} \setminus F_{s^1}(e')$ целиком состоит только из симплициальных точек размерности, не превосходящей $k-2$. Ясно, что $(D_{s^1} \setminus F_{s^1}(e')) \cap (A^* \cup A_c^{k-1}) = \emptyset$, и можно считать, что граница $\partial F_{s^1}(e')$ целиком состоит только из симплициальных точек. Рассмотрим $\Pi_{s^1} \setminus F_{s^1}(e')$; тогда существует сколь угодно малая деформация (дiffeоморфизм, близкий к тождественному) гладкого открытого многообразия $\Pi_{s^1} \setminus F_{s^1}(e')$, неподвижная на границе $\partial F_{s^1}(e')$, такая, что

$$\dim(\Pi_{s^1} \setminus F_{s^1}(e'))' \cap (A \setminus (A^* \cup A_c^{k-1}, e')) \leq k-3,$$

где через $(\Pi_{s^1} \setminus F_{s^1}(e'))'$ обозначено продеформированное многообразие $\Pi_{s^1} \setminus F_{s^1}(e')$. Приведение плоскости Π_{s^1} в общее положение относительно $A \setminus (A^* \cup A_c^{k-1}, e')$ опирается на то, что путем подбора числа $\bar{a}^1$ можно добиться, чтобы объем $\text{vol}_{k-1} A \cap (\bigcup_{s^1} \Pi_{s^1})$ был меньше бесконечности. С другой стороны, выбором $\bar{a}^1$ нельзя, вообще говоря, добиться того, чтобы в то же время и число $\text{vol}_{k-2} [A \setminus (A^* \cup A_c^{k-1}, e')] \cap (\bigcup_{s^1} \Pi_{s^1})$ было меньше бесконечности.

Ясно, что этот диффеоморфизм можно рассматривать как ограничение диффеоморфизма всей плоскости $\tilde{\Pi}_{s^1}$, которая заменяется на диффеоморфное подмногообразие $\tilde{\Pi}_{s^1} \subset \mathbb{R}^n$, причем $\tilde{\Pi}_{s^1} \cap (A^* \cup A_c^{k-1}) = N_{s^1}$. Компакт $\tilde{\Pi}_{s^1} \cap [A \setminus (A^* \cup A_c^{k-1}, e')]$ состоит из симплицальных точек, и размерность его не выше чем $k-3$, $\tilde{\Pi}_{s^1}$ сколь угодно близко расположена к плоскости Π_{s^1} . Положим

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{s^1} &= \tilde{\Pi}_{s^1} \cap A, \quad \tilde{D}_{s^1} = (\tilde{D}_{s^1})^* \cup (\tilde{D}_{s^1})_c^{k-2} \cup \dots \cup (\tilde{D}_{s^1})_c^0, \quad (\tilde{D}_{s^1})^* = \\ &= \tilde{\Pi}_{s^1} \cap A^*, \quad (\tilde{D}_{s^1})_c = \tilde{\Pi}_{s^1} \cap A_c, \quad (\tilde{D}_{s^1})_c^{k-2} = \tilde{\Pi}_{s^1} \cap (A^* \cup A_c^{k-1}) = \\ &= \Pi_{s^1} \cap (A^* \cup A_c^{k-1}). \end{aligned}$$

Ясно, что $\text{vol}_{k-2}(\tilde{D}_{s^1}) \leq \text{vol}_{k-2}(D_{s^1}) = l_{s^1}^{k-2}$, причем $\text{vol}_{k-2}(\tilde{D}_{s^1}) = \tilde{l}_{s^1}^{k-2}$ может быть равен нулю, хотя $l_{s^1} \neq 0$. Итак, $\tilde{D}_{s^1} \subset \tilde{\Pi}_{s^1}$, $\text{vol}_{k-2}(\tilde{D}_{s^1}) = \tilde{l}_{s^1}^{k-2} < \infty$, $k \geq 3$, $\tilde{D}_{s^1} = (\tilde{D}_{s^1})^* \cup (\tilde{D}_{s^1})_c$. Это разложение, вообще говоря, не совпадает с разложением $\tilde{D}_{s^1}^* \cup \tilde{D}_{s^1,c}$. Поскольку $\tilde{\Pi}_{s^1}$ диффеоморфно Π_{s^1} , то можно применить предположение индукции для $k' = k-1$; тогда существует компакт $B_{s^1} \supset \supset \tilde{D}_{s^1}$, $B_{s^1} \subset \tilde{\Pi}_{s^1}$, такой, что B_{s^1} содержится в выпуклой геодезической оболочке $\tilde{D}_{s^1}$ в $\tilde{\Pi}_{s^1}$, $\nabla^{m-1}(B_{s^1}, \tilde{D}_{s^1}) = \tilde{h}^{m-2}(\tilde{D}_{s^1}) \setminus 0$ (соответственно $\Delta_{m-1}(B_{s^1}, \tilde{D}_{s^1}) = \tilde{h}_{m-2}(\tilde{D}_{s^1})$), $x_{s^1} \in \tilde{D}_{s^1}$, для любого $m \in \mathbb{Z}$, кроме того, существуют постоянные $C = C(k-1)$ и $D = D(k-1)$, для которых $\rho(B_{s^1}^*, (\tilde{D}_{s^1})^*) \leq C \tilde{l}_{s^1}$, $\rho(B_{s^1}^* \cup B_{s^1,c}^{k-1}, (\tilde{D}_{s^1})^* \cup (\tilde{D}_{s^1})_c^{k-2}) \leq C \tilde{l}_{s^1}$, если $\tilde{l}_{s^1} > 0$, а если $\tilde{l}_{s^1} = 0$, то в обоих неравенствах вместо $\tilde{l}_{s^1}$ нужно поставить δ_{s^1} , т. е. сколь угодно малое число. И, наконец, $\text{vol}_{k-1}(B_{s^1}) = \text{vol}_{k-1}(B_{s^1}^* \cup B_{s^1,c}^{k-1}) \leq D \tilde{l}_{s^1}^{k-1}$ (или $\leq D \delta_{s^1}^{k-1}$, если $\tilde{l}_{s^1} = 0$).

Рассмотрим компакт $A_{s^1} \subset A$, состоящий из всех точек компакта A , заключенных между двумя «гиперплоскостями» $\tilde{\Pi}_{s^1-1}$ и $\tilde{\Pi}_{s^1}$. Тогда $A = \bigcup_{s^1} A_{s^1}$. Положим $C = A \cup \left(\bigcup_{s^1} B_{s^1} \right)$, $C_{s^1} = B_{s^1-1} \cup \cup A_{s^1} \cup B_{s^1}$; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{s^1} \text{vol}_{k-1}(B_{s^1}) &\leq \\ &\leq D(k-1) \sum_{s^1} (\tilde{l}_{s^1})^{k-1} = D(k-1) \cdot \sum_{s^1} (\text{vol}_{k-2}(\tilde{D}_{s^1}))^{\frac{k-1}{k-2}} \leq \\ &\leq D(k-1) \sum_{s^1} (\text{vol}_{k-2}(D_{s^1}))^{\frac{k-1}{k-2}} \leq D(k-1) \left(\sum_{s^1} \text{vol}_{k-2}(D_{s^1}) \right)^{\frac{k-1}{k-2}} = \\ &= D(k-1) \cdot (\varphi^1(\alpha^1))^{\frac{k-1}{k-2}} \leq D(k-1) l^{k-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что в сумме $\sum_{s^1}$ символы $\tilde{l}_{s^1}$ обозначают либо $\tilde{l}_{s^1}$, когда $\tilde{l}_{s^1} > 0$, либо δ_{s^1} , когда $\tilde{l}_{s^1} = 0$. Поскольку $\text{vol}_{k-1}(C) \leq \text{vol}_{k-1}(A) +$

+ $\text{vol}_{k-1} \left(\bigcup_{s^1} B_{s^1} \right)$, то $\text{vol}_{k-1}(C) \leq l^{k-1} + D(k-1)l^{k-1} = (1 + D(k-1))l^{k-1}$,

т. е. операция приклейки к компакту A перемычек B_{s^1} изменяет его объем vol_{k-1} только умножением на единую постоянную $1 + D(k-1)$, не зависящую от исходных компактов. Рассмотрим две точки x_{s^1} и x_{s^1-1} , $x_{s^1} \in \tilde{P}_{s^1}$, $x_{s^1-1} \in \tilde{P}_{s^1-1}$, и соединим их отрезком Δ_{s^1} , заключенным между «плоскостями» $\tilde{P}_{s^1}$ и $\tilde{P}_{s^1-1}$. Далее, положим $C_{s^1} = C_{s^1} \cup \Delta_{s^1}$, $A_{s^1} = A_{s^1} \cup \Delta_{s^1}$. Тогда две точки x_{s^1} и x_{s^1-1} принадлежат одной и той же компоненте линейной связности компакта A_{s^1} . Этим обстоятельством мы вскоре воспользуемся.

Рассмотрим теперь в $\mathbb{R}^n$ координатную прямую x^2 и, заменив во всех предыдущих рассуждениях A на C_{s^1} , повторим всю эту конструкцию вдоль оси x^2 . Мы имеем $C_{s^1} = C_{s^1}^* \cup C_{s^1,c}$, $\text{vol}_{k-1}(C_{s^1}) \leq \leq \text{vol}_{k-1}(C) \leq (1 + D(k-1))l^{k-1} < \infty$, $C_{s^1,c} = C_{s^1,c}^{k-1} \cup \dots \cup C_{s^1,c}^0$. Компакт C получен из компакта A приклеиванием перемычек B_{s^1} , поэтому важно оценить, насколько увеличился разброс «плохих» точек $C_{s^1}^*$ относительно «плохих» точек A^* . Ясно, что

$$\begin{aligned} \rho(C_{s^1}^*, A_{s^1}^*) &\leq \rho(B_{s^1-1}^* \cup A_{s^1}^* \cup B_{s^1}^*, A_{s^1}^*) \leq \\ &\leq \max[\rho(B_{s^1-1}^*, A_{s^1}^*), \rho(B_{s^1}^*, A_{s^1}^*)] \leq \\ &\leq \max[C(k-1)l_{s^1-1}, C(k-1)l_{s^1}] \leq C(k-1)l, \end{aligned}$$

т. е. прирост «плохих» точек происходит только в окрестности радиуса $C(k-1)l$ «плохих» точек A_{s^1} . Мы должны оценить еще одно расстояние:

$$\begin{aligned} \rho(C_{s^1}^* \cup C_{s^1,c}^{k-1}, A_{s^1}^* \cup A_{s^1,c}^{k-1}) &\leq \max\{\rho[B_{s^1}^* \cup B_{s^1,c}^{k-1}, (\tilde{D}_{s^1})^* \cup (\tilde{D}_{s^1})_c^{k-2}], \\ &\rho[B_{s^1-1}^* \cup B_{s^1-1,c}^{k-1}, (\tilde{D}_{s^1-1})^* \cup (\tilde{D}_{s^1-1})_c^{k-2}]\} \leq \\ &\leq \max(C(k-1)\tilde{l}_{s^1}, C(k-1)\tilde{l}_{s^1-1}) \leq C(k-1)l. \end{aligned}$$

Отметим, что в обеих оценках мы существенно опирались на предположение индукции для размерности $k' = k - 1$. Основным вывод, который мы должны сделать из этих вычислений, состоит в том, что при переходе от A к C_{s^1} разброс «плохих» точек происходит только в окрестности A радиуса Ml , где постоянная M не зависит от компакта A и определяется из предположения индукции. Строим, как и на первом шаге, функцию

$$\Phi^{12}(a_{s^1}^{12}) = \sum_{s^2=-\infty}^{+\infty} \text{vol}_{k-2}(C_{s^1} \cap \Pi_{a_{s^1}^{12} + l s^2});$$

тогда

$$\int_0^l \Phi^{12}(a_{s^1}^{12}) da_{s^1}^{12} \leq \text{vol}_{k-1}(C_{s^1}) \leq (1 + D(k-1))l^{k-1} < \infty,$$

т. е. существует значение $\bar{a}_{s^1}^{12}$, $0 \leq \bar{a}_{s^1}^{12} \leq l$, такое, что $\Phi^{12}(\bar{a}_{s^1}^{12}) \leq$

$\leq (1 + D(k-1))l^{k-2}$ (либо $\leq T \cdot \delta^{k-2}$, если $\text{vol}_{k-1}(C_{s^1}) = 0$). Рассмотрим плоскости $\Pi_{s^1 s^2} = \Pi_{a_{s^1 s^2}^1} + l s^2$ и положим $D_{s^1 s^2} = C_{s^1} \cap \Pi_{s^1 s^2}$.

Повторяя процедуру достаточно малой деформации и используя предположение индукции, мы получаем компакты $\tilde{D}_{s^1 s^2}, B_{s^1 s^2} \subset \subset \tilde{\Pi}_{s^1 s^2}$, удовлетворяющие всем граничным условиям, причем $B_{s^1 s^2}$ полностью заклеивает $\tilde{D}_{s^1 s^2}$ во всех размерностях. Далее, рассмотрим часть C_{s^1} , лежащую между $\tilde{\Pi}_{s^1, s^2-1}$ и $\tilde{\Pi}_{s^1, s^2}$. Обозначим ее через $A_{s^1 s^2}$ и положим $A_{s^1 s^2} = \tilde{A}_{s^1 s^2} \cup \Delta_{s^1 s^2}$, где отрезок $\Delta_{s^1 s^2}$ соединяет точки x_{s^1, s^2-1} и $x_{s^1 s^2}$, т. е. эти две точки принадлежат одной компоненте линейной связности компакта $A_{s^1 s^2}$. Наконец, положим $C_{s^1 s^2} = B_{s^1, s^2-1} \cup A_{s^1 s^2} \cup B_{s^1 s^2}$. Очевидно, что все оценки величины разброса «плохих» точек производятся в точности так же, как и на первом шаге.

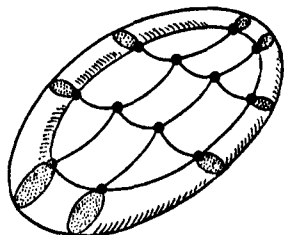


Рис. 72.

Продолжая этот процесс вдоль осей $x^3, \dots, x^n$, разбиваем $\mathbb{R}^n$ на «кубы» со стороной l , если $l > 0$, и со стороной $\delta > 0$, если $l = 0$, причем для каждого из этих «кубов» существует достаточно малый диффеоморфизм (близкий к тождественному) на обычный куб, определяемый в $\mathbb{R}^n$ следующей системой неравенств: $a^1 + l(s^1 - 1) \leq x^1 \leq a^1 + l s^1, a_{s^1}^2 + l(s^2 - 1) \leq x^2 \leq a_{s^1}^2 + l s^2, \dots$ Каждый из кубов $R_{s^1 \dots s^n}$ содержит компакт $C_{s^1 \dots s^n}$, причем $A \subset \subset \bigcup_{s^1, \dots, s^n} C_{s^1 \dots s^n} = C$ и выполнены следующие оценки разброса:

$\rho(C^*, A^*) \leq C'(k)l, \rho(C^* \cup C_c^{k-1}, A^* \cup A_c^{k-1}) \leq C'(k)l, \text{vol}_{k-1}(C) = \text{vol}_{k-1}(C^* \cup C_c^{k-1}) \leq D'(k)l^{k-1}$, где постоянные $C'(k)$ и $D'(k)$ получены индуктивным процессом вдоль всех осей и не зависят от компакта A . Наша цель — полностью заклеить компакт C пленкой X , удовлетворяющей всем условиям теоремы, тогда автоматически мы заклеим и компакт A . Приступим к заклейке C . Напомним, что $C_{s^1 \dots s^n} = B_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n-1} \cup A_{s^1 \dots s^n} \cup B_{s^1 \dots s^n}$, где $B_{s^1 \dots s^n} \supset \tilde{D}_{s^1 \dots s^n} \supset x_{s^1 \dots s^n}$ и $B_{s^1 \dots s^n}$ полностью заклеивает $\tilde{D}_{s^1 \dots s^n}$ по отношению к точке $x_{s^1 \dots s^n}$. Две точки $x_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n-1}$ и $x_{s^1 \dots s^n}$ соединены отрезком $\Delta_{s^1 \dots s^n}$, а потому принадлежат одной компоненте линейной связности компакта $A_{s^1 \dots s^n}$, и C содержится в ε -окрестности выпуклой оболочки компакта A , поскольку таким свойством обладали все приклеенные нами перемины $B_{s^1 \dots s^p}$ (рис. 72).

Сделаем важное замечание: одномерный симплициальный подкомплекс $\Delta = \bigcup_{1 \leq p \leq n} \bigcup_{(s^1 \dots s^p)} \Delta_{s^1 \dots s^p}$, очевидно, стягивается по себе

в точку, что позволяет заменить отмеченные точки в группах (ко)гомологий. Для каждого компакта $C_{s^1 \dots s^n} \subset R_{s^1 \dots s^n}$ выберем точку $P_{s^1 \dots s^n}$, расположенную в выпуклой оболочке компакта $C_{s^1 \dots s^n}$, и рассмотрим конусы $X_{s^1 \dots s^n} = C(P_{s^1 \dots s^n}, C_{s^1 \dots s^n})$. Тогда

$$\nabla^m(X_{s^1 \dots s^n}, C_{s^1 \dots s^n}) = \tilde{h}^{m-1}(C_{s^1 \dots s^n} \setminus 0, x_{s^1 \dots s^n} \in \tilde{D}_{s^1 \dots s^n})$$

(соответственно $\Delta_m(X_{s^1 \dots s^n}, C_{s^1 \dots s^n}) = \tilde{h}^{m-1}(C_{s^1 \dots s^n})$). Ясно, что $C_{s^1 \dots s^{n-1}} = \bigcup_{s^n} A_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$ (в частности, $A \cup \left(\bigcup_{s^1} \Delta_{s^1}\right) = \bigcup_{s^1} A_{s^1} = \bigcup_{s^1} (A_{s^1} \cup \Delta_{s^1})$), $A_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cap A_{s^1 \dots s^{n-1}, s^{n+1}} = \tilde{D}_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$; $A_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cap A_{s^1 \dots s^{n-1}, \gamma^n} = \emptyset$, если $|s^n - \gamma^n| > 1$,

$$\nabla^{m-1}(B_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}, D_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}) = \tilde{h}^{m-2}(\tilde{D}_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \setminus 0$$

(аналогично и в случае когомологий), $C_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} = B_{s^1 \dots s^{n-1}, s^{n-1}} \cup \bigcup A_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup B_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$, и вся эта картина расположена в цилиндре $(s^1, \dots, s^{n-1})$ вдоль прямой x^n . Рассмотрим все точки $x_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \in \tilde{D}_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$ (при переменном s^n) и точку $x_{s^1 \dots s^{n-1}} \in \tilde{D}_{s^1 \dots s^{n-1}}$, причем последняя может и не принадлежать $\bigcup \tilde{D}_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$. Поскольку все эти точки принадлежат Δ , то точки $x_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$ можно соединить путями $\gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$ с точкой $x_{s^1 \dots s^{n-1}}$, где все пути $\gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$ содержатся в Δ и в цилиндре $(s^1 \dots s^{n-1})$.

Положим $A'_{s^n} = A_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup x_{s^1 \dots s^{n-1}}$, $A' = \bigcup_{s^n} A'_{s^n}$, $D'_{s^n} = \tilde{D}_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup x_{s^1 \dots s^{n-1}}$, $B'_{s^n} = B_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup \gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$; тогда очевидно, что $D'_{s^n} = A'_{s^n} \cap A'_{s^{n+1}}$, $A'_{s^n} \cap A'_{\gamma^n} = x_{s^1 \dots s^{n-1}}$, если $|s^n - \gamma^n| > 1$. Мы хотим заклеить компакт $C'_{s^n} = B'_{s^{n-1}} \cup A'_{s^n} \cup B'_{s^n} = C_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup \gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup \gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^{n-1}}$ по отношению к точке $x_{s^1 \dots s^{n-1}}$. Компакт $X_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$ целиком заклеивал $C_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$ по отношению к $x_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n}$. Так как Δ стягивается по себе в точку, то компакт $X'_{s^n} = X_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup \gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup \gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^{n-1}}$, очевидно, целиком заклеивает $C_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup \gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^n} \cup \gamma_{s^1 \dots s^{n-1}, s^{n-1}}$ по отношению к точке $x_{s^1 \dots s^{n-1}}$, именно этого мы и добивались. Итак, мы имеем $C' = C_{s^1 \dots s^{n-1}} = \bigcup_{s^n} C'_{s^n}$, $C'_{s^n} = B'_{s^{n-1}} \cup A'_{s^n} \cup B'_{s^n}$, B'_{s^n} содержит D'_{s^n} и, очевидно, полностью заклеивает D'_{s^n} (см., например, замечание к теореме 27.3.1), $X'_{s^n} \supset C'_{s^n}$ и полностью заклеи-

вает C'_{s^n} . Отсюда следует, что выполнены все условия теоремы 25.2 (в случае гомологий — теоремы 26.2), а потому компакт $X' = \bigcup_{s^n} X'_{s^n}$ полностью заклеивает компакт $A' = \bigcup_{s^n} A'_{s^n}$ во всех размерностях по отношению к точке $x_{s^1 \dots s^{n-1}}$. Это означает, что $X' = X_{s^1 \dots s^{n-1}}$ полностью заклеивает $A' = C_{s^1 \dots s^{n-1}}$ в каждом цилиндре $(s^1 \dots s^{n-1})$. Фиксируем цилиндр $(s^1 \dots s^{n-2})$; тогда $C_{s^1 \dots s^{n-2}} = \bigcup_{s^{n-1}} A_{s^1 \dots s^{n-2}, s^{n-1}}$, и мы полностью возвращаемся в ситуацию, аналогичную только что разобранный. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получаем компакт X , полностью заклеивающий компакт $\bigcup_{s^1} A_{s^1} = A \cup \Delta$, а потому и подавно заклеивающий A , причем все группы (ко)гомологий центрированы уже в точке $x \in A$.

Итак, мы построили некоторую поверхность X , полностью заклеивающую компакт A и содержащуюся в ε -окрестности выпуклой оболочки A в $\mathbb{R}^n$. Проверим выполнение метрических требований. Пусть $P \in C$ — s -симплициальная точка; тогда весь отрезок $C(Q, P)$, вложенный в конус $C(Q, C)$, состоит из точек, которые являются либо все одновременно s -симплициальными, либо все одновременно $(s+1)$ -симплициальными, иными словами, операция взятия конуса переводит симплициальные точки снова в симплициальные. Поскольку $\rho(C^*, A^*) \leq C'(k)l$ и $\rho(C^* \cup C_c^{k-1}, A^* \cup A_c^{k-1}) \leq C'(k)l$, то $\rho(X^*, A^*) \leq (1 + C'(k))l$ и $\rho(X^* \cup X_c^k, A^* \cup A_c^{k-1}) \leq (1 + C'(k))l$ (напомним, что $\rho(X^*, C^*) \leq l$ и $\rho(X^* \cup X_c^k, C^* \cup C_c^{k-1}) \leq l$, так как длина образующей каждого конуса $X_{s^1 \dots s^n}$ не превосходит l), поэтому можно положить $C(k) = 1 + C'(k)$. При построении $C = \bigcup C_{s^1 \dots s^n}$ было доказано, что $\text{vol}_{k-1}(C) \leq \sum_{s^1 \dots s^n} \text{vol}_{k-1}(C_{s^1 \dots s^n}) \leq D'(k)l^{k-1}$. Поэтому достаточно проверить

неравенства на объемы vol_k для каждого куба $R_{s^1 \dots s^n}$. Если $Z \subset \mathbb{R}^n$, $\text{vol}_{k-1}(Z) < \infty$ и CZ — конус над Z , длина образующей которого не больше чем l , то $\text{vol}_k(CZ) \leq lk^{-1} \text{vol}_{k-1}(Z)$ (доказательство см., например, в [16], теорема 10.2.1). Отсюда следует, что $\text{vol}_k(X) \leq \sum_{s^1 \dots s^n} lk^{-1} \text{vol}_{k-1}(C_{s^1 \dots s^n}) \leq k^{-1} D'(k)l^k$, поэтому можно

положить $D(k) = k^{-1} D'(k)$. Случай а) разобран полностью. Случай б) разбирается по аналогичной схеме, но только с заменой l на δ . Теорема о шапочке доказана полностью.

Если l достаточно мало, то k -мерная часть компакта X накапливается в малой окрестности компакта $A^* \cup A_c^{k-1}$. Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться.

§ 29.1. Минимизирующий процесс в вариационных классах $h(A, L, L'), h(A, \tilde{L})$

29.1. Минимизирующая последовательность поверхностей. Функции плотности, связанные с поверхностями. Сосредоточим основное внимание на классах $\mathcal{O}$, поскольку исследование классов $\tilde{\mathcal{O}}$ проводится по аналогичной схеме. В этом параграфе мы построим минимизирующий процесс (который назовем M -процессом), позволяющий по каждой минимизирующей последовательности поверхностей в классе $\mathcal{O}$ построить некоторую поверхность из этого же класса, которая, как окажется, будет глобально минимальной. Предположим, что класс $\mathcal{O}$ непуст и что существует целое число s , $3 \leq s \leq n-1$, такое, что число $d_s = \inf \text{vol}_s(X \setminus A)$, $X \in \mathcal{O}$, меньше бесконечности. Если такого числа s не существует (т. е. если $\text{vol}_s(X \setminus A) = \infty$ при любом s и при любом $X \in \mathcal{O}$), то постановка нетривиальной вариационной задачи невозможна. В дальнейшем через k мы будем обозначать наименьшее из всех таких целых чисел s , что $d_s < \infty$.

Поскольку $d_k = \inf \text{vol}_k(X \setminus A)$, $X \in \mathcal{O}$, то в классе $\mathcal{O}$ существует бесконечная последовательность компактов $X_n^{(i)}$, $n=1, 2, 3, \dots$, таких, что $\text{vol}_k(X_n^{(i)} \setminus A) = d_k + e_n$, где $e_n \geq 0$, $e_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Положим $R^0(P) = \min[d(P, A), R_0]$, где $P \in M$, $d(P, A)$ — расстояние точки P до компакта A . Пусть $X \subset M$ — некоторый компакт, не обязательно принадлежащий топологическому классу $\mathcal{O}$ и такой, что $\text{vol}_k(X \setminus A) < \infty$. Определим следующие две функции:

$$\varphi_m(r, P, X) = \int_0^r \text{vol}_{m-1}[X \cap \partial B(P, t)] dt,$$

$$\psi_m(r, P, X) = \text{vol}_m[X \cap B(P, r)],$$

где $R^0(P) > 0$, $0 < r < R^0(P)$. Фиксируем на многообразии M счетное, всюду плотное подмножество $\{Q_i\}$, и пусть в M задана бесконечная последовательность компактов X_α , $X_\alpha \supset A$, $\alpha = 1, 2, \dots$, таких, что $\text{vol}_m(X_\alpha \setminus A) < \infty$ (при каждом α). Тогда из последовательности X_α можно выбрать (вообще говоря, неоднозначно) подпоследовательность X_{α_j} , $j=1, 2, 3, \dots$, такую, что функции $\psi_m(r, Q_i, X_{\alpha_j})$ сходятся при $j \rightarrow \infty$ для каждого i и для каждого r , $0 < r < R^0(Q_i)$, к некоторым функциям $\tilde{\psi}_m(r, Q_i)$. Построим по последовательности X_{α_j} следующие функции:

$$\psi_m^+(r, Q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sup_{\substack{|r-r'| \leq \delta \\ d(Q, Q_i) \leq \delta}} \tilde{\psi}_m(r', Q_i) \right],$$

$$\psi_m^-(r, Q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\inf_{\substack{|r-r'| \leq \delta \\ d(Q, Q_i) \leq \delta}} \tilde{\psi}_m(r', Q_i) \right],$$

$$\varphi_m^+(r, Q) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\sup_{p \geq l} \varphi_m(r, Q, X_{\alpha_p}) \right],$$

$$\varphi_m^-(r, Q) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\inf_{p \geq l} \varphi_m(r, Q, X_{\alpha_p}) \right].$$

Обозначим через γ_m объем единичного m -мерного шара D^m , выберем и зафиксируем положительное число h_m так, чтобы $1 + h_m \cdot r \geq (1 + \eta_0 r)^{2m-1}$ при $0 \leq r \leq R_0$; число h_m определено неоднозначно, однако это не отражается на дальнейших построениях. Определим гладкую функцию

$$h_m(r) = \gamma_m r^m (1 + h_m r)^{-m}, \quad 0 \leq r \leq R_0.$$

Определение 29.1.1. Пусть $R^0(P) > 0$ (т. е. $P \in M \setminus A$). Функцией $\Psi_m(P)$ m -мерной плотности последовательности поверхностей X_α , $\alpha = 1, 2, \dots$, на многообразии M назовем следующую функцию

$$\Psi_m(P) = \limsup_{\rho \rightarrow 0, 0 < r < \rho} [h_m^{-1}(r) \cdot \Psi_m^+(r, P)].$$

Подчеркнем, что, вообще говоря, функция $\Psi_m(P)$ определена неоднозначно — по одной и той же последовательности X_α можно построить много функций плотности, — однако если $X_\alpha \equiv X$ при всех α , то функция $\Psi_m(P)$ определена на многообразии M однозначно (в частности, $\Psi_m(P) = 0$ при $P \notin X$).

29.2. Краткая схема построения минимизирующего процесса. Рассмотрим в топологическом вариационном классе $\mathcal{O}$ k -минимизирующую последовательность $X_n^{(1)}$, $d_k < \infty$, и предположим, что класс $\mathcal{O}$ 1-устойчив. Это — единственное условие, позволяющее осуществить в классе $\mathcal{O}$ M -процесс. Напомним, что если многообразие M односвязно, то любой непустой топологический класс $\mathcal{O}$ является 1-устойчивым (см. пункт 27.4).

Построим по последовательности $X_n^{(1)}$ функцию плотности $\Psi_k(P)$ и положим $S^k = \{P \in M \setminus A \mid \Psi_k(P) > 0\}$. Тогда, как мы докажем ниже, выполнено следующее утверждение.

Предложение 29.2.1. Множество $\tilde{X}^k = A \cup S^k$ есть компакт в многообразии M . Существует новая последовательность $X_n^{(1')} \in \mathcal{O}$ такая, что: 1) $\text{vol}_k[X_n^{(1')} \setminus A] \rightarrow d_k$, $n \rightarrow \infty$; 2) для любой открытой окрестности U компакта $A \cup S^k = \tilde{X}^k$ существует номер $N = N(U)$ такой, что $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(1')} \setminus U] < \infty$ для всех $n > N(U)$.

Поскольку, в частности, это означает, что $\text{vol}_k[X_n^{(1')} \setminus U] = 0$ при $n > N$, то k -мерные куски новых компактов $X_n^{(1')}$ накапливаются в сколь угодно малой окрестности компакта $\tilde{X}^k$. Теперь рассмотрим открытые окрестности U_α^1 компакта $\tilde{X}^k$ такие, что $U_\alpha^1 \supset U_{\alpha+1}^1$ и $\bigcap_{\alpha} U_\alpha^1 = \tilde{X}^k$. Положим $\omega_\alpha^{k-1} = \inf \text{vol}_{k-1}(X \setminus U_\alpha^1)$, где $X \in \mathcal{O}$. Тогда в силу предложения 29.2.1 имеем $\omega_\alpha^{k-1} < \infty$ (см. свойство 2)). Поскольку $\omega_{\alpha+1}^{k-1} \geq \omega_\alpha^{k-1}$, то существует предел (быть может, равный бесконечности) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \omega_\alpha^{k-1} = \lambda_{k-1}$. Отметим, что $d_k \geq \lambda_k$, где число λ_k определяется по той же схеме, т. е. $\lambda_k = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [\inf \text{vol}_k(X \setminus U_\alpha^0)]$, $X \in \mathcal{O}$, $U_{\alpha+1}^0 \subset U_\alpha^0$, $\bigcap_{\alpha} U_\alpha^0 = S^k$.

Легко видеть, что числа λ_k и λ_{k-1} не зависят от выбора окрестностей U_α^0 и U_α^1 соответственно.

Поскольку $\lambda_{k-1} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \omega_\alpha^{k-1}$, то существует бесконечная последовательность $X_n^{(k)} \in \mathcal{O}$, составленная из таких компактов $X_n^{(k)}$, что $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(k)} \setminus U_n^1] = \omega_n^{k-1} + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Как и на первом шаге, построим по этой последовательности функцию $(k-1)$ -мерной плотности $\Psi_{k-1}(P)$, $P \in M \setminus \tilde{X}^k$, и положим $S^{k-1} = \{P \in M \setminus \tilde{X}^k \mid \Psi_{k-1}(P) > 0\}$.

Предложение 29.2.2. Множество $\tilde{X}^{k-1} = A \cup S^k \cup S^{k-1}$ является компактом в M . Существует новая последовательность $X_n^{(k)'} \in \mathcal{O}$ такая, что: (1) $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(k)'} \setminus U_n^1] = \omega_n^{k-1} + \varepsilon'_n$, $\varepsilon'_n \geq 0$, $\varepsilon'_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$; (2) для любой открытой окрестности U компакта $\tilde{X}^{k-1}$ существует номер $N = N(U)$ такой, что $\text{vol}_{k-2}[X_n^{(k)'} \setminus U] < \infty$ для всех $n > N$.

Так как, в частности, это означает, что $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(k)'} \setminus U] = 0$, то $(k-1)$ -мерные куски новых компактов $X_n^{(k)'}$ накапливаются в сколь угодно малой окрестности компакта $\tilde{X}^{k-1}$. Рассмотрим открытые окрестности U_α^2 компакта $\tilde{X}^{k-1}$ такие, что $U_\alpha^2 \supset U_{\alpha+1}^2$ и $\bigcap_\alpha U_\alpha^2 = \tilde{X}^{k-1}$. Положим $\omega_\alpha^{k-2} = \inf \text{vol}_{k-2}(X \setminus U_\alpha^2)$, где $X \in \mathcal{O}$.

Тогда в силу предложения 29.2.2 имеем $\omega_\alpha^{k-2} < \infty$. Поскольку $\omega_{\alpha+1}^{k-2} \geq \omega_\alpha^{k-2}$, то существует предел (быть может, равный бесконечности) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \omega_\alpha^{k-2} = \lambda_{k-2}$. Это число не зависит от выбора сжимающейся системы окрестностей U_α^2 . Поскольку $\lambda_{k-2} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \omega_\alpha^{k-2}$,

то существует бесконечная последовательность $X_n^{(k)} \in \mathcal{O}$ такая, что $\text{vol}_{k-2}[X_n^{(k)} \setminus U_n^2] = \omega_n^{k-2} + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Как и на втором шаге, строим по этой последовательности функцию $(k-2)$ -мерной плотности $\Psi_{k-2}(P)$, $P \in M \setminus \tilde{X}^{k-1}$, и положим $S^{k-2} = \{P \in M \setminus \tilde{X}^{k-1} \mid \Psi_{k-2}(P) > 0\}$ и т. д.

Продолжая этот процесс вниз по размерностям, мы получаем в конце концов последовательность множеств $S^k, S^{k-1}, S^{k-2}, \dots$

$\dots, S^2, S^1$, где $S^i = \left\{ P \in M \setminus A \setminus \bigcup_{l=i+1}^k S^l \mid \Psi_i(P) > 0 \right\}$, причем

оказывается, что множество S^1 пусто ввиду 1-устойчивости класса $\mathcal{O}$. На предпоследнем шаге мы имеем компакт $\tilde{X}^4 = A \cup \bigcup_{p \geq 4} S^p$,

$\bigcap_\alpha U_\alpha^{k-3} = \tilde{X}^4$, $\omega_\alpha^3 = \inf \text{vol}_3[X \setminus U_\alpha^{k-3}]$, где $X \in \mathcal{O}$, $\omega_\alpha^3 < \infty$,

$\lambda_3 = \lim \omega_\alpha^3$, $\lambda_3 \leq \infty$. Рассмотрим последовательность $X_n^{(k-2)} \in \mathcal{O}$ такую, что $\text{vol}_3[X_n^{(k-2)} \setminus U_n^{k-3}] = \omega_n^3 + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, построим

функцию $\Psi_3(P)$ по последовательности $X_n^{(k-2)}$, а затем рассмотрим множество $S^3 = \{P \in M \setminus \tilde{X}^4 \mid \Psi_3(P) > 0\}$.

Предложение 29.2. (k-2). Множество $\tilde{X}^3 = A \cup \bigcup_{p=3}^k S^p$ является компактом в M . Существует новая последовательность $X_n^{(k-2)'}$ $\in \mathcal{O}$ такая, что: (1) $\text{vol}_3[X_n^{(k-2)'} \setminus U_n^{k-3}] = \omega_n^3 + e'_n$, $e'_n \geq 0$, $e'_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$; (2) для любой открытой окрестности U компакта $\tilde{X}^3$ существует номер $N = N(U)$ такой, что $\text{vol}_2[X_n^{(k-2)'} \setminus U] < \infty$ для всех $n > N(U)$.

Рассмотрим открытые окрестности U_α^{k-2} компакта $\tilde{X}^3$, $\bigcap_\alpha U_\alpha^{k-2} = \tilde{X}^3$, и пусть $\omega_\alpha^2 = \inf \text{vol}_2(X \setminus U_\alpha^{k-2})$, $X \in \mathcal{O}$, $\lambda_2 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \omega_\alpha^2$. Тогда из предложения 29.2. (k-2) следует, что $\omega_\alpha^2 < \infty$. Существует последовательность $X_n^{(k-1)} \in \mathcal{O}$, для которой $\text{vol}_2[X_n^{(k-1)} \setminus U_n^{k-2}] = \omega_n^2 + e_n$, $e_n \geq 0$. Построим функцию $\Psi_2(P)$ и рассмотрим $S^2 = \{P \in M \setminus \tilde{X}^3 \mid \Psi_2(P) > 0\}$.

Предложение 29.2. (k-1). Множество $\tilde{X}^2 = S^2 \cup \tilde{X}^3$ является компактом в M , причем $\tilde{X}^2 \in \mathcal{O}$. Существует новая последовательность $X_n^{(k-1)'}$ $\in \mathcal{O}$ такая, что: (1) $\text{vol}_2[X_n^{(k-1)'} \setminus U_n^{k-2}] = \omega_n^2 + e'_n$, $e'_n \geq 0$, $e'_n \rightarrow 0$; (2) для любой открытой окрестности U компакта $\tilde{X}^2$ существует номер $N = N(U)$ такой, что $\text{vol}_1[X_n^{(k-1)'} \setminus U] < \infty$, а потому в силу 1-устойчивости класса $\mathcal{O}$ имеем $X_n^{(k-1)'} \subset U$ для всех $n > N(U)$.

Подчеркнем отличие предложения 29.2. (k-2) от всех предыдущих предложений 29.2. (s), где $1 \leq s \leq k-2$. Именно $\tilde{X}^2 \in \mathcal{O}$, чего нельзя, вообще говоря, утверждать относительно компактов $\tilde{X}^i$, где $3 \leq i \leq k$; более того, если $S^2 \neq \emptyset$, то никакой из компактов $\tilde{X}^i$, $3 \leq i \leq k$, не принадлежит $\mathcal{O}$.

Итак, описанный выше процесс приводит нас к некоторому компакту $\tilde{X}^2 \in \mathcal{O}$.

Определение 29.2.1. Описанный выше процесс, сопоставляющий каждой k -минимизирующей последовательности компактов $X_n^{(1)} \in \mathcal{O}$ (т. е. $\text{vol}_k(X_n^{(1)} \setminus A) \rightarrow d_k$ при $n \rightarrow \infty$) компакт $\tilde{X}^2 \in \mathcal{O}$ (в предположении, что $d_k < \infty$ и что класс $\mathcal{O}$ 1-устойчив), мы будем называть M -процессом. Вектор $\lambda = (d_k, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_2)$ мы будем называть λ -вектором данного M -процесса. Мы будем называть M -процесс конечным, если $\lambda_i < \infty$, $2 \leq i \leq k-1$.

В действительности M -процесс существует в любом классе $\mathcal{O}$, для которого $d_k < \infty$ (т. е. можно не предполагать 1-устойчивости класса $\mathcal{O}$), поскольку минимизация одномерного объема (длины) не встречает препятствий. Однако, поскольку для исследования

метрических свойств компактов X^* мы все равно будем предполагать 2-устойчивость класса $\mathcal{O}$, мы не останавливаемся на случае размерности один. Если с самого начала предположить, что многообразие односвязно, то это гарантирует 1-устойчивость любого непустого топологического вариационного класса.

29.3. Конструктивное построение минимизирующего процесса и доказательство его сходимости. Первый шаг. Переходим к доказательству предложений 29.2.1 — 29.2. ($k-1$), где $k \geq 2$. Нам потребуются вспомогательные аналитические факты, обобщающие в нашем контексте некоторые конструкции из [16] и [35].

Лемма 29.3.1. Пусть X — компакт такой, что $A \subset X \subset M$, $\text{vol}_k(X \setminus A) < \infty$. Тогда выполнены соотношения:

(3.1.1) $\varphi_k(r_2, P, X) - \varphi_k(r_1, P, X) \leq \psi_k(r_2, P, X) - \psi_k(r_1, P, X)$, если $0 \leq r_1 < r_2 < R^0(P)$;

(3.1.2) $\psi_k(r', P', X) \leq \psi_k(r' + d(P, P')P, X)$, где $r' < R^0(P')$, $r' + d(P, P') < R^0(P)$.

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 10.2.3 в [16] и из того факта, что $B(P', r') \subset B(P, r' + d(P, P'))$. В дальнейшем мы часто будем дифференцировать функции типа $\varphi_k(r, P, X)$, которые, вообще говоря, разрывны; поэтому мы подчеркиваем, что дифференцирование понимается как дифференцирование по мере (см. подробности в [16]).

Лемма 29.3.2. Пусть $X \in \mathcal{O}$ и $\text{vol}_k(X \setminus A) = d_k + e < \infty$, где $e \geq 0$. Пусть $0 \leq r < R^0(P)$. Определим следующие функции: $\hat{\varphi}_k(r, P, X) = \max[0, \varphi_k(r, P, X) - e]$, $\hat{\psi}_k(r, P, X) = \max[0, \psi_k(r, P, X) - e]$, $\rho_1(P, X) = \sup(r)$, где числа r таковы, что $\hat{\varphi}_k(r, P, X) = 0$, $\rho_1^+(P, X) = \sup(r)$, где числа r таковы, что $\hat{\psi}_k(r, P, X) = 0$. Тогда почти для всех r таких, что $0 \leq r < R^0(P)$, выполнены неравенства:

$$(3.2.1) \quad \psi_k(r, P, X) \leq \begin{cases} D[\varphi_{k,r}(r, P, X)]^{k/(k-1)} + e, \\ k^{-1}r(1 + h_k r)\varphi_{k,r}(r, P, X) + e, \end{cases}$$

где $D = D(k)$ — постоянная из теоремы 28.3.1, а $\varphi_{k,r}$ — частная производная функции φ_k по аргументу r ;

(3.2.2.) $\rho_1^+(P, X) \leq \rho_1(P, X)$, $\hat{\varphi}_{k,r}(r, P, X) \leq \hat{\psi}_{k,r}(r, P, X)$ почти для всех r , $0 \leq r < R^0(P)$;

(3.2.3) $\hat{\varphi}_k(r_2, P, X) - \hat{\varphi}_k(r_1, P, X) \leq \hat{\psi}_k(r_2, P, X) - \hat{\psi}_k(r_1, P, X)$, если $0 \leq r_1 < r_2 < R^0(P)$;

(3.2.4) $r^{-k}(1 + h_k r)^k \hat{\varphi}_k(r, P, X)$, $r^{-k}(1 + h_k r)^k \cdot \psi_k(r, P, X)$ являются неубывающими по r функциями;

(3.2.5) $\hat{\varphi}_k(r, P, X) \geq \kappa_k[r - \rho_1(P, X)]^k$, если $\rho_1(P, X) \leq r < R^0(P)$ здесь $\kappa_k = k^{-k}D^{1-k} > 0$;

(3.2.6) $\psi_k(r, P, X) \leq e + k^{-1}(1 - k')^{-1}[1 + \rho_1(P, X)]e$, если $0 \leq r \leq k'\rho_1(P, X)$, $0 < k' < 1$.

Доказательство. Докажем (3.2.1). Ясно, что почти для всех $r < R^0(P)$ мы имеем $\varphi_{k,r}(r, P, X) = \text{vol}_{k-1}[X \cap \partial B(P, r)]$.

Выполним полную 'S-перестройку' компакта X . Для этого возьмем в качестве открытого множества G открытый шар $B(P, r)$, где $r < R^0(P)$; тогда $A \cap \bar{G} = \emptyset$. Напомним, что $X_1 = (X \cap G) \cup x$, $A_1 = (X \cap \partial G) \cup x$, $Y_2 = X \setminus G$, $Y = Y_1 \cup Y_2$, где Y_1 полностью заклеивает компакт A_1 . В качестве Y_1 возьмем компакт $\bar{Y}_1 \cup \gamma$ (см. теорему 27.3.1), где γ — путь, соединяющий x с $\dot{x} \in A_1 = X \cap \partial G$, а $\bar{Y}_1$ — «шапочка», существование которой доказано выше в теореме 28.3.1. Так как почти для всех r , $0 \leq r < R^0(P)$, мы имеем $\text{vol}_{k-1}(A_1) = \text{vol}_{k-1}(X \cap \partial G) = \text{vol}_{k-1}(X \cap \partial B(P, r)) = \varphi_{k,r}(r, P, X) < \infty$ (поскольку $\text{vol}_k(X) < \infty$), то, в обозначениях теоремы 28.3.1, получаем $\text{vol}_{k-1}(A_1) = l^{k-1} = (\varphi_{k,r})^{(k-1)/(k-1)} < \infty$, т. е. $l = (\varphi_{k,r})^{1/(k-1)}$. В силу теоремы 28.3.1 можно считать, что компакт $\bar{Y}_1$ содержится в выпуклой геодезической оболочке компакта A_1 , т. е. в шаре $\bar{B}(P, r)$, а также, что $\text{vol}_k(Y_1) = \text{vol}_k(\bar{Y}_1) \leq D l^k$. Поскольку $X_1 \cup Y_1$ стягивается по многообразию M в точку, то в силу теоремы 27.3.1 мы получаем, что $Y = Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{O}$, а потому $\text{vol}_k(Y \setminus A) \geq \geq d_k$. Допустим, что (3.2.1) не выполнено, т. е. $\psi_k(r, P, X) > > D l^k + \varepsilon$, а так как $(S \setminus \bar{G}) \cap (S \cap \bar{G}) = \emptyset$, $S = X \setminus A$, то

$$\begin{aligned} \text{vol}_k(S) &= \text{vol}_k(S \setminus \bar{G}) + \text{vol}_k(S \cap \bar{G}) > \text{vol}_k(S \setminus \bar{G}) + D l^k + \varepsilon \geq \\ &\geq \text{vol}_k(S \setminus \bar{G}) + \text{vol}_k(Y_1) + \varepsilon \geq \text{vol}_k[(S \setminus \bar{G}) \cup Y_1] + \varepsilon = \text{vol}_k(Y) + \varepsilon \geq \\ &\geq d_k + \varepsilon, \text{ а потому } \text{vol}_k(S) > d_k + \varepsilon, \end{aligned}$$

что противоречит выбору S . Напомним, что $\text{vol}_k(S) = d_k + \varepsilon$. Отметим, что здесь мы использовали конечность числа d_k . Второе неравенство в (3.2.1) доказывается совершенно аналогично, поскольку в качестве $\bar{Y}_1 \subset \bar{B}(P, r)$ можно взять конус $\bar{Y}_1 = = C(P, A_1)$. Пусть ω — нормальная координатная система с областью определения $B(0, R_0) \subset \mathbb{R}^n$ и такая, что $\omega(0) = P$; тогда положим $A_{10} = \omega^{-1}(A_1)$. Так как конус $\bar{Y}_1$ полностью заклеивает A_1 , то снова по теореме 27.3.1 имеем $Y = Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{O}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \text{vol}_k(Y_1) &= \text{vol}_k(\bar{Y}_1) \leq (1 + \eta_0 r)^k \text{vol}_k[C(0, A_{10})] \leq \\ &\leq (1 + \eta_0 r)^k k^{-1} r \text{vol}_{k-1}(A_{10}) \leq (1 + \eta_0 r)^{k-1} k^{-1} r \varphi_{k,r} \leq \\ &\leq (1 + h_k r)^{k-1} k^{-1} r \varphi_{k,r}, \end{aligned}$$

как это следует из утверждения 10.1.13 в [16], из теоремы 10.2.1 и леммы 10.2.1 (с) в [16], а также из определения постоянной h_k . Итак, (3.2.1) доказано.

Перейдем к доказательству (3.2.2). Если в (3.1.1) устремить r_1 к r_2 , разделив неравенство на $r_2 - r_1$, то почти для всех r , $0 \leq r < R^0(P)$, будем иметь $\varphi_{k,r} \leq \psi_{k,r}$, а потому и $\hat{\varphi}_{k,r} \leq \hat{\psi}_{k,r}$, что и требовалось. Так как $\hat{\varphi}_k \leq \hat{\psi}_k$, то если $\hat{\psi}_k = 0$, то и $\hat{\varphi}_k = 0$, т. е. $\rho_1^* \leq \rho_1$ (см. определение ρ_1 и ρ_1^*), что и завершает доказательство (3.2.2).

Неравенство (3.2.3) немедленно следует из (3.1.1) и определения $\hat{\phi}_k, \hat{\psi}_k$. Поскольку $\hat{\phi}_k \leq \hat{\psi}_k$ и $\hat{\psi}_k \leq \psi_k$, то отсюда следует, что

$$(3.2.7) \quad \hat{\phi}_k \leq \begin{cases} k^{-1}r(1+h_k r) \hat{\phi}_{k,r}, \\ D(\hat{\phi}_{k,r})^{k/(k-1)}. \end{cases}$$

Ясно, что $\hat{\phi}_k + \varepsilon \leq \mu(\hat{\phi}_k + \varepsilon)$, где $\mu = k^{-1}r(1+h_k r)$; отсюда $\hat{\phi}_k \leq \hat{\psi}_k \leq \mu \hat{\phi}_k + \varepsilon(\mu - 1)$, где $\mu < 1$. Доказанное неравенство выполнено почти при всех r .

Теперь мы докажем (3.2.5). Из (3.2.7) следует, что $\hat{\phi}_k \leq D \times \times (\hat{\phi}_{k,r})^{k/(k-1)}$, т. е. $(k\hat{\phi}_k)' \geq D^{(1-k)/k}$, а тогда $\int_0^r (k\hat{\phi}_k)' dr \geq D^{(1-k)/k} \times \times (r - \rho_1)$, поскольку $\int_0^r (k\hat{\phi}_k)' dr = 0$ при $r < \rho_1$. Отсюда находим

$$\int_0^r (k\hat{\phi}_k)' dr = \int_{\rho_1}^r (k\hat{\phi}_k)' dr, \quad k\hat{\phi}_k \geq D^{(1-k)/k}(r - \rho_1), \text{ если } \rho_1(P, X) \leq r < < R^0(P), \text{ так как } k\hat{\phi}_k|_{\rho_1} = 0. \text{ Отсюда окончательно следует: } \hat{\phi}_k \geq \geq (k^{-k}D^{1-k})(r - \rho_1)^k, \text{ что и требовалось. Напомним, что } \kappa_k = k^{-k}D^{1-k} > 0.$$

Докажем (3.2.6). Пусть $0 < k' < 1$, $0 < r \leq k's$, где $s < \rho_1$. Используя (3.2.1), получаем

$$\begin{aligned} \psi_k(r, P, X) &\leq \psi_k(k's, P, X) \leq \\ &\leq s^{-1}(1-k')^{-1} \int_{sk'}^s k^{-1}t(1+h_k t) \varphi_{k,r}(t, P, X) dt + \varepsilon \leq \\ &\leq [1+h_k \rho_1(P, X)] k^{-1}(1-k')^{-1} \varphi_k(s, P, X) + \varepsilon \leq \\ &\leq \varepsilon + k^{-1}(1-k')^{-1}(1+\rho_1)\varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы докажем (3.2.4). Рассмотрим функцию $f(r) = r^{-k} \times \times 1 + h_k r)^k \hat{\phi}_k$; требуется доказать, что $f'_r \geq 0$ (отсюда будет следовать монотонность $f(r)$, так как $h_k(r)$ — гладкая функция, а $\hat{\phi}_k$ — непрерывная функция). Ясно, что

$$\begin{aligned} f'_r &= (1+h_k r)^{k-1} r^{-k} [(1+h_k r) \hat{\phi}_{k,r} - k r^{-1} \hat{\phi}_k] = \\ &= (1+h_k r)^{k-1} k r^{-k-1} [k^{-1}r(1+h_k r) \hat{\phi}_{k,r} - \hat{\phi}_k] \geq 0 \end{aligned}$$

в силу (3.2.7). Монотонность $f(r)$ доказана. Докажем вторую часть неравенства (3.2.4). Сначала мы установим, что $\frac{\partial}{\partial r} [h_k^{-1}(r) \hat{\psi}_k] \geq 0$, т. е. что $[h_k^{-1}(r)]' \hat{\psi}_k + h_k^{-1}(r) \hat{\psi}'_{k,r} \geq 0$; здесь $h_k^{-1}(r) = \gamma_k^{-1} r^{-k} (1+h_k r)^k$. Ясно, что

$$\begin{aligned} [h_k^{-1}(r)]' \hat{\psi}_k + h_k^{-1}(r) \hat{\psi}'_{k,r} &= \\ &= \gamma_k^{-1} k (1+h_k r)^{k-1} r^{-k-1} [-\hat{\psi}_k + k^{-1}r(1+h_k r) \hat{\phi}_{k,r}] \geq 0, \end{aligned}$$

что следует из неравенств: $\hat{\psi}_{k,r} \leq \hat{\psi}_{k,r}$, $\hat{\psi}_k \leq k^{-1}r(1+h_k r) \hat{\psi}_{k,r}$, т. е. $\hat{\psi}_k \leq k^{-1}r(1+h_k r) \hat{\psi}_{k,r}$, $-\hat{\psi}_k + k^{-1}r(1+h_k r) \hat{\psi}_{k,r} \geq 0$, что и требовалось доказать.

Поскольку функция $h_k^{-1}(r) \hat{\psi}_k$, вообще говоря, разрывна, то для доказательства ее монотонности требуются дополнительные соображения. Определим непрерывную функцию $\hat{\chi} = \int_0^r \hat{\psi}_{k,r}(t, P, X) dt$ и положим $\omega = \hat{\psi}_k - \hat{\chi}$; тогда $\hat{\psi}_k = \hat{\chi} + \omega$, т. е. $\hat{\chi}$ — регулярная часть функции $\hat{\psi}$, а ω — ее сингулярная часть. Так как $\frac{\partial}{\partial r} [h_k^{-1}(r) \hat{\psi}_k] \geq 0$, то $\frac{\partial}{\partial r} [h_k^{-1}(r) \hat{\chi}] \geq -[-h_k^{-1}(r)]'_r \omega(r)$, поскольку $\omega'_r = 0$ почти всюду. Отметим, что функция $h_k^{-1}(r) \hat{\chi}$ непрерывна. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r} [h_k^{-1}(r) \hat{\chi}] dr &= h_k^{-1}(r_2) \hat{\chi}(r_2) - h_k^{-1}(r_1) \hat{\chi}(r_1) \geq \\ &\geq - \int_{r_1}^{r_2} [h_k^{-1}(r)]'_r \omega(r) dr = - \int_{r_1}^{r_2} \{d[h_k^{-1}(r) \omega(r)] - h_k^{-1}(r) d\omega(r)\} = \\ &= -h_k^{-1}(r_2) \omega(r_2) + h_k^{-1}(r_1) \omega(r_1) + \int_{r_1}^{r_2} h_k^{-1}(r) d\omega(r). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$h_k^{-1}(r_2) \hat{\psi}_k(r_2) - h_k^{-1}(r_1) \hat{\psi}_k(r_1) \geq \int_{r_1}^{r_2} h_k^{-1}(r) d\omega(r).$$

Отметим, что $d\omega \neq \omega'_r dr$. Докажем теперь, что $d\omega(r) \geq 0$. Действительно,

$$\lim_{r'_2 \rightarrow r'_1} [\omega(r'_2) - \omega(r'_1)] = \lim_{r'_2 \rightarrow r'_1} [\hat{\psi}_k(r'_2) - \hat{\psi}_k(r'_1)] - \lim_{r'_2 \rightarrow r'_1} \int_{r'_1}^{r'_2} \hat{\psi}_{k,r}(r) dr \geq 0,$$

так как $\hat{\psi}_k(r'_2) \geq \hat{\psi}_k(r'_1)$, а предел интеграла равен нулю. Лемма доказана полностью.

Лемма 29.3.3. Пусть $X_n^{(1)} \in \mathcal{O}$, $\text{vol}_k[X_n^{(1)} \setminus A] = d_k + \varepsilon < \infty$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и пусть φ_k^+ , ψ_k^+ — функции, построенные по последовательности $X_n^{(1)}$ (см. выше). Тогда:

(3.3.1) функции φ_k^+ и ψ_k^+ не убывают по r и, кроме того, функция $\psi_k^+(r, P)$ полунепрерывна сверху по r в точке (r, P) ;

$$\begin{aligned} (3.3.2) \quad \psi_k^-(r, P) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty, p \geq n} \psi_k(r, P, X_p^{(1)}) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty, p \geq n} \psi_k(r, P, X_p^{(1)}) \leq \psi_k^+(r, P); \end{aligned}$$

(3.3.3) $\psi_k^-(r_2, P) \geq \psi_k^+(r_1, P)$, если $0 \leq r_1 < r_2 < R^0(P)$. Таким образом (см. (3.3.2)), $\psi_k^+(r, P) = \psi_k^-(r, P)$, когда либо $\psi_k^+(r, P)$, либо $\psi_k^-(r, P)$ непрерывна по r в точке (r, P) ;

(3.3.4) $\varphi_k^- \leq \varphi_k^+ \leq \psi_k^+$, если $0 \leq r < R^0(P)$;

(3.3.5) $\psi_k^+(r', P') \leq \psi_k^-(r, P)$, если $r' < R^0(P')$ и $r' + d(P, P') < r < R^0(P)$;

(3.3.6) в каждой точке $P \in M \setminus A$ функции $h_k^{-1}(r) \cdot \psi_k^+(r, P)$ и $h_k^{-1}(r) \varphi_k^+(r, P)$ являются неубывающими по r функциями. Далее, существует предел $\lim_{r \rightarrow 0} [h_k^{-1}(r) \psi_k^+(r, P)]$, в частности: $\Psi_k(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < r < \varepsilon} [h_k^{-1}(r) \psi_k^+(r, P)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [h_k^{-1}(\varepsilon) \psi_k^+(\varepsilon, P)]$. Кроме того, функция $\Psi_k(P)$ полунепрерывна сверху;

(3.3.7) существует положительное число β_k такое, что если $\Psi_k(P) > 0$, то $\Psi_k(P) \geq \beta_k > 0$, так что множество $S^k = \{P \in M \setminus A \mid \Psi_k(P) > 0\}$ замкнуто в $M \setminus A$, $\Psi_k(P) \geq \beta_k > 0$ на всем множестве S^k и $\tilde{X}^k = A \cup S^k$ — компакт в M . Кроме того, $\Psi_k(P) < \infty$ для любого $P \in M \setminus A$;

(3.3.8) $\varphi_k^-(r, P) \geq \Psi_k(P) h_k(r)$, если $0 \leq r < R^0(P)$;

(3.3.9) если $\Psi_k(P) = 0$, то и $\psi_k^+(r, P) = 0$ для всех r таких, что $0 \leq r < \rho(P)$, где $\rho(P)$ — некоторое положительное число;

(3.3.10) пусть $P \in S^k$, $P_i \in S^k$, $0 < r < R^0(P_i)$, $\{B(P_i, r_i)\}$ — не более чем счетное семейство непересекающихся шаров таких, что $B(P_i, r_i) \subset B(P, r)$. Тогда $\psi_k^+(r, P) \geq \sum_i \psi_k^-(r_i, P_i)$.

Доказательство. Пункт (3.3.1) следует из того, что $\sup$ и $\inf$ счетного семейства неубывающих функций суть также неубывающие функции. Аналогично получаем и полунепрерывность сверху.

Докажем теперь (3.3.3). Пусть $\rho > 0$ таково, что $4\rho < r_2 - r_1$; тогда

$$\psi_k^-(r_2, P) \geq \inf_{r_2 - r' < \rho, d(P, Q_i) < \rho} \psi_k(r', Q_i),$$

$$\psi_k^+(r_1, P) \leq \sup_{r'' - r_1 < \rho, d(P, Q_j) < \rho} \psi_k(r'', Q_j).$$

Далее, если $r' > r_2 - \rho$, $d(P, Q_i) < \rho$, $r'' < r_1 + \rho$, $d(P, Q_j) < \rho$, то $d(Q_i, Q_j) < 2\rho$ и $\psi_k(r', Q_i) \geq \psi_k[r' - d(Q_i, Q_j), Q_j] \geq \psi_k(r_2 - 3\rho, Q_j) \geq \psi_k(r'', Q_j)$. Здесь мы использовали (3.1.2). Требуемое соотношение получается при переходе к пределу. Совершенно аналогично проверяются и неравенства (3.3.2).

Далее, (3.3.4) и (3.3.5) следуют из (3.1.1), (3.1.2) и предельного перехода, а (3.3.6) вытекает из (3.2.4) и (3.3.1).

Теперь докажем (3.3.8). Ясно, что

$$\varphi_{k,r}(r, P, X_n^{(u)}) \geq k \cdot r^{-1} \cdot (1 + h_k \cdot r)^{-1} \cdot [\psi_k(r, P, X_n^{(u)}) - e_n],$$

где $e_n \geq 0$, $e_n \rightarrow 0$ (см. (3.2.1)). Интегрируя по r от r_0 до r (где $0 < r_0 < r$), затем, устремляя n к бесконечности, а после этого устремляя r_0 к нулю, получаем

$$\varphi_k \geq \int_0^r kt^{-1} (1 + h_k t)^{-1} \psi_k(t, P) dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi_k &\geq \Psi_k(P) \int_0^r k \gamma_k t^{k-1} (1 + h_k t)^{-k-1} dt = \\ &= \Psi_k(P) \int_0^r [h_k(t)]'_t dt = \Psi_k(P) h_k(r), \end{aligned}$$

что и требовалось. Здесь мы воспользовались соотношениями (3.3.6), (3.3.3), (3.3.2).

Докажем (3.3.7). Рассмотрим отдельно два случая: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P, X_n^{(u)}) = 0$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P, X_n^{(u)}) = \rho(P) > 0$, где n пробегает некоторую бесконечную подпоследовательность. В случае 1) из (3.2.5) получаем $\varphi_k \geq \kappa_k r^k = \beta_k \gamma_k r^k$ для всех r , $0 \leq r < < R^0(P)$, где $\beta_k = \kappa_k \gamma_k^{-1} = k^{-k} \gamma_k^{-1} D^{1-k} > 0$, т. е.

$$\Psi_k(P) \cong \psi_k^+ \gamma_k^{-1} r^{-k} (1 + h_k r)^k \geq \varphi_k \gamma_k^{-1} r^{-k} \cdot (1 + h_k r)^k \geq \beta_k (1 + h_k r)^k,$$

откуда при $r \rightarrow 0$ окончательно получаем $\Psi_k(P) \geq \beta_k > 0$. В случае 2) из (3.2.6) имеем $\psi_k(r, P, X_n^{(u)}) \leq e_n + k^{-1} (1 - k')^{-1} [1 + \rho_1(P, X_n^{(u)})] e_n$, где $0 \leq r \leq k' \rho_1(P, X_n^{(u)})$, $0 < k' < 1$. Устремляя n к бесконечности, получаем: $\psi_k^+ = 0$ для $0 \leq r \leq k' \rho(P)$, а потому и $\Psi_k(P) = 0$. Итак, мы доказали, что $\Psi_k(P) > 0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P, X_n^{(u)}) = 0$, а в этом случае выполнено нера-

венство $\Psi_k(P) \geq \beta_k > 0$. Далее, если $P \notin S^k$, то $\Psi_k(P) = 0 < \infty$; если же $P \in S^k$, то $\psi_k^+ < \infty$ (см. определение ψ_k^+), а тогда и $h_k^{-1}(r) \psi_k^+ < \infty$ при $0 < r < R^0(P)$. Поскольку функция $h_k^{-1}(r) \psi_k^+$ не убывает по r , то отсюда следует, что $\Psi_k(P) < \infty$, что и требовалось. Так как M компактно и S^k замкнуто в $M \setminus A$, то $A \cup S^k$ — компакт в M .

Из проведенных выше рассуждений уже легко следует (3.3.9). В самом деле, пусть $\Psi_k(P) = 0$; тогда из доказательства (3.3.7) видно, что $\rho(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P, X_n^{(u)}) > 0$ (в противном случае $\Psi_k(P) \geq \beta_k > 0$), а тогда $\psi_k^+ = 0$ для $0 \leq r \leq k' \rho(P)$, $0 \leq k' < 1$.

Осталось доказать (3.3.10). Ясно, что выполнена цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\psi_k^+ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty, p \geq n} \psi_k(r, P, X_p^{(n)}) \geq \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty, p \geq n} \text{vol}_k[X_p^{(n)} \cap B(P, r)] \geq \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty, p \geq n} \sum_i \text{vol}_k[X_p^{(n)} \cap B(P_i, r_i)] \geq \\ &\geq \sum_i \liminf_{n \rightarrow \infty, p \geq n} \text{vol}_k[X_p^{(n)} \cap B(P_i, r_i)] \geq \sum_i \bar{\psi}_k(r_i, P_i),\end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 29.3.4 (лемма о перестройке). Пусть $X_n^{(n)} \in \mathcal{O}$ — исходная минимизирующая последовательность, т. е. $\text{vol}_k[X_n^{(n)} \setminus A] = d_k + e_n < \infty$, $e_n \geq 0$, $e_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и пусть $\tilde{X}^k = A \cup S^k$ и φ_k^+ , ψ_k^+ , Ψ_k — функции, построенные выше. Тогда существует новая последовательность поверхностей $X_n^{(n)'} \in \mathcal{O}$ такая, что $\text{vol}_k[X_n^{(n)'} \setminus A] = d_k + e'_n$, $e'_n \geq 0$, $e'_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, т. е. компакты $X_n^{(n)'}$ по-прежнему образуют k -минимизирующую последовательность, причем $\varphi_k^+ = \varphi_k^+$, $\Psi_k = \Psi_k$ и новые функции φ_k^+ (не совпадающие, вообще говоря, с функциями φ_k^+) по-прежнему не убывают по r и удовлетворяют соотношениям (3.3.1), (3.3.6), (3.3.8). Далее, для любой открытой окрестности $U = U(\tilde{X}^k)$ компакта $\tilde{X}^k$ существует номер $N = N(U)$ такой, что $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(n)'} \setminus U] < \infty$ при всех $n > N$ и, более того, $X_n^{(n)'} \setminus U$ — конечный симплициальный подкомплекс размерности s , где $s \leq k-1$; в частности, $X_n^{(n)'} \setminus U$ состоит только из симплициальных точек (см. определение 28.2.1).

Замечание. Новые функции φ_k^+ будут обладать следующим свойством: $\varphi_k^+ = 0$, если $\overline{B(P, r)} \cap \tilde{X}^k = \emptyset$, что будет следствием симплициальности компактов $X_n^{(n)'} \setminus U$.

Доказательство. Пусть U — открытая окрестность компакта $\tilde{X}^k$. Так как многообразие M компактно, то существует конечное число открытых шаров $B(P_i, r_i)$ таких, что: 1) $M \setminus U \subset \bigcup_i B(P_i, r_i)$; 2) $\tilde{X}^k \cap \left[\bigcup_i B(P_i, r_i) \right] = \emptyset$. Рассмотрим шар $B(P_1, r_1)$. Тогда реализуется один из следующих двух случаев: а) существует номер N такой, что $X_n^{(n)} \cap \partial B(P_1, r_1) = \emptyset$ для всех номеров $n > N$; б) $X_n^{(n)} \cap \partial B(P_1, r_1) \neq \emptyset$ для некоторой бесконечной подпоследовательности $\{n'\} \subset \{n\}$. Ясно, что если реализуется случай а), то для любого $n > N$ имеем $X_n^{(n)} = X_n^{(n)'} \cup X_n^{(n)'}$, где $X_n^{(n)} \cap X_n^{(n)'} = \emptyset$ и $X_n^{(n)'} \subset B(P_1, r_1)$, а потому компакты $X_n^{(n)'}$ можно заменить новыми компактами $X_n^{(n)'}$ такими, что $X_n^{(n)'} \in \mathcal{O}$ и $X_n^{(n)'} \cap B(P_1, r_1) = \emptyset$. Выполняя эту операцию, мы можем перейти ко второму шару $B(P_2, r_2)$.

Пусть теперь реализуется случай б). Обозначим подпоследовательность $\{n'\}$ по-прежнему через $\{n\}$, тогда $X_n^{(1)} \cap \partial B(P_1, r_1) \neq \emptyset$ для любого $n > N$. Докажем, что $\text{vol}_k[X_n^{(1)} \cap B(P_1, r_1)] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\overline{B(P_1, r_1)} \cap X^k = \emptyset$, то $\Psi_k(P) \equiv 0$ для всех точек $P \in B(P_1, r_1 + \varepsilon')$, где $\varepsilon' > 0$ выбрано так, чтобы $\overline{B(P_1, r_1 + \varepsilon')} \cap \tilde{X}^k = \emptyset$. Тогда в силу (3.3.9) существует число $\rho(P) > 0$ такое, что $\psi_k^+ \equiv 0$ при $0 \leq r < \rho(P)$. Получаем конечное покрытие шара $\overline{B(P_1, r_1)}$ шарами $B(P_\alpha, \rho(P_\alpha))$, и так как $\psi_k^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sup_{\substack{r' \in [r, r+\delta] \\ d(P, Q_i) \leq \delta}} \psi_k(r', Q_i) \right] = 0$, то $\text{vol}_k[X_n^{(1)} \cap B(P_\alpha, \rho(P_\alpha))] \rightarrow 0$; откуда $\text{vol}_k[X_n^{(1)} \cap \overline{B(P_1, r_1)}] \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, что и требовалось.

Рассмотрим открытое множество $G_{p,t} = M \setminus \overline{B(P_1, r_p - t)}$, где $0 \leq t \leq \rho_p$, $r_1 - \frac{1}{p} < r_p < r_1 - \frac{1}{2p}$, p — произвольное натуральное число, числа ρ_p и r_p фиксированы для каждого p и, кроме того, числа ρ_p подобраны так, что $\rho_p \rightarrow 0$

при $p \rightarrow \infty$. Тогда $(T, \frac{1}{2p}) \subset G_{p,0} \subset (T, \frac{1}{p})$, где $T = M \setminus \overline{B(P_1, r_1)}$.

Положим $G'_p = G_{p,\rho_p}$, $\Gamma_p = G'_p \setminus \overline{G}_{p,0}$ (рис. 73). Определим на шаровом слое $\bar{\Gamma}_p$ функцию $U_p(x)$ следующим образом: $U_p(x) = t$, где $x \in \partial B(P_1, r_p - t)$; в частности, $U_p(x) = 0$, если $x \in \partial B(P_1, r_p)$, и $U_p(x) = \rho_p$, если

$x \in \partial B(P_1, r_p - \rho_p) = \partial G'_p$. Ясно, что $U_p(x) \in C^1(\bar{\Gamma}_p)$ и что $\nabla U_p \neq 0$ на шаровом слое $\bar{\Gamma}_p$. Докажем, что при каждом фиксированном p можно выбрать такие значения n_p и t_p , $0 \leq t_p \leq \rho_p$, что будет выполнено неравенство $\text{vol}_{k-1}[\partial G_{p,t_p} \cap X_n^{(1)}] \leq p^{1-k}$. В самом деле, допустим противное: пусть для любого t , $0 \leq t \leq \rho_p$, и любого n выполнено неравенство $\text{vol}_{k-1}[\partial G_{p,t} \cap X_n^{(1)}] > p^{1-k}$. Поскольку $\text{vol}_k[X_n^{(1)} \setminus A] < \infty$, то $\text{vol}_k[\Gamma_p \cap X_n^{(1)}] < \infty$, и тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_p} \text{vol}_{k-1}[(\Gamma_p \cap X_n^{(1)}) \cap \partial B(P_1, r_p - t)] dt = \\ = \int_0^{\rho_p} \text{vol}_{k-1}[X_n^{(1)} \cap \partial G_{p,t}] dt > \rho_p p^{1-k}. \end{aligned}$$

Если положить $C_t = \{Q \in \bar{\Gamma}_p \mid U_p(Q) = t\}$, то $C_t = \partial G_{p,t}$ и из теоремы 10.2.3 в [16] немедленно следует, что

$$M \text{vol}_k[\Gamma_p \cap X_n^{(1)}] \geq \int_0^{\rho_p} \text{vol}_{k-1}[X_n^{(1)} \cap C_t] dt > \rho_p p^{1-k},$$

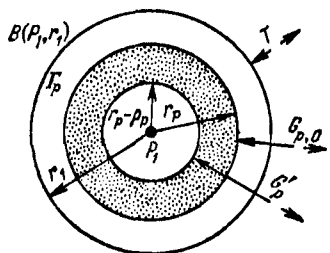


Рис. 73.

где M — постоянная Липшица для функции $U_p(x)$, $x \in \bar{\Gamma}_p$, а потому $M \neq 0$. Отсюда следует, что для любого натурального n (при фиксированном p) выполнено неравенство $\text{vol}_k[\bar{\Gamma}_p \cap X_n^{(1)}] > > M \rho_p p^{1-k} > 0$. Так как (см. выше) $\text{vol}_k[\bar{\Gamma}_p \cap X_n^{(1)}] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то выполнение этого неравенства невозможно. Итак, мы можем указать бесконечную подпоследовательность $\{n_p\} \subset \{n\}$ и последовательность $\{t_p\}$ такие, что $\text{vol}_{k-1}[X_{n_p}^{(1)} \cap \partial G_{p, t_p}] \leq p^{1-k}$, где $p^{1-k} \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Приступаем к перестройке бесконечной последовательности компактов $X_{n_p}^{(1)} \in \mathcal{O}$. Положим $A_p = \partial G_{p, t_p} \cap X_{n_p}^{(1)}$, тогда $\text{vol}_{k-1}(A_p) = l_p^{k-1}$, $l_p \leq p^{-1}$, $A_p \subset B(P_1, r_1) \subset B(P_1, R_0)$. Следовательно, в силу теоремы 28.3.1 существует компакт R_p , содержащийся в ε -окрестности геодезической оболочки A_p (где число ε сколь угодно мало), такой, что $\nabla^m(\dot{R}_p, A_p) = \dot{h}_{m-1}(A_p) \setminus 0$ (соответственно $\Delta_m(\dot{R}_p, A_p) = \dot{h}_{m-1}(A_p)$) для любого $m \in \mathbb{Z}$, $x \in A_p$. Кроме того,

$$\rho(\dot{R}_p^*, A_p) \leq C \cdot l_p, \quad \rho(\dot{R}_p^* \cup \dot{R}_{p, c}^*, A_p^* \cup A_{p, c}^{k-1}) \leq C \cdot l_p,$$

$$\text{vol}_k(\dot{R}_p) = \text{vol}_k(\dot{R}_p^* \cup \dot{R}_{p, c}^*) \leq D l_p^k.$$

Напомним, что если $l_p = 0$, то в этих неравенствах l_p нужно заменить сколь угодно малым числом δ . Положим $R_p = \dot{R}_p \cup \tilde{\gamma}_p$, где $\tilde{\gamma}_p$ — гладкий путь, соединяющий $\dot{x}$ с $x \in A$; тогда, в силу теоремы 27.3.1 и в силу замечания к ней, новый компакт $'X_{n_p}^{(1)} = [X_{n_p}^{(1)} \setminus [X_{n_p}^{(1)} \cap B(P_1, r_p - t_p)]] \cup R_p$ принадлежит классу $\mathcal{O}$.

Итак, мы получили последовательность компактов $'X_{n_p}^{(1)}$, $p = 1, 2, 3, \dots$, таких, что $\text{vol}_k['X_{n_p}^{(1)} \setminus A] \rightarrow d_k$ и $'X_{n_p}^{(1)} \setminus G_p$ — конечный симплициальный подкомплекс класса C^r в M и размерности $s \leq k-1$ (см. теорему 28.3.1), т. е. все k -мерные куски компактов $'X_{n_p}^{(1)}$ накапливаются в сколь угодно малой окрестности компакта $T = M \setminus B(P_1, r_1)$; иными словами, шар $B(P_1, r_1)$ постепенно очищается от k -мерных кусков компактов $'X_{n_p}^{(1)}$, $p \rightarrow \infty$.

Теперь мы рассмотрим следующий шар, $B(P_2, r_2)$, и повторим для него и для последовательности $'X_{n_p}^{(1)}$ описанный выше процесс. В результате мы получим новую бесконечную последовательность компактов $''X_{n_{pq}}^{(1)} \in \mathcal{O}$, которая остается k -минимизирующей, но k -мерные куски которой постепенно, с ростом номера, покидают внутренность шара $B(P_2, r_2)$. Осталось только заметить, что k -мерные куски поверхностей $''X_{n_{pq}}^{(1)}$ не могут вновь попасть внутрь шара $B(P_1, r_1)$; поэтому в действительности k -мерные куски компактов $''X_{n_{pq}}^{(1)}$ покидают не только шар $B(P_2, r_2)$, но и $B(P_1, r_1) \cup B(P_2, r_2)$.

Продолжая этот процесс и вспоминая, что всех шаров $B(P_i, r_i)$ конечное число, мы в конце концов вытесняем k -мерные куски компактов k -минимизирующей последовательности в окрестность U , причем вне этой окрестности остаются только такие куски компактов, которые являются конечными симплицальными подкомплексами размерности $s \leq k-1$. Из проведенных выше рассуждений следует, что $\psi_k^+ \equiv \psi_k^+$ и $\Psi_k \equiv \Psi_k$; меняются, вообще говоря, только функции φ_k^+ ; ясно, что $\varphi_k^+ \equiv 0$ на $M \setminus \tilde{X}^k$. Все остальные утверждения леммы очевидны. Лемма доказана.

Доказательство предложения 29.2.1. Утверждение получается простым комбинированием (3.3.7) с леммой 29.3.4.

В действительности мы доказали несколько более сильное утверждение, чем сформулированное в предложении 29.2.1, а именно: доказано не только то, что $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(w)} \setminus U] < \infty$, но и то, что $X_n^{(w)} \setminus U$ — конечный симплицальный подкомплекс размерности $s \leq k-1$. Этим важным уточнением мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Итак, первый шаг М-процесса завершен. Рассмотрим систему окрестностей $U_\alpha^1 \supset U_{\alpha+1}^1$, $\bigcap_{\alpha} U_\alpha^1 = \tilde{X}^k$ и положим $\omega_\alpha^{k-1} = \inf \text{vol}_{k-1}(X \setminus U_\alpha^1)$, $X \in \mathcal{O}$, $\lambda_{k-1} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \omega_\alpha^{k-1}$. Напомним, что

$\omega_\alpha^{k-1} < \infty$ при любом α , а $\lambda_{k-1} \leq \infty$, причем, хотя может оказаться, что $\lambda_{k-1} = \infty$, это не мешает нам строить М-процесс дальше.

Лемма 29.3.5. Число λ_{k-1} (быть может, равное бесконечности) не зависит от выбора системы открытых сжимающихся окрестностей U_α^1 , т. е. это число полностью и однозначно определяется только компактом $\tilde{X}^k \subset M$.

Доказательство. Пусть даны две системы окрестностей U_α^1 и $\tilde{U}_\beta^1$, и допустим, что $\tilde{\lambda}_{k-1} < \lambda_{k-1}$. Пусть s таково, что $\tilde{\lambda}_{k-1} < s < \lambda_{k-1}$. Поскольку $\lambda_{k-1} = \lim_{\alpha} \omega_\alpha$, то существует номер α_0 такой, что $\omega_{\alpha_0}^{k-1} > s$. Так как $\bigcap_{\beta} \tilde{U}_\beta^1 = \tilde{X}^k$, то существует номер β_0 такой, что $\tilde{U}_{\beta_0}^1 \subset U_{\alpha_0}^1$ и $\tilde{\omega}_{\beta_0}^{k-1} < s$. Это означает, что существует компакт $X \in \mathcal{O}$ такой, что $\text{vol}_{k-1}(X \setminus \tilde{U}_{\beta_0}^1) = \tilde{\omega}_{\beta_0}^{k-1} + \varepsilon$, $\tilde{\omega}_{\beta_0}^{k-1} + \varepsilon < s$, $\varepsilon \geq 0$. Но так как $\text{vol}_{k-1}(X \setminus \tilde{U}_{\beta_0}^1) < \infty$, то $\text{vol}_{k-1}(X \setminus U_{\alpha_0}^1) < \infty$ и $\text{vol}_{k-1}(X \setminus U_{\alpha_0}^1) \leq \text{vol}_{k-1}(X \setminus \tilde{U}_{\beta_0}^1) = \tilde{\omega}_{\beta_0}^{k-1} + \varepsilon < s$. Однако, с другой стороны, $\text{vol}_{k-1}(X \setminus U_{\alpha_0}^1) \geq \omega_{\alpha_0}^{k-1} > s$.

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Если $\lambda_{k-1} = \infty$ для какой-то одной системы окрестностей, то это свойство сохранится и для любой другой системы.

29.4. Второй и последующие шаги в построении минимизирующего процесса. Теперь мы переходим к изучению второго шага в М-процессе. Пусть фиксирована какая-нибудь сжимаю-

щаяся система окрестностей U_n^1 . В силу определения чисел $\omega_n^{k-1} < \infty$ существует бесконечная последовательность компактов $X_n^{(2)} \in \in \mathcal{O}$ таких, что $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(2)} \setminus U_n^1] = \omega_n^{k-1} + e_n$, $e_n \geq 0$, $e_n \rightarrow 0$, т. е. $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(2)} \setminus U_n^1] \rightarrow \lambda_{k-1}$, причем поскольку $\lambda_{k-1} = \sup_{(n)} \omega_n^{k-1}$, то,

в отличие от первого шага М-процесса, допустимо неравенство $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(2)} \setminus U_n^1] < \lambda_{k-1}$ (напомним, что $\text{vol}_k[X_n^{(1)} \setminus A] \geq d_k$). Однако оказывается, что это препятствие можно обойти.

Поскольку все k -мерные куски компактов $X_n^{(2)}$ накапливаются вокруг $\tilde{X}^k$, то теперь нам придется уже иметь дело с $(k-1)$ -мерными зонами в $M \setminus U_n^1$. Роль компакта A формально может играть компакт $\tilde{X}^k$, однако имеется существенное отличие от первого шага М-процесса, а именно: если A содержится в каждой поверхности $X \in \mathcal{O}$, то компакт $\tilde{X}^k$ уже не обязан содержаться в компактах $X_n^{(2)}$. Положим $R^1(P) = \min[d(P, X^k), R_0]$ и рассмотрим функции $\varphi_{k-1}(r, P, X)$, $\psi(r, P, X)$, где $0 \leq r < R^1(P)$, $R^1(P) > 0$ и X — произвольный компакт, содержащий A (но не обязательно содержащий $\tilde{X}^k$). Так как счетное множество $\{Q_i\}$ всюду плотно в $M \setminus A$ (а потому и в $M \setminus \tilde{X}^k$), то, как и на первом шаге, можно рассмотреть функции $\psi_{k-1}(r, Q_i, X_n^{(2)})$ и можно сразу считать, что они сходятся к функциям $\tilde{\psi}_{k-1}(r, Q_i)$, где $0 \leq r < R^1(P)$. Как и на первом шаге, строим функции ψ_{k-1}^+ , φ_{k-1}^+ с областью определения (по аргументу P) $M \setminus \tilde{X}^k$. Пусть $P \in M \setminus \tilde{X}^k$; положим

$$\Psi_{k-1}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{0 \leq r < \rho} [h_{k-1}^{-1}(r) \psi_{k-1}^+(r, P)],$$

$$S^{k-1} = \{P \in M \setminus \tilde{X}^k \mid \Psi_{k-1}(P) > 0\}, \quad \tilde{X}^{k-1} = \tilde{X}^k \cup S^{k-1}.$$

Оказывается, свойства функции Ψ_{k-1} во многом аналогичны свойствам функции Ψ_k . Пусть $P \in M \setminus U_n^1$; положим $R_n^1(P) = \min[d(P, U_n^1), R_0]$. Ясно, что $R_n^1(P) < R^1(P) \leq R^0(P)$. Номер n мы фиксируем и все рассуждения будем проводить пока на множестве $M \setminus U_n^1$ (а не на $M \setminus \tilde{X}^k$), заменив этой областью прежнюю область $M \setminus A$ (фигурировавшую на первом шаге). Далее, во всех предыдущих рассуждениях заменим A на U_n^1 , d_k на ω_n^{k-1} (напомним, что $\omega_n^{k-1} < \infty$), R^1 на R_n^1 , где $P \in M \setminus U_n^1$. Подчеркнем еще раз, что эта замена отнюдь не возвращает нас к ситуации первого шага, так как $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(2)} \setminus U_n^1] = \omega_n^{k-1} + e_n$, $e_n \geq 0$, $e_n \rightarrow 0$.

Лемма 29.4.1. *Формулировка и доказательство этой леммы получаются соответственно из формулировки и доказательства леммы 29.3.1 заменой A на U_n^1 и $R^0(P)$ на $R_n^1(P)$, где $P \in M \setminus U_n^1$.*

Лемма 29.4.2. *Формулировка и доказательство этой леммы получаются соответственно из формулировки и доказательства леммы 29.3.2 заменой A на U_n^1 , $R^0(P)$ на $P_n^1(P)$, d_k на ω_n^{k-1} и $D = D(k)$ на $D(k-1)$.*

По поводу доказательства последней леммы следует отметить, что в формулировку леммы 29.4.2 входит не сама величина $\text{vol}_{k-1}(X \setminus U_n^1)$, а разность $e_n = \text{vol}_{k-1}(X \setminus U_n^1) - \omega_n^{k-1}$, где $e_n \geq 0$, $e_n \rightarrow 0$; поэтому то, что неравенство $\text{vol}_{k-1}(X \setminus U_n^1) < \lambda_{k-1}$ допустимо, не оказывает никакого влияния на построение М-процесса (рис. 74). Постоянная κ_{k-1} имеет вид $(k-1)^{1-k} [D(k-1)]^{2-k}$, а потому не зависит от номера n , что будет важно для дальнейшего.

Лемма 29.4.3. *Пусть $X_n^{(2)} \in \mathcal{O}$ — фиксированная выше последовательность компактов, $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(2)} \setminus U_n^1] = \omega_n^{k-1} + e_n < \infty$, $e_n \geq 0$, $e_n \rightarrow 0$, и пусть $\varphi_{k-1}^\pm$, $\psi_{k-1}^\pm$ — функции, построенные по последовательности $X_n^{(2)}$ с областью определения $M \setminus \tilde{X}^k$ (а потому они определены и на $M \setminus U_n^1$). Тогда справедливы утверждения, аналогичные утверждениям (3.3.1) — (3.3.10) леммы 29.3.3, получающиеся из них заменой $R^0(P)$ на $R^1(P)$, A на $\tilde{X}^k$, $X_n^{(1)}$ на $X_n^{(2)}$, $\tilde{X}^k$ на $\tilde{X}^{k-1}$.*

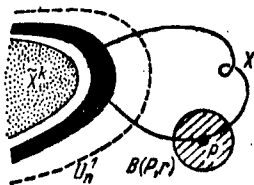


Рис. 74.

Доказательство. Пусть $P \in M \setminus \tilde{X}^k$, $0 \leq r < R^1(P)$; мы должны доказать в точке (r, P) соотношения, относящиеся только к функциям $\psi_{k-1}^\pm$, $\varphi_{k-1}^\pm$, Ψ_{k-1} . Ясно, что существует номер $N = N(r, P)$ такой, что при всех $n > N$ имеем $U_n^1 \cap \overline{B(P, r)} = \emptyset$, т. е. $r < R_n^1(P)$, и мы можем применить лемму 29.4.2 в соответствии со схемой доказательства леммы 29.3.3, используя лемму 29.3.2. Подчеркнем, что $\beta_{k-1} = (k-1)^{1-k} \gamma_{k-1}^{-1} \times \times [D(k-1)]^{1-k} > 0$, причем β_{k-1} не зависит от номера n , а потому, как и на первом шаге, если $\Psi_{k-1}(P) > 0$ (где $P \in M \setminus \tilde{X}^k$), то $\Psi_{k-1}(P) \geq \beta_{k-1} > 0$. Лемма доказана.

Отметим, что из леммы 29.4.3 следует замкнутость множества S^{k-1} в $M \setminus \tilde{X}^k$, а потому $\tilde{X}^{k-1} = S^{k-1} \cup \tilde{X}^k$ — компакт. Далее, если $P \in M \setminus \tilde{X}^{k-1}$, то $\Psi_{k-1}(P) = 0$, а тогда $\psi_{k-1}^\pm = 0$ для $0 \leq r < k^1 \rho(P)$, где $0 < k^1 < 1$, $\rho(P) > 0$. Как и на первом шаге, мы используем этот факт при перестройке последовательности.

Лемма 29.4.4. *Пусть $X_n^{(2)} \in \mathcal{O}$ — исходная последовательность такая, что $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(2)} \setminus U_n^1] = \omega_n^{k-1} + e_n$, $e_n \geq 0$, $e_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\omega_n^{k-1} < \infty$, и пусть $\varphi_{k-1}^\pm$, $\psi_{k-1}^\pm$, Ψ_{k-1} — функции, построенные выше по последовательности $X_n^{(2)}$. Тогда существует новая последовательность компактов $X_n^{(3)} \in \mathcal{O}$ такая, что $\text{vol}_{k-1}[X_n^{(3)} \setminus U_n^1] =$*

$= \omega_n^{k-1} + \varepsilon'_n$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, причем $\Psi_{k-1}^+ \equiv \Psi_{k-1}^+$, $\Psi_{k-1} \equiv \Psi_{k-1}$ и новые функции Ψ_{k-1}^+ (не совпадающие, вообще говоря, с Ψ_{k-1}^+) по-прежнему не убывают по r (при $0 \leq r < R^1(P)$) и удовлетворяют соотношениям, аналогичным (3.3.1), (3.3.6), (3.3.8). Далее, для любой открытой окрестности $U = U(\tilde{X}^{k-1})$ компакта $\tilde{X}^{k-1}$ существует номер $N = N(U)$ такой, что $\text{vol}_{k-2}(X_n^{(a)} \setminus U) < \infty$ при всех $n > N$, и, более того, $X_n^{(a)} \setminus U$ является конечным симплициальным подкомплексом размерности $s \leq k-2$. В частности, $X_n^{(a)} \setminus U$ состоит только из симплициальных точек.

Доказательство этой леммы проводится в соответствии со схемой доказательства леммы 29.3.4, и мы не будем на этом останавливаться.

На первом шаге М-процесса мы оперировали с числом d_k , а не с числом $\lambda_k = \liminf_{\alpha \rightarrow \infty} \text{vol}_k(X \setminus U_\alpha^0)$ (см. выше), именно это и обусловило разницу в проведении первого и второго шагов.

Доказательство предложения 29.2.2. Утверждение получается простым комбинированием аналога (3.3.7) с леммой 29.4.4.

Итак, второй шаг М-процесса также завершен. Рассмотрим систему окрестностей $U_\alpha^2 \supset U_{\alpha+1}^2$, $\bigcap_\alpha U_\alpha^2 = \tilde{X}^{k-1}$ и положим $\omega_\alpha^{k-2} = \inf \text{vol}_{k-2}(X \setminus U_\alpha^2)$, $X \in \mathcal{O}$, $\lambda_{k-2} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\omega_\alpha^{k-2})$, тогда $\omega_\alpha^{k-2} < \infty$.

Лемма 29.4.5. Число λ_{k-2} (быть может, равное бесконечности) не зависит от выбора системы открытых окрестностей U_α^2 , т. е. полностью определяется только компактом $\tilde{X}^{k-1} \subset M$.

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 29.3.5.

Итак, мы можем продолжать наш М-процесс в меньшие размерности, что дает нам последовательность компактов $A \subset \tilde{X}^k \subset \tilde{X}^{k-1} \subset \tilde{X}^{k-2} \subset \dots$. Этот процесс оборвется только на размерности один. Опишем этот последний шаг.

Доказательство предложения 29.2. ($k-1$). Мы имеем компакт $\tilde{X}^3$ и систему окрестностей U_α^{k-2} , $\bigcap_\alpha U_\alpha^{k-2} = \tilde{X}^3$.

В полном соответствии с описанной выше схемой мы строим $S^2 = \{P \in M \setminus \tilde{X}^3 \mid \Psi_2(P) > 0\}$, $\tilde{X}^2 = S^2 \cup \tilde{X}^3$; тогда существует последовательность компактов $X_n^{(k-1)'}$ такая, что $\text{vol}_2[X_n^{(k-1)'} \setminus U_n^{k-2}] = \omega_n^2 + \varepsilon'_n$, $\varepsilon'_n \geq 0$, $\varepsilon'_n \rightarrow 0$, и для любой открытой окрестности U компакта $\tilde{X}^2$ существует номер $N = N(U)$ такой, что для всех $n > N$ компакт $X_n^{(k-1)'} \setminus U_n^{k-2}$ является (в общем случае) одномерным конечным симплициальным подкомплексом, а потому, в силу 1-устойчивости класса $\mathcal{O}$,

$X_n^{(k-1)'} \cap U_n^{k-1}$ (при $n > N$) также принадлежит классу $\mathcal{O}$, т. е. можно считать, что $X_n^{(k-1)'} \subset U_n^{k-1}$. Для того чтобы доказать предложение, достаточно установить, что $\tilde{X}^2 \in \mathcal{O}$. В самом деле, рассмотрим последовательность $X_n^{(k-1)'}$, и пусть $\tilde{X}$ — множество всех предельных точек последовательности $X_n^{(k-1)'}$; тогда, очевидно, $\tilde{X} \subset \tilde{X}^2$ (отметим, что не обязательно $\rho(X_n^{(k-1)'}, \tilde{X}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). Поскольку класс $\mathcal{O}$ замкнут относительно предельного перехода в метрике ρ (ясно, что $Z_p = \tilde{X} \cup \left[\bigcup_{n \geq p} X_n^{(k-1)'} \right] \in \mathcal{O}$ и $\tilde{X} = \bigcap_p Z_p$, $\rho(Z_p, \tilde{X}) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$), то отсюда, в силу теоремы 27.2.1, получаем $\tilde{X} \in \mathcal{O}$. Доказательство окончено.

Подведем итоги. По каждой k -минимизирующей последовательности $X_n^{(1)} \in \mathcal{O}$, $\text{vol}_k(X_n^{(1)} \setminus A) \rightarrow d_k < \infty$, мы построили (вообще говоря, неоднозначно) компакт $\tilde{X}^2 \in \mathcal{O}$, с которым связана последовательность чисел $d_k, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \dots, \lambda_3, \lambda_2$ и в котором определена естественная стратификация подкомпактами $\tilde{X}^2 \supset \tilde{X}^3 \supset \dots \supset \tilde{X}^k \supset A$, где $\tilde{X}^{m-1} = \tilde{X}^m \cup S^{m-1}$, $S^{m-1} = \{P \in M \setminus \tilde{X}^m \mid \Psi_{m-1}(P) > 0\}$, $3 \leq m \leq k+1$, $\tilde{X}^{k+1} = A$. Для каждого компакта $\tilde{X}^m$ существует последовательность компактов $X_n^{(k-m+2)'}$

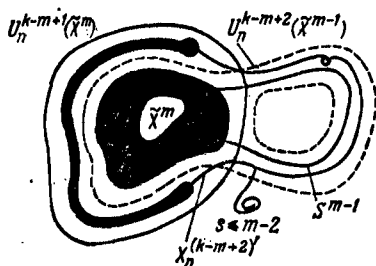


Рис. 75.

таких, что $\text{vol}_{m-1}[X_n^{(k-m+2)'} \setminus U_n^{k-m+1}(\tilde{X}^m)] = \omega_n^{m-1} + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, т. е. $\text{vol}_{m-1}[X_n^{(k-m+2)'} \setminus U_n^{k-m+1}(\tilde{X}^m)] \rightarrow \lambda_{m-1} < \infty$. Далее, $\tilde{X}^{m-1} = \tilde{X}^m \cup S^{m-1}$, причем $\omega_n^{m-1} < \infty$ и $X_n^{(k-m+2)'} \setminus U_n^{k-m+2}(\tilde{X}^{m-1})$ является s -мерным конечным симплициальным подкомплексом, где $s \leq m-2$ (рис. 75).

Итак, мы доказали сходимость М-процесса. Построенный нами компакт $\tilde{X}^2 \in \mathcal{O}$ допускает представление $\tilde{X}^2 = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots \cup S^3$, однако пока мы еще ничего не можем сказать о метрических свойствах этого компакта и не имеем геометрической интерпретации вектора $(d_k, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_2)$. Все эти вопросы будут решены в следующем параграфе.

29.5. Теорема о совпадении наименьшего стратифицированного объема с наименьшим λ -вектором в вариационном классе. Перейдем к вопросу об интерпретации вектора $SV = (d_k, d_{k-1}, \dots, d_3)$. По данной k -минимизирующей последовательности $X_n^{(1)}$ можно построить много М-процессов и, следовательно, получить много λ -векторов, соответствующих, вообще говоря, различным

компактам $\tilde{X}^s(M)$, причем эти λ -векторы могут отличаться друг от друга, начиная с компоненты λ_{k-1} . Рассмотрим множество T всех λ -векторов, полученных при всевозможных M -процессах в классе $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$, и введем в T лексикографическое упорядочение. Вопрос: можно ли найти в T λ -вектор, наименьший в этом упорядочении?

Теорема 29.5.1. Пусть выполнены все предположения теоремы 7.2.1. Рассмотрим класс $\{X\}_s$, существование и непустота которого утверждаются в теореме 7.2.1. Тогда оказывается, что каждый компакт $X \in \{X\}_s$ является результатом некоторого M -процесса в $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$, т. е. может быть представлен в виде $X = \tilde{X}^s(M)$, причем λ -вектор этого M -процесса $(d_k, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \dots, \lambda_2)$ совпадает с вектором наименьшего стратифицированного объема $SV = (d, d_{k-1}, d_{k-2}, \dots, d_3)$. Поэтому этот λ -вектор зависит только от класса $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$ и не зависит от компакта $X \in \{X\}_s$, $X = \tilde{X}^s(M)$. Наконец, этот λ -вектор, общий для всех $X \in \{X\}_s$, является наименьшим λ -вектором в лексикографическом упорядочении среди множества T всех λ -векторов в классе $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$.

§ 30. Свойства функций плотности. Минимальность каждого страта поверхности, полученной в процессе минимизации

30.1. Значение функции плотности всегда не меньше единицы на каждом страте и равно единице только в регулярных точках. Рассмотрим компакт $\tilde{X}^s \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$, полученный при некотором M -процессе, и изучим его метрические свойства. Если M -процесс конечен, то мы докажем, что при $P \in S^\alpha$, $3 \leq \alpha \leq k$, выполнено неравенство $\Psi_\alpha(P) \geq 1$, откуда и будет следовать, что поверхности S^α являются относительно минимальными поверхностями в размерности α .

При построении компакта $\tilde{X}^s$ мы двигались от наибольшей размерности k к размерности 3, а при доказательстве относительной минимальности пленок S^α компакта $\tilde{X}^s$ мы будем двигаться в обратном направлении: от vol_3 к vol_k . Подчеркнем важное обстоятельство: компакт $\tilde{X}^s$, полученный при некотором M -процессе, совершенно не обязан принадлежать классу $\{X\}_s$ (см. теорему 7.2.1), существование которого (класса) нами пока и не доказано. В частности, числа λ_m и d_m в общем случае могут не совпадать. Рассмотрим произвольный $(k-s+1)$ -й шаг M -процесса. Имеем: $\tilde{X}^s = \tilde{X}^{s+1} \cup S^s$, $S^s = \{P \in M \setminus \tilde{X}^{s+1} \mid \Psi_s(P) > 0\}$, $U_n^{k-s+1}(\tilde{X}^s) \supseteq U_n^{k-s}(\tilde{X}^{s+1})$. Мы специально выбираем такую систему окрестностей $U_n^{k-s+1}(\tilde{X}^s)$, что $\text{vol}_s[X_n^{(k-s+1)'} \setminus U_n^{k-s}(\tilde{X}^{s+1})] = \omega_s^s + e_n^s$, $e_n^s \geq 0$, $e_n^s \rightarrow 0$, $\text{vol}_{s-1}[X_n^{(k-s+1)'} \setminus U_n^{k-s+1}(\tilde{X}^s)] < \infty$.

Напомним, что с последовательностью $X_n^{(k-s+1)'}$ связаны функции $\varphi_s^\pm, \psi_s^\pm, \Psi_s$. В дальнейшем для краткости вместо $X_n^{(k-s+1)'}$ будем писать X_n . Положим $\check{X}_n = X_n \cap U_n^{k-s+1}(\check{X}^s)$; тогда $\text{vol}_{s-1}[X_n \setminus \check{X}_n] < \infty$, т. е. компакт $\check{X}_n$ является «массивной» частью компакта X_n , и $\text{vol}_s[X_n \setminus U_n^{k-s}] = \text{vol}_s[\check{X}_n \setminus U_n^{k-s}]$. Отметим, что расстояние $\rho(\check{X}_n, \check{X}^s)$ не должно, вообще говоря, стремиться к нулю; можно лишь утверждать, что $\rho[\check{X}_n \setminus U_n^{k-s}(\check{X}^{s+1}), S^s] \rightarrow 0$.

Лемма 30.1.1. *Рассмотрим множество $S^s = \{P \in M \setminus \check{X}^{s+1} \mid \Psi_s(P) > 0\}$, где $s \geq 3$ и компакт $\check{X}^s \in \mathcal{O}$ получен при некотором M -процессе. Пусть $\beta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число, $P' \in S^s$, $0 \leq r' < R^{k-s}(P')$. Тогда для каждого $\xi > 0$ существуют две постоянные $e_0 = e_0(\xi, \beta_0, s, M) > 0$ и $v = v(\xi, \beta_0, s, M) > 0$ такие, что если для каждой пары (r, P) , где $P \in S^s$, и $B(P, r) \subset B(P', r')$ выполнены неравенства:*

$$(1.1.1) \quad \beta_0 \leq h_s^{-1}(r) \varphi_s^-(r, P) \leq h_s^{-1}(r) \psi_s^+(r, P) \leq \beta_0 + e,$$

то для каждого такого шара $B(P, r) \subset B(P', r')$ существуют точка $P^ \in S^s$ и геодезическая s -плоскость Π (т. е. $\dim \Pi = s$ и плоскость Π заполнена геодезическими, исходящими из точки P^*) с центром в точке P^* такие, что*

$$(1.1.2) \quad B(P^*, vr) \subset B(P, r) \quad \text{и} \quad K(P^*, vr) \subset (\Pi, \xi vr),$$

где $K(P^, vr) = S^s \cap B(P^*, vr)$, а $(\Pi, \xi vr)$ — открытая окрестность радиуса ξvr геодезической плоскости Π . Более того, числа e_0 и v можно выбрать так, что $e_0 = C(\beta_0, s, M) \xi^h$, где $h = h(\beta_0, s, M)$, $v = D(\beta_0, s, M) \xi^h$.*

Доказательство этой технической леммы проводится по схеме, использованной в [16] при доказательстве леммы 10.4.3 для обычной теории гомологий и $s = k$.

До сих пор мы могли рассматривать любое s такое, что $2 \leq s \leq n-1$. Лемма 30.1.1 является тем единственным утверждением, для доказательства которого необходимо предположить, что $s \geq 3$; именно это обстоятельство и приводит нас к рассмотрению 2-устойчивых топологических вариационных классов.

Лемма 30.1.2. *Пусть G — открытое множество в M такое, что $G \cap \check{X}^{s+1} = \emptyset$, $G \cap S^s \neq \emptyset$, где $S^s \subset \check{X}^s$, $\check{X}^s$ получен при некотором M -процессе, и пусть $\beta_0 = \inf \Psi_s(P)$, где $\inf$ берется по точкам $P \in G \cap S^s$, т. е. $\beta_0 \geq \beta_s > 0$ (определение β_s — см. (3.3.7) в пункте 29.3). Тогда для произвольной постоянной $e'_0 > 0$ существует шар $B(P_1, r_1) \subset G$ (зависящий, вообще говоря, то e'_0) такой, что $P_1 \in S^s \cap G$; далее,*

(1.2.1) $\psi_s^+ \leq (\beta_0 + e'_0) h_s(r)$ для любого шара $B(P, r)$, где $P \in S^s$, $0 \leq r < R^{k-s}(P)$, $B(P, r) \subset B(P_1, r_1)$. Более того, для

всех $B(P, r) \subset B(P_1, r_1) \subset G$, где $P \in S^s$, $0 \leq r < R^{k-s}(P)$, выполнено неравенство $\psi_s^- \geq \beta_0 h_s(r)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon'_0 > 0$ — фиксированная постоянная. Тогда, поскольку $\beta_0 = \inf \Psi_s(P)$, $P \in S^s \cap G$ (ясно, что $\beta_0 < \infty$, так как $\Psi_s(P) < \infty$ для любой точки $P \in S^s$, см. соотношение (3.3.7) в пункте 29.3), то существует точка $P_1 \in S^s \cap G$ такая, что $\Psi_s(P_1) < \beta_0 + \frac{1}{4} \varepsilon'_0$. Выберем число $r_2 > 0$ такое, чтобы

$B(P_1, r_2) \subset G$ и $\psi_s^+(r_2, P_1) < \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon'_0\right) h_s(r_2)$. Напомним, что $\Psi_s(P_1) = \lim_{\rho \rightarrow 0} [h_s^{-1}(\rho) \psi_s^+(\rho, P_1)]$ (см. соотношение (3.3.6) в пункте 29.3). Ясно, что такое $r_2 > 0$ существует. Далее, выберем r_1 ,

$0 < r_1 < \frac{1}{2} r_2$, так, чтобы $(\beta_0 + \varepsilon'_0) h_s(r_2 - r_1) > \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon'_0\right) h_s(r_2)$. Поскольку $0 < r_2 - r_1 < r_2$, то $h_s(r_2 - r_1) > h_s(r_2)$ и, кроме того, $\beta_0 + \varepsilon'_0 > \beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon'_0$. Здесь мы воспользовались тем, что $h_s(r)$ —

монотонно убывающая с ростом r функция. Напомним, что $[h_s(r)]'_r = -sr^{-1-s}(1 + h_s(r))^{s-1} < 0$ в силу леммы 29.3.2. Тогда, если для некоторого шара $B(P, r) \subset B(P_1, r_1)$ требуемое соотношение (1.2.1) (где $P \in S^s$, $r < R^{k-s}(P)$) не выполнено, то в силу леммы

29.3.3 получаем неравенства $\left(\beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon'_0\right) h_s(r_2) > \psi_s^+(r_2, P_1)$ (см. выше

выбор r_2), $\psi_s^+(r_2, P_1) \geq \psi_s^-(r + r_2 - r_1, P)$. Здесь мы воспользовались тем, что $r_2 - d(P, P_1) \geq r + r_2 - r_1$, так как $r_1 - r \geq d(P, P_1)$,

$B(P, r) \subset B(P_1, r_1)$, а тогда применимо соотношение (3.3.1) из

пункта 29.3. Далее, $\psi_s^-(r + r_2 - r_1, P) \geq \psi_s^+(r_2 - r_1, P)$, так как $r + r_2 - r_1 > r_2 - r_1$, $r > 0$; тогда применимо соотношение (3.3.3) из

пункта 29.3 и $\psi_s^+(r_2 - r_1, P) > (\beta_0 + \varepsilon'_0) \cdot h_s(r_2 - r_1)$. Это неравенство следует из того, что $h_s^{-1}(r) \cdot \psi_s^+ > \beta_0 + \varepsilon'_0$ (см. предположение

противного), $r < r_1 < \frac{1}{2} r_2 < r_2$, т. е. $r < r_2 - r_1$, так как

$r + r_1 < 2r_1 < r_2$, а функция $h_s^{-1}(t) \cdot \psi_s^+(t, P)$ не убывает с ростом t (см. соотношение (3.3.6) в пункте 29.3), т. е. $h_s^{-1}(r) \cdot \psi_s^+(r, P) \leq$

$\leq h_s^{-1}(r_2 - r_1) \psi_s^+(r_2 - r_1, P)$. Наконец, $(\beta_0 + \varepsilon'_0) \cdot h_s(r_2 - r_1) >$

$> \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon'_0\right) h_s(r_2)$, что обусловлено выбором r_1 (см. выше). Окон-

чательно получаем $\left(\beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon'_0\right) \cdot h_s(r_2) > \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon'_0\right) \cdot h_s(r_2)$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 30.1.3. Для любой точки $P \in S^s$ (где $S^s \subset \tilde{X}^s$ — результат некоторого М-процесса) и для любого s , $3 \leq s \leq k$, выполнено неравенство $\Psi_s(P) \geq 1$ (если $S^s \neq \emptyset$).

Замечание. Доказательство леммы 30.1.3 в некоторых пунктах, носящих аналитический характер, аналогично схеме рассуждений, использованной в [35] для доказательства леммы о плотности и в [16] для доказательства теоремы 10.4.3. Это

неравенство для функции плотности верно, вообще говоря, только для минимальных поверхностей. Данное утверждение, как было уже неоднократно продемонстрировано выше (см., например, главу 3), имеет далеко идущие геометрические следствия.

Доказательство леммы 30.1.3. Пусть $P \in S^s$, $\beta = \inf \Psi_s(P)$, тогда $\beta \geq \beta_s > 0$ (см. соотношение (3.3.7) в пункте 29.3). Пусть $\xi > 0$ — произвольное число, и пусть $e_0 = e_0(\xi, \beta, s, M)$ и $v = v(\xi, \beta, s, M)$ — числа, существование которых утверждается леммой 30.1.1. При этом надо положить $\beta_0 = \beta = \inf \Psi_s(P)$. В силу соотношения (3.3.8) из пункта 29.3 имеем $\varphi_s^- \geq \Psi_s(P) h_s(r)$, т. е. $h_s^{-1}(r) \varphi_s^- \geq \beta$. Так как в силу соотношения (3.3.4) из пункта 29.3 имеем $\varphi_s^- \leq \varphi_s^+$, то $\beta \leq h_s^{-1}(r) \varphi_s^- \leq h_s^{-1}(r) \varphi_s^+$. Рассмотрим открытое множество G такое, что $G \cap \tilde{X}^{s+1} = \emptyset$, $G \cap S^s \neq \emptyset$, $P \in G \cap S^s$, и пусть $\beta_0 = \inf \Psi_s(P)$, $P \in G \cap S^s$. Тогда ясно, что $\beta \leq \beta_0$. Положим $e_0 = e_0$ (где число e_0 взято нами из леммы 30.1.1). Тогда мы оказываемся в ситуации, к которой применима лемма 30.1.2, и получаем, что существует шар $B(P_1, r_1) \subset G$ такой, что $P_1 \in S^s \cap G$ и $\varphi_s^+(r, P) \leq (\beta_0 + e_0) h_s(r)$ для любого шара $B(P, r)$, где $P \in S^s$ и $B(P, r) \subset B(P_1, r_1)$. Поскольку $h_s^{-1}(r) \varphi_s^- \geq \beta_0$, если $P \in G \cap S^s$, то окончательно получаем: $\beta_0 \leq h_s^{-1}(r) \varphi_s^- \leq h_s^{-1}(r) \varphi_s^+ \leq \beta_0 + e_0$ для любого шара $B(P, r) \subset B(P_1, r_1) \subset G$. Доказав этот факт, мы видим, что оказались в ситуации, когда применима лемма 30.1.1, т. е. (если положить $\beta_0 = \beta_0$) для каждого шара $B(P, r) \subset \subset B(P_1, r_1)$, $P \in G \cap S^s$, существуют точка $P^* \in S^s$ и геодезическая s -плоскость Π с центром в точке P^* такие, что $B(P^*, vr) \subset \subset B(P, r)$ и $K(P^*, vr) \subset (\Pi, \xi vr)$. Рассмотрим последовательность $X_n^{(k-s+1)'}$, где $\rho[X_n^{(k-s+1)' \cap B(P^*, vr), S^s \cap B(P^*, vr)] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. выше). Это означает, что можно выбрать номер N такой, что для всех $n > N$ имеем

$$(1.3.1) \quad \tilde{K}_n(P^*, vr) \subset (\Pi, 2\xi vr),$$

где $\tilde{K}_n(P^*, vr) = \tilde{X}_n^{(k-s+1)' \cap B(P^*, vr)}$ и $\text{vol}_s[\tilde{K}_n(P^*, vr/2)] = \text{vol}_s[K_n(P^*, vr)] \geq \beta_0 h_s(vr/2) > 1/2 \beta_0 h_s(vr/2)$. Поскольку $\varphi_s^- \leq (\beta_0 + e_0) h_s(r)$, то при всех $n > N$ мы имеем $\varphi_s(vr, P^*, X_n^{(k-s+1)'}) < (\beta_0 + 2e_0) h_s(vr)$. Следовательно, для каждого $n > N$ существует число ρ_n , $vr/2 \leq \rho_n \leq vr$, такое, что выполнено неравенство

$$(1.3.2) \quad \text{vol}_{s-1}[X_n \cap \partial B(P^*, \rho_n)] \leq 2(\beta_0 + 2e_0)(vr)^{-1} h_s(vr).$$

В самом деле, допустим противное (здесь и в дальнейшем мы для краткости опускаем индекс $(k-s+1)'$ в обозначении $X_n^{(k-s+1)'}$): пусть $\text{vol}_{s-1}[X_n \cap \partial B(P^*, \rho)] > 2(\beta_0 + 2e_0)(vr)^{-1} h_s(vr)$ для любого ρ , $vr/2 \leq \rho \leq vr$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{vr/2}^{vr} \text{vol}_{s-1}[X_n \cap \partial B(P^*, \rho)] d\rho &> \frac{vr}{2} \cdot 2(\beta_0 + 2e_0)(vr)^{-1} h_s(vr) = \\ &= (\beta_0 + 2e_0) h_s(vr), \end{aligned}$$

т. е. мы получаем

$$\begin{aligned}\varphi_s(ur, P^*, X_n) &= \int_0^{ur} \text{vol}_{s-1}[X_n \cap \partial B(P^*, \rho)] d\rho \geq \\ &\geq \int_{ur/2}^{ur} \text{vol}_{s-1}[X_n \cap \partial B(P^*, \rho)] d\rho > (\beta_0 + 2\varepsilon_0) h_s(ur),\end{aligned}$$

что противоречит (1.3.1). Итак, (1.3.2) доказано.

Поскольку $\check{K}_n(P^*, ur) \subset (\Pi, 2\xi ur)$ (рис. 76), то можно считать, что пересечение $X_n \cap [\partial B(P^*, \rho_n) \setminus U_n^{k-s+1}]$ состоит только из q -симплициальных точек, где $q \leq s-2$. Напомним, что $X_n \setminus U_n^{k-s+1}$ есть конечный симплициальный подкомплекс размерности $q+1 \leq s-1$. Такая структура пересечения может быть получена сколь угодно малым шевелением симплициального подкомплекса $X_n \setminus U_n^{k-s+1}$. Отсюда немедленно следует, что

$$\begin{aligned}(1.3.3) \quad \text{vol}_{s-1}[X_n \cap \partial B(P^*, \rho_n)] &= \\ &= \text{vol}_{s-1}[\check{X}_n \cap \partial B(P^*, \rho_n)] \leq 2(\beta_0 + 2\varepsilon_0)(ur)^{-1} h_s(ur).\end{aligned}$$

Выберем в шаре $B(P^*, ur)$ нормальную координатную систему τ , центрированную в точке P^* , и определим следующие компакты:

$$\begin{aligned}Y_{n0} &= \tau^{-1}[X_n \cap \overline{B(P^*, \rho_n)}], \quad \check{Y}_{n0} = \tau^{-1}[\check{X}_n \cap \overline{B(P^*, \rho_n)}], \\ A_{n0} &= \tau^{-1}[X_n \cap \partial B(P^*, \rho_n)], \quad \check{A}_{n0} = \tau^{-1}[\check{X}_n \cap \partial B(P^*, \rho_n)], \\ \Pi_0 &= \tau^{-1}(\Pi), \quad \Gamma_{n0} = f_n[C(\Pi_0, A_{n0})], \quad \check{\Gamma}_{n0} = f_n[C(\Pi_0, \check{A}_{n0})], \\ A_{n0}^* &= f_n \pi A_{n0} = \Gamma_{n0} \cap \Pi_0, \quad \check{A}_{n0}^* = f_n \pi \check{A}_{n0} = \check{\Gamma}_{n0} \cap \Pi_0, \\ A_{n0}' &= A_{n0} \cup A_{n0}^*, \quad \check{A}_{n0}' = \check{A}_{n0} \cup \check{A}_{n0}^*, \\ Y_n &= \tau(Y_{n0}), \quad \check{Y}_n = \tau(\check{Y}_{n0}), \\ A_n &= \tau(A_{n0}), \quad \check{A}_n = \tau(\check{A}_{n0}), \quad \Gamma_n = \tau(\Gamma_{n0}), \quad \check{\Gamma}_n = \tau(\check{\Gamma}_{n0}), \\ \check{A}_n^* &= \tau(\check{A}_{n0}^*), \quad A_n^* = \tau(A_{n0}^*), \quad A_n' = \tau(A_{n0}'), \\ \check{A}_n' &= \tau(\check{A}_{n0}').\end{aligned}$$

Здесь через π обозначена ортогональная проекция $\mathbb{R}^n \rightarrow \Pi$, $C(\Pi_0, A_{n0})$ — цилиндр отображения $\pi: A_{n0} \rightarrow \pi(A_{n0})$, $\pi(A_{n0}) \subset \Pi_0$, f_n есть радиальная проекция на границу $\partial B(0, \rho_n)$ внешности шара $B(0, \rho_n \cdot \sqrt{1-25\xi^2})$ в $B(0, \rho_n)$ (т. е. проекция шарового слоя) или, что то же самое, растяжение шара $B(0, \rho_n \cdot \sqrt{1-25\xi^2})$ на весь шар $B(0, \rho_n)$. Так как $\check{K}_n(P^*, ur) \subset (\Pi, 2\xi ur)$, то отсюда имеем $\check{Y}_{n0} \subset (\Pi_0, 2(1+\eta_0 ur)\xi ur) \subset (\Pi_0, 5\xi \rho_n)$ (см. условия (M)). Отметим, что для компакта Y_{n0} аналогичное включение не выполнено. Из леммы 10.2.2, из теоремы 10.2.2 в [16] и из соотношения (1.3.1) (см. выше), как и при доказательстве теоремы 10.4.3

в [16], следует, что

$$(1.3.4) \quad \text{vol}_s(\Gamma_n) \leq Z_1(\beta_0 + 2e_0) h_s(vr) \xi,$$

где $Z_1 = 8C_1\rho_n(vr)^{-1}(1 + \eta_0\rho_n)^s(1 - 25\xi^2)^{-s/2}$ (в предположении, что $1 + \eta_0\rho_n \leq 5/4$ (см. пункт 28.1) и $C_1 = C_1(s)$). Далее, в силу (1.3.3) имеем $\text{vol}_s(\Gamma_n) = \text{vol}_s(\check{\Gamma}_n)$ (так как $\dim(\Gamma_n \setminus \check{\Gamma}_n) \leq s-1$ и $\dim(A_{n0} \setminus \check{A}_{n0}) \leq s-2$). Мы хотим доказать, что проекция $\pi(Y_{n0})$ полностью покрывает шар $\Pi_0 \cap B(0, \rho_n \sqrt{1 - 25\xi^2})$. Допустим противное: пусть проекция $\pi(Y_{n0})$ не содержит некоторую точку $Q_n \in \Pi_0 \cap B(0, \rho_n \sqrt{1 - 25\xi^2})$. Положим $Q'_n = f_n(Q_n) \in \Pi_0 \cap B(0, \rho_n)$, и пусть g_n обозначает радиальную проекцию из точки Q'_n области $B(0, \rho_n) \setminus Q'_n$ на $\partial B(0, \rho_n)$. Пусть $\varphi_n = g_n f_n \pi$ и $Z_{n0} = \varphi_n(Y_{n0})$, $\check{Z}_{n0} = \varphi_n(\check{Y}_{n0})$. Отметим, что $\check{A}_{n0} = \varphi_n(\check{A}_{n0})$, так как $\pi(\check{A}_{n0}) \subset \subset B(0, \rho_n) \setminus B(0, \rho_n \sqrt{1 - 25\xi^2})$. В самом деле (рис. 77), $OT = \rho_n \cos \varphi = \rho_n \sqrt{1 - 25\xi^2}$, т. е. $T \in \partial B(0, \rho_n \sqrt{1 - 25\xi^2})$, что и требовалось доказать.

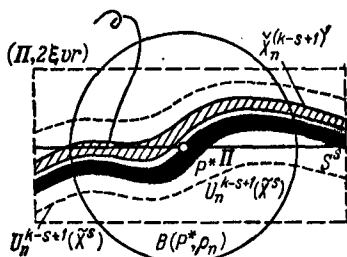


Рис. 76.

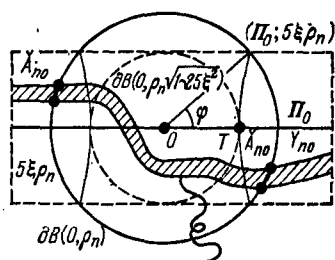


Рис. 77.

В то же время ясно, что $\pi(A_{n0})$, в отличие от $\pi(\check{A}_{n0})$, не содержится, вообще говоря, в $B(0, \rho_n) \setminus B(0, \rho_n \sqrt{1 - 25\xi^2})$. Докажем, что компакт $(X_n \setminus Y_n) \cup (Z_n \cup g_n \Gamma_n)$ принадлежит классу $\mathcal{O}$. Мы уже отмечали, что цилиндром отображения $\pi: A_{n0} \rightarrow \Pi_0 \cap B(0, \rho_n)$ является компакт $C(\Pi_0, A_{n0}) \cup [\Pi_0 \cap B(0, \rho_n)]$. Построим гомотопию F_n , стягивающую компакт A_{n0} в плоскость Π_0 вдоль проекции $\pi: F_n(t, x) = (1-t)x + t\pi(x)$, где вектор $x \in A_{n0}$, x — радиус-вектор, исходящий из точки O ; вектор $\pi(x) \in \Pi_0$, $F_n(0, x) = x$, $F_n(1, x) = \pi(x)$. Ясно, что $F_n(1, \check{A}_{n0}) = \pi(\check{A}_{n0}) \subset \subset B(0, \rho_n) \setminus B(0, \rho_n \sqrt{1 - 25\xi^2})$. Докажем, что $(X_n \setminus Y_n) \cup [C(\Pi, A_n) \cup \pi(Y_n)] \in \mathcal{O}$. Выполним гомотопию $F_n(t, x)$ только до значения $t = 1/2$ и рассмотрим компакт $(X_n \setminus Y_n) \cup A_n \cup F_n(1/2, Y_n) = \check{X}_n$, где $\check{A}_n = \{F(t, A_n), 0 \leq t \leq 1/2\}$. Ясно, что $F_n(1/2, Y_n)$ гомеоморфно Y_n и, в частности, $F_n(1/2, A_n) \cong A_n$, т. е. $\check{A}_n \cong A_n \times [0, 1/2]$. Пусть $\check{Y}_n = \check{A}_n \cup F(1/2, Y_n)$, $\check{X}_n = (X_n \setminus Y_n) \cup \check{Y}_n$; тогда определены следующие отображения: вложение $i_1: Y_n \rightarrow \check{Y}_n$ и проекция $i_2: \check{Y}_n \rightarrow Y_n$, причем $i_2 i_1 = 1_{Y_n}$.

$i_1 i_2$ гомотопно $1_{\bar{Y}_n}$, т. е. i_2 является гомотопической эквивалентностью. Построим непрерывное отображение $f: X_n \rightarrow X_n$, положив

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [(X_n \setminus Y_n) \cup Y_n] \setminus Y_n, \\ i_2(x), & \text{если } x \in Y_n. \end{cases}$$

Тогда отображение $f': (X_n, Y_n) \rightarrow (X_n, Y_n)$ является относительным гомеоморфизмом. Из следующей коммутативной диаграммы (аналогичная диаграмма строится и в когомологическом случае):

$$\begin{array}{ccccccccc} \tilde{h}_{q+1}(X_n, Y_n) & \rightarrow & \tilde{h}_q(Y_n) & \rightarrow & \tilde{h}_q(Y_n) & \rightarrow & \tilde{h}_q(X_n, Y_n) & \rightarrow & \tilde{h}_{q-1}(Y_n) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \tilde{h}_{q+1}(X_n, Y_n) & \rightarrow & \tilde{h}_q(Y_n) & \rightarrow & \tilde{h}_q(X_n) & \rightarrow & \tilde{h}_q(X_n, Y_n) & \rightarrow & \tilde{h}_{q-1}(Y_n) \end{array}$$

немедленно следует, что гомоморфизмы $f_*: \tilde{h}_q(X_n) \rightarrow \tilde{h}_q(X_n)$ являются изоморфизмами для всех $q \in \mathbb{Z}$. Поскольку вложение $j: X_n \rightarrow M$ гомотопно отображению $fj: X_n \rightarrow M$, то $f_* j_* \tilde{h}_*(X_n) = i_* \tilde{h}_*(X_n)$, где $i: X_n \rightarrow M$ — вложение, т. е. $X_n \in \mathcal{O}$, что и требовалось доказать.

Далее, компакт $(X_n \setminus Y_n) \cup [C(\Pi, A_n) \cup \pi(Y_n)]$ получается из компакта X_n гомотопией вложения j (т. е. нужно выполнить до конца гомотопию $F_n(t, x)$), следовательно, $(X_n \setminus Y_n) \cup [C(\Pi, A_n)] \cup \pi(Y_n) \in \mathcal{O}$. Применяя к этому компакт гомотопию f_n , мы получаем, что компакт $(X_n \setminus Y_n) \cup \Gamma_n \cup [f_n \cdot \pi(Y)]$ принадлежит классу $\mathcal{O}$. Наконец, выполняя последнюю гомотопию — выдавливание из Q'_n на границу $\partial B(0, \rho_n)$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} (X_n \setminus Y_n) \cup (g_n \Gamma_n) \cup [g_n f_n \pi(Y_n)] &= \\ &= (X_n \setminus Y_n) \cup (g_n \Gamma_n) \cup \varphi_n(Y_n) = (X_n \setminus Y_n) \cup (g_n \Gamma_n) \cap Z_n \in \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Ясно, что $(g_n \Gamma_n) \cup Z_n \supset (g_n \check{\Gamma}_n) \cup \check{Z}_n$, но так как $\check{\Gamma}_n \subset \partial B(P^*, \rho_n)$, то $g_n \check{\Gamma}_n = \check{\Gamma}_n$. Так как $\check{Z}_{n0} \subset Z_{n0} \subset \Pi \cap \partial B(0, \rho_n)$, то $\text{vol}_s(Z_{n0}) = 0$, а потому

$$\begin{aligned} \text{vol}_s(Z_n \cup g_n \Gamma_n) &= \text{vol}_s(g_n \Gamma_n) = \text{vol}_s(g_n \check{\Gamma}_n) = \text{vol}_s(\check{\Gamma}_n) = \\ &= \text{vol}_s(\Gamma_n) \leq Z_1(\beta_Q + 2\varepsilon_0) h_s(vr) \xi \end{aligned}$$

(см. (1.3.4)). Пусть

$$\text{vol}_s[X_n \setminus U_n^{k-s}(\check{X}^{s+1})] = \omega_n^s + \varepsilon'_n, \quad \varepsilon'_n \geq 0, \quad \varepsilon'_n \rightarrow 0;$$

тогда

$$\begin{aligned} \text{vol}_s(\Omega_n) &= \text{vol}_s\{(X_n \setminus Y_n) \cup (g_n \Gamma_n) \cup Z_n\} \setminus U_n^{k-s}(\check{X}^{s+1}) \leq \\ &\leq \omega_n^s + \varepsilon'_n - 2^{s-1} \beta_Q h_s(vr) + Z_1(\beta_Q + 2\varepsilon_0) h_s(vr) \xi. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (1.3.1), а именно:

$$\begin{aligned} \text{vol}_s(Y_n) &= \text{vol}_s(\check{Y}_n) = \text{vol}_s[\check{K}_n(P^*, \rho_n)] \leq \\ &< \text{vol}_s[\check{K}_n(P^*, vr/2)] >^{1/2} \beta_G h_s(vr/2) = \beta_G (vr)^s 2^{-s-1} [1 + (h_s vr)/2]^{-s} \geq \\ &\geq \beta_G \cdot (vr)^s 2^{-s-1} (1 + h_s vr)^{-s} = \beta_G 2^{-s-1} h_s(vr). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{vol}_s(\Omega_n) &\leq \omega_n^s + e_n' - h_s(vr) [2^{-s-1} \beta_G - \xi (\beta_G + 2e_0) \times \\ &\times 8C_1(s) \rho_n(vr)^{-1} (1 + \eta_0 \rho_n)^s (1 - 25\xi^2)^{-s/2}]. \end{aligned}$$

Здесь $e_0 = e_0(\xi)$, $v = v(\xi)$, $\rho_n(vr)^{-1} < 1$, а потому при достаточно малом ξ выражение в квадратной скобке приблизительно равно $2^{-s-1} \beta_G$, а потому эта квадратная скобка определяет число положительное и, кроме того, не зависящее от n . Отсюда сразу следует, что $\text{vol}_s(\Omega_n) \leq \omega_n^s + e_n' - \tau$, где $\tau > 0$ и не зависит от n , т. е. существует номер N_1 такой, что при всех $n > N_1$ мы будем иметь $\text{vol}_s(\Omega_n) \leq \omega_n^s - (\tau - e_n') < \omega_n^s - \frac{\tau}{2} < \infty$, что невозможно, поскольку $(X_n \setminus Y_n) \cup (g_n \Gamma_n) \cup Z_n \in \mathcal{O}$, а число ω_n^s построено по окрестности $U_n^{k-s}(\check{X}^{s+1})$. Полученное противоречие означает, что проекция $\pi(Y_{n_0})$ полностью покрывает шар $B(0, \rho_n \sqrt{1 - 25\xi^2})$, а потому в силу леммы 28.3.1 имеем $\text{vol}_s(Y_{n_0}) = \text{vol}_s(\check{Y}_{n_0}) \geq \gamma_s \rho_n^s (1 - 25\xi^2)^{-s/2}$, т. е. $\text{vol}_s(Y_n) \geq \gamma_s \rho_n^s (1 - 25\xi^2)^{-s/2} (1 + \eta_0 vr)^{-s}$. Устремляя $\xi \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\rho_n \rightarrow \rho$, а затем используя произвольность числа r , мы и получаем, что $\Psi_s(P) \geq 1$, что и доказывает лемму.

Извлечем важное следствие из этой леммы. Оказывается, система неравенств $\Psi_s(P) \geq 1$, $P \in S^s$, $3 \leq s \leq k$, обеспечивает минимальность всех поверхностей S^s , а именно: $\text{vol}_s(S^s) = \lambda_s$.

Лемма 30.1.4 Пусть компакт $\check{X}^s = \check{X}^s(M)$ получен в результате некоторого M -процесса и $S^s \subset \check{X}^s$, $3 \leq s \leq k$, $\check{X}^s \supset \check{X}^s = \check{X}^{s+1} \cup S^s$. Тогда выполнены равенства $\text{vol}_s(S^s) = \text{vol}_s(\check{X}^s \setminus \check{X}^{s+1}) = \text{vol}_s(\check{X}^s \setminus \check{X}^{s+1}) = \lambda_s$, где λ_s — s -я компонента λ -вектора M -процесса (при $3 \leq s \leq k-1$), и $\text{vol}_k(\check{X}^k \setminus A) = \text{vol}_k(\check{X}^s \setminus A) = d_k$. Более того, $\Psi_s(P) = 1$ почти всюду на множестве S^s и $\psi_s = \text{vol}_s[S^s \cap \cap B(P, r)]$ почти для всех $r < R^{k-s}(P)$. Если $\lambda_s = 0$, то $S^s = \emptyset$.

Замечание. В этой лемме мы впервые воспользуемся конечностью M -процесса. Все построения, которые проводились до сих пор, выполнялись для произвольного M -процесса. Кроме того, в этой лемме мы впервые воспользуемся тем обстоятельством, что $\check{X}^s \in \mathcal{O}$.

Доказательство леммы 30.1.4. Доказательство будем вести индукцией по числу s , начиная с $s=2$. Поскольку $S^2 = \emptyset$ и $\lambda_2 = 0$ ввиду 2-устойчивости вариационного класса, то первый

шаг индукции уже выполнен по тривиальным соображениям. Итак, пусть теперь лемма доказана для всех подмножеств $S^{s'}$, где $3 \leq s' \leq s-1$; в частности, это означает, что $\text{vol}_{s-1}(\tilde{X}^3 \setminus \tilde{X}^{s'}) = \text{vol}_{s-1}(S^{s-1}) = \lambda_{s-1} < \infty$. Отсюда следует, что $\text{vol}_s(\tilde{X}^3 \setminus \tilde{X}^{s+1}) = \text{vol}_s(\tilde{X}^s \setminus \tilde{X}^{s+1}) = \text{vol}_s(S^s)$.

Докажем, что $\text{vol}_s(\tilde{X}^3 \setminus \tilde{X}^{s+1}) \geq \lambda_s$. В самом деле, допустим противное: пусть $\text{vol}_s(\tilde{X}^3 \setminus \tilde{X}^{s+1}) < \lambda_s$. Тогда, поскольку $\lambda_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^s$, где $\omega_n^s \leq \omega_{n+1}^s$, то существует номер n_0 такой, что

$\text{vol}_s(\tilde{X}^3 \setminus \tilde{X}^{s+1}) < \omega_{n_0}^s$. Рассмотрим систему окрестностей $U_n^{k-s}(\tilde{X}^{s+1})$, определяющих в М-процессе числа ω_n^s . Тогда имеем $\text{vol}_s[\tilde{X}^3 \setminus U_{n_0}^{k-s}] \leq \text{vol}_s(\tilde{X}^3 \setminus \tilde{X}^{s+1}) < \omega_{n_0}^s$, что невозможно, так как $\tilde{X}^3 \in \mathcal{O}$. В силу леммы 10.2.3 в [16] для каждого $\rho > 0$ мы можем найти счетное семейство непересекающихся шаров $B(P_i, r_i)$, где $5r_i < \rho$, $P_i \in S^s$, $B(P_i, r_i) \cap \tilde{X}^{s+1} = \emptyset$ для любого i , причем такое, что

$$(1.4.1) \quad S^s \subset \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B(P_i, r_i) \right] \cup \left[\bigcup_{i=p+1}^{\infty} B(P_i, 5r_i) \right],$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$ Из леммы 30.1.3 следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_s r_i^s &= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_s r_i^s (1 + h_s r_i)^{-s} (1 + h_s r_i)^s \leq (1 + h_s \rho)^s \sum_{i=1}^{\infty} h_s(r_i) \leq \\ &\leq (\text{поскольку } \Psi_s(P_i) \geq 1) \leq (1 + h_s \rho)^s \sum_{i=1}^{\infty} \psi_s^-(r_i, P_i) = \\ &= (1 + h_s \rho)^s \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\inf_{q \geq n} \psi_s(r_i, P_i, X_q^{(k-s+1)'}) \right] \leq \\ &\leq (1 + h_s \rho)^s \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{q \geq n} \sum_{i=1}^{\infty} \psi_s(r_i, P_i, X_q^{(k-s+1)'}) \leq \\ &\leq (\text{поскольку шары } B(P_i, r_i) \text{ не пересекаются}) \leq \\ &\leq (1 + h_s \rho)^s \lim_{n \rightarrow \infty} [\text{vol}_s(X_n^{(k-s+1)'} \setminus \tilde{X}^{s+1})] = \\ &= (1 + h_s \rho)^s \lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n^s + \varepsilon'_n) = (1 + h_s \rho)^s \lambda_s. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_s r_i^s \leq (1 + h_s \rho)^s \lambda_s < \infty$ (в силу конечности

М-процесса), т. е. ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_s r_i^s$ сходятся. Напомним, что для каждого $\rho > 0$ мы подобрали, вообще говоря, свое семейство шаров $B(P_i, r_i)$. Используя специальный выбор шаров (см. (1.4.1)),

мы получаем $\text{vol}_s^p(S^s) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_s r_i^s \leq (1 + h_s \rho)^s \cdot \lambda_s$, откуда, устремляя ρ к нулю, получаем $\text{vol}_s(S^s) \leq \lambda_s$. Сравнивая это неравенство с предыдущим, имеем $\text{vol}_s(S^s) = \lambda_s$.

Теперь рассмотрим пересечение $S^s \cap B(P, r)$, где $r < R^{k-s}(P)$, и выберем счетное семейство шаров $\{B(P_i, r_i)\}$, как и в (1.4.1), но так, чтобы $B(P_i, r_i) \subset B(P, r)$ для каждого номера i . Поскольку $\Psi_s(P) \geq 1$ на $S^s \cap B(P, r)$, то, повторяя приведенные выше рассуждения для $S^s \cap B(P, r)$, мы получаем

$$(1.4.2) \quad \text{vol}_s[S^s \cap B(P, r)] \leq \psi_s^- \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{q \geq n} \text{vol}_s[X_q^{(k-s+1)'} \cap B(P, r)].$$

Пусть теперь $P \in S^s$, $r < R^{k-s}(P)$, и пусть r выбрано так, что $\text{vol}_s[S^s \cap \partial B(P, r)] = 0$, $\text{vol}_s[X_n^{(k-s+1)'} \cap \partial B(P, r)] = 0$ для каждого n , выбранного из какой-либо бесконечной подпоследовательности в $\{n\}$. Такие значения r всюду плотны на полуинтервале $[0, R^{k-s}(P)]$. Пусть, кроме того, $\overline{B(P, r)} \cap U_n^{k-s}(\tilde{X}^{s+1}) = \emptyset$. Поскольку $\Psi_s(P) \geq 1$ на множестве $S^s \setminus \overline{B(P, r)}$, то, повторив все предыдущие рассуждения для $S^s \setminus \overline{B(P, r)}$, получаем

$$(1.4.3) \quad \text{vol}_s[S^s \setminus \overline{B(P, r)}] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{q \geq n} \text{vol}_s[(X_q^{(k-s+1)'} \setminus U_q^{k-s}) \setminus \overline{B(P, r)}],$$

откуда следует, что

$$\text{vol}_s[S^s \setminus B(P, r)] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{q \geq n} \text{vol}_s[(X_q^{(k-s+1)'} \setminus U_q^{k-s}) \setminus B(P, r)].$$

Здесь мы воспользовались выбором числа r . Итак,

$$\begin{aligned} \lambda_s = \text{vol}_s(S^s) &= \text{vol}_s[S^s \setminus B(P, r)] + \text{vol}_s[S^s \cap B(P, r)] \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{q \geq n} \text{vol}_s[(X_q^{(k-s+1)'} \setminus U_q^{k-s}) \setminus B(P, r)] + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{q \geq n} \text{vol}_s[(X_q^{(k-s+1)'} \setminus U_q^{k-s}) \cap B(P, r)] \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{q \geq n} \text{vol}_s[X_q^{(k-s+1)'} \setminus U_q^{k-s}] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n^s) = \lambda_s, \end{aligned}$$

откуда следует, что неравенства (1.4.2) и (1.4.3) являются в действительности равенствами, а потому $\psi_s^- = \text{vol}_s[S^s \cap B(P, r)]$ почти для всех $r < R^{k-s}(P)$. В частности, $\Psi_s(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \{\gamma_s^{-1} r^{-s} \text{vol}_s[S^s \cap B(P, r)]\}$. Осталось доказать, что $\Psi_s(P) = 1$ почти всюду на S^s .

Обозначим через Z_m подмножество в S^s , на котором $\Psi_s(P) \geq 1 + \frac{1}{m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$; тогда Z_m замкнуто в $M \setminus \tilde{X}^{s+1}$. Предположим, что $\text{vol}_s(Z_m) > 0$, и пусть число ε выбрано так, что $0 < \varepsilon < \text{vol}_s(Z_m)/2m$. Покроем множество Z_m открытым в много-

образии M множеством G , где $G \subset M \setminus \tilde{X}^{s+1}$, так, чтобы $\text{vol}_s[G \cap (S^s \setminus Z_m)] < \varepsilon$. Тогда, в силу леммы 10.2.3 в [16], для любого $\rho > 0$ можно найти счетное семейство непересекающихся шаров $B(P_i, r_i)$, где $P_i \in Z_m$, $r_i < R^{k-s}(P_i)$, $5r_i < \rho$, $B(P_i, r_i) \subset G$, такое, что $Z_m \subset \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B(P_i, r_i) \right] \cup \left[\bigcup_{i=p+1}^{\infty} B(P_i, 5r_i) \right]$, $p = 1, 2, 3, \dots$

Ясно, что семейство $B(P_i, r_i)$ покрывает все множество Z_m , за исключением, быть может, множества $\zeta_m \subset Z_m$, где $\text{vol}_s(\zeta_m) \neq 0$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \text{vol}_s(Z_m) + \varepsilon &\geq (\text{поскольку } \text{vol}_s[G \cap (S^s \setminus Z_m)] < \varepsilon) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_s[S^s \cap B(P_i, r_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_s(r_i, P_i, S^s) \geq \\ &\geq (\text{поскольку } \Psi_s(P) \geq 1 + m^{-1}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (1 + m^{-1}) h_s(r_i) = \\ &= (1 + m^{-1}) \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_s r_i^s (1 + h_s r_i)^{-s} \geq (1 + m^{-1}) (1 + h_s \rho)^{-s} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_s r_i^s \geq \\ &\geq (1 + m^{-1}) (1 + h_s \rho)^{-s} \text{vol}_s^p(Z_m). \end{aligned}$$

Так как это неравенство должно выполняться при любом $\varepsilon > 0$ и при любом $\rho > 0$, то $\text{vol}_s(Z_m) \geq (1 + m^{-1}) \text{vol}_s(Z_m)$, откуда получаем, что $\text{vol}_s(Z_m) = 0$ при любом m . Так как $\Psi_s(P) \geq 1$ на S^s , то отсюда вытекает, что $\Psi_s(P) = 1$ почти всюду на множестве S^s . На последнем шаге при $s = k$ все рассуждения будут аналогичны проведенным выше, однако не нужно будет использовать окрестности U_n^0 , $\bigcap U_n^0 = A$. Можно, впрочем, считать, что U_n^0 замкнуты и $U_n^0 = A$. Лемма доказана.

30.2. Каждый страт является гладким минимальным подмногообразием, за исключением, быть может, множества особых точек меры нуль. Как и в случае обычной теории гомологий (см. [16]), можно доказать следующее утверждение.

Лемма 30.2.1. Пусть $S^s \subset \tilde{X}^s = \tilde{X}^s(M)$, где M -процесс конечен. Тогда существует подмножество $Z_s \subset S^s$ такое, что $\text{vol}_s(Z_s) = 0$ и $S^s \setminus Z_s$ является s -мерным топологическим подмногообразием в многообразии M .

Тем самым, введенный нами выше λ -вектор получает простую геометрическую интерпретацию, а именно: он составлен из объемов подмногообразий $S^s \setminus Z_s \subset M$.

Лемма 30.2.2. Пусть $S^i \subset \tilde{X}^s(M)$, $3 \leq i \leq k$, где M -процесс конечен, и пусть $K^i = S^i \setminus Z_i \setminus \left[\bigcup_{\alpha=3}^{i-1} S^\alpha \right]$, где S^α — замыкание множества S^α в M , а множество Z_i определено леммой 30.2.1. Тогда

каждое множество K^i является дифференцируемым подмногообразием в многообразии M . Кроме того, K^i является минимальным подмногообразием в смысле классической дифференциальной геометрии, т. е. средняя кривизна равна нулю.

Доказательство этой леммы опирается на результаты [35], [36], [37] и проводится по отдельности для каждой размерности по аналогии со схемой доказательства теоремы 10.7.1 в [16], поэтому мы не будем здесь на этом останавливаться подробно.

§ 31. Доказательство глобальной минимальности построенных стратифицированных поверхностей

31.1. Доказательство основной теоремы существования глобально минимальной поверхности. Итак, пусть все предположения теоремы 7.2.1 выполнены. Рассмотрим класс поверхностей $\{X\}_k$ и докажем, что он непуст. В самом деле, пусть $\tilde{X}^3 = \tilde{X}^3(M)$ есть компакт, полученный в результате какого-то M -процесса; тогда, если вариационная задача имеет смысл, т. е. если M -процессы конечны, из леммы 30.1.4 немедленно следует, что $\text{vol}_k(\tilde{X}^3 \setminus A) = \text{vol}_k(\tilde{X}^3 \setminus A) = \text{vol}_k(S^k) = d_k < \infty$, где $d_k = \inf \text{vol}_k(Y \setminus A)$, $Y \in \mathcal{O}$. Итак, $\{X\}_k \supset \{\tilde{X}^3(M)\}$ для всех M -процессов.

Пусть теперь $X \in \{X\}_k$ — произвольная поверхность из этого класса. Мы должны найти подмножество $S^k \subset X$, удовлетворяющее требованиям теоремы 7.2.1. Рассмотрим бесконечную k -минимизирующую последовательность $X_n^{(1)}$, где $X_n^{(1)} \equiv X$ при любом n ; тогда $\text{vol}_k[X_n^{(1)} \setminus A] = d_k$ и к этой последовательности можно применить M -процесс. На первом шаге этого процесса мы должны построить функцию плотности $\Psi_k(P)$, которая, очевидно, в данном случае определена однозначно, поскольку все предельные переходы, фигурировавшие в определении функции $\Psi_k(P)$, превращаются здесь в цепочку тождественных преобразований, поэтому однозначно определено подмножество $S^k = \{P \in M \setminus A \mid \Psi_k(P) > 0\}$. Напомним, что $S^k = \emptyset$, если $d_k = 0$, и $S^k \neq \emptyset$, если $d_k > 0$. Ясно, что $S^k \subset X$, так как $\Psi_k(P) \equiv 0$, если $P \notin X$.

Второй шаг нашего M -процесса определен уже, вообще говоря, неоднозначно (как и в общей ситуации). Тем более неоднозначно ведет себя M -процесс в меньших размерностях, что и приводит к появлению многих глобально минимальных решений (в общем случае теорема единственности абсолютного минимума места не имеет). Из предложений 29.2.1 — 29.2 ($k - 2$) следует, что в результате мы получаем некоторый компакт $\tilde{X}^3 = \tilde{X}^3(M)$, обладающий разложением $\tilde{X}^3(M) = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots \cup S^3$, причем $X \cap \tilde{X}^3(M) \supset A \cup S^k = \tilde{X}^k(M)$. Итак, мы выделили в компакте X однозначно определенное подмножество S^k и включили его в некоторый компакт вида $\tilde{X}^3(M)$ (функция Ψ_k обрубилась с компакта X все куски

меньших размерностей и оставила только его k -мерную часть, которая непуста, если $d_k > 0$). Подчеркнем еще раз, что примененный нами M -процесс, быть может, изменил компакт X в размерностях $s \leq k-1$, но для нас это изменение несущественно, поскольку мы остались в прежнем вариационном классе. Поскольку $S^k \subset \tilde{X}^3(M)$, то в силу леммы 30.1.4, т. е. при $s = k$, имеем $\text{vol}_k(S^k) = \text{vol}_k[\tilde{X}^3(M) \setminus A] = \text{vol}_k[\tilde{X}(M) \setminus A] = \text{vol}_k(X \setminus A)$, а в силу лемм 30.2.1 и 30.2.2 подмножество S^k удовлетворяет всем локальным свойствам, сформулированным в теореме 7.2.1. Итак, мы получили полное описание класса $\{X\}_k$. Этот класс составлен только из таких компактов X , что для каждого из них существует M -процесс, обладающий следующим свойством: $X \cap \tilde{X}^3(M) \supset \supset A \cup S^k$, т. е. k -мерная часть X участвует в некотором M -процессе. Тем самым, пункт (1) теоремы 7.2.1 доказан.

Переходим к пункту (2). Начиная с этого пункта доказательство резко усложняется. Рассмотрим класс $\{X\}_k$, и пусть $d_{k-1} = \inf \text{vol}_{k-1}(Y \setminus A \setminus S^k)$, $Y \in \{X\}_k$, $S^k = S^k(Y)$. Существование однозначно определенного подмножества $S^k(Y) \subset Y$ доказано в пункте (1). Тогда существует последовательность X_n такая, что $X_n \in \{X\}_k$ и $\text{vol}_{k-1}(X_n \setminus S_n^k) = d_{k-1} + \varepsilon_n \rightarrow d_{k-1}$, где $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $S_n^k = S_n^k(X_n)$. Поскольку все M -процессы в классе $\mathcal{O}$ конечны, то для любого $\tilde{X}^3(M) \in \{X\}_k$ мы имеем $\text{vol}_{k-1}[\tilde{X}^3(M) \setminus S^k] = \lambda_{k-1}(M) < \infty$ (см. лемму 30.1.4, шаг 2); отсюда следует, что $d_{k-1} \leq \lambda_{k-1}(M) < < \infty$. Требуется доказать, что $\{X\}_{k-1} \neq \emptyset$. Конечно, мы располагаем мощным средством «разглаживания объемов» — M -процессом, однако применение его в данной ситуации невозможно, как это будет видно из дальнейшего. Мы применим его только для того, чтобы «разгладить объемы» vol_i при $i \leq k-1$. Построим по последовательности X_n функцию $\Psi_k|_{\{X_n\}}$. Можно положить $X_n = X_n^{(1)}$. В данном случае это построение снова неоднозначно, поскольку для получения сходимости можно выбирать различные подпоследовательности в последовательности $\{X_n\}$. Рассмотрим компакт $A \cup S^k$, где $S^k = \{P \in M \setminus A \mid \Psi_k|_{\{X_n\}}(P) > 0\}$. Компактность $A \cup S^k$ следует из соотношения (3.3.7) пункта 29.3. Пусть U_α^1 — сжимающаяся система открытых окрестностей таких, что $U_\alpha^1 \supset U_{\alpha+1}^1$ и $\bigcap_\alpha U_\alpha^1 = A \cup S^k$. Докажем, что для любого α существует номер $N(\alpha)$ такой, что компакты $A \cup S_n^k = A \cup S^k(X_n)$ (напомним, что $S^k(Y)$ определено для любого $Y \in \{X\}_k$) содержатся в окрестности U_α^1 при всех $n' > N(\alpha)$, где n' пробегает некоторую бесконечную подпоследовательность в $\{n\}$. Подчеркнем, что раньше, например, при построении M -процесса мы могли гарантировать аналогичное включение для k -мерных частей k -минимизирующей последовательности только после перестройки последовательности $X_n^{(1)}$ до последовательности $X_n^{(1)'}$ (лемма 29.3.4)

В данной ситуации мы не можем применить лемму 29.3.4, так как перестройки в размерности k могут разрушить фиксированную нами сходимость объемов к минимуму в размерности $k-1$. Однако, как мы сейчас докажем, необходимость в топологической перестройке компактов в размерности k в действительности отпадает ввиду имеющейся уже минимальности поверхностей в этой максимальной размерности.

Итак, допустим противное: пусть существует номер α такой, что $S_n^k \cap (M \setminus U_\alpha^1) \neq \emptyset$ для всех n , начиная с некоторого номера $n = n_0$. Тогда существует точка $P_0 \in M \setminus U_\alpha^1$, являющаяся предельной точкой для некоторой последовательности точек $P_n \in S_n^k \cap (M \setminus U_\alpha^1)$. Далее, существует число $R > 0$ такое, что $\bar{B}(P_0, R) \cap U_m^1 = \emptyset$ для всех номеров $m > m_0$, где $m_0 \geq \alpha + 1$, так как $\bigcap U_m^1 = A \cup S^k$, $U_{m_0}^1 \subset U_\alpha^1$. Поскольку $\bar{B}(P_0, R) \cap (A \cup S^k) = \emptyset$, то $\Psi_k|_{\{X_n\}}(P) = 0$ для всех точек $P \in \bar{B}(P_0, R)$. Отсюда, в силу (3.3.9) из пункта 29.3, мы имеем существование числа $R_1 > 0$, $R_1 < \rho(P_0)$ (см. лемму 29.3.3) такого, что $\psi_k^+(R_1, P_0) = 0$, где $\psi_k^+ = \psi_k^+|_{\{X_n\}}$, т. е., в силу определения функции ψ_k^+ , имеем

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sup_{|R_1 - r| < \delta, d(P_0, Q_i) < \delta} \tilde{\psi}_k(r', Q_i) \right],$$

где

$$\tilde{\psi}_k(r', Q_i) = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \text{vol}_k[B(Q_i, r') \cap X_{n_s}] = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \text{vol}_k[B(Q_i, r') \cap S_{n_s}^k].$$

Подчеркнем, что равенство

$$\text{vol}_s[B(Q_i, r') \cap X_{n_s}] = \text{vol}_k[B(Q_i, r') \cap S_{n_s}^k]$$

вытекает из того, что $X_{n_s} \in \{X\}_k$ (см. пункт (1)), т. е. $\text{vol}_k(X_{n_s} \setminus A) = \text{vol}_k(S_{n_s}^k)$. Итак, существуют последовательности Q_i и r_i такие, что $Q_i \rightarrow P_0$, $r_i \rightarrow R_1$ и $\text{vol}_k[B(Q_i, r_i) \cap S_{n_i}^k] \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Поскольку $r_i \rightarrow R_1 > 0$, то можно считать, что $Q_i \in S_{n_i}^k$ (в случае необходимости можно заменить Q_i на близкую точку $\tilde{Q}_i$ и уменьшить r_i).

Рассмотрим теперь фиксированный номер i и компакт $X_{n_i} \in \{X\}_k$. Как и при доказательстве пункта (1) настоящей теоремы, мы можем применить М-процесс к k -минимизирующей последовательности Y_β , где $Y_\beta \equiv X_{n_i}$ (здесь номер i фиксирован, а $\beta = 1, 2, 3, \dots$). В результате этого М-процесса (отметим, что для каждого номера i будет, конечно, свой М-процесс) мы получаем некоторый компакт $X'_{n_i} = \tilde{X}^3(M)$ такой, что $A \cup S_{n_i}^k \subset X_{n_i} \cap X'_{n_i}$ и $\Psi_k|_{\{Y_\beta = X_{n_i}\}}(P) \geq 1$ на множестве $S^k(X'_{n_i}) = S^k(X_{n_i}) = S_{n_i}^k$ (см. лемму 30.1.3). Обозначим для краткости функцию плотности

$\Psi_k | \{Y_\beta = X_{n_i}\}$ через $\Psi_k^{(i)}$. Так как $Q_i \in S^k(X_{n_i}) = S^k(X'_{n_i})$ (см. выше), то в силу леммы 30.1.3 имеем $1 \leq \Psi_k^{(i)}(Q_i) = \lim_{r \rightarrow 0} [h_k^{-1}(r) \cdot \psi_k^{+(i)}(r, Q_i)]$ (см. (3.3.6) в пункте 29.3), где $\psi_k^{+(i)} = \psi_k^+ |_{\{Y_\beta = X_{n_i}\}}$. Поскольку функция $h_k^{-1}(r) \psi_k^{+(i)}(r, Q_i)$ — неубывающая с ростом r (см. (3.3.6) в пункте 29.3) в пределах от 0 до $R^0(Q_i)$, то $1 \leq h_k^{-1}(r) \psi_k^{+(i)}(r, Q_i)$ для всех r , $0 \leq r < R^0(Q_i)$. В то же время $Q_i \rightarrow P_0$, а потому $R^0(Q_i) \rightarrow R^0(P_0)$, т. е. существует (для номеров $i \geq i_0$, где i_0 — некоторый, быть может, большой номер) число r_0 , $0 < r_0 < \min[R_1, R^0(P_0)]$, такое, что $0 < r_0 < R^0(Q_i)$ при всех $i \geq i_0$, и, что особенно важно, число r_0 не зависит от номера i . В дальнейшем мы снова считаем, что номер i фиксирован, но $i \geq i_0$. Отсюда мы получаем, что $1 \leq h_k^{-1}(r_0) \psi_k^{+(i)}(r_0, Q_i)$, т. е.

$$h_k(r_0) \leq \psi_k^{+(i)}(r_0, Q_i) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sup_{|r_0 - r'| < \delta, d(Q_i, Q_j) < \delta} \tilde{\psi}_k^{(i)}(r', Q_j) \right].$$

Это означает, что существует последовательность точек Q_j и последовательность радиусов r'_j таких, что $\lim_{j \rightarrow \infty} Q_j = Q_i$, $\lim_{j \rightarrow \infty} (r'_j) = r_0 > 0$ и $\tilde{\psi}_k^{(i)}(r'_j, Q_j) \geq h_k(r_0) - \gamma_j$, где $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = 0$. Напомним, что $Y_\beta = X_{n_i}$, $\beta = 1, 2, 3, \dots$, т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_k^{(i)}(r'_j, Q_j) &= \text{vol}_k[B(Q_j, r'_j) \cap X_{n_i}] = \\ &= \text{vol}_k[B(Q_j, r'_j) \cap S_{n_i}^k] \geq h_k(r_0) - \gamma_j. \end{aligned}$$

Здесь мы снова воспользовались тем, что $Y_\beta \in \{X\}_k$, а потому $\text{vol}_k[B(P, r) \cap Y_\beta] = \text{vol}_k[B(P, r) \cap S^k(Y_\beta)]$ (см. пункт (1)). Переходя к пределу по j , мы получаем ввиду локальной евклидовости почти всюду множества $S_{n_i}^k$ и в силу лемм 30.1.4, 30.2.1 и 30.2.2, что $\text{vol}_k[B(Q_i, r_0) \cap S_{n_i}^k] \geq h_k(r_0)$, а поскольку $r_0 < R_1$, то имеем

$$0 < h_k(r_0) \leq \text{vol}_k[B(Q_i, r_0) \cap S_{n_i}^k] \leq \text{vol}_k[B(Q_i, r_i) \cap S_{n_i}^k].$$

Мы напомним, что $i \geq i_0$ и так как $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = R_1$, $r_0 < R_1$, то можно считать, что $r_i \geq r_0$ при $i \geq i_0$. Однако выше, исходя из предположения, что $P_0 \in M \setminus U_\alpha^k$, мы получили, что $\text{vol}_k[B(Q_i, r_i) \cap S_{n_i}^k] \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает существование номера $N(\alpha)$ для любого α . Отметим, что геометрический смысл проведенных выше рассуждений заключается в том, что последовательность минимальных поверхностей $S_{n_i}^k$ не может сходиться к поверхности, из которой вырастали бы длинные и тонкие «усы», не влияющие в пределе на поведение функции плотности Ψ_k .

Итак, из последовательности X_n можно выбрать подпоследовательность X_α такую, что $S_\alpha^k = S^k(X_\alpha) \subset U_\alpha^k$ для любого номера

α , $\alpha \rightarrow \infty$. Обозначим эту подпоследовательность $\{\alpha\} \subset \{n\}$ снова через $\{n\}$ и отметим важное обстоятельство: поскольку исходная последовательность не подвергалась S -перестройкам в размерности k (в отличие от M -процесса), то сохраняется нетронутым основное соотношение $\text{vol}_{k-1}(X_n \setminus S_n^k) \rightarrow d_{k-1} < \infty$. Применим к последовательности X_n M -процесс такой, что на первом шаге этого процесса мы повторим построение функции $\Psi_k|_{\{X_n\}}$, тогда мы получим множество $A \cup S^k$, вокруг которого накапливаются S_n^k . На втором и на всех последующих шагах выполним M -процесс произвольным образом. В результате получим компакт $\tilde{X}^3(M) \in \mathcal{O}$ такой, что $A \cup S^k = \tilde{X}^k(M)$, $\text{vol}_k(\tilde{X}^3 \setminus A) = \text{vol}_k(\tilde{X}^k \setminus A) = \text{vol}_k(S^k) = d_k < \infty$. Далее, $\tilde{X}^3(M) \supset S^{k-1}(M)$ и $\text{vol}_{k-1}(\tilde{X}^3 \setminus \tilde{X}^k) = \text{vol}_{k-1}(\tilde{X}^{k-1} \setminus \tilde{X}^k) = \text{vol}_{k-1}(S^{k-1}) = \lambda_{k-1} < \infty$, где число λ_{k-1} определено M -процессом и можно считать, что λ_{k-1} построено по системе окрестностей U_n^1 . Из доказательства лемм 30.2.1, 30.2.2, шаг 2, немедленно следует, что подмножество $S^{k-1}(M) \subset \tilde{X}^3(M)$ удовлетворяет всем требованиям пункта (2) теоремы 7.2.1. Так как $\text{vol}_{k-1}(X_n \setminus S_n^k) \geq \geq \text{vol}_{k-1}(X_n \setminus U_n^1)$, то $\text{vol}_{k-1}(X_n \setminus S_n^k) \geq \omega_n^{k-1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}_{k-1}(X_n \setminus S_n^k) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^{k-1}$, т. е. $d_{k-1} \geq \lambda_{k-1}$. С другой стороны, поскольку $\tilde{X}^3 \in \{X\}_k$, то $\lambda_{k-1} = \text{vol}_{k-1}(\tilde{X}^3 \setminus \tilde{X}^k) \geq d_{k-1}$, т. е. $d_{k-1} = \lambda_{k-1}$. Итак, компакт $\tilde{X}^3(M) \in \{X\}_{k-1}$, т. е. мы доказали, что $\{X\}_{k-1} \neq \emptyset$. Пусть теперь $X \in \{X\}_{k-1}$ — произвольный компакт из этого класса. Как и при доказательстве первого пункта, выделим в X компакт $A \cup S^k$, определенный однозначно. Тогда $\text{vol}_{k-1}(X \setminus A \setminus S^k) = d_{k-1} < < \infty$ и можно рассмотреть последовательность компактов $X_n^{(2)} \equiv X$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и построить функцию плотности $\Psi_{k-1}|_{\{X_n^{(2)}\}}$ на $M \setminus A \setminus S^k$. Далее, рассмотрим $S^{k-1} \subset M \setminus A \setminus S^k$, $S^{k-1} = \{P \in \in M \setminus A \setminus S^k \mid \Psi_{k-1}(P) > 0\}$, и применим к последовательности $X_n^{(2)}$ M -процесс, что даст нам некоторый компакт $\tilde{X}^3(M)$ такой, что $A \cup S^k \cup S^{k-1} \subset X \cap \tilde{X}^3(M)$ и множества A , S^k , S^{k-1} входят в разложение компакта $\tilde{X}^3(M)$, определяемое M -процессом. Из доказательства леммы 30.1.4, шаг 2, следует, что $\text{vol}_{k-1}(S^{k-1}) = \lambda_{k-1} = = \lambda_{k-1}(M) < \infty$. Так как $\tilde{X}^3(M) \in \mathcal{O}$, то $\text{vol}_{k-1}(\tilde{X}^3 \setminus A \setminus S^k) = = \text{vol}_{k-1}(S^{k-1}) \leq d_{k-1}$, т. е. $\lambda_{k-1} \geq d_{k-1}$. С другой стороны, если U — открытая окрестность $A \cup S^k$, то $\text{vol}_{k-1}(\tilde{X}^3 \setminus U) \leq \leq \text{vol}_{k-1}(\tilde{X}^3 \setminus A \setminus S^k)$, т. е. $\omega_n^{k-1} \leq \text{vol}_{k-1}(\tilde{X}^3 \setminus A \setminus S^k) = \text{vol}_{k-1}(X \setminus \setminus A \setminus S^k) = d_{k-1}$. Отсюда $\lambda_{k-1} \leq d_{k-1}$, т. е. $d_{k-1} = \lambda_{k-1}$. Поскольку $S^{k-1} \subset \tilde{X}^3(M)$, то в силу лемм 30.2.1 и 30.2.2 получаем, что $S^{k-1} \subset X$ удовлетворяет всем требованиям пункта (2) теоремы 7.2.1. Пункт 2 доказан.

Продолжая теперь описанные выше рассуждения в меньшие размерности, мы и получаем доказательство теоремы 7.2.1.

31.2. Доказательство теоремы о совпадении наименьшего стратифицированного объема с наименьшим λ -вектором в вариационном классе. В действительности мы уже фактически доказали теорему 29.5.1 в процессе доказательства теоремы 7.2.1. В частности, мы доказали, что $d_s = \lambda_s$ при $3 \leq s \leq k$ и что каждый компакт $X \in \{X\}_s$ является результатом некоторого М-процесса. То обстоятельство, что вектор $(d_k, d_{k-1}, \dots, d_3)$ — наименьший в лексикографическом упорядочении, также следует из доказательства теоремы 7.2.1. Итак, теорема 29.5.1 доказана.

В теоремах 7.2.1 и 29.5.1 утверждается существование глобально минимальной во всех размерностях поверхности в каждом 2-устойчивом классе $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$. Однако относительными минимальными свойствами обладают также и все компакты $\tilde{X}^3(M)$, полученные при произвольном М-процессе. Более точно, $\tilde{X}^3(M) = A \cup S^k \cup \dots \cup S^3$, где $\text{vol}_s(S^s) = \lambda_s$ и $\lambda_s = \inf \text{vol}_s(X \setminus \tilde{X}^{s+1})$, $X \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{O}})$ и $X \supset \tilde{X}^{s+1}$. В самом деле, если бы существовал компакт X такой, что $X \supset \tilde{X}^{s+1}$ и $\text{vol}_s(X \setminus \tilde{X}^{s+1}) < \lambda_s - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то выполнялось бы неравенство $\text{vol}_s(X \setminus U) < \text{vol}_s(X \setminus \tilde{X}^{s+1}) < \lambda_s - \varepsilon$ для любой открытой окрестности $U = U(\tilde{X}^{s+1})$, т. е. $\omega_s^n \leq \lambda_s - \varepsilon$, $\lambda_s \leq \lambda_s - \varepsilon$, что невозможно. Итак, с геометрической точки зрения это означает, что пленка S^s является глобально минимальной поверхностью в абсолютном смысле, если рассматривать только такие компакты X , которые содержат $\tilde{X}^{s+1}$, т. е. при условии фиксации в многообразии M компакта-«контура» $\tilde{X}^{s+1}$.

§ 32. Фундаментальные (ко)циклы глобально минимальных поверхностей. Точная реализация и точная заклейка

32.1. Теорема о фундаментальных (ко)циклах. Пусть $H_*^{(*)}$ — обычная теория (ко)гомологий, непрерывная и относительно инвариантная на категории компактных пар (построение таких теорий см. выше). Рассмотрим произвольный вариационный класс $\mathcal{O} = H(A, L, L')$, где $3 \leq k \leq n-1$, $n = \dim M$, $L \subset H_{k-1}^{(k-1)}(A)$, $L' \subset H_k^{(k)}(M)$. Как было доказано выше, класс $\mathcal{O}$ является $(k-1)$ -устойчивым. Ясно также, что все М-процессы сводятся здесь только к осуществлению первого шага в размерности k , т. е. $A \cup S^k = \tilde{X}^3$, $S^\alpha = \emptyset$ при $3 \leq \alpha \leq k-1$. Кроме того, так как $d_k < \infty$, то любой М-процесс в классе $\mathcal{O}$ конечен. Пусть $X_0 \in \mathcal{O} = H(A, L, L')$ — глобально минимальная поверхность, тогда $\dim X_0 = k$.

Теорема 32.1.1. Пусть M — компактное гладкое риманово многообразие, $A \subset M$ — фиксированный компакт-«контур», G — группа коэффициентов теории гомологий H_* . Пусть G — векторное пространство над некоторым полем F и $\dim_F G = 1$.

Предположим, что в компакте-«контуре» A нет k -мерных циклов, т. е. что $H_k(A, G) = 0$; например, пусть $\dim A = k - 1$, где $3 \leq k \leq n - 1$. Тогда мы утверждаем, что:

(1) если $X_0 \in H_*(A, L, 0)$, $\dim X_0 = k$, — глобально минимальная поверхность, где $L \subset H_{k-1}(A, G)$ и $L \neq 0$, то $H_k(X_0, G) = 0$;

(2) если $X_0 \in H_*(A, L, L')$, $\dim X_0 = k$, — глобально минимальная поверхность, где $L' \subset H_k(M, G)$, $L' \neq 0$, то гомоморфизм $i_*: H_k(X_0, G) \rightarrow H_k(M, G)$, где $i: X_0 \rightarrow M$ — вложение, является мономорфизмом.

Замечание. Эта теорема имеет прозрачный геометрический смысл. В случае (1) мы утверждаем, что если контур-граница A не содержит k -мерных циклов, то минимальная пленка заклеивающего типа (заклеивающая A) не содержит k -мерных циклов, т. е. устроена наподобие «многообразия с краем A ». В случае (2) оказывается, что минимальность пленки реализующего типа влечет за собой минимальность ее k -мерных гомологий: ни один k -мерный цикл не аннулируется при вложении $X \rightarrow M$, т. е. каждый ее цикл участвует в минимизации k -мерного объема. Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 32.1.1. Пусть X_0 — метрический компакт размерности k , $X_0 \supset R$, где R — некоторый подкомпакт. Пусть группа G коэффициентов теории гомологий является векторным пространством над некоторым полем F и $\dim_F G = 1$, $H_k(R, G) = 0$, и пусть $X_0 \setminus R$ — открытое топологическое k -мерное многообразие. Пусть $l' \in H_k(X_0, G)$, $l' \neq 0$. Тогда существует открытый диск $D = D^k(l') \subset X_0 \setminus R$ такой, что если $i_*: H_k(X_0 \setminus R) \rightarrow H_k(X_0)$ — гомоморфизм, индуцированный вложением, то выполняются утверждения: (1) i_* — мономорфизм; (2) $\text{Codim}(\text{Im } i_*) = 1$ в группе $H_k(X_0, G)$; (3) $l' \notin \text{Im } i_*$.

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 & H_{k-1}(X_0 \setminus D) & & & \\
 & \uparrow & & & \\
 & H_k(S^k) & & & \\
 & \uparrow i_* & & & \\
 0 \rightarrow & H_k(X_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_k(X_0, R) & \xrightarrow{l_*} H_k(X_0/R) \\
 \uparrow & \uparrow i_* & & \uparrow \alpha_* & \uparrow \omega_* \\
 0 \rightarrow & H_k(X_0 \setminus D) & \xrightarrow{f_*} & H_k(X_0 \setminus D, R) & \xrightarrow{f'_*} H_k((X_0/R) \setminus f(D)) \\
 & \uparrow & & & \\
 & 0 & & &
 \end{array}$$

где $D = D^k$ — некоторый открытый диск в $X_0 \setminus R$, $f: X_0 \rightarrow X_0/R$ — проекция, $x = f(R)$, $S^k = X_0/(X_0 \setminus D)$ (напомним, что $H_*(A, B) = H_*(A/B)$), f_* и f'_* — изоморфизмы. Положим $l = f_* \varphi_*(l')$, тогда $l \neq 0$. Пусть $T = X_0/R$. Допустим, что нам удалось найти диск $f(D) \subset T \setminus x$, что $l \notin \text{Im } \omega_*$. Тогда $l' \notin \text{Im } i_*$. Итак, мы свели задачу к изучению компакта T , который является топологическим мно-

гообразиям всюду, кроме одной точки x . Введем на T какую-либо метрику d . Группа $H_k(T)$ является обратным пределом спектра групп $H_k(T_\alpha)$, где $\alpha \in \text{Cov}^i T$, а T_α — нерв покрытия α . Так как $k = \dim T$, то в множестве $\text{Cov}^i T$ можно выбрать конечное подмножество $\overline{\text{Cov}^i T}$, состоящее из конечных покрытий кратности, не превосходящей k , диаметры которых стремятся к нулю. Это означает, что нервы T_α , $\alpha \in \overline{\text{Cov}^i T}$, являются конечными симплициальными комплексами, $\dim T_\alpha \leq k$. Так как $l \neq 0$, то существует элемент $\alpha_0 \in \overline{\text{Cov}^i T}$ такой, что представитель l — элемент $l_{\alpha_0} \in H_k(T_{\alpha_0})$ — отличен от нуля. Пусть $U \in \alpha_0$ является элементом покрытия α_0 , где $x \in U$ и $T \setminus U \neq \emptyset$ (можно считать, что покрытие α_0 взято уже достаточно мелким). Пусть $u \in T_{\alpha_0}$ есть вершина, соответствующая $U \in \alpha_0$. Рассмотрим открытый шар $B(x, r)$ такой, что $\overline{B(x, r)} \subset U$, и пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $\overline{B(x, r + \varepsilon)} \subset U$. Построим конечное покрытие κ компакта $T \setminus B(x, r)$ открытыми множествами $f(D)$, гомеоморфными диску $D = D^k$. Пусть $\eta > 0$ — число Лебега покрытия κ , $\xi = \min(\varepsilon, \eta)$, $\xi > 0$. Впишем в α_0 покрытие α_1 так, чтобы $\alpha_1 \in \overline{\text{Cov}^i T}$ и $\text{diam}(\alpha) < \xi$. Тогда существует гомоморфизм $\pi_{\alpha_0}^{\alpha_1}: H_k(T_{\alpha_1}) \rightarrow H_k(T_{\alpha_0})$, причем существует $l_{\alpha_1} \in H_k(T_{\alpha_1})$, $l_{\alpha_1} \neq 0$, такой, что $\pi_{\alpha_0}^{\alpha_1}(l_{\alpha_1}) = l_{\alpha_0}$. Пусть $\text{Car } \hat{l}_{\alpha_1}$ — носитель элемента l_{α_1} в нерве T_{α_1} . Тогда, так как $\dim T_{\alpha_1} = k$, отношение гомологичности в k -мерных цепях неподвижно, а потому существует однозначно определенный набор симплексов Δ^k в T_{α_1} , на которые и оседает цепь $\hat{l}_{\alpha_1}$.

Для вершин s из $\text{Car } \hat{l}_{\alpha_1}$ возможны два варианта расположения в T : 1) $S \cap B(x, r) \neq \emptyset$ для любой вершины $s \in \text{Car } \hat{l}_{\alpha_1}$; 2) существует вершина $s_0 \in \text{Car } \hat{l}_{\alpha_1}$ такая, что $S_0 \subset T \setminus B(x, r)$, здесь $S = S(s)$. Разберем случай 1). Так как $S \cap B(x, r) \neq \emptyset$, то $S \subset B(x, r + \varepsilon)$, поскольку $\text{diam}(\alpha_1) < \xi \leq \varepsilon$, а тогда и по-прежнему $S \subset U$. Это означает, что все вершины $s \in \text{Car } \hat{l}_{\alpha_1}$ содержатся в U . Отобразим T_{α_1} в T_{α_0} следующим образом: все вершины $s \in \text{Car } \hat{l}_{\alpha_1}$ отобразим в $u \in T_{\alpha_0}$, а остальные вершины $s' \in \text{Car } \hat{l}_{\alpha_1}$ отобразим произвольно по включению. Так как гомоморфизм $\varphi: H_k(T_{\alpha_1}) \rightarrow H_k(T_{\alpha_0})$ не зависит от выбора симплициального отображения по включению $T_{\alpha_1} \rightarrow T_{\alpha_0}$, то $\varphi(l_{\alpha_1}) = l_{\alpha_0}$, $\varphi = \pi_{\alpha_0}^{\alpha_1}$. С другой стороны, $\varphi(l_{\alpha_1}) = 0$, т. е. $l_{\alpha_0} = 0$, что противоречит выбору этого элемента.

Итак, в действительности реализуется случай (2). Так как $S_0 \subset T \setminus B(x, r)$ и $\text{diam } S_0 \leq \text{diam}(\alpha_1) < \xi \leq \eta$, то S_0 целиком содержится в некотором открытом диске $f(D^k)$ покрытия κ (см. выше). Пусть $\omega: T \setminus f(D^k) \rightarrow T$ есть вложение. Построим отображение спектров $H_k(\tilde{T}_\alpha) \rightarrow H_k(T_{\alpha'})$, где $\tilde{T} = T \setminus f(D^k)$, $\alpha = \omega^{-1}(\alpha')$, $\omega^{-1}: \overline{\text{Cov}^i T} \rightarrow \overline{\text{Cov}^i \tilde{T}}$ сопоставляет каждому α его прообраз на $\tilde{T}$ при вложении ω . Рассмотрим вложение $\omega_{\alpha_1}^{\omega^{-1}(\alpha_1)}: \tilde{T}_{\omega^{-1}(\alpha_1)} \rightarrow T_{\alpha_1}$; тогда звезда

$\text{St}(s_0) \subset T_{\alpha_1}$ не принадлежит образу $\tilde{T}_{\omega^{-1}(\alpha_1)}$, т. е. $l_{\alpha_1} \notin \text{Im } H_k(\tilde{T}_{\omega^{-1}(\alpha_1)})$, откуда $l \notin \text{Im } \omega_*$.

Итак, $l' \in \text{Im } i_*$. Из диаграммы следует, что $\text{Im } j_* = 0$, а так как $\dim G = 1$, то $\text{Im } j_* = G$, т. е. $H_k(X_0) = G \oplus H_k(X_0 \setminus D)$, что и требовалось. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 32.1.1. Сначала мы рассмотрим случай (1). Положим $R = A \cup Z$, где $Z = Z_k$ есть множество сингулярных точек в S^k . Тогда в силу теоремы 7.2.1 имеем $\text{vol}_k(Z) = 0$. Так как по предположению $H_k(A) = 0$, то ясно, что $H_k(R) = 0$ (это следует, например, из леммы 19.A в [35] и ее следствий). Пусть $X_0 \in H_*(A, L, 0)$, $L \neq 0$, $L \subset H_{k-1}(A)$, и предположим, что существует $l' \in H_k(X_0)$, $l' \neq 0$. В силу леммы 32.1.1 существует диск $D = D^k(l')$ такой, что $l' \notin \text{Im } i_*$, где $i: X_0 \setminus D \rightarrow X_0$ — вложение. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & H_k(X_0 \setminus D) & \xrightarrow{i_*} & H_k(X_0) & \xrightarrow{j_*} & G & \xrightarrow{\varphi_*} & H_{k-1}(X_0 \setminus D) & \xrightarrow{\psi_*} & H_{k-1}(X_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & \nwarrow \alpha_* & & \nearrow \beta_* & & \\
 & & & & & & & & H_{k-1}(A) & & &
 \end{array}$$

Ясно, что $\text{Im } j_* \neq 0$, и так как $\dim G = 1$, то $\text{Im } j_* = G$, т. е. φ_* — мономорфизм. Так как $\text{vol}_k(X_0) > \text{vol}_k(X_0 \setminus D)$, то $X_0 \setminus D \in \in H_*(A, L, 0)$, т. е. существует $l \in H_{k-1}(A)$, $l \neq 0$, такой, что $\alpha_*(l) \neq 0$, но так как $\beta_*(l) = 0$, то $\psi_* \alpha_*(l) = 0$, что противоречит мономорфности ψ_* . Случай (1) доказан.

Рассмотрим случай (2). Пусть $X_0 \in H_*(A, L, L')$, где $L \subset \subset H_{k-1}(A)$, $L' \neq 0$, и предположим, что существует $l' \in H_k(X_0)$, $l' \neq 0$, такой, что $i_*(l') = 0$, где $i_*: H_k(X_0) \rightarrow H_k(M)$ индуцирован вложением. В силу леммы 32.1.1 существует диск $D = D^k(l') \subset \subset X_0 \setminus (A \cup Z_k)$ такой, что $l' \notin \text{Im } j_*$ и $\text{Codim}(\text{Im } j_*) = 1$ в $H_k(X_0)$, $j: X_0 \setminus D \rightarrow X_0$ — вложение. Тогда существует разложение в прямую сумму векторных подпространств $H_k(X_0) = G \oplus \text{Im } j_*$, где одномерное подпространство G натянуто на вектор l' . Пусть α — произвольный элемент из L' , $\alpha \neq 0$. Тогда $\alpha = i_*(\varphi)$, где $\varphi \in H_k(X_0)$, $\varphi = \lambda l' + \varphi'$, $\varphi' \neq 0$ (иначе $\alpha = \lambda i_*(l') = 0$) и $\varphi' \in \text{Im } j_*$. Отсюда получаем, что $\alpha = i_*(\varphi) = i_*(\varphi') = (ij)_*(\varphi')$, $\varphi'' \in H_k(X_0 \setminus D)$, т. е. $L' \subset \text{Im } (ij)_*$ и $X_0 \setminus D \in H_*(A, 0, L')$. Докажем, что, более того, $X_0 \setminus D \in H_*(A, L, L')$. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & H_k(X_0 \setminus D) & \xrightarrow{j_*} & H_k(X_0) & \xrightarrow{\tau_*} & G & \xrightarrow{\xi_*} & H_{k-1}(X_0 \setminus D) & \xrightarrow{\rho_*} & H_{k-1}(X_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow \varphi_* & & \searrow i_* & & & & \nwarrow \phi_* & & \nearrow \omega_* & & \\
 & & & & & & & & H_{k-1}(A) & & &
 \end{array}$$

Здесь $L' \subset \text{Im } \varphi_*$. Как и при доказательстве случая 1), получаем, что ρ_* — мономорфизм, а тогда $\varphi_*(L) = 0$, т. е. $X_0 \setminus D \in H_*(A, L, L')$, что невозможно ввиду неравенства $\text{vol}_k(X_0 \setminus D) < \text{vol}_k(X_0)$. Теорема доказана.

В формулировке теоремы 32.1.1, очевидно, нельзя отказаться от предположения $H_k(A) = 0$, так как в противном случае на компакте-границе A могли бы оседать нетривиальные циклы. Нельзя отказаться и от предположения, что группа коэффициентов теории гомологий является одномерным векторным пространством над некоторым полем. В самом деле, положим, например, $G = S^1 = \mathbb{R}^1 \pmod{1}$ (окружность) и докажем существование минимальной поверхности $X_0 \in H_*(A, L, 0)$, обладающей не только нетривиальной группой $H_k(X_0, S^1)$, но и реализующей нетривиальный цикл в многообразии M . Рассмотрим $M = S^1 \times \mathbb{R}P^{2s}$, где $\mathbb{R}P^{2s}$ — вещественное проективное пространство, и положим $A = \mathbb{R}P^{s-1} \subset \mathbb{R}P^{2s} = X_0$. Ясно, что $X_0 \in H_*(A, S^1, 0)$ и X_0 является глобально минимальной поверхностью в многообразии M , однако поверхностью X_0 реализует подгруппу $L' \neq 0$, $L' = \mathbb{Z}_2 \subset H_{2s}(M, S^1)$.

32.2. Точная минимальная реализация и точная минимальная заклепка. С точки зрения минимальных реализаций представляет интерес следующий вопрос: в каких случаях можно реализовать фиксированную подгруппу с помощью глобально минимальной поверхности, группа гомологий которой изоморфна реализуемой подгруппе?

Другими словами, в каких случаях минимальная поверхность реализует больше циклов, чем их содержится в выбранной ранее подгруппе, а в каких случаях поверхность реализует ровно столько циклов, сколько было выбрано заранее?

Пусть $\mathcal{O}_* = H_*(\Phi, 0, L')$, $L' \neq 0$, $L' \in H_k(M)$, положим $\text{vol}(L') = d_k(\Phi, 0, L')$, и пусть $L'_1 \subset L'_2$, $L'_2/L'_1 \neq 0$. Верно ли, что $\text{vol}_k(L'_1) < \text{vol}_k(L'_2)$, т. е. что с уменьшением количества циклов в подгруппе L' строго уменьшается и объем подгруппы, т. е. число $\text{vol}_k(L')$? Элементарные примеры показывают, что в общем случае это утверждение неверно, т. е. бывают случаи, когда $\text{vol}_k(L'_1) = \text{vol}_k(L'_2)$. Однако легко доказывается следующее утверждение.

Предложение 32.2.1. Пусть M — компактное гладкое риманово многообразие, G — одномерное векторное пространство над некоторым полем F . Тогда любая подгруппа $L' \neq 0$, $L' \subset H_k(M, G)$, содержит такую подгруппу $\tilde{L}'$, что $\dim L' - \dim \tilde{L}' = 1$ и $\text{vol}_k(\tilde{L}') < \text{vol}_k(L')$. Более того, если $\mathcal{O}_* = H_*(A, L, L')$, где $L' \neq 0$, $H_k(A, G) = 0$, $\dim_F G = 1$, то всегда существует подгруппа $\tilde{L}' \subset L'$, $\dim L' - \dim \tilde{L}' = 1$, такая, что $d_k(A, L, L') > d_k(A, L, \tilde{L}')$.

Доказательство предложения 32.2.1 аналогично доказательству теоремы 32.1.1, поэтому мы не будем останавливаться на повторении этих рассуждений. Из предложения 32.2.1 вытекает след-

ствии: пусть выполнены все предположения предложения 32.2.1; пусть $L' \subset H_k(M, G)$ — произвольная подгруппа. Тогда существует убывающий ряд подгрупп $L' = L'_0 \supset L'_1 \supset \dots \supset L'_N$ такой, что $\dim L'_p + \dim L'_{p+1} = 1$ при $0 \leq p \leq N-1$, $\dim L'_N = 1$ и $\text{vol}_k(L'_p) > \text{vol}_k(L'_{p+1})$.

Определение 32.2.1. Будем говорить, что подгруппа $L' \subset H_k(M)$ допускает точную минимальную реализацию, если существует минимальная поверхность $X_0 \in H_*(\Phi, 0, L')$ такая, что вложение $i: X_0 \rightarrow M$ индуцирует изоморфизм $i_*: H_k(X_0) \simeq L'$.

Простые примеры показывают, что существуют такие подгруппы $L' \in H_k(M)$, которые не допускают (в данной римановой метрике) точную минимальную реализацию. Более того, такие подгруппы составляют «большинство» среди всех возможных подгрупп в $H_k(M)$. В то же время в каждом конкретном примере всегда удастся не только указать подгруппы L' , допускающие точную минимальную реализацию, но и составить из них аддитивный базис в группе $H_k(M)$. Оказывается, это является отражением некоторого общего факта, который мы сейчас докажем. В дальнейшем через $\{a_1, \dots, a_m\}$ будем обозначать подгруппу, порожденную элементами $a_1, \dots, a_m \in H_k(M)$.

Предложение 32.2.2. Пусть M — компактное гладкое замкнутое риманово многообразие, пусть группа коэффициентов теории гомологий является группой $\mathbb{Z}_p$, где $p \neq 0$, p — простое число, $r = \dim H_k(M, \mathbb{Z}_p)$. Тогда, если $r > 1$, то в группе $H_k(M, \mathbb{Z}_p)$ существует базис $e_1, \dots, e_r$ такой, что: (1) $\text{vol}_k\{e_i\} < \text{vol}_k(H_k(M))$ при любом i и $\text{vol}_k\{e_i\} < \text{vol}_k\{e_1, \dots, e_r\}$ при $i > 1$; (2) все одномерные подгруппы $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq r$, допускают точную минимальную реализацию; (3) если элемент $\alpha \in H_k(M, \mathbb{Z}_p)$ имеет вид $\alpha =$

$$= \sum_{p=1}^s a_{i_p} e_{i_p}, \text{ где все } a_{i_p} \text{ отличны от нуля, то}$$

$$\text{vol}_k\{\alpha\} \geq \max_{(p)} \text{vol}_k\{e_{i_p}\}, \quad 1 \leq p \leq s.$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 32.2.1. Как и в случае предложения 32.2.1, справедливо более общее утверждение: пусть M — компактное замкнутое риманово многообразие, $G = \mathbb{Z}_p$, p — простое, $A \subset M$ — фиксированный компакт-граница такой, что $H_k(A, G) = 0$, и пусть $H_*(A, L, L') \neq \Phi$, где $L' \neq 0$, $L \subset H_{k-1}(A, G)$, $r = \dim_{\mathbb{Z}_p} L'$. Тогда, если $r > 1$, то в подгруппе L' можно выбрать базис $e_1, \dots, e_r$ такой, что: 1) $d_k(A, L, \{e_j\}) < d_k(A, L, L')$, $1 \leq j \leq r$; $d_k(A, L, \{e_j\}) < d_k(A, L, \{e_1, \dots, e_r\}) \leq d_k(A, L, L')$ при $j > 1$; 2) существуют минимальные поверхности $X_{0j} \in H_*(A, L, \{e_j\})$ такие, что $(\text{Im } H_k(X_{0j})) \cap L' = \{e_j\}$ при вложении поверхностей X_{0j}

в M ; 3) если $\alpha \in L'$ и $\alpha = \sum_{p=1}^s a_{i_p} e_{i_p}$, где $a_{i_p} \neq 0$, $1 \leq p \leq s$, то $d_k(A, L, \{\alpha\}) \geq \max_{1 \leq p \leq s} d_k(A, L, \{e_{i_p}\})$.

Определение 32.2.2. Пусть $A \subset M$ — фиксированный компакт-граница (контур). Мы скажем, что подгруппа $L \neq 0$, $L \subset H_{k-1}(A)$, допускает точную минимальную заклею, если существует минимальная поверхность $X_0 \in H_*(A, L, 0)$ такая, что $\Delta_k(X_0, A) = L$.

Как и в случае точной реализации, точная минимальная заклея возможна для небольшого класса подгрупп, однако, оказывается, из таких подгрупп можно выбрать аддитивный базис в группе гомологий. Сбозначим через $\text{vol}_k(L)$ число $d_k(A, L, 0)$ и сформулируем следующее общее утверждение.

Предложение 32.2.3. Пусть M — компактное гладкое замкнутое риманово многообразие, $G = \mathbb{Z}_p$, $p \neq 0$ и p — простое число, $A \subset M$ — фиксированный компакт-граница (контур) такой, что $H_k(A, G) = 0$, и пусть $L \neq 0$, $L \subset H_{k-1}(A, G)$, $1 < \dim L = r < \infty$, $H_*(A, L, 0) \neq \emptyset$. Тогда в подгруппе L можно выбрать базис $e_1, \dots, e_r$ такой, что: (1) $\text{vol}_k\{e_j\} < \text{vol}_k(L)$ при каждом j и $\text{vol}_k\{e_j\} < \text{vol}_k\{e_1, \dots, e_r\} \leq \text{vol}_k(L)$, $1 \leq j \leq r$; (2) существуют минимальные поверхности $X_{0j} \in H_*(A, \{e_j\}, 0)$ такие, что $\Delta_k(X_{0j}, A) \cap L = \{e_j\}$, $1 \leq j \leq r$; (3) если $\alpha \in L$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha = \sum_{p=1}^s a_{i_p} e_{i_p}$, $a_{i_p} \neq 0$, $1 \leq p \leq s$, то $\text{vol}_k\{\alpha\} \geq \max_{1 \leq p \leq s} \text{vol}_k\{e_{i_p}\}$.

Если положить $L = H_{k-1}(A)$, то тогда базис $e_1, \dots, e_r$ допускает точную минимальную заклею.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 32.2.2. Мы не будем на этом останавливаться.

Тем самым, любой элемент e_j в группе гомологий $H_{k-1}(A)$ может быть заклеен минимальной пленкой, аннулирующей только этот элемент (и ему кратные).

32.3. Минимальные поверхности с границей, гомеоморфной сфере. В двумерной задаче Плато граница минимальной поверхности всегда распадается (в том случае, когда граница — гладкое одномерное многообразие) в объединение окружностей. Рассмотрим многомерные минимальные поверхности, границей которых также является сфера, гладко вложенная в объемлющее риманово многообразие. Такое специальное устройство границы минимальной пленки позволяет получить интересные утверждения чисто метрического характера, связывающие топологию минимальной поверхности с ее объемом. Отметим, что с парой (M, A) естественно связаны следующие два числа: $\tilde{d}$ и d' , характеризующие геометрическое расположение сферы A в многообразии M , а именно: $d' = \inf \text{vol}_k(X \setminus A)$, где $A \subset X \subset M$, и $\text{Im } H_k(X, G) \neq 0$ в $H_k(M, G)$ при вложении $X \rightarrow M$. Здесь G — некоторая

фиксированная группа коэффициентов теории гомологий, а $\tilde{d} = \inf \text{vol}_k(X \setminus A)$, где $A \subset X \subset M$, и $\Delta_k(X, A) \neq 0$ в группе $H_{k-1}(A, G)$. Другими словами, d' является k -мерным объемом наименьшего k -мерного цикла в $H_k(M)$, и это число вообще от границы сферы A не зависит, а число $\tilde{d}$ является k -мерным объемом наименьшей k -мерной пленки, которую можно натянуть в многообразии M на какой-либо нетривиальный цикл в $H_{k-1}(A)$.

Рассмотрим произвольный вариационный класс $H_*(A, L, L')$, и пусть, как и выше, $d = \inf \text{vol}_k(X \setminus A)$, $X \in H_*(A, L, L')$; тогда $d \geq d'$, $d \geq \tilde{d}$. Произвольная минимальная поверхность X_0 из этого вариационного класса может иметь достаточно сложную топологическую структуру, поэтому, в частности, большой интерес представляет вопрос: каков тот наибольший объем, который может иметь одна связная компонента Π_i , целиком состоящая только из регулярных точек поверхности X_0 ? Другими словами, каков наибольший объем «несингулярной части» минимальной поверхности? Отметим, что из теоремы 7.2.1 легко следует, что $\tilde{d} > 0$ и $d' > 0$.

Теорема 32.3.1. Пусть M — компактное замкнутое риманово многообразие, $A = S^{k-1}$, $G = S^1 = \mathbb{R}^1 \pmod{1}$ — группа коэффициентов теории гомологий H_* . Предположим, что $\tilde{d} < \infty$ (отметим, что неравенство $d' < \infty$ выполнено всегда), и положим $\Delta = \max(d - \tilde{d}, d - d')$. Пусть $X_0 \in H_*(A, L, L')$ — минимальная поверхность, где $L \neq 0$, $L' \equiv S^1$, и пусть $Z \subset X_0$ — множество особых точек минимальной поверхности X_0 . Пусть $X_0 \setminus (A \cup Z) = \bigcup \Pi_i$ является разложением регулярной части минимальной поверхности X_0 на связные открытые в X_0 гладкие минимальные подмногообразия $\Pi_i \subset M$ (число таких компонент может равняться бесконечности). Тогда выполнены неравенства $0 < \sup \text{vol}_k(\Pi_i) \leq \Delta$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что $\sup \text{vol}_k(\Pi_i) \leq \Delta$, так как неравенство $\sup \text{vol}_k(\Pi_i) > 0$ является непосредственным следствием из теоремы 7.2.1. Итак, допустим противное: пусть существует номер i_0 такой, что выполнено неравенство $\text{vol}_k(\Pi_{i_0}) > \Delta$. Рассмотрим открытый гладкий диск $D = D^k \subset \Pi_{i_0}$ такой, что $\text{vol}_k(\Pi_{i_0} \setminus D) = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — фиксированное (сколь угодно малое) число, при этом $D = D(\varepsilon)$. Тогда $\text{vol}_k(\Pi_{i_0}) = \varepsilon + \text{vol}_k(D)$. Существование такого диска следует из теоремы 7.2.1. Границу диска D обозначим через $S = S^{k-1}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \text{vol}_k(X_0 \setminus (A \cup D)) &= \text{vol}_k(X_0 \setminus A) - \text{vol}_k(D) = \\ &= \text{vol}_k(X_0 \setminus A) - \text{vol}_k(\Pi_{i_0}) + \varepsilon = \\ &= \text{vol}_k(X_0 \setminus (A \cup \Pi_{i_0})) + \varepsilon < d - \Delta, \end{aligned}$$

если число v достаточно мало. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}_k(X_0 \setminus (A \cup D)) &< d - (d - d') = d', \\ \operatorname{vol}_k(X_0 \setminus (A \cup \tilde{D})) &< d - (d - \tilde{d}) = \tilde{d},\end{aligned}$$

т. е. $\operatorname{Im} H_k(X_0 \setminus D) = 0$ в группе $H_k(M)$ и $\Delta(X_0 \setminus D, A) = 0$ в группе $H_{k-1}(A)$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_k(M) & \xrightarrow{p_*} & H_k(M, S) & \xrightarrow{\tau_*} & H_{k-1}(S) \\ & & \downarrow \alpha_1^{-1} & & \downarrow \psi_* & & \downarrow \varphi_* \\ H_k(X_0 \setminus D) & \longrightarrow & H_k(M) & \xrightarrow{i_*} & H_k(M, X_0 \setminus D) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(X_0 \setminus D) \\ & & \downarrow \alpha_2^{-1} & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_k(X_0) & \xrightarrow{i_*} & H_k(M) & \longrightarrow & H_k(M, X_0) \longrightarrow H_{k-1}(X_0) \end{array}$$

Здесь α_1, α_2 — изоморфизмы, i_* — мономорфизм (см. выше), $H_k(M, S) = H_k(M) \oplus H_k(\bar{D}, S)$ (так как сфера S стягивается по диску в точку) и, следовательно, гомоморфизм ψ_* мономорфно отображает подгруппу $H_k(\bar{D}, S) \subset H_k(M, S)$ в $H_k(M, X_0 \setminus D)$. Докажем, что $i_* \alpha_2 j_* H_k(X_0) \subset \psi_* H_k(\bar{D}, S)$ (геометрически этот факт очевиден). Положим $\xi_* = p_* \alpha_1 \alpha_2 j_*$, тогда $\psi_* \xi_* = i_* \alpha_2 j_*$. Пусть $x \in H_k(X_0)$, тогда $\xi_*(x) = y_1 + y_2$, $y_1 \in p_* H_k(M)$, $y_2 \in H_k(D, S)$, $\psi_* \xi_*(x) = \psi_*(y_1) + \psi_*(y_2)$. Гомоморфизм ξ_* допускает разложение:

$$\xi_* = \chi_* \rho_*: H_k(X_0) \rightarrow H_k(X_0, S) \rightarrow H_k(M, S),$$

где $H_k(X_0, S) \approx H_k(X_0 \setminus D, S) \oplus H_k(\bar{D}, S)$, т. е. $\rho_*(x) = z_1 + z_2$ и $\psi_* \xi_*(x) = \psi_* \chi_*(z_1) + \psi_* \chi_*(z_2)$; ясно, что $\psi_* \chi_*(z_1) = 0$, т. е. $\psi_* \xi_*(x) = \psi_* \chi_*(z_2) \subset \psi_* H_k(\bar{D}, S)$, что и требовалось. Так как ψ_* — мономорфизм на $H_k(\bar{D}, S)$ (ибо $S^1 \subset L' \subset j_* H_k(X_0)$ и i_* — мономорфизм), то $\psi_* H_k(\bar{D}, S) \cong S^1$, а так как $H_k(\bar{D}, S) = S^1$, то $\psi_* H_k(\bar{D}, S) = S^1 \subset \operatorname{Im} i_*$ и $\partial \psi_* H_k(\bar{D}, S) = 0$.

Поскольку гомоморфизм $H_{k-1}(A) \rightarrow H_{k-1}(X_0 \setminus D)$ не имеет ядра и так как $\dim X_0 = k$, то в силу теоремы Хопфа (напомним, что $S^1 = G$) сфера A является ретрактом компакта $X_0 \setminus D$, т. е. существует непрерывное отображение $g: X_0 \setminus D \rightarrow A$, тождественное на A . Рассмотрим $t = g|_S: S = \partial D \rightarrow A$. Ясно, что степень отображения t отлична от нуля, так как в противном случае отображение t можно было бы продолжить до непрерывного отображения $t': \bar{D} \rightarrow A$, что породило бы новое отображение $t'': X_0 \rightarrow A$, тождественное на сфере A , а это невозможно ввиду того, что по условию теоремы $L \neq 0$. Итак, поскольку $m = \deg(t) \neq 0$, то гомоморфизм $t_*: H_{k-1}(S) \rightarrow H_{k-1}(A)$ является

умножением на m . Из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_{k-1}(S) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_{k-1}(X_0 \setminus D) \\ & \searrow \tau_* \quad \swarrow g_* & \\ & H_{k-1}(A) & \end{array}$$

следует, что $\varphi_* \neq 0$. Возвращаясь к исходной диаграмме, мы видим, что гомоморфизм $\varphi_* \tau_*$ на подгруппе $H_k(\bar{D}, S) \subset H_k(M, S)$ нетривиален, а тогда гомоморфизм $\partial \varphi_*$, равный $\varphi_* \tau_*$, также не может быть тривиален на подгруппе $H_k(\bar{D}, S)$, что противоречит установленному выше соотношению $\partial \varphi_* H_k(\bar{D}, S) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Эта теорема может быть, конечно, сформулирована для случая теории коомологий с целочисленными коэффициентами (ввиду наличия двойственности). В формулировке теоремы нельзя отказаться ни от одного из условий: $L \neq 0$, $L' \cong S^1$. Далее, если A не является сферой S^{k-1} , то утверждение теоремы, т. е. неравенство $\text{vol}_k(\Pi_i) \leq \Delta$, также, вообще говоря, разрушается. Действительно, рассмотрим многообразие $M = S^1 \times \mathbb{R}P^{2s}$. Пусть $A = \mathbb{R}P^{2s-1} \subset \mathbb{R}P^{2s} = X_0$, $H_{2s}(M, S^1) = H_{2s}(\mathbb{R}P^{2s}, S^1) = \mathbb{Z}_2$.

Пусть $L' = \mathbb{Z}_2$ (отметим, что $L' \not\cong S^1$), $H_{2s}(M) \supset L'$, $L = S^1 = H_{2s-1}(A, S^1)$; тогда $X_0 \in H_*(\mathbb{R}P^{2s-1}, S^1, \mathbb{Z}_2)$ и X_0 является глобально минимальной поверхностью в вариационном классе $\mathcal{O}$ (пространство $\mathbb{R}P^{2s}$ является наименьшей поверхностью в M , заклеивающей какую-либо нетривиальную подгруппу $L \subset S^1 = H_{k-1}(A, S^1)$, $k = 2s$). В этом случае имеем $d = \bar{d}$, $d = d'$, т. е. $\Delta = 0$, а с другой стороны, $\sup \text{vol}_k(\Pi_i) = \text{vol}_k(\mathbb{R}P^{2s}) = d > 0$.

В том случае, когда границей минимальной поверхности является сфера, многие гомологические характеристики этой поверхности могут быть сведены к гомотопическим, и наоборот. В качестве примера укажем на теорему существования минимальной поверхности в классе пленок, граница которых — сфера и которые не ретрагируются на эту сферу. Тогда, оказывается, из гомологической теоремы существования минимального решения можно извлечь гомотопическую теорему существования (см. [35]). Более точно: пусть компакт-граница A гомеоморфен сфере S^{k-1} и вложен в $\mathbb{R}^n$; рассмотрим класс K^* всех компактов X , $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$, которые не ретрагируются на свою границу A . Здесь имеется в виду не деформационная ретракция, а обычная ретракция. Компакт $X \in K^*$ назовем простым, если он не содержит собственного подмножества Q , которое также имело бы в качестве своей границы сферу A (т. е. также не ретрагируется на эту сферу). Тогда оказывается, что: 1) минимум объема vol_k в вариационном классе K^* достигается на неко-

тором компакте $X_0 \in K^*$; 2) каждый компакт $X \in K^*$ содержит простой подкомпакт; 3) каждый простой компакт $X_0 \in K^*$, реализующий минимум объема vol_k , является локально-евклидовым почти во всех своих точках (т. е. на множестве полной меры) (см. [35]).

Эта теорема сформулирована в нестабильных гомотопических терминах (ретракция). Стабильная гомотопическая ситуация полностью содержится в нашей теореме 7.2.1 для случая экстраординарной теории гомологий $h_* = \pi_*^S$. Однако «нестабильная гомотопическая теорема» сводится в данном случае к гомологической теореме существования (и вытекает из нее). В самом деле, в силу теоремы Хопфа мы имеем следующее тождество:

$$K^* = \bigcup_L H_*(S^{k-1}, L, 0), \quad L \neq 0,$$

где $G = S^1 = \mathbb{R}^1 (\text{mod } 1)$. Действительно, пусть $X \in K^*$. Надо доказать, что $\text{Ker } i_* \neq 0$, где гомоморфизм $i_*: H_{k-1}(A) \rightarrow H_{k-1}(X)$ индуцирован вложением. Если i_* — мономорфизм, то по теореме Хопфа сфера A является ретрактом компакта X , что невозможно. Обратно, пусть $X \in H_*(S^{k-1}, L, 0)$, $L \neq 0$. Надо доказать, что сфера A не является ретрактом поверхности X . Так как $L \neq 0$, то это очевидно.

Интересно выяснить, какие другие нестабильные гомотопические ситуации в задаче Плато сводятся к гомологическим. В [35] была выдвинута гипотеза, которая в случае ее справедливости обобщала бы теорему существования в классе K^* , приведенную выше. Более точно: рассмотрим в качестве компакта-границы $A \subset \mathbb{R}^n$ произвольное компактное замкнутое гладкое подмногообразие V^{k-1} , и пусть $K^*(V^{k-1})$ — класс всех компактов X , $V \subset \subset X \subset \mathbb{R}^n$, таких, что каждый из них не ретрагируется на какое-либо свое замкнутое подмножество $\tilde{V}$, $V \subset \tilde{V} \subset X$, имеющее размерность $k-1$. Ретракция при этом не предполагается деформационной. Гипотеза, сформулированная в [35], заключалась в следующем равенстве: $K^*(V) = \bigcup_L H_*(V, L, 0)$ (мы используем

здесь наши обозначения из предыдущих параграфов), где $L \neq 0$ и $G = S^1 = \mathbb{R}^1 (\text{mod } 1)$. В случае $V = S^{k-1}$ мы получим класс K^* , описанный выше. Однако гипотеза эта неверна, и мы укажем простой контрпример. Предварительно отметим, что включение $K^*(V^{k-1}) \supset \bigcup_L H_*(V, L, 0)$, конечно, справедливо, но, оказывается, обратное включение уже не имеет места (в общем случае). Положим $A = V^{k-1} = S^1 \times S^{k-2}$, где $k \geq 5$; тогда $\pi_{k-1}(A) = \mathbb{Z}_2$, и пусть $\alpha: S^{k-1} \rightarrow A$ есть представитель элемента $1 \in \mathbb{Z}_2$. Рассмотрим подкомплекс $X = A \bigcup D$ (приклейка диска по отображению

границы α). Так как образ сферы S^{k-1} в A при отображении α можно гомотопически выдавить в сферу S^{k-2} , то вложение $i: A \rightarrow X$ индуцирует мономорфизм в $(k-1)$ -мерных группах гомологий, т. е. $X \notin \bigcup_L H_*(V^{k-1}, L, 0)$, $L \neq 0$. С другой стороны,

$X \in K^*(V)$. В самом деле, допустим, что существует компакт $\tilde{V} \subset X$ такой, что существует непрерывное отображение $f: X \rightarrow \tilde{V}$, постоянное на $\tilde{V}$. Поскольку $\tilde{V}$ — компакт и $\dim \tilde{V} = k - 1 < k = \dim D^k$, то отображение f гомотопно отображению $f': X \rightarrow A$ (так как $\tilde{V}$ выдавливается в $A = V$), причем можно считать, что f' тождественно на A . Это означает, что отображение $\alpha: S^{k-1} \rightarrow A$ можно продолжить до отображения диска D^k в A , т. е. $\alpha = 0$, что противоречит выбору α . Тем самым, мы предъявили контрпример к гипотезе, сформулированной в [35].

I. Книги учебного типа

1. Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
3. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
4. Поитрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.
5. Зейферт Т., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом. — М.: ИЛ, 1947.
6. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. — М.: ИЛ, 1953.
7. Чжэнь Шэн-шэнь. Комплексные многообразия. — М.: ИЛ, 1961.
8. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
9. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
10. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. — М.: Физматгиз, 1958.
11. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
12. Ариольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
13. Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л. Гомотопическая топология. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
14. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
15. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — М.: Наука, 1971.

II. Специальная литература

16. Morrey Ch. B. Multiple integrals in the calculus of variations. — Berlin: Springer, 1966.
17. Federer H. Geometric measure theory. — Berlin: Springer, 1969.
18. Rado T. On the problem of Plateau. — Berlin: Springer, 1933.
19. Eisenhart L. P. An introduction to differential geometry. — Princeton University Press, 1949.
20. Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. — Ann. Math. 1968, 88, № 1, p. 62—105.
21. Фоменко А. Т. Существование и почти всюду регулярность минимальных компактов с заданными гомологическими свойствами. — ДАН СССР, 1969, 187, № 4, с. 747—749.
22. Фоменко А. Т. Некоторые случаи реализации элементов гомотопических групп однородных пространств вполне геодезическими сферами. — ДАН СССР, 1970, 190, № 4, с. 792—795.
23. Фоменко А. Т. Многомерная задача Плато и особые точки минимальных компактов. — ДАН СССР, 1970, 192, № 2, с. 293—296.
24. Фоменко А. Т. Гомологические свойства минимальных компактов в многомерной задаче Плато. — ДАН СССР, 1970, 192, № 1, с. 38—41.

25. Фоменко А. Т. Реализация циклов в компактных симметрических пространствах вполне геодезическими подмногообразиями. — ДАН СССР, 1970, 195, № 4, с. 789—792.
26. Фоменко А. Т. Вполне геодезические модели циклов. — Тр. сем. вekt. тенз. анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1972, вып. 16, с. 14—98.
27. Фоменко А. Т. Многомерная задача Плато в экстраординарных теориях гомотопий и когомологий. — ДАН СССР, 1971, 200, № 4, с. 797—800.
28. Фоменко А. Т. Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле. — ИАН СССР, 1971, 35, № 3, с. 667—681.
29. Фоменко А. Т. Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райфенберга. — ИАН СССР, 1972, 36, № 5, с. 1049—1080.
30. Фоменко А. Т. Многомерная задача Плато в римановых многообразиях. — Матем. сб., 1972, 89 (131), вып. 3, с. 475—520.
31. Фоменко А. Т. Многомерные задачи Плато на римановых многообразиях и экстраординарные теории гомотопий и когомологий. Часть 1. — Тр. сем. вekt. тенз. анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1974, вып. 17, с. 3—176.
32. Фоменко А. Т. Многомерные задачи Плато на римановых многообразиях и экстраординарные теории гомотопий и когомологий. Часть 2. — Тр. сем. вekt. тенз. анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1978, вып. 18, с. 4—93.
33. Фоменко А. Т. Геометрические вариационные задачи. — Современные проблемы математики, т. 1 (Итоги науки и техники), 1973, с. 39—59.
34. Альберс С. И. Топология функциональных многообразий и вариационное исчисление в целом. — УМН, 1970, 25, № 4, с. 57—123.
35. Reiffenberg E. R. Solution of the Plateau problem for m -dimensional surfaces of varying topological type. — Acta Math., 1960, 104, № 1, p. 1—92.
36. Reiffenberg E. R. A isoperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces. — Ann. Math., 1964, 80, № 1, p. 1—14.
37. Reiffenberg E. R. On the analyticity of minimal surfaces. — Ann. Math., 1964, 80, № 1, pp. 15—21.
38. Federer H., Fleming W. H. Normal and integral currents. — Ann. Math., 1960, 72, p. 458—520.
39. Federer H. Hausdorff measure and Lebesgue area. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, 37, № 2, p. 90—94.
40. Federer H. Measure and area. — Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, № 3, p. 306—378.
41. Almgren F. J. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problem among surfaces of varying topological type and singularity structure. — Ann. Math., 1968, 87, № 2, p. 321—391.
42. Almgren F. J. Plateau's problem. An invitation to varifold geometry. — New York, 1966.
43. Almgren F. J. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. — Ann. Math., 1966, 84, № 3, p. 277—293.
44. Fleming W. H. On the oriented Plateau problem. — Rend. Circ. mat. Palermo, 1962, 11, № 1, p. 69—90.
45. Фоменко А. Т. Универсальная оценка снизу на скорость роста глобально минимальных решений. — ДАН СССР, 1980, 251, № 2, с. 295—299.
46. Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E. Minimal cones and the Bernstein problem. — Invent. Math., 1969, 7, № 3, p. 243—268.
47. Коннер П., Флойд Э. Гладкие периодические отображения. — М.: Мир, 1969.
48. Whitehead G. W. Generalized homology theory. — Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 102, p. 227—283.
49. Edgar H., Brown H. Cohomology theories. — Ann. Math., 1962, 75, № 1, p. 467—484.

50. Гриффитс Ф., Кинг Дж. Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий. — М.: Мир, 1976.
51. Кацнельсон В. Э., Ронкии Л. И. О минимальном объеме аналитического множества. — Сиб. матем. ж., 1974, 15, № 3, с. 516—528.
52. Ронкии Л. И. О дискретных множествах единственности для целых функций экспоненциального типа многих переменных. — Сиб. матем. ж., 1978, 19, № 1, с. 142—152.
53. Милиор Дж. Теорема об h -кобордизме. — М.: Мир, 1969.
54. Зуланике Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. — М.: Мир, 1975.
55. Crittenden R. Minimum and conjugate point in symmetric spaces. — Canad. J. Math., 1962, 14, № 2, p. 320—328.
56. Борель А. О когомологиях главных расслоенных пространств. — В кн.: Расслоенные пространства и их приложения. — М.: ИЛ, 1958.
57. Дао Чонг Тхи. Многомерная вариационная задача в симметрических пространствах. — Функциональный анализ и его приложения, 1978, 12, вып. 1, с. 72—73.
58. Дао Чонг Тхи. О минимальных потоках и поверхностях в римановых многообразиях. — ДАН СССР, 1977, 233, № 1, с. 21—22.
59. Дао Чонг Тхи. Алгебраические вопросы реализации циклов в симметрических пространствах. — Вестн. МГУ, 1976, № 2, с. 62—66.
60. Дао Чонг Тхи. Вещественные минимальные потоки в компактных группах Ли. — Тр. сем. вект. тенз. анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1978, вып. 19, с. 112—129.
61. Адамс Дж. Ф. Векторные поля на сферах. — Математика (сборник переводов), 1963, 7, № 6, с. 49—79.
62. Atiyah M. Algebraic topology and elliptic operators. — Comm. Pure Appl. Math., 1967, 20, p. 237—249.
63. Brauer R. Sur les invariants integraux des varietes representatives des groupes de Lie simple clos. — C. R. Acad. sci. Paris, 1935, 201, p. 419—421.
64. Borel A. Sur l'homologie et la cohomologie des groups de Lie compacts connexes. — Amer. J. Math., 1954, 76, p. 273—342.
65. Jacobson N. Some groupes of transformations de fined by Jordan algebras, I, II, III. — J. reine angew. Math., 1959, 201, S. 178—195; 1960, 204, S. 74—98; 1961, 207, S. 61—85.
66. Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.
67. Доан Куинь. Полиномы Пуанкаре компактных однородных римановых пространств с неприводимой стационарной группой. — Тр. сем. вект. тенз. анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1968, вып. 14, с. 33—93.
68. Картан Э. Теория спиноров. — М.: ИЛ, 1947.
69. Cartan H. Transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibre principal. — Colloque de Topologie algebrique. — Bruxelles, 1950, p. 57—71.
70. Картан Э. Геометрия группы Ли и симметрические пространства. — М.: ИЛ, 1949.
71. Cartan E. La theorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. — Mem. Sci. Math., 1930, 42.
72. Маитуров О. В. Однородные римановы пространства с неприводимой группой вращений. — Тр. сем. вект. тенз. анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1966, вып. 13, с. 68—145.
73. Miller C. E. The topology of rotations groups. — Ann. Math., Ser. 2, 1953, 57, p. 90—114.
74. Mimura M. The homotopy groups of Lie groups of low rank. — J. Math. Kyoto Univ., 1967, 6, № 2, p. 131—176.
75. Мурнаган Ф. Теория представлений групп. — М.: ИЛ, 1950.
76. Поитрягин Л. С. Гомологии в компактных группах Ли. — Матем. сб., 1939, 6, с. 389—422.

77. Рашевский П. К. Теория спиноров.—УМН, 1955, 10, № 2, с. 3—110.
78. Розенкноп И. З. Некоторые вопросы и приложения гомологической теории полиномиальных идеалов.—Тр. Моск. матем. о-ва, 1965, 13, с. 246—323.
79. Samelson H. Beitrage zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten.—Ann. Math., Ser. 2, 1941, 42, p. 1091—1137.
80. Стинрод Н. Топология косых произведений.—М.: ИЛ, 1953.
81. Takeuchi M. On Pontrjagin classes of compact symmetric spaces.—J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, 1962, 9, № 4, p. 313—328.
82. Helgason S. Totally geodesic spheres in compact symmetric spaces.—Math. Ann., 1966, 165, № 4, S. 309—317.
83. Hsiang W. J. On compact homogeneous minimal submanifolds.—Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1966, 56, № 1, p. 5—6.
84. Yosida K. A problem concerning the second fundamental theorem of Lie.—Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1927, 5, p. 152—155.
85. Ehresmann C. Sur la topologie de certains varietes algebriques reelles.—J. Math. Pures Appl., 1937, 16, p. 69—100.
86. Stiefel E. Sur les nombres de Betti des groupes de Lie compacts.—Colloque intern. du Centre Nat. de la Recherche Scient.—Paris, 1949, 12, p. 446—462.
87. Whitehead J. H. C. On the groups $\pi_r(V_n, m)$ and sphere-bundles.—Proc. London Math. Soc., 1945, 48, p. 243—291.
88. Wolf J. A. Elliptic spaces in Grassmann manifold.—Ill. J. Math., 1963, 7, p. 447—462.
89. Wolf J. A. Geodesic spheres in Grassmann manifold.—Ill. J. Math., 1963, 7, p. 425—446.
90. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия.—М.: ИЛ, 1948.
91. Расслоенные пространства и их приложения: Сборник переводов.—М.: ИЛ, 1958.
92. Фоменко А. Т. Полиномы Пуанкаре некоторых однородных пространств.—Тр. сем. вект. тенз. анализу.—М.: Изд-во МГУ, 1970, вып. 15, с. 128—152.
93. Маитуров О. В. О некоторых когомологических свойствах картановских моделей симметрических пространств.—Тр. сем. вект. тенз. анализу.—М.: Изд-во МГУ, 1978, вып. 18, с. 169—175.
94. Bott R. Nondegenerate critical manifolds.—Ann. Math., Ser. 2, 1954, 60, № 2, p. 248—261.
95. Palais R., Smale S. A generalized Morse theory.—Bull. Amer. Math. Soc., 1964, 70, № 1, p. 165.
96. Federer H. The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimensions.—Bull. Amer. Math. Soc., 1970, 76, № 4, p. 767—771.
97. Hsiang W. Y., Lawson H. B. Minimal submanifolds of low cohomogeneity.—J. Diff. Geometry, 1971, 5, № 1, p. 1—38.
98. Lawson H. B. The equivariant Plateau problem and interior regularity.—Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 173, p. 231—249.
99. Otsuki T. Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature.—Amer. J. Math., 1970, 92, p. 145—173.
100. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — 5-е изд.—М.: Наука, 1976.
101. Eells J., Lemaire L. A report on harmonic maps.—Bull. London Math. Soc., 1978, 10, № 1, p. 1—68.
102. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.—М.: Мир, 1971.
103. Smith R. T. Harmonic mapping of spheres.—Amer. J. Math., 1975, 97, № 2, p. 364—385.

104. Eells J., Sampson H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. — Amer. J. Math., 1964, 86, № 1, p. 109—160.
105. Toda H. Composition methods in homotopy groups of spheres. — Princeton, 1962. [Русский перевод: Toda X. Композиционные методы в теории гомотопических групп сфер. — М.: Наука, 1982.]
106. Naguto M. Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$. — Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1937, 19, p. 861—866.
107. Дао Чонг Тхи. Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато — ИАН СССР, 1980, 44, № 5, с. 1031—1065.
108. Фоменко А. Т. О минимальных объемах топологических глобально минимальных поверхностей в кобордизмах. — ИАН СССР, 1981, 45, № 1, с. 187—212.
109. Фоменко А. Т. Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей, — УМН, 1981, 36 : 6, с. 105 — 135.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютный минимум функционала объема 45
Аксиома вырезания 55
— относительной инвариантности 55
— точки 55
Аксиомы Стиррода—Эйленберга 51
Алгебра октав (чисел Кэли) 162
Алгебраическая граница пары пространств 65
— кограница пары пространств 65
Алгебры когомологий групп Ли 130—132
Альтернативный закон 162

Бордизм-вариация 33
— деформация 33
Брусчатые покрытия 62
Букет пунктированных пространств 261

Вариации 14—16
— конусов 209
Вариационная производная 15
Вариационные классы 67
Векторные поля на сферах 186
Версоры (четные и нечетные) 175
Внешняя форма риманова объема 19, 20
Вполне геодезические подмногообразия 32, 33
Вторая фундаментальная форма подмногообразия 27
— — — гладкого отображения 237

Гармонические отображения многообразий 198
— — сфер 234
— полиномы 242
Геодезические 17
— направления 114
Геодезический дефект 97
— диффеоморфизм 98
Геометрическое место минимумов 107
Гипотеза Райфенберга 103
Главное расслоенное пространство 146
Главный орбит-тип 212
Гладкие симплицальные комплексы 68
Граничный контур 26
Грассманово многообразие 106, 107

Группа Вейля 133
— бордизмов по модулю p 49
— изометрий 137
— неориентированных бордизмов 48
— ориентированных бордизмов 47

Дефект римановых многообразий 97
Джойн 252
Диаграмма алгебры Ли 108

Замкнутость вариационных классов 266

Изопериметрические неравенства 279
Изотопические вариации 31
Инвариантные полиномы 134
Инволютивные автоморфизмы 107
Индексующие пары 61, 62

Йордановы алгебры 163

Картановская модель симметрического пространства 108
— подалгебра 108
Касательное расслоение многообразий 27
Катеноид 207, 208
Категория абелевых групп 60
— компактных пар 60
— конечномерных векторных пространств 60
— R -модулей 60
Классы смежности 147
Клиффордова алгебра 175
Кольцо бордизмов 46, 47
Коммутатор в алгебре Ли 129
Комплексные структуры 188
Конечные покрытия 60
Конфинальные подмножества 61, 62
Координаты конформные 21
Корни симметрических пространств 108
Коэффициент деформации векторного поля 83
Кривизна средняя (поверхности) 21
Критические точки 14
Кэлера метрика 33
Кэлеровы многообразия 33

- Лаграижная 13
 Лист Мёбиуса (двойной и тройной) 66
 Локальная минимальность 30
- Максимальный тор 151
 Минимальность комплексных под-
 многообразий 34—37
 — поверхностей во всех размер-
 ностях 53, 54
 Минимальные геодезические 188
 — конусы 208, 209
 Минимизирующий процесс (М-про-
 цесс) 290
 Многомерный функционал Дирихле
 194, 197, 198
 Монотонные векторные поля 81
 Мультиварифолды 77
 Мыльные пленки 18
- Надстройка спектра 56
 Наименьший λ -вектор в вариационном
 классе 307
 Направленные множества 60
 Неподвижные точки автоморфизма 137
 Непрерывные теории (ко)гомологий 63
 Неприводимые симметрические прост-
 ранства 137
 Нерв покрытия 60, 61
 Неустраиваемые страты 41
 — малых размерностей 41, 42
 Нормализатор подгруппы 151
 Носитель вариации 32
- Оператор Лапласа 23
 Орбитальные направления 114, 115
 Орбиты присоединенного представ-
 ления 151
 Особый орбит-тип 212
 Относительно инвариантные теории
 (ко)гомологий 64
 Относительный гомеоморфизм 55
 — минимум функционала объема 40
 Отношение бордантности 46
- Параметризация пленок 73, 74
 Перестройки поверхностей 266, 267
 Периодичность Ботта 179
 Поверхности гармонические 24
 — глобально минимальные 33
 — локально минимальные 21
 — экстремальные 21
 Подгруппы, вполне негомологичные
 нулю 132
 Полином Пуанкаре 135
 Полные перестройки поверхностей 267
 Полуспириальная группа 175
 Полуспириальные представления 174
 Приведенные группы (ко)гомологий 56
- Примитивные образующие 161
 Принцип Ферма 215
 Присоединенное представление 108
 Проблема Плато классическая дву-
 мерная 26
 — — — многомерная 38
 — — — на языке обычных гомологий 43
 — — — — теории бордизмов 73, 74
 — — — — экстраординарных (ко)го-
 мологий 71, 72
 — — эквивариантная 211
 — С. Н. Бернштейна 232, 233
 Проективное представление групп 261
 — пространство вещественное 106
 — — кватернионное 106
 — — комплексное 105
 Производная по направлению 14
 Простая система образующих 131
 Пространства петель 188
 Псевдовыпуклые области 85
- Регулярные элементы алгебры Ли 152
 Риманова связность 28
- Сглаживание поверхностей 85
 Секционная кривизна 251
 Симметрические пространства 107
 Симплициальные точки поверхно-
 стей 280
 Сингулярные многообразия 46
 — элементы алгебры Ли 151
 Сингулярный орбит-тип 212
 Сопряженные направления 114, 115
 — точки 107
 — элементы алгебры Ли 151
 Спектр петель 57
 — топологических пространств 56
 Спектральные (ко)гомологии 61
 Спинорная группа 175
 Спириальные представления 174
 Средняя кривизна гладкого отобра-
 жения 237
 Стабильные гомотопические груп-
 пы 172, 173
 Стационарная подгруппа 151
 Стационарные функции 15
 Стратифицированный объем 54, 70
 Сферическая мера Хаусдорфа 231
- Теорема классификации элементов
 гомотопических групп, реализу-
 ющихся вполне геодезическими сфе-
 рами 185, 186
 — о минимальных конусах 209
 — о реализации (ко)циклов вполне
 геодезическими подмногообразиями
 148, 149

Теорема об оценке снизу функции объема 85
 — ортогональной периодичности 203
 — существования гармонических представителей в гомотопических классах 234, 240, 241
 — — глобально минимальных поверхностей 71
 — — эквивариантных минимальных поверхностей 214
 — унитарной периодичности 199
 Точная заклепка подгрупп 324
 — реализация подгрупп 324
 Тройная система Ли 129

Уравнение Бельтрами 23
 Уравнения Эйлера — Лагранжа 17
 Устойчивость вариационных классов 68

Формула первой вариации 31
 Функционал 13
 — действия 17

Функционал Дирихле (двумерный) 25
 — длины дуги 13
 — объема 18
 — площади 14
 — стратифицированного объема 54, 70
 Функция исчерпания 78, 80
 — Морса 80
 — плотности 290, 291
 — сферической плотности 75

Характеристические свойства теорий (ко)гомологий 55, 56

Централизатор 151
 Центрированные функции 97
 Циклы Понтрягина 136

Эквивариантные особые точки 227
 Экстраординарные теории (ко)гомологий 51
 Экстремали многомерных функционалов 13 — 15
 — функционала объема 32

Анатолий Тимофеевич Фоменко

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТОПОЛОГИИ

Редакторы *Ю. П. Соловьев, Т. А. Панькова*

Техн. редакторы *Е. В. Морозова, Л. В. Лихачева*

Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИБ № 11845

Сдано в набор 27.04.82. Подписано к печати 26.10.82.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 21,5. Уч.-изд. л. 24,1. Тираж 8 000 экз. Заказ 419. Цена 2 р. 50 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано в типографии № 2 изд-ва «Наука»,
Москва, Шубинский пер., 10. Заказ 2312