Н. А. ФРОЛОВ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ I

ПОСОБИЕ
ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1964

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Курс математического анализа», часть I, является вторым переработанным изданием моей книги «Дифференциальное и интегральное исчисление», которая была издана Учпедгизом в 1955 году.

Наибольшей переработке подвергся первый раздел книги — «Введение в математический анализ», где центральное место отведено понятию предела функции в точке.

Изложение интегрального исчисления начинается с понятия определенного интеграла. Понятия первообразной функции и неопределенного интеграла вводятся в связи с задачей вычисления определенных интегралов.

Можно отметить, наконец, что элементы численного анализа в новом издании книги дополнены приближенным решением уравнений методом хорд и касательных и приближенным вычислением определенного интеграла способом парабол.

Автор

Раздел I

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Множества

Понятие *множество* относится к числу первичных, не подлежащих определению.

Мы можем только стараться объяснить смысл понятия множества, прибегая для этого главным образом к примерам.

Можно говорить о множестве всех различных букв, встречающихся на данной странице книги, о множестве корней данного уравнения, о множестве натуральных чисел (то есть целых положительных чисел) и т. д.

Таким образом, множество мы представляем себе как собрание каких-либо вещей.

Вещи, из которых составлено данное множество, называются *элементами* этого множества.

Если A обозначает некоторое множество, то запись

$$x \in A$$

означает, что x есть элемент множества A (x принадлежит множеству A, x содержится в A), а запись

$$x \bar{\in} A$$

означает, что x не является элементом множества A (x не принадлежит множеству A, x не содержится в A).

Так, например, если N — множество всех натуральных чисел, то

$$1 \in N, \quad 0 \bar{\in} N.$$

Если x является общим обозначением любого элемента множества A, то пишут

$$A = \{x\}.$$

Например, множество N всех натуральных чисел можно записать так:

$$N = \{n\},$$

где n обозначает произвольное натуральное число.

Иногда, когда это возможно, в фигурных скобках перечисляют все элементы множества. В некоторых случаях, когда перечислить все элементы множества нельзя, в фигурных скобках выписывают несколько элементов так, чтобы указать закон, по которому получаются все остальные элементы множества. Так, например, множество N можно записать в виде

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Если каждый элемент множества A содержится также и в множестве B, то A называют *частью* множества B или *подмножеством* множества B и пишут

$$A \subset B, \text{ или } B \supset A.$$

Так, например, если N — множество всех натуральных чисел, а N^* — множество четных натуральных чисел, то

$$N^* \subset N.$$

Заметим, что всегда

$$A \subset A,$$

поэтому часть множества может оказаться совпадающей со всем множеством.

Если $A \subset B$, но A не совпадает с B, то A называют *правильной частью* множества B.

Если множества A и B совпадают, то есть $A \subset B$ и $B \subset A$, то пишут $A = B$.

Множество, не имеющее ни одного элемента, называется *пустым множеством*.

Понятие пустого множества не бесполезно, так как, объединяя элементы в множество по некоторому правилу, мы не всегда уверены, что такие элементы существуют, то есть что построенное множество не окажется пустым.

Понятия и символы, введенные здесь, позволят нам проще и яснее формулировать различные определения и предложения математического анализа.

§ 2. Действительные числа

Целые положительные и отрицательные числа, нуль и положительные и отрицательные дроби вида $\pm\frac{p}{q}$, где p и q — любые натуральные числа, называются *рациональными* числами.

Кроме рациональных чисел, существуют еще *иррациональные* числа, которые выражаются бесконечными непериодическими десятичными дробями.

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными* числами.

Мы будем предполагать, что основные свойства множества действительных чисел и арифметические действия над действительными числами известны из школьного курса математики.

Остановимся подробнее на понятии абсолютной величины, или модуля, действительного числа. В высшей математике это понятие играет важную роль.

Абсолютной величиной (*модулем*) числа $a \geqslant 0$ называется само число a.

Если число a отрицательно, то его абсолютной величиной (модулем) называется положительное число $-a$, отличающееся от данного числа a только знаком.

Абсолютная величина числа a обозначается через $|a|$.

Из определения абсолютной величины числа следует, что всегда

$$|a| = |-a|.$$

Отрицательное число тем больше, чем меньше его абсолютная величина. Поэтому, если $x < 0$ и $|x| < c$, то $x > -c$. Отсюда замечаем, что неравенство

$$|x| \leqslant c$$

и двойное неравенство

$$-c \leqslant x \leqslant c$$

равносильны.

Для абсолютных величин верны следующие соотношения.

1. $$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

В самом деле, взяв очевидные неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

и сложив их почленно, мы получим двойное неравенствс

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|,$$

которое равносильно неравенству $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

2. $$|a-b| \geqslant |a|-|b|.$$

Действительно, так как

$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b|+|b|,$$

то

$$|a|-|b| \leqslant |a-b|.$$

3. $$|ab| = |a|\,|b|.$$

4. $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Соотношения 3 и 4 непосредственно вытекают из правил умножения и деления действительных чисел и из определения абсолютной величины.

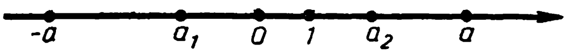
§ 3. Числовая ось

Действительные числа изображаются точками прямой. Делается это так.

На прямой (мы ее будем считать расположенной горизонтально, как на черт. 1) возьмем какую-нибудь точку, и этой точкой изобразим число 0. Так мы получим *нулевую точку* или *начало* (эту точку на прямой отметим знаком 0).

Затем правее начала возьмем еще какую-нибудь точку и этой точкой изобразим число 1 (эту точку на прямой отметим знаком 1). Таким образом, мы получим единицу масштаба — отрезок прямой с концами в точках 0 и 1. Теперь для изображения положительного числа a мы возьмем на нашей прямой справа от начала точку на расстоянии (в принятом масштабе), равном данному числу a, а для изображения отрицательного числа $-a$ возьмем точку слева от начала на расстоянии, равном a.

Изобразив таким образом все действительные числа точками прямой, мы будем иметь *взаимно однозначное соответствие* между множеством действительных чисел и множеством точек прямой: каждое действительное число будет изображено одной определенной точкой прямой, причем каждая точка прямой окажется изображением одного определенного действительного числа. Это соответствие сохраняет порядок: если число a_1 меньше числа a_2, то точка прямой, соответствующая числу a_1, находится левее точки, соответствующей числу a_2.



Черт. 1

Прямая, точки которой находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством действительных чисел, называется *числовой прямой* или *числовой осью*.

Если число x соответствует точке M числовой оси, то x называют *координатой* точки M, а также *абсциссой* точки M и пишут: $M(x)$.

Расстояние на числовой оси от начала до точки $M(x)$ равно $|x|$. Это видно из способа изображения чисел точками прямой.

Прямую линию мы представляем себе непрерывной, т. е. обладающей свойством, которое выражается следующей аксиомой: *Если произведено сечение* (A, B) *прямой, то есть если точки прямой разделены на два класса A и B таким образом, что каждая точка класса A левее каждой точки класса B, то существует пограничная точка ξ, определяющая сечение, так что каждая точка, расположенная левее ξ, принадлежит классу A, а каждая точка, расположенная правее ξ, принадлежит классу B.*

В силу взаимно однозначного соответствия между действительными числами и точками прямой множество всех действительных чисел также обладает свойством непрерывности:

Если произведено сечение (A, B) множества действительных чисел, то есть если множество всех действительных чисел разделено на два класса A и B таким образом, что каждое число класса A меньше каждого числа класса B, то существует пограничное число ξ, определяющее сечение, так что каждое число, меньшее ξ, принадлежит классу A, а каждое число, большее ξ, принадлежит классу B.

§ 4. Простейшие множества чисел

Здесь мы дадим определения простейших числовых множеств, с которыми нам особенно часто придется иметь дело в дальнейшем.

1. Множество всех действительных чисел x (всех точек x числовой оси), удовлетворяющих условию

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

называется *отрезком* и обозначается $[a, b]$.

2. Множество всех действительных чисел x (всех точек x числовой оси), удовлетворяющих условию

$$a < x < b,$$

называется *интервалом* и обозначается (a, b).

Таким образом, отрезку $[a, b]$ принадлежат не только точки, содержащиеся между a и b, но и сами точки a и b, то есть концы отрезка, а интервалу (a, b) принадлежат только те точки, которые находятся между точками a и b, концы же интервала — точки a и b — интервалу уже не принадлежат. Это различие между $[a, b]$ и (a, b) имеет большое значение в ряде основных вопросов математического анализа.

3. Неравенства

$$a \leqslant x < b \quad \text{или} \quad a < x \leqslant b$$

определяют *полуинтервалы*, которые обозначаются соответственно $[a, b)$ или $(a, b]$.

Интервалы и полуинтервалы могут быть и бесконечными. Такими будут, например, интервал $(-\infty, a)$, представляющий множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $x < a$, полуинтервал $[b, +\infty)$, представляющий множество всех чисел $x \geqslant b$; множество всех действительных чисел (вся числовая ось) есть бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

4. Любой интервал, содержащий данную точку x_0, называется *окрестностью точки* x_0.

Интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ называется *ε-окрестностью точки* x_0.

Введем еще определения некоторых понятий, относящихся к произвольным множествам чисел или точек числовой прямой.

1. Множество E называется *ограниченным снизу*, если существует такая точка a, что для каждой точки $x \in E$ справедливо

$$a \leqslant x.$$

2. Множество E называется *ограниченным сверху*, если существует такая точка b, что для каждой точки $x \in E$ справедливо

$$x \leqslant b.$$

3. Множество E называется *ограниченным*, если оно ограничено снизу и сверху, то есть существуют такие a и b, что для каждой точки $x \in E$ имеем:

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Как видно из этого определения, множество E — ограничено, если оно содержится на некотором отрезке $[a,\ b]$.

4. Точка m называется *нижней гранью* множества E, если: 1) левее m нет ни одной точки множества E и 2) при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы одна точка x множества E, которая будет левее точки $m + \varepsilon$.

5. Точка M называется *верхней гранью* множества E, если: 1) правее M нет ни одной точки множества E и 2) при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы одна точка x множества E, которая будет правее точки $M - \varepsilon$.

Для отрезка $[a,\ b]$ и интервала $(a,\ b)$ гранями служат их концы: точка a — нижняя грань, а точка b — верхняя грань.

Множество

$$E = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\}$$

имеет нижней гранью 0, а верхней гранью — точку 1.

Множество

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

имеет нижней гранью 1, а верхней грани не имеет.

Докажем следующую теорему относительно существования нижней и верхней граней множества.

Теорема. *Если множество E ограничено сверху, то оно имеет верхнюю грань, а если ограничено снизу, то имеет нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть множество

$$E = \{x\}$$

ограничено сверху, то есть существует такая точка b, что для всех $x \in E$ справедливо $x \leqslant b$. Докажем, что множество E имеет верхнюю грань. С этой целью составим сечение множества всех действительных чисел. При этом в нижний класс A включим все числа $x \in E$ и каждое число, больше которого есть хотя бы один элемент $x \in E$, а остальные числа включим в верхний класс B. Множества A и B не пустые. Так, все числа $x \in E$ содержатся в A, а B содержит все числа, большие b. Кроме того, очевидно, что если $\alpha \in A$, а $\beta \in B$, то $\alpha < \beta$. Из этого следует, что классы A и B образуют сечение (A, B) множества действительных чисел. В силу непрерывности множества действительных чисел построенное сечение определяет некоторое пограничное число M.

Покажем, что точка M есть верхняя грань множества E. Прежде всего заметим, что первое условие в определении верхней грани: $x \leqslant M$ выполнено, так как все элементы $x \in E$ содержатся в A. Возьмем сколько угодно малое $\varepsilon > 0$ и составим число $M - \varepsilon < M$. Всегда найдется такое число α, что $M - \varepsilon < \alpha < M$. Так как $\alpha < M$, то $\alpha \in A$, а поэтому $\alpha \leqslant x_0$, где x_0 — некоторый элемент множества E. Таким образом, имеем: $M - \varepsilon < \alpha \leqslant x_0$, то есть $M - \varepsilon < x_0$. Это означает, что M удовлетворяет и второму условию, содержащемуся в определении верхней грани. Следовательно, M есть верхняя грань множества E.

Доказательство существования нижней грани множества, ограниченного снизу, аналогично.

Следствие. *Если множество E ограничено, то существует наименьший отрезок, содержащий все множество E, именно отрезок $[m, M]$, где m есть нижняя, а M — верхняя грань множества E.*

Действительно, если множество $E = \{x\}$ ограничено, то оно ограничено и снизу, и сверху, а поэтому имеет и нижнюю грань m, и верхнюю грань M. Из определения верхней и нижней грани следует, что отрезок $[m, M]$ содержит E:

$$m \leqslant x \leqslant M,$$

но найдутся точки $x \in E$ как левее, так и правее отрезка $[m+\varepsilon, M-\varepsilon]$, каким бы малым $\varepsilon > 0$ ни был. Следовательно, $[m, M]$ есть наименьший отрезок, содержащий множество E.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию

а) $|x-x_0| < \varepsilon$,

б) $0 < |x-x_0| < \varepsilon$,

в) $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant h$.

2. Доказать, что всякое множество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань.

3. Доказать, что если множество

$$E=\{x\}$$

содержится на отрезке $[a, b]$, то верхняя и нижняя грани этого множества также принадлежат отрезку $[a, b]$.

ГЛАВА II

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Последовательность и ее предел

Предварительно рассмотрим следующий пример.

Обозначим через a_n приближенное значение $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 10^{-n}. Тогда каждому натуральному числу n будет соответствовать одно определенное действительное число a_n: числу 1 будет соответствовать $a_1 = 1{,}4$ (приближенное значение $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 10^{-1}), числу 2 будет соответствовать $a_2 = 1{,}41$ (приближенное значение $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 10^{-2}) и т. д. Чтобы отметить, что здесь каждое из чисел a_n связано со своим «номером» n определенным законом, мы будем говорить, что $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ есть **последовательность** чисел. Определение понятия числовой последовательности формулируется так:

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число a_n, то говорят, что дана числовая последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Числа a_1, a_2, ... называют *членами* последовательности; a_n называют *общим членом* последовательности.

Ради краткости последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ... мы будем иногда обозначать $\{a_n\}$.

Примером числовой последовательности может служить рассмотренная выше последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$ по недостатку.

Вот еще примеры числовых последовательностей:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots;\ a_n=\frac{1}{n}. \qquad (1)$$

$$2,\ 4,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots;\ a_n = 2n. \qquad (2)$$

Члены последовательности с различными номерами могут и не быть различными. Так, например,

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots, \qquad (3)$$

есть последовательность с общим членом $a_n = (-1)^{n-1}$.

Одним из основных математических понятий является понятие *предела* последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого (хотя бы и как угодно малого) положительного числа ε существует такой номер N, что все члены последовательности a_n с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

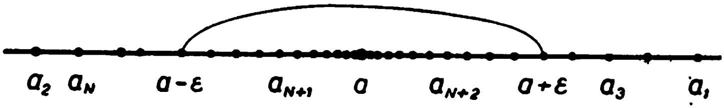
То, что число a есть предел последовательности $\{a_n\}$, записывают так:

$$a = \lim a_n, \text{ или } a_n \to a.$$

Отметим геометрический смысл понятия предела последовательности.

Пусть члены последовательности $\{a_n\}$ изображены точками числовой оси (черт. 2). Очевидно, неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, которое означает, что a_n находится в ε-окрестности точки a.

Поэтому *a есть предел последовательности $\{a_n\}$, если, какова бы ни была ε-окрестность точки a, найдется такой номер N, что все точки a_n с номерами $n > N$ будут содержаться в этой окрестности точки a, то есть в интервале $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, а вне этого интервала могут оказаться только точки $a_1, a_2, \ldots, a_N$, то есть конечное множество точек данной последовательности.*



Черт. 2

Из определения понятия предела последовательности $\{a_n\}$ следует, что если $a = \lim a_n$, то любое число $b \neq a$ не может быть пределом последовательности $\{a_n\}$.

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет предел, и *расходящейся*, если она предела не имеет.

Из приведенных выше примеров последовательность (1) сходящаяся, ее предел равен 0.

В самом деле, здесь $a_n = \frac{1}{n}$. При любом $\varepsilon > 0$ будет верно неравенство $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, если только $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, взяв $N > \frac{1}{\varepsilon}$, для всех $n > N$ будем иметь неравенство

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

Очевидно, что последовательности (2) и (3) расходящиеся.

Теорема. *Всякая сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то есть существуют такие числа m и M, что*

$$m \leqslant a_n \leqslant M$$

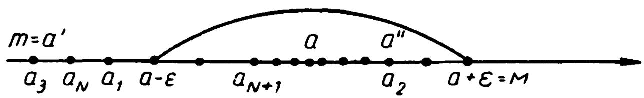
для всех членов данной последовательности.

Доказательство. Пусть

$$\lim a_n = a.$$

Возьмем какое угодно $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что все a_n с номерами $n > N$ будут содержаться в интервале $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Вне этого интервала из данной последовательности могут быть только $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N$ (черт. 3). Этих точек конечное множество. Поэтому среди них есть самая левая точка, которую обозначим через a', и самая правая точка, которую обозначим через a''.

Обозначим через m меньшее из двух чисел a' и $a-\varepsilon$, а через M — большее из чисел a'' и $a+\varepsilon$. Тогда на отрезке $[m,\ M]$ будут находиться точки $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N$, а также



Черт. 3

и интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, содержащий точки a_n с номерами $n > N$.

Следовательно, отрезок $[m,\ M]$ содержит все члены данной последовательности, и поэтому теорема доказана.

Из этой теоремы видно, что необходимым условием сходимости последовательности является ее ограниченность. Однако это условие не является достаточным для сходимости последовательности. Так, например, последовательность (3) ограничена, но расходящаяся.

УПРАЖНЕНИЯ

4. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ сходится и $\lim\frac{n-1}{n}=1$. Каким нужно взять номер N, чтобы было

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

для всех $n > N$?

5. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim a_n = a$. Доказать, что любое $b \neq a$ не может быть пределом этой последовательности.

6. Выяснить, сходится ли последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4},\ \ldots, n,\ \frac{1}{n+1},\ \ldots.$$

7. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют двум условиям: 1) $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ для всех n и 2) $\lim a_n = \lim b_n = a$. Доказать, что $\lim c_n = a$.

§ 2. Монотонные последовательности

Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей*, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots .$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей*, если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots .$$

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

Выше было доказано, что для сходимости последовательности необходимо, чтобы она была ограничена.

Неубывающая последовательность $\{a_n\}$ будет ограниченной, если она *ограничена сверху*, то есть существует такое число M, что $a_n \leqslant M$ для всех n. В самом деле, в этом случае все члены последовательности $\{a_n\}$ будут содержаться на отрезке $[a_1, M]$.

Невозрастающая последовательность $\{a_n\}$ будет ограниченной, если она *ограничена снизу*, то есть существует такое число m, что $a_n \geqslant m$ для всех n. В этом случае последовательность $\{a_n\}$ будет содержаться на отрезке $[m, a_1]$.

Докажем теорему, которая дает условия сходимости монотонных последовательностей.

Теорема. *Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ — неубывающая и ограничена сверху. Из условия ограниченности сверху вытекает, что данная последовательность имеет верхнюю грань. Обозначим ее через a. Докажем, что $a = \lim a_n$. Действительно, в силу определения верхней грани множества $a_n \leqslant a$ для всех n. В то же время при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется такой член последовательности, пусть a_N, для которого будет верно неравенство

$$a - \varepsilon < a_N.$$

Но данная последовательность — неубывающая, поэтому

$$a_N \leqslant a_{N+1} \leqslant \ldots,$$

и, значит,

$$a - \varepsilon < a_N \leqslant a_{N+1} \leqslant \ldots \leqslant a.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ верно неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$a = \lim a_n.$$

Доказательство теоремы для невозрастающей и ограниченной снизу последовательности аналогично.

Итак, *всякая ограниченная монотонная последовательность сходится.*

УПРАЖНЕНИЯ

8. Пусть

$$a_n = m_0 + \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2^2} + \ldots + \frac{m_n}{2^n},$$

где m_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) равно либо 0, либо 1. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

9. Выделив из последовательности $\{a_n\}$ часть членов с номерами $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, мы получим *подпоследовательность* $\{a_{n_k}\}$.

Доказать, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

§ 3. Число e

Рассмотрим последовательность

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона и элементарными преобразованиями, мы можем написать

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

В правой части этого равенства при увеличении n возрастают и число слагаемых (а они положительные), и сами слагаемые, кроме первых двух, которые остаются неизменными. Следовательно,

$$a_n < a_{n+1}$$

для всех n и поэтому последовательность $\{a_n\}$ — неубывающая (возрастающая).

Докажем теперь, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху.

В самом деле, если в выражении a_n все множители

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\quad \left(1-\frac{2}{n}\right),\quad \ldots,\quad \left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

меньшие 1, мы заменим числом 1, а в знаменателях дробей

$$\frac{1}{3!},\quad \frac{1}{4!},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n!}$$

каждый множитель, больший 2, заменим числом 2 (то есть вместо $3! = 1\cdot2\cdot3$ возьмем $1\cdot2\cdot2 = 2^2$, вместо $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4$ возьмем $1\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^3$ и т. д.), то мы получим величину, бóльшую, чем a_n, то есть

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но по формуле суммы членов геометрической прогрессии мы имеем

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

Поэтому

$$a_n < 3$$

при любом n.

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — монотонна и ограничена. Следовательно, она имеет предел. Этот предел обозначают буквой e:

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Дальше будет доказано, что число e иррационально: $e = 2{,}718281828459045\ldots$ Там же будет дан способ вычисления приближенных значений числа e с любой степенью точности. Пока только ясно, что $2 < e \leqslant 3$. В математическом анализе число e выполняет важную роль. Оказалось, что в математическом анализе удобнее пользоваться логарифмами по основанию e.

Логарифмы по основанию e называются *натуральными логарифмами*. Для обозначения натурального логарифма числа x пользуются символом $\ln x$.

Имея натуральные логарифмы чисел x, мы легко можем найти логарифмы этих чисел по любому другому основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$.

В самом деле, если

$$y = \log_a x,$$

то

$$x = a^y.$$

Взяв от обеих частей этого равенства натуральные логарифмы, мы получим

$$\ln x = y \ln a.$$

Отсюда находим

$$y = \frac{\ln x}{\ln a},$$

или

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Следовательно, для перехода от натуральных логарифмов к логарифмам по основанию a мы имеем формулу

$$\log_a x = M \ln x,$$

где

$$M = \frac{1}{\ln a}.$$

Число M называется *модулем перехода*.

§ 4. Последовательность стягивающихся отрезков

Если в последовательности отрезков

$$[a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \ldots \supset [a_n,\ b_n] \supset \ldots$$

каждый отрезок содержится в предыдущем, а последовательность длин этих отрезков

$$b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ \ldots,\ b_n - a_n,\ \ldots$$

имеет предел, равный нулю:

$$\lim (b_n - a_n) = 0,$$

то последовательность отрезков называется *стягивающейся.*

В этом же смысле можно говорить о стягивающейся последовательности интервалов или полуинтервалов.

Теорема. *Если данные отрезки образуют стягивающуюся последовательность, то они имеют единственную общую точку.*

Доказательство. Пусть

$$[a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \ldots \supset [a_n,\ b_n] \supset \ldots$$

и

$$\lim (b_n - a_n) = 0.$$

Очевидно, что

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant, \ldots,$$

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots .$$

Кроме того, так как $a_n < b_n$, для всех n имеем

$$a_n < b_1 \text{ и } b_n > a_1.$$

Отсюда видно, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, как монотонные и ограниченные, являются сходящимися:

$$\lim a_n = a,\ \lim b_n = b,$$

причем ясно, что

$$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$$

для всех n.

Докажем, что $a = b$. В самом деле, если бы было $a < b$, то для всех n имели бы

$$b_n - a_n \geqslant b - a > 0,$$

что противоречит условию $\lim (b_n - a_n) = 0$. Следовательно, $a = b$ и точка

$$a = \lim a_n = \lim b_n$$

есть единственная точка, принадлежащая всем данным отрезкам $[a_n,\ b_n]$ (черт. 4).

Следует обратить внимание на то, что стягивающаяся последовательность интервалов или полуинтервалов может и не иметь общей точки.

Так, например, полуинтервалы

$$\delta_1 = (0 < x \leqslant 1], \quad \delta_2 = \left(0 < x \leqslant \frac{1}{2}\right], \ \ldots,$$

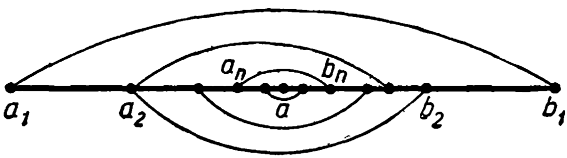
$$\delta_n = \left(0 < x \leqslant \frac{1}{n}\right], \ \ldots$$

образуют стягивающуюся последовательность, так как

$$\delta_1 \supset \delta_2 \supset \ \ldots \supset \delta_n \supset \ \ldots$$

и длина δ_n, равная $\frac{1}{n}$, стремится к 0, когда n неограниченно возрастает, однако эти полуинтервалы не имеют ни одной общей точки.

В самом деле, любая точка $\alpha \leqslant 0$ не только не может быть общей для данных полуинтервалов, но даже не принадлежит ни одному из них. В то же время для любого $\alpha > 0$ можно найти такое натуральное число n, что будет $\frac{1}{n} < \alpha$, а так как δ_n содержит только те точки x, для которых $0 < x \leqslant \frac{1}{n}$, то α не содержится в δ_n. Следовательно, точки, принадлежащей всем полуинтервалам δ_n данной стягивающейся последовательности $\{\delta_n\}$, не существует.



Черт. 4

УПРАЖНЕНИЯ

10. Выяснить, существуют ли точки, принадлежащие

а) всем интервалам $(0,\ 2)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{4},\ \frac{5}{4}\right)$, ...,

б) всем интервалам $(0,\ 1)$, $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$, $\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$, ..., в) всем полуинтервалам $(0, 1]$,

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right], \left(\frac{2}{3}, 1\right], \left(\frac{3}{4}, 1\right], \dots .$$

§ 5. Предельные точки последовательностей

Точка ξ называется *предельной точкой последовательности*

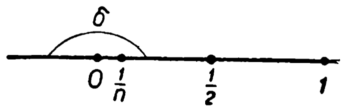
$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

если в любом как угодно малом интервале δ, содержащем точку ξ, содержится бесконечное множество членов данной последовательности (которые могут оказаться и равными между собой).

Рассмотрим несколько примеров.

Последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$



Черт. 5

имеет предельную точку 0. Действительно, каким бы малым интервал δ, содержащий 0, ни был, при достаточно большом n точка $\frac{1}{n}$, а значит, и все последующие точки: $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots$, которых бесконечно много, будут содержаться в интервале δ. Других предельных точек у данной последовательности, очевидно, нет (черт. 5).

Для последовательности

$$1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \dots$$

точка 1 — предельная, так как любой интервал δ, содержащий точку 1, содержит бесконечное множество членов данной последовательности, именно — все члены последовательности, стоящие на нечетных местах, так как все они равны 1, а δ содержит точку 1.

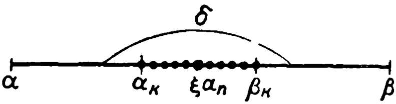
Последовательность

$$1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots,$$

очевидно, предельных точек не имеет.

Теорема Больцано—Вейерштрасса. *Всякая ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Из этого следует, что существует такой отрезок $[\alpha, \beta]$ (черт. 6), в котором содержатся все члены данной последовательности. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ пополам. Тогда по крайней мере одна половина $[\alpha, \beta]$ будет содержать бесконечное множество членов $\{a_n\}$, так как если бы каждая половина $[\alpha, \beta]$ содержала только конечное число членов последовательности $\{a_n\}$, то и на отрезке $[\alpha, \beta]$ было бы только конечное число членов этой последовательности, а не вся последовательность.



Черт. 6

Пусть отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ есть та половина $[\alpha, \beta]$, в которой содержится бесконечное множество членов $\{a_n\}$, а если обе половины $[\alpha, \beta]$ таковы, то за $[\alpha_1, \beta_1]$ возьмем любую из них. Теперь разобьем пополам $[\alpha_1, \beta_1]$ и опять получим отрезок $[\alpha_2, \beta_2]$, содержащий бесконечное множество членов $\{a_n\}$ и представляющий половину $[\alpha_1, \beta_1]$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность стягивающихся отрезков, так как

$$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset \ldots \supset [\alpha_k, \beta_k] \supset \ldots$$

и при неограниченном возрастании k

$$\lim (\beta_k - \alpha_k) = \lim \frac{\beta - \alpha}{2^k} = 0.$$

Поэтому существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам $[\alpha_k, \beta_k]$.

Докажем, что полученная точка ξ будет предельной точкой последовательности $\{a_n\}$. В самом деле, для как угодно малого интервала δ, содержащего точку ξ, существует такой номер k, что отрезок $[\alpha_k, \beta_k]$ будет содержаться в интервале δ, так как $\xi = \lim \alpha_k = \lim \beta_k$. Но отрезок $[\alpha_k, \beta_k]$, а вместе с ним и интервал δ содержат бесконечное множество членов последовательности $\{a_n\}$. Следовательно, ξ есть предельная точка данной последовательности $\{a_n\}$.

Из этой теоремы вытекает важное следствие, которым в дальнейшем будем часто пользоваться. До формулировки этого следствия введем понятие подпоследовательности.

Если из последовательности

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

выделить часть членов с номерами

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots,$$

то получится новая последовательность

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots,\ a_{n_k},\ \ldots,$$

которая называется *подпоследовательностью* данной последовательности $\{a_n\}$.

Следствие. *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

В самом деле, пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Тогда она имеет по крайней мере одну предельную точку ξ. Образуем последовательность отрезков

$$[\alpha_1,\ \beta_1] \supset [\alpha_2,\ \beta_2] \supset \ldots \supset [\alpha_k,\ \beta_k] \supset \ldots,$$

содержащих ξ и стягивающихся к точке ξ. Это всегда можно сделать. Так как ξ есть предельная точка последовательности $\{a_n\}$, то любой отрезок $[\alpha_k,\ \beta_k]$ содержит бесконечное множество членов $\{a_n\}$ и, значит, члены последовательности со сколь угодно большими номерами. Обозначим первый член последовательности $\{a_n\}$, содержащийся в $[\alpha_1,\ \beta_1]$, через a_{n_1}; первый член последовательности $\{a_n\}$, стоящий за a_{n_1} и содержащийся в $[\alpha_2,\ \beta_2]$, — через a_{n_2} и т. д. Вообще обозначим через a_{n_k} первый за $a_{n_{k-1}}$ член последовательности $\{a_n\}$, содержащийся в $[\alpha_k,\ \beta_k]$. Тогда получим подпоследовательность

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots,\ a_{n_k},\ \ldots,$$

которая сходится к ξ, так как

$$|a_{n_k}-\xi| \leqslant |\beta_k-\alpha_k| = \frac{\beta_1-\alpha_1}{2^{k-1}} \to 0,$$

когда k неограниченно возрастает.

УПРАЖНЕНИЯ

11. Найти предельные точки последовательности

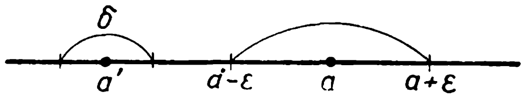
$$\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2^2},\ 1,\ \frac{1}{2^3},\ -1,\ \frac{1}{2^4},\ 1,\ \ldots.$$

12. Доказать, что если верхняя (нижняя) грань последовательности не содержится в этой последовательности, то она является предельной точкой данной последовательности.

§ 6. Второе определение предела последовательности

Здесь докажем теорему, которая позволит дать другое определение понятия предела последовательности, равносильное первоначальному определению.

Теорема. *Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и имела единственную предельную точку.*



Черт. 7

Необходимость. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный некоторому числу a. Тогда она ограничена (см. теорему в § 1).

Докажем, что последовательность $\{a_n\}$ имеет единственную предельную точку. Для этого достаточно показать, что, кроме точки a, которая, будучи пределом $\{a_n\}$, очевидно, будет и предельной точкой последовательности $\{a_n\}$, не существует никакой другой предельной точки $\{a_n\}$.

Пусть a' — любое число, отличное от a. Возьмем интервал δ, содержащий a', и интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ настолько малыми, чтобы они не имели общих точек. Это всегда возможно, так как $a' \neq a$ (черт. 7). В силу того, что $a = \lim a_n$, найдется такой номер N, что все члены последовательности $\{a_n\}$ с номерами $n > N$ будут находиться в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а вне его могут быть только $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Отсюда следует, что в интервале δ может быть только конечное число членов последовательности $\{a_n\}$ и поэтому a' не может быть предельной точкой последовательности $\{a_n\}$. Следовательно, точка a есть единственная предельная точка последовательности $\{a_n\}$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то есть содержится на некотором отрезке $[m, M]$, и имеет единственную предельную точку, которую обозначим через a. Докажем, что a есть предел данной последовательности.

В самом деле, если возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, то вне интервала $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, то есть на отрезках $[m,\ a - \varepsilon]$ и $[a + \varepsilon,\ M]$, будет только конечное число членов $\{a_n\}$, иначе там имели бы еще хотя бы одну предельную точку последовательности $\{a_n\}$ и поэтому точка a не была бы *единственной* предельной точкой $\{a_n\}$, что противоречит условию. Среди конечного числа членов $\{a_n\}$, находящихся вне $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, найдется член $\{a_n\}$ с наибольшим номером. Пусть этот номер будет N. Тогда все a_n с номерами, большими N, находятся в интервале $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, то есть

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

для всех $n > N$, а это означает, что

$$a = \lim a_n.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее определение понятий сходимости и предела последовательности:

Последовательность $\{a_n\}$ называется сходящейся к пределу a, если она ограничена и имеет единственную предельную точку a.

Из новой формулировки понятия предела последовательности непосредственно следует, что последовательность может иметь только *один* предел.

Отсюда же вытекает, что последовательность расходится в том случае, когда она либо не ограничена, либо ограничена, но имеет более одной предельной точки.

УПРАЖНЕНИЯ

13. Выяснить, сходятся ли последовательности:

а) $0,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -2,\ \frac{2}{3},\ -3,\ \frac{3}{4},\ -4,\ \ldots;$

б) $2,\ -1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{1}{4},\ \ldots$

§ 7. Критерий Коши

Часто бывает важно установить, сходится ли данная последовательность к некоторому пределу, но неважно, чему равен этот предел. Поэтому мы должны иметь такой признак сходимости последовательности, который был бы выражен только при помощи членов последовательности, то есть при помощи только того, что мы имеем, когда нам дана последовательность. В качестве такого признака нельзя взять определение понятия предела последовательности, так как при его формулировке уже приходится пользоваться самим пределом, о существовании которого идет речь.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие существования предела последовательности, выраженное только при помощи членов последовательности.

Это условие сходимости последовательности называют **критерием** Коши.

Теорема. *Для сходимости последовательности*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N, *что для всех* $n > N$ *и* $m > N$ *было бы верно неравенство*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Необходимость. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и имеет предел, равный некоторому числу a.

Возьмем любое положительное ε. В силу того, что по условию

$$\lim a_n = a,$$

найдется такой номер N, что для всех $n > N$ будет верно неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых $n > N$ и $m > N$ будем иметь:

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leqslant |a_m - a| + |a - a_n| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ и $m > N$ верно неравенство

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть условие, о котором говорится в теореме, выполнено. Докажем, что данная последовательность сходится.

Прежде всего заметим, что из выполнения этого условия вытекает ограниченность данной последовательности.

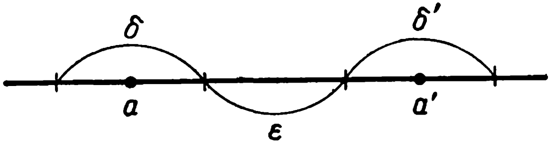
В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$, например для $\varepsilon = 1$, найдется такой номер N, что для всех $m > N$ и $n > N$ будет верно неравенство

$$| a_m - a_n | < \varepsilon = 1.$$

В частности,

$$| a_m - a_{N+1} | < 1$$

для всех $m > N$. Это означает, что все члены последовательности $\{a_n\}$ с номерами, большими N, содержатся в интервале $(a_{N+1} - 1,\ a_{N+1} + 1)$, а вне этого интервала могут



Черт. 8

быть только $a_1, a_2, \ldots, a_N$, то есть конечное число членов данной последовательности. Поэтому, поступая так, как при доказательстве теоремы в § 1, мы можем образовать такой отрезок $[m, M]$, который охватит как интервал $(a_{N+1} - 1,\ a_{N+1} + 1)$, так и члены последовательности $\{a_n\}$, оказавшиеся вне этого интервала. Этот отрезок будет содержать всю последовательность $\{a_n\}$. Поэтому последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Отсюда следует, что данная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку. Пусть это будет точка a.

Докажем, что, кроме a, нет других предельных точек последовательности $\{a_n\}$.

Действительно, пусть $a' \neq a$ есть еще одна предельная точка последовательности $\{a_n\}$. Тогда возьмем интервалы δ и δ', содержащие соответственно точки a и a', настолько малыми, чтобы между ними остался промежуток, что всегда можно сделать, так как точки a и a', не совпадают. Обозначим расстояние между интервалами δ и δ' через ε (черт. 8.). Заметим теперь, что каким бы большим номер N мы ни выбрали, всегда найдется в интервале δ такая точка a_n, что будет $n > N$, так как в противном случае интервал δ содержал бы не более N членов $\{a_n\}$, т. е. конечное число, тогда как a есть предельная точка последовательности $\{a_n\}$, и поэтому интервал δ содержит бесконечное множество членов $\{a_n\}$. Аналогично можно показать, что в интервале δ' найдется a_m с номером $m > N$. Отсюда следует, что при любом как угодно большом N найдутся такие $n > N$ и $m > N$, что будет верно неравенство

$$| a_m - a_n | \geqslant \varepsilon.$$

Но это противоречит данному условию, согласно которому для любого $\varepsilon > 0$, а значит, и для нашего ε, равного расстоянию между интервалами δ и δ', существует такое N, что

$$| a_m - a_n | < \varepsilon$$

для всех $m > N$ и $n > N$.

Полученное противоречие доказывает, что, кроме a, нет другой предельной точки последовательности $\{a_n\}$.

Итак, данная последовательность $\{a_n\}$ ограничена и имеет единственную предельную точку a. Следовательно, она сходится и

$$a = \lim a_n.$$

Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

14. Доказать сходимость последовательности $\{a_n\}$, если

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

15. Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Доказать, что для сходимости последовательности $\{S_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое N, что для всех $n > N$ было бы справедливо неравенство

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | < \varepsilon,$$

каким бы натуральное число p ни было.

§ 8. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Здесь мы рассмотрим ряд теорем касающихся таких последовательностей, которые получены из данных сходящихся последовательностей путем применения арифметических операций.

Предварительно докажем несколько утверждений, связанных с последовательностями, сходящимися к нулю.

Лемма 1. *Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ имела предел, равный числу a, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n = a_n - a$, сходилась к нулю.*

Необходимость. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный числу a. Положим

$$\alpha_n = a_n - a$$

и докажем, что последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к нулю.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию

$$\lim a_n = a,$$

то существует такой номер N, что для всех $n > N$ верно неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

или, что то же самое,

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim \alpha_n = 0.$$

Достаточность. Пусть имеем последовательность $\{a_n\}$ и пусть известно, что последовательность $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n = a_n - a$, сходится к нулю. Докажем, что данная последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию $\lim \alpha_n = 0$, то существует такой номер N, что для всех $n > N$ верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$a = \lim a_n.$$

Лемма 2. *Если последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ сходятся к нулю, то и последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ сходится к нулю.*

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию

$$\lim \alpha_n = 0,$$

то существует такой номер N', что для всех $n > N'$ верно неравенство

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По условию имеем также

$$\lim \beta_n = 0,$$

поэтому существует такой номер N'', что для всех $n > N''$ верно

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n > N$, где N — большее из чисел N' и N''.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ верно неравенство

$$|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim (\alpha_n + \beta_n) = 0.$$

Подобными же рассуждениями можно доказать лемму, взяв вместо двух последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ любое конечное число последовательностей, сходящихся к нулю. Можно распространить доказательство леммы на этот общий случай и методом математической индукции.

Лемма 3. *Если последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ сходятся к нулю, то и последовательность $\{\alpha_n - \beta_n\}$ сходится к нулю.*

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно заметить, что

$$\alpha_n - \beta_n = \alpha_n + (-\beta_n)$$

и что вместе с $\{\beta_n\}$ сходится к нулю также и последовательность $\{-\beta_n\}$, так как $|-\beta_n| = |\beta_n|$, и поэтому, когда имеет место неравенство $|\beta_n| < \varepsilon$, тогда верно и неравенство $|-\beta_n| < \varepsilon$.

Лемма 4. *Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, а последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к нулю, то и последовательность $\{a_n \alpha_n\}$ сходится к нулю.*

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Из ограниченности последовательности $\{a_n\}$ следует существование такого числа $M > 0$, что для всех n верно неравенство

$$| a_n | \leqslant M.$$

Так как по условию

$$\lim \alpha_n = 0,$$

то существует такой номер N, что для всех $n > N$ верно

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Отсюда следует, что

$$|a_n\alpha_n| = |a_n| \, |\alpha_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

для всех $n > N$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ верно неравенство

$$| a_n\alpha_n | < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim (a_n\alpha_n) = 0.$$

Следствие 1. *Если последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к нулю, то и последовательность $\{a\alpha_n\}$, где a — некоторое число, также сходится к нулю.*

Это вытекает из доказанной леммы, так как очевидно, что последовательность, в которой все члены равны одному и тому же числу a, ограничена.

Следствие 2. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, а последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к нулю, то и последовательность $\{a_n\alpha_n\}$ сходится к нулю.*

Справедливость этого утверждения вытекает из доказанной леммы, так как всякая последовательность, имеющая предел, ограничена.

Лемма 5. *Если последовательность $\{a_n\}$, где $a_n \neq 0$, имеет предел, отличный от нуля, а последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к нулю, то и последовательность $\left\{\frac{\alpha_n}{a_n}\right\}$ сходится к нулю.*

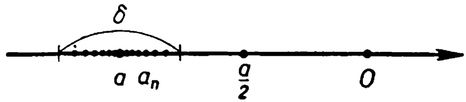
Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По условию

$$\lim a_n = a \neq 0.$$

Из этого следует существование такого номера N', что для всех $n > N'$ верно неравенство

$$|a_n| > \frac{|a|}{2} \tag{1}$$

Действительно, возьмем интервал δ, содержащий точку a (черт. 9), настолько малым, чтобы точка $\frac{a}{2}$ не принадлежала этому интервалу δ. По определению предела после-



Черт. 9

довательности, все a_n, номера которых больше некоторого числа N', будут содержаться в интервале δ. Но для каждого $a_n \in \delta$ верно неравенство (1).

Из условия

$$\lim \alpha_n = 0$$

следует существование такого номера N'', что для всех $n > N''$ верно неравенство

$$|\alpha_n| < \frac{|a|}{2}\varepsilon. \tag{2}$$

Обозначая через N большее из чисел N' и N'', будем иметь одновременно неравенства (1) и (2) для всех $n > N$. Отсюда следует, что для всех $n > N$

$$\left|\frac{\alpha_n}{a_n}\right| = \frac{|\alpha_n|}{|a_n|} < \frac{|a|}{2}\varepsilon : \frac{|a|}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ верно неравенство

$$\left|\frac{\alpha_n}{a_n}\right| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim \frac{\alpha_n}{a_n} = 0.$$

Воспользуемся этими леммами для доказательства теорем, касающихся арифметических операций над сходящимися последовательностями.

Теорема 1. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ — *сходящиеся, то и последовательность* $\{a_n + b_n\}$ *сходится, причем*

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n. \tag{I}$$

Доказательство. Пусть

$$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b.$$

Положим

$$\alpha_n = a_n - a, \ \beta_n = b_n - b.$$

Согласно лемме 1, последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ сходятся к нулю.

Заметим, что

$$(a_n + b_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n.$$

В силу леммы 2 последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ сходится к нулю. Поэтому, согласно лемме 1, имеем

$$\lim (a_n + b_n) = a + b,$$

то есть последовательность $\{a_n + b_n\}$ сходится и имеет место равенство (I).

Так же можно доказать теорему, взяв вместо двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ любое *конечное* число сходящихся последовательностей. Можно распространить доказательство теоремы на этот общий случай и методом математической индукции.

Теорема 2. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходящиеся, то и последовательность* $\{a_n \ b_n\}$ *сходится, причем*

$$\lim (a_n b_n) = \lim a_n \ \lim b_n. \tag{II}$$

Доказательство. Пусть

$$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b.$$

Положим

$$\alpha_n = a_n - a, \ \beta_n = b_n - b.$$

Согласно лемме 1, последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ сходятся к нулю.

Заметим, что

$$a_n b_n - ab = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab =$$
$$= \alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n.$$

Положим

$$\gamma_n = \alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n.$$

В силу следствий из леммы 4, последовательности $\{\alpha_n b\}$, $\{a\beta_n\}$ и $\{\alpha_n\beta_n\}$ сходятся к нулю, поэтому, согласно лемме 2, сходится к нулю и последовательность $\{\gamma_n\}$.

Наконец, из равенства

$$a_n b_n - ab = \gamma_n$$

следует, по лемме 1, что имеем

$$\lim (a_n b_n) = ab,$$

то есть последовательность $\{a_n b_n\}$ сходится и имеет место равенство (II).

Методом математической индукции доказательство этой теоремы может быть распространено на случай любого *конечного* числа сходящихся последовательностей (сомножителей).

Следствие 1. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, а c — какое угодно число, то и последовательность $\{ca_n\}$ сходится, причем*

$$\lim (ca_n) = c \lim a_n.$$

Следствие 2. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся, то и последовательность $\{a_n - b_n\}$ сходится, причем*

$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

Следствие 1 очевидно, а чтобы убедиться в справедливости следствия 2, достаточно заметить, что

$$a_n - b_n = a_n + (-1)\,b_n,$$

и воспользоваться уже доказанными утверждениями.

Теорема 3. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся и* $b_n \neq 0$ *и* $\lim b_n \neq 0$, *то и последовательность* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ *сходится, причем*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}. \tag{III}$$

Доказательство. Пусть

$$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b \neq 0.$$

Положим

$$\alpha_n = a_n - a, \ \beta_n = b_n - b.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b^2 + b\beta_n} = \eta_n.$$

Последовательность $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ сходится к нулю. Последовательность $\{b^2 + b\beta_n\}$ имеет предел, равный $b^2 \neq 0$. Кроме того, для всех достаточно больших n $b^2 + b\beta_n \neq 0$, так как $b\beta_n \to 0$. Поэтому на основании леммы 5 заключаем, что последовательность $\{\eta_n\}$ сходится к нулю.

Наконец, из равенства

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \eta_n$$

следует по лемме 1, что имеем

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

то есть последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ сходится и имеет место равенство (III).

16. Найти предел последовательности $\{a_n\}$, где

а) $a_n = \dfrac{3n^2 - 7n + 2}{n(5n-1)}$,

б) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

в) $a_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$,

г) $a_n = \dfrac{\sqrt[5]{n^4} \cos n!}{2n-1}$,

д) $a_n = \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^{7n}$,

е) $a_n = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+8}\right)^{n^2}$.

ГЛАВА III

ФУНКЦИИ

§ 1. Понятие функции

Все явления в окружающем нас мире, все процессы связаны между собой. Так, например, процесс нагревания металлического стержня вызывает изменение длины этого стержня.

Подобных примеров сколько угодно.

Отсюда ясно, что наука не может изучать явления в природе изолированно друг от друга, а должна прежде всего выяснять те связи, закономерности, которые существуют между ними.

Следовательно, и математика должна изучать зависимости, существующие между различными величинами.

Чтобы охватить математическим понятием зависимости, которые существуют между величинами, в математике ввели понятие *функции*.

Рассмотрим в качестве примера упомянутый процесс нагревания металлического стержня. В этом процессе мы имеем две величины: температуру t и длину l стержня, между которыми существует зависимость, выражающаяся в том, что каждому определенному значению температуры t соответствует по известному закону физики одно определенное значение длины l.

Таким образом, если мы, управляя процессом нагревания стержня, величине t даем значения сами, то значение l каждый раз определяется выбранным значением t, зависит от данного значения t. Чтобы указать на такую зависимость между l и t, говорят, что l есть функция от t.

В этом же смысле можно сказать, что площадь круга S есть функция радиуса круга r, так как по формуле

$$S = \pi r^2$$

каждому определенному значению r соответствует одно определенное значение S.

Понятие функции является одним из основных понятий математического анализа. Наиболее общее определение этого понятия формулируется так:

Если по некоторому закону каждому элементу x из множества E поставлен в соответствие определенный элемент y из множества M, то говорят, что на множестве E определена функция $f(x)$, и пишут

$$y = f(x).$$

Множество E называют *областью определения* (*существования*) *функции*. Определение понятия функции вполне согласуется с примерами, рассматриваемыми выше. Так, в примере с нагреванием стержня мы также имели два множества: $E = \{t\}$ — множество всевозможных значений температуры t стержня и $M = \{l\}$ — множество значений длины l стержня, и каждому элементу $t \in E$ (каждому значению температуры) соответствовал определенный элемент $l \in M$ (определенное значение длины стержня).

Множества E и M в определении функции могут быть любыми, состоящими из каких угодно элементов. Для нас пока наибольший интерес представляет тот случай, когда E и M — множества действительных чисел. В этом случае говорят, что на множестве E определена действительная функция (или просто функция) $f(x)$ действительного переменного x, причем x называют аргументом или независимым переменным, в отличие от функции или зависимого переменного y. В качестве значения x можно взять любое число из множества E, какое только нам будет угодно, тогда как значение функции y определяется выбранным значением x, зависит от значения аргумента x.

Если сравнить определение числовой последовательности с определением понятия функции, то мы заметим, что задание последовательности $\{a_n\}$ есть задание функции на множестве натуральных чисел $\{n\}$, причем a_n есть значение этой функции, соответствующее значению аргумента, равному числу n:

$$a_n = f(n).$$

§ 2. Способы задания функции

Хотя всегда пишут равенство $y = f(x)$, чтобы выразить, что y есть функция от x, однако это не означает, что функция всегда определяется формулой, где указаны те действия, которые надо произвести над значением аргумента x, чтобы получить соответствующее значение функции y. Функция определена, если дано то соответствие между элементами множеств $E = \{x\}$ и $M = \{y\}$, о котором говорится в формулировке понятия функции, а выражено это соответствие формулой или нет, это не является существенным.

Например, функция, известная под названием функции Дирихле [мы ее обозначим через $D(x)$], определяется так:

$D(x) = 1$, если x рационально,

$D(x) = 0$, если x иррационально.

Ясно, что здесь мы имеем функцию, определенную на множестве всех действительных чисел, хотя и формула, выражающая зависимость между x и $D(x)$, нам не дана.

Если функция задана формулой вида $y = f(x)$, то говорят, что она задана *аналитически*. Правая часть формулы называется *аналитическим выражением* функции.

Нельзя смешивать функцию с аналитическим выражением этой функции.

Пусть, например, функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$ формулой

$$f(x) = x^2.$$

Выражение x^2, которое является аналитическим выражением данной функции, имеет определенные значения не только тогда, когда x содержится на отрезке $[0, 1]$, но и тогда, когда $x < 0$ или $x > 1$, а данная функция $f(x)$ определена только на отрезке $[0, 1]$, и поэтому не имеет смысла говорить о значениях $f(x)$ при $x < 0$ или $x > 1$.

Еще пример. Пусть

$$f(x) = x^2, \text{ если } x \leqslant 0, \quad f(x) = x + 1, \text{ если } x > 0.$$

Здесь мы имеем о д н у функцию $f(x)$, заданную на множестве всех действительных чисел, причем x^2 является аналитическим выражением этой функции для значений $x \leqslant 0$, а при $x > 0$ аналитическое выражение данной функции уже другое: $x + 1$.

Функция $y = f(x)$ может быть задана *табличным способом*, то есть таблицей, в которой содержатся значения аргумента x и соответствующие значения функции y.

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

Табличным способом задания функции пользуются обычно тогда, когда функциональную зависимость между двумя величинами x и y изучают опытным путем. В таких случаях рядом опытов устанавливают, что значениям x, равным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствуют значения y, равные $y_1, y_2, \ldots, y_n$, и затем эти результаты сводят в таблицу.

Пользуясь таблицей, по значению аргумента x можно быстро найти соответствующее значение функции y. Поэтому очень часто составляют таблицу значений функции, соответствующих некоторым значениям аргумента, даже тогда, когда функция может быть задана аналитически. Примерами таких таблиц могут служить таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических функций. Конечно, таблицей нельзя охватить все значения функции, если ее область существования есть бесконечное множество.

Существует *графический способ* задания функции. Он основан на геометрическом изображении функции, состоящем в следующем.

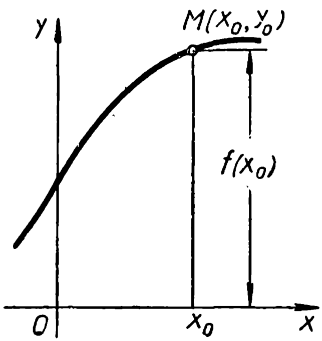
Пусть имеем функцию

$$y = f(x).$$

Возьмем прямоугольную систему координат и построим точку $M(x, f(x))$, абсцисса которой есть значение аргумента x, а ордината — соответствующее значение функции $f(x)$. Сделав такое построение для каждого значения аргумента x из области определения функции $f(x)$, мы получим геометрическое место точек, которое и будем называть геометрическим изображением или *графиком* функции $f(x)$.

Отсюда ясно, что для задания функции достаточно дать график этой функции. Имея график функции $y = f(x)$, легко найти ее значение $f(x_0)$ при любом значении $x = x_0$. Для этого надо взять на графике точку M, абсцисса которой равна x_0 (через точку x_0 на оси Ox провести прямую параллельно оси Oy до пересечения с графиком), и вычислить ординату y_0 этой точки. Число y_0 и будет искомым значением $f(x_0)$ функции $y = f(x)$, заданной графиком (черт. 10).

Графический способ задания функции часто встречается в физике и технике, где пользуются самозаписывающими приборами. Такой прибор выдает экспериментатору некоторую кривую, представляющую график изучаемой функции.



Черт. 10

УПРАЖНЕНИЯ

17. Дана функция

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Найти $f(0)$, $f(1)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

18. Даны функции

$\varphi(x)=\log_a x,\quad \psi(x)=a^x.$

Доказать, что

$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=\varphi(x_1x_2),$

$\psi(x_1+x_2)=\psi(x_1)\psi(x_2).$

19. Если область существования функции, заданной формулой вида $y=f(x)$, не указана, то подразумевают, что функция определена для каждого действительного числа x, для которого по этой формуле соответствует определенное действительное число y.

Найти область существования каждой из следующих функций:

а) $y=\sqrt[3]{\frac{x}{2-x}}$, б) $y=\sqrt{3x-x^2}$,

в) $y=\frac{1}{|x|-1}$, г) $y=\lg(x^3-x)$.

§ 3. Предел функции в бесконечности

Во многих случаях приходится исследовать функции, заданные в бесконечных интервалах вида $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$. Для характеристики поведения функции при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ пользуются понятием *предела функции в бесконечности*.

Пусть функция $f(x)$ определена либо на всей числовой оси — в интервале $(-\infty, +\infty)$, либо по крайней мере вне некоторого интервала (a, b), чтобы имело смысл говорить о значениях $f(x)$ для x, как угодно больших по абсолютной величине.

Число A называют пределом функции f (x) при x, стремящемся к бесконечности, и пишут

$$A=\lim_{x\to\infty} f(x),$$

если для любого $\varepsilon>0$ *(хотя бы и как угодно малого) существует такое число* $N>0$, *что для всех x, удовлетворяющих условию* $|x|>N$, *верно неравенство*

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Заменив в этом определении условие $|x|>N$ на $x>N$ или на $x<-N$, мы получим определение

$$A=\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{или} \quad A=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Причем о пределе функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ имеет смысл говорить тогда, когда $f(x)$ определена в интервале вида $(b, +\infty)$, а о пределе $f(x)$ при $x\to-\infty$ можно говорить тогда, когда функция $f(x)$ определена в интервале вида $(-\infty, a)$.

Выше мы уже обращали внимание на то, что числовая последовательность $\{a_n\}$ представляет функцию, определенную на множестве натуральных чисел $\{n\}$. Теперь мы замечаем, что понятие предела последовательности $\{a_n\}$ можно рассматривать как распространение понятия предела функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ на случай функции $f(n)=a_n$:

$$a=\lim a_n=\lim_{n\to+\infty} f(n).$$

Поэтому, если a есть предел последовательности $\{a_n\}$, то часто пишут

$$a=\lim_{n\to+\infty} a_n,$$

или даже

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n,$$

так как ясно, что здесь $n\to\infty$ означает $n\to+\infty$.

Из определений предела функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ следует, что

$$A=\lim_{x\to\infty} f(x)$$

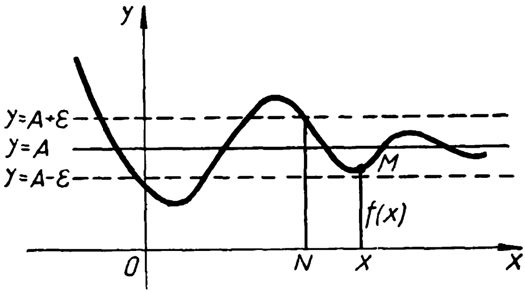
тогда, и только тогда, когда одновременно

$$A=\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{и} \quad A=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Геометрический смысл соотношения

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

заключается в том, что точка $M[x, f(x)]$ графика функции $f(x)$ (который в этом случае тянется вправо неограниченно далеко) отклоняется от горизонтальной прямой $y = A$ как угодно мало, если x достаточно велико. В этом случае говорят, что при $x \to +\infty$ кривая $y=f(x)$ *асимптотически* приближается к прямой $y = A$ (черт. 11).



Черт. 11

Аналогично этому соотношение

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

означает, что кривая $y = f(x)$ асимптотически приближается к прямой $y = A$ при $x \to -\infty$.

Рассмотрим пример. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Здесь функция $f(x)$ определена для всех $x \neq 0$, то есть в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Докажем, что при $x \to \infty$ данная функция имеет предел, равный нулю:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

В самом деле, возьмем любое $\varepsilon > 0$. Если теперь взять $N = \frac{1}{\varepsilon}$, то для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, мы будем иметь

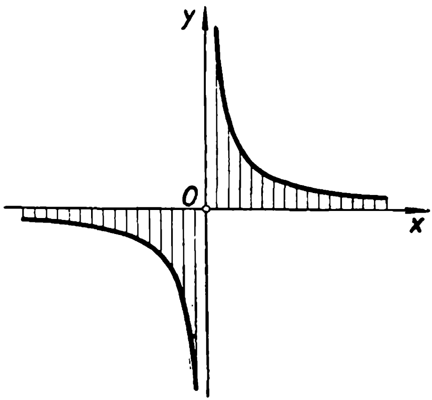
$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{N} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, верно неравенство

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Из этого следует, что график данной функции — кривая



Черт. 12

$y = \frac{1}{x}$ асимптотически приближается к прямой $y = 0$, то есть к оси Ox, как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ (черт. 12).

§ 4. Предел функции в точке

Здесь мы дадим определение одного из наиболее важных понятий математического анализа.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, кроме, быть может, самой точки x_0.

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ (которое может быть как угодно малым) существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

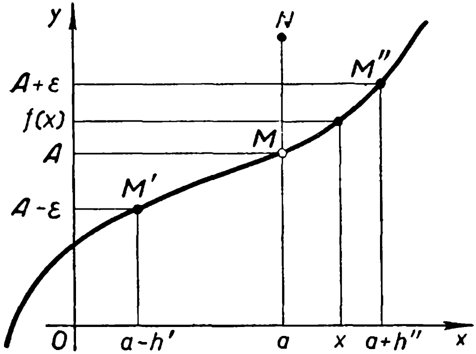
имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число A есть предел функции $f(x)$ в точке x_0, записывают так:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Понятие предела функции в точке поясним следующим геометрическим примером.



Черт. 13

Пусть функция $f(x)$ задана графически (черт. 13): при $x < a$ значения $f(x)$ определяются ординатами точек кривой $M'M$, при $x > a$ — ординатами точек кривой MM'', а $f(a)$ выражается ординатой точки N.

Таким образом, график данной функции получится, если взять кривую $M'MM''$ и точку M на кривой заменить точкой N.

Покажем, что в точке a функция $f(x)$ имеет предел, равный ординате A точки M.

Возьмем любое как угодно малое $\varepsilon > 0$. Отметим на оси Oy точки, соответствующие числам A, $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$. Обозначим через M' и M'' точки пересечения графика функции $f(x)$ с перпендикулярами к оси Oy соответственно в точках $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$. Затем из точек M' и M'' опустим перпендикуляры на ось Ox. Получим точки $a - h'$ и $a + h''$.

Из чертежа видно, что для любого $x \neq a$ из интервала $(a - h', a + h'')$ соответствующее значение функции $f(x)$ изображается точкой оси Oy, содержащейся между $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$, то есть для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию $a - h' < x < a + h''$, верно

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Обозначим через δ число, меньшее из двух положительных чисел h' и h''. Тогда интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$ будет содержаться в интервале $(a-h',\ a+h'')$. Поэтому неравенство $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$, или, что то же,

$$|f(x)-A| < \varepsilon,$$

верно для всех $x \neq a$ из интервала $(a-\delta,\ a+\delta)$, то есть для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию

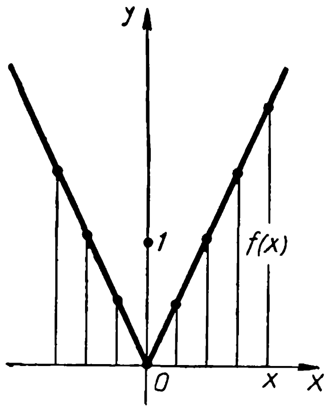
$$|x-a| < \delta.$$

Это и доказывает, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть

$$f(x) = 2|x|, \text{ если } x \neq 0,$$
$$f(0) = 1 \text{ (черт. 14).}$$



Черт. 14

Докажем, что данная функция в точке $x=0$ имеет предел, равный 0.

В самом деле, возьмем какое угодно $\varepsilon > 0$. Тогда, выбрав $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, для любого $x \neq 0$, удовлетворяющего условию

$$|x-0| = |x| < \delta,$$

мы будем иметь

$$|f(x)-0| = |f(x)| = 2|x| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Из определения понятия предела функции в точке следует, что если $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то любое число $B \neq A$ не может быть пределом этой функции $f(x)$ в той же точке x_0.

Т е о р е м а 1. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то она ограничена в окрестности точки x_0, то есть существуют такие $\delta > 0$ и $M > 0$, что в интервале*

$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *значения* $f(x)$ *по абсолютной величине не превосходят числа* M.

Доказательство. Пусть мы имеем

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$, например для $\varepsilon=1$, найдется такое δ, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, будет верно неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon=1.$$

Отсюда, учитывая, что

$$|f(x)|-|A|\leqslant|f(x)-A|,$$

получим

$$|f(x)|<|A|+1.$$

Обозначим через M число $|A|+1$, а если функция $f(x)$ определена в точке x_0, то за M возьмем большее из $|A|+1$ и $|f(x_0)|$. Тогда в каждой точке x интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, в которой функция $f(x)$ определена, мы будем иметь неравенство

$$|f(x)|\leqslant M.$$

Это означает, что данная функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0.

Теорема 2 (о переходе к пределу в неравенстве). *Если* $f(x)\leqslant\varphi(x)$ *для всех* x *в некоторой окрестности точки* x_0, *кроме, быть может, самой точки* x_0, *и каждая из функций* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *в точке* x_0 *имеет предел, то*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqslant\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Доказательство. Пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 обозначим соответственно через A и B. Надо доказать, что $A\leqslant B$.

Воспользуемся методом рассуждений от противного и допустим, что $A>B$. Тогда $B=A-h$, где $h>0$.

Возьмем

$$\varepsilon=\frac{h}{3}.$$

Так как

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

то найдется такое δ_1, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta_1, \tag{1}$$

будет верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{h}{3},$$

или, что то же,

$$A - \frac{h}{3} < f(x) < A + \frac{h}{3}. \tag{2}$$

По условию,

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = B,$$

поэтому найдется такое δ_2, что для всех $x \neq x_0$, для которых

$$|x - x_0| < \delta_2, \tag{3}$$

будет верно

$$B - \frac{h}{3} < \varphi(x) < B + \frac{h}{3}. \tag{4}$$

Обозначим через δ меньшее из двух чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

а значит и одновременно условиям (1) и (3), будут верны неравенства (2) и (4). Поэтому для указанных значений x должно быть

$$A - \frac{h}{3} < f(x) \leqslant \varphi(x) < B + \frac{h}{3} = A - \frac{2}{3} h.$$

Но полученное здесь неравенство

$$A - \frac{h}{3} < A - \frac{2}{3} h$$

явно неверно. Следовательно, неверно и допущение, что $A > B$, то есть мы имеем $A \leqslant B$, что и требовалось доказать.

Обратим внимание на то, что из строгого неравенства для функций $f(x) < \varphi(x)$ следует не обязательно строгое неравенство, а только нестрогое неравенство для их пределов

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Так, например, $f(x) = |x| < \varphi(x) = 2|x|$ для всех $x \neq 0$, но здесь, очевидно, мы имеем

$$\lim_{x\to 0}|x| = \lim_{x\to 0} 2|x| = 0.$$

Т е о р е м а 3 (о пределе промежуточной функции). *Если $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ для всех x в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в точке x_0 имеют один и тот же предел A, то и функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный тому же числу A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычитая из всех частей двойного неравенства, данного в условии, число A, мы получим

$$\varphi(x) - A \leqslant f(x) - A \leqslant \psi(x) - A. \tag{5}$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$.

Так как

$$A = \lim_{x\to x_0} \varphi(x),$$

то найдется такое δ_1, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta_1,$$

будет верно неравенство

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon,$$

или, что то же,

$$-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon. \tag{6}$$

По условию также

$$A = \lim_{x\to x_0} \psi(x),$$

поэтому найдется такое δ_2, что для всех $x \neq x_0$, для которых

$$|x - x_0| < \delta_2,$$

будет верно

$$-\varepsilon < \psi(x) - A < \varepsilon. \tag{7}$$

Из неравенств (5), (6) и (7) следует, что

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon,$$

или, что то же самое,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

где δ — меньшее из δ_1 и δ_2. А это означает, что

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Теорема доказана.

Аналогичным образом доказываются теоремы, которые мы получим, если в этих теоремах пределы функций в точке заменим пределами при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

В частности, верны аналогичные теоремы для последовательностей.

УПРАЖНЕНИЯ

20. Сформулировать с помощью неравенств, что значит

а) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$, в) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 3$,

б) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$, г) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -5$.

21. Дана функция $f(x) = x^3$. Имеем $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$. Каким надо взять δ, чтобы из $|x - 2| < \delta$ следовало $|x^3 - 8| < \varepsilon$?

22. Доказать теорему, аналогичную теореме 1 об ограниченности функции, имеющей предел: если функция $f(x)$ при $x \to \infty$ имеет предел, то существуют такие $N > 0$ и $M > 0$, что в области $|x| > N$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

23. Сформулировать и доказать теорему о переходе к пределу в неравенстве при $x \to \infty$.

24. Сформулировать и доказать теорему о пределе промежуточной функции при $x \to \infty$.

§ 5. Непрерывность функции

В математическом анализе большое место отводится изучению функций, обладающих свойством *непрерывности*. Это свойство определяется следующим образом.

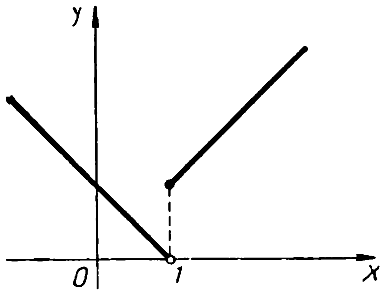
Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ (которое может быть как угодно малым) существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Сравнивая определение непрерывности функции в точке с определением предела функции в точке, мы замечаем, что между этими двумя понятиями существует тесная связь, которая заключается в следующем.



Черт. 15

Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0, если она в этой точке имеет предел и этот предел равен значению функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности x_0, не будет непрерывной в точке x_0 в следующих двух случаях: 1) когда $f(x)$ в точке x_0 не имеет предела и 2) когда $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, но он не равен $f(x_0)$.

Например, функция $f(x)$, определенная формулами

$$f(x) = x, \quad \text{если } x \geqslant 1,$$
$$f(x) = 1 - x, \quad \text{если } x < 1$$

(черт. 15), имеет разрыв, то есть не непрерывна, в точке $x_0 = 1$, так как она в этой точке не имеет предела.

Функция

$$f(x) = 2|x|, \quad \text{если } x \neq 0,$$
$$f(0) = 1 \quad \text{(черт. 14)},$$

рассмотренная выше, имеет разрыв в точке $x_0 = 0$, так как в данном случае имеем

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$
$$f(0) = 1$$

и, значит,

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0).$$

Точки разрыва функций будут подробно рассмотрены в § 17.

Можно получить еще одну формулировку понятия непрерывности функции, пользоваться которой иногда бывает удобнее.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой ее окрестности. Считая x исходной точкой, возьмем другое значение аргумента: $x + \Delta x$, отличающееся от первоначального x на некоторую величину Δx (положительную или отрицательную), которую будем называть *приращением аргумента*. Значение функции, соответствующее новому значению аргумента $x + \Delta x$, обозначим через $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Величину изменения функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

будем называть *приращением функции*.

Если учесть определение непрерывности функции при помощи предельного соотношения (1), то будет ясно, что непрерывность $f(x)$ в точке x выражается соотношением

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x). \qquad (2)$$

Но равенство (2) равносильно тому, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0, \qquad (3)$$

так как оба соотношения (2) и (3) означают одно и то же, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любом Δx, удовлетворяющем условию

$$|\Delta x| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon.$$

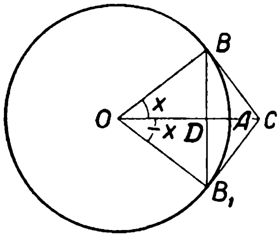
Следовательно, непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x заключается в выполнении в этой точке соотношения (3), которое можно записать в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в данном интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Все основные элементарные функции: степенная функция x^{α}, где α — любое действительное число, отличное от нуля, показательная функция a^x, где a — любое положительное число, отличное от 1, логарифмическая функция $\log_a x$, где $a>0$ и $a \neq 1$, тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции — непрерывны в области существования.

Эти функции будут подробно изучены в главе IV. Здесь мы рассмотрим в качестве примера только функцию $y = \cos x$, известную из элементарной математики, и докажем, что она непрерывна во всей области существования, то есть в интервале $(-\infty, +\infty)$.



Черт. 16

Предварительно докажем, что при любом x

$$|\sin x| \leqslant |x|. \qquad (4)$$

В самом деле, из чертежа 16, где в круге радиуса $r=1$ изображены острый $\angle AOB$, радианная величина которого равна x, и $\angle AOB_1$ симметричный $\angle AOB$, видно, что длина хорды BB_1, равняется $2\sin x$, а длина соответствующей дуги BB_1 равна $2x$. Так как длина дуги больше длины хорды, стягивающей эту дугу, то $2\sin x < 2x$ и, значит, $\sin x < x$. Это неравенство для рассматриваемых значений $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ можно записать в виде $|\sin x| < |x|$. Учитывая затем, что $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ и $|-x| = |x|$, замечаем, что неравенство $|\sin x| < |x|$ верно и для значений $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Так как $\sin 0 = 0$, то неравенство (4) доказано для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, обратим внимание на то, что для всех x, не принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1$, тогда как $|\sin x| \leqslant 1$ при любом x. Следовательно, неравенство (4) верно для любого x.

Перейдем к доказательству непрерывности $\cos x$.

Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой оси. Возьмем любую точку x. Дадим этому значению x приращение Δx. Тогда функция y получит приращение

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Замечаем, что

$$|\Delta y| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| = |\Delta x|$$

и, значит,

$$0 \leqslant |\Delta y| \leqslant |\Delta x|. \tag{5}$$

Согласно теореме о пределе промежуточной функции из двойного неравенства (5), следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0,$$

а это означает, что функция $y = \cos x$ непрерывна в рассматриваемой точке x, которая могла быть любой точкой числовой оси.

§ 6. Замечательный предел

Отношение $\frac{\sin x}{x}$ является функцией от x, определенной для всех $x \neq 0$.

Докажем, что $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеет предел, равный 1.

С этой целью возьмем круг, радиус которого равен 1, и в нем построим острый $\angle AOB$, радианную величину которого обозначим через x (черт. 16). Построим $\angle AOB_1$, симметричный $\angle AOB$. Точки B и B_1 соединим хордой. Наконец, проведем касательные к окружности в точках B и B_1.

Теперь, учитывая, что длина хорды меньше длины соответствующей дуги, а длина дуги меньше длины описанной около нее ломаной, можно написать неравенства

$$\overline{BB_1} < \smile{BB_1} < BCB_1,$$

или

$$2DB < 2\smile{AB} < 2BC.$$

Отсюда, замечая, что DB есть линия синуса, а BC — линия тангенса $\angle AOB$, и учитывая, что радиус круга равен 1, получим

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Разделив каждый член этого неравенства на $\sin x > 0$, мы получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

откуда следует

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (1)$$

Хотя неравенства (1) мы получили для значений x из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, они верны также и для x из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, так как

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Функция $\cos x$ непрерывна в любой точке, в частности в точке $x_0 = 0$. Поэтому мы имеем

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1. \qquad (2)$$

По теореме о пределе промежуточной функции из (1) и (2) следует, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (3)$$

Предельное соотношение (3) используется во многих вопросах математического анализа.

§ 7. Предел и непрерывность функции по Гейне

Понятие предела функции можно выразить при помощи понятия предела последовательности.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности G точки $x = a$, кроме, быть может, самой точки a. Таким образом, в любом как угодно малом интервале, содержащем точку a, содержится бесконечное множество точек $x \in G$. Поэтому всегда можно из окрестности G выделить последовательность точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \qquad (1)$$

отличных от a, которая была бы сходящейся к a. Причем такую последовательность можно образовать бесконечным множеством способов.

Пусть

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

Докажем, что *если последовательность* (1) *сходится к* a, *то соответствующая последовательность*

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots \tag{2}$$

сходится к A.

В самом деле, возьмем любое $\varepsilon > 0$. В силу того, что $A = \lim_{x \to a} f(x)$, найдется такое $\delta > 0$, что как только точка $x \in G$ удовлетворит условию

$$|x - a| < \delta, \quad \text{но} \quad x \neq a,$$

так будет верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Но так как последовательность (1) сходится к a, то по δ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ будет верно неравенство

$$|x_n - a| < \delta, \quad x_n \neq a,$$

откуда в свою очередь вытекает неравенство

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon$$

для всех $n > N$, а это означает, что последовательность (2) сходится к A.

Верно и обратное утверждение. *Если для любой последовательности* (1), *сходящейся к* a, *соответствующая последовательность* (2) *значений функции* $f(x)$ *сходится к* A, *то*

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

Применим метод рассуждений от противного. Допустим, что A не будет пределом функции $f(x)$ в точке a. Тогда не для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x - a| < \delta$, где $x \neq a$, вытекает неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Поэтому такое $\delta > 0$ не существует по крайней мере для одного значения $\varepsilon > 0$, которое мы обозначим через ε_0.

Таким образом, каким бы число $\delta > 0$ мы ни выбрали, нельзя считать неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon_0$ верным для всех $x \in G$, отличных от a и удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$. Наоборот, при любом $\delta > 0$ есть по крайней мере одна такая точка $x' \in G$, отличная от a, которая удовлетворяет условию

$$|x' - a| < \delta,$$

но

$$|f(x') - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Возьмем в качестве значений δ последовательность чисел

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_n > \ldots,$$

сходящуюся к нулю. Тогда для каждого δ_n найдется точка $x'_n \in G$, отличная от a, что будет

$$|x'_n - a| < \delta_n,$$

но, однако,

$$|f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Замечаем, что последовательность

$$x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n,\ \ldots$$

сходится к a, так как $\lim \delta_n = 0$, а соответствующая последовательность значений функции $f(x)$

$$f(x'_1),\ f(x'_2),\ \ldots\ f(x'_n),\ \ldots$$

не сходится к A, так как в силу выбора точек x'_n имеем $|f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$ для всех n. Это противоречит условию доказываемого здесь утверждения, что для любой последовательности (1), сходящейся к a, соответствующая последовательность (2) сходится к A.

Следовательно, допущение не верно, то есть верно, что

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

Доказанные здесь прямое и обратное утверждения позволяют дать второе определение понятия предела функции в точке, эквивалентное первоначальному определению, которое было сформулировано при помощи ε-δ.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности G точки a, кроме, быть может, самой точки a.

Если для любой сходящейся к a последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

точек $x_n \neq a$, принадлежащих окрестности G точки a, соответствующая последовательность значений функции $f(x)$

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

сходится к A, то A называется пределом функции $f(x)$ в точке a.

Пользуясь этим определением предела функции, мы получим следующую формулировку непрерывности функции в точке:

Если для любой последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

сходящейся к a, соответствующая последовательность

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

сходится к $f(a)$, то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a.

Непрерывность функции в смысле этой формулировки называют непрерывностью по Гейне, в отличие от непрерывности по Коши, которая формулируется при помощи ε-δ.

§ 8. Второй замечательный предел

Воспользуемся вторым определением предела функции в точке и докажем, что

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Выше мы определили число e как предел последовательности $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, которую можно рассматривать как последовательность значений функции $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, соответствующую одной определенной последовательности значений аргумента $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, сходящейся к нулю. Теперь же надо доказать, что из сходимости к нулю *любой* последовательности точек

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

отличных от нуля, вытекает сходимость соответствующей последовательности значений $f(x)$

$$(1+x_1)^{\frac{1}{x_1}},\quad (1+x_2)^{\frac{1}{x_2}},\ \ldots,\ (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}},\ \ldots$$

к числу e.

Пусть x пробегает пока какую-нибудь последовательность $\{x_k\}$ положительных значений, сходящуюся к нулю. Обозначим через n_k такое натуральное число, что

$$n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k + 1.$$

Здесь n_k неограниченно возрастает, когда $x_k \to 0$. Одновременно с предыдущими неравенствами имеем:

$$\frac{1}{n_k} \geqslant x_k > \frac{1}{n_k+1}.$$

Теперь очевидно, что

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Эти неравенства можно представить так:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right).$$

Замечая, что последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ и $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\right\}$ сходятся к e, в силу первоначального определения числа e, а последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right\}$ и $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)\right\}$ имеют пределом 1, из последней цепочки неравенств видим, что последовательность

$$\{(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\}$$

имеет предел, равный числу e (см. § 8, гл. II и ответ к упр. 7)

Пусть теперь $\{x_k\}$ есть произвольная последовательность отрицательных чисел, сходящаяся к нулю. Положим

$$1+x_k=\frac{1}{1+y_k}.$$

Тогда будем иметь:

$$y_k=\frac{-x_k}{1+x_k},$$

откуда видно, что если $x_k \to 0$, то и $y_k \to 0$, причем, когда значения x_k, отрицательные по условию, будут достаточно близкими к нулю, тогда значения y_k будут положительными. Учитывая это и замечая, что

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=\left(\frac{1}{1+y_k}\right)^{\frac{1+y_k}{-y_k}}=(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}+1}=(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}}(1+y_k),$$

мы видим, что и в этом случае последовательность $\left\{(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\right\}$ сходится к числу e, так как

$$1+y_k \to 1, \text{ а } (1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} \to e$$

по ранее доказанному, ибо y_k можно считать стремящимся к нулю по положительным значениям.

Отсюда ясно, что $\{x_k\}$ может содержать и положительные, и отрицательные числа, важно только, чтобы она сходилась к нулю.

Итак, всегда из сходимости последовательности $\{x_k\}$ $(x_k \neq 0)$ к нулю вытекает сходимость последовательности $\left\{(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\right\}$ к числу e. Следовательно,

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Число e замечательно именно тем, что оно является не только пределом последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, но и пределом функции $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в точке $x_0=0$, и это имеет большое значение в математическом анализе.

Заметим, наконец, что

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

В самом деле, положим

$$x=\frac{1}{x'}.$$

Тогда

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=(1+x')^{\frac{1}{x'}}.$$

Так как $x\to\infty$ тогда, и только тогда, когда $x'\to 0$, то последним равенством вопрос о пределе данной функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ сведен к вопросу о пределе функции $(1+x')^{\frac{1}{x'}}$ при $x'\to 0$.

Поэтому мы имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x'\to 0}(1+x')^{\frac{1}{x'}}=e.$$

§ 9. Бесконечно малые функции

В математике имеется много теоретических вопросов и практических задач, которые связаны с функциями, имеющими в данной точке предел, равный нулю. Поэтому изучению таких функций, называемых бесконечно малыми, отводится значительное место в математическом анализе. Точное определение понятия бесконечно малой формулируется следующим образом.

Пусть функция $\alpha(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. *Если $\alpha(x)$ в точке x_0 имеет предел и этот предел равен нулю*

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$$

то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при x, стремящемся к x_0 (или, короче, при $x\to x_0$).

Например, функция $\cos x$ бесконечно мала при $x \to \frac{\pi}{2}$, так как вследствие непрерывности $\cos x$ мы имеем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Если мы примем во внимание определение предела функции в точке, то заметим, что понятие бесконечно малой можно сформулировать так:

Функция $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой при* $x \to x_0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для всех* $x \neq x_0$, *удовлетворяющих условию*

$$|x - x_0| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Наряду с понятием бесконечно малой при $x \to x_0$, определение которого связано с пределом функции в точке, в математическом анализе пользуются также понятиями бесконечно малых функций при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, определения которых связаны с пределами функций при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to \infty$, если

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0.$$

Если

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0 \text{ или } \lim_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0,$$

то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой соответственно при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$.

Например, функция

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

бесконечно мала при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Все понятия и теоремы, которые связаны с пределами функций, в дальнейшем мы будем рассматривать только применительно к случаю предела функции в точке, предоставляя читателю самому формулировать соответствующие понятия и доказывать аналогичные теоремы, связанные с пределами функций при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Докажем теорему, которая устанавливает связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой. Теорема эта в дальнейшем будет часто применяться для выяснения, имеет ли данная функция предел.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Для того чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела предел A, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ можно было представить в виде суммы*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный A. Положим

$$\alpha(x) = f(x) - A,$$

то есть функцию $f(x)$ представим в виде суммы $f(x) = A + \alpha(x)$, и докажем, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

то найдется такое δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно $|f(x) - A| < \varepsilon$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$|\alpha(x)| < \varepsilon,$$

а это означает, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Достаточность. Пусть функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где A — постоянная, а $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$. Докажем, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный A.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то найдется такое δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Но, согласно условию, $\alpha(x) = f(x) - A$. Поэтому для тех же значений x мы имеем

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Теорема доказана.

§ 10. Свойства бесконечно малых

Теорема 1. *Если функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *бесконечно малы при* $x \to x_0$, *то их сумма* $\alpha(x) + \beta(x)$ *также бесконечно мала при* $x \to x_0$.

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию функция $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, то найдется такое δ_1, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta_1, \tag{1}$$

верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

По условию $\beta(x)$ также бесконечно мала при $x \to x_0$; поэтому найдется δ_2 такое, что для всех $x \neq x_0$, для которых

$$|x - x_0| < \delta_2, \tag{3}$$

верно неравенство

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Обозначим через δ меньшее из двух чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ и, следовательно, условиям (1) и (3), будут верны одновременно неравенства (2) и (4). Но тогда

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon,$$

а это означает, что сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$.

По существу такими же рассуждениями можно доказать, что сумма любого фиксированного числа n функций, бесконечно малых при $x \to x_0$, бесконечно мала при $x \to x_0$.

Доказательство теоремы на этот общий случай можно распространить и методом математической индукции.

Следствие. *Если* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *бесконечно малы при* $x \to x_0$, *то их разность* $\alpha(x) - \beta(x)$ *также бесконечно мала при* $x \to x_0$.

В самом деле,

$$\alpha(x) - \beta(x) = \alpha(x) + [-\beta(x)],$$

где функция $-\beta(x)$ бесконечно мала вместе с $\beta(x)$, так как $|-\beta(x)| = |\beta(x)|$, и поэтому, когда $|\beta(x)| < \varepsilon$, тогда и $|-\beta(x)| < \varepsilon$.

Теорема 2. *Если функция* $\alpha(x)$ *бесконечно мала при* $x \to x_0$, *а функция* $f(x)$ *ограничена в окрестности точки* x_0, *то произведение* $\alpha(x) f(x)$ *бесконечно мало при* $x \to x_0$.

Доказательство. Так как по условию функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0, то найдутся такие δ_0 и M, что $|f(x)| \leqslant M$ при любом $x \neq x_0$ из интервала $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, то найдется такое δ_1, что для всех $x \neq x_0$, для которых $|x - x_0| < \delta_1$, будет верно неравенство $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Обозначим через δ меньшее из двух чисел δ_0 и δ_1. Тогда для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ и, следовательно, одновременно условиям $|x - x_0| < \delta_0$ и $|x - x_0| < \delta_1$, будут верны неравенства

$$|f(x)| \leqslant M, \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

и поэтому

$$|\alpha(x) f(x)| = |\alpha(x)|\,|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|\alpha(x) f(x)| < \varepsilon,$$

а это означает, что произведение $\alpha(x) f(x)$ бесконечно мало при $x \to x_0$.

Следствие 1. *Произведение функции, бесконечно малой при $x \to x_0$, на постоянную — бесконечно мало при $x \to x_0$.*

Следствие 2. *Если $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то произведение $\alpha(x) f(x)$ бесконечно мало при $x \to x_0$.*

Следствие 1 очевидно, а чтобы убедиться в справедливости следствия 2, достаточно вспомнить, что функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 предел, ограничена в окрестности точки x_0.

Из следствия 2, в частности, вытекает, что произведение двух функций, бесконечно малых при $x \to x_0$, бесконечно мало при $x \to x_0$. Методом математической индукции это утверждение распространяется на произведение любого фиксированного числа бесконечно малых сомножителей.

Теорема 3. *Если $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел $A \neq 0$, то частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ бесконечно мало при $x \to x_0$.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0. \tag{5}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, а значит, и для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ найдется такое δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{|A|}{2},$$

которое можно записать в виде

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}. \tag{6}$$

Если $A > 0$, то $A = |A|$ и из (6) следует

$$f(x) > \frac{|A|}{2}$$

и, значит,

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2}. \tag{7}$$

Если же $A < 0$, то $A = -|A|$ и из (6) следует

$$f(x) < -\frac{|A|}{2}$$

и, значит,

$$|f(x)| = -f(x) > \frac{|A|}{2}.$$

Таким образом, как при $A > 0$, так и при $A < 0$ верно неравенство (7).

Из этого следует, что, при условии (5) существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой для всех $x \neq x_0$, во-первых,

$$f(x) \neq 0$$

и поэтому функция $\frac{1}{f(x)}$ определена, во-вторых,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|A|}$$

и поэтому функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в окрестности точки x_0.

Следовательно,

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x)\frac{1}{f(x)}$$

бесконечно мало при $x \to x_0$ как произведение функции, бесконечно малой при $x \to x_0$, на функцию, ограниченную в окрестности точки x_0.

Заметим, что здесь условие $A \neq 0$ является существенным. Так, например, если $\alpha(x) = x$, $f(x) = x^2$, то $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to 0$, а функция $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ имеет предел, равный нулю (то есть тоже бесконечно мала), но в этом примере частное

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

очевидно, не является бесконечно малой функцией при $x \to 0$.

Следовательно, частное двух функций, бесконечно малых при $x \to x_0$, может быть не бесконечно малым при $x \to x_0$.

УПРАЖНЕНИЯ

25. Сформулировать и доказать теоремы о бесконечно малых при $x \to \infty$, аналогичные теоремам, рассмотренным в этом параграфе.

§ 11. Операции над пределами

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Докажем теорему, которая выясняет вопрос о существовании и вычислении пределов функций, получаемых при помощи арифметических действий над данными функциями.

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 имеют пределы, то в этой точке имеют пределы также их сумма $f(x)+\varphi(x)$, произведение $f(x)\varphi(x)$ и, при добавочном условии $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$, частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}\varphi(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Доказательство. Все утверждения в этой теореме доказываются аналогично. Поэтому мы ограничимся рассмотрением случая деления.

Прежде всего напомним, что из условия $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$ вытекает существование такого интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, в котором для всех x, отличных от x_0, $\varphi(x)\neq 0$. Поэтому функция $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Пусть

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B\neq 0.$$

Тогда, согласно теореме о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно представить в виде сумм

$$f(x)=A+\alpha(x),\quad \varphi(x)=B+\beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x\to x_0$.

Поэтому

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\left[\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}\right]=$$

$$=\frac{A}{B}+\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B^2+B\beta(x)}.$$

Функции $B\alpha(x)$, $A\beta(x)$, $B\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$, так как каждая из них есть произведение бесконечно малой на постоянную. Функция $B\alpha(x) - A\beta(x)$ — бесконечно мала при $x \to x_0$ как разность бесконечно малых. Функция $B_2 + B\beta(x)$, представляющая сумму постоянной B^2 и бесконечно малой $B\beta(x)$ при $x \to x_0$, в точке x_0 имеет предел, равный $B^2 \neq 0$. Поэтому и частное

$$\gamma(x) = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)}$$

бесконечно мало при $x \to x_0$ (теорема 3 о бесконечно малых).

Итак, мы имеем

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} + \gamma(x),$$

где $\frac{A}{B}$ — постоянная, а $\gamma(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$. Отсюда следует, что

$$\frac{A}{B} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} .$$

Теорема для частного доказана.

Для суммы и произведения теорема обобщается на случай любого фиксированного числа слагаемых и сомножителей.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, а C — постоянная, то произведение $Cf(x)$ в точке x_0 имеет предел, причем*

$$\lim_{x \to x_0} [Cf(x)] = C \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Ради краткости это утверждение часто формулируют так: *постоянный множитель можно вынести за знак предела.*

Следствие 2. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 имеют пределы, то их разность $f(x) - \varphi(x)$ в этой точке также имеет предел, причем*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$f(x) - \varphi(x) = f(x) + (-1)\varphi(x).$$

Следующая теорема относится к операции более общего вида — операции образования *сложной функции.*

Пусть G — область существования функции

$$u = \varphi(x).$$

Обозначим через G^* множество всех значений u, соответствующих всем значениям x из области G. Пусть на множестве G^* определена функция

$$y = f(u).$$

Таким образом, каждому $x \in G$ соответствует определенное $u \in G^*$, а этому $u \in G^*$ в свою очередь соответствует определенное значение y. Следовательно, y в конечном счете является функцией от x, определенной в области G. В этом случае y мы будем называть сложной функцией от x и обозначать так:

$$y = f[\varphi(x)].$$

Так, например, если

$$u = \ln x, \quad y = \sin u,$$

то мы имеем сложную функцию

$$y = \sin(\ln x),$$

определенную для всех положительных x.

Теорема 2. *Если функция $u = \varphi(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный A, и функция $y = f(u)$ определена и непрерывна в точке $u = A$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ в точке x_0 имеет предел, равный $f(A)$.*

Доказательство. Возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(u)$ непрерывна в точке A, то существует такое $\delta' > 0$, что для всех u, удовлетворяющих условию

$$|u - A| < \delta', \tag{1}$$

верно неравенство

$$|f(u) - f(A)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Но по условию

$$A = \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Поэтому, каким бы ни было положительное число δ', найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta, \tag{3}$$

будет верно неравенство

$$|\varphi(x) - A| < \delta',$$

или, что то же самое, неравенство (1). А из неравенства (1) следует неравенство (2), которое можно записать в виде

$$|f[\varphi(x)] - f(A)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию (3), верно неравенство (4). А это означает, что $f(A)$ есть предел сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0. Теорема доказана.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2 мы имеем

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(A)$$

или, что то же самое,

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)].$$

Это соотношение выражает правило перехода к пределу под знаком непрерывной функции.

П р и м е р. Доказать, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Данная функция

$$y = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

является сложной функцией, составленной из функций

$$y = \ln u, \quad u = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как мы имеем

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

и функция $\ln u$ непрерывна в точке $u = e$, то по теореме 2 имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln[\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

УПРАЖНЕНИЯ

26. Вычислить следующие пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, г) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$, д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{a \sec x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt[3]{1+x}}{x-7}$, е) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$.

§ 12. Операции над непрерывными функциями

Здесь мы прежде всего покажем, что свойство непрерывности сохраняется при основных арифметических операциях над непрерывными функциями.

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой точке также их сумма $f(x)+\varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$, произведение $f(x)\varphi(x)$ и, при добавочном условии $\varphi(x_0)\neq 0$, частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.*

Доказательство. Все утверждения теоремы доказываются аналогично. Полагая функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определенными в некоторой окрестности точки x_0 и пользуясь определением непрерывности при помощи предела функции в точке, мы заметим, что непрерывность суммы, разности и т. д. непосредственно вытекает из теоремы о пределе суммы, разности и т. д. Проведем рассуждения только для случая деления.

По условию функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, Поэтому мы имеем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Кроме того, для случая деления дано

$$\varphi(x_0) \neq 0.$$

Следовательно, выполнены все условия теоремы о пределе частного в точке x_0 для

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Поэтому

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = F(x_0),$$

а это означает, что функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема для частного доказана.

Для суммы и произведения теорема обобщается на случай любого фиксированного числа слагаемых и сомножителей.

Согласно этой теореме, целая рациональная функция (многочлен)

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянные, непрерывна в любой точке x.

Дробная рациональная функция

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, непрерывна в каждой точке x, в которой знаменатель $Q(x)$ не равен нулю, то есть в каждой точке, где функция $R(x)$ определена.

Теорема 2. *Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. По условию функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0. Поэтому в точке x_0 она имеет предел, равный $\varphi(x_0) = u_0$. Кроме того, по условию функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0. Следовательно, согласно теореме 2 предыдущего параграфа, сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ в точке x_0 имеет предел, равный $f(u_0) = f[\varphi(x_0)]$.

Итак, при данных условиях мы имеем

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)],$$

а это означает, что сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

§ 13. Бесконечно большие функции

Среди функций, не имеющих предела в данной точке, в математическом анализе выделяются функции с *бесконечным пределом*, или *бесконечно большие* функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. *Если для любого (даже как угодно большого) числа $M > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию*

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x)| > M,$$

то говорят, что функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, и пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Заменив в этом определении неравенство $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$ или на $f(x) < -M$, мы получим определение *положительной бесконечно большой функции $f(x)$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

или *отрицательной бесконечно большой функции $f(x)$*

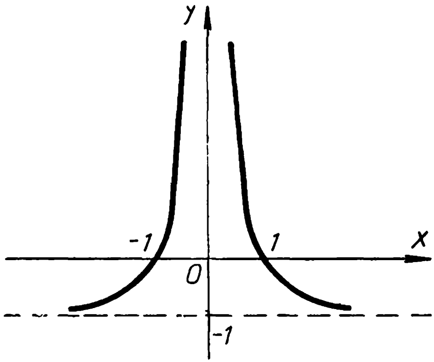
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Например, функция

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 1,$$

которая определена для всех $x \neq 0$ (черт. 17), при $x \to 0$ бесконечно большая положительного знака.

В самом деле, пусть M — любое положительное число.



Черт. 17

Возьмем $\delta = \frac{1}{\sqrt{M+1}}$. Тогда для всех $x \neq 0$, удовлетворяющих условию

$$|x-0| = |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M+1}},$$

будет верно неравенство

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1}{|x|^2} - 1 > \frac{1}{\delta^2} - 1 = M.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$

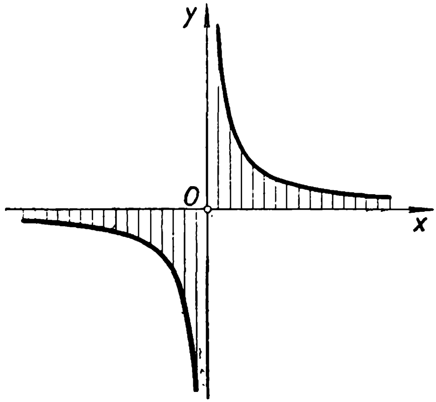
Нетрудно убедиться, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

определенная для всех $x \neq 0$ (черт. 18), при $x \to 0$ бесконечно большая (просто бесконечно большая, а не одного определенного знака)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует зависимость, которая выражается следующими теоремами.



Черт. 18

Т е о р е м а 1. *Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to x_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое, как угодно малое $\varepsilon > 0$. Так как по условию функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то для какого угодно $M > 0$ и, в частности, для $M = \frac{1}{\varepsilon}$ найдется такое δ, что при всех значениях $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

А для таких значений x функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ определена и

$$|\alpha(x)| = \left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

Итак, для любого, как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Это означает, что функция $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$.

Теорема 2. *Если функция $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$ и в некоторой окрестности $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, она отлична от нуля, то функция $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая при $x \to x_0$.*

Доказательство. Пусть M — как угодно большое положительное число. Так как по условию функция $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, то для $\varepsilon = \frac{1}{M}$ найдется такое δ_1, что для всех $x \neq x_0$, для которых $|x - x_0| < \delta_1$, будет верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M}.$$

Обозначим через δ меньшее из двух чисел δ_0 и δ_1. Тогда для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

одновременно $\alpha(x) \neq 0$ и $|\alpha(x)| < \frac{1}{M}$, поэтому функция

$$f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

определена и

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| = \frac{1}{|\alpha(x)|} > M.$$

Следовательно, функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$.

УПРАЖНЕНИЯ

27. Будет ли бесконечно большой неограниченная функция $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ при $x \to 0$?

28. Сформулировать понятие бесконечно большой функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

29. Сформулировать и доказать теоремы о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями при $x \to \infty$.

30. Сформулировать с помощью неравенств, что значит

а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$,

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, е) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

§ 14 Сравнение бесконечно малых

Иногда имея дело одновременно с несколькими бесконечно малыми, приходится сравнивать их с какой-нибудь одной бесконечно малой. Это сравнение основано на следующих понятиях.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x\to x_0$. Если отношение $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ имеет предел в точке x_0 и этот предел равен нулю

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0,$$

то $\beta(x)$ называют бесконечно малой *высшего порядка*, чем $\alpha(x)$.

Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty,$$

то $\beta(x)$ называют бесконечно малой *низшего порядка*, чем $\alpha(x)$.

Если

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right|=C\neq 0,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми *одного порядка*.

Сравним, например, с функцией $\alpha(x)=x$, бесконечно малой при $x\to 0$, функции $\beta_1(x)=x^2$ и $\beta_2(x)=\sqrt[3]{x}$, которые также бесконечно малы при $x\to 0$.

Мы имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta_1(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,$$

поэтому при $x \to 0$ функция $\beta_1(x) = x^2$ — бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha(x) = x$;

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta_2(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty,$$

поэтому при $x \to 0$ функция $\beta_2(x) = \sqrt[3]{x}$ — бесконечно малая низшего порядка, чем $\alpha(x) = x$.

Функции $\alpha(x) = x$ и $\beta_3(x) = \sin 2x$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta_3(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{x} = 2\ (\neq 0).$$

Если отношение $\frac{|\beta(x)|}{|\alpha(x)|}$ бесконечно малых при $x \to x_0$, не имеет ни конечного, ни бесконечного предела в точке x_0 то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ не сравнимы.

Так, например, функции $\alpha(x) = x$ и $\beta(x) = x \sin \frac{1}{x}$ бесконечно малы при $x \to 0$, но они не сравнимы между собой, ибо отношение

$$\frac{|\beta(x)|}{|\alpha(x)|} = \frac{\left| x \sin \frac{1}{x} \right|}{|x|} = \left| \sin \frac{1}{x} \right|$$

не имеет конечного предела в точке $x_0 = 0$ и в то же время не является бесконечно большой функцией при $x \to 0$ (не имеет бесконечного предела в точке $x_0 = 0$).

Определения, сформулированные здесь, выражают способ только к а ч е с т в е н н о г о сравнения бесконечно малых и не обладают количественной характеристикой результата сравнения: мы можем только выяснить, будут ли бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости или же порядок малости одной выше порядка малости другой. Но две бесконечно малые функции, обе высшего порядка, чем некоторая основная бесконечно малая, сами могут быть не одного порядка малости.

Чтобы получить возможность количественного выражения результата сравнения бесконечно малых, мы примем следующее соглашение.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — *бесконечно малые при* $x \to x_0$ *и* $\beta(x)$ — *одного порядка с бесконечно малой* $|\alpha(x)|^n$ $(n > 0)$, *то* $\beta(x)$ *будем называть бесконечно малой n-го порядка по отношению к* $\alpha(x)$.

Это соглашение вполне естественно, так как при $n_2 > n_1 > 0$ бесконечно малая $|\alpha(x)|^{n_2}$ высшего порядка, чем бесконечно малая $|\alpha(x)|^{n_1}$. В самом деле, если $n_2 > n_1$ и $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то $n_2 - n_1 > 0$ и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|\alpha(x)|^{n_2}}{|\alpha(x)|^{n_1}} = \lim_{x \to x_0} |\alpha(x)|^{n_2 - n_1} = 0.$$

§ 15. Эквивалентные бесконечно малые

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малы при $x \to x_0$. Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* бесконечно малыми при $x \to x_0$. Из этого определения видно, что эквивалентные бесконечно малые представляют частный случай бесконечно малых одного порядка.

Эквивалентность бесконечно малых α и β записывается так:

$$\alpha \sim \beta.$$

Примером эквивалентных бесконечно малых могут служить $\sin x$ и x при $x \to 0$.

Укажем еще на несколько эквивалентных бесконечно малых.

В силу непрерывности функции $\ln(1+x)$ в точке $x = 0$ имеем

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x) = \ln 1 = 0.$$

Поэтому функция $\ln(1+x)$ бесконечно мала при $x \to 0$. Кроме того, как было показано в параграфе 11,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Следовательно, при $x \to 0$

$$\ln(1+x) \sim x.$$

В силу непрерывности показательной функции e^x в точке $x = 0$ имеем

$$\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$$

Поэтому функция $e^x - 1$ бесконечно мала при $x \to 0$.

Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

В самом деле, положим

$$\alpha = e^x - 1.$$

Тогда получим

$$e^x = 1+\alpha, \quad x = \ln(1+\alpha),$$

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}=\frac{1}{\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}}.$$

Так как $\alpha \to 0$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}}=\frac{1}{1}=1.$$

Отсюда следует, что при $x \to 0$

$$e^x - 1 \sim x.$$

Заметив, что при $x \to 0$ функция $\sqrt{1+x}-1$ бесконечно мала и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2},$$

приходим к выводу, что при $x \to 0$

$$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}.$$

При вычислении пределов отношений функций мы иногда встречаемся со значительными трудностями, когда предел числителя и предел знаменателя есть нуль, то есть когда мы ищем предел отношения бесконечно малых. В таких случаях часто задача упрощается на основании следующей теоремы, касающейся эквивалентных бесконечно малых.

Теорема. *Пусть* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, *и* $\beta_1(x)$ — *бесконечно малые при* $x \to x_0$, *причем* $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ *и*

$\beta(x) \sim \beta_1(x)$. *Если в точке* x_0 *отношение* $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ *имеет конечный или бесконечный предел, то тот же предел в точке* x_0 *имеет и отношение* $\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}$.

Доказательство. Возьмем отношение $\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}$ и представим его в виде

$$\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)} = \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}. \qquad (*)$$

Согласно условию, мы имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1.$$

Поэтому, если отношение $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ в точке x_0 имеет предел A, то правая часть равенства (*) и, значит, $\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}$ в точке x_0 также имеет предел A; если же $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ будет бесконечно большой функцией при $x \to x_0$, то вся правая часть (*) и, значит, $\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}$ также будет бесконечно большой функцией при $x \to x_0$. Следовательно, в обоих случаях

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Решение. Замечаем, что числитель $1 - \cos x$ и знаменатель x^2 бесконечно малые при $x \to 0$. Учитывая, что

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

и при $x \to 0$

$$\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2},$$

и пользуясь доказанной выше теоремой, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислить

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2}-e}{\ln x}.$$

Решение. При $x\to 1$ функции $e^{x^2}-e$ и $\ln x$ бесконечно малые. Так как

$$\ln x=\ln[1+(x-1)],\quad e^{x^2}-e=e(e^{x^2-1}-1),$$

где $x-1$ и x^2-1 стремятся к нулю при $x\to 1$, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2}-e}{\ln x}=e\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-1}-1}{\ln[1+(x-1)]}=e\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$$
$$=e\lim_{x\to 1}(x+1)=2e.$$

Следующая теорема дает нам необходимое и достаточное условие эквивалентности бесконечно малых.

Теорема. *Для того чтобы две бесконечно малые при $x\to x_0$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность при $x\to x_0$ была бесконечно малой высшего порядка, чем они сами.*

Необходимость. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые при $x\to x_0$. Докажем, что их разность

$$\gamma(x)=\beta(x)-\alpha(x),$$

которая бесконечно мала при $x\to x_0$, есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha(x)$ и, значит, $\beta(x)$.

В самом деле, по условию

$$\alpha(x)\sim\beta(x)$$

и поэтому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}-1=0,$$

а это означает, что при $x \to x_0$ бесконечно малая $\gamma(x)$ высшего порядка, чем $\alpha(x)$.

Достаточность. Пусть разность $\gamma(x) = \beta(x) - \alpha(x)$ бесконечно малых $\beta(x)$ и $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha(x)$, [или $\beta(x)$]. Докажем, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны.

В самом деле, по условию порядок бесконечно малой $\gamma(x)$ выше порядка $\alpha(x)$ и поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) + \gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[1 + \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} \right] = 1,$$

то есть

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Следствие. *Если при* $x \to x_0$ *функции* $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$, ..., $\beta_n(x)$ — *бесконечно малые высшего порядка, чем бесконечно малая* $\alpha(x)$, *то сумма*

$$\sigma(x) = \alpha(x) + \beta_1(x) + \beta_2(x) + \ldots + \beta_n(x)$$

эквивалентна $\alpha(x)$.

В самом деле,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sigma(x) - \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_1(x) + \beta_2(x) + \ldots + \beta_n(x)}{\alpha(x)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_1(x)}{\alpha(x)} + \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_2(x)}{\alpha(x)} + \ldots + \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_n(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

Следовательно, разность $\sigma(x) - \alpha(x)$ при $x \to x_0$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha(x)$. Поэтому, согласно доказанной здесь теореме, $\sigma(x) \sim \alpha(x)$.

УПРАЖНЕНИЯ

31. Вычислить следующие пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sqrt[3]{x}}}{\sin \sqrt[3]{2x}}$, в) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$,

б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$, г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2\sin x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}$.

§ 16. Односторонние пределы функции в точке

В некоторых случаях приходится рассматривать предел функции $f(x)$ в данной точке x_0 отдельно при стремлении x к x_0 слева (по значениям $x < x_0$) и при стремлении x к x_0 справа (по значениям $x > x_0$). Дадим точные определения этих односторонних пределов.

1. Пусть функция $f(x)$ определена в интервале (a, x_0). Число A называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *слева* и пишут

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \text{ или } A = f(x_0 - 0),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$x_0 - \delta < x < x_0,$$

верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. Пусть функция $f(x)$ определена в интервале (x_0, b). Число A называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *справа* и пишут

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x), \text{ или } A = f(x_0 + 0),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$x_0 < x < x_0 + \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Сопоставляя эти определения с определением предела функции в точке, замечаем, что

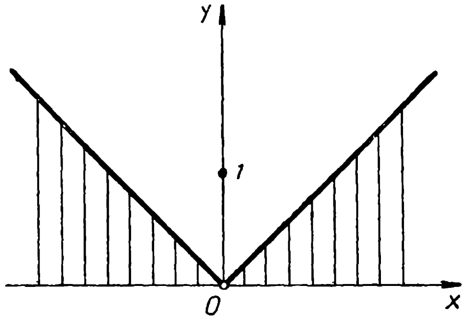
$$A = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

тогда, и только тогда, когда одновременно

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ и } A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Пример 1. Пусть

$$f(x) = |x|, \quad \text{если} \quad x \neq 0,$$
$$f(0) = 1 \quad (\text{черт. } 19).$$



Черт. 19

Здесь мы имеем

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = 0$$

и

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Пример 2. Пусть

$$f(x) = 1 - x, \quad \text{если} \quad x < 1,$$
$$f(x) = 1 + x, \quad \text{если} \quad x > 1,$$
$$f(1) = 1 \quad (\text{черт. } 20).$$

Здесь мы имеем

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 2.$$

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ или в интервале (a, b), то она в точке a может иметь только правый предел, а в точке b — только левый предел.

Пример 3. Пусть в интервале $(0, 1)$ задана функция $f(x) = \frac{1}{x}$ (черт. 21).

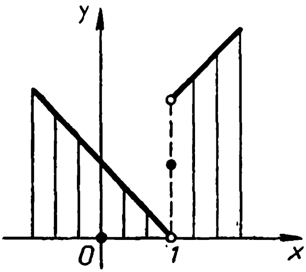
Здесь, очевидно,

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1,$$

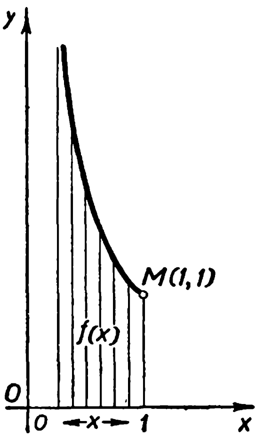
а в точке $x = 0$ данная функция $f(x)$ правого предела не имеет.

Заметим, что с введением односторонних пределов имеет смысл говорить о бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to x_0 - 0$ или при $x \to x_0 + 0$.

Аналогично понятиям бесконечно больших функций при $x \to x_0$ вводятся понятия бесконечно больших функций при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$.



Черт. 20



Черт. 21

Все теоремы о пределах функций в точке и теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших при $x \to x_0$ распространяются на односторонние пределы функций в точке и на бесконечно малые и бесконечно большие при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$.

§ 17. Точки разрыва функций

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Согласно определению, непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 выражается соотношением

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Теперь, пользуясь односторонними пределами, равенство (1) мы можем заменить равносильным ему двойным равенством

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0), \tag{2}$$

которое, следовательно, и будет выражать необходимое и достаточное условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

Функция $f(x)$ в точке x_0 называется *непрерывной справа*, если

$$f(x_0+0) = f(x_0), \tag{3}$$

и *непрерывной слева*, если

$$f(x_0-0) = f(x_0). \tag{4}$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна тогда, и только тогда, когда она в этой точке непрерывна и справа, и слева.

Функция $f(x)$ непрерывна в интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и, кроме того, в точке a непрерывна справа, а в точке b — непрерывна слева.

Если в точке x_0 функция $f(x)$ не непрерывна, то точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, в каком смысле нарушено условие непрерывности (2), а на концах отрезка—соответствующее из условий (3) и (4).

Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечный предел слева и конечный предел справа и они равны между собой, но не равны значению функции $f(x)$ в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

Если точка x_0 есть левый (правый) конец отрезка, на котором определена функция $f(x)$, то x_0 будет точкой устранимого разрыва при условии существования конечного предела

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0),$$
$$\left[\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)\right].$$

Такое название оправдывается тем, что в этом случае достаточно изменить значение функции только в одной точке x_0, взяв вместо истинного значения $f(x_0)$ предел $f(x)$ в точке x_0, чтобы получить функцию, непрерывную в точке x_0.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = |x|, \quad \text{если} \quad x \neq 0,$$
$$f(0) = 1 \quad (\text{черт. } 19).$$

Для данной функции $f(x)$ точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва, так как

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = 0,$$
$$f(0) = 1.$$

Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечный предел слева и конечный предел справа и они разные

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

(причем безразлично, совпадает или нет $f(x_0)$ с одним из этих пределов), то точка x_0 называется *точкой разрыва с конечным скачком функции.*

Такое название оправдывается тем, что при переходе x через точку x_0 функция $f(x)$ резко изменяется, переходя от значений, как угодно близких к числу $f(x_0 - 0)$, к значениям, как угодно близким к другому числу $f(x_0 + 0)$.

Пример 2. Пусть

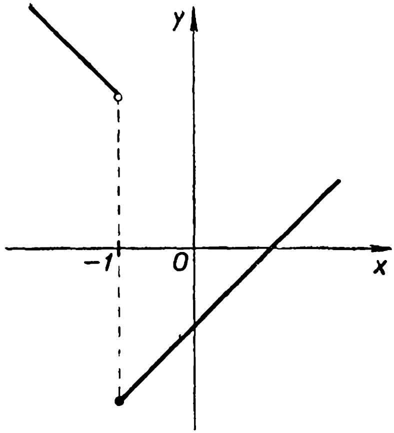
$$f(x) = 1 - x, \quad \text{если} \quad x < -1,$$
$$f(x) = x - 1, \quad \text{если} \quad x \geqslant -1.$$

Для данной функции (черт. 22) $x_0 = -1$ есть точка разрыва с конечным скачком функции, так как

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to -1+0} f(x) = f(-1) = -2.$$

Точки устранимого разрыва и точки разрыва с конечным скачком функции называются *точками разрыва первого рода.*

Таким образом, каждая точка разрыва первого рода функции $f(x)$ характеризуется тем, что в этой точке функция $f(x)$ имеет конечный предел как слева, так и справа (в случае конца отрезка — с одной стороны).



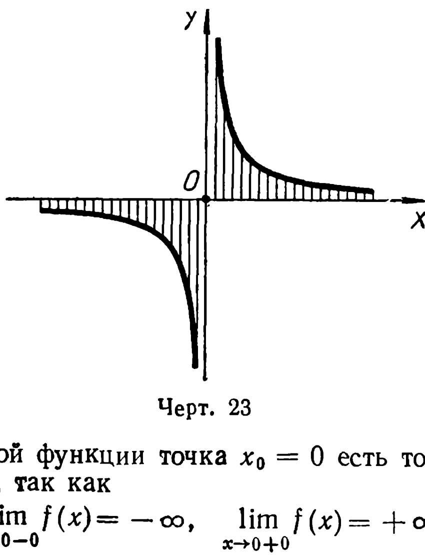
Черт. 22

Все другие точки разрыва функции называются *точками разрыва второго рода.*

Следовательно, каждая точка разрыва второго рода функции $f(x)$ характеризуется тем, что в этой точке функция $f(x)$ не имеет конечного предела по крайней мере с одной стороны — слева или справа.

Пример 3. Пусть

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad \text{если } x \neq 0, \quad f(0)=0 \quad (\text{черт. } 23).$$



Черт. 23

Для данной функции точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

Пример 4. Для функции Дирихлé

$$D(x) = 1, \quad \text{если} \quad x \quad \text{рационально},$$

$$D(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \quad \text{иррационально},$$

любая точка x_0 есть точка разрыва второго рода.

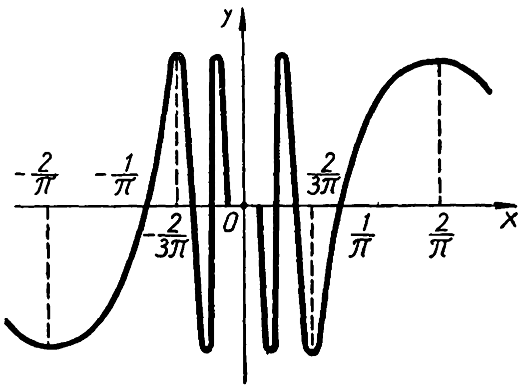
В самом деле, каким бы малым число $\delta > 0$ ни было, в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ есть рациональные точки, в которых функция Дирихле равна 1, и есть иррациональные точки, в которых она равна 0; поэтому функция Дирихле в точке x_0 не имеет конечного (а также и бесконечного) предела слева. Так же обстоит дело с функцией Дирихле и справа от x_0.

Пример 5. Пусть

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{x}, \quad \text{если} \quad x \neq 0,$$

$$f(0) = 0 \quad (\text{черт. } 24).$$

Нетрудно заметить, что данная функция в точке $x_0 = 0$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела как слева,



Черт. 24

так и справа. Поэтому для нее точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва второго рода.

§ 18. Свойства непрерывных функций

Непрерывные функции обладают рядом замечательных свойств. Некоторые из этих свойств устанавливаются в теоремах, которые мы здесь рассмотрим.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > A$ $[f(x_0) < A]$, то существует такое $\delta > 0$, что $f(x) > A$ $[f(x) < A]$ для всех x из интервала $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(x_0) > A$. Тогда

$$f(x_0) = A + h,$$

где $h > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ в точке x_0 существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{h}{2},$$

или

$$-\frac{h}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{h}{2},$$

откуда получим

$$f(x) > f(x_0) - \frac{h}{2} = A + h - \frac{h}{2} = A + \frac{h}{2}.$$

Следовательно,

$$f(x) > A$$

для всех x, для которых $|x - x_0| < \delta$, то есть для всех x из интервала $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой функция $f(x)$ не обращается в нуль и сохраняет один и тот же знак (знак числа $f(x_0)$).*

Чтобы убедиться в этом, достаточно в теореме 1 взять $A = 0$.

Теорема 2. (Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке ограничена, то есть существует такое число $C > 0$, что для всех x из отрезка $[a, b]$ верно неравенство $|f(x)| \leqslant C$.*

Доказательство. Воспользуемся методом рассуждений от противного. Допустим, что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не ограничена. Из этого следует, что для любого натурального числа n найдется на отрезке $[a, b]$ такая точка x_n, в которой будет верно неравенство

$$|f(x_n)| > n.$$

Беря за n последовательно $1, 2, 3, \ldots$, мы получим последовательность точек отрезка $[a, b]$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots . \qquad (1)$$

Последовательность (1) ограничена, так как содержится на отрезке $[a, b]$, поэтому из этой последовательности можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \qquad (2)$$

сходящуюся к некоторому пределу α.

Точка α принадлежит отрезку $[a, b]$ (если бы в условии теоремы вместо отрезка $[a, b]$ мы имели интервал (a, b), то уже нельзя было бы утверждать, что точка α принадлежит интервалу (a, b), так как α может оказаться одним из концов интервала (a, b), которые интервалу не принадлежат).

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она непрерывна и в точке $\alpha \in [a, b]$. Поэтому, согласно непрерывности по Гейне, из сходимости последовательности (2) к α вытекает сходимость последовательности

$$f(x_{n_1}), \quad f(x_{n_2}), \quad \ldots, f(x_{n_k}), \ \ldots \qquad (3)$$

к пределу $f(\alpha)$. Но этого быть не может, так как $f(\alpha)$ есть определенное число, а по выбору точек x_n

$$|f(x_{n_k})| > n_k,$$

где n_k может быть каким угодно большим и в силу этого последовательность (3) конечного предела не имеет.

Полученное противоречие показывает, что наше допущение о неограниченности $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неверно. Следовательно, теорема доказана.

То, что в условии теоремы берется отрезок, является существенным. Так, например, функция

$$f(x) = x$$

непрерывна на всей числовой прямой, но не ограничена на этой прямой. Функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}$$

непрерывна, но не ограничена в полуинтервале $0<x\leqslant 1$.

Теорема 3. (Вейерштрасса). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она на этом отрезке имеет наименьшее и наибольшее значения.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы $f(x)$ ограничена, а поэтому множество всех значений $f(x)$, соответствующих всем значениям $x\in[a, b]$, имеет нижнюю и верхнюю грани. Обозначим их соответственно через m и M.

Докажем, что на отрезке $[a, b]$ найдется такая точка α, в которой значение $f(x)$ равно M.

Действительно, по определению верхней грани, для всех $x\in[a, b]$

$$f(x)\leqslant M,$$

но при любом как угодно малом $\varepsilon>0$ найдется такая точка $x_0\in[a, b]$, что будут верны неравенства

$$M-\varepsilon<f(x_0)\leqslant M.$$

Беря за ε числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, получим последовательность таких точек сегмента $[a, b]$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \tag{4}$$

для которых верны неравенства

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M,$$

а значит,

$$|f(x_n)-M|<\frac{1}{n}. \tag{5}$$

Последовательность (4) ограничена, так как содержится на отрезке $[a, b]$, а поэтому из нее можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots,$$

сходящуюся к некоторой точке α. Очевидно, что точка α содержится на $[a, b]$, а так как $f(x)$ непрерывна на отрезке

$[a, b]$, то она непрерывна и в точке α. Из этого вытекает что последовательность

$$f(x_{n_1}),\ f(x_{n_2}),\ \ldots,\ f(x_{n_k}),\ \ldots \tag{6}$$

сходится к числу $f(\alpha)$. Но, с другой стороны, из неравенства (5) имеем:

$$|f(x_{n_k}) - M| < \frac{1}{n_k},$$

а это показывает, что последовательность (6) сходится к числу M. Следовательно,

$$f(\alpha) = M.$$

Аналогично можно доказать существование такой точки $\beta \in [a, b]$, в которой имеем

$$f(\beta) = m.$$

Так как $f(x)$ не имеет значений, меньших m и больших M, а эти грани, как мы доказали, $f(x)$ принимает в точках, принадлежащих $[a, b]$, то m и M и есть соответственно наименьшее и наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

То, что в условии теоремы берется отрезок, является существенным.

Например, функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

в полуинтервале $1 \leqslant x < +\infty$ непрерывна, имеет верхней гранью 1, а нижней гранью 0, причем верхнюю грань принимает в точке, принадлежащей полуинтервалу $[1, +\infty)$, так как $f(1) = 1$, а нижнюю грань не принимает, ибо $f(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ ни при каком значении x из $[1, +\infty)$.

Функция

$$\varphi(x) = x$$

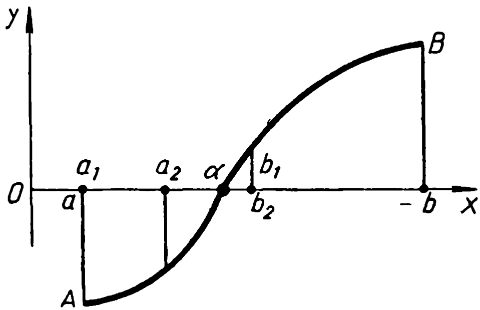
непрерывна в интервале $0 < x < 1$, но ни в одной точке этого интервала $\varphi(x)$ не равна 1 — своей верхней грани и не равна 0 — своей нижней грани.

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в концах его имеет значения, противоположные по знаку, то она равна нулю по крайней мере в одной точке интервала (a, b).*

Доказательство. Пусть $f(a)$ и $f(b)$ противоположны по знаку (черт. 25).

Точкой $\xi = \frac{a+b}{2}$ разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если $f(\xi) = 0$, то теорема верна. Пусть $f(\xi) \neq 0$. Тогда один из отрезков $[a, \xi]$ или $[\xi, b]$ будет таким, что в его концах значения функции $f(x)$ разных знаков. Выделим этот отрезок и обозначим его $[a_1, b_1]$.

Точкой $\xi_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Если $f(\xi_1) = 0$, то теорема верна. Пусть $f(\xi_1) \neq 0$. Тогда один из отрезков $[a_1, \xi_1]$ или $[\xi_1, b_1]$ будет таким, что в его



Черт. 25

концах значения функции $f(x)$ разных знаков. Выделим этот отрезок и обозначим его $[a_2, b_2]$.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы выделим стягивающуюся последовательность отрезков, так как

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

и

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

Согласно теореме о стягивающейся последовательности отрезков, существует единственная точка α, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Докажем, что $f(\alpha) = 0$.

Пользуясь методом рассуждений от противного, допустим, что $f(\alpha) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке $\alpha \in [a, b]$ найдется такой интервал $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, в котором $f(x)$ сохраняет один и тот же знак (следствие из теоремы 1). Так как $\alpha = \lim a_n = \lim b_n$, то n можно взять настолько большим, что отрезок $[a_n, b_n]$ будет содержаться в интервале $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ и поэтому $f(a_n)$ и $f(b_n)$ будут одного знака. Но по выбору отрезков $[a_n, b_n]$ при любом n числа $f(a_n)$ и $f(b_n)$— противоположны по знаку. Полученное противоречие доказывает, что наше допущение $f(\alpha) \neq 0$ неверно.

Следовательно,

$$f(\alpha) = 0,$$

где $a < \alpha < b$ (α принадлежит отрезку $[a, b]$, но не может совпадать ни с точкой a, ни с точкой b, так как $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$). Теорема доказана.

Теорема 5 (Коши). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в области g, представляющей отрезок, интервал или полуинтервал, то она в этой области принимает в качестве своих значений все числа, содержащиеся между любыми двумя ее значениями.*

Доказательство. Возьмем любые два значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ данной функции $f(x)$, соответствующие каким угодно двум точкам x_1 и x_2 области g. Пусть $f(x_1) < f(x_2)$. Возьмем любое число A, удовлетворяющее условию

$$f(x_1) < A < f(x_2).$$

Докажем, что между x_1 и x_2 найдется по крайней мере одна такая точка α, в которой значение данной функции $f(x)$ равно A.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - A.$$

Так как отрезок с концами в точках x_1 и x_2 содержится в области g, функция $\varphi(x)$ на этом отрезке непрерывна как разность непрерывных функций. Кроме того, в концах этого отрезка функция $\varphi(x)$ имеет значения, противоположные по знаку, так как

$$\varphi(x_1) = f(x_1) - A < 0,$$

$$\varphi(x_2) = f(x_2) - A > 0.$$

Поэтому, согласно теореме 4, между x_1 и x_2 есть такая точка α, что

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

Но

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) - A.$$

Следовательно,

$$f(\alpha) - A = 0$$

и поэтому

$$f(\alpha) = A.$$

Этим теорема доказана, так как A есть любое число, содержащееся между $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

§ 19. Равномерная непрерывность

Если функция $f(x)$ непрерывна в области G, то это означает, что в любой точке $x \in G$ для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x' \in G$, удовлетворяющих условию

$$|x' - x| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Здесь очевидно, что δ зависит от ε. Но, кроме того, следует заметить, что при одном и том же ε в разных точках $x \in G$ число δ может оказаться также разным. Для непрерывности $f(x)$ в данной точке $x \in G$ надо, чтобы для $\varepsilon > 0$ существовало соответствующее $\delta > 0$, но это число δ может быть меньшим, чем то, которое соответствует тому же ε в какой-либо другой точке непрерывности $f(x)$. Вполне может оказаться, что среди значений δ для различных точек $x \in G$, соответствующих одному и тому же ε, нет наименьшего значения δ. Требовать, чтобы такое наименьшее δ для точек области G существовало, — это значит требовать от функции $f(x)$ больше, чем непрерывность в области G. Если $f(x)$ в области G удовлетворяет этому большему требованию, т. е. если она такова, что можно по $\varepsilon > 0$ найти общее для всех $x \in G$ значение δ, то говорят, что $f(x)$ в области G равномерно непрерывна.

Точное определение этого нового понятия следующее.

Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* в области G, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любых $x' \in G$ и $x'' \in G$, удовлетворяющих условию

$$|x' - x''| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Например, функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси. Здесь достаточно взять $\delta = \varepsilon$.

Очевидно, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна в области G, то она непрерывна в каждой точке $x \in G$. Обратное утверждение не верно.

Так, например, в полуинтервале $(0, 1]$ функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

непрерывна, но не равномерно непрерывна.

Действительно, возьмем из $(0, 1]$ точки x' и $x'' = x' + \Delta x$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x' + \Delta x} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x'^2 + x'\Delta x} \right|.$$

Очевидно, что если значение Δx как угодно мало, но уже выбрано, то при $x' \to 0$ величина

$$\left| \frac{\Delta x}{x'^2 + x'\Delta x} \right|$$

неограниченно возрастает. Поэтому для $\varepsilon > 0$, каким бы малым $\delta > 0$ ни было, всегда можно найти в полуинтервале $(0, 1]$ настолько близкие к 0 точки x' и $x'' = x' + \Delta x$, что будет

$$|x' - x''| = |\Delta x| < \delta,$$

тем не менее окажется

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x'^2 + x'\Delta x} \right| > \varepsilon.$$

Это и доказывает, что $f(x) = \frac{1}{x}$ не равномерно непрерывна в полуинтервале $(0, 1]$.

Тем более интересна следующая теорема, которая показывает, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке наряду с замечательными свойствами, установленными выше, обладает и свойством равномерной непрерывности.

Теорема Кантора. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Воспользуемся методом рассуждений от противного. Допустим, что $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, не равномерно непрерывна на этом отрезке. Это означает, что не для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства

$$|x' - x''| < \delta$$

всегда вытекало неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Поэтому существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что, каким бы малым $\delta > 0$ мы ни выбрали, всегда найдутся такие точки $x' \in [a, b]$ и $x'' \in [a, b]$, что хотя и будет

$$|x' - x''| < \delta,$$

тем не менее окажется, что

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0.$$

Если теперь брать в качестве δ последовательно числа

$$1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

то для каждого $\delta = \frac{1}{n}$ найдутся такие точки $x'_n \in [a, b]$ и $x''_n \in [a, b]$, для которых хотя и будет

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \qquad (1)$$

однако окажется, что

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (2)$$

Рассмотрим последовательность

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$$

Она ограничена, так как содержится на отрезке $[a, b]$, а поэтому из нее можно выделить подпоследовательность

$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, \ldots, x'_{n_k}, \ldots, \qquad (3)$$

сходящуюся к некоторому пределу α. Точка α, очевидно, содержится на отрезке $[a, b]$, поэтому $f(x)$ определена и непрерывна в точке α. Отсюда следует, учитывая определение непрерывности функции по Гейне, что последовательность

$$f(x'_{n_1}),\ f(x'_{n_2}),\ \ldots,\ f(x'_{n_k}),\ \ldots \tag{4}$$

сходится к пределу $f(\alpha)$, как соответствующая последовательности (3), сходящейся к α.

Из неравенства (1) видно, что вместе с последовательностью (3) будет сходиться к α и последовательность

$$x''_{n_1},\ x''_{n_2},\ \ldots,\ x''_{n_k},\ \ldots,$$

откуда вытекает, что последовательность

$$f(x''_{n_1}),\ f(x''_{n_2}),\ \ldots,\ f(x''_{n_k}),\ \ldots$$

тоже сходится к $f(\alpha)$, как и последовательность (4). Но тогда найдется такой номер N', что для всех $n_k > N'$ будет верно неравенство

$$|f(x'_{n_k}) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{5}$$

и номер N'', что для всех $n_k > N''$ будет

$$|f(\alpha) - f(x''_{n_k})| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{6}$$

Если большее из двух чисел N' и N'' обозначим через N, то для $n_k > N$ будут верны оба неравенства (5) и (6). Учитывая это, для $n_k > N$, получим

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| = |[f(x'_{n_k}) - f(\alpha)] + [f(\alpha) - f(x''_{n_k})]| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x'_{n_k}) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x''_{n_k})| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.$$

Итак, для $n_k > N$ имеем

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon_0,$$

тогда как по самому выбору точек x'_n и x''_n, как показывает неравенство (2), должно быть

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0.$$

Полученное противоречие показывает, что наше допущение, будто $f(x)$ на $[a, b]$ не равномерно непрерывна, неверно. Следовательно, функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равномерно непрерывна.

То, что в условии теоремы берется отрезок, является существенным.

Так, например, рассмотренная выше функция

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

непрерывна, но не равномерно непрерывна в полуинтервале $(0; 1]$.

Рассмотрим другой пример. Пусть на множестве всех действительных чисел определена функция

$$f(x) = x^2.$$

Данная функция непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Докажем, что она не равномерно непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Действительно, возьмем точки x' и $x''=x'+\Delta x$. Тогда

$$|f(x')-f(x'')| = |x'^2-(x'+\Delta x)^2| = |2x'\Delta x+(\Delta x)^2|.$$

Так как при фиксированном, хотя бы и как угодно малом значении Δx величина

$$|2x'\Delta x+(\Delta x)^2|$$

неограниченно возрастает при возрастании x', то для $\varepsilon>0$, каким бы малым $\delta>0$ мы ни выбрали, найдутся такие (достаточно далекие от 0) точки x' и $x''=x'+\Delta x$, что будет

$$|x'-x''| = |\Delta x| < \delta,$$

и тем не менее окажется

$$|f(x')-f(x'')| = |2x'\Delta x+(\Delta x)^2| > \varepsilon,$$

то есть данная функция в интервале $(-\infty, +\infty)$ не равномерно непрерывна.

§ 20. Монотонные функции

Функция $f(x)$, определенная в некоторой области G, называется *неубывающей* в этой области, если для любых $x' \in G$ и $x'' \in G$ из неравенства $x'<x''$ следует неравенство $f(x') \leqslant f(x'')$. Причем если из $x'<x''$ всегда следует $f(x')<f(x'')$, то функция $f(x)$ называется *возрастающей*.

Если в области G из неравенства $x' < x''$ следует неравенство $f(x') \geqslant f(x'')$, то функция $f(x)$ называется *невозрастающей* в области G. Причем если из $x' < x''$ всегда следует $f(x') > f(x'')$, то функция $f(x)$ называется *убывающей.*

Функция $f(x)$ называется *монотонной* в данной области, если она в этой области неубывающая (в частности, возрастающая) или невозрастающая (в частности, убывающая).

Совершенно ясно, что если функция $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке ограничена, имеет наибольшее и наименьшее значения, которые принимаются функцией на концах отрезка: если $f(x)$ — неубывающая, то наименьшее значение $f(x)$ есть $f(a)$, а наибольшим значением $f(x)$ будет $f(b)$; если же $f(x)$ — невозрастающая, то $f(a)$ — наибольшее, а $f(b)$ — наименьшее значения функции $f(x)$.

Теорема 1. *Монотонная функция может иметь точки разрыва только первого рода.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ задана и неубывающая в области G, представляющей отрезок, интервал или полуинтервал.

Возьмем точку $x_0 \in G$. Полагая, что x_0 не есть самая левая точка области G (если G имеет такую точку), заметим, что на той части области G, где $x < x_0$, функция $f(x)$ ограничена сверху, так как для таких значений x имеем $f(x) \leqslant f(x_0)$. Поэтому $f(x)$ на этой части G имеет верхнюю грань. Обозначим ее через A. Очевидно, что

$$A \leqslant f(x_0).$$

Согласно определению верхней грани, для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $x' < x_0$, что

$$A - \varepsilon < f(x') \leqslant A.$$

Но так как функция $f(x)$ — неубывающая, то для всех x, удовлетворяющих условию $x' < x < x_0$, тем более будет верно неравенство

$$A - \varepsilon < f(x) \leqslant A.$$

Отсюда следует, что число A есть левый предел функции $f(x)$ в точке x_0.

Итак, если данная функция $f(x)$ определена слева от $x_0 \in G$, то она в точке x_0 имеет левый предел, причем

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0).$$

Аналогично доказывается, что если данная функция $f(x)$ определена справа от $x_0 \in G$, то она в точке x_0 имеет правый предел, причем

$$f(x_0) \leqslant f(x_0+0).$$

Следовательно, если пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, существование которых доказано, совпадают с $f(x_0)$, то функция $f(x)$ в точке $x_0 \in G$ непрерывна; если же по крайней мере один из этих пределов не равен $f(x_0)$, то точка x_0 есть точка разрыва функции $f(x)$ с конечным скачком функции, то есть точка разрыва первого рода.

Для невозрастающей функции доказательство теоремы аналогично.

Теорема 2. *Если функция $y=f(x)$ определена и монотонна в области G, представляющей отрезок, интервал или полуинтервал, и значения y этой функции сплошь заполняют тоже некоторый отрезок, интервал или полуинтервал, то данная функция $f(x)$ в области G непрерывна.*

Доказательство. Пусть для определенности данная функция $f(x)$ — неубывающая.

Для доказательства теоремы применим метод рассуждений от противного. Допустим, что в точке $x_0 \in G$ функция $f(x)$ не непрерывна. Тогда, в силу теоремы 1, точка x_0 для $f(x)$ является точкой разрыва первого рода, и поэтому верно по крайней мере одно из двух неравенств

$$f(x_0-0) < f(x_0) \text{ или } f(x_0) < f(x_0+0).$$

Пусть для определенности имеем

$$f(x_0-0) < f(x_0).$$

Так как

$$f(x) \leqslant f(x_0-0), \text{ если } x < x_0,$$

и

$$f(x_0) \leqslant f(x), \text{ если } x_0 \leqslant x,$$

то функция $f(x)$ не имеет значений, содержащихся между числами $f(x_0-0)$ и $f(x_0)$, а это противоречит условию, что значения $f(x)$ сплошь з.полняют отрезок, интервал или полуинтервал. Полученное противоречие и доказывает справедливость утверждения теоремы.

§ 21. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $E = \{x\}$ и пусть $M = \{y\}$ есть множество всех значений данной функции. Это означает, в силу определения понятия функции, что каждому числу x из множества E по некоторому правилу поставлено в соответствие одно определенное число y из множества M, но по этому правилу одно и то же число $y \in M$ может оказаться поставленным в соответствие не одному числу $x \in E$, а нескольким элементам множества E.

Таким образом, соответствие между элементами E и M, которое определяет функцию $f(x)$, может не быть взаимно однозначным. Пусть, например, функция задана на множестве всех действительных чисел формулой

$$y = x^2.$$

Эта формула ставит в соответствие значение $y = 4$ двум значениям x:

$$x = 2, \ x = -2.$$

Если окажется, что правило, определяющее функцию $y = f(x)$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $E = \{x\}$ и $M = \{y\}$, то есть если каждому значению аргумента x поставлено в соответствие одно определенное значение функции y, причем каждое значение y оказывается поставленным в соответствие одному определенному значению x, то мы можем это правило, определяющее функцию $y = f(x)$, использовать в обратном направлении и множество $M = \{y\}$ считать множеством значений аргумента, а $E = \{x\}$ — множеством значений функции. Тогда мы получим функцию

$$x = \varphi(y),$$

определенную на множестве M, которую будем называть *обратной функцией* по отношению к функции $y = f(x)$.

Так, например, для функции

$$y = x^3,$$

определенной на множестве всех действительных чисел, обратной функцией будет

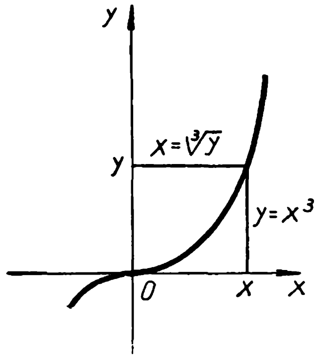
$$x = \sqrt[3]{y},$$

которая также определена на множестве всех действительных чисел.

На чертеже 26, где изображен график функции $y = x^3$, мы видим, что каждое значение y соответствует одному значению x. Поэтому x выражается как функция от y. Это и есть функция $x = \sqrt[3]{y}$, обратная по отношению к функции $y = x^3$.

Если функция $x = \varphi(y)$ является обратной для функции $y = f(x)$, то и функция $y = f(x)$ — обратная по отношению к функции $x = \varphi(y)$.

В следующей теореме при некоторых условиях, наложенных на данную функцию, доказывается существование обратной функции и устанавливаются ее свойства.



Черт. 26

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и возрастающая (убывающая) в некоторой области G, представляющей отрезок, интервал или полуинтервал. Тогда на множестве $M = \{y\}$ значений данной функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, также непрерывная и возрастающая (убывающая) на множестве M.*

Доказательство. Пусть для определенности данная функция $y = f(x)$ — возрастающая. Так как по условию $f(x)$ непрерывна в области G, то, согласно теореме Коши о непрерывных функциях, множество $M = \{y\}$ значений функции $y = f(x)$ есть отрезок, интервал или полуинтервал, для каждой точки y_0 которого найдется хотя бы одно такое значение $x_0 \in E$, что

$$f(x_0) = y_0.$$

Можно заметить, что такое значение x_0 — единственное, так как в силу возрастания функции $y = f(x)$ разным значениям x: x_0 и x_1 — не может соответствовать одно и то же значение $y = y_0$ (если $x_0 < x_1$, то $f(x_0) < f(x_1) \neq y_0$; если $x_0 > x_1$, то $f(x_0) > f(x_1) \neq y_0$). Это x_0 поставим в соответствие числу y_0 из множества M. Таким способом мы каждому значению $y \in M$ поставим в соответствие одно определенное значение $x \in E$ и получим функцию

$$x = \varphi(y),$$

определенную на множестве $M = \{y\}$, которая и будет обратной по отношению к функции

$$y = f(x).$$

Докажем, что функция $x = \varphi(y)$ — возрастающая на множестве M. Действительно, пусть

$$y_1 < y_2 \text{ и } x_1 = \varphi(y_1),\ x_2 = \varphi(y_2).$$

Тогда из определения обратной функции $x = \varphi(y)$ следует, что

$$y_1 = f(x_1) \text{ и } y_2 = f(x_2).$$

Отсюда видно, что $x_1 < x_2$, так как если бы было $x_1 \geqslant x_2$, то для возрастающей функции $y = f(x)$ имели бы $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, или $y_1 \geqslant y_2$, тогда как мы взяли $y_1 < y_2$. Таким образом, из $y_1 < y_2$ следует неравенство $x_1 < x_2$, или $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$, то есть функция $x = \varphi(y)$ — возрастающая.

Наконец, непрерывность функции $x = \varphi(y)$ на множестве M следует из того, что она монотонна и множество ее значений G, как и область определения M, есть отрезок интервал или полуинтервал.

ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Степень с действительным показателем

Если n — целое положительное число, то n-я степень действительного числа a определяется при помощи умножения: a^n есть произведение n множителей, равных a.

Из этого следует, что функция x^n при любом натуральном n определена и непрерывна на множестве всех действительных чисел.

Пусть a — любое положительное действительное число.

Уравнение

$$x^n = a, \tag{1}$$

где n — натуральное число, имеет один, и только один, положительный корень.

Действительно, при возрастании x от 0 до $+\infty$ функция x^n, очевидно, тоже возрастает от 0 до $+\infty$, принимая в качестве своих значений все числа интервала $(0, +\infty)$, что вытекает из непрерывности функции x^n согласно теореме Коши. Отсюда следует, что при одном, и только при одном, значении x из интервала $(0, +\infty)$ величина x^n равняется числу $a > 0$.

Положительный корень уравнения (1) называется *арифметическим корнем n-й степени из a* и обозначается через $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\frac{1}{n}}$.

Если p и q — натуральные числа, то, по определению, полагают:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Наконец, по определению,

$$a^0 = 1.$$

Этими определениями устанавливается понятие степени a^r любого положительного числа a с любым рациональным показателем r.

Можно заметить, что при $a > 1$ из условия $r_1 < r_2$ вытекает неравенство $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Действительно, рациональным числам

$$r_1 = \frac{p_1}{q} < r_2 = \frac{p_2}{q}$$

соответствуют

$$a^{r_1} = a^{\frac{p_1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^{p_1},$$

$$a^{r_2} = a^{\frac{p_2}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^{p_2}.$$

Так как при $a > 1$ имеем

$$a^{\frac{1}{q}} > 1,$$

а из условия $r_1 < r_2$ следует

$$p_1 < p_2,$$

то

$$(a^{\frac{1}{q}})^{p_1} < (a^{\frac{1}{q}})^{p_2},$$

то есть

$$a^{r_1} < a^{r_2}.$$

Подобным же образом можно убедиться, что при $a < 1$ из условия $r_1 < r_2$ вытекает неравенство $a^{r_1} > a^{r_2}$.

Определим a^{α} $(a > 0)$ для любого действительного числа α.

Так как в любой окрестности точки α есть рациональные точки, то всегда можно образовать последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящуюся к α. Более того, таких последовательностей можно образовать сколько угодно.

Докажем, что для любой последовательности рациональных чисел

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots,$$

сходящейся к α, соответствующая последовательность

$$a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_n}, \ldots$$

сходится к одному и тому же пределу. Этот предел и примем мы, естественно, за a^{α}.

Пусть для определенности $a > 1$.

Возьмем возрастающую последовательность рациональных чисел

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots, \tag{2}$$

сходящуюся к α. Соответствующая последовательность

$$a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_n}, \ldots \tag{3}$$

будет также возрастающей, так как при $a > 1$ из $r_n < r_{n+1}$ следует

$$a^{r_n} < a^{r_{n+1}},$$

и ограниченной сверху, ибо при любом n

$$a^{r_n} < a^{r^*},$$

где r^* — какое-нибудь рациональное число, большее α.

Отсюда вытекает, что последовательность (3) имеет предел.

Докажем, что какую бы возрастающую последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящуюся к α, мы ни образовали, соответствующая последовательность $\{a^{r_n}\}$ всегда будет сходиться к одному и тому же пределу A.

Воспользуемся методом рассуждений от противного.

Возьмем две возрастающие последовательности рациональных чисел, сходящиеся к α: последовательность (2) и

$$r_1' < r_2' < \ldots < r_n' < \ldots \tag{2'}$$

Им соответствуют возрастающие и сходящиеся последовательности: последовательность (3) и

$$a^{r_1'}, a^{r_2'}, \ldots, a^{r_n'}, \ldots, \tag{3'}$$

пределы которых обозначим соответственно через A и A'.

Допустим, что $A' \neq A$. Пусть для определенности $A' < A$. Тогда для достаточно большого $n = n_0$ будем иметь

$$a^{r_{n_0}} > A',$$

так как

$$\lim a^{r_n} = A > A'.$$

Отсюда, учитывая, что при любом n

$$a^{r_n'} < A',$$

ибо последовательность (3′) — возрастающая, получим

$$a^{r_n'} < a^{r_{n_0}}$$

для всех номеров n. Из последнего неравенства, в силу условия $a > 1$, вытекает

$$r_n' < r_{n_0}$$

также для всех n; поэтому

$$\alpha = \lim r_n' \leqslant r_{n_0} < r_{n_0+1}.$$

Но неравенство

$$\alpha < r_{n_0+1}$$

неверно, так как последовательность (2) — возрастающая и поэтому ее члены не могут быть больше ее предела.

Полученное противоречие доказывает, что допущение $A' < A$ неверно.

Подобными же рассуждениями убеждаемся, что не может быть $A' > A$.

Следовательно, $A' = A$.

Аналогично можно доказать, что какой бы ни была убывающая последовательность рациональных чисел

$$\bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \ldots > \bar{r}_n > \ldots, \tag{$\bar{2}$}$$

сходящаяся к α, соответствующая последовательность

$$a^{\bar{r}_1},\ a^{\bar{r}_2},\ \ldots,\ a^{\bar{r}_n},\ \ldots \tag{$\bar{3}$}$$

всегда будет сходиться к одному и тому же пределу $\bar{A}$.

Докажем, что $A = \bar{A}$.

Предварительно установим, что для $a > 1$ при любом натуральном m верно неравенство

$$a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a-1}{m}. \tag{4}$$

Действительно, если $a > 1$, то $a^{\frac{1}{m}} > 1$.

Положим $a^{\frac{1}{m}} = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$(1+\lambda)^m = 1 + m\lambda + \ldots$$

Так как в правой части этого равенства слагаемые положительны, то

$$(1+\lambda)^m > 1 + m\lambda,$$

откуда, учитывая, что $\lambda = a^{\frac{1}{m}} - 1$, получим

$$a > 1 + m\left(a^{\frac{1}{m}} - 1\right),$$

что равносильно неравенству (4).

Пользуясь полученным неравенством, убедимся, что пределы A и $\bar{A}$ последовательностей (3) и ($\bar{3}$) равны.

Так как при любом n

$$r_n < \bar{r}_n,$$

то

$$a^{r_n} < a^{\bar{r}_n}$$

также для всех n; поэтому

$$A \leqslant \bar{A}.$$

Допустим, что

$$A < \bar{A}.$$

Тогда $\bar{A} = A + h$, где $h > 0$, и для как угодно большого n

$$a^{\bar{r}_n} - a^{r_n} > h. \qquad (5)$$

Но

$$a^{\bar{r}_n} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{\bar{r}_n - r_n} - 1).$$

Так как

$$\lim \bar{r}_n = \lim r_n = \alpha,$$

то рациональные числа $\bar{r}_n$ и r_n можно выбрать так, чтобы разность $\bar{r}_n - r_n$ была меньше $\frac{1}{m}$ при любом наперед заданном натуральном m. Поэтому

$$a^{\bar{r}_n} - a^{r_n} < a^{r_n}(a^{\frac{1}{m}} - 1).$$

Отсюда, пользуясь неравенством (4), получим

$$a^{\bar{r}_n} - a^{r_n} < \frac{a-1}{m} a^{r_n}.$$

Так как $r_n < \bar{r}_{n_0}$, где $\bar{r}_{n_0}$ — любой, но фиксированный член последовательности ($\bar{2}$), то

$$a^{\bar{r}_n} - a^{r_n} < \frac{a-1}{m} a^{\bar{r}_{n_0}}.$$

В последнем неравенстве натуральное число m можно взять как угодно большим. Возьмем

$$m > \frac{(a-1)\, a^{\bar{r}_{n_0}}}{h}.$$

Тогда получим

$$a^{\bar{r}_n} - a^{r_n} < \frac{a-1}{m} a^{\bar{r}_{n_0}} < h. \qquad (6)$$

Но из допущения $A < \bar{A}$ следовало неравенство (5) для любых $\bar{r}_n$ и r_n, поэтому и для $\bar{r}_n$ и r_n, входящих в неравенство (6), должно быть

$$a^{\bar{r}_n} - a^{r_n} > h.$$

Полученное противоречие доказывает, что допущение $A < \bar{A}$ неверно. Следовательно,

$$A = \bar{A}.$$

Итак, как для любых возрастающих к α, так и для любых убывающих к α последовательностей рациональных чисел $\{r_n\}$ соответствующие последовательности $\{a^{r_n}\}$ сходятся к одному и тому же пределу A. Отсюда, очевидно, вытекает, что для любой (монотонной или нет) последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящейся к α, соответствующая последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится к одному и тому же пределу, который, как было сказано выше, мы и называем a^α.

Таким образом, мы определили степень a^α любого положительного действительного числа a с любым действительным показателем α.

Из определения a^α следует, что при $\alpha_1 < \alpha_2$ имеем: $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, если $a > 1$, и $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, если $a < 1$.

§ 2. Показательная функция

Функция

$$y = a^x,$$

где a — какое-нибудь положительное действительное число, отличное от 1, называется *показательной функцией*.

Степень a^α любого действительного числа $a > 0$ определена для любого действительного показателя α, поэтому показательная функция a^x определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, возрастающая при $a > 1$ и убывающая при $a < 1$.

Нетрудно заметить, что среди значений, принимаемых функцией a^x в интервале $(-\infty, +\infty)$, есть сколь угодно большие и сколь угодно близкие к нулю.

Действительно, пусть $a > 1$. Тогда $a = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$. Поэтому для $x = n$, где n — натуральное число, имеем

$$a^x = a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \ldots$$

Но правую часть этого равенства, а следовательно, и величину a^x можно сделать как угодно большой, если взять $x = n$ достаточно большим.

Затем, учитывая, что при $x = -n$

$$a^x = a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

замечаем, что в интервале $(-\infty, +\infty)$ есть такие значения x, для которых значения a^x как угодно близки к нулю.

Если $a < 1$, то

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x},$$

где $\frac{1}{a} > 1$, откуда видно, что a^x в этом случае также имеет как угодно большие и как угодно близкие к нулю значения.

Показательная функция a^x непрерывна в каждой точке x_0 интервала $(-\infty, +\infty)$.

В самом деле, возьмем произвольную последовательность действительных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1}$$

сходящуюся к x_0, и рассмотрим соответствующую последовательность значений показательной функции a^x

$$a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots, a^{x_n}, \ldots \tag{2}$$

Пусть для определенности $a > 1$.

Обозначим через r_n и r'_n какие-нибудь рациональные числа, удовлетворяющие условиям

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < r'_n < x_n + \frac{1}{n}.$$

Тогда, очевидно, последовательности рациональных чисел

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

и

$$r'_1, r'_2, \ldots, r'_n, \ldots$$

будут сходиться к x_0; поэтому, согласно определению степени a^{x_0}, соответствующие последовательности

$$a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_n}, \ldots$$

и

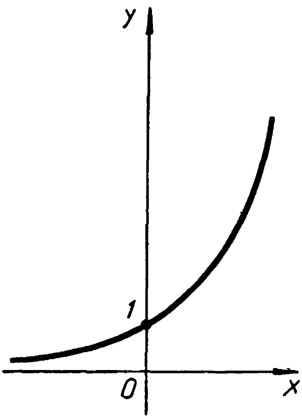
$$a^{r'_1},\ a^{r'_2},\ \ldots,\ a^{r'_n},\ \ldots$$

будут иметь один и тот же предел, равный a^{x_0}. Но при $a > 1$ имеем

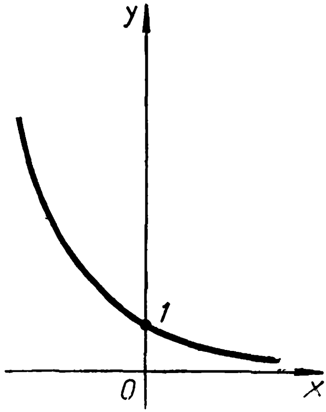
$$a^{r_n} < a^{x_n} < a^{r'_n},$$

так так

$$r_n < x_n < r'_n.$$



Черт. 27а



Черт. 27б

Отсюда вытекает, что и последовательность (2) имеет предел, равный a^{x_0}.

Итак, для любой последовательности действительных чисел (1), сходящейся к x_0, соответствующая последовательность (2) сходится к a^{x_0}, поэтому функция a^x в точке x_0 непрерывна (по Гейне).

В силу непрерывности в интервале $(-\infty, +\infty)$ показательная функция a^x принимает в качестве своих значений все числа, содержащиеся между любыми двумя ее значениями, а так как среди значений a^x есть сколь угодно близкие к нулю и сколь угодно большие, то ясно, что значения a^x образуют интервал $(0, +\infty)$: при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ показательная функция a^x возрастает от 0 до $+\infty$, если $a > 1$, и убывает от $+\infty$ до 0, если $a < 1$.

Графики показательной функции a^x при $a > 1$ и при $a < 1$ изображены на чертежах 27а и 27б.

§ 3. Логарифмическая функция

Пусть a — какое-нибудь положительное действительное число.

Логарифмом положительного действительного числа b при основании a называется показатель той степени a, которая равна b.

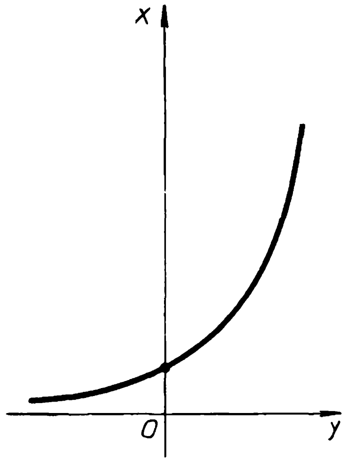
Логарифм числа b при основании a обозначают $\log_a b$.

Таким образом, равенство

$$\log_a b = \alpha,$$

по определению логарифма, означает, что

$$a^\alpha = b.$$



Черт. 28

Каждое положительное действительное число b имеет один, и только один, логарифм при данном положительном основании $a \neq 1$. В самом деле, пусть $a > 1$. Тогда, как уже известно, при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ функция a^x возрастает от 0 до $+\infty$, принимая при этом в качестве своих значений все положительные числа.

Следовательно, уравнение

$$a^x = b \qquad (*)$$

имеет один, и только один, корень $x = \alpha$.

Но $a^\alpha = b$ означает, что $\alpha = \log_a b$.

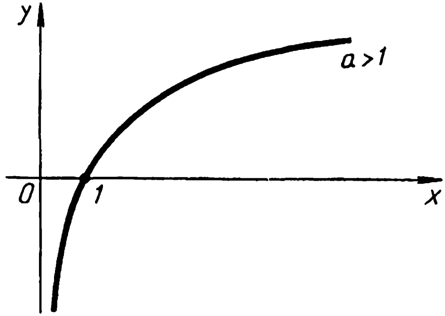
Если $a < 1$, то при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ функция a^x убывает от $+\infty$ до 0, принимая в качестве своих значений все положительные числа; поэтому уравнение (*) и в этом случае имеет единственный корень, который и будет $\log_a b$.

Функция

$$y = \log_a x,$$

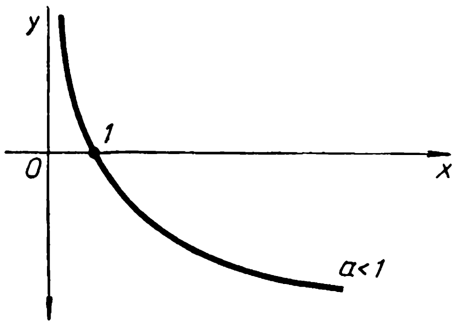
где a — какое-нибудь положительное действительное число, отличное от 1, называется *логарифмической функцией*.

Из определения понятия логарифма следует, что логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена на множестве всех положительных действительных чисел



Черт. 29

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ в интервале $(0, +\infty)$ непрерывна и возрастает при $a > 1$ и убывает при $a < 1$, так как является обратной функцией по отношению



Черт. 30

к показательной функции $x = a^y$, непрерывной и возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $a < 1$ в интервале $-\infty < y < +\infty$ (теорема § 21, гл. III).

Значения логарифмической функции составляют множество всех действительных чисел.

Так как логарифмическая функция $y = \log_a x$ может быть выражена равенством $x = a^y$, то ее график получится, если возьмем график показательной функции $y = a^x$ и оси координат переименуем: ось Ox назовем осью Oy, а ось Oy назовем осью Ox, то есть равенство $y = a^x$ заменим равенством $x = a^y$, что равносильно заданию $y = \log_a x$.

Таким образом, график логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ имеет вид, изображенный на чертеже 28 или на чертеже 29, если оси координат расположить в обычном порядке, а при $a < 1$ — на чертеже 30.

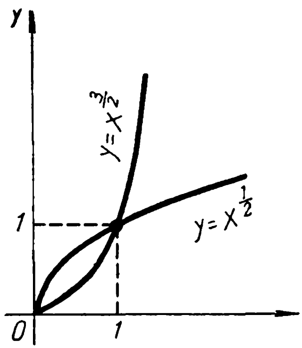
§ 4. Степенная функция

Функция

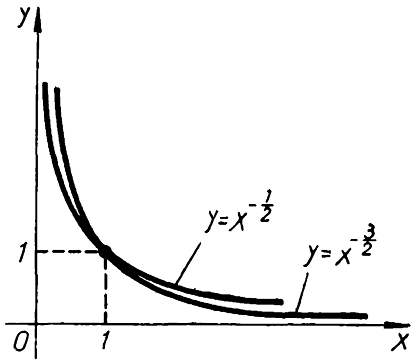
$$y = x^a,$$

где a — любое действительное число, отличное от 0, называется *степенной функцией.*

Если относительно a известно только, что это некоторое действительное число, то можно говорить о значениях x^a только для $x > 0$. Поэтому в общем случае областью существования степенной функции считают интервал $(0, +\infty)$.



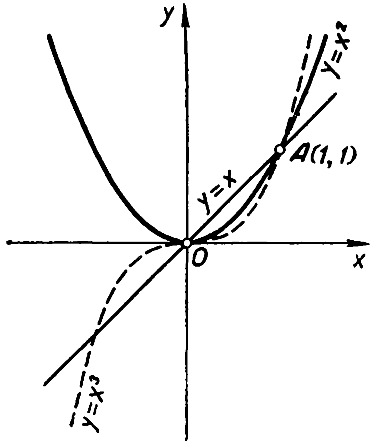
Черт. 31



Черт. 32

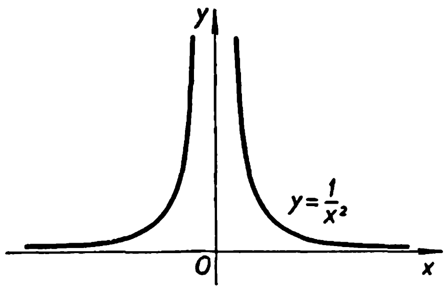
Если $a > 0$, то функция x^a определена и в точке $x = 0$, где принимает значение 0. При возрастании x степенная функция x^a возрастает, если $a > 0$ (черт. 31), и убывает, если $a < 0$ (черт. 32).

Значения y степенной функции заполняют интервал $(0, +\infty)$ сплошь, так как любое положительное число y_0 степенной функцией x^a принимается при некотором значении аргумента x, а именно при $x_0 = y_0^{1/a}$. Отсюда следует (гл. III, § 20, теорема 2), что степенная функция $y = x^a$ непрерывна в интервале $(0, +\infty)$.



Черт. 33

Если число a — целое или дробное с нечетным знаменателем, то степенная функция x^a при $a > 0$ определена для всех x (черт. 33), а при $a < 0$ — для всех x, кроме $x = 0$ (черт. 34).



Черт. 34

§ 5. Тригонометрические функции

Определения тригонометрических функций известны из элементарной математики.

Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены в интервале $(-\infty, +\infty)$, значения каждой из них составляют отрезок

[— 1, 1]. Они периодические, с периодом 2π, то есть

$$\sin(x+2\pi) = \sin x,$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

при любом x. Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны в интервале $(-\infty, +\infty)$. Для доказательства непрерывности заметим, что

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|.$$

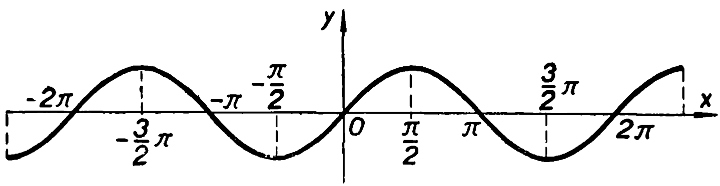
Отсюда видно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x-x_0| < \delta,$$

будет верно неравенство

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

В самом деле, здесь достаточно взять $\delta = \varepsilon$. Следовательно, функция $y = \sin x$ непрерывна (по Коши) в любой точке x_0 интервала $(-\infty, +\infty)$.



Черт. 35

Из формулы

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

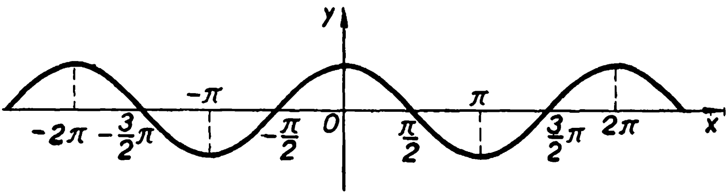
следует, что функцию $y = \cos x$ мы можем рассматривать как сложную функцию

$$y = \sin u, \quad u = \frac{\pi}{2} + x.$$

Так как функция $u=\frac{\pi}{2}+x$ непрерывна в каждой точке x, а функция $y=\sin u$ непрерывна при любом значении u, то, согласно теореме о непрерывности сложной функции, функция $y=\cos x$ непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$.

График функции $y=\sin x$ называется *синусоидой*. Она изображена на чертеже 35.

Из соотношения $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ видно, что график функции $y=\cos x$ получится, если возьмем синусоиду и начало координат перенесем по оси Ox вправо на $\frac{\pi}{2}$ (черт. 36).



Черт. 36

Из формул

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

видно, что функция $y=\operatorname{tg} x$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в которых $\cos x$ обращается в нуль и в силу этого $\operatorname{tg} x$ не определен, а функция $y=\operatorname{ctg} x$ определена и непрерывна во всех точках интервала $(-\infty, +\infty)$, кроме точек $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в которых $\sin x$ обращается в нуль и поэтому $\operatorname{ctg} x$ не определен.

Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — периодические, с периодом π, то есть

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x.$$

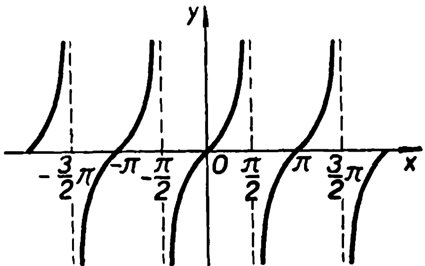
Значения каждой из функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ охватывают множество всех действительных чисел.

Легко заметить, что

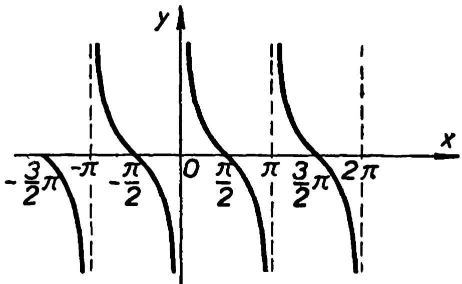
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=+\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}x=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{ctg}x=-\infty,\quad \lim_{x\to 0+0}\operatorname{ctg}x=+\infty.$$

Графики функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ изображены на чертежах 37 и 38.



Черт. 37



Черт. 38

§ 6. Обратные тригонометрические функции

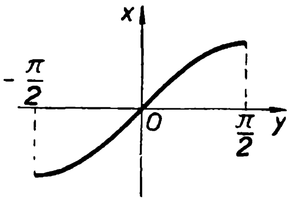
1. $y=\arcsin x$. Функция $x=\sin y$ на отрезке $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ непрерывная, возрастающая. Ее значения образуют отрезок $-1\leqslant x\leqslant 1$. Следовательно, по теореме существования обратной функции, на отрезке $[-1,+1]$ существует непрерывная и возрастающая функция, обратная по отношению к функции $x=\sin y$. Эту обратную

функцию называют *арксинусом* от аргумента x и обозначают $y = \arcsin x$.

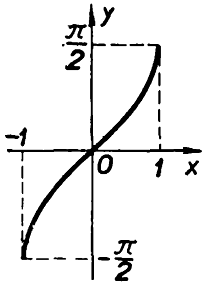
Ее значения образуют отрезок

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Так как равенства $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$ выражают одну и ту же зависимость между x и y, то для получения графика функции $y = \arcsin x$ надо взять график $y = \sin x$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и оси коор-



Черт. 39



Черт. 40

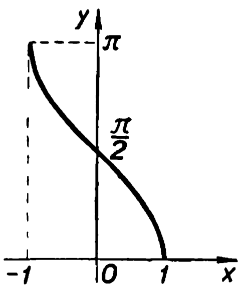
динат переименовать: ось Ox назвать осью Oy, а ось Oy назвать осью Ox, то есть равенство $y = \sin x$ заменить равенством $x = \sin y$, которое равносильно заданию функции $y = \arcsin x$.

Таким приемом мы получим для $y = \arcsin x$ график, изображенный на чертеже 39, который при обычном расположении осей координат примет вид, изображенный на чертеже 40.

2. $\boldsymbol{y = \arccos x}$. Функция

$$y = \arccos x,$$

которая называется *арккосинусом* от аргумента x, определяется как функция, обратная по отношению к функции $x = \cos y$, рассматриваемой на отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi$.



Черт. 41

Функция $y = \arccos x$ непрерывная и убывающая на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Ее значения составляют отрезок $[0, \pi]$.

График функции $y = \arccos x$ (черт. 41) получим из графика функции $y = \cos x$ приемом, которым пользовались при построении графика $\arcsin x$, то есть на чертеже, изображающем $y = \cos x$, оси координат взаимно меняем местами.

Функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ связаны соотношением

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

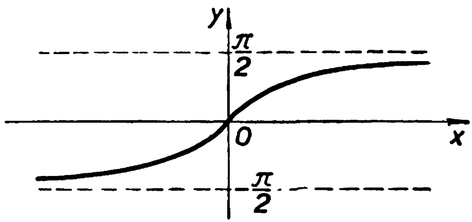
В самом деле, если

$$y = \arccos x, \qquad (2)$$

то $x = \cos y$. Но $\cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$. Поэтому $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - y \leqslant \frac{\pi}{2}$, так как $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Отсюда следует, что

$$\frac{\pi}{2} - y = \arcsin x. \qquad (3)$$

Теперь для получения равенства (1) достаточно почленно сложить равенства (2) и (3).



Черт. 42

3. $y = \operatorname{arctg} x$. Функция $x = \operatorname{tg} y$ в интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ непрерывная, возрастающая. Ее значения образуют интервал $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, в интервале $(-\infty, +\infty)$ существует непрерывная и возрастающая функция, обратная по отношению к функции $x = \operatorname{tg} y$. Эту функцию называют *арктангенсом* от аргумента x и обозначают

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

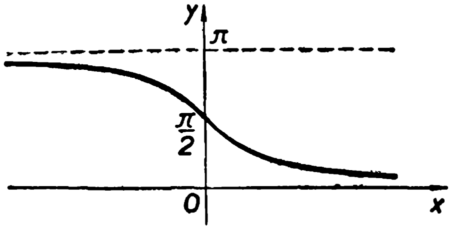
Значения $y = \operatorname{arctg} x$ составляют интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ (черт. 42), получим из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ приемом, которым пользовались для изображения функций $\arcsin x$ и $\arccos x$.

4. $y = \operatorname{arcctg} x$. Функция

$$y = \operatorname{arcctg} x,$$

которая называется *арккотангенсом* от аргумента x, определяется как функция, обратная по отношению к функции $x = \operatorname{ctg} y$, рассматриваемой в интервале $0 < y < \pi$.



Черт. 43

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывная и убывающая в интервале $(-\infty, +\infty)$; ее значения составляют интервал $(0, \pi)$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ (черт. 43) получится, если взять график $y = \operatorname{ctg} x$ и оси координат переменить местами.

Функции $\operatorname{arcctg} x$ и $\operatorname{arctg} x$ связаны соотношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

32. Исследовать на непрерывность и изобразить графики следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0, \\ \cos x, & x > 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0;$

в) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$

Раздел II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

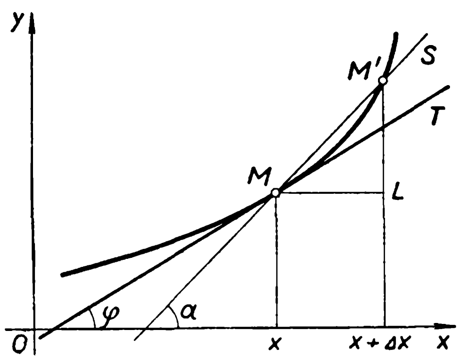
§ 1. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о касательной. Пусть на плоскости xOy дана кривая уравнением

$$y = f(x),$$

которое выражает зависимость между координатами x и y точки, описывающей эту кривую. Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M(x, f(x))$.

Так как точка касания M дана, то для решения задачи требуется только найти угловой коэффициент искомой касательной, то есть $\operatorname{tg} \varphi$ — тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (черт. 44).



Черт. 44

Сначала через точки $M\ (x, f(x))$ и $M'\ (x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$ проведем секущую $MM'S$. Из чертежа видно, что угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ секущей $MM'S$ равен отношению $\frac{LM'}{ML}$. Но

$$ML = \Delta x,\ LM' = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y,$$

поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая затем, что угловой коэффициент касательной MT к данной кривой в точке M есть предел углового коэффициента секущей $MM'S$, когда точка M' стремится по кривой к точке M, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{M'\to M}\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

О п р е д е л е н и е с к о р о с т и. Пусть

$$s = f(t)$$

представляет закон прямолинейного движения материальной точки. Это уравнение выражает путь s, пройденный точкой, как функцию времени t.

Обозначим через Δs путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt от момента t до $t+\Delta t$, то есть

$$\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t).$$

Отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

называется *средней скоростью* точки за время от t до $t+\Delta t$.

Чем меньше Δt, то есть чем короче промежуток времени от t до $t+\Delta t$, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t. Поэтому естественно ввести понятие *скорости v в данный момент t*, определив ее как предел средней скорости за промежуток от t до $t+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

О п р е д е л е н и е у с к о р е н и я. Если скорость v не постоянна, а представляет некоторую функцию времени t:

$$v = v(t),$$

то для характеристики движения пользуются понятием ускорения.

Отношение

$$\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

где

$$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t),$$

называется *средним ускорением* за промежуток времени Δt от t до $t+\Delta t$.

Ускорение a в момент t определяется как предел среднего ускорения за промежуток от t до $t+\Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Определение линейной плотности. Пусть вдоль некоторого отрезка прямой расположено какое-нибудь вещество. За такой «материальный отрезок» можно принять, например, какой-нибудь тонкий стержень, поперечное сечение которого везде одинаково. Если любые два участка данного отрезка, равные по длине, имеют одинаковую массу, то говорят, что масса данного отрезка однородна. В этом случае отношение массы любого участка к его длине есть одна и та же величина μ, которую можно рассматривать как массу приходящуюся на единицу длины данного материального отрезка. Величину μ называют *линейной плотностью* материального отрезка.

Черт. 45

Если же масса данного материального отрезка неоднородна, то есть отношение массы участка к его длине различно для различных участков, то пользуются понятием линейной плотности отрезка в данной точке, позволяющим характеризовать плотность вещества в малой окрестности этой точки.

Рассмотрим это понятие.

Один из концов данного материального отрезка, длина которого равна l, примем за начало отсчета. Тогда абсцисса другого конца будет равна l.

Масса m вещества, расположенного вдоль участка $[0, x]$ данного материального отрезка $[0, l]$ (черт. 45), будет некоторой функцией от x. Пусть

$$m = f(x).$$

Очевидно, что на участок $[x, x+\Delta x]$, длина которого равна Δx, приходится масса

$$\Delta m = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Отношение

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

естественно назвать *средней линейной плотностью* участка $[x, x+\Delta x]$.

Чем короче участок $[x, x+\Delta x]$, то есть чем меньше Δx, тем лучше средняя линейная плотность участка $[x, x+\Delta x]$ характеризует плотность вещества в малой окрестности точки x. Поэтому для выражения плотности вещества в точке x естественно принять предел средней линейной плотности участка $[x, x+\Delta x]$ при $\Delta x \to 0$ (если, конечно, такой предел существует), то есть величину

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

которая называется *линейной плотностью в точке x*.

Из рассмотренных задач видно, что решение многих и весьма различных по своему характеру вопросов приводится к вычислению предела отношения приращения данной функции к вызвавшему его приращению независимой переменной, когда приращение независимой переменной стремится к нулю.

Этим объясняется то, что в математическом анализе вводится и изучается понятие, охватывающее пределы вида

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

§ 2. Производная функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале (a, b). Возьмем какое-нибудь значение x из этого интервала. Затем возьмем новое значение аргумента $x+\Delta x$, придав первоначальному значению x приращение Δx (положительное или отрицательное), так, чтобы $x+\Delta x$ содержалось в интервале (a, b). Этому новому значению аргумента также соответствует некоторое значение функции

$$y + \Delta y = f(x+\Delta x),$$

где

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Теперь составим отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Это отношение является функций от Δx.

Если существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *приращения функции* Δy *к вызвавшему его приращению независимой переменной* Δx, *когда* Δx *стремится к нулю, то этот предел называется производной от функции* $y = f(x)$ *в данной точке* x *и обозначается через* $f'(x)$ (*или* y'):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и не определена для $x < a$ и для $x > b$. В этом случае значению $x = a$ можно придавать только положительные приращения, а значению $x = b$ — только отрицательные приращения. Поэтому

$$f'(a) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

$$f'(b) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

Пример 1. Пусть $y = x^n$, где n — какое угодно целое положительное число. Тогда в любой точке x для любого Δx

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = (x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n) - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Поэтому имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Но

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Следовательно, данная функция имеет производную

$$y' = nx^{n-1}.$$

Таким образом, верна формула

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Взяв в этой формуле $n = 1$, получим

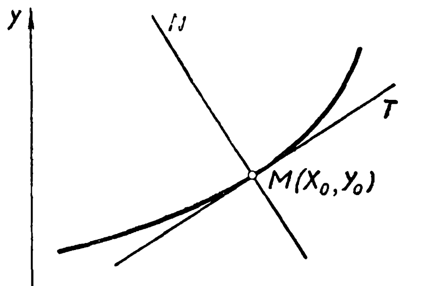
$$x' = 1.$$

Результат, полученный при решении задачи о проведении касательной к данной кривой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(черт. 44), позволяет сформулировать геометрическое истолкование производной.

Производная $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x.



Черт. 46

Отсюда следует, что уравнение касательной MT к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ (черт. 46) есть

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а уравнение нормали MN к той же кривой и в той же точке M (то есть прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной к касательной MT к данной кривой в точке M) есть

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

В самом деле, уравнение пучка всех прямых, проходящих через точку M (x_0, y_0), кроме прямой, параллельной оси Oy, есть $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Чтобы выделить из этого пучка прямых касательную MT, надо взять угловой коэффициент k, равным

$$k_1 = f'(x_0),$$

что следует из геометрического смысла производной, а чтобы выделить нормаль MN, надо воспользоваться условием перпендикулярности прямых и взять угловой коэффициент равным

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

В том случае, когда $k_1 = 0$ и, значит, касательная параллельна оси Ox, нормаль параллельна оси Oy и определяется уравнением $x = x_0$. Если касательная параллельна оси Oy и, значит, не имеет углового коэффициента, то тогда нормаль параллельна оси Ox и $k_2 = 0$. В этом случае касательная определяется уравнением $x = x_0$.

Определение скорости, которое мы приняли выше, позволяет истолковать понятие производной с точки зрения механики.

Если $s = s(t)$ выражает закон движения материальной точки, то скорость v есть производная от пути s по времени t:

$$v = s'(t).$$

Пример 2. Касательная к параболе $y = x^2$ с положительным направлением оси Ox образует угол в 45°. Найти точку касания.

Решение. Согласно условию, касательная имеет угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Но угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x равняется производной от функции x^2 в точке x. Так как из полученной выше формулы

$(x^n)' = nx^{n-1}$ следует $(x^2)' = 2x$, в искомой точке касания должно быть

$$2x = 1.$$

Из этого уравнения, определяющего абсциссу искомой точки, находим $x = \frac{1}{2}$.

Воспользовавшись уравнением данной параболы, найдем соответствующую ординату:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ — искомая точка, а уравнение данной касательной есть

$$y - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2},$$

то есть

$$y = x - \frac{1}{4}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь определением понятия производной, найти производные от функций:

а) $y = \sqrt{x}$, б) $y = \frac{1}{x}$.

2. Найти уравнение касательной к кривой $y = x^3$
а) в точке, где $x = -1$,
б) в начале координат.

§ 3. Понятие дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности некоторой точки x. Этому значению x независимой переменной дадим приращение Δx; тогда функция y получит приращение Δy.

Если приращение функции Δy, соответствующее приращению независимой переменной Δx, можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (1)$$

где A не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, то данная функция называется дифференцируемой в точке x.

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x дифференцируема и, значит, приращение Δy представимо в виде (1).

Та часть приращения функции, которая зависит от приращения независимой переменной Δx линейно, то есть $A \cdot \Delta x$, называется дифференциалом функции и обозначается символом dy (или $df(x)$):

$$dy = A \cdot \Delta x.$$

Линейную часть приращения дифференцируемой функции (то есть дифференциал функции) часто называют *главной частью* приращения функции. Это объясняется тем, что если $A \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ величина $A \cdot \Delta x$ — бесконечно малая того же порядка, что и Δx, тогда как $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ — бесконечно малая высшего порядка, чем Δx.

Между свойством дифференцируемости функции в данной точке и свойством функции, которое заключается в том, что она в данной точке имеет производную, существует тесная связь. Эта связь выражается следующей теоремой.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела производную $f'(x)$.*

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x. Докажем, что в этой точке существует производная $f'(x)$. В самом деле, из дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x следует, что приращение функции Δy, соответствующее приращению независимой переменной Δx, можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$$

и поэтому отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ может быть представлено в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \tag{2}$$

где A для данной точки x постоянна (не зависит от Δx), а $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно мала при $\Delta x \to 0$. По теореме о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой из равенства (2) следует, что

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Существование производной $f'(x)$ доказано. Кроме того, отсюда следует, что

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x)$. Докажем, что она в этой точке дифференцируема. В самом деле, существование $f'(x)$ означает, что при $\Delta x \to 0$ существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Но отсюда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ бесконечно мала при $\Delta x \to 0$.

Умножив обе части этого равенства на Δx, мы получим

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x. \tag{3}$$

Так как в правой части (3) величина $f'(x)$ не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, то равенство (3) имеет тот же характер, что и равенство (1), определяющее дифференцируемость функции.

Следовательно, данная функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Кроме того, отсюда видно, что $dy = f'(x)\,\Delta x$.

Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x всегда выражается формулой

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Рассмотрим функцию $y = x$. В данном случае $dy = \Delta x$. Так как здесь y совпадает с x, то дифференциал от y в этом случае естественно считать дифференциалом от независимой переменной x. Поэтому наряду с понятием дифференциала функции вводят понятие дифференциала dx от независимой переменной x, полагая по определению

$$dx = \Delta x.$$

Теперь формулу дифференциала функции $y = f(x)$ мы можем написать в окончательной форме

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Из этой формулы в свою очередь имеем

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Поэтому производную от функции y по независимой переменной x часто выражают символом $\frac{dy}{dx}$ (читают: «dy по dx»), так как в случае надобности $\frac{dy}{dx}$ мы можем рассматривать и как частное от деления на дифференциал (приращение) независимой переменной dx соответствующего ему дифференциала функции dy.

Из определения дифференцируемости функции непосредственно следует, что *если функция дифференцируема в данной точке, то она в этой точке непрерывна.*

В самом деле, пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда, придав x приращение Δx, мы получим

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

где A не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

а это означает, что данная функция непрерывна в точке x.

Обратное утверждение неверно. Из того, что функция $f(x)$ в точке x непрерывна, еще не следует, что она обязательно дифференцируема в этой точке.

Так, например, функция

$$f(x) = |x|$$

непрерывна в каждой точке числовой оси, но в точке $x = 0$ она не дифференцируема. В самом деле, отношение

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

равно 1, если $\Delta x > 0$, и равно -1, если $\Delta x < 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Это означает, что $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ не имеет предела. Следовательно, данная функция в точке $x = 0$ не имеет производной и поэтому не дифференцируема.

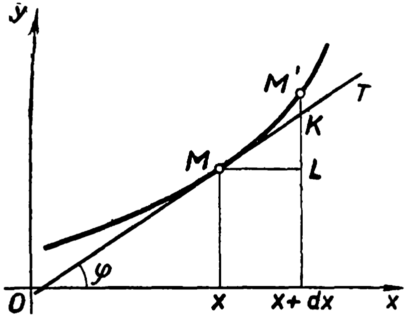
Заметим, что отсутствие производной функции $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ геометрически означает тот факт, что в точке $O(0, 0)$ график функции образует угол и поэтому в этой точке нет определенной касательной, а имеются две различные касательные к разным сторонам угла.

§ 4. Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала функции легко усмотреть из его формулы.

Пусть мы имеем кривую, заданную уравнением $y = f(x)$, и пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x. Проведем касательную к этой кривой в точке $M(x, y)$ (черт. 47). Нам известно, что производная $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной MT, то есть

$$f'(x) = \operatorname{tg} \varphi.$$



Черт. 47

Из чертежа 47 видно, что при изменении абсциссы x на $\Delta x = dx = ML$ ордината кривой изменится на $\Delta y = LM'$, а ордината касательной—на $LK = ML \operatorname{tg}\varphi = f'(x)\,dx = dy$.

Отсюда следует:

Дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ *есть приращение которое получает ордината касательной, к кривой* $y = f(x)$ *в точке с абсциссой* x *при переходе из точки касания в точку с абсциссой* $x + dx$.

§ 5. Правила дифференцирования

Операция отыскания производной и дифференциала данной функции называется *дифференцированием* данной функции.

Пользуясь определением производной или формулой дифференциала функции, можно получить ряд правил, упрощающих дифференцирование функций.

1. Дифференцирование постоянной. Пусть функция $y = C$ — постоянна, то есть имеет одно и то же значение C для всех значений независимой переменной x. Тогда в любой точке x из области определения данной функции для любого Δx

$$\Delta y = C - C = 0, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

и поэтому имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Но

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Следовательно, функция $y = C$ в любой точке области существования имеет производную

$$y' = 0.$$

Кроме того, из формулы дифференциала функции следует, что

$$dy = y'\,dx = 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Любая функция $y = C$, являющаяся постоянной, дифференцируема, причем

$$C' = 0, \quad dC = 0.$$

2. Дифференцирование суммы. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x. Рассмотрим в этой точке x сумму $y = u + v$.

Дадим x приращение Δx. Тогда мы получим

$$u + \Delta u = u(x + \Delta x), \quad v + \Delta v = v(x + \Delta x),$$

$$y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) = (u + \Delta u) + (v + \Delta v).$$

Отсюда найдем

$$\Delta y = [(u + \Delta u) + (v + \Delta v)] - [u + v] = \Delta u + \Delta v$$

и затем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

По условию функции $u(x)$ и $v(x)$ в точке x дифференцируемы и, значит, имеют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, поэтому каждое из отношений $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ имеет предел при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Поэтому, согласно теореме о пределе суммы, существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Но

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'.$$

Следовательно, функция $y = u + v$ в точке x имеет производную

$$y' = u' + v'.$$

Отсюда по формуле дифференциала функции получим

$$dy = y'\,dx = (u' + v')\,dx = u'\,dx + v'\,dx = du + dv.$$

Таким образом, доказано следующее правило:

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то и сумма $u(x) + v(x)$ дифференцируема в точке x, причем

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x),$$
$$d\,[u(x) + v(x)] = du(x) + dv(x).$$

Методом математической индукции это утверждение распространяется на сумму любого фиксированного числа слагаемых.

3. Дифференцирование произведения. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x. Рассмотрим в этой точке x произведение $y = uv$.

Дадим x приращение Δx. Тогда мы получим

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u\cdot v + u\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Величины u и v в правой части этого равенства не зависят от Δx. Кроме того, по условию функции $u(x)$ и $v(x)$ в точке x дифференцируемы, а следовательно, непрерывны и имеют производные $u'(x)$ и $v'(x)$; поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Следовательно, мы имеем

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = u'v + uv'.$$

Отсюда по формуле дифференциала функции получим

$$dy = y'dx = (u'v + uv')\,dx =$$
$$= vu'dx + uv'dx = v\,du + u\,dv.$$

Таким образом, доказано следующее правило:

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то и произведение $u(x)\ v(x)$ дифференцируемо в точке x, причем

$$[u(x)\,v(x)]' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x);$$
$$d\,[u(x)\,v(x)] = v(x)\,du(x) + u(x)\,dv(x).$$

Методом математической индукции это правило обобщается на произведение любого фиксированного числа сомножителей, причем получаются формулы

$$(u_1u_2\ \ldots\ u_n)' = u_1'u_2u_3\ \ldots\ u_n + u_1u_2'u_3\ \ldots\ u_n +$$
$$+ \ldots + u_1u_2\ \ldots\ u_{n-1}u_n',$$
$$d\,(u_1u_2\ \ldots\ u_n) = u_2u_3\ \ldots\ u_n\,du_1 + u_1u_3\ \ldots\ u_n du_2 +$$
$$+ \ldots + u_1u_2\ \ldots\ u_{n-1}\,du_n.$$

Следующие правила являются следствиями уже доказанных правил.

а) *Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x, а C — постоянная, то произведение $Cu(x)$ дифференцируемо в точке x, причем*

$$[Cu(x)]' = Cu'(x), \quad d\,[Cu(x)] = C\,du(x).$$

В самом деле,

$$(Cu) = C'u + Cu' = Cu'.$$

Ради краткости иногда это правило формулируют так: *постоянный множитель можно вынести за знак производной и за знак дифференциала.*

б) *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то и разность $u(x) - v(x)$ дифференцируема в точке x, причем*

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x),$$
$$d\,[u(x) - v(x)] = du(x) - dv(x).$$

Чтобы убедиться в правильности этого утверждения, достаточно представить разность $u(x) - v(x)$ в виде

$$u(x) - v(x) = u(x) + (-1)\,v(x)$$

и воспользоваться уже доказанными правилами.

в) *Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x, а n — целое положительное число, то функция u^n также дифференцируема в точке x, причем*

$$(u^n)' = nu^{n-1}u', \quad du^n = nu^{n-1}\,du.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно в правиле дифференцирования произведения n множителей $u_1 u_2 \ldots u_n$ положить

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u.$$

Пример 1. Найти производную от функции

$$y = x^2 (1 - 5x)^3.$$

Решение.

$$y' = [x^2 (1 - 5x)^3]' = (x^2)'(1 - 5x)^3 + x^2 [(1 - 5x)^3]' =$$
$$= 2x (1 - 5x)^3 + x^2 3 (1 - 5x)^2 (1 - 5x)' =$$
$$= 2x (1 - 5x)^3 + 3x^2(1 - 5x)^2(-5) = x (1-5x)^2(2-25x),$$
$$y' = x (1 - 5x)^2 (2 - 25x).$$

4. Дифференцирование частного. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x и в этой точке $v(x) \neq 0$. Рассмотрим в точке x частное

$$y = \frac{u}{v}.$$

При изучении пределов функций было доказано, что если функция в данной точке имеет предел, отличный от нуля, то и сама функция отлична от нуля в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой этой точки).

По условию, функция $v(x)$ дифференцируема и, следовательно, непрерывна в точке x. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x) \neq 0.$$

Отсюда следует, что $v(x + \Delta x) \neq 0$ и поэтому частное $\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$ существует для всех Δx, достаточно малых по абсолютной величине.

Дадим x приращение Δx. Тогда мы получим

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v^2 + v \cdot \Delta v},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}.$$

Величины u и v в правой части этого равенства не зависят от Δx, причем $v \neq 0$. Кроме того, согласно условиям, при $\Delta x \to 0$ отношения $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ стремятся к u' и v', а Δv стремится к нулю. Следовательно, мы имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (v^2 + v\Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Отсюда получим

$$dy = y'\,dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}\,dx = \frac{vu'\,dx - uv'\,dx}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Таким образом, доказано следующее правило:

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x и в этой точке $v(x) \neq 0$, то частное $\frac{u(x)}{v(x)}$ также дифференцируемо в точке x, причем

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2},$$

$$d\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\,du(x) - u(x)\,dv(x)}{[v(x)]^2}.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}.$$

Пример 2. Найти производную от функции

$$y = \frac{1-x}{1+x}.$$

Решение.

$$y' = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2},$$

$$y' = -\frac{2}{(1+x)^2}.$$

5. Дифференцирование сложной функции. Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0,

а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Рассмотрим сложную функцию

$$y = f[\varphi(x)].$$

Дадим значению $x = x_0$ приращение Δx. Тогда функция $u = \varphi(x)$ получит приращение Δu, а это в свою очередь вызовет приращение Δy функции $y = f(u)$.

По условию, функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, Поэтому если Δx вызовет $\Delta u \neq 0$, то

$$\Delta y = f'(u_0)\,\Delta u + \alpha(\Delta u)\,\Delta u, \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta u) \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Здесь $\alpha(\Delta u)$ при $\Delta u = 0$ не определена. Положим $\alpha(0) = 0$. Тогда формула (1) будет верна и при $\Delta u = 0$. В самом деле, если $\Delta u = 0$, то и $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = 0$. Но по формуле (1) при $\Delta u = 0$ тоже получим $\Delta y = 0$.

Разделив обе части равенства (1) на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{2}$$

Так как по условию функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема и поэтому непрерывна в точке x_0, то при $\Delta x \to 0$ приращение Δu также стремится к нулю, а это в свою очередь вызывает стремление к нулю $\alpha(\Delta u)$. Кроме того, из этого же условия следует, что $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \varphi'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, правая часть равенства (2) и, значит, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имеет предел при $\Delta x \to 0$, причем

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\alpha(\Delta u)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u_0)\,\varphi'(x_0).$$

Но предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, который, как уже доказано, существует, есть производная от y по x, то есть от сложной функции $y = f[\varphi(x)]$, в точке $x = x_0$. Поэтому мы имеем

$$[f(\varphi(x))]'_{x=x_0} = f'(u_0)\,\varphi'(x_0).$$

Обозначив исходную точку x_0 через x, а соответствующую точку u_0 через u, полученный здесь результат мы можем сформулировать в виде следующего правила:

Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей *точке* $u = \varphi(x)$, *то сложная функция* $y = f[\varphi(x)]$ *дифференцируема в точке* x, *причем*

$$[f(\varphi(x))]' = f'(u)\,\varphi'(x), \quad df[\varphi(x)] = f'(u)\,\varphi'(x)dx.$$

Первое из этих двух равенств можно записать так

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Второму равенству, в правой части которого $\varphi'(x)\,dx = du$, можно придать вид

$$dy = f'(u)du.$$

Последняя формула показывает, что дифференциал функции выражается формулой одного и того же вида (одной и той же формы) как в случае функции от независимой переменной, так и в случае функции от функции. Это свойство дифференциала называют *инвариантностью формы дифференциала.*

Следует обратить внимание на то, что инвариантна (неизменна) именно форма дифференциала, так как в содержании формулы дифференциала функции от функции есть существенное отличие от содержания формулы дифференциала функции от независимой переменной.

В самом деле, если для функции $y = f(x)$, где x — независимая переменная, в формуле дифференциала $dy = f'(x)\,dx$ мы имеем $dx = \Delta x$, то в формуле дифференциала $dy = f'(u)\,du$ для функции $y = f(u)$, где u — функция некоторой переменной, du в общем случае уже не есть приращение Δu, а является дифференциалом функции u.

Из инвариантности формы дифференциала следует, что производная $f'(u)$ от функции $y = f(u)$ по u, где $u = \varphi(x)$, опять выражается как частное от деления дифференциала функции dy на дифференциал аргумента du

$$f'(u) = \frac{dy}{du}.$$

Возвращаясь к формуле производной сложной функции $y'_x = y'_u\, u'_x$, теперь мы ее можем записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

6. Дифференцирование обратной функции. Вопрос о дифференцировании обратной функции решается следующим правилом:

Пусть функция

$$y = f(x)$$

в точке x_0 имеет производную $f'(x_0) \neq 0$; пусть существует функция

$$x = \varphi(y),$$

обратная по отношению к функции $y = f(x)$, непрерывная в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда обратная функция $x = \varphi(y)$ в точке y_0 имеет производную, причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Докажем это. Дадим значению $y = y_0$ приращение Δy. Тогда функция $x = \varphi(y)$ получит некоторое приращение Δx:

$$x_0 + \Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y),$$

здесь $\Delta x \neq 0$, если $\Delta y \neq 0$. В самом деле, если бы при $\Delta y \neq 0$ было $\Delta x = 0$, то есть $\varphi(y_0 + \Delta y) = x_0$, то имели бы

$$y_0 = f(x_0) \text{ и } y_0 + \Delta y = f(x_0),$$

что противоречит определению понятия функции, ибо одному значению аргумента x_0 не могут соответствовать два различных значения функции y_0 и $y_0 + \Delta y$. Отсюда следует, что отношение $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ можно представить в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если теперь Δy устремить к нулю, то и Δx будет стремиться к нулю, так как по условию функция $x = \varphi(y)$ в точке y_0 непрерывна. Но функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

причем по условию $f'(x_0) \neq 0$. Следовательно, при $\Delta y \to 0$ существует предел частного $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ и он равен $\frac{1}{f'(x_0)}$. Отсюда вытекает, что при $\Delta y \to 0$ имеет предел и отношение $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, причем

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Но предел $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ при $\Delta y\to 0$ есть производная функции $x=\varphi(y)$ в точке y_0.

Таким образом, мы имеем

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Полученная формула может быть представлена в виде

$$x'_y=\frac{1}{y'_x} \text{ или } \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Пример. 3. Найти производную от функции

$$y=\sqrt[3]{x}.$$

Решение. Данная функция является обратной по отношению к функции

$$x=y^3.$$

Поэтому

$$(\sqrt[3]{x})'=y'_x=\frac{1}{x'_y}.$$

По формуле производной целой положительной степени имеем

$$x'_y=3y^2=3\sqrt[3]{x^2}.$$

Следовательно, при любом $x\neq 0$

$$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad d\sqrt[3]{x}=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти производные от функций, указанных в следующих примерах:

3. $y=x^3+2x-5$. 4. $y=x(1-x)(x+3)$. 5. $y=ax^2-bx^5$.
6. $y=(1+cx^2)^3$. 7. $y=\frac{3}{x^2-1}$ 8. $\varrho=\frac{\theta^2}{1-\theta}$.

§ 6. Производные элементарных функций

Вычислим производные некоторых элементарных функций. Полученные при этом результаты мы можем рассматривать как формулы, которые вместе с правилами, полученными в § 5, позволят быстро находить производные более сложных функций.

1. Показательная функция. Рассмотрим функцию $y = e^x$, которая определена на всей числовой оси.

Возьмем некоторое значение x и дадим ему приращение Δx. Тогда y получит приращение

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1).$$

Докажем, что при $\Delta x \to 0$ отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

имеет предел.

В самом деле, при $\Delta x \to 0$, как нам уже известно, $e^{\Delta x} - 1$ и Δx являются эквивалентными бесконечно малыми.

Поэтому мы имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

Следовательно, функция $y = e^x$ имеет производную

$$y' = e^x.$$

Итак, имеем формулу

$$(e^x)' = e^x. \tag{1}$$

Рассмотрим сложную функцию $e^{u(x)}$, где функция $u(x)$ дифференцируема в точке x.

По правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$[e^{u(x)}]'_x = (e^u)'_u \, u'(x).$$

Для вычисления производной от e^u по u применима формула (1). Поэтому

$$(e^u)'_u = e^u.$$

Следовательно,

$$[e^{u(x)}]' = e^{u(x)}\, u'(x). \tag{I}$$

Заметим, что формула (I) превращается в (1) в частном случае, когда $u(x) = x$.

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Так как $\ln a^x = x \ln a$, то $a^x = e^{x \ln a}$. Теперь мы можем воспользоваться формулой (I):

$$y' = (a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{2}$$

В случае сложной функции $a^{u(x)}$, где функция $u(x)$ дифференцируема в точке x, пользуясь правилом дифференцирования сложных функций и формулой (2), получим

$$[a^{u(x)}]' = a^{u(x)} \ln a\, u'(x). \tag{II}$$

2. Логарифмическая функция. Рассмотрим функцию $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), которая определена для всех $x > 0$ и является обратной по отношению к функции $x = a^y$.

Воспользовавшись формулой (2), найдем

$$x'_y = a^y \ln a = x \ln a.$$

Согласно правилу дифференцирования обратной функции, отсюда следует, что для любого $x > 0$ имеем

$$y'_x = (\log_a x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом, верна формула

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{3}$$

В случае сложной функции имеем

$$[\log_a u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}. \tag{III}$$

Чтобы получить формулы для производных натурального логарифма, надо в формулах (3) и (III) положить $a = e$. Тогда, учитывая, что $\ln e = 1$, получим

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{4}$$

$$[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{IV}$$

3. Степенная функция. Рассмотрим функцию $y = x^{\alpha}$, где α — любое действительное число, отличное от нуля. Она определена для всех $x > 0$.

Функцию x^{α} сначала мы прологарифмируем

$$\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x,$$

а затем, потенцируя, представим ее в виде показательной функции $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. Теперь, пользуясь формулами (I) и (4), получим

$$y' = (x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' =$$

$$= e^{\alpha \ln x}\alpha \frac{1}{x} = x^{\alpha}\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Итак,

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{5}$$

В случае сложной функции обычным путем получим

$$[u^{\alpha}(x)]' = \alpha u^{\alpha-1}(x)\, u'(x). \tag{V}$$

4. Тригонометрические функции. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Приращению Δx здесь соответствует

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

а также и то, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos \lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

так как функция $\cos x$ непрерывна, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

Следовательно, функция $y = \sin x$ имеет производную

$$y' = \cos x.$$

Таким образом, имеем формулу

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{6}$$

В случае сложной функции получим

$$[\sin u(x)]' = \cos u(x) \cdot u'(x). \tag{VI}$$

Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Учитывая, что $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и пользуясь формулой (VI), получим

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \\ = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

Следовательно, имеем формулу

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{7}$$

В случае сложной функции получим

$$[\cos u(x)]' = -\sin u(x) \cdot u'(x). \tag{VII}$$

Пользуясь формулами (6) и (7) и правилом вычисления производной частного, получим производную от $\operatorname{tg} x$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \tag{8}$$

В случае сложной функции получим

$$[\operatorname{tg} u(x)]' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = \sec^2 u(x) \cdot u'(x). \tag{VIII}$$

Учитывая, что $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, получим

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x, \tag{9}$$

$$[\operatorname{ctg} u(x)]' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)} = -\csc^2 u(x) \cdot u'(x). \tag{IX}$$

5. Обратные тригонометрические функции. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$, которая определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и является обратной для функции $x = \sin y$, взятой на отрезке

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Согласно правилу дифференцирования обратной функции, для всех x из интервала $(-1,1)$ мы имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

причем $\sqrt{1-x^2}$ берется с положительным знаком, так как $\sqrt{1-x^2} = \cos y$, а для x из интервала $(-1, 1)$ соответствующие значения y принадлежат интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в котором $\cos y > 0$.

Таким образом, имеем формулу

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (10)$$

В случае сложной функции

$$[\arcsin u(x)]' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}. \qquad (X)$$

Таким же приемом найдем формулы

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (11)$$

$$[\operatorname{arctg} u(x)]' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}. \qquad (XI)$$

Чтобы найти формулы производных $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ достаточно учесть, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Из этих соотношений видно, что

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (12)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{13}$$

Для сложных функций получим

$$[\arccos u(x)]' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}, \tag{XII}$$

$$[\operatorname{arcctg} u(x)]' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}. \tag{XIII}$$

Полученные результаты сведем в таблицу.

Таблица производных элементарных функций

1) $[e^{u(x)}]' = e^{u(x)} u'(x)$.
2) $[a^{u(x)}]' = a^{u(x)} \ln a \, u'(x)$.
3) $[\log_a u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.
4) $[\ln u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
5) $[u^\alpha(x)]' = \alpha u^{\alpha-1}(x) u'(x)$.
6) $[\sin u(x)]' = \cos u(x) u'(x)$.
7) $[\cos u(x)]' = -\sin u(x) u'(x)$.
8) $[\operatorname{tg} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = \sec^2 u(x) u'(x)$.
9) $[\operatorname{ctg} u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)} = -\csc^2 u(x) u'(x)$.
10) $[\arcsin u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.
11) $[\operatorname{arctg} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$.
12) $[\arccos u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.
13) $[\operatorname{arcctg} u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$.

Пример 1. Найти производную от функции

$$y = \sqrt{u(x)},$$

где функция $u(x)$ дифференцируема.

Р е ш е н и е.

$$y' = \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \left([u(x)]^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}[u(x)]^{-\frac{1}{2}} u'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}};$$

$$y' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

П р и м е р 2. Найти производную от функции

$$y = \sin^2(e^{-x}).$$

Р е ш е н и е.

$$y' = 2\sin(e^{-x})[\sin(e^{-x})]' = 2\sin(e^{-x})\cos(e^{-x})(e^{-x})' =$$
$$= \sin(2e^{-x})e^{-x}(-x)' = -e^{-x}\sin(2e^{-x});$$
$$y' = -e^{-x}\sin(2e^{-x}).$$

П р и м е р 3. Найти производную от функции

$$y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Р е ш е н и е.

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1};$$

$$y' = -\frac{1}{x^2+1}.$$

П р и м е р 4. Найти производную от функции

$$y = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}).$$

Р е ш е н и е.

$$y' = \frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1+\frac{(x^2+a^2)'}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}+x} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}(x+\sqrt{x^2+a^2})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти производные от функций, указанных в следующих примерах:

9. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 10. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. 11. $s=\ln\frac{1+t^2}{1-t^2}$.

12. $\varrho=\cos^2\frac{\theta}{2}$. 13. $f(x)=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$.

14. $y=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 15. $y=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

16. На расстоянии 5 *км* от прямолинейного берега находится маяк, фонарь которого делает полный оборот в течение одной минуты. Найти скорость v, с которой пучок света скользит по берегу в момент, когда он образует с береговой линией угол в 60°.

§ 7. Дифференциалы элементарных функций

Если $f'(u)$ есть производная от функции $f(u)$ по u, то

$$df(u) = f'(u)\,du,$$

причем u может быть как независимой переменной, так и дифференцируемой функцией.

Зная производные основных элементарных функций, мы с помощью этой формулы без труда найдем дифференциалы этих функций.

Таблица дифференциалов элементарных функций

1) $de^u=e^u\,du$.

2) $da^u=a^u\ln a\,du$.

3) $d\ln u=\frac{du}{u}$.

4) $d\log_a u=\frac{du}{u\ln a}$.

5) $du^\alpha=\alpha u^{\alpha-1}\,du$.

6) $d\sin u=\cos u\,du$.

7) $d\cos u=-\sin u\,du$.

8) $d\operatorname{tg} u=\frac{du}{\cos^2 u}$.

9) $d\operatorname{ctg} u=-\frac{du}{\sin^2 u}$.

10) $d\arcsin u=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

11) $d\operatorname{arctg} u=\frac{du}{1+u^2}$.

12) $d\arccos u=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

13) $d\operatorname{arcctg} u=-\frac{du}{1+u^2}$.

§ 8. Применения дифференциалов в приближенных вычислениях

Рассматривая понятие дифференциала функции, мы уже отмечали, что дифференциал функции dy имеет смысл называть главной частью приращения функции Δy. При $dy \neq 0$ разность между Δy и dy может быть сделана сколь угодно малой даже по сравнению с самими Δy и dy, если только Δx взять достаточно близким к нулю. Действительно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

где $f'(x)\,\Delta x = dy$, а $\alpha(\Delta x)$ стремится к нулю, когда $\Delta x \to 0$. Пусть $dy \neq 0$ и, значит, $f'(x) \neq 0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)},$$

поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1,$$

то есть при $\Delta x \to 0$ бесконечно малые Δy и dy — эквивалентны.

Отсюда мы получаем возможность брать dy в качестве приближенного значения Δy, причем относительная ошибка будет сколь угодно малой, если только $|\Delta x|$ достаточно мало. Это обстоятельство очень важно, так как часто бывает трудно вычислить даже приближенное значение приращения функции Δy, рассматривая его как разность $f(x + \Delta x) - f(x)$, тогда как dy находится легко при помощи правил и формул дифференцирования.

Пример. Найти приближенно объем v сферического слоя, имеющего внешний диаметр 10 *см*, а толщину $\frac{1}{8}$ *см*.

Решение. Объем V сферы радиуса R выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Изменению R на ΔR соответствует изменение V на

$$\Delta V \approx dV = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' \Delta R = 4\pi R^2 \Delta R.$$

Объем v данного сферического слоя равен $|\Delta V|$ для $R = 5$ и $\Delta R = -\frac{1}{8}$. Поэтому

$$v \approx 4\pi 5^2 \frac{1}{8} \approx 4 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot \frac{1}{8} = 39,25 \ (см^3).$$

На основе приближенного равенства $\Delta y \approx dy$ можно получить ряд приближенных формул.

Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть

$$y = x^\nu,$$

где ν — любое действительное число. Тогда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^\nu - x^\nu,$$
$$dy = \nu x^{\nu-1} \Delta x.$$

Поэтому при малых значениях $|\Delta x|$

$$(x + \Delta x)^\nu \approx x^\nu + dy,$$

или

$$(x + \Delta x)^\nu \approx x^\nu + \nu x^{\nu-1} \Delta x. \qquad (1)$$

Этой формулой удобно пользоваться для приближенного вычисления ν-й степени числа $x + \Delta x$, когда оно близко к числу x (Δx мало), ν-я и $\nu - 1$-я степени которого вычисляются легко.

Так, например, при $\nu = \frac{1}{2}$ из формулы (1) получим:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}. \qquad (1')$$

Если в формуле (1) взять $\nu = \frac{1}{3}$, то будем иметь

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}. \qquad (1'')$$

Пользуясь приближенной формулой (1′), вычислим $\sqrt{3,9978}$:

$$\sqrt{3,9978} = \sqrt{4 - 0,0022} \approx \sqrt{4} + \frac{-0,0022}{2\sqrt{4}} = 2 - \frac{0,0022}{4} =$$
$$= 2 - 0,00055 = 1,99945.$$

Если же $\sqrt{3,9978}$ вычислить по правилу извлечения квадратного корня, что гораздо более кропотливо, то получим

$$\sqrt{3,9978} = 1,999449\ldots$$

Для $\sqrt[3]{125,1324}$ по приближенной формуле (1″) получим

$$\sqrt[3]{125,1324} \approx \sqrt[3]{125} + \frac{0,1324}{3\sqrt[3]{125^2}} = 5 + \frac{0,1324}{3 \cdot 5^2} \approx 5 + \\ + 0,00177 = 5,00177.$$

2. Возьмем

$$y = \sin x.$$

Тогда

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

$$dy = \cos x \cdot \Delta x.$$

Поэтому при малых значениях $|\Delta x|$

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x \approx \cos x \cdot \Delta x$$

и, значит,

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x. \tag{2}$$

Формулой (2) удобно пользоваться для вычисления приближенного значения синуса числа $x + \Delta x$, близкого к такому числу x, синус и косинус которого легко найти. (Следует помнить, что здесь x — отвлеченное число. Поэтому при вычислении синусов и косинусов углов надо выражать углы не в градусах, а в радианах.)

Так, например, при $x = 0$ из формулы (2) получим

$$\sin \Delta x \approx \Delta x.$$

Если же в формуле (2) взять $x = \frac{\pi}{4}$, то получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \Delta x).$$

3. Пусть

$$y = \ln x.$$

Тогда

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x,$$

$$dy = \frac{\Delta x}{x}.$$

Поэтому при малых значениях $|\Delta x|$

$$\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}. \tag{3}$$

Из формулы (3), в частности, при $x = 1$ получим

$$\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x.$$

Дифференциалами пользуются и для оценки погрешностей результатов приближенных вычислений.

Пусть число x — приближенное значение некоторой величины, точное значение которой равно $x + \Delta x$. Как правило, разность Δx между точным и приближенным значениями рассматриваемой величины бывает неизвестна. Однако часто удается найти такое положительное число Δ_x, что гарантировано неравенство

$$|\Delta x| \leqslant \Delta_x.$$

В таком случае Δ_x называется *абсолютной погрешностью*, а

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|}$$

— *относительной погрешностью* приближенного числа x.

Пусть нам надо вычислить значение функции

$$y = f(x),$$

соответствующее некоторому значению аргумента. Если x — приближенное значение, а $x + \Delta x$ — точное значение аргумента, то $y = f(x)$ будет приближенным, а $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ — точным значением функции. Когда абсолютная погрешность Δ_x приближенного значения аргумента x достаточно мала, тогда $\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x$. Поэтому за абсолютную погрешность приближенного значения функции y можно принять

$$\Delta_y = |f'(x)|\Delta_x,$$

а за относительную погрешность —

$$\delta_y = \frac{|f'(x)|\Delta_x}{|f(x)|}.$$

Пусть, например, для вычисления площади круга S сначала каким-нибудь измерительным инструментом измерили диаметр круга и получили число x, а затем воспользовались формулой

$$S=\frac{\pi x^2}{4}.$$

Если абсолютная погрешность Δ_x числа x достаточно мала, то для площади S за абсолютную погрешность можно принять

$$\Delta_S=S'\Delta_x=\frac{\pi x}{2}\Delta_x,$$

а за относительную погрешность

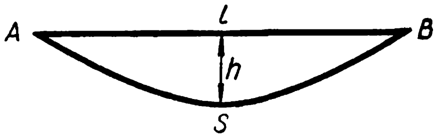
$$\delta_S=\frac{\Delta_S}{S}=2\frac{\Delta_x}{x}.$$

Таким образом, при малых Δ_x относительную погрешность вычисленного значения площади круга S следует считать вдвое большей относительной погрешности значения диаметра x, полученного измерением.

УПРАЖНЕНИЯ

17. Вычислить приближенно:

а) arctg 1,02; б) arctg 0,97.



Черт. 48

18. Провод закреплен в точках A и B (черт. 48). Если s — длина провода, l — расстояние между точками A и B, h — стрелка провеса, то можно принять

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt{l(s-l)}.$$

Вычислить приближенно величину изменения h при изменении длины провода на Δs под влиянием температуры.

19. Для определения объема данного шара сначала измерили его диаметр микрометром, а затем воспользовались известной формулой геометрии. Показать, что максимальная относительная ошибка вычисленного значения объема втрое больше, чем максимальная относительная ошибка измеренного значения диаметра.

§ 9. Дифференцирование неявных функций

Функция y, зависящая от x, иногда задается *неявно* уравнением вида

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $F(x, y)$ обозначает некоторое выражение, содержащее x и y.

Если

$$F[x, y(x)] = 0$$

для всех x из интервала (a, b), то это означает, что уравнение (1) определяет функцию $y = y(x)$ в интервале (a, b).

Например, каждая из двух функций

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \tag{2}$$

и

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}, \tag{3}$$

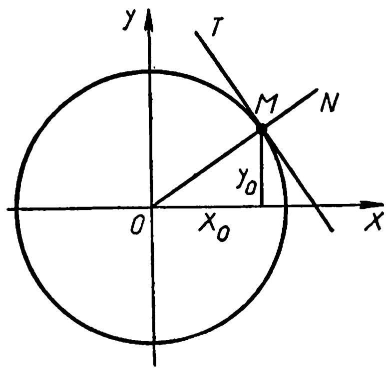
определенных на отрезке $[-r, r]$, может быть задана неявно уравнением

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \tag{4}$$

так как

$$x^2 + \left(\pm\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - r^2 = 0$$

для всех $x \in [-r, r]$.



Черт. 49

Уравнение (4), которое можно записать в виде

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{4'}$$

на плоскости xOy определяет окружность радиуса r с центром в начале координат (черт. 49).

Верхняя половина этой окружности является графиком функции (2), а нижняя половина — графиком функции (3).

Таким образом, функция $y = y(x)$ считается заданной в неявной форме, если она задана уравнением вида (1), не разрешенным относительно этой функции.

Производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением (1), можно выразить через саму функцию y и независимую переменную x, пользуясь уравнением (1).

Действительно, положим, что y в уравнении (1) есть функция, определенная этим уравнением. Тогда имеем тождество

$$F(x, y) = 0.$$

Отсюда дифференцированием получим

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0. \tag{5}$$

При вычислении левой части равенства (5) придется пользоваться правилом дифференцирования сложной функции; поэтому если указанное дифференцирование выполнить, то равенство (5) будет иметь вид

$$\Phi(x, y, y') = 0. \tag{6}$$

Соотношение (6) мы можем рассматривать как уравнение относительно искомой производной y'. Решая это уравнение относительно y', что нетрудно будет сделать, так как оно линейное относительно y', как это видно из того же правила дифференцирования сложной функции, мы получим

$$y' = \varphi(x, y).$$

Покажем все это на примере

Пример. Найти уравнения касательной и нормали к окружности (4′) в любой точке $M(x_0, y_0)$.

Решение. Уравнение касательной к данной кривой в точке $M(x_0, y_0)$ есть

$$y - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0),$$

где $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ — значение производной от y по x при $x = x_0$, $y = y_0$, причем $\frac{dy}{dx}$ находят из уравнения данной кривой.

Дифференцируя по x обе части уравнения (4) или уравнения (4′) и учитывая при этом, что x — независимая переменная, а y — функция от x, получим

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Из полученного уравнения найдем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \qquad (7)$$

Формула (7) выражает как производную от функции (2), так и производную от функции (3). Как видим из этой формулы, чтобы вычислить значение производной в точке x, надо знать и значение функции y в этой точке.

Согласно формуле (7)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\frac{x_0}{y_0}$$

независимо от того, будет ли точка M (x_0, y_0) принадлежать верхней полуокружности или нижней полуокружности.

Следовательно, касательная к окружности (4′) в любой ее точке M (x_0, y_0) определяется уравнением

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Это уравнение можно представить в виде

$$x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2.$$

Отсюда, замечая, что $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, получим уравнение касательной к данной окружности в точке M (x_0, y_0) в окончательном виде

$$x_0x + y_0y = r^2.$$

Уравнение нормали, очевидно, есть

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0),$$

или

$$y = \frac{y_0}{x_0}x.$$

Отсюда видим, что нормали к окружности проходят по радиусам окружности, что известно из элементарной геометрии: радиус окружности перпендикулярен к касательной, проведенной к окружности в конце радиуса.

УПРАЖНЕНИЯ

20. Показать, что кривые

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{и} \quad xy = b^2$$

при любых значениях постоянных a и b пересекаются под прямым углом.

21. Показать, что сумма отрезков, отсекаемых на осях координат касательной к параболе

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$$

в любой ее точке, есть величина постоянная, равная a.

§ 10. Дифференцирование при помощи логарифмирования

Способ дифференцирования неявных функций можно использовать для дифференцирования явных функций при помощи логарифмирования.

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную, но ее нельзя или трудно найти при помощи полученных выше правил и формул дифференцирования. Пусть в то же время $\ln f(x)=\varphi(x)$ дифференцируется без особых затруднений. Такую функцию можно дифференцировать следующим путем.

Сначала возьмем натуральный логарифм данной функции

$$\ln y=\ln f(x),$$

или

$$\ln y=\varphi(x).$$

Дифференцируя теперь y как неявную функцию, будем иметь:

$$\frac{y'}{y}=\varphi'(x),$$

откуда находим

$$y'=y\varphi'(x),$$

или

$$y'=f(x)\,[\ln f(x)]'.$$

Производную от натурального логарифма данной функции называют *логарифмической производной* данной функции.

Следовательно, *производная от данной функции равна произведению этой функции на ее логарифмическую производную*.

Рассмотрим функцию

$$y=u^v,$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — дифференцируемые функции.

Пользуясь логарифмической производной, получим

$$y' = u^v(\ln u^v)' = u^v(v\ln u)' =$$

$$= u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v v'\ln u + vu^{v-1}u'.$$

Таким образом, мы имеем формулу

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v\ln u\, v'. \qquad \text{(XIV)}$$

Чтобы легче запомнить эту формулу, обратим внимание на то, что первый член правой части мы получим, если v примем за постоянную и от u^v возьмем производную как от степенной функции, а для получения второго члена правой части надо в выражении u^v принять u за постоянную и воспользоваться формулой производной показательной функции.

Пример 1. Найти производную от функции

$$y = (\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Пользуясь формулой (XIV), получим

$$y' = \frac{1}{x}(\sin x)^{\frac{1}{x}-1}(\sin x)' + (\sin x)^{\frac{1}{x}}\ln\sin x\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x}(\sin x)^{\frac{1}{x}-1}\cos x - \frac{1}{x^2}(\sin x)^{\frac{1}{x}}\ln\sin x;$$

$$y' = \frac{1}{x^2}(\sin x)^{\frac{1}{x}}(x\operatorname{ctg} x - \ln\sin x).$$

Пример 2. Найти производную от функции

$$y = \sqrt{\frac{(x^4+1)(x^2+2)}{3-x}}.$$

Решение. Здесь производную можно найти при помощи формул дифференцирования степени, частного и произведения, но это требует больших вычислений. Пользуясь логарифмической производной, получим

$$y' = y(\ln y)' = \frac{y}{2}[\ln(x^4+1) + \ln(x^2+2) - \ln(3-x)]' =$$

$$= \frac{y}{2}\left(\frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{3-x}\right);$$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x^4+1)(x^2+2)}{3-x}}\left(\frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{3-x}\right).$$

Очевидно, в данном случае этот способ дифференцирования приводит к цели гораздо быстрее.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти производные от функций, указанных в следующих примерах:

22. $y=\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{x^3-1}}$. 23. $u=v^{e^v}$.

§ 11. Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x интервала (a, b), то $f'(x)$ есть функция от x, определенная в интервале (a, b). Может оказаться, что и $f'(x)$ в точке $x \in (a, b)$ имеет свою производную, которую называют *производной второго порядка от функции* $f(x)$ и обозначают символом $f''(x)$.

Таким образом,

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Подобным же образом определяются производные более высоких порядков: *производной* n-го *порядка от функции* $f(x)$, *которая обозначается через* $f^{(n)}(x)$, *называется производная от производной* $n-1$-*го порядка этой функции*:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Производную $f'(x)$ можно теперь называть производной первого порядка от функции $f(x)$.

Выше, рассматривая уравнение движения материальной точки

$$s = s(t),$$

которое выражает путь s, пройденный точкой за время t, как функцию от t, мы приняли следующие определения скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$ в момент t:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t),$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Следовательно,

$$a(t) = [s'(t)]' = s''(t).$$

Это означает, что *ускорение a есть производная второго порядка от пути s по времени t.* В этом мы находим механический смысл производной второго порядка.

Чтобы найти $f^{(n)}(x)$, надо сначала найти $f'(x)$, затем $f''(x)$, взяв производную от $f'(x)$, и т. д., пока не получим нужную нам производную $f^{(n)}(x)$. Таким образом, производные высших порядков вычисляются при помощи уже известных правил и формул дифференцирования.

Пример 1. Найти производную 3-го порядка от функции

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Решение.

$$y' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2};$$

$$y''' = \left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right]' = -2\,\frac{(1+x^2)^2 - x2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -2\,\frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3} = -2\,\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3};$$

$$y''' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Пример 2. Найти производную n-го порядка от функции

$$y = \ln x.$$

Решение.

$$y' = \frac{1}{x};$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \qquad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1\cdot 2}{x^3}.$$

Теперь уже ясно, что для любого $n \geqslant 2$

$$y^{(n)} = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Пример 3. Функция $y(x)$ задана неявно уравнением

$$y = \sin(x - y).$$

Найти y''.

Решение. Дифференцируя обе части данного уравнения по x, получим

$$y' = \cos(x-y)\cdot(1-y').$$

Отсюда найдем

$$y' = \frac{\cos(x-y)}{1+\cos(x-y)}.$$

Дифференцируя y' по x, получим

$$y'' = \frac{-\sin(x-y)\cdot(1-y')\cdot[1+\cos(x-y)]+\cos(x-y)\cdot\sin(x-y)\cdot(1-y')}{[1+\cos(x-y)]^2} =$$

$$= \frac{(1-y')[-\sin(x-y)]}{[1+\cos(x-y)]^2}.$$

Подставив сюда уже найденное значение y', получим

$$y'' = \frac{\left[1-\frac{\cos(x-y)}{1+\cos(x-y)}\right][-\sin(x-y)]}{[1+\cos(x-y)]^2} = \frac{-\sin(x-y)}{[1+\cos(x-y)]^3}.$$

Наконец, пользуясь исходным уравнением, $\sin(x-y)$ в выражении y'' заменим через y. Тогда получим окончательный результат

$$y'' = \frac{-y}{[1+\cos(x-y)]^3}.$$

Заметим, что если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные n-го порядка, то произведение uv также имеет производную n-го порядка, причем верна формула

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)},$$

которая называется *формулой Лейбница*.

При $n = 1$ формула Лейбница представляет уже известную нам формулу

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

В том, что формула Лейбница верна и для производных высших порядков, можно убедиться методом математической индукции.

Пример 4. Найти производную 20-го порядка от функции

$$y = x^2e^{ax}.$$

Решение. Положим

$$u = e^{ax}, \quad v = x^2.$$

Тогда

$$u' = ae^{ax}, \quad u'' = a^2e^{ax}, \quad \ldots, \quad u^{(20)} = a^{20}e^{ax};$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{(4)} = \ldots = v^{(20)} = 0.$$

По формуле Лейбница находим

$$(uv)^{(20)} = a^{20}e^{ax}x^2 + 20a^{19}e^{ax}2x + \frac{20\cdot 19}{2!}a^{18}e^{ax}2 =$$

$$= a^{18}e^{ax}(a^2x^2 + 40ax + 380);$$

$$y^{(20)} = a^{18}e^{ax}(a^2x^2 + 40ax + 380).$$

УПРАЖНЕНИЯ

24. $y = x^3 \ln x$. Найти $\frac{d^4y}{dx^4}$.

25. $y = xe^x$. Найти $y^{(n)}$.

26. $y^2 = 4ax$. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

27. $x^3 - xy + y^3 = 0$. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

28. $y = x^2 \sin x$. Найти $y^{(40)}$.

§ 12. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Может оказаться, что в точке x и дифференциал dy — также дифференцируемая функция. Тогда существует дифференциал от дифференциала данной функции, который обозначается через d^2y и называется *дифференциалом второго порядка от функции* $y = f(x)$. Таким образом,

$$d^2y = d(dy).$$

Подобно этому определяются дифференциалы более высоких порядков: *дифференциалом n-го порядка от функции* $y = f(x)$, который обозначается через d^ny, называется дифференциал от дифференциала $n - 1$-го порядка этой функции:

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Дифференциал dy удобно теперь называть дифференциалом первого порядка от функции $y = f(x)$.

Поставим себе задачей найти формулы, выражающие дифференциалы высших порядков.

Пусть $y = f(x)$ есть функция от независимой переменной x, имеющая дифференциалы любого порядка.

Нам известно, что

$$dy = f'(x)\, dx,$$

где $dx = \Delta x$ есть некоторое приращение независимой переменной x, которое не зависит от x.

По определению,

$$d^2y = d(dy) = d\,(f'(x)\, dx).$$

Так как здесь $f'(x)\, dx$ рассматривается как функция от x, то множитель dx является постоянным, его можно вынести за знак дифференциала, поэтому

$$d^2y = d(f'(x))\, dx.$$

Для вычисления $d\,(f'(x))$ надо применить формулу дифференциала первого порядка к функции $f'(x)$ Тогда получим

$$d\,(f'(x)) = (f'(x))'\, dx = f''(x)\, dx.$$

Следовательно,

$$d^2y = f''(x)\, dx^2,$$

где dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Из этой формулы имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

Пользуясь методом математической индукции, получим формулу дифференциала n-го порядка

$$d^ny = f^{(n)}(x)\, dx^n,$$

где $dx^n = (dx)^n$.

Отсюда видно, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

то есть $f^{(n)}(x)$ можно рассматривать как частное от деления d^ny на dx^n.

Пусть теперь

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x).$$

Тогда дифференциал функции $y = f[\varphi(x)]$, в силу инвариантности формы дифференциала первого порядка, можно записать в виде

$$dy = f'(u)\,du,$$

где

$$du = \varphi'(x)\,dx.$$

Для дифференциала второго порядка d^2y от функции $y = f[\varphi(x)]$ получим

$$d^2y = d(dy) = d[f'(u)\,du] = d[f'(u)]\,du + f'(u)\,d(du).$$

Здесь множитель du в общем случае не есть постоянная величина, а представляет функцию $\varphi'(x)\,dx$, поэтому $d(du) = d^2u$ нельзя считать равным нулю. В силу инвариантности формы дифференциала первого порядка

$$d[f'(u)] = f''(u)\,du.$$

Следовательно,

$$d^2y = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u.$$

Как видим, *форма дифференциала второго порядка не инвариантна*. То же самое относится к формам дифференциалов более высоких порядков, для которых в случае функции от функции получаются еще более сложные формулы.

§ 13. Дифференцирование функций, заданных в параметрической форме

Кривую на плоскости xOy часто бывает удобнее задать не одним уравнением, выражающим зависимость между координатами x и y точки, описывающей эту кривую, а системой двух уравнений вида

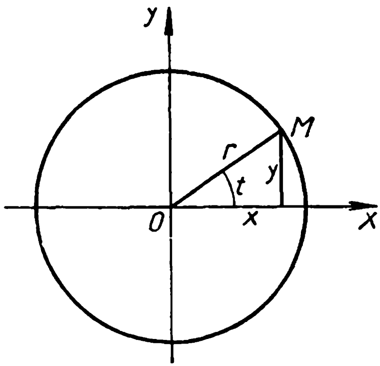
$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t), \tag{1}$$

в которой x и y даны как непрерывные функции некоторой величины t, называемой *параметром*. В таком случае говорят, что кривая задана в *параметрической форме*.

Так, например, окружность радиуса r с центром в начале координат (черт. 50) можно задать в параметрической форме уравнениями

$$
\begin{gathered}
x = r\cos t,\\
y = r\sin t,\\
(0 \leqslant t < 2\pi),
\end{gathered}
\tag{2}
$$

обозначив через t радианную величину угла наклона к положительному направлению оси Ox радиуса OM, проведенного в точку $M(x, y)$. При изменении t от 0 до 2π конец радиуса OM, то есть точка M, один раз опишет полную окружность.



Черт. 50

Если из системы уравнений (1) исключить параметр t, то получим одно уравнение, содержащее x и y, и тогда данная кривая будет выражена в обычной форме.

Так, если мы в уравнениях (2) возведем в квадрат левые и правые части и затем полученные при этом уравнения почленно сложим, то параметр t будет исключен и данная окружность будет выражена уже знакомым нам уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Однако исключить параметр t не всегда бывает возможно. Поэтому для решения некоторых задач, как например для отыскания касательной к кривой, надо уметь находить производную от y по x и в таких случаях, когда функциональная зависимость между x и y выражена в параметрической форме уравнениями вида (1).

Пусть для функции $x = \varphi(t)$ существует обратная функция $t = \Phi(x)$. Тогда y есть функция от x

$$y = \psi[\Phi(x)].$$

Допустим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке t, причем $\varphi'(t) \neq 0$, и функция $\Phi(x)$ дифференцируема в соответствующей точке x. Тогда, согласно правилу дифференцирования сложных функций, будет дифференцируемой в точке x и функция $y = \psi\,[\Phi(x)]$, причем

$$y'_x = y'_t\, t'_x = \psi'(t)\, \Phi'(x).$$

Но по правилу дифференцирования обратных функций

$$t'_x = \frac{1}{x'_t},$$

то есть

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Поэтому

$$y'_x = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Таким образом, при данных условиях имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные высших порядков, то и функция $y = \psi\,[\Phi(x)]$ имеет производные тех же порядков. Производная второго порядка от y по x вычисляется так

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\,\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} =$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Таким же путем последовательного дифференцирования можно найти и производные более высоких порядков.

В случае окружности, заданной в параметрической форме уравнениями (2), мы имеем

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Здесь производная $\frac{dy}{dx}$ может быть представлена и так

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r\cos t}{r\sin t} = -\frac{x}{y}.$$

Именно в таком виде мы получили производную $\frac{dy}{dx}$ в примере § 9, где эта же окружность была дана уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

29. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $x = 2e^t$, $y = e^{-t}$, в точке, где $t = 0$.

30. Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$, если $x = a\cos t$, $y = a\sin t$

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Теоремы о среднем

Здесь мы рассмотрим ряд важных теорем дифференциального исчисления, находящих большое применение при исследовании функций.

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную хотя бы в интервале (a, b) и на концах отрезка $[a, b]$ принимает равные значения, то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка, в которой производная данной функции равна нулю.*

Доказательство. По условию, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поэтому, в силу теоремы Вейерштрасса, она на этом отрезке имеет наименьшее и наибольшее значения. Обозначим их соответственно m и M.

Если $M = m$, то это означает, что $f(x)$ есть постоянная, и поэтому $f'(x) = 0$ во всем интервале (a, b). Следовательно, в этом случае теорема верна.

Пусть $M \neq m$. Тогда функция $f(x)$ по крайней мере одно из двух своих значений m или M принимает в точке ξ, содержащейся внутри интервала (a, b), так как $f(a) = f(b)$ и поэтому не может быть одновременно m значением $f(x)$ на одном конце, а M — на другом конце отрезка $[a, b]$. Пусть для определенности

$$M = f(\xi), \quad a < \xi < b.$$

По условию, $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x интервала (a, b). Поэтому существует и

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}.$$

Отсюда, взяв сначала $\Delta x = h > 0$, а затем $\Delta x = -h < 0$, получим

$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h}.$$

Так как

$$f(\xi + h) - f(\xi) = f(\xi + h) - M \leqslant 0,$$
$$f(\xi - h) - f(\xi) = f(\xi - h) - M \leqslant 0,$$

то мы имеем одновременно

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geqslant 0.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $h \to 0$, мы получим два неравенства

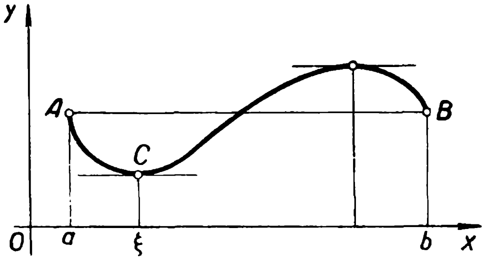
$$f'(\xi) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad f'(\xi) \geqslant 0,$$

которые должны быть верны одновременно. Из этого следует, что

$$f'(\xi) = 0 \quad (a < \xi < b).$$

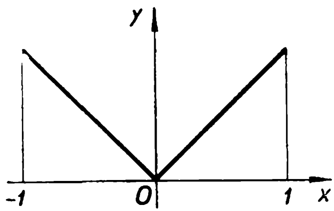
Таким образом, теорема верна и в том случае, когда $m \neq M$.

Теореме Ролля можно дать следующее геометрическое истолкование. Пусть имеем кривую, заданную уравнением $y = f(x)$, и пусть $f(x)$ есть функция, удовлетворяющая на отрезке $[a, b]$ всем условиям теоремы Ролля. Первое условие — непрерывность $f(x)$ на $[a, b]$ — означает непрерывность данной кривой. Второе условие — существование производной $f'(x)$ в каждой точке интервала (a, b) —



Черт. 51

означает, что к данной кривой можно провести касательную в любой точке, находящейся на кривой между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. Наконец, третье условие $f(a) = f(b)$ показывает, что концы дуги AB данной кривой находятся на одном уровне по отношению к оси Ox (черт. 51). Утверждение теоремы, что при перечисленных условиях есть по крайней мере одна точка ξ в интервале (a, b), в которой $f'(\xi) = 0$, означает, что на дуге AB данной кривой, обладающей указанными выше свойствами, есть по крайней мере одна точка C, в которой касательная к данной кривой параллельна оси Ox (или хорде AB).



Черт. 52

Условия теоремы Ролля являются существенными. Так, например, для функции

$$f(x) = |x|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

(черт. 52) выполнены все условия теоремы Ролля, кроме существования производной $f'(x)$ в интервале $(-1, 1)$: не существует $f'(x)$ в одной только точке $x = 0$; одновременно с этим мы замечаем, что в интервале $(-1, 1)$ нет такой точки, где производная равна нулю: $f'(x) = -1$, если $-1 < x < 0$, $f'(x) = 1$, если $0 < x < 1$, а при $x = 0$ производная $f'(x)$, как уже было отмечено, не существует.

Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$ хотя бы в интервале (a, b), то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна такая точка ξ, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Доказательство. Число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ обозначим через Q:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = Q. \qquad (1)$$

Тогда

$$f(b) - f(a) - Q(b-a) = 0. \qquad (2)$$

Формулой

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - Q(x-a) \qquad (3)$$

определим на отрезке $[a, b]$ новую функцию.

Функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна, как алгебраическая сумма конечного числа непрерывных функций ($f(x)$ непрерывна по условию, а непрерывность остальных слагаемых очевидна); в интервале (a, b) функция $\varphi(x)$ имеет производную, так как в этом интервале каждое слагаемое в выражении $\varphi(x)$ имеет производную; наконец, $\varphi(a) = \varphi(b)$, так как $\varphi(a) = 0$, что следует непосредственно из формулы (3), определяющей $\varphi(x)$, а значение $\varphi(b) = f(b) - f(a) - Q(b-a) = 0$ в силу равенства (2).

Отсюда следует, согласно теореме Ролля, что в интервале (a, b) есть по крайней мере одна точка ξ, в которой производная от функции $\varphi(x)$ равна нулю

$$\varphi'(\xi) = 0.$$

Но

$$\varphi'(x) = f'(x) - Q,$$

поэтому

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - Q$$

и

$$f'(\xi) - Q = 0.$$

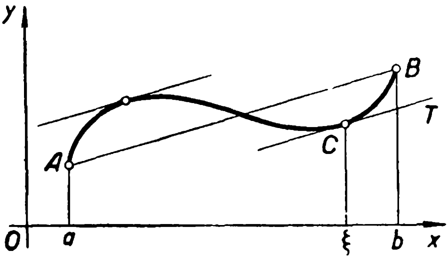
Следовательно,

$$Q = f'(\xi).$$

Подставив теперь в равенстве (1) $f'(\xi)$ вместо Q, получим требуемое равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \quad a<\xi<b. \tag{4}$$

Геометрически теорема Лагранжа истолковывается так. На дуге AB (черт. 53) непрерывной кривой, к которой можно провести касательную в любой точке, лежащей на



Черт. 53

кривой между A и B, найдется по крайней мере одна точка C, в которой касательная параллельна хорде.

В самом деле, число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей, проходящей по хорде AB, а $f'(\xi)$ — угловой коэффициент касательной CT. Равенство этих чисел, о чем утверждается в теореме Лагранжа, и означает параллельность хорды AB и касательной CT.

Замечаем, что теорема Ролля получается из теоремы Лагранжа как частный случай при $f(a)=f(b)$, то есть когда хорда AB параллельна оси Ox. Таким образом, теорема Лагранжа есть обобщение теоремы Ролля.

Формулу (4), выражающую теорему Лагранжа, мы будем называть *формулой Лагранжа*. Формула Лагранжа может быть записана в виде

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi), \quad a<\xi<b.$$

Число ξ, промежуточное по отношению к числам a и b, можно представить в виде

$$\xi=a+\theta(b-a),$$

где $0 < \theta < 1$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'[a + \theta (b - a)].$$

Наконец, взяв вместо a и b соответственно x и $x + h$, формулу Лагранжа запишем так:

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h).$$

Теорема Коши. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, имеют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ хотя бы в интервале (a, b), причем $\varphi'(x) \neq 0$, то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка ξ, такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при данных условиях $\varphi(b) - \varphi(a)$ не может равняться нулю и поэтому деление на $\varphi(b) - \varphi(a)$ возможно. Действительно, если бы было $\varphi(b) - \varphi(a) = 0$, то функция $\varphi(x)$ удовлетворяла бы всем условиям теоремы Ролля, так как, кроме непрерывности $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ и существования $\varphi'(x)$ в интервале (a, b), что дано по условию, мы имели бы еще $\varphi(a) = \varphi(b)$. Но в таком случае $\varphi'(x)$ была бы равна нулю по крайней мере в одной точке интервала (a, b), тогда как по условию $\varphi'(x) \neq 0$ во всех точках этого интервала.

Таким образом, равенство (5) имеет смысл; надо только доказать, что оно верно при некотором значении ξ из интервала (a, b).

Положим

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = Q. \tag{6}$$

Тогда

$$f(b) - f(a) - Q[\varphi(b) - \varphi(a)] = 0. \tag{7}$$

Формулой

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)] \tag{8}$$

определим на отрезке $[a, b]$ новую функцию.

Очевидно, что функция $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна, а в интервале (a, b) имеет производную

$$F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x). \tag{9}$$

Кроме того, $F(a) = F(b)$, так как $F(a) = 0$, что непосредственно следует из формулы (8), определяющей $F(x)$, и $F(b) = 0$ в силу равенства (7).

Следовательно, функция $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому в интервале (a, b) существует по крайней мере одна такая точка ξ, что $F'(\xi) = 0$. Но из равенства (9) видно, что

$$F'(\xi) = f'(\xi) - Q\varphi'(\xi).$$

Поэтому

$$f'(\xi) - Q\varphi'(\xi) \quad 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi'(\xi) \neq 0$, найдем

$$Q = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Наконец, подставив это в (6), мы получим искомую формулу

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad a < \xi < b,$$

которую будем называть *формулой Коши.*

Теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа.

В самом деле, положим в теореме Коши $\varphi(x) = x$, чем условия теоремы, очевидно, не будут нарушены. Тогда, замечая, что в этом случае $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ и $\varphi'(x) = 1$ для всех x, из формулы Коши мы получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{b \quad a} = \frac{f'(\xi)}{1},$$

а это и есть формула Лагранжа.

§ 2. Формула Тейлора

Рассмотрим многочлен n-й степени

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{1}$$

(коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые постоянные).

При любом x_0 многочлен (1) можно представить в виде суммы степеней разности $x - x_0$, взятых с некоторыми коэффициентами. В самом деле, положим $x = x_0 + t$. Тогда

$$P(x) = P(x_0 + t) = a_0 + a_1(x_0 + t) +$$
$$+ a_2(x_0 + t)^2 + \ldots + a_n(x_0 + t)^n.$$

Раскрыв в правой части скобки и сгруппировав подобные члены, получим

$$P(x_0+t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n,$$

или, выразив t обратно через x,

$$P(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + \\ + A_2(x-x_0)^2 + \ldots + A_n(x-x_0)^n, \qquad (2)$$

где $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ — опять некоторые постоянные.

Взяв многочлен $P(x)$ в форме (2) и продифференцировав его n раз, найдем

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + \ldots + nA_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P''(x) = 1\cdot 2A_2 + 2\cdot 3A_3(x-x_0) + \ldots + \\ + (n-1)\cdot nA_n(x-x_0)^{n-2}, \qquad (3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots nA_n.$$

Полагая в равенствах (2) и (3) $x = x_0$, получим

$$P(x_0) = A_0, \quad P'(x_0) = A_1,$$
$$P''(x_0) = 2!\,A_2, \ldots, P^{(n)}(x_0) = n!\,A_n,$$

откуда

$$A_0 = P(x_0), \qquad A_1 = \frac{P'(x_0)}{1!},$$
$$A_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}, \ldots, A_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Следовательно, равенство (2) может быть записано в виде

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \\ + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (2')$$

Откуда в частном случае при $x_0 = 0$ получим

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (1')$$

По формуле (2′) мы можем вычислить значение многочлена $P(x)$ в любой точке x, если известны значения этого многочлена и его производных в одной какой-нибудь точке x_0.

Теперь естественно попытаться получить подобную же формулу для вычисления, если не точных, то хотя бы приближенных значений любой n раз дифференцируемой функции.

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (или $a \geqslant x \geqslant \geqslant b$) имеет непрерывные производные до n — 1-го порядка, а в интервале (a, b) существует и производная n-го порядка.

Поставим себе задачей выяснить, какая получится ошибка, если $f(b)$ заменить многочленом

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+ \\ +\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}.$$

Иначе говоря, требуется найти величину R_n, определенную равенством

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+ \\ +\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n. \quad (4)$$

Будем искать R_n в форме $R_n = M(b-a)^p$, где $1 \leqslant p \leqslant \leqslant n$, а M неизвестно. С этой целью составим функцию

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+ \\ +\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+M(b-x)^p. \quad (5)$$

Функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она на этом отрезке непрерывна как сумма конечного числа непрерывных функций, в интервале (a, b) имеет производную, так как является конечной суммой дифференцируемых функций, и в концах отрезка имеет равные значения: $\varphi(a) = = f(b)$ в силу равенства (4) и $\varphi(b) = f(b)$, что видно из формулы (5).

Следовательно, согласно теореме Ролля, между a и b существует такая точка ξ, что

$$\varphi'(\xi) = 0.$$

Дифференцируя $\varphi(x)$, получим после упрощений

$$\varphi'(x)=\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-Mp(b-x)^{p-1}$$

(остальные члены в производной правой части (5) взаимно уничтожаются). Поэтому

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(b-\xi)^{n-1}-Mp(b-\xi)^{p-1}=0.$$

Так как $\xi \neq b$, то отсюда следует, что

$$M=\frac{(b-\xi)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(\xi).$$

Представив ξ в виде $\xi = a+\theta(b-a)$, где $0<\theta<1$, получим

$$M=\frac{(b-a)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}[a+\theta(b-a)]$$

и поэтому

$$R_n=\frac{(b-a)^{n}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}[a+\theta(b-a)]. \tag{6}$$

Итак, равенство (4) верно, если под R_n в этом равенстве понимать то, что дает формула (6).

Равенство (4) называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$. Последний член правой части этой формулы R_n называется остаточным членом формулы Тейлора.

Из равенства (6), выражающего остаточный член формулы Тейлора в *форме Шлемильха*, можно получить еще другие более простые формы R_n.

Так, полагая $p=1$, мы получим R_n в форме Коши

$$R_n=\frac{(b-a)^{n}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(b-a)]. \tag{7}$$

Если же в (6) положим $p=n$, то получим R_n в форме Лагранжа

$$R_n=\frac{(b-a)^{n}}{n!}f^{(n)}[a+\theta(b-a)]. \tag{8}$$

Если формулу Тейлора (4) развернуть только до $n=1$ и R_1 записать в форме (8), то получим

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'[a+\theta(b-a)],$$

или

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\theta(b-a)],$$

что, как видим, представляет формулу Лагранжа для функции $f(x)$. Следовательно, формула Лагранжа содержится в формуле Тейлора как частный случай.

В равенстве (4) вместо a и b можно взять любые x_0 и x из отрезка $[a, b]$. Поэтому формулу Тейлора для функции $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n, \qquad (4')$$

а остаточный член R_n в форме Шлемильха

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-p}}{(n-1)!\, p} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)], \qquad (6')$$

откуда при $p = 1$ и $p = n$ опять получим R_n соответственно в форме Коши и в форме Лагранжа.

При $x_0 = 0$ из (4′) и (6′) получим

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^n (1 - \theta)^{n-p}}{(n-1)!\, p} f^{(n)}(\theta x).$$

§ 3. Приближенные значения элементарных функций

Формулой Тейлора пользуются при вычислении приближенных значений функций.

Рассмотрим несколько примеров, когда данную функцию $f(x)$ с любой степенью точности можно заменить многочленом, представляющим сумму первых n членов формулы Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^{n-1}, \quad 0 < \theta < 1, \qquad (1)$$

где остаточный член записан в форме Лагранжа.

П о к а з а т е л ь н а я ф у н к ц и я. Пусть $f(x) = e^x$. Тогда

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x,$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 1$$

и по формуле (1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x} x^n}{n!} \qquad (2)$$

Взяв в равенстве (2) $x = 1$, получим

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!} \, . \qquad (3)$$

Здесь $0 < \frac{e^\theta}{n!} < \frac{3}{n!}$, так как $2 < e \leqslant 3$ и $0 < \theta < 1$. Поэтому при достаточно большом n сумма

$$2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}$$

будет сколь угодно близка к числу e. Так, например, если надо вычислить e с точностью до $\frac{1}{10\,000}$, то достаточно взять $n = 8$, так как $8! > 30\,000$ и поэтому

$$\frac{e^\theta}{8!} < \frac{3}{8!} < \frac{3}{30\,000} = \frac{1}{10\,000} \, .$$

Таким образом, сумма

$$2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{7!}$$

дает приближенное значение числа e с недостатком:

$$e \approx 2{,}7182,$$

причем все знаки точные и ошибка меньше 0,0001. (При большей точности $e \approx 2{,}71828$.)

Из равенства (3) следует, что число e иррационально.

Действительно, допустим, что число e рационально. Тогда

$$e = \frac{p}{q} \, ,$$

где p и q — натуральные числа. Возьмем n настолько большим, чтобы имели:

$$n - 1 > q \quad \text{и} \quad 0 < \frac{e^\theta}{n} < 1,$$

и обе части равенства (3) умножим на $(n-1)!$. Тогда в левой части получится целое число, так как q содержится среди множителей числа $(n-1)!$ и поэтому сократится. То же самое можно сказать о результате умножения на $(n-1)!$ каждого из первых $n-1$ членов правой части (3).

В итоге получим равенство вида

$$N = N_1 + \frac{e^{\theta}}{n},$$

где N и N_1— целые числа, а $0 < \frac{e^{\theta}}{n} < 1$. Но, прибавляя к целому числу N_1 положительное число $\frac{e^{\theta}}{n}$, меньшее 1, нельзя получить целое число N. Полученное противоречие показывает, что допущение $e = \frac{p}{q}$ неверно. Следовательно, число e иррационально.

Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Замечаем, что $f^{(4)}(x)$ совпадает с $f(x)$ и поэтому $f^{(5)}(x) = f'(x)$, $f^{(6)}(x) = f''(x)$ и т. д. Но

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$$

Следовательно, по формуле (1)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}, \tag{4}$$

причем

$$|R_{2k+1}| = \left|\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(\theta x)\right| \leqslant \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Аналогично получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+2}, \tag{5}$$

причем

$$|R_{2k+2}| = \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\theta x)\right| \leqslant \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

Формулами (4) и (5) можно воспользоваться для вычисления приближенных значений $\sin x$ и $\cos x$ с любой степенью точности, так как остаточные члены этих формул стремятся к нулю при неограниченном возрастании их номера, причем это будет происходить особенно быстро при $|x| < 1$, а вычисление $\sin x$ и $\cos x$ при $|x| \geqslant 1$

всегда можно свести при помощи формул тригонометрии к вычислению значений этих функций при $|x| < 1$.

В качестве примера вычислим $\sin 5^\circ$, воспользовавшись формулой

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5. \qquad (4')$$

Прежде всего угол в 5° мы должны выразить в радианах, так как в формулах (4) и (4′) [конечно, и в формуле (5) для косинуса] x означает отвлеченное число.

В радианной мере 5° равняется

$$\frac{2\pi}{360}\cdot 5 = \frac{\pi}{36}.$$

По формуле (4′) имеем

$$\sin\frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3 + R_5,$$

причем

$$|R_5| \leqslant \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5 < \frac{1}{5!}(0,1)^5 = \frac{1}{120}10^{-5} = \frac{5}{6}10^{-7}.$$

Следовательно, ошибка, которую мы сделаем, если в правой части формулы $\sin\frac{\pi}{36}$ отбросим последнее слагаемое R_5, по абсолютной величине будет меньше, чем $\frac{5}{6}10^{-7}$.

Отсюда видно, что, воспользовавшись приближенной формулой

$$\sin\frac{\pi}{36} \approx \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3 \qquad (4'')$$

и вычислив каждое слагаемое в правой части с семью знаками после запятой (округляя при этом обычным образом), мы получим значение $\sin 5^\circ$ с точностью до 10^{-6}.

В самом деле, в этом случае ошибка при вычислении каждого слагаемого в правой части (4″) по абсолютной величине не будет превосходить $0,5\cdot 10^{-7}$, а при вычислении всей правой части она не превзойдет $2\cdot 0,5\cdot 10^{-7}$. Прибавив к этому $\frac{5}{6}\cdot 10^{-7}$, мы увидим, что вся ошибка при вычислении $\sin\frac{\pi}{36}$ по приближенной формуле (4″) по абсолютной величине будет меньше, чем

$$2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-7} + \frac{5}{6} \cdot 10^{-7} < 2 \cdot 10^{-7},$$

и, значит, меньше, чем единица шестого знака.

Так как

$$\frac{\pi}{36} \approx 0{,}0872665,$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3 \approx 0{,}0001107,$$

то

$$\sin\frac{\pi}{36} \approx 0{,}0871558,$$

причем первые пять знаков после запятой точные.

§ 4. Правило Лопиталя

Теорема Лопиталя. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности $(a - \delta, a + \delta)$ точки a, кроме, быть может, самой точки a. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ и отношение $f'(x) : \varphi'(x)$ при $x \to a$ имеет конечный или бесконечный предел, то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .$$

Доказательство. В условии теоремы ничего не сказано о значениях и о свойствах функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке a. Это объясняется тем, что при решении вопроса о пределе функции в данной точке безразлично, определена функция в этой точке или нет, а если определена, то безразлично также, чему равно значение функции в этой точке. Поэтому независимо от того, определены $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке a или нет, мы положим $f(a) = \varphi(a) = 0$. Этим условия теоремы не будут нарушены. Так как теперь $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$, то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке a. Поэтому на отрезке $[a, x]$ (или $[x, a]$), где x — какая угодно точка интервала $(a - \delta, a + \delta)$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Следовательно, между a и x найдется по крайней мере одна такая точка ξ, что будет верно равенство

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{1}$$

Если при некотором значении x таких точек ξ будет больше одной, то в качестве ξ в равенстве (1) возьмем какую-нибудь одну из них. Тогда ξ будет функцией от x, имеющей вполне определенное значение для каждого x, причем $\xi \to a$, когда $x \to a$.

По условию, при $x \to a$ отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ имеет конечный или бесконечный предел. Этот предел не зависит от способа стремления x к точке a. Поэтому при $x \to a$, когда и $\xi \to a$, отношение $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ имеет предел, совпадающий с пределом отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$:

$$\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{3}$$

Теорема доказана.

Если условия теоремы выполнены только в интервале $(a-\delta, a)$ или $(a, a+\delta)$, то формулой (3) можно пользоваться для вычисления предела $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ соответственно при $x \to a-0$ или $x \to a+0$.

Равенство (3) выражает *правило Лопиталя*, по которому вычисление предела отношения данных ф у н к ц и й может быть заменено (при известных условиях) вычислением предела отношения п р о и з в о д н ы х этих функций, а это часто бывает проще.

Следует иметь в виду, что если отношение производных не имеет ни конечного, ни бесконечного предела, то это еще не может служить основанием утверждать, что и отношение функций не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Так, например, для функций

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \quad \text{и} \quad \varphi(x)=x,$$

бесконечно малых при $x \to 0$ и дифференцируемых в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, отношение производных

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

при $x \to 0$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Однако имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

При вычислении $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ иногда приходится применять правило Лопиталя последовательно несколько раз. Так, если условиям теоремы Лопиталя удовлетворяют не только $f(x)$ и $\varphi(x)$, но и их производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, то для вычисления $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ опять можно воспользоваться правилом Лопиталя. Это сведет вычисление $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ к вычислению $\lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, для чего, возможно, опять придется применить правило Лопиталя и т. д.

Пример 1. Вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Решение. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} =$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6}.$$

Здесь нам пришлось применить правило Лопиталя два раза.

Правилом Лопиталя, оказывается, можно пользоваться для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и в том случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, если в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, существуют $f'(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0$ и есть конечный или бесконечный предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$.

В самом деле, возьмем в указанной окрестности точки a две точки β и x так, чтобы было $\beta < x < a$ или $a < x < \beta$. Пусть для определенности $a < x < \beta$. Тогда, по теореме Коши, получим

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{\varphi(x)-\varphi(\beta)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad a<x<\xi<\beta.$$

Простые преобразования дают

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{\varphi(x)-\varphi(\beta)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(\beta)}{\varphi(x)}}.$$

Поэтому

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(\beta)}{\varphi(x)}}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\,\frac{1-\frac{\varphi(\beta)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}. \tag{4}$$

Пусть

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$$

Тогда при любом $\varepsilon>0$ точку β можно выбрать так близко к a, что будет верно

$$A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}<A+\varepsilon$$

для всех x из интервала (a, β), а следовательно, и

$$A-\varepsilon<\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}<A+\varepsilon. \tag{5}$$

Зафиксируем β именно таким, чтобы неравенства (5) были верны. Так как $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, то при фиксированном β

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{\varphi(\beta)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}=1,$$

поэтому при ранее взятом $\varepsilon > 0$ для всех x, достаточно близких к a, будем иметь

$$1-\varepsilon < \frac{1-\dfrac{\varphi(\beta)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\beta)}{f(x)}} < 1+\varepsilon. \tag{6}$$

Умножив все части двойного неравенства (5) на соответствующие части неравенств (6), получим

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\,\frac{1-\dfrac{\varphi(\beta)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\beta)}{f(x)}} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

и, в силу равенства (4),

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно малое для всех $x \in (a, \beta)$, если только β достаточно близко к a, то из последнего двойного неравенства вытекает

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A.$$

Таким же путем, выбрав β и x так, чтобы было $\beta < x < a$, получим

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A.$$

Следовательно, имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то есть правило Лопиталя применимо.

Наконец, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0$, поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0.$$

Но это означает, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Следовательно, когда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty$, тогда и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, то есть правило Лопиталя применимо и в этом случае.

Пример 2. Вычислить

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}3\theta}.$$

Решение. По правилу Лопиталя

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}3\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{3}{\cos^2 3\theta}}=\frac{1}{3}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3\theta}{\cos^2\theta}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3\theta\,(-\sin 3\theta)\,3}{2\cos\theta\,(-\sin\theta)}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6\theta}{\sin 2\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6\theta}{2\cos 2\theta}=3.$$

Правило Лопиталя может быть использовано и при вычислении следующих пределов:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\,\varphi(x)]$, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

В этом случае достаточно данную функцию записать в виде

$$f(x)\,\varphi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\quad\text{или}\quad f(x)\,\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

и к правой части применить правило Лопиталя.

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]$, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

В этом случае надо данную функцию опять представить в форме частного

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}}$$

(на практике это обычно получается гораздо проще) и затем воспользоваться правилом Лопиталя.

3. $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}$, когда имеем один из трех подслучаев:

3′) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$,

3″) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$,

3‴) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$.

Положим в этом случае

$$y = f(x)^{\varphi(x)}.$$

Логарифмируя, получим

$$\ln y = \varphi(x) \ln f(x).$$

Вычислим

$$\lim_{x \to a} \ln y = \lim_{x \to a} [\varphi(x) \ln f(x)].$$

Легко заметить, что для этого в каждом из указанных трех подслучаев придется вычислять предел такого вида, который рассмотрен в случае 1.

Пусть мы нашли, что

$$\lim_{x \to a} \ln y = b.$$

Из этого следует, что

$$\ln y = b + \beta(x),$$

где $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, и, значит,

$$y = e^{b+\beta(x)}.$$

Так как

$$\lim_{x \to a} e^{b+\beta(x)} = e^b,$$

то мы имеем

$$\lim_{x \to a} y = e^b,$$

то есть

$$\lim_{x \to a} f(x)^{\varphi(x)} = e^b.$$

Пример 3. Вычислить

$$\lim_{x \to 0} (x \operatorname{ctg} \pi x).$$

Решение.

$$\lim_{x \to 0} (x \operatorname{ctg} \pi x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} \pi x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\pi}{\cos^2 \pi x}} = \frac{1}{\pi}.$$

Пример 4. Вычислить

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5. Вычислить

$$\lim_{x\to 0} x^x.$$

Решение. Положим

$$y = x^x.$$

Взяв

$$\ln y = x\ln x,$$

найдем

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}(x\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Отсюда получим

$$\lim_{x\to 0} y=e^0=1,$$

то есть

$$\lim_{x\to 0} x^x=1.$$

Правило Лопиталя применимо и для вычисления $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$, если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют и другим двум условиям, аналогичным условиям теоремы Лопиталя: 1) для всех x, достаточно больших по абсолютной величине, существуют $f'(x)$ и $\varphi'(x)\neq 0$, 2) отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ имеет конечный или бесконечный предел при $x\to\infty$.

В самом деле, положим $x = \frac{1}{t}$. Тогда будем иметь

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = F(t), \quad \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right) = \Phi(t).$$

Замечаем, что, во-первых,

$$\lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{t \to 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \text{или} \quad \infty,$$

$$\lim_{t \to 0} \Phi(t) = \lim_{t \to 0} \varphi\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{или} \quad \infty;$$

во-вторых, так как, по условию, существуют $f'(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0$ для всех x, для которых $|x|$ больше некоторого $C > 0$, то существуют $F'(t)$ и $\Phi'(t) \neq 0$ для всех t из интервалов $\left(0, \frac{1}{C}\right)$ и $\left(-\frac{1}{C}, 0\right)$; в третьих, из соотношения

$$\frac{F'(t)}{\Phi'(t)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)'}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)'} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

видно, что $\frac{F'(t)}{\Phi'(t)}$ имеет конечный или бесконечный предел при $t \to 0$, поскольку $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, по условию, имеет конечный или бесконечный предел при $x \to \infty$.

Следовательно, по правилу Лопиталя,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{\Phi(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{\Phi'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Выразив в этом равенстве t обратно через x, получим

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Пример 6. Вычислить

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x},$$

где n — целое положительное число.

Решение. Применив правило Лопиталя n раз, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

Этот результат показывает, что при $x\to+\infty$ показательная функция e^x растет быстрее, чем степенная x^n.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{a}{y}\right)^y$.

Решение. Положим $z=\left(1+\frac{a}{y}\right)^y$.

Тогда

$$\ln z=y\ln\left(1+\frac{a}{y}\right).$$

Вычислим

$$\lim_{y\to\infty}(\ln z)=\lim_{y\to\infty}\left[y\ln\left(1+\frac{a}{y}\right)\right]=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{y}\right)}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{a}{y}\right)}\cdot\left(-\frac{a}{y^2}\right)}{-\frac{1}{y^2}}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{a}{1+\frac{a}{y}}=a.$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to\infty}z=e^a,$$

то есть

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{a}{y}\right)^y=e^a.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти пределы функций, указанные в следующих примерах:

31. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$. 32. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\varphi}$. 33. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{a}{x}$.

34. $\lim\limits_{\varphi\to0}\left(\frac{2}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{1-\cos\varphi}\right)$. 35. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

ГЛАВА III

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Условия монотонности функции

Функция $f(x)$ называется *неубывающей* в интервале (a, b), если для любых двух точек x_1 и x_2 этого интервала из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Причем если из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *возрастающей*.

Если в интервале (a, b) из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *невозрастающей* в интервале (a, b). Причем если из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *убывающей*.

Функция $f(x)$ называется *монотонной* в интервале (a, b), если она в этом интервале неубывающая (в частности, возрастающая) или невозрастающая (в частности, убывающая).

Следующая теорема дает нам аналитические признаки монотонности функции.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$ по крайней мере в интервале (a, b). Для того чтобы данная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была неубывающей, необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \geqslant 0$ для всех x из интервала (a, b).*

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — неубывающая. Докажем, что в каждой точке интервала (a, b) верно неравенство $f'(x) \geqslant 0$.

Возьмем точки x и $x + \Delta x$ из интервала (a, b). Так как по условию функция $f(x)$ — неубывающая, то при любом Δx (как положительном, так и отрицательном)

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Согласно условию, в точке x существует производная $f'(x)$. Поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу, получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Следовательно, в любой точке $x \in (a, b)$ верно $f'(x) \geqslant 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть в интервале (a, b) имеем $f'(x) \geqslant 0$. Докажем, что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — неубывающая.

Действительно, пусть $x_1 < x_2$ — любые две точки отрезка $[a, b]$. Тогда по теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

где $x_1 < \xi < x_2$. Так как $f'(x) \geqslant 0$ в каждой точке x интервала (a, b), то $f'(\xi) \geqslant 0$. Кроме того, $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0,$$

то есть

$$f(x_2) \geqslant f(x_1).$$

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, а это и означает, что на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ — неубывающая. Теорема доказана.

Попутно заметим, что если в интервале (a, b) $f'(x) > 0$, то при $x_1 < x_2$ имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi) > 0$$

и, значит,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

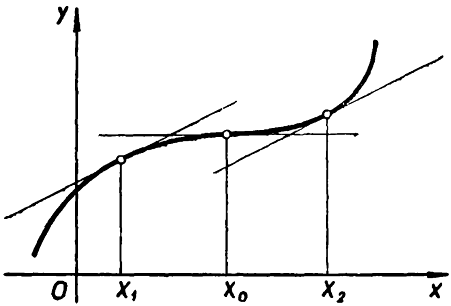
Следовательно, если в интервале (a, b) $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ возрастает.

Аналогично теореме 1 доказывается и следующая теорема.

Т е о р е м а 1*. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$ по крайней мере в интервале (a, b). Для того чтобы данная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была невозрастающей, необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \leqslant 0$ для всех x из интервала (a, b).*

Кроме того, можно заметить, что если в интервале (a, b) $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ убывает.

Геометрически эти теоремы могут быть истолкованы так. Если график функции $f(x)$ есть непрерывная линия, которая имеет касательную в каждой своей точке, то график идет вправо вверх там, и только там, где угловой коэффициент касательной положителен или равен нулю (черт. 54; $f'(x_1) > 0$, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_2) > 0$), и график идет вправо вниз там, и только там, где угловой коэффициент касательной отрицателен или равен нулю (черт. 55; $f'(x_1) < 0$, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_2) < 0$).

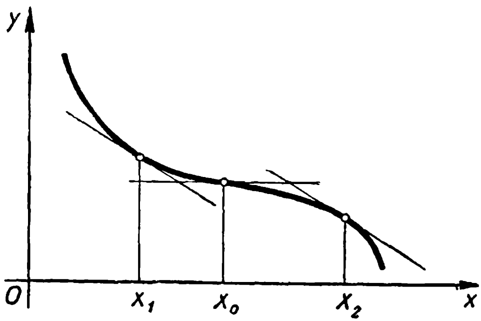


Черт. 54

Принято говорить также о возрастании или убывании функции в точке.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* $x = x_0$, если существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех $x < x_0$ верно $f(x) < f(x_0)$ и для всех $x > x_0$ верно $f(x) > f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей в точке* $x = x_0$, если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x < x_0$ верно $f(x) > f(x_0)$ и для всех $x > x_0$ верно $f(x) < f(x_0)$.



Черт. 55

Следующая теорема выражает достаточные условия возрастания и убывания функции в точке.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет производную $f'(x_0)$. Если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает, если $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ в точке x_0 убывает.*

Доказательство. Пусть $f'(x_0) > 0$. Это означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Но тогда существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, верно неравенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Отсюда видно, что при $|\Delta x| < \delta$ величины Δx и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ имеют один и тот же знак; поэтому если $\Delta x < 0$, то $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, если же $\Delta x > 0$, то $f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$. Следовательно, функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает.

Подобными же рассуждениями можно доказать, что если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 убывает.

§ 2. Экстремумы функций

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0.

Если существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условно $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0,$$

то точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$.

Если для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0,$$

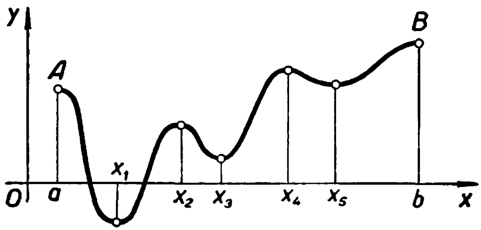
то точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$.

Значение функции в точке максимума называется *максимумом*, а значение функции в точке минимума — *минимумом* данной функции. Максимумы и минимумы функции называются *экстремумами* этой функции. Эти определения означают, что $f(x_0)$ есть максимум функции $f(x)$, если существует такой интервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, в котором $f(x_0)$

является наибольшим значением функции $f(x)$, и $f(x_0)$ есть минимум функции $f(x)$, если существует интервал $(x_0 - \delta, \ x_0 + \delta)$, в котором $f(x_0)$ является наименьшим значением $f(x)$.

Следует обратить внимание на то, что число $f(x_0)$ будет максимумом или минимумом функции $f(x)$, если оно окажется соответственно наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$ в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0, а не обязательно во всей области существования данной функции.

Функция $f(x)$, график которой изображен на чертеже 56, имеет несколько максимумов: $f(x_2)$, $f(x_4)$ и несколько мини-



Черт. 56

мумов: $f(x_1)$, $f(x_3)$, $f(x_5)$, причем видно, что максимум $f(x_2)$ меньше минимума $f(x_5)$.

Таким образом, понятие экстремума функции всегда связано с определенным местом (окрестностью данной точки) в области существования функции, а не со всей этой областью.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке имеет наибольшее и наименьшее значения. Если свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает во внутренней точке x_0 отрезка $[a, b]$, то есть $a < x_0 < b$, то ясно, что $M = f(x_0)$ есть максимум функции $f(x)$, так как в этом случае существует такая окрестность точки x_0, в которой как слева от x_0, так и справа от x_0 значения $f(x)$ не больше $f(x_0)$. Однако наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ может оказаться ее значение в конце отрезка — в точке a или b.

Если наибольшим значением M функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ окажется ее значение на конце отрезка, например $f(a)$, то $M = f(a)$ уже не может быть максимумом функции $f(x)$, так как не существует значений $f(x)$ в точках слева от точки a. Также и $f(b)$ не может быть максимумом функции $f(x)$, но может оказаться наибольшим значением $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Следовательно, *чтобы найти наибольшее значение* M *непрерывной функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *надо найти все максимумы функции* $f(x)$ *и значения* $f(x)$ *в концах отрезка* $[a, b]$, *то есть* $f(a)$ *и* $f(b)$, *и выбрать среди них наибольшее число.*

Ясно, что *наименьшим значением* m *непрерывной функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ *будет наименьшее число среди всех минимумов* $f(x)$ *и значений* $f(a)$ *и* $f(b)$.

У функции $f(x)$, изображенной на чертеже 56, наибольшим значением на отрезке $[a, b]$ является $f(b)$, большее $f(a)$ и всех максимумов функции $f(x)$, а наименьшее значение $f(x)$ есть минимум $f(x_1)$, меньший всех других минимумов $f(x)$ и значений $f(a)$ и $f(b)$.

§ 3. Необходимое условие экстремума

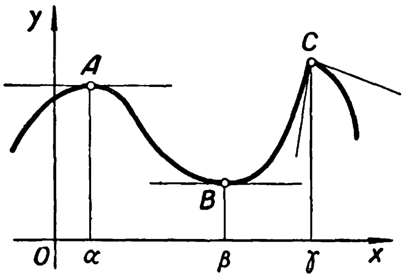
Докажем теорему, которая устанавливает необходимое условие существования экстремума функции.

Т е о р е м а. *Функция* $f(x)$ *может иметь экстремумы только в тех точках, в которых либо она не имеет производной* $f'(x)$, *либо ее производная* $f'(x)$ *равна нулю.*

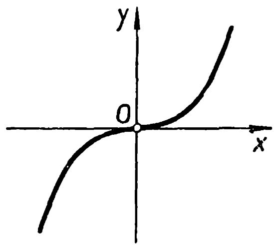
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет производную и $f'(x_0) \neq 0$. Для определенности положим $f'(x_0) > 0$. Тогда функция $f(x)$ в точке x_0 будет возрастающей, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0)$ верно неравенство $f(x) < f(x_0)$, а для всех x из интервала $(x_0, x_0 + \delta)$ верно неравенство $f(x_0) < f(x)$. Из этого следует, что не существует такой окрестности точки x_0, в которой $f(x_0)$ было бы наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$, и поэтому точка x_0 не будет ни точкой максимума, ни точкой минимума функции $f(x)$. Аналогичными рассуждениями придем к тому же выводу при $f'(x_0) < 0$.

Итак, если в точке x_0 существует производная $f'(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 не может быть ни максимума, ни минимума функции $f(x)$. Следовательно, экстремум функции $f(x)$ может быть только в такой точке, в которой производная $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

Геометрическое истолкование теоремы дает чертеж 57. В точках A и B графика функции $f(x)$, которые соответствуют точке максимума α и точке минимума β функции $f(x)$, существуют касательные к этому графику (существуют $f'(\alpha)$ и $f'(\beta)$) и они параллельны оси Ox, поэтому $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. В точке C, соответствующей точке максимума γ функции $f(x)$, определенной касательной к графику функции $f(x)$ провести нельзя, поэтому производной $f'(x)$ в точке γ не существует.



Черт. 57



Черт. 58

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума функции $f(x)$ (в которых $f'(x)$ равна 0 или не существует), то есть такие точки, в которых м о ж е т б ы т ь максимум или минимум функции $f(x)$, будем называть *критическими точками* для $f(x)$.

Не следует думать, что функция $f(x)$ в каждой своей критической точке обязательно имеет максимум или минимум. Так, например, функция

$$f(x) = x^3$$

имеет

$$f'(0) = 0,$$

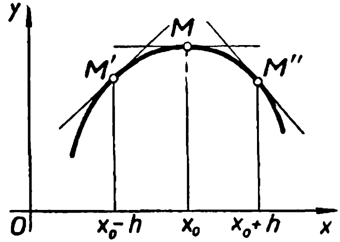
поэтому для нее точка $x_0 = 0$ является критической, но она в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума (черт. 58), так как $f(0) = 0$, $f(x) < 0$ при $x < 0$, $f(x) > 0$ при $x > 0$.

§ 4. Достаточные условия максимума и минимума

Т е о р е м а 1. *Пусть x_0 — критическая точка для функции $f(x)$, то есть либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x)$ в точке x_0 не существует. Пусть существует такое $\delta > 0$, что имеем $f'(x) > 0$ для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$*

для всех x из интервала $(x_0, x_0+\delta)$. Тогда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

Доказательство. По условию в интервале $(x_0-\delta, x_0)$ имеем $f'(x)>0$. Поэтому на отрезке $[x_0-\delta, x_0]$ функция $f(x)$ возрастает. Так как в интервале $(x_0, x_0+\delta)$ имеем $f'(x)<0$, то функция $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_0+\delta]$ убывает. Следовательно, $f(x_0)$ есть наибольшее значение функции $f(x)$ в окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, а это означает, что $f(x_0)$ есть максимум функции $f(x)$.



Черт. 59

Теорема доказана.

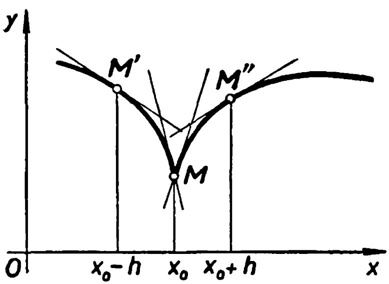
Эта теорема выражает достаточное условие существования в точке x_0 максимума функции $f(x)$.

Геометрическое истолкование теоремы 1 дано на чертеже 59. Для функции $f(x)$, график которой изображен на этом чертеже, точка x_0 является точкой максимума. В окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 имеем

$$f'(x_0-h)>0,\ f'(x_0)=0,\ f'(x_0+h)<0 \quad (h>0),$$

что видно по наклону касательных в точках M', M и M''.

Следующая теорема, которая доказывается аналогично предыдущей, выражает достаточные условия существования в точке x_0 минимума функции.

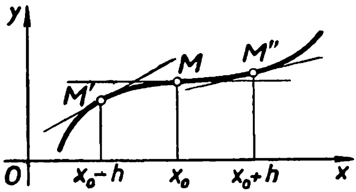


Черт. 60

Теорема 1*. *Пусть x_0 — критическая точка для функции $f(x)$, то есть либо $f'(x_0)=0$, либо $f'(x)$ в точке x_0 не существует. Пусть существует такое $\delta>0$, что имеем $f'(x)<0$ для всех x из интервала $(x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x)>0$ для всех x из интервала $(x_0, x_0+\delta)$. Тогда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум.*

Геометрическим пояснением к этой теореме может служить чертеж 60. Функция $f(x)$, изображенная на этом чертеже, имеет минимум $f(x_0)$. В окрестности $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0 имеем $f'(x_0 - h) < 0$, $f'(x_0 + h) > 0$, что видно по касательным в точках M' и M'', а $f'(x_0)$ не существует, так как нет касательной в точке M.

Заметим, наконец, что если в некоторой окрестности $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ критической точки x_0 и слева, и справа от x_0 знак производной $f'(x)$ один и тот же, то в критической точке x_0 нет экстремума функции $f(x)$. В этом случае, если $f'(x) > 0$ как для $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, так и для $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$, то $f(x)$ будет возрастающей как слева от x_0, так и справа от x_0; поэтому, каким бы малым интервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ ни был, $f(x_0)$ не будет ни наибольшим, ни наименьшим значением $f(x)$ в этом интервале, то есть не будет ни максимумом, ни минимумом функции $f(x)$. Если же в некоторой окрестности критической точки x_0 производная $f'(x) < 0$ как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$, то функция $f(x)$ убывает в этой окрестности и поэтому в критической точке x_0 экстремума не имеет.



Черт. 61

Это замечание пояснено на чертеже 61, где точка x_0 — критическая, но не есть точка экстремума для изображенной функции: $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - h) > 0$ и $f'(x_0 + h) > 0$. Все это видно по наклону касательных в точках M', M и M''.

Результаты всех этих исследований приводят нас к следующему правилу отыскания экстремумов данной функции.

Правило 1. *Чтобы найти точки максимума и минимума функции $f(x)$, надо взять производную $f'(x)$, приравнять ее к нулю и найти корни полученного уравнения $f'(x) = 0$. Затем надо найти точки, в которых производная $f'(x)$ не существует. Таким образом найдем все критические точки функции $f(x)$. Дальше надо узнать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки. Если при переходе x через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то в этой критической точке функция $f(x)$ имеет максимум; если знак $f'(x)$ меняется с минуса на плюс, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. Если же при переходе x через критическую точку x_0 знак производной $f'(x)$ не меняется, то* *в такой точке функция $f(x)$ не имеет ни максимума, ни минимума.*

Пример 1. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=(x-3)^{\frac{1}{3}}(x-6)^{\frac{2}{3}}.$$

Решение. Находим производную

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{2}{3}}+(x-3)^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}(x-6)^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{(x-6)^{\frac{2}{3}}}{3(x-3)^{\frac{2}{3}}}+\frac{2(x-3)^{\frac{1}{3}}}{3(x-6)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x-6+2x-6}{3(x-3)^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{3x-12}{3(x-3)^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x-4}{(x-3)^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}}.$$

Окончательно

$$f'(x)=\frac{x-4}{(x-3)^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}}.$$

Отсюда видно, что $f'(4)=0$, а при $x=3$ и $x=6$ производная $f'(x)$ не существует.

Таким образом, имеем три критические точки:

$$x_1=3,\ x_2=4,\ x_3=6.$$

Пусть $\varepsilon>0$ сколь угодно мало. Тогда

$$f'(3-\varepsilon)>0 \text{ и } f'(3+\varepsilon)>0.$$

Следовательно, в точке $x_1=3$ нет ни максимума, ни минимума данной функции.

Для точки $x_2=4$ имеем

$$f'(4-\varepsilon)>0 \text{ и } f'(4+\varepsilon)<0,$$

поэтому точка $x_2=4$ есть точка максимума функции $f(x)$, причем максимум есть $f(4)=\sqrt[3]{4}$.

Для точки $x_3=6$ имеем

$$f'(6-\varepsilon)<0 \text{ и } f'(6+\varepsilon)>0.$$

Следовательно, $x_3=6$ есть точка минимума функции $f(x)$, причем минимум есть $f(6)=0$.

Следующая теорема опять выражает достаточное условие максимума и минимума функции.

Теорема 2. *Пусть в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет первую и вторую производные, причем* $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. *Тогда в точке* x_0 *данная функция* $f(x)$ *имеет максимум, если* $f''(x_0) < 0$, *и минимум, если* $f''(x_0) > 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что точка x_0 является критической точкой для данной функции $f(x)$, так как $f'(x_0) = 0$.

Пусть $f''(x_0) < 0$. Из этого следует, что в точке x_0 первая производная $f'(x)$ убывает, то есть существует такая окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta,\ x_0)$ верно неравенство $f'(x) > f'(x_0) = 0$ и для всех x из интервала $(x_0,\ x_0 + \delta)$ верно неравенство $f'(x) < f'(x_0) = 0$. Таким образом, при переходе x через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум.

Подобными же рассуждениями доказывается, что если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум.

Эта теорема дает нам второе правило отыскания точек экстремума функции.

Правило 2. *Чтобы найти точки максимума и минимума функции* $f(x)$, *надо найти критические точки* $f(x)$. *Для этого следует поступить так, как указано в правиле* 1. *Затем надо вычислить вторую производную* $f''(x)$. *Если она в критической точке* x_0 *существует и* $f''(x_0) < 0$, *то в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет максимум; если же* $f''(x_0) > 0$, *то в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет минимум.*

Если в критической точке вторая производная $f''(x)$ *не существует или существует, но равна нулю, то такую точку надо исследовать дополнительно (например, по правилу* 1).

Пример 2. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 60.$$

Решение. Находим

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x.$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x - 72$$

Затем приравниваем производную $f'(x)$ к нулю и решаем полученное уравнение:

$$12x^3 - 12x^2 - 72x = 0,$$

$$x(x^2 - x - 6) = 0.$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3.$$

Найденные корни подставляем вместо x во вторую производную и определяем знак $f''(x)$ в этих точках:

$$f''(0) < 0,\quad f''(-2) > 0,\quad f''(3) > 0.$$

Следовательно, данная функция в точке $x_1 = 0$ имеет максимум, а в точках $x_2 = -2$ и $x_3 = 3$ — минимум.

Пример 3. Какими должны быть размеры цилиндра данного объема V, чтобы его полная поверхность имела наименьшую площадь?

Решение. Пусть r — радиус основания, а h — высота цилиндра. Они связаны условием

$$V = \pi r^2 h,$$

откуда имеем

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Площадь полной поверхности цилиндра есть

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Освобождаясь от h, выразим S как функцию от r:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Исследуем ее на минимум.

Найдем производную

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2},$$

приравняем ее к нулю:

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

и решим полученное уравнение.

Убеждаемся, что это уравнение имеет только один действительный корень

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Чтобы выяснить, будет ли при найденном значении r функция $S(r)$ иметь минимум, находим вторую производную

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}.$$

Замечая, что

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0,$$

приходим к выводу, что $S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$ есть минимум, а значит, и наименьшее значение функции $S(r)$, так как точка экстремума только одна.

Учитывая, что при $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ имеем

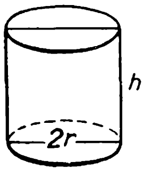
$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

можем сказать, что цилиндр данного объема имеет поверхность наименьшей площади тогда, когда

$$h = 2r,$$

то есть когда осевое сечение цилиндра есть квадрат (черт. 62).

Полученный результат показывает, какими должны быть консервные банки, цилиндрические баки и другие подобные сосуды данной емкости, чтобы на изготовление их требовалось материала как можно меньше.



Черт. 62

Оказывается, если в критической точке функции $f(x)$ вторая производная $f''(x)$ равна нулю, то вопрос о существовании максимума или минимума функции $f(x)$ в этой точке может быть решен при помощи производных более высокого порядка, если, конечно, они существуют в этой точке.

Т е о р е м а 3. *Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную n-го порядка, непрерывную в точке x_0. Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет ни максимума, ни минимума, если число n — нечетное; когда же n — четное, то в точке x_0 функ-*

ция $f(x)$ имеет максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Доказательство. В силу определения точек максимума и минимума вопрос о том, имеет ли функция $f(x)$ в точке x_0 экстремум, сводится к выяснению, существует ли такое $\delta > 0$, что в интервале $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ разность $f(x) - f(x_0)$ не меняет своего знака.

По формуле Тейлора, имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(x - x_0)^n,$$

$$0 < \theta < 1.$$

Учитывая, что, по условию, $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, отсюда получим

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(x - x_0)^n.$$

Так как по условию $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то существует такое $\delta > 0$, что в интервале $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ знак $f^{(n)}(x)$ не меняется и поэтому совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$.

Следовательно, если $f^{(n)}(x_0) < 0$ и n — четное число, то для всех $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ имеем

$$\frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(x - x_0)^n < 0$$

и одновременно с этим

$$f(x) - f(x_0) < 0,$$

поэтому точка x_0 в этом случае будет точкой максимума функции $f(x)$. Если же n — четное число, но $f^{(n)}(x_0) > 0$, то для всех $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$

$$\frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(x - x_0)^n > 0,$$

а вместе с этим и

$$f(x) - f(x_0) > 0,$$

поэтому точка x_0 в этом случае будет точкой минимума функции $f(x)$.

Когда число n окажется нечетным, тогда при $x > x_0$ знак $\frac{f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(x-x_0)^n$ будет совпадать со знаком $f^{(n)}(x_0)$, а при $x < x_0$ — будет противоположным. Поэтому, каким бы малым число $\delta > 0$ мы ни выбрали, знак разности $f(x) - f(x_0)$ не будет одним и тем же для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Следовательно, если число n — нечетное, то в точке x_0 нет ни максимума, ни минимума данной функции $f(x)$.

Теорема доказана.

Эта теорема нам будет служить третьим правилом отыскания точек максимума и минимума функции, дифференцируемой достаточно много раз.

Пример 4. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1.$$

Решение. Находим

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2,$$

составляем уравнение

$$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0;\ x^2(x^2 - 4x + 3) = 0.$$

Решая его, находим критические точки:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3.$$

Возьмем

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x,$$

откуда находим

$$f''(1) < 0,\ \ f''(3) > 0,\ \ f''(0) = 0.$$

Следовательно, в точке $x_2 = 1$ данная функция имеет максимум, в точке $x_3 = 3$ — минимум, а для решения вопроса об экстремуме данной функции в точке $x_1 = 0$ надо найти следующую производную

$$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30.$$

Отсюда видно, что

$$f'''(0) \neq 0,$$

поэтому в точке $x_1 = 0$ нет ни максимума, ни минимума данной функции.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти точки максимума и минимума функций, указанных в следующих примерах:

36. $f(x)=a-(x-5)^{\frac{2}{3}}$.

37. $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$.

38. $f(x)=3x^5-125x^3+2160x$.

39. Показать, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

40. Кружок фильтровальной бумаги с радиусом в a *см* нужно свернуть в коническую воронку. Показать, что объем воронки будет наибольшим при радиусе основания, равном

$$\frac{a\sqrt{6}}{3}\ \textit{см}.$$

41. Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы она, находясь в горизонтальном положении, оказала наибольшее сопротивление на изгиб. (Сопротивление прямо пропорционально произведению ширины сечения на квадрат высоты сечения.)

42. На странице книги печатный текст должен занимать s квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть шириной по a *см*, правое и левое — по b *см*. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

43. На какой высоте над центром круглой площадки радиуса R нужно повесить фонарь, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения луча и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

§ 5. Направление вогнутости и точки перегиба кривой

Пусть дана кривая уравнением

$$y=f(x)$$

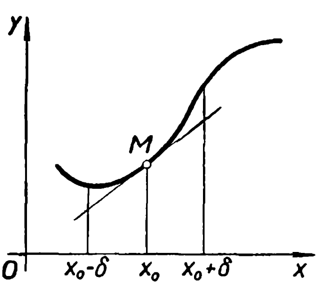
и пусть функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет производную $f'(x_0)$, так что в точке $M(x_0, f(x_0))$ существует определенная касательная к данной кривой (черт. 63).

Если есть такая окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, что все точки данной кривой, абсциссы которых содержатся в этой окрестности точки x_0, расположены над касательной к кривой в точке M, то говорят, что вогнутость данной кривой в точке M направлена вверх (черт. 63). Если все точки кривой с абсциссами из некоторой окрестности точки x_0 находятся под касательной к этой кривой в точке M, то говорят, что вогнутость данной кривой в точке M направлена вниз.

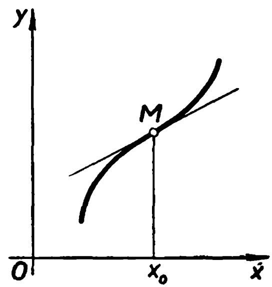
Если же в точке M $(x_0, f(x_0))$ кривая $y = f(x)$ пересекает касательную, проведенную к ней в этой точке, то точка M называется *точкой перегиба* данной кривой. Таким образом, при переходе через точку перегиба кривой направление вогнутости этой кривой меняется на противоположное (черт. 64).

Поставим себе задачей найти аналитический способ определения направления вогнутости и отыскания точек перегиба кривой.

Обозначим через y ординату точки кривой $y = f(x)$, а через Y — ординату точки касательной, проведенной



Черт. 63



Черт. 64

к этой кривой в точке M $(x_0, f(x_0))$, для одной и той же абсциссы x.

Очевидно, что если

$$y - Y > 0$$

для всех $x \neq x_0$ в достаточно малой окрестности точки x_0, то вогнутость кривой в точке M направлена вверх, а если

$$y - Y < 0$$

для указанных значений x, то вогнутость кривой в точке M направлена вниз.

Таким образом, вопрос о направлении вогнутости кривой в точке M сводится к вопросу о знаке разности $y - Y$ в окрестности точки x_0.

Учитывая, что уравнение касательной к данной кривой в точке M $(x_0, f(x_0))$ есть

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

имеем

$$y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет производную второго порядка, непрерывную в точке x_0. Воспользовавшись формулой Тейлора, получим:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''[x_0 + \theta(x - x_0)]}{2}(x - x_0)^2$$

и

$$y - Y = \frac{f''[x_0 + \theta(x - x_0)]}{2}(x - x_0)^2,$$

где $0 < \theta < 1$.

Если $f''(x_0) \neq 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 знак $f''[x_0 + \theta(x - x_0)]$ совпадает со знаком $f''(x_0)$, ибо $f''(x)$ непрерывна в точке x_0. Поэтому из последнего равенства видно, что знак разности $y - Y$ совпадает со знаком $f''(x_0)$. Из этого мы можем сделать следующий вывод.

Если $f''(x_0) > 0$, то в точке $M(x_0, f(x_0))$ вогнутость кривой $y = f(x)$ направлена вверх, а если $f''(x_0) < 0$,— вогнутость кривой направлена вниз.

Отсюда в свою очередь следует, что если точка M — точка перегиба данной кривой, то

$$f''(x_0) = 0.$$

К этому выводу мы пришли исходя из предположения, что в точке x_0 существует и непрерывна вторая производная $f''(x)$. Однако может оказаться, что в точке перегиба $M(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ касательная вертикальна (черт. 66) и поэтому $f''(x)$ в точке x_0 не существует.

Следовательно, точка $M(x_0, f(x_0))$ может быть точкой перегиба кривой $y = f(x)$ как в том случае, когда $f''(x_0) = 0$, так и в том случае, когда $f''(x_0)$ не существует.

Теперь нетрудно найти достаточный признак точки перегиба кривой.

Пусть кривая $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет касательную. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$.

Если $f''(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе через x_0 меняет свой знак, то точка $M(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.

В самом деле, пусть существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех $x < x_0$ знак $f''(x)$ один, а для всех $x > x_0$ знак $f''(x)$ противоположный. Тогда при переходе через точку $M(x_0, f(x_0))$ направление вогнутости кривой $y = f(x)$ меняется. Следовательно, точка $M(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба этой кривой.

Пример 1. Найти точки перегиба кривой

$$y = x^4 - 2x^3 + 1.$$

Решение. Возьмем функцию

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

Найдем

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2,$$

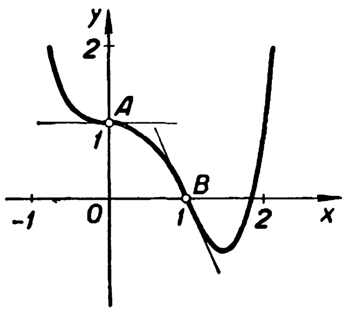
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1).$$

Мы видим, что $f''(x)$ существует и непрерывна везде. Найдем точки, в которых $f''(x) = 0$. Для этого составим уравнение

$$12x(x-1) = 0$$

и найдем его корни

$$x_1 = 0, \ x_2 = 1.$$



Черт. 65

Выясним знак $f''(x)$ в окрестности точки $x_1 = 0$ и в окрестности $x_2 = 1$:

$$f''(0-\varepsilon) > 0, \quad f''(0+\varepsilon) < 0,$$

$$f''(1-\varepsilon) < 0, \quad f''(1+\varepsilon) > 0.$$

Следовательно, точка A с координатами $x_1 = 0$, $y_1 = f(0) = 1$ и точка B с координатами $x_2 = 1$, $y_2 = f(1) = 0$ являются точками перегиба данной кривой; вогнутость кривой направлена слева от A — вверх, между A и B — вниз, справа от B — вверх. Касательная к кривой в точке A горизонтальна, так как $f'(0) = 0$, а в точке B имеет угловой коэффициент, равный $f'(1) = -2$ (черт. 65).

Пример 2. Найти точки перегиба кривой

$$y = 1 + \sqrt[3]{x-2}.$$

Решение. Возьмем функцию

$$f(x)=1+\sqrt[3]{x-2}.$$

Найдем

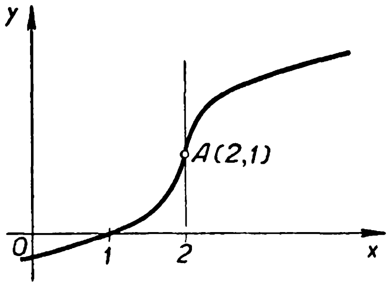
$$f'(x)=\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}.$$

Очевидно, что нет ни одной точки, в которой $f''(x)=0$. Но есть точка $x=2$, в которой $f''(x)$ не существует. Поэтому исследуем знак $f''(x)$ в окрестности точки $x=2$:

$$f''(2-\varepsilon)>0,$$

$$f''(2+\varepsilon)<0.$$



Черт. 66

Следовательно, точка A с координатами $x=2$, $y=f(2)=1$ есть точка перегиба данной кривой; вогнутость кривой направлена слева от точки A — вверх, справа от точки A — вниз. Касательная в точке A перпендикулярна к оси Ox, так как $\lim\limits_{x\to 2} f'(x)=+\infty$ (черт. 66).

Пример 3. Найти точки перегиба кривой $y=\sqrt[3]{x^5}$.

Решение. Возьмем функцию

$$f(x)=x^{\frac{5}{3}}.$$

Найдем

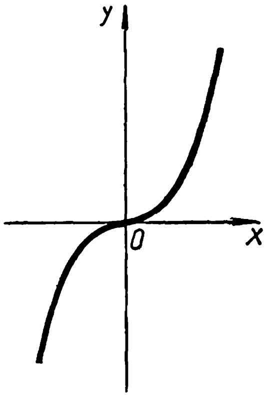
$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},$$

$$f''(x)=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Очевидно, нет ни одной точки, в которой $f''(x)$ обращается в нуль. Но замечаем, что $f''(x)$ при $x=0$ не существует. Исследуем знак $f''(x)$ в окрестности точки $x=0$:

$$f''(-\varepsilon)<0,\ f''(\varepsilon)>0.$$

Следовательно, точка $x = 0$, $y = f(0) = 0$, то есть начало координат, является точкой перегиба данной кривой. Кривая в этй точке касается оси Ox, так как $f'(0) = 0$ (черт. 67).



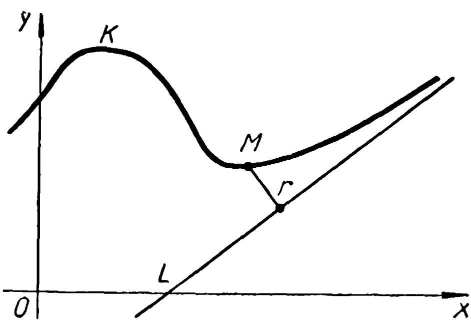
Черт. 67

§ 6. Асимптоты кривых

Исследование функции обычно завершается построением графика функции. График функции дает нам наглядное представление о характере функции, о свойствах функции на отдельных участках ее области существования.

Может оказаться, что график данной функции имеет неограниченные размеры. Часто в таких случаях представление о графике функции вне рамок чертежа, имеющего ограниченные размеры, дают а с и м п т о т ы графика.

Прямая L называется *асимптотой* кривой K, если расстояние r от точки M кривой K до прямой L стремится к нулю, когда точка M бесконечно удаляется от начала координат (черт. 68).



Черт. 68

Асимптота может быть параллельна оси Oy. Тогда мы будем говорить, что она в е р т и к а л ь н а. Если асимптота параллельна оси Ox, то мы ее будем называть *горизонтальной*. Наконец, асимптота может быть *наклонной*, то есть пересекающей ось Ox не под прямым углом.

Вертикальные асимптоты. При отыскании асимптот графика функции $f(x)$ прежде всего надо обратить внимание на точки разрыва функции $f(x)$.

Пусть точка x_0 — точка разрыва функции $f(x)$.

Если

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty \text{ или } -\infty,$$

то, очевидно, прямая

$$x = x_0$$

является вертикальной асимптотой для той части графика $f(x)$, которая расположена справа от прямой $x = x_0$.

Если

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = +\infty \text{ или } -\infty,$$

то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой той части графика $f(x)$, которая расположена слева от прямой $x = x_0$.

Так, например, функция $f(x)$, заданная формулами

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$f(0) = 0,$$

имеет разрыв в точке $x_0 = 0$. В этом примере мы имеем

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

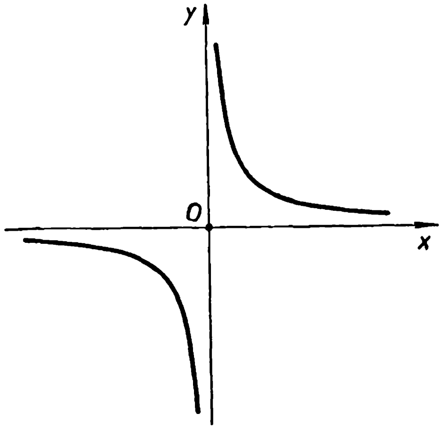
$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Поэтому прямая

$$x = 0,$$

то есть ось Oy, является вертикальной асимптотой для правой и для левой частей графика данной функции (черт. 69).

Вертикальная прямая $x = x_0$ может оказаться асимптотой графика функции $f(x)$ и в том случае, когда точка x_0



Черт. 69

является концом интервала, в котором определена функция $f(x)$. Это будет тогда, когда x_0 — левый конец интервала и

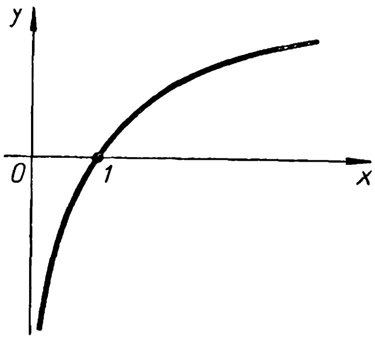
$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty \text{ или } -\infty,$$

а также тогда, когда x_0 — правый конец интервала и

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = +\infty \text{ или } -\infty.$$

Так, например, функция $\ln x$ определена в интервале $(0, +\infty)$ и

$$\lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty.$$



Черт. 70

Поэтому прямая $x = 0$, то есть ось Oy, является асимптотой графика $\ln x$ (черт. 70).

Горизонтальные и наклонные асимптоты. График функции, определенной в бесконечном интервале, может иметь не только вертикальные, но и горизонтальные и наклонные асимптоты.

Если при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ функция $f(x)$ имеет конечный предел, равный b, то, очевидно, прямая

$$y = b$$

есть горизонтальная асимптота соответственно для правой или левой части графика функции $f(x)$.

Так, для функции

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$f(0) = 0$$

(черт. 69) мы имеем

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Поэтому прямая

$$y = 0,$$

то есть ось Ox, является горизонтальной асимптотой для правой и левой частей графика этой функции.

Если при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) функция $f(x)$ имеет бесконечный предел определенного знака, то график функции $f(x)$ может иметь наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Из чертежа 71 можно заметить, что прямая

$$y = kx + b$$

будет асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ тогда, и только тогда, когда

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0. \qquad (1)$$

Но тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

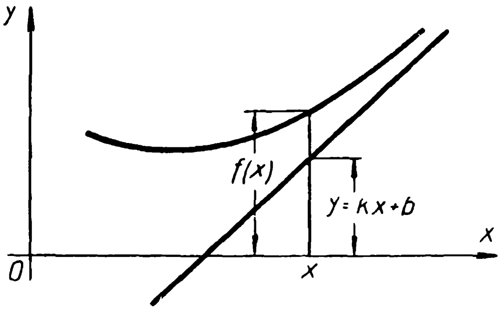
и поэтому должно быть

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (2)$$

Замечая, что соотношение (1) равносильно тому, что

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx], \tag{3}$$

приходим к выводу, что прямая $y = kx + b$ будет асимптотой графика $f(x)$ при $x \to +\infty$ тогда, и только тогда, когда числа k и b вычислены по формулам (2) и (3).



Черт. 71

Аналогичным образом можно убедиться, что параметры k и b асимптоты $y = kx + b$ графика $f(x)$ при $x \to -\infty$ определяются формулами

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{2'}$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx]. \tag{3'}$$

Заметим, наконец, что если по формуле (2) или (2′) мы получим $k = 0$, то при наличии конечного предела

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

график функции $f(x)$ будет иметь горизонтальную асимптоту, причем ее уравнение $y = b$ также можно получить из уравнения $y = kx + b$, где надо взять $k = 0$.

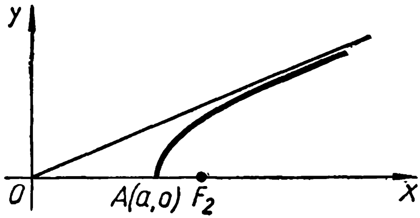
В качестве примера найдем рассмотренным здесь способом асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В силу симметрии гиперболы относительно осей координат нам достаточно найти асимптоту к графику функции

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

в области $x \geqslant a$, представляющему ту часть гиперболы, которая находится в первой координатной четверти.



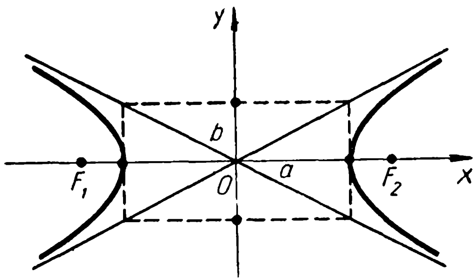
Черт. 72

Если $y = kx + \beta$ — искомое уравнение асимптоты, то согласно формулам (2) и (3)

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a},$$

$$\beta = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$



Черт. 73

Следовательно, рассматриваемая часть данной гиперболы имеет наклонную асимптоту

$$y = \frac{b}{a} x$$

(черт. 72), а вся гипербола — две асимптоты:

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a} x$$

(черт. 73).

§ 7. Построение графиков функций

Чтобы получить график функции $f(x)$, который показывал бы ход изменения данной функции наиболее правильно, надо точно построить наиболее важные точки графика, такие, как точки, соответствующие максимумам и минимумам этой функции, точки перегиба кривой $y = f(x)$.

При построении графиков функций исследование функций целесообразно вести в следующем порядке:

1. Найти область существования функции.

2. Найти асимптоты графика функции (или убедиться, что их нет).

3. Найти экстремумы функции и точки перегиба ее графика.

Если данная функция четная, то есть удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$, то ее график симметричен относительно оси Oy. Если же функция нечетная, то есть удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$, то ее график симметричен относительно начала координат. Следовательно, для построения графика четной или нечетной функции достаточно исследовать функцию только в области $x \geqslant 0$.

Результаты исследования можно свести в таблицу, а затем с помощью этой таблицы изобразить график функции.

Можно обойтись и без таблицы, строя график постепенно, нанося каждый полученный при исследовании функции результат сразу на чертеж.

Пример 1. Построить график функции

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{x-1}.$$

Решение. Данная функция определена и непрерывна в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. В точке $x_0 = 1$ имеем

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}\left[\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{x-1}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\left[\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{x-1}\right] = -\infty.$$

Следовательно, прямая

$$x = 1$$

является вертикальной асимптотой графика функции.

Так как $\frac{f(x)}{x}$ не имеет конечного предела при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, то график данной функции не имеет ни горизонтальной, ни наклонной асимптоты.

Дифференцируя, находим

$$f'(x) = x - 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2},$$

$$f''(x) = 1 + \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3+2}{(x-1)^3}$$

и замечаем, что производные $f'(x)$ и $f''(x)$ существуют в каждой точке, где существует и сама функция $f(x)$.

Поэтому точки экстремума надо искать среди точек, где $f'(x) = 0$, а точки перегиба — там, где $f''(x) = 0$.

Приравняв $f'(x)$ к нулю, получим уравнение

$$(x-1)^3 - 1 = 0,$$

которое имеет один действительный корень

$$x_1 = 2.$$

Так как

$$f''(2) > 0,$$

то заключаем, что в точке $x_1 = 2$ исследуемая функция $f(x)$ имеет минимум, равный $y_1 = f(2) = 1{,}5$.

Приравняв к нулю $f''(x)$, получим

$$(x-1)^3 + 2 = 0, \quad x_2 = 1 - \sqrt[3]{2}.$$

Так как

$$f''(x_2 - \varepsilon) > 0 \text{ и } f''(x_2 + \varepsilon) < 0,$$

точка с координатами $x_2 = 1 - \sqrt[3]{2}$, $y_2 = f(x_2) = 0$ является точкой перегиба графика $f(x)$.

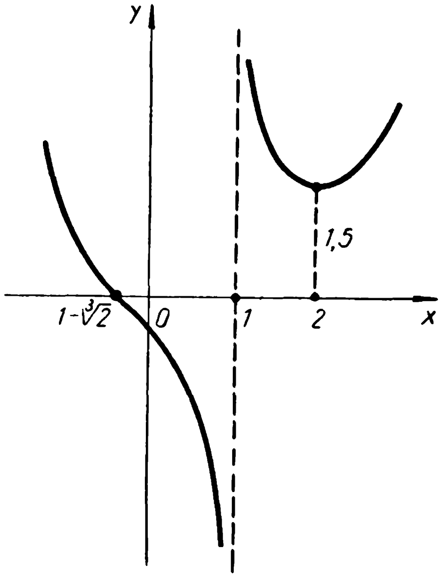
Теперь, пользуясь точкой $(2;\ 1{,}5)$, соответствующей минимуму $f(x)$, точкой перегиба $(1 - \sqrt[3]{2},\ 0)$ и асимптотой $x = 1$, мы сможем изобразить график данной функции $f(x)$ (черт. 74).

П р и м е р 2. Построить график функции

$$f(x) = \frac{6x}{1+x^2}.$$

Р е ш е н и е. Здесь функция нечетная, то есть удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$. Поэтому ее график симметричен относительно начала координат. Следовательно, для построения графика данной функции нам достаточно исследовать функцию только в области $x \geqslant 0$.

Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Поэтому ее график не имеет вертикальных асимптот, но может иметь горизонтальные или наклонные асимптоты.



Черт. 74

Так как

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{2x} = 0,$$

то прямая $y = 0$, то есть ось Ox, является асимптотой графика данной функции.

Чтобы найти точки экстремума функции $f(x)$ и точки перегиба ее графика, найдем производные

$$f'(x) = 6\,\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(x) = 6\,\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\,2(1+x^2)\,2x}{(1+x^2)^4} = \frac{12x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Замечаем, что производные $f'(x)$ и $f''(x)$ существуют везде.

Приравняв $f'(x)$ к нулю, получим уравнение

$$1 - x^2 = 0.$$

В области $x \geqslant 0$ это уравнение имеет один корень $x_1 = 1$. Так как

$$f''(1) < 0,$$

$f(1) = 3$ есть максимум.

Приравняв к нулю $f''(x)$, получим уравнение

$$x(x^2 - 3) = 0,$$

которое в области $x \geqslant 0$ имеет корни $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

В окрестности каждой из этих точек выясним знак

$$f''(x) = \frac{12x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}:$$

$$f''(0-\varepsilon) > 0, \quad f''(0+\varepsilon) < 0,$$

$$f''(\sqrt{3}-\varepsilon) < 0, \quad f''(\sqrt{3}+\varepsilon) > 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ и $x = \sqrt{3}$ имеем точки перегиба кривой. Вогнутость кривой направлена при $0 < x < \sqrt{3}$ — вниз, при $x > \sqrt{3}$ — вверх.

Сведем все полученные результаты в таблицу:

x	0	1	$\sqrt{3}$	$x \to +\infty$
$y = f(x)$	0	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$y \to 0$
$f'(x)$	6	0	$-\frac{3}{4}$	
Замечания	Точка перегиба	Точка максимума	Точка перегиба	$y = 0$ асимптота

Пользуясь содержащимися в таблице координатами точек и замечаниями, построим график данной функции сначала справа от оси Oy, а затем продолжим влево от оси Oy симметрично относительно начала координат (черт. 75).

Пример 3. Построить график функции

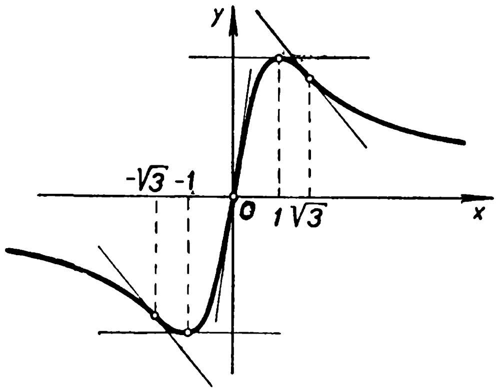
$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{1-x}.$$

Решение. Данная функция определена и непрерывна при всех x, кроме $x = 1$.

Так как

$$\lim_{x\to 1-0}\left(1 - x + \frac{1}{1-x}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(1 - x + \frac{1}{1-x}\right) = -\infty,$$



Черт. 75

то график данной функции имеет вертикальную асимптоту

$$x = 1.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - x + \frac{1}{1-x}\right) = \mp\infty,$$

надо выяснить, имеет ли график $f(x)$ наклонные асимптоты.

По формулам (2), (2′), (3) (3′) § 6 находим

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x - x^2}\right) = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{1-x}\right) = 1.$$

Следовательно, прямая

$$y = -x + 1$$

является асимптотой искомого графика как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

Дифференцируя, находим

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1-(1-x)^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2};$$

$$f''(x) = \frac{(2-2x)(1-x)^2 + (2x-x^2)\,2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Мы видим, что $f'(x)$ существует в каждой точке, где функция $f(x)$ определена, и что $f'(x)$ равна нулю в точках

$$x_1 = 0, \text{ и } x_2 = 2.$$

Так как

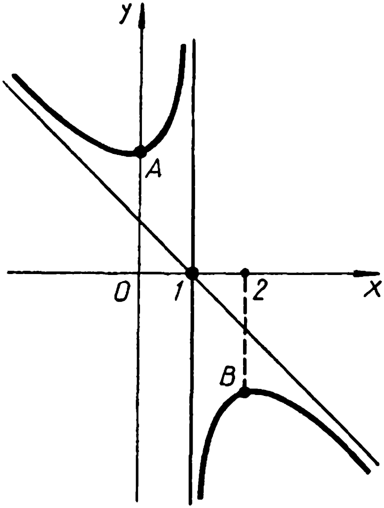
$$f''(0) > 0,\ f''(2) < 0,$$

функция $f(x)$ в точке $x_1 = 0$ имеет минимум, равный

$$f(0) = 2,$$

а в точке $x_2 = 2$ — максимум, равный

$$f(2) = -2.$$



Черт. 76

График данной функции $f(x)$ точек перегиба не имеет, так как в области, где $f(x)$ определена, $f''(x)$ существует и нигде не обращается в нуль.

Изобразив на чертеже асимптоты

$$x = 1 \text{ и } y = -x + 1$$

и точки

$$A(0,2) \text{ и } B(2, -2),$$

соответствующие минимуму и максимуму данной функции $f(x)$, мы без труда построим искомый график (черт. 76).

Пример 4. Построить график функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Поэтому ее график вертикальных асимптот не имеет.

Замечаем, что при $x \to \pm \infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} - 1 \to -1,$$

но

$$f(x) - kx = (\sqrt[3]{x^2} - x) + x = \sqrt[3]{x^2} \to \infty.$$

Поэтому нет и асимптот вида $y = kx + b$.

Чтобы найти точки экстремума функции и точки перегиба ее графика, найдем

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} - 1 = \frac{2 - 3x^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{1}{3}}},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}}.$$

Производная $f'(x)$ не существует в точке $x_1 = 0$ и равна нулю в точке $x_2 = \frac{8}{27}$. Так как

$$f'(-\varepsilon) < 0, \quad f'(\varepsilon) > 0,$$

в точке $x_1 = 0$ функция $f(x)$ имеет минимум $f(0) = 0$. А из неравенства

$$f''\left(\frac{8}{27}\right) < 0$$

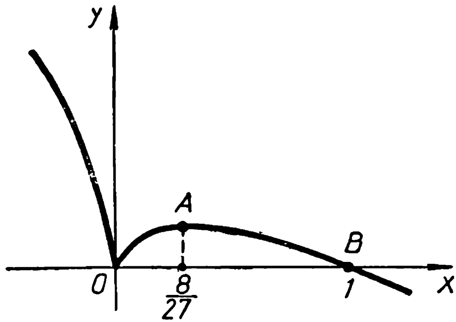
следует, что в точке $x_2 = \frac{8}{27}$ имеем максимум $f\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27}$.

Точек перегиба график $f(x)$ не имеет, так как $f''(x)$ в нуль нигде не обращается, а в точке $x_1 = 0$, где $f''(x)$ не существует, имеем минимум функции $f(x)$.

Таким образом, для построения графика данной функции пока мы имеем только две точки: точку $O(0, 0)$, соответствующую минимуму $f(x)$, и точку $A\left(\frac{8}{27}, \frac{4}{27}\right)$, соответствующую максимуму $f'(x)$. Поэтому будет полезно выяснить, где за точкой максимума график $f(x)$ пересечет ось Ox.

Из уравнения $\sqrt[3]{x^2} - x = 0$ находим два корня: $x = 0$ и $x = 1$.

Следовательно, после точки максимума $x_2 = \frac{8}{27}$ график $f(x)$ пересечет ось Ox в точке $B\ (1,\ 0)$.



Черт. 77

Таким образом, график данной функции имеет вид, изображенный на чертеже 77.

УПРАЖНЕНИЯ

Построить графики функций, указанных в следующих примерах:

44. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 45. $f(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 - 9x + 11)$.

46. $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$. 47. $f(x) = (x+1)^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

§ 8. Решение уравнений методом хорд и касательных

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и в концах его имеет значения, противоположные по знаку. При этих условиях функция $f(x)$ равна нулю по крайней мере в одной точке $\xi \in (a,\ b)$, то есть уравнение

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

в интервале $(a,\ b)$ имеет по крайней мере один действительный корень ξ. Если, кроме того, на отрезке $[a,\ b]$ функция $f(x)$ дифференцируема и ее производная $f'(x)$ постоянного знака, то функция $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ монотонна и поэтому уравнение (1) в интервале $(a,\ b)$ имеет только один действительный корень ξ.

Здесь мы рассмотрим метод вычисления приближенных значений единственного действительного корня $\xi \in (a,\ b)$

уравнения (1), когда для функции $f(x)$, кроме условий, перечисленных выше, выполнено еще одно условие: на отрезке $[a, b]$ существует вторая производная $f''(x)$, также сохраняющая на этом отрезке постоянный знак [который может совпадать со знаком $f'(x)$, а может быть и противоположным знаку $f'(x)$]. Это новое условие означает, что вогнутость графика функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ везде направлена в одну и ту же сторону.

Итак, пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) числа $f(a)$ и $f(b)$ противоположны по знаку;

3) на отрезке $[a, b]$ существуют производные $f'(x)$ и $f''(x)$, сохраняющие на этом отрезке постоянный знак.

Требуется найти с любой степенью точности приближенные значения действительного корня $\xi \in (a, b)$ уравнения (1), который при данных условиях существует и является единственным.

Здесь возможны четыре случая:

$$f'(x) > 0,\ f''(x) > 0;$$
$$f'(x) > 0,\ f''(x) < 0;$$
$$f'(x) < 0,\ f''(x) > 0;$$
$$f'(x) < 0,\ f''(x) < 0.$$

Все они представлены на чертеже 78.

Для определенности мы возьмем случай $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$.

Сначала точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ соединим хордой (черт. 79). Хорда AB лежит на прямой, уравнение которой

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a} \tag{2}$$

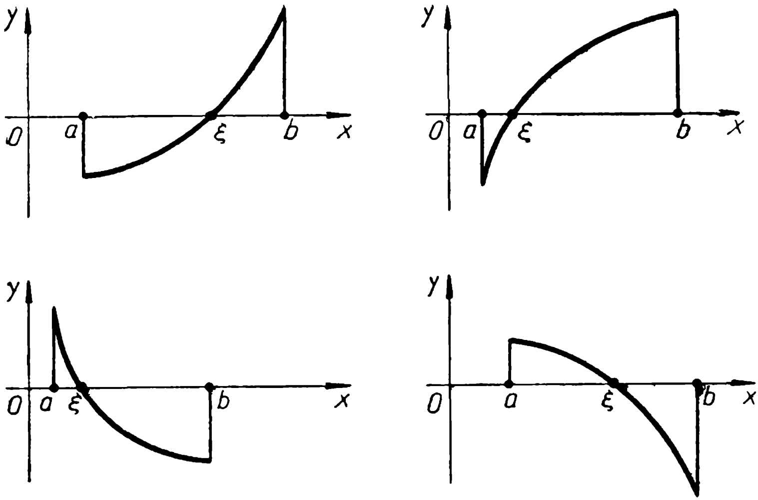
мы получим как уравнение прямой, проходящей через две данные точки A и B.

Точка a_1, в которой хорда AB пересекает ось Ox, расположена между a и ξ и поэтому является лучшим приближением к ξ, чем a. Взяв в уравнении (2) $x = a_1$, $y = 0$, мы получим

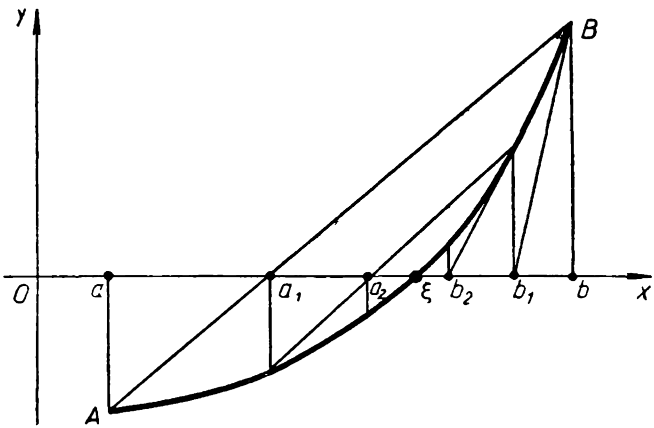
$$\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{a_1-a}{b-a}.$$

Отсюда найдем

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$



Черт. 78



Черт. 79

Из чертежа 79 видно, что точка a_1 всегда будет расположена с той стороны от ξ, в которой знаки $f(x)$ и $f''(x)$ противоположны. Теперь проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B(b, f(b))$, то есть в том конце дуги AB в которой $f(x)$ и $f''(x)$ имеют один и тот же знак. Эта касательная определяется уравнением

$$y - f(b) = f'(b)(x - b). \tag{3}$$

Точка b_1, в которой касательная пересекает ось Ox, расположена между ξ и b и поэтому является лучшим приближением к ξ, чем b, и с той же стороны, что и b. Взяв в уравнении (3) $x = b_1$, $y = 0$, получим

$$-f(b) = f'(b)(b_1 - b).$$

Отсюда найдем

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Итак, мы имеем

$$a < a_1 < \xi < b_1 < b.$$

За абсолютную погрешность приближенных значений a_1 и b_1 корня ξ можно взять $| b_1 - a_1 |$. Если эта погрешность больше допустимой, то, взяв отрезок $[a_1, b_1]$ за исходный отрезок, получим новые приближенные значения ξ:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

и

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}.$$

причем будем иметь

$$a < a_1 < a_2 < \xi < b_2 < b_1 < b.$$

Если этот процесс продолжать неограниченно, то получим две последовательности приближенных значений ξ

$$a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < \xi$$

и

$$b > b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots > \xi,$$

где a_n и b_n определяются формулами

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})(b_{n-1} - a_{n-1})}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})} \tag{4}$$

и

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}. \tag{5}$$

Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, монотонные и ограниченные, имеют пределы. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta.$$

Докажем, что

$$\alpha = \beta = \xi.$$

В самом деле, переходя к пределу в соотношении (5) и учитывая при этом непрерывность $f(x)$ и $f'(x)$, мы получим

$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

(согласно условиям $f'(\beta) \neq 0$). Отсюда

$$f(\beta) = 0.$$

Следовательно, $\beta = \xi$, так как на отрезке $[a, b]$ уравнение (1) имеет только один корень ξ.

Чтобы доказать, что $\alpha = \xi$, мы воспользуемся методом рассуждений от противного и допустим, что $\alpha \neq \xi$. Тогда $f(\alpha) \neq 0$, так как $\alpha \neq \xi$ не может быть корнем уравнения (1). Поэтому, переходя к пределу в соотношении (4), получим

$$\frac{f(\alpha)(\xi - \alpha)}{f(\xi) - f(\alpha)} = 0$$

и, значит,

$$\xi - \alpha = 0.$$

Но это противоречит нашему допущению $\alpha \neq \xi$. Полученное противоречие доказывает, что и $\alpha = \xi$.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

Следовательно, методом хорд и касательных можно получить приближенные значения корня ξ с любой степенью точности.

Раздел III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Определение площади криволинейной трапеции. Рассмотрим на плоскости xOy фигуру $aABb$ (черт. 80), ограниченную снизу отрезком $[a, b]$ оси Ox, по бокам — перпендикулярами к оси Ox в точках a и b, а сверху — кривой AB, представляющей график некоторой положительной и непрерывной на $[a, b]$ функции $y = f(x)$. Фигуру $aABb$ будем называть *криволинейной трапецией.*

Вопрос о площади такой фигуры, если только кривая AB не есть дуга окружности, не рассматривается в элементарной геометрии. Поэтому здесь прежде всего надо установить, что понимать под площадью криволинейной трапеции, а затем уже найти способ вычисления этой площади.

Вполне естественное определение площади криволинейной трапеции мы получим следующим путем.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Обозначим через m_k и M_k соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на элементарном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ (в силу непрерывности $f(x)$ такие значения существуют).

Сумма

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k,$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, выражает площадь P_* ступенчатой фигуры, *содержащейся* в криволинейной трапеции и состоящей из прямоугольников, у которых основаниями являются отрезки

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

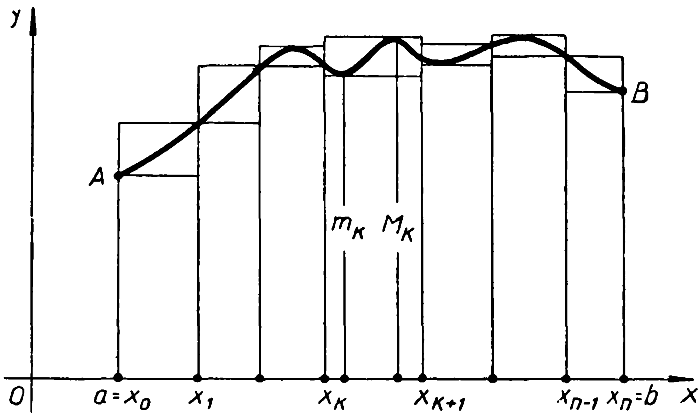
а высоты равны соответственно

$$m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}.$$

Сумма

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

выражает площадь P^* ступенчатой фигуры, *содержащей* криволинейную трапецию и состоящей из прямоугольни-



Черт. 80

ков, у которых основания те же отрезки $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$), а высоты равны соответственно

$$M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}.$$

Будем отрезок $[a, b]$ делить на все более и более мелкие части, то есть число n элементарных частей отрезка $[a, b]$ будем неограниченно увеличивать так, чтобы длина Δx наибольшего из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ стремилась к нулю. Если при этом окажется, что площади P_* и P^* ступенчатых фигур стремятся к общему пределу, то этот предел и естественно принять за площадь P криволинейной трапеции $aABb$.

Итак, по определению,

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} P_* = \lim_{\Delta x \to 0} P^*.$$

Следовательно,

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} s = \lim_{\Delta x \to 0} S.$$

Одновременно с s и S образуем еще одну сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

где ξ_k — произвольная точка отрезка $[x_k, x_{k+1}]$.

Можно заметить, что при любом разбиении отрезка $[a, b]$ и при любом выборе точек ξ_k в элементарных отрезках $[x_k, x_{k+1}]$

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Действительно, при любом $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ имеем

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k.$$

Умножая все части этого двойного неравенства на $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$, получим:

$$m_k \Delta x_k \leqslant f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant M_k \Delta x_k.$$

Составив такие неравенства для всех элементарных отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и сложив соответствующие их части, получим:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Из этого двойного неравенства следует, что если при $\Delta x \to 0$ суммы s и S имеют общий предел, то сумма σ имеет тот же предел.

Обратно, если при $\Delta x \to 0$ сумма σ имеет предел, не зависящий от выбора точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, то к тому же пределу стремятся и суммы s и S.

Это видно из того, что при надлежащем выборе точек ξ_k будем иметь $\sigma = s$ или $\sigma = S$.

Действительно, пусть функция $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ принимает наибольшее значение M_k в точке x_k', а наименьшее значение m_k в точке x''_k:

$$f(x'_k) = M_k, \quad f(x''_k) = m_k.$$

Тогда, выбирая в каждом элементарном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ точку $\xi_k = x'_k$, получим

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S,$$

а выбирая $\xi_k = x''_k$, будем иметь

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x''_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = s.$$

Отсюда следует, что площадь P криволинейной трапеции $aABb$ можно определить и как предел суммы σ при $\Delta x \to 0$:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

если только этот предел существует и не зависит от выбора точек ξ_k в элементарных отрезках $[x_k, x_{k+1}]$.

Не только вопрос о площади криволинейной трапеции, но и решение целого ряда других задач, в частности многих задач техники, сводится к вычислению пределов сумм вида

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

при $\Delta x \to 0$. К числу таких задач относится, например, определение работы, производимой переменной силой.

Определение работы. Если величина силы, действующей по направлению движения, постоянна, то работой, производимой силой, называется произведение силы на путь, пройденный материальной точкой.

Если же материальная точка движется под действием переменной силы $f(s)$, направление которой совпадает с направлением движения, то работу W, производимую силой $f(s)$ на отрезке пути $[s_0, l]$, можно определить следующим образом.

Разобьем отрезок $[s_0, l]$ на части точками

$$s_0 < s_1 < \ldots < s_n = l$$

и величину силы на элементарном отрезке пути $[s_k, s_{k+1}]$ примем за постоянную и равную значению $f(\xi_k)$ силы $f(s)$

в произвольной точке $s = \xi_k$ отрезка $[s_k, s_{k+1}]$. Тогда под работой W, производимой силой $f(s)$ на отрезке пути $[s_0, l]$, естественно понимать предел суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta s_k \qquad (\Delta s_k = s_{k+1} - s_k)$$

при стремлении к нулю длины Δs наибольшего из отрезков $[s_k, s_{k+1}]$:

$$W = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta s_k.$$

Многочисленные задачи, которые решаются таким же путем, как и рассмотренные здесь задачи о площади криволинейной трапеции и о работе, производимой силой при движении материальной точки, требуют изучения пределов вида

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Это достигается введением в математический анализ понятия определенного интеграла.

§ 2. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

отрезок $[a, b]$ разобьем на части. Положим

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

и обозначим через Δx длину наибольшего из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$. Затем в каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ возьмем какую-нибудь точку ξ_k и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

которую будем называть *интегральной суммой*.

Каждому разбиению отрезка $[a, b]$ соответствует значение суммы σ, зависящее от выбора точек ξ_k.

Пусть при одном разбиении $[a, b]$, при котором $\Delta x = \delta_1$, сумма σ, соответствующая некоторому выбору точек ξ_k, равна σ_1; при другом разбиении, когда $\Delta x = \delta_2$, и определенном выборе точек ξ_k пусть $\sigma = \sigma_2$ и т. д. Если для каждой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$, для которой

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i, \ldots \to 0,$$

соответствующая последовательность

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots$$

сходится к некоторому пределу I, одному и тому же, как бы точки ξ_k ни были выбраны, то число I называют *пределом интегральной суммы* σ *при* $\Delta x \to 0$ и пишут

$$I = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma.$$

Если для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует предел I интегральной суммы σ при $\Delta x \to 0$ (который не зависит ни от способа деления отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$), то функция $f(x)$ называется *интегрируемой на* $[a, b]$, а число I называется *определенным интегралом от* $f(x)$ *в пределах от* a *до* b и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Определение понятия определенного интеграла вовсе не требует, чтобы нижний предел интеграла всегда был меньше верхнего предела. Надо только помнить, что нумерация точек разбиения отрезка, по которому интегрируется данная функция, всегда ведется в направлении от нижнего предела к верхнему. Таким образом, если $a > b$, то, как всегда,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

но интегральная сумма составляется для разбиения

$$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_k > \ldots > x_n = b.$$

Поэтому при $a > b$ все $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k < 0$.

Наконец, вполне естественно принять, по определению,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

§ 3. Существование определенного интеграла

Для того чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была интегрируемой, необходимо, чтобы она на этом отрезке была ограниченной.

В самом деле, пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не ограничена. Разобьем отрезок $[a, b]$ на какие угодно части. Так как по условию $f(x)$ на $[a, b]$ не ограничена, то найдется такой частичный отрезок $[x_{k_0}, x_{k_0+1}]$, на котором функция $f(x)$ также не ограничена.

Выберем точки $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Зафиксируем точки $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{k_0-1}, \xi_{k_0+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ и будем менять только точку ξ_{k_0} на отрезке $[x_{k_0}, x_{k_0+1}]$. Тогда в интегральной сумме σ будет изменяться только одно слагаемое: $f(\xi_{k_0})\,\Delta x_{k_0}$. Так как надлежащим выбором ξ_{k_0} это слагаемое можно сделать как угодно большим по абсолютной величине, то и абсолютная величина всей суммы σ может быть сделана как угодно большой.

Отсюда следует, что сумма σ при $\Delta x \to 0$ не может иметь предела, и поэтому функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не интегрируема.

Заметим, что ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости.

Так, например, функция Дирихле:

$D(x) = 1$, если x рационально,

$D(x) = 0$, если x иррационально,

ограничена на любом отрезке $[a, b]$, но не интегрируема на этом отрезке.

В самом деле, при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ мы можем взять точки $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ так, чтобы все они были рациональными. Тогда для $D(x)$

на отрезке $[a,\ b]$ интегральная сумма σ равна

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1\,\Delta x_k = b - a.$$

Но точки $\xi_k \in [x_k,\ x_{k+1}]$ при любом разбиении отрезка $[a,\ b]$ можно выбрать и так, чтобы все они были иррациональными. Тогда для $D(x)$ интегральная сумма σ будет равна

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0\,\Delta x_k = 0.$$

Итак, при любом как угодно малом Δx есть значения σ как равные $b - a$, так и равные 0. Следовательно, при $\Delta x \to 0$ интегральная сумма σ для функции $D(x)$ предела не имеет, то есть функция Дирихле не интегрируема на $[a,\ b]$.

Достаточное условие интегрируемости функции мы имеем в следующей теореме.

Теорема. *Всякая непрерывная на отрезке* $[a,\ b]$ *функция интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. В силу теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях, $f(x)$ на $[a,\ b]$ — ограничена, то есть существует такое число $M > 0$, что для всех x отрезка $[a,\ b]$ верно неравенство

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Поэтому условие, необходимое для существования интеграла от функции $f(x)$, выполнено.

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через m_k и M_k соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на элементарном отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$, существующие в силу второй теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях. Обозначим по-прежнему через ξ_k произвольную точку отрезка $[x_k,\ x_{k+1}]$ и положим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($\Delta x_k > 0$, если, как мы считаем, $a < b$).

Составим три суммы:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\,\Delta x_k,\quad \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k,\quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\,\Delta x_k.$$

Суммы s и S называются соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу*. Очевидно,

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Поэтому для доказательства существования интеграла от функции $f(x)$ достаточно доказать, что при $\Delta x \to 0$ суммы Дарбу s и S стремятся к общему пределу.

Рассмотрим подробнее сумму s.

Покажем, что если к точкам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ первоначального разбиения отрезка $[a, b]$ присоединить новые точки деления, то значение s' нижней суммы Дарбу для нового разбиения $[a, b]$ не может быть меньше значения s, соответствующего первоначальному разбиению $[a, b]$. Действительно, пусть новые точки, вставленные между x_k и x_{k+1}, разбили отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ на p частей:

$$x_k = x_k^{(0)} < x_k^{(1)} < \ldots < x_k^{(p)} = x_{k+1}.$$

Положим $\Delta x_k^{(i)} = x_k^{(i+1)} - x_k^{(i)}$ и обозначим через $m_k^{(i)}$ наименьшее значение функции $f(x)$ на $[x_k^{(i)}, x_k^{(i+1)}]$. Заметим, что при переходе от s к s' слагаемое $m_k \Delta x_k$ в сумме s заменяется суммой

$$\sum_{i=0}^{p-1} m_k^{(i)} \Delta x_k^{(i)}.$$

Но $m_k^{(i)} \geqslant m_k$. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{p-1} m_k^{(i)} \Delta x_k^{(i)} \geqslant m_k \sum_{i=0}^{p-1} \Delta x_k^{(i)} = m_k \Delta x_k.$$

Это доказывает, что $s' \geqslant s$.

Заметим затем, что сумма s ограничена сверху. Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = M(b-a).$$

Следовательно, если продолжать дробление отрезка $[a, b]$ путем добавления все новых и новых точек деления, устремляя при этом Δx к нулю, то значения суммы s образуют последовательность, неубывающую и ограниченную сверху, а значит, сходящуюся к некоторому пределу $\underline{I}$. Аналогично можно показать, что при этом продолжении дробления $[a, b]$

последовательность значений суммы S — невозрастающая и ограничена снизу, поэтому также сходится к некоторому пределу $\overline{I}$.

Докажем, что $\overline{I} = \underline{I}$. Для этого рассмотрим разность

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

Так как M_k и m_k являются наибольшим и наименьшим значениями, которые функция $f(x)$ принимает на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, то существуют на $[x_k, x_{k+1}]$ такие точки x'_k и x''_k, что

$$M_k = f(x'_k), \quad m_k = f(x''_k).$$

Поэтому

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x'_k) - f(x''_k)] \Delta x_k.$$

В силу теоремы Кантора, функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке. Следовательно, для как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих условию

$$|x' - x''| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Полагая дробление $[a, b]$ настолько мелким, чтобы было $\Delta x < \delta$, будем иметь $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ для любого k и тем более будет верно

$$|x'_k - x''_k| < \delta,$$

а поэтому и

$$|f(x'_k) - f(x''_k)| < \varepsilon$$

для любого k. Следовательно, при $\Delta x < \delta$

$$|S - s| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(x'_k) - f(x''_k)| \Delta x_k < \varepsilon(b - a).$$

Это означает, что

$$\lim(S - s) = 0. \tag{1}$$

Но так как S и s имеют пределы при рассматриваемом способе дробления $[a, b]$, то

$$\lim (S - s) = \lim S - \lim s = \overline{I} - \underline{I}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует $\overline{I} - \underline{I} = 0$, то есть $\overline{I} = \underline{I} = I$

Остается доказать, что предел I сумм Дарбу не зависит от способа дробления отрезка $[a, b]$.

Пусть, кроме S и s, удовлетворяющих неравенствам

$$s \leqslant I \leqslant S \quad \text{и} \quad S - s < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, мы составили суммы Дарбу s' и S' для некоторого нового разбиения отрезка $[a, b]$. Полагая при этом втором разбиении Δx достаточно малым, можно считать, что

$$S' - s' < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

Составим теперь третье разбиение отрезка $[a, b]$, взяв в качестве точек деления все точки первого разбиения, которое привело к суммам s и S, и все точки второго разбиения, соответствующего суммам s' и S'. Суммы Дарбу для третьего разбиения $[a, b]$ обозначим через s'' и S''. Очевидно,

$$s \leqslant s'' \leqslant S'' \leqslant S, \qquad (5)$$

так как третье разбиение можно считать полученным из первого путем добавления новых точек деления — точек второго разбиения. Но третье разбиение можно рассматривать и как результат добавления к точкам второго разбиения новых точек — точек первого разбиения, поэтому

$$s' \leqslant s'' \leqslant S'' \leqslant S'. \qquad (6)$$

Из неравенств (3) — (6) получим

$$|s' - s| < \varepsilon \text{ и } |s' - S| < \varepsilon,$$

а значит, и

$$|s' - I| < \varepsilon.$$

Аналогичным образом находим

$$|S' - I| < \varepsilon.$$

Последние два неравенства доказывают, что I будет пределом сумм Дарбу при любом способе разбиения отрезка $[a, b]$. Следовательно,

$$I = \lim_{\Delta x \to 0} s = \lim_{\Delta x \to 0} S = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Этим теорема, которая является одной из основных теорем математического анализа, доказана.

Выше мы определили площадь P криволинейной трапеции $aABb$ (черт. 80) как предел суммы $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k$, составленной для положительной и непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, графиком которой является кривая AB, если только этот предел при $\Delta x \to 0$ существует и не зависит от выбора точек ξ_k в элементарных отрезках $[x_k, x_{k+1}]$:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Теперь же доказано, что такой предел действительно существует, а именно

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, площадь P криволинейной трапеции $aABb$ выражается формулой

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

В этом заключается геометрическое истолкование определенного интеграла от непрерывной функции.

§ 4. Свойства определенного интеграла

Остановимся на некоторых свойствах определенного интеграла. При этом мы будем предполагать, что все рассматриваемые здесь функции непрерывны, а значит, интегрируемы.

I. *При перестановке пределов в определенном интеграле меняется только знак интеграла, то есть*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \text{(I)}$$

В самом деле, пусть $a < b$. По определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{\Delta x' \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i')\,\Delta x_i',$$

где интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

составлена для разбиения

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b, \quad (1)$$

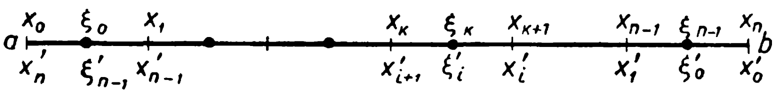
а сумма

$$\sigma' = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i')\,\Delta x_i'$$

— для разбиения

$$b = x_0' > x_1' > x_2' > \ldots > x_i' > \ldots > x_n' = a. \quad (2)$$

Обратим внимание на то, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, который, согласно условию, существует, не зависит ни от способа дробления отрезка интегрирования, ни от выбора



Черт. 81

точек ξ_k в элементарных отрезках. Поэтому, составив разбиение (2), мы можем разбиение (1) образовать так, чтобы множество точек $\{x_k\}$ совпадало с множеством точек $\{x_k'\}$, а при составлении суммы σ точки ξ_k можно выбрать так, чтобы множество $\{\xi_k\}$ совпадало с множеством $\{\xi_i'\}$, использованным при составлении суммы σ' (черт. 81).

Поэтому каждому σ' соответствует такое σ, что

$$\sigma' = -\sigma, \quad (3)$$

так как все $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$, а все

$$\Delta x'_i = x'_{i+1} - x'_i < 0.$$

Переходя в равенстве (3) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим соотношение (I).

II. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \tag{II}$$

(c — любая постоянная).

В самом деле, при любом разбиении отрезка $[a, b]$

$$\sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k)\,\Delta x_k = c\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим равенство (II).

III. *Интеграл от суммы двух (а значит, и любого фиксированного числа) функций равняется сумме интегралов от этих функций*:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{III}$$

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что при любом разбиении отрезка $[a, b]$ имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} [f_1(\xi_k) + f_2(\xi_k)]\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} f_2(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

которое и превращается в пределе при $\Delta x \to 0$ в равенство (III).

Из (II) и (III) вытекает соотношение

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,dx = c_1\int_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f_2(x)\,dx, \tag{III'}$$

где c_1 и c_2 — любые постоянные.

Соотношение (III′) выражает свойство *линейности* интеграла.

IV. *Интеграл от разности двух функций равняется разности интегралов от этих функций*:

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx. \qquad \text{(IV)}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно в (III′) взять $c_1 = 1$, $c_2 = -1$.

V. *При любых a, b и c имеет место равенство*

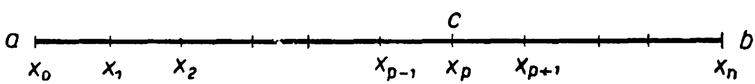
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad \text{(V)}$$

Докажем равенство (V) сначала для случая, когда c содержится между a и b.

Пусть $a < c < b$. Мы имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

где $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ составлена для разбиения отрезка $[a, b]$.



Черт. 82

Учитывая, что интеграл не зависит от способа деления отрезка интегрирования, точку c мы всегда можем включить в число точек разбиения отрезка $[a, b]$. Пусть (черт. 82)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = c < x_{p+1} < \ldots < x_n = b.$$

Тогда получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{p-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=p}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{p-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^c f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=p}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_c^b f(x)\,dx,$$

мы получим требуемое равенство (V).

Рассмотрим случай, когда c не содержится между a и b. Пусть для определенности $a < b < c$. Тогда по доказанному имеем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

и поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx,$$

опять получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Соотношение (V) выражает свойство *аддитивности* интеграла по отношению к области интегрирования.

Свойство интеграла, которое выражается равенством (III), называют аддитивностью интеграла по отношению к подынтегральной функции.

VI. *Если для всех x отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ выполнено условие $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad \text{(VI)}$$

В самом деле, так как $f(x) \leqslant \varphi(x)$ в каждой точке $x \in [a, b]$, то при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ и при любом выборе точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, мы получим неравенство (VI).

Отсюда, в частности, следует, что если на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функция $f(x) \geqslant 0$ ($f(x) \leqslant 0$), то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \qquad \left(\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0\right).$$

Из неравенства (VI) вытекает также, что при $a < b$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{VII}$$

В самом деле, из очевидного неравенства

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

при $a < b$ имеем

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

а это двойное неравенство равносильно неравенству (VII).

§ 5. Теорема о среднем значении

Теорема. *Если на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ или $b \leqslant x \leqslant a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и $\varphi(x)$ не меняет знака, то на этом отрезке есть по крайней мере одна точка ξ такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ существуют как интегралы от непрерывных функций.

Пусть для определенности $a < b$ и $\varphi(x) \geqslant 0$ при любом x из отрезка $[a, b]$. Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, которые существуют в силу непрерывности $f(x)$. Тогда для всех $x \in [a, b]$

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

и

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x).$$

Интегрируя все части этого двойного неравенства и учитывая неравенство (VI) предыдущего параграфа, получим

$$\int\limits_a^b m\varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b M\varphi(x)\,dx,$$

или

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad (1)$$

где μ есть некоторое число, удовлетворяющее условию

$$m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на $[a, b]$ принимает в качестве своих значений все числа отрезка $[m, M]$. Поэтому есть по крайней мере одна точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\mu = f(\xi).$$

Вследствие этого равенство (1) можно записать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (2)$$

Что и требовалось доказать.

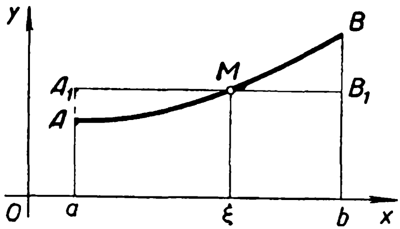
Полагая в теореме о среднем значении $\varphi(x) = 1$, что не противоречит условиям этой теоремы, и замечая, что

$$\int_a^b dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a,$$

из равенства (2) получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{3}$$

Частный случай теоремы о среднем значении, который выражается равенством (3), имеет простой геометрический смысл. Действительно, в случае $a < b$ и $f(x) \geqslant 0$ интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ есть площадь S_{aABb} криволинейной трапеции $aABb$ (черт. 83), ограниченной отрезком $[a, b]$, графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$,



Черт. 83

а $f(\xi)(b - a)$ есть площадь $S_{aA_1B_1b}$ прямоугольника aA_1B_1b, основанием которого является отрезок $[a, b]$, а высотой — ордината точки M кривой $y = f(x)$, абсцисса которой равна ξ. Равенство (3) означает существование на кривой AB такой точки M, что

$$S_{aABb} = S_{aA_1B_1b}.$$

§ 6. Производная интеграла по верхнему пределу

Предварительно заметим, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, являющийся пределом интегральной суммы, есть постоянная величина, не зависящая от переменной x, содержащейся под знаком определенного интеграла. Поэтому если переменную x под знаком определенного интеграла обозначить какой-либо другой буквой, например буквой t, то от этого интеграл не изменится, то есть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Возьмем определенный интеграл от $f(x)$ в пределах от a до произвольной точки x отрезка $[a, b]$. Этот интеграл $\int_a^x f(x)\,dx$ существует, так как, по условию, функция $f(x)$ непрерывна, и представляет функцию своего верхнего предела x. Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$, то есть положим

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Интеграл $\int_a^x f(x)\,dx$ не зависит от переменной x, содержащейся под знаком интеграла, как это было замечено выше, а от верхнего предела, обозначенного то же через x, наоборот, зависит; поэтому формулу, выражающую функцию $\Phi(x)$, удобнее записать так:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Поставим себе задачей выяснить, существует ли производная $\Phi'(x)$ от функции $\Phi(x)$ и, если существует, то чему она равна.

По определению производной,

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}.$$

Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы выяснить, существует ли предел отношения $\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$ при $h \to 0$ и, если существует, то найти его.

Рассмотрим эту задачу. Возьмем любое $x \in [a, b]$. Дадим x приращение h, положительное или отрицательное, но такое, чтобы $x + h$ содержалось на отрезке $[a, b]$.

Тогда получим

$$\Phi(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt,$$

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=$$

$$=\int_a^{x+h} f(t)\,dt+\int_x^a f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

По теореме о среднем значении имеем

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt=hf(x+\theta h),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Поэтому

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=f(x+\theta h).$$

Так как, по условию, данная функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке x отрезка $[a, b]$, то

$$\lim_{h\to 0} f(x+\theta h)=f(x).$$

Следовательно, мы имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=f(x).$$

Это означает, что функция $\Phi(x)$ в любой точке $x\in[a, b]$ имеет производную $\Phi'(x)$, причем

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Этим доказана следующая теорема.

Теорема. *Производная определенного интеграла от непрерывной функции по его верхнему пределу равна значению подынтегральной функции при верхнем пределе.*

Попутно заметим, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $x\in[a, b]$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt=-\frac{d}{dx}\int_b^x f(t)\,dt=-f(x).$$

§ 7. Понятие первообразной функции

Если в некотором интервале имеет место тождество $F'(x) = f(x)$, то в этом интервале функция $F(x)$ называется *первообразной* по отношению к функции $f(x)$.

Так, например, в интервале $(-\infty, +\infty)$ функция x^2 есть первообразная для функции $2x$, так как $(x^2)' = 2x$.

Теорема 1. *Если функция $F(x)$ есть первообразная по отношению к функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — любая постоянная, также будет первообразной для $f(x)$.*

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то есть

$$F'(x) = f(x).$$

Тогда при любом постоянном C имеем

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Но равенство

$$[F(x) + C]' = f(x)$$

означает, что функция $F(x) + C$ есть первообразная по отношению к функции $f(x)$.

Теорема 2. *Любые две первообразные по отношению к одной и той же функции отличаются между собой только постоянным слагаемым.*

Доказательство этой теоремы будет основано на следующей лемме, выражающей условие постоянства функции.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$ по крайней мере в интервале (a, b). Для того чтобы данная функция $f(x)$ была постоянной на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы было $f'(x) = 0$ для всех x из интервала (a, b).*

Необходимость этого условия следует из правила дифференцирования: производная постоянной равна нулю, то есть если функция $f(x) = C$ для всех x из $[a, b]$, где C — какое угодно действительное число, то $f'(x) = 0$ при всех значениях x из отрезка $[a, b]$.

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$. Докажем, что на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ постоянна.

Действительно, если $a < x \leqslant b$, то, по теореме Лагранжа, имеем

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi),$$

где $a < \xi < x$. Но, по условию, $f'(x) = 0$ для всех x из интервала (a, b); значит, и $f'(\xi) = 0$. Отсюда следует, что $f(x) - f(a) = 0$ и поэтому

$$f(x) = f(a)$$

при любом значении x из отрезка $[a, b]$, то есть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ постоянна.

Доказательство теоремы. Пусть функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$, то есть

$$F_1'(x) = f(x),$$
$$F_2'(x) = f(x).$$

Составим функцию

$$\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x).$$

Замечаем, что

$$\Phi'(x) = [F_2(x) - F_1(x)]' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0.$$

Из этого, согласно доказанной здесь лемме, следует, что функция $\Phi(x)$ постоянна:

$$\Phi(x) = C.$$

Отсюда

$$F_2(x) - F_1(x) = C.$$

Поэтому

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие. *Если функция $F(x)$ есть одна из первообразных для функции $f(x)$, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ выражается суммой*

$$F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке имеет первообразную.*

Доказательство. Возьмем функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Она определена для всех x отрезка $[a, b]$, так как подынтегральная функция непрерывна и, следовательно, интегрируема на отрезке $[a, x]$ при любом $x \in [a, b]$.

В предыдущем параграфе было доказано, что для всех $x \in [a, b]$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Это означает, что на отрезке $[a, b]$ функция $\Phi(x)$ является первообразной для данной непрерывной функции $f(x)$.

§ 8. Формула Ньютона — Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Обозначим через $F(x)$ какую-нибудь первообразную по отношению к данной функции $f(x)$. Так как

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

также первообразная для функции $f(x)$, а любые две первообразные для одной и той же функции могут отличаться между собой только постоянным слагаемым, то на отрезке $[a, b]$ верно тождество

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{1}$$

где C — некоторое число.

Взяв в тождестве (1) $x = a$, получим

$$\Phi(a) = F(a) + C.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0,$$

находим

$$C = -F(a);$$

поэтому тождество (1) можно представить в виде

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Взяв в этом тождестве $x = b$, будем иметь

$$\Phi(b) = F(b) - F(a).$$

Но

$$\Phi(b)=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Следовательно, мы получили формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a), \tag{2}$$

которую обычно записывают в более сжатом виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b,$$

и называют *формулой Ньютона — Лейбница.* Это — основная формула в интегральном исчислении. Она приводит вычисление определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ к отысканию первообразной $F(x)$ для данной функции $f(x)$.

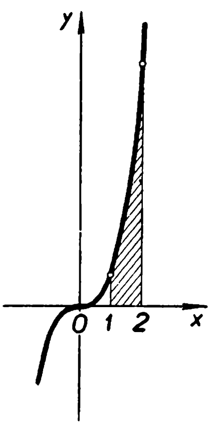
Пример. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной кривой $y=x^3$, прямыми $x=1$, $x=2$ и осью Ox (черт. 84).

Решение. Из геометрического смысла определенного интеграла следует, что

$$S=\int_1^2 x^3\,dx.$$

Применяя формулу Ньютона — Лейбница, получим

$$S=\int_1^2 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{15}{4}.$$



Черт. 84

В этом примере нам нетрудно было догадаться, что первообразной функцией для функции x^3 является $\frac{x^4}{4}$. Однако не всегда так легко можно найти первообразную $F(x)$ для данной функции $f(x)$. Поэтому для того чтобы вычислять определенные интегралы при помощи формулы Ньютона — Лейбница, мы сначала должны научиться находить первообразные для различных и достаточно сложных функций.

Способы отыскания первообразных для некоторых видов функций будут даны в следующей главе.

ГЛАВА II

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Понятие неопределенного интеграла

Дифференцирование функции $F(x)$ есть действие отыскания для данной функции $F(x)$ ее производной $F'(x) = f(x)$ или дифференциала $dF = f(x)\,dx$.

Действие, обратное дифференцированию, которое заключается в отыскании для данной функции $f(x)$, являющейся производной $F'(x)$, ее первообразной $F(x)$, называется *интегрированием* функции $f(x)$.

Для указания действия интегрирования функции $f(x)$ пользуются знаком $\int$ и пишут

$$\int f(x)\,dx,$$

поместив под знаком $\int$ выражение $f(x)\,dx$, являющееся дифференциалом искомой первообразной.

Выражение $\int f(x)\,dx$ означает все множество первообразных по отношению к функции $f(x)$ и называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$.

Использование знака $\int$ в обозначении неопределенного интеграла $\int f(x)\,dx$, охватывающего все первообразные для функции $f(x)$, связано с тем, что одна из первообразных для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ есть $\int\limits_a^x f(x)\,dx$.

Прилагательным н е о п р е д е л е н н ы й в названии $\int f(x)\,dx$ подчеркивается та неопределенность, которая содержится в самой задаче интегрирования функции $f(x)$, так как если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, причем все они содержатся в сумме $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

Чтобы из множества первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ выделить одну определенную первообразную y, достаточно задать *начальное условие*:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0.$$

Действительно, в этом случае из условия

$$y_0 = F(x_0) + C$$

находим

$$C = y_0 - F(x_0).$$

Поэтому искомая первообразная для $f(x)$ будет

$$y = F(x) - F(x_0) + y_0.$$

§ 2. Основные правила и формулы интегрирования

Из определения понятия неопределенного интеграла имеем

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — любая функция, имеющая своей производной подынтегральную функцию $f(x)$, или, что то же, своим дифференциалом подынтегральное выражение $f(x)\,dx$:

$$F'(x) = f(x),\quad dF = f(x)\,dx,$$

а C — произвольная постоянная.

Из этого непосредственно следуют равенства:

$$\int dF(x) = F(x) + C, \tag{I}$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \tag{II}$$

в которых и отражается то, что дифференцирование и интегрирование являются операциями взаимно обратными.

Докажем, что для неопределенных интегралов верны еще следующие равенства:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \tag{III}$$

где a — какая угодно постоянная, отличная от нуля;

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx. \tag{IV}$$

Действительно, в силу равенства (II) имеем

$$d\left(a\int f(x)\,dx\right) = a\,d\int f(x)\,dx = af(x)\,dx.$$

Поэтому $a\int f(x)\,dx$ выражает то же самое множество функций, что и $\int af(x)\,dx$, — множество первообразных для функции $af(x)$.

Следовательно, равенство (III) доказано, если его понимать в том смысле, что как операции, указанные в левой части равенства, так и операции, указанные в правой части этого равенства, дают одно и то же множество функций.

(Если $a = 0$, то $a\int f(x)\,dx = 0$, а $\int af(x)\,dx = C$, где C — произвольная постоянная.)

Равенство (III) выражает правило интегрирования:

Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла или внести под знак неопределенного интеграла.

Совершенно так же доказывается равенство (IV), из которого следует правило:

Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен соответствующей сумме неопределенных интегралов от слагаемых.

Пользуясь определением понятия неопределенного интеграла, по таблице дифференциалов элементарных функций нетрудно составить следующую основную таблицу неопределенных интегралов:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \tag{V}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C, \tag{VI}$$

$$\int e^u\,du = e^u + C, \tag{VII}$$

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \tag{VIII}$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + C, \tag{IX}$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C, \tag{X}$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C, \tag{XI}$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C, \tag{XII}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C, \tag{XIII}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C. \tag{XIV}$$

Формулы (XIII) и (XIV) могут быть заменены соответственно формулами

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u + C,$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = -\operatorname{arcctg} u + C.$$

Эту таблицу основных интегралов можно пополнить новыми формулами, которые выводятся при помощи предыдущих правил и формул интегрирования.

Прежде всего заметим, что при $u < 0$ функция $\ln(-u)$ существует и

$$d\ln(-u) = \frac{d(-u)}{(-u)} \doteq \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u},$$

поэтому при $u < 0$

$$\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C.$$

Объединяя этот результат с формулой (VI), в которой подразумевалось $u > 0$, получим более общую формулу:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \tag{VI'}$$

применимую везде, где $u \neq 0$.

Пользуясь формулой (VI′), находим

$$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C. \tag{XV}$$

Действительно,

$$\int \operatorname{tg} u\, du = \int \frac{\sin u}{\cos u}\, du = -\int \frac{d\cos u}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C.$$

Аналогичные вычисления дают

$$\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C. \tag{XVI}$$

Формулы (XIII) и (XIV) могут быть заменены более общими:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C, \tag{XIII′}$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C. \tag{XIV′}$$

В самом деле,

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \int \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

Следует отметить, что интегрирование данной функции не всегда выполняется непосредственно применением полученных здесь правил и формул интегрирования. Чаще всего приходится прибегать к различным приемам, при помощи которых данный интеграл преобразуется к такому виду, когда становится возможным интегрирование применением основных правил и формул. Научиться находить правильный путь для этих преобразований можно только практикой.

Отметим, наконец, что хотя всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, как это было доказано выше,однако может оказаться, что первообразная $F(x)$ не выражается конечной комбинацией элементарных функций, то есть может оказаться, что $\int f\ (x)\ dx$ существует, но нельзя его фактически найти.

К таким неопределенным интегралам относятся, например,

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

§ 3. Примеры непосредственного интегрирования

На ряде примеров покажем интегрирование непосредственно применением основных правил и формул интегрирования.

Пример 1. Найти

$$\int (3-2\sqrt[3]{x})^2\,x\,dx.$$

Решение.

$$\int (3-2\sqrt[3]{x})^2\,x\,dx=\int (9x-12x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{5}{3}})\,dx=$$

$$=\int 9x\,dx-\int 12x^{\frac{4}{3}}\,dx+\int 4x^{\frac{5}{3}}\,dx=$$

$$=9\int x\,dx-12\int x^{\frac{4}{3}}\,dx+4\int x^{\frac{5}{3}}\,dx=$$

$$=9\,\frac{x^2}{2}-12\,\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}+4\,\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+C=3x^2\left(\frac{3}{2}-\frac{12}{7}\,x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\right)+C.$$

Пример 2. Найти

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\,(1-x^2)=-\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 3. Найти

$$\int \frac{6x^3\,dx}{3+x^4}.$$

Решение.

$$\int \frac{6x^3\,dx}{3+x^4} = \frac{6}{4}\int \frac{d(3+x^4)}{3+x^4} = \frac{3}{2}\ln(3+x^4)+C.$$

Пример 4. Найти

$$\int \left(e^{\frac{x+1}{2}} + e^{-\frac{x+1}{2}}\right)dx.$$

Решение.

$$\int \left(e^{\frac{x+1}{2}} + e^{-\frac{x+1}{2}}\right)dx = \int e^{\frac{x+1}{2}}dx + \int e^{-\frac{x+1}{2}}dx =$$

$$= 2\int e^{\frac{x+1}{2}} d\left(\frac{x+1}{2}\right) - 2\int e^{-\frac{x+1}{2}} d\left(-\frac{x+1}{2}\right) =$$

$$= 2e^{\frac{x+1}{2}} - 2e^{-\frac{x+1}{2}} + C = 2\left(e^{\frac{x+1}{2}} - e^{-\frac{x+1}{2}}\right) + C.$$

Пример 5. Найти

$$\int \left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{3} - 1\right)d\theta.$$

Решение.

$$\int \left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{3} - 1\right)d\theta = \int \left(\sec^2\frac{\theta}{3} - 2\right)d\theta =$$

$$= \int \frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{3}} - \int 2\,d\theta = 3\int \frac{d\left(\frac{\theta}{3}\right)}{\cos^2\frac{\theta}{3}} - 2\int d\theta =$$

$$= 3\operatorname{tg}\frac{\theta}{3} - 2\theta + C.$$

Пример 6. Найти

$$\int \frac{dz}{\sqrt{9-4z^2}}.$$

Решение.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{9-4z^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2z)}{\sqrt{3^2-(2z)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2z}{3} + C.$$

Пример 7. Найти

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 8. Найти

$$\int \frac{(x^2-x^5)\,dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Решение.

$$\int \frac{(x^2-x^5)\,dx}{\sqrt{1-x^6}}=\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}-\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^6}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}}+\frac{1}{6}\int (1-x^6)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^6)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\arcsin(x^3)+\sqrt{1-x^6}\right]+C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. $\int \frac{\sqrt{2x}\,dx}{\sqrt[3]{1+2x^2}}$.
2. $\int \frac{8a^2x^3\,dx}{a^4+x^4}$.
3. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.
4. $\int \frac{dx}{2+e^x}$.
5. $\int \frac{x(x^2+1)\,dx}{\sqrt{4-5x^4}}$.
6. $\int (\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}2x)^2\,dx$.
7. $\int \frac{dx}{3x^2+2x+2}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$.
9. $\int (6^x-3^{-x})^2\,dx$.
10. $\int \frac{x\,dx}{5-2x^2+x^4}$.

§ 4. Интегрирование подстановкой

Пусть требуется вычислить неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx$$

от непрерывной функции $f(x)$.

Положим

$$x = \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(z)$, причем такая, для которой существует обратная функция

$$z = \psi(x).$$

Докажем, что для вычисления $\int f(x)\,dx$ достаточно вычислить $\int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$ и затем переменную z заменить через $\psi(x)$.

Действительно,

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

$$d\int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = f(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что каждый из двух неопределенных интегралов $\int f(x)\,dx$ и $\int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$, где $z = \psi(x)$, выражает одно и то же множество функций,— множество первообразных по отношению к функции $f(x)$. Поэтому

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz, \quad [z = \psi(x)].$$

Полученная формула выражает весьма часто применяемый способ интегрирования, который называется интегрированием *подстановкой* или *заменой переменной*.

Этот способ, как показывает формула, заключается в том, что для вычисления $\int f(x)\,dx$ переменную x выражают через новую переменную z, производя под знаком неопределенного интеграла подстановку $x = \varphi(z)$:

$$f(x) = f[\varphi(z)], \; dx = \varphi'(z)\,dz,$$

выбрав $\varphi(z)$ так, чтобы новая подынтегральная функция $f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)$ была более простой для интегрирования.

Пример 1. Вычислить

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Решение. Положим

$$x = a\sin z.$$

Тогда

$$z = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos z, \quad dx = a\cos z\,dz.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{a\cos z} = \int dz = z + C = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

что согласуется с формулой (XIII′) в таблице основных интегралов.

Пример 2. Вычислить

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-2}}.$$

Решение. Положим

$$e^x - 2 = z^2.$$

Отсюда, дифференцируя обе части этого равенства, находим

$$e^x\,dx = 2z\,dz.$$

Поэтому

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-2}} = \int \frac{2z\,dz}{z} = 2\int dz = 2z + C = 2\sqrt{e^x-2} + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

11. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

12. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x}}$.

13. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

§ 5. Интегрирование по частям

Пусть u и v — дифференцируемые функции от x. Тогда

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du.$$

Но

$$\int d(uv) = uv + C.$$

Поэтому

$$uv + C = \int u\,dv + \int v\,du,$$

откуда

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C.$$

Так как произвольная постоянная C может быть включена в слагаемое $\int v\,du$, то имеем

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Полученная формула приводит интегрирование $u\,dv$ к отысканию v по dv и интегрированию $v\,du$, что иногда оказывается более легким.

Вычисление неопределенного интеграла при помощи этой формулы называется *интегрированием по частям.*

Пример 1. Вычислить

$$\int \ln x\,dx.$$

Решение. Положим

$$u = \ln x, \; dv = dx.$$

Тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

Отсюда получим

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Пример 2. Вычислить

$$\int x^2 \cos x \, dx.$$

Решение. Положим

$$u = x^2, \ dv = \cos x \ dx.$$

Тогда

$$du = 2xdx, \ v = \sin x.$$

Поэтому

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx.$$

Для вычисления

$$\int x \sin x \, dx$$

еще раз применим способ интегрирования по частям:

$$u = x, \ dv = \sin x \, dx,$$

$$du = dx, \ v = -\cos x,$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Следовательно,

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Пример 3. Найти

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Решение. Интегрируя по частям, положим

$$u = e^{ax}, \ dv = \sin bx dx.$$

Тогда

$$du = ae^{ax} \, dx, \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx.$$

Поэтому

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Для вычисления

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx$$

опять воспользуемся интегрированием по частям:

$$u = e^{ax},\ dv = \cos bx\, dx,$$

$$du = ae^{ax}\, dx, \quad v = \frac{1}{b}\sin bx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\, dx.$$

Подставляя это в результат первого интегрирования, получим

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \\ - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\, dx.$$

Решая это равенство относительно искомого интеграла, найдем

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

15. $\int \arcsin x\, dx$.

16. $\int x^3 e^{ax}\, dx$.

17. $\int x^3\sin(x^2)\, dx$.

18. $\int e^{-x}\cos 2x\, dx$.

§ 6. Интегрирование рациональных функций

Целая рациональная функция, то есть многочлен вида

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

интегрируется непосредственно.

Если имеем дробную рациональную функцию, то есть дробь вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, то в случае, когда степень многочлена в числителе не ниже степени многочлена в знаменателе, данная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы целой части [частного от деления $P(x)$ на $Q(x)$] и правильной рациональной дроби [с числителем — остатком от деления и со знаменателем $Q(x)$], то есть такой дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Таким образом, возникает вопрос только об интегрировании правильных рациональных дробей.

Предварительно остановимся на некоторых сведениях из алгебры.

Известно, что всякий многочлен n-й степени

$$P_n(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$$

разлагается на линейные множители по формуле

$$P_n(x) = c_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все корни данного многочлена. При этом среди множителей могут оказаться и одинаковые. Поэтому, группируя одинаковые множители, формулу разложения многочлена $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = c_0(x - a)^\alpha (x - b)^\beta \ldots (x - l)^\lambda,$$

где $a, b, \ldots, l$ — все попарно разные корни многочлена, а числа $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ в сумме дают n.

Корень a называется *простым*, если $\alpha = 1$, и *кратным*, если $\alpha > 1$, причем в этом случае α называется *кратностью* корня a. То же самое относится и к другим корням многочлена.

Корни многочлена могут быть действительными и комплексными. Многочлен с действительными коэффициентами (а здесь мы рассматриваем только такие многочлены) обладает тем свойством, что если он имеет комплексный корень $\sigma + \tau i$, то имеет и корень $\sigma - \tau i$, причем эти сопряженные корни могут быть только одинаковой кратности.

В разложении многочлена на линейные множители паре сопряженных комплексных корней $\sigma \pm \tau i$ соответствуют комплексные множители $[x - (\sigma + \tau i)]$ и $[x - (\sigma - \tau i)]$. Перемножив их между собой, мы получим действительный множитель второй степени:

$$[x - (\sigma + \tau i)][x - (\sigma - \tau i)] = [(x - \sigma) - \tau i][(x - \sigma) + \tau i] =$$
$$= (x - \sigma)^2 - (\tau i)^2 = x^2 - 2\sigma x + \sigma^2 + \tau^2 = x^2 + px + q,$$

где $p = -2\sigma$ и $q = \sigma^2 + \tau^2$ — действительные числа.

Таким образом, всякий многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на множители вида

$$(x-a)^{\alpha} \text{ и } (x^2+px+q)^{\nu}$$

где a — действительный корень данного многочлена, имеющий кратность α, а $(x^2+px+q)^{\nu}$ соответствует ν-кратной паре сопряженных комплексных корней данного многочлена и поэтому трехчлен x^2+px+q не разлагается на линейные действительные множители.

Перейдем к вопросу об интегрировании рациональных дробей.

Пусть требуется найти

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ есть несократимая правильная рациональная дробь. Коэффициент при старшей степени x в многочлене $Q(x)$ будем считать равным 1, так как в противном случае этого можно добиться вынесением за знак интеграла постоянного множителя, обратного указанному коэффициенту.

Пусть

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\nu}.$$

В алгебре доказывают, что в этом случае рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть разложена, причем единственным способом, на сумму элементарных дробей по следующему правилу:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{x-a}+ \\ & +\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{x-b}+ \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ & +\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\nu}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{M_{\nu}x+N_{\nu}}{x^2+px+q}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Это разложение производится способом неопределенных коэффициентов, который заключается в следующем.

Пользуясь формулой (1), данную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представляют в виде суммы элементарных дробей, в числителях которых коэффициенты обозначают буквами, считая их неопределенными.

Затем элементарные дроби в правой части равенства (1) складывают, приводя их к общему знаменателю, который будет равен $Q(x)$.

В результате этого получится равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{T(x)}{Q(x)}, \tag{2}$$

где $T(x)$ — многочлен степени $n-1$, если $Q(x)$ — степени n. Коэффициенты $T(x)$ представляют линейные комбинации из неопределенных коэффициентов элементарных дробей.

Из равенства (2) следует, что должно иметь место тождество

$$T(x)=P(x), \tag{3}$$

а это будет лишь в том случае, когда коэффициенты $T(x)$ равны соответствующим коэффициентам $P(x)$.

Следовательно, n коэффициентов элементарных дробей должны быть найдены из системы n линейных уравнений, полученных путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (3).

Система эта имеет определенное решение, что вытекает из разложимости рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на сумму элементарных дробей и из единственности этого разложения.

Из формулы (1) видно, что интегрирование рациональных дробей приводится к интегрированию элементарных дробей следующих четырех видов:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^{\alpha}};\quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\nu}}.$$

Рассмотрим интегрирование в этих четырех случаях.

С л у ч а й I.

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C.$$

Этот результат прямо следует из формулы (VI′) таблицы основных интегралов.

Случай II.

$$\int \frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\,dx = \frac{A}{(1-\alpha)\,(x-a)^{\alpha-1}} + C.$$

В этом случае интегрирование выполняется по формуле (V) таблицы основных интегралов. Действительно,

$$\int \frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\,dx = A\int (x-a)^{-\alpha}\,d(x-a) =$$

$$= A\,\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + C = \frac{A}{(1-\alpha)\,(x-a)^{\alpha-1}} + C.$$

Пример 1. Найти

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}.$$

Решение. Знаменатель подынтегральной дроби разлагается на линейные множители $x-a$ и $x+a$. Поэтому

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю, получим

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{(A+B)\,x + a\,(A-B)}{x^2-a^2},$$

откуда следует тождество

$$(A+B)\,x + a\,(A-B) = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из левой и правой частей этого тождества, получим

$$A + B = 0,$$
$$a\,(A - B) = 1.$$

Решая полученную систему уравнений относительно A и B, найдем

$$A = \frac{1}{2a},\quad B = -\frac{1}{2a}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Следовательно, в таблицу основных интегралов мы можем включить формулу

$$\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C. \qquad \text{(XVII)}$$

Пример 2. Найти

$$\int \frac{6x^2-11x+4}{x(x-1)^2}\,dx.$$

Решение. Положим

$$\frac{6x^2-11x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

где коэффициенты A, B, C пока неопределенные, их надо найти.

Складывая дроби в правой части этого равенства, приведя их к общему знаменателю, равному знаменателю данной дроби $x(x-1)^2$, и приравнивая числитель, который получится в правой части, к числителю левой части, получим тождество

$$A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)=6x^2-11x+4,$$

или, что то же,

$$(A+C)x^2+(B-2A-C)x+A=6x^2-11x+4.$$

Поэтому искомые A, B и C должны удовлетворять уравнениям:

$$A+C=6,$$
$$B-2A-C=-11,$$
$$A=4.$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$A=4,\ B=-1,\ C=2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{6x^2-11x+4}{x(x-1)^2}\,dx=4\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1}=$$
$$=4\ln|x|+\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C=$$
$$=\frac{1}{x-1}+\ln[x^4(x-1)^2]+C.$$

Случай III. Найти

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx.$$

Воспользуемся следующими преобразованиями:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mx+\frac{Mp}{2}-\frac{Mp}{2}+N}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\,(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Корни трехчлена x^2+px+q — комплексные, иначе он разлагался бы на действительные линейные множители, а подынтегральная дробь — на элементарные дроби, рассмотренные в случае I. Поэтому знак трехчлена не меняется и совпадает со знаком коэффициента при x^2, то есть $x^2+px+q>0$ для всех x. По формуле (VI) таблицы основных интегралов

$$\int \frac{d\,(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln(x^2+px+q)+C.$$

Учитывая затем, что корни трехчлена x^2+px+q выражаются формулой

$$x_{1,\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,,$$

мы видим, что они будут комплексными при $\frac{p^2}{4}-q<0$, поэтому в рассматриваемом случае

$$q-\frac{p^2}{4}>0,$$

и для вычисления второго из полученных интегралов применима формула (XIV′) таблицы основных интегралов:

$$\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Пример 3. Найти

$$\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Решение. Замечая, что

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

положим

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

где A, B и C подлежат определению. Приводя правую часть этого равенства к общему знаменателю и приравнивая числители левой и правой частей, получим тождество

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1,$$

или, что то же,

$$(A+B)x^2+(B+C-A)x+(A+C)=1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого тождества, получим:

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ -A+B+C&=0,\\ A+C&=1, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$A=\frac{1}{3}; \qquad B=-\frac{1}{3}; \qquad C=\frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Случай IV. Найти

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\nu}}dx.$$

Данный интеграл преобразуем:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\nu}}dx=\int \frac{Mx+\frac{Mp}{2}-\frac{Mp}{2}+N}{(x^2+px+q)^{\nu}}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{\nu}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\nu}}.$$

Первый из полученных интегралов берется по формуле (V) таблицы основных интегралов:

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+x+q)^{\nu}}=\int (x^2+px+q)^{-\nu}\,d(x^2+px+q)=$$

$$=\frac{(x^2+px+q)^{-\nu+1}}{-\nu+1}+C=\frac{1}{(1-\nu)(x^2+px+q)^{\nu-1}}+C.$$

Вычисление второго интеграла основано на понижении показателя степени в знаменателе подынтегральной дроби и выполняется так:

$$I_\nu=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^\nu}$$

Положим

$$x+\frac{p}{2}=z,\qquad q-\frac{p^2}{4}=a^2\qquad\left(q-\frac{p^2}{4}>0\right).$$

Тогда получим

$$I_\nu=\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^\nu}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(z^2+a^2)-z^2}{(z^2+a^2)^\nu}\,dz=$$
$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{\nu-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+a^2)^\nu}.$$

Последний интеграл преобразуем при помощи интегрирования по частям. Для этого положим

$$u=z,\qquad dv=\frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^\nu},$$

откуда

$$du=dz,\qquad v=\int\frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^\nu}=\frac{1}{2(1-\nu)(z^2+a^2)^{\nu-1}},$$

$$\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+a^2)^\nu}=\frac{z}{2(1-\nu)(z^2+a^2)^{\nu-1}}-\frac{1}{2(1-\nu)}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{\nu-1}}.$$

Поэтому

$$I_\nu=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{\nu-1}}-\frac{z}{2a^2(1-\nu)(z^2+a^2)^{\nu-1}}+$$
$$+\frac{1}{2a^2(1-\nu)}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{\nu-1}}=\frac{z}{2a^2(\nu-1)(z^2+a^2)^{\nu-1}}+$$
$$+\frac{3-2\nu}{2a^2(1-\nu)}\,I_{\nu-1}.$$

Такими же преобразованиями вычисление полученного интеграла

$$I_{\nu-1}=\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{\nu-1}}$$

можно свести к интегралу

$$I_{\nu-2}=\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{\nu-2}}.$$

Продолжая этот процесс, мы в конце концов придем к табличному интегралу

$$I_1=\int \frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}+C.$$

Пример 4. Найти

$$\int \frac{(1-x-x^3)\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

Решение.

$$\frac{1-x-x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю, находим

$$Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)=1-x-x^3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего тождества, получим систему уравнений

$$C=-1,\ D=0,\ A+C=-1,\ B+D=1,$$

откуда и находим коэффициенты элементарных дробей

$$A=0,\ B=1,\ C=-1,\ D=0.$$

Поэтому

$$\int \frac{(1-x-x^3)\,dx}{(x^2+1)^2}=\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}-\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=I-\frac{1}{2}\ln(x^2+1),$$

где

$$I=\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Для вычисления интеграла I воспользуемся способом, указанным в случае IV интегрирования рациональных дробей:

$$I=\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int \frac{dx}{x^2+1}-\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

Последний интеграл преобразуем способом интегрирования по частям, для чего положим

$$u=x, \qquad dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2},$$

откуда

$$du = dx, \qquad v = -\frac{1}{2(x^2+1)},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Поэтому

$$I = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(1-x-x^3)\,dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

19. $\int \frac{x^4-4x^3+2x^2+6}{x^5+3x^3}\,dx.$ 20. $\int \frac{x^3+9x^2+11x-1}{x^4+2x^3+x^2-2x-2}\,dx$

21. $\int \frac{x^5+5x^3+6x+4}{x^4+4x^2+4}\,dx.$ 22. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2-3x+3)^2}.$

§ 7. Метод Остроградского

Пусть требуется интегрировать правильную несократимую рациональную дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^\nu \cdots (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda}.$$

Разложим данную дробь по формуле (1) § 6. Тогда интегрирование $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сведется к интегрированию элементарных дробей.

Так как

$$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha}\,dx = \frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + C,$$

то сумма интегралов от элементарных дробей второго вида будет правильной рациональной дробью со знаменателем

$$(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \ldots (x-l)^{\lambda-1}.$$

Правило интегрирования элементарных дробей четвертого вида дает:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{\nu-1}} + K\int \frac{dx}{x^2+px+q},$$

причем в правой части первое слагаемое является правильной рациональной дробью, а K — некоторое число.

Отсюда видно, что если сложить все рациональные дроби, являющиеся результатами интегрирования всех элементарных дробей второго и четвертого вида в разложении $\frac{P(x)}{Q(x)}$, то получится правильная рациональная дробь

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где

$$Q_1(x) = (x^2+px+q)^{\nu-1}\,\ldots\,(x-a)^{\alpha-1}\,\ldots\,(x-l)^{\lambda-1}.$$

Если же сложить интегралы от всех элементарных дробей первого и третьего вида и все интегралы вида

$$K\int \frac{dx}{x^2+px+q},$$

которые появляются при интегрировании элементарных дробей четвертого вида в разложении $\frac{P(x)}{Q(x)}$, то получится

$$\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

где $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ — правильная рациональная дробь, причем

$$Q_2(x) = (x^2+px+q)\,\ldots\,(x-a)(x-b)\,\ldots\,(x-l).$$

Следовательно,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \qquad (1)$$

Это равенство называется *формулой Остроградского*.

Ценность формулы Остроградского заключается в том, что вычисление неопределенного интеграла от рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, если выделить его рациональную часть $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, приводится к интегрированию рациональной дроби $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, которая разлагается на легко интегрируемые элементарные дроби первого и третьего вида.

Если знаменатель данной дроби $Q(x)$ разложен на множители, то знаменатели $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ рациональных дробей, входящих в правую часть формулы Остроградского, могут быть написаны сразу: в $Q_2(x)$ надо включить все множители из $Q(x)$, взятые в 1-й степени, а в $Q_1(x)$ надо взять из $Q(x)$ то, что не вошло в $Q_2(x)$, так как $Q=Q_1Q_2$.

Для того чтобы найти числители $P_1(x)$ и $P_2(x)$, можно воспользоваться способом неопределенных коэффициентов.

Все эти операции выполняются следующим образом. Если многочлен Q_1 степени n_1, а Q_2 — степени n_2 (n_1+n_2 равняется степени n многочлена Q), то за P_1 и P_2 возьмем многочлены соответственно степени n_1-1 и n_2-1, обозначив их коэффициенты буквами. Этих неопределенных коэффициентов будет $n_1+n_2=n$. Затем дифференцируем равенство (1), что дает

$$\frac{P}{Q}=\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)'+\frac{P_2}{Q_2}. \tag{2}$$

Выполнив дифференцирование в равенстве (2), получим

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}. \tag{3}$$

Можно заметить, что если дроби в правой части равенства (3) приведем к общему знаменателю, то получим

$$\frac{P}{Q}=\frac{T}{Q}, \tag{4}$$

где T будет многочленом степени $n-1$.

Действительно,

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1'Q_2-P_1\dfrac{Q_1'Q_2}{Q_1}+P_2Q_1}{Q_1Q_2}.$$

Так как каждый множитель, содержащийся в Q_1, содержится и в $Q_1'Q_2$ (например, Q_1 имеет множитель $(x-a)^{\alpha-1}$, но тогда в составе Q_1' есть множитель $(x-a)^{\alpha-2}$, а среди множителей Q_2 есть $x-a$, поэтому $Q_1'Q_2$ имеет множитель $(x-a)^{\alpha-1}$), то

$$Q_1'Q_2=Q_1H,$$

где H — многочлен степени n_2-1. Поэтому

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_2-P_1H+P_2Q_1}{Q_1Q_2}=\frac{T}{Q},$$

где

$$T = P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1.$$

Нетрудно заметить, что T — многочлен степени $n - 1$, коэффициенты которого представляют линейные комбинации неопределенных коэффициентов P_1 и P_2.

Из равенства (4), которое теперь доказано, следует

$$T = P. \tag{5}$$

Это равенство является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x в T и в P должны быть равными.

Отсюда следует, что для отыскания n неизвестных коэффициентов многочленов P_1 и P_2 мы можем составить систему n линейных уравнений путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (5). Система эта совместна и имеет определенное решение, так как разложимость по формуле Остроградского доказана.

П р и м е р. Найти

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$$

Применим метод Остроградского.

Здесь

$$Q = (x^3 + 1)^2 = (x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2.$$

Поэтому

$$Q_1 = Q_2 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1.$$

Так как P_1 и P_2 должны быть многочленами степени на единицу ниже соответственно многочленов Q_1 и Q_2, то положим

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}\,dx.$$

Дифференцируя, получим:

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3+1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю найдем

$$(2Ax + B)(x^3 + 1) - 3x^2 (Ax^2 + Bx + C) +$$
$$+ (Dx^2 + Ex + F)(x^3 + 1) = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого равенства, получим:

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ E - A &= 0, \\ F - 2B &= 0, \\ D - 3C &= 0, \\ 2A + E &= 0, \\ B + F &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда найдем:

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Последний интеграл уже был найден (§ 6, пример 3):

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

23. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx.$ 24. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$

§ 8. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Здесь мы рассмотрим неопределенный интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right) dx,$$

где подынтегральная функция иррациональная, но такая, что если $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}$ обозначим через z, то получим функцию

$R(x, z)$, рациональную относительно своих аргументов x и z.

Вычисление данного интеграла приводится к интегрированию рациональной функции подстановкой

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=z^n.$$

Действительно, из этого равенства находим

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}=z;$$

$$ax+b=z^n(a_1x+b_1), \quad ax-a_1z^nx=b_1z^n-b;$$

$$x=\frac{b_1z^n-b}{a-a_1z^n};$$

$$dx=\frac{nb_1z^{n-1}(a-a_1z^n)+na_1z^{n-1}(b_1z^n-b)}{(a-a_1z^n)^2}\,dz,$$

а после упрощения

$$dx=\frac{n(ab_1-a_1b)z^{n-1}}{(a-a_1z^n)^2}\,dz.$$

Отсюда

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{b_1z^n-b}{a-a_1z^n}, z\right)\frac{n(ab_1-a_1b)z^{n-1}}{(a-a_1z^n)^2}\,dz=\int R_1(z)\,dz,$$

где функция $R_1(z)$ — рациональная, так как для ее получения мы подставили в рациональную функцию $R(x, z)$ вместо x выражение $\frac{b_1z^n-b}{a-a_1z^n}$, содержащее только целые степени z, а затем результат умножили на рациональную дробь $\frac{n(ab_1-a_1b)z^{n-1}}{(a-a_1z^n)^2}$, поэтому z в $R_1(z)$ не может оказаться под знаком радикала.

Следовательно, полученный интеграл вычисляется как интеграл от рациональной функции.

Пусть

$$\int R_1(z)\,dz=F(z)+C.$$

Тогда искомый интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right)dx=F\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right)+C.$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Тогда данный интеграл примет вид:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx,$$

а подстановка, приводящая его вычисление к интегрированию рациональной функции, будет выражаться равенством

$$ax + b = z^n.$$

2. Пусть $a = 1$, $b = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Тогда будем иметь интеграл:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx,$$

а подстановка, приводящая к интегралу от рациональной функции, будет:

$$x = z^n.$$

Пример 1. Найти

$$\int \frac{x\,dx}{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{4}{3}}}.$$

Решение. Прежде всего найдем общий знаменатель дробных показателей. Он равен 6; поэтому подынтегральная функция имеет вид:

$$R\left(x, \sqrt[6]{x}\right).$$

Учитывая это, положим $x = z^6$. Тогда

$$x^{\frac{3}{2}} = z^9, \quad x^{\frac{4}{3}} = z^8, \quad dx = 6z^5\,dz, \quad z = \sqrt[6]{x}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{4}{3}}} = \int \frac{z^6 6z^5\,dz}{z^9 - z^8} = 6\int \frac{z^3\,dz}{z-1} = 6\int \frac{z^3 - 1 + 1}{z-1}\,dz =$$

$$= 6\int \left(z^2 + z + 1 + \frac{1}{z-1}\right) dz =$$

$$= 6\left(\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} + z + \ln|z-1|\right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right|\right) + C.$$

Пример 2. Найти

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x-2}}.$$

Решение. Положим $x-2=z^2$. Тогда

$$z=\sqrt{x-2}, \quad x=z^2+2, \quad dx=2z\,dz.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x-2}}=\int \frac{(z^2+3)\,2z\,dz}{(z^2+2)\,z}=2\int \frac{z^2+2+1}{z^2+2}\,dz=$$

$$=2\int dz+2\int \frac{dz}{z^2+2}=2z+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$. 26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6}+2x-2}$.

27. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{x}$.

§ 9. Подстановки Эйлера

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

где $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ — иррациональное выражение, но такое, что заменив в нем $\sqrt{ax^2+bx+c}$ через y, мы получим функцию $R(x, y)$, рациональную относительно обоих аргументов x и y.

Интегралы этого вида можно привести к интегралам от рациональных функций (и поэтому выражаются через элементарные функции) при помощи следующих трех *подстановок Эйлера*.

1-*я подстановка Эйлера*. Пусть $a>0$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\sqrt{a}\,x, \tag{1}$$

где z — новая переменная.

Возведя в квадрат обе части равенства (1), получим

$$ax^2 + bx + c = z^2 - 2\sqrt{a}\,zx + ax^2,$$

$$bx + c = z^2 - 2\sqrt{a}\,zx.$$

Отсюда

$$x = \frac{z^2 - c}{2\sqrt{a}\,z + b}.$$

Дифференцируя, находим

$$dx = \frac{2z(2\sqrt{a}\,z + b) - 2\sqrt{a}\,(z^2 - c)}{(2\sqrt{a}\,z + b)^2}\,dz.$$

После упрощения

$$dx = \frac{2(\sqrt{a}\,z^2 + bz + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\,z + b)^2}\,dz.$$

Подставляя значение x в правую часть равенства (1), получим

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = z - \sqrt{a}\,\frac{z^2 - c}{2\sqrt{a}\,z + b},$$

а после приведения правой части к общему знаменателю

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}\,z^2 + bz + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,z + b}.$$

Подставляя в данный интеграл вместо x, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ и dx их значения, выраженные здесь через z, получим

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{z^2 - c}{2\sqrt{a}\,z + b}, \frac{\sqrt{a}\,z^2 + bz + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,z + b}\right) \frac{2(\sqrt{a}\,z^2 + bz + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\,z + b)^2}\,dz =$$

$$= \int R_1(z)\,dz.$$

Новая подынтегральная функция $R_1(z)$ — рациональная, так как для ее получения мы подставили в рациональную функцию $R(x, y)$ вместо x и y выражения

$$\frac{z^2 - c}{2\sqrt{a}\,z + b} \text{ и } \frac{\sqrt{a}\,z^2 + bz + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,z + b},$$

содержащие только целые степени z, а затем полученный результат умножили на рациональную дробь

$$\frac{2(\sqrt{a}\,z^2+bz+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\,z+b)^2}.$$

Полученный интеграл вычисляется по правилам интегрирования рациональных функций.

Пусть

$$\int R_1(z)\,dz=F(z)+C.$$

Тогда, выражая z из подстановки (1) обратно через x:

$$z=\sqrt{a}\,x+\sqrt{ax^2+bx+c},$$

найдем

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=F(\sqrt{a}\,x+\sqrt{ax^2+bx+c})+C.$$

Пример 1. Найти

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Решение. Пользуясь 1-й подстановкой Эйлера, положим

$$\sqrt{x^2+a^2}=z-x.$$

Отсюда

$$x^2+a^2=z^2-2zx+x^2,$$

$$x=\frac{z^2-a^2}{2z};$$

$$dx=\frac{z^2+a^2}{2z^2}dz;\quad \sqrt{x^2+a^2}=z-\frac{z^2-a^2}{2z}=\frac{z^2+a^2}{2z}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{(z^2+a^2)\,2z}{2z^2(z^2+a^2)}\,dz=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

Таким же способом можно убедиться, что

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

Эти результаты позволяют включить в таблицу простейших интегралов формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right|+C. \qquad \text{(XVIII)}$$

2-я подстановка Эйлера. Пусть корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ действительные. Обозначим их через α и β. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

Положим

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{a}\,(x-\alpha)\,z \qquad (2)$$

(коэффициент a будем считать положительным, так как при $a < 0$ можно написать $ax^2 + bx + c = a'(x-\alpha)(\beta - x)$, где $a' = -a > 0$).

Возведя обе части равенства (2) в квадрат, мы опять, как в случае подстановки (1), получим уравнение первой степени относительно x:

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x-\alpha)^2 z^2,$$

$$x - \beta = (x-\alpha)\,z^2.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{\alpha z^2 - \beta}{z^2-1}, \quad dx = \frac{2(\beta-\alpha)z}{(z^2-1)^2}\,dz.$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\,(\alpha-\beta)\,z}{z^2-1}.$$

Следовательно,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= \int R\left(\frac{\alpha z^2-\beta}{z^2-1}, \frac{\sqrt{a}\,(\alpha-\beta)\,z}{z^2-1}\right)\frac{2(\beta-\alpha)z}{(z^2-1)^2}\,dz = \int R_1(z)\,dz,$$

где $R_1(z)$ — рациональная функция.

Пусть, пользуясь правилами интегрирования рациональных функций, мы нашли

$$\int R_1(z)\,dz = F(z) + C.$$

Тогда, выражая z из подстановки (2) обратно через x, получим

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = F\left(\sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}}\right) + C.$$

Пример 2. Найти

$$\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}}.$$

Решение. Пользуясь 2-й подстановкой Эйлера, положим

$$\sqrt{x(1-x)}=xz.$$

Отсюда получим

$$x(1-x)=x^2z^2, \quad 1-x=xz^2;$$

поэтому

$$x=\frac{1}{z^2+1}, \quad dx=-\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^2},$$

$$2x-1=\frac{1-z^2}{z^2+1}, \quad \sqrt{x-x^2}=\frac{z}{z^2+1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}}=2\int \frac{dz}{z^2-1}=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C.$$

Здесь мы использовали формулу XVII (§ 6). Наконец, подставив в полученный результат значение

$$z=\sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

выраженное через x из подстановки, которой пользовались, получим

$$\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}}=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}\right|+C.$$

3-я подстановка Эйлера выражается равенством

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}-xz.$$

Эта подстановка применима в случае $c>0$ и опять приводит к уравнению 1-й степени относительно x, а поэтому данный интеграл — к интегралу от рациональной функции.

Заметим, что уже первых двух подстановок Эйлера достаточно, чтобы любой интеграл рассматриваемого здесь вида привести к интегралу от рациональной функции.

Действительно, если $a>0$, то применима 1-я подстановка. Если же $a<0$, то корни трехчлена ax^2+bx+c должны быть действительными, так как в противном случае $ax^2+bx+c<0$ и значение $\sqrt{ax^2+bx+c}$ — комплексное для всех x, а мы рассматриваем здесь только действительные функции от действительного аргумента. Следовательно, при $a<0$ можно пользоваться 2-й подстановкой Эйлера.

УПРАЖНЕНИЯ

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}}$ 29. $\int \frac{\sqrt{3x-x^2}}{x^2}\,dx.$

§ 10. Другие способы интегрирования

В предыдущем параграфе мы убедились, что неопределенный интеграл от любой функции, не содержащий иных иррациональностей, кроме квадратного корня из квадратного трехчлена, приводится к интегралу от рациональной функции при помощи одной из подстановок Эйлера. Поэтому такой интеграл всегда выражается через элементарные функции.

Однако следует заметить, что часто для вычисления интегралов такого вида применять подстановки Эйлера нецелесообразно, так как для них можно найти другие способы интегрирования, которые приводят к цели гораздо быстрее.

Рассмотрим некоторые из таких интегралов.

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad \text{(I)}$$

Такие интегралы вычисляются непосредственно по формуле (XIII′) или (XVIII) таблицы основных интегралов.

Пример 1. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-3}} =$$

$$= \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right| + C.$$

Пример 2. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2-1}}$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(4x-3) + C.$$

Интегралы вида

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{II}$$

Такие интегралы приводятся к интегралам вида (I) следующим путем:

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\left(Mx+\frac{Mb}{2a}\right)-\frac{Mb}{2a}+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Пример 3. Найти

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{2x^2+4x+3}}.$$

Решение

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{2x^2+4x+3}} = \int \frac{(x+1)-2}{\sqrt{2x^2+4x+3}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(4x+4)\,dx}{\sqrt{2x^2+4x+3}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+4x+3} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{2(x+1)^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+4x+3} - \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{d\sqrt{2}\,(x+1)}{\sqrt{2(x+1)^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+4x+3} -$$

$$-\sqrt{2}\ln\left|\sqrt{2}\,(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+3}\right| + C.$$

Интегралы вида

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{III}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

Такие интегралы можно вычислять методом неопределенных коэффициентов, который заключается в следующем.

Допустим, что

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$=(A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n)\sqrt{ax^2+bx+c}\,+$$

$$+A_{n+1}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{1}$$

и попытаемся найти коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$.

Взяв производную от обеих частей равенства (1), получим

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$=[(n-1)A_1x^{n-2}+(n-2)A_2x^{n-3}+\ldots+A_{n-1}]\times$$

$$\times\sqrt{ax^2+bx+c}+(A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n)\times$$

$$\times\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{A_{n+1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{2}$$

Правую часть равенства (2) приведем к общему знаменателю, равному знаменателю левой части: $\sqrt{ax^2+bx+c}$. После этого и числители обеих частей должны быть равными, то есть должно быть справедливо тождество

$$P_n(x)=$$

$$=[(n-1)A_1x^{n-2}+(n-2)A_2x^{n-3}+\ldots+A_{n-1}](ax^2+bx+c)+$$

$$+(A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n)\left(ax+\frac{b}{2}\right)+A_{n+1}, \qquad (3)$$

обе части которого — многочлены одной и той же степени n.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях (3), мы получим $n+1$ уравнений, из которых коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ находятся последовательно: сначала A_1, затем A_2 и т. д.

Подставив найденные значения $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ в правую часть равенства (1) и вычислив интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

рассмотренного выше вида (I), мы найдем интеграл (III).

Пример 4. Найти

$$\int\frac{(x^2-1)\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

Решение. Положим

$$\int\frac{(x^2-1)\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=(A_1x+A_2)\sqrt{3+2x-x^2}+$$

$$+A_3\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

Возьмем производную от обеих частей этого равенства:

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}=A_1\sqrt{3+2x-x^2}+$$

$$+(A_1x+A_2)\frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}+\frac{A_3}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

Приведя к общему знаменателю и приравняв между собой числители, получим тождество

$$x^2-1=A_1(3+2x-x^2)+(A_1x+A_2)(1-x)+A_3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях этого тождества, получим уравнения

$$\begin{aligned} -2A_1 &= 1, \\ 3A_1 - A_2 &= 0, \\ 3A_1 + A_2 + A_3 &= 1. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим

$$A_1 = -\frac{1}{2}.$$

Зная A_1, из второго уравнения найдем

$$A_2 = -\frac{3}{2}.$$

Наконец, из третьего уравнения найдем

$$A_3 = 4.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(x^2-1)\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{3+2x-x^2} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{3+2x-x^2} + 4\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} =$$

$$= -\frac{x+3}{2}\sqrt{3+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{2} + C.$$

Интегралы вида

$$\int \frac{P_m(x)\,dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad \text{(IV)}$$

При $m < n$ интегралы вида (IV) можно привести к интегралам вида (III) подстановкой

$$x - \alpha = \frac{1}{z}.$$

Если же $m \geqslant n$, то следует сначала у дроби $\frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^n}$ выделить целую часть.

П р и м е р 5. Найти.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x-1}}.$$

Р е ш е н и е. Положим

$$x = \frac{1}{z}.$$

Тогда

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad \sqrt{x^2+6x-1} = \sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{6}{z}-1} = \frac{\sqrt{1+6z-z^2}}{z}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x-1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1+6z-z^2}} =$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{10-(z-3)^2}} = \arccos \frac{z-3}{\sqrt{10}} + C =$$

$$= \arccos \frac{\frac{1}{x}-3}{\sqrt{10}} + C = \arccos \frac{1-3x}{\sqrt{10}\,x} + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

30. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{4-4x-x^2}}$. 31. $\int \frac{(3x^2+5)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$.

§ 11. Интегрирование биномиального дифференциала

Рассмотрим неопределенный интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

где числа m, n и p — рациональные, а a и b — любые, отличные от нуля (при $a = 0$ или $b = 0$ интеграл вычисляется непосредственно по основным формулам).

Дифференциал, стоящий под знаком интеграла, мы будем называть б и н о м и а л ь н ы м.

Биномиальный дифференциал $x^m (a+bx^n)^p dx$ интегрируется в следующих трех случаях.

С л у ч а й I. Пусть p — целое число или нуль. Если $p = 0$, то $x^m(a+bx^n)^p dx = x^m dx$, и мы имеем дело с табличным интегралом.

Если p — целое число и в то же время числа m и n — целые, то $x^m(a+bx^n)^p$ является рациональной функцией и поэтому интегрируется известным способом.

Если p — целое число и по крайней мере одно из чисел m или n — дробное, то $x^m(a+bx^n)^p$ представляет иррациональное выражение, которое интегрируется способом, указанным в § 8 этой главы (2-й частный случай).

Случай II. Пусть число p — дробное:

$$p=\frac{r}{s}.$$

В этом случае мы будем искать такую подстановку, которая привела бы к интегралу от рациональной функции. Положим

$$a+bx^n=z^s.$$

Отсюда получим

$$x=\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}(z^s-a)^{\frac{1}{n}},$$

$$x^m=\frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}(z^s-a)^{\frac{m}{n}},$$

$$dx=\frac{sz^{s-1}}{nb^{\frac{1}{n}}}(z^s-a)^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

$$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=z^r.$$

Поэтому

$$\int x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=\frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int z^{r+s-1}(z^s-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dz.$$

Ясно, что в полученном интеграле подынтегральная функция будет рациональной, а поэтому интегрируемой известным способом, если число $\frac{m+1}{n}$ будет целым или нулем. Если же число $\frac{m+1}{n}$ — дробное, то полученный интеграл ничем не лучше данного.

Итак, $x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$ интегрируется подстановкой

$$a+bx^n=z^s,$$

если только выполнено условие:

$$\frac{m+1}{n}$$

есть целое число или нуль.

Случай III. Пусть $p=\frac{r}{s}$ и число $\frac{m+1}{n}$—дробное. Положим

$$a+bx^n=z^s x^n.$$

Отсюда находим

$$x=a^{\frac{1}{n}}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}},$$

$$dx=-\frac{sa^{\frac{1}{n}}}{n}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}z^{s-1}dz,$$

$$a+bx^n=az^s(z^s-b)^{-1}.$$

Поэтому

$$\int x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=$$

$$=-\frac{sa^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}}{n}\int z^{r+s-1}(z^s-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}+1\right)}dz.$$

Отсюда видно, что подстановка, которой мы воспользовались, приводит к интегралу от рациональной функции, если только $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ есть целое число или нуль.

Итак, $x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$ интегрируется подстановкой

$$a+bx^n=z^s x^n,$$

если только выполнено условие:

$$\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$$

есть целое число или нуль.

П. Л. Чебышев доказал, что рассмотренные здесь три случая исчерпывают все случаи интегрируемости биномиального дифференциала.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема Чебышева. *Неопределенный интеграл от биномиального дифференциала*

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$$

приводится к интегралу от рациональной функции и поэтому выражается через алгебраические, логарифмические и обратные тригонометрические функции, если хотя бы одно из трех чисел:

$$p,\ \frac{m+1}{n},\quad \frac{m+1}{n}+p$$

— целое или нуль. Если же ни одно из указанных трех чисел не будет целым или нулем, то интеграл от биномиального дифференциала не выражается конечной комбинацией элементарных функций.

Пример 1. Найти

$$\int x^3 (1+x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx.$$

Решение. Замечаем, что в данном случае

$$m=3,\quad n=2,\quad p=\frac{r}{s}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2.$$

Поэтому положим

$$1+x^2=z^3\quad (1+x^2=z^s).$$

Отсюда найдем

$$x=(z^3-1)^{\frac{1}{2}},\quad dx=\frac{3}{2}(z^3-1)^{-\frac{1}{2}}z^2\,dz,$$

$$\int x^3(1+x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx=$$

$$=\int (z^3-1)^{\frac{3}{2}}z^2\frac{3}{2}(z^3-1)^{-\frac{1}{2}}z^2\,dz=\frac{3}{2}\int (z^3-1)\,z^4\,dz=$$

$$=\frac{3}{2}\int (z^7-z^4)\,dz=\frac{3}{2}\left(\frac{z^8}{8}-\frac{z^5}{5}\right)+C.$$

Так как

$$z=(1+x^2)^{\frac{1}{3}},$$

то окончательно получим

$$\int x^3 (1+x^2)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{16}(1+x^2)^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{10}(1+x^2)^{\frac{5}{3}} + C.$$

Пример 2. Найти

$$\int \frac{dx}{x^2 (2+x^3)^{\frac{5}{3}}}.$$

Решение. Здесь мы имеем

$$m = -2,\ n = 3,\ p = \frac{r}{s} = -\frac{5}{3},$$

$$\frac{m+1}{n} = -\frac{1}{3},\quad \frac{m+1}{n} + p = -2,$$

поэтому положим

$$2 + x^3 = z^3 x^3 \quad (2 + x^3 = z^s x^n).$$

Отсюда получим

$$x = 2^{\frac{1}{3}} (z^3 - 1)^{-\frac{1}{3}},$$

$$dx = -2^{\frac{1}{3}} (z^3 - 1)^{-\frac{4}{3}} z^2 dz,$$

$$2 + x^3 = 2z^3 (z^3 - 1)^{-1},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 (2+x^3)^{\frac{5}{3}}} = \int \frac{-2^{\frac{1}{3}} z^2 (z^3-1)^{\frac{2}{3}}}{(z^3-1)^{\frac{4}{3}} 2^{\frac{2}{3}}} \frac{(z^3-1)^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{5}{3}} z^5} dz =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{z^3 - 1}{z^3} dz = -\frac{1}{4} \int dz + \frac{1}{4} \int \frac{dz}{z^3} =$$

$$= -\frac{z}{4} - \frac{1}{8z^2} + C = -\frac{2z^3+1}{8z^2} + C.$$

Так как из подстановки, которой мы воспользовались, следует, что

$$z = \frac{(2+x^3)^{\frac{1}{3}}}{x},$$

то

$$\int \frac{dx}{x^2 (2+x^3)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2\frac{2+x^3}{x^3}+1}{8\frac{(2+x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^2}} + C = -\frac{4+3x^3}{8x(2+x^3)^{\frac{2}{3}}} + C.$$

33. $\int x^3 \sqrt[3]{(2-x^2)^2}\, dx$.   34. $\int \frac{y^2 dy}{(2+3y^2)^{\frac{5}{2}}}$.

§ 12. Интегралы от некоторых тригонометрических выражений

Рассмотрим интегрирование некоторых тригонометрических дифференциалов.

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{A}$$

где подынтегральная функция такая, что если $\sin x$ и $\cos x$ заменить соответственно через u и v, то получится функция $R(u, v)$, рациональная относительно своих аргументов u и v.

Вычисление таких интегралов приводится к интегрированию рациональных функций.

Действительно,

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Если теперь положим

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z,$$

то получим

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} z, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Поэтому

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx =$$
$$= \int R\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2} = \int R_1(z)\,dz,$$

где $R_1(z)$ — рациональная функция, так как для его получения мы подставили в рациональную функцию $R(u, v)$ вместо u и v выражения соответственно

$$\frac{2z}{1+z^2} \text{ и } \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

содержащие только целые степени z, а затем результат умножили на рациональную дробь

$$\frac{2}{1+z^2}.$$

Пусть, пользуясь правилами интегрирования рациональных функций, мы нашли

$$\int R_1(z)\,dz = F(z) + C.$$

Тогда

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = F\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Пример 1. Найти

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Решение. Положим

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z.$$

Тогда

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Результат, полученный здесь, позволяет включить в таблицу основных интегралов формулу

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C. \qquad \text{(XIX)}$$

Интегралы вида

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx. \qquad (B)$$

Остановимся на двух случаях, когда интегралы вида (B) вычисляются весьма просто.

1-й случай, когда по крайней мере один из показателей степени m или n — положительное нечетное число.

Пусть для определенности таким числом будет m, то есть $m = 2k+1$, где k — натуральное число или нуль. Другой показатель степени n в этом случае может быть любым действительным числом. Тогда имеем

$$\int \sin^n x \cos^{2k+1} x\,dx = \int \sin^n x \cos^{2k} x \cos x\,dx =$$

$$= \int \sin^n x\,(1-\sin^2 x)^k\,d\sin x.$$

Развернув в последнем интеграле $(1-\sin^2 x)^k$ по формуле бинома Ньютона и интегрируя полученную сумму почленно, придем к табличным интегралам вида $\int \sin^p x\,d\sin x$.

Пример 2. Найти

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \int \cos^{-\frac{7}{2}} x \sin^3 x\,dx =$$

$$= \int \cos^{-\frac{7}{2}} x \sin^2 x \sin x\,dx =$$

$$= -\int \cos^{-\frac{7}{2}} x\,(1-\cos^2 x)\,d\cos x =$$

$$= -\int \cos^{-\frac{7}{2}} x\,d\cos x + \int \cos^{-\frac{3}{2}} x\,d\cos x =$$

$$= \frac{2}{5}\cos^{-\frac{5}{2}} x - 2\cos^{-\frac{1}{2}} x + C.$$

2-й случай, когда оба показателя m и n — положительные четные числа.

В этом случае подынтегральную функцию преобразуем по известным формулам тригонометрии:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

в результате чего получим либо интегралы, содержащие нечетные степени $\sin 2x$ или $\cos 2x$, которые вычисляем способом, рассмотренным в 1-м случае, либо интегралы опять от четных степеней $\sin 2x$ и $\cos 2x$, которые снова преобразуем по тем же формулам тригонометрии, переходя к функциям $\sin 4x$ и $\cos 4x$, и т. д.

Этот процесс всегда можно довести до конца, так как каждый раз сумма показателей уменьшается вдвое.

П р и м е р 3. Найти

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$$

Р е ш е н и е.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d \sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx \, dx. \qquad (C)$$

При $a = b$ интеграл (C) является элементарным интегралом вида (B). Если $a \neq b$, то, пользуясь формулами

$$\sin (a \pm b) x = \sin ax \cos bx \pm \cos ax \sin bx,$$

находим

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(a+b)x\, dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \sin(a-b)x\, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C.$$

Интегралы вида

$$\int \sin ax \sin bx\, dx, \qquad (D)$$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx \qquad (E)$$

при $a = b$ относятся к интегралам вида (B), а при $a \neq b$ вычисляют аналогично интегралу (C), пользуясь формулами

$$\cos(a \pm b)x = \cos ax \cos bx \mp \sin ax \sin bx.$$

Пример 4. Найти

$$\int \cos\frac{x}{2}\cos 2x\, dx.$$

Решение. Так как

$$\cos\left(2 \pm \frac{1}{2}\right)x = \cos 2x \cos\frac{x}{2} \mp \sin 2x \sin\frac{x}{2},$$

то

$$\int \cos\frac{x}{2}\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos\frac{5}{2}x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{3}{2}x\, dx =$$

$$= \frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}x + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

35. Вывести формулу

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \qquad (XX)$$

36. $\int \frac{\cos^5 t\, dt}{\sqrt[3]{\sin t}}$.

38. $\int \cos\frac{3x}{4}\sin\frac{x}{4}\, dx$.

37. $\int \cos^6 x \sin^2 x\, dx$.

39. $\int \sin 5z \sin 6z\, dz$.

ГЛАВА III

СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. Связь между определенными и неопределенными интегралами

Как было доказано в главе I, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке, то есть определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует. Для вычисления определенных интегралов там же была получена формула Ньютона — Лейбница. Этой формулой вычисление $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ приводится к отысканию одной из первообразных для подынтегральной функции $f(x)$.

Так как множество всех первообразных по отношению к функции $f(x)$ выражается неопределенным интегралом от $f(x)$, то из этого следует, что для вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ надо сначала найти неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$. Если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Таким образом, формула Ньютона — Лейбница устанавливает связь между определенными и неопределенными интегралами.

Пример. Вычислить

$$\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

Решение. Так как

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C,$$

то

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Bigg|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3-1}{3+1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-1}{2+1} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

§ 2. Вычисление определенных интегралов подстановкой

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от функции $f(x)$, которая определена и непрерывна по крайней мере на отрезке $[a, b]$.

Положим $x = \varphi(t)$ и допустим, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) когда t изменяется от α до β, функция $\varphi(t)$ непрерывно изменяется от a до b так, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а все другие значения $\varphi(t)$ содержатся в области, где функция $f(x)$ определена и непрерывна;

2) на отрезке с концами α и β функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$.

Докажем, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Прежде всего заметим, что каждый из этих двух интегралов существует как интеграл от непрерывной функции (непрерывность $f[\varphi(t)]$ следует из теоремы о непрерывности сложных функций). Остается доказать, что они равны между собой. Для этого составим две функции:

$$F(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx$$

и

$$\Phi(t) = \int_\alpha^t f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Заметим, что эти функции имеют тождественно равные производные. Действительно,

$$F'(t) = \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Но

$$\frac{dF}{d\varphi} = f[\varphi(t)],$$

как производная интеграла от непрерывной функции по его верхнему пределу. Поэтому

$$F'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Производная $\Phi'(t)$ также является производной интеграла от непрерывной функции по его верхнему пределу. Поэтому

$$\Phi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Следовательно,

$$F'(t) \equiv \Phi'(t).$$

Это означает, что функции $F(t)$ и $\Phi(t)$ являются первообразными для одной и той же функции и поэтому могут отличаться между собой только на постоянное слагаемое, то есть имеет место тождество

$$F(t) = \Phi(t) + C,$$

где C — некоторое число.

Полагая в этом тождестве $t = \alpha$ и замечая, что

$$\Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = 0,$$

$$F(\alpha) = \int_{a}^{\varphi(\alpha)} f(x)\,dx = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

получим

$$C = 0.$$

Следовательно, для всех значений t от α до β

$$F(t) = \Phi(t),$$

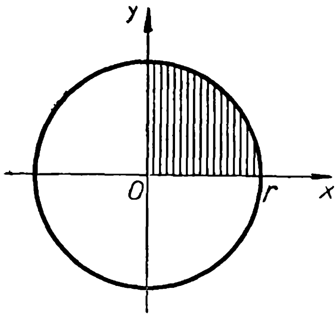
то есть

$$\int_{a}^{\varphi(t)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{t} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда при $t = \beta$, учитывая, что $\varphi(\beta) = b$, получим требуемое равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

В этой формуле заключается способ вычисления определенного интеграла подстановкой: функцию $x = \varphi(t)$, удовлетворяющую условиям, указанным выше, стараются выбрать так, чтобы новый интеграл $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ был более простым для вычисления, чем первоначальный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.



Черт. 85

Пример. Найти площадь S круга радиуса r.

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат xOy, поместив начало O в центре данного круга (черт. 85). Тогда уравнение окружности радиуса r будет:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Первую четверть круга можно рассматривать как криволинейную трапецию, построенную на отрезке $[0, r]$ оси Ox и ограниченную сверху кривой

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Поэтому ее площадь, равная $\frac{1}{4}S$, выразится формулой

$$\frac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Для вычисления определенного интеграла в правой части этой формулы воспользуемся подстановкой

$$x = r\sin t,$$

Тогда

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t, \quad dx = r\cos t\, dt.$$

Полагая в равенстве $x = r\sin t$ сначала $x = 0$, а затем $x = r$, мы получим уравнения

$$r\sin t = 0 \quad \text{и} \quad r\sin t = r;$$

решив их, найдем пределы для интегрирования по новой переменной t: $t = 0$ — нижний предел, $t = \frac{\pi}{2}$ — верхний предел.

Следовательно,

$$\frac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{r^2}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi r^2}{4},$$

а вся площадь круга

$$S = \pi r^2.$$

§ 3. Интегрирование по частям

Пусть на отрезке $[a, b]$ функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b u(x)\, dv(x) = [u(x)\, v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\, du(x).$$

Действительно, так как при данных условиях

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

то uv есть первообразная для функции $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, непрерывной на отрезке $[a, b]$; поэтому, в силу формулы Ньютона — Лейбница, имеем

$$\int_a^b \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) dx = (uv)\Big|_a^b.$$

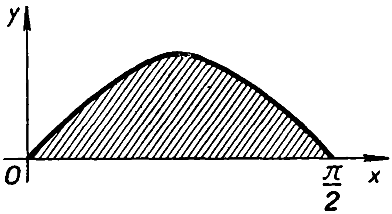
Пользуясь правилом интегрирования суммы, последнее равенство можно представить в виде

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = (uv)\Big|_a^b,$$

откуда и следует требуемое равенство

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Полученная формула выражает способ интегрирования по частям при вычислении определенных интегралов.



Черт. 86

Пример. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной кривой $y = x\cos x$ и отрезком $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox (черт. 86).

Решение.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$$

Для вычисления полученного интеграла применим способ интегрирования по частям. Положим.

$$u = x, \quad dv = \cos x\,dx.$$

Тогда

$$du = dx, \quad v = \sin x$$

Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{\pi}{2} - 1.$$

§ 4. Приближенное вычисление определенных интегралов

Если можно найти функцию $F(x)$, первообразную по отношению к непрерывной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, то мы можем вычислить точное значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Для этого достаточно воспользоваться формулой Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Однако первообразную часто бывает трудно найти, а иногда и нельзя ее выразить в элементарных функциях. В таких случаях формула Ньютона — Лейбница практически неприменима. Нельзя пользоваться этой формулой и тогда, когда подынтегральная функция получена опытным путем, как это часто бывает в технике, и выражается таблицей некоторых ее значений или графиком. Во всех этих случаях прибегают к приближенному вычислению определенных интегралов.

Рассмотрим простейшие способы такого вычисления.

С п о с о б   п р я м о у г о л ь н и к о в. По определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Отсюда следует, что за приближенное значение интеграла

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

можно взять интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

причем отклонение суммы σ от интеграла I будет сколь угодно мало, если только при составлении интегральной суммы σ отрезок $[a, b]$ был разбит на достаточно малые части.

Если нам известно, что числа

$$y_0, y_1, \ldots, y_n$$

есть значения функции $f(x)$ соответственно в точках

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

то эти точки и можно принять за точки разбиения отрезка $[a, b]$, а в качестве интегральной суммы взять

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k \text{ или } \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\,\Delta x_k.$$

Тогда получим приближенные формулы

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} y_k\,\Delta x_k \tag{1}$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Если значение функции $f(x)$ можно вычислить в любой точке отрезка $[a, b]$, то удобнее разбить отрезок $[a, b]$ на некоторое число n равных частей. Тогда $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ для всех k и приближенные формулы (1) и (2) примут вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \tag{1'}$$

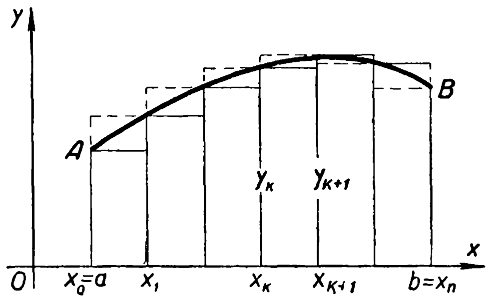
и

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \tag{2'}$$

Полученные здесь приближенные формулы имеют простой геометрический смысл.

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна и положительна, то $\int_a^b f(x)\,dx$ выражает площадь криволинейной трапеции $aABb$ (черт. 87), ограниченной графиком функции

$f(x)$, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. Правые же части приближенных формул представляют площади ступенчатых фигур, составленных из прямоугольников. Этим объясняется, что применение приближенных формул (1) и (2) или (1′) и (2′) называют приближенным вычислением определенных интегралов *способом прямоугольников*.



Черт. 87

Способ трапеций. Взяв за значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ среднее арифметическое правых частей приближенных формул (1) и (2), получим более точную формулу:

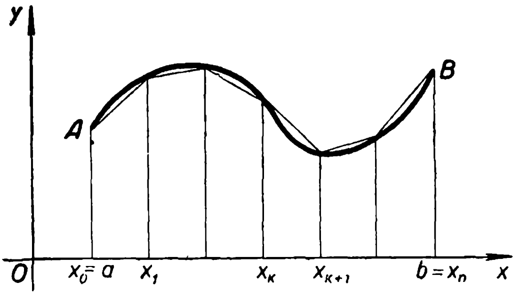
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \Delta x_k. \tag{3}$$

Способ приближенного вычисления определенного интеграла, выраженный формулой (3), называется *способом трапеций*, так как в случае непрерывной и положительной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ применение этой формулы означает замену площади криволинейной трапеции $aABb$ (черт. 88) площадью фигуры, состоящей из трапеций с основаниями y_k и y_{k+1} и с высотой Δx_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Если отрезок $[a, b]$ разделить на n равных частей, то формула (3) примет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \tag{3'}$$

Чтобы дать некоторое представление о том, насколько точные значения получаются при вычислении определенных интегралов способом прямоугольников и способом трапе-



Черт. 88

ций, применим соответствующие формулы для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, точное значение которого мы найдем по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \frac{3,141592\ldots}{4} = 0,785398\ldots$$

Разобьем отрезок [0, 1] на 10 равных частей. Тогда будем иметь:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y = \frac{1}{1+x^2}$	1,00	0,99	0,96	0,92	0,86	0,80	0,74	0,67	0,61	0,55	0,50

Следовательно, применяя способ прямоугольников, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(1,00+0,99+0,96+0,92+0,86+$$

$$+0,80+0,74+0,67+0,61+0,55) = 0,81 \quad [\text{формула } (1')],$$

или

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(0,99+0,96+\ldots+0,55+0,50)=0,76$$

[формула (2′)].

Мы видим, что полученные приближенные значения рассматриваемого интеграла отличаются от точного значения этого интеграла меньше, чем на 0,03.

Воспользовавшись способом трапеций [формулой (3′)], получим

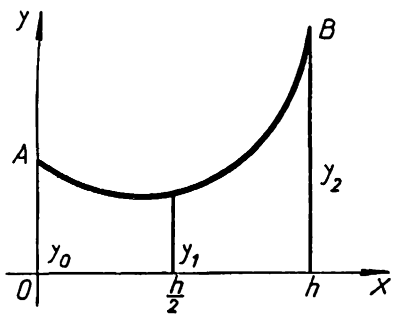
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1,00+0,50}{2}+0,99+0,96+\ldots+0,55\right)=0,782,$$

где два знака после запятой — верные.

Способ парабол. Предварительно вычислим интеграл

$$I=\int_0^h (ax^2+bx+c)\,dx = a\frac{x^3}{3}\Big|_0^h + b\frac{x^2}{2}\Big|_0^h + cx\Big|_0^h =$$

$$= a\frac{h^3}{3}+b\frac{h^2}{2}+ch=\frac{h}{6}(2ah^2+3bh+6c).$$



Черт. 89

Графиком подынтегральной функции является дуга AB параболы

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{4}$$

ось которой параллельна оси Oy (черт. 89).

Обозначим через y_0 и y_2 ординаты крайних точек дуги параболы, соответствующие $x = 0$ и $x = h$, а через y_1 — среднюю ординату, соответствующую $x = \frac{h}{2}$.

Из уравнения (4) находим

$$y_0 = y_{x=0} = c, \quad y_1 = y_{x=\frac{h}{2}} = \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c,$$
$$y_2 = y_{x=h} = ah^2 + bh + c.$$

Замечаем, что

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 3bh + 6c.$$

Поэтому

$$I = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{5}$$

Переходя к общему случаю, рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — произвольная функция на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2n$ (четное число) равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

и интеграл I представим в виде суммы

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx.$$

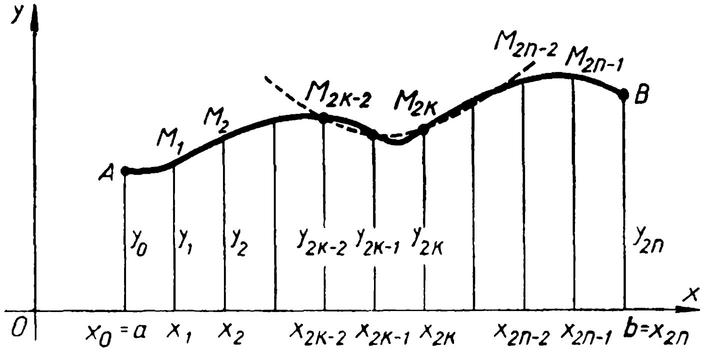
Через точки деления отрезка $[a, b]$ проведем прямые, параллельные оси Oy. Точки пересечения этих прямых с кривой $y = f(x)$ обозначим через

$$A, M_1, M_2, \ldots, M_{2n-2}, M_{2n-1}, B$$

(черт. 90), а ординаты этих точек — через

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}.$$

Через точки M_{2k-2}, M_{2k-1} и M_{2k} проведем параболу с вертикальной осью и обозначим через I_k приближенное значение интеграла $\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx$, которое мы получим, заменив дугу $M_{2k-2}M_{2k}$ кривой $y = f(x)$ соответствующей дугой этой параболы*.



Черт. 90

Так как длина отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ равна $\frac{b-a}{n}$, то, согласно формуле (5),

$$I_k = \frac{b-a}{6n}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}). \tag{6}$$

Полагая в формуле (6) $k = 1, 2, \ldots, n$ и складывая, мы получим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + $$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})],$$

которая будет приближенным значением интеграла I. Таким образом, мы имеем приближенную формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})]. \tag{7}$$

Формула (7) называется *формулой Симпсона*.

* Через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести параболу $y = ax^2 + bx + c$

Приближенное вычисление интегралов способом парабол, то есть по формуле Симпсона, дает более точные результаты, чем вычисление способом прямоугольников или способом трапеций*.

Так, например, для интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле Симпсона мы получим гораздо более точное значение даже при делении отрезка интеграции на 4 части, чем по формулам прямоугольников и трапеций при делении отрезка $[0, 1]$ на 10 частей.

В самом деле, мы имеем:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1,$$

$$y_0 = 1,\ y_1 = \frac{16}{17},\ y_2 = \frac{4}{5},\ y_3 = \frac{16}{25},\ y_4 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, по формуле Симпсона

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{6\cdot 2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{16}{17}+\frac{16}{25}\right)+2\cdot\frac{4}{5}\right].$$

Вычисляя с шестью знаками, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}[1{,}500000+4(0{,}941177+0{,}640000)+1{,}600000] =$$

$$= \frac{9{,}424708}{12} \approx 0{,}785392,$$

где пять знаков после запятой верные.

---

* Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет ограниченную производную второго порядка, то погрешность формулы (3′), выражающей способ трапеций, не превосходит

$$\frac{h^2(b-a)}{12} M_2,$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, а M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет ограниченную производную четвертого порядка, то погрешность формулы Симпсона не превышает

$$\frac{h^4(b-a)}{180} M_4,$$

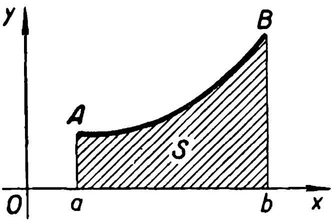
где $h = \frac{b-a}{2n}$, а M_4 — наибольшее значение $|f^{(4)}(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

ГЛАВА IV

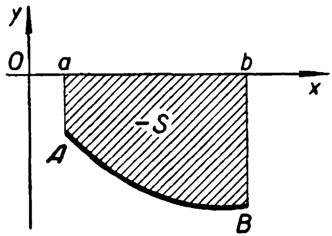
ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах

Применение определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, заданных в прямоугольной системе координат, основано на том, что определенный интеграл по отрезку $[a, b]$ от непрерывной неотрицательной



Черт. 91



Черт. 92

функции $f(x)$ выражает площадь S криволинейной трапеции $aABb$ (черт. 91), ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx,$$

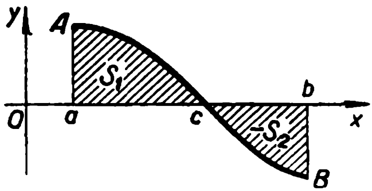
или

$$S = \int_a^b y\,dx. \qquad (I)$$

Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ отрицательна, то $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. Поэтому, когда кривая $y = f(x)$ расположена под осью Ox, площадь S соответствующей криволинейной трапеции (черт. 92) выразится формулой

$$S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|.$$

Когда же кривая $y = f(x)$ пересекает отрезок $[a, b]$ в одной или нескольких точках, тогда интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ выражает разность, которая получится, если из площади S_1 части криволинейной трапеции, расположенной над осью Ox, вычесть площадь S_2 другой части, расположенной под осью Ox:



Черт. 93

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2.$$

В этом случае, чтобы получить всю площадь $S = S_1 + S_2$ криволинейной трапеции, надо отрезок $[a, b]$ разбить на части точками пересечения кривой с осью абсцисс, отдельно вычислить интегралы по частичным отрезкам и сложить абсолютные величины полученных результатов.

Так в случае, изображенном на чертеже 93,

$$S = S_1 + S_2 =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|.$$

Если кривая AB задана в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то площадь S криволинейной трапеции $aABb$ (черт. 91) мы выразим по формуле (I), а затем интеграл преобразуем, пользуясь правилом замены переменной под знаком определенного интеграла:

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

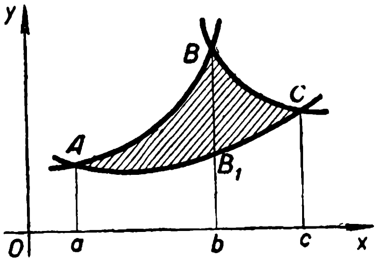
где α и β определяются из условий

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta).$$

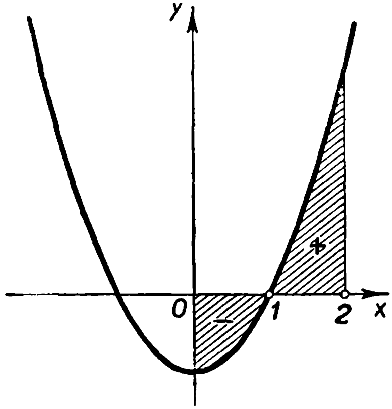
Когда плоская фигура, площадь которой требуется вычислить, не является криволинейной трапецией, тогда стараются выразить искомую площадь как алгебраическую сумму площадей некоторых криволинейных трапеций.

Так, например, для площади S фигуры, изображенной на чертеже 94, получим:

$$S = S_{aABb} + S_{bBCc} - S_{aAB_1Cc}.$$



Черт. 94



Черт. 95

Следовательно, если кривые AB, BC и AC даны соответственно уравнениями

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

то, вычислив абсциссы a, b, c точек пересечения этих кривых A, B, C, можем написать:

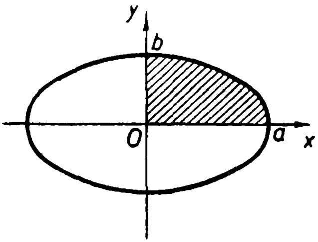
$$S = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c \varphi(x)\,dx - \int_a^c \psi(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 1$, прямой $x = 2$ и осями координат.

Решение. Изобразив данную фигуру (черт. 95), видим, что

$$S = \left| \int_0^1 (x^2 - 1)\,dx \right| + \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx =$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_0^1 \right| + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^2 = \left| -\frac{2}{3} \right| + \frac{4}{3} = 2.$$



Черт. 96

Пример 2. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом:

$$x = a\cos t,$$
$$y = b\sin t.$$

Решение. Искомая площадь S равняется учетверенной площади той части данной области, которая находится в первом квадранте (черт. 96). Поэтому

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

УПРАЖНЕНИЯ

40. Найти площадь фигуры, ограниченной гипоциклоидой

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

41. Найти площадь области, содержащейся между линиями

$$y = x^3, \quad x + y = 2 \quad \text{и} \quad y = 0.$$

42. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной дугой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

§ 2. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах

Рассмотрим *криволинейный сектор OABO* (черт. 97), ограниченный кривой, заданной уравнением в полярных координатах

$$\varrho = f(\theta).$$

где $f(\theta)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, и полупрямыми, исходящими из полюса O, уравнения которых $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$.

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на элементарные части точками

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_k < \ldots < \theta_n = \beta.$$

Обозначим через m_k и M_k соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(\theta)$ на отрезке $[\theta_k, \theta_{k+1}]$. (Они существуют в силу непрерывности $f(\theta)$.)

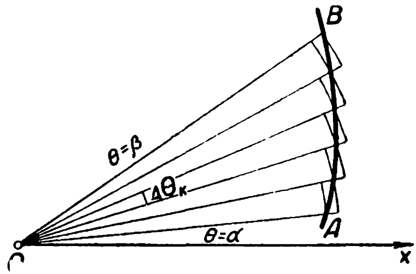
Прямыми

$$\theta = \theta_1, \quad \theta = \theta_2, \ \ldots, \ \theta = \theta_k, \ \ldots, \ \theta = \theta_{n-1}$$

разобьем дугу AB на элементарные дуги, а сектор $OABO$ — на элементарные секторы. Затем радиусами, равными m_k и M_k, построим элементарные круговые секторы для каждого центрального угла

$$\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k.$$

Тогда мы получим две ступенчатые фигуры, площади которых можно вычислить по правилам элементарной геометрии, так как они состоят из круговых секторов.



Черт. 97

Одна ступенчатая фигура будет содержаться в криволинейном секторе $OABO$. Ее площадь обозначим через S_*. Другая ступенчатая фигура будет содержать криволинейный сектор. Обозначим ее площадь через S^*.

Отсюда видно, что будет вполне естественным определить площадь S криволинейного сектора $OABO$ как общий предел площадей S_* и S^* ступенчатых фигур при $\Delta\theta \to 0$, где $\Delta\theta$ — наибольшее из $\Delta\theta_k$, если только такой предел существует*.

Рассмотрим S_* и S^*.

Так как площади элементарных круговых секторов для центрального угла $\Delta\theta_k$ равны соответственно

$$\frac{1}{2} m_k^2 \Delta\theta_k \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} M_k^2 \Delta\theta_k,$$

* Можно показать, что площадь криволинейного сектора в этом смысле совпадает с тем, что получится, если ее рассматривать на основе определения площади криволинейной трапеции.

то

$$S_* = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2\Delta\theta_k, \quad S^* = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2\Delta\theta_k$$

Мы видим, что S_* и S^* являются суммами Дарбу для непрерывной функции $\frac{1}{2}\,[f(\theta)]^2$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, поэтому

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} S_* = \lim_{\Delta\theta\to 0} S^* = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\,d\theta.$$

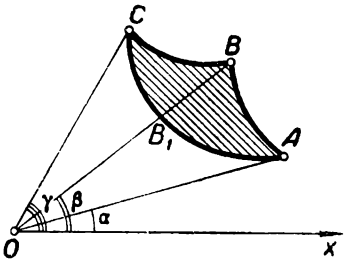
Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\,d\theta.$$

или

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2\,d\theta. \qquad (11)$$

Когда требуется вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной несколькими линиями, уравнения которых даны в полярных координатах, но данная фигура не является сектором, тогда искомую площадь стараются выразить как алгебраическую сумму площадей некоторых секторов.



Черт. 98

Так, например, для площади S фигуры, изображенной на чертеже 98, имеем

$$S = S_{OABO} + S_{OBCO} - S_{OAB_1CO}.$$

Поэтому, если кривые AB, BC и AC даны соответственно уравнениями

$$\varrho = f(\theta), \quad \varrho = \varphi(\theta), \quad \varrho = \psi(\theta),$$

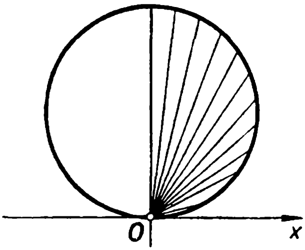
то, вычислив полярные углы α, β и γ для точек пересечения этих кривых A, B и C, мы можем написать:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_\beta^\gamma [\varphi(\theta)]^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_\alpha^\gamma [\psi(\theta)]^2\,d\theta.$$

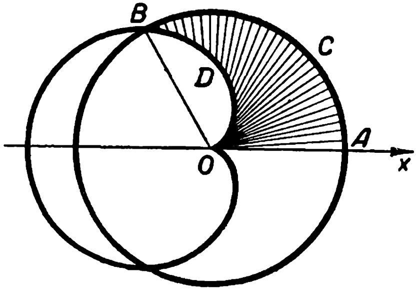
Пример. Вычислить площадь круга, ограниченного окружностью

$$\varrho = 2r \sin \theta.$$

Решение. Изобразив окружность по данному уравнению, мы видим (черт. 99), что для получения искомой площади S достаточно вычислить площадь полукруга справа от вертикального диаметра и затем результат удвоить.



Черт. 99



Черт. 100

Полукруг можно рассматривать как криволинейный сектор; поэтому его площадь можно вычислить по формуле (II). Следовательно,

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 \, d\theta = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) \, d\theta =$$

$$= 2r^2 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varrho = 1 - \cos \theta, \quad 2\varrho = 3 \quad \text{и} \quad \theta = 0.$$

Решение. Изобразив линии, соответствующие данным уравнениям, мы видим, что требуется вычислить площадь фигуры $OABO$ (черт. 100).

Решая первые два уравнения совместно, находим, что в точке B, в которой пересекаются кривые, полярный угол равен $\frac{2\pi}{3}$.

Рассматривая искомую площадь S как разность площадей секторов $OACBO$ и $ODBO$, получим

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{9}{4}d\theta-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta=$$

$$=\frac{9}{8}\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi}d\theta-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=$$

$$=\frac{9}{8}\theta\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi}-\frac{3}{4}\theta\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi}+\sin\theta\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi}-\frac{\sin 2\theta}{8}\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi}=$$

$$=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{16}=\frac{\pi}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

43. Вычислить площадь одной петли кривой

$$\varrho=a\cos 2\theta.$$

44. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\varrho=a(1+\sin\theta).$$

45. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varrho=2-\cos\theta$$

и

$$\varrho=\cos\theta.$$

§ 3. Вычисление объемов

Если тело представляет цилиндр, основанием которого является какая угодно плоская фигура, имеющая площадь S, то объем V данного тела определяется формулой

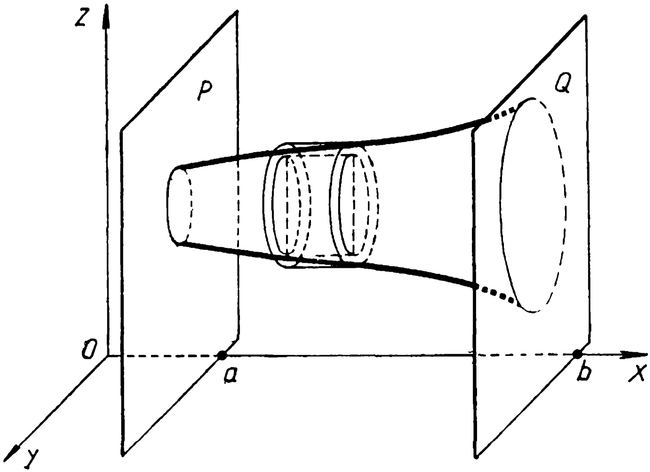
$$V=SH,$$

где H — высота цилиндра.

Это — естественное распространение на более общий случай определения и формулы объема, которые даются в элементарной геометрии для круглого цилиндра.

Рассмотрим тело, ограниченное произвольной замкнутой поверхностью.

Будем рассекать данное тело плоскостями, перпендикулярными к оси Ox (черт. 101). Площадь сечения тела плоскостью, проходящей через точку x оси Ox, будет функцией от x. Обозначим ее через $S(x)$. Пусть при изменении x она изменяется непрерывно.



Черт. 101

Обозначим через a и b точки пересечения оси Ox с плоскостями P и Q (перпендикулярными к оси Ox), между которыми зажато данное тело.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Обозначим через m_k и M_k соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $S(x)$ на элементарном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, которые существуют в силу непрерывности $S(x)$.

Плоскостями $x = x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ разобьем данное тело на элементарные части — слои. Выделим элементарный слой, соответствующий отрезку $[x_k, x_{k+1}]$.

На плоскость $x = x_k$ спроектируем сечения, площади которых равны m_k и M_k. Пусть данное тело такое, что одна проекция содержится в другой.

Взяв полученные проекции за основания, а отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ за высоту, построим два прямых цилиндра. Один из этих цилиндров будет содержаться в выделенном слое, а другой — содержать этот слой. Объемы цилиндров равны соответственно $m_k \Delta x_k$ и $M_k \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Построив такие цилиндры для каждого слоя, получим два ступенчатых тела, одно из которых содержится в данном теле и имеет объем

$$V_* = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k,$$

а другое — содержит данное тело и имеет объем

$$V^* = \sum_{k=1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

Естественно определить объем V данного тела как общий предел объемов V_* и V^* ступенчатых тел при неограниченном возрастании числа n элементарных слоев и стремлении к нулю наибольшей высоты Δx этих слоев:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_* = \lim_{\Delta x \to 0} V^*,$$

если только такой предел существует.

Но в рассматриваемом случае такой предел действительно существует, так как V_* и V^* являются суммами Дарбу для непрерывной функции $S(x)$, для которой

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (111)$$

Заметим, что для непрерывной функции $S(x)$

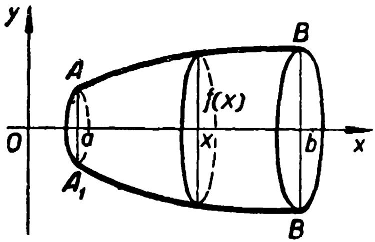
$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} S(x_k)\,\Delta x_k;$$

поэтому принятое определение объема V данного тела можно заменить другим, положив

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} S(x_k)\Delta x_k,$$

где $\sum\limits_{k=0}^{n-1} S(x_k)\Delta x_k$ есть объем ступенчатого тела, которое получится если элементарный слой, соответствующий отрезку $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), заменить прямым цилиндром, имеющим то же основание с площадью $S(x_k)$ и ту же высоту Δx_k.

Это второе определение объема мы примем для любого тела, для которого площадь сечения рассмотренного здесь вида выражается непрерывной функцией $S(x)$.



Черт. 102

Рассмотрим частный случай. Пусть дана кривая уравнением

$$y = f(x).$$

Будем вращать вокруг оси Ox криволинейную трапецию $aABb$ (черт. 102), соответствующую дуге данной кривой с концами в точках $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. Тогда получим некоторое тело, которое называется *телом вращения*.

Заметим, что в этом случае сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и соответствующей абсциссе x, будет круг с площадью

$$S(x) = \pi\,[f(x)]^2.$$

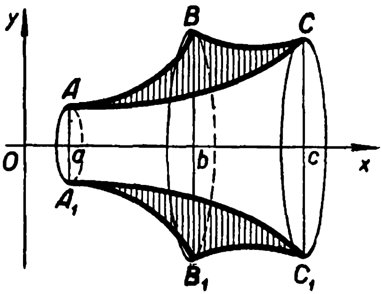
Следовательно, объем V полученного тела вращения выразится формулой

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx,$$

или

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx \qquad \text{(IV)}$$

Если требуется найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, которая не представляет криволинейную трапецию, то искомый объем стараются выразить как алгебраическую сумму объемов тел, полученных вращением трапеций.



Черт. 103

Так, например, для объема V тела, изображенного на чертеже 103, имеем

$$V = V_{aABb} + V_{bBCc} - V_{aACc}.$$

Следовательно, если кривые AB, BC и AC даны соответственно уравнениями

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x),$$
$$y = \psi(x),$$

то, вычислив абсциссы a, b и c точек пересечения этих кривых A, B и C, можем написать:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx + \pi \int_b^c [\varphi(x)]^2\,dx - \pi \int_a^c [\psi(x)]^2\,dx.$$

Пример 1. Найти объем V пирамиды, площадь основания которой есть Q, а высота равна H.

Решение. Вершину данной пирамиды примем за начало координат и ось Ox направим по высоте (черт. 104). Через $S(x)$ обозначим площадь сечения пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox (следовательно, параллельной основанию пирамиды) и отстоящей от начала координат, то есть от вершины, на расстоянии, равном x.

Из элементарной геометрии известно, что площади основания пирамиды и ее сечения, параллельного основанию, относятся как квадраты их расстояний от вершины. Следовательно,

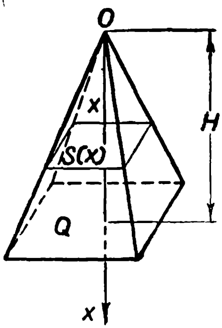
$$\frac{Q}{S(x)} = \frac{H^2}{x^2},$$

откуда находим $$S(x) = \frac{Q}{H^2}x^2.$$

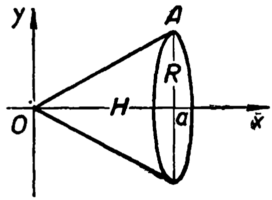
Полученная формула выражает площадь сечения $S(x)$ как непрерывную функцию от x, поэтому для вычисления объема данной пирамиды мы можем воспользоваться формулой (III):

$$V = \int_0^H S(x)\,dx = \int_0^H \frac{Q}{H^2} x^2\,dx = \frac{Q}{H^2} \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = Q\frac{H}{3}.$$

Таким образом, общий метод вычисления объемов при помощи интегрирования, примененный к элементарной задаче об объеме пирамиды, дает тот же результат, что и элементарная геометрия:



Черт. 104



Черт 105

Объем пирамиды равен произведению площади ее основания на треть ее высоты.

Пример 2. Найти объем V кругового конуса, радиус основания которого равен R, а высота равна H.

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат xOy, поместив начало в вершине и направив ось Ox по высоте конуса (черт. 105)

Тогда уравнение образующей конуса будет

$$y = \frac{R}{H} x.$$

Данный конус мы можем рассматривать как тело, полученное вращением вокруг оси Ox треугольника OAa. Поэтому для вычисления искомого объема V мы можем воспользоваться формулой (IV):

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \pi R^2 \frac{H}{3} = Q\frac{H}{3},$$

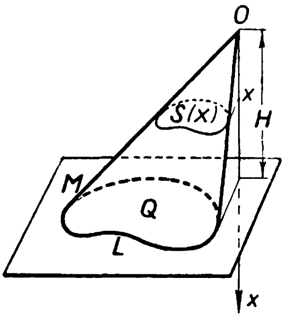
где Q — площадь основания данного конуса

Полученный здесь путем интегрирования результат опять согласуется с выводом элементарной геометрии:

Объем конуса равен произведению площади его основания на треть его высоты.

В следующих задачах мы встретим такие тела, объемы которых не могут быть вычислены при помощи элементарной геометрии, но вычисляются, причем довольно просто, общим методом, основанным на интегрировании.

Пример 3. Найти объем тела, ограниченного плоской фигурой Q и конической поверхностью, которая образуется движением прямой, проходящей через точку O вне плоскости Q и точку M на замкнутом контуре L, заключающем Q, когда точка M описывает контур L.



Черт. 106

Решение. Данное тело будем называть конусом. Таким образом, круговой конус представляет частный случай конуса в том смысле, в каком мы его понимаем здесь. Следует заметить, что и пирамиду мы можем рассматривать как частный случай конуса в этом смысле. Поэтому данная задача является обобщением задач, рассмотренных нами в предыдущих двух примерах.

Пусть основание конуса — фигура Q — имеет площадь, которую обозначим тоже через Q. Высоту конуса — расстояние от вершины O до плоскости, в которой лежит основание Q, обозначим через H.

Вершину O примем за начало координат и ось Ox направим по высоте конуса (черт. 106).

Обозначим через $S(x)$ площадь сечения данного конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox (следовательно, параллельной плоскости основания Q) и отстоящей от начала координат — вершины конуса O — на расстоянии, равном x.

Так как для произвольного конуса так же, как для пирамиды, площади основания и сечения, параллельного основанию, относятся как квадраты их расстояний от вершины, имеем

$$\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2}.$$

Отсюда находим

$$S(x)=\frac{Q}{H^2}x^2.$$

Поэтому, согласно формуле (III), данный конус имеет объем, равный

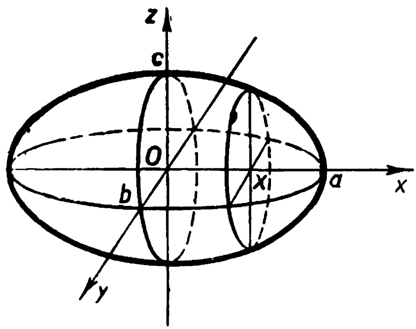
$$V=\int_0^H S(x)\,dx=\frac{Q}{H^2}\int_0^H x^2\,dx=\frac{Q}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=Q\frac{H}{3}.$$

Следовательно, *объем произвольного конуса равен произведению площади его основания на треть его высоты.*

Теперь понятно, почему элементарная геометрия дает одну и ту же формулу

$$V=Q\frac{H}{3}$$

как для объема пирамиды, так и для объема кругового конуса: пирамида и круговой конус представляют, как уже было отмечено, частные случаи конуса в более общем понимании.



Черт. 107

Пример 4. Найти объем V эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение. В сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и соответствующей абсциссе x, получим эллипс

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

(черт. 107), полуоси которого равны

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

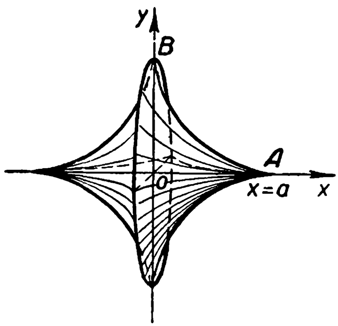
Следовательно, площадь $S(x)$ сечения выразится формулой

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

(см. пример 2, § 1). Пользуясь формулой (III), получим

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Пример 5. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной гипоклоидой



Черт. 108

$$x=a\cos^3 t,$$
$$y=a\sin^3 t.$$

Решение. Искомый объем V равен удвоенному объему, полученному вращением фигуры OAB (черт. 108). Поэтому

$$V=2\pi\int_0^a y^2\,dx.$$

Пользуясь уравнениями кривой для замены переменной в определенном интеграле, получим

$$V=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a^2\sin^6 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt=$$

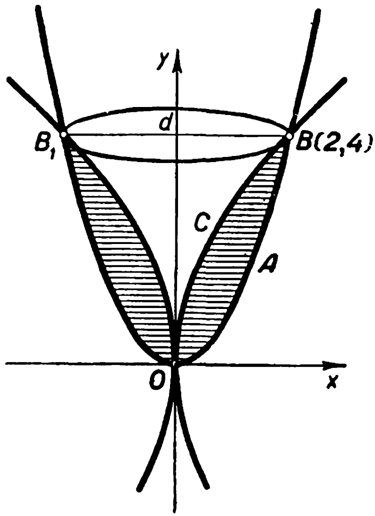
$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t\,dt=-6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\;d\cos t=$$

$$=-6\pi a^3\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{3\cos^5 t}{5}+\frac{3\cos^7 t}{7}-\frac{\cos^9 t}{9}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=6\pi a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=\frac{32\pi a^3}{105}.$$

Пример 6. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболами

$$y = x^2 \quad \text{и} \quad 8x = y^2.$$



Черт. 109

Решение. Из чертежа 109 видно, что V равен разности объемов V_{OABd} и V_{OCBd}, полученных вращением вокруг оси Oy криволинейных трапеций $OABd$ и $OCBd$.

Эти объемы выражаются интегралом $\pi \int\limits_0^d x^2 dy$, где x надо заменить его значением, выраженным через y из уравнения соответствующей кривой.

Следовательно,

$$V = \pi \int\limits_0^4 y\,dy - \pi \int\limits_0^4 \frac{y^4}{64} dy = \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 - \pi \frac{y^5}{64\cdot 5}\Big|_0^4 = \frac{24}{5}\pi.$$

УПРАЖНЕНИЯ

46. Найти обьем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной осью Ox и одной дугой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

47. Найти объем кольца (тора), производимого вращением вокруг оси Ox круга $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b > a)$.

48. Найти объем, полученный вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = x^3, \quad x + y = 2 \quad \text{и} \quad x = 0.$$

§ 4. Спрямление кривых

В элементарной математике рассматривается измерение прямых отрезков и дуг окружностей. Для произвольных кривых понятие длины дуги и способ ее вычисления устанавливаются в математическом анализе при помощи перехода к пределу, а это приводит к интегрированию.

Плоской кривой называется множество точек плоскости, координаты x и y которых определяются уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{1}$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции на отрезке $[t_0, T]$.

К определению длины кривой мы придем следующим путем, вполне естественным и исходящим из понятия длины отрезка прямой.

Пусть нам дана кривая уравнениями (1).

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на n частей точками

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = T.$$

Обозначим через M_k точку кривой, где $t = t_k$. Образуем вписанную ломаную, вершинами которой будут точки кривой

$$M_0, M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_n.$$

Длину хорды $M_k M_{k+1}$ (k-го звена ломаной) обозначим через c_k. Тогда

$$p_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

есть периметр построенной ломаной.

Положим $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ и обозначим через Δt наибольшее из всех Δt_k.

Будем неограниченно увеличивать число n элементарных частей отрезка $[t_0, T]$, а тем самым и число звеньев ломаной так, чтобы Δt, а значит, и длины всех звеньев ломаной стремились к нулю.

Если при $\Delta t \to 0$ периметр p_n вписанной в кривую ломаной стремится к определенному пределу, то кривая называется *спрямляемой*, а

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} p_n$$

— *длиной кривой*.

Рассмотрим сначала кривую AB, заданную уравнением

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{2}$$

(Здесь за параметр взята абсцисса x точки кривой.)

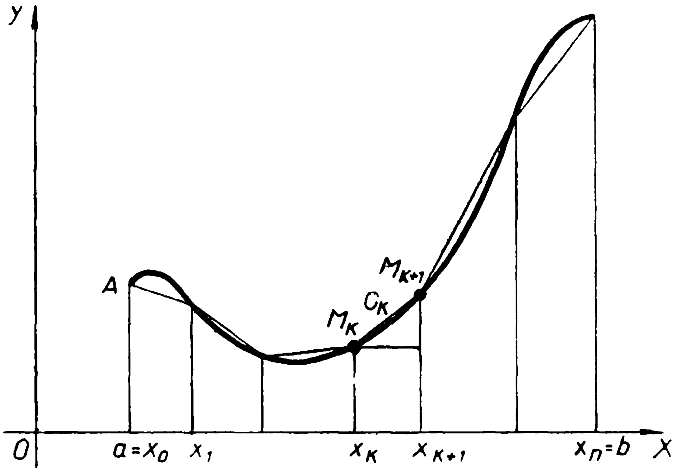
Докажем, что если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то кривая AB спрямляема.

Действительно, разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b$$

на элементарные отрезки $[x_k, x_{k+1}]$. Затем построим вписанную ломаную, вершинами которой будут точки кривой

$$A = M_0(x_0, f(x_0)),\ M_1(x_1, f(x_1)),\ \ldots,$$
$$M_k(x_k, f(x_k)),\ \ldots,\ M_n(x_n, f(x_n)) = B.$$



Черт. 110

Периметр ломаной равен

$$p_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k,$$

где c_k — длина хорды M_kM_{k+1}, причем (черт. 110)

$$c_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

Но по теореме Лагранжа,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k) f'(\xi_k),$$

где ξ_k — некоторая точка отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ Поэтому

$$p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\, \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k)$$

Сумма $\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k$ есть интегральная сумма для непрерывной функции $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ на отрезке $[a, b]$; поэтому имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} p_n = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Следовательно, кривая AB спрямляема, и ее длина s выражается формулой

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

или

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{V}$$

Пусть кривая AB задана в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на отрезке $[t_0, T]$.

Тогда

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

и, согласно формуле (V),

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

или

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt. \tag{VI}$$

Пусть кривая AB задана уравнением в полярных координатах

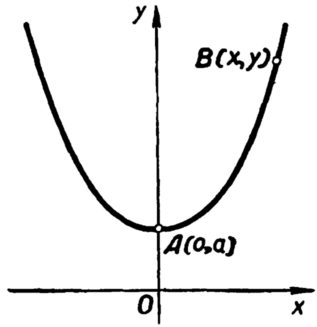
$$\varrho = f(\theta), \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \tag{3}$$

где $f(\theta)$ имеет непрерывную производную $f'(\theta)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Чтобы найти длину кривой AB, сначала мы выразим ее в параметрической форме. С этой целью возьмем уравнения $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \sin\theta$, связывающие прямоугольные и полярные координаты точек плоскости, и вместо ϱ в этих уравнениях подставим функцию $f(\theta)$. Полученные уравнения

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta \qquad (3')$$

и будут выражать кривую (3) в параметрической форме.



Черт. 111

Из уравнений (3′) дифференцированием найдем

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

Возводя в квадрат обе части каждого из этих равенств и складывая, получим

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2.$$

Следовательно, согласно формуле (VI),

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta,$$

или, что то же,

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\, d\theta. \qquad \text{(VII)}$$

Пример 1. Вычислить длину s цепной линии

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

от точки A (0, a) до точки B (x, y) (черт. 111).

Решение. Из уравнения цепной линии находим

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Поэтому

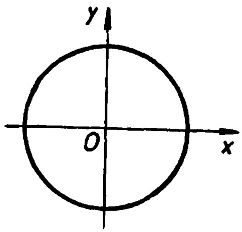
$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Следовательно, по формуле (V),

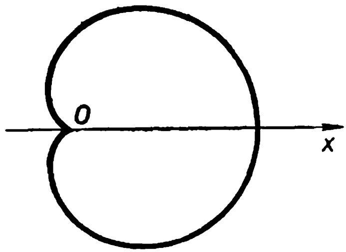
$$s=\frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

П р и м е р 2. Вычислить длину окружности

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t.$$



Черт. 112



Черт. 113

Р е ш е н и е. Учитывая, что данная окружность (черт. 112) симметрична относительно осей координат, по формуле (VI), получим

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4r\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=4rt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi r.$$

Таким образом, здесь общий метод спрямления кривых при помощи интегрирования дает тот же результат, что и элементарная геометрия:

$$s=2\pi r.$$

П р и м е р 3. Вычислить длину s кардиоиды

$$\varrho=a(1+\cos\theta)\quad (\text{черт. } 113).$$

Р е ш е н и е. Из уравнения кардиоиды находим

$$\frac{d\varrho}{d\theta}=-a\sin\theta.$$

Учитывая, что кривая симметрична относительно полярной оси, по формуле (VII), получим

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

УПРАЖНЕНИЯ

19. Вычислить длину гипоциклоиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

50. Вычислить длину одной дуги циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

51. Вычислить всю длину кривой

$$\rho = a\sin^3\frac{\theta}{3}.$$

§ 5. Дифференциал длины дуги кривой

В предыдущем параграфе было установлено, что если кривая AB задана уравнением

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $f(x)$ обладает непрерывной производной $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то она спрямляема и ее длина s выражается формулой

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Рассмотрим дугу AM данной кривой от точки A до переменной точки $M(x, f(x))$. Длина этой дуги будет функцией от x и выразится формулой

$$s(x)=\int_a^x \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Так как подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, когда на этом отрезке непрерывна $f'(x)$, то имеем

$$s'=\frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

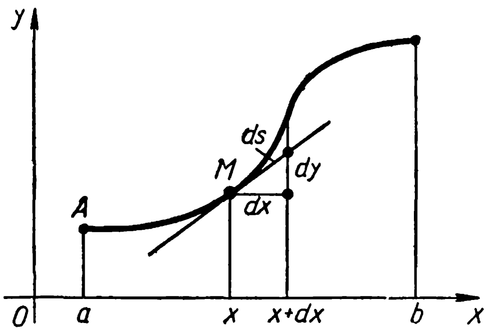
или

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Отсюда мы получим формулу *дифференциала длины дуги*:

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \quad \text{или} \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Из этой формулы нетрудно усмотреть геометрический смысл дифференциала длины дуги кривой (черт. 114).



Черт. 114

В том случае, когда кривая задана в параметрической форме

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

или уравнением в полярных координатах

$$\varrho=f(\theta),$$

мы получим соответственно

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

или

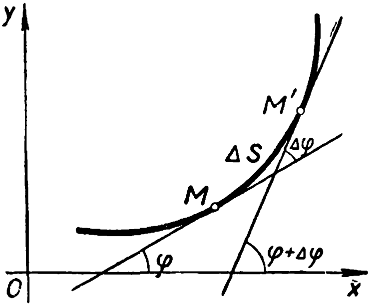
$$ds = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\, d\theta.$$

§ 6. Кривизна плоской кривой

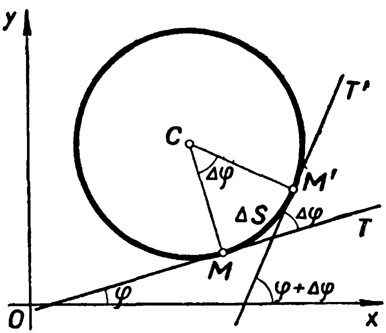
Пусть к данной кривой можно провести касательную в каждой точке дуги MM' (черт. 115).

Отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, где $\Delta\varphi$ есть величина угла (в радианах), на который поворачивается касательная к данной кривой, когда точка касания проходит дугу $\overset{\smile}{MM'}$, а Δs — длина дуги $\overset{\smile}{MM'}$, называется *средней кривизной* дуги $\overset{\smile}{MM'}$ данной кривой.

Предел средней кривизны дуги $\overset{\smile}{MM'}$ данной кривой, когда точка M' стремится по кривой к точке M, называется *кривизной кривой в точке* M.



Черт. 115



Черт. 116

Таким образом, обозначая кривизну кривой в точке M через K, имеем, по определению,

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Пример 1. Найти кривизну окружности радиуса R.

Решение. Проведем в концах дуги MM' данной окружности касательные MT и $M'T'$ (черт. 116).

Они перпендикулярны к радиусам CM и CM', поэтому угол $\Delta\varphi$ между касательными MT и $M'T'$ равен центральному углу MCM', радианная величина которого есть $\frac{\Delta s}{R}$, где Δs — длина дуги MM'.

Следовательно, угол поворота касательной к окружности, когда точка касания перемещается от M до M', есть

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta s}{R},$$

а средняя кривизна дуги $\overset{\frown}{MM'}$ равна

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s}=\frac{1}{R}.$$

Как видим, средняя кривизна любой дуги окружности одна и та же и равна $\frac{1}{R}$. Переходя к пределу при $\Delta s\to 0$, получим кривизну K окружности в любой ее точке:

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{1}{R}.$$

Таким образом, кривизна K окружности одна и та же во всех ее точках и равна величине, обратной радиусу R окружности:

$$K=\frac{1}{R}.$$

Полученный результат служит подтверждением того, что понятие кривизны кривой определено вполне естественно и согласуется с нашим интуитивным представлением кривизны: чем меньше радиус окружности, тем более «искривленной» представляется нам дуга окружности.

Учитывая, что по характеру кривизны окружность является наиболее простой кривой, принято другие кривые сравнивать с окружностью. С этой целью вводят понятие радиуса кривизны кривой.

Радиус окружности, кривизна которой равна кривизне данной кривой в некоторой ее точке, называется *радиусом кривизны* кривой в этой точке.

Из этого определения следует, что *радиус кривизны R кривой в данной точке есть величина, обратная кривиз-*

не K этой кривой в той же точке:

$$R=\frac{1}{K}.$$

Не всегда можно легко вычислить кривизну, пользуясь непосредственно определением этого понятия. Для целей практики надо вывести формулы, выражающие кривизну кривой при различных способах задания кривой.

Пусть кривая дана уравнением

$$y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

где $f(x)$ — функция, имеющая на отрезке $[a, b]$ производные первого и второго порядка.

Обозначим через φ угол наклона к положительному направлению оси Ox касательной, проведенной к данной кривой в точке с абсциссой x. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(x), \quad \varphi = \operatorname{arctg} f'(x),$$

$$d\varphi=\frac{f''(x)}{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Известно, что

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Следовательно, кривизна данной кривой

$$K=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{f''(x)}{1+[f'(x)]^2}dx:\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\frac{f''(x)}{\{1+[f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

или

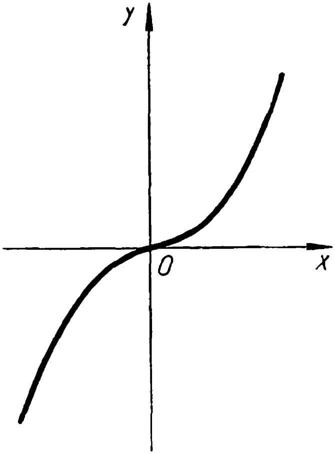
$$K=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

Если в этой формуле условимся брать радикал со знаком плюс, то знак K будет совпадать со знаком $\frac{d^2y}{dx^2}$. Поэтому в данной точке кривизна кривой будет положительной, если в этой точке вогнутость кривой направлена вверх, и кривизна будет отрицательной, если вогнутость кривой направлена вниз.

Из формулы (1) видно, что в точке перегиба кривой, где

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

кривизна кривой равна нулю.



Черт. 117

Пример 2. Найти кривизну кубической параболы

$$y=x^3,$$

(черт. 117) в любой ее точке.

Решение. Для данной кривой в точке $M(x, y)$

$$y'=3x^2, \quad y''=6x,$$

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6x}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда видно, что в начале координат (в точке перегиба кривой) $K=0$; дальше кривизна кривой сначала возрастает, а затем, когда расстояние от начала до точки M неограниченно увеличивается, $K \to 0$.

Если кривая задана в параметрической форме

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

и поэтому

$$K=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}:\left\{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

или

$$K=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)$$

Пример 3. Найти кривизну эллипса

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t$$

в точке A $(a, 0)$.

Решение. Дифференцируя, находим:

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t,$$

$$\frac{dy}{dt}=b\cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-b\sin t.$$

Подставляя найденные результаты в формулу (2), получим кривизну в произвольной точке данного эллипса:

$$K=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда при значении $t=0$ получим кривизну эллипса в точке A $(a, 0)$:

$$K=\frac{a}{b^2}.$$

Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах

$$\varrho=f(\theta).$$

Тогда данную кривую можно выразить в параметрической форме:

$$x=f(\theta)\cos\theta, \qquad y=f(\theta)\sin\theta.$$

Отсюда находим:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=f''(\theta)\cos\theta-2f'(\theta)\sin\theta-f(\theta)\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=f''(\theta)\sin\theta+2f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta.$$

Подставляя все это в формулу (2), получим.

$$K=\frac{f^2(\theta)+2f'^2(\theta)-f(\theta)f''(\theta)}{[f^2(\theta)+f'^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}}.$$

или

$$K=\frac{\varrho^2+2\varrho'^2-\varrho\varrho''}{(\varrho^2+\varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Пример 4. Найти радиус кривизны спирали Архимеда

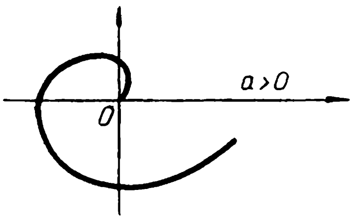
$$\varrho=a\theta$$

(черт. 118) в любой ее точке.

Решение. Дифференцируя, находим

$$\varrho'=a, \quad \varrho''=0.$$

Воспользовавшись формулой (3), получим кривизну данной кривой в произвольной точке:



Черт. 118

$$K=\frac{a^2\theta^2+2a^2}{(a^2\theta^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\theta^2+2}{a(\theta^2+1)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{\varrho^2+2a^2}{(\varrho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Следовательно, радиус кривизны спирали Архимеда в любой ее точке выражается формулой

$$R=\frac{(\varrho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2+2a^2}.$$

Чтобы отметить практическое значение понятия кривизны, укажем, что изменение кривизны кривой приходится учитывать, например, при прокладке железных дорог.

Дело здесь в том, что при движении поезда по криволинейному пути возникает центробежная сила, причем большая для тяжелого состава, идущего со значительной скоростью. Поэтому, когда железнодорожная линия должна на одном участке идти по прямой, а на другом — искривляться, чтобы изменить свое направление, тогда эти два участка должны быть соединены *переходной кривой*, имеющей нулевую кривизну в точке стыка с прямолинейным участком пути и кривизну криволинейного участка в точке стыка с этим участком.

Если бы прямолинейный участок сразу переходил, например, в дугу окружности, то в точке стыка этих участков центробежная сила возникала бы мгновенно, создавая сильный толчок, опасный для поезда и вредный для пути.

В качестве переходных кривых удобны дуги кубических парабол (см. пример 2).

УПРАЖНЕНИЯ

52. Переходная кривая на железнодорожной линии имеет форму кубической параболы

$$6y=x^3.$$

С какой скоростью вагон на этом участке пути изменяет свое направление, когда он проходит через точки $A\left(2, \frac{4}{3}\right)$ и $B\left(1, \frac{1}{6}\right)$? (За единицу длины принять километр.)

53. Найти радиус кривизны гипоциклоиды

$$x=a\cos^3 t$$
$$y=a\sin^3 t$$

в точке, где $t=\frac{\pi}{4}$.

54. Найти кривизну кардиоиды

$$\varrho=a(1-\cos\theta)$$

в любой ее точке.

§ 7. Площадь поверхности вращения

Рассмотрим спрямляемую кривую AB, расположенную над осью Ox (черт. 119).

Пусть кривая дана в параметрической форме:

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

где параметром s является длина дуги кривой от точки A до переменной точки M с координатами x и y.

Когда точка M описывает кривую AB, параметр s изменяется от 0 до числа l, равного длине всей кривой AB.

Функции $x(s)$ и $y(s)$ мы полагаем непрерывным на отрезке $[0, l]$.

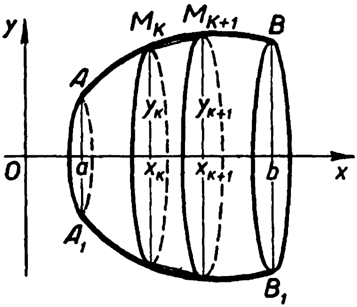
Если данную кривую вращать вокруг оси Ox, то получится некоторая поверхность, называемая *поверхностью вращения*.

Надо определить, что понимать под площадью такой поверхности.

С этой целью разобьем отрезок $[0, l]$ на элементарные части точками

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \ldots < s_n = l.$$

Обозначая через M_k точку кривой, соответствующую $s = s_k$, получим разбиение кривой AB на элементарные дуги M_kM_{k+1}.



Черт. 119

Длина дуги M_kM_{k+1} есть $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$. Наибольшее из Δs_k обозначим через Δs.

Соединяя последовательно точки деления кривой хордами M_kM_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, образуем вписанную в кривую AB ломаную.

Если вращать вокруг оси Ox вместе с кривой AB и построенную ломаную, то получится поверхность, площадь S_n которой можно вычислить по правилам элементарной геометрии, так как она состоит из боковых поверхностей усеченных конусов, образуемых вращением звеньев ломаной — хорд M_kM_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Докажем, что при $\Delta s \to 0$ величина S_n стремится к определенному пределу S, который и естественно принять за площадь поверхности вращения данной кривой.

Обозначим ординату точки M_k через y_k, а длину хорды M_kM_{k+1} — через c_k. Тогда площадь поверхности, образуемой хордой M_kM_{k+1}, будет равняться

$$\frac{2\pi y_k + 2\pi y_{k+1}}{2} c_k,$$

как площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого равны y_k и y_{k+1}, а для площади S_n поверхности, образуемой ломаной, получим:

$$S_n = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} c_k.$$

Это можно представить в виде

$$S_n = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \Delta s_k - 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} (\Delta s_k - c_k).$$

Можно заметить, что при $\Delta s \to 0$ вторая сумма в правой части последнего равенства имеет предел, равный нулю.

Действительно, функция $y = y(s)$, непрерывная на отрезке $[0, l]$, ограничена на этом отрезке, поэтому существует такое число $M > 0$, что

$$0 \leqslant y_k \leqslant M$$

для всех k. Отсюда

$$0 \leqslant 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} (\Delta s_k - c_k) < 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} M (\Delta s_k - c_k) =$$

$$= 2\pi M \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta s_k - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \right) = 2\pi M \left(l - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \right) \to 0$$

при $\Delta s \to 0$, так как

$$\lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} c_k = l.$$

Для преобразования первой суммы в выражении S_n заметим, что

$$\frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

является числом, содержащимся между двумя значениями y_k и y_{k+1} непрерывной функции $y = y(s)$, поэтому

$$\frac{y_k + y_{k+1}}{2} = y(\bar{s}_k),$$

где $\bar{s}_k \leqslant s_k \leqslant s_{k+1}$. Отсюда

$$2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \Delta s_k = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} y(\bar{s}_k) \Delta s_k.$$

Сумма в правой части последнего равенства есть интегральная сумма для непрерывной функции $y = y(s)$, поэтому имеем

$$\lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} y(\bar{s}_k) \Delta s_k = \int_0^l y(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta s \to 0} S_n = 2\pi \int_0^l y(s)\, ds.$$

Итак, по определению, *площадь S поверхности, образуемой вращением вокруг оси Ox спрямляемой кривой, есть предел площади поверхности, образуемой вращением вокруг оси Ox ломаной, вписанной в данную кривую, когда длина наибольшей из дуг, соответствующих звеньям ломаной, стремится к нулю, причем*

$$S = 2\pi \int_0^l y\, ds. \tag{VIII}$$

Если данная кривая AB выражена уравнением

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

или в общей параметрической форме

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant T$$

или, наконец, уравнением в полярных координатах

$$\varrho = F(\theta), \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,$$

то получим

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

$$S=2\pi\int_{t_0}^T y\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=2\pi\int_{t_0}^T \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \varrho\sin\theta\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_\alpha^\beta F(\theta)\sin\theta\sqrt{[F(\theta)]^2+[F'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

Именно эти формулы применяются на практике.

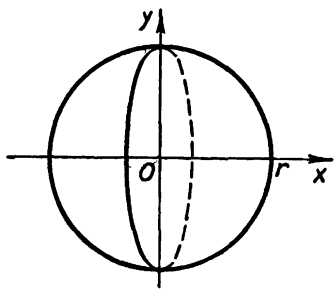
П р и м е р 1. Найти площадь поверхности шара радиуса r.

Р е ш е н и е. Искомая площадь S равна удвоенной площади поверхности, полученной вращением вокруг оси Ox 1-й четверти окружности (черт. 120)

$$x^2+y^2=r^2.$$

Поэтому

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^r y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$



Черт. 120

Из уравнения окружности находим

$$y'=-\frac{x}{y},$$

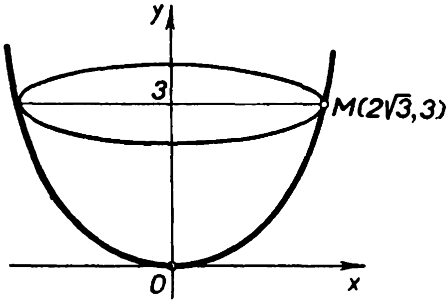
откуда

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{r}{y}.$$

Следовательно,

$$S=4\pi r\int_0^r dx=4\pi r x\Big|_0^r=4\pi r^2.$$

Полученный результат совпадает с известной формулой элементарной геометрии.



Черт. 121

Пример 2. Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси Oy дуги параболы

$$4y = x^2$$

от вершины до точки $M\ (2\sqrt{3},\ 3)$ (черт. 121).

Решение. Искомая площадь выразится формулой

$$S = 2\pi \int_0^3 x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

Из уравнения параболы находим:

$$2x\frac{dx}{dy} = 4, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2}{x},$$

откуда

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \frac{\sqrt{4y+4}}{x} = \frac{2\sqrt{y+1}}{x}.$$

Поэтому

$$S = 4\pi \int_0^3 \sqrt{y+1}\, dy = \frac{8}{3}\pi (y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{56}{3}\pi.$$

55. Найти площадь поверхности тора, производимого вращением круга $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b>a)$ вокруг оси Ox.

56. Вычислить площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси Oy гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

57. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox одной ветви циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

58. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\varrho=a(1+\cos\theta)$ вокруг полярной оси.

§ 8. Центр тяжести дуги

Многие приложения определенных интегралов в механике основаны на следующем подходе к решению задач.

Пусть та или иная задача механики решена для системы конечного числа материальных точек, а требуется решить подобную же задачу для сплошной массы, например тела. Тогда данную массу разбивают на части; рассматривают эти части как материальные точки и применяют правило решения задачи для конечной системы точек; затем переходят к пределу, разбивая данную массу на все более и более мелкие части. Это обычно приводит к интегралам, которые и выражают решение данной задачи.

Рассмотрим задачу об отыскании центра тяжести массы.

Если на плоскости xOy в точках

$$M_1\,(x_1,\ y_1),\quad M_2\,(x_2,\ y_2),\ \ldots,\ M_n\,(x_n,\ y_n)$$

сосредоточены массы соответственно

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n,$$

то центр тяжести — точка $C\,(\bar{x},\ \bar{y})$ — всей массы

$$m=m_1+m_2+\ldots+m_n$$

данной системы материальных точек определяется формулами:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{1}$$

Пусть требуется найти центр тяжести массы, распространенной вдоль спрямляемой кривой AB

$$x = x(s),$$
$$y = y(s),$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от точки A, и $x(s)$ и $y(s)$ непрерывны, когда s изменяется от 0 до числа l, равного длине кривой AB.

Для решения этой задачи поступаем следующим образом. Разобьем отрезок $[0, l]$ на части точками

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k < \ldots < s_n = l.$$

Обозначая через M_k точку кривой, соответствующую $s = s_k$, мы получим разбиение кривой AB на элементарные дуги M_kM_{k+1}. Массу дуги M_kM_{k+1} обозначим через Δm_k. Длина дуги M_kM_{k+1} равна $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$. Наибольшее из Δs_k обозначим через Δs.

Массу Δm_k будем считать сосредоточенной в точке M_k. Тогда мы получим систему n материальных точек

$$M_0, M_1 \ldots, M_k, \ldots, M_{n-1}$$

с массами соответственно

$$\Delta m_0, \Delta m_1, \ldots, \Delta m_k, \ldots, \Delta m_{n-1}.$$

Согласно формулам (1), центр тяжести этой системы материальных точек имеет координаты

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1} x(s_k)\,\Delta m_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \Delta m_k}, \quad \frac{\sum_{k=0}^{n-1} y(s_k)\,\Delta m_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \Delta m_k}.$$

Эти же числа мы можем принять за приближенные значения координат центра тяжести массы кривой AB, причем тем более точные, чем меньше Δs (чем мельче дробление кривой AB).

Отсюда ясно, что центр тяжести $C(\bar{x}, \bar{y})$ кривой AB можно определить при помощи формул

$$\bar{x} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x(s_k)\, \Delta m_k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta m_k}, \quad \bar{y} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} y(s_k)\, \Delta m_k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta m_k}. \quad (2)$$

Пусть линейная плотность массы, которая в общем случае меняется от точки к точке, есть $\mu(s)$*. Предположим, что функция $\mu(s)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$. Тогда мы имеем приближенное равенство $\Delta m_k \approx \mu(s_k)\, \Delta s_k$, которое тем более точно, чем меньше Δs_k. Поэтому формулы (2) можно заменить формулами

$$\bar{x} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x(s_k) \cdot \mu(s_k)\, \Delta s_k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu(s_k)\, \Delta s_k}, \quad \bar{y} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} y(s_k)\, \mu(s_k)\, \Delta s_k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu(s_k)\, \Delta s_k}.$$

Отсюда получим

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_0^l x(s)\, \mu(s)\, ds}{\int\limits_0^l \mu(s)\, ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int\limits_0^l y(s)\, \mu(s)\, ds}{\int\limits_0^l \mu(s)\, ds}. \quad \text{(IX)}$$

В том случае, когда масса кривой AB однородна и, значит, линейная плотность постоянная, в формулах (IX) везде μ можно вынести за знак интеграла и сократить.

---

* Если Δm — масса дуги с концами в точках $M(s)$ и $M'(s+\Delta s)$, то отношение $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ есть средняя плотность дуги MM', а

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \mu(s)$$

— плотность в точке $M(s)$.

Следовательно, в этом случае

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x\,ds}{\int_0^l ds}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_0^l y\,ds}{\int_0^l ds},$$

или

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x\,ds}{l}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_0^l y\,ds}{l} \tag{IX'}$$

(l — длина кривой AB).

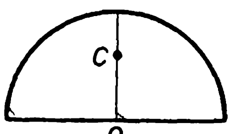
Из второй формулы (IX′) следует $\int_0^l y\,ds = \bar{y}l$. Умножив обе части этого равенства на 2π, получим

$$2\pi \int_0^l y\,ds = 2\pi\bar{y}l$$

или

$$S = l \cdot 2\pi\bar{y}, \tag{X}$$

где S есть площадь поверхности, образуемой вращением кривой AB вокруг оси Ox. В правой части $2\pi\bar{y}$ равняется длине окружности, описываемой точкой $C(\bar{x}, \bar{y})$ при вращении вокруг оси Ox.



Черт. 122

Отсюда видно, что формула (X) служит доказательством следующей теоремы.

Теорема Гульдена. *Площадь поверхности, образуемой вращением плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости кривой, равна произведению длины данной кривой на длину окружности, описываемой при вращении кривой ее центром тяжести.*

Пример. Найти центр тяжести однородной массы, распространенной вдоль полуокружности радиуса r.

Решение. Искомый центр тяжести C, очевидно, находится на радиусе, перпендикулярном к диаметру полуокружности (черт. 122). Если h — расстояние от центра полуокружности до центра тяжести, то, по теореме Гульдена, $\pi r\cdot 2\pi h = 4\pi r^2$ (πr — длина данной полуокружности, а $4\pi r^2$ — площадь поверхности шара, образуемой вращением этой полуокружности вокруг диаметра).

Следовательно,

$$h=\frac{2r}{\pi}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

59. Найти центр тяжести однородной массы, распространенной:

а) вдоль дуги гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, расположенной над осью Ox;

б) вдоль 1-й четверти окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

ГЛАВА V

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интегралы с бесконечными пределами

Понятие определенного интеграла связано с функцией, рассматриваемой на некотором отрезке.

Таким образом, область интегрирования, являясь отрезком, всегда ограничена.

Однако часто приходится иметь дело с функциями в неограниченных областях: в бесконечных полуинтервалах вида $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$, в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Чтобы понятие определенного интеграла распространить и на случаи неограниченных областей интегрирования, нужны новые определения, устанавливающие, что понимать под

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $b>a$.

Если существует конечный предел интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ при неограниченном возрастании b, то, по определению, полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ в этом смысле существует, или, как говорят, *сходится*, то его называют *несобственным интегралом*.

Если при $b \to +\infty$ интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ не имеет конечного предела, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не имеет смысла. В этом случае говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если же оба предела интеграла бесконечны, то, по определению, полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — любое число.

Это же означает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)\,dx.$$

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

По определению,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Поэтому, если $\alpha > 1$, то

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$

сли же $\alpha < 1$, то при $b \to +\infty$ интеграл $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$ не имеет конечного предела.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x \Bigg|_1^b = \ln b,$$

откуда видно, что и в этом случае интеграл $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$ стремится к бесконечности, когда $b \to +\infty$.

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha > 1$, причем в этом случае

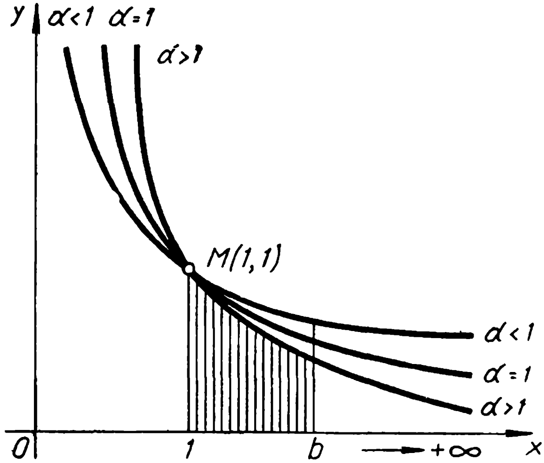
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1};$$

если же $\alpha \leqslant 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится.

Заметим, наконец, что $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ для любого $a > 0$ сходится также при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Полученные выше результаты имеют простой геометрический смысл.

Рассмотрим область D, которая слева ограничена прямой $x = 1$, снизу — осью Ox, а сверху — кривой $y = \frac{1}{x^{\alpha}}$ (черт. 123). Вправо эта область простирается без конца.



Черт. 123

Условимся, что вполне естественно, под площадью всей бесконечной области D понимать предел площади конечной ее части до прямой $x = b$ при $b \to +\infty$. Тогда полученные выше результаты будут означать, что если область D сверху ограничена кривой, соответствующей $\alpha > 1$ $\left(\text{расположенной справа от } M\ (1,1) \text{ под гиперболой } y = \frac{1}{x}\right)$, то область D имеет конечную площадь, если же верхняя граница области D есть гипербола $y = \frac{1}{x}$ или кривая, соответствующая $\alpha < 1$ $\left(\text{расположенная справа от } M\ (1,1) \text{ над гиперболой } y = \frac{1}{x}\right)$, то говорить о площади области D не имеет смысла.

Для выяснения сходимости или расходимости интеграла часто пользуются следующей *теоремой сравнения*.

Теорема. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *при любом* $b > a$ *функции* $f(x)$ и $\varphi(x)$ *интегрируемы и* $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. *Тогда*: 1) *если* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *сходится, то сходится и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$;

2) *если* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится. Тогда при любом $b > a$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx = K = \text{const}.$$

Следовательно, при $b \to +\infty$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, возрастающий как интеграл от неотрицательной функции, ограничен сверху. Поэтому он имеет предел. Это означает, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Первая часть теоремы доказана.

Пусть, по условию, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Чтобы доказать, что в этом случае расходится и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, применим метод рассуждений от противного. Допустим, что $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится. Тогда согласно первой части теоремы, которая уже доказана, будет сходящимся и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. А это противоречит условию.

Следовательно, наше допущение неверно, то есть $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится.

§ 2. Абсолютно сходящиеся интегралы

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Это определение учитывает тот факт, что из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ вытекает сходимость и интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

В самом деле, пусть существует $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = K$. Так как

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

то

$$0 \leqslant f(x) + |f(x)| \leqslant 2|f(x)|.$$

Вместе с интегралом $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, который сходится по условию, сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} 2|f(x)|\,dx = 2\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Поэтому, согласно теореме сравнения, сходится также интеграл $\int_a^{+\infty} [f(x) + |f(x)|]\,dx$. Это означает, что интеграл $\int_a^{b} [f(x) + |f(x)|]\,dx$ при $b \to +\infty$

имеет конечный предел. Но

$$f(x) = [f(x) + |f(x)|] - |f(x)|$$

и, следовательно, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$ также имеет конечный предел, то есть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Аналогичным образом определяется абсолютная сходимость интегралов $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема сравнения и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, рассмотренный в предыдущем параграфе, позволяют нам сформулировать следующие признаки абсолютной сходимости и расходимости интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если существует такое $\alpha > 1$, *что для всех достаточно больших* x

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^\alpha}, \tag{1}$$

где $M > 0$ *не зависит от* x, *то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно.*

Если для всех достаточно больших x

$$f(x) \geqslant \frac{M}{x}, \tag{2}$$

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

В самом деле, пусть условие (1) выполнено для всех $x \geqslant a_1 > 0$. Так как $\int\limits_{a_1}^{+\infty} \frac{M\,dx}{x^\alpha}$ для $\alpha > 1$ сходится, то, по теореме сравнения, сходится и интеграл $\int\limits_{a_1}^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Отсюда в свою очередь вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$, так как

$$\int\limits_a^b |f(x)|\, dx = \int\limits_a^{a_1} |f(x)|\, dx + \int\limits_{a_1}^b |f(x)|\, dx$$

и при $b \to +\infty$ интегралы $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ и $\int\limits_{a_1}^b |f(x)|\, dx$ имеют конечные пределы только одновременно.

Пусть для всех $x \geqslant a_1 > 0$ выполнено условие (2). Так как $\int\limits_{a_1}^{+\infty} \frac{M\, dx}{x}$ расходится, то, по теореме сравнения, расходится и $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\, dx$, а вместе с ним и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

§ 3. Интегралы от неограниченных функций

Выше было доказано, что необходимым условием существования интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ является ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Однако при помощи новых определений понятие интеграла распространяется и на такие случаи, когда подынтегральная функция оказывается неограниченной на отрезке интеграции.

Эти определения следующие.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b-\varepsilon]$ при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$, но не ограничена в интервале $(b-\varepsilon, b)$.

Если существует конечный предел интеграла

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$, то, по определению, полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

Если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в этом смысле существует, или, как говорят, *сходится*, то его называют *несобственным интегралом.*

Если при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ не имеет конечного предела, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не имеет смысла. В этом случае говорят, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

если функция $f(x)$ — не ограничена только в интервале $(a,\ a+\varepsilon)$.

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ не ограничена только в окрестности точки ξ, где $a < \xi < b$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + \int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ не ограничена только в окрестности точки a и в окрестности точки b, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

где c — любая точка интервала $(a,\ b)$.

Это же означает, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon'\to 0\\ \varepsilon''\to 0}} \int\limits_{a+\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx.$$

Пример. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Решение. По определению,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Так как при $\alpha \neq 1$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

а при $\alpha = 1$ имеем

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon,$$

то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha},$$

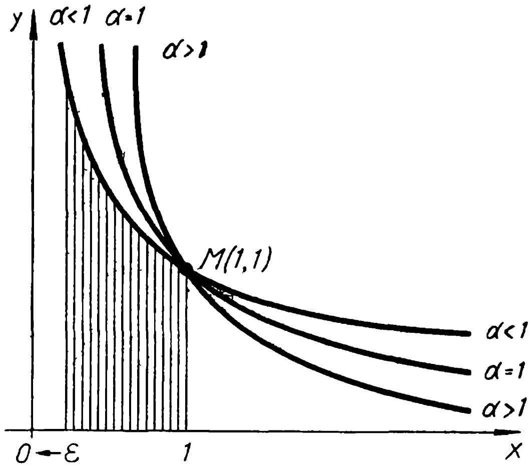
если $0 < \alpha < 1$, и интеграл $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ не имеет конечного предела при $\varepsilon \to 0$, если $\alpha \geqslant 1$.

Следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $0 < \alpha < 1$, причем в этом случае

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha};$$

если же $\alpha \geqslant 1$, то $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится.

Геометрический смысл полученных результатов заключается в следующем. Бесконечная область D (черт. 124), ограниченная слева осью Oy, справа прямой $x = 1$, снизу отрезком $[0,1]$, а сверху кривой $y=\frac{1}{x^{\alpha}}$, расположенной под гиперболой $y=\frac{1}{x}$, имеет конечную площадь, если под площадью всей области D понимать предел, к которому



Черт. 124

стремится площадь конечной ее части до прямой $x=\varepsilon$, когда $\varepsilon \to 0$; если же верхнюю границу области D заменить гиперболой $y=\frac{1}{x}$ или кривой, расположенной выше гиперболы, то получим область, говорить о площади которой не имеет смысла.

Так же, как для интегралов с бесконечными пределами, для интегралов от неограниченных функций можно доказать, что если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Последний в этом случае называется *абсолютно сходящимся*.

После рассмотренного здесь примера нетрудно доказать следующий признак абсолютной сходимости.

Пусть функция $f(x)$ не ограничена только в интервале $(b-\varepsilon, b)$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. *Если существует такое положительное число* $\alpha < 1$, *что для всех* x, *достаточно близких к* b,

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{(b-x)^{\alpha}},$$

где $M > 0$ *не зависит от* x, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится абсолютно.*

Кроме того, можно заметить, что *если для всех* x, *достаточно близких к* b,

$$f(x) \geqslant \frac{M}{b-x},$$

где $M > 0$ *не зависит от* x, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится.*

УПРАЖНЕНИЯ

60. Вычислить площадь области между кривой

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

и осью Ox.

61. Найти значения α, для которых интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{a} e^{\alpha x}\,dx$$

сходятся.

62. Выяснить, сходится ли интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{a^2+x^2}.$$

63. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

К УПРАЖНЕНИЯМ В РАЗДЕЛЕ I

1. Интервал $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$.
2. Интервалы $(x_0-\varepsilon,\ x_0)$ и $(x_0,\ x_0+\varepsilon)$.
3. Полуинтервалы $\left(-\infty,\ -\frac{1}{h}\right]$ и $\left[\frac{1}{h},\ +\infty\right)$.
4. N достаточно взять равным целой части числа $\frac{1}{\varepsilon}$.
5. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{3}\,|b-a|$. Тогда ε-окрестность точки a не будет иметь общих точек с ε-окрестностью точки b. Так как с некоторого номера все члены данной последовательности будут содержаться в ε-окрестности точки a, то в ε-окрестности точки b членов данной последовательности может быть лишь конечное число. Поэтому b не может быть пределом последовательности $\{a_n\}$.
6. Расходится, так как она не ограничена и поэтому не удовлетворяет необходимому условию сходимости.
7. Для любого $\varepsilon>0$ можно найти такие N' и N'', что $|a_n-a|<\varepsilon$ для всех $n>N'$ и $|b_n-a|<\varepsilon$ для всех $n>N''$. Это следует из условия $\lim a_n=\lim b_n=a$. Отсюда, с учетом условия $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$, вытекает, что

$$-\varepsilon<a_n-a\leqslant c_n-a\leqslant b_n-a<\varepsilon$$

и, значит, $|c_n-a|<\varepsilon$ для всех $n>N$, где N — большее из двух чисел N' и N''.

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое N, что для всех $n>N$

$$|c_n-a|<\varepsilon.$$

Это означает, что $a=\lim c_n$.

10. а) Дана последовательность стягивающихся интервалов $\left(1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)$, $n=1,\ 2,\ 3\ldots$ Точка 1 — единственная точка, принадлежащая всем этим интервалам.

б) Дана последовательность стягивающихся интервалов $\left(1-\frac{1}{n},\ 1\right)$, $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$, которые не имеют ни одной общей точки.

в) Дана последовательность стягивающихся полуинтервалов $\left(1-\frac{1}{n},\ 1\right]$, имеющих общий конец — точку 1, которая является единственной их общей точкой.

11. $-1;\ 0;\ 1.$

13. а) расходится, так как не ограничена;

б) расходится, так как имеет две предельные точки: 0 и 1.

16. а) $\frac{3}{5}$; б) 0; в) $\frac{1}{3}$; г) 0; д) e^{-35}; е) e^{-9}.

17. $f(0)=1;\ f(1)=0;\ f\left(-\frac{1}{3}\right)=\sqrt{2}.$

19. а) $(-\infty,\ 2),\ (2,\ +\infty)$; б) $[0,3]$;

в) $(-\infty,\ -1),\ (-1,1),\ (1,\ +\infty)$; г) $(-1,0),\ (1,\ +\infty)$.

21. $\delta < \sqrt[3]{8+\varepsilon}-2.$

26. а) $-\frac{2}{5}$; б) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; в) $-\frac{1}{12}$; г) $\frac{1}{2}$; д) e^{a}; е) 1.

31. а) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) 2; в) 1; г) 1.

32. а) $x=0$ — точка разрыва с конечным скачком функции;

б) $x=0$ — точка разрыва второго рода;

в) непрерывна везде.

К УПРАЖНЕНИЯМ В РАЗДЕЛЕ II

1. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$

2. а) $y=3x+2$, б) $y=0$ (ось Ox).

3. $y'=3x^2+2.$

4. $y'=3-4x-3x^2.$

5. $y'=(2a-5bx^3)x.$

6. $y'=6cx(1+cx^2)^2.$

7. $y'=-\frac{6x}{(x^2-1)^2}.$

8. $\varrho'=\frac{\theta(2-\theta)}{(1-\theta)^2}.$

9. $y'=\frac{x}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

10. $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$

11. $s'=\frac{4t}{1-t^4}.$

12. $\frac{d\varrho}{d\theta}=-\frac{1}{2}\sin\theta.$

13. $f'(x)=\arcsin\frac{x}{2}.$

14. $y'=\frac{1}{x^2+x+1}.$

15. $y'=\frac{1}{\sin^3 x}.$

16. $v=\frac{40\pi}{3}$ (*км/мин*).

17. а) 0,795; б) 0,770.

18. $\Delta h \approx dh=\frac{3l}{16h}\Delta s.$

22. $y' = \dfrac{3x^5 - x^3 - 6x^2 - 2}{2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

23. $\dfrac{du}{dv} = v^{e^v} e^v \dfrac{1+v\ln v}{v}$

24. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{6}{x}$.

25. $y^{(n)} = (x+n)\,e^x$.

26. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4a^2}{y^3}$.

27. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2xy}{(x-3y^2)^3}$.

28. $y^{(40)} = x^2 \sin x - 80x \cos x - 1560 \sin x$.

29. Касательная: $x+2y-4=0$, нормаль: $2x-y-3=0$.

30. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{3a^2x}{y^5}$.

31. $-\dfrac{1}{2}$.

32. 0.

33. a

34. $\dfrac{1}{2}$.

35. $e^{\frac{2}{\pi}}$.

36. $x=5$ — точка максимума.

37. $x=\dfrac{1}{2}$ — точка максимума, $x=-1$ и $x=5$ — точки минимума.

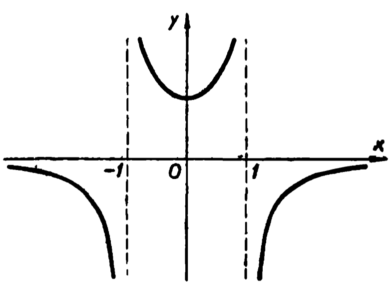
38. $x=-4$ и $x=3$ — точки максимума, $x=-3$ и $x=4$ — точки минимума.

41. Ширина сечения $= \dfrac{d}{\sqrt{3}}$, высота сечения $= \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,d$

42. Ширина страницы $= 2b + \sqrt{\dfrac{sb}{a}}$, высота страницы $= 2a + \sqrt{\dfrac{sa}{b}}$.

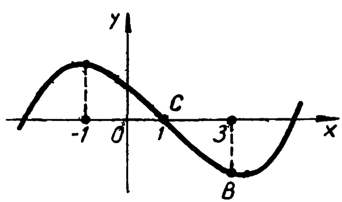
43. Высота $= \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

44.



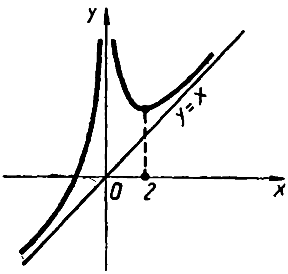
Черт. 125

45.



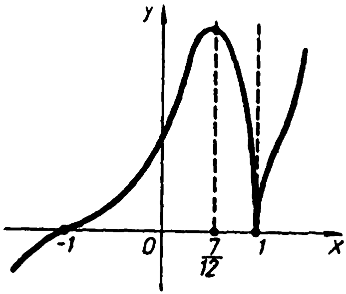
Черт. 126

46.



Черт. 127

47.



Черт. 128

К УПРАЖНЕНИЯМ В РАЗДЕЛЕ III

1. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt[3]{(1+2x^2)^2}+C.$ 2. $2a^2\ln(a^4+x^4)+C.$

3. $\operatorname{arctg} e^x+C.$ 4. $\frac{1}{2}[x-\ln(2+e^x)]+C.$

5. $\frac{1}{10}\left(\sqrt{5}\arcsin\frac{\sqrt{5}\,x^2}{2}-\sqrt{4-5x^4}\right)+C.$

6. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}2x)-4x+C.$

7. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{5}}+C.$

8. $\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$ 9. $\frac{6^{2x}}{2\ln 6}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}-\frac{3^{-2x}}{2\ln 3}+C.$

10. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{2}+C.$ 11. $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$

12. $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C.$

13. $-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+C,\quad (x=a\operatorname{tg}z).$

14. $\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}+C,\quad (x=a\sec z).$

15. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

16. $\frac{e^{ax}}{a}\left(x^3-\frac{3x^2}{a}+\frac{6x}{a^2}-\frac{6}{a^3}\right)+C.$

17. $\frac{1}{2}(\sin x^2-x^2\cos x^2)+C.$

18. $\frac{2\sin 2x - \cos 2x}{5e^x} + C.$

19. $\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

20. $\ln(x^2-1)^2 - \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) + 4\operatorname{arctg}(x+1) + C.$

21. $\frac{x^4+2x^2+2x}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

22. $\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)} + \frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C.$

23. $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

24. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C.$

25. $-12\left(\frac{1}{\sqrt[12]{x}} + \operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}\right) + C.$

26. $\frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[5]{x-1}}{2+\sqrt[5]{x-1}}\right| + C.$

27. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$

28. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2+2x+4}}{x+2+\sqrt{x^2+2x+4}}\right| + C.$

29. $-2\sqrt{\frac{3-x}{x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x}} + C.$

30. $-3\sqrt{4-4x-x^2} - 8\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C.$

31. $\frac{3}{2}(x-3)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{13}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C.$

32. $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C.$

33. $\frac{3}{80}(x^2-2)^{\frac{5}{3}}(6+5x^2) + C.$

34. $\frac{y^2}{6(2+3y^2)^{\frac{3}{2}}} + C.$

36. $\frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}} t\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 t+\frac{1}{7}\sin^4 t\right)+C.$

37. $\frac{1}{128}\left(5x+\frac{8}{3}\sin^3 2x-\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C.$

38. $-\frac{1}{2}\cos x+\cos\frac{x}{2}+C.$

39. $\frac{1}{2}\sin z-\frac{1}{22}\sin 11z+C.$

40. $S=\frac{3}{8}\pi a^2.$ 41. $S=\frac{3}{4}.$

42. $S=3\pi a^2.$ 43. $S=\frac{\pi a^2}{8}.$

44. $S=\frac{3}{2}\pi a^2.$ 45. $S=\frac{17}{4}\pi.$

46. $V=5\pi^2 a^3.$ 47. $V=2\pi^2 a^2 b.$

48. $V=\frac{16}{21}\pi.$ 49. $s=6a.$

50. $s=8a.$ 51. $s=\frac{3}{2}\pi a.$

52. В точке A: $\frac{2}{5\sqrt{5}}$ радиан на километр.

В точке B: $\frac{8}{5\sqrt{5}}$ радиан на километр.

53. $R=\frac{3}{2}a.$ 54. $K=\frac{3}{2\sqrt{2a\varrho}}.$

55. $S=4\pi^2 ab.$ 56. $S=\frac{12}{5}\pi a^2.$

57. $S=\frac{64}{3}\pi a^2.$ 58. $S=\frac{32}{5}\pi a^2.$

59. а) $C\left(0,\ \frac{2a}{5}\right)$; б) $C\left(\frac{2a}{\pi},\ \frac{2a}{\pi}\right)$.

60. $S=\pi.$ 61. $\alpha>0.$

62. Сходится абсолютно. 63. 6.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV Элементарные функции

РАЗДЕЛ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава I Производные и дифференциалы

Глава II Основные теоремы дифференциального исчисления

Глава III. **Исследование функций**

РАЗДЕЛ III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава I. **Определенный интеграл**

Глава II. **Неопределенные интегралы**

Глава III. **Способы вычисления определенных интегралов**

Глава IV. **Приложения определенного интеграла**

Глава V. **Несобственные интегралы**

Николай Адрианович Фролов

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть I

Редактор *В. Г. Долгополов*
Художник *Г. В. Лаврухин*
Художественный редактор *А. В. Сафонов*
Технический редактор *Т. Н. Зыкина*. Корректор *М. В. Голубева*

Сдано в набор 18/VII 1963 г. Подписано к печати 24/I 1964 г. 84×108 1/32. Печ. л. 24 (19,68). Уч.-изд. л. 15.14. Тираж 35 тыс. экз. Тем. пл. 1964 г. № 248/32.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета
Совета Министров РСФСР по печати
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41
Московская типография № 16 «Главполиграфпрома»
Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.

Заказ № 1021
Цена без переплета 45 коп., переплет 15 коп