А.С. Киркинский

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области техники и технологии

Москва
Академический Проект
2006

УДК 517(075.8)
ББК
К432

Рецензия Научно-методического совета по математике
Министерства образования Российской Федерации

Киркинский А.С.
Математический анализ: Учебное пособие. – М.: Академический Проект, 2006. – 526 с.

Учебное пособие содержит основы математического анализа. Сохранены характер и форма изложения, принятые в пособии автора «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Пособие рекомендуется для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области техники и технологии, в том числе для студентов специальностей, требующих хорошей математической подготовки.

Подробность изложения и наличие большого числа примеров и задач с решениями позволяют использовать пособие для дистанционной формы обучения и для самостоятельного изучения математики. Приводятся упражнения для самостоятельной работы и образцы тестов для компьютерного контроля текущих знаний. Для всех упражнений и тестов имеются ответы.

ISBN
ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие содержит все основные разделы математического анализа, изучаемые в техническом университете. Пособие было разработано и впервые опубликовано в Алтайском государственном техническом университете для студентов направления «Информатика и вычислительная техника». После значительной переработки пособие рекомендуется для студентов всех направлений и специальностей в области техники и технологии.

Подробность изложения и наличие большого числа примеров и задач с решениями позволяют использовать пособие для дистанционной формы обучения и для самостоятельного изучения математики. Материал разбит на 16 глав. В каждой главе теоретические сведения сопровождаются примерами, приведены задачи с решениями, упражнения для самостоятельной работы, образцы тестов для компьютерной проверки знаний. Выполнение упражнений, изучение разобранных примеров и решённых задач являются, по мнению автора, обязательными для хорошего понимания предмета. В конце книги имеются ответы ко всем упражнениям и тестам, итоговые контрольные вопросы для подготовки к экзамену. Приведён краткий список рекомендуемой литературы.

Структура пособия, характер и форма изложения — такие же, как в книге автора «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Имеются ссылки на эту книгу. Например: АГ, 5.3 — раздел 3 из 5-й главы пособия по алгебре и геометрии. Однако эти ссылки немногочисленны и принципиального значения для понимания не имеют.

Теоретический материал часто излагается не в самых общих формулировках. Возможно, это позволяет выделить наиболее существенные моменты. Тем не менее изложение достаточно строгое. Хотя в доказательствах автор пытается привлечь интуицию читателя, математическая строгость и точность в большинстве случаев сохранены. Здесь нет противоречия. Без интуиции и научиться математике невозможно, и само занятие бессмысленно. Особенно важна роль интуиции при освоении математики будущими инженерами.

С другой стороны, подчеркнём: только изучение доказательств позволит вам добиться успеха, развить вашу интуицию, научиться решать задачи. Лишь некоторые основные понятия оставлены в пособии без строгих обоснований. Например, отсутствует построение системы действительных чисел.

Обратимся к истории развития раздела математики, который собираемся изучать. Основные представления новой науки — анализа бесконечно малых — сложились в XVII веке. В это время математика получает много стимулов для своего развития. Мореплавание и кораблестроение, создание различных механизмов требуют решения сложных задач астрономии, оптики, механики. А для этого нужен математический аппарат.

Как происходит создание новой теории? Долгое время ставятся и решаются отдельные задачи. Причём для каждой задачи изобретается свой, оригинальный метод решения. Затем появляются общие методы, пригодные для решения уже многих, однотипных задач. Возникают и уточняются общие понятия, развивается свой язык для решения теперь уже большого числа задач.

Отдельные задачи, относящиеся к классическому математическому анализу, были решены ещё в Древней Греции. Архимед в III веке до н. э. умел находить площади некоторых фигур, составляя их из линий. Объёмы простых тел вычислялись тоже с помощью разложения тел на более мелкие элементы. И постановка задач вычисления площадей и объёмов, и общий подход к их решению относятся сейчас к интегральному исчислению.

Развитие метод Архимеда получил только в XVII веке. Немецкий астроном и математик И. Кеплер опубликовал в 1615 году работу «Новая стереометрия винных бочек». Здесь уже фигура составляется из бесконечного числа простых элементов («тончайших», «крайне малой ширины»). Хотя представления Кеплера были интуитивными, но он смог вычислить площади и объёмы многих фигур и тел.

Следующий шаг был сделан в работе Б. Кавальери, учёного итальянского монаха, в 1635 году. Здесь рассматриваются «неделимые» элементы, линии, не имеющие какой-либо толщины. Кроме того, Кавальери рассматривает не только конкретные фигуры, но выводит и общие правила, которые потом применяет к конкретным фигурам. Подобными исследованиями занимались в середине XVII века французы П. Ферма, Б. Паскаль и другие математики. Фактически были вычислены некоторые интегралы, чаще — в геометрической форме, при вычислении площадей, объёмов, длин.

К созданию дифференциального исчисления вели задачи о разыскании наибольших и наименьших значений, а также задачи о проведении касательных. Методы их решения, неявно использующие переход к пределу, впервые были изобретены П. Ферма. Но строгих обоснований у Ферма не было. Проведением касательных занимался и И. Барроу, учитель И. Ньютона. Он первым понял, что задачи проведения касательных и вычисления площадей связаны, в определённом смысле являются взаимно обратными.

Однако теории не было. Было накоплено много фактов, даже методов, но разрозненных. Теория была создана в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница.

В своей основной работе «Метод флюксий и бесконечных рядов» (1671 г.) Исаак Ньютон рассматривает переменные величины — «флюэнты» и скорости их изменения — «флюксии». Изучается основная задача: по данному соотношению между флюэнтами определить соотношение между флюксиями. Затем следуют применения — и к задачам о наибольших и наименьших значениях, и к задачам о проведении касательных. Рассматривая обратную задачу, с помощью флюксий и флюэнт Ньютон разработал и методы вычисления площадей. Сейчас эти методы превратились в некоторые приёмы вычисления интегралов.

Готфрид Вильгельм Лейбниц работал независимо от Ньютона, в его теории первоначальным понятием была не скорость, а касательная. Отправляясь от геометрии, Лейбниц выводит основные правила дифференцирования функций. Свой метод он применяет, и очень успешно, к решению многих известных задач. Лейбниц является автором привычных теперь обозначений для дифференциала и интеграла.

Долгое время работы математиков не имели строгого обоснования. Особенно неясным оставалось понятие бесконечно малой величины, лежащее в основе теории. Дело в том, что бесконечно малые рассматривались как постоянные, неизменяющиеся величины. Такой подход не мог быть корректным, постоянно подвергался критике. Однако оправданием служили выдающиеся практические результаты, к которым приводила теория. У Ньютона и Лейбница были только отдельные попытки взглянуть на бесконечно малую как на переменную величину. Лишь впоследствии, в XVIII – XIX веках, в трудах Л. Эйлера, Ж. Даламбера, О. Коши была развита теория пределов — прочный фундамент для дифференциального и интегрального исчислений.

Теории пределов посвящены первые 3 главы. В 4-й и 5-й главах рассматривается дифференциальное, а в 6, 7 и 8-й — интегральное исчисления функций одной действительной переменной.

Идеи математического анализа функций одной переменной получают развитие при изучении функций нескольких переменных. Ясно, что в реальных задачах изучаемая величина часто зависит не от одного, а от многих независимых между собой факторов. Функции нескольких переменных рассматриваются в 9-й и 10-й главах. Основные понятия здесь — предел, непрерывность, дифференцируемость, экстремумы — читателю уже знакомы. Однако для функций нескольких переменных они приобретают новые качества, а потому заслуживают внимательного изучения.

В 11-й главе вводятся новые типы интегралов, имеющие много применений в геометрии, механике, физике. Интегрируются функции нескольких переменных, определённые на различных множествах. Фактически это разные реализации одной основной идеи интегрирования — мы познакомились с ней в 6-й главе, изучая определённый интеграл Римана.

Далее, 12-я глава посвящена исследованию векторных функций (или векторных полей). Опираясь на теорию функций 2 и 3 переменных, можно научиться решать задачи, связанные с векторными величинами: скоростью, силой, напряжённостью электрического поля.

Содержание следующих трёх глав — теория рядов. Сначала рассматриваются числовые ряды. Здесь, на основе теории пределов, мы должны немного приблизиться к пониманию того, что такое бесконечность. Отметим, что доказательства в этом разделе играют более важную роль, чем технические упражнения. Функциональные ряды — ещё один инструмент для изучения функций. Более того, мы получаем новый способ задания функции — в виде ряда. Для решения многих практических задач это очень удобный способ, он часто применяется.

Последняя, 16-я глава посвящена интегралам, зависящим от параметра. Это тоже полезный способ задания функции. Для получения простейших навыков работы с такими функциями рассмотрены примеры, приведены основные свойства.

Таким образом, в этой книге мы рассматриваем важнейшие операции математического анализа — переход к пределу, дифференцирование, интегрирование — сначала для функций одной переменной, затем распространяем их действие на функции нескольких переменных, и наконец — на функции, заданные в виде суммы сходящегося функционального ряда или в виде интеграла с параметром. Конечно, теоретический материал, особенно последних разделов, простым не назовёшь. Для некоторых наиболее сложных теорем доказательства не приводятся. Но всегда важно понять значение теоремы, её место в общей теории. Постепенное знакомство с новыми понятиями, изучение примеров и доказательств, решение упражнений обязательно приведут читателя на новый уровень понимания математики.

В пособии приведены подробные решения около 300 примеров и задач, текст сопровождают более 200 рисунков. Как и в книге «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», в тексте пособия широко используются символы $\forall$, $\exists$; $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Их применение, по мнению автора, не затрудняет чтение, но облегчает понимание логики рассуждений.

Заканчивая работу над серией учебных пособий, автор выражает искреннюю благодарность профессору Б.В. Сёмкину, по инициативе и при поддержке которого эта работа проводилась, доцентам кафедры высшей математики АлтГТУ Э.И. Вингисаар, В.П. Зайцеву — их советы помогали в работе, сотруднику кафедры И.В. Пантелеевой — за помощь в оформлении рукописей. Автор также благодарен доценту А.В. Сорокину, руководившему созданием макетов книг.

ГЛАВА 1

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.1. Действительные числа

Будем использовать обычные обозначения для множеств натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Сейчас для нас самым важным является множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Строгое построение множества $\mathbb{R}$ мы проводить не будем, напомним только основные понятия, связанные с действительными числами. Для таких чисел используется десятичная запись, запись в виде десятичных дробей. Если число представлено периодической или конечной дробью, то его можно записать также в виде $\dfrac{p}{q}$, где p, q — целые, причём $q \neq 0$. Значит, это число рациональное, элемент множества $\mathbb{Q}$. Если дробь бесконечная непериодическая, то это элемент разности $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, число иррациональное. Иррациональное число называется ***алгебраическим***, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами. Например, $\sqrt{2}$ — корень многочлена $x^2 - 2$, $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ — корень многочлена $x^4 - 6x^2 + 4$. Остальные иррациональные числа называются ***трансцендентными***. Можно доказать, что трансцендентным является, например, число π.

Для действительных чисел определены операции сложения и умножения, причём алгебраическая система $< \mathbb{R}\,;\ +,\ \cdot >$ является полем. Напомним, что это означает выполнение 9 аксиом — свойств операций $+$ и $\cdot$ (см. АГ, 1.3).

На множестве $\mathbb{R}$ определено ***отношение порядка*** $\geq$ («больше или равно»). Укажем несколько свойств отношения $\geq$ на множестве действительных чисел:

1) $\forall a \quad a \geq a$ (***рефлексивность***);

2) $a \geq b,\ b \geq c \ \Rightarrow\ a \geq c$ (***транзитивность***);

3) $a \geq b,\ b \geq a \ \Rightarrow\ a = b$ (***антисимметричность***).

Это общие свойства отношения порядка, ещё 4 свойства связаны с операциями поля $\mathbb{R}$:

4) $\forall a \quad a \geq 0$ или $0 \geq a$;

5) $a \geq 0 \ \Rightarrow \ 0 \geq -a$;

6) $a \geq 0,\, b \geq 0 \ \Rightarrow \ a + b \geq 0$;

7) $a \geq 0,\, b \geq 0 \ \Rightarrow \ ab \geq 0$.

Наряду с отношением $\geq$ можно рассматривать и отношения $>$, $\leq$, $<$, они легко выражаются через $\geq$. Мы будем свободно использовать все эти символы.

Заметим: множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ также образует поле, операции сложения и умножения, отношение порядка $\geq$ обладают теми же свойствами, так как $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Сейчас мы рассмотрим свойство, существенно отличающее поле $\mathbb{R}$ от поля $\mathbb{Q}$.

Свойство непрерывности. Любая система вложенных отрезков

$$[a_1,\, b_1] \supseteq [a_2,\, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n,\, b_n] \supseteq \ldots$$

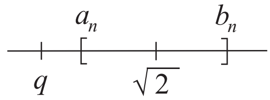
в $\mathbb{R}$ имеет непустое пересечение. Другими словами, всегда найдётся число, которое входит в каждый из этих отрезков.

Чтобы лучше понять это свойство, называемое также ***принципом вложенных отрезков***, рассмотрим аналогичную систему отрезков в $\mathbb{Q}$.

Пример 1. Возьмём отрезки

$$[1{,}4;\ 1{,}5] \supseteq [1{,}41;\ 1{,}42] \supseteq [1{,}414;\ 1{,}415] \supseteq \ldots,$$

построенные по правилу: левый конец a_n — наибольшее рациональное число с n знаками после запятой, удовлетворяющее неравенству $x^2 < 2$. Правый конец b_n получается из a_n прибавлением одной единицы последнего разряда. Заметим: $a_n^2 < 2$, $b_n^2 > 2$ $(\forall n)$, a_n^2 приближается к 2 слева, а b_n^2 — справа. Если число q входит во ***все*** такие отрезки, то неравенство $q^2 < 2$ не выполняется, иначе обязательно найдётся такое n, что $q < a_n$,



т. е. $q \notin [a_n,\, b_n]$. По этой же причине и соотношение $q^2 > 2$ выполниться не может. Значит, $q^2 = 2$. Но такого рационального числа не существует (см. АГ, 1.2). Поэтому множество рациональных чисел свойством непрерывности не обладает. Иррациональные числа «пополняют» множество $\mathbb{Q}$. В результате числовая прямая оказывается «плотно», «непрерывно» заполненной действительными числами.

Заметим, что строго доказать указанные свойства действительных чисел мы не можем, ведь точное определение действительных чисел не рассмотрено. Однако справедливость этих соотношений не вызывает у нас сомнений — благодаря практике работы с такими числами. Интересно, что перечисленные свойства — 9 свойств поля, 7 свойств отношения $\geq$ и свойство непрерывности — полностью ***характеризуют*** систему действительных чисел $\mathbb{R}$. Это значит, что можно дать ***аксиоматическое определение*** $\mathbb{R}$: полем действительных чисел называется непустое множество с двумя двухместными операциями и отношением $\geq$, для которых выполняются указанные 17 свойств. Используя это определение, другие свойства действительных чисел уже можно строго доказать. Нам потребуется свойство, связанное с понятием точной верхней (или нижней) грани.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$ (M — подмножество множества $\mathbb{R}$). Число a называется ***верхней гранью*** множества M, если

$$\forall x \in M \quad a \geq x.$$

Множество, у которого имеется верхняя грань, называется ***ограниченным сверху***. Число α называется ***точной верхней гранью*** множества M, если:

1) α — верхняя грань множества M;

2) $\forall \varepsilon > 0$ число $\alpha - \varepsilon$ не является верхней гранью M; т. е. α — самая маленькая верхняя грань.

Для точной верхней грани используется обозначение

$\alpha = \sup M$ («α — ***супремум*** множества M»).

В точности так же вводится понятие ***нижней грани***, ограниченного снизу множества, ***точной нижней грани***:

$\beta = \inf M$ («β — ***инфинум*** множества M»), если:

1) β — нижняя грань M;

2) $\forall \varepsilon > 0$ число $\beta + \varepsilon$ не является нижней гранью M.

Пример 2.

а) $M_1 = [2, 5]$, т. е. M_1 — отрезок. Ясно, что $\sup M_1 = 5$, $\inf M_1 = 2$. В этом случае обе точные грани принадлежат множеству.

б) Пусть $M_2 = [-3, 8)$ — полуинтервал. Тогда $\inf M_2 = -3$, входит в M_2; $\sup M_2 = 8$, не входит в M_2.

в) $M_3 = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Самое большое число во множестве M_3 — это 1. Конечно, оно и является точной верхней гранью. Самого маленького числа в M_3 нет: увеличивая n, будем получать всё меньшие числа. Однако все они положительны. Значит, 0 — нижняя грань для M_3. Будет ли 0 точной нижней гранью? Попробуем увеличить: возьмём маленькое положительное число ε. Тогда при больших n получим $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. ε уже не является нижней гранью. Поэтому $\inf M_3 = 0$.

г) $M_4 = (3, \infty)$. Здесь $\inf M_4 = 3$, а верхней грани у M_4 нет, M_4 не ограничено сверху.

Заметим, что во всех примерах точная верхняя грань существует всегда, когда множество ограничено сверху. Оказывается, это общее свойство.

Теорема 1. Любое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

Доказательство. Пусть M — ограниченное сверху множество действительных чисел, $a \in M$, b — какая-либо верхняя грань M. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам и обозначим $[a_1, b_1]$ ту половину, в которой есть элементы M, а b_1 — верхняя грань M (одна из половин отрезка $[a, b]$ этими свойствами обязательно обладает). Далее, разобьём $[a_1, b_1]$ пополам и тем же способом найдём его половину $[a_2, b_2]$. Поступая аналогично, построим систему вложенных отрезков

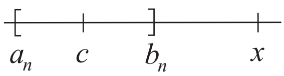
$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

со свойствами:

а) в каждом отрезке есть элементы M;

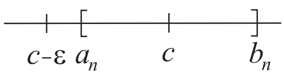
б) правый конец любого отрезка — верхняя грань M.

Как мы знаем, существует число c, принадлежащее всем отрезкам. Докажем, что оно и является искомой точной верхней гранью M.



Действительно, если допустить, что $x \in M$ и $x > c$, то при больших n длина отрезка $[a_n, b_n]$ будет меньше, чем $x - c$. Это противоречит тому, что b_n — верхняя грань M. Значит, такого x быть не может, c — верхняя грань M.

С другой стороны, $\forall \varepsilon > 0$ число $c - \varepsilon$ уже не является верхней гранью:



при больших n длина $[a_n, b_n]$ будет меньше ε. Числа множества M, попадающие в $[a_n, b_n]$, будут больше, чем $c - \varepsilon$. Итак, выполнены оба условия определения, т. е. $c = \sup M$.

В точности так же можно доказать, что любое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.

1.2. Числовые последовательности и их пределы

Числовой последовательностью называется множество чисел, каждому из которых присвоен порядковый номер:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Такую последовательность для краткости будем обозначать $\{a_n\}$. Более строго (и более формально) можно определить последовательность как отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

$$1 \to a_1, \quad 2 \to a_2, \quad 3 \to a_3, \ \ldots, \ n \to a_n, \ \ldots .$$

В любом случае указано, какое число соответствует каждому натуральному номеру.

Важно не путать последовательность и множество её значений.

Пример 3. В последовательности $\{(-1)^n\}$, как и в любой другой, бесконечно много членов:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots\ .$$

Однако значений она имеет всего два: -1, 1. Можно рассматривать даже постоянную последовательность, имеющую только одно значение:

$$\{a_n\} = \{c\}, \text{ т. е. } a_n = c \ \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***возрастающей***, если $a_n \leq a_{n+1}$ $(\forall n)$. Если $a_n < a_{n+1}$ $(\forall n)$, то $\{a_n\}$ называется ***строго возрастающей***. Аналогично определяются ***убывающие*** и ***строго убывающие*** последовательности. Последовательность называется ***ограниченной сверху*** (снизу), если множество её значений ограничено сверху (снизу). Последовательность называется ***ограниченной***, если она ограничена и сверху, и снизу.

На множестве последовательностей можно ввести операции сложения, умножения, умножения на число. Они определяются поэлементно:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},$$

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n b_n\},$$

$$\lambda \cdot \{a_n\} = \{\lambda a_n\}.$$

(Это вполне согласуется с определением последовательности как отображения $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Если $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, то произведение $ab : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ действует по правилу: $n \to a_n b_n$.)

Рассмотрим теперь основное понятие этого раздела. Число b называется ***пределом*** последовательности $\{a_n\}$, если для любого (даже очень маленького) положительного числа ε существует такое натуральное число n_0, что при любом $n \geq n_0$ элемент последовательности a_n отличается от b меньше, чем на ε (т. е. абсолютная величина разности $|a_n - b|$ меньше ε). Введём обозначение для понятия «предел последовательности» и запишем определение в символической форме:

$$b = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

Это понятие — уточнение нашего интуитивного представления о том, что, изменяясь с увеличением n, величина a_n ***стремится*** к b. Используется и такая запись:

$$a_n \to b \text{ при } n \to \infty.$$

Вместо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ можно писать просто $\lim a_n$, опуская символы $n \to \infty$.

Пример 4. Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Ясно, что с увеличением n число $\frac{1}{n}$ стремится к 0. Это можно доказать и строго: для любого (даже очень маленького) ε можно взять натуральное число $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда при $n \geq n_0$ будет $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и, значит, $\frac{1}{n} < \varepsilon$; т. е. для таких n числа $\frac{1}{n}$ будут отличаться от 0 меньше, чем на ε.

Для описания поведения последовательности, члены которой неограниченно увеличиваются, служит понятие ∞ — бесконечность. По определению:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \quad a_n > M,$$

т. е. для любого (даже очень большого) числа M существует номер, начиная с которого $a_n > M$. Аналогично:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \quad a_n < M.$$

Числовая прямая, к которой добавлены символы $+\infty$, $-\infty$ («бесконечно удалённые точки»), называется ***расширенной числовой прямой***.

Можно дать определение предела для всех случаев сразу. Для этого потребуется понятие ***окрестности***. Окрестностью (или ε-окрестностью) конечного числа b (т. е. точки на действительной прямой) называется открытый интервал:

$$U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon,\ b + \varepsilon).$$

Окрестности бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$ определяются так:

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon},\ \infty\right), \quad U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Можно сказать, что окрестность точки — это множество точек, «близких» к данной.

Теперь определение предела можно сформулировать так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall U_\varepsilon(b)\ \ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \quad a_n \in U_\varepsilon(b).$$

Здесь b может быть как конечным числом, так и $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 5. Доказать, используя определение предела, что

$$\lim \frac{2n}{n+1} = 2.$$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$. Нам нужно найти натуральное число n_0, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Приводим к общему знаменателю и решаем неравенство:

$$\left|\frac{-2}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2 < (n+1)\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Число $\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$ может оказаться дробным, поэтому в качестве n_0 возьмём любое натуральное число, большее $\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$. Тогда при $n \geq n_0$ будет выполнено требуемое соотношение. Например, если $\varepsilon = 0{,}1$, то $\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon} = \dfrac{1{,}9}{0{,}1} = 19$, и при $n \geq 20$ получим $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$. Конечно, тем более это неравенство будет выполнено при $n \geq 40$ или $n \geq 100$. Чем больше n, тем ближе $\dfrac{2n}{n+1}$ к числу 2.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется ***сходящейся***. Последовательность, предел которой равен $+\infty$, $-\infty$ или вообще не существует, называется ***расходящейся***.

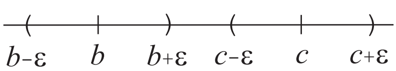
Пример 6. Последовательность $\{n^2\}$ расходится, так как $\lim n^2 = +\infty$. Действительно, n^2 принимает значения больше любого числа M — надо только взять $n \geq n_0 > \sqrt{M}$. Например, если $M = 1000$, то можно взять $n_0 = 32$. Тогда $\forall n \geq 32 \quad n^2 > 1000$.

Пример 7. Последовательность $\{(-1)^n\}$ расходится, так как не имеет предела. Действительно, нет такого числа, чтобы в любой его окрестности содержались бы все члены последовательности $-1, 1, -1, 1\ -1, \ldots$

Рассмотрим простейшие свойства предела последовательности.

Свойство 1. Последовательность не может иметь более одного предела.

Доказательство. Допустим, что $\lim a_n = b$, $\lim a_n = c$ и $b < c$.



Заметим, что у различных чисел b и c можно выбрать непересекающиеся окрестности. Для этого достаточно взять $\varepsilon < \dfrac{c-b}{2}$. Тогда ясно, что $U_\varepsilon(b) \cap U_\varepsilon(c) = \varnothing$. Используем определение предела: так как $b = \lim a_n$, то $\exists n_1 : \forall n \geq n_1 \quad a_n \in U_\varepsilon(b)$. Аналогично: $c = \lim a_n$, поэтому $\exists n_2 : \forall n \geq n_2 \quad a_n \in U_\varepsilon(c)$. Если взять $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, то $\forall n \geq n_0$ должны быть выполнены оба включения: $a_n \in U_\varepsilon(b)$, $a_n \in U_\varepsilon(c)$, а это невозможно.

Свойство 2. Любая сходящаяся последовательность ограничена.

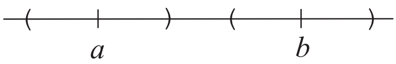
Доказательство. Пусть $\lim a_n = b$. Возьмём $\varepsilon = 1$. По определению предела, существует натуральное n_0 такое, что $b-1 < a_n < b+1$ $(\forall n \geq n_0)$. За пределами этой окрестности может остаться лишь конечное число членов последовательности — числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$.

Выбирая $c_1 = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, b-1\}$, $c_2 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, b+1\}$, получим: $\forall n \quad c_1 \le a_n \le c_2$, что и требовалось.

Замечание. Обратное утверждение неверно: последовательность может быть ограниченной, но не иметь предела. Пример — последовательность $\{(-1)^n\}$.

Свойство 3. Если существуют пределы $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ и для любого n выполнено $a_n \ge b_n$, то $a \ge b$.

Доказательство. От противного: допустим, что $a < b$.



Возьмём непересекающиеся окрестности $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$. По определению предела

$$\exists n_1 : \ \forall n \ge n_1 \quad a_n \in U_\varepsilon(a), \qquad \exists n_2 : \ \forall n \ge n_2 \quad b_n \in U_\varepsilon(b).$$

Значит, начиная с номера $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, выполнены оба включения. Но этого быть не может: любое число в $U_\varepsilon(b)$ больше любого числа в $U_\varepsilon(a)$, и в то же время $a_n \ge b_n$. Противоречие.

Замечание. Утверждение справедливо, даже если неравенство $a_n \ge b_n$ выполняется не для всех n, а только для достаточно больших, т. е. начиная с некоторого номера.

Строгое неравенство при переходе к пределу может нарушиться. Например, $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n}$ для всех n. Однако пределы равны: $\lim \dfrac{1}{2n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$.

1.3. Арифметические свойства пределов

1.3.1. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если $\lim \alpha_n = 0$. Последовательность $\{\beta_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если $\lim |\beta_n| = \infty$. Обратите внимание: предел бесконечно большой последовательности может быть равен $+\infty$, $-\infty$ или вообще не существовать. Например, последовательность $\{(-1)^n n\}$ — бесконечно большая, хотя предела не имеет.

Рассмотрим связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями. Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, $\alpha_n \ne 0$, то $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ — бесконечно большая. Действительно:

$$\lim \alpha_n = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \ge n_0 \quad |\alpha_n| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \ge n_0 \quad \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \lim \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = +\infty.$$

Здесь мы использовали очевидное соотношение

$$|\alpha_n| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$$

и определение предела: элементы последовательности $\dfrac{1}{|\alpha_n|}$, начиная с некоторого номера, становятся больше любого числа.

Установленная связь позволяет нам более внимательно рассматривать только свойства бесконечно малых последовательностей.

Свойство 1. Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\lim \alpha_n = 0$, $\lim \beta_n = 0$. По определению это означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \ \forall n \geq n_1 \ \ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \ \forall n \geq n_2 \ \ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Мы здесь пишем $\dfrac{\varepsilon}{2}$ вместо ε, однако смысл от этого не меняется: при больших n величина $|\alpha_n|$ становится меньше ***любого*** числа.) Возьмём $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда при $n \geq n_0$:

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \ \ |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$, а это и означает, что $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — бесконечно малая.

Замечание. Мы использовали в доказательстве важное неравенство:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Его справедливость легко установить для любых действительных чисел. Если $x + y \geq 0$, то $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$, так как $x \leq |x|$, $y \leq |y|$. Если $x + y < 0$, то $|x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$, так как $-x \leq |x|$, $-y \leq |y|$.

Свойство 2. Произведение ограниченной последовательности и бесконечно малой есть бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\lim \alpha_n = 0$, $\{\beta_n\}$ — ограничена, т. е. $|\beta_n| \leq M$ $(\forall n)$. По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \quad |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. (Здесь мы вместо ε написали $\dfrac{\varepsilon}{M}$ — на том же основании, что и $\dfrac{\varepsilon}{2}$ в предыдущем доказательстве. Смысла это не меняет: $|\alpha_n|$ будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{M}$, нужно только взять достаточно большой номер n.) Так как $|\beta_n| \leq M$, то получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \quad |\alpha_n \beta_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

т. е. $\lim \alpha_n \beta_n = 0$, что и требовалось.

Следствие. Произведение, разность бесконечно малых последовательностей, а также произведение бесконечно малой на число есть снова бесконечно малые последовательности.

Доказательство. Пусть $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Так как любая сходящаяся последовательность ограничена (см. 1.2), то, в частности, $\{\beta_n\}$ ограничена и $\lim \alpha_n\beta_n = 0$ по свойству 2. Рассматривая число λ как постоянную последовательность $\{\lambda\}$, также по свойству 2 получим: $\lim \lambda\alpha_n = 0$. Наконец, разность можно представить так:

$$\{\alpha_n\} - \{\beta_n\} = \{\alpha_n\} + (-1) \cdot \{\beta_n\}.$$

Применяя свойства 1 и 2, получим: $\lim(\alpha_n - \beta_n) = 0$.

Использование свойств бесконечно малых будет основано на применении следующей теоремы.

Теорема 2. $\lim a_n = a \;\Leftrightarrow\; a_n = a + \alpha_n$, где $\lim \alpha_n = 0$.

Доказательство. Обозначим $\alpha_n = a_n - a$. Тогда

$$\lim a_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \;\; |a_n - a| < \varepsilon \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \;\; |\alpha_n| < \varepsilon \;\Leftrightarrow \lim \alpha_n = 0,$$

что и требовалось.

1.3.2. Предел суммы, разности, произведения, частного

Теорема 3. Пусть существуют конечные пределы $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Тогда:

а) $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

б) $\lim a_n b_n = ab$;

в) если $b_n \neq 0$, $b \neq 0$, то $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. По теореме 2: $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Поэтому

$$a_n \pm b_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n),$$

$$a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

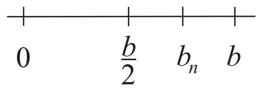
По свойствам бесконечно малых последовательностей $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$, $(\alpha_n \pm \beta_n)$ — бесконечно малые. Опять по теореме 2 получаем:

$$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad \lim a_n b_n = ab.$$

Чтобы доказать последний пункт теоремы, рассмотрим разность:

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{(b + \beta_n)b} = \frac{1}{(b + \beta_n)b}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Из свойств бесконечно малых последовательностей следует, что $b\alpha_n - a\beta_n$ — бесконечно малая. Докажем, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{(b+\beta_n)b}\right\}$ ограничена. Так как $b = \lim b_n$, то $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0 \quad |b_n| > \dfrac{|b|}{2}$. При таких n имеем:



$$\left|\frac{1}{(b+\beta_n)b}\right| = \left|\frac{1}{b_n b}\right| < \frac{1}{\left|\frac{b}{2}\right| |b|} = \frac{2}{|b|^2},$$

т. е. ограниченность доказана. Значит, разность $\left\{\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ представлена в виде произведения ограниченной последовательности на бесконечно малую. По свойству 2 из 1.3.1 она является бесконечно малой. Применяя теорему 2, получим то, что требовалось: $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

1.3.3. Понятие неопределённости

Теорему 3 об арифметических свойствах пределов можно применять, если $\lim a_n$, $\lim b_n$ конечны. В других случаях возможны так называемые ***неопределённости***. Поясним это понятие на примере.

Пример 8. а) Вычислим $\lim \dfrac{5n^2+2n+3}{n+7}$. Сразу применить теорему 3 нельзя, так как и числитель, и знаменатель стремятся к ∞. Проведём простое преобразование: $\dfrac{5n^2+2n+3}{n+7} = \dfrac{5n+2+\frac{3}{n}}{1+\frac{7}{n}}$. В полученном выражении числитель по-прежнему стремится к ∞, а знаменатель — к 1. Понятно, что дробь будет стремиться к ∞. Можно и строго это доказать: взять любое число M и найти номер n_0, начиная с которого $\dfrac{5n^2+2n+3}{n+7} > M$. Итак,

$$\lim \frac{5n^2+2n+3}{n+7} = +\infty.$$

б) Вычислим $\lim \dfrac{2n^2+5n+1}{3n^2+n+2}$. Разделим числитель и знаменатель на n^2, затем применим теорему 3:

$$\lim \frac{2n^2+5n+1}{3n^2+n+2} = \lim \frac{2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim 2 + \lim \frac{5}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 3 + \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

в) Вычислим $\lim \dfrac{n+3}{n^2+n+1}$. Опять имеем выражение, которое можно символически обозначить $\dfrac{\infty}{\infty}$: числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞. Вычисляем:

$$\lim \frac{n+3}{n^2+n+1} = \lim \frac{1+\dfrac{3}{n}}{n+1+\dfrac{1}{n}} = 0,$$

так как числитель стремится к 1, а знаменатель неограниченно увеличивается.

Итак, во всех трёх случаях выражение имело вид $\dfrac{\infty}{\infty}$, а ответы получились самые разные. Вот поэтому это выражение и называется ***неопределённостью вида*** $\dfrac{\infty}{\infty}$. Всего имеется 7 видов неопределённостей:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

В каждом из этих случаев можно привести примеры, приводящие к различным результатам. Любые другие выражения, даже содержащие символы ∞ и 0, неопределённостями не являются. Их пределы вычисляются непосредственно, с помощью определения.

Пример 9. Найти $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$, если $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = 0$, $b_n > 0$.

Решение. Возьмём произвольное число M. По определению предела, $\exists n_1$: $\forall n \geq n_1 \quad a_n > M$, а также $\exists n_2$: $\forall n \geq n_2 \quad b_n < 1$. Тогда при $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\} \quad \dfrac{a_n}{b_n} > M$. Значит, $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$, выражение вида $\dfrac{\infty}{0}$ неопределённостью не является.

В таких случаях можно рассуждать менее строго: $a_n \to +\infty$, $\dfrac{1}{b_n} \to +\infty$ (это следует из условия). Значит, $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n} \to +\infty$.

Пределы выражений, содержащих неопределённости, вычисляются с помощью различных преобразований. Одно из них показано в примере 8. Приведём ещё пример.

Пример 10. Вычислить $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение под знаком предела на $(\sqrt{n^2+n}+n)$:

$$\lim(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

1.4. Признаки существования предела

1.4.1. Лемма о сжатой переменной

Теорема 4. Рассмотрим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$. Пусть, начиная с некоторого номера, $a_n \le b_n \le c_n$. Если $\lim a_n = \lim c_n = k$, то последовательность $\{b_n\}$ сходится, причём $\lim b_n = k$.

Доказательство. Применяем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \ \forall n \ge n_1 \ \ |a_n - k| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \ \forall n \ge n_2 \ \ |c_n - k| < \varepsilon.$$

Возьмём $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда $\forall n \ge n_0 \quad k-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < k+\varepsilon$. Получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \ge n_0 \ \ |b_n - k| < \varepsilon$, т. е. $\lim b_n = k$.

Замечание. Сравните теорему 4 и свойство 3 из раздела 1.2 о переходе к пределу в неравенствах. Там было дано, что пределы существуют. Здесь существование $\lim b_n$ выводится из других условий.

Теорему 4 часто называют ***леммой о сжатой переменной***: последовательность $\{b_n\}$ «зажата» между последовательностями $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$. Применяется и название «лемма о двух милиционерах»: если $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ — милиционеры, которые идут в отделение милиции (стремятся к одному пределу), то туда же идёт и тот, кого они держат под руки.

1.4.2. Предел монотонной последовательности

Монотонными называются возрастающие или убывающие последовательности.

Теорема 5 ***(теорема Вейерштрасса)***. Монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность $\{a_n\}$ сходится.

Доказательство. Так как $\{a_n\}$ ограничена сверху, то множество её значений ограничено сверху и, по теореме 1 из 1.1, имеет точную верхнюю грань: $\alpha = \sup\{a_n\}$. Докажем, что $\alpha = \lim a_n$.

По определению точной верхней грани: $\forall \varepsilon > 0$ число $\alpha - \varepsilon$ уже не является верхней гранью, т. е. $\exists n_0$: $a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$. Так как $\{a_n\}$ — возрастающая, то $\forall n \ge n_0 \quad a_n \ge a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$. С другой стороны, α — верхняя грань $\{a_n\}$. Поэтому

$$\forall n \ge n_0 \quad \alpha \ge a_n > \alpha - \varepsilon,$$

т. е. a_n отличается от α меньше, чем на ε. Итак, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \ge n_0$ $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, т. е. $\lim a_n = \alpha$.

Аналогично можно доказать сходимость монотонно убывающей ограниченной снизу последовательности.

Замечание. Если $\{a_n\}$ возрастает и не ограничена сверху, то $\lim a_n = \infty$. Действительно, неограниченность означает, что $\forall M \ \exists n_0 : \ a_{n_0} > M$.

Используя возрастание, получаем: $\forall M\ \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \quad a_n > M$, т. е. $\lim a_n = \infty$.

Рассмотрим важный пример. Мы будем его часто использовать, поэтому оформим в виде теоремы.

Теорема 6. Последовательность $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Доказательство. Нам потребуется формула ***бинома Ньютона***, которую мы приведём без доказательства, но с подробными комментариями:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$
$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

С частными случаями формулы бинома Ньютона мы встречаемся в школе:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Числа C_n^k — биномиальные коэффициенты, они вычисляются по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Выражение $n!$ читается: «эн факториал». Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Чтобы использовать формулу без ограничений, договорились считать, что $0! = 1$. Таким образом, например,

$$C_3^0 = \frac{3!}{0!\,3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1,$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10, \text{ и т. д.}$$

В более общем случае:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n,$$

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!}, \ \ldots, \ C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Перейдём к доказательству теоремы. Чтобы применить теорему 5, убедимся, что $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Приведём аналогичное вычисление для a_{n+1}:

$$a_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots+ \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Заметим: каждое слагаемое (начиная с 3-го) увеличилось, количество слагаемых возросло. Значит, $a_{n+1} > a_n$, последовательность $\{a_n\}$ возрастает.

Докажем ограниченность сверху:

$$a_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \\ < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < \\ < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots = 2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Мы добавили к сумме слагаемые, чтобы превратить её в сумму бесконечной убывающей прогрессии. Итак, $a_n < 3$ $(\forall n)$, последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху. По теореме 5 она имеет предел. Обычно его обозначают буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828\ldots \approx 2{,}7.$$

Число e — основание натуральных логарифмов, первое знакомство с ними происходит в школе. Хотя все числа $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ рациональны, число e является иррациональным и, более того, трансцендентным.

1.4.3. Подпоследовательности

Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots .$$

Выберем из $\{a_n\}$ члены с номерами из этой последовательности:

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3}, \ldots .$$

Получили новую последовательность $\{a_{n_k}\}$, она называется ***подпоследовательностью*** в $\{a_n\}$.

Теорема 7. Если $\lim a_n = a$, то любая подпоследовательность в $\{a_n\}$ сходится и её предел тоже равен a.

Доказательство. Так как $\lim a_n = a$, то $\forall \varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, попадают в ε-окрестность точки a. Значит, и все члены подпоследовательности, начиная с некоторого, тоже попадут в эту ε-окрестность. Поэтому a — предел любой подпоследовательности. Теорема доказана.

Теорема 8 *(теорема Больцано – Вейерштрасса)*. Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ ограничена:

$$\alpha \leq a_n \leq \beta.$$

Разделим отрезок $[\alpha,\ \beta]$ пополам и обозначим $[\alpha_1,\ \beta_1]$ ту половину, которая содержит бесконечно много членов последовательности. Если этим свойством обладают обе половины $[\alpha,\ \beta]$, то можно выбрать любую. Возьмём a_{n_1} — любой элемент $\{a_n\}$, лежащий в $[\alpha_1,\ \beta_1]$.

Далее: $[\alpha_2,\ \beta_2]$ — та половина $[\alpha_1,\ \beta_1]$, которая содержит бесконечно много членов $\{a_n\}$. Выберем из них $a_{n_2} \in [\alpha_2,\ \beta_2]$ так, чтобы $n_1 < n_2$. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Докажем, что она сходится.

По принципу вложенных отрезков (см. 1.1), система отрезков:

$$[\alpha_1,\ \beta_1] \supseteq [\alpha_2,\ \beta_2] \supseteq \ldots \supseteq [\alpha_n,\ \beta_n] \supseteq \ldots$$

имеет непустое пересечение. Пусть $\gamma \in [\alpha_n,\ \beta_n]$ $(\forall n)$. Докажем, что $\gamma = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Так как $a_{n_k} \in [\alpha_k,\ \beta_k]$, $\gamma \in [\alpha_k,\ \beta_k]$, то $0 \leq |a_{n_k} - \gamma| < |\beta_k - \alpha_k|$. Но длины $[\alpha_k,\ \beta_k]$ стремятся к нулю: $|\beta_k - \alpha_k| = \dfrac{|\beta_1 - \alpha_1|}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$. По лемме о сжатой переменной тогда и $|a_{n_k} - \gamma| \to 0$, что равносильно требуемому:

$$\lim a_{n_k} = \gamma.$$

Предел подпоследовательности называется ***частичным пределом*** последовательности. Их может быть много. Можно доказать, что среди частичных пределов существуют наибольший и наименьший. Они называются ***верхним*** и ***нижним*** пределами последовательности. Используются обозначения:

$$\overline{\lim}\, a_n \text{ — верхний предел, } \underline{\lim}\, a_n \text{ — нижний предел.}$$

Ясно, что $\{a_n\}$ сходится к пределу a тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = a$.

Пример 11. Последовательность $\{1 + (-1)^n\}$ имеет два частичных предела:

$$\overline{\lim}\,(1 + (-1)^n) = 2, \quad \underline{\lim}\,(1 + (-1)^n) = 0.$$

К числу 2 сходится, например, подпоследовательность, образованная элементами с чётными номерами. К числу 0 сходится подпоследовательность элементов с нечётными номерами.

Если рассматривать любые, а не только ограниченные последовательности, то в число частичных пределов могут попасть и символы $+\infty$, $-\infty$.

Пример 12. Последовательность $\{(-1)^n n\}$ расходится, имеет 2 частичных предела:

$$\overline{\lim}(-1)^n n = +\infty, \quad \underline{\lim}(-1)^n n = -\infty.$$

1.4.4. Критерий Коши

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***фундаментальной***, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall m \geq n_0,\ \forall n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Говоря нестрого, фундаментальность означает, что члены последовательности с большими номерами близки друг к другу.

Теорема 9 *(критерий Коши).*

Последовательность $\{a_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ фундаментальна.

Доказательство. «$\Rightarrow$». Пусть $a = \lim a_n$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall m \geq n_0 \quad |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При таких n, m:

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Мы воспользовались неравенством $|x + y| \leq |x| + |y|$, выведенным в пункте 1.3.1.

«$\Leftarrow$». Дано: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall m, n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists n_0 :\ \forall m, n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < 1$. Последнее неравенство можно записать так: $-1 < a_n - a_m < 1$, или $a_m - 1 < a_n < 1 + a_m$. Зафиксируем m. Тогда получим, что $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность. По теореме Больцано – Вейерштрасса, она содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Докажем, что число c является пределом и всей последовательности.

Так как $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 :\ \forall k \geq k_0 \quad |a_{n_k} - c| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, последовательность фундаментальна, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :$

$\forall\, m,\, n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Возьмём $n_1 = \max\{n_0, n_{k_0}\}$. Тогда при $n,\, n_k > n_1$ выполнено:

$$|a_n - c| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - c| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ мы нашли номер n_1, начиная с которого $|a_n - c| < \varepsilon$. Это и означает, что $c = \lim a_n$.

1.5. Задачи с решениями

1. Найти точные верхнюю и нижнюю грани множества

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m,\ n\ \in \mathbb{Z}\ ,\ 0 < m < n \right\}.$$

Решение. Так как $0 < m < n$, то ясно, что $0 < \dfrac{m}{n} < 1$. В частности, 0 — нижняя грань A. Можно ли её увеличить? Если $\varepsilon > 0$, то всегда найдется $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Поэтому ε не является нижней гранью. Значит, 0 — наибольшая нижняя грань: $\inf A = 0$.

Число 1 является верхней гранью для A: $\dfrac{m}{n} < 1$, если $0 < m < n$. Попробуем уменьшить: рассмотрим число $1 - \varepsilon$. Снова возьмём натуральное n: $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда $1 - \dfrac{1}{n} > 1 - \varepsilon$, причём $1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n} \in A$. Значит, $1 - \varepsilon$ уже не является верхней гранью. Поэтому $\sup A = 1$.

2. Доказать ограниченность последовательности $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$.

Решение. Обозначим: $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$. Ясно, что $a_n > 0$. Требуется доказать, что сверху эта последовательность тоже ограничена. Найдём первые несколько членов последовательности: $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \dfrac{9}{8}$, $a_4 = \dfrac{16}{16} = 1$, $a_5 = \dfrac{25}{32}, \ldots$.

Кажется, дальше числа a_n будут убывать. Но это нужно доказать строго. Докажем, что при $n \geq 3$ выполняется $\dfrac{n^2}{2^n} > \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$. Для этого проведём равносильные преобразования неравенств:

$$\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \;\Leftrightarrow\; 2n^2 > n^2 + 2n + 1 \;\Leftrightarrow\; n^2 > 2n + 1 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; n^2 - 2n + 1 > 2 \;\Leftrightarrow\; (n-1)^2 > 2.$$

Последнее неравенство очевидно. Значит, $a_3 = \dfrac{9}{8}$ — самый большой член последовательности, $a_n \leq \dfrac{9}{8}$ $(\forall n)$.

3. Доказать, используя определение предела: $\lim \dfrac{5n^2+2n+3}{n^2-1} = 5$.

Решение. Требуется доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{5n^2+2n+3}{n^2-1} - 5\right| < \varepsilon.$$

Поступим так же, как в примере 5 (раздел 1.2): решая последнее неравенство, для данного ε найдём такое n_0, чтобы при $n \geq n_0$ неравенство было выполнено. Если это потребуется, увеличим n_0. Для нас главное — найти ***какое-нибудь*** n_0 с указанными условиями.

$$\left|\frac{5n^2+2n+3-5n^2+5}{n^2-1}\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \left|\frac{2n+8}{n^2-1}\right| < \varepsilon.$$

Упростим неравенство, увеличив его левую часть. Ясно, что

$$\frac{2n+8}{n^2-1} < \frac{2n+8n}{n^2-n} = \frac{10}{n-1}.$$

Теперь, если $\dfrac{10}{n-1} < \varepsilon$, то тем более $\left|\dfrac{2n+8}{n^2-1}\right| < \varepsilon$. Так как $\dfrac{10}{n-1} < \varepsilon$ равносильно неравенству $n > \dfrac{10}{\varepsilon} + 1$, то в качестве n_0 можно взять $\dfrac{10}{\varepsilon} + 1$, а если это число дробное, то какое-нибудь целое, большее $\dfrac{10}{\varepsilon} + 1$.

4. Доказать, используя определение предела: $\lim \log_n 2 = 0$.

Решение. Требуется доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \quad |\log_n 2| < \varepsilon.$$

Так как $\log_n 2 > 0$, то модуль можно не писать. Решим неравенство $\log_n 2 < \varepsilon$. Так как $\log_n 2 \cdot \log_2 n = 1$, то

$$\log_n 2 < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\log_2 n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \log_2 n > \frac{1}{\varepsilon} \ \Leftrightarrow\ n > 2^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

В качестве n_0 можно взять любое целое число, большее $2^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

5. Сформулировать с помощью неравенств утверждения:

а) число A не является пределом последовательности $\{x_n\}$;

б) последовательность $\{x_n\}$ расходится.

Решение. Введём значок $\neg$ для обозначения отрицания. Если P — какое-либо высказывание, то $\neg P$ — его отрицание, т. е. высказывание «P неверно». При отрицании утверждений, содержащих кванторы, нужно пользоваться правилами:

$$\neg(\forall x\ P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\ (\neg P(x)),$$
$$\neg(\exists x\ P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\ (\neg P(x)).$$

По определению: $A = \lim x_n \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 : \; \forall n \geq n_0 \quad |x_n - A| < \varepsilon.$

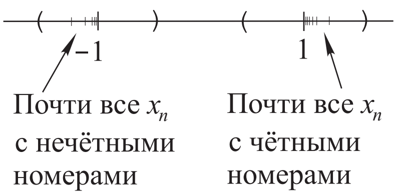
а) $A \neq \lim x_n \;\Leftrightarrow\; \neg(\forall\varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \; \forall n \geq n_0 \quad |x_n - A| < \varepsilon) \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\varepsilon > 0 : \; \neg(\exists n_0 : \; \forall n \geq n_0 \quad |x_n - A| < \varepsilon) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists\varepsilon > 0 : \; \forall n_0 \quad \neg(\forall n \geq n_0 \quad |x_n - A| < \varepsilon) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists\varepsilon > 0 : \; \forall n_0 \;\; \exists n \geq n_0 : \quad \neg(|x_n - A| < \varepsilon) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists\varepsilon > 0 : \; \forall n_0 \;\; \exists n \geq n_0 : \quad |x_n - A| \geq \varepsilon.$$

б) $\{x_n\}$ расходится $\quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \; \forall A \; \lim x_n \neq A \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \; \exists\varepsilon > 0 : \; \forall n_0 \; \exists n \geq n_0 : \; |x_n - A| \geq \varepsilon.$$

6. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n-1}$ расходится.



Решение. При больших чётных n члены последовательности близки к 1. При больших нечётных n члены последовательности близки к -1. Слово «близки» уточняется, как всегда, с помощью числа ε (или ε-окрестности).

Если взять непересекающиеся окрестности чисел 1 и -1, то становится ясно, что нет такого числа, чтобы в любой его окрестности содержались бы все x_n, начиная с некоторого номера.

7. Доказать, что последовательность $a_n = n(1 + (-1)^n)$ не ограничена, но не является бесконечно большой.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности:

$$0,\ 4,\ 0,\ 8,\ 0,\ 12,\ 0,\ 16,\ \ldots\ .$$

Члены с чётными номерами неограниченно возрастают, поэтому последовательность не является ограниченной. Но неверно было бы утверждать, что $\lim |\, a_n \,| = \infty$. Действительно, как угодно далеко встречаются нули, поэтому, например, в окрестности $(1, \infty)$ лежат не все члены последовательности, начиная с некоторого.

8. Доказать, что последовательность $\dfrac{3n}{n^2+2}$ является бесконечно малой.

Решение. Первый способ — используя определение. Требуется доказать, что $\lim \dfrac{3n}{n^2+2} = 0$, т. е. $\forall\varepsilon > 0 \; \exists n_0$: при $n \geq n_0 \quad \dfrac{3n}{n^2+2} < \varepsilon$. Так как $\dfrac{3n}{n^2+2} < \dfrac{3n}{n^2} = \dfrac{3}{n}$, то при $n \geq n_0 = \dfrac{3}{\varepsilon}$ требуемое неравенство будет выполнено. Если число $\dfrac{3}{\varepsilon}$ дробное, то нужно взять в качестве n_0 какое-нибудь натуральное число, большее $\dfrac{3}{\varepsilon}$.

Второй способ — используя теоремы о пределах и уже рассмотренные примеры. Преобразуем: $\lim \dfrac{3n}{n^2+2} = \lim \dfrac{3}{n+\dfrac{2}{n}}$. Так как $\dfrac{2}{n} \to 0$, то знаменатель $\left(n+\dfrac{2}{n}\right) \to \infty$. Следовательно, поскольку числитель постоянен, вся дробь стремится к 0.

9. Вычислить $A = \lim \dfrac{(n+1)^5+(n-1)^5}{(n+1)^5-(n-1)^5}$.

Решение. Выражение содержит неопределённость — уже в знаменателе имеем $\infty-\infty$. Значит, нужно преобразовать так, чтобы неопределённости не было. Разделим числитель и знаменатель на n^5:

$$A = \lim \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^5}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^5} = \left\langle \frac{2}{+0} \right\rangle = \infty.$$

Символическое выражение $\dfrac{2}{+0}$ мы взяли в кавычки — на самом деле делим не на 0, а на выражение, ***стремящееся*** к 0. Причём справа, так как знаменатель положителен. Неопределённости нет, предел равен $+\infty$.

10. Вычислить $A = \lim \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Решение. Используем определение факториала (см. 1.4.2):

$$\lim \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+1)\cdot (n+2)+1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+1)\cdot (n+2)\cdot (n+3)} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle =$$
$$= \lim \frac{(n+2)+1}{(n+2)\,(n+3)} = \lim \frac{n+3}{(n+2)\,(n+3)} = \lim \frac{1}{n+2} = 0.$$

11. Найти частичные пределы последовательности $a_n = \dfrac{2n}{n+3}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$.

Решение. Заметим, что $\lim \dfrac{2n}{n+3} = \lim \dfrac{2}{1+\dfrac{3}{n}} = 2$, а $\lim \cos\dfrac{2\pi n}{3}$ не существует, так как $\cos\dfrac{2\pi n}{3}$ равен либо 1 (если n делится на 3), либо $-\dfrac{1}{2}$ (если n не делится на 3). Значит, имеется 2 частичных предела:

$\overline{\lim}\, a_n = 2\cdot 1 = 2$ (к этому пределу сходится, например, подпоследовательность $\{a_{3k}\mid k \in \mathbb{N}\}$);

$\underline{\lim}\, a_n = 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$ (к этому пределу сходится, например, подпоследовательность $\{a_{3k+1}\mid k\in\mathbb{N}\}$).

Любая сходящаяся подпоследовательность сходится или к 2, или к -1.

12. Доказать, что $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Решение. Рассмотрим последовательность $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$ и докажем, что $\lim \alpha_n = 0$. Так как $n = (1+\alpha_n)^n$, то, применяя формулу бинома Ньютона (см. 1.4.2), получим: $n = 1 + n\alpha_n + \dfrac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \ldots$. Так как $\alpha_n > 0$ (при $n > 1$), то все слагаемые здесь положительны. Значит,

$$n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

(мы отбросили остальные слагаемые). Отсюда $0 < \alpha_n < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. По лемме о сжатой переменной (теорема 4 из 1.4.1) получаем, что $\lim \alpha_n = 0$.

1.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти точные верхние и нижние грани множеств:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 5\},$$
$$B = \left\{ \frac{n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$C = \left\{ (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Доказать ограниченность последовательности $a_n = \dfrac{n}{n^2+20}$, найти наибольший её член.

3. Найти $\inf a_n$, $\sup a_n$ для последовательностей:

а) $a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{3}{n} + 5\right)$; б) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 3 + 5}{n}$.

4. Какие из следующих последовательностей являются ограниченными?

а) $\{3n - 100\}$; б) $\{20 - n\}$; в) $\{\sin n\}$;

г) $\left\{1 + (-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}\right\}$; д) $\{(-1)^n n\}$; е) $\left\{\dfrac{10^n}{n!}\right\}$.

5. Доказать, что $\lim \dfrac{10n+3}{5n-1} = 2$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ такое натуральное $n_0 = n_0(\varepsilon)$, чтобы при $n \geq n_0$ выполнялось неравенство $\left|\dfrac{10n+3}{5n-1} - 2\right| < \varepsilon$. Указать n_0 для следующих значений ε:

а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}01$; в) $\varepsilon = 0{,}001$.

6. Доказать, используя определение предела:

а) $\lim \dfrac{\sin n}{n} = 0$; б) $\lim 2^n = \infty$; в) $\lim \dfrac{3n+2}{2n+3} = \dfrac{3}{2}$;

г) $\lim (0,6)^n = 0$; д) $\lim \dfrac{3^n + 2^n}{7 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n} = \dfrac{1}{5}$; е) $\lim \ln n = \infty$.

7. Рассмотрим множества :

$$M_1 = \{\{a_n\} \mid \lim a_n = +\infty\};$$

$$M_2 = \{\{a_n\} \mid \lim a_n = -\infty\};$$

M_3 — множество бесконечно больших последовательностей;

M_4 — множество неограниченных последовательностей.

Доказать, что

$$M_1 \cup M_2 \subset M_3 \subset M_4.$$

С помощью примеров доказать, что включения строгие, т. е. равенства не справедливы.

8. Вычислить пределы:

а) $\lim \left(5 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{8}{n^2}\right)$; б) $\lim \dfrac{10n^2 + 7n + 2}{5n^2 - 6n - 100}$;

в) $\lim \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right)$; г) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{8n^3 + n}}{n+1}$;

д) $\lim \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$; е) $\lim \dfrac{\sqrt[4]{2n^3 - 1} + \sqrt[5]{n^7 + 3}}{\sqrt[6]{n^8 + n^3 + 2} - n}$;

ж) $\lim n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$; з) $\lim \left((n+1)^{\frac{2}{3}} - (n-1)^{\frac{2}{3}}\right)$;

и) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$; к) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n+3}\right)^{n}$.

9. Вычислить пределы:

а) $\lim(a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n)$, $\quad |\,q\,| < 1$;

б) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

в) $\lim \left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}\right)$.

10. Найти все частичные пределы последовательностей:

а) $\left\{3 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$; б) $\left\{(-3)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$; в) $\left\{3 + \cos \dfrac{n\pi}{2}\right\}$;

г) $\left\{2 + 3\,(-1)^n + 5\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right\}$; д) $\left\{\sin \dfrac{\pi n}{4}\right\}$.

11. Пусть $\lim a_n = b$, $b \in \mathbb{R}$. Найти пределы последовательностей:
а) $\{a_{n+1} - a_n\}$; б) $\{2a_n + 3a_{n-1}\}$; в) $\{a_{n+1} \cdot a_n\}$; г) $\left\{\dfrac{1}{|a_n|}\right\}$.

12. Доказать, что последовательность, заданная реккурентным соотношением $x_{n+1} = \sin x_n$, $x_1 = 1$, сходится.

13. Доказать, что последовательность, заданная реккурентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$, $x_1 = 0$, сходится. Найти её предел.

14. Доказать, что последовательность $\{S_n\}$, где $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, расходится. Указание: проверить, что $S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2}$, и воспользоваться критерием Коши.

1.7. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти точную нижнюю грань множества

$$\left\{ \frac{10n+7}{2n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Начиная с какого номера n члены последовательности $\left\{\dfrac{2}{n^2}\right\}$ отличаются от предела этой последовательности меньше, чем на $\varepsilon = 0{,}01$?

3. Для последовательности

$$-2,\ 1,\ -2,\ 2,\ -2,\ 3,\ -2,\ 4,\ \ldots$$

определить, какое из высказываний является истинным:
1) бесконечно большая, предел равен бесконечности;
2) бесконечно большая, предел не существует;
3) не является бесконечно большой.

4. Вычислить $\lim \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

5. Сколько последовательностей из 5 перечисленных являются сходящимися?

$$\{n!\}\,, \quad \left\{\frac{10}{n!}\right\}, \quad \left\{\frac{n}{3n+2}\right\}, \quad \{\sin n\}\,, \quad \{\sin 2\pi n\}\,.$$

6. Найти нижний предел последовательности $a_n = \cos \dfrac{2\pi n}{3}$.

ГЛАВА 2

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

2.1. Функции одной действительной переменной

Мы будем изучать функции одной действительной переменной

$$y = f(x),$$

имея в виду под этой записью, что существует закон, сопоставляющий каждому значению x из некоторого множества $D \subseteq \mathbb{R}$ определённое значение $y \in \mathbb{R}$.

Такой подход позволяет рассматривать многие зависимости между явлениями и величинами в практической жизни. С другой стороны, он имеет хороший математический фундамент: функция $y = f(x)$ — это отображение $f\colon D \to \mathbb{R}$. Во введении к книге «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» мы, отправляясь от понятия множества, начали изучать самые общие свойства функций. Уточнили известные из школьного курса понятия «область определения» и «множество значений» функции. Познакомились со свойствами инъективности, сюръективности, биективности; рассмотрели простейшие примеры.

2.1.1. Способы задания и основные свойства функций

Мы начинаем подробно изучать функции, у которых и область определения D, и множество значений $f(D)$ — подмножества $\mathbb{R}$. Кроме обозначения $y = f(x)$ используются и другие записи: $y = y(x)$, $f(x)$ или просто f.

Основным способом задания такой функции является ***аналитический***. (Говорят также, что функция задана ***формулой***.) Формула может включать символы уже изученных функций, знаки операций.

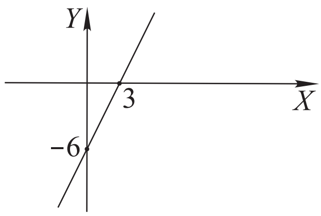
Пример 1. Пусть функция задана формулой $y = \sqrt{1+x}$. Если область определения при этом не указана, то имеется в виду ***естественная*** область определения, т. е. множество x, для которых можно найти значение y. В нашем примере такой областью является $D = [-1, \infty)$. Каждому $x \in D$ должно соответствовать единственное значение y. Поэтому в формулах, задающих функции, при извлечении корней всегда рассматривается ***арифметическое*** (т. е. положительное) значение корня. Например, если $x = 8$, то $y = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$ (а не -3).

Другой, также очень важный способ задания функций — графический. ***Графиком*** функции $f(x)$ называется множество точек на плоскости

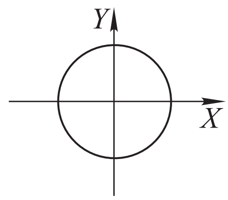
$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}.$$

Конечно, чтобы рассматривать графики, на плоскости нужно выбрать систему координат.

Пример 2. Рассмотрим функцию, заданную графически прямой линией, проходящей через точки $(3, 0)$ и $(0, -6)$. Найдём для неё аналитическое выражение. Любую невертикальную прямую можно задать уравнением $y = kx + b$. Подставляя координаты точек, найдём: $k = 2$, $b = -6$. Поэтому $y = 2x - 6$ — функция, имеющая такой график. Вертикальная прямая не является графиком какой-либо функции: одному значению x соответствует бесконечно много значений y.



Не является графиком функции и окружность. Здесь любому $x \in (-R, R)$ соответствуют 2 значения y. Поэтому можно считать, что окружность задает графически 2 функции. Их графики — верхняя и нижняя полуокружности.



Формула, связывающая независимую переменную x и зависимую от неё y, может не выражать ***явно*** y через x, а иметь вид

$$F(x, y) = 0.$$

Такое равенство может задавать функцию: подставляя значение x, получаем уравнение относительно y. Решая его, находим $y = y(x)$. В этом случае говорят, что функция задана ***неявно***.

В рассмотренном выше примере уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Оно неявно задает две функции: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Параметрический способ задания линий на плоскости обсуждался в АГ, 5.1. Он используется и для задания функций: система уравнений

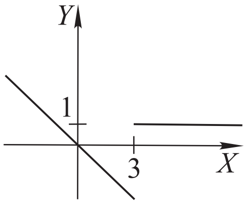
$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \ t \in [\alpha, \beta]$$

задаёт функцию, если для каждого x (из некоторого множества) можно, используя параметр t, однозначно найти соответствующее ему значение y. Другими словами, y есть функция от x, но задана она с помощью параметра.

Пример 3. Рассмотрим уравнения: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$. Они задают функцию $y = y(x)$, так как для $x \in [-R, R]$ можно найти $t \in [0, \pi]$, а затем вычислить вполне определённое значение y.

Если же параметр t будет принимать значения от 0 до 2π, то тогда каждому x соответствуют 2 разных y, т. е. функции не получается. Возводя равенства в квадрат и складывая, получим уравнение $x^2+y^2 = R^2$. Как мы знаем, оно неявно задает 2 функции, графики которых — полуокружности.

Может случиться, что функция задана несколькими формулами.



Пример 4. Пусть $f(x) = \begin{cases} -x\ ,\ x < 3, \\ \ \ 1\ \ ,\ x \geq 3. \end{cases}$ Такой способ задания будем называть ***кусочно-аналитическим***. Легко построить график такой функции.

В прикладных вопросах иногда применяется табличный способ задания функций. В таблице указываются значения x, выбранные по некоторому правилу из области определения, и соответствующие им значения y.

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$. Напомним основные свойства, которыми может обладать функция.

Функция f называется ***ограниченной сверху***, если

$$\exists M :\ \forall x \in D\ \ f(x) < M.$$

Функция f называется ***ограниченной снизу***, если $\exists M : \forall x \in D\ f(x) > M$. Функция называется ***ограниченной***, если она ограничена и сверху, и снизу.

Функция f называется ***инъективной***, если

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 \neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

Функция $f : D \to E$ называется ***сюръективной***, если

$$\forall y \in E\ \ \exists x \in D :\ \ f(x) = y.$$

Если f является инъективной и сюръективной, то она называется ***биективной***.

Функция f называется ***чётной***, если её область определения D симметрична относительно нуля и

$$\forall x \in D \quad f(-x) = f(x).$$

Функция f называется ***нечётной***, если D симметрична относительно нуля и

$$\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x).$$

Конечно, функция может не быть ни чётной, ни нечётной. В этом случае говорят, что функция — ***общего вида***.

Функция f называется ***периодической***, если

$$\exists T \neq 0 :\ \forall x \in D \quad x + T \in D,\ \ f(x+T) = f(x).$$

Наименьшее из таких чисел T называется ***периодом*** f.

Любое из перечисленных свойств можно сформулировать как свойство графика функции. Покажем это на примере чётных и нечётных функций.

Теорема 1. График чётной функции симметричен относительно оси OY, график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Доказательство. Симметрия графика Γ_f относительно оси OY означает:

$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (-x, y) \in \Gamma_f.$$

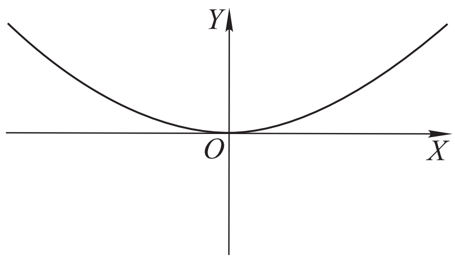
Для чётных функций это действительно так:

$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = f(-x) \;\Leftrightarrow\; (-x, y) \in \Gamma_f.$$

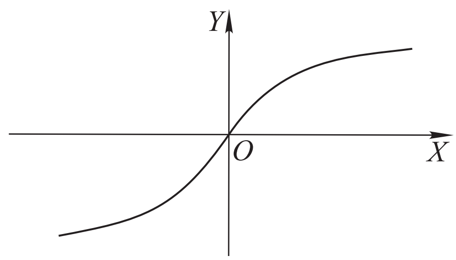
Аналогично проверяется, что для нечётной функции

$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (-x, -y) \in \Gamma_f,$$

что и означает симметрию графика относительно точки $(0, 0)$.



Чётная функция



Нечётная функция

2.1.2. Операции на множестве функций

Для функций естественным образом определяются арифметические действия:

$$(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x),$$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Область определения каждой из новых функций — пересечение областей определения f_1 и f_2. В случае частного нужно удалить точки, где знаменатель обращается в нуль.

Очень важным способом образования новых функций является операция суперпозиции. Пусть $f_1 : E \to G$, $f_2 : D \to E$. Тогда ***суперпозицией*** функций f_1, f_2 называется функция

$$f_1 \circ f_2 : D \to G,$$

действующая по правилу:

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)).$$

Суперпозицию часто также называют ***сложной*** функцией.

Пример 5. Функция $f(x)=(x^2+2)^2$ образована из функций $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=2$ с помощью сложения и суперпозиции: $f(x)=f_1(f_1(x)+f_2(x))$; $f=f_1\circ(f_1+f_2)$.

Рассмотрим ещё операцию обращения (взятия обратной функции). Пусть $f:D\to E$, f биективна. Напомним: это значит, что f инъективна (т. е. разные числа переводит в разные) и сюръективна (т. е. любой $y\in E$ является образом некоторого $x\in D$). В этих условиях существует ***обратная*** функция:

$$f^{-1}:E\to D,$$

причём $f^{-1}(y)=x \;\Leftrightarrow\; f(x)=y$. Независимая переменная для f^{-1} обозначена y, а значение функции — x. Конечно, важны не используемые буквы, а область определения и правило вычисления значений функции. Обратную функцию можно определить равенством

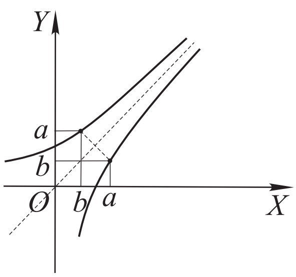
$$(f^{-1}\circ f)(x)=x \;\;(\forall x\in D).$$

Пример 6. Для функции $f(x)=2x$, $x\in\mathbb{R}$, обратной является функция

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x,\; x\in\mathbb{R}.$$

Обратим внимание на свойство графика обратной функции.

Теорема 2. Графики функций f, f^{-1} симметричны друг другу относительно прямой $y=x$.



Доказательство. По определению:

$$\Gamma_f=\{(a,b)\mid b=f(a)\}=\{(a,b)\mid a=f^{-1}(b)\},$$

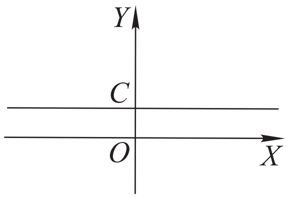
$$\Gamma_f^{-1}=\{(b,a)\mid a=f^{-1}(b)\}.$$

Поэтому $(a,b)\in\Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (b,a)\in\Gamma_f^{-1}$. Симметрию точек (a,b) и (b,a) относительно прямой $y=x$ легко увидеть с помощью рисунка. Действительно, биссектриса прямого угла в равнобедренном прямоугольном треугольнике является и высотой, и медианой.

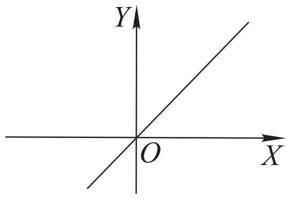
2.1.3. Элементарные функции

Элементарными называются функции, полученные из ***основных элементарных*** с помощью конечного числа арифметических действий и операций суперпозиции. К основным элементарным относятся постоянные функции $y=C$ (для различных чисел C), степенные функции $y=x^\alpha$ (для различных α), показательные и логарифмические функции $y=a^x$, $y=log_a x$ (для различных $a>0$, $a\neq 1$), тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ и обратные к ним. Подробно эти функции изучаются в школе. Напомним здесь их графики, иногда указывая некоторые свойства.

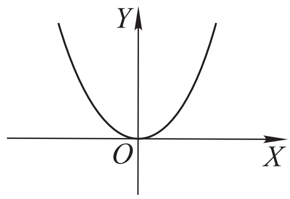
Постоянные и простейшие из степенных функций $y = x^{\alpha}$:



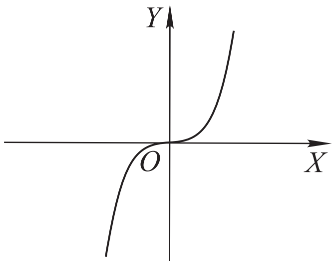
$y = C$ (константа)



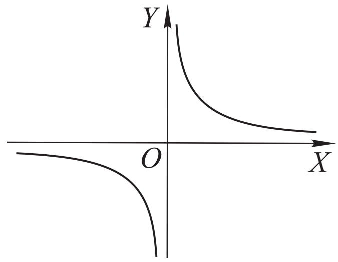
$y = x$



$y = x^2$ (парабола)



$y = x^3$ (кубическая парабола)



$y = x^{-1}$ (гипербола)

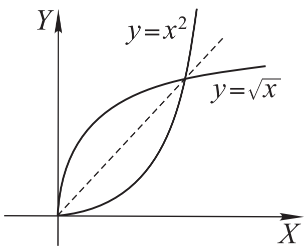
Заметим, что если α — чётное число, то $y = x^{\alpha}$ — чётная функция, если α — нечётно, то и функция $y = x^{\alpha}$ нечётна. Обратите внимание на симметрию соответствующих графиков.

Рассмотрим пример степенной функции с дробным показателем:

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

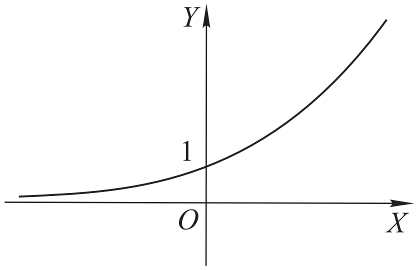
Построим её как обратную для функции $y = x^2$. Строго говоря, функция $y = x^2$ не имеет обратной, так как не является ни инъективной, ни сюръективной. Поэтому изменим область определения функции. Рассмотрим множество

$$D = \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

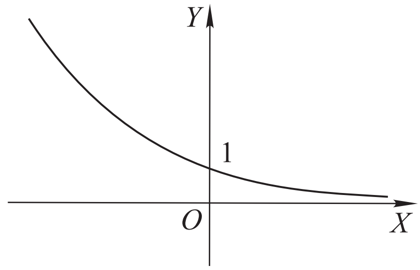


Тогда $x^2 : D \to D$ — биективна. Значит, для неё существует обратная функция $x = \sqrt{y}$. Привычнее, однако, обозначать независимую переменную x: $y = \sqrt{x}$. Построим графики прямой и обратной функций на одном чертеже, пользуясь симметрией. График $y = \sqrt{x}$ — одна из ветвей параболы $y^2 = x$. Другая её ветвь — график функции $y = -\sqrt{x}$.

Перейдём к показательным функциям:



$y=a^x,\ a>1$

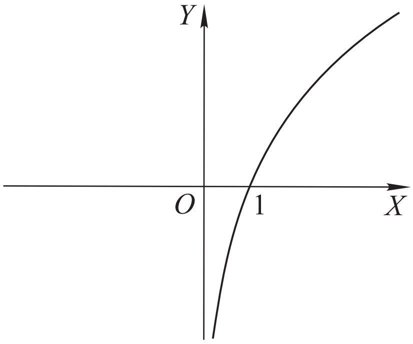


$y=a^x,\ 0<a<1$

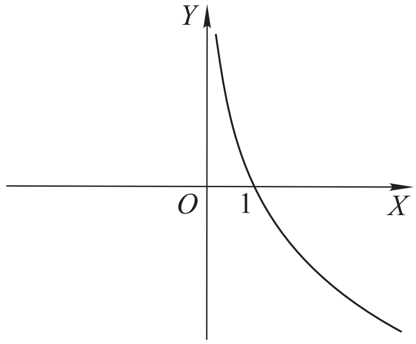
Функция $y = a^x$ задаёт биективное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Поэтому существует обратная функция

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

Графики логарифмических функций, по теореме 2, симметричны графикам соответствующих показательных функций:

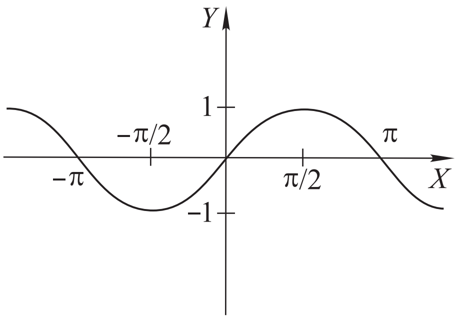


$y=\log_a x,\ a>1$

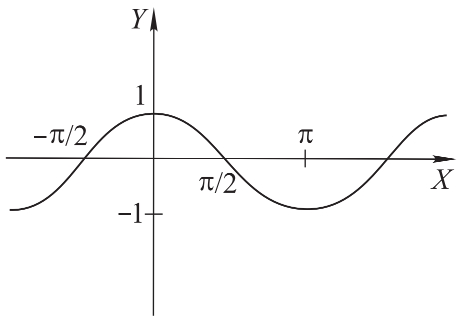


$y=\log_a x,\ 0<a<1$

Тригонометрические функции — периодические, период синуса и косинуса равен 2π, период тангенса и котангенса π.



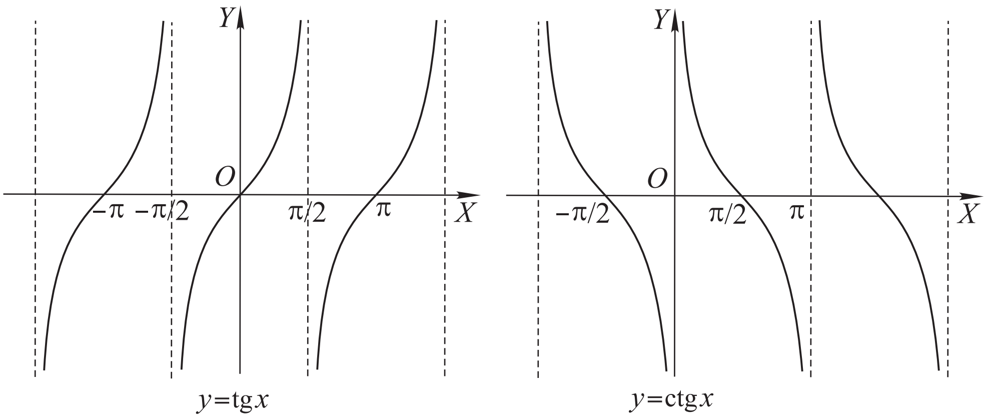
$y=\sin x$



$y=\cos x$

Функция $y = \cos x$ — чётная; функции $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — нечётные.

Графики тангенса и котангенса:



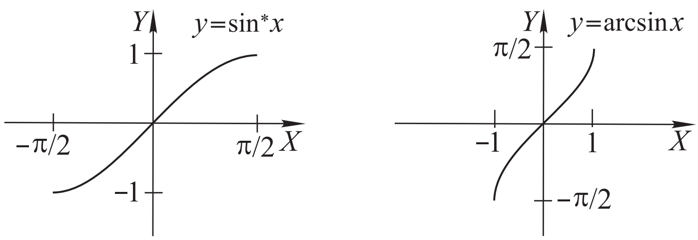
Для построения обратных тригонометрических функций поступим так же, как в случае функции $y = x^2$. Так как $y = \sin x$ — не биективна, рассмотрим синус с более узкой областью определения:

$$\sin^*\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]\,.$$

Теперь это биективная функция (график хорошо это иллюстрирует). Для неё существует обратная:

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Построим график арксинуса, используя симметрию.



Как и $\sin x$, функция $\arcsin x$ является нечётной. Вне отрезка $[-1, 1]$ она не определена.

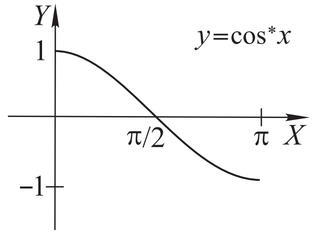
Таким же образом рассмотрим и другие обратные тригонометрические функции. Выбираем отрезок, где $\cos x$ — биективная функция, сужаем область определения:

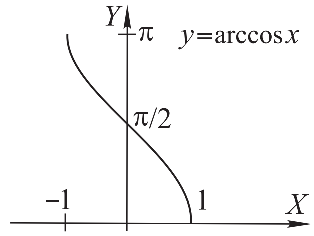
$$\cos^* : [0, \pi] \to [-1, 1]\,.$$

Обратной для ***этой*** функции (т. е. для $\cos x$ с областью определения $[0, \pi]$; для $\cos x$ с более широкой областью определения обратной функции не существует) является

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]\,.$$

Строим график (с помощью теоремы 2).



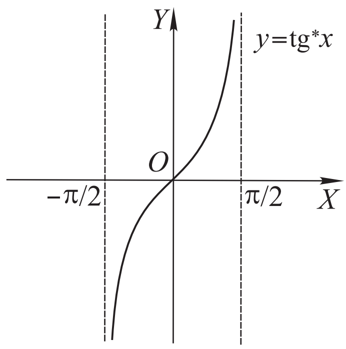


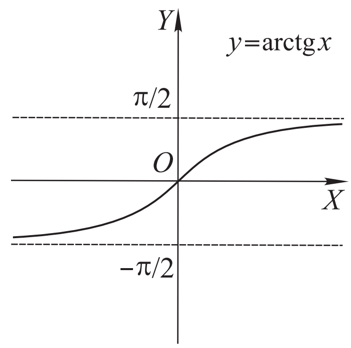
Аналогично, для построения графика арктангенса, сужаем область определения тангенса:

$$\mathrm{tg}^* : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}.$$

Это биективная функция. Обратная к ней называется арктангенсом:

$$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

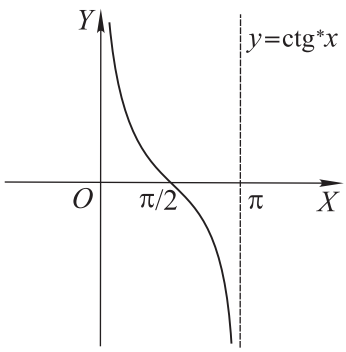


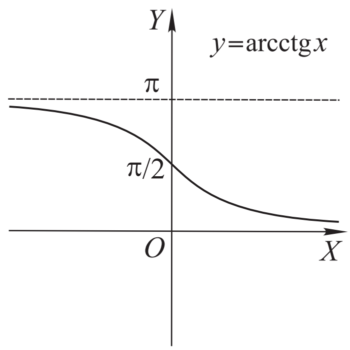


Наконец, обратной к функции $\mathrm{ctg}^* : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ является функция

$$\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi).$$

Их графики симметричны друг к другу относительно прямой $y = x$.





В приложениях часто встречаются ***гиперболические*** функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический синус,}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический косинус,}$$

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ — гиперболические тангенс и котангенс. Это, конечно, элементарные функции, но к числу основных элементарных они не относятся.

Для гиперболических функций справедливы формулы, напоминающие известные соотношения тригонометрии:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \ \ (\forall x \in \mathbb{R}),$$

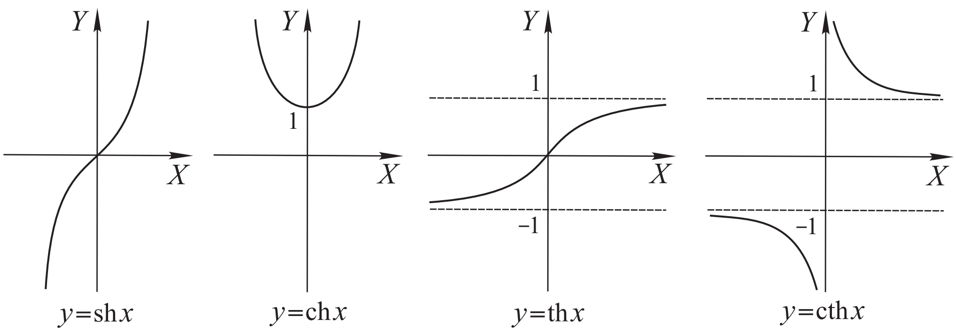
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Название «гиперболический» связано с тем, что функции $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ задают параметрически гиперболу — подобно тому, как функции $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ задают окружность.

Из определения легко следует, что $\operatorname{ch} x$ — функция чётная, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ — функции нечётные.

Рассмотрим графики гиперболических функций:



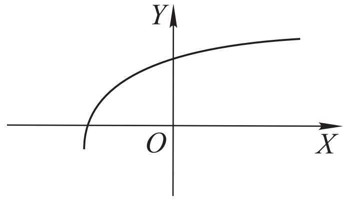
2.1.4. Преобразование графиков

Освоим несколько приёмов построения графиков, не требующих глубокого исследования функции. Пусть график функции $f(x)$ известен. Научимся строить графики функций:

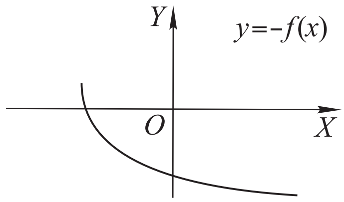
$$f_1(x) = -f(x), \quad f_2(x) = f(-x), \quad f_3(x) = f(x) + a,$$

$$f_4(x) = f(x + a), \quad f_5(x) = kf(x), \quad f_6(x) = f(kx).$$

Возьмём график какой-либо функции $f(x)$:



Построим графики функций $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$.



Рассмотрим $f_1(x) = -f(x)$. Ясно, что

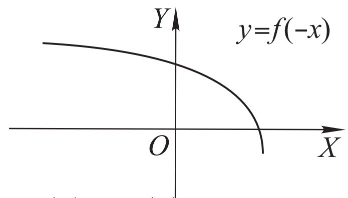
$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (x, -y) \in \Gamma_{f1},$$

Γ_{f1} симметричен Γ_f относительно оси OX.

Аналогично для $f_2(x) = f(-x)$:

$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (-x, y) \in \Gamma_{f2},$$

Γ_{f2} симметричен Γ_f относительно оси OY.



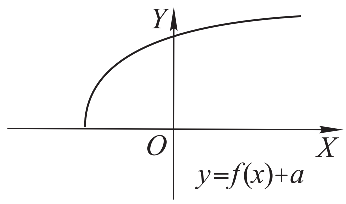


График функции $f_3(x) = f(x) + a$ получается из графика $f(x)$ сдвигом по оси OY на a единиц, так как

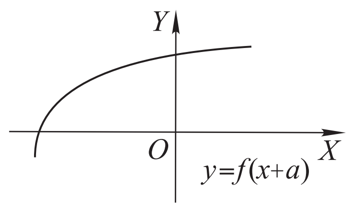
$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (x, y + a) \in \Gamma_{f3}$$

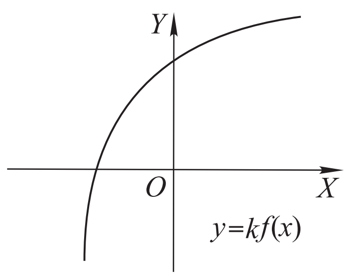
(сдвигать нужно вверх, если $a > 0$, или вниз, если $a < 0$).

График функции $f_4(x) = f(x + a)$ получается из графика $f(x)$ сдвигом по оси OX на a единиц, так как

$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (x + a, y) \in \Gamma_{f4}$$

(отсюда видно, что сдвигать нужно влево, если $a > 0$, или вправо, если $a < 0$).





Так как для функции $f_5(x) = kf(x)$ ясно:

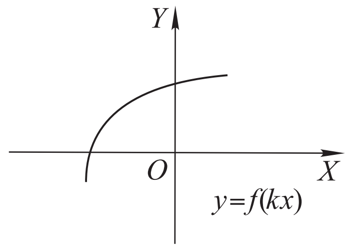
$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (x, ky) \in \Gamma_{f5},$$

то график $y = kf(x)$ при $k > 0$ получается из графика $f(x)$ растяжением в k раз по оси OY. Если $0 < k < 1$, то фактически получается сжатие: растянуть в 0,5 раза — это значит сжать в 2 раза.

Аналогично для функции $f_6(x) = f(kx)$:

$$(x, y) \in \Gamma_f \;\Leftrightarrow\; (kx, y) \in \Gamma_{f6},$$

поэтому при $k > 1$ график $y = f(kx)$ получается из графика $f(x)$ сжатием по оси OX в k раз. Если же $0 < k < 1$, то фактически получается растяжение.



Пример 7. Построить график функции

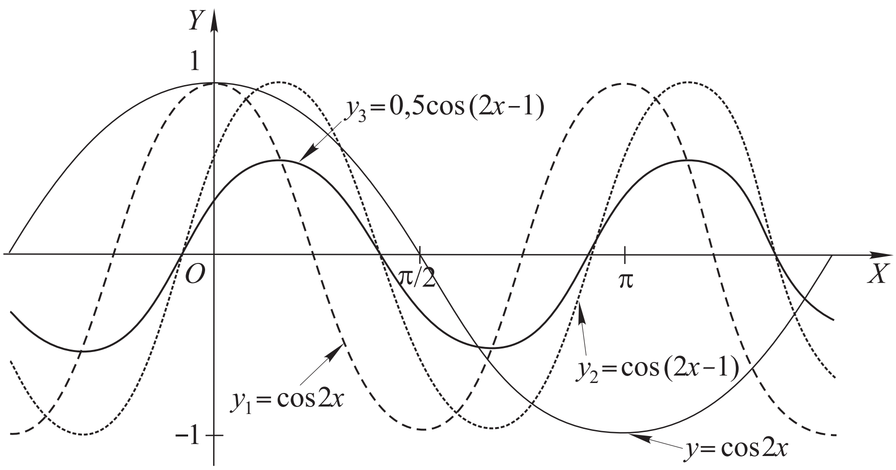
$$y = 0{,}5 \cdot \cos(2x - 1).$$

Решение. Будем строить график путём последовательных преобразований графика функции $y = \cos x$.

1) С помощью сжатия по оси OX в 2 раза построим график $y_1 = \cos 2x$. Отмечаем на графике $y = \cos x$ несколько точек и уменьшаем в 2 раза их абсциссы. Соединив найденные точки плавной линией, получаем график функции $y_1 = \cos 2x$.

2) Сдвигая график $y_1 = \cos 2x$ на 0,5 единицы вправо, построим график $y_2 = \cos 2(x - 0{,}5) = \cos(2x - 1)$.

3) Уменьшим ординаты всех точек полученного графика в 2 раза, т. е. «сожмём» график по оси OY. В результате получим требуемый график функции $y_3 = 0{,}5 \cdot \cos(2x - 1)$.



2.2. Определение и свойства предела функции

Для работы с пределами удобно пользоваться понятием проколотой окрестности. ***Проколотой окрестностью*** точки x_0 называется множество

$$\mathring{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} = \{\, x \mid 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Другими словами, из окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ удаляется сама точка x_0. Для бесконечно удалённых точек $+\infty$, $-\infty$ проколотые окрестности не отличаются от обычных:

$$\mathring{U}_\varepsilon(+\infty) = U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right), \quad \mathring{U}_\varepsilon(-\infty) = U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Точка x_0 (или число x_0, это то же самое) называется ***предельной*** точкой множества M, если любая её проколотая окрестность имеет непустое пересечение с M. Запишем это определение с помощью символов:

$$x_0 \text{ — предельная точка множества } M \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon \;\; \mathring{U}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing.$$

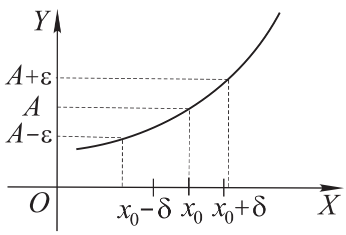
Предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать множеству.

Пример 8. Пусть $M = (3,5] \cup \{7\}$. Тогда точка $x = 3$ — предельная, причём $3 \notin M$. Точка $x = 5$ предельная, $5 \in M$. Предельной точкой является и любое число из интервала $(3,5)$. А вот $x = 5{,}2$ не является предельной точкой — достаточно маленькие её окрестности не пересекаются с множеством M. Точка $x = 7$ принадлежит M, но не является предельной. Такая точка называется ***изолированной***.

Введём понятие предела функции $f : D \to \mathbb{R}$ в точке x_0. При этом x_0 должна быть предельной точкой области определения D. Определение дадим в разных формах. Сначала — на «языке окрестностей» (определение предела ***по Коши***):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall U_\varepsilon(A)\; \exists \mathring{U}_\delta(x_0) :\; x \in (\mathring{U}_\delta(x_0) \cap D) \;\Rightarrow\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Словами: «для любой окрестности точки A (даже очень маленькой) существует такая проколотая окрестность точки x_0, что любое число x из неё переводится функцией $f(x)$ в окрестность A». Можно сказать и так: «$f(x)$ может быть произвольно близким к A, нужно только выбирать x достаточно близкими к x_0».



Определение предела можно сформулировать и по-другому (как говорят, на языке «$\varepsilon - \delta$»). Правда, тогда приходится рассматривать несколько случаев. Например, для случая конечных x_0, A:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0 :\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если x_0 и (или) A бесконечны, получаются немного другие записи. Например, если x_0 конечно, $A = +\infty$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M \;\exists \delta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M.$$

Аналогично записываются и другие возможные случаи.

Третий способ дать определение предела функции — на «языке последовательностей» (***по Гейне***). Мы пользуемся тем, что понятие «предел последовательности» уже изучено.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall \{x_n\} \subseteq D, \; x_n \neq x_0, \; \lim x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim f(x_n) = A.$$

Теорема 3. Все три определения эквивалентны, т. е. если число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ в каком-либо одном смысле, то это верно и в любом другом.

Доказательство. Язык «$\varepsilon - \delta$» и язык окрестностей, очевидно, равносильны — просто понятие окрестности раскрывается с помощью неравенств.

Докажем равносильность определений по Коши и по Гейне. Пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в смысле Коши, т. е.

$$\forall U_\varepsilon(A) \; \exists \mathring{U}_\delta(x_0) : \; x \in (\mathring{U}_\delta(x_0) \cap D) \;\Rightarrow\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Возьмём последовательность $\{x_n\}$: $x_n \neq x_0$, $\lim x_n = x_0$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию $\exists \delta : \; x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Так как $\lim x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, то для этого числа δ (как и для любого другого) $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Для таких n, по условию, $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$. Итак, получили: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \; \forall n \geq n_0 \;\; f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$, что и означает: $\lim f(x_n) = A$, т. е. $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по Гейне.

Обратно, пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в смысле Гейне, т. е.

$$\forall \{x_n\} \;\; \lim \; x_n = x_0 \;\;\Rightarrow\;\; \lim \; f(x_n) = A.$$

Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \; x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Допустим, что это не выполнено, т. е. $\exists \varepsilon : \forall \delta \; \exists x : x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, но $f(x) \notin U_\varepsilon(A)$. Возьмём $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ и для каждого n найдём x_n с этим свойством: $x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(x_0)$, но $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$. Так как $x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(x_0)$, а $\lim \delta_n = 0$, то $\lim x_n = x_0$. В то же время $\lim f(x_n) \neq A$ (так как $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$). Это противоречит условию. Теорема доказана.

Замечание. Во всех определениях предела требуется, чтобы переменная x, приближаясь к x_0, не принимала значения x_0. Это делается для того, чтобы значение $f(x_0)$ не влияло на величину предела. В точке x_0 функция может быть и не определена.

Однако заметим, что возможен и другой подход к определению предела функции (см. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 3 т. М.: Высш. шк., 1988).

Пример 9. Доказать на языке «$\varepsilon - \delta$», что $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-4x-6}{x-3} = 8.$

Решение. Требуется доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta:\ \ 0 < |x-3| < \delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{2x^2-4x-6}{x-3} - 8\right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и решим последнее неравенство.

$$\left|\frac{2x^2-4x-6}{x-3} - 8\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ \left|\frac{2x^2-4x-6-8x+24}{x-3}\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\frac{2x^2-12x+18}{x-3}\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow \left|\frac{2(x-3)^2}{(x-3)}\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, если взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то при $|x-3| < \delta$ неравенство будет справедливо. Для любого ε мы нашли требуемое δ.

Пример 10. Доказать, что предел $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

Решение. Используем язык последовательностей. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{\pi n}\right\}$. Ясно, что $\dfrac{1}{\pi n} \neq 0$, $\lim \dfrac{1}{\pi n} = 0$, $\lim f(x_n) = \lim \sin(\pi n) = 0$. Значит, если предел существует, то он должен быть равен 0. Но рассмотрим другую последовательность: $\{x'_n\} = \left\{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right\}$.
Её предел, очевидно, тоже равен 0. Но $\lim f(x'_n) = \lim \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$. Следовательно, разные последовательности $\{x_n\}$ приводят к разным значениям $\lim f(x_n)$. Предел не существует.

Аналогично доказывается, что, например, пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$, $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg} x$ не существуют.

Если в определении предела вместо окрестности $\mathring{U}_\delta(x_0)$ рассматривать одну из полуокрестностей:

$$U_\delta(x_0+0) = \{x \mid x_0 < x < x_0 + \delta\},$$
$$U_\delta(x_0-0) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0\},$$

то получается определение ***одностороннего*** предела. Например, ***предел справа***:

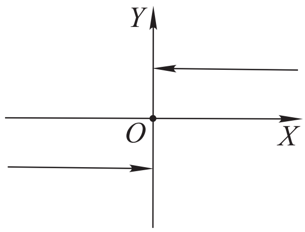
$$A = \lim_{x\to x_0+0} f(x)\ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \ x_0 < x < x_0 + \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Аналогично определяется предел ***слева***.

Замечание. Для того, чтобы существовал предел функции, необходимо и достаточно существование и совпадение односторонних пределов:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A.$$

Пример 11. Рассмотрим функцию $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$



Она называется «сигнум» (по-русски — «знак»). Вычислим односторонние пределы в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{sgn} x = \lim 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to-0} \operatorname{sgn} x = \lim(-1) = -1.$$

Односторонние пределы не совпадают, значит, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. На графике стрелка на конце линии означает, что конечная точка не принадлежит линии.

Рассмотрим основные свойства предела функции. Многие из них аналогичны свойствам предела последовательности.

Теорема 4. Если существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

Доказательство. Используем определение предела:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ \ f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Возьмём $\varepsilon = 1$. Получим, что $\exists\delta :\ \forall x \in \mathring{U}_\delta\,(x_0)\ \ f(x) \in U_1(A)$, т. е.

$$A - 1 < f(x) < A + 1,$$

что и означает ограниченность $f(x)$ в окрестности $U_\delta(x_0)$.

Теорема 5 *(арифметические свойства предела).* Пусть существуют конечные $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\ (\text{если } B \neq 0).$$

Доказательство. Используем определение предела на языке последовательностей. Дано: если $\lim x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, то $\lim f(x_n) = A$, $\lim g(x_n) = B$. По свойству предела последовательности, тогда $\lim f(x_n)g(x_n) = AB$.

Итак, если $\lim x_n = x_0$, то $\lim f(x_n)g(x_n) = AB$. По определению это означает, что $\lim f(x)g(x) = AB$. Остальные равенства доказываются в точности так же.

Теорема 6 ***(переход к пределу в неравенствах).*** Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, и существуют конечные $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то $A \leq B$.

Доказательство. Возьмём последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim x_n = x_0$. Тогда $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ числа x_n попадают в указанную окрестность, т. е. $f(x_n) \leq g(x_n)$. По свойству предела последовательности отсюда получаем: $A = \lim f(x_n) \leq \lim g(x_n) = B$, что и требовалось.

Теорема 7 ***(лемма о сжатой переменной).*** Пусть в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$. Тогда и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Теорема 8 ***(критерий Коши существования предела).***

Конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta :\ \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)\, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Примем эту теорему без доказательства. Советуем сравнить её формулировку с критерием Коши сходимости последовательности (теорема 9 из 1.4.4). Можно заметить аналогию, с помощью которой и проводится строгое доказательство.

С помощью определения предела, его арифметических свойств легко вычисляются лишь пределы, не содержащие ***неопределённости***. Виды неопределённостей те же, что и для последовательностей:

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0.$$

В каждом из этих случаев для вычисления предела нужно провести преобразования, позволяющие избавиться от неопределённости.

Пример 12. Вычислить пределы: $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-8x+15}{x-5}$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{x^2+x-2}$.

Решение. Применить теорему 5 нельзя — и числитель, и знаменатель стремятся к 0. Разложим числитель на множители:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-8x+15}{x-5} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x\to 5} \frac{(x-3)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x-3) = 2.$$

Аналогично этому вычисляется и второй предел:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^2+x-2} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+7}{x+2} = \frac{8}{3}.$$

И вообще, для любого числа A можно найти пример, где раскрытие неопределённости $\frac{0}{0}$ приводит к ответу A.

Пример 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)$.

Решение. Ясно, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty$. Однако выражение $\infty-\infty$ является неопределённостью. Поэтому требуются преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-1}{x^4}\right).$$

В последнем выражении знаменатель стремится к 0, оставаясь положительным; числитель стремится к -1. Значит, выражение отрицательно, его абсолютная величина неограниченно возрастает. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=-\infty.$$

Замечание. В простых случаях, когда неопределённости нет, можно пользоваться интуитивными представлениями, не обращаясь к «ε–δ»-языку.

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)$.

Решение. Как и в предыдущем примере, оба слагаемые $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x^4}$ стремятся к $+\infty$. Выражение $\infty+\infty$ не является неопределённостью, результат всегда равен $+\infty$. Итак,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=+\infty.$$

Пример 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{(x-3)^2}}$.

Решение. Ясно, что при $x\to 3:\ \frac{1}{x-1}\to\frac{1}{2},\ \frac{1}{(x-3)^2}\to+\infty$. Среди неопределённостей нет выражения $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}$. Число, близкое к $\frac{1}{2}$, возводится в очень большие степени. Достаточно ясно, что выражение стремится к нулю. Строгое доказательство потребовало бы некоторых усилий.

В завершение раздела рассмотрим понятия бесконечно малой и бесконечно большой функции. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** в окрестности точки x_0 (или при $x\to x_0$), если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Функция $\beta(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}|\beta(x)|=\infty$. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций аналогичны свойствам последовательностей соответствующего вида.

Теорема 9 ***(свойства бесконечно малых функций).***

а) Сумма, разность, произведение бесконечно малых в окрестности x_0 функций — бесконечно малые в окрестности x_0.

б) Произведение бесконечно малой на ограниченную в окрестности x_0 функцию — бесконечно малая.

в) Функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая в окрестности x_0, $\alpha(x) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая в окрестности x_0.

г) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство каждого пункта легко следует из определения и простейших свойств предела. Аналогичные утверждения для последовательностей были подробно доказаны в предыдущей главе.

В дальнейшем бесконечно малые функции дадут нам эффективный инструмент для вычисления пределов, для решения многих других вопросов анализа. «Анализ бесконечно малых» — так раньше называли всю область математики, которой посвящена эта книга.

2.3. Непрерывность функций

Представление о непрерывной функции получить просто – её график можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги. Мы уточним это понятие, изучим свойства непрерывных функций.

2.3.1. Точки непрерывности и точки разрывов

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Она называется ***непрерывной в точке*** x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если обозначить через $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента, $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — соответствующее приращение функции, то определение можно записать в другой форме:

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = 0.$$

Другими словами, функция непрерывна в данной точке, если малые изменения аргумента приводят к малым изменениям значения функции.

Если в определении рассматривать односторонние пределы, то получится определение функции, непрерывной в точке x_0 ***слева*** или ***справа***.

Функция называется ***непрерывной на множестве*** D, если она непрерывна в каждой точке этого множества. В частности, для $D = [a, b]$

это означает непрерывность в каждой внутренней точке, непрерывность в точке a справа и в точке b слева.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, если $f(x)$ определена хотя бы в проколотой окрестности x_0 и не является непрерывной в этой точке.

Пример 16. Функция $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ непрерывна в точке $x = 3$. Действительно, она определена в этой точке: $y(3) = 5$ и

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-1)} = \frac{10}{2} = 5.$$

Пример 17. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ имеет разрыв в точке $x = 0$, так как в этой точке не определена, хотя определена в её проколотой окрестности.

Пример 18. Функция $y = \ln x$ не определена при $x = 0$. Однако эта точка не считается точкой разрыва: функция не определена в её проколотой окрестности. Конечно, не является точкой разрыва для $y = \ln x$ и, например, точка $x = -3$.

Замечание. Удобно пользоваться определением непрерывной функции в терминах односторонних пределов:

$$f(x) \text{ непрерывна в } x_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

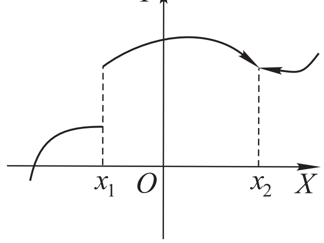
Возможны несколько вариантов поведения функции в окрестности точки разрыва.

Пусть односторонние пределы $f(x)$ в точке x_0 существуют и конечны:

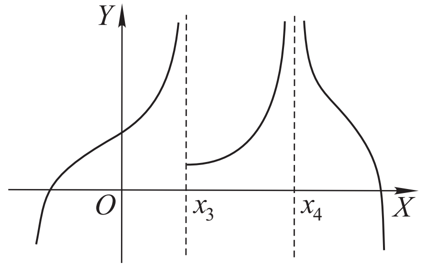
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = B.$$

Непрерывность в x_0 означает, что $A = B = f(x_0)$. Если же хотя бы одно из этих равенств нарушено, то x_0 называется ***точкой разрыва 1-го рода***. В частности если $A = B \neq f(x_0)$, то разрыв называется ***устранимым***. Здесь не важно, определено значение $f(x_0)$ или нет.

Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то x_0 называется ***точкой разрыва 2-го рода***.



x_1, x_2 – точки разрыва 1-го рода.
Точки с абсциссой x_2 на графике нет



x_3, x_4 – точки разрыва 2-го рода

Пример 19. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{2}{x}$. Изучим поведение $f(x)$ в окрестности точек $x = 5$ и $x = 0$. В этих точках функция не определена, хотя определена в некоторой проколотой окрестности каждой из них. Значит, это точки разрыва. Вычислим односторонние пределы.

Предел справа: $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = +\infty$, так как первое слагаемое стремится к -1 (числитель к 5, знаменатель к -5), а второе — к $+\infty$.

Предел слева: $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = -\infty$, так как первое слагаемое стремится к -1, а второе к $-\infty$. Односторонние пределы бесконечны, поэтому $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода.

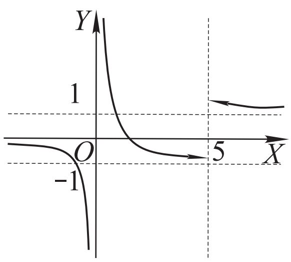
Рассмотрим точку $x = 5$. При вычислении пределов пользуемся тем, что при $x > 5$ $\;|x-5| = x-5$, а при $x < 5$ $\;|x-5| = -(x-5)$.

$$\lim_{x\to5+0} f(x) = \lim_{x\to5+0}\left(\frac{x-5}{x-5} + \frac{2}{x}\right) = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5},$$

$$\lim_{x\to5-0} f(x) = \lim_{x\to5-0}\left(-\frac{x-5}{x-5} + \frac{2}{x}\right) = -1 + \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Односторонние пределы конечны, поэтому $x = 5$ — точка разрыва 1-го рода.

С помощью приёмов, рассмотренных в 2.1.4, построим график. Ясно, что при $x > 5$ функцию можно задать формулой $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$, её график получается с помощью простых преобразований из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$. Аналогично, при $x < 5$ функция имеет вид $f(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, график также можно получить преобразованием графика $y = \dfrac{1}{x}$.



Пример 20. Исследовать на непрерывность и построить график функции

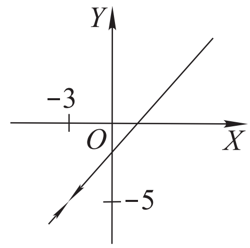
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x+3}.$$

Решение. Точка $x = -3$ — точка разрыва функции, так как в её проколотой окрестности $f(x)$ определена, а в самой точке — нет. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-3+0} f(x) = \lim_{x\to-3+0}\frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x\to-3+0}(x-2) = -5,$$

$$\lim_{x\to-3-0} f(x) = \lim_{x\to-3-0}\frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x\to-3-0}(x-2) = -5.$$

Односторонние пределы конечны и равны, поэтому разрыв 1-го рода, устранимый. Во всех остальных точках функция определяется формулой $f(x) = x-2$, непрерывна, её график — прямая линия. Точка с координатами $(-3, -5)$ на графике отсутствует.



2.3.2. Простейшие свойства непрерывных функций

Теорема 10. Сумма, разность, произведение, частное непрерывных функций есть снова непрерывные функции во всех точках, где знаменатель не обращается в 0.

Доказательство непосредственно следует из арифметических свойств предела.

Теорема 11 ***(о пределе сложной функции).*** Пусть существует конечный или бесконечный предел $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если функция $g(y)$ определена и непрерывна в окрестности точки y_0, то

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)).$$

Доказательство. Обозначим $A = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$. Пусть $U_\varepsilon(A)$ — произвольная ε-окрестность точки A. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то существует такая окрестность $U_\delta(y_0)$ точки y_0, что

$$y \in U_\delta(y_0) \ \Rightarrow\ g(y) \in U_\varepsilon(A).$$

По определению предела, для любой окрестности y_0, в том числе и для $U_\delta(y_0)$, существует проколотая окрестность $\mathring{U}_\gamma(x_0)$ такая, что $x \in \mathring{U}_\gamma(x_0) \ \Rightarrow f(x) \in U_\delta(y_0)$. Значит,

$$\forall U_\varepsilon(A)\ \exists \mathring{U}_\gamma(x_0):\ x \in \mathring{U}_\gamma(x_0) \ \Rightarrow\ g(f(x)) \in U_\varepsilon(A).$$

Другими словами,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = A = \lim_{y\to y_0} g(y).$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 11 позволяет сделать важный вывод. Непрерывность функции означает, что можно изменять порядок выполнения действий перехода к пределу и вычисления значений функции:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)).$$

Если договориться о записи: $g(\infty) = \lim\limits_{y\to\infty} g(y)$, то это равенство справедливо при любых x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, как конечных, так и бесконечных.

Пример 21. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(e^x)$.

Решение. Воспользуемся непрерывностью арктангенса:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(e^x) = \operatorname{arctg}(\lim_{x\to+\infty} e^x) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Теорема 12 ***(о непрерывности сложной функции).*** Пусть сложная функция $g(f(x))$ определена в окрестности точки x_0. Если $f(x)$ непрерывна в x_0, $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство сразу следует из теоремы 11.

Докажем ещё одно свойство функции, непрерывной в данной точке.

Теорема 13 ***(лемма о сохранении знака).*** Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причём $f(x_0) > 0$. Тогда существует окрестность $U_\delta(x_0)$ такая, что $f(x) > 0$ для всех $x \in U_\delta(x_0)$.

Доказательство. По условию, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \ \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В частности, для $\varepsilon = f(x_0)$ получаем:

$$\exists\delta : \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < f(x_0),$$

т. е. $0 < f(x) < 2f(x_0)$, что и требовалось.

2.3.3. Непрерывность элементарных функций

Теорема 14. Элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Доказательство. Элементарные функции получаются из основных элементарных с помощью арифметических действий и операции суперпозиции (см. 2.1.3). Теоремы 10 и 12 показывают, что можно рассматривать только основные элементарные функции.

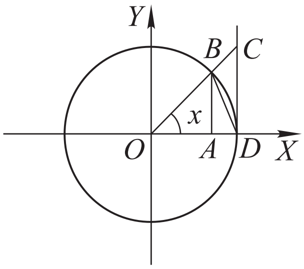
1) $f(x) = C = \text{const}$. Ясно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} C = C = f(x_0)$, так как $|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и любого x.

2) $f(x) = \sin x$. Для доказательства непрерывности синуса потребуется лемма, которая пригодится нам и в других случаях.

Лемма. Для любого $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Доказательство леммы. Рассмотрим окружность единичного радиуса (рисунок на следующей странице). Если x — центральный угол, то, как известно, $|AB| = \sin x$, $|CD| = \operatorname{tg} x$. Рассмотрим треугольники OBD, OCD и сектор OBD. Ясно, что их площади удовлетворяют неравенствам



$$S_{\Delta OBD} < S_{\text{сектора}\, OBD} < S_{\Delta OCD}.$$

Вычислим эти площади. Площадь всего круга (т. е. сектора с углом 2π) равна πR^2. Значит, площадь сектора с углом x равна $\dfrac{\pi R^2}{2\pi}x = \dfrac{R^2 x}{2} = \dfrac{x}{2}$ (учитывая, что $R = 1$). Площади треугольников найти легко, так как основание $|OD| = 1$:

$$S_{\Delta OBD} = \frac{1}{2}\,|OD|\,|AB| = \frac{1}{2}\sin x, \quad S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2}\,|OD|\,|CD| = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Итак, $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Лемма доказана.

Чтобы доказать, что для любого x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ (т. е. непрерывность синуса), оценим разность $|\sin x - \sin x_0|$, используя подходящую тригонометрическую формулу:

$$0 < |\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2}\cdot \sin\frac{x - x_0}{2}\right| < \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < |x - x_0|\,.$$

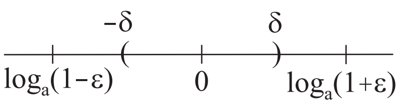
В последнем неравенстве применена лемма. Итак, если $|x - x_0|$ — малое число, то $|\sin x - \sin x_0|$ — ещё меньше. В записи предела на языке «ε–δ» можем взять $\delta = \varepsilon$.

3) $f(x) = \cos x$. Так как $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, то функция $\cos x$ непрерывна в любой точке, как суперпозиция непрерывных функций (теорема 12).

4) Функции $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ непрерывны по теореме 10.

5) $f(x) = a^x$. Докажем сначала непрерывность в точке $x = 0$. По определению она означает: $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$, т. е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta:\ |x| < \delta\ \Rightarrow\ |a^x - 1| < \varepsilon$. Найдём x из последнего неравенства. Пусть, для определённости, $a > 1$:

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon\ \ \Rightarrow\ \ \log_a(1 - \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon),$$



и в качестве δ можно взять любое число, по модулю меньшее каждого из этих логарифмов:

$$|x| < \delta\ \Rightarrow\ \log_a(1 - \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon\ \Rightarrow\ |a^x - 1| < \varepsilon.$$

Непрерывность в произвольной точке x_0 получим с помощью свойств пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(a^x - a_0^x) = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}\left(a^{x - x_0} - 1\right) = a^{x_0}\lim_{x\to x_0}\left(a^{x - x_0} - 1\right) = a^{x_0}\cdot 0 = 0.$$

6) Функции $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ являются обратными для уже рассмотренных непрерывных функций. Справедлива общая теорема о непрерывности таких функций, она будет доказана в следующей главе (теорема 8 из 3.3).

7) Степенную функцию с произвольным показателем можно представить как суперпозицию уже рассмотренных функций:

$$f(x) = x^a = e^{a \cdot \ln x}.$$

Значит, она непрерывна по теореме 12. Все основные элементарные функции рассмотрены, теорема доказана.

Пример 22. Исследовать на непрерывность функцию $y = 3^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение. Во всех точках, кроме $x = 1$, функция непрерывна по теореме 14. Функция определена в проколотой окрестности точки $x = 1$ и не определена в самой точке. Значит, это точка разрыва. Чтобы установить её характер, найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1+0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 0, \text{ так как } \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{1-x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0} 3^{\frac{1}{1-x}} = +\infty, \text{ так как } \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1-x} = +\infty.$$

Один из пределов бесконечен, поэтому $x = 1$ — точка разрыва 2-го рода.

2.4. Задачи с решениями

1. Найти область определения каждой из функций:

$$f_1(x) = \sqrt{3x - x^2}, \quad f_2(x) = \arccos(\ln x).$$

Решение. Мы изучаем только действительные функции, поэтому квадратный корень можно извлекать только из неотрицательных чисел: $3x - x^2 \geq 0$. Решим это неравенство:

$$x\,(3 - x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \geq 0, \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ 3 - x \leq 0. \end{cases}$$

Второй случай невозможен, поэтому $x \geq 0,\ 3 - x \geq 0$, т. е. $x \in [0, 3]$.

Рассмотрим $f_2(x) = \arccos(\ln x)$. По определению логарифмической функции, она имеет смысл только для $x > 0$. Далее, область определения арккосинуса — отрезок $[-1, 1]$. Поэтому нужно рассматривать лишь такие $x > 0$, что $-1 \leq \ln x \leq 1$. Для решения этого неравенства воспользуемся тем, что функция e^x возрастает (см. 2.1.3). Поэтому большему аргументу соответствует и большее её значение: $e^{-1} \leq e^{\ln x} \leq e$. Но $e^{\ln x} = x$. Значит, $e^{-1} \leq x \leq e$, область определения $f_2(x)$ есть отрезок $\left[e^{-1},\, e\right]$.

2. Является ли чётной или нечётной функция $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$?

Решение. Заметим, что областью определения этой функции является вся числовая прямая $\mathbb{R}$: при любом $x \in \mathbb{R}$ ясно, что $x^2 + 1 > x^2$, поэтому $\sqrt{x^2+1} > |x|$ и $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

Подставляя вместо x выражение $-x$, проверим, выполнено ли для всех x условие $y(-x) = y(x)$ (функция чётная) или $y(-x) = -y(x)$ (функция нечётная):

$$y(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) =$$

$$= \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right).$$

Значит, это нечётная функция.

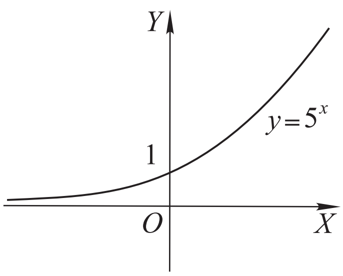
3. Найти множество значений E функции $f(x) = 4\arcsin x + 1$, определённой на множестве $D = [0, 1]$. Задаёт ли $f(x)$ взаимно однозначное отображение D на E?

Решение. Естественной областью определения функции $f(x)$ является отрезок $[-1, 1]$. Однако по условию область сужается: $D = [0, 1]$. Функция $\arcsin x$ возрастающая, $\arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$. Значит, арксинус отображает $[0, 1]$ на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Умножение на 4 превращает $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ в отрезок $[0, 2\pi]$. Прибавление 1 сдвигает отрезок: $E = [1,\ 2\pi + 1]$.

Отображение $f(x)\colon [0, 1] \to [1,\ 2\pi+1]$ взаимно однозначно, так как при $x_1 \neq x_2$ имеем: $\arcsin x_1 \neq \arcsin x_2,\ 4\arcsin x_1 + 1 \neq 4\arcsin x_2 + 1$.

4. Является ли функция $f(x) = \dfrac{1}{2+5^x}$ ограниченной?

Решение. Конечно, нам потребуются свойства основной элементарной



функции $y = 5^x$. Она определена в любой точке, является возрастающей. При возрастании x значения 5^x не ограничены. Функция $y = 5^x$ принимает только положительные значения. При $x \to -\infty$ значения 5^x приближаются к 0.

Эти свойства позволяют заключить, что $2 < 2 + 5^x$ и поэтому $0 < \dfrac{1}{2+5^x} < \dfrac{1}{2}$. Функция $f(x)$ ограничена.

Заметим, что сузить указанные границы множества значений нельзя:

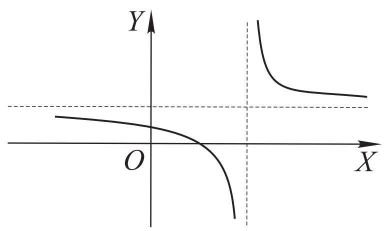
$$\sup f(x) = \frac{1}{2}, \quad \inf f(x) = 0.$$

5. Построить график функции $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$.

Решение. Сначала преобразуем формулу, определяющую функцию, так, чтобы получить её график путём преобразования графика какой-либо основной элементарной функции:

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-3+1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}.$$

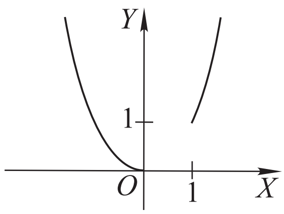
Теперь возьмём известный нам график функции $y = \dfrac{1}{x}$ (гипербола) и сместим его по оси OX на 3 единицы вправо. Получим график функции $y = \dfrac{1}{x-3}$. Сдвинем его на 1 по оси OY вверх и получим искомый график.



6. Построить график функции $y = \left|x^2 - x\right| + x$.

Решение. Изучение функции затрудняет модуль. Чтобы его раскрыть (как говорят, «избавиться»), решим неравенство:

$$x^2 - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\,(x-1) \geq 0 \;\Leftrightarrow x \;\geq 1 \text{ или } x \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty).$$



Для таких x: $y = |x^2 - x| + x = x^2 - x + x = x^2$. Ясно, что вне интервала $(0, 1)$ график — парабола.

Если же $x \in (0, 1)$, то $x^2 - x < 0$ и

$$y = |x^2 - x| + x = -(x^2 - x) + x = -x^2 + 2x.$$

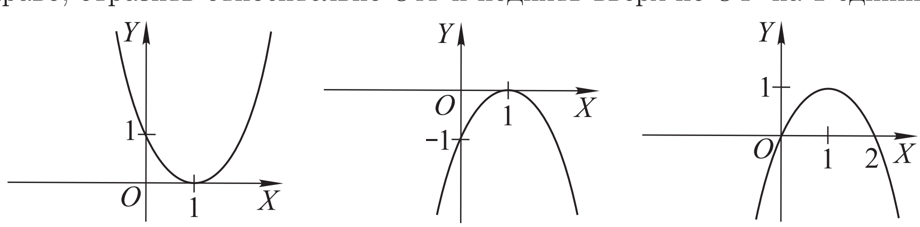
В результате функцию можно представить кусочно-аналитически:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \notin (0,1)\,, \\ -x^2 + 2x, & \text{если } x \in (0,1)\,. \end{cases}$$

Чтобы было легче построить график функции $y = -x^2 + 2x$, преобразуем:

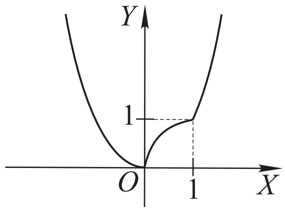
$$y = -x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = 1 - (x-1)^2.$$

График получится, если параболу $y = x^2$ сместить по OX на 1 единицу вправо, отразить относительно OX и поднять вверх по OY на 1 единицу.



Здесь, напомним, мы должны рассматривать только интервал $(0, 1)$.

Объединяя оба графика, получим:



7. Найти обратную для функции $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Решение. Обозначим для удобства значения функции через y: $y = \dfrac{x}{x+1}$. Выразим x: $y(x+1) = x$, $x - yx = y$, $x = \dfrac{y}{1-y}$. Для обратной функции y — независимая переменная, x — значение функции. В более привычной записи:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Проверим ещё раз: если прямая функция $f(x)$ переводит число a в число $\dfrac{a}{a+1}$, то обратная функция переводит число $\dfrac{a}{a+1}$ в число

$$f^{-1}(\frac{a}{a+1}) = \frac{\dfrac{a}{a+1}}{1-\dfrac{a}{a+1}} = \frac{a}{a+1-a} = a.$$

8. Доказать на языке «ε–δ»: $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$.

Решение. Требуется доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ |x-4| < \delta\ \Rightarrow\ \left|\sqrt{x}-2\right| < \varepsilon.$$

Преобразуем последнее неравенство:

$$\frac{|(\sqrt{x}-2)\,(\sqrt{x}+2)|}{\sqrt{x}+2} < \varepsilon,\quad \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \varepsilon.$$

Для упрощения увеличим дробь и потребуем, чтобы

$$|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \frac{|x-4|}{2} < \varepsilon.$$

Если будет выполнено $\dfrac{|x-4|}{2} < \varepsilon$, то тем более будет выполнено $|\sqrt{x}-2| < \varepsilon$. Значит, можно взять $\delta = 2\varepsilon$:

$$|x-4| < \delta = 2\varepsilon\ \Rightarrow\ \frac{|x-4|}{2} < \varepsilon\ \Rightarrow\ \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \varepsilon\ \Rightarrow\ |\sqrt{x}-2| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

9. Доказать на языке «ε–δ»: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{(x-3)^2} = +\infty$.

Решение. Требуется доказать, что

$$\forall M\ \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x-3| < \delta \ \Rightarrow\ \frac{x+5}{(x-3)^2} > M.$$

Упростим последнее неравенство, уменьшив его левую часть: $\frac{5}{(x-3)^2} > M$ (для таких x требуемое неравенство ***тем более*** будет выполнено). Теперь решить легче: $(x-3)^2 < \frac{5}{M}$, $|x-3| < \sqrt{\frac{5}{M}}$ и можно взять $\delta = \sqrt{\frac{5}{M}}$. Проверим ещё раз: $|x-3| < \sqrt{\frac{5}{M}} \ \Rightarrow\ (x-3)^2 < \frac{5}{M} \ \Rightarrow$ $\Rightarrow\ \frac{5}{(x-3)^2} > M \ \Rightarrow\ \frac{x+5}{(x-3)^2} > M$, что и требовалось доказать.

10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+2x-5}{x^2-x}$.

Решение. Пробуем подставить значение $x = 2$ в функцию: числитель равен 7, знаменатель равен 2. Неопределённости нет, поэтому предел равен 3,5.

Для более строгого рассуждения нужно применить арифметические свойства пределов (теорема 5 из 2.2):

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x-5}{x^2-x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+2x-5\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x\right)} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^3 + 2\lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 5}{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2 - \lim\limits_{x\to 2} x} =$$
$$= \frac{2^3+2\cdot 2-5}{2^2-2} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-5x+2}{x-4}$.

Решение. Числитель стремится к -2, знаменатель к 0. Теоремой 5 воспользоваться нельзя. Однако неопределённости нет: ясно, что при $x\to 4$ абсолютная величина $\left|\frac{x^2-5x+2}{x-4}\right| \to \infty$. Другими словами, функция является бесконечно большой. Но чему же равен предел: $+\infty$ или $-\infty$? Заметим, что это зависит от того, с какой стороны x стремится к 4. Если $x \to 4+0$ (справа), то знаменатель положителен, числитель отрицателен. Поэтому дробь отрицательна, $\lim\limits_{x\to 4+0} \frac{x^2-5x+2}{x-4} = -\infty$. Аналогично, при $x \to 4-0$ (слева) дробь принимает положительные значения и $\lim\limits_{x\to 4-0} \frac{x^2-5x+2}{x-4} = +\infty$. Если же допускаются любые способы приближения x к 4, то функция определённого предела не имеет, хотя и является бесконечно большой.

12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

Решение. Так как и числитель, и знаменатель стремятся к 0, то имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы её раскрыть, проведём преобразования:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(x^2-9\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(x^2-9\right)}{(x+1)-4}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}+2\right)(x-3)(x+3)}{(x-3)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)(x+3)=(2+2)\cdot 6=24.$$

В последнем пределе неопределённости уже нет, и мы воспользовались свойствами пределов.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3}+3x}{5x+7}$.

Решение. Для раскрытия неопределённости $\dfrac{\infty}{\infty}$, как и в случае последовательностей, применяется деление числителя и знаменателя на подходящую степень x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3}+3x}{5x+7}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}+3}{5+\dfrac{7}{x}}=\frac{2+3}{5+0}=1.$$

14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3}+3x}{5x+7}$.

Решение. Здесь уже в числителе — неопределённость $\infty-\infty$: квадратный корень мы всегда считаем положительным, поэтому $\sqrt{4x^2-3}\to+\infty$, а $3x\to-\infty$. Преобразуем снова с помощью деления на x, не забывая, что $x<0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3}+3x}{5x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}+3}{5+\dfrac{7}{x}}=\frac{-2+3}{5+0}=\frac{1}{5}.$$

15. Исходя из определения, доказать непрерывность функции $y=x^3-5x+2$ в любой точке $x_0\in\mathbb{R}$.

Решение. Вычислим предел:

$$\lim_{x\to x_0}y=\lim_{x\to x_0}\left(x^3-5x+2\right)=\left(\lim_{x\to x_0}x\right)^3-5\lim_{x\to x_0}x+2=x_0^3-5x_0+2=y\left(x_0\right).$$

По определению, $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = y(x_0)$ означает, что функция $y(x)$ непрерывна в точке x_0.

16. В каких точках непрерывна функция $f(x) = \dfrac{\arcsin(x-3)}{x^2+e^x}$?

Решение. Функция $f(x)$ является элементарной функцией, поэтому она непрерывна во всех точках, где определена. Так как $\arcsin(x-3)$ имеет смысл при $-1 \le x-3 \le 1$, то $2 \le x \le 4$. Знаменатель в 0 не обращается. Значит, $f(x)$ непрерывна на отрезке $[2,4]$.

17. Установить характер точки разрыва $x = 0$ для функций

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \ \ g(x) = \frac{|x|}{x}, \ \ h(x) = \frac{(x+4)^2-16}{x}.$$

Решение. Чтобы определить тип разрыва, нужно вычислить односторонние пределы:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\left(x+\frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0}\left(x+\frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв 2-го рода.

Аналогично для $g(x)$:

$$\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to+0} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to-0} g\,(x) = \lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to+0} -1 = -1.$$

Так как односторонние пределы конечны, но не равны, то $g(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв 1-го рода.

Для функции $h(x)$ односторонние пределы существуют и равны:

$$\lim_{x\to+0}\frac{(x+4)^2-16}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{(x+4)^2-16}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x^2+8x}{x} = \lim_{x\to0}(x+8) = 8.$$

Однако равенство $\lim\limits_{x\to0} h(x) = h(0)$ нарушено (так как $h(0)$ не определено). Поэтому $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

18. Исследовать в точках $x = 1$, $x = 5$ одностороннюю непрерывность функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \le 1, \\ x+3, & \text{если } 1 < x < 5, \\ 5-x, & \text{если } x \ge 5. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем односторонние пределы в указанных точках, сравнивая их со значением функции:

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1-0}\sin x = \sin 1, \quad \lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to1+0}(x+3) = 4.$$

Так как $f(1) = \sin 1$, то $f(x)$ в точке $x = 1$ непрерывна слева, а справа имеет разрыв 1-го рода.

Аналогично:

$$\lim_{x\to 5-0} f(x) = \lim_{x\to 5-0}(x+3) = 8, \quad \lim_{x\to 5+0} f(x) = \lim_{x\to 5+0}(5-x) = 0.$$

Так как $f(5) = 5 - 5 = 0$, то $f(x)$ непрерывна в $x = 5$ справа, слева у неё разрыв 1-го рода.

19. Исследовать на непрерывность функцию $y = \cos\dfrac{\pi}{3-x}$.

Решение. Функция $y(x)$ является элементарной, поэтому она непрерывна во всех точках, где определена, т. е. во всех точках, кроме $x = 3$. Даже односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\cos\dfrac{\pi}{3-x}$ не существуют, так как, например, при $x \to 3 - 0$ аргумент косинуса $\dfrac{\pi}{3-x} \to +\infty$, а косинус при таком изменении аргумента не имеет предела (см. пример 10 из 2.2). Поэтому $x = 3$ — точка разрыва 2-го рода.

20. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2}x, & \text{если } -\infty < x < 1, \\ x - 1, & \text{если } 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

Решение. При любом $x < 1$ функция задаётся формулой $\cos\dfrac{\pi}{2}x$, т. е. является элементарной и, следовательно, непрерывной. По этой же причине она непрерывна для любого $x > 1$. Точку $x = 1$ рассмотрим подробнее. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\cos\frac{\pi}{2}x = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(x-1) = 1 - 1 = 0.$$

Так как $f(1) = 0$, то и в точке $x = 1$ функция непрерывна. Значит, $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

2.5. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти область определения функций:
а) $y = \sqrt{2^x}$; б) $y = \log_2(\log_3 x)$; в) $y = \ln(1 + \sin\pi x)$;
г) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; д) $y = \arcsin\dfrac{3x}{1+x}$.

2. Являются ли чётными или нечётными следующие функции?
а) $y = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$; б) $y = x^2 + \sin x$; в) $y = x\sin x$;
г) $y = \ln(3 + x)$; д) $y = x^5 + \dfrac{1}{x^3}$; е) $y = x\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{x^2+7}$.

3. Найти множество значений E функции $f(x)$, определённой на множестве D. Задаёт ли $f(x)$ взаимно однозначное соответствие D на E?

а) $f(x) = 3x + 1,\ D = \mathbb{R}$; б) $f(x) = 5^{x-8},\ D = \mathbb{R}$;

в) $f(x) = 10\sin x + 2,\ D = [-\pi, \pi]$; г) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x,\ D = \mathbb{R}$;

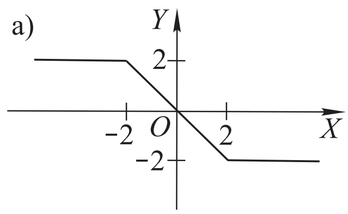
д) $f(x) = \sqrt{x - x^2},\ D = (0, 1)$; е) $f(x) = \log_2 x, D = (0, 64)$.

4. Какие из перечисленных ниже функций являются ограниченными? Для ограниченных функций найти $\sup f(x)$, $\inf f(x)$.

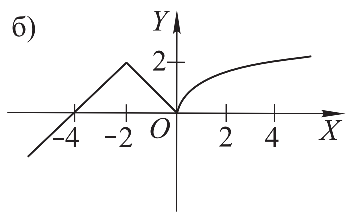
$$f_1(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x^3+1}, \quad f_3(x) = \operatorname{arctg}(2^x),$$
$$f_4(x) = \frac{1}{1+\sin x}, \quad f_5(x) = \frac{2}{2+\sin x}.$$

5. Задать кусочно-аналитическим способом функции, заданные графически:

а)



б)



6. Построить графики функций:

а) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ -x+3, & 1 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x < -1, \\ 2, & -1 \le x \le 0, \\ 7 - x, & x > 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$; г) $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$; д) $f(x) = 3\sqrt{x-1} + 2$.

7. Даны функции $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 5^x$. Найти область определения и множество значений для каждой из суперпозиций:

$$u(x) = f(g(x)),\ v(x) = g(f(x)).$$

8. Для функции $f(x)$ найти обратную, построить графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

а) $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$; б) $f(x) = \dfrac{2x+7}{3}$; в) $f(x) = \sqrt{x+3}$.

9. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения, привести соответствующие примеры:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$; е) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$.

10. Доказать на «$\varepsilon - \delta$»-языке:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^2}=+\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+8x+3}{x+1}=-2$.

11. Вычислить, используя свойства пределов:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-3}{x^2-4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+2x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-7x-8}{x^2-4x+4}$.

12. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-5x-14}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-5x+7x^2}{1+3x+2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}+x}{\sqrt[3]{x^7-2x}+1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

13. Найти точки разрыва следующих функций, указать их характер:

а) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$; в) $y=\dfrac{x+1}{1+x^3}$;

г) $y=\dfrac{x+3}{2x^2+5x-3}$; д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; е) $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

ж) $y=\sqrt[3]{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; з) $y=\operatorname{tg}x$; и) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{x}{x-1}}}$;

к) $y=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$; л) $y=e^{\frac{x}{(x+1)^2}}$; м) $y=e^{\frac{x}{(x+1)^3}}$.

14. Исследовать функции на непрерывность и одностороннюю непрерывность:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le -1,\\ x, & -1<x\le 2,\\ 6-2x, & x>2;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & x<0,\\ 2\cos x, & 0\le x\le \pi,\\ \dfrac{1}{x-\pi}, & x>\pi;\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{|x-2|}{x-2}$; г) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$.

15. При каком выборе числа C функция будет непрерывна?

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{7x^2-3x}{2x}, & x\ne 0,\\ C, & x=0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0,\\ x+C, & x\ge 0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \cos\pi x, & x\le 1,\\ x^2-C, & x>1;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}(x+1), & x<0,\\ \ln\dfrac{x+1}{C}, & x\ge 0.\end{cases}$

16. Можно ли доопределить функцию $f(x)$ в точке $x=0$ так, чтобы она стала непрерывной?

а) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x+2}$; б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; в) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

17. Обозначим $E(x)$ — целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $E(2,8) = 2$, $E(7) = 7$, $E(-4,5) = -5$. Требуется исследовать на непрерывность и одностороннюю непрерывность функции: $f(x) = E(x)$, $g(x) = x - E(x)$. Сделайте эскизы графиков этих функций.

18. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
Здесь $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.

19. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad x \geq 0.$$

2.6. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти точную верхнюю грань области определения функции
$$y = \ln(9 - x^2).$$

2. Подсчитать количество нечётных функций среди перечисленных:

$$y = \sin^2 x, \quad y = \frac{x}{x^2-1}, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \frac{x+1}{x-2}.$$

3. Краткой записью для выражения

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta: \ x > \delta \ \Rightarrow\ f(x) < \varepsilon$$

является: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Указать номер правильного ответа.

4. Вычислить правый односторонний предел

$$\lim_{x\to1+0}\left(3 + 2^{\frac{1}{1-x}}\right).$$

5. При каком x функция $f(x) = \dfrac{x^2+9x+8}{x^2+6x+5}$ имеет разрыв 2-го рода?

6. При каком b функция $f(x) = \begin{cases} b\cos 2x, & x < 0, \\ \sqrt{x+4}, & x \geq 0 \end{cases}$ является непрерывной на всей оси?

ГЛАВА 3

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Здесь мы рассмотрим важные приёмы, используемые при вычислении пределов, а также изучим свойства функций, непрерывных в каждой точке отрезка $[a, b]$.

3.1. Замечательные пределы

Теорема 1 ***(первый замечательный предел).***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Заметим, что функция $\dfrac{\sin x}{x}$ чётная: $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$. Поэтому пределы слева и справа равны. Будем считать, что $x > 0$. Ясно, что можно рассматривать лишь $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Для таких x справедливо неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (лемма в пункте 2.3.3). Разделим все части неравенства на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или, что равносильно, $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. Применим лемму о сжатой переменной: при $x \to 0$ и левая часть, и правая часть стремятся к 1 (мы используем непрерывность косинуса: $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$). Значит, и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0,\\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, то эта функция непрерывна в точке $x = 0$ (а значит, непрерывна на всей прямой). Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to0} f(\alpha(x)) = f(\lim_{x\to0} \alpha(x)) = f(0) = 1.$$

По определению предела, при вычислении $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$ рассматриваются лишь такие x, где функция определена, т. е. $\alpha(x) \neq 0$. Учитывая это, получаем

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to0} f(\alpha(x)) = 1.$$

Следствие 2. Справедливы соотношения:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Доказательство. Проведём простые преобразования:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$, то можно применить следствие 1, взяв $\alpha(x) = \arcsin x$: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\arcsin x} = 1$. Значит, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Первый замечательный предел и следствия из него применяются для раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$, в которых встречаются тригонометрические функции.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin^2 3x}{x^2} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x\to0} \left(9 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x}\right) = 9 \lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3x} = 9.$$

Теорема 2 ***(второй замечательный предел).***

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Напомним: в теореме 6 из 1.4.2 доказано, что последовательность $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ сходится, число e — её предел. Значит, и любая её подпоследовательность тоже сходится к e.

Будем пользоваться определением предела на языке последовательностей. Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\}$: $\lim x_n = +\infty$. Требуется доказать, что тогда $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Пусть $[x_n]$ — целая часть x_n, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x_n. Ясно, что тогда $[x_n] \le x_n < [x_n] + 1$. Нетрудно заметить справедливость неравенств:

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} < \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+2}.$$

(Действительно, если двигаться слева направо, то на каждом шаге и скобка, и показатель степени увеличиваются.) Последовательность $\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}$ является подпоследовательностью в $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$. Поэтому $\lim \left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} = e$. Рассмотрим правую часть:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+2} = \lim \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{2} = e \cdot 1 = e.$$

По лемме о сжатой переменной: $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} = e$. Но

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) = \lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}.$$

Следовательно, $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, случай $x \to +\infty$ рассмотрен.

Пусть теперь $x \to -\infty$. Перейдём к другой переменной: $x = -(y+1)$. Тогда $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$. По теореме 11 из 2.3.2 (о пределе сложной функции):

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-y-1}\right)^{-y-1} = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{-y}{-y-1}\right)^{-y-1} =$$
$$= \lim_{y\to\infty} \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e.$$

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Доказательство. Рассмотрим односторонние пределы. Пусть $x \to +0$ (т. е. справа). Обозначим $y = \frac{1}{x}$. Тогда $y \to +\infty$ и

$$\lim_{x\to+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e.$$

Если $x \to -0$ (слева), то $y = \dfrac{1}{x} \to -\infty$ и получим $\lim\limits_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = $ $= \lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = e$. Итак, в любом случае $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Второй замечательный предел применяется для раскрытия неопределённостей вида 1^∞.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{2x+1}$.

Решение. Выражение в скобках — неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, но она легко раскрывается:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\dfrac{5}{x}}{2+\dfrac{3}{x}}\right) = \frac{2}{2} = 1.$$

Так как $2x+1 \to \infty$, то нам требуется раскрыть неопределённость вида 1^∞. Преобразуем её так, чтобы использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\dfrac{3}{2}}\right)^{2\left(x+\frac{3}{2}\right)-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\dfrac{3}{2}}\right)^{x+\frac{3}{2}} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\dfrac{3}{2}}\right)^{x+\frac{3}{2}} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\dfrac{3}{2}}\right)^{-2} = e\cdot e\cdot 1 = e^2.$$

Заметим, что знак ∞ не указан — и результат, и все вычисления верны как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

3.2. Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых

3.2.1. Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые функции в окрестности точки x_0. Напомним: это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$. Мы научимся сравнивать скорости, с которыми стремятся к 0 эти функции.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой ***более высокого порядка***, чем $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Можно сказать, что в этом случае $\alpha(x)$

стремится к 0 ***быстрее***, чем $\beta(x)$. Употребляется запись: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, которая читается так: $\alpha(x)$ есть «o малое» от $\beta(x)$.

Пример 3. Пусть $\alpha(x) = 2x^3$, $\beta(x) = \sin x$. Ясно, что $\alpha(x)$, $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Вычислим предел их отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2x^2}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Предел равен 0, поэтому $2x^3$ стремится к 0 быстрее, чем $\sin x$, т. е. $2x^3 = o(\sin x)$.

Будем говорить, что $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые ***одного порядка***, если предел их отношения — конечное ненулевое число:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty.$$

В частности, если этот предел равен 1, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***. Для обозначения эквивалентности бесконечно малых применяется запись: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Таким образом,

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \ \ (\text{при } x \to x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Пример 4. Бесконечно малые $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ эквивалентны при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

Теорема 3. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны (в окрестности x_0) тогда и только тогда, когда их разность $\alpha(x)-\beta(x)$ есть бесконечно малая величина более высокого порядка по сравнению с каждой из них.

Доказательство. Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Вычислим предел:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - 1 = 0,$$

что и требовалось. Аналогично доказывается, что $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. Тогда

$$0 = \lim_{x\to x_0}\left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. В этом случае, конечно, и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, т. е. $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Приведём ещё две простые теоремы, полезные при вычислении пределов.

Теорема 4. Если $\alpha(x) = o(\beta(x))$, то $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$.

Доказательство очень просто:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Теорема 5. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Доказательство.

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\beta(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)} = \lim \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} =$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Итак, при вычислении предела отношения бесконечно малых функций (т. е. при раскрытии неопределённости $\frac{0}{0}$) можно заменять бесконечно малые в числителе и знаменателе на эквивалентные им. Это упрощает многие вычисления.

Замечание. Бесконечно большие функции тесно связаны с бесконечно малыми:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| = \infty.$$

Бесконечно большие функции также можно сравнивать по скорости стремления к бесконечности (как говорят, по ***порядку роста***). Пусть $U(x)$, $V(x)$ бесконечно большие в окрестности точки x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} |U(x)| = \lim_{x\to x_0} |V(x)| = \infty.$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{U(x)}{V(x)}\right| = \infty$, то $U(x)$ называют бесконечно большой более высокого порядка (роста). Если же $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{U(x)}{V(x)}\right| = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty$, то $U(x)$ и $V(x)$ называются бесконечно большими одного порядка. В частности, если $A = 1$, то $U(x)$, $V(x)$ называются эквивалентными: $U(x) \sim V(x)$.

Пример 5. Рассмотрим функции $U(x) = 3x^2$, $V(x) = 2x^5$. Очевидно, что это бесконечно большие при $x \to \infty$, причём $V(x)$ — бесконечно большая более высокого порядка:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{V(x)}{U(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^5}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3}x^3 = \infty.$$

Заметим: их сумма эквивалентна слагаемому с бо́льшим порядком роста:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{U(x)+V(x)}{V(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x^5}{2x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x^3}+2}{2}=\frac{0+2}{2}=1.$$

3.2.2. Следствия из замечательных пределов

Напомним, что в разделе 3.1 уже были получены некоторые следствия из 1-го замечательного предела. Одно из них, на языке бесконечно малых, утверждает:

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x$$

при $x\to 0$. Было доказано также, что вместо x здесь можно взять любую бесконечно малую функцию: если $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то

$$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim\operatorname{arctg}\alpha(x).$$

Выведем некоторые полезные соотношения из 2-го замечательного предела, записав его (см. 3.1) в виде

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Так как $\ln x$ непрерывная функция, то логарифм предела равен пределу логарифма:

$$1=\ln e=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, т. е. $\ln(1+x)\sim x$ (при $x\to 0$). Рассуждая в точности так же, как при доказательстве следствия 1 из теоремы 1, это соотношение можно обобщить. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$$

Итак, доказана

Теорема 6. Для любой бесконечно малой функции $\alpha(x)$

$$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x).$$

Следствие 1. Для любой бесконечно малой (при $x\to x_0$) функции $\alpha(x)$ и любого положительного числа a справедливо соотношение:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a.$$

В частности, $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$ (при $x\to x_0$).

Доказательство. Рассмотрим бесконечно малую функцию $a^x - 1$ (при $x \to 0$) и применим теорему 6: $\ln(1 + a^x - 1) = \ln a^x = x \ln a \sim a^x - 1$. Значит, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Обобщение для произвольной бесконечно малой $\alpha(x)$ проводится, как и выше, с помощью теоремы о пределе сложной функции. Утверждение «в частности» вытекает из основного непосредственно.

Следствие 2. Для любой бесконечно малой функции $\alpha(x)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(1 + \alpha(x))^a - 1}{\alpha(x)} = a.$$

Доказательство. Возьмём в теореме 6 $\alpha(x) = (1+x)^a - 1$ — бесконечно малая при $x \to 0$. Тогда $\alpha(x) \sim \ln(1 + \alpha(x)) = \ln(1+x)^a = a\ln(1+x) \sim ax$, т. е. $(1 + x)^a - 1 \sim ax$. Значит,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a.$$

Отсюда, как и выше, следует: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(1 + \alpha(x))^a - 1}{\alpha(x)} = a$, если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Полученные следствия из замечательных пределов очень полезны при раскрытии неопределённостей. Будем называть их ***основными эквивалентностями***:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1 + x) \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \frac{(1 + x)^a - 1}{a}$$

и помнить, что эти соотношения верны при $x \to x_0$ и остаются справедливыми, если заменить x на произвольную бесконечно малую функцию.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1 + \sin 2x)}$.

Решение. Воспользуемся тем, что при $x \to 0$

$$\ln(1 + \sin 2x) \sim \sin 2x \sim 2x.$$

Заменяя бесконечно малую в знаменателе на эквивалентную (см. теорему 5), получаем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1 + \sin 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$.

Решение. Используем основные эквивалентности: при $x \to 0$ $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, $(1 + x)^a - 1 \sim ax$. В частности, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{1}{2}x$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x}{3x} = \frac{1}{6}.$$

Замечание. Заменять бесконечно малые на эквивалентные можно только строго в соответствии с теоремой 5. Другие случаи (например, замена слагаемого в сумме) могут привести к ошибке.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Мы знаем, что $\operatorname{tg}x\sim\sin x$, но если заменить $\operatorname{tg}x$ на $\sin x$, что не обосновано, мы получим 0, что неверно. Верное решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

3.2.3. Метод выделения главной части функции

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — функции, определённые в некоторой окрестности точки x_0 (быть может, кроме самой точки x_0). Если функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=g(x)+o(g(x)),$$

то $g(x)$ называется ***главной частью*** функции $f(x)$ в окрестности x_0. Здесь $f(x)$, $g(x)$ не обязательно бесконечно малые функции. Нужно лишь, чтобы $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g(x))}{g(x)}=0$.

Пример 9. Главной частью функции $\sin x$ при $x\to 0$ является функция x. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}-1=1-1=0$, т. е. $\sin x-x=o(x)$.

Пример 10. Если $f(x)=5x^3+3x^2-2x+4$, то в качестве главной части $f(x)$ при $x\to\infty$ удобно взять функцию $g(x)=5x^3$. Действительно, $f(x)-g(x)=3x^2-2x+4=o(g(x))$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+4}{5x^3}=0$.

Замечание. Главная часть функции находится неоднозначно. Обычно стараются заменить достаточно сложную функцию её главной частью более простого вида. При работе с бесконечно малыми функциями метод выделения главной части является удобной формой сравнения бесконечно малых: по теореме 3, $\alpha(x)\sim\beta(x)\ \Leftrightarrow\ \alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\ln(1+\sin 3x)}{10x+20x^2+30x^3}$.

Решение. Так как при $x\to 0$ $\ln(1+\sin 3x)\sim\sin 3x\sim 3x$, то

$$\ln(1+\sin 3x)=3x+o(3x).$$

Так как $o(3x) = o(x)$, $x^3 = o(x)$, $20x^2 = o(x)$, $30x^3 = o(x)$, то получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \ln(1+\sin 3x)}{10x + 20x^2 + 30x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{3x + o(x)}{10x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{10x} = \frac{3}{10}.$$

Итак, мы выделили главную часть в числителе и в знаменателе, а затем отбросили бесконечно малые более высоких порядков (точнее, по теореме 5 заменили бесконечно малые на эквивалентные: $3x + o(x) \sim 3x$, $10x + o(x) \sim 10x$).

3.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Пока мы рассматривали только локальные свойства непрерывных функций, т. е. свойства, связанные с непрерывностью функции в одной, данной точке. Здесь будут рассмотрены свойства функций, непрерывных в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Теорема 7 ***(о промежуточных значениях).*** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Обозначим $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть, например, $A \le B$. Тогда

$$\forall C \in [A, B] \;\; \exists x_0 \in [a, b] :\; f(x_0) = C,$$

или, формулируя словами, любое промежуточное значение достигается.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. Тогда $g(a) \le 0$, $g(b) \ge 0$ и нам требуется доказать, что $\exists x_0 \in [a, b] : g(x_0) = 0$.

Будем действовать методом деления отрезка пополам. Рассмотрим точку $\dfrac{a+b}{2}$ — середину отрезка $[a, b]$. Если $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, то требуемая точка найдена. Если $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$, то обозначим $[a_1, b_1]$ левую половину $[a, b]$; если $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, то пусть $[a_1, b_1]$ — правая половина $[a, b]$. Другими словами, $[a_1, b_1]$ — та половина $[a, b]$, на которой функция $g(x)$ меняет знак.

Аналогично, разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим $[a_2, b_2]$ ту половину $[a_1, b_1]$, на которой $g(x)$ меняет знак. Таким образом строится система вложенных отрезков:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots,$$

причём их длины стремятся к нулю: $(b_n - a_n) \to 0$ при $n \to \infty$. По принципу вложенных отрезков (см. 1.1), эта система имеет непустое пересечение, т. е. $\exists x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Докажем, что x_0 — искомая точка, т. е. $g(x_0) = 0$. Допустим, например, что $g(x_0) > 0$ («от противного»). Тогда существует окрестность $U_\delta(x_0)$, в которой $g(x)$ принимает только положительные значения (по лемме о сохранении знака). Но так как длины отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к 0, то при некотором n отрезок $[a_n, b_n] \subseteq U_\delta(x_0)$. Получили противоречие: на концах $[a_n, b_n]$ функция $g(x)$ должна менять знак, а в окрестности $U_\delta(x_0)$ принимает только положительные значения. Теорема доказана.

Пример 12. Доказать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Обозначим $g(x) = x^3 - 3x + 1$. Тогда $g(0) = 1$, $g(1) = -1$. Значит, $g(x)$ меняет знак на отрезке $[0, 1]$ и, очевидно, непрерывна. По теореме 7, $\exists x_0 \in [0, 1]$: $g(x_0) = 0$. Заметим, что с помощью деления отрезка пополам можно уточнить положение корня, найти его с любой нужной точностью.

Теорема 8 (*о непрерывности обратной функции*). Пусть $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a, b]$. Обозначим $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена на $[A, B]$, строго возрастает и непрерывна.

Доказательство. Пусть $C \in [A, B]$. По теореме 7, существует $x_0 \in [a, b]$: $f(x_0) = C$. Такое x_0 единственно, так как если $x_0 < x_1$, то $f(x_0) < f(x_1)$. Следовательно, $\forall C \in [A, B]$ определена обратная функция $f^{-1}(C) = x_0$.

Пусть $y_1, y_2 \in [A, B]$, причём $y_1 < y_2$. Обозначим $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Если бы $x_1 \geq x_2$, то, в силу возрастания f, получили бы $f(x_1) \geq f(x_2)$, т. е. $y_1 \geq y_2$, а это неверно. Поэтому $x_1 < x_2$. Итак,

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$

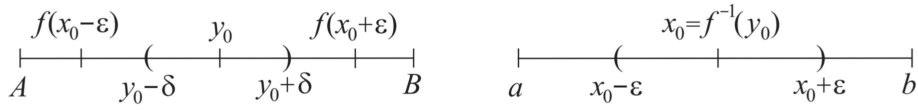
т. е. f^{-1} — строго возрастающая функция.

Возьмём $y_0 \in [A, B]$. Непрерывность f^{-1} в точке y_0 означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall y \quad |y - y_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

Возьмём произвольную ε-окрестность точки $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Окрестность $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ функцией f отображается на некоторый интервал $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$. Теперь выберем δ так, чтобы

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)).$$



Такая δ-окрестность точки y_0 целиком отображается функцией f^{-1} в выбранную ε-окрестность точки $f^{-1}(y_0)$, что и требовалось.

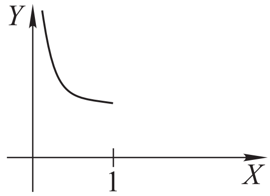
Теорема 9. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Доказательство проведём «от противного»: пусть $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$:

$$\forall M \ \exists x \in [a, b] : \ |f(x)| > M.$$

Тогда, в частности, для любого натурального n можно найти $x_n \in [a, b]$ так, чтобы $|f(x_n)| > n$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$. Она ограничена, так как все её члены лежат на $[a, b]$. По теореме Больцано – Вейерштрасса (теорема 8 из 1.4.3), в $\{x_n\}$ есть сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим $c = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Так как $a \le x_{n_k} \le b$, то $a \le c \le b$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = c$, т. е. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. Однако из определения предела следует, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Полученное равенство $f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ невозможно: $f(c)$ — конечное число, а $f(x_{n_k}) > n_k$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$. Теорема доказана.



Замечание. При отказе от замкнутости отрезка теорема перестает быть справедливой. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $(0, 1]$, однако не ограничена.

Теорема 10 (*о достижении точных граней*). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Обозначим $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда существуют точки $c_1, c_2 \in [a, b]$ такие, что $f(c_1) = M$, $f(c_2) = m$.

Доказательство. По теореме 9, функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$. Значит, M, m — конечные числа.

По определению точной верхней грани (см. 1.1), любое число, меньшее M, уже не является верхней гранью. В частности

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a, b] : M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M.$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, образованную такими числами. Она ограничена, поэтому, по теореме Больцано – Вейерштрасса, в ней можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим её предел: $c_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Ясно, что $c_1 \in [a, b]$. Непрерывность $f(x)$ в точке c_1 означает, что $\lim\limits_{x\to c_1} f(x) = f(c_1)$. На языке последовательностей: если $x_{n_k} \to c_1$, то $f(x_{n_k}) \to f(c_1)$. С другой стороны, $M - \dfrac{1}{n_k} \le f(x_{n_k}) \le M$. По лемме о сжатой переменной (теорема 4 из 1.4.1) получаем, что $f(x_{n_k}) \to M$. Но предел у сходящейся последовательности только один. Значит, $f(c_1) = M$.

Аналогично находится точка c_2 такая, что $f(c_2) = m$. Теорема доказана.

Замечание. Если промежуток не является замкнутым, то точная грань может не достигаться, даже если функция ограничена. Например, пусть

$$f(x) = x, \quad x \in (0, 1).$$

Точные грани $M = \sup f(x) = 1$, $m = \inf f(x) = 0$ не достигаются на интервале $(0, 1)$.

Кроме непрерывности далее нам потребуется более сильное свойство равномерной непрерывности. Функция $f(x)$ называется ***равномерно непрерывной*** на множестве D, если

$$\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0:\; \forall x', x'' \in D\;\; |x' - x''| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Замечание. Если $f(x)$ равномерно непрерывна на D, то $f(x)$ непрерывна в каждой точке D. Действительно, если зафиксировать одну из точек x', x'', например $x'' = x_0$, то получим определение непрерывной в точке x_0 функции:

$$\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0:\; \forall x'\;\; |x' - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x') - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Чтобы объяснить разницу между непрерывностью и равномерной непрерывностью, приведём пример.

Пример 13. Функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ на множестве $(0, 1)$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной. Действительно, точка $x = 0$ не содержится в интервале $(0, 1)$, а в остальных точках функция непрерывна. Возьмём $\varepsilon = 1$. Рассмотрим точки $x'_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $x''_n = \dfrac{1}{\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n}$. Тогда для любого δ при достаточно больших n: $|x'_n - x''_n| < \delta$. Но легко подсчитать, что $f(x'_n) = 1$, $f(x''_n) = -1$. Поэтому $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 2 > \varepsilon$, даже при очень близких x'_n , x''_n. Равномерной непрерывности нет.

Оказывается, если рассматривать замкнутый отрезок, то такой пример построить нельзя, т. е. справедлива

Теорема 11 ***(теорема Кантора).*** Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Рассуждаем от противного: пусть равномерной непрерывности нет, т. е.

$$\exists\varepsilon > 0:\; \forall\delta > 0\;\; \exists x', x'':\; |x' - x''| < \delta, \text{ но } |f(x') - f(x'')| > \varepsilon.$$

Возьмём, например, $\delta = \dfrac{1}{n}$. Получим тогда:

$$\exists\varepsilon > 0:\; \forall n\;\; \exists x'_n, x''_n:\; \left|x'_n - x''_n\right| < \frac{1}{n}, \text{ но } \left|f(x'_n) - f(x''_n)\right| > \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательности $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$. Они ограничены (все точки лежат на $[a, b]$), поэтому содержат сходящиеся подпоследовательности (по теореме Больцано – Вейерштрасса). Пределы этих подпоследовательностей одинаковы:

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = c \in [a, b]\,,$$

так как разность $|x'_n - x''_n|$ стремится к 0 при $n \to \infty$. В силу непрерывности функции $f(x)$ получаем:

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(c), \quad \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(c),$$

что противоречит тому, что $\left|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\right| > \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает теорему.

3.4. Задачи с решениями

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

Решение. Неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$, в которых участвуют тригонометрические функции, часто раскрываются с помощью 1-го замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{x^2} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 3x}{x^2} =$$

$$= 2\cdot 9\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{9x^2} = 18\cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = 18.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Решение. Сразу нельзя воспользоваться замечательным пределом, так как ни $2x$, ни $3x$ не стремятся к 0. Сделаем замену переменной:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \left| \begin{array}{l} x-\pi = y, \\ x = y+\pi, \\ y\to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2y+2\pi)}{\sin(3y+3\pi)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{-\sin 3y} =$$

$$= -\lim_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{2y}\cdot\frac{3y}{\sin 3y}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{2y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{3y}{\sin 3y} = -\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{2}{3}.$$

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Решение. Знак ∞ не указан. Проводя вычисления, обращаем внимание на то, что они справедливы и для $x\to\infty$, и для $x\to-\infty$. Преобразуем так, чтобы можно было применить 2-й замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \langle 1^\infty \rangle = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{2x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3(2x-1)}{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}.$$

Так как $\dfrac{x-2}{3} \to \infty$ при $x \to \infty$, то выражение в квадратных скобках стремится к e (2-й замечательный предел). Кроме того,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\,(2x-1)}{x-2} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x\to\infty} \frac{6-\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = 6.$$

Поэтому $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\dfrac{x-2}{3}} \right)^{\frac{x-2}{3}} \right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}} = e^6.$

4. Вычислить $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$.

Решение. Основание стремится к 2, показатель — к $+\infty$. Неопределённости нет:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x = \left\langle 2^{+\infty} \right\rangle = +\infty.$$

5. Доказать, что уравнение $x^3 + 4x + 1 = 0$ имеет на отрезке $[-1, 0]$ по крайней мере 1 корень. Указать величину корня с точностью 0,1.

Решение. Обозначим $f(x) = x^3 + 4x + 1$. Функция $f(x)$ непрерывна, $f(-1) < 0, f(0) > 0$. Поэтому, по теореме о промежуточных значениях (теорема 7), существует $x_0 \in [-1, 0] : f(x_0) = 0$.

Для уточнения корня применим метод деления отрезка пополам. Определяем знак $f(x)$ в средней точке: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} - 2 + 1 < 0$. Так как $f(0) > 0$, то на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$ имеется корень. Повторяем такой же шаг: $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{64} - 1 + 1 < 0$, $f(0) > 0$. Значит, на отрезке $\left[-\dfrac{1}{4}, 0\right]$ имеется корень. Вычисляем далее: $f\left(-\dfrac{1}{8}\right) = -\dfrac{1}{512} - \dfrac{1}{2} + 1 > 0$. Теперь $f(x)$ меняет знак на $\left[-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}\right]$, поэтому корень лежит на этом отрезке. Длина отрезка равна $\dfrac{1}{8}$, следовательно, его середина $\left(-\dfrac{3}{16}\right)$ отличается от истинного значения корня менее, чем на $\dfrac{1}{16}$. Итак, $x_0 \approx -\dfrac{3}{16}$.

6. Какая из бесконечно малых (при $x \to 0$) функций $\alpha(x) = x^3 + \operatorname{tg} x$, $\beta(x) = \ln(1 + x^2)$ имеет более высокий порядок?

Решение. Так как $\operatorname{tg} x \sim x,\ x^3 = o(x)$, то $\alpha(x) = x^3 + \operatorname{tg} x = x + o(x)$. Так как $\beta(x) = \ln(1+x^2) \sim x^2$, то $\beta(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3 + \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

7. Доказать, что при $x \to 0$ бесконечно малые $\alpha(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}}$, $\beta(x) = \sin\sqrt{x\sqrt{x}}$ эквивалентны.

Решение. Вычислим предел отношения:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + x^{1,5}}}{\sin(x^{0,75})} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{0,75}\sqrt{x^{0,5}+1}}{x^{0,75}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x^{0,5}+1} = 1.$$

Здесь мы воспользовались известной нам эквивалентностью:

$$\sin(x^{0,75}) \sim x^{0,75}.$$

8. Функции $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = (x-1)^2$ являются бесконечно малыми при $x \to 1$. Какая из них имеет более высокий порядок?

Решение. Вычислим предел отношения:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \pm\infty.$$

Итак, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ бесконечно большая при $x \to 1$. Значит, $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ — бесконечно малая, $g(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $f(x)$.

9. Если $\alpha(x) \sim x^k$ (при $x \to 0$), то число k называется ***порядком малости*** функции $\alpha(x)$. Найти порядок малости функций $\alpha(x) = x^3 + x^5$, $\beta(x) = x \operatorname{tg} x + \sin x$.

Решение. Так как $x^5 = o(x^3)$, то $\alpha(x) = x^3 + o(x^3)$, т. е. $\alpha(x) \sim x^3$, $\alpha(x)$ имеет порядок малости 3.

Аналогично, $\sin x \sim x$, $x \operatorname{tg} x \sim x^2$. Значит, $\sin x = x + o(x)$, $x \operatorname{tg} x = x^2 + o(x^2) = o(x)$ и поэтому $\beta(x) = x^2 + o(x^2) + x + o(x) = x + o(x)$, $\beta(x)$ имеет порядок малости, равный 1.

10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x}-1}{x}$.

Решение. Так как при $x \to 0$ имеет место эквивалентность $e^x - 1 \sim x$, то $e^{-2x} - 1 \sim -2x$. Заменяя бесконечно малую в числителе на эквивалентную, получаем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x} = -2.$$

11. Вычислить $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. Чтобы удобнее пользоваться основными эквивалентностями, перейдём к переменной $y=x-e$. Тогда $y\to 0$ и

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(e+y)-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(e+y)-\ln e}{y}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{e+y}{e}\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{y}{e}\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{y}{e}}{y}=\frac{1}{e}.$$

12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x-\operatorname{tg}^2 x}{x^3+\ln(1+5x)}$.

Решение. Постараемся выделить главную часть в числителе и в знаменателе. Пользуемся при этом основными эквивалентностями:

$$\arcsin 3x\sim 3x,\quad \operatorname{tg} x\sim x,\quad \ln(1+5x)\sim 5x,$$

а также тем, что $x^2=o(x)$, $x^3=o(x)$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x-\operatorname{tg}^2 x}{x^3+\ln(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+o(3x)-x^2-o\left(x^2\right)}{x^3+5x+o(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+o(x)}{5x+o(x)}=\frac{3}{5}.$$

13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{5x}-3^{2x}}{x^2+x+\operatorname{arctg} 2x}$.

Решение. Имеем неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Чтобы воспользоваться основными эквивалентностями, в числителе вычтем и прибавим 1. Тогда

$$2^{5x}-1\sim 5x\ln 2,\quad 3^{2x}-1\sim 2x\ln 3.$$

Кроме того, учтём, что $\operatorname{arctg} 2x\sim 2x$, $x^2=o(x)$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{5x}-3^{2x}}{x^2+x+\operatorname{arctg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{5x}-1+1-3^{2x}}{x^2+x+\operatorname{arctg} 2x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x\ln 2+o(x)+2x\ln 3+o(x)}{o(x)+x+2x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\ln 2+2x\ln 3}{3x}=\frac{5\ln 2+2\ln 3}{3}.$$

14. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Обозначим искомый предел буквой A. Найдем сначала логарифм числа A. Пользуемся непрерывностью функции $y=\ln x$: логарифм предела равен пределу логарифма.

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2}=-2.$$

Так как $\ln A=-2$, то $A=e^{-2}$.

3.5. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})\right)^{\frac{1}{2x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+2}{1+5x}\right)^{x+2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{5x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

3. Какие из бесконечно малых (при $x\to 0$) функций

$$y_1=\sin 3x,\ \ y_2=\frac{x^2}{1+x^2},\ \ y_3=\sqrt{x},\ \ y_4=xe^{2x},\ \ y_5=\ln\left(1+3x^2\right)$$

имеют более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)=x$? Какие из них имеют одинаковый с $\alpha(x)=x$ порядок? Эквивалентны $\alpha(x)$?

4. Определить порядок малости относительно $\alpha(x)=x$ следующих бесконечно малых (при $x\to 0$) функций:

а) $3x^2-x^3+2x^5$; б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

в) $\operatorname{tg} x-\sin x$; г) $e^{\sin x}-1$;

д) $\operatorname{tg} x+x^2$; е) $\sqrt{\sin x}$.

5. Среди следующих бесконечно малых (при $x\to 1$) функций найти функции одного порядка с функцией $\ln x$:

а) $7\,(x-1)$; б) x^3-1; в) e^x-e; г) $\sqrt[3]{x-1}$.

6. Определить порядок бесконечно больших (при $x\to\infty$) функций по сравнению с функцией $\beta(x)=x$:

а) $\beta_1(x)=8x^2+x+2$; б) $\beta_2(x)=\dfrac{3-2x^3}{5+x-7x^2}$;

в) $\beta_3(x)=\ln(4+5e^{6x^2})$; г) $\beta_4(x)=x+x^2+\sqrt{x^5+3x+1}$.

7. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg} x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{\sin(\pi(x+7))}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\ln(1+2x)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x\ln 2)}{2^{-3x}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)+\ln(1-\sin x)}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x^3}}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x^2+\operatorname{tg}^2 x}$.

8. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin 3\pi x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\sin 2x+\operatorname{tg}5x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3^x-3^5}{x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{\sqrt{1-e+x}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+5x^2}-\sqrt{x^2-2x})$; з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

9. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}(1+\arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}5x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(2-e^x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin x)}}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to-2+0}(1+\operatorname{tg}(x+2))^{\frac{1}{(x+2)^2}}$.

10. Найти с точностью до 0,1 действительные корни уравнений:

а) $x^3-2x-5=0$; б) $x^3-6x^2+14x-42=0$.

11. Опираясь на определение, доказать равномерную непрерывность функции на указанном множестве:

а) $f(x)=3x+2,\ x\in(-\infty,+\infty)$; б) $f(x)=x^2-5x+7,\ x\in(-1,2)$;

в) $f(x)=\sqrt{x-2},\ x\in(2,+\infty)$; г) $f(x)=\sin x+3\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

3.6. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sin(x-3)}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x+5}\right)^{\frac{1}{|x|}}$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{tg}5x}$.

4. Бесконечно малые (при $x\to0$) функции $\alpha(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $\beta(x)=x+\sin x$ 1) являются эквивалентными; 2) не эквивалентны, но имеют одинаковый порядок роста; 3) $\alpha(x)=o(\beta(x))$; 4) $\beta(x)=o(\alpha(x))$.

Указать номер правильного ответа.

5. Какая из бесконечно больших (при $x\to2$) функций имеет наибольший порядок роста? 1) $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x-2}}$; 2) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x-2}}$; 3) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

6. Найти действительный корень уравнения $2x^3+4x+1=0$, если допустимая погрешность 0,05.

ГЛАВА 4

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

4.1. Определение производной

Одним из основных в математическом анализе является понятие производной. Прежде чем дать точное его определение, рассмотрим ***задачу о скорости***, при решении которой и возникло это понятие.

Пусть материальная точка движется по прямой, а функция $s = s(t)$ определяет зависимость пройденного точкой пути s от времени t. Чтобы найти скорость точки в момент $t = t_0$, рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. За это время точка пройдёт путь $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Средняя скорость на этом участке равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от Δt, но чем меньше Δt, тем точнее $v_{\text{ср}}$ будет выражать истинную скорость точки в момент времени t_0. Значит, скорость точки в момент времени t_0 равна пределу:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Поэтому, если мы хотим уметь вычислять скорость при разных законах движения, нам нужно научиться вычислять такой предел для разных функций.

Заметим, что мы пользовались интуитивным пониманием скорости. Если рассуждать более строго, то последняя формула есть ***определение***: скоростью называется предел указанного вида. Такое определение, как мы видим, хорошо согласуется с интуитивными представлениями.

Перейдём к понятию производной. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 (включая саму точку x_0; здесь рассматривается не проколотая, а обычная окрестность). Дадим ***приращение*** Δx аргументу, т. е. рассмотрим число $x_0 + \Delta x$, также лежащее в этой окрестности. Величина

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

называется приращением функции. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

то он называется ***производной*** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. В этом случае функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x_0.

Итак, производная $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 это ***число***. Однако, меняя точку, можно рассмотреть ***функцию***

$$x \to f'(x),$$

сопоставляющую каждому x (из некоторого множества) значение производной функции f в точке x. Эта функция обозначается $f'(x)$ и также называется производной функции $f(x)$. Отображение $f(x) \to f'(x)$ называется ***дифференцированием***. Для производной используются и другие обозначения:

$$f'(x) = \dot{f}(x) = \frac{df}{dx}.$$

Последняя запись читается так: «дэ эф по дэ икс», нужно рассматривать её не как дробь, а как единый символ, обозначающий функцию.

Если к функции $f'(x)$ снова применить операцию дифференцирования, то получится ***производная второго порядка*** или, короче, ***вторая производная***:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и производные более высоких порядков:

$$f'''(x) = (f''(x))', \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Используются также обозначения:

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, \ \ldots, \ f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Возвращаясь к задаче о скорости, можно теперь сказать, что скорость точки в данный момент времени t_0 есть производная функции $s(t)$ при $t = t_0$. Скорость может зависеть от времени: $v = v(t)$. Тогда производная функции $v(t)$ есть «скорость изменения скорости», т. е. ***ускорение***: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Перейдём к примерам вычисления производных.

Пример 1. Производная постоянной функции равна 0. Действительно, пусть $f(x) = C$ $(\forall x)$. Вычислим производную в произвольной точке x:

$$f'(x) = C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim 0 = 0.$$

Пример 2. Вычислим производную синуса:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} = \cos x.$$

Поясним все действия подробно. Первое равенство — определение производной. Второе — результат применения тригонометрической формулы: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Затем предел произведения функций мы заменили произведением их пределов. Первый сомножитель — это первый замечательный предел, он равен 1. Второй сомножитель вычисляется простой подстановкой 0 вместо Δx, так как $\cos x$ — непрерывная функция. Итак, в любой точке x

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Заметим, что при вычислении предела $\Delta x \to 0$, а x мы рассматриваем как постоянное число — это точка, в которой вычисляется производная.

Пример 3. Производная косинуса: $(\cos x)' = -\sin x$. Здесь вычисления аналогичны:

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Пример 4. Производная показательной функции:

$$(a^x)' = a^x\ln a.$$

Действительно,

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a.$$

В последнем действии мы использовали следствие 1 из 3.2.2. При $a = e$ получаем, в частности, формулу

$$(e^x)' = e^x.$$

Пример 5. Производная степенной функции:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Действительно,

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\Delta x}{x^\alpha}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}x^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Здесь использовано следствие 2 из 3.2.2.

Пример 6. Производная логарифмической функции:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

Действительно,

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Перейдём к более удобным натуральным логарифмам по формуле

$$\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a},$$

а также воспользуемся одной из основных эквивалентностей бесконечно малых: $\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right) \sim \dfrac{\Delta x}{x}$ (при $\Delta x \to 0$). Продолжаем вычисление:

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x\ln a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x\ln a} = \frac{1}{x\ln a}.$$

Требуемая формула доказана. Особенно простой вид она имеет для натурального логарифма:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Пример 7. Найти вторую производную функции $y = \sin x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. По формулам, полученным в примерах 2, 3, имеем:

$$y' = (\sin x)' = \cos x,$$

$$y'' = (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x.$$

В частности, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$. Заметим: мы сначала нашли производную в произвольной точке x и лишь затем подставили вместо x требуемое число. Запись $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)''$ была бы неправильной, в ней нарушен порядок действий. Можно использовать такую запись:

$$(\sin x)''\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

Установим связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Теорема 1. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $f(x)$ непрерывна в x_0.

Доказательство. Дифференцируемость означает, что существует конечная производная в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$$

В этом случае функция $\frac{\Delta f}{\Delta x} - A$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Обозначим её $\alpha(\Delta x)$. Тогда $\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ и предел приращения Δf, очевидно, равен 0:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0}(A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = 0 + 0 = 0.$$

По определению это значит, что $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Обратная теорема не справедлива: функция может быть непрерывной, но не иметь производной.

Пример 8. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема при $x = 0$. Действительно: $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+0}|x| = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x\to-0}|x| = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$. Непрерывность функции установлена. При вычислении производной предел слева оказывается отличным от предела справа:

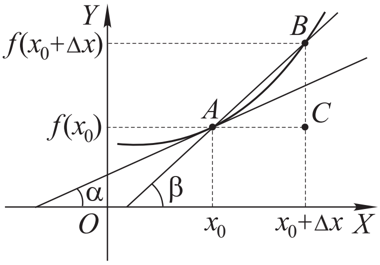
$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to+0}\frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to-0}\frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не существует.

Если в определении производной рассматривать односторонний предел, то получим понятие ***односторонней*** производной. Ясно, что дифференцируемость функции означает совпадение её левой и правой производных.

В заключение раздела рассмотрим геометрический смысл понятия «производная». Для этого рассмотрим график функции $y = f(x)$. Возьмём



точку x_0 и дадим приращение аргументу Δx. Соответствующие точки A, B на графике имеют ординаты $f(x_0)$, $f(x_0 + \Delta x)$. Проведём через них прямую линию, она называется ***секущей***. Угол наклона секущей, т. е. угол между секущей и осью OX, обозначим β. Из прямоугольного треугольника ABC найдем $\operatorname{tg}\beta$:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теперь будем уменьшать Δx. При этом точка B будет приближаться к точке A, угол наклона секущей будет изменяться. Предельное положение, которое стремится занять секущая при $\Delta x \to 0$, называется ***касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке A. Угол наклона касательной, очевидно, равен пределу переменного угла β:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Итак, производная равна тангенсу угла наклона (т. е. угловому коэффициенту) касательной.

Теперь мы можем в общем виде записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой в точке (x_0, y_0). Прямая, проходящая через точку (x_0, y_0) и имеющая угловой коэффициент k, задаётся уравнением:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Значит, уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Здесь $y_0 = f(x_0)$. Прямая, проходящая через ту же точку (x_0, y_0) перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** к кривой. Так как условие перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1, k_2 имеет вид: $k_1 k_2 = -1$ (см. АГ, раздел 5.5), то получаем (если $f'(x_0) \neq 0$) уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если же $f'(x_0) = 0$, т. е. касательная горизонтальна и имеет уравнение $y = y_0$, то нормаль будет параллельной оси OY; её уравнение в этом случае: $x = x_0$.

Пример 9. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^3$ в точке $(2, 8)$.

Решение. Вычислим производную в данной точке. Производная степенной функции вычислялась в примере 5, здесь у нас — частный случай:

$$y'(2) = (x^3)'\big|_{x=2} = 3x^2\big|_{x=2} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Угловой коэффициент касательной равен 12, поэтому её уравнение имеет вид:

$$y - 8 = 12(x - 2), \text{ или } \quad y = 12x - 16.$$

Уравнение нормали: $y - 8 = -\dfrac{1}{12}(x - 2)$, или $x + 12y - 98 = 0$.

4.2. Правила дифференцирования

Вычисление производной по определению, с помощью предела, даже в простых случаях потребовало от нас некоторых усилий. Имеется более простой путь. В примерах 1–6 найдены производные большинства основных элементарных функций. Мы вычислим производные оставшихся, а затем научимся дифференцировать функции, построенные из более простых с помощью арифметических действий и операции суперпозиции.

4.2.1. Производная суммы, разности, произведения, частного

Теорема 2. Если функции f_1, f_2 дифференцируемы в точке x, то их сумма также дифференцируема, причём

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'.$$

Доказательство. Вычислим производную функции $f_1 + f_2$ в произвольной точке x, используя определение:

$$(f_1 + f_2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f_1 + f_2)(x + \Delta x) - (f_1 + f_2)(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x) + f_2(x + \Delta x) - f_1(x) - f_2(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \right] = f_1'(x) + f_2'(x).$$

Теорема 3. Если f_1, f_2 дифференцируемы в точке x, то их произведение дифференцируемо, причём:

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_2' f_1.$$

Доказательство. $(f_1 f_2)' =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f_1f_2)(x+\Delta x)-(f_1f_2)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)+f_1(x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}f_2(x+\Delta x)+f_1(x)\,\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} f_2(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0} f_1(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x} =$$

$$= f_1'(x)\,f_2(x)+f_1(x)\,f_2'(x)\,.$$

В последнем равенстве мы, кроме определения производной, воспользовались тем, что функция f_2 непрерывна в точке x (следует из дифференцируемости, по теореме 1), а поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f_2(x+\Delta x) = f_2(x)$.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cf)' = cf'.$$

Доказательство. Производная константы равна 0 (см. пример 1), поэтому

$$(cf)' = c'f + cf' = 0 + cf' = cf'.$$

Следствие 2. Производная разности равна разности производных:

$$(f_1 - f_2)' = f_1' - f_2'.$$

Доказательство. Применим теорему 2 и следствие 1:

$$(f_1 - f_2)' = (f_1 + (-f_2))' = f_1' + (-f_2)' = f_1' - f_2'.$$

В последнем действии множитель (-1) вынесен за знак производной.

Теорема 4. Если f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x, причём $f_2(x)\neq 0$, то частное $\dfrac{f_1}{f_2}$ является дифференцируемой функцией и

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1{}'f_2 - f_1f_2{}'}{f_2^2}.$$

Доказательство. Дадим, как обычно, приращение Δx переменной x. Тогда функции f_1, f_2 получат приращения, которые мы обозначим Δf_1, Δf_2. Приращение функции $y = \dfrac{f_1}{f_2}$ равно:

$$\Delta y = \frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x)+\Delta f_1}{f_2(x)+\Delta f_2} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\Delta f_1\cdot f_2(x) - f_1(x)\cdot\Delta f_2}{(f_2(x)+\Delta f_2)\,f_2(x)}.$$

Разделим на Δx и перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta f_1}{\Delta x} f_2(x) - f_1(x) \dfrac{\Delta f_2}{\Delta x}}{(f_2(x) + \Delta f_2)\, f_2(x)} = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

Использована непрерывность f_2: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f_2 = 0$.

Пример 10. Вычислим производные тангенса и котангенса:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4.2.2. Производная обратной функции

В теореме 8 раздела 3.3 мы рассматривали вопрос о непрерывности обратной функции. Напомним: если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает в окрестности точки x_0, то в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена, непрерывна и строго возрастает обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Как найти её производную в точке y_0, если известна производная функции $y = f(x)$ в точке x_0? Ответ даёт

Теорема 5. Пусть для функции $y = f(x)$ в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Если f дифференцируема в x_0, причём $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в y_0 и

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Заметим, что если приращению Δx соответствует приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то для обратной функции приращению аргумента Δy будет соответствовать приращение

$$f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) - x_0 =$$

$$= f^{-1}(f(x_0 + \Delta x)) - x_0 = \Delta x.$$

Таким образом, можно сказать, что приращения Δx, Δy соответствуют друг другу.

Из дифференцируемости $f(x)$ следует её непрерывность, а значит и непрерывность $f^{-1}(y)$. Поэтому

$$\Delta x \to 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta y \to 0.$$

Теперь легко вычисляется производная обратной функции:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

В качестве примеров применения теоремы 5 найдём производные обратных тригонометрических функций.

Пример 11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Действительно, обратной для функции $y=\arcsin x$ является функция $x=\sin y$. Её производную мы знаем: $(\sin y)'=\cos y$. Поэтому

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед корнем мы берём знак «+», так как $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos y>0$.

Пример 12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Рассуждение аналогично: функция $y=\arccos x$ определена на отрезке $[-1,1]$, принимает значения на отрезке $[0,\pi]$. Обратная функция $x=\cos y$ дифференцируема, её производная $(\cos x)'=-\sin x$ не обращается в 0 (кроме концевых точек) и отрицательна на отрезке $[0,\pi]$. Поэтому

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 13. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

Производные функций $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{ctg} y$ (обратных данным) вычислены в примере 10.

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y+\cos^2 y}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 y+1}=\frac{1}{x^2+1},$$

$$(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{1}{(ctgy)'}=\frac{1}{-\dfrac{1}{\sin^2 y}}=-\sin^2 y=$$

$$=\frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y+\cos^2 y}=-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 y+1}=-\frac{1}{x^2+1}.$$

4.2.3. Таблица производных основных элементарных функций

Напомним (см. 2.1.3), что все элементарные функции получаются из нескольких основных с помощью арифметических действий и операции суперпозиции. В примерах 1–6, 10–13 получены формулы для производных всех основных элементарных функций. Чтобы их было удобнее использовать (и чтобы лучше запомнить) сведём все формулы в одну таблицу.

Таблица производных

1. $C' = 0$; 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$; в частности, $(e^x)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$; 6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Добавим сюда формулы для производных гиперболических функций — их тоже полезно помнить. Советуем вывести эти формулы самостоятельно.

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; 14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4.2.4. Производная сложной функции

Здесь мы рассмотрим самое важное правило дифференцирования — научимся дифференцировать суперпозицию функций (или, что то же самое, сложную функцию).

Теорема 6. Пусть функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, функция $z = f(y)$ определена в окрестности точки $g(x_0)$ и дифференцируема в этой точке. Тогда сложная функция $z = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, причём

$$z'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Доказательство. Дадим приращение Δx переменной x и обозначим соответствующее приращение функции $g(x)$ через Δg. Тогда $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, т. е. $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$. Заметим также, что из дифференцируемости $g(x)$ в точке x_0 следует её непрерывность в этой точке: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g = 0$. Учитывая эти замечания, вычисляем производную:

$$z'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x_0+\Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x_0)+\Delta g) - f(g(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x_0)+\Delta g) - f(g(x_0))}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta g\to 0}\frac{f(g(x_0)+\Delta g) - f(g(x_0))}{\Delta g}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Чтобы научиться применять эту теорему, нужно хорошо уметь представлять функцию в виде суперпозиции более простых функций. Например, при вычислении функции $y=\sin(x^2)$ сначала x возводят в квадрат, а затем вычисляют синус от полученной величины. Можно как-либо обозначить промежуточный результат:

$$y=\sin t,\ \ t=x^2.$$

Тогда, по теореме 6,

$$y' = (\sin t)'\cdot t' = \cos t\cdot(x^2)' = \cos(x^2)\cdot 2x.$$

Пример 14. Найти производную функции $y=(\ln\cos x)^2$.

Решение. Представим функцию $y(x)$ как суперпозицию, т. е. последовательное вычисление более простых функций:

$$x\to u=\cos x\ \to\ v=\ln u\ \to\ y=v^2=(\ln\cos x)^2.$$

Каждая стрелка — основная элементарная функция, их производные есть в таблице:

$$(\cos x)' = -\sin x,\quad (\ln u)' = \frac{1}{u},\quad \left(v^2\right)' = 2v.$$

По теореме 6, производная суперпозиции равна:

$$y' = -\sin x\cdot\frac{1}{u}\cdot 2v = -\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot 2\ln\cos x = -2\operatorname{tg} x\cdot\ln\cos x.$$

Если составляющих функций много, возможно встречаются и арифметические операции, то полезно начать дифференцирование с последнего действия. Точнее, если $y=f(u(x))$, то по теореме 6: $y'=f'(u(x))\cdot u'(x)$, и далее требуется дифференцировать более простую функцию $u(x)$.

Пример 15. Найти производную функции $y=\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\sin x)$.

Решение. Последнее действие — вычисление арктангенса. По таблице находим: $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}$. Поэтому

$$y' = \frac{1}{1+x\sin^2 x}\cdot\left(\sqrt{x}\sin x\right)'.$$

Теперь требуется найти более простую производную $(\sqrt{x}\sin x)'$. Последнее действие — умножение, поэтому применяем формулу для производной произведения (см. теорему 3):

$$\left(\sqrt{x}\sin x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(\sin x) + \sqrt{x}\,(\sin x)'.$$

Заметим, что $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, поэтому $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Окончательно получаем:

$$(\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\sin x))' = \frac{1}{1 + x\sin^2 x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right).$$

Пример 16. Найти производную $\left(\dfrac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$.

Решение. Последнее действие — деление, поэтому применяем формулу для производной частного (теорема 4):

$$\left(\frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{(2^x)'\sqrt{1-x^2} - 2^x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2}.$$

Производная $(2^x)'$ есть в таблице, а чтобы найти $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'$, нужно применить теорему о производной сложной функции. Последнее действие — извлечение корня:

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1-x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1' - \left(x^2\right)'\right) = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(0-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставляя найденные производные, получим:

$$\left(\frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{2^x\ln 2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x2^x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}.$$

4.2.5. Другие случаи вычисления производных

Функция может быть задана не только явной формулой, выражающей зависимость y от x, но и другими способами. Рассмотрим случай ***параметрического*** задания функции:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Напомним: здесь x — независимая переменная, а y есть функция от x: $y = y(x)$. Однако зависимость y от x задана не непосредственно, а через параметр. Как дифференцировать такую функцию? Конечно, легко найти производные функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$x'_t = \varphi'(t),\ y'_t = \psi'(t).$$

(Здесь индекс t означает, что мы рассматриваем функции от переменной t и вычисляем производные по этой переменной.) Однако нам нужно вычислить производную $y'_x = y'(x)$.

Пусть для $x = \varphi(t)$ существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда нашу функцию можно выразить явно через x:

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Найдём её производную, используя теоремы о дифференцировании сложной функции и обратной функции:

$$y'_x = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

В этой формуле производная y'_x снова выражена через параметр t. Чтобы установить её связь с переменной x, нужно использовать связь x и t: $x = \varphi(t)$. Таким образом, если функция задана параметрически, то и её производная задана параметрически:

$$\text{функция: } \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{её производная: } \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$$

Пример 17. Найти производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$. Вычислить значение производной в точке $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. По формуле, полученной выше, производная имеет параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y'_x = \dfrac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

Точка $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ соответствует значению параметра $t = \dfrac{\pi}{4}$. Значит,

$$y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

Замечание. Не имеет смысла выводить специальную формулу для производной второго порядка. Указанный метод можно применить к функции столько раз, сколько потребуется.

Пример 18. Найти производную второго порядка от функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

Решение. Так как $x'_t = 1 - \cos t$, $y'_t = \sin t$, то первая производная данной функции имеет вид: $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y'_x = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}. \end{cases}$ Аналогично, вычислим сначала

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)' = \frac{(\sin t)'(1-\cos t) - \sin t\,(1-\cos t)'}{(1-\cos t)^2} =$$
$$= \frac{\cos t\,(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2} = \frac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^2} = -\frac{1}{1-\cos t}.$$

Значит, вторая производная данной функции есть:

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y''_x = -\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим случай ***неявно заданной*** функции. При определённых условиях функция $y = y(x)$ может быть задана равенством

$$F(x, y) = 0.$$

Подставляя сюда числовые значения x и решая полученные уравнения, можно находить значения функции $y(x)$. Чтобы найти производную функции, заданной таким образом, нужно продифференцировать равенство $F(x, y) = 0$ по x, считая при этом y функцией от x. Получим равенство, которое вместе с соотношением $F(x, y) = 0$ неявно определяет производную $y'(x)$. Поясним сказанное на примере.

Пример 19. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной уравнением $e^y + xy = e$. Вычислить значение $y'(0)$.

Решение. Дифференцируем уравнение по x, считая y функцией от x:

$$(e^y + xy)'_x = 0.$$

Пользуемся правилами дифференцирования сложной функции и произведения:

$$(e^y)' = e^y \cdot y', \quad (xy)' = x'y + xy' = y + xy'.$$

Уравнение приобретает вид:

$$e^y \cdot y' + y + xy' = 0,$$
$$y'(e^y + x) = -y,$$
$$y' = \frac{-y}{e^y + x}.$$

Хотя мы и выразили y', явного задания не получается — в правой части есть y. Поэтому, чтобы найти $y'(0)$, сначала нужно найти $y(0)$. Подставим $x = 0$ в исходное уравнение:

$$e^{y(0)} + 0 = e, \;\; y(0) = 1.$$

Значит, $y'(0) = \dfrac{-y\,(0)}{e^{y(0)} + 0} = -\dfrac{1}{e}$.

В заключение раздела рассмотрим ещё один способ дифференцирования. Обычно он применяется для функций вида

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = u^v.$$

Такую функцию нельзя отнести, конечно, ни к степенным, ни к показательным. Однако она является элементарной, так как её можно представить в виде:

$$f = u^v = e^{v \cdot \ln u}.$$

Вычислим производную такой функции:

$$(u^v)' = \left(e^{v \ln u}\right)' = e^{v \ln u}\,(v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right).$$

Часто для вычисления $(u^v)'$ применяется другой приём, так называемое ***логарифмическое дифференцирование***. Логарифмируем обе части равенства $f = u^v$:

$$\ln f = v \ln u.$$

Теперь вычислим производную каждой части равенства:

$$\frac{1}{f} \cdot f' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'.$$

Отсюда

$$f' = (u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u} \cdot u'\right).$$

Пример 20. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение. Логарифмируем: $\ln y = \ln(x^{\sin x}) = \sin x \cdot \ln x$. Дифференцируем обе части равенства: $\dfrac{1}{y} y' = (\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$. Отсюда:

$$y' = y \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Предварительное логарифмирование применяется тогда, когда производная от логарифма функции вычисляется проще, чем от самой функции. Логарифм преобразует произведение функций, частное функций в сумму или разность соответственно, а это упрощает дифференцирование.

Пример 21. Найти производную функции $y = \dfrac{x^3 \sqrt{x+1}}{(x^2+3)(x-2)}$.

Решение. Пользуясь свойствами логарифма, получим:

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^3\sqrt{x+1}}{(x^2+3)(x-2)}\right) = \ln x^3 + \ln\sqrt{x+1} - \ln\left(x^2+3\right) - \ln(x-2) =$$
$$= 3\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln\left(x^2+3\right) - \ln(x-2).$$

Теперь легко вычислить производную:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 3\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x - \frac{1}{x-2},$$
$$y' = \frac{x^3\sqrt{x+1}}{(x^2+3)(x-2)}\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{x-2}\right).$$

4.3. Дифференциал

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т. е. имеет конечную производную:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Используя свойство предела, то же самое можно записать в виде:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Значит, приращение Δf запишется так:

$$\Delta f = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Приращение Δf (функции f в точке x_0) является функцией от Δx. Последнее равенство показывает, как устроена эта функция. Первое слагаемое очень просто, (***линейно***) зависит от Δx. Его называют ***дифференциалом*** функции f в точке x_0. Используется обозначение:

$$df = f'(x_0)\Delta x.$$

Второе слагаемое $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем Δx:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0.$$

Поэтому для приращения функции получаем формулу:

$$\Delta f = df + o(\Delta x).$$

Пример 22. Найдём дифференциал функции $f(x) = x^3$ в произвольной точке x_0. Преобразуем приращение:

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = \\ = 3x_0^2\Delta x + 3x_0\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\,.$$

Видим, что линейная часть приращения (т. е. дифференциал) равна $3x_0^2\Delta x$. Оставшаяся часть — бесконечно малая более высокого порядка:

$$3x_0\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = o\,(\Delta x).$$

Заметим, что дифференциал проще было найти не преобразованиями Δf, а с помощью производной: $d\left(x^3\right) = \left(x^3\right)'\Delta x = 3x_0^2\Delta x$. В дальнейшем мы так и будем поступать.

Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Её производная в любой точке равна 1. Поэтому

$$df = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Используя равенство $dx = \Delta x$, формулу для дифференциала будем записывать так:

$$df = f'(x_0)\,dx.$$

Замечание. Как мы убедились, дифференциал является линейной функцией от Δx, или, как говорят, ***линейной частью*** приращения Δf. Тот факт, что $\Delta f - df = o(\Delta x)$, выражают словами: дифференциал есть ***главная часть*** приращения Δf. Иногда пишут

$$\Delta f \approx df,$$

пренебрегая бесконечно малым слагаемым более высокого порядка. Это приближённое равенство можно использовать в вычислениях, не требующих большой точности. Смысл в том, чтобы заменить (обычно сложное) вычисление Δf более простым вычислением df. Оценивать ошибку, допускаемую при такой замене, мы научимся в следующей главе.

Пример 23. На сколько увеличится объём шара радиусом $R = 1$ м, если радиус увеличить на 2 см?

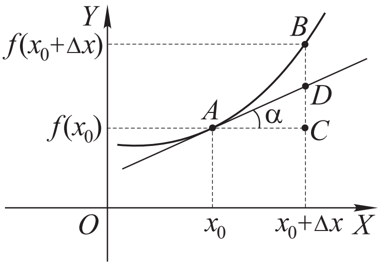
Решение. Объём шара, как известно, равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Можно найти искомое приращение объёма и непосредственно: $\Delta V = \frac{4}{3}\pi\,(1{,}02)^3 - \frac{4}{3}\pi$. Однако проще это сделать с помощью дифференциала:

$$\Delta V \approx dV = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'\Delta R = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 \cdot \Delta R = 4\pi R^2\Delta R = \\ = 4\pi \cdot 1 \cdot 0,02 = 0{,}08\pi \approx 0{,}25(\text{м}^3).$$

Посмотрим на дифференциал с геометрической точки зрения.



На рисунке к графику функции $f(x)$ проведена касательная в точке A с абсциссой x_0. Видим, что приращение $\Delta f = BC$ является суммой:

$$BC = CD + BD.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \dfrac{CD}{AC}$, то

$$CD = f'(x_0)\cdot AC = f'(x_0)\Delta x = df.$$

Значит, дифференциал равен приращению ординаты касательной при данном значении Δx. Разность $BD = BC - CD = \Delta f - df = o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

Свойства дифференциала вытекают из его связи с понятием производной и свойств производной. Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема 7. Если f_1, f_2 дифференцируемые функции, c — постоянная, то

$$d(c) = 0;$$
$$d(f_1 \pm f_2) = df_1 \pm df_2;$$
$$d(f_1 f_2) = f_1\,df_2 + f_2\,df_1;$$
$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2\,df_1 - f_1\,df_2}{f_2^2}.$$

Доказательство всех свойств проводится по одной схеме. Докажем, например, последнее:

$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' dx = \frac{f_2 f_1' - f_1 f_2'}{f_2^2}dx = \frac{f_2\,(f_1' dx) - f_1\,(f_2' dx)}{f_2^2} = \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{f_2^2}.$$

Рассмотрим ещё одно важное свойство. Пусть $z = f(y)$, $y = g(x)$, причём определена сложная функция $z(x) = f(g(x))$. Найдём дифференциал этой функции:

$$dz = z'(x)\,dx = f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = f'(g(x))\,dg = f'(y)\,dy.$$

Итак, мы получили, что дифференциал всегда имеет такую форму: производная функции по некоторой переменной, умноженная на дифференциал этой переменной. Причём неважно, является ли переменная независимой, или она является функцией от другой переменной. Это свойство называется ***инвариантностью формы*** дифференциала. Коротко его можно записать так:

$$df = f'(u)\,du,$$

где u — произвольная дифференцируемая функция.

Пример 24. Найти дифференциал функции $f(x) = \cos^3 x$.

Решение.

$$d(\cos^3 x) = 3\cos^2 x\, d(\cos x) = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)\, dx = -3\cos^2 x \cdot \sin x\, dx.$$

В начале темы мы познакомились с понятием производной второго и более высоких порядков. Здесь нет ничего сложного: по одним и тем же правилам дифференцирования мы переходим от $f(x)$ к $f'(x)$, от $f'(x)$ к $f''(x)$ и т. д. В понятие дифференциала кроме точки, где он вычисляется, входит ещё приращение dx. Меняя точку, мы можем рассматривать дифференциал как функцию от x (приращение dx при этом не зависит от точки). Дифференциал полученной функции называется ***дифференциалом второго порядка*** функции $f(x)$:

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы и более высоких порядков:

$$d^3 f = d(d^2 f) = f'''(x)(dx)^3, \ldots, d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Заметим, что уже дифференциал 2-го порядка не обладает свойством инвариантности: формула $d^2 f = f''(x)dx$ справедлива только для независимой переменной x. Действительно, пусть $f = f(x)$, $x = x(t)$. Тогда

$$d^2 f = d\,(df) = d\left(f'_x dx\right) = d\left(f'_x x'_t dt\right) = d\left(f'_x x'_t\right) dt = \left(f'_x x'_t\right)'_t (dt)^2 =$$
$$= \left(f''_{xx}\left(x'_t\right)^2 + f'_x x''_{tt}\right)(dt)^2 = f''_{xx}\left(x'_t dt\right)^2 + f'_x x''_{tt}\,(dt)^2 = f''_{xx}\,(dx)^2 + f'_x d^2 x.$$

Мы видим, что если x не является независимой переменной, а есть функция, то в формуле для $d^2 f$ появляется дополнительное слагаемое $f'_x\, d^2 x$ (в случае независимой переменной x, конечно, $d^2 x = 0$).

4.4. Задачи с решениями

1. Пользуясь определением, найти производную функции $y = \sqrt{x}$. Чему равно значение $y'(9)$?

Решение. Найдём сначала производную в произвольной точке x, затем в полученную формулу подставим $x = 9$. Пусть Δx — приращение x. Тогда

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Чтобы раскрыть неопределённость, умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Производная найдена. Её значение $y'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$.

2. Найти производную функции $y = \cos\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+x}$.

Решение. Последнее действие — вычисление косинуса. Поэтому, используя табличную производную косинуса, получим:

$$y' = -\sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\right)'.$$

Теперь требуется найти производную от более простого выражения. Последнее действие в нём — деление. Применяем правило дифференцирования частного:

$$y' = -\sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\right)\cdot\frac{(1-\sqrt{x})'(1+x)-(1-\sqrt{x})(1+x)'}{(1+x)^2}.$$

Осталось вычислить довольно простые производные. Учитывая, что $1'=0$ (производная постоянной есть 0), $x'=1$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (это частные случаи табличной формулы $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$), используя правила дифференцирования суммы и разности, получаем:

$$\left(1-\sqrt{x}\right)' = 1' - \left(\sqrt{x}\right)' = 0 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$(1+x)' = 1' + x' = 0 + 1 = 1.$$

Окончательно

$$y' = -\sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\right)\cdot\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)-(1-\sqrt{x})}{(1+x)^2} =$$

$$= \sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\right)\cdot\frac{1+x+2\sqrt{x}-2x}{2\sqrt{x}\,(1+x)^2} = \sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\right)\frac{1+2\sqrt{x}-x}{2\sqrt{x}\,(1+x)^2}.$$

Последние преобразования сделаны для того, чтобы записать ответ в более простой форме.

3. Найти производную функции $y = \ln^2(1+\cos x)$.

Решение. Действуем так же, как в предыдущей задаче, но без подробных комментариев:

$$\left(\ln^2(1+\cos x)\right)' = 2\ln(1+\cos x)\cdot(\ln(1+\cos x))' =$$
$$= 2\ln(1+\cos x)\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot(1+\cos x)' =$$
$$= 2\ln(1+\cos x)\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot(-\sin x) = \frac{-2\sin x\ln(1+\cos x)}{1+\cos x}.$$

4. Найти $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $y = \frac{2}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Решение. Хотя последнее действие — деление, нет смысла применять правило дифференцирования частного. Проще записать выражение в виде степени:

$$y = \frac{2}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = 2(\sin x)^{-\frac{2}{3}}.$$

Теперь легко находим: $y' = 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(\sin x)^{-\frac{5}{3}}\cdot(\sin x)' = -\frac{4}{3}(\sin x)^{-\frac{5}{3}}\cdot\cos x$.

Так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, то $-\frac{4}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

5. Найти производную функции $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x<2, \\ x^2-5x+7, & 2\le x\le 5, \\ 12-x, & 5<x. \end{cases}$

Построить графики функции и её производной. (См. также упражнение 5 из 4.5.)

Решение. Во всех точках, кроме $x=2$ и $x=5$, функция легко дифференцируется:

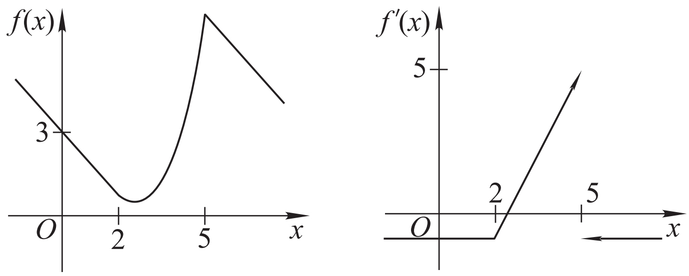
$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x<2, \\ 2x-5, & 2<x<5, \\ -1, & 5<x. \end{cases}$$

В точке $x=2$ левая производная $f'(2-0) = -1$, правая производная $f'(2+0) = \lim\limits_{x\to 2} 2x-5 = -1$. Следовательно, в точке $x=2$ функция дифференцируема и $f'(2) = -1$.

В точке $x=5$ левая производная $f'(5-0) = \lim\limits_{x\to 5} 2x-5 = 5$, правая производная $f'(5+0) = -1$. Значит, $f'(5)$ не существует. Итак,

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x<2, \\ 2x-5, & 2\le x<5, \\ -1, & 5<x, \end{cases} \qquad f'(5) \text{ не существует.}$$

Построим графики:



Стрелки на концах линий, как обычно, означают то, что концевая точка им не принадлежит.

6. Является ли функция $f\,(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(2x + x^2 \sin\dfrac{2}{x}\right), \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$ дифференцируемой в точке $x = 0$? Если является, то найти $f'(0)$.

Решение. Проверим прежде всего, что $f(x)$ непрерывна в 0:

$$\lim_{x\to 0} f\,(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{tg}\left(2x + x^2 \sin\frac{2}{x}\right) = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что $\sin\dfrac{2}{x}$ — ограниченная функция; значит, $x^2\sin\dfrac{2}{x}$ — бесконечно малая, а поэтому и $2x + x^2\sin\dfrac{2}{x} \to 0$.

Вычислим производную по определению:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(2\Delta x + (\Delta x)^2 \sin\dfrac{2}{\Delta x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2 \sin\dfrac{2}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \left(2 + \Delta x \sin\frac{2}{\Delta x}\right) = 2.$$

При вычислении предела воспользовались тем, что $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$, если $\alpha(x) \to 0$. Итак, функция в $x = 0$ дифференцируема и $f'(0) = 2$.

Замечание. Если в определении $f(x)$ заменить $x^2\sin\dfrac{2}{x}$ на $x\sin\dfrac{2}{x}$, то функция не будет дифференцируемой в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \sin\dfrac{2}{\Delta x}$ не существует.

7. Для функции $f(x) = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$ найти $f''(1)$.

Решение. Последнее действие — умножение, поэтому применяем правило дифференцирования произведения:

$$f'(x) = \left(1+x^2\right)' \cdot \operatorname{arctg} x + \left(1+x^2\right) \cdot (\operatorname{arctg} x)' =$$
$$= 2x \cdot \operatorname{arctg} x + \left(1+x^2\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1,$$
$$f''(x) = (2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1)' = (2x \cdot \operatorname{arctg} x)' =$$
$$= (2x)' \operatorname{arctg} x + 2x (\operatorname{arctg} x)' = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2},$$
$$f''(1) = 2 \operatorname{arctg} 1 + \frac{2}{1+1} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1.$$

8. Функция $y = y(x)$ задана неявно: $4x^3 + 3xy + y^3 = 0$. Найти $y''(1)$.

Решение. Найдём значение $y(1)$, подставляя $x = 1$ в уравнение: $4+3y+y^3 = 0$. Легко заметить, что $y = -1$ — корень. Так как $4+3y+y^3 = (y+1)(y^2-y+4)$, то других действительных корней нет. Итак, $y(1) = -1$.

Дифференцируем равенство, задающее функцию, по x, считая y функцией от x:

$$12x^2 + 3y + 3xy' + 3y^2y' = 0.$$

Разделим для упрощения на 3: $4x^2 + y + xy' + y^2y' = 0$. Подставляем сюда $x = 1$, $y = -1$:

$$4 + (-1) + (1)y' + (-1)^2y' = 0.$$

Отсюда получаем: $y'(1) = -1{,}5$.

Дифференцируем второй раз:

$$8x + y' + y' + xy'' + 2y(y')^2 + y^2y'' = 0.$$

Подставляем сюда $x = 1$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1{,}5$:

$$8 + 2(-1{,}5) + y''(1) + 2(-1)(-1{,}5)^2 + (-1)^2y''(1) = 0,$$
$$8 - 3 - 2 \cdot 2{,}25 + 2y''(1) = 0,$$
$$y''(1) = \frac{1}{2}(4{,}5 + 3 - 8) = -0{,}25.$$

9. Найти уравнение касательной, проведённой в точке с абсциссой $x = 0{,}5$ к линии $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + \sin t, \end{cases} \quad t \in (0, \pi).$

Решение. Указанной точке соответствует значение параметра $t = \dfrac{\pi}{3}$: $\cos t = 0{,}5$, $t \in (0,\pi) \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$. Ордината этой точки равна $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Найдём угловой коэффициент касательной:

$$k = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \left.\frac{1+\cos t}{-\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{1+0{,}5}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом k, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Значит, уравнение касательной:

$$y - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$
$$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.$$

10. В какой точке касательная к графику функции $y = \ln x$ параллельна прямой $y = 2x - 3$?

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k = 2$. Значит, мы должны найти точку, в которой угловой коэффициент касательной (т. е. производная) равен 2:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = 2 \;\Rightarrow\; x = 0{,}5.$$

11. Найти касательные к параболе $y = x^2 - 4$, проходящие через точку с координатами $(2, -1)$.

Решение. Запишем уравнение касательной, проведённой в точке кривой (x_0, y_0):

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Так как $y_0 = x_0^2 - 4$, $y'(x_0) = 2x_0$, то уравнение касательной принимает вид:

$$y - x_0^2 + 4 = 2x_0(x - x_0).$$

Нам нужно узнать: при каком x_0 эта прямая пройдёт через точку $(2, -1)$? Подставим $x = 2,\ y = -1$ и найдём такие x_0:

$$-1 - x_0^2 + 4 = 2x_0\,(2 - x_0)\,,$$
$$x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0,$$
$$x_0 = 1,\ x_0 = 3.$$

Для точки $x_0 = 1$ касательная $y + 3 = 2(x - 1)$, или $y = 2x - 5$. Для точки $x_0 = 3$ касательная $y - 5 = 6(x - 3)$, или $y = 6x - 13$.

12. Найти дифференциал функции $y = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)\right)$ в точке $x = \pi$.

Решение. Дифференциал функции в точке x_0 находим по формуле

$$dy = y'(x_0)\,dx.$$

Сначала найдём производную:

$$y' = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2\sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Здесь, чтобы упростить выражение, мы использовали тригонометрические формулы:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

Общая формула для дифференциала получена: $dy = -\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx$.

Далее: $y'(\pi) = -\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{1}{2}$. Значит, в точке $x = \pi$ дифференциал равен $dy = -\dfrac{1}{2}\,dx$ (или $dy = -\dfrac{1}{2}\Delta x$, это то же самое).

13. Вычислить приближённо $\sqrt[4]{17}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Её значение в точке $x = 16$ вычисляется легко: $\sqrt[4]{16} = 2$. Значит, нам достаточно найти приращение функции:

$$\Delta f = f(17) - f(16) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Воспользуемся тем, что $\Delta f \approx df$, и вычислим значение дифференциала функции $f(x)$ в точке $x_0 = 16$, соответствующее приращению $\Delta x = 17 - 16 = 1$:

$$\Delta f \approx df = f'(x_0)\,\Delta x = \frac{1}{4}{x_0}^{-\frac{3}{4}}\Delta x = \frac{1}{4}16^{-\frac{3}{4}} \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}.$$

Значит, $\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16} + \Delta f \approx 2 + \dfrac{1}{32} = \dfrac{65}{32} \approx 2{,}03$.

4.5. Упражнения для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением, найти производные следующих функций:

   а) $y = 2x^2 - 3x + 1$; б) $y = \dfrac{5}{x}$; в) $y = e^{3x}$; г) $y = \cos 2x$.

2. Найти производные следующих функций:

   а) $y = x^5 - 3x^4 + \dfrac{1}{x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x}$;

в) $y = \dfrac{3x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$; г) $y = \dfrac{1}{\cos(2x+3)}$;

д) $y = e^x \sin x - \ln x \cdot \operatorname{tg} x$; е) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

ж) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; з) $y = \left(\arccos \dfrac{1}{1+x}\right)^3$;

и) $y = \ln\left(\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; к) $y = 2^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}$;

л) $y = 2^{\operatorname{sh} x} + \operatorname{ch}^2 x$; м) $y = (\operatorname{th} x)(\operatorname{th} 3)(\operatorname{th} 3x)$.

3. Найти производную функции в указанной точке x_0:

а) $y = \dfrac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{2 + 3\sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = 1$; б) $y = (1+3x)^5, \quad x_0 = 0$;

в) $y = x \ln^2 x, \quad x_0 = e$; г) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x_0 = 3$.

4. Найти производную функции, заданной кусочно-аналитическим способом. Построить графики функции и её производной.

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ -\sin x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ x - \pi, & \pi < x; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \le -1, \\ x^2 - 3, & -1 < x \le 2, \\ 4x - 7, & 2 < x. \end{cases}$

5. Как изменится решение задачи 5 из раздела 4.4, если в условии взять $f(x) = 5 - x$ при $x < 2$?

6. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^{\sqrt{x}}$; б) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;

в) $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$; г) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

7. Найти производные функций $y(x)$, заданных параметрически:

а) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

8. Найти производные функций $y(x)$, заданных неявно:

а) $2x^2 - 3xy - 5y^2 + 4 = 0$; б) $e^x \sin y = e^{-y} \cos x$.

9. Найти производную второго порядка функции $y(x)$. Вычислить её значение в точке $x = x_0$:

а) $y = (x-2)e^{2x}, \quad x_0 = 0$; б) $y = \operatorname{arctg} 2x, \quad x_0 = -1$;

в) $x^2 + y^2 + 3xy + 1 = 0$, $x_0 = 2$, $y(2) = -1$; г) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t, \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$, $x_0 = 1$.

10. Найти уравнения касательных к гиперболе $y^2 - 2x^2 = 1$ в точках с абсциссой $x = 2$.

11. На кривой $y = x^3$ найти точку, в которой касательная перпендикулярна прямой $y = -3x + 5$.

12. Углом пересечения кривых называется угол между касательными, проведёнными в точке пересечения к каждой из кривых. Определить углы, под которыми пересекаются кривые:

а) $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$; б) $y = \sin x$, $y = \cos x$ $(x \in [0, \pi])$.

13. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = \dfrac{2t + t^2}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{2t - t^2}{1 + t^3} \end{cases}$ в точке с координатами $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ (соответствует значению параметра $t = 1$).

14. Написать уравнение касательной, проведённой через точку $(1, -2)$ к кривой $y = x^4 - 3$.

15. Точка движется по кривой $y = x^3 - 2x$ так, что её абсцисса возрастает с постоянной скоростью $v = 3$. С какой скоростью изменяется ордината в момент, когда точка проходит положение $(2, 4)$?

16. Точка движется по окружности $x^2 + y^2 = 100$ так, что её ордината возрастает с постоянной скоростью $v = 2$. С какой скоростью изменяется абсцисса? Определить эту скорость в момент, когда ордината равна 6.

17. Найти дифференциал функции в указанной точке:

а) $y = \dfrac{x}{x+1}$, $x_0 = 1$; б) $y = \sin(\ln(x + 1) + \operatorname{arctg} 2x)$, $x_0 = 0$.

18. Вычислить приближённо (принимая $\pi \approx 3{,}14$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$):

а) $\ln 0{,}98$; б) $\operatorname{arctg} 1{,}05$; в) $\sin 59°30'$;

г) значение функции $f(x) = e^{\arcsin 5x} + 8 \operatorname{tg}^2 x$ при $x = 0{,}03$.

4.6. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти значение производной функции $y = \ln(x^2 + 1)$ при $x = 7$.

2. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$.

3. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4. Найти $y'(1)$, если функция $y(x)$ задана неявно равенством

$$x^3 + 5xy + 2y^3 = 1.$$

5. Найти абсциссу точки (в первой четверти), в которой касательная к эллипсу $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$ имеет угловой коэффициент, равный -2.

6. Написать уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(2, 4)$. В ответе указать абсциссу точки пересечения касательной с осью OX.

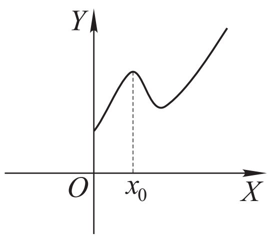
ГЛАВА 5

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

5.1. Теоремы о среднем значении

Чтобы применять производную для изучения функций, нам будут нужны несколько теорем. Самая простая из них (теорема 1 ниже) содержит необходимое условие экстремума. Дадим точное определение этого понятия.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Говорят, что в точке x_0 функция имеет ***локальный максимум***, если существует окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что $f(x_0) \geq f(x)$ для любой точки $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Слово «локальный» подчёркивает, что $f(x_0)$ является наибольшим среди значений функции лишь в точках, близких к x_0 (в точках некоторой окрестности).



Аналогично даётся определение ***локального минимума***: x_0 — точка локального минимума, если $\exists U_\varepsilon(x_0): \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \ \ f(x_0) \leq f(x)$. Обратите внимание: неравенства в этих определениях нестрогие. Так удобнее, хотя и приходится считать, например, что постоянная функция в каждой точке имеет и максимум, и минимум. Понятие «экстремум» — обобщающее: это или локальный максимум, или локальный минимум.

Теорема 1 *(теорема Ферма).* Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$ и существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

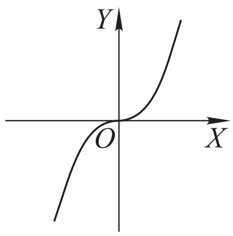
Доказательство. Пусть, для определённости, x_0 — точка локального максимума. Дадим аргументу приращение Δx. Заметим, что

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

по определению максимума. Значит, если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$, а если $\Delta x < 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$. Поэтому

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0, \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0.$$

Значит, $f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

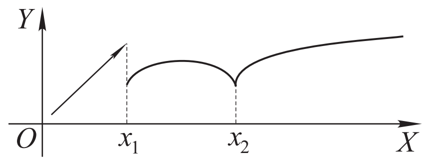


Замечание. Условие $f'(x_0) = 0$ не является достаточным для экстремума: функция $f(x) = x^3$ имеет в точке $x = 0$ нулевую производную:

$$f'(0) = (x^3)' = 3x^2 \,|_{x=0} = 0.$$

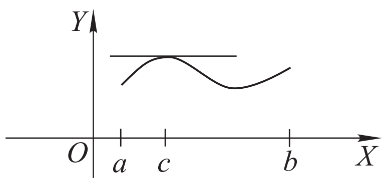
Однако ни максимума, ни минимума в этой точке нет.

С другой стороны, локальный экстремум может достигаться в точках, где функция не дифференцируема или даже разрывна. На рисунке x_1, x_2 — точки локальных экстремумов.



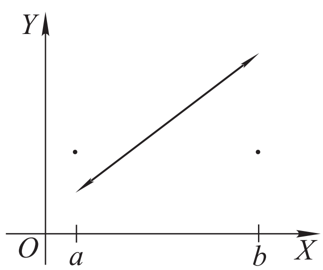
Теорема 2 (теорема Ролля). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) (во всех внутренних точках). Если $f(a) = f(b)$, то существует $c \in (a, b): \; f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть M, m — наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a, b]$. Как мы знаем (теорема 10 из 3.3), эти значения достигаются в некоторых точках. Если и m, и M достигаются на концах отрезка, то по условию $m = M$, т. е. функция постоянна. Тогда её производная равна 0 в любой точке. Если же хотя бы одно из значений m, M достигается во внутренней точке c, то ясно, что в этой точке $f(x)$ имеет экстремум. По теореме 1, $f'(c) = 0$.

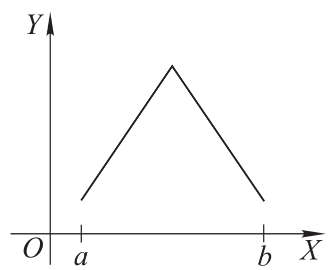


Замечание. На геометрическом языке теорема Ролля утверждает, что при указанных условиях касательная к графику функции в некоторых точках параллельна оси OX.

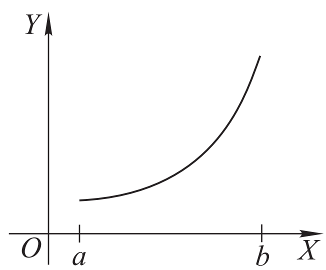
Приведём графические примеры, показывающие необходимость каждого из условий теоремы Ролля: если одно из них нарушено, то производная может не обращаться в нуль ни в одной точке.



Нарушена непрерывность на $[a,b]$



Нарушена дифференцируемость во внутренней точке



Нарушено условие $f(a)=f(b)$

Теорема 3 *(теорема Коши).* Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), причём $g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$. Тогда $\exists c \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, где число λ подберём так, чтобы к $F(x)$ можно было применить теорему Ролля. Непрерывность и дифференцируемость, конечно, имеются при любом λ. Чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$, нужно: $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$, т. е. $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. (Заметим, что $g(b)-g(a) \neq 0$, так как иначе, по теореме Ролля, $g'(x) = 0$ в некоторой точке.)

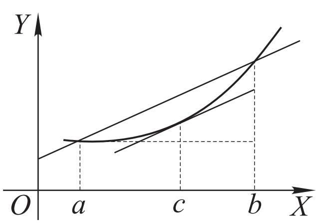
Применяем к $F(x)$ теорему Ролля: существует точка $c \in (a,b)$, в которой $F'(c) = 0$. Значит, $f'(c) - \lambda g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$. Отсюда получаем: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, что и требовалось.

Теорема 4 *(теорема Лагранжа).* Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), то $\exists c \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Доказательство. Применим теорему Коши для случая, когда $g(x) = x$. Так как $g'(x) = 1$, то получим требуемое соотношение.

Замечание. Имеется простая геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа. Величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равна тангенсу угла наклона секущей, проведённой через точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Так как $f'(c)$ — тангенс угла наклона касательной, то теорема Лагранжа фактически утверждает: при указанных условиях всегда найдётся точка $c \in (a,b)$, в которой касательная параллельна секущей.



Следствие. Если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), причём $f'(x) = 0$ $(\forall x \in (a,b))$, то $f(x) = C$ — постоянная функция.

Доказательство. Возьмём любые x_1, $x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Но $f'(c) = 0$. Поэтому $f(x_1) = f(x_2)$, значения функции во всех точках одинаковы.

Заметим, что теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши, а теорема Ролля — частный случай теоремы Лагранжа. Во всех этих теоремах речь идёт о существовании некоторого числа $c \in (a, b)$, точное значение которого остаётся неизвестным. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши обычно называют ***теоремами о среднем значении***.

5.2. Правило Лопиталя

В предыдущих разделах мы учились вычислять пределы, используя сравнение бесконечно малых функций, замечательные пределы, различные преобразования. Эффективным приёмом является и так называемое ***правило Лопиталя***, основанное на применении следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

1) функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы на $(a, b]$;

2) $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки a;

3) предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ является неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$;

4) существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен A.

Доказательство проведём только для случая неопределённости $\dfrac{0}{0}$. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Если доопределить функции $f(x)$, $g(x)$ в точке $x = a$: $f(a) = g(a) = 0$, то они, очевидно, будут непрерывными на $[a, b]$. Применим к ним теорему Коши на отрезке $[a, x]$:

$$\exists c \in (a, x): \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Перейдём в последнем равенстве к пределу при $x \to a$ (тогда, очевидно, и $c \to a$):

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A,$$

что и требовалось доказать.

Случай неопределённости $\dfrac{\infty}{\infty}$ оставляем без доказательства.

Замечания. Теорема 5 справедлива и для $A = \pm\infty$, конечность A нигде не использовалась. Рассматриваемые пределы были односторонними, точнее — правыми. Однако ясно, что и для левосторонних пределов утверждение остаётся в силе. Верно оно и в том (наиболее простом) случае, когда $f(x)$, $g(x)$ определены и непрерывны в окрестности точки $x = a$ — тогда нет необходимости рассматривать односторонние пределы.

Заметим, что правило Лопиталя можно применять и при $x \to \pm\infty$. Для проверки этого сделаем замену переменной, а также используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x} \\ y\to 0\end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}{g\left(\dfrac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{y}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{y}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{y}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{y}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

Решение. Имеем неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Другие условия теоремы 6 также выполнены: функции $f(x)=e^x-e^{-x}$, $g(x)=\sin x$ дифференцируемы не только в окрестности $x=0$, но и в любой точке. Производная $g'(x)=(\sin x)'=\cos x$ не обращается в 0 в окрестности $x=0$. Предел отношения производных существует и легко вычисляется:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=2$.

Правило Лопиталя можно применять несколько раз.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-x^2-8x+12}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-x^2-8x+12} = \left\langle\frac{0}{0}\right\rangle = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x}{3x^2-2x-8} = \left\langle\frac{0}{0}\right\rangle = \lim_{x\to 2}\frac{6x-6}{6x-2} = \frac{6}{10}.$$

Такие цепочки преобразований приводят к результату в том случае, если последний предел существует. Иначе правило Лопиталя применять нельзя.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Решение. Имеем неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$. Однако $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ — не существует. Правило Лопиталя неприменимо, но исходный предел существует, его легко можно вычислить другим способом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1+0=1.$$

При вычислении пределов, содержащих неопределённости других видов: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 или ∞^0, нужно преобразовать выражение к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. При этом для «показательных» неопределённостей 1^∞, 0^0, ∞^0 применяется предварительное логарифмирование.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}(x^{\frac{10}{3+5\ln x}})$.

Решение. Так как при $x \to +0$ $\ln x \to -\infty$, а значит $\dfrac{10}{3+5\ln x} \to 0$, то имеем неопределённость вида 0^0. Обозначим искомый предел через A. Тогда

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x\to+0}\left(x^{\frac{10}{3+5\ln x}}\right)\right) = \lim_{x\to+0}\ln\left(x^{\frac{10}{3+5\ln x}}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{10}{3+5\ln x}\cdot\ln x =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{10\ln x}{3+5\ln x} = \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle = \lim_{x\to+0}\frac{(10\ln x)'}{(3+5\ln x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{10}{x}}{\frac{5}{x}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Теперь, зная $\ln A = 2$, находим $A = e^2$.

5.3. Формула Тейлора

Одними из наиболее простых для изучения функций являются многочлены. Напомним: многочленом называется функция вида:

$$P(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

Алгебраические свойства многочленов рассматривались в курсе алгебры (АГ, глава 5). С точки зрения математического анализа, функция $P(x)$ определена на всей прямой $\mathbb{R}$, непрерывна и дифференцируема в любой точке. Для вычисления значений $P(x)$ нужны лишь сложение и умножение. Производная $P(x)$ также, очевидно, является многочленом. Все эти факты приводят к вопросу: нельзя ли для произвольной функции $f(x)$ подобрать многочлен, мало отличающийся от $f(x)$? Может быть, такое приближение возможно не на всей области определения, а хотя бы в окрестности данной точки? Обсуждению этих вопросов и посвящается этот раздел.

Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет n производных. ***Многочленом Тейлора степени n для $f(x)$ в окрестности точки x_0*** называется многочлен $T_n(x)$ такой, что:

$$\begin{gathered}
f(x_0) = T_n(x_0),\\
f'(x_0) = T_n'(x_0),\\
f''(x_0) = T_n''(x_0),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0).
\end{gathered}$$

Теорема 6. Если $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, то для неё существует многочлен Тейлора.

Доказательство. Будем искать многочлен Тейлора в виде:

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n.$$

(Заметим, что в таком виде — «по степеням $x - x_0$» — можно записать любой многочлен. См. пример 5 ниже.)

По условию имеем: $f(x_0) = T_n(x_0) = a_0$.

Вычислим производную $T_n'(x)$ и используем то, что $f'(x_0) = T_n'(x_0)$.

$$T_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$f'(x_0) = T_n'(x_0) = a_1.$$

Вычислим производную $T_n''(x)$ и используем то, что $f''(x_0) = T_n''(x_0)$.

$$T_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)(x - x_0)^{n-2},$$

$$f''(x_0) = T_n''(x_0) = 2a_2.$$

Продолжая аналогичные вычисления, получим:

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = 3!a_3,\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = n!a_n.$$

Итак, мы нашли все коэффициенты $T_n(x)$:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Многочлен Тейлора имеет вид:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Замечание. Можно было сразу написать последнюю формулу и проверить, что такой многочлен обладает требуемыми свойствами.

Пример 5. Записать многочлен $h(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ по степеням $x - 2$.

Решение. Обозначим: $x - 2 = z$. Тогда $x = z + 2$. Подставим:

$$\begin{aligned}
h(x) = h(z+2) &= 2(z+2)^3 - (z+2)^2 + 3(z+2) - 1 =\\
&= 2z^3 + 12z^2 + 24z + 16 - z^2 - 4z - 4 + 3z + 6 - 1 =\\
&= 2z^3 + 11z^2 + 23z + 17 = 2(x-2)^3 + 11(x-2)^2 + 23(x-2) + 17.
\end{aligned}$$

Пример 6. Записать для функции $f(x) = \cos x$ многочлен Тейлора 2-й степени в окрестности точки $x = 0$.

Решение. Вычислим значения $f(x)$ и её производных в точке 0:

$$f(0) = \cos 0 = 1; \quad f'(0) = (\cos x)' = -\sin x|_{x=0} = 0,$$
$$f''(0) = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x|_{x=0} = -1.$$

Значит, $T_2(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \dfrac{1}{2}x^2$.

Чтобы определить, насколько отличается функция от своего многочлена Тейлора, рассмотрим разность:

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Функция $r_n(x)$ называется ***остаточным членом***.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в окрестности x_0 (т. е. её производная n-го порядка является непрерывной функцией), то

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n),$$

т. е. при $x \to x_0$ функция $r_n(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $(x - x_0)^n$.

Доказательство. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$, применяя правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - T_n''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x)}{n(n-1)\ldots 1} = \frac{0}{n!} = 0.$$

Теорема доказана. Теперь можем записать формулу:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Она называется ***формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано***.

Замечание. При $n = 1$ формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Так как $x - x_0 = \Delta x$ — приращение аргумента, $f(x) - f(x_0)$ — приращение функции, то это соотношение нам известно:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = df + o(\Delta x).$$

Таким образом, от использования дифференциала (линейного приближения функции), мы переходим к более точному приближению функции многочленом n-й степени.

Докажем, что многочлен n-й степени, который отличается в окрестности точки x_0 от функции $f(x)$ на величину $o((x-x_0)^n)$, определяется единственным образом. Другими словами, справедлива

Теорема 8. Если $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в окрестности x_0, $P_n(x)$ — такой многочлен, что $f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)$, то $P_n(x)=T_n(x)$ — многочлен Тейлора для $f(x)$.

Доказательство. Запишем $P_n(x)$ по степеням $x-x_0$:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n.$$

По условию, $f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$. Применим формулу Тейлора:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o_1((x-x_0)^n)=$$
$$=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o_2((x-x_0)^n).$$

(Мы поставили индексы у бесконечно малых для того, чтобы обратить внимание: просто зачеркнуть их было бы неверно.)

Перейдём в последнем равенстве к пределу при $x\to x_0$. Получим: $f(x_0)=a_0$. Сокращая эти слагаемые и разделив на $(x-x_0)$, получим:

$$\frac{f'(x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{o_1((x-x_0)^n)}{x-x_0}=$$
$$=a_1+a_2(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^{n-1}+\frac{o_2((x-x_0)^n)}{x-x_0}.$$

Перейдём к пределу при $x\to x_0$ и получим: $\dfrac{f'(x_0)}{1!}=a_1$. Повторяем преобразование: сокращаем одинаковые слагаемые, делим на $x-x_0$, переходим к пределу. Последовательно будет доказано:

$$\frac{f''(x_0)}{2!}=a_2,\quad \frac{f'''(x_0)}{3!}=a_3,\quad \ldots,\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=a_n.$$

Значит, $P_n(x)=T_n(x)$ — многочлен Тейлора.

Пример 7. Найти многочлен Тейлора для $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ в окрестности точки $x=0$.

Решение. Как известно из школьного курса математики, при $|x|<1$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

(формула для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии). По этой же формуле:

$$x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \ldots = x^{n+1}(1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Значит,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n),$$

так как $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ при $x \to 0$. По теореме 8, многочлен $1 + x + \ldots + x^n$ является искомым многочленом Тейлора. Можно было найти его и другим способом, вычисляя производные $f^{(k)}(0)$.

Прежде чем рассмотреть другие примеры, научимся записывать остаточный член в формуле Тейлора в несколько иной форме.

Теорема 9. Если $f(x)$ $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $c \in [x_0, x]$ (или $c \in [x, x_0]$, если $x < x_0$). Эта формула — ***формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа***.

Доказательство. Пусть $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$ — остаточный член. Из определения многочлена Тейлора следует:

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Ясно, что она тоже обладает такими свойствами:

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0.$$

Проведём преобразования (считаем, для определённости, что $x > x_0$):

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)}, \text{ где } x_1 \in [x_0, x].$$

Последнее равенство — результат применения теоремы Коши (теорема 3 из 5.1). Повторяем аналогичные преобразования:

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{r_n'(x_1) - r_n'(x_0)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{r''(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \ldots =$$
$$= \frac{r^{(n)}(x_n) - r^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n) - \varphi^{(n)}(x_0)} = \frac{r^{(n+1)}(c)}{\varphi^{(n+1)}(c)}.$$

Заметим далее:

$$r^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - T_n^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - 0 = f^{(n+1)}(c),$$
$$\varphi^{(n+1)}(c) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = (n+1)!.$$

Следовательно, $\dfrac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, т. е.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Требуемая форма (***форма Лагранжа***) остаточного члена получена.

В более компактном виде формулу Тейлора можно записать с помощью значка $\sum$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x).$$

Здесь под производной порядка 0 понимается сама функция: $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Напомним также, что $0! = 1$ (см. 1.4.2).

Наиболее часто формула Тейлора применяется при $x_0 = 0$. Этот частный случай имеет специальное название: ***формула Маклорена***. Например, с остаточным членом в форме Лагранжа формула Маклорена запишется так:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Рассмотрим примеры разложения элементарных функций по формуле Тейлора.

Пример 8. Разложить функцию $f(x) = e^x$ по формуле Маклорена. С помощью полученного разложения вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 0,01.

Решение. Как мы знаем, производная любого порядка от функции e^x есть снова функция e^x. Поэтому $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ для любого k. Подставляя в формулу Маклорена, получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Чтобы вычислить $\sqrt{e}$, нужно применить эту формулу при $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + \frac{e^c}{2^{n+1} \cdot (n+1)!},$$

где $0 \le c \le \dfrac{1}{2}$. Написанное равенство — точное, но его правая часть содержит неизвестное нам значение c. Отбрасывая остаточный член, получим приближённое равенство:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{1}{2^n \cdot n!}.$$

При этом допускается погрешность, равная $r_n = \dfrac{e^c}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$. Нам нужно взять такое n, чтобы эта ошибка была не больше 0,01. Так как $0 \le c \le \dfrac{1}{2}$, то ясно: $e^c \le \sqrt{e} < 2$. Поэтому

$$r_n = \frac{e^c}{2^{n+1}\cdot(n+1)!} < \frac{2}{2^{n+1}\cdot(n+1)!} = \frac{1}{2^n\cdot(n+1)!}.$$

Решая неравенство $\dfrac{1}{2^n\cdot(n+1)!} \le 0{,}01$ простым подбором, убедимся, что оно выполнено начиная с $n=3$:

$$\frac{1}{2^3\cdot(3+1)!} = \frac{1}{8\cdot 24} = \frac{1}{192} < 0{,}01.$$

Итак, с требуемой точностью

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = \frac{79}{48}.$$

Пример 9. Найти разложение по формуле Маклорена функций $\sin x$, $\cos x$.

Решение. Вычисляем значения производных функции $f(x) = \sin x$ при $x = 0$:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}.$$

Получаем разложение (учитывая, что $\sin 0 = 0$):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \pm \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_{2k}(x),$$

где остаточный член $r_{2k}(x) = \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\sin\left(c + \dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right)$.

Разложение для $\cos x$ получается аналогично:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x).$$

Пример 10. Разложить функцию $f(x) = \ln x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$.

Решение. Заметим, что разложить $\ln x$ по формуле Маклорена (т. е. в окрестности $x = 0$) невозможно: функция не определена при $x \le 0$. Вычисляем значения функции и её производных:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \ln x, & f(1) = 0; \\
f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}, & f'(1) = 1; \\
f''(x) = -1 \cdot x^{-2}, & f''(1) = -1; \\
f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}, & f'''(1) = 2!; \\
f^{(4)}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}, & f^{(4)}(1) = -3!; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}, & f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{array}$$

Получаем разложение:

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots \pm \frac{(x-1)^n}{n} + r_n(x).$$

Эту же формулу удобнее записывать как разложение функции $\ln(1+t)$ в окрестности $t = 0$. Обозначая $x = 1 + t$, получим:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots \pm \frac{t^n}{n} + r_n(t).$$

5.4. Исследование функций

5.4.1. Монотонность и экстремумы

Напомним определение ***возрастающей*** функции:

$$f(x) \text{ — возрастающая} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 \le x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \le f(x_2)),$$

т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Если неравенства заменить на строгие, то получим определение ***строго возрастающей*** функции:

$$f(x) \text{ — строго возрастающая} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)).$$

Аналогично:

$$f(x) \text{ — убывающая} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 \le x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \ge f(x_2)),$$

$$f(x) \text{ — строго убывающая} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)).$$

Теорема 10. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$. Тогда:

$$f(x) \text{ — возрастающая} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \ge 0 \ \ (\forall x \in [a, b]),$$

$$f(x) \text{ — убывающая} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \le 0 \ \ (\forall x \in [a, b]).$$

Доказательство проведём для возрастающих функций.

«$\Rightarrow$». По определению, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$ (так как $f(x)$ возрастающая) и поэтому

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то $x+\Delta x < x$ и поэтому $f(x+\Delta x) - f(x) \leq 0$. Следовательно, в любом случае $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Переходя к пределу, получим:

$$f'(x) \geq 0.$$

«$\Leftarrow$». Возьмём $x_1 < x_2$ — два числа на $[a,b]$. На отрезке $[x_1, x_2]$ справедлива теорема Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ где } c \in [x_1, x_2].$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$, $f'(c) \geq 0$ (по условию), то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, т. е $f(x_1) \leq f(x_2)$, что и требовалось.

Замечание. Для строго возрастающих функций аналогичная теорема справедлива только в одну сторону:

$$f'(x) > 0 \ (\forall x) \ \Rightarrow \ f(x) \text{ — строго возрастающая.}$$

Доказательство — как и выше, с помощью теоремы Лагранжа. Обратное утверждение неверно: функция может строго возрастать, а её производная в некоторых точках быть равной нулю. Например, $f(x) = x^3$ — строго возрастающая, но $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$.

Напомним: в разделе 5.1 было дано понятие локального экстремума (т. е. локального максимума или локального минимума) и доказана теорема Ферма, содержащая ***необходимое условие экстремума***: Если x_0 — точка локального экстремума, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Пример функции $f(x) = x^3$ показывает, что это условие не является достаточным. Точки, в которых производная равна 0 или не существует, будем называть ***критическими точками 1-го рода***. Иногда их называют «подозрительными на экстремум».

Рассмотрим достаточные условия экстремума.

Теорема 11. Пусть $f(x)$ определена в окрестности своей критической точки x_0 и дифференцируема (хотя бы в проколотой окрестности этой точки). Если $f'(x)$ меняет знак при переходе через x_0, то x_0 — точка локального экстремума.

Доказательство очень просто. Если $f'(x)$ меняет знак с «$+$» на «$-$», то, по теореме 10, слева от x_0 функция является возрастающей, справа — убывающей, x_0 — точка локального максимума. Если $f'(x)$ меняет знак с «$-$» на «$+$», то x_0 — точка локального минимума.

Пример 11. Исследовать на экстремумы функцию $y = \dfrac{1-x}{x^2}$.

Решение. Найдём производную:

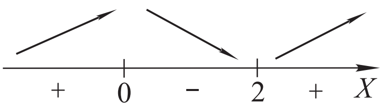
$$y' = \left(\frac{1-x}{x^2}\right)' = \frac{(-1)x^2 - (1-x)2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x + 2x^2}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}.$$

Найдём критические точки, решая уравнение $y' = 0$:

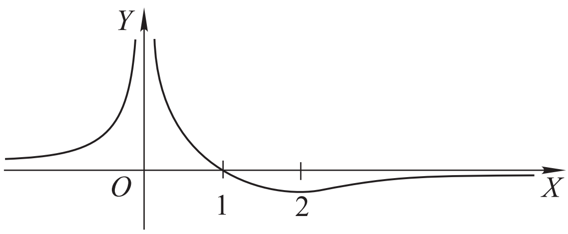
$$\frac{x-2}{x^3} = 0 \ \Rightarrow \ x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = 2.$$

Критической является и точка $x = 0$ — в ней производная не существует.

Отметим найденные точки на оси. В каждом из полученных трёх интервалов определим знак y'. (Заметим: во всех точках каждого интервала знак один и тот же, так как производная непрерывна и не обращается в 0 внутри интервала.) Отметим знаки y' на оси, для наглядности обозначим стрелками возрастание и убывание функции.



Хотя в точке $x = 0$ происходит перемена знака y', но экстремума нет, так как в этой точке функция не определена. В окрестности точки $x = 2$ функция определена, производная меняет знак с «$-$» на «$+$», поэтому $x = 2$ — точка минимума. График функции изобразим на рисунке.



Если функция имеет в критической точке вторую производную, то достаточное условие экстремума можно сформулировать по-другому.

Теорема 12. Пусть в окрестности $U(x_0)$ критической точки x_0 функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема (т. е. её вторая производная существует и является непрерывной; множество таких функций часто обозначают $C^2(U(x_0))$). Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для $f(x)$ в окрестности точки x_0 при $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \text{ где } c \in [x_0, x].$$

По условию $f'(x_0) = 0$, поэтому

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Если $f''(x_0) < 0$, то, по лемме о сохранении знака непрерывной функцией (см. 2.3.2), $f''(x) < 0$ в некоторой окрестности x_0. Будем считать, что именно в такой окрестности и записана формула Тейлора, а значит $f''(c) < 0$. Тогда, очевидно, $\dfrac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 < 0$ и получаем, что $f(x) < f(x_0)$, т. е. x_0 — точка максимума.

Аналогично: если $f''(x_0) > 0$, то и $f''(c) > 0$. Отсюда получаем, что $f(x) > f(x_0)$, т. е. x_0 — точка минимума. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме ничего не говорится о случае, когда $f''(x_0) = 0$. Чтобы до конца разобраться в ситуации, рассмотрим более общее достаточное условие экстремума, содержащее теорему 12 в качестве частного случая.

Теорема 13. Пусть $f(x)$ $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности $U(x_0)$ (т. е. $f(x) \in C^{n+1}(U(x_0))$). Пусть

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0, \;\; f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда если $(n+1)$ — нечётное число, то экстремума нет. Если $(n+1)$ чётно, то экстремум есть, причём максимум, если $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n+1)}(x_0) > 0$.

Доказательство. Учитывая то, что первые n производных в точке x_0 равны 0, формула Тейлора запишется так:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, будем считать, что $f^{(n+1)}(x)$ сохраняет знак в рассматриваемой окрестности. Если $(n+1)$ нечётно, то слагаемое $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, очевидно, имеет разные знаки при $x < x_0$ и при $x > x_0$. Значит, с одной стороны от x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, а с другой — неравенство $f(x) < f(x_0)$. Экстремума нет. Если же $(n+1)$ чётно, то ясно, что слагаемое $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ имеет тот же знак, что и $f^{(n+1)}(x_0)$. Значит, если $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то $f(x) > f(x_0)$ в некоторой окрестности, x_0 — точка минимума. Аналогично, если $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, то $f(x) < f(x_0)$, x_0 — точка максимума.

Пример 12. Имеет ли экстремум функция $y = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ в точке $x = 0$?

Решение. Найдём производную:

$$y' = e^x - e^{-x} - 2\sin x.$$

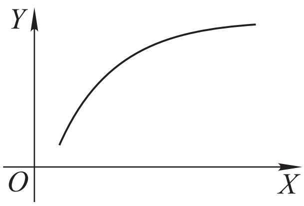
Так как $y'(0) = 0$, то точка $x = 0$ является «подозрительной» на экстремум. Другие критические точки нам неизвестны, поэтому применим не теорему 11, а теорему 13.

$$y'' = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad y''(0) = 0;$$
$$y''' = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad y'''(0) = 0;$$
$$y'''' = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad y''''(0) = 4.$$

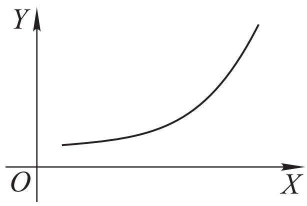
Первая ненулевая производная имеет чётный порядок, поэтому экстремум есть. Так как $y''''(0) > 0$, то это минимум.

5.4.2. Выпуклость и вогнутость

Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция. Она называется ***выпуклой*** в точке x_0, если её график (в окрестности x_0) лежит ниже касательной, проведённой в точке x_0. Функция называется ***вогнутой*** в точке x_0, если её график (в окрестности x_0) лежит выше касательной, проведённой в точке x_0. Если функция выпукла (вогнута) в любой точке некоторого интервала, то она называется выпуклой (или, соответственно, вогнутой) на этом интервале. Используется и другая терминология: выпуклые функции иногда называют ***выпуклыми вверх***, а вогнутые — ***выпуклыми вниз***.



Выпуклая функция



Вогнутая функция

Теорема 14. Пусть $f(x) \in C^2(a, b)$ (т. е. $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a, b)). Тогда:

$$f(x) \text{ выпукла на } (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \le 0,$$

$$f(x) \text{ вогнута на } (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \ge 0 \;\; (\forall x \in (a,b)).$$

Доказательство. Возьмём $x_0 \in (a, b)$, запишем формулу Тейлора для $f(x)$ при $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

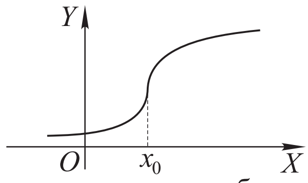
Уравнение касательной в точке $x = x_0$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Сравнивая эти формулы, видим, что $f''(x) \le 0$ на (a, b) тогда и только тогда, когда $f(x) \le y$, т. е. график функции лежит ниже касательной, функция выпукла. Аналогично, условие $f''(x) \geq 0$ на (a, b) равносильно вогнутости функции.

Замечание. Из выпуклости функции не следует строгое неравенство $f''(x) < 0$, а из вогнутости не следует, что $f''(x) > 0$. Например, функция $f(x) = x^4$ вогнута на всей прямой, однако её вторая производная $f''(x) = 12x^2 = 0$ в точке $x = 0$.

Точка, отделяющая участок выпуклости от участка вогнутости, называется ***точкой перегиба***.

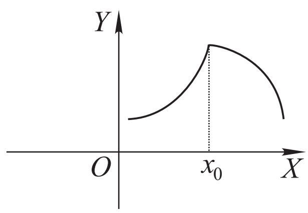


x_0–точка перегиба

Теорема 15 ***(необходимое условие перегиба).*** Если x_0 — точка перегиба дважды непрерывно дифференцируемой функции, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Допустим, например, что слева от x_0 функция вогнута, т. е. $f''(x) \geq 0$, а справа выпукла, т. е. $f''(x) \leq 0$. Так как $f''(x)$ по условию является непрерывной функцией, то отсюда следует, что $f''(x) =\ 0$ (см. лемму о сохранении знака из 2.3.2).

Замечание. Функция может иметь перегиб и в точке, где вторая производная не существует (см. рисунок). Поэтому «подозрительными на



перегиб» являются точки, где вторая производная равна 0 или не существует. Такие точки называются ***критическими точками 2-го рода***. Чтобы выяснить, является ли критическая точка точкой перегиба, нужны достаточные условия. Простейшие из них — в теореме 16.

Теорема 16. Пусть $f(x)$ определена в окрестности x_0 — критической точки 2-го рода и дважды непрерывно дифференцируема (хотя бы в проколотой окрестности этой точки). Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, то x_0 — точка перегиба.

Доказательство очевидно.

Пример 13. Исследовать на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба функции $y = \ln(1 + x^2)$.

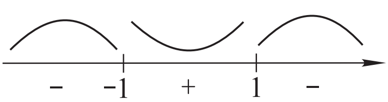
Решение. Найдём вторую производную:

$$y' = (\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2},$$
$$y'' = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Знаменатель в нуль не обращается, y'' существует во всех точках. Найдём точки, где $y'' = 0$.

$$\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2-2x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm 1.$$

Отметим найденные критические точки 2-го рода на оси. В каждом из полученных интервалов определим знак y'' (по её значению в произвольной точке: например, $y''(-5) < 0$, поэтому $y''(x) < 0$ на $(-\infty, -1)$). Из теоремы 14 следует, что на $(-\infty, -1)$ функция выпукла, на $(-1, 1)$ вогнута, на $(1, \infty)$ выпукла. Точки -1, 1 являются точками перегиба. Для наглядности отметим участки выпуклости и вогнутости соответствующими дугами.

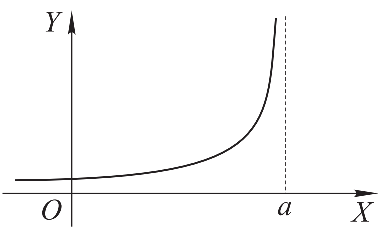


5.4.3. Асимптоты

С понятием асимптоты мы встречались в курсе геометрии, изучая гиперболу. Здесь рассмотрим более строгое определение, научимся находить асимптоты графиков функций.

Прямая L называется ***асимптотой*** графика функции $f(x)$, если расстояние от точки графика до L (измеряемое по перпендикуляру к L) стремится к 0 при неограниченном удалении точки графика от начала координат. Из определения видно, что если у графика функции есть асимптота, то график вдали от начала координат похож на прямую линию. При изучении функции это очень полезная информация.

Будем рассматривать отдельно «вертикальные» асимптоты (прямые, задаваемые уравнением вида $x = a$) и все прочие, «наклонные» асимптоты, которые можно задать уравнением $y = kx + b$. Таким образом, асимптота, заданная уравнением $y = 3$, считается наклонной.



В случае вертикальной асимптоты $x = a$ неограниченное удаление точки графика от начала координат (требуемое в определении асимптоты) равносильно тому, что $|f(x)| \to \infty$ при $x \to a$, а стремление к 0 расстояния между графиком и асимптотой равносильно тому, что $x \to a$. Отсюда следует, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из соотношений:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty.$$

Можно заметить, что вертикальные асимптоты тесно связаны с точками разрывов второго рода.

Пример 14. Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$y = \frac{1}{(x+2)(x-1)^2}.$$

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{(x+2)(x-1)^2} = \pm\infty$ (предел справа равен $+\infty$, предел слева $-\infty$), то $x = -2$ — вертикальная асимптота. Далее, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x+2)(x-1)^2} = +\infty$ (с любой стороны). Значит, $x = 1$ — вертикальная асимптота. Заметим, что точки $x = -2$, $x = 1$ являются точками разрывов 2-го рода.

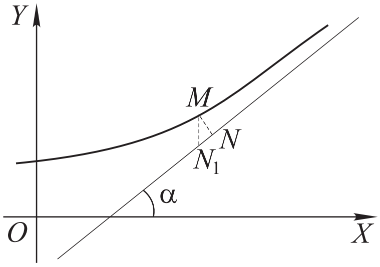
Пример 15. Функция $y = \ln x$ не имеет разрывов, однако $\lim\limits_{x\to +0} \ln x = -\infty$, поэтому $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Перейдём к вопросу о нахождении наклонных асимптот. Асимптота $y = kx + b$ называется ***правой***, если график приближается к ней при $x \to +\infty$, и ***левой***, если это происходит при $x \to -\infty$. Может быть, конечно, что одна и та же прямая линия является и правой, и левой асимптотой.

Теорема 17. Прямая $y = kx + b$ является правой асимптотой функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - kx).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для левой асимптоты, нужно лишь рассматривать пределы при $x \to -\infty$.



Доказательство. Расстояние от точки графика до асимптоты изображается на рисунке отрезком MN. Заметим, что $MN = MN_1 \cos\alpha$, так как $\angle NMN_1 = \alpha$. Если координаты точки M есть $(x, f(x))$, то координаты N_1 есть $(x, kx + b)$. Поэтому

$$MN_1 = f(x) - (kx + b).$$

Теперь ясно: $y = kx + b$ — асимптота $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow MN \to 0 \Leftrightarrow MN_1 \to 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \Leftrightarrow b = \lim\limits_{x\to +\infty}(f(x) - kx)$.

В этом случае $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x) - kx}{x} = 0$, поэтому $k = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Теорема доказана.

Пример 16. Найти асимптоты функции $y = \dfrac{e^x}{x-2}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{e^x}{x-2} = +\infty, \ \lim_{x\to 2-0} \frac{e^x}{x-2} = -\infty,$$

то $x = 2$ — вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(x-2)} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Здесь для раскрытия неопределённости $\left\langle \dfrac{\infty}{\infty} \right\rangle$ мы два раза применили правило Лопиталя. Так как предел при вычислении k получился равным ∞, то правой асимптоты у нашей функции нет.

Попытаемся найти левую асимптоту:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x(x-2)} = 0.$$

Здесь неопределённости нет: числитель стремится к 0, знаменатель к ∞.

$$b = \lim_{x\to-\infty} y(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-2} = 0.$$

Коэффициенты k, b найдены, прямая $y = kx + b$, т. е. прямая $y = 0$, является левой асимптотой.

5.4.4. Общий план построения графика

Рекомендуется следующий порядок изучения функции и построения её графика.

1. Найти область определения функции.

2. Проверить, не является ли функция чётной, нечётной, периодической. Если она обладает какими-либо из этих свойств, то при построении графика можно использовать симметрию.

3. Найти асимптоты графика, если они существуют. Указать графически возможный характер приближения функции к асимптотам.

4. С помощью производной первого порядка найти промежутки возрастания и убывания, найти экстремумы.

5. С помощью производной второго порядка найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

6. Используя полученную информацию, построить график. Для его уточнения можно дополнительно найти значения функции в некоторых точках, определить точки пересечения графика с осями координат.

Пример 17. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, построить её график.

Решение. Будем действовать по указанному плану.

Значение функции можно вычислить при любом x, кроме $x=1$. Поэтому её область определения — $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Чётной или нечётной $f(x)$ не является. Это ясно даже без проверки соотношений $f(-x)=\pm f(x)$, так как область определения не симметрична: $f(-1)$ имеет смысл, а $f(1)$ не определено. Периодической $f(x)$ тоже не является: среди элементарных функций периодические — только те, у которых x содержится под знаками тригонометрических функций.

Ясно, что $x=1$ — вертикальная асимптота. Выясним поведение функции при $x\to 1$ с помощью односторонних пределов:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1-0}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty$$

(в обоих случаях числитель стремится к 2, а знаменатель к 0, оставаясь положительным).

Чтобы найти левую и правую наклонные асимптоты (если они существуют), применим теорему 17. Сначала ищем правую асимптоту:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=5.$$

Итак, прямая $y=x+5$ является правой асимптотой. Теперь пределы тех же выражений нужно вычислить при $x\to-\infty$. Заметим, что в ***этом*** примере все вычисления те же самые: они справедливы и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$. Поэтому прямая $y=x+5$ является одновременно и правой, и левой асимптотой.

Найдём промежутки возрастания и убывания, а также экстремумы функции. Для этого дифференцируем:

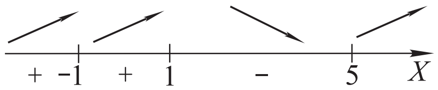
$$f'(x)=\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-(x+1)^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{3(x+1)^2(x-1)-2(x+1)^3}{(x-1)^3}=\frac{(x+1)^2(3x-3-2x-2)}{(x-1)^3}=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

Приравнивая $f'(x)$ к 0, находим критические точки 1-го рода:

$$\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}=0 \;\Rightarrow\; (x+1)^2(x-5)=0 \;\Rightarrow\; x=-1,\ x=5.$$

Кроме того, $f'(x)$ не существует при $x=1$. Отметим найденные точки на оси. В каждом из полученных интервалов определим знак $f'(x)$ (подставляя какое-либо значение x). Имеется только одна точка, где функция определена, а её производная меняет знак: $x=5$. Так как знак меняется с «$-$» на «$+$», то это точка минимума. Вычислим значение функции в точке минимума:



$$f(5)=\frac{(5+1)^3}{(5-1)^2}=\frac{6^3}{4^2}=13{,}5.$$

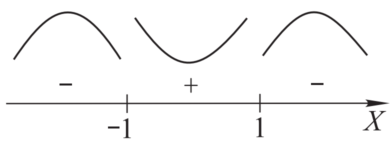
Найдём промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба. Для этого нужна производная второго порядка:

$$f''(x)=\left(\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}\right)'=$$
$$=\frac{((x+1)^2(x-5))'(x-1)^3-(x+1)^2(x-5)((x-1)^3)'}{(x-1)^6}=$$
$$=\frac{(2(x+1)(x-5)+(x+1)^2)(x-1)^3-(x+1)^2(x-5)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=$$
$$=\frac{(2(x+1)(x-5)+(x+1)^2)(x-1)-3(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{(x+1)(2(x-5)(x-1)+(x+1)(x-1)-3(x+1)(x-5))}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{(x+1)(2x^2-10x-2x+10+x^2-1-3x^2+15x-3x+15)}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)\cdot 24}{(x-1)^4}.$$

Приравнивая $f''(x)$ к 0, найдём критические точки 2-го рода:

$$\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}=0 \;\Rightarrow\; x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1.$$

Кроме того, $f''(x)$ не существует при $x=1$. Отметим точки на оси, определим знаки $f''(x)$ в полученных интервалах. В соответствии с теоремами 14 и 16, на $(-\infty,-1)$ функция выпукла, на $(-1,1)$ вогнута, на $(1,\infty)$ вогнута, $x=-1$ — точка перегиба.

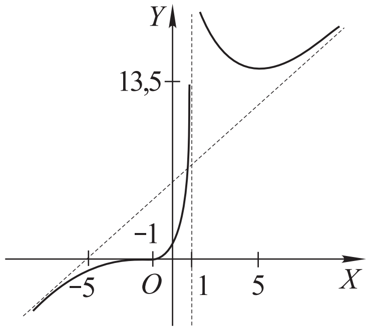


Используя полученную информацию, строим график. Сначала начертим асимптоты, отметим найденные характерные точки.

На интервале $(-\infty,-1)$ функция возрастает, выпукла. При $x\to-\infty$ её график приближается к асимптоте $y=x+5$. При $x\to-1$: $f(x)\to 0$, $f'(x)\to 0$, т. е. касательная в точке $x=-1$ становится горизонтальной.

На интервале $(-1, 1)$ функция возрастает, вогнута, при $x \to 1$ её график приближается к вертикальной асимптоте.

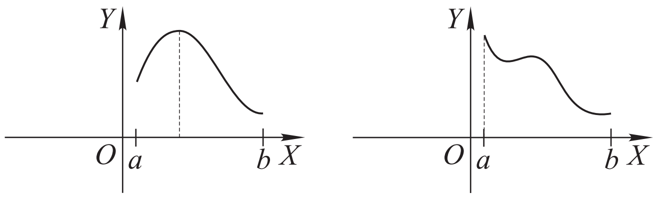
На интервале $(1, \infty)$ функция вогнута, имеет минимум при $x = 5$. При $x \to 1$ её график приближается к вертикальной асимптоте $x = 1$, при $x \to \infty$ — к асимптоте $y = x + 5$.



5.5. Задачи на наибольшее и наименьшее значения

Практические задачи часто приводят к необходимости отыскать наибольшее или наименьшее значение функции. Если функция задана и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то такие значения существуют (см. 3.3).

Рассмотрим, например, наибольшее значение функции на отрезке. Если оно достигается во внутренней точке $[a, b]$, то, конечно, совпадает с одним из локальных максимумов (самым большим из них). Но наибольшее значение может достигаться и на одном из концов отрезка $[a, b]$.



Таким образом, из всех максимумов нужно выбрать наибольший, а затем сравнить его со значениями функции на концах отрезка. На практике поступают ещё проще: находят критические точки 1-го рода («подозрительные на экстремум») и, не проводя их дальнейшего исследования, вычисляют в них значения функции. Вычисляют также значения функции на концах $[a, b]$. Из всех полученных чисел выбирают наибольшее (или наименьшее).

Пример 18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ на отрезке $[0, 5]$.

Решение. Найдём критические точки:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9;$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Находим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y(0) = 5,\ y(1) = 9,\ y(3) = 5,\ y(5) = 25.$$

Итак, наибольшее значение $y(5) = 25$, наименьшее $y(0) = y(3) = 5$.

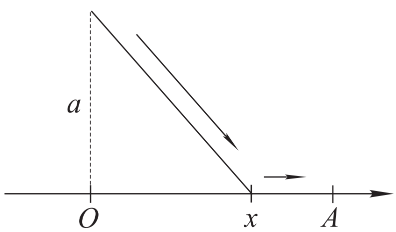
К рассмотренному типу сводятся многие задачи с практическим содержанием. Приступая к решению такой задачи, следует определить, какую функцию нужно рассмотреть, от какой переменной зависит эта функция. Исходя из условия, выразить исследуемую величину через эту переменную (т. е. задать функцию аналитически). Кроме того, нужно найти область изменения переменной (т. е. область определения функции). После этого задача решается так же, как в примере 18.

Пример 19. Человек находится в $a = 5$ километрах от прямолинейного берега реки. Вниз по реке, на расстоянии $L = 6$ км от ближайшей к человеку точки O берега находится пункт A. Скорость человека на суше $V_1 = 5$ км/час, на воде (с учётом течения) $V_2 = 10$ км/час.

а) Какой выбрать маршрут, чтобы добраться до пункта A за наименьшее время?

б) Решить ту же задачу, если течение медленное: $V_2 = 6$ км/час.

Решение. Сделаем рисунок. Ясно, что человек должен двигаться по прямой к берегу и затем плыть вниз, используя течение. Его маршрут определяется точкой берега, где начинается водная часть пути. Пусть расстояние от этой точки до точки O равно x. Функция, которую необходимо рассмотреть, — время в пути:



$$T = T(x).$$

Время есть сумма времени движения по суше и времени движения по воде:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{V_1} + \frac{L - x}{V_2}.$$

Ясно, что $0 \le x \le L$, другие маршруты нерациональны. Получили ***математическую модель*** нашей задачи: в какой точке достигается наименьшее значение функции $T(x)$ на отрезке $[0, L]$?

Находим производную и критические точки:

$$T'(x) = \frac{2x}{2V_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{V_2};$$

$$T'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{V_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{V_2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{V_1}{V_2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x^2V_2^2 = V_1^2(x^2+a^2) \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{a^2V_1^2}{V_2^2-V_1^2} \;\Rightarrow\; x = \frac{aV_1}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}}.$$

В нашей задаче $a = 5$ км, $L = 6$ км, $V_1 = 5$ км/ч, $V_2 = 10$ км/ч. Получаем:

$$x = \frac{5\cdot 5}{\sqrt{100-25}} = \frac{25}{\sqrt{75}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2{,}9 \text{ км}.$$

Находим значения функции на концах отрезка и в данной точке:

$$T(0) = 1{,}6;\; T\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{\dfrac{25}{3}+25}}{5} + \frac{6-\dfrac{5}{\sqrt{3}}}{10} \approx 1{,}466;\; T(6) = \frac{\sqrt{61}}{5} \approx 1{,}562.$$

Наименьшее время $T = 1{,}466$ часа, двигаться нужно в точку $x \approx 2{,}9$ км.

Если же изменить условие, считая $V_2 = 6$ км/ч, то критическая точка $x = \dfrac{aV_1}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{36-25}} = \dfrac{25}{\sqrt{11}} > 6$, не входит в рассматриваемый отрезок $[0, L]$. Значит, наименьшее значение достигается на одном из концов промежутка. Вычислим значения на обоих концах: $T(0) = 2$, $T(6) = \dfrac{\sqrt{61}}{5} \approx 1{,}562$. В этом случае оптимальный маршрут — при $x = 6$, т. е. нужно идти весь путь по суше.

5.6. Задачи с решениями

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^{10}}$.

Решение. Так как выражение является неопределённостью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, то можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^{10}} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x\to\infty} \frac{(2^x)'}{(x^{10})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{10x^9}.$$

Неопределённость пока осталась, но степень в знаменателе уменьшилась. Это подсказывает, что после нескольких применений правила Лопиталя задача будет решена:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{10x^9} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x (\ln 2)^2}{10\cdot 9x^8} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x (\ln 2)^{10}}{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 1}.$$

После 10 таких шагов неопределённости нет: числитель стремится к ∞, знаменатель — число 10!. Значит, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^{10}}=\infty$.

Замечание. Ясно, что и при любых $a>1$, $n\geq 0$ справедлива аналогичная формула:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty,$$

т. е. показательная функция имеет более высокий порядок роста, чем степенная.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. Заметим, что дроби $\dfrac{1}{\ln x}$, $\dfrac{1}{x-1}$ стремятся к бесконечности одного знака при любом способе стремления $x\to1$. Поэтому имеем неопределённость вида $\infty-\infty$. Преобразуем её сначала, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\langle\infty-\infty\rangle=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

Решение. Хотя задание очень похоже на предыдущее, ситуация совсем другая. Если $x\to1+0$, то $\dfrac{1}{\ln x}\to+\infty$, $\dfrac{1}{1-x}\to-\infty$ и $\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{1-x}\right)\to+\infty$, неопределённости нет. Аналогично, если $x\to1-0$, то предел равен $-\infty$. Односторонние пределы не совпадают, значит, искомый предел не существует.

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Имеем неопределённость $\langle 1^\infty\rangle$. Чтобы применить правило Лопиталя, нужно преобразовать её к виду $\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle$ или $\left\langle\dfrac{\infty}{\infty}\right\rangle$. Для этого обозначим искомый предел через A и найдём $\ln A$:

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x-\ln\cos 2x}{x^2}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)-\dfrac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x}.$$

Неопределённость пока осталась. Можно ещё раз применить правило Лопиталя, но проще использовать 1-й замечательный предел: $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$, $\dfrac{\sin 2x}{2x} \to 1$ (при $x \to 0$). Поэтому

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\cos x} + \frac{2}{\cos 2x}\right) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

Значит, $A = e^{\frac{3}{2}}$.

5. Записать многочлен Тейлора 3-й степени для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в окрестности точки $x = 0$.

Решение. Вычислим значение функции и её первых трёх производных в точке $x = 0$:

$$f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0;$$
$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1;$$
$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\frac{2}{\cos^3 x}\cdot(-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \quad f''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = \left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)' = \frac{2\cos x\cdot\cos^3 x - 2\sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^6 x} =$$
$$= \frac{2\cos^4 x + 6\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\cos^6 x}, \quad f'''(0) = 2.$$

Многочлен Тейлора имеет вид:

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}.$$

6. Найти многочлен 2-й степени, наилучшим образом приближающий функцию $f(x) = \sqrt{x}$ в окрестности точки $x = 1$.

Решение. По теореме 8, многочленом наилучшего приближения является многочлен Тейлора. Найдём значения функции и её первых двух производных в точке $x = 1$:

$$f(1) = \sqrt{1} = 1;$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(1) = \frac{1}{2};$$
$$f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

Многочлен Тейлора имеет вид:

$$T_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

7. Оценить погрешность, допускаемую при замене функции $\sin x$ её многочленом Тейлора 3-й степени в окрестности точки $x = 0$.

Решение. Запишем формулу Тейлора при $n = 3$, $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа (см. пример 9 из 5.3):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\sin(c + \frac{5\pi}{2}).$$

При использовании приближённого равенства

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

погрешность равна остаточному члену. Абсолютную величину погрешности можно оценить так:

$$|r| = \left|\frac{x^5}{5!}\sin\left(c + \frac{5\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{|x^5|}{5!} = \frac{|x^5|}{120}.$$

Видим, что при малых $|x|$ ошибка приближённого равенства очень мала.

8. Вычислить с точностью до 10^{-6} величину $\cos 5°$.

Решение. От градусной меры углов необходимо перейти к радианной:

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x$. Ближайшее к $\frac{\pi}{36}$ значение x, в котором косинус легко вычисляется, есть $x = 0$. Поэтому используем формулу Тейлора в окрестности точки $x = 0$ (т. е. формулу Маклорена). Формула была получена (пример 9):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x).$$

Остаточный член будем записывать в форме Лагранжа:

$$r_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

Так как любая производная функции $f(x) = \cos x$ есть либо $\pm\sin x$, либо $\pm\cos x$, то оценить остаточный член можно следующим образом:

$$|r_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

В нашей задаче $x = \frac{\pi}{36} \approx 0{,}09$. Найдём n, при котором погрешность, т. е. величина остаточного члена, будет меньше 10^{-6}.

При $n = 1$: $|r_3(x)| \le \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \le \frac{1}{24} \cdot 0{,}0001$. Такая точность нас не устраивает.

При $n = 2$: $|r_5(x)| \le \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^6 \le \frac{1}{720} \cdot 0{,}000001 < 10^{-8}$. Это даже точнее, чем требовалось. Итак,

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \approx$$
$$\approx 1 - 0{,}0038077 + 0{,}0000024 \approx 0{,}996195.$$

Все промежуточные вычисления делаются с одним лишним, «запасным» знаком.

9. Исследовать функцию $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение. Проводим исследование по плану, предложенному в 5.4.

Область определения функции: $(0, \infty)$, так как логарифм существует только у положительных чисел. Точка $x = 0$ не входит в область определения, но является для неё предельной точкой. Чтобы узнать, как ведёт себя функция в её правой полуокрестности, вычислим односторонний предел:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$$

(неопределённости нет, числитель стремится к $-\infty$, знаменатель к 0 справа). Значит, $x = 0$ — вертикальная асимптота функции.

Попытаемся найти правую наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$. Ищем k:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}} = 0;$$

итак, если асимптота есть, то $k = 0$. Ищем b:

$$b = \lim_{x\to+\infty} y(x) - kx = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

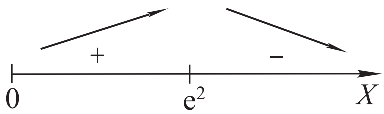
Следовательно, прямая $y = 0$ (т. е. ось OX) является правой асимптотой.

Вычислим производную:

$$y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{1 - \frac{1}{2}\ln x}{x\sqrt{x}}.$$

Найдём критические точки 1-го рода:

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{2}\ln x = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 2 \;\Rightarrow\; x = e^2.$$



Получилось 2 интервала. Определяем знаки y' в каждом из них. Функция возрастает на $(0, e^2)$, убывает на (e^2, ∞). В точке $x = e^2$ имеет максимум:

$$y(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}.$$

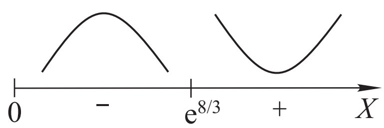
Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость с помощью второй производной:

$$y'' = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2x}\cdot x^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x^3} =$$

$$= \frac{-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\left(1 + 3 - \frac{3}{2}\ln x\right)}{x^3} = \frac{\frac{3}{2}\ln x - 4}{2x^{\frac{5}{2}}}.$$

Найдём критические точки 2-го рода:

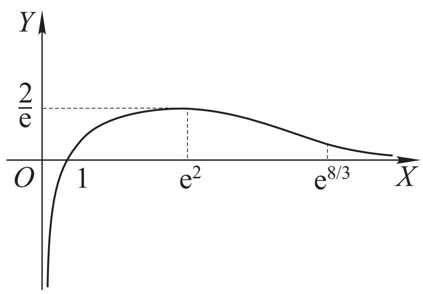
$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\ln x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = \frac{8}{3} \;\Rightarrow\; x = e^{\frac{8}{3}}.$$



На интервале $\left(0, e^{\frac{8}{3}}\right)$ функция выпукла, на $\left(e^{\frac{8}{3}}, \infty\right)$ вогнута. Точка перегиба:

$$x = e^{\frac{8}{3}}, \quad y = \frac{\ln e^{\frac{8}{3}}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}} = \frac{\frac{8}{3}}{e^{\frac{4}{3}}} = \frac{8}{3e^{\frac{4}{3}}}.$$

Строим график, учитывая всю полученную информацию:



10. Исследовать функцию $y = \sin x \cdot (1 + \cos x)$.

Решение. Область определения — все действительные числа. Функция является периодической:

$$y(x + 2\pi) = y(x) \ \ (\forall x).$$

Поэтому достаточно изучить её на каком-либо отрезке длиной 2π. Кроме того, функция является нечётной:

$$y(-x) = \sin(-x)(1 + \cos(-x)) = -\sin x(1 + \cos x) = -y(x).$$

Поэтому её график симметричен относительно начала координат. Значит, можно исследовать функцию только на $[0, \pi]$. Затем продолжить на $[-\pi, \pi]$, используя симметрию. А затем продолжить на всю ось, используя периодичность. Итак, рассматриваем только $x \in [0, \pi]$.

Вертикальных асимптот нет, так как функция не может стремиться к бесконечности (ясно, что она ограничена). Наклонных асимптот у периодических функций (кроме постоянных), очевидно, не бывает.

Найдём производную:

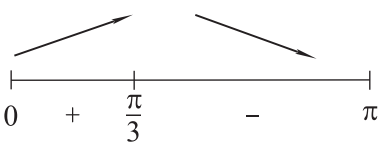
$$y' = (\sin x(1 + \cos x))' = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) =$$
$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + 2\cos^2 x - 1.$$

Найдём критические точки 1-го рода:

$$y' = 0 \ \Rightarrow \ \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение относительно косинуса:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$
$$\cos x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{3}; \quad \cos x = -1 \ \Rightarrow \ x = \pi.$$



Отметим найденные точки на рассматриваемом отрезке $[0, \pi]$. Определяя знаки y', получаем, что на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ функция возрастает, на интервале $\left(\dfrac{\pi}{3}, \pi\right)$ — убывает.

Значит, в точке $x = \dfrac{\pi}{3}$ имеется максимум,

$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Характер точек $x = 0$ и $x = \pi$ выясним позже, при построении полного графика.

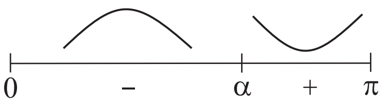
Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость:

$$y'' = (2\cos^2 x + \cos x - 1)' = 4\cos x(-\sin x) - \sin x = -\sin x(4\cos x + 1).$$

Найдём критические точки 2-го рода:

$$y'' = 0 \Rightarrow -\sin x(4\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ или } 4\cos x + 1 = 0.$$

Если $\sin x = 0$, то $x = 0$ или $x = \pi$ — это концевые точки нашего отрезка. Если $4\cos x + 1 = 0$, то $\cos x = -\dfrac{1}{4}$, $x = \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$. Можно не вычислять это значение: обозначим для краткости $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$. Ясно,



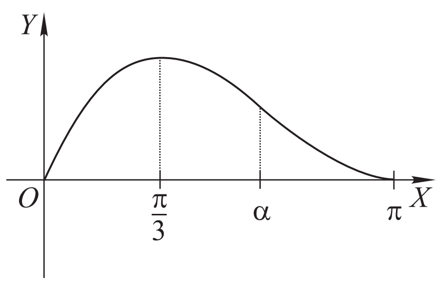
что $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{2\pi}{3}$ $\left(\text{так как } \cos\dfrac{\pi}{2} = 0,\ \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\right)$. Определим знаки y'' в полученных интервалах: на интервале $(0, \alpha)$ функция выпукла, на (α, π) вогнута. Точка $x = \alpha$ соответствует точке перегиба графика функции.

Уточним поведение функции в точках $x = 0$, $x = \pi$:

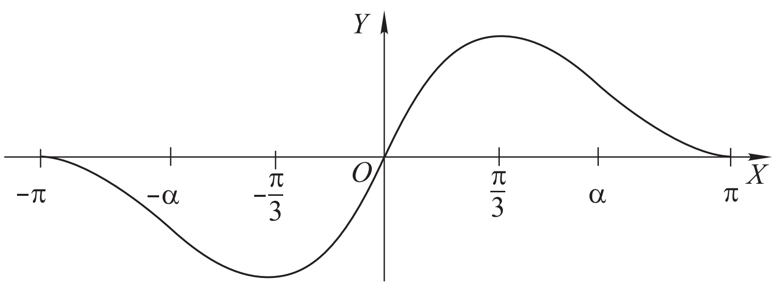
$$y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0;\ \ y'(0) = 2,\ \ y'(\pi) = 0.$$

Значит, в этих точках график пересекает ось OX, причём в точке $x = 0$ тангенс угла пересечения равен 2, а в точке $x = \pi$ касательная к графику горизонтальна (угол равен 0).

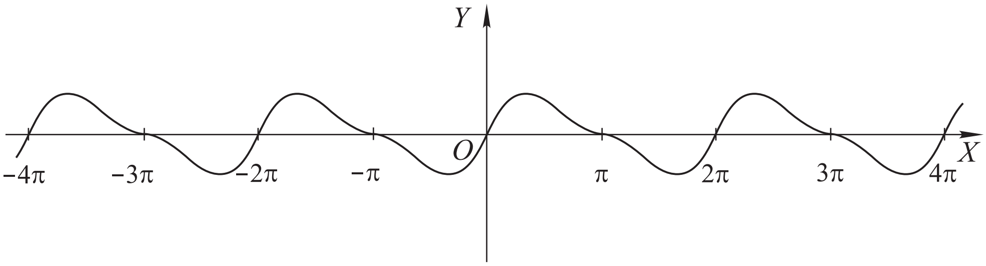
Строим график сначала на отрезке $[0, \pi]$:



Теперь продолжим на отрезок $[-\pi, 0]$, используя симметрию относительно начала координат:



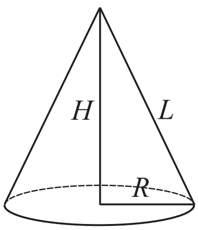
Продолжаем график на всю прямую, пользуясь периодичностью функции:



Заметим, что точки с абсциссами $x = \pi k$ являются точками перегиба.

11. Среди конусов, образующая которых равна L, выбрать конус наибольшего объёма.

Решение. Перейдём от геометрической задачи к задаче анализа некоторой функции, поиску точки её максимума. Исследуемая функция — объём конуса V. От какой переменной зависит эта функция? Как известно, $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$. Переменные R (радиус) и H (высота) не являются независимыми, так как известно, что образующая равна L, и ясно, что $H^2 + R^2 = L^2$. Проще исключить R и рассматривать объём как функцию высоты:



$$V = V(H) = \frac{1}{3}\pi(L^2 - H^2) \cdot H = \frac{1}{3}\pi(L^2 H - H^3).$$

Итак, требуется найти наибольшее значение функции $V(H)$. По смыслу задачи функция $V(H)$ должна рассматриваться на отрезке $[0, L]$.

Найдём производную: $V'(H) = \dfrac{1}{3}\pi(L^2 - 3H^2)$. Приравняем её к нулю, найдём критическую точку: $V'(H) = 0 \;\Rightarrow\; L^2 - 3H^2 = 0 \;\Rightarrow\; H = \dfrac{L}{\sqrt{3}}$. Производная меняет знак с «+» (при малых H) на «−» (при H близких к L). Значит, найденная точка — точка максимума. Если $H = \dfrac{L}{\sqrt{3}}$, то $R = \sqrt{L^2 - H^2} = \sqrt{L^2 - \dfrac{L^2}{3}} = L\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Объём конуса равен:

$$V\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(L^2 - \frac{L^2}{3}\right) \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi L^3}{9\sqrt{3}}.$$

5.7. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{\ln x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x$;

д) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}\right)$; е) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{e^t - 1}\right)$;

ж) $\lim\limits_{t\to\infty}(\ln t)^{\frac{1}{t}}$; з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

2. Найти многочлен 3-й степени, наилучшим образом приближающий данную функцию в окрестности точки $x = 0$:

а) $f(x) = \arcsin x$; б) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$;
в) $f(x) = \operatorname{sh} x$; г) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$.

3. Оценить погрешность приближённого равенства $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{1}{3}x^3$ при его использовании для значений $|x| \le \dfrac{1}{3}$.

4. Оценить погрешность равенства $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ для $|x| \le \dfrac{1}{2}$.

5. С помощью формулы Тейлора вычислить значения указанных выражений с заданной точностью ε.

а) $\ln 1{,}2$, $\varepsilon = 0{,}001$; б) $\sqrt[3]{130}$, $\varepsilon = 0{,}001$; в) $\sin 1^\circ$, $\varepsilon = 0{,}0001$.

6. Провести полное исследование функций, построить их графики.

а) $y = 1 - x^2 + 2x^4$; б) $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$;

в) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$; г) $y = \ln(x^2 + 4x)$;

д) $y = (x-3)\sqrt{x}$; е) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

ж) $y = xe^{-\frac{x^2}{4}}$; з) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$;

и) $y = \sin x \cdot \sin 2x$; к) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

7. Найти наименьшее и наибольшее значения функций на указанных отрезках.

а) $y = x^3 - 12x$, $x \in [-5, 3]$; б) $y = x^2 e^{-x}$, $x \in [1, 3]$;
в) $y = x^5 + 2x^3 + x$, $x \in [-1, 2]$; г) $y = \cos 2x - 2\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$.

8. Найти уравнение параболы, которая касается эллипса $4x^2 + y^2 = 5$ в точках $A(1, -1)$, $B(-1, -1)$.

9. Найти кратчайшие расстояния от каждой из точек $A(0, 4)$, $B(0, 6)$ до параболы $y = \dfrac{x^2}{10}$.

10. Бак цилиндрической формы без крышки должен вмещать V литров воды. Каковы должны быть его размеры, чтобы на его изготовление потребовалось наименьшее количество железа?

11. Одна сторона прямоугольного участка земли площадью 800 м^2 примыкает к реке, остальные огораживаются забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы длина забора была наименьшей?

12. Через точку $A(x_0, y_0)$ в первой четверти провести прямую, отсекающую от координатного угла треугольник наименьшей площади.

13. Какой из конусов, вписанных в шар радиуса R, имеет наибольший объём?

14. Два корабля плывут с постоянными скоростями v_1, v_2 по взаимно перпендикулярным прямым, приближаясь к O — точке пересечения этих прямых. В некоторый момент времени корабли находились от точки O на расстояниях a, b соответственно. Через какое время расстояние между кораблями станет минимальным (и начнёт увеличиваться)? Чему равно минимальное расстояние?

5.8. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

2. Для функции $f(x)$ записана формула Тейлора:

$$f(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + r_3(x).$$

Найти значение её производной 2-го порядка в точке $x = 1$.

3. Верно ли, что по теореме Ролля производная функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ в некоторой точке обращается в 0? Указать номер правильного ответа:

1) нет, так как теорема Ролля справедлива только для элементарных функций;

2) нет, так как $f'(0)$ не существует, а значит, теорему Ролля применить нельзя;

3) да, так как $f'(0) = 0$;

4) да, так как $f(-1) = f(1) = 1$.

4. Найти точку минимума функции $y = x^2(x - 15)$.

5. Найти угловой коэффициент правой асимптоты функции

$$y = \frac{1 + 2x - 3x^2}{x + 2}.$$

6. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 9$ на отрезке $[-5, 5]$.

ГЛАВА 6

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Мы переходим к интегрированию. В этой главе рассмотрим вычисление неопределённых интегралов — действие, обратное дифференцированию. Сразу отметим, что таких простых и исчерпывающих правил, как для дифференцирования, для интегрирования нет. Мы познакомимся лишь с основными приёмами, позволяющими интегрировать некоторые функции.

6.1. Определения и свойства

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F'(x) = f(x)$ для любого x из (a, b). Ясно, что если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, C — число, то $F(x) + C$ — тоже первообразная для $f(x)$, так как

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Таким образом, первообразных для функции существует много.

Пример 1. Для функции $y = \sin x$ первообразными на всей прямой $\mathbb{R}$ являются функции $y = -\cos x$, $y = 3 - \cos x$, $y = 7 - \cos x$ и т. д.

Оказывается, верно и обратное: любые первообразные для данной функции отличаются на постоянное слагаемое.

Теорема 1. Если $F_1(x)$, $F_2(x)$ — первообразные для $f(x)$ на интервале (a, b), то $F_1(x) - F_2(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Обозначим $h(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда

$$h'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

По следствию из теоремы Лагранжа (см. 5.1): $h(x) = \text{const} = C$.

Множество всех первообразных для $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ на данном интервале. Неопределённый интеграл обозначается так:

$$\int f(x)\, dx.$$

Здесь $\displaystyle\int$ — значок интеграла, $f(x)$ — подинтегральная функция, dx — дифференциал переменной x. Такая запись употребляется не только в силу традиций, она поможет нам лучше освоить технику интегрирования.

Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$. Теорема 1 показывает, что

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Обычно используют более простую запись

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

не забывая, конечно, что это множество функций; при этом C называют ***произвольной постоянной***.

Замечание. Подчеркнём, что первообразная для данной функции всегда рассматривается на некотором (конечном или бесконечном) интервале, даже если об этом явно не говорится. Отказаться от этого требования и рассматривать первообразную на любом множестве, где выполняется равенство $F'(x) = f(x)$, нельзя. Например, теорема 1 перестаёт быть справедливой.

Пример 2. Первообразной для функции $y = \dfrac{1}{x}$ является функция $y = \ln x$, так как $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Однако $\ln x$ имеет смысл только при $x > 0$. Для отрицательных x:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

поэтому при $x < 0$ первообразной для $\dfrac{1}{x}$ является $\ln(-x)$. Можно свести обе формулы в одну, используя модуль: $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$ Тогда получим:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

Это справедливо на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$.

То обстоятельство, что интегрирование и дифференцирование — действия взаимно обратные, подчёркнуто ещё раз в следующей теореме.

Теорема 2.

$$\int dF(x) = F(x) + C, \qquad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как подинтегральное выражение $f(x)\,dx$ представляет собой дифференциал функции $F(x)$:

$$f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF(x),$$

то получаем, что для любой дифференцируемой функции

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Аналогично получается и второе соотношение:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x)+C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Теорема 3. Если для функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ существуют первообразные, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\ dx = \int f_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx,$$
$$\int \alpha f_1(x)\,dx = \alpha \int f_1(x)\,dx.$$

Другими словами, интегрирование — линейная операция, т. е. интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$ — первообразные для $f_1(x)$, $f_2(x)$. Тогда ясно, что $F_1(x) + F_2(x)$ — первообразная для $f_1(x) + f_2(x)$. Поэтому $\displaystyle\int (f_1(x) + f_2(x))\ dx = F_1(x) + F_2(x) + C$. С другой стороны,

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2 = F_1(x) + F_2(x) + (C_1 + C_2).$$

Здесь $C_1 + C_2$, как и C, может принимать любое значение из $\mathbb{R}$, поэтому

$$F_1(x) + F_2(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + (C_1 + C_2)$$

и первое равенство доказано.

Аналогично получается и второе равенство:

$$\alpha \int f_1(x)\,dx = \alpha(F_1(x) + C) = \alpha F_1(x) + \alpha C = \int \alpha f_1(x)\,dx,$$

так как $\alpha F_1(x)$ — первообразная для $\alpha f_1(x)$, и ясно, что αC принимает любое числовое значение.

Следствие.

$$\int (f_1(x) - f_2(x))\ dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx.$$

Доказательство. Разность можно представить в виде

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x) + (-1)f_2(x).$$

Применяя теорему 3, получаем требуемое.

Замечание. Не существует общих формул для интегрирования произведения, частного, сложной функции.

Теорема 4. Если $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), то для неё существует на (a, b) первообразная.

Доказательство этой теоремы будет дано ниже, в разделе 7.3.

Замечание. Для некоторых непрерывных функций первообразные не являются элементарными функциями. Например, не существует элементарной функции, производная которой равна e^{-x^2}. Соответствующие интегралы иногда называют «неберущимися», хотя правильнее сказать, что они ***не берутся в классе элементарных функций***. Такими являются, например, интегралы

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}\,dx.$$

Важно подчеркнуть: эти интегралы существуют, но являются некоторыми новыми функциями. Пока мы их не встречали и не рассматривали, но они активно используются во многих областях науки и техники, составлены подробные таблицы для вычисления значений некоторых интегралов.

6.2. Простейшие методы интегрирования

6.2.1. Таблица интегралов

Каждая формула дифференциального исчисления

$$F'(x) = f(x)$$

равносильна, как мы теперь знаем, формуле интегрального исчисления:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Для производных основных элементарных функций была составлена таблица производных (см. 4.2.3). Теперь составим таблицу наиболее важных, основных интегралов. Будем пользоваться ей при решении задач, хорошо бы побыстрее запомнить эти формулы. Каждая формула в таблице справедлива на любом интервале, где подинтегральная функция непрерывна.

Таблица основных интегралов

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1);$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C;$
3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1),$ в частности $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C;$
4. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$
5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C;$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C;$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) + C.$

Каждую из формул таблицы можно проверить (доказать) с помощью дифференцирования.

Пример 3. Доказать последнюю формулу в таблице.

Решение. Найдём производную функции в правой части формулы:

$$(\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}))' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2\pm a^2})' =$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

Итак, функция $\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$ является первообразной функции $\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$, что и требовалось доказать.

Используя таблицу интегралов и свойство линейности (теорема 3), можно вычислять простейшие интегралы.

Пример 4. Вычислить $\displaystyle\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2x}-\sqrt{x}\right)dx.$

Решение. Пользуемся линейностью интеграла:

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2x}-\sqrt{x}\right)dx = 5\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\int\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 5\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,dx-\int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = 10\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

6.2.2. Замена переменной

Рассмотрим самый важный приём для вычисления интегралов: с помощью перехода к другой переменной упростить интеграл, желательно —

свести его к табличному. Имеются два практических подхода к такому преобразованию (теоретически они отличаются мало). Первый из них иногда называют «подведение под знак дифференциала». Этот подход основан на следующей теореме.

Теорема 5. Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция. Тогда $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Другими словами, любая формула интегрирования остаётся справедливой, если независимую переменную x заменить на произвольную дифференцируемую функцию.

Доказательство. Так как $du = u'(x)\,dx$, то новая формула запишется так: $\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + C$. Проверим её, используя правило дифференцирования сложной функции: $F(u(x))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x))u'(x)$. Теорема доказана.

Пример 5. а) $\int \cos(x^2) d(x^2) = \sin(x^2) + C$. Это соотношение очевидно: к табличной формуле $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ мы применили теорему 5, заменили x на функцию $u = x^2$.

б) $\int 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2) + C$. Это соотношение не так очевидно, но ведь $2x\,dx = d(x^2)$. Поэтому $\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(x^2)\,d(x^2) = \sin(x^2) + C$. Этот приём и называется подведением под знак дифференциала.

Пример 6. Вычислить $\int x^2 e^{x^3}\,dx$.

Решение. Пользуясь теоремой 2, подведём x^2 под знак дифференциала: $x^2\,dx = d\left(\int x^2\,dx\right) = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$. Постоянный множитель можно выносить и за знак дифференциала, и за знак интеграла:

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^{x^3} d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

Мы воспользовались табличным интегралом $\int e^x\,dx = e^x + C$, заменив в нём x на функцию $u(x) = x^3$.

Пример 7. Вычислить $\int \sin(3x + 5)\,dx$.

Решение. Чтобы воспользоваться табличным интегралом, добьёмся, чтобы под дифференциалом тоже была функция $3x + 5$:

$$dx = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x + 5).$$

Слагаемое 5 мы можем добавить, так как на величину производной (и дифференциала) оно не влияет. Итак,

$$\int \sin(3x+5)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+5)d(3x+5) =$$
$$= \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+5) + C.$$

Несколько иной подход к рассматриваемому методу замены переменной (или ***методу подстановки***, это то же самое) основан на теореме 6.

Теорема 6. Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $x = x(t)$ — дифференцируемая функция. Тогда $\int f(x(t))x'(t)\,dt = F(x(t)) + C$.

Ясно, что теорема 6 — лишь немного другая формулировка теоремы 5, её доказательство также следует из правила дифференцирования сложной функции:

$$(F(x(t)))' = F'(x(t))\cdot x'(t) = f(x(t))\cdot x'(t).$$

Пример 8. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Сделаем подстановку $x = \frac{1}{t}$ (т. е. перейдём от переменной x к переменной t). Вспомогательные вычисления размещаем в прямых скобках:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{t}, \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array}\right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$
$$= -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Замечание. Умение подобрать нужную подстановку достигается тренировкой. Рекомендации есть лишь в некоторых частных случаях, общих правил нет.

Пример 9. Вычислить $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$. Здесь a — некоторое число.

Решение. Сделаем замену переменной по формуле: $x^2 + a^2 = u$. Вычисляя дифференциал от обеих частей, получим:

$$d(x^2+a^2) = 2x\,dx = du.$$

Теперь перейдём к интегралу по переменной u:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}\left|\begin{array}{l} x^2+a^2=u, \\ 2x\,dx=du \end{array}\right| = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a^2\right| + C.$$

Конечно, то же самое получается с помощью подведения под знак дифференциала:

$$x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+a^2),$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C.$$

6.2.3. Интегрирование по частям

Теорема 7. Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые на (a,b) функции, и $\int v(x)\,du(x)$ существует, то существует и $\int u(x)\,dv(x)$, причём

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Эта формула называется ***формулой интегрирования по частям***. Обозначение независимой переменной x опущено здесь для краткости.

Доказательство. По свойству дифференциала:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Вычисляем неопределённый интеграл от каждой части равенства. По теореме 2: $\int d(uv) = uv + C$. Константу C можно не писать, так как выражение суммируется с другим неопределённым интегралом, также содержащим произвольную постоянную. Получим: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, что и требовалось.

Формулу интегрирования по частям следует применять в тех случаях, когда $\int v\,du$ вычисляется легче, чем $\int u\,dv$. Можно дать более конкретные рекомендации для некоторых видов функций. Например, эта формула применяется для вычисления интегралов вида

$$\int g(x)P(x)\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, $g(x)$ — одна из функций a^x, $\sin x$, $\cos x$. В этом случае следует обозначить: $u = P(x)$, $dv = g(x)\,dx$.

Если же в интеграле такого же вида $g(x)$ — одна из функций $\log_a x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, то нужно взять $u = g(x)$, $dv = P(x)\,dx$. Впрочем, если вы перепутаете и обозначите за u не то, что следует — вы скоро увидите свою ошибку, так как интеграл не упростится, а усложнится. Конечно, формула интегрирования по частям применяется и в других случаях.

Пример 10. Вычислить $\int xe^x\,dx$.

Решение. Под интегралом многочлен $P(x) = x$ умножается на показательную функцию $g(x) = e^x$. В этом случае многочлен обозначаем за u, тогда $dv = e^x\,dx$. Интеграл принимает вид $\int u\,dv$. Чтобы применить формулу интегрирования по частям, нужно ещё знать du и v. Но если $u = x$, то $du = dx$ (вычисляем дифференциал), и если $dv = e^x\,dx$, то $v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$ (вычисляем интеграл; произвольную постоянную не пишем — нам здесь нужна ***какая-нибудь*** функция $v(x)$, дифференциал которой равен $e^x\,dx$).

Кратко вычисления записываем так:

$$\int xe^x\,dx \left| \begin{array}{ll} u = x, & dv = e^x\,dx \\ du = dx, & v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 11. Вычислить $\int \arcsin x\,dx$.

Решение.

$$\int \arcsin x\,dx \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x, & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d(1-x^2)\,\left|1 - x^2 = z\right| = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x\arcsin x + \sqrt{z} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Здесь, после применения формулы интегрирования по частям, нам пришлось сделать замену переменной. Полученный при этом интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \int z^{-\frac{1}{2}}\,dz$ — табличный.

6.3. Интегрирование рациональных выражений

Дробно-рациональной функцией, или ***рациональной дробью***, называется функция

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, причём $m \neq 0$. Рациональная дробь называется ***правильной***, если $n < m$, и ***неправильной***, если $n \geq m$.

Пример 12. Рациональные дроби $\dfrac{x+2}{x^2-1}$, $\dfrac{1}{x+5}$, $\dfrac{x}{x^5-3x^2+1}$ являются правильными. Рациональные дроби $\dfrac{x^2+5x}{x-8}$, $\dfrac{x+2}{x+7}$ — неправильные.

Лемма 1 *(о выделении целой части).* Любую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Доказательство. Если дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильная, то можно считать, что многочлен (целая часть) нулевой, и требуемое представление получено. Пусть $n \geq m$, т. е. дробь неправильная. Разделим $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ с остатком (см. АГ, раздел 6.3):

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot h(x) + r_k(x),$$

причём $k < m$. Тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = h(x) + \frac{r_k(x)}{Q_m(x)},$$

$h(x)$ — многочлен (целая часть), $\dfrac{r_k(x)}{Q_m(x)}$ — правильная дробь.

Лемма 1 показывает, что нам нужно научиться интегрировать правильные дроби, так как интегрировать многочлены мы умеем.

Лемма 2. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь, причём $Q(x) = (x-c)^k Q_1(x)$, а многочлен $Q_1(x)$ не делится на $x-c$ (другими словами, $x = c$ — корень кратности k многочлена $Q(x)$).

Тогда существует число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $P_1(x)$ (с действительными коэффициентами) такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-c)^k Q_1(x)} = \frac{A}{(x-c)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-c)^{k-1} Q_1(x)}.$$

Доказательство. Преобразуем равенство, которое хотим получить, умножив обе его части на $Q(x)$:

$$P(x) = A \cdot Q_1(x) + (x-c) \cdot P_1(x).$$

В частности, это должно выполняться и при $x = c$: $P(c) = A \cdot Q_1(c)$; отсюда находим: $A = \dfrac{P(c)}{Q_1(c)}$. При таком A рассмотрим многочлен $P(x) - A \cdot Q_1(x)$. Число c является его корнем. Поэтому, по теореме Безу (АГ, раздел 6.4), он делится на $(x-c)$. Частное от этого деления и обозначим $P_1(x)$:

$$P(x) - A \cdot Q_1(x) = (x-c) \cdot P_1(x).$$

Ясно, что найденные A, $P_1(x)$ удовлетворяют нашим требованиям.

Лемма 3. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь, причём $Q(x) = (x^2 + px + q)^\ell Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ уже не делится на $x^2 + px + q$, а многочлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

Тогда существуют числа $M, N \in \mathbb{R}$ и многочлен $P_1(x)$ (с действительными коэффициентами) такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\ell Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\ell} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\ell-1} Q_1(x)}.$$

Доказательство аналогично предыдущему, хотя и немного сложнее. Не будем проводить его подробно. Укажем лишь, что для отыскания чисел N, M составляется система из двух уравнений с помощью подстановки комплексно сопряжённых корней многочлена $x^2 + px + q$.

Теорема 8. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель $Q(x)$ на множители над полем $\mathbb{R}$ (см. АГ, раздел 6. 4):

$$Q(x) = (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\ell_1} \ldots (x^2 + p_t x + q_t)^{\ell_t}.$$

Тогда существуют действительные числа A_1, A_2, …, B_1, B_2, …, M_1, N_1, M_2, N_2, … такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - c_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x - c_1)^{k_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{x - c_1} + \frac{B_1}{(x - c_2)^{k_2}} + \frac{B_2}{(x - c_2)^{k_2 - 1}} +$$
$$+ \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\ell_1}} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\ell_1 - 1}} + \ldots .$$

Доказательство состоит в многократном применении лемм 2 и 3. Каждое применение леммы 2 «отщепляет» одну ***простейшую дробь первого типа*** $\dfrac{A}{(x - c)^k}$ и уменьшает показатель степени скобки $(x - c)$ в разложении знаменателя на единицу. Аналогично, применение леммы 3 «отщепляет» дробь вида $\dfrac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\ell}$ (***простейшая дробь второго типа***). Итоговая формула громоздка, но легко поясняется на примерах. Полезно пользоваться простым правилом: ***каждой скобке в знаменателе соответствует столько простейших дробей, какова степень этой скобки.***

Пример 13. Представить функцию $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение. Заметим прежде всего, что дробь правильная (степень числителя 3, степень знаменателя 4), поэтому выделять целую часть нам не придётся. Знаменатель уже разложен на множители, поэтому сразу пользуемся указанным выше правилом. Множитель x входит в 1-й степени, поэтому ему соответствует 1 простейшая дробь, множитель $(x-1)$ входит в 3-й степени, поэтому ему соответствуют 3 простейшие дроби:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Все простейшие дроби — 1-го типа, так как соответствуют линейным множителям.

Остаётся вопрос: как найти числа A, B, C, D? Избавимся в полученном выражении от знаменателей (умножая обе части равенства на $x(x-1)^3$):

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2.$$

Нам требуется найти такие числа A, B, C, D, чтобы это равенство было ***тождеством***, т. е. выполнялось при любом x. Подставляя наиболее удобные значения x, получим 4 уравнения для определения A, B, C, D.

При $x = 0$: $1 = -A$;

при $x = 1$: $2 = B$;

при $x = 2$: $9 = A + 2B + 2C + 2D$;

при $x = -1$: $0 = -8A - B + 2C - 4D$. Отсюда находим: $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$. Следовательно,

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

Замечание. Часто применяется другой способ составления системы уравнений для определения коэффициентов A, B, C, D. Рассмотренное выше тождество является равенством многочленов, т. е. выполняется тогда и только тогда, когда многочлены в левой и правой части имеют равные коэффициенты при одинаковых степенях x. В нашем примере:

при x^3: $1 = A + D$;

при x^2: $0 = -3A + C - 2D$;

при x: $0 = 3A + B - C + D$;

при x^0 (свободные члены): $1 = -A$.

Решая, получим тот же результат: $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$.

Пример 14. Разложить в сумму простейших рациональную дробь

$$\frac{6x^2-3x+22}{(x-1)(x^2+4)}.$$

Решение. Множитель (x^2+4) нельзя разложить над полем $\mathbb{R}$, поэтому ему будет соответствовать простейшая дробь 2-го типа. Запишем разложение с неопределёнными коэффициентами:

$$\frac{6x^2-3x+22}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Избавимся от знаменателей:

$$6x^2 - 3x + 22 = A(x^2 + 4) + (Mx + N)(x - 1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6 & = & A + M, \\ -3 & = & -M + N, \\ 22 & = & 4A - N. \end{cases}$$

Решая систему, найдём: $A = 5$, $M = 1$, $N = -2$. Итак,

$$\frac{6x^2 - 3x + 22}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{5}{x-1} + \frac{x-2}{x^2+4}.$$

Научимся теперь интегрировать простейшие дроби. Дроби 1-го типа интегрируются просто:

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\,dx = A\int (x-c)^{-k}\,d(x-c) = A\frac{(x-c)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

При $k = 1$ используется другой табличный интеграл:

$$\int \frac{A}{x-c}\,dx = A\int \frac{1}{x-c}\,d(x-c) = A\ln|x-c| + C.$$

Рассмотрим простейшие дроби 2-го типа: $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\ell}$. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + px + \frac{p^2}{4}\right) + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2.$$

Мы обозначили $q - \dfrac{p^2}{4} = a^2$ для краткости, учитывая, что дискриминант $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$ (по определению простейшей дроби), а значит $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$.

Вычисляем интеграл с помощью замены переменной:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\ell}\,dx = \int \frac{Mx+N}{\left((x+\frac{p}{2})^2 + a^2\right)^\ell}\,dx \left|\begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t, \\ dx = dt \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{Mt - \frac{Mp}{2} + N}{(t^2+a^2)^\ell}dt = M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^\ell} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\ell}.$$

Интеграл в первом слагаемом вычисляется легко. Если $\ell = 1$, то

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C.$$

Если $\ell > 1$, то

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^\ell} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\ell} = \frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-\ell+1}}{-\ell+1} + C.$$

Интеграл второго слагаемого при $\ell = 1$ является табличным:

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Если $\ell > 1$, то следует применить подстановку $t = a\operatorname{tg} z$:

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\ell}\left|\begin{array}{l} t = a\operatorname{tg} z, \\ dt = \dfrac{a}{\cos^2 z}\,dz \end{array}\right| = \int \frac{a}{\cos^2 z(a^2\operatorname{tg}^2 z + a^2)^\ell}\,dz =$$

$$= \frac{1}{a^{2\ell-1}}\int \cos^{2\ell-2} z\,dz.$$

Интеграл от косинуса в чётной степени вычисляется путём понижения степени, используя формулу $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$. Более подробно интегрирование тригонометрических выражений будет рассматриваться ниже, в разделе 6.5.

Пример 15. Вычислить $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx$.

Решение. Под интегралом — простейшая дробь 2-го типа. Применим рассмотренный выше алгоритм:

$$\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2-3x+3)^2} = \int \frac{(3x+2)\,dx}{\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\left|\begin{array}{l} x-\dfrac{3}{2} = t, \\ dx = dt \end{array}\right| = \int \frac{3\left(t+\frac{3}{2}\right)+2}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{3t\,dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{13}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}. \qquad (*)$$

Первый интеграл легко сводится к табличному:

$$\int \frac{3t\,dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{2}\frac{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^{-1}}{-1} =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x^2-3x+3\right)^{-1} = -\frac{3}{2(x^2-3x+3)} + C.$$

Во втором интеграле сделаем замену переменной:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}\left|\begin{array}{l} t=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} z, \\ dt=\frac{\sqrt{3}\,dz}{2\cos^2 z}\end{array}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dz}{\cos^2 z\left(\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 z+\frac{3}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{16}{9}\int \cos^2 z\,dz = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\int dz + \int \cos 2z\,dz\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)+C.$$

Вернёмся к начальной переменной x:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}.$$

Чтобы подставить z в выражение $\sin 2z$, проведём преобразования:

$$\sin 2z = \frac{2\sin z\cos z}{\sin^2 z+\cos^2 z} = \frac{2\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg}^2 z+1}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + \frac{\frac{2t}{\sqrt{3}}}{\frac{4t^2}{3}+1}\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x-\frac{3}{2}}{x^2-3x+3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + \frac{2x-3}{3(x^2-3x+3)}.$$

Подставляем найденные интегралы в формулу (*):

$$-\frac{3}{2(x^2-3x+3)} + \frac{13}{2}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + \frac{2x-3}{3(x^2-3x+3)}\right) =$$

$$= \frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)} + \frac{26\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C.$$

Подведём итог. Любое рациональное выражение мы научились представлять в виде суммы многочлена и нескольких простейших дробей, научились интегрировать эти дроби. Следовательно, можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 9. Неопределённый интеграл от произвольной рациональной дроби выражается через элементарные функции.

6.4. Интегрирование иррациональных выражений

Мы использовали запись $R(x)$ для обозначения рационального выражения (функции) от x, т. е. для отношения двух многочленов. Перейдём к более общему случаю: будем обозначать через $R(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ***рациональное выражение от*** $u_1, u_2, \dots, u_n$, т. е. отношение двух многочленов от этих переменных. Можно считать, что $R(u_1, u_2, \dots, u_n)$ — любое выражение, которое можно получить из $u_1, u_2, \dots, u_n$ и действительных чисел с помощью четырёх арифметических действий.

Пример 16.

а) $\dfrac{3\sqrt{x}+\sqrt{x^3}+2}{x^2+1} = R(\sqrt{x})$ — рациональное выражение от $\sqrt{x}$;

б) $\dfrac{\sin^2 x+2\cos x}{\cos x-3\sin x}=R(\sin x,\, \cos x)$ — рациональное выражение от $\sin x$, $\cos x$;

в) $\dfrac{3x^2+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}{x-8} = R\left(x,\, \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ и т. д.

Научимся сначала вычислять интегралы вида

$$\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

С помощью подстановки $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ они сводятся к интегрированию рациональной функции: $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{t^n d-b}{a-t^n c} = R_1(t)$. Производная от рациональной функции есть тоже, очевидно, рациональная функция, поэтому

$$dx = R_1'(t)\,dt = R_2(t)\,dt.$$

Подставляя в начальный интеграл, приходим к интегралу от рациональной функции:

$$\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R(R_1(t), t)\cdot R_2(t)\,dt = \int R_3(t)\,dt.$$

Пример 17. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx.$

Решение. Данный интеграл — частный случай интеграла вида $\displaystyle\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ — здесь $n = 2$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 1$.

Применим подстановку $t = \sqrt{x-2}$:

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx \left|\begin{array}{l} t = \sqrt{x-2}, \\ x = t^2+2, \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right| = \int \frac{t^2+3}{(t^2+2)t}\cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2+3}{t^2+2}\,dt = 2\int \left(1+\frac{1}{t^2+2}\right)dt = 2\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{x-2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}\right)+C.$$

Замечание. Если под интегралом встречаются корни различных степеней из одного и того же выражения $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, то нужно применить подстановку $t = \sqrt[N]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, где N — наименьшее общее кратное показателей корней.

Пример 18. Преобразовать $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+5}\,dx$ к интегралу от рациональной функции.

Решение. Данный интеграл — это интеграл вида $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x})\,dx$. Применим подстановку $t = \sqrt[6]{x}$, так как наименьшее общее кратное показателей корней равно 6:

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+5}\,dx \left|\begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x}, \\ x = t^6, \\ dx = 6t^5\,dt \end{array}\right| = \int \frac{t^6+t^3}{t^2+5}\cdot 6t^5 dt.$$

Получили интеграл от неправильной рациональной дроби, который, после выделения целой части, легко вычисляется.

Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где m, n, p — рациональные числа. Подинтегральное выражение в этом случае называется ***биномиальным дифференциалом***. Такие интегралы уже не всегда выражаются через элементарные функции. Точнее, справедлива

Теорема 10 *(теорема П.Л. Чебышева)*. Биномиальный дифференциал интегрируется в конечном виде тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел p, $\dfrac{m+1}{n}$, $p+\dfrac{m+1}{n}$ является целым.

Доказательство теоремы Чебышева не входит в нашу программу, однако для каждого из трёх случаев укажем подстановку, приводящую подинтегральное выражение к рациональному виду.

Если p — целое число, то следует взять $t = \sqrt[N]{x}$, где N — наименьшее общее кратное знаменателей чисел m, n.

Если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число, то используется подстановка $t = \sqrt[k]{a+bx^n}$, где k — знаменатель числа p.

Если $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое, то используется подстановка $t = \sqrt[k]{ax^{-n}+b}$, где k — знаменатель числа p.

Пример 19. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

Решение. Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}\,dx$, то подинтегральное выражение есть биномиальный дифференциал, причём $m=-1$, $n=5$, $p=-\dfrac{1}{3}$. Проверяем, выполнено ли хотя бы одно из трёх условий теоремы Чебышева. Число $p = -\dfrac{1}{3}$ — дробное; число $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-1+1}{5} = 0$ — целое. Значит, интеграл вычисляется в конечном виде и нужно применить подстановку $t = \sqrt[3]{1+x^5}$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} \left| \begin{array}{l} t=\sqrt[3]{1+x^5}, \\ x=\sqrt[5]{t^3-1}, \\ dx=\dfrac{1}{5}(t^3-1)^{-\frac{4}{5}}\cdot 3t^2\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{5}(t^3-1)^{-\frac{4}{5}}\cdot 3t^2}{\sqrt[5]{t^3-1}\cdot t}\,dt = \frac{3}{5}\int \frac{t}{t^3-1}\,dt.$$

Получен интеграл от рациональной функции, метод его вычисления — в разделе 6.3.

Ещё один тип интегралов рассматривается в следующей теореме.

Теорема 11. Интегралы вида

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

всегда выражаются через элементарные функции.

Доказательство. Покажем, как свести этот интеграл к интегралу от рациональной функции. Для этого используются так называемые ***подстановки Эйлера***.

Если $a > 0$, то применяется ***первая подстановка Эйлера***, новая переменная t вводится по формуле

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}.$$

После возведения этого равенства в квадрат можно найти:

$$x = \frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}, \quad dx = 2\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{(2t\sqrt{a}+b)^2}\,dt.$$

Выполнив подстановку, получим интеграл от рациональной функции.

Если $c > 0$, то применяется ***вторая*** подстановка:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

Преобразования интеграла аналогичны.

Третья подстановка используется, если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни α, β. Тогда, как известно,

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta),$$

и следует ввести новую переменную t так:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha).$$

Здесь опять x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dx легко выражаются через t рациональным способом.

Охватывают ли рассмотренные 3 случая все возможности? Да, можно даже обойтись без второй подстановки. Если $a > 0$, то применяется первая подстановка. Если $a < 0$, то корни трёхчлена ax^2+bx+c должны быть действительными — в противном случае $\sqrt{ax^2+bx+c}$, а значит и вся подинтегральная функция, не определены ни в одной точке. Следовательно, если $a < 0$, то можно применять третью подстановку. Случай $a = 0$ рассмотрен в начале этого раздела. Теорема доказана.

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким вычислениям. На практике обычно пользуются другими приёмами. Например, для вычисления интеграла вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

достаточно выделить под корнем полный квадрат и сделать соответствующую замену переменной. Покажем это на примере.

Пример 20. Вычислить $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx.$

Решение.

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx = \int \frac{2x+5}{\sqrt{(x+2)^2+3}}\,dx \left| \begin{array}{l} x+2=y, \\ dx=dy \end{array} \right| = \int \frac{2(y-2)+5}{\sqrt{y^2+3}}\,dy =$$

$$= \int \frac{2y}{\sqrt{y^2+3}}\,dy + \int \frac{1}{\sqrt{y^2+3}}\,dy = \int \frac{d(y^2+3)}{\sqrt{y^2+3}} + \ln(y+\sqrt{y^2+3}) =$$

$$= 2\sqrt{y^2+3} + \ln(y+\sqrt{y^2+3}) = 2\sqrt{x^2+4x+7} + \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+7}) + C.$$

В более сложных случаях после выделения полного квадрата под корнем могут быть полезны ***тригонометрические подстановки***. Не приводя строгих формулировок, рекомендуем пользоваться следующим правилом. Если под интегралом встречается $\sqrt{x^2+a^2}$, то нужно попытаться применить подстановку $x = a\operatorname{tg} t$; если имеется $\sqrt{x^2-a^2}$, то взять

$x = \dfrac{a}{\sin t}$; если имеется $\sqrt{a^2 - x^2}$, то взять $x = a\sin t$. В результате таких подстановок получается тригонометрическое выражение, которое часто интегрировать легче, чем исходное.

Пример 21. Вычислить $\displaystyle\int \sqrt{1 - 2x - x^2}\, dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{1-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{2-(x+1)^2}\, dx \left| \begin{array}{c} x+1 = y, \\ dx = dy \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{2-y^2}\, dy \left| \begin{array}{c} y = \sqrt{2}\sin t, \\ dy = \sqrt{2}\cos t\, dt \end{array} \right| = \int \sqrt{2-2\sin^2 t} \cdot \sqrt{2}\cos t\, dt = 2\int \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int (1+\cos 2t) dt = t + \frac{1}{2}\sin 2t + C = t + \sin t \cos t + C =$$

$$= \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{y^2}{2}} + C = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + C.$$

6.5. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим сначала интегралы

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

т. е. научимся интегрировать рациональные выражения от $\sin x$, $\cos x$. Здесь полезна ***универсальная тригонометрическая подстановка***:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Через новую переменную t можем выразить $\sin x$, $\cos x$, dx:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2}{t^2+1}\, dt.$$

Все полученные выражения рациональны. Следовательно, интегралы вида $\displaystyle\int R(\sin x,\, \cos x)\, dx$ всегда выражаются через элементарные функции.

Пример 22. Вычислить $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{4-5\sin x}\left|t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \int \frac{\frac{2}{t^2+1}\,dt}{4-\frac{10t}{t^2+1}} = \int \frac{2dt}{4(t^2+1)-10t} =$$

$$= \int \frac{dt}{2t^2-5t+2} = \int \frac{dt}{(t-2)(2t-1)} = \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{(t-2)} - \frac{2}{3(2t-1)}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t-2| - \frac{1}{3}\ln|2t-1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-2}{2t-1}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C.$$

Рассмотрим, далее, интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$

С помощью подстановки $t=\sin x$ или $t=\cos x$ такой интеграл сводится к интегралу от биномиального дифференциала (см. 6.4):

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx \left| \begin{array}{l} t=\sin x,\ dx=d(\arcsin t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \\ \cos x=\sqrt{1-t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int t^m\cdot(1-t^2)^{\frac{n}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt = \int t^m\cdot(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt.$$

Если же m, n — целые числа, то применяются более простые приёмы. Пусть, например, m — нечётное число, $m=2k+1$:

$$\int \sin^{2k+1}x\cos^n x\,dx = -\int \sin^{2k}x\cos^n x\,d(\cos x) = |\cos x = t| = -\int (1-t^2)^k t^n\,dt,$$

получается интеграл от рациональной функции. Аналогично поступаем и в случае, если нечётной является степень косинуса. Если m, n — чётные числа, то используется подстановка $t=\operatorname{tg} x$.

Пример 23. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} \left| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg} x,\ dx=\dfrac{dt}{t^2+1}, \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\left(\frac{1}{t^2+1}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{(t^2+1)^2}{t^2}\,dt = \int\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{t^3}{3}+2t-\frac{1}{t}+C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$$

В случае положительных чётных показателей m, n удобно сначала понизить степень, используя тригонометрические формулы:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Пример 24. Вычислить $\int \sin^4 x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin^4 x\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x-\sin 2x+\int\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx\right) = \frac{1}{4}\left(x-\sin 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C =$$

$$= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Интегралы от произведения функций $\sin\alpha x$, $\cos\beta x$ можно вычислить, преобразуя произведение в сумму.

Пример 25. Вычислить $\int \sin x\sin 3x\,dx$.

Решение. Воспользуемся формулой:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Получим: $\displaystyle\int \sin x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x-\cos 4x\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C = \frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

6.6. Задачи с решениями

1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Преобразуем подинтегральное выражение, воспользуемся свойством линейности интеграла:

$$\int\frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int\frac{4x^2-12x+9}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-12\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+9\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Все полученные интегралы — табличные: $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$. Поэтому

$$\int\frac{(2x-3)^2\,dx}{\sqrt{x}} = 4\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-12\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+9\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}-8x^{\frac{3}{2}}+18x^{\frac{1}{2}}+C.$$

2. Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+7}+5^x}{5^x\cdot\sqrt{x^2+7}}\,dx$.

Решение. Преобразуем подинтегральное выражение так, чтобы получить табличные интегралы:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+7}+5^x}{5^x\cdot\sqrt{x^2+7}}\,dx = \int\left(\frac{1}{5^x}+\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\right)dx = \int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx + \int\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\,dx =$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+7}\right) + C = -\frac{1}{5^x\ln 5} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+7}\right) + C.$$

Здесь мы воспользовались формулами из таблицы интегралов:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, \qquad \int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

3. Вычислить $\displaystyle\int(\sin 3x+\cos 5x)\,dx$.

Решение. Преобразуем интеграл, используя приём введения под знак дифференциала:

$$\int(\sin 3x+\cos 5x)\,dx = \int\sin 3x\,dx + \int\cos 5x\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int\sin 3x\,d(3x) + \frac{1}{5}\int\cos 5x\,d(5x).$$

Полученные интегралы — табличные, хотя переменная интегрирования не обозначена новой буквой. В таких простых случаях вводить новую переменную не обязательно. Применяя табличные формулы, получим:

$$\int(\sin 3x+\cos 5x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

4. Вычислить $\displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{5+e^{2x}}$.

Решение. Заметим, что $e^x\,dx = d(e^x)$, $e^{2x} = (e^x)^2$. Значит, замена $t = e^x$ упрощает интеграл:

$$\int\frac{e^x\,dx}{5+e^{2x}} = \int\frac{d(e^x)}{5+(e^x)^2}\,|e^x=t| = \int\frac{dt}{5+t^2}.$$

Осталось применить табличную формулу:

$$\int\frac{dt}{5+t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{5}} + C.$$

5. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$, применив подстановку $x = \frac{3}{t}$.

Решение. Так как подстановка указана, то нам нужно лишь аккуратно провести преобразования:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}} \left| \begin{array}{l} x = \frac{3}{t}, \\ dx = -\frac{3}{t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{3}{t^2}dt}{\frac{3}{t}\sqrt{\frac{9}{t^2}+9}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + C = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{x}+\sqrt{\frac{9}{x^2}+1}\right) + C.$$

6. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x}$, применив подходящую подстановку.

Решение. Подстановка не указана, нам нужно её подобрать. Вид подинтегральной функции подсказывает, что ***можно попробовать*** применить подстановку $y = e^x$ (если не получится упростить интеграл, поищем другую подстановку).

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x} \left| \begin{array}{l} y = e^x, \quad x = \ln y, \\ dx = \frac{1}{y}\,dy \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{y}\,dy}{y^2-2y} = \int \frac{dy}{y^3-2y^2}.$$

Получается интеграл от рациональной дроби, для его вычисления имеется алгоритм (см. 6.3). Значит, мы правильно подобрали подстановку. Для продолжения решения разложим рациональную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{y^3-2y^2} = \frac{1}{y^2(y-2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y-2} = \frac{Ay(y-2)+B(y-2)+Cy^2}{y^2(y-2)},$$

$$1 = Ay(y-2)+B(y-2)+Cy^2.$$

При $y=0$: $1=-2B$, т. е. $B = -\frac{1}{2}$;

при $y=2$: $1=4C$, т. е. $C=\frac{1}{4}$;

при $y=1$: $1=-A-B+C$, т. е. $A=-B+C-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{4}$.

Возвращаемся к интегралу:

$$\int \frac{dy}{y^3-2y^2} = \int\left(-\frac{1}{4y}-\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{4(y-2)}\right)dy = -\frac{1}{4}\ln|y| + \frac{1}{2y} + \frac{1}{4}\ln|y-2| =$$

$$= -\frac{x}{4} + \frac{1}{2e^x} + \frac{1}{4}\ln|e^x-2| + C.$$

7. Вычислить интеграл $\int x^2 \sin 2x\,dx$.

Решение. Для интегрирования произведения многочлена и трансцендентной функции часто бывает полезным применение формулы интегрирования по частям:

$$\int x^2 \sin 2x\,dx \left| \begin{array}{l} u = x^2,\ dv = \sin 2x\,dx, \\ du = 2x\,dx,\ v = \int dv = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2x\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx.$$

Полученный интеграл проще исходного — значит, мы на верном пути. Ещё раз применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x\cos 2x\,dx \left| \begin{array}{l} u = x,\ dv = \cos 2x\,dx, \\ du = dx,\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{x}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Окончательно получаем:

$$\int x^2 \sin 2x\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

8. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Решение. Под интегралом — правильная рациональная дробь. Разложим её в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{x^3+1},$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1).$$

Напомним: это равенство — равенство многочленов, т. е. тождество, справедливое при любом x. При $x=-1$: $1 = 3A$, т. е. $A = \dfrac{1}{3}$; при $x = 0$: $1 = A + C$, т. е. $C = 1 - A = \dfrac{2}{3}$; сравнивая коэффициенты при x^2 в обеих частях равенства, получим: $0 = A + B$, т. е. $B = -A = -\dfrac{1}{3}$. Все коэффициенты определены.

Приступаем к вычислению интеграла:

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx+\int\frac{-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} x-\dfrac{1}{2}=y \\ dx=dy\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{y-\dfrac{3}{2}}{y^2+\dfrac{3}{4}}\,dy=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{y\,dy}{y^2+\dfrac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2+\dfrac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(y^2+\dfrac{3}{4}\right)}{y^2+\dfrac{3}{4}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left(y^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

9. Вычислить $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{x^2+2x+3}$.

Решение. Требуется проинтегрировать рациональную дробь. Действуем по алгоритму, рассмотренному в 6.3. Дробь неправильная, поэтому начинаем с выделения целой части:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3 \qquad\qquad & x^2+2x+3 \\ x^3+2x^2+3x & \overline{\quad x-2 \quad} \\ \hline -\;\;-2x^2-3x \qquad & \\ -2x^2-4x-6 & \\ \hline x+6. & \end{array}$$

Следовательно, $\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}=x-2+\dfrac{x+6}{x^2+2x+3}$. Знаменатель не имеет, очевидно, действительных корней, поэтому дробь $\dfrac{x+6}{x^2+2x+3}$ — простейшая, дальнейшее разложение не требуется.

$$\int\frac{x+6}{x^2+2x+3}\,dx=\int\frac{x+6}{(x+1)^2+2}\,dx\left|\begin{matrix} x+1=y, \\ dx=dy\end{matrix}\right|=\int\frac{y+5}{y^2+2}\,dy=$$

$$=\int\frac{y\,dy}{y^2+2}+\int\frac{5\,dy}{y^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2+2)}{y^2+2}+5\int\frac{dy}{y^2+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(y^2+2)+\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Добавляя интеграл от целой части, получаем:

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^2+2x+3} = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

10. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+7}}$.

Решение. Под интегралом встречается $\sqrt{x^2+7}$. Можно попробовать избавиться от корня с помощью тригонометрической подстановки $x=\sqrt{7}\operatorname{tg} t$ (см. 6.4).

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+7}}\left|\begin{array}{l} x=\sqrt{7}\operatorname{tg} t,\\ dx=\sqrt{7}\dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt\end{array}\right| = \int \frac{\dfrac{\sqrt{7}}{\cos^2 t}dt}{7\operatorname{tg}^2 t\sqrt{7(\operatorname{tg}^2 t+1)}} = \int \frac{dt}{7\sin^2 t\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}} =$$

$$= \frac{1}{7}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{7}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{7\sin t} + C.$$

Можно сразу выразить t через x и подставить в эту формулу, но получится громоздкое выражение: $-\dfrac{1}{7\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{7}}\right)} + C$. Лучше провести преобразование: $x^2 = 7\operatorname{tg}^2 t = \dfrac{7\sin^2 t}{1-\sin^2 t}$. Отсюда $\sin^2 t = \dfrac{x^2}{x^2+7}$. Значит, ответ можно записать в виде:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+7}} = -\frac{\sqrt{x^2+7}}{7x} + C.$$

11. Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

Решение. Так как $\sqrt[4]{x^3} = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x}}$, то подинтегральное выражение имеет вид $R(x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[4]{x})$, т. е. рационально относительно x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$. Наименьшее общее кратное показателей корней равно 4, поэтому сделаем подстановку $t=\sqrt[4]{x}$:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx\left|\begin{array}{l} t=\sqrt[4]{x},\ x=t^4,\\ dx=4t^3\,dt\end{array}\right| = \int\frac{t^2}{1+t^3}\cdot 4t^3\,dt = 4\int\frac{t^5}{1+t^3}\,dt.$$

Получился интеграл от рациональной дроби, можно действовать по обычным правилам. Но здесь возможен более короткий путь: заметим, что если ввести t^2 под знак дифференциала:

$$t^5\,dt = t^3t^2\,dt = t^3d\left(\frac{t^3}{3}\right) = \frac{1}{3}t^3d(t^3),$$

то функция упрощается после замены $t^3 = s$. Так и поступим:

$$\int \frac{t^5\,dt}{1+t^3} = \frac{1}{3}\int \frac{t^3\,d(t^3)}{1+t^3}\,\left|t^3 = s\right| = \frac{1}{3}\int \frac{s\,ds}{1+s} = \frac{1}{3}\int \left(1 - \frac{1}{1+s}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{3}(s - \ln|1+s|) + C = \frac{1}{3}(t^3 - \ln\left|1+t^3\right|) + C.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, запишем ответ:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx = 4\int \frac{t^5}{1+t^3}\,dt = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln(1+\sqrt[4]{x^3}\,)\right) + C.$$

12. Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.

Решение. Под интегралом — произведение степеней функций $\sin x$, $\cos x$. Степень синуса нечётна, поэтому введём синус под дифференциал: $\sin^3 x\,dx = -\sin^2 x d(\cos x)$. Под дифференциалом косинус, оставшаяся степень синуса — чётная, а значит легко выражается через косинус. После замены косинуса новой переменной интеграл упрощается:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,d(\cos x)\ \ |\cos x = y| = -\int \frac{1-y^2}{y^4}dy =$$

$$= \int \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^4}\,dy = -\frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} + C = -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

13. Вычислить $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

Решение. Для интегрирования трансцендентных функций нет универсального метода. Попытаемся применить формулу интегрирования по частям, обозначив, например, $u = e^{2x}$, $dv = \cos 3x\,dx$:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx \left|\begin{array}{l} u = e^{2x},\ dv = \cos 3x\,dx, \\ du = 2e^{2x}\,dx,\ v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x \cdot 2e^{2x}\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Новый интеграл не проще (и не сложнее) исходного — кажется, формула интегрирования по частям не ведёт к решению. Попробуем, однако, применить её ещё раз.

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx \left|\begin{array}{l} u = e^{2x},\ \ dv = \sin 3x\,dx, \\ du = 2e^{2x}\,dx,\ v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x - \int -\frac{1}{3}\cos 3x \cdot 2e^{2x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Мы вновь пришли к исходному интегралу! Но получено соотношение, позволяющее этот интеграл (обозначим его буквой I) найти:

$$I = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}I,$$

$$\frac{13}{9}I = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x,$$

$$I = \frac{1}{13}e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C.$$

6.7. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x} + 3\right)dx$; б) $\displaystyle\int\frac{(x+2)^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+2}\right)dx$; г) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$;

д) $\displaystyle\int\left(\frac{\sin x - \cos x}{3} + \sqrt{2x}\right)dx$; е) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{x^2-25} + \frac{5}{x^2+9}\right)dx$.

2. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\sin(2x-5)\,dx$; б) $\displaystyle\int\left(\sqrt{8-5x} + e^{3x}\right)dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{2-4x}$; г) $\displaystyle\int x\sqrt{25+x^2}\,dx$;

д) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}$; е) $\displaystyle\int\cos x e^{2\sin x}\,dx$;

ж) $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{9+x^8}$; з) $\displaystyle\int 2^x\sin(2^x)\,dx$;

и) $\displaystyle\int\operatorname{ch}(7x+3)\,dx$; к) $\displaystyle\int\operatorname{th}x\,dx$.

3. Пользуясь указанной подстановкой, вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{(x-1)^4}$, $\quad x-1=y$; б) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{5-x}\,dx$, $\quad 5-x=z$;

в) $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad x=\cos t$; г) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$, $\quad x=\frac{1}{t}$.

4. Применяя подходящую подстановку, вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{\cos 5x}{1+\sin 5x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}$;

в) $\displaystyle\int\sqrt[5]{1-8x}\,dx$; г) $\displaystyle\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

д) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; е) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.

5. Вычислить интегралы с помощью формулы интегрирования по частям:

а) $\int (x+1)\cos x\,dx$; б) $\int (x^2+3x)e^x\,dx$;

в) $\int x^5 \ln x\,dx$; г) $\int x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$;

д) $\int \operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}\,dx$; е) $\int \dfrac{x}{\cos^2 2x}\,dx$.

6. Вычислить интегралы от рациональных функций:

а) $\int \dfrac{dx}{(x+1)(x-2)}$; б) $\int \dfrac{3x-1}{x^2+x-6}\,dx$;

в) $\int \dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$; г) $\int \dfrac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}\,dx$;

д) $\int \dfrac{x^3\,dx}{x^2+2x+3}$; е) $\int \dfrac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}$;

ж) $\int \dfrac{3-x}{(x^2+1)^2}\,dx$; з) $\int \dfrac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\,dx$.

7. Вычислить интегралы от иррациональных функций:

а) $\int \dfrac{x}{(2+3x)\sqrt{2+3x}}\,dx$; б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

в) $\int \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$; г) $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$;

д) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$; е) $\int \dfrac{\sqrt[5]{x}\,dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[5]{x})}$;

ж) $\int \sqrt{4+9x^2}\,dx$; з) $\int \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+6x+8}}\,dx$.

8. Вычислить интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \dfrac{dx}{\sin x}$; б) $\int \sin^3 x\,\cos^{11} x\,dx$;

в) $\int \cos^6 x\,dx$; г) $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x}$;

д) $\int \dfrac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^3 x}}$; е) $\int \dfrac{(1+\cos x)\,dx}{\sin x(3+\cos x)}$;

ж) $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$; з) $\int \dfrac{5\cos x-2\sin x+5}{\sin x+3\cos x+3}\,dx$.

9. Вычислить интегралы:

а) $\int \dfrac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int \dfrac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$;

в) $\int \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{x}}\,dx$; г) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

д) $\int \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$; е) $\int \dfrac{4x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

ж) $\int \ln(1+\sqrt{x})\,dx$; з) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$;

и) $\int \mathrm{sh}^3\,2x\,dx$; к) $\int \mathrm{ch}\,\sqrt{x}\,dx$;

л) $\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$; м) $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx$;

н) $\int \frac{\ln x}{x^6}\,dx$; о) $\int x\sin x\cos 3x\,dx$.

6.8. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = \frac{4x-2\sqrt{x}}{x}$. В ответе указать $F(4)-F(1)$.

2. Вычислить $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$. Указать номер правильного ответа:

1) $-e^{\frac{1}{x}}+C$; 2) $e^{-\frac{1}{x}}+C$; 3) $(x^2+x+1)e^{\frac{1}{x}}+C$; 4) $2xe^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}+C$.

3. В разложении рациональной функции в сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

найти коэффициент C.

4. Найти коэффициент β в формуле:

$$\int x\sin 2x\,dx = \alpha x\cos 2x + \beta\sin 2x + C.$$

5. Вычислить $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$. Указать номер правильного ответа:

1) $x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$; 2) $\frac{1}{6}\cos^6 x+C$; 3) $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$; 4) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$.

6. Вычислить $\int \frac{19-x}{(x-3)(x+5)}\,dx$. Указать номер правильного ответа:

1) $\frac{19}{2}\ln\left|x^2+2x-15\right|+C$; 2) $2\ln|x-3|-3\ln|x+5|+C$;

3) $3\ln|x-3|+2\ln|x+5|+C$; 4) $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{4}+19\ln\left|x^2+2x-15\right|+C$.

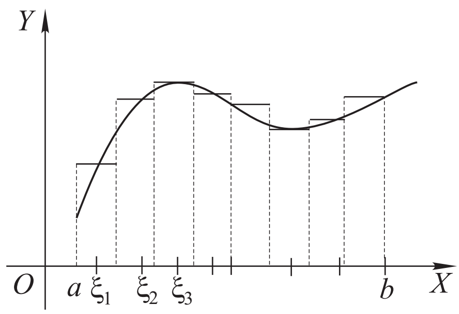
ГЛАВА 7

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В предыдущей главе мы учились вычислять неопределённые интегралы, т. е. выполнять действие, обратное дифференцированию. Никаких практических применений этого действия пока не рассматривалось. Здесь мы познакомимся с другим подходом к интегрированию, имеющим очень много применений. И установим замечательную связь между этими подходами. Эта связь (формула Ньютона–Лейбница) позволит нам с помощью развитой техники вычислять новый тип интегралов — определённые интегралы Римана, а значит решать многие геометрические, механические, физические задачи.

7.1. Определение и свойства определённого интеграла

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, причём $f(x) > 0$ на $[a, b]$. ***Криволинейной трапецией*** называется плоская фигура, ограниченная графиком $f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$. Для определения её площади разобьём $[a, b]$ на N частей (не обязательно равной длины) точками x_0, x_1, x_2, ..., x_n так, чтобы $x_0 = a$, $x_n = b$. Обозначим через Δx_i длину i-го отрезка разбиения, т. е. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На i-м отрезке возьмём произвольно точку ξ_i:



$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

(Напомним: ξ — буква «кси» греческого алфавита.) На каждом отрезке построим прямоугольник с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Его площадь, как известно, есть произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$. Сумма площадей всех прямоугольников есть площадь так называемой ***ступенчатой*** фигуры. Очевидно, при мелких разбиениях её можно считать ***приближением*** площади криволинейной трапеции S:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ошибка этого приближённого равенства тем меньше, чем мельче разбиение. Разберёмся, как можно сравнить мелкость различных разбиений. ***Мелкостью разбиения*** называется число

$$\lambda = \max\{\Delta x_i\},$$

т. е. максимальная среди длин отрезков разбиения. Теперь можно сказать, что если $\lambda \to 0$, то площадь ступенчатой фигуры стремится к площади криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Однако в этом равенстве ещё много непонятного. Во-первых, пока мы пользуемся интуитивным представлением о том, что такое ***площадь*** фигуры. Далее, мы учились вычислять лишь пределы функций одной переменной при стремлении этой переменной к определённому значению. Здесь же вместо функции от λ — сумма, зависящая от выбора точек разбиения x_0, x_1, ..., x_n и точек $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Постараемся уточнить этот подход, дадим точное определение.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определённая на $[a, b]$. Рассмотрим разбиение $[a, b]$ точками:

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b.$$

Выберем произвольно точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется ***интегральной суммой Римана***, соответствующей сделанному выбору.

Число I называется ***интегралом Римана*** (или ***определённым*** интегралом) от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения мелкостью меньше δ, при любом выборе точек ξ_i справедливо неравенство:

$$\left| I - \sum f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Другими словами, число I является интегралом, если сумму $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ можно сделать ***как угодно близкой*** к I за счёт измельчения разбиения. Можно употреблять и запись

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i,$$

имея в виду это строгое определение.

Для определённого интеграла используется обозначение

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если такой интеграл существует, то $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на $[a, b]$. Числа a, b называются ***пределами интегрирования***. Теперь мы можем сказать, что задача о площади криволинейной трапеции решается с помощью интеграла:

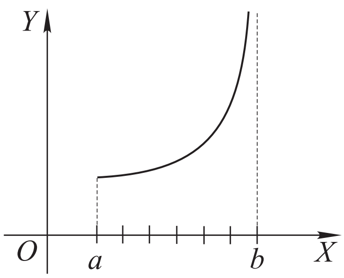
$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

В определении интеграла предполагалось, конечно, что $a < b$. Удобно распространить эту запись и на другие случаи, считая ***по определению***, что если $a > b$, то $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, а если пределы интегрирования совпадают, то $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Вопрос о том, как вычислять такие интегралы, мы обсудим позже (в разделе 7.3). Сейчас рассмотрим свойства определённого интеграла.

Свойство 1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство проведём от противного: пусть $f(x)$ не ограничена.



Тогда для любого разбиения найдётся отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, на котором функция не ограничена. Для случая, изображённого на рисунке, это отрезок $[x_{n-1}, x_n]$. Теперь, за счёт выбора точки ξ_i на этом отрезке, можно сделать слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ произвольно большим (не меняя других слагаемых). Тогда и вся сумма $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ будет большой, независимо от мелкости разбиения. Это противоречит тому, что при мелких разбиениях интегральная сумма близка к определённому числу I (интегралу).

Замечание. Ограниченность — необходимое, но не достаточное условие интегрируемости. Рассмотрим пример ограниченной, но не интегрируемой функции. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Здесь $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Очевидно, $f(x)$ ограничена. Но как бы мелко мы ни разбивали отрезок $[a, b]$, можно выбрать все ξ_i рациональными, и тогда

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \sum \Delta x_i = b - a.$$

А можно выбрать все ξ_i иррациональными, а тогда $\sum f(\xi_i)\Delta x_i = 0$. Поэтому не существует числа, к которому стремится сумма при измельчении разбиений, независимо от выбора ξ_i. Эта неинтегрируемая функция носит название ***функции Дирихле***.

Свойство 2. Если $f(x) \equiv M$ — постоянная на $[a, b]$ функция, то

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b M\, dx = M(b-a).$$

Доказательство очевидно — в этом случае все интегральные суммы одинаковы и совпадают с числом $M(b-a)$:

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \sum M\Delta x_i = M\sum \Delta x_i = M(b-a).$$

Свойство 3 (*линейность определённого интеграла*). Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то функции $f(x)+g(x)$, $\alpha f(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ также интегрируемы на $[a, b]$, причём

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx + \int\limits_a^b g(x)\, dx,$$

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Доказательство. Обозначим $\int\limits_a^b f(x)\, dx = I_1$, $\int\limits_a^b g(x)\, dx = I_2$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению интеграла,

$\exists\delta_1 : \left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, если только разбиение мельче δ_1;

$\exists\delta_2 : \left|\sum g(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, если только разбиение мельче δ_2.

Возьмём теперь какое-либо разбиение мельче $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при любом выборе точек ξ_i выполнены оба неравенства, а поэтому

$$\left|\sum (f(\xi_i)+g(\xi_i))\Delta x_i - (I_1+I_2)\right| =$$
$$= \left|\left(\sum f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right) + \left(\sum g(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right)\right| \le$$
$$\le \left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right| + \left|\sum g(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Аналогично доказывается и второе соотношение: для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ и любого $\varepsilon > 0$ можно взять настолько мелкое разбиение, что $\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right| < \dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$. Но тогда

$$\left|\sum \alpha f(\xi_i)\Delta x_i - \alpha I_1\right| = |\alpha| \cdot \left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon,$$

а это, по определению интеграла, и означает, что $\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha I_1$.

Свойство 4 ***(аддитивность).*** Если $a < c < b$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на $[a,b]$, причём

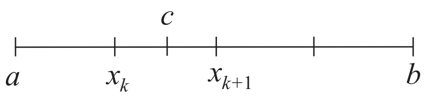
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Обозначим $\int\limits_a^c f(x)\,dx = I_1$, $\int\limits_c^b f(x)\,dx = I_2$. По определению интеграла, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta_1 : \left|\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i - I_1\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, если разбиение отрезка $[a,c]$ мельче δ_1;

$\exists \delta_2 : \left|\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i - I_2\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, если разбиение отрезка $[c,b]$ мельче δ_2.

Так как, по свойству 1, $f(x)$ ограничена на $[a,c]$ и на $[c,b]$, то она ограничена и на $[a,b]$. Пусть $|f(x)| \leq M \quad (\forall x \in [a,b])$. Возьмём теперь $\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2, \dfrac{\varepsilon}{6M}\right\}$ и рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$, мелкость которого меньше δ. Будем считать, что точка c не совпадает с точками x_i,



разбивающими отрезок, а лежит внутри интервала (x_k, x_{k+1}). Это более трудный случай: если $c = x_i$, то доказательство очень просто. Проведём необходимые преобразования:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - (I_1 + I_2)\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i + f(c)\,(c - x_k) - f(c)\,(c - x_k) + \right.$$

$$\left. + f(\xi_{k+1})\,\Delta x_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + f(c)\,(x_{k+1} - c) - f(c)\,(x_{k+1} - c) - (I_1 + I_2)\right| =$$

$$= \left|\left(\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i + f(c)\,(c - x_k) - I_1\right) + \left(\sum_{i=k+2}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + f(c)\,(x_{k+1} - c) - I_2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-f(c)(c - x_k) - f(c)(x_{k+1} - c) + f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\left(\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + f(c)\,(c-x_k) - I_1\right)\right| + \left|\left(\sum_{i=k+2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + f(c)\,(x_{k+1}-c) - I_2\right)\right| +$$
$$+ \left|f(c)(x_k - x_{k+1}) + f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1}\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + |f(\xi_{k+1}) - f(c)|\,\Delta x_{k+1} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Заметим, что на отрезках $[x_k, c]$, $[c, x_{k+1}]$ при составлении интегральных сумм выбрана точка c. Это допустимо, так как интегралы I_1, I_2 существуют, а значит их отличие от интегральных сумм не зависит от выбора точек (а зависит лишь от мелкости разбиения). На последнем этапе преобразований мы воспользовались тем, что

$$|f(\xi_{k+1}) - f(c)| \leq |f(\xi_{k+1})| + |f(c)| \leq 2M,$$

а также тем, что $\Delta x_{k+1} < \delta \leq \dfrac{\varepsilon}{6M}$.

Свойство 5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, функция $g(x)$ отличается от $f(x)$ в конечном числе точек. Тогда $g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$, причём $\displaystyle\int_a^b g\,(x)\,dx = \int_a^b f\,(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $c \in [a, b]$. Рассмотрим функцию

$$\delta_c\,(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = c, \\ 0, \text{ если } x \neq c. \end{cases}$$

Заметим, что она интегрируема, причём $\displaystyle\int_a^b \delta_c\,(x)\;dx = 0$. Действительно, в любой интегральной сумме имеется самое большее — одно ненулевое слагаемое:

$$\left|\sum \delta_c\,(\xi_i)\,\Delta x_i\right| = \delta_c\,(\xi_k)\,\Delta x_k \leq \Delta x_k.$$

Поэтому если взять разбиение мельче $\delta = \varepsilon$, то и $\left|\sum \delta_c\,(\xi_i)\,\Delta x_i\right| < \varepsilon$, что и означает равенство интеграла нулю.

Пусть функция $g(x)$ отличается от $f(x)$ в точках c_1, c_2, $\ldots$, c_n. Обозначим разности: $g(c_i) - f(c_i) = A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда справедливо соотношение:

$$g(x) = f(x) + A_1\delta_{c_1}(x) + A_2\delta_{c_2}(x) + \ldots + A_n\delta_{c_n}(x).$$

Действительно, если $x \neq c_i$, то $g(x_i) = f(x_i)$, а все $\delta_{c_i}\,(x) = 0$. Если же $x = c_i$, то $g(c_i) = f(c_i) + A_i$, а все остальные слагаемые — нули.

Переходя к интегралам, пользуемся линейностью и тем, что $\int\limits_a^b \delta_{c_i}(x)\,dx = 0$:

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + A_1 \int\limits_a^b \delta_{c_1}(x)\,dx + \ldots + A_n \int\limits_a^b \delta_{c_n}(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Свойство 6 ***(интегрирование неравенств).*** Если $f(x)$, $g(x)$ интегрируемые на $[a,b]$ функции, причём $f(x) \geq g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. Ясно, что $h(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a,b])$. Поэтому любая интегральная сумма неотрицательна: $\sum h(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$. Значит, и интеграл $\int\limits_a^b h(x)\,dx \geq 0$, так как иначе получается противоречие с определением интеграла, с тем, что отличие интегральной суммы от интеграла может быть как угодно малым. Итак,

$$\int\limits_a^b h(x)\,dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx \geq 0,$$

т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx$, что и требовалось доказать.

Свойство 7 ***(теорема о среднем).*** Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то $\exists c \in [a,b]:$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство. По теореме 9 из раздела 3.3, непрерывная функция является ограниченной: $m \leq f(x) \leq M$ $(\forall x \in [a,b])$. По свойству 6:

$$\int\limits_a^b m\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b M\,dx.$$

Применяем свойство 2 для вычисления интеграла от постоянной:

$$m\,(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)\,,$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

По теореме о промежуточных значениях для непрерывных функций (теорема 7 из 3.3), найдётся точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$, что и требовалось.

7.2. Интегрируемость непрерывных функций

Класс интегрируемых функций очень широк. В этом разделе мы докажем, что все непрерывные (и даже кусочно-непрерывные) функции интегрируемы. Сначала рассмотрим интегральные суммы специального вида, изучим их свойства.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Обозначим через B разбиение отрезка $[a, b]$ точками $x_0 = a$, x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, $x_n = b$ (длины Δx_i отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ не обязательно одинаковы). Можно считать, что разбиение B — это и есть множество точек:

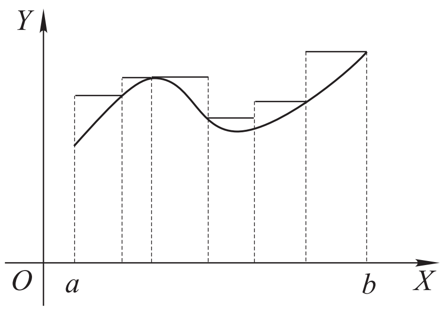
$$B = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.$$

Обозначим: M_i — наибольшее значение $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$, m_i — наименьшее значение $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Рассмотрим суммы:

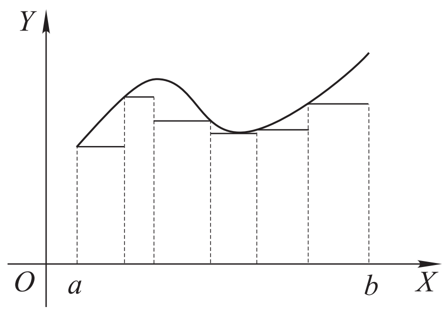
$$\sum M_i \Delta x_i = \overline{S}_B \text{ — } \textbf{\textit{верхняя сумма Дарбу}},$$

$$\sum m_i \Delta x_i = \underline{S}_B \text{ — } \textbf{\textit{нижняя сумма Дарбу}}.$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то значения M_i, m_i достигаются (теорема 10, раздел 3.3) в некоторых точках. Поэтому суммы Дарбу являются частными случаями интегральных сумм.



Площадь ступенчатой фигуры – верхняя сумма Дарбу



Площадь ступенчатой фигуры – нижняя сумма Дарбу

Заметим, что так как $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, то при любом выборе точек ξ_i справедливо неравенство:

$$\underline{S}_B \le \sum f(\xi_i) \Delta x_i \le \overline{S}_B,$$

т. е. суммы Дарбу — это самая маленькая и самая большая интегральные суммы для данного разбиения. Другие свойства сумм Дарбу рассматриваются в леммах.

Лемма 1. При добавлении точек деления (т. е. при измельчении разбиения) верхняя сумма Дарбу может лишь уменьшиться, а нижняя — может лишь возрасти.

Доказательство. Пусть разбиение B^+ получено из разбиения $B = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ добавлением одной точки y, причём $x_k < y < x_{k+1}$. Как и выше, обозначим M_i — наибольшее значение $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. В разбиении B^+ появилось 2 новых отрезка. Обозначим M' — наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $[x_k, y]$, $\quad M''$ — наибольшее значение $f(x)$ на $[y, x_{k+1}]$. Тогда

$$\overline{S}_B = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i + M_{k+1}\Delta x_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$\overline{S}_{B^+} = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i + M'(y - x_k) + M''(x_{k+1} - y) + \sum_{i=k+2}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Вычтем $\overline{S}_{B^+}$ из $\overline{S}_B$ и воспользуемся тем, что $M' \le M_{k+1},\ M'' \le M_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\overline{S}_B - \overline{S}_{B^+} &= M_{k+1}\Delta x_{k+1} - M'(y - x_k) - M''(x_{k+1} - y) \ge \\ &\ge M_{k+1}\Delta x_{k+1} - M_{k+1}(y - x_k) - M_{k+1}(x_{k+1} - y) = \\ &= M_{k+1}(x_{k+1} - x_k - y + x_k - x_{k+1} + y) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{S}_{B^+} \le \overline{S}_B$. Аналогично доказывается, что $\underline{S}_{B^+} \ge \underline{S}_B$.

Лемма 2. Для любых разбиений B_1, B_2 отрезка $[a, b]$

$$\underline{S}_{B_1} \le \overline{S}_{B_2},$$

т. е. любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней.

Доказательство. Рассмотрим разбиение $B = B_1 \cup B_2$. Оно образовано всеми точками B_1 и B_2 и поэтому мельче, чем B_1 и B_2. Используя лемму 1, получаем:

$$\underline{S}_{B_1} \le \underline{S}_B \le \overline{S}_B \le \overline{S}_{B_2},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Множество всех нижних сумм Дарбу ограничено сверху (например, любой верхней суммой Дарбу), а следовательно имеет точную верхнюю грань:

$$\sup\{\underline{S}_B\} = \underline{I}.$$

Это число называется ***нижним интегралом Дарбу***. Аналогично, существует и верхний интеграл Дарбу:

$$\overline{I} = \inf\{\overline{S}_B\}.$$

Ясно, что для любого разбиения B справедливы неравенства:

$$\underline{S}_B \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{S}_B.$$

Перейдём теперь к основному результату раздела.

Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$, т. е. существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Обозначим: $I = \underline{I} = \sup\{\underline{S}_B\}$. Докажем, что число I и является интегралом.

Если B — разбиение отрезка $[a,b]$, то при любом выборе точек ξ_i

$$\underline{S}_B \leq \sum f\,(\xi_i)\Delta x_i \leq \overline{S}_B.$$

Кроме того, определение числа I и лемма 2 показывают, что $\underline{S}_B \leq I \leq \overline{S}_B$. Из этих неравенств, очевидно, следует:

$$\left|I - \sum f\,(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \leq \left|\overline{S}_B - \underline{S}_B\right|.$$

Воспользуемся теоремой Кантора о равномерной непрерывности (см. 3.3): так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на $[a,b]$, т. е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall x', x'' \in [a,b] \quad \left|x' - x''\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon.$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$, найдём такое δ, чтобы при $|x' - x''| < \delta$ было справедливо $|f\,(x') - f\,(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть B — разбиение, мелкость которого меньше δ. Так как наибольшее и наименьшее значения M_i, m_i функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ достигаются в некоторых точках, то при таком разбиении

$$|M_i - m_i| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Поэтому

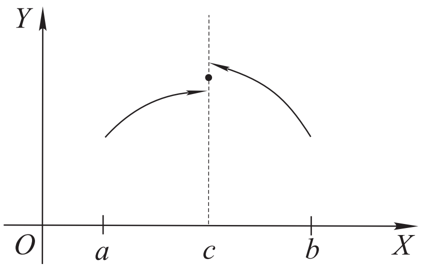
$$\left|I - \sum f\,(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \leq \left|\overline{S}_B - \underline{S}_B\right| = \left|\sum M_i\Delta x_i - \sum m_i\Delta x_i\right| =$$
$$= \left|\sum (M_i - m_i)\,\Delta x_i\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ мы нашли δ такое, что если разбиение мельче δ, то любая интегральная сумма отличается от числа I меньше, чем на ε. По определению, это означает, что $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Теорема доказана.

Можно доказать интегрируемость и более широкого класса функций. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной***, если она имеет на $[a, b]$ лишь конечное число разрывов, причём это разрывы 1-го рода.

Теорема 2. Кусочно-непрерывные на $[a, b]$ функции интегрируемы.

Доказательство. Пусть $f(x)$ имеет в точке $x = c$ разрыв 1-го рода, а в остальных точках отрезка $[a, b]$ непрерывна. Рассмотрим отрезок $[a, c]$. На нём функция либо непрерывна, либо отличается от непрерывной значением в одной точке (в точке c, как на рисунке). По свойству 5, существует $\int\limits_a^c f(x)\,dx$. Аналогично, существует и интеграл $\int\limits_c^b f(x)\,dx$. По свойству аддитивности, тогда существует и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, что и требовалось. Если точек разрыва несколько, то нужно повторить рассуждение.



7.3. Формула Ньютона – Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Возьмём какое-либо $x \in [a, b]$. Тогда наша функция непрерывна, конечно, на отрезке $[a, x]$. Значит, по теореме 1, существует интеграл

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Мы изменили обозначение для аргумента функции — пишем $f(t)$ вместо $f(x)$ — для того, чтобы не смешивать его с обозначением верхнего предела. Ясно, что значение интеграла не зависит от того, какой буквой обозначить переменную интегрирования. Но значение этого интеграла зависит от x, поэтому получаем функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, которая называется ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Теорема 3 ***(теорема Барроу).*** Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в каждой точке $[a, b]$, причём

$$F'(x) = f(x).$$

Доказательство. Будем вычислять $F'(x)$, используя определение производной: $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x}$. Вычислим сначала приращение ΔF:

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt =$$
$$= \int\limits_a^{x} f(t)\,dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Мы использовали аддитивность определённого интеграла. Теперь применим другое свойство — теорему о среднем:

$$\Delta F = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\Delta x,$$

где c — некоторая точка, лежащая между x и $x+\Delta x$.

Вернёмся к вычислению производной:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

В последнем равенстве использована непрерывность: если $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$, а значит и $c \to x$. Так как f непрерывная функция, то отсюда следует, что $f(c) \to f(x)$.

Итак, $F'(x) = f(x)$, теорема Барроу доказана.

Следствие. Любая непрерывная функция $f(x)$ на $[a, b]$ имеет первообразную, причём $\int f(x)\,dx = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C$.

Заметим, что этот результат был сформулирован в теореме 4 из 6.1, а теперь получил полное доказательство.

Теорема 4 ***(основная теорема интегрального исчисления).*** Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $\Phi(x)$ — какая-либо её первообразная, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Так как функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ является, по теореме Барроу, первообразной для $f(x)$, а любые первообразные различаются на постоянное слагаемое (теорема 1 из 6.1), то $\Phi(x) = F(x) + C$, где

C — некоторое число. В частности, подставляя $x = a$ и $x = b$, получим:

$$\Phi(a) = F(a) + C = \int\limits_a^a f(t)\,dt + C = C,$$

$$\Phi(b) = F(b) + C = \int\limits_a^b f(t)\,dt + C.$$

Из этих соотношений, очевидно, следует

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

что и требовалось доказать.

Доказанная формула называется ***формулой Ньютона – Лейбница***. Она перебрасывает мостик между понятием определённого интеграла (имеющим много приложений) и понятием первообразной (или неопределённого интеграла). Для вычисления неопределённых интегралов в 6-й главе развита хорошая техника, которую теперь мы сможем применять к различным задачам геометрии и механики.

Для обозначения разности $\Phi(b) - \Phi(a)$ удобно использовать так называемый ***знак подстановки***:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_2^3 x^2\,dx$.

Решение. Так как первообразной для функции x^2 является функция $\dfrac{x^3}{3}$, то по формуле Ньютона – Лейбница находим:

$$\int\limits_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

Использование любой другой первообразной (например, $\dfrac{x^3}{3} + 10$) привело бы, конечно, к такому же результату.

7.4. Приёмы вычисления определённых интегралов

При вычислении неопределённых интегралов мы пользовались формулой интегрирования по частям, методом подстановки (замены переменной). Научимся применять эти методы для вычисления определённых интегралов.

Теорема 5. Если $u(x)$, $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции, то

$$\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Доказательство. По условию, производные u', v' непрерывны. Поэтому в известной формуле

$$(uv)' = u'v + uv'$$

и левая часть, и оба слагаемых в правой части являются непрерывными функциями. Значит, они интегрируемы, причём

$$\int\limits_a^b (uv)'\,dx = \int\limits_a^b u'v\,dx + \int\limits_a^b uv'\,dx.$$

Но функция uv является первообразной для $(uv)'$. Поэтому $\int\limits_a^b (uv)'\,dx = (uv)\Big|_a^b$. Учитывая, что $u'v\,dx = v\,du$, $\quad uv'\,dx = u\,dv$, получаем:

$$(uv)|_a^b = \int\limits_a^b v\,du + \int\limits_a^b u\,dv,$$

или $\int\limits_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$, что и требовалось.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int\limits_1^e x\ln x\,dx \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x}\,dx, \\ dv = x\,dx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2+1}{4}.$$

При замене переменной в неопределённом интеграле нам приходилось для записи ответа возвращаться к исходной переменной. При вычислении определённого интеграла этого можно не делать, изменяя соответствующим образом пределы интегрирования.

Теорема 6. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, причём $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$. Тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

По свойствам непрерывных функций $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ непрерывна, а значит для неё можно использовать формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 3. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Воспользуемся заменой:

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \left| \begin{array}{ll} x = t^2, & x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ dx = 2t\,dt, & x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| = \int\limits_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\,(t - \ln|t+1|)\Big|_0^2 = 2(2-\ln 3) - 2(0-\ln 1) = 2(2-\ln 3).$$

При интегрировании чётной или нечётной функции по отрезку, симметричному относительно $x = 0$, удобно пользоваться следующими теоремами.

Теорема 7. Если $f(x)$ — чётная функция, то $\displaystyle\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$.

Доказательство. Используем аддитивность:

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной:

$$x = -t, \quad dx = -dt, \quad x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \quad x = -a \;\Rightarrow\; t = a.$$

Получим:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$
$$= -\int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Теорема 8. Если $f(x)$ — нечётная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство. Так как $\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx \left| x = -t \right| = \int\limits_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int\limits_{a}^{0} f(t)dt =$
$= -\int\limits_{0}^{a} f(t)dt,$ то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_{-3}^{3} x^2 \sin^3 x\,dx.$

Решение. Так как подинтегральная функция нечётна, а пределы интегрирования симметричны относительно $x = 0$, то интеграл равен нулю.

7.5. Применения определённого интеграла

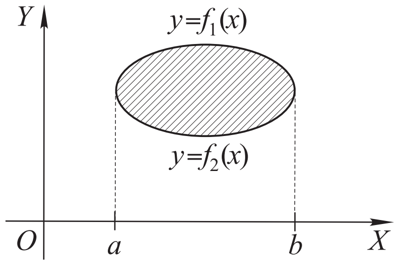
В этом разделе будут получены несколько формул, нужных для решения различных задач. Однако основная цель — не вывод этих формул, а общая идея, очень мощный метод применения интегрального исчисления. Все рассмотренные ниже задачи являются примерами его использования.

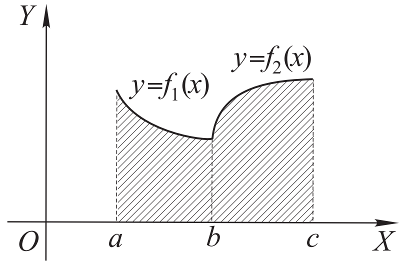
Иногда приводимые рассуждения не будут абсолютно строгими.

7.5.1. Вычисление площадей

Мы продолжаем пользоваться интуитивным пониманием слова «площадь». Уточнение этого понятия будет дано в главе 11.

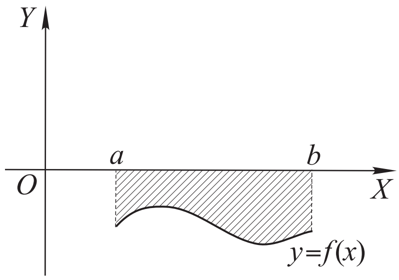
Если плоская фигура ограничена линией, уравнение которой задано в прямоугольной декартовой системе координат, то фигуру обычно можно представить в виде объединения или разности криволинейных трапеций. Затем следует воспользоваться аддитивностью интеграла и формулой для площади, полученной в 7.1.

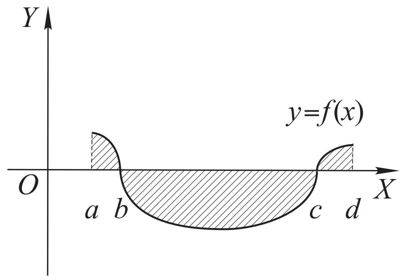




$$S = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx, \qquad S = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^c f_2(x)\,dx.$$

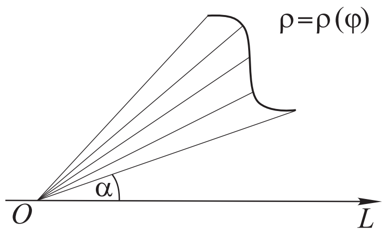
Конечно, если $f(x) \le 0$ на отрезке $[a, b]$, то $S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$.



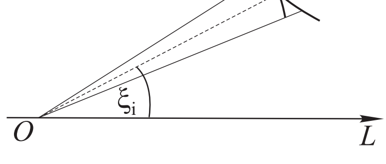


$$S = -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx.$$

Часто приходится вычислять площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат. Напомним, полярная система координат рассматривалась в курсе геометрии (АГ, 5.6). Уравнение кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задаёт зависимость полярного радиуса ρ от полярного угла φ.



Рассмотрим задачу вычисления площади фигуры, ограниченной линией $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, выходящими из полюса 0. Разобьём отрезок $[\alpha, \beta]$ изменения угла φ на n частей: $\alpha = \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n = \beta$. Получим соответствующее разбиение фигуры лучами $\varphi = \varphi_i$. Обозначим: $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Выберем произвольно точки $\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим круговой сектор с углом $\Delta\varphi_i$ и радиусом $\rho(\xi_i)$.



Его площадь, как известно из школьного курса геометрии, равна половине произведения квадрата радиуса на угол:

$$S_i = \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i.$$

Заменяя площадь искомой фигуры S на сумму площадей построенных секторов, получим приближённое равенство:

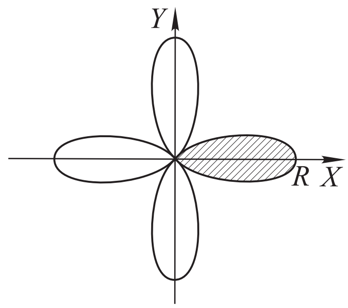
$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i.$$

В правой части равенства — интегральная сумма функции $\rho^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. При неограниченном измельчении разбиения интегральная сумма стремится к интегралу, а ошибка приближённого равенства — к нулю. В результате получим:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 5. Найти площадь одного лепестка 4-лепестковой розы — фигуры, ограниченной кривой $\rho = R\,|\cos 2\varphi|$.

Решение. Сделаем схематический чертёж, при этом полярную систему координат согласуем с декартовой, совмещая полюс с началом координат, полярную ось — с положительным направлением оси OX. Так как $\rho = R\,|\cos 2\varphi| = 0$ при $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$, то отмеченный на рисунке лепесток ограничен лучами $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Применяем выведенную формулу:



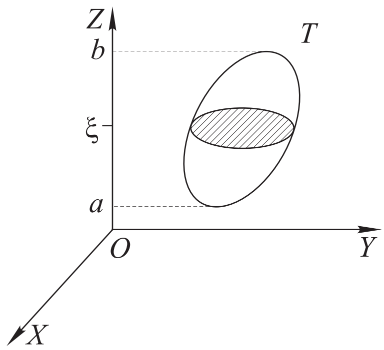
$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} R^2\cos^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}R^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}R^2\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}R^2\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi R^2}{8}.$$

7.5.2. Вычисление объёмов

Понятие «объём», как и «площадь», будет уточняться в 11-й главе. Пока у нас есть лишь интуитивное представление, которое позволит нам научиться вычислять объёмы тел с помощью определённых интегралов. Пусть $S(\xi)$ — площадь сечения тела T плоскостью $z = \xi$. Разобьём отрезок $[a, b]$ (проекция тела T на ось OZ) на n частей:

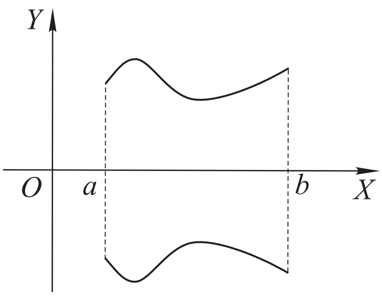
$$a = z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n = b.$$



Проведя плоскости $z = z_i$, получим разбиение тела T на «слои». Выберем произвольно точки $\xi_i \in [z_{i-1}, z_i]$. Объём каждого «слоя» вычислим приближённо, заменяя его цилиндром с высотой $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ и площадью основания $S(\xi_i)$. Объём такого цилиндра, как известно, равен $S(\xi_i)\Delta z_i$. Получаем: $V \approx \sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta z_i$. Переходя к пределу по всё более мелким разбиениям, получим точное равенство:

$$V = \int_a^b S(z)dz.$$

Рассмотрим более конкретную задачу об объёме тела вращения. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $f(x)$, осью OX и отрезками прямых $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси OX. Разбивая отрезок $[a, b]$, получим соответствующее разбиение тела вращения. Объём i-й части ΔV_i приблизительно равен объёму цилиндра с высотой Δx_i и радиусом $f(\xi_i)$, где ξ_i — произвольно выбранная точка на $[x_{i-1}, x_i]$:



$$\Delta V_i \approx \pi(f(\xi_i))^2 \Delta x_i.$$

Значит, объём всего тела вращения равен:

$$V = \sum \Delta V_i \approx \pi \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i))^2 \Delta x_i.$$

Переходя к пределу по всё более мелким разбиениям, получим:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример 6. Найти объём эллипсоида вращения, полученного при вращении эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OX.

Решение. Вокруг оси OX вращается криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \le x \le a$. Поэтому

$$V = \pi \int\limits_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Замечание. Если полуоси эллипса равны ($a = b$), то вращается окружность, и тело вращения — шар. Получаем известную формулу для объёма шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

7.5.3. Длина кривой

Рассмотрим отображение

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

отрезка $[a, b]$ в пространство $\mathbb{R}^3$. Для каждого числа $t \in [a, b]$ обозначим через $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ декартовы координаты точки $f(t)$. Если функции $\varphi(t), \chi(t), \psi(t)$ непрерывны на $[a, b]$, то образ отрезка $[a, b]$ при отображении f, т. е. множество точек

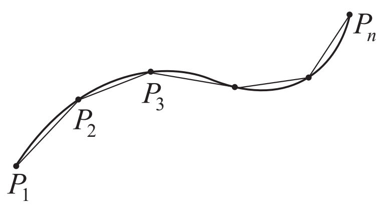
$$\{ (\varphi(t), \chi(t), \psi(t)) \mid t \in [a, b] \},$$

называется ***непрерывной кривой.*** Ясно, что параметрическое задание такой кривой имеет вид: $x = \varphi(t),\ y = \chi(t),\ z = \psi(t); \quad t \in [a, b]$.

Кривая называется ***гладкой***, если функции $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы, причём их производные ни в одной точке $[a, b]$ не обращаются в нуль одновременно. Последнее условие можно записать так:

$$\varphi'^2(t) + \chi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0 \quad (\forall t \in [a, b]).$$

Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$: $a = t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots, t_{n-1},\ t_n = b$.



Пусть $P_i = f(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$ — соответствующие точки кривой. Длину вектора $\overline{P_{i-1}P_i}$, как обычно, обозначаем $\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|$. Число L называется ***длиной*** данной кривой, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка с мелкостью меньше δ

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| \right| < \varepsilon.$$

Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|$ является длиной ***ломаной с узлами в точках*** $P_0,\ P_1, \ldots, P_n$. Имея в виду данное точное определение, можно говорить, что длина кривой — это предел длин вписанных в неё ломаных (по всё более мелким разбиениям отрезка $[a,b]$).

Кривая, имеющая конечную длину, называется ***спрямляемой***.

Теорема 9. Гладкая кривая спрямляема, причём если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t),\ y=\chi(t),\ z=\psi(t),\quad t\in[a,b]$, то её длину можно вычислить по формуле:

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{\varphi'^2(t)+\chi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Если рассматривается ***плоская*** кривая: $x=\varphi(t), y=\chi(t),\ t\in[a,b]$, то формула для длины аналогична:

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{\varphi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

Доказательство проведём для плоского случая. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ и вычислим длину i-го звена ломаной, вписанной в кривую и соответствующей этому разбиению:

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|=\sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\chi(t_i)-\chi(t_{i-1}))^2}.$$

Применяя к каждой функции теорему Лагранжа (теорема 4 из 5.1), получим:

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|=\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)(\Delta t_i)^2+\chi'^2(\nu_i)(\Delta t_i)^2}=\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\nu_i)}\,\Delta t_i.$$

Здесь $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Длина всей ломаной равна

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\nu_i)}\,\Delta t_i.$$

Заметим, что полученная сумма весьма похожа на интегральную сумму для интеграла в условии теоремы. Однако точки ξ_i, ν_i, хотя и лежат внутри одного отрезка разбиения $[t_{i-1},t_i]$, могут не совпадать. Это и не позволяет нам сразу закончить доказательство, требуются дополнительные рассуждения.

Так как функция $\chi'(t)$ непрерывна, то непрерывна и $\chi'^2(t)$. По теореме Кантора, она является равномерно непрерывной на $[a,b]$. Поэтому

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\quad |\xi-\nu|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\chi'^2(\xi)-\chi'^2(\nu)\right|<\frac{\varepsilon^2}{4(b-a)^2}.$$

Возьмём $\varepsilon > 0$, выберем соответствующее δ. Будем рассматривать разбиения отрезка $[a, b]$ мельче δ. Запишем:

$$\sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\nu_i)} = \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\nu_i) - \chi'^2(\xi_i)}$$

и воспользуемся очевидным (особенно после возведения всех его частей в квадрат) неравенством:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Получим:

$$\sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\xi_i)} - \sqrt{\chi'^2(\nu_i) - \chi'^2(\xi_i)} \leq \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\nu_i)} \leq$$
$$\leq \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\xi_i)} + \sqrt{\chi'^2(\nu_i) - \chi'^2(\xi_i)}.$$

Так как $\sqrt{\chi'^2(\nu_i) - \chi'^2(\xi_i)} < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, то отсюда следует:

$$\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\xi_i)} - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\nu_i)} < \sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\xi_i)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Умножая каждое неравенство на Δt_i и суммируя по i, получим:

$$\sum \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\xi_i)}\Delta t_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum \Delta t_i < \sum \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\nu_i)}\Delta t_i <$$
$$< \sum \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\xi_i)}\Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum \Delta t_i.$$

Или, что то же самое:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\xi_i)}\, \Delta t_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, при достаточно мелких разбиениях $[a, b]$ длина ломаной мало отличается от некоторой интегральной суммы для интеграла

$$I = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt.$$

С другой стороны, этот интеграл существует, так как подинтегральная функция непрерывна. Значит, если разбиение достаточно мелкое, то

$$\left| I - \sum \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \chi'^2(\xi_i)}\Delta t_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь докажем, что число I является длиной нашей кривой:

$$\left|I-\sum\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|\right| =$$
$$= \left|I-\sum\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\xi_i)}\Delta t_i+\sum\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\xi_i)}\Delta t_i-\sum\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|\right| \leq$$
$$\leq \left|I-\sum\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\xi_i)}\Delta t_i\right|+\left|\sum\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\chi'^2(\xi_i)}\Delta t_i-\sum\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание. Плоская кривая часто является графиком явно заданной функции $y = f(x)$. Принимая в качестве параметра x, можем перейти к параметрическому заданию: $x = t$, $y = f(t)$. Получаем для этого случая формулу:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Наконец, если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\quad \varphi \in [\alpha, \beta]$, то в качестве параметра обычно принимают полярный угол φ. В декартовой системе координат, согласованной с данной полярной, параметрические уравнения кривой имеют вид:

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi, \quad y=\rho(\varphi)\sin\varphi.$$

Вычислим её длину:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)}\,d\varphi=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^2+(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi)^2}\,d\varphi=$$
$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi.$$

Пример 7. Найти длину участка кривой $y=\ln(1-x^2)$, если $0\leq x\leq 0{,}5$.

Решение. Применяем полученную выше формулу:

$$L=\int_0^{0,5}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{0,5}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_0^{0,5}\sqrt{\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx=$$
$$=\int_0^{0,5}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx=\int_0^{0,5}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx=-2\int_0^{0,5}\frac{1}{x^2-1}\,dx-\int_0^{0,5}dx=$$
$$=-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^{0,5}-x\Big|_0^{0,5}=-\left(\ln\frac{1}{3}-\ln 1\right)-0{,}5=\ln 3-0{,}5.$$

7.5.4. Примеры применения интеграла в физике

Наша цель — иллюстрация основной идеи интегрального исчисления. Поэтому мы рассмотрим лишь две простейшие физические задачи.

Задача о работе. Материальная точка движется прямолинейно под действием переменной (по величине) силы. Требуется вычислить работу силы на заданном участке пути. Для определённости будем считать, что точка движется по оси OX из положения $x = a$ в положение $x = b$. Величина силы зависит от положения точки: $f = f(x)$.

Разобьём отрезок $[a, b]$ на n частей точками: $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно точку ξ_i. Допуская некоторую погрешность, будем считать, что сила $f(x)$ не меняется на $[x_{i-1}, x_i]$ и равна $f(\xi_i)$. Работа постоянной силы на отрезке длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ равна, как известно, $f(\xi_i)\Delta x_i$. Поэтому для искомой работы A получаем приближённое равенство:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ошибка этого равенства тем меньше, чем мельче разбиение. Если мелкость разбиения стремится к нулю, то и ошибка стремится к нулю. Выражение в правой части равенства — интегральная сумма, которая при измельчении разбиения стремится к интегралу. Окончательно получим:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

На практике используется также и другая, упрощённая схема применения интеграла. Неизвестная величина (в нашей задаче — работа) связывается с некоторой функцией, определённой на отрезке $[a, b]$: $A = A(x)$, $x \in [a, b]$. Приращение функции, соответствующее приращению переменной $\Delta x = dx$, вычисляется приближённо, пренебрегая бесконечно малыми слагаемыми более высоких, чем Δx, порядков. Фактически, находится дифференциал: $dA = f(x)\,dx$ — работа силы на «элементарном» отрезке пути dx. После этого искомая величина находится с помощью интеграла: $A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)\,dx.$

Итак: вместо разбиения отрезка $[a, b]$ на Δx_i — «элементарный» отрезок dx; вместо приращения функции (слагаемого в интегральной сумме) — дифференциал; вместо суммы — интеграл.

Задача о массе стержня. Пусть плотность тонкого стержня длины L есть функция $\rho = \rho(x)$, где x — расстояние точки от одного из концов стержня. Разобьём весь стержень точками $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n = L$.

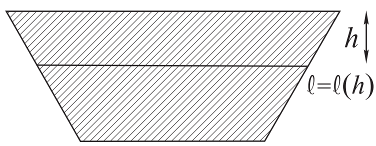
На каждом участке $[x_{i-1}, x_i]$ выбираем произвольно точку ξ_i. Так как мы будем рассматривать мелкие разбиения, то плотность на этом участке изменяется незначительно. Можно приближённо считать, что она постоянна и равна плотности в точке ξ_i. Для массы i-го участка получим тогда приближённое равенство: $\Delta m_i \approx \rho(\xi_i)\Delta x_i$. Находим массу всего стержня: $M = \sum \Delta m_i \approx \sum \rho(\xi_i)\Delta x_i$. В правой части — интегральная сумма. Переходя к пределу по всё более мелким разбиениям, получим точную формулу для массы стержня: $M = \int\limits_0^L \rho(x)\,dx$.

Допустимо и более простое рассуждение. Рассмотрим «элемент» стержня dx, находящийся на расстоянии x от его левого конца. Находим его массу, пренебрегая неоднородностью на малом участке: $dm = \rho(x)\,dx$. Масса всего стержня равна интегралу:

$$M = \int\limits_0^L \rho(x)\,dx.$$

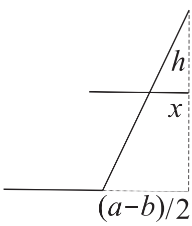
Замечание. В рассмотренных примерах важны не итоговые формулы для работы и массы, а ***метод***, использующий основные идеи интегрального исчисления. Этот метод можно применить к очень многим задачам.

Пример 8. Плотина имеет форму равнобочной трапеции с высотой $H = 20$ м и основаниями $a = 400$ м, $b = 100$ м. Верхнее, более длинное основание лежит на уровне поверхности воды. Найти силу давления воды на плотину.



Решение. Из физики известно, что давление воды на глубине h равно $\rho g h$, где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения. Если на этой глубине расположить пластину площадью S, то сила давления на неё будет равна $\rho g h S$.

Разбивая плотину горизонтальными прямыми, рассмотрим «элементарную площадку», расположенную на глубине h. Можно считать, что это прямоугольник высотой dh. Чтобы найти его длину ℓ, используем подобие треугольников (см. рисунок): $\dfrac{a-b}{2H} = \dfrac{x}{h}$.



Отсюда $x = \dfrac{h(a-b)}{2H}$, $\ell = a - 2x = a - \dfrac{h(a-b)}{H}$. Следовательно, площадь «элементарной площадки» равна $dS = \left(a - \dfrac{h(a-b)}{H}\right) dh$, а давление воды на неё $dP = \rho g h \left(a - \dfrac{h(a-b)}{H}\right) dh$. Давление на всю плотину:

$P = \rho g \int\limits_0^H \left(ha - \dfrac{h^2(a-b)}{H} \right) dh$. Вычислим интеграл и подставим числовые данные: $\rho = 1000\,\text{кг/м}^3, g = 10\,\text{м/сек}^2,\ H = 20\,\text{м},\ a = 400\,\text{м},\ b = 100\,\text{м}$. Получим:

$$P = \rho g \left(\frac{h^2}{2} a - \frac{h^3(a-b)}{3H} \right) \Bigg|_0^H = \rho g \left(\frac{H^2 a}{2} - \frac{H^2(a-b)}{3} \right) = \rho g H^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{a-b}{3} \right) =$$

$$= \rho g H^2 \cdot \frac{a+2b}{6} = 1000(\text{кг/м}^3) \cdot 10(\text{м/сек}^2) \cdot 400(\text{м}^2) \cdot 100(\text{м}) =$$

$$= 4 \cdot 10^8 (\text{кгм/сек}^2) = 4 \cdot 10^8 (\text{Н}).$$

7.6. Задачи с решениями

1. Вычислить $\int\limits_5^8 \dfrac{dx}{\sqrt{9-x}}$.

Решение. Вычислим неопределённый интеграл (т. е. найдём первообразную), а затем применим формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_5^8 \frac{dx}{\sqrt{9-x}} = -\int\limits_5^8 \frac{d(9-x)}{\sqrt{9-x}} = -\int\limits_5^8 (9-x)^{-\frac{1}{2}}\, d(9-x) =$$

$$= -2\,(9-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_5^8 = -2(\sqrt{9-8} - \sqrt{9-5}) = 2.$$

2. Вычислить $\int\limits_1^4 \dfrac{t\,dt}{\sqrt{4t+2}}$.

Решение. Для вычисления интеграла сделаем замену переменной:

$$\int\limits_1^4 \frac{t\,dt}{\sqrt{4t+2}} \left| \begin{array}{lll} 4t+2 = u; & dt = \dfrac{1}{4} du; & t = 1 \Rightarrow u = 6; \\ t = \dfrac{1}{4}(u-2); & & t = 4 \Rightarrow u = 18 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_6^{18} \frac{\frac{1}{4}(u-2) \cdot \frac{1}{4}\, du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{16} \int\limits_6^{18} \frac{u-2}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{16} \int\limits_6^{18} \left(\sqrt{u} - \frac{2}{\sqrt{u}} \right) du =$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg|_6^{18} = \frac{\sqrt{u}}{16} \left(\frac{2}{3} u - 4 \right) \Bigg|_6^{18} = \frac{\sqrt{18}}{16}(12-4) - \frac{\sqrt{6}}{16}(4-4) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

3. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx.$

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx \left|\begin{array}{l} u=x, \quad dv=\sin x\,dx, \\ du=dx, \quad v=-\cos x \end{array}\right| = -x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}(-\cos x)\,dx =$$

$$= -\pi\cos\pi - (\pi\cos(-\pi)) + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = -2\pi\cos\pi = 2\pi.$$

4. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-3}^{3}\frac{x^2}{\sqrt{1+|x|}}\,dx.$

Решение. Чтобы раскрыть модуль, можно представить интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_{-3}^{3}\frac{x^2}{\sqrt{1+|x|}}\,dx = \int\limits_{-3}^{0}\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int\limits_{0}^{3}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx.$$

Но проще — использовать то, что подинтегральная функция — чётная, поэтому (теорема 7)

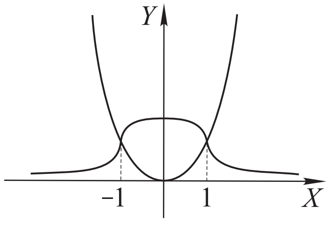
$$\int\limits_{-3}^{3}\frac{x^2}{\sqrt{1+|x|}}\,dx = 2\int\limits_{0}^{3}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx \left|\begin{array}{ll} \sqrt{1+x}=t, \quad dx=2t\,dt, & x=0\Rightarrow t=1, \\ x=t^2-1, & x=3\Rightarrow t=2 \end{array}\right| =$$

$$= 2\int\limits_{1}^{2}\frac{(t^2-1)^2\cdot 2t\,dt}{t} = 4\int\limits_{1}^{2}(t^4-2t^2+1)\,dt = 4\left(\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= 4\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}+2-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right) = 4\cdot\frac{96-80+30-3+10-15}{15} = \frac{4\cdot 38}{15} = \frac{152}{15}.$$

5. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{x^2}{2}, \quad y=\frac{1}{x^2+1}.$$



Решение. Сделаем схематический чертёж. Первая линия — парабола. Вторая линия симметрична относительно оси OY (так как является графиком чётной функции). При $x>0$ функция убывает, стремится к 0 при $x\to\infty$. Найдём точки пересечения графиков:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ y = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

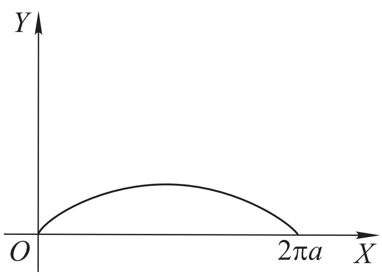
Решая биквадратное уравнение, находим: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Площадь ищем как разность двух интегралов:

$$S = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad a > 0.$$

Решение. Циклоида задана параметрически. Сделаем схематический чертёж. Значению $t = 0$ соответствует начало координат: $x = 0$, $y = 0$. При возрастании t абсцисса x возрастает (так как её производная $x'_t = a(1 - \cos t)$ всегда положительна), а ордината y при $t = 2\pi$ снова становится равной нулю:



$$y(2\pi) = a(1 - \cos 2\pi) = 0.$$

Этот участок циклоиды, соответствующий значениям параметра $0 \le t \le 2\pi$, и называется аркой.

Затруднительно вывести явную зависимость $y = y(x)$, поэтому интеграл для вычисления площади $S = \int\limits_0^{2\pi a} y\,dx$ преобразуем в интеграл по переменной t:

$$y = a(1 - \cos t), \quad dx = x'(t)\,dt = a(1 - \cos t)\,dt, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

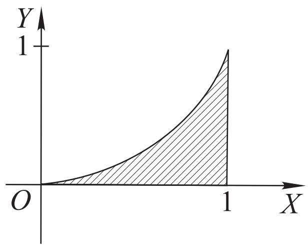
Получим:

$$S = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= a^2 \left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt \right) = a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} \right) =$$

$$= a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

7. Найти объём тела, полученного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x^{\frac{3}{2}},\ y = 0,\ x = 1.$



Решение. Сделаем чертёж. Тело вращения представляет собой цилиндр (его радиус основания и высота равны 1), из которого вырезана внутренняя часть, полученная при вращении кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$. Поэтому объём ищем в виде разности: $V = V_1 - V_2$. Здесь V_1 — объём цилиндра, $V_1 = \pi r^2 h = \pi$. Объём V_2 ищем по формуле, выведенной в 7.5.2, учитывая, что вращение проводится вокруг оси OY: $V_2 = \pi \int\limits_0^1 x^2(y)\,dy$. Так как $x(y) = y^{\frac{2}{3}}$, то получаем: $V_2 = \pi \int\limits_0^1 y^{\frac{4}{3}}\,dy = \frac{3}{7}\pi\, y^{\frac{7}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{7}$. Окончательно находим:

$$V = V_1 - V_2 = \pi - \frac{3\pi}{7} = \frac{4\pi}{7}.$$

8. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Если кривая задана в полярной системе координат, то её длина L вычисляется по формуле: $L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$. В случае кардиоиды $0 \le \varphi \le 2\pi$. Вычисляем интеграл:

$$L = \int\limits_0^{2\pi} a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + (-\sin\varphi)^2}\,d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\,d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi.$$

Здесь нельзя написать, что $\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$, так как под интегралом — положительная функция, а $\cos\frac{\varphi}{2}$ отрицателен при $\pi < \varphi \le 2\pi$. Поэтому представим интеграл в виде суммы двух слагаемых:

$$L = 2a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi + 2a\int\limits_{\pi}^{2\pi} \left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4a - 0 - 0 + 4a = 8a.$$

9. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 10 м/сек. На какую высоту оно поднимется? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Под действием силы тяжести скорость тела изменяется и зависит от времени t по закону: $V(t) = V_0 - gt$, где g — ускорение свободного падения, V_0 — начальная скорость. Найдём T — время движения до остановки:

$$V(T) = V_0 - gT = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{V_0}{g}.$$

Итак, время движения известно. Но пройденный путь мы умеем находить только при ***постоянной*** скорости, по формуле $S = Vt$. Чтобы её применить, разобьём отрезок времени $[0, T]$ на такие малые отрезки Δt_i, что скорость на каждом из них меняется незначительно. Будем считать (допуская некоторую неточность), что скорость на отрезке времени Δt_i постоянна и равна $V(\xi_i)$ — скорости в один из моментов ξ_i. Тогда за время Δt_i тело пройдёт путь $\Delta S_i = V(\xi_i)\Delta t_i$. За всё время T пройденный путь составит $S = \sum \Delta S_i \approx \sum V(\xi_i)\Delta t_i$. Неограниченно измельчая разбиения, получим точное равенство:

$$S = \int\limits_0^T V(t)\,dt = \int\limits_0^{V_0/g} (V_0 - gt)\,dt = \left(V_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)\Bigg|_0^{V_0/g} = \frac{V_0^2}{g} - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Если $V_0 = 10$ м/сек, то $S \approx \dfrac{100}{2 \cdot 10} = 5$ м.

7.7. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_1^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2 - 9}$; в) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$; г) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$.

2. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$; б) $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$; в) $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,dx$; г) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

3. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^2 xe^{-2x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$; г) $\displaystyle\int\limits_1^e (1 + \ln x)^2\,dx$.

4. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^5 + x^3}{x^4 + x^2 + 1}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{9x^2 + 6|x| + 1}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью OY.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x + y = 5$, $xy = 4$.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$3x + 2y - 6 = 0,\ \ 3x^2 - 2y = 0, \quad y = 0.$$

8. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$ и полярной осью.

10. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

13. Найти объём тела, полученного при вращении вокруг оси OX:

а) одной волны синусоиды $y = \sin x$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;

б) фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

14. Найти объём тела, полученного при вращении вокруг оси OY:

а) фигуры, ограниченной линиями $x + y^2 - 4 = 0$, $x = 0$;

б) фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$.

15. Найти длину одного витка винтовой линии:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt\ (0 \le t \le 2\pi).$$

16. Найти длину линии, заданной уравнениями $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, если параметр t изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{4}$.

17. Найти длину участка параболы $x^2 = 2y$ от вершины до точки $(\sqrt{2}, 1)$.

18. Найти длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x$, если $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

19. Найти длину линии, заданной уравнением

а) $\rho = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$; б) $\rho = e^{2\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$.

20. С какой силой тонкий однородный стержень длины L и массы M притягивает материальную точку массы m, лежащую на продолжении линии стержня на расстоянии d от одного из его концов? По закону Ньютона, сила притяжения двух точечных масс m_1, m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, равна $F = G \cdot \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, где G – гравитационная постоянная.

21. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из резервуара, имеющего форму цилиндра высотой $H = 4$ м и радиусом основания $R = 2$ м.

22. Найти силу давления воды на прямоугольные ворота шлюза, имеющие 20 м в ширину и 16 м в глубину, если шлюз заполнен водой.

23. Определить массу шара радиуса R, если плотность в каждой его точке пропорциональна расстоянию от этой точки до центра шара.

24. Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси L называется произведение массы на квадрат расстояния от точки до оси. Момент инерции системы точек определяется как сумма моментов инерции всех точек.

а) Вычислить момент инерции квадратной пластины относительно диагонали. Сторона квадрата a, пластина однородная, её масса равна M.

б) Вычислить момент инерции однородной полуокружности массы M, радиуса R относительно её диаметра.

7.8. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Вычислить $\int\limits_1^4 \left(3\sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt{x}}\right) dx$.

2. Сколько функций из приведённого ниже списка интегрируемы по Риману на отрезке $[0, 5]$?

$$y = \cos(10x - 1), \qquad y = \frac{x+2}{x-1}, \qquad y = \frac{\ln x}{x+2}, \qquad y = e^{-x^2}.$$

3. Вычислить $\int\limits_0^3 3x\sqrt{x^2 + 16}\, dx$.

4. Найти значение производной $f'(4)$, если $f(x) = \int\limits_1^x \dfrac{t-1}{t+1}\, dt$.

5. Верхней суммой Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется интегральная сумма $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$, в которой:

1) точки ξ_i выбираются на правых концах отрезков $[x_{i-1}, x_i]$;

2) $f(\xi_i)$ является наибольшим значением $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$;

3) длины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ равны между собой.

Указать номер правильного ответа.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^4 + 5, \quad y = 7 - x^4.$$

ГЛАВА 8

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

8.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Мы рассматривали определённый интеграл Римана от функции $f(x)$ по ***конечному*** отрезку $[a, b]$. Здесь будет дано важное обобщение — познакомимся с интегралами вида $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

8.1.1. Определение и свойства

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на бесконечном промежутке $[a, \infty)$. Тогда для любого $t \geq a$ она, конечно, непрерывна на отрезке $[a, t]$. Значит, существует $\int\limits_a^t f(x)\,dx$. ***Несобственным интегралом*** от функции $f(x)$ по промежутку $[a, \infty)$ называется предел

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_a^t f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл ***сходится***. Если же предел бесконечен или вообще не существует, то несобственный интеграл ***расходится***, т. е. не имеет никакого числового значения.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int\limits_t^b f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ определяется как сумма:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx,$$

причём число a можно выбрать произвольно. Интеграл в левой части равенства называется сходящимся, если сходятся оба интеграла справа. Легко заметить (см. свойство 1 ниже), что от выбора числа a не зависит ни сходимость или расходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, ни его числовое значение (в случае, если он сходится).

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$. Для его вычисления возьмём любое число, например $a = 0$, и представим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}.$$

Вычислим один из интегралов справа:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{0}^{t} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{t\to\infty} \ln(x^2+1)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} \ln(t^2+1) = \infty.$$

Интеграл расходится. Значит, расходится и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

Заметим, что было бы ***неверным*** такое вычисление:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{-t}^{t} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{-t}^{t} = \lim 0 = 0.$$

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, где α — некоторое число. Вычисляем, используя определение:

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{1}^{t} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Bigg|_1^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1; \\ \infty, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

В случае $\alpha = 1$ требуется отдельное вычисление:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\ln|t| = \infty.$$

Итак, мы получили:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\ \text{сходится} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Этот результат нам много раз пригодится в будущем.

Рассмотрим некоторые свойства несобственных интегралов.

Свойство 1. Если $a < b$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, \infty)$, то интегралы

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx, \quad \int\limits_b^\infty f(x)\,dx$$

или оба сходятся, или оба расходятся.

Доказательство. Воспользуемся аддитивностью определённого интеграла:

$$\int\limits_a^t f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^t f(x)\,dx.$$

Так как $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ – постоянное число, то $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)\,dx$ существует и конечен тогда и только тогда, когда существует и конечен $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_b^t f(x)\,dx$:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty}\int\limits_b^t f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

Свойство 1 показывает, что сходимость или расходимость $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ определяется поведением функции при $x \to \infty$. Ни изменение величины a, ни свойства $f(x)$ на любом конечном отрезке $[a, b]$ не влияют на сходимость (при условии, что функция непрерывна).

Свойство 2. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходятся, то сходится и $\int\limits_a^\infty (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$, причём

$$\int\limits_a^\infty (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^\infty f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^\infty g(x)\,dx.$$

Доказательство следует из определения и свойств предела функции.

Теорема 1 ***(критерий Коши).***

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx \text{ сходится} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N: \quad \forall t_1, t_2 > N \quad \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

«$\Rightarrow$». Пусть $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, т. е. существует конечный предел $I = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_a^t f(x)\,dx$. По определению, это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N: \;\; \forall t > N \quad \left| I - \int\limits_a^t f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Возьмём $\varepsilon > 0$ и найдём число N, для которого $\forall t > N$ $\left| I - \int\limits_a^t f(x)\,dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $t_1, t_2 > N$. Тогда

$$\left| \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_a^{t_2} f(x)\,dx - \int\limits_a^{t_1} f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_a^{t_2} f(x)\,dx - I + I - \int\limits_a^{t_1} f(x)\,dx \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_a^{t_2} f(x)\,dx - I \right| + \left| I - \int\limits_a^{t_1} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

«$\Leftarrow$». Возьмём последовательность $\{b_n\}$: $\lim b_n = \infty$. Обозначим $C_n = \int\limits_a^{b_n} f(x)\,dx$. Тогда

$$|C_{n_1} - C_{n_2}| = \left| \int\limits_a^{b_{n_1}} f(x)\,dx - \int\limits_a^{b_{n_2}} f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_{b_{n_2}}^{b_{n_1}} f(x)\,dx \right|.$$

Используя условие теоремы, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall\, n_1, n_2 > N \quad |C_{n_1} - C_{n_2}| < \varepsilon.$$

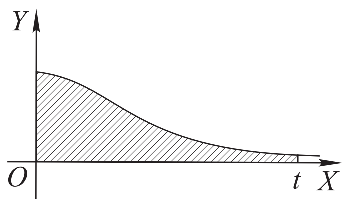
Напомним: последовательность с таким свойством называется фундаментальной. По критерию Коши для числовых последовательностей (теорема 9 из 1.4.4), она сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim C_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{b_n} f(x)\,dx = I.$$

Итак, для функции $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ доказано: если $\lim b_n = \infty$, то $\lim F(b_n) = I$. По определению предела (на языке последовательностей) это и означает, что

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_a^t f(x)\,dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx = I.$$

Замечание. Для несобственного интеграла, как и для определённого интеграла Римана, можно рассматривать геометрическую интерпретацию. До сих пор мы не говорили о площади неограниченной, «уходящей в бесконечность» фигуры. Но это понятие можно ввести, переходя к неограниченной фигуре с помощью предельного перехода.



Пример 3. Рассмотрим фигуру, лежащую между графиком функции $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ и осями координат. «Площадью» S этой неограниченной фигуры называется предел, к которому стремятся площади фигур, ограниченных указанными линиями, а также прямой $x = t$. Другими словами, $S = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \int\limits_0^\infty \dfrac{1}{x^2+1}\,dx$. В нашем случае интеграл сходится и площадь существует:

$$S = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

Если интеграл расходится, то говорят, что данная фигура не имеет площади (или имеет бесконечную площадь, если предел равен ∞).

8.1.2. Признаки сходимости несобственных интегралов от положительных функций

Здесь рассматриваются функции $f(x)$ такие, что $f(x) \geq 0$ (для любого x из рассматриваемого промежутка). Сначала получим один вспомогательный результат.

Лемма. Пусть $f(x)$ непрерывна и $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a, \infty)$. Интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда множество интегралов $\int\limits_a^t f(x)\,dx$ ограничено, т. е. $\exists M: \ \forall t \geq a \quad \int\limits_a^t f(x)\,dx < M$.

Доказательство. Заметим, что если $t_1 < t_2$, то $\int\limits_a^{t_1} f(x)\,dx \leq \int\limits_a^{t_2} f(x)\,dx$, т. е. функция $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ — возрастающая.

Если $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, т. е. существует конечный $M = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_a^t f(x)\,dx$, то ясно, что $\int\limits_a^t f(x)\,dx \leq M$ для любого t.

Если интегралы $\int\limits_a^t f(x)\,dx$ ограничены, то функция $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ возрастает и ограничена. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_a^t f(x)\,dx$, т. е. интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Лемма доказана.

Теорема 2 ***(признак сравнения).*** Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на $[a, \infty)$, причём $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда если $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то и $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится.

Если же $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится. Тогда, по лемме,

$$\exists M:\ \forall t \quad \int\limits_a^t g(x)\,dx < M.$$

Но из условия $f(x) \le g(x)$ следует, что $\int\limits_a^t f(x)\,dx \le \int\limits_a^t g(x)\,dx$. Значит, для всех t $\int\limits_a^t f(x)\,dx < M$. Теперь из леммы следует, что $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится.

Второе утверждение очевидно: если $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится, то $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходиться не может — иначе получим противоречие с первой частью теоремы.

Пример 4. Сходится ли интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^3}\,dx$?

Решение. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$. Он сходится — это установлено в примере 2. Так как $0 \le \frac{\cos^2 x}{x^3} \le \frac{1}{x^3}$ $(\forall x \ge 1)$, то, по теореме 2, рассматриваемый интеграл тоже сходится.

Теорема 3 ***(предельный признак сравнения).*** Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на $[a,\infty)$, причём $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$. Если существует

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \quad A \ne 0,\ A \ne \infty,$$

то или оба интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходятся, или оба расходятся.

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \quad \forall x > N \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

Из условия ясно, что $A > 0$. Возьмём ε: $0 < \varepsilon < A$, подберём для него

N с указанным свойством. Проведём преобразования (для $x > N$):

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - A < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; g(x)(A-\varepsilon) < f(x) < g(x)(A+\varepsilon).$$

Допустим теперь, что $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Используя левую часть последнего неравенства и теорему 2, получаем, что $\int\limits_a^\infty g(x)(A-\varepsilon)\,dx$ сходится. Поэтому сходится и $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$.

Аналогично, если $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится, то расходится $\int\limits_a^\infty g(x)(A+\varepsilon)\,dx$, а поэтому и $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$. Теорема доказана.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_3^\infty \frac{x^4 - 2x + 7}{x^5 + 1}\,dx$.

Решение. Подберём для функции $f(x) = \frac{x^4 - 2x + 7}{x^5 + 1}$ такую функцию $g(x)$, чтобы предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ был конечным ненулевым числом и чтобы интеграл $\int\limits_3^\infty g(x)\,dx$ было несложно исследовать. Удобно взять $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 7x}{x^5 + 1} = 1.$$

Интеграл $\int\limits_3^\infty \frac{1}{x}\,dx$ расходится (см. пример 2). Значит, по теореме 3, $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx$ тоже расходится.

Замечание. Для применения признаков сравнения нужен запас интегралов, сходимость или расходимость которых уже установлена. Удобно использовать для этой цели интегралы $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ при различных α, рассмотренные в примере 2. Именно так мы и поступили в примерах 4, 5.

8.1.3. Абсолютная сходимость

Здесь мы откажемся от требования $f(x) \geq 0$. Но вместе с интегралом $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ будем рассматривать интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, в котором подинтегральная функция положительна.

Теорема 4. Если $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то и $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится.

Доказательство. Установим сначала одно свойство определённого интеграла.

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ при условии, что эти интегралы существуют. Действительно, неравенство $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ выполнено для всех x. По свойству интегрирования неравенств

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx,$$

что и означает: $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Для доказательства теоремы применим критерий Коши:

$$\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall t_1, t_2\ (t_2>t_1>N)\ \Rightarrow\ \int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Но $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x)|\,dx$. Поэтому получаем:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall t_1, t_2\ \ (t_2>t_1>N)\ \Rightarrow\ \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Опять применяя критерий Коши, видим, что $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Теорема доказана.

Если $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ ***сходится абсолютно***. Если же $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, а $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ ***сходится условно***.

Пример 6. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится условно.

Доказательство. Проверим сначала, что этот интеграл сходится. Применим для этого формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{x}, & dv = \sin x\,dx, \\ du = -\dfrac{1}{x^2}\,dx, & v = -\cos x \end{array} \right| = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\right) - \left(-\frac{\cos 1}{1}\right) - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Обратите внимание: подстановку бесконечного предела выполняем с помощью предельного перехода при $x \to \infty$. Предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$, очевидно, равен 0, так как ограниченная функция $\cos x$ умножается на бесконечно малую $\frac{1}{x}$. Оставшийся интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ сходится, причём абсолютно, так как $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится и можно применить признак сравнения.

Итак, $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$.

Воспользуемся очевидным неравенством

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \left|\frac{\sin^2 x}{x}\right|$$

и докажем, что интеграл $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin^2 x}{x}\right| dx$ расходится. Тогда, по признаку сравнения, получим, что и $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ тоже расходится. Модуль у функции $\frac{\sin^2 x}{x}$ можно не писать — при $x \geq 1$ она неотрицательна.

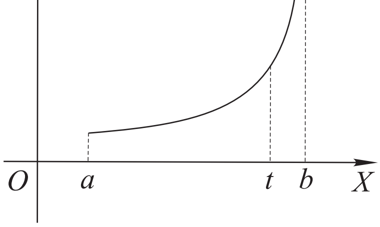
$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int\limits_1^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{2x}\,dx - \int\limits_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,dx.$$

В точности так же, как и для $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$, можно доказать, что $\int\limits_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ сходится. А вот $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{2x}\,dx$ — очевидно, расходится. Значит, интеграл в левой части расходится (иначе после переноса слагаемого получилось бы, что расходящийся интеграл равен сумме двух сходящихся, а это невозможно).

Итак, $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится. Поэтому и $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расходится, а $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится условно.

8.2. Интегралы от неограниченных функций

Изучая свойства определённого интеграла Римана, мы доказали, что любая интегрируемая функция ограничена (см. 7.1). Оказывается, можно расширить понятие интеграла, можно научиться интегрировать и некоторые неограниченные функции. Причём делается это с помощью предельного перехода, очень похожим способом на только что рассмотренный способ определения интеграла по бесконечному промежутку.



Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и не ограничена в окрестности точки b . Например, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$, как на рисунке. Возьмём $t \in [a,b)$. Тогда на отрезке $[a,t]$ функция непрерывна, а значит существует интеграл $\int\limits_a^t f(x)\,dx$. ***Несобственным***

интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется предел

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\,dx.$$

Подчеркнём: это определение нового понятия. В обычном смысле интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от такой функции не существует. Указанный предел тоже может не существовать или быть бесконечным. Тогда несобственный интеграл называется ***расходящимся***. Более интересен случай, когда интеграл сходится, т. е. предел существует и конечен.

Если функция $f(x)$ имеет ***особенность*** не в точке b, а в точке a (т. е. не ограничена в её окрестности), то несобственный интеграл определяется аналогично:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Наконец, если $f(x)$ имеет особенность во внутренней точке c отрезка $[a, b]$, то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

и сходимость $\int_a^b f(x)\,dx$ означает сходимость каждого интеграла в правой части.

Пример 7. Вычислить $\int_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

Решение. Есть опасность не заметить, что в окрестности точки $x = 3$ функция $\frac{1}{(x-3)^2}$ не ограничена, и вычислять интеграл как обычно, по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2} = \int_0^5 (x-3)^{-2}d(x-3) = -\frac{1}{x-3}\Big|_0^5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}.$$

В этом примере ошибка сразу видна: интеграл от положительной функции не может быть отрицательным.

Теперь приведём правильное решение. Так как $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ не ограничена в окрестности точки $x = 3$, то интеграл — несобственный. По определению:

$$\int\limits_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2} = \int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int\limits_3^5 \frac{dx}{(x-3)^2}.$$

Рассмотрим, например, первое слагаемое:

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{t\to 3} \int\limits_0^t \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{t\to 3} \left(-\frac{1}{x-3}\right)\Big|_0^t = \lim_{t\to 3} \left(-\frac{1}{t-3} - \frac{1}{3}\right) = \infty.$$

Интеграл расходится. Значит, и $\int\limits_0^5 \dfrac{dx}{(x-3)^2}$ расходится.

Обратим внимание на то обстоятельство, что определения двух типов несобственных интегралов очень похожи. Полностью аналогичны и свойства, которыми эти интегралы обладают. Используя эту аналогию, можно даже определение дать для обоих типов несобственных интегралов одновременно. Несобственным интегралом с особенностью в точке $x = b$ называется предел:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b} \int\limits_a^t f(x)\,dx,$$

где либо $b = \infty$, либо $f(x)$ неограничена в окрестности b. Впрочем, обычный («собственный») интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ тоже удовлетворяет этому равенству.

Повторим формулировки наиболее важных теорем для случая интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, с особенностью в точке b. Доказательства не приводим — они такие же, как для $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Теорема 1′ ***(критерий Коши).*** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in [a,b) : \forall t_1, t_2 \quad N < t_1 < t_2 < b \Rightarrow \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема 2′ ***(признак сравнения).*** Если $f(x) \geq g(x) \geq 0$ в окрестности точки b, то из сходимости $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Теорема 3′ ***(предельный признак сравнения).*** Если $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ в окрестности точки b, причём существует $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, $A \neq 0$, $A \neq \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ или оба сходятся, или оба расходятся.

Чтобы использовать признаки сравнения для исследования сходимости несобственных интегралов, нужны уже изученные интегралы — чтобы было, с чем сравнивать. Удобно сравнивать с интегралами вида $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$, где α — некоторое действительное число. Рассмотрим такие интегралы подробно.

Пример 8. Исследовать сходимость интегралов $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. Действуем по определению:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0} \int\limits_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ нужно вычислить отдельно: $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{t\to 0} \int\limits_t^1 \dfrac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{t\to 0} \ln|x|\Big|_t^1 =$ $= \lim\limits_{t\to 0}(-\ln t) = \infty$. Итак, $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится $\Leftrightarrow \quad \alpha < 1$.

Замечание. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ непрерывна в любой точке $x \neq 0$. Поэтому второй предел интеграла на сходимость никак не влияет: интегралы $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$, $\int\limits_0^5 \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$, $\int\limits_{-3}^0 \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Их сходимость связана только со свойствами функции $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ — сравните это со свойством 1 из 8.1.1. Конечно, если они сходятся, то числовые значения могут быть различными.

Пример 8 можно расширить, рассматривая интеграл $\int\limits_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,dx$. Ясно, что полученный результат справедлив и для таких интегралов:

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,dx \text{ сходится} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1.$$

Пример 9. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^2 \frac{x^3}{\sqrt[5]{4-x^2}}\,dx$.

Решение. Подинтегральная функция имеет особенность в точке $x = 2$, её можно записать в виде:

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[5]{4-x^2}} = \frac{x^3}{\sqrt[5]{2+x}\cdot\sqrt[5]{2-x}} = \frac{x^3}{\sqrt[5]{2+x}}\cdot\frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{5}}}.$$

Теперь ясно, что нужно рассмотреть $\int\limits_0^2 \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{5}}}\,dx$ (он сходится, так как $\alpha = \frac{1}{5} < 1$) и применить предельный признак сравнения:

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to2}\frac{x^3\cdot\sqrt[5]{2-x}}{\sqrt[5]{4-x^2}} = \lim_{x\to2}\frac{x^3}{\sqrt[5]{2+x}} = \frac{8}{\sqrt[5]{4}}.$$

Предел отношения конечен и не равен 0, поэтому исходный интеграл также сходится.

Пример 10. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{1}{\ln x}\,dx$.

Решение. Заметим, что функция $\frac{1}{\ln x}$ не определена и в точке $x = 0$, и в точке $x = 1$. Однако в окрестности $x = 0$ функция ограничена, причём $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln x} = 0$. Другими словами, в окрестности $x = 0$ функция отличается от непрерывной функции лишь значением в одной точке, а значит, интегрируема по Риману (в обычном, «собственном» смысле). По-другому ведёт себя $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ в окрестности $x = 1$. Здесь она не ограничена: $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{1}{\ln x} = -\infty$. Поэтому наш интеграл — несобственный, с особенностью в точке $x = 1$. Постараемся подобрать число α так, чтобы отношение функций $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha}}$ имело бы при $x \to 1$ конечный, не равный 0 предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\alpha}}{\ln x} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x-1)^{\alpha-1}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \alpha \lim_{x\to 1}(x-1)^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

Лишь при $\alpha = 1$ получается 1. Значит, интегралы $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\ln x}\,dx$ и $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x-1}\,dx$ ведут себя одинаково. Второй интеграл расходится (см. пример 8 и последующее замечание), поэтому расходится и интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\ln x}\,dx$.

Заметим ещё, что функция $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ принимает на интервале $(0,1)$ только отрицательные значения. Тем не менее предельный признак можно применять, рассматривая функцию $-f(x) = \dfrac{-1}{\ln x} \geq 0$.

Приведём, в заключение, более сложный пример вычисления несобственного интеграла.

Пример 11. Доказать, что интеграл Эйлера $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ сходится, и вычислить его.

Решение. Особой точкой для этого интеграла является точка $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\sin x) = -\infty$. Заметим, что функция $\ln(\sin x)$ принимает на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ только отрицательные значения. Поэтому можно применять признаки сравнения, например, к интегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\ln(\sin x))\,dx$. Как и в предыдущем примере, попытаемся сравнить этот интеграл с интегралом $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ при подходящем α (верхний предел роли не играет, можно поставить любое число). Для этого вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(\sin x)}{\dfrac{1}{x^{\alpha}}} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+1}\cdot\cos x}{\alpha\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}}{\alpha} = 0.$$

(Здесь мы сначала применили правило Лопиталя, а затем воспользовались тем, что при $x \to 0$ $\cos x \to 1$, $\dfrac{x}{\sin x} \to 1$.) Так как предел равен 0 при любом $\alpha > 0$, то применить предельный признак сравнения не удаётся. Однако вычисление показывает, что в окрестности точки $x = 0$ $0 < -\ln(\sin x) < \dfrac{1}{x^\alpha}$. Так как при $\alpha < 1$ интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится, то и $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ сходится — по первому признаку сравнения.

Для вычисления интеграла выполним замену переменной:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx \left|\begin{array}{ll} x = 2t, & x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ dx = 2\,dt, & x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right| = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\,\cos t)\,dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt.$$

Первое слагаемое вычисляется очень просто, второе будем переписывать пока без изменений, в интеграле третьего слагаемого сделаем ещё одну замену:

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt \left|\begin{array}{ll} t = \dfrac{\pi}{2} - y, & t = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2}, \\ dt = -dy, & t = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt + 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin y)(-dy) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt + 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y)\,dy.$$

Последние 2 слагаемые можно объединить в один интеграл:

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.$$

Полученное соотношение позволяет нам найти I: $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

8.3. Задачи с решениями

1. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

Решение. На интервале $(0,\infty)$ подинтегральная функция непрерывна, поэтому особенность здесь только одна — бесконечный верхний предел. Действуем по определению:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{t} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{t} \operatorname{arctg} x\, d(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left.\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}\right|_0^t = \lim_{t\to\infty} \frac{(\operatorname{arctg} t)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Замечание. Допускается более простая запись:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^{\infty} \operatorname{arctg} x\, d(\operatorname{arctg} x) = \left.\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}\right|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Изменилась лишь форма записи, смысл не изменился. Обратим внимание: подставлять $x=\infty$ или другую ***особую*** точку можно только с помощью ***предельного перехода***.

2. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. Многочлен x^2+2x+2 не имеет действительных корней. Поэтому особенностями здесь являются только бесконечные пределы. По определению:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = I_1 + I_2.$$

Вычислим сначала I_1:

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} \left| \begin{array}{ll} x+1=y, & x=0 \Rightarrow y=1, \\ dx=dy, & x\to-\infty \Rightarrow y\to-\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y\Big|_{-\infty}^{1} = \frac{\pi}{4} - \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Аналогично вычисляется и I_2:

$$I_2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_1^{\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y\Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$

3. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

Решение. Подинтегральная функция не ограничена при $x \to 0$ и непрерывна в остальных точках отрезка $[0,4]$. Применим формулу интегрирования по частям. Будем пользоваться сокращённой записью, подставляя точку $x=0$ с помощью предельного перехода.

$$\int\limits_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}, & v = 2\sqrt{x} \end{array} \right| = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^4 - 2\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx =$$

$$= 4\ln 4 - 2\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot\ln x - 2\int\limits_0^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Предел вычислим с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x = \langle 0\cdot\infty\rangle = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -2\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0.$$

Оставшийся интеграл легко вычисляется: $\displaystyle\int\limits_0^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^4 = 4.$

В результате получим: $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4\ln 4 - 0 - 2\cdot 4 = 8\ln 2 - 8.$

4. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx.$

Решение. Так как в данном случае первообразная для подинтегральной функции легко находится, то можно не пользоваться признаками сходимости, а выполнить прямое вычисление:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int\limits_1^{\infty} \sqrt{\ln x}\,d(\ln x) = \frac{2}{3}\,(\ln x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\infty} = \frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{3}{2}} = \infty.$$

Другими словами, интеграл расходится.

5. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}}$.

Решение. Подинтегральная функция не ограничена в окрестности точек $x=-1$, $x=2$. Значит, интеграл нужно представить в виде суммы:

$$\int\limits_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}} + \int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}} + \int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}}.$$

Точка 0 здесь взята произвольно, от неё ничего не зависит.

Рассмотрим первое слагаемое: $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}} = -\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x+1}}$.

Сравним последний интеграл (у него подинтегральная функция положительна) с помощью предельного признака сравнения (теорема $3'$) с интегралом $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$, который сходится (см. пример 8 из 8.2):

$$\lim_{x\to-1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x+1}}{(2-x)\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to-1} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{3}.$$

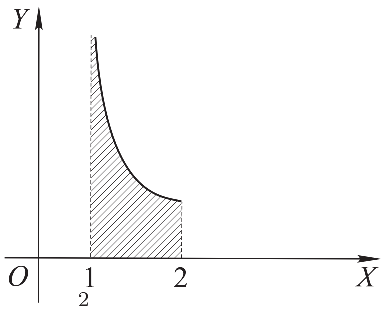
Получилось конечное ненулевое число. Значит, $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}}$ тоже сходится.

Второе слагаемое $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}}$ сравним с интегралом $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x-2}$:

$$\lim_{x\to2} \frac{(x-2)}{(x-2)\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to2} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x-2}$ расходится (см. пример 8), то и $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+1}}$ тоже расходится.

Рассматривать последнее слагаемое не имеет смысла: если хотя бы один из интегралов расходится, значит, расходится и сумма.



6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{x}{2\sqrt{x-1}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

Решение. Сделаем чертёж. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{x}{2\sqrt{x-1}}$. Площадь выражается несобственным интегралом $S = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{2\sqrt{x-1}}\,dx$. Вычислим его:

$$\int_1^2 \frac{x}{2\sqrt{x-1}}\,dx \left| \begin{array}{ll} \sqrt{x-1} = t, & x = 1 \Rightarrow t = 0, \\ x = t^2+1, & x = 2 \Rightarrow t = 1 \\ dx = 2t\,dt, & \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t^2+1}{2} t \cdot 2t\,dt = \int_0^1 (t^2+1)\,dt.$$

После замены переменной интеграл стал собственным. Это может произойти только в том случае, если интеграл сходится. Закончим вычисления:

$$S = \int_0^1 (t^2+1)\,dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Площадь фигуры конечна и равна $\dfrac{4}{3}$.

7. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Заметим, что в окрестности точки $x = 0$ подинтегральная функция не ограничена:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \infty.$$

Значит, интеграл имеет особенности на каждом из концов промежутка интегрирования. Поэтому его следует разбить в сумму двух интегралов (с помощью произвольной точки, например, $x = 1$) и исследовать сходимость каждого слагаемого.

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Сходимость второго слагаемого легко установить с помощью предельного признака сравнения. Возьмём сходящийся интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ (см. пример 2;

здесь $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$) и вычислим предел отношения подинтегральных функций:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Получилось конечное ненулевое число, поэтому $\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx$ сходится.

Интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx$ также изучим с помощью предельного признака.

Как мы знаем, интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (см. пример 8; здесь $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$). Предел отношения подинтегральных функций легко вычисляется:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

(Мы не стали здесь применять правило Лопиталя, так как эквивалентность бесконечно малых $y = x$ и $y = \operatorname{arctg} x$ при $x \to 0$ нам давно известна.) Предельный признак сравнения позволяет заключить, что $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx$ сходится. Значит, сходится и сумма, т. е. интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx$.

8.4. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить несобственные интегралы с бесконечными пределами:

а) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{\infty}\frac{dx}{(x+5)^2}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2-8x+15}$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}xe^{-x}\,dx$; г) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{x^6+5}$.

2. Вычислить несобственные интегралы от неограниченных функций:

а) $\displaystyle\int\limits_5^{10}\frac{1}{\sqrt{(x-5)}}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_3^{5}\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-9}}$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{1}x\ln x\,dx$; г) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{1+\cos 2x}}$.

3. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_2^{\infty}\frac{x+1}{(x^2+8)\sqrt{x-1}}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{x^4+x^2+1}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$; г) $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{x^2-5}$;

д) $\displaystyle\int\limits_0^\infty x\sin x\,dx$; е) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+7}\,dx$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^{-\frac{3}{2}},\ y = 0,\ x = 1$; б) $y = x^{-\frac{1}{2}},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$;

в) $y = e^x,\ y = e^{-x},\ y = 0$; г) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$.

5. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\,dx$;

г) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$; д) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$; е) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2-2x-3}$.

8.5. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-3}^\infty \frac{dx}{(x+5)^3}$.

2. Сколько интегралов среди перечисленных ниже являются несобственными?

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x+2)^2},\quad \int\limits_2^3 \ln(x-2)\,dx,\quad \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-x-6},\quad \int\limits_0^2 \frac{dx}{e^x-5},\quad \int\limits_0^2 (1+\operatorname{tg} x)\,dx.$$

3. Вычислить $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}$.

4. Интеграл $\displaystyle\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt{x}\cdot\cos 5x\,dx}{x^3-1}$ 1) расходится; 2) условно сходится; 3) абсолютно сходится. Указать номер правильного ответа.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^{2x},\ y=0,\ x=0$.

6. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.

ГЛАВА 9

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Мы начинаем изучать математический анализ функций нескольких действительных переменных. Переход от случая одной переменной к случаю двух и большего числа переменных не совершается автоматически. Основные понятия — предел, производная, интеграл — приобретают здесь новые свойства и качества. Тем не менее аналогия с более простым (и уже изученным) случаем нам очень поможет.

Функцией n переменных называется отображение

$$f\colon D \to \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, D — подмножество в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ считается заданной, если задан закон, позволяющий для каждого упорядоченного набора чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ из D находить единственное значение $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

9.1. Множества в n-мерном евклидовом пространстве

9.1.1. Пространство $\mathbb{R}^n$

Областью определения всякой функции n переменных является некоторое множество упорядоченных наборов чисел, т. е. подмножество в $\mathbb{R}^n$. Поэтому начинать изучение таких функций нужно со знакомства с некоторыми видами подмножеств в $\mathbb{R}^n$, с изучения их свойств.

Напомним, прежде всего, известные читателю сведения о самом пространстве $\mathbb{R}^n$. ***Множество*** $\mathbb{R}^n$ состоит из всех упорядоченных наборов действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\},$$

т. е. является декартовым произведением n экземпляров множества $\mathbb{R}$ (см. АГ, раздел 1.1).

После введения операций сложения и умножения на число:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

множество $\mathbb{R}^n$ становится ***линейным пространством*** (АГ, 3.1, 3.3).

Далее, в пространстве $\mathbb{R}^n$ вводится скалярное произведение. Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — элементы $\mathbb{R}^n$, то их скалярным произведением называется число

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Конечномерное линейное пространство со скалярным произведением называется ***евклидовым пространством*** (АГ, 4.5, 7.5.1). Скалярное произведение позволяет ввести понятие ***модуля*** элемента $\mathbb{R}^n$:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

а также понятие ***расстояния*** между элементами $\mathbb{R}^n$:

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

В курсе алгебры (АГ, 4.5) было доказано неравенство Коши – Буняковского:

$$|(x, y)| \ \le \ |x| \cdot |y|,$$

справедливое для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Установим справедливость ещё одного важного неравенства — «неравенства треугольника»:

$$|x + y| \ \le \ |x| + |y| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Для доказательства проведём равносильные преобразования, используя определение модуля и свойства скалярного произведения:

$$|x + y|^2 \le (|x| + |y|)^2,$$
$$(x + y, x + y) \le |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2\,,$$
$$(x, x) + 2(x, y) + (y, y) \le (x, x) + 2\,|x|\,|y| + (y, y).$$

Справедливость последнего соотношения следует из неравенства Коши – Буняковского.

Замечание. При $n = 2$, $n = 3$ имеются хорошие геометрические интерпретации: элементы пространства $\mathbb{R}^2$ удобно изображать точками плоскости, а элементы $\mathbb{R}^3$ — точками трёхмерного пространства (после введения на плоскости и в пространстве прямоугольных декартовых систем координат). Изучая подмножества в $\mathbb{R}^n$, мы всегда будем обращаться к этим наглядным случаям. Очень часто можно разобраться в ситуации при $n = 2$, рассматривая множества на плоскости и определённые на них функции двух переменных, а затем перейти к общему случаю с помощью аналогии.

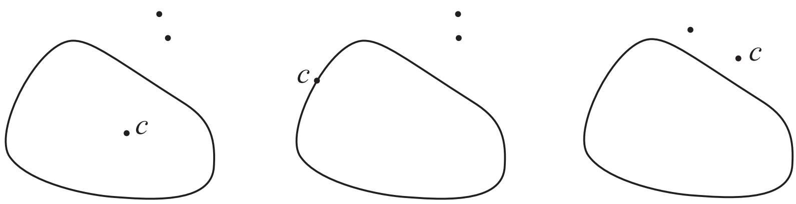
9.1.2. Открытые и замкнутые множества

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. ***Окрестностью*** (или ***ε-окрестностью***) точки a называется множество

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

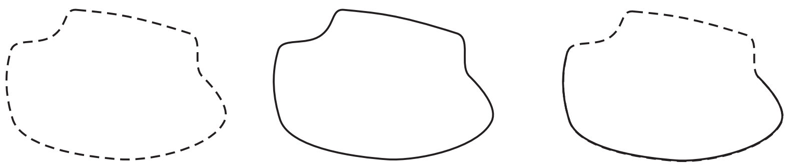
Ясно, что при $n = 1$ это известная нам окрестность точки на числовой прямой — интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. При $n = 2$ это круг с центром a и радиусом ε, не включающий границу, при $n = 3$ — шар с центром a и радиусом ε, не включающий ограничивающую его сферу.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Точка c называется ***внутренней*** точкой множества M, если существует окрестность $U_\varepsilon(c)$, целиком лежащая в M. Если любая $U_\varepsilon(c)$ содержит и точки множества M, и точки, не лежащие в M, то c называется ***граничной*** точкой M. Множество всех граничных точек называется **границей** множества M. Если существует $U_\varepsilon(c)$, которая содержит только одну точку M — саму точку c, то такая точка называется **изолированной**.



c внутренняя *c* граничная *c* изолированная

Множество, все точки которого являются внутренними, называется ***открытым***. Множество, дополнение к которому (т. е. $\mathbb{R}^n \setminus M$) открыто, называется ***замкнутым***.



M открыто *M* замкнуто *M* не является ни открытым, ни замкнутым

Замкнутые множества можно определять также с помощью понятия граничной точки.

Лемма 1. Множество M замкнуто $\Leftrightarrow$ M содержит все свои граничные точки.

Доказательство. «$\Rightarrow$». Пусть M замкнуто, c — граничная точка M. Если $c \notin M$, то c лежит в дополнении к M. Но дополнение открыто, поэтому существует $U_\varepsilon(c)$, целиком лежащая в дополнении. Это противоречит определению граничной точки. Значит, $c \in M$.

«$\Leftarrow$». Пусть M содержит все свои граничные точки. Возьмём $c \notin M$. Тогда c не является граничной, т. е. существует $U_\varepsilon(c)$, не пересекающаяся с M. Значит, любая точка дополнения является в нем внутренней, т. е. дополнение открыто. Следовательно, M замкнуто.

Простые свойства открытых и замкнутых множеств рассмотрены в теореме 1.

Теорема 1. 1) Объединение $\bigcup M_i$ любого числа открытых множеств является открытым множеством.

2) Пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$ конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

3) Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

4) Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство. 1) Возьмём $x \in \bigcup M_i$. Тогда $\exists i:\ x \in M_i$. Но M_i по условию открыто, т. е. $\exists U_\varepsilon(x) : U_\varepsilon(x) \subseteq M_i$. Значит, $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup M_i$. Итак, каждая точка входит в $\bigcup M_i$ вместе со своей окрестностью, т. е. является внутренней, что и требовалось доказать.

2) Возьмём $x \in M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k$. Так как $\forall i\ x \in M_i$, а M_i открыто, то $\exists \varepsilon_i$: $U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq M_i$. Возьмём $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}$. Тогда $U_\varepsilon(x) \subseteq U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq M_i$ для всех i. Значит, $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$, что и требовалось.

Пункты 3), 4) доказываются так же просто.

Замечание. Утверждения пунктов 2) и 4) для бесконечного числа множеств несправедливы. Например, окрестность $U_{\frac{1}{n}}(c)$ — открытое множество при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$. Однако $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_{\frac{1}{n}}(c) = \{c\}$, а множество, состоящее из одной точки, очевидно, не является открытым.

9.1.3. Предел последовательности точек $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим последовательность точек:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots; \quad x_k \in \mathbb{R}^n.$$

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется ***пределом*** последовательности $\{x_k\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 :\ \ \forall k \geq k_0\ \ |x_k - a| < \varepsilon.$$

Используется обозначение: $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, или проще: $a = \lim x_k$. В этом случае говорят, что последовательность ***сходится***. Связь с пределом числовой последовательности не только внешняя, как показывает

Теорема 2 *(о покоординатной сходимости)*. Пусть $\{x_k\}$ — последовательность точек $\mathbb{R}^n$, причём

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}),\ x_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots,$$
$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}), \ldots .$$

Пусть, кроме этого, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда

$$a = \lim_{k\to\infty} x_k \;\Leftrightarrow\; a_i = \lim_{k\to\infty} x_{ki} \;\; (\forall i).$$

Другими словами, $a = \lim x_k$ равносильно тому, что первые координаты точек x_k сходятся к первой координате a, вторые — ко второй и т. д.

Доказательство.

«$\Rightarrow$». Дано: $a = \lim x_k$, т. е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 :\ \forall k \geq k_0\ \ |x_k - a| < \varepsilon$. Но ясно, что

$$|x_{ki} - a_i| \leq \sqrt{(x_{k1} - a_1)^2 + (x_{k2} - a_2)^2 + \ldots + (x_{kn} - a_n)^2} = |x_k - a|\,.$$

Значит, $\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 :\ \ \forall k \geq k_0\ \ \ |x_{ki} - a_i| < \varepsilon$, т. е. $\lim x_{ki} = a_i$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)$, что и требуется.

«$\Leftarrow$». Дано: $\forall i = 1, 2, \ldots, n\ \ \lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = a_i$. Можно записать это так:

$$\forall\varepsilon\ \exists k_{0i} : \forall k \geq k_{0i} \quad |x_{ki} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Возьмём $k_0 = \max\{k_{0i}\}$. Тогда при $k \geq k_0$:

$$|x_k - a| = \sqrt{(x_{k1} - a_1)^2 + \ldots + (x_{kn} - a_n)^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

Итак, $\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 : \forall k \geq k_0\ \ |x_k - a| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Напомним: для изучения неограниченных числовых последовательностей мы дополняли числовую прямую $\mathbb{R}$ символами $+\infty, -\infty$. Пространство $\mathbb{R}^n$ также можно расширить, добавив ***одну*** бесконечно удалённую точку ∞. Её окрестность определяется так:

$$U_\varepsilon(\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Ясно, что $U_\varepsilon(\infty)$ состоит из всех точек $\mathbb{R}^n$, не входящих в замкнутый шар радиуса $\dfrac{1}{\varepsilon}$ с центром в нулевой точке $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Теперь можно рассматривать и бесконечные пределы:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon\ \exists k_0 :\ \forall k \geq k_0 \quad x_k \in U_\varepsilon(\infty).$$

Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется ***ограниченным***, если $\exists r :\ M \subseteq U_r(\overline{0})$, т. е. если оно лежит в некоторой окрестности точки $\overline{0}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если множество её значений ограничено. Как и в случае числовых последовательностей, легко заметить, что всякая сходящаяся последовательность ограничена — почти все её члены лежат в окрестности точки, которая является пределом. Обратное неверно, однако справедлива

Теорема 3 ***(теорема Больцано – Вейерштрасса).*** Любая ограниченная последовательность точек $\mathbb{R}^n$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство проведём для случая $n = 2$. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_k, b_k), ... — ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$. Ограниченность $\{(a_k, b_k)\}$ означает, что $\exists r : \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < r$. Значит, $|a_k| \le \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < r$, т. е. последовательность $\{a_k\}$ ограничена. По теореме Больцано – Вейерштрасса для числовых последовательностей (теорема 8 из 1.4), в $\{a_k\}$ существует сходящаяся подпоследовательность: $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots$. Рассмотрим соответствующие точки:

$$(a_{k_1}, b_{k_1}), (a_{k_2}, b_{k_2}), (a_{k_3}, b_{k_3}), \ldots \ .$$

Их вторые координаты $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}, \ldots$ образуют ограниченную числовую последовательность. Опять применяя теорему Больцано – Вейерштрасса для числовых последовательностей, выберем в ней сходящуюся подпоследовательность $b_{m_1}, b_{m_2}, b_{m_3}, \ldots$ и рассмотрим соответствующие точки

$$(a_{m_1}, b_{m_1}),\ (a_{m_2}, b_{m_2}),\ (a_{m_3}, b_{m_3}), \ldots \ .$$

Так как числовые последовательности $\{a_{m_i}\}, \{b_{m_i}\}$ сходятся, то, по теореме 2, сходится и выбранная подпоследовательность точек. Теорема доказана.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Точка c называется ***предельной*** точкой множества M, если в любой её окрестности есть точки M, отличные от c. Сравнивая это определение с определениями внутренней и граничной точек, видим, что предельными являются все внутренние и все граничные точки множества, кроме изолированных. Из леммы 1 легко следует лемма 2.

Лемма 2. Множество M замкнуто $\Leftrightarrow$ M содержит все свои предельные точки.

Название «предельная» оправдано следующим свойством.

Теорема 4.

Точка c — предельная точка множества $M \quad \Leftrightarrow \quad c = \lim x_k$, где $x_k \in M, x_k \ne c\ (\forall k)$.

Доказательство. «$\Rightarrow$». Возьмём окрестности точки c, радиусы которых стремятся к нулю. В каждой из них есть точки множества M, не совпадающие с c. Выберем последовательность точек $\{x_k\}$ так, чтобы $x_k \ne c$, причём

$$x_1 \in U_1(c) \cap M, \quad x_2 \in U_{\frac{1}{2}}(c) \cap M, \quad x_3 \in U_{\frac{1}{3}}(c) \cap M, \ldots \ .$$

Тогда $\lim x_k = c$, так как $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 :\ \forall k \geq k_0\ \ \dfrac{1}{k} < \varepsilon$, а значит $\forall k \geq k_0$ $x_k \in U_\varepsilon(c)$.

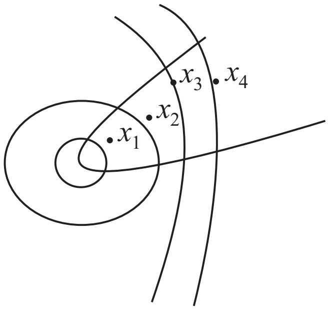
«$\Leftarrow$». Пусть $\lim x_k = c$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_o :\ \ \forall k \geq k_o\ \ \ |x_k - c| < \varepsilon$. Это значит, что любая ε-окрестность точки c содержит все x_k, начиная с некоторого номера — в частности, имеет непустое пересечение с M.

9.1.4. Компактные и связные множества

Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется ***компактным***, если оно ограничено и замкнуто.

Теорема 5 *(критерий компактности).* M компактно $\Leftrightarrow$ любая последовательность точек M содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит также M.

Доказательство. «$\Rightarrow$». Возьмём последовательность $\{x_k\}, x_k \in M$. Так как M ограничено, то и $\{x_k\}$ ограничена. Поэтому, по теореме Больцано – Вейерштрасса, в $\{x_k\}$ можно найти сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$. Пусть $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = a$. По теореме 4, a — предельная точка M. Но M замкнуто, поэтому $a \in M$.



«$\Leftarrow$». Докажем, что M ограничено. Допустим, что это не так, т. е. M не лежит ни в какой (даже очень большой) окрестности $U_\varepsilon(\overline{0})$. Возьмём $x_1 \in M$, $x_1 \notin U_1(\overline{0})$; $x_2 \in M$, $x_2 \notin U_2(\overline{0})$, и так далее: $x_k \in M$, $x_k \notin U_k(\overline{0})$. Способ построения последовательности $\{x_k\}$ показывает, что любая подпоследовательность в ней не ограничена, а значит расходится. Это противоречит условию.

Докажем, что M замкнуто. Пусть a — предельная точка M. По теореме 4, $a = \lim x_k$, где $x_k \in M$. Но тогда любая подпоследовательность в $\{x_k\}$ тоже стремится к a. Используя условие теоремы, получаем, что $a \in M$. Итак, все предельные точки принадлежат M, т. е. M замкнуто. Теорема доказана.

В заключение раздела дадим определение связного множества. Рассмотрим n непрерывных функций, определённых на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$\varphi_i : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Множество точек

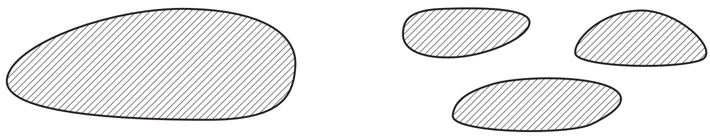
$$\{\, (\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots,\ \varphi_n(t))\ \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

называется ***непрерывной кривой*** в $\mathbb{R}^n$. Точки

$$a = (\varphi_1(\alpha),\, \varphi_2(\alpha),\, \ldots, \varphi_n(\alpha)),\ b = (\varphi_1(\beta),\, \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$$

называются концами этой кривой. Напомним, кривые в $\mathbb{R}^3$ и в $\mathbb{R}^2$ подробно рассматривались в 7.5.3.

Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется ***связным*** (или линейно связным), если для любых точек $a, b \in M$ существует непрерывная кривая с концами a, b, целиком лежащая в M.

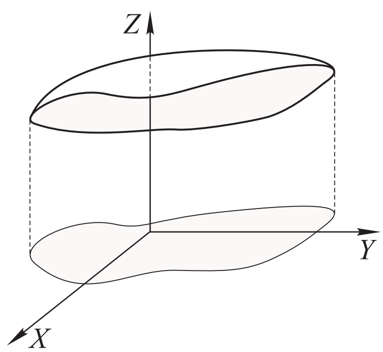


Связное множество Несвязное множество

9.2. Предел функции нескольких переменных

В самом начале этой главы уже был дан ответ на вопрос, что такое функция нескольких переменных. В основном мы будем работать с функциями, заданными аналитически (т. е. формулой). Например:

$$z = x^2 + y^2,\ f(x,y) = \sqrt{x - 2y},\ \ u = x + \ln(y + z),\ \ f(x_1, x_2) = 5x_1 - 3x_2.$$



Графический способ задания возможен только для функции двух переменных. Графиком функции $f(x,y)$ с областью определения D называется множество точек в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$\{\,(x,y,z)\ |\,(x,y) \in D,\ z = f(x,y)\,\}.$$

Если область определения D расположить в плоскости XOY, а значения функции откладывать по оси OZ, то график в общем случае представляет собой ***поверхность***.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Её область определения:

$$D = \{(x,y)\ \big|1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y)\ \big|x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ —}$$

круг радиуса 1 с центром в начале координат. Графиком является верхняя полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.

Перейдём к определению предела функции. Пусть функция f определена на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$, P_0 — предельная точка множества D. Число b называется пределом функции f в точке P_0, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \ \ \forall P \in D \quad 0 < |P - P_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(P) - b| < \varepsilon.$$

Используется обычное обозначение: $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = b$. То же самое можно сказать на «языке окрестностей»:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = b \ \Leftrightarrow\ \forall U_\varepsilon(b)\ \exists \mathring{U}_\delta(P_0):\ \forall P\in \mathring{U}_\delta(P_0)\ \ f(P)\in U_\varepsilon(b).$$

Здесь $\mathring{U}_\delta(P_0)$ — «проколотая» окрестность: $\mathring{U}_\delta(P_0) = U_\delta(P_0)\setminus\{P_0\}$.

Наконец, используя известное нам понятие предела последовательности точек $\mathbb{R}^n$, можно дать определение на «языке последовательностей»:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = b \ \Leftrightarrow\ \forall\{P_k\}\subseteq D,\ P_k\neq P_0\ \ \lim P_k = P_0\ \Rightarrow\ \lim f(P_k) = b.$$

Часто, рассматривая функции двух переменных, точки на плоскости обозначают не одной буквой P, а парой (x, y). Для обозначения предела функции тогда применяются записи:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b, \quad \text{или} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b.$$

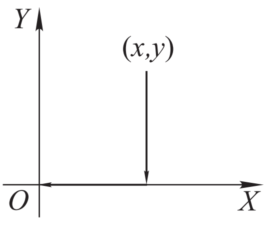
Замечание. Сравнивая разные способы определения предела функции нескольких переменных с аналогичными определениями для функции одной переменной, мы видим очень много общего. В частности, буквально так же, как в разделе 2.2, можно доказать, что все три подхода равносильны. Как и ранее, из определения предела следует, что его величина не должна зависеть от способа стремления к предельной точке. Однако для случая одной переменной достаточно было рассмотреть 2 способа стремления — слева и справа. Теперь же, даже при $n = 2$, способов приближения к предельной точке бесконечно много. Это создаёт трудности при вычислении пределов.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Решение. Независимо от способа (пути) стремления $(x, y) \to (0, 0)$ величина x^2+y^2 стремится к нулю. Поэтому, обозначая $x^2+y^2 = t$, можно перейти к функции одной переменной.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\ \left|x^2+y^2=t\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(\sqrt{t+1}+1)}{t} = 2.$$

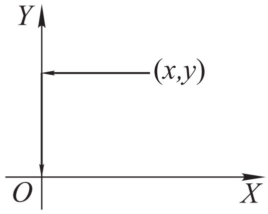
Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.



Решение. Здесь не видно, как перейти к функции одной переменной. Попробуем сначала перейти к пределу при $y \to 0$, оставляя x без изменения, а затем потребовать, чтобы $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

Такой способ вычисления называется ***повторным*** пределом. На рисунке указан путь приближения $(x,y)\to(0,0)$. Теперь вычислим другой повторный предел, приближаясь к предельной точке по другой ломаной:



$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right)=\lim_{y\to 0}(-1)=-1.$$

Получаем разные результаты, поэтому исходный предел ***не существует***.

Однако даже совпадение повторных пределов ещё не гарантирует существования предела — имеется много других путей приближения к предельной точке, они могут привести к другим результатам.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Решение. Вычислим повторные пределы:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}0=0,\quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}=0.$$

Значит, если предел существует, то он равен 0. Но ведь есть много других способов приближения $(x,y)\to(0,0)$. Попробуем двигаться к точке $(0,0)$ по лучу $y=kx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\,|y=kx|=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Результат зависит от k, по разным путям получаются разные значения. Следовательно, предел не существует.

Замечание. Операция вычисления повторного предела содержит промежуточный предельный переход, который может оказаться неосуществимым, даже если предел функции существует. Например, для функции $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$ предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\sin\dfrac{1}{y}$ существует и, очевидно, равен 0. Однако повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}\right)$ не существует, так как при $x\neq 0$ не существует $\lim\limits_{y\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}$.

Арифметические свойства пределов функции нескольких переменных не отличаются от случая одной переменной.

Теорема 6. Если $\lim\limits_{P\to P_0} f_1(P)=a$, $\lim\limits_{P\to P_0} f_2(P)=b$, то

$$\lim_{P\to P_0} f_1(P)\pm f_2(P)=a\pm b,\quad \lim_{P\to P_0} f_1(P)\cdot f_2(P)=ab,$$

$$\lim_{P\to P_o}\frac{f_1(P)}{f_2(P)}=\frac{a}{b},\quad \text{если только } b\neq 0.$$

Доказательство проводится с помощью свойств предела последовательностей, в точности так же, как для функций одной переменной (теорема 5 из 2.2).

9.3. Определение и свойства непрерывных функций

Функция f называется ***непрерывной в точке*** P_0, если она определена в этой точке и

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

Если P_0 — предельная точка области определения D функции f, то выражение $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ имеет смысл, причём P_0 может быть как внутренней, так и граничной. В изолированной точке выражение $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ не определено. Но можно дать определение непрерывной функции так:

$$f \text{ непрерывна в точке } P_0 \;\Leftrightarrow\; \forall\{P_k\}\subseteq D\ \lim P_k=P_0\Rightarrow\ \lim f(P_k)=f(P_0).$$

Легко заметить, что если P_0 — предельная, то эти определения эквивалентны. Но последнее из них имеет смысл и в изолированной точке. Причём ясно, что в изолированной точке области определения любая функция непрерывна.

Точкой разрыва будем называть любую предельную точку области определения функции, в которой нарушается непрерывность.

Из теоремы 6 и определения непрерывности сразу следует

Теорема 7. Сумма, разность, произведение, частное непрерывных в данной точке функций являются снова непрерывными функциями (если только знаменатель не обращается в 0).

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$.

Решение. Функция определена и непрерывна во всех точках 1-й четверти $\{(x,y)\ |x\geq 0,\ y\geq 0\}$, кроме точек прямой $y=x$. Точки этой прямой (при $x\geq 0$) являются предельными для области определения f. Значит, это точки разрыва.

Заметим, что при $a \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Доопределяя функцию равенством $f(a,a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, можно сделать её непрерывной в таких точках, разрывы можно назвать ***устранимыми***. Исключение составляет точка $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = +\infty.$$

В формулировке следующей теоремы содержится новое понятие сложной функции нескольких переменных.

Теорема 8. Пусть функции $g_1,\ g_2, \ldots, g_k$ непрерывны в точке P_0 пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть в окрестности точки $(g_1(P_0), g_2(P_0), \ldots, g_k(P_0))$ пространства $\mathbb{R}^k$ определена и непрерывна функция f. Тогда сложная функция $f(g_1(P), g_2(P), \ldots, g_k(P))$ непрерывна в точке P_0.

Доказательство. Используем определение предела на языке последовательностей. Пусть $B_1, B_2, B_3, \ldots$ — последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$, сходящаяся к P_0. Так как функции $g_1,\ g_2, \ldots, g_k$ непрерывны в точке P_0, то $\lim\limits_{j\to\infty} g_i(B_j) = g_i(P_0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим последовательность точек в пространстве $\mathbb{R}^k$:

$$\begin{gathered}
C_1 = (g_1(B_1), g_2(B_1), \ldots, g_k(B_1)),\\
C_2 = (g_1(B_2), g_2(B_2), \ldots, g_k(B_2)),\\
C_3 = (g_1(B_3), g_2(B_3), \ldots, g_k(B_3)),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Их первые координаты, как мы установили, сходятся к числу $g_1(P_0)$, вторые координаты сходятся к числу $g_2(P_0)$ и т. д. Применим теорему о покоординатной сходимости и получим, что

$$\lim_{j\to\infty} C_j = (g_1(P_0), g_2(P_0), \ldots, g_k(P_0)).$$

Отсюда и из непрерывности функции $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} f(C_j) = f(g_1(P_0), g_2(P_0), \ldots, g_k(P_0))$$

(даже если какие-либо точки C_j совпадут с пределом $(g_1(P_0), \ldots, g_k(P_0))$).

Итак, доказано, что для любой последовательности $B_j \to P_0$

$$\lim_{j\to\infty} f(g_1(B_j), g_2(B_j), \ldots, g_k(B_j)) = f(g_1(P_0), g_2(P_0), \ldots, g_k(P_0)),$$

что и означает непрерывность сложной функции.

В теории непрерывных функций одной переменной важную роль играли свойства функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$: такие функции ограничены, достигают своих точных верхней и нижней граней, принимают все промежуточные значения, равномерно непрерывны (теоремы 7, 9, 10, 11 из раздела 3.3). Рассмотрим аналогичные свойства функций нескольких переменных.

Будем говорить, что функция f ***непрерывна на множестве*** D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 9. Если функция f непрерывна на ***компактном*** множестве D, то она ограничена на D и достигает своих точных верхней и нижней граней.

Доказательство. Допустим, что f не ограничена. Тогда существует последовательность точек $\{P_k\}$, $P_k \in D$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = \infty$. Используем критерий компактности (теорема 5 из 9.1.4): существует подпоследовательность $\{P_{ki}\}$: $\lim\limits_{i\to\infty} P_{ki} = P \in D$. По определению непрерывной функции, тогда $\lim\limits_{i\to\infty} f(P_{ki}) = f(P)$ — противоречие с тем, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = \infty$. Следовательно, f ограничена.

Из ограниченности f следует, что множество её значений $f(D)$ — ограниченное множество чисел. Значит, у него есть точные верхняя и нижняя грани. Рассмотрим подробно $\mu = \sup\limits_{P\in D} f(P)$. По определению, в любой окрестности числа μ есть числа из множества $f(D)$, т. е. μ — предельная точка множества $f(D)$. Поэтому существует последовательность $\{f(B_k)\}$, сходящаяся к μ. Рассмотрим $\{B_k\}$ — последовательность точек D. По критерию компактности, в ней существует подпоследовательность $\{B_{ki}\}$: $\lim\limits_{i\to\infty} B_{ki} = B \in D$. Из непрерывности f следует, что $\lim\limits_{i\to\infty} f(B_{ki}) = f(B)$. Но если $\lim f(B_k) = \mu$, то предел любой подпоследовательности тоже равен μ. Поэтому $\mu = f(B)$, точная верхняя грань достигается. Аналогично доказывается, что $\exists C \in D: \ f(C) = \inf\limits_{P\in D} f(P)$.

Теорема 10 ***(о промежуточных значениях).*** Пусть функция f непрерывна на ***связном*** множестве $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Возьмём любые $A, B \in E$. Если $f(A) \leq k \leq f(B)$, то существует $C \in E$: $f(C) = k$. Другими словами, все промежуточные значения достигаются.

Доказательство. Так как E связно, то существует непрерывная кривая, соединяющая точки A, B и лежащая в E (см. 9.1.4). Подробнее, это значит, что существуют непрерывные функции $x_1 = \varphi_1(t)$, …, $x_n = \varphi_n(t)$, определённые на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, такие, что

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \ \ P(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in E,$$
$$P(\alpha) = A, \ \ P(\beta) = B.$$

Рассмотрим сложную функцию

$$f(P(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

По теореме 8, она непрерывна. Кроме того, $f(P(\alpha)) \le k \le f(P(\beta))$. По теореме о промежуточных значениях для функций одной переменной (теорема 7 из 3.3), существует $\gamma \in [\alpha, \beta]$: $f(P(\gamma)) = k$. Ясно, что $C = P(\gamma) = (\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots, \varphi_n(\gamma))$ — искомая точка.

Определение равномерно непрерывной на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ функции полностью аналогично определению равномерно непрерывной функции одной переменной (см. 3.3):

$$f \text{ равномерно непрерывна на } D \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall P, P' \in D\ \ |P - P'| < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P')| < \varepsilon.$$

Аналогична теореме 11 из 3.3 и следующая теорема, которую здесь мы приводим без доказательства.

Теорема 11 ***(теорема Кантора).*** Непрерывная на компактном множестве функция равномерно непрерывна.

9.4. Дифференцирование функций нескольких переменных

9.4.1. Частные производные

Для сокращения записи рассмотрим случай функции двух переменных:

$$f : D \to \mathbb{R},\ \ D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Пусть $P_0(x_0, y_0) \in D$. Дадим приращение Δx переменной x, оставляя $y = y_0$ без изменения (мы всегда рассматриваем только такие приращения, при которых новая точка лежит в области определения функции). Тогда разность

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

называется ***частным приращением*** по переменной x функции f в точке P_0. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то он называется ***частной производной*** функции f по переменной x в точке P_0. Используются обозначения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y:

$$f'_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции в данной точке — это число. Если же точку не фиксировать, а менять, то частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ снова являются функциями переменных x, y.

В случае, если функция f зависит от большего числа переменных, определение частной производной аналогично: это обычная производная по одной из переменных, вычисленная в предположении, что все остальные переменные зафиксированы. Отсюда следует, что вычислять частную производную по какой-либо переменной нужно по обычным правилам дифференцирования, рассматривая все остальные переменные как постоянные.

Пример 6. Найти частные производные функции

$$f(x,y,z)=x^y+2x^2z^3.$$

Решение. Дифференцируя по x, считаем y и z постоянными:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}+4xz^3.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=6x^2z^2.$$

Замечание. Из существования частных производных ещё не следует непрерывность функции. Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не существует (см. пример 4), то $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $(0,0)$. Однако частные производные существуют в любой точке плоскости. Действительно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Во всех остальных точках частные производные вычисляются по обычным правилам:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

9.4.2. Дифференцируемость функции. Дифференциал

Мы опять будем рассматривать функции двух переменных. Общий случай полностью аналогичен, но требует более громоздких записей.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в окрестности точки (x_0,y_0). Дадим приращения $\Delta x,\ \Delta y$ переменным x,y. Тогда разность

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

называется ***полным приращением*** функции в точке (x_0,y_0).

Теорема 12. Если частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), то полное приращение функции можно представить в виде:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

где $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ B=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0);\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ — функции от $\Delta x,\ \Delta y$, причём

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1 = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2 = 0.$$

Доказательство. Запишем Δf в следующем виде:

$$\Delta f = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)].$$

Применим к каждой разности теорему Лагранжа (теорема 4 из 5.1). Подробнее: можно считать, что в первой скобке функция одной переменной $f(x, y_0+\Delta y)$ имеет в каждой точке отрезка $[x_0, x_0+\Delta x]$ производную, поэтому $\exists c_1\in[x_0,x_0+\Delta x]$:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x.$$

Аналогично для второй скобки: $\exists c_2\in[y_0,y_0+\Delta y]$:

$$f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,c_2)\cdot\Delta y.$$

Итак, $\Delta f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(c_1,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,c_2)\cdot\Delta y.$

Воспользуемся непрерывностью частных производных: так как при $\Delta x\to 0\quad c_1\to x_0$, то $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\partial f}{\partial x}(c_1,y_0+\Delta y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. Отсюда следует, что функция $\dfrac{\partial f}{\partial x}(c_1,y_0+\Delta y)$ отличается от числа $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ на функцию $\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)$, предел которой (при $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$) равен 0 (т. е. на ***бесконечно малую***):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y).$$

Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, c_2) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$. Подставим полученные формулы в выражение для Δf:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

что и требовалось доказать.

Функция $f(x, y)$, для которой выполнены условия (а значит и заключение) теоремы 12, называется ***дифференцируемой*** в точке (x_0, y_0). Выражение

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

называется ***дифференциалом*** (полным дифференциалом) функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Замечание. Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она непрерывна в этой точке. Действительно,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y] = 0.$$

Так как $\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, то это равносильно тому, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, а это равенство и определяет непрерывность функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Обратим внимание: дифференциал df является ***линейной функцией*** от приращений $\Delta x,\ \Delta y$, в то время как приращение Δf может зависеть от $\Delta x,\ \Delta y$ очень сложно. С другой стороны, разность $\Delta f - df$ не только стремится к 0 при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$, но и является, как говорят, бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с «модулем полного приращения переменных»:

$$0 \le \frac{|\Delta f - df|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le |\varepsilon_1| \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} +$$
$$+ |\varepsilon_2| \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0 \text{ (при } \Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0).$$

Иногда это обстоятельство записывают в виде приближённого равенства:

$$\Delta f \approx df$$

и называют дифференциал ***главной***, линейной частью приращения.

Пример 7. Как изменится объём конуса высотой 60 см, радиусом основания 20 см, если высоту увеличить на 3 мм, а радиус уменьшить на 1 мм?

Решение. Объём конуса — это функция высоты H и радиуса основания R: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$. В задаче требуется найти приращение функции

$$\Delta V = V(60 + 0{,}3;\ 20 - 0{,}1) - V(60,\ 20).$$

Проще это сделать приближённо, с помощью дифференциала:

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \Delta H + \frac{2}{3}\pi\ RH\ \Delta R =$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 400 \cdot 0{,}3 + \frac{2}{3}\pi \cdot 20 \cdot 60 \cdot (-0{,}1) = 40\pi - 80\pi = -40\pi \approx -126(\text{см}^3).$$

Объём конуса уменьшится приблизительно на 126 см^3. Здесь мы не будем оценивать допущенную нами ошибку, укажем только, что она составляет около 1 см^3.

Дифференциал df часто записывают в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

учитывая, что для независимых переменных $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$.

В общем случае, для функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Рассмотрим правило дифференцирования сложных функций нескольких переменных.

Теорема 13. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 (напомним: для функций 1-й переменной это означает существование конечной производной в данной точке). Пусть функция $f(u, v)$ определена в некоторой окрестности точки $(u(x_0), v(x_0))$ и дифференцируема в этой точке. Тогда сложная функция $f(u(x), v(x))$ дифференцируема в точке x_0, причём

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Доказательство. Дадим приращение Δx переменной x. Тогда функции $u(x)$, $v(x)$ получат приращения

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0), \quad \Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0).$$

По условию $f(u,v)$ дифференцируема в точке $(u(x_0), v(x_0))$, т. е.

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0), v(x_0)) \cdot \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0), v(x_0)) \cdot \Delta v + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v.$$

Разделим обе части равенства на Δx:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \varepsilon_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon_2 \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

что и требовалось. Предел каждого из последних двух слагаемых равен 0, так как $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \varepsilon_2 = 0$, а пределы отношений $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ существуют и конечны.

Замечание. Теорема о дифференцировании сложной функции сформулирована и доказана в частном случае. Однако в других случаях правило дифференцирования аналогично. Например, пусть $f = f(u,v,w)$, где каждая из функций u, v, w зависит от 2 переменных: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $w = w(x,y)$. Тогда сложная функция $f(u(x,y),\, v(x,y),\, w(x,y))$ зависит от двух переменных. Её частные производные вычисляются по формулам, аналогичным выведенной в теореме 13:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Рассмотрим свойства дифференциала, полезные при вычислении дифференциалов конкретных функций. Пусть u, v — дифференцируемые функции нескольких переменных; α, β, C — действительные числа. Тогда:

1. $dC \equiv 0$;
2. $d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv$;
3. $d(uv) = udv + vdu$;
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$;
5. Если f — дифференцируемая функция одной переменной, то
$$df(u) = f'(u)\, du;$$
6. Если f — дифференцируемая функция двух переменных, то
$$df = \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv.$$

Докажем последнее свойство. Пусть $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Так как $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy$, $dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy$, то

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Полученное выражение, по определению, является дифференциалом df функции $f(u(x, y), v(x, y))$. Доказанное свойство называется ***инвариантностью формы*** полного дифференциала относительно выбора переменных. Дифференциал ***всегда*** равен сумме произведений частных производных на дифференциалы соответствующих переменных — и в случае независимых переменных, и в случае, когда эти переменные сами являются функциями.

Остальные свойства доказываются по одной схеме. Для независимых переменных — непосредственно из определения. Например, для 4-го свойства:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y}\,dy = \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

В общем случае, для функций u, v, справедливость свойства следует из инвариантности формы дифференциала.

Пример 8. Найти дифференциал функции $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xz + y)$ в точке $P(1, 1, 2)$.

Решение. Пользуемся свойствами дифференциала:

$$df = d(\operatorname{arctg}(xz + y)) = \frac{1}{1 + (xz + y)^2}\,d(xz + y) =$$
$$= \frac{1}{1 + (xz + y)^2}(d(xz) + dy) = \frac{1}{1 + (xz + y)^2}(x\,dz + z\,dx + dy).$$

Дифференциал вычислен в произвольной точке. В точке $P(1, 1, 2)$ он равен

$$df(P) = \frac{1}{10}(dz + 2\,dx + dy) = \frac{1}{5}\,dx + \frac{1}{10}\,dy + \frac{1}{10}\,dz.$$

Замечание. Обратите внимание — вычисляя дифференциал, мы одновременно вычисляем и все частные производные. Например, из последней формулы видим: в точке P

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{10}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{10}.$$

9.4.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если не фиксировать, а менять точку, в которой вычисляются частные производные, то они сами являются функциями, и их снова можно дифференцировать. Например, если $f = f(x, y)$, то частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ являются тоже функциями двух переменных. Дифференцируя их, получим ***частные производные второго порядка***:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy},$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}, \quad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Запись $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ читается «дэ два эф по дэ икс дважды». Продолжая дифференцирование, можно определить частные производные и более высоких порядков. Обозначения для них аналогичны. Если дифференцирование проводится по различным переменным, то такие частные производные называются ***смешанными***. Например, $\dfrac{\partial^8 f}{\partial x^3 \partial y^5}$ — одна из возможных смешанных частных производных 8-го порядка.

Пример 9. Найти частные производные 2-го порядка функции

$$f(x, y) = (x^3 + 1)\ln y.$$

Решение. Находим сначала частные производные 1-го порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \ln y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 + 1}{y}.$$

Теперь, дифференцируя далее, находим частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (3x^2 \ln y)'_x = 6x \ln y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 \ln y)'_y = \frac{3x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(\frac{x^3 + 1}{y}\right)'_x = \frac{3x^2}{y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{x^3 + 1}{y}\right)'_y = -\frac{x^3 + 1}{y^2}.$$

Заметим, что смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ оказались одинаковыми. Это не совпадение, справедлива общая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 14. Если частные производные k-го порядка функции f непрерывны, то смешанные частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны.

Познакомимся теперь с понятием дифференциала 2-го и более высоких порядков. Пока мы рассматривали дифференциал $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$ в данной точке как линейную функцию от приращений. Другими словами, производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ — числа (значения частных производных в данной точке), dx, dy — переменные приращения.

Теперь поступим по-другому. Зафиксируем приращения dx, dy, а точку, где вычисляется df, будем менять. Тогда дифференциал df является снова функцией от x, y. Дифференциал этой функции называется ***дифференциалом второго порядка*** (или вторым дифференциалом):

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy = \\ = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что, по теореме 14, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Если $d^2 f$ вычисляется ***в некоторой точке***, то частные производные принимают числовые значения, $d^2 f$ является функцией от приращений. А точнее — второй дифференциал является ***квадратичной формой*** от приращений dx, dy.

Если же приращения dx, dy зафиксировать, а менять точку, то можно перейти к дифференциалу 3-го порядка:

$$d^3 f = d(d^2 f) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3.$$

С помощью индукции можно получить формулу для дифференциала n-го порядка для функции двух переменных:

$$d^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(dx)^{n-k}(dy)^k,$$

здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты.

Пример 10. Найти дифференциал 2-го порядка функции $f(x, y) = x^2 y^3 - 2y^2$ в точке $P(2, 1)$.

Решение. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3\Big|_P = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2\Big|_P = 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - 4\Big|_P = 20.$$

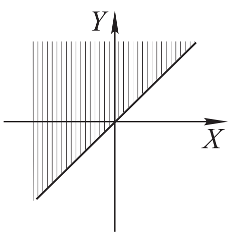
Следовательно,

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 = 2(dx)^2 + 24\,dxdy + 20(dy)^2.$$

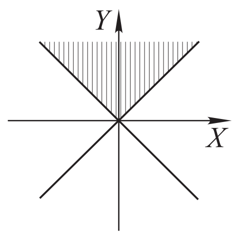
9.5. Задачи с решениями

1. Найти и изобразить область D определения функции $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$. Является ли D открытым или замкнутым множеством?

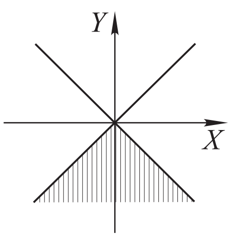
Решение. Так как арксинус определён на отрезке $[-1,1]$, то в область определения функции f входят те точки, для которых $-1 \le \dfrac{x}{y} \le 1$. Для упрощения неравенства нужно рассмотреть 2 случая.



1) Найдём точки, для которых $y > 0$. Умножая все части неравенства на y, получим: $-y \le x \le y$. Рассмотрим одно из неравенств: $x \le y$. Заменим знак $\le$ на знак $=$. Уравнение $x = y$ определяет прямую линию, разделяющую плоскость на 2 полуплоскости. Одна из них (на рисунке заштрихована) состоит из точек с условием $x < y$, другая — из точек, для которых $x > y$. Значит, $\{(x,y)|x \le y\}$ — отмеченная на рисунке полуплоскость, включающая ограничивающую её прямую. Аналогично находим полуплоскость $\{(x,y)| \ -y \le x\}$. Так как должны быть выполнены оба неравенства, то следует взять пересечение этих полуплоскостей. Условие $y > 0$ показывает, что точка $(0,0)$ не должна включаться в найденную область.



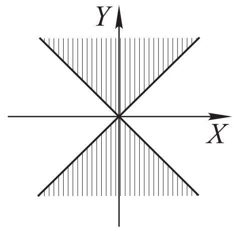
2) Найдём точки, для которых $y < 0$:



$$\left\{(x,y) \mid -1 \le \frac{x}{y} \le 1, \ \ y < 0\right\} =$$
$$= \{(x,y) \mid -y \ge x \ge y, \ \ y < 0\} =$$
$$= \{(x,y) \mid -y \ge x, \ y < 0\} \cap \{(x,y) \mid x \ge y, \ y < 0\}.$$

Аналогично первому случаю находим нужное множество. Рассматривая объединение полученных множеств, находим искомую область определения D (см. рисунок на следующей странице). Точка

$(0,0)$ в область определения не входит, хотя и является для неё граничной. Значит, D не является замкнутым множеством.



Остальные граничные точки — точки прямых $y = x$, $y = -x$ — входят в D, поэтому D не является и открытым множеством. Заметим также, что D не является ни ограниченным, ни связным множеством.

2. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 5}} \dfrac{(x-3)^2(y-5)}{(x-3)^2+(y-5)^2}$ или доказать, что он не существует.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на $(x-3)^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 5}} \frac{(x-3)^2(y-5)}{(x-3)^2+(y-5)^2} = \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 5}} \frac{y-5}{1+\left(\dfrac{y-5}{x-3}\right)^2}.$$

Числитель стремится к 0, знаменатель не может быть меньше 1. Значит, функция $\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y-5}{x-3}\right)^2}$ ограничена. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную стремится к 0. Следовательно, предел равен 0.

3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Решение. Во всех точках, кроме $(0,0)$, функция непрерывна — по теоремам об арифметических свойствах непрерывных функций и о непрерывности сложной функции. Чтобы проверить непрерывность в точке $(0,0)$, вычислим предел:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} \left| \begin{matrix} x^2+y^2 = t \\ t \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Предел не равен значению $f(0,0) = 0$, поэтому функция имеет в точке $(0,0)$ разрыв.

4. Найти все частные производные 1-го и 2-го порядков функции

$$z = \ln(2x + \sin y).$$

Решение. Найдём сначала частные производные 1-го порядка. Дифференцируя по одной переменной, другую рассматриваем как постоянную.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{2x+\sin y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos y}{2x+\sin y}.$$

Дифференцируя повторно, находим частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2}{2x+\sin y}\right)'_x = -\frac{4}{(2x+\sin y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{2}{2x+\sin y}\right)'_y = -\frac{2\cos y}{(2x+\sin y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\cos y}{2x+\sin y}\right)'_y = \frac{-\sin y(2x+\sin y)-\cos^2 y}{(2x+\sin y)^2} = -\frac{2x\sin y+1}{(2x+\sin y)^2}.$$

5. Найти дифференциал 2-го порядка функции $z = 5x^2y - 3\sin x + 2\cos y$ в точке $P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Решение. ***1-й способ*** — вычисляя частные производные. Находим все частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10xy - 3\cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 2\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (10xy - 3\cos x)'_x = 10y + 3\sin x|_P = 0 + 3\sin\frac{\pi}{2} = 3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (10xy - 3\cos x)'_y = 10x|_P = 5\pi,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (5x^2 - 2\sin y)'_y = -2\cos y|_P = -2.$$

Подставляем в формулу дифференциала 2-го порядка:

$$d^2z(P) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2\bigg|_P = $$
$$= 3(dx)^2 + 10\pi dxdy - 2(dy)^2.$$

2-й способ — используя правила вычисления дифференциалов. Сначала вычисляем дифференциал 1-го порядка:

$$dz = d(5x^2y - 3\sin x + 2\cos y) =$$
$$= 5d(x^2y) - 3d(\sin x) + 2d(\cos y) = 5(yd(x^2) + x^2dy) - 3\cos x\,dx - 2\sin y\,dy =$$
$$= 10xy\,dx + 5x^2dy - 3\cos x\,dx - 2\sin y\,dy.$$

Теперь вычисляем d^2z, считая dx, dy постоянными:

$$d^2z = d(dz) = 10d(xy)dx + 5d(x^2)dy - 3d(\cos x)dx - d(2\sin y)dy =$$
$$= 10y(dx)^2 + 10x\,dxdy + 10x\,dxdy + 3\sin x(dx)^2 - 2\cos y(dy)^2 =$$
$$= (10y + 3\sin x)(dx)^2 + 20x\,dxdy - 2\cos y(dy)^2.$$

Подставляя координаты точки, получим ответ:

$$d^2z(P) = 3(dx)^2 + 10\pi dxdy - 2(dy)^2.$$

6. Вычислить приближённо $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}03}{0{,}95}\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. В точке $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ значение функции легко вычисляется: $z(1,1) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}785$. Найдём с помощью дифференциала приращение функции, соответствующее приращениям $dx = 0{,}03$, $dy = -0{,}05$:

$$\Delta z = z(1{,}03,\ 0{,}95) - z(1,1) \approx dz = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y}dx + \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0{,}03 + \frac{1}{2}(-1)\cdot(-0{,}05) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}08 = 0{,}04.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}03}{0{,}95}\right) = z(1{,}03,\ 0{,}95) \approx z(1,\ 1) + dz = 0{,}785 + 0{,}04 = 0{,}825.$$

9.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти и изобразить область определения функции. Является ли она открытым или замкнутым множеством?

а) $z = \sqrt{x-2y}$; б) $z = \ln(y^2 - 8x)$;

в) $z = \left(1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3}\right)^{-1}$; г) $z = \ln x + \ln y + \sqrt{6-2x-3y}$;

д) $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \arccos(x-4)$; е) $z = \sqrt{x^2+y^2-4x-2y}$;

ж) $f = \ln\dfrac{x+2y+5z+10}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+10}$; з) $f = \dfrac{z^2}{x^2+y^2}$.

2. Вычислить предел или доказать, что он не существует:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{3x^2-2y}{5x+y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\cos(x^2+y^2)}{\cos(x^2)+\cos(y^2)}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to2}}\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x^3y-xy^3}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2y^2}{3x^4+2y^4}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2x^2y}{7x^3+4y^3}$;

ж) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to3}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{2x+y}}$; з) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x+2y)}{x^2+4xy+4y^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

а) $z=\ln(x^2+2y)$; б) $z=\dfrac{x+2y+5}{xy-2x-y+2}$;

в) $z=\dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$; г) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

д) $z=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 4, & x+y=0;\end{cases}$ е) $z=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

4. Найти частные производные 1-го порядка следующих функций:

а) $z=e^{-\frac{x}{y}}$; б) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

в) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; г) $z=(2x+3y)\sin(2x+y)$;

д) $z=\dfrac{3+\cos 5x}{x+y}$; е) $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;

ж) $f=(x+2z)^y$; з) $f=\dfrac{z^2}{x+y}+\ln(\sin z)$.

5. Найти значения всех частных производных 2-го порядка следующих функций в данной точке P:

а) $z=x^3+2y^3-5x^2y^2$, $P(5,1)$; б) $z=\dfrac{x}{y^2}$, $P(4,2)$;

в) $z=\sqrt[3]{x+y^2}$, $P(0,1)$; г) $z=\dfrac{y^2}{3x+7}$, $P(-2,1)$.

6. Найти указанные частные производные для данных функций:

а) $z=x^3\ln y+y^3\ln x$, $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y^3}=?$ б) $z=y^2(3x^2+y+5xy^2)$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}=?$

в) $z=x\sin(x+y)$, $\dfrac{\partial^9 z}{\partial x\partial y^8}=?$ г) $f=e^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=?$

7. Проверить, что при любых значениях констант A,a,λ,φ функция

$$u(x,t)=A\sin(a\lambda t+\varphi)\sin\lambda x$$

удовлетворяет уравнению колебаний струны: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

8. Найти дифференциалы 1 и 2 порядков следующих функций:

а) $z=\ln(x-y)$; б) $z=x\operatorname{arctg} y$;

в) $z=5^{xy}$; г) $f=xy+xz+yz$.

9. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков следующих функций в указанной точке P:

а) $z=x^3+2x^2y+3xy^2+4y^3$, $P(2,1)$; б) $z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, $P(2,2)$;

в) $z=\dfrac{\sin(x+y)}{x}$, $P\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$; г) $f=z(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, $P(1,1,1)$.

10. Найти полное приращение и дифференциал функции

$$f(x, y) = x^2 + x\sqrt{y} + xy,$$

если x изменяется от 5 до 5,1, а y изменяется от 4 до 4,41.

11. Деформация цилиндра привела к уменьшению его высоты от 100 см до 98,5 см и к увеличению радиуса от 20 см до 20,4 см. Используя дифференциал, найти приближённо изменение объёма цилиндра.

12. Вычислить приближённо, заменяя полное приращение соответствующей функции её дифференциалом 1-го порядка. Считать $\pi \approx 3{,}14$; $\ln 2 \approx 0{,}69$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

а) $\dfrac{6{,}96^2}{1{,}98}$; б) $\ln(3{,}99^2 + 2{,}03^4)$; в) $2{,}01^{2{,}94}$;

г) $\sqrt{2{,}98^2 + 3{,}01^2}$; д) $\cos 59^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$; е) $\dfrac{\sqrt{25{,}2}}{\sqrt[4]{25{,}2 \cdot 4{,}95^2}}$.

9.7. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Область определения функции $z = \dfrac{2}{\sqrt{x-y}}$ является: 1) ограниченным множеством; 2) открытым множеством; 3) замкнутым множеством; 4) не является множеством ни одного из указанных типов.

Указать номер правильного ответа.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to -3}} \dfrac{2x^2 + 2xy}{\sin(x+y)}$.

3. При каком C функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + 2x^2y + 3y^2}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ C, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

будет непрерывной на всей плоскости?

4. Найти значение частной производной по переменной y функции $z = \ln(\cos(x^2 y))$ в точке $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. Найти значение $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ в точке $(1, 5)$, если $z = (x + y) \operatorname{arctg} x$.

6. Вычислить значение дифференциала 1-го порядка функции

$$z = \sqrt{x + y^2}$$

в точке $(5, 2)$, если приращения переменных известны: $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}1$.

ГЛАВА 10

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (продолжение)

10.1. Формула Тейлора

Мы научились заменять полное приращение функции её дифференциалом 1-го порядка:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0).$$

Обозначая $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$, можно записать это так:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Но это приближение самое грубое, ***линейное***. Уточнением и обобщением этой формулы является формула Тейлора.

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ имеет в окрестности U_ε точки (x_0, y_0) непрерывные частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно. Тогда для любой точки (x, y) из U_ε справедлива ***формула Тейлора***:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + r_n,$$

где значения дифференциалов вычисляются для приращений $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, а остаточный член r_n можно записать в форме Лагранжа:

$$r_n = \frac{d^{n+1} f(c_1, c_2)}{(n+1)!},$$

причём (c_1, c_2) — некоторая точка на отрезке, соединяющем точки (x_0, y_0) и (x, y).

Доказательство. Здесь читателю полезно вспомнить формулу Тейлора для функций одной переменной, подробно изученную в разделе 5.3. Во-первых, сейчас мы будем её применять, а во-вторых, она просто похожа, аналогична формуле, рассматриваемой здесь.

Заметим, что $\forall t \in [0, 1]$ точка $(x_0 + t\Delta x,\ \ y_0 + t\Delta y)$ лежит на прямолинейном отрезке, соединяющем точки $(x_0, y_0), (x, y)$. (Не забывайте: $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$.)

Рассмотрим функцию $F(t) = f(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)$. Это суперпозиция двух линейных функций $x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y$ одной переменной t и функции $f(x, y)$. Из теоремы о дифференцировании сложной функции (теорема 13 из 9.4.2) следует, что $F(t)$ является $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемой (т. е. её $(n+1)$-я производная является непрерывной функцией). Значит, для $F(t)$ справедлива формула Тейлора (см. 5.3):

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}.$$

В частности, при $t = 1$ получаем:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Используя определение функции $F(t)$, убедимся, что это и есть та формула, которую требуется доказать. Действительно,

$$F(1) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = f(x, y), \quad F(0) = f(x_0, y_0).$$

Для вычисления $F'(t)$ пользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} &F'(t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0{+}t\Delta x,\ y_0{+}t\Delta y)\frac{d(x_0{+}t\Delta x)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0{+}t\Delta x,\ y_0{+}t\Delta y)\frac{d(y_0{+}t\Delta y)}{dt} = \\ &\qquad = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)\Delta y, \end{aligned}$$

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y = df(x_0, y_0).$$

Аналогично находим $F''(0)$:

$$\begin{aligned} F''(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\right)'\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\right)'\Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y\right)\Delta x + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y\right)\Delta y = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x\Delta y + \\ &\qquad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)(\Delta y)^2, \end{aligned}$$

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(\Delta y)^2 = \\ = d^2 f(x_0, y_0).$$

По этим же правилам вычисляются и остальные слагаемые в формуле. При вычислении остаточного члена подставляем не $t = 0$, а $t = c$, $c \in [0, 1]$. В результате получим дифференциал $(n+1)$-го порядка $d^{n+1} f$ не в точке (x_0, y_0), а в точке $(x_0 + c\Delta x, y_0 + c\Delta y) = (c_1, c_2)$. Теорема доказана.

Замечание. Остаточный член r_n можно записать в другой форме — форме Пеано:

$$r_n = o((\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})^n),$$

т. е. r_n является бесконечно малой более высокого порядка, чем n-я степень модуля полного приращения переменных $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Чтобы это доказать, используем формулу для дифференциала n-го порядка (см. 9.4.3):

$$r_n = \frac{d^{n+1} f(c_1, c_2)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} (\Delta x)^{n+1-k} (\Delta y)^k.$$

Пользуясь «неравенством треугольника», оценим модуль r_n:

$$0 \le |r_n| \le \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} \right| |\Delta x|^{n+1-k} |\Delta y|^k .$$

Так как ясно, что $\Delta x \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\Delta y \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, то

$$0 \le |r_n| \le \left[\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-x} \partial y^k} \right| \right] (\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})^{n+1}.$$

Докажем, что функция, заключённая в квадратные скобки, ограничена. Для этого нам придётся уменьшить нашу окрестность U_ε точки (x_0, y_0) — рассмотреть, например, ***замкнутый*** круг

$$K = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

радиусом $\frac{\varepsilon}{2}$ с центром в точке (x_0, y_0). Все частные производные $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}$, по условию, непрерывны, а значит ограничены на компактном множестве K (теорема 9 из 9.3). Теперь ясно, что существует число M такое, что при малых $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} \right| \le M.$$

Следовательно, $0 \le |r_n| \le M(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})^{n+1}$. Значит,

$$0 \le \frac{|r_n|}{(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})^n} \le M\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Правая часть стремится к 0 при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$, поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{|r_n|}{(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})^n} = 0.$$

Формула Тейлора для более общего случая функции k переменных записывается (и доказывается) аналогично. Если в некоторой окрестности точки $P_0 \in \mathbb{R}^k$ функция $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ имеет непрерывные частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любой точки P из этой окрестности

$$f(P) = f(P_0) + \frac{df(P_0)}{1!} + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + r_n,$$

причём $r_n = o((\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_k)^2})^n)$.

10.2. Экстремумы функций нескольких переменных

Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция n переменных, определённая на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть P_0 — внутренняя точка множества D. Точка P_0 называется точкой ***локального максимума*** функции f, если существует окрестность U этой точки, такая, что

$$\forall P \in U \quad f(P) \le f(P_0).$$

Аналогично определяется точка ***локального минимума***:

P_0 — точка локального минимума $\Leftrightarrow\ \exists U = U(P_0)\colon\ \forall P \in U\ \ f(P) \ge f(P_0)$.

Если в определениях заменить неравенства на строгие, то получим определения ***строгих*** локальных максимумов и минимумов.

Нахождение экстремумов (максимумов, минимумов) — наиболее важный элемент в исследовании функции. Поэтому мы подробно рассмотрим эту задачу.

Теорема 2 ***(необходимое условие экстремума).*** Если P_0 — точка локального экстремума функции f и в этой точке существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ по какой-либо из переменных, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $P_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Зафиксируем у функции f значения всех переменных, кроме x_i. Получим функцию одной переменной:

$$f(x_{01}, \dots, x_{0(i-1)}, x_i, x_{0(i+1)}, \dots, x_{0n}).$$

Из условия следует, что при $x_i = x_{0i}$ эта функция имеет экстремум. Значит, по теореме Ферма (см. 5.1), её производная равна 0. Но эта производная, по определению, и есть частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0$.

Следствие. Если функция f дифференцируема в точке экстремума P_0, то все её частные производные в этой точке равны 0, т. е.

$$df(P_0) \equiv 0.$$

Точки, в которых $df(P_0) \equiv 0$, называются ***стационарными.*** Из теоремы 2 следует, что функция может иметь экстремум только в стационарной точке. Однако не обязательно стационарная точка является точкой экстремума — условие теоремы 2 необходимо, но не достаточно.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - y^2$. Её частные производные $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$ обращаются в 0 в точке $(0, 0)$. Значит, $(0, 0)$ — стационарная точка. Однако ни максимума, ни минимума в этой точке нет. Действительно, $f(0, 0) = 0$. Но в любой окрестности точки $(0, 0)$ функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ принимает и положительные (при $x \neq 0,\ y = 0$), и отрицательные (при $x = 0,\ y \neq 0$) значения. (Графиком этой функции является гиперболический параболоид — седловидная поверхность, имеющая уравнение $z = x^2 - y^2$.)

Чтобы сформулировать достаточные условия экстремума, нужно использовать второй дифференциал. Как мы знаем, второй дифференциал функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке P_0 является ***квадратичной формой*** от приращений переменных:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) \Delta x_i \Delta x_j.$$

Здесь $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0)$ — значения вторых производных (т. е. числа), $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ — приращения переменных. Напомним определение из курса алгебры: квадратичная форма называется положительно определённой (отрицательно определённой), если она принимает только положительные (отрицательные) значения (кроме случая, когда все переменные равны 0 — тогда и значение формы, конечно, равно 0). Квадратичная форма называется неопределённой, если она принимает и положительные, и отрицательные значения (подробнее см. АГ, раздел 7.4).

Теорема 3 ***(достаточные условия локального экстремума).*** Пусть в некоторой окрестности U стационарной точки P_0 функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно. Второй дифференциал $d^2 f(P_0)$ рассматриваем как квадратичную форму от приращений $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. Если эта форма положительно определена, то P_0 — точка минимума, если отрицательно определена, то P_0 — точка максимума. Если $d^2 f$ является неопределённой квадратичной формой, то экстремума в точке P_0 нет.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для функции f в окрестности точки P_0 до второго дифференциала включительно:

$$f(P) = f(P_0) + \frac{df(P_0)}{1!} + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + r_2.$$

По условию, P_0 — стационарная точка, т. е. $df(P_0) \equiv 0$, поэтому

$$f(P) = f(P_0) + \left[\frac{d^2 f(P_0)}{2} + r_2\right].$$

Нас интересует знак выражения в квадратных скобках. Если это выражение положительно (в некоторой окрестности P_0), т. е. $f(P) \geq f(P_0)$, то ясно, что P_0 — точка локального минимума. Аналогично, если это выражение отрицательно, то $f(P) \leq f(P_0)$ и P_0 – точка максимума. Если же $\dfrac{d^2 f(P_0)}{2} + r_2$ может принимать разные знаки в любой, даже очень малой окрестности P_0, то очевидно, что экстремума в точке P_0 нет.

Рассуждая нестрого, можно сказать, что $\dfrac{d^2 f(P_0)}{2}$ — бесконечно малая 2-го порядка относительно приращений Δx_i (так как это *квадратичная* форма). А $r_2 = o((\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2)$ (как доказано выше), т. е. имеет более высокий порядок малости. Поэтому знак суммы $\dfrac{d^2 f(P_0)}{2} + r_2$ определяется знаком первого слагаемого. Отсюда сразу следует справедливость теоремы.

Проведём строгое доказательство последнего замечания для случая функции двух переменных $f(x_1, x_2)$. Однако выберем способ рассуждений, справедливый и в общем случае.

Обозначим $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$. Пусть

$$d^2 f(P_0) = A(\Delta x_1)^2 + 2B\Delta x_1 \Delta x_2 + C(\Delta x_2)^2 \text{ —}$$

положительно определённая квадратичная форма. Преобразуем:

$$\left[\frac{d^2 f(P_0)}{2} + r_2\right] = \frac{\rho^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^2 + 2B\frac{\Delta x_1}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_2}{\rho} + C\left(\frac{\Delta x_2}{\rho}\right)^2 + \frac{2r_2}{\rho^2}\right].$$

Функция $A\left(\dfrac{\Delta x_1}{\rho}\right)^2 + 2B\dfrac{\Delta x_1}{\rho}\cdot\dfrac{\Delta x_2}{\rho} + C\left(\dfrac{\Delta x_2}{\rho}\right)^2$ определена на окружности радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$. Действительно, при любых $\Delta x_1, \Delta x_2$

$$\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{\rho}\right)^2 = \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1.$$

Окружность является ограниченным и замкнутым (т. е. компактным) множеством. Поэтому непрерывная функция на ней достигает своей точной нижней грани α. Из положительной определённости $d^2f(P_0)$ следует, что это число — положительно:

$$0 < \alpha \leq A\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^2 + 2B\frac{\Delta x_1}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_2}{\rho} + C\left(\frac{\Delta x_2}{\rho}\right)^2.$$

Так как $\lim \dfrac{2r_2}{\rho^2} = 0$ при $\Delta x_i \to 0$, то ясно, что при малых $\Delta x_1, \Delta x_2$ выражение $\dfrac{2r_2}{\rho^2}$ будет меньше α. Поэтому будет положительным выражение

$$\left[\frac{d^2f(P_0)}{2} + r_2\right] = \frac{\rho^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^2 + 2B\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)\left(\frac{\Delta x_2}{\rho}\right) + C\left(\frac{\Delta x_2}{\rho}\right)^2 + \frac{2r_2}{\rho^2}\right].$$

Следовательно, P_0 — точка минимума.

Случай отрицательно определённой формы $d^2f(P_0)$ в точности аналогичен.

Пусть теперь $d^2f(P_0)$ — неопределённая форма. Возьмём такие числа $t_1,\ t_2$, что $d^2f(P_0) > 0$ при $\Delta x_1 = t_1,\ \Delta x_2 = t_2$. Посмотрим, каким будет знак выражения $\left[\dfrac{d^2f(P_0)}{2} + r_2\right]$, если изменять значения переменных: $\Delta x_1 = \varepsilon t_1,\ \Delta x_2 = \varepsilon t_2$, причём $\varepsilon \to 0$. Так как

$$\frac{\Delta x_1}{\rho} = \frac{\varepsilon t_1}{\sqrt{(\varepsilon t_1)^2 + (\varepsilon t_2)^2}} = \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}, \quad \frac{\Delta x_2}{\rho} = \frac{\varepsilon t_2}{\sqrt{(\varepsilon t_1)^2 + (\varepsilon(t_2)^2}} = \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}$$

не зависят от ε, то для данных t_1, t_2 выражение $A\left(\dfrac{\Delta x_1}{\rho}\right)^2 + 2B\dfrac{\Delta x_1}{\rho}\ \dfrac{\Delta x_2}{\rho} +$ $+ C\left(\dfrac{\Delta x_2}{\rho}\right)^2$ есть постоянное положительное число. В тоже время при $\varepsilon \to 0$ приращения $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0$, а значит $\dfrac{2r_2}{\rho^2} \to 0$. Следовательно, при малых ε выражение $\left[\dfrac{d^2f(P_0)}{2} + r_2\right]$ положительно.

Аналогично, выбирая $s_1,\ s_2$ так, чтобы при $\Delta x_1 = s_1,\ \Delta x_2 = s_2$ выполнялось неравенство $d^2f(P_0) < 0$, получим, что в любой окрестности P_0 найдутся точки, где $\left[\dfrac{d^2f(P_0)}{2} + r_2\right]$ отрицательно. Значит, ни минимума, ни максимума в точке P_0 нет. Теорема доказана.

Чтобы применять теорему 3, нужно уметь выяснять, является ли квадратичная форма положительно (или отрицательно) определённой. В курсе алгебры (АГ, раздел 7.4) был доказан ***критерий Сильвестра***, согласно которому квадратичная форма с матрицей (a_{ij}) положительно определена тогда и только тогда, когда её главные миноры положительны, т. е.

$$a_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \ldots, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Кроме того, для отрицательной определённости необходимо и достаточно, чтобы главные миноры меняли знаки, начиная с минуса.

Применим критерий Сильвестра, чтобы вывести более простые достаточные условия экстремума для функции двух переменных.

Теорема 4. Пусть в окрестности стационарной точки P_0 функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(P_0), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0).$$

Тогда если $AC - B^2 > 0$, то P_0 – точка экстремума (минимума, если $A > 0$, максимума, если $A < 0$). Если $AC - B^2 < 0$, то экстремума в точке P_0 нет.

Доказательство. Второй дифференциал функции $f(x, y)$

$$d^2 f(P_0) = A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x \Delta y + C(\Delta y)^2$$

является квадратичной формой с матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$. Если её главные миноры положительны: $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, то, по критерию Сильвестра, $d^2 f(P_0)$ — положительно определённая форма. По теореме 3 P_0 – точка минимума. Аналогично, если $A < 0$, $AC - B^2 > 0$, т. е. главные миноры меняют знаки, начиная с минуса, то форма $d^2 f(P_0)$ отрицательно определена. Значит, P_0 — точка максимума.

Докажем, что если $AC - B^2 < 0$, то $d^2 f(P_0)$ является неопределённой квадратичной формой. Если $A \neq 0$, то преобразуем:

$$d^2 f(P_0) = \frac{1}{A}(A^2(\Delta x)^2 + 2AB\Delta x \Delta y + B^2(\Delta y)^2 - B^2(\Delta y)^2 + AC(\Delta y)^2) =$$
$$= \frac{1}{A}\left[(A\Delta x + B\Delta y)^2 + (AC - B^2)\,(\Delta y)^2\right].$$

Теперь ясно, что при $\Delta x = 1,\ \Delta y = 0$ знак $d^2 f(P_0)$ совпадает со знаком A. При $\Delta x = B,\ \Delta y = -A$ знак $d^2 f(P_0)$ противоположен знаку A. Следовательно, $d^2 f(P_0)$ — неопределённая форма. В точности так же проводится доказательство, если $C \neq 0$. Оставшийся случай $A = C = 0$ очень прост: квадратичная форма $d^2 f(P_0) = 2B\Delta x \Delta y$ при $B \neq 0$, очевидно, является неопределённой. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 4 ничего не говорится о возможности

$$AC - B^2 = 0.$$

Покажем на примерах, что в этом случае экстремум может быть, а может и не быть.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^4$.

Решение. Найдём частные производные: $z'_x = 2x$, $z'_y = 4y^3$. Решая систему уравнений $\begin{cases} 2x = 0, \\ 4y^3 = 0, \end{cases}$ видим, что стационарная точка только одна: $(0, 0)$. Найдём частные производные 2-го порядка в этой точке:

$$A = z''_{xx} = 2\,\Big|_{(0,0)} = 2, \quad B = z''_{xy} = 0\,\Big|_{(0,0)} = 0, \quad C = z''_{yy} = 12y^2\,\Big|_{(0,0)} = 0.$$

Следовательно, $AC - B^2 = 0$, теорема 4 ответа на вопрос об экстремуме не даёт. Однако ясно, что $z(0, 0) = 0$, а в любой окрестности этой точки $z(x, y) = x^2 + y^4 \geq 0$. Значит, $(0, 0)$ — точка минимума.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-1)^3 + (x-y)^2$.

Решение. Найдём стационарные точки.

$$z'_x = 3(x-1)^2 + 2(x-y), \quad z'_y = -2(x-y).$$

Приравниваем производные к 0, решаем полученную систему уравнений:

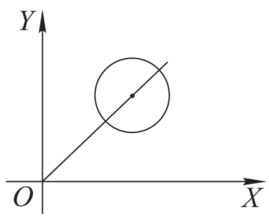
$$\begin{cases} 3(x-1)^2 + 2(x-y) = 0, \\ -2(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1)^2 = 0, \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Имеется одна стационарная точка. Найдём в этой точке частные производные второго порядка:

$$A = z''_{xx} = 6(x-1) + 2\,\Big|_{(1,1)} = 2, \quad B = z''_{xy} = -2\,\Big|_{(1,1)} = -2, \quad C = z''_{yy} = 2.$$

Значит, $AC - B^2 = 4 - 4 = 0$, требуется дополнительное исследование.

Вычислим значение функции в «подозрительной» точке: $z(1, 1) = 0$.

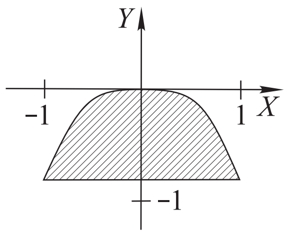


В определении функции $z = (x-1)^3 + (x-y)^2$ второе слагаемое всегда больше или равно 0. Нельзя ли за счёт первого слагаемого получить значения разных знаков? Будем брать точки, лежащие на прямой $y = x$. В любой из них $z(x, y) = (x-1)^3$. Значит, при $x > 1$ получим $z(x, y) > 0$, а при $x < 1$, очевидно, $z(x, y) < 0$. Итак, в любой окрестности точки $(1, 1)$ функция $z(x, y)$ принимает и положительные, и отрицательные значения. Экстремума нет.

В заключение раздела рассмотрим задачу об отыскании наименьшего и наибольшего значений функции на компактном множестве. Из дифференцируемости следует непрерывность, а непрерывная функция на компактном множестве ограничена и достигает своих наибольшего и наименьшего значений (теорема 9 из 9.3). Каждое из этих значений достигается либо во внутренней точке (и тогда это точка локального экстремума), либо на границе. В общем случае исследование на границе может оказаться сложной задачей. Однако если рассматривается функция 2 переменных, а граница задана аналитически, то, используя уравнение границы, можно свести задачу к изучению функции одной переменной.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + y$ в области, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = -1$.

Решение. Сделаем схематический чертёж. Область ограничена параболой $y = -x^2$, $x \in [-1, 1]$ и прямой $y = -1$, $x \in [-1, 1]$. Решение задачи проведём по такому плану:



1) найдём стационарные точки внутри области, вычислим значения функции в них;

2) найдём наибольшее и наименьшее значения на «параболическом» участке границы;

3) то же самое — на прямолинейном участке;

4) сравнив все полученные значения, выберем из них наибольшее и наименьшее.

1) Исследуем функцию внутри области:

$$z'_x = 2x - y, \quad z'_y = 2y - x + 1.$$

Приравнивая производные к 0, решаем систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ 4x - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}, \\ y = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

В найденной точке $z\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{2}{9} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$.

2) Исследуем на участке границы, который задан уравнением $y = -x^2$, $x \in [-1, 1]$. Исключая y, получаем функцию одной переменной:

$$z_1(x) = x^2 + x^4 + x^3 - x^2 = x^4 + x^3, \quad x \in [-1, 1].$$

Дифференцируя, найдём критические точки:

$$z'_1 = 4x^3 + 3x^2; \quad 4x^3 + 3x^2 = 0 \;\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{3}{4}.$$

Вычислим значения в этих точках и на концах отрезка $[-1, 1]$:

$$z_1(0) = 0, \qquad z_1\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{81}{256} - \frac{27}{64} = -\frac{27}{256}; \qquad z_1(-1) = 0; \quad z_1(1) = 2.$$

3) Исследуем на границе $y = -1$, $x \in [-1, 1]$. Подставляя $y = -1$, опять получим функцию одной переменной:

$$z_2 = x^2 + 1 + x - 1 = x^2 + x, \quad x \in [-1, 1].$$

Находим критические точки:

$$z_2' = 2x + 1; \quad 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Значения на концах отрезка мы уже нашли, исследуя первый участок границы. Значение в критической точке: $z_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

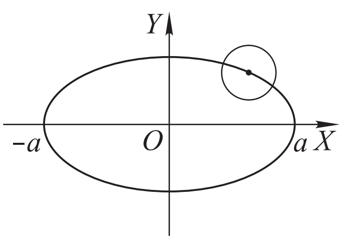
4) Сравнивая все найденные значения, получим:

$$z_{\max} = z(1, -1) = 2, \qquad z_{\min} = z\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{1}{4}.$$

10.3. Неявные функции

Неявный способ задания функции одной переменной рассматривался в первых главах пособия. В частности, мы учились дифференцировать функцию, неявно заданную уравнением $F(x, y) = 0$. Здесь мы более точно сформулируем условия существования неявной функции, выведем формулу для её производной. Затем распространим эти результаты на неявные функции нескольких переменных.

Равенство $F(x, y) = 0$ может определять на плоскости самые разные множества точек, даже пустое множество или одну точку (приведите такие примеры!). Однако часто это множество представляет собой ***кривую***.



Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ определяет эллипс. Но не всякая кривая является графиком функции $y = f(x)$. На эллипсе, например, каждому $x \in (-a, a)$ соответствуют ***два*** различных значения y. Но если рассматривать не весь эллипс, а лишь его часть, лежащую в окрестности какой-либо точки, то получим график некоторой функции. Исключение составляют точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$. Даже в очень малой окрестности каждой из них эллипс не является графиком функции. Заметим, что как раз в этих точках касательная к эллипсу вертикальна (т. е. параллельна оси OY).

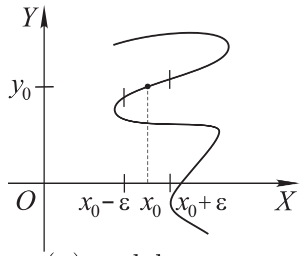
Уточним понятие неявной функции. Будем говорить, что уравнение $F(x, y) = 0$ задаёт в окрестности точки (x_0, y_0) неявную функцию, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ определена функция $y = y(x)$, для которой $F(x, y(x)) = 0 \quad (\forall x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon))$, причём $y(x_0) = y_0$.

Сформулируем точно условия существования неявной функции.

Теорема 5. Пусть в окрестности точки (x_0, y_0) функция $F(x, y)$ непрерывна, причём $F(x_0, y_0) = 0$. Если частная производная $F_y'(x, y)$

непрерывна в точке (x_0, y_0), причём $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y) = 0$ задаёт в окрестности (x_0, y_0) непрерывную неявную функцию $y = y(x)$.

Доказательство этой теоремы мы не рассматриваем. Отметим только: условие $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ как раз и означает, что касательная в этой точке не является вертикальной.



Теорема 6. Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в окрестности точки (x_0, y_0) неявную функцию $y = y(x)$. Пусть F'_x, F'_y непрерывны в этой окрестности, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда функция $y = y(x)$ дифференцируема, причём

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Доказательство. Дадим переменной x приращение Δx. Тогда функция $y(x)$ получит приращение Δy:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y_0.$$

Рассмотрим соответствующее Δx, Δy приращение функции $F(x, y)$. Так как $F(x_0, y_0) = 0$, то

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \\ = F(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) = F(x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x)).$$

В любой точке x рассматриваемой окрестности $F(x, y(x)) = 0$, поэтому $F(x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x)) = 0$. Значит, $\Delta F = 0$. Так как частные производные функции $F(x, y)$ непрерывны, то приращение ΔF можно (теорема 12, 9.4.2) записать в виде:

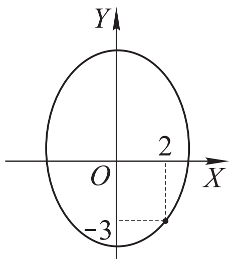
$$\Delta F = 0 = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

причём $\lim \varepsilon_1 = \lim \varepsilon_2 = 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Отсюда следует, что $(F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2)\Delta y = -(F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1)\Delta x$, т. е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2}$. Если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$ (так как функция $y(x)$ непрерывна), а значит и $\varepsilon_i \to 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим то, что требуется: $y'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

Пример 5. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{18} = 1$ в окрестности точки $(2, -3)$.

Решение. Ищем частные производные функции $F(x, y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{18} - 1$:

$$F'_x = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}, \quad F'_y = \frac{2y}{18} = \frac{y}{9}.$$



Так как $F'_y(2,-3) = -\dfrac{1}{3} \neq 0$, то неявная функция определена, и её производная $y'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{\frac{x}{4}}{\frac{y}{9}} = -\dfrac{9x}{4y}$.

В частности, $y'(2) = -\dfrac{9\cdot 2}{4(-3)} = \dfrac{3}{2}$.

Замечание. В этом примере функцию $y = y(x)$ можно задать явно:

$$y^2 = 18\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) = 18 - \frac{9x^2}{4}, \quad y = -\sqrt{18 - \frac{9x^2}{4}}.$$

Теперь её производная вычисляется по обычным правилам:

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{18 - \frac{9x^2}{4}}} \cdot \left(18 - \frac{9x^2}{4}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{18 - \frac{9x^2}{4}}} \cdot \left(\frac{-18x}{4}\right)\Bigg|_{x=2} = \frac{3}{2}.$$

Однако первый способ потребовал меньше вычислений. А иногда перейти к явному заданию невозможно.

Пример 6. Найти производную $y'(0)$ функции, заданной в окрестности точки $(0,\pi)$ уравнением $\cos(x+y) + 3x + y = \pi - 1$.

Решение. Здесь нельзя выразить y через x явно. Пусть

$$F(x,y) = \cos(x+y) + 3x + y - \pi + 1.$$

Тогда $F(0,\pi) = 0$, а частная производная $F'_y = -\sin(x+y) + 1\,\big|_{(0,\pi)} = 1 \neq 0$. Значит, по теореме 5, в окрестности точки $x = 0$ определена неявная функция. Так как $F'_x = -\sin(x+y) + 3\,\big|_{(0,\pi)} = 3$, то её производная в точке $x = 0$ равна: $y'(0) = -\dfrac{F'_x(0,\pi)}{F'_y(0,\pi)} = -3$.

Функция нескольких переменных тоже может быть задана неявно. Условия существования такой функции и формулы для её частных производных аналогичны рассмотренным выше, приведём их без доказательства.

Теорема 7. Пусть в окрестности точки $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ функция $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ и её первые частные производные непрерывны. Если $F(P_0) = 0$, а $F'_y(P_0) \neq 0$, то равенство $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ задаёт в окрестности точки $(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ функцию $y = y(x_1, \ldots, x_n)$, причём её частные производные можно вычислить по формулам:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(P_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(P_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(P_0)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим теперь вопрос о системе неявных функций. По определению, система равенств

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0,\\ f_2(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_m(x_1,\ldots,x_n,y_1\ldots,y_m)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

неявно задаёт функции

$$y_1=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\quad y_2=\varphi_2(x_1,\ldots,x_n),\quad \ldots,\quad y_m=\varphi_m(x_1,\ldots,x_n),$$

если эти функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ определены на некоторой области $U\subseteq\mathbb{R}^n$, причём $\forall(x_1,\ldots,x_n)\in U$, $\forall i=1,\ldots,m$

$$f_i(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\varphi_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_m(x_1,\ldots,x_n))=0.$$

Сформулируем условия, при которых система $(*)$ определяет неявные функции $y_1,\ldots,y_m$. Для этого нам потребуется понятие якобиана. ***Якобианом*** (или определителем Якоби) системы функций

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m),\quad \ldots,\quad f_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$$

по переменным $y_1,\ldots,y_m$ называется определитель

$$\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}.$$

Конечно, якобиан является функцией от переменных $x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_m$.

Теорема 8. Пусть в системе $(*)$ функции $f_1,\ldots,f_m$ и их частные производные 1-го порядка по всем переменным непрерывны в некоторой окрестности E точки $P_0(x_{01},\ldots,x_{0n},y_{01},\ldots,y_{0m})$, причём $f_i(P_0)=0$ $(\forall i)$. Пусть выполнено условие: $\dfrac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(P_0)\neq 0$. Тогда система $(*)$ неявно задаёт функции

$$y_1=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ \ y_2=\varphi_2(x_1,\ldots,x_n),\ \ldots,\ y_m=\varphi_m(x_1,\ldots,x_n)$$

на некоторой окрестности $U\subseteq\mathbb{R}^n$ точки $(x_{01},\ldots,x_{0n})$, причём

$$\varphi_i(x_{01},\ldots,x_{0n})=y_{0i},\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Доказательство рассмотрим только для частного случая, когда в системе $(*)$ все равенства ***линейны относительно*** $y_1,\ldots,y_m$. Подробнее, пусть система $(*)$ имеет вид:

$$\begin{cases} f_1=a_1(x_1,\ldots,x_n)+a_{11}(x_1,\ldots,x_n)y_1+\ldots+a_{1m}(x_1,\ldots,x_n)y_m=0,\\ f_2=a_2(x_1,\ldots,x_n)+a_{21}(x_1,\ldots,x_n)y_1+\ldots+a_{2m}(x_1,\ldots,x_n)y_m=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_m=a_m(x_1,\ldots,x_n)+a_{m1}(x_1,\ldots,x_n)y_1+\ldots+a_{mm}(x_1,\ldots,x_n)y_m=0, \end{cases}$$

где $a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$, $a_k(x_1,\ldots,x_n)$ — непрерывные функции. Заметим, что $a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, т. е. определитель системы является якобианом:

$$|a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)|=\begin{vmatrix} a_{11}(x_1,\ldots,x_n) & \ldots & a_{1m}(x_1,\ldots,x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1}(x_1,\ldots,x_n) & \ldots & a_{mm}(x_1,\ldots,x_n)\end{vmatrix}=\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(y_1,\ldots,y_n)}.$$

По условию, он не равен 0 в точке P_0, а значит (это следует из непрерывности рассматриваемых функций) и в некоторой её окрестности. Но тогда, как известно из линейной алгебры, переменные $y_1,\ldots,y_n$ можно выразить через $x_1,\ldots,x_n$ (например, по формулам Крамера). Следовательно, в этой окрестности существуют функции $y_i=\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)$, неявно заданные системой $(*)$.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении частных производных функций $y_i=\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)$, заданных неявно системой $(*)$. Пользуясь правилом дифференцирования сложных функций (теорема 13, 9.4.2), дифференцируем по x_1 каждое из равенств $(*)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}+\frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_m}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial f_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_1}=0.\end{gathered}$$

Получена система линейных уравнений относительно $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1},\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial y_m}{\partial x_1}$.

Её можно решить, если определитель этой системы $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}$,

т. е. якобиан системы функций $f_1,\ldots,f_m$ по переменным $y_1,\ldots,y_m$, не равен в данной точке 0.

Пример 7. Функции $y(x)$, $z(x)$ заданы неявно системой равенств

$$\begin{cases}3x^2+y^2-4z^2-8=0,\\ 2x-2y^2+5z^2+11=0\end{cases}$$

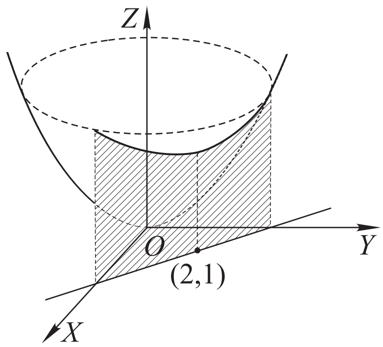
в окрестности точки $(1,-3,1)$. Найти $y'(1)$, $z'(1)$.

Решение. Дифференцируем каждое равенство по x, по правилу дифференцирования сложных функций: $\begin{cases}6x+2yy'-8zz'=0,\\ 2-4yy'+10zz'=0.\end{cases}$ При $x=1$

получается система линейных уравнений: $\begin{cases} 6-6y'-8z'=0, \\ 2+12y'+10z'=0. \end{cases}$ Решая её, находим: $y'(1)=-\dfrac{19}{9}$, $z'(1)=\dfrac{7}{3}$.

10.4. Условные экстремумы

Постановку задачи сначала поясним на примере.



Пример 8. На прямой $2x+y=5$ найти точку, в которой функция $z=x^2+y^2$ имеет локальный минимум.

Решение. Обратим внимание: минимум функции $z=x^2+y^2$ требуется найти, рассматривая не произвольные точки (x,y), а лишь те, которые удовлетворяют ***условию*** (или уравнению связи) $2x+y=5$. В данном случае задача решается просто: используя уравнение связи, исключим одну из переменных: $y=5-2x$. Получим функцию одной переменной:

$$z=x^2+(5-2x)^2=5x^2-20x+25.$$

Её экстремумы находим по обычным правилам:

$$z'=10x-20; \quad 10x-20=0 \Rightarrow x=2.$$

Так как $z''=10$, $z''(2)>0$, то $x=2$ — точка минимума. Из уравнения связи находим: $y=5-2x=1$. Итак, $(2,1)$ — точка условного минимума.

Однако в более сложных задачах не всегда можно аналитически выразить одну переменную через другие. Кроме того, уравнений связи может быть несколько. Поэтому мы рассмотрим общий метод решения таких задач — ***метод множителей Лагранжа.*** Начнём с определения.

Пусть дана функция $f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ и уравнения связи:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0, \\ f_2(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n,y_1\ldots,y_m)=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Точка $P_0(x_{01},\ldots,x_{0n},y_{01},\ldots,y_{0m})$, удовлетворяющая условиям $(*)$, называется ***точкой условного минимума*** функции f, если существует окрестность U точки P_0 такая, что

$$\forall P\in U \ \ f_i(P)=0 \ (i=1,\ldots,m) \ \Rightarrow \ f(P_0)\le f(P).$$

Аналогично определяется и понятие условного максимума.

Для решения задачи о нахождении условных экстремумов рассмотрим так называемую ***функцию Лагранжа***:

$$F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Здесь новые переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ называются ***множителями*** Лагранжа. Их количество равно числу уравнений связи. С помощью функции Лагранжа рассмотрим необходимое условие условного экстремума.

Теорема 9. Пусть P_0 — точка условного экстремума функции $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ при условии (*), причём якобиан $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(P_0)$ не равен 0. Тогда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что частные производные первого порядка функции Лагранжа в точке P_0 обращаются в 0.

Доказательство, чтобы упростить запись, проведём для $m = n = 2$.

Итак, пусть $P_0(x_{01}, x_{02}, y_{01}, y_{02})$ — точка локального экстремума функции $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ при условии

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \;\; f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0.$$

Так как выполнены условия теоремы 8, то существуют функции $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2), y_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$, заданные неявно условиями $f_1 = 0, f_2 = 0$. Рассмотрим функцию

$$\overline{f}(x_1, x_2) = f(x_1,\, x_2,\, \varphi_1(x_1, x_2),\, \varphi_2(x_1, x_2)).$$

Ясно, что (x_{01}, x_{02}) — точка экстремума функции $\overline{f}$. Значит, частные производные $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x_2}$ в этой точке равны 0. Вычислим сначала производную по x_1, используя правило дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0.$$

Продифференцируем (также по x_1) уравнения связей:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0.$$

Сложим последние 3 равенства, предварительно умножив второе на множитель λ_1, третье — на λ_2. После перегруппировки слагаемых получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right)+ \\ +\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_2}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right)=0.$$

Подберём λ_1, λ_2 так, чтобы 2-я и 3-я скобки оказались равными 0:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_1}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_2}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_2}=0. \tag{2}$$

Это возможно, так как определитель этой системы линейных уравнений $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0$ по условию. Ясно, что тогда и оставшаяся, 1-я скобка тоже обращается в 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0. \tag{3}$$

Те же самые вычисления теперь выполним, дифференцируя функцию $\overline{f}(x_1, x_2)$ и уравнения связей по x_2. Система уравнений (1), (2) для определения λ_1, λ_2 будет, очевидно, в точности такой же. Значит, и λ_1, λ_2 — те же самые. Аналогично (3) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0. \tag{4}$$

Для окончания доказательства заметим, что левые части равенств (1), (2) являются частными производными $\dfrac{\partial F}{\partial y_1}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y_2}$ функции Лагранжа. Аналогично, левые части равенств (3), (4) — это $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$. Кроме того, координаты точки P_0 удовлетворяют уравнениям связей. Их левые части также формально являются частными производными функции Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=f_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=f_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=0.$$

Итак, все 6 частных производных функции Лагранжа F равны 0. Теорема доказана.

Ясно, что необходимое условие условного экстремума можно сформулировать и так:

$$P_0 \text{ — точка условного экстремума} \quad \Rightarrow \quad dF(P_0)=0.$$

Достаточные условия приведём без доказательства.

Теорема 10. Пусть в точке P_0 выполнены необходимые условия экстремума функции $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ с уравнениями связей $f_1 = 0, \ldots, f_m = 0$ (т. е. $dF(P_0) = 0$). Если второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2F(P_0) > 0$$

при всех значениях приращений $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n$, для которых справедливы равенства $df_1(P_0) = 0, \ldots, df_m(P_0) = 0$, то P_0 — точка условного минимума. Аналогично, если $d^2F(P_0) < 0$ (при ***таких*** значениях приращений), то P_0 — точка условного максимума.

Замечание. Второй дифференциал $d^2F(P_0)$ при указанных ограничениях является квадратичной формой от переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, $\Delta y_1, \ldots, \Delta y_n$ (и не зависит от $\Delta\lambda_i$). Действительно, слагаемые $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\Delta\lambda_i\Delta\lambda_j$, очевидно, равны 0. Далее, так как $\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_j} = f_j$, то, собирая слагаемые с $\Delta\lambda_j$, получим (в точке P_0):

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial\lambda_j}\Delta x_i\Delta\lambda_j + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y_k\partial\lambda_j}\Delta y_k\Delta\lambda_j =$$
$$= \Delta\lambda_j\left(\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\Delta y_k\right) = \Delta\lambda_j \cdot df_j = 0.$$

Пример 9. Исследовать функцию $z = xy$ на экстремум при условии $y + x^2 - 3 = 0$.

Решение. Конечно, это упражнение решается просто — методом исключения одной из переменных. Однако мы, для иллюстрации, применим метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим функцию Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y + x^2 - 3)$. Вычислим её частные производные, приравняем их к 0:

$$\begin{cases} F'_x = y + 2x\lambda = 0, \\ F'_y = x + \lambda = 0, \\ F'_\lambda = y + x^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Из первых уравнений: $x = -\lambda, y = 2\lambda^2$. Подставим в последнее уравнение: $2\lambda^2 + \lambda^2 - 3 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = \pm 1$. Для $\lambda = 1$ получаем точку $P_1(-1, 2)$, для $\lambda = -1$ — точку $P_2(1, 2)$.

Чтобы исследовать найденные точки, рассмотрим второй дифференциал d^2F:

$$d^2F = F''_{xx}(\Delta x)^2 + 2F''_{xy}\Delta x\Delta y + F''_{yy}(\Delta y)^2 = 2\lambda(\Delta x)^2 + 2\Delta x\Delta y.$$

(В соответствии с замечанием, сделанным после теоремы 10, слагаемые с $\Delta\lambda$ отсутствуют.) Рассматривать следует лишь такие значения $\Delta x, \Delta y$, при которых $d(y + x^2 - 3) = 2x\Delta x + \Delta y = 0$.

Рассмотрим сначала точку $P_1(-1, 2)$, соответствующую $\lambda = 1$. В этой точке $d^2F(P_1) = 2(\Delta x)^2 + 2\Delta x\Delta y$. С учётом условия $2x\Delta x + \Delta y = -2\Delta x + \Delta y = 0$, получаем: $d^2F(P_1) = 2(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^2 > 0$. Значит, $P_1(-1, 2)$ — точка условного минимума.

Аналогично, $d^2F(P_2) = -2(\Delta x)^2 + 2\Delta x\Delta y$. С учётом условия $2x\Delta x + \Delta y = 2\Delta x + \Delta y = 0$ получаем: $d^2F(P_2) = -2(\Delta x)^2 - 4(\Delta x)^2 < 0$. Значит, $P_2(1, 2)$ — точка условного максимума.

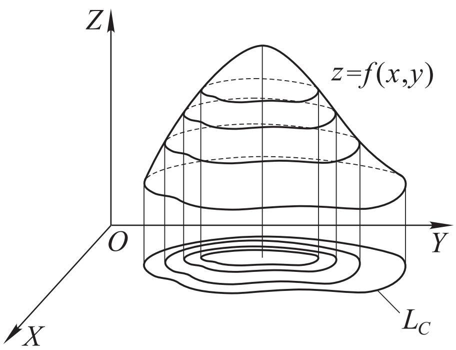
10.5. Геометрический подход к изучению функций 2 и 3 переменных

10.5.1. Скалярное поле

Если на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^3$ задана функция $f(x, y, z)$, то иногда говорят, что на D задано ***скалярное поле*** f. Можно рассматривать поле температур (например, в каком-либо помещении), поле давлений (например, в резервуаре с жидкостью) и др. Таким образом, для нас скалярное поле — лишь новый термин, содержание его нам известно. Если речь идёт о функции двух переменных, то поле называется ***плоским.***

Поверхностью уровня скалярного поля f называется геометрическое место точек, в которых f принимает постоянное значение.

Пример 10. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано скалярное поле $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Его поверхности уровня — сферы, заданные уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 = C$. Изменяя C, будем получать различные поверхности уровня (сферы разных радиусов).



Для плоского поля уравнения $f(x, y) = C$ определяют ***линии уровня*** L_C. Иногда удобно задавать плоское скалярное поле с помощью линий уровня. Например, изотермы на карте погоды дают представление о распределении температур. Линии одинаковой высоты на карте местности позволяют судить о наличии возвышенностей, крутизне склонов.

10.5.2. Производная по направлению

Рассмотрим скалярное поле, заданное в области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ дифференцируемой функцией $f = f(x, y, z)$. Пусть $\overline{s}$ — какой-либо ненулевой вектор, L — луч, выходящий из точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\overline{s}$. Дадим приращения переменным $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ так, чтобы точка

$P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ снова лежала на луче. Приращение f по направлению $\overline{s}$ — это разность

$$\Delta_{\overline{s}} f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

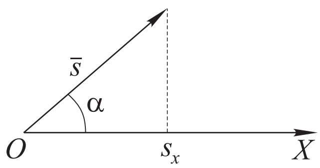
Обозначим, кроме того, $\Delta s = |P_0P| = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta_{\overline{s}} f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial \overline{s}},$$

то он называется ***производной поля f по направлению*** $\overline{s}$. При вычислении предела переменные $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ стремятся к 0 таким образом, что переменная точка $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ всё время остаётся на луче L.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению. Пусть вектор $\overline{s}$ образует с осями координат углы α, β, γ. Косинусы этих углов, напомним, называются направляющими косинусами вектора $\overline{s}$. Если $\overline{s} = (s_x, s_y, s_z)$, то, рассматривая соответствующий прямоугольный треугольник, видим, что $\cos\alpha = \dfrac{s_x}{|\overline{s}|}$. Так же и $\cos\beta = \dfrac{s_y}{|\overline{s}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{s_z}{|\overline{s}|}$.



Векторы $\overline{s}$ и $\overline{P_0P} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ одинаково направлены, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}} = \frac{\Delta x}{\Delta s}, \quad \cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad \cos\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

По условию, функция $f(x,y,z)$ дифференцируема, т. е. приращение $\Delta_{\overline{s}} f$ можно представить в виде

$$\Delta_{\overline{s}} f = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

причём функции $\varepsilon_i \to 0$, если $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$. Разделим обе части равенства на Δs и перейдём к пределу при $\Delta s \to 0$ так, чтобы точка $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ оставалась на луче L:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta_{\overline{s}} f}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}\right] =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Итак, получена формула для вычисления в точке P_0 производной скалярного поля (или функции) $f(x,y,z)$ по направлению вектора $\overline{s}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{s}} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cos\gamma.$$

Пример 11. Найти производную функции $f(x, y, z) = x^2 + 2yz$ в точке $P_0(2, 5, -1)$ по направлению вектора $\overline{s} = (2, -2, 1)$.

Решение. Найдём частные производные в точке P_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\Big|_{P_0} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2z\Big|_{P_0} = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2y\Big|_{P_0} = 10.$$

Найдём направляющие косинусы вектора $\overline{s}$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Вычисляем производную по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{s}} = 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2)\left(-\frac{2}{3}\right) + 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{22}{3}.$$

Замечания. 1. Производная по направлению характеризует скорость изменения функции при движении переменной точки в этом направлении.

2. Если направление вектора $\overline{s}$ совпадает с направлением одной из координатных осей, то $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{s}}$ совпадает с соответствующей частной производной, так как один из направляющих косинусов равен 1, а другие 0. Таким образом, например, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{i}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

3. В случае плоского поля формула упрощается:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{s}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta.$$

10.5.3. Градиент скалярного поля

Градиентом скалярного поля $f(x, y, z)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\overline{k},$$

т. е. вектор, координаты которого — частные производные. Градиент тесно связан с производной по направлению.

Теорема 11. Производная по направлению $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{s}}$ равна проекции вектора $\operatorname{grad} f$ на вектор $\overline{s}$.

Доказательство. Если $\overline{s} = (s_x,\, s_y,\, s_z)$, то единичный вектор того же направления равен:

$$\overline{s_0} = \frac{\overline{s}}{|\overline{s}|} = \left(\frac{s_x}{|\overline{s}|},\, \frac{s_y}{|\overline{s}|},\, \frac{s_z}{|\overline{s}|}\right) = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma).$$

Вычислим скалярное произведение:

$$(\mathrm{grad} f, \overline{s_0}) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial f}{\partial \overline{s}}.$$

С другой стороны, $(\mathrm{grad} f, \overline{s_0}) = |\mathrm{grad} f| \cdot |\overline{s_0}| \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между градиентом и $\overline{s_0}$. Так как $|\overline{s_0}| = 1$, то

$$(\mathrm{grad} f, \overline{s_0}) = |\mathrm{grad} f| \cdot \cos\varphi = \text{Пр}_{\overline{s}}\mathrm{grad} f.$$

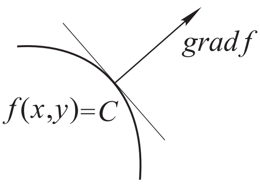
Сравнивая полученные для $(\mathrm{grad} f, \overline{s_0})$ выражения, видим:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{s}} = \text{Пр}_{\overline{s}}\mathrm{grad} f,$$

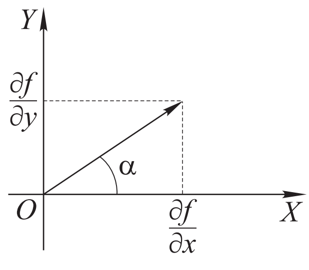
что и требовалось доказать.

Следствие. Градиент имеет направление, в котором функция возрастает наиболее быстро, скорость этого возрастания равна модулю градиента.

Доказательство. Ясно, что $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{s}} = |\mathrm{grad} f| \cdot \cos\varphi$ принимает наибольшее значение, равное $|\mathrm{grad} f|$, когда $\cos\varphi = 1$, т. е. когда $\overline{s} \uparrow\uparrow \mathrm{grad} f$.



Замечание. Если $f = f(x, y)$ плоское поле, то градиент в каждой точке направлен по нормали к линии уровня, проведённой через эту точку. Действительно, касательная к линии $f(x, y) = C$ имеет угловой коэффициент $k_1 = \dfrac{dy}{dx}$, где функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $f(x, y) = C$. По теореме 6 из 10.3, $k_1 = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$.



С другой стороны, угловой коэффициент прямой, параллельной градиенту $k_2 = tg\alpha = \dfrac{f'_y}{f'_x}$. Значит, $k_1 k_2 = -1$, что является условием перпендикулярности двух прямых. Итак, ***градиент перпендикулярен касательной.***

Пример 12. Найти уравнение касательной, проведённой к линии $x^3 + y^3 = 9xy$ в точке $P(2, 4)$.

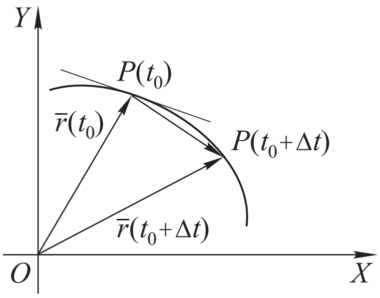
Решение. Найдём градиент функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ в точке P: $f'_x = 3x^2 - 9y = 12 - 36 = -24$, $f'_y = 3y^2 - 9x = 48 - 18 = 30$, $\mathrm{grad} f(P) = (-24, 30)$. Как известно, уравнение прямой на плоскости, имеющей вектор нормали $\overline{N} = (A, B)$ и проходящей через точку (x_0, y_0), имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Значит, в нашем случае уравнение касательной запишется так: $-24(x - 2) + 30(y - 4) = 0$, или $4x - 5y + 12 = 0$.

10.5.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим сначала вопрос о касательной к пространственной кривой. Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Используя векторную запись, эти уравнения можно объединить: $\overline{r} = \overline{r}(t)$,



где $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Рассмотрим на кривой точку P_0, соответствующую значению параметра t_0. Давая параметру приращение Δt, получим точку $P = P(t_0 + \Delta t)$. Ясно, что вектор $\overline{P_0P} = \overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)$ направлен по секущей. Так же направлен, очевидно, и вектор $\dfrac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}$. При переходе к пределу при $\Delta t \to 0$ секущая стремится занять положение касательной, поэтому вектор $\overline{r}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ направлен по касательной к кривой. Заметим, кроме того, что $\overline{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, так как все действия выполняются покоординатно.

Пример 13. Написать уравнения касательной, проведённой к винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ в точке $(a,\ 0,\ 2\pi b)$.

Решение. Указанная точка соответствует значению параметра $t = 2\pi$. Найдём направляющий вектор касательной:

$$\overline{r}' = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)\,\big|_{t=2\pi} = (0, a, b).$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(a, 0, 2\pi b)$ в направлении вектора $(0, a, b)$, имеют вид: $\dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-2\pi b}{b}$, или

$$x = a,\quad \frac{y}{a} = \frac{z-2\pi b}{b}.$$

Замечания. 1. Если в некоторой точке все производные $x'(t), y'(t), z'(t)$ обращаются в 0, то кривая в этой (***особой***) точке не имеет определённой касательной.

2. Аналогично можно решить задачу о проведении касательной к плоской параметрически заданной кривой.

Перейдём к вопросу о касательной плоскости к поверхности.

Прямая называется ***касательной к поверхности*** в данной точке, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через эту точку.

Теорема 12. Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, точка $P(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности, причём частные производные F'_x, F'_y, F'_z непрерывны в точке P и не равны 0 одновременно. При этих условиях все касательные прямые к поверхности в точке P лежат в одной плоскости, которая называется ***касательной плоскостью*** к поверхности. Вектор $\mathrm{grad}F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ направлен по нормали к касательной плоскости.

Доказательство. Рассмотрим кривую

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

лежащую на поверхности, проходящую через P и имеющую касательную в этой точке. Так как кривая лежит на поверхности, то при любом допустимом значении параметра t справедливо равенство

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Дифференцируем по t, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0.$$

Левую часть равенства можно рассматривать как скалярное произведение вектора $\mathrm{grad}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ на вектор $\overline{r}' = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$. По условию, $\mathrm{grad}F \neq \overline{0}$. В силу выбора кривой $\overline{r}'(t) \neq \overline{0}$. Поэтому равенство $(\mathrm{grad}F,\ \overline{r}'(t)) = 0$ означает, что $\mathrm{grad}F$ перпендикулярен направляющему вектору касательной $\overline{r}'(t)$. Следовательно, касательные ко всем кривым на поверхности, проходящим через точку P, перпендикулярны градиенту, а значит лежат в одной плоскости. Теорема доказана.

Поверхность, в каждой точке которой существует касательная плоскость, называется ***гладкой.*** Если поверхность является объединением конечного числа гладких поверхностей, пересекающихся лишь по граничным точкам, то она называется ***кусочно-гладкой.*** В точках линий, по которым «склеиваются» гладкие куски, касательная плоскость может не существовать.

Прямая, проходящая через точку поверхности P перпендикулярно к касательной плоскости, называется ***нормалью*** к поверхности.

Пример 14. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 2y^2$ в точке $P(2, 1, 6)$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z = 0$. Найдём градиент функции F в точке P:

$$F'_x = 2x\,\Big|_P = 4, \quad F'_y = 4y\,\Big|_P = 4, \quad F'_z = -1\,\Big|_P = -1.$$

Уравнение касательной плоскости: $4(x-2) + 4(y-1) - (z-6) = 0$, или $4x + 4y - z - 6 = 0$. Канонические уравнения нормали:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-6}{-1}.$$

10.6. Задачи с решениями

1. Разложить функцию $f(x,y) = y^x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $P(2,1)$ до членов 2-го порядка.

Решение. Формула Тейлора при $n = 2$ имеет вид:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + r_2,$$

причём значения дифференциалов вычисляются для приращений $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$. Вычислим дифференциал df:

$$\frac{\partial(y^x)}{\partial x} = y^x \ln y \,\Big|_P = 0, \quad \frac{\partial(y^x)}{\partial y} = xy^{x-1} \,\Big|_P = 2.$$

Значит, $df = 2dy = 2(y-1)$. Теперь ищем $d^2 f$.

$$\frac{\partial^2(y^x)}{\partial x^2} = \frac{\partial(y^x \ln y)}{\partial x} = y^x \ln^2 y \,\Big|_P = 0,$$
$$\frac{\partial^2(y^x)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(y^x \ln y)}{\partial y} = \frac{\partial(y^x)}{\partial y} \ln y + y^x \frac{\partial(\ln y)}{\partial y} = xy^{x-1} \ln y + y^{x-1} \,\Big|_P = 1,$$
$$\frac{\partial^2(y^x)}{\partial y^2} = \frac{\partial(xy^{x-1})}{\partial y} = x(x-1)y^{x-2} \,\Big|_P = 2.$$

Значит, $d^2 f(P) = 2dxdy + 2(dy)^2 = 2(x-2)(y-1) + 2(y-1)^2$. Получаем разложение:

$$y^x = 1 + 2(y-1) + (x-2)(y-1) + (y-1)^2 + r_2.$$

2. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = 2x + 6y - 4z - 2x^2 - y^2 - z^2 + xy.$$

Решение. Найдём частные производные.

$$f'_x = 2 - 4x + y, \quad f'_y = 6 - 2y + x, \quad f'_z = -4 - 2z.$$

Приравнивая их к 0, найдём стационарные точки.

$$\begin{cases} 2 - 4x + y = 0, \\ 6 - 2y + x = 0, \\ -4 - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 2, \\ 6 - 2(4x-2) + x = 0, \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{7}, \\ y = \dfrac{26}{7}, \\ z = -2. \end{cases}$$

Итак, стационарная точка только одна. Для её исследования вычислим дифференциал 2-го порядка.

$$f''_{xx} = -4, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{zz} = -2, \quad f''_{xy} = 1, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = 0.$$

Значит, $d^2 f = -4(dx)^2 - 2(dy)^2 - 2(dz)^2 + 2dxdy$.

Для исследования полученной квадратичной формы применим критерий Сильвестра. Запишем матрицу формы:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Её главные миноры:

$$-4 < 0, \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7 > 0, \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -14 < 0.$$

Главные миноры меняют знак, начиная с минуса; следовательно, $d^2 f$ — отрицательно определённая форма, в точке $\left(\dfrac{10}{7}, \dfrac{26}{7}, -2\right)$ функция имеет локальный максимум.

3. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = (x - y)e^{x^2+y}$.

Решение. Найдём частные производные:

$$f'_x = e^{x^2+y} + (x-y)e^{x^2+y} \cdot 2x = e^{x^2+y}(2x^2 - 2xy + 1),$$
$$f'_y = -e^{x^2+y} + (x-y) \cdot e^{x^2+y} = e^{x^2+y}(x - y - 1).$$

Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} e^{x^2+y}(2x^2 - 2xy + 1) = 0, \\ e^{x^2+y}(x - y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2xy + 1 = 0, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x(x-1) + 1 = 0, \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}, \\ y = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Стационарная точка только одна. Найдём частные производные второго порядка в этой точке.

$$A = f''_{xx} = e^{x^2+y} \cdot 2x(2x^2 - 2xy + 1) + e^{x^2+y}(4x - 2y) = 0 + e^{-\frac{5}{4}}(-2 + 3) =$$
$$= e^{-\frac{5}{4}},$$

$$C = f''_{yy} = e^{x^2+y}(x - y - 1) + e^{x^2 y}(-1) = e^{x^2+y}(x - y - 2) = -e^{-\frac{5}{4}},$$

$$B = f''_{xy} = \left(e^{x^2+y}(2x^2 - 2xy + 1)\right)'_y =$$
$$= e^{x^2+y}(2x^2 - 2xy + 1) + e^{x^2+y}(-2x) = e^{-\frac{5}{4}}.$$

Так как $AC - B^2 = -e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\frac{5}{4}} < 0$, то, по теореме 4, экстремума в этой стационарной точке нет.

4. Проверить, что уравнение $y - xz + \ln(x - 2z) = 0$ задаёт неявно в окрестности точки $P\left(\frac{1}{e},\ 1,\ 0\right)$ функцию $z = z(x, y)$. Найти частные производные z'_x, z'_y в достаточно малой окрестности этой точки, а также в самой точке P.

Решение. Пусть $F(x, y, z) = y - xz + \ln(x - 2z)$. Найдём частные производные функции $F(x, y, z)$.

$$F'_x = -z + \frac{1}{x - 2z}, \quad F'_y = 1, \quad F'_z = -x - \frac{2}{x - 2z}.$$

В достаточно малой окрестности точки P $x - 2z \neq 0$, поэтому частные производные непрерывны. Кроме того, $F'_z(P) = -\frac{1}{e} - \frac{2}{\frac{1}{e}} = -\frac{1}{e} - 2e \neq 0.$

Значит, неявная функция определена. Найдём её частные производные:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-z + \dfrac{1}{x - 2z}}{-x - \dfrac{2}{x - 2z}} = -\frac{-xz + 2z^2 + 1}{-x^2 + 2xz - 2},$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{-x - \dfrac{2}{x - 2z}} = -\frac{x - 2z}{-x^2 + 2xz - 2}.$$

В частности, $z'_x(P) = -\dfrac{1}{-\left(\dfrac{1}{e}\right)^2 - 2} = \dfrac{e^2}{1 + 2e^2}$, $z'_y(P) = \dfrac{e}{1 + 2e^2}$.

5. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $x + y + 1 = 0$.

Решение. Пусть (x_1, y_1) — точка на параболе, (x_2, y_2) — точка на прямой. Как известно, расстояние между ними равно

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Требуется найти условный минимум функции $S(x_1, x_2, y_1, y_2)$ при условиях $y_1 = x_1^2 + 1$, $x_2 + y_2 + 1 = 0$. Вместо функции S удобнее рассматривать $S^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$; ясно, что эти функции минимальны при одних и тех же значениях переменных.

Для решения задачи на условный экстремум рассмотрим функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda_1, \lambda_2) =$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \lambda_1(y_1 - x_1^2 - 1) + \lambda_2(x_2 + y_2 + 1).$$

Найдём стационарные точки, приравнивая 0 все частные производные первого порядка функции F:

$$\begin{cases} F'_{x_1} = 2(x_1 - x_2) - 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ F'_{x_2} = -2(x_1 - x_2) + \lambda_2 = 0, \\ F'_{y_1} = 2(y_1 - y_2) + \lambda_1 = 0, \\ F'_{y_2} = -2(y_1 - y_2) + \lambda_2 = 0, \\ F'_{\lambda_1} = y_1 - x_1^2 - 1 = 0, \\ F'_{\lambda_2} = x_2 + y_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Из 3-го и 4-го уравнений следует, что $\lambda_2 = -\lambda_1$. Учитывая это и складывая первые 2 уравнения, получим: $2\lambda_1 x_1 + \lambda_1 = 0$. Так как $\lambda_1 \neq 0$ (иначе $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, а это невозможно, парабола и прямая не пересекаются), то получаем $x_1 = -\dfrac{1}{2}$. Значит, $y_1 = x_1^2 + 1 = \dfrac{5}{4}$. Теперь достаточно использовать 1, 3 и 6-е уравнения:

$$\begin{cases} 2\left(-\dfrac{1}{2} - x_2\right) + \lambda_1 = 0, \\ 2\left(\dfrac{5}{4} - y_2\right) + \lambda_1 = 0, \\ x_2 + y_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Из первых уравнений следует: $-\dfrac{1}{2} - x_2 = \dfrac{5}{4} - y_2$, т. е. $x_2 - y_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{4} = -\dfrac{7}{4}$. Подставляя $x_2 = y_2 - \dfrac{7}{4}$ в последнее уравнение, получим: $y_2 - \dfrac{7}{4} + y_2 + 1 = 0$, $2y_2 = \dfrac{3}{4}$, $y_2 = \dfrac{3}{8}$. Значит, $x_2 = \dfrac{3}{8} - \dfrac{7}{4} = -\dfrac{11}{8}$. Итак, стационарная точка только одна: $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $y_1 = \dfrac{5}{4}$, $x_2 = -\dfrac{11}{8}$, $y_2 = \dfrac{3}{8}$. Из геометрического смысла задачи следует, что условный минимум существует. В других точках он достигаться не может. Поэтому ясно, что минимальное расстояние равно расстоянию между точками $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$ и $\left(-\dfrac{11}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$, достаточные условия минимума можно не проверять.

Найдём кратчайшее расстояние:

$$S = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{11}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

6. В точке $P(3,3)$ найти градиент функции $f(x,y)=\sqrt{x^2+3y^2}$, а также производную этой функции в направлении градиента.

Решение. Найдём частные производные в точке P:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}\Big|_P=\frac{1}{2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3y^2}}\cdot 6y=\frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\Big|_P=\frac{3}{2}.$$

Значит, градиент $\mathrm{grad} f(P)=\overline{g}=\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{3}{2}\overline{j}$.

Производная по направлению градиента равна модулю градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{g}}=|\mathrm{grad} f|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

7. Найти уравнение касательной, проведённой в точке $(\pi-2,\ 2)$ к циклоиде $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$.

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t)=\pi-2,\\ y=2(1-\cos t)=2, \end{cases}$$

находим $t=\frac{\pi}{2}$ — значение параметра, соответствующее данной точке. Направляющий вектор касательной:

$$\overline{r'}(t)=(x'(t),\ y'(t))=(2(1-\cos t),\ 2\sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=(2,\ 2).$$

Получаем уравнение касательной: $\frac{x-\pi+2}{2}=\frac{y-2}{2}$, или $y=x+4-\pi$. Конечно, тот же результат мы бы получили, находя угловой коэффициент касательной с помощью производной: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\sin t}{2(1-\cos t)}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$.

8. Найти уравнение касательной в точке $(1,\ 1,\ \sqrt{2})$ к линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=4$ и цилиндра $x^2+y^2=2x$ (кривая Вивиани).

Решение. Чтобы найти направляющий вектор касательной, нужно перейти к параметрическому заданию линии. Возьмём в качестве параметра абсциссу x. Для определения y'_x, z'_x можно не выражать y и z через x, а дифференцировать неявные функции:

$$(x^2+y^2+z^2-4)'_x=2x+2yy'+2zz'=0,$$
$$(x^2+y^2-2x)'_x=2x+2yy'-2=0.$$

В точке $(1,\ 1,\ \sqrt{2})$ получаем: $y' + z'\sqrt{2} = -1$, $y' = 0$. Так как $x' = 1$, то получаем направляющий вектор касательной:

$$\overline{r'} = (x', y', z') = \left(1,\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Можно взять в качестве направляющего, конечно, и вектор $(\sqrt{2},\ 0,\ -1)$. Поэтому канонические уравнения касательной имеют вид:

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{2}}{-1}.$$

Замечание. Ординату y нельзя было взять в качестве параметра, так как уравнение $x^2+y^2 = 2x$ ***не определяет*** в окрестности точки $(1, 1, \sqrt{2})$ неявно функцию $x(y)$: $(x^2 + y^2 - 2x)'_x = 2x - 2 = 0$ в этой точке.

10.7. Упражнения для самостоятельной работы

1. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$ до членов 2-го порядка функции:

а) $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$; б) $f(x, y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$.

2. Исследовать на экстремум функции:

а) $z = x^3 - x^2y - 3\ln y$; б) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy$;

в) $z = (x - 3)^2 - (y + 5)^2$; г) $z = 5x^2 + y^2 + 2x^3 - xy^2$;

д) $z = \dfrac{x^2 + xy^2 + y}{xy}$; е) $z = x^4 + y^3 - 3xy^2$;

ж) $f = x^2+2y^3+yz^2-4x-6y$; з) $f = x^2+y^2+z^2-xy+9x-6y+4z$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на ограниченном замкнутом множестве D:

а) $z = (x + y)^2 - 2y^2 + 4x$, $D = \{\, (x, y) \,|\, x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3\}$;

б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D = \{\, (x, y) \,|\, -1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}$;

в) $z = e^x(2x + y^2)$, $D = \{\, (x, y) \,|\, y^2 + 2x \le 0,\ x \ge -3\}$;

г) $z = (x - 6)^2 + (y + 8)^2$, $D = \{\, (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 25\}$.

4. Проверить, что данное уравнение определяет в окрестности точки $P(x_0, y_0)$ неявную функцию $y = y(x)$, найти в этой окрестности $y'(x)$, вычислить $y'(x_0)$.

а) $2x^2 + y^2 - 5x + 7y + 2 = 0$, $P(2, -7)$; б) $\ln y = xy$, $P\left(\dfrac{1}{e}, e\right)$;

в) $xy + \ln(xy) = 1$, $P(1, 1)$; г) $y\sin(\pi x) - x\cos(xy) = 0$, $P\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Проверить, что данное уравнение определяет в окрестности точки $P(x_0, y_0, z_0)$ неявную функцию $z = z(x, y)$, вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.

а) $x^3 - 2yz + z^3 - 3x + 5 = 0, \quad P(1, 2, 1)$;

б) $xe^y + ye^z + ze^x = 1, \quad P(0, 0, 1)$;

в) $x^5 + y^5 + z^5 + x\sin z = 1, \quad P(1, 0, 0)$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$, заданную неявно соотношением

$$x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2z + 8xz + 16 = 0.$$

7. Проверить, что система равенств $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ 2x^2 + xy + 5yz^2 = 5 \end{cases}$ задаёт в окрестности точки $(0, 1, 1)$ неявные функции $y(x)$, $z(x)$. Вычислить $y'(0)$, $z'(0)$.

8. Найти условные экстремумы:

а) $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, если $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$;

б) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$, если $x - y + z - 1 = 0$;

в) $f(x, y) = xy$, если $x^2 + y^2 = 2$;

г) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

9. Требуется изготовить цилиндрическую бочку без крышки наибольшего объёма. Каковы должны быть её размеры, если площадь затраченного материала равна S?

10. На эллипсе $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ найти точки, наименее и наиболее удалённые от точки $P(1, 0)$.

11. Найти производную функции $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке $A(3, 1)$ по направлению вектора $\bar{b} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$.

12. Найти производную функции $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y}}{x}$ в точке $A(1, 1)$ по направлению, образующему с осью OX угол 135°.

13. Найти производную функции $f(x, y, z) = zy + x^2$ в точке $A(3, -6, 2)$ в направлении от этой точки к началу координат.

14. В каком направлении производная функции $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x + y}$ в точке $P(0, 1, 1)$ максимальна? Найти эту производную.

15. В указанной точке P найти градиент данной функции, а также производную этой функции в направлении градиента.

а) $f = x\sin y + y\cos x$, $P(0, \pi)$; б) $f = e^{3x-2y}$, $P(2, 3)$;

в) $f = 2x^2z + 3z^2y$, $P(1, -2, 1)$; г) $f = \ln(2x + 3y + 4z)$, $P(2, -1, 0)$.

16. Найти уравнения касательной прямой к указанной линии в данной точке P.

а) $x = t\cos t,\ \ y = t\sin t,\ \ z = t;\quad P(-\pi, 0, \pi)$;

б) $x = 2\sin^2 t,\quad y = 4\sin t\cos t,\ \ z = 6\cos^2 t;\quad P(1, 2, 3)$;

в) линия пересечения цилиндра $x^2+4y^2 = 8$ и плоскости $3x+4y+z = 12$; $P(2, 1, 2)$;

г) линия пересечения поверхностей $z^2 = 6x$, $9y^2 = 16xz$; $P(6, 8, 6)$.

17. Найти уравнения касательной плоскости и нормали в данной точке к следующим поверхностям:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9;\ \ P(1, -2, 2)$; б) $x = y^2 + z^2;\ \ P(5, 2, -1)$;

в) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 125(x^2 + y^2);\ \ P(2, 1, 2\sqrt{5})$; г) $y^2 = 9z;\ \ P(5, 6, 4)$.

18. Для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ найти касательные плоскости, параллельные плоскости $x + y = 0$.

19. Найти касательную плоскость к параболоиду $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = z$, параллельную плоскости $x - y - 2z = 0$.

10.8. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти значение функции $f(x, y) = 2 + \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2 + 14}$ в точке её максимума.

2. Найти наименьшее значение функции $z = x^2 - xy + 5$ на замкнутом квадрате $\{(x, y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

3. Достаточным условием максимума в стационарной точке является: 1) равенство нулю первого дифференциала; 2) равенство нулю второго дифференциала; 3) положительная определённость второго дифференциала; 4) отрицательная определённость второго дифференциала. Указать номер правильного ответа.

4. Найти $z'_y(0, 0)$, если функция $z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^2 + 2\ln(x^2 + y^2 + 2x + 5y + z) = 1$, причём известно, что $z(0, 0) = 1$.

5. Найти производную скалярного поля $F = \arcsin\left(\dfrac{2x}{y}\right) + \dfrac{z\cdot\sqrt{17}}{4}$ в точке $(\sqrt{3},\ 4,\ 7)$ по направлению градиента.

6. В какой точке поверхности $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = 1$ касательная плоскость параллельна плоскости XOZ? В ответе указать абсциссу точки.

ГЛАВА 11

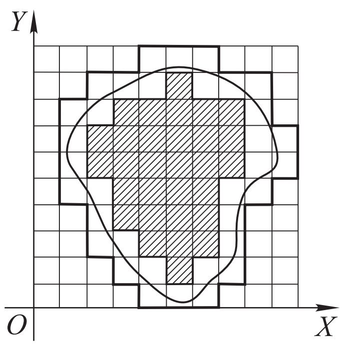
КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

11.1. Мера Жордана

Мы приступаем к интегрированию функций нескольких переменных. В определениях и свойствах новых типов интегралов многое будет похожим на случай одномерного интеграла Римана, рассмотренный подробно в 7-й главе. Однако здесь нам потребуется уточнить понятия площади и объёма. Напомним: вычисляя в разделе 7.5 площади и объёмы, мы пользовались лишь интуитивными представлениями. Теперь перейдём к точным определениям.

Рассмотрим на плоскости ограниченное множество E. Разобьём плоскость на замкнутые (включающие границы) квадраты со стороной h с помощью вертикальных и горизонтальных прямых:

$$x = 0,\ x = \pm h,\ x = \pm 2h, \ldots; \quad y = 0,\ y = \pm h,\ y = \pm 2h, \ldots.$$



Пусть $h = \dfrac{1}{2^N}$. Обозначим $\underline{E}_N$ — объединение тех квадратов, которые целиком лежат внутри E. Пусть также $\overline{E}_N$ — объединение тех квадратов, которые имеют с E непустое пересечение. Можно назвать $\underline{E}_N$ и $\overline{E}_N$ внутренней и внешней ступенчатыми фигурами. Площадью квадрата называется число h^2. Площади (или ***меры***) ступенчатых фигур обозначим $m(\underline{E}_N)$, $m(\overline{E}_N)$ — это, по определению, суммы площадей соответствующих квадратов.

Заметим, что при переходе от $h = \dfrac{1}{2^N}$ к $h = \dfrac{1}{2^{N+1}}$ (т. е. при измельчении разбиения) каждый квадрат делится на 4. При этом внутренняя ступенчатая фигура может увеличиться, а внешняя — уменьшиться:

$$\underline{E}_1 \subseteq \underline{E}_2 \subseteq \ldots \subseteq \underline{E}_N \subseteq \ldots,$$
$$\overline{E}_1 \supseteq \overline{E}_2 \supseteq \ldots \supseteq \overline{E}_N \supseteq \ldots.$$

Переходя к площадям, получаем неравенства:

$$m(\underline{E}_1) \le m(\underline{E}_2) \le \ldots \le m(\underline{E}_N) \le \ldots,$$
$$m(\overline{E}_1) \ge m(\overline{E}_2) \ge \ldots \ge m(\overline{E}_N) \ge \ldots.$$

Рассмотрим числовую последовательность $\{m(\underline{E}_N)\}$. Она возрастает и ограничена сверху (например, любым из чисел $m(\overline{E}_N)$). Значит, она имеет предел:

$$\lim_{N\to\infty} m(\underline{E}_N) = \underline{m}(E).$$

Назовём число $\underline{m}(E)$ ***внутренней мерой*** множества E. Аналогично, существует $\lim\limits_{N\to\infty} m(\overline{E}_N) = \overline{m}(E)$ — внешняя мера E. Множество E называется ***измеримым по Жордану***, если внешняя мера совпадает с внутренней:

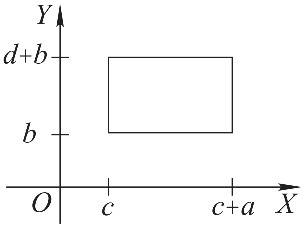
$$\underline{m}(E) = \overline{m}(E) = m(E).$$

Число $m(E)$ в этом случае называется ***мерой Жордана*** множества E. Впрочем, можно пользоваться и привычным словом «площадь».

Таким же образом с помощью трёхмерной меры Жордана уточняется понятие «объём». При необходимости перехода к более высоким размерностям аналогично вводится понятие n-мерной меры Жордана, обобщающее понятия площади и объёма.

Заметим, что с самого начала мы рассматриваем только ограниченные множества. Если E не ограничено, то $\overline{E}_N$ состоит из бесконечного числа квадратов. Значит, при любом N мера $\overline{E}_N$ бесконечна и множество E не является измеримым по Жордану.

Пример 1. Доказать, что замкнутый прямоугольник K со сторонами a, b является измеримым множеством, причём $m(K) = ab$.



Решение. Для упрощения задачи рассмотрим лишь прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. При разбиении плоскости с шагом $h = \dfrac{1}{2^N}$ количество квадратиков, пересекающих K, не превышает $\left(\dfrac{a}{h}+1\right)\left(\dfrac{b}{h}+1\right)$. Поэтому

$$m(\overline{K}_N) \le \left(\frac{a}{h}+1\right)\left(\frac{b}{h}+1\right)\cdot h^2 = (a+h)(b+h) = \left(a+\frac{1}{2^N}\right)\left(b+\frac{1}{2^N}\right).$$

Количество квадратиков, целиком лежащих в K, не может быть меньше $\left(\dfrac{a}{h}-1\right)\left(\dfrac{b}{h}-1\right)$. Значит,

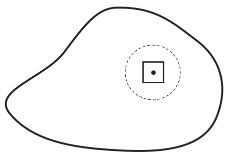
$$m(\underline{K}_N) \ge \left(\frac{a}{h}-1\right)\left(\frac{b}{h}-1\right)\cdot h^2 = (a-h)(b-h) = \left(a-\frac{1}{2^N}\right)\left(b-\frac{1}{2^N}\right).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что $m(\overline{K}_N) \geq m(\underline{K}_N)$, получаем

$$\lim m(\overline{K}_N) = \lim m(\underline{K}_N) = m(K) = ab.$$

Перейдём к свойствам меры Жордана, подробно рассматривая плоский ($n = 2$) случай.

Свойство 1. Если E измеримо, то $m(E) \geq 0$. Если E измеримо и имеет хотя бы одну ***внутреннюю*** точку, то $m(E) > 0$.



Доказательство. Ни внешняя, ни внутренняя мера, очевидно, не могут быть отрицательными числами. Поэтому всегда $m(E) \geq 0$. Если в E имеется внутренняя точка, то E содержит некоторую её окрестность U_ε. При достаточно мелких разбиениях в окрестность U_ε обязательно попадёт хотя бы один из квадратов. Значит, внутренняя мера будет положительной.

Свойство 2 *(монотонность меры).* Если E_1, E_2 измеримы, причём $E_1 \subseteq E_2$, то $m(E_1) \leq m(E_2)$.

Доказательство. Для любых $E_1 \subseteq E_2$ ясно:

$$\overline{E}_{1N} \subseteq \overline{E}_{2N}$$

(любой квадрат, пересекающийся с E_1, пересекается и с E_2). Значит,

$$m(\overline{E}_{1N}) \leq m(\overline{E}_{2N})$$

(напомним, для ступенчатых фигур мера — это, по определению, сумма площадей квадратов). Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\overline{m}(E_1) \leq \overline{m}(E_2).$$

Для измеримых множеств $\overline{m}(E_i) = m(E_i)$, поэтому $m(E_1) \leq m(E_2)$.

Другие свойства меры Жордана мы рассмотрим после доказательства важнейшей теоремы — критерия измеримости. Нам потребуется один вспомогательный результат.

Лемма. Пусть E — ограниченное множество на плоскости, Γ — его граница (множество граничных точек). Рассмотрим разбиение плоскости на квадраты со стороной $h = \dfrac{1}{2^N}$. Обозначим D_N — множество, состоящее из точек тех квадратов, которые входят в $\overline{E}_N$, но не входят в $\underline{E}_N$. Тогда

$$\Gamma \subseteq D_N \subseteq \overline{\Gamma}_N.$$

(Напомним: $\overline{\Gamma}_N$ — объединение квадратов, пересекающихся с Γ.)

Доказательство. Так как множество $\overline{E}_N$ замкнуто, то $\overline{E} \subseteq \overline{E}_N$, а значит и $\Gamma \subseteq \overline{E}_N$.

Возьмём $x \in \Gamma$. Рассмотрим квадраты из $\overline{E}_N$, содержащие x. Если x — внутренняя точка квадрата, то такой квадрат всего 1 и ясно, что он не входит в $\underline{E}_N$. Если x лежит на границе (двух или четырёх) квадратов, то ясно, что не все они лежат внутри E (так как x — граничная точка E). Итак, в любом случае x принадлежит хотя бы одному квадрату, лежащему в $\overline{E}_N$ и не лежащему в $\underline{E}_N$. Поэтому $x \in D_N$, включение $\Gamma \subseteq D_N$ доказано.

Чтобы доказать, что $D_N \subseteq \overline{\Gamma}_N$, рассмотрим какой-либо квадрат из D_N. Очевидно, он содержит и точки E (так как входит в $\overline{E}_N$), и точки, не лежащие в E (так как не входит в $\underline{E}_N$). Достаточно ясно (не будем это строго обосновывать), что такой квадрат обязательно содержит граничные точки множества E, т. е. входит в $\overline{\Gamma}_N$. Лемма доказана.

Теорема 1 ***(критерий измеримости).*** Пусть E — ограниченное множество, Γ — его граница (т. е. множество граничных точек). Тогда

$$E \text{ измеримо } \Leftrightarrow \ m(\Gamma) = 0.$$

Доказательство. Так как внешняя мера обладает свойством монотонности, то из включений, доказанных в лемме, получаем:

$$\overline{m}(\Gamma) \leq \overline{m}(D_N) \leq \overline{m}(\overline{\Gamma}_N). \tag{$*$}$$

Так как D_N — объединение квадратов, то

$$\overline{m}(D_N) = m(D_N) = m(\overline{E}_N) - m(\underline{E}_N).$$

Допустим теперь, что E измеримо. Тогда

$$\lim m(D_N) = \lim m(\overline{E}_N) - \lim m(\underline{E}_N) = 0.$$

Используя левое из неравенств $(*)$, получаем, что $\overline{m}(\Gamma) = 0$, а значит $m(\Gamma) = 0$.

Обратно, если $m(\Gamma) = 0$, то, переходя к пределу в правом из неравенств $(*)$, видим, что $\lim m(D_N) = 0$, т. е. $\lim m(\overline{E}_N) = \lim m(\underline{E}_N)$, множество E измеримо. Теорема доказана.

Продолжим изучение свойств меры Жордана.

Свойство 3. Если рассматриваемые множества измеримы, то

$$m(E_1 \cup E_2) \leq m(E_1) + m(E_2).$$

Доказательство. Заметим: $(\overline{E_1 \cup E_2})_N = \overline{E}_{1N} \cup \overline{E}_{2N}$, так как и слева, и справа — объединение квадратов, пересекающихся хотя бы с одним из множеств E_1 , E_2. Поэтому

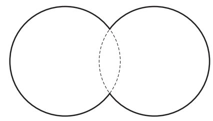
$$m(\overline{E_1 \cup E_2})_N = m(\overline{E}_{1N} \cup \overline{E}_{2N}) \leq m(\overline{E}_{1N}) + m(\overline{E}_{2N}).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим: $\overline{m}(E_1 \cup E_2) \leq \overline{m}(E_1) + \overline{m}(E_2)$. Если E_1, $E_2, E_1 \cup E_2$ измеримы, то вместо $\overline{m}$ можно писать m:

$$m(E_1 \cup E_2) \leq m(E_1) + m(E_2).$$

Свойство 4. Если E_1, E_2 измеримы, то множества $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$ также измеримы.

Доказательство. Заметим: любая граничная точка множеств $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ или $E_1 \setminus E_2$ является также граничной либо для E_1, либо для E_2.



Например, $\Gamma(E_1 \cup E_2) \subseteq \Gamma(E_1) \cup \Gamma(E_2)$. Но E_i — измеримы. По теореме 1, $\Gamma(E_i)$ — множество меры 0. Свойство 3 показывает, что

$$\overline{m}(\Gamma(E_1 \cup E_2)) \leq \overline{m}(\Gamma(E_1)) + \overline{m}(\Gamma(E_2)) = 0.$$

Значит, $\Gamma(E_1 \cup E_2)$ — измеримое множество меры 0. Опять используя теорему 1, получаем, что $E_1 \cup E_2$ измеримо. Аналогично можно проверить, что множества $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$ измеримы.

Свойство 5 ***(аддитивность меры).*** Если E_1, E_2 измеримы, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

Доказательство. Для ступенчатых непересекающихся фигур ясно:

$$m(\underline{E}_{1N} \cup \underline{E}_{2N}) = m(\underline{E}_{1N}) + m(\underline{E}_{2N}).$$

Поэтому из соотношения

$$\underline{E}_{1N} \cup \underline{E}_{2N} \subseteq (\underline{E_1 \cup E_2})_N \subseteq (\overline{E_1 \cup E_2})_N = \overline{E}_{1N} \cup \overline{E}_{2N},$$

используя свойства 2 и 3, нетрудно получить:

$$m(\underline{E}_{1N}) + m(\underline{E}_{2N}) \leq m(\underline{E_1 \cup E_2})_N \leq m(\overline{E}_{1N}) + m(\overline{E}_{2N}).$$

Перейдём к пределу при $N \to \infty$:

$$m(E_1) + m(E_2) \leq m(E_1 \cup E_2) \leq m(E_1) + m(E_2).$$

Отсюда следует, что $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Свойство 5 остаётся справедливым, если пересечение E_1 и E_2 не является пустым множеством, но состоит лишь из граничных точек.

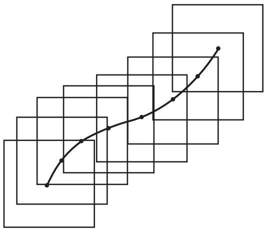
Теперь мы можем доказать теорему, которая позволит нам применять критерий измеримости к различным множествам, встречающимся в практических задачах.

Теорема 2. Любая спрямляемая кривая на плоскости имеет двумерную меру 0.

Доказательство. Напомним (см. 7.5.3): спрямляемой называется кривая, имеющая конечную длину. Пусть γ — спрямляемая кривая, заданная параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \ t \in [a, b].$$

Пусть L — её длина. Разобьём γ на n частей точками $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ так, чтобы длина каждой дуги равнялась $\dfrac{L}{n}$. Пусть $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$ — соответствующее разбиение отрезка $[a, b]$. Другими словами, точка ξ_i имеет координаты $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$.



Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ построим замкнутый квадрат Q_i, центр которого находится в точке ξ_i, стороны параллельны координатным осям, длины сторон равны $\dfrac{2L}{n}$. Ясно, что дуга $\widehat{\xi_{i-1}\xi_i} \subseteq Q_i$. Поэтому $\gamma \subseteq \bigcup Q_i$. Используя свойства 2 и 3 внешней меры, получим:

$$\overline{m}(\gamma) \leq \overline{m}(\bigcup Q_i) \leq \sum \overline{m}(Q_i).$$

В примере 1 доказано: $\overline{m}(Q_i) = m(Q_i) = \left(\dfrac{2L}{n}\right)^2$. Значит, $\overline{m}(\gamma) \leq \left(\dfrac{2L}{n}\right)^2 \cdot n =$ $= \dfrac{4L^2}{n}$. Левая часть неравенства не зависит от n, поэтому при $n \to \infty$ получим: $\overline{m}(\gamma) = 0$. Значит, множество точек γ измеримо и $m(\gamma) = 0$.

Следствие. Множество E на плоскости, ограниченное кусочно-гладкой кривой, измеримо.

Доказательство. Как доказано в 7.5.3, гладкая кривая спрямляема. Кусочно-гладкая кривая также спрямляема — её длина есть сумма длин гладких кусков. По теореме 2, граница E имеет двумерную меру 0. По критерию измеримости, E измеримо.

Следствие показывает, что подавляющее большинство ограниченных множеств, с которыми мы работаем, измеримы. Приведём пример неизмеримого по Жордану множества.

Пример 2. Пусть T — множество точек в квадрате $[0,1] \times [0,1]$, имеющих рациональные координаты:

$$T = \{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Тогда, при любом разбиении, $\underline{T}_N = \varnothing$, т. е. $\underline{m}(T) = 0$. С другой стороны, все квадраты разбиения будут включать точки T, поэтому $\overline{T}_N = [0,1] \times [0,1]$, т. е. $\overline{m}(T) = 1$. Так как $\underline{m}(T) \neq \overline{m}(T)$, то T — неизмеримое множество.

Все рассмотренные свойства меры справедливы и в пространствах более высоких размерностей. В частности, множество в $\mathbb{R}^3$, ограниченное кусочно-гладкими поверхностями, измеримо (т. е. имеет объём).

11.2. Двойные и тройные интегралы

11.2.1. Определение и свойства кратных интегралов

Пусть E — ограниченное множество на плоскости, граница которого является кусочно-гладкой кривой. ***Разбиением*** E с помощью кусочно-гладких кривых будем называть совокупность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ со следующими свойствами:

1) $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$;

2) каждое множество E_i имеет кусочно-гладкую границу;

3) при $i \neq j$ пересечение $E_i \cap E_j$ либо пусто, либо состоит из граничных точек.

Из свойств меры Жордана следует, что все E_i измеримы, причём

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots + m(E_n).$$

Далее всегда будем рассматривать множества и разбиения только указанного вида.

Введём понятие мелкости разбиения. ***Диаметром*** множества $A \subseteq \mathbb{R}^2$ называется число

$$d(A) = \sup_{P_1, P_2 \in A} |P_1 - P_2|,$$

т. е. диаметр — точная верхняя грань расстояний между точками множества. ***Мелкостью*** разбиения $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$ называется число

$$\lambda = \max \{d(E_i)\}.$$

Для множества E с кусочно-гладкой границей существуют разбиения сколь угодно малой мелкости. В качестве примера можно указать разбиение на множества $\underline{E} \cap Q_i$, где Q_i — квадраты, образующие внешнюю ступенчатую фигуру $\overline{E}_N$. Мелкость такого разбиения равна длине диагонали квадрата $\lambda = h\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^N}$ и может быть (при больших N) меньше любого заранее данного числа.

Пусть на множестве E определена функция $f(x, y)$. Рассмотрим разбиение $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. В каждом множестве E_i выберем произвольно точку P_i. Составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)m(E_i)$, она называется ***интегральной суммой Римана***.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по множеству E называется такое число I, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: для любого разбиения мелкостью меньше δ, при любом выборе точек $P_i \in E_i$

$$\left| I - \sum f(P_i)m(E_i) \right| < \varepsilon.$$

Только в смысле этого точного определения допустима символическая запись

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum f(P_i)m(E_i).$$

В точности так же для функции $f(x, y, z)$, определённой на множестве $E \subseteq \mathbb{R}^3$, ограниченном кусочно-гладкой поверхностью, вводится понятие тройного интеграла. Можно ввести и рассматривать интегралы более высоких размерностей, но это не входит в нашу программу.

Для двойного и тройного интегралов наиболее употребительны обозначения:

$$\iint\limits_E f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \iiint\limits_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Рассмотрим общие свойства ***кратных*** (т. е. двойных, тройных и т. д.) интегралов. Работать, в основном, будем с двойными интегралами, имея в виду, что для тройных и формулировки, и доказательства сохраняются.

Многие из свойств аналогичны случаю одномерного интеграла Римана — в 7-й главе они подробно доказаны. Здесь же мы иногда опускаем подробности доказательств.

Свойство 1. Если $C = \text{const}$, то $\iint\limits_E C\,dx\,dy = Cm(E)$. В частности, $\iint\limits_E dx\,dy = S(E)$ — площадь плоской фигуры E, $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz = V(T)$ — объём тела T.

Доказательство очевидно: если $f(x,y) = C$, то все интегральные суммы равны между собой:

$$\sum f(P_i)m(E_i) = \sum Cm(E_i) = C\sum m(E_i) = Cm(E).$$

Свойство 2. Если $m(E) = 0$, то для любой функции

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Доказательство. Если $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, $m(E) = 0$, то $m(E_i) = 0$ $(\forall i)$. Поэтому любая интегральная сумма равна 0.

Свойство 3 *(линейность).* Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\iint\limits_E (\alpha f_1 + \beta f_2)\,dx\,dy = \alpha\iint\limits_E f_1\,dx\,dy + \beta\iint\limits_E f_2\,dx\,dy.$$

Свойство 4. Если $\forall P \in E\ \ f_1(P) \le f_2(P)$, то

$$\iint\limits_E f_1\,dx\,dy \le \iint\limits_E f_2\,dx\,dy.$$

Доказательства свойств 3, 4 следуют из соответствующих свойств интегральных сумм и определения интеграла.

Свойство 5 *(аддитивность).* Если $E = E_1 \cup E_2$, причём разбиение проведено кусочно-гладкой кривой и соответствующие интегралы существуют, то

$$\iint\limits_E f\,dx\,dy = \iint\limits_{E_1} f\,dx\,dy + \iint\limits_{E_2} f\,dx\,dy.$$

Доказательство. Разбиения множеств E_1, E_2 образуют разбиение множества E. Сумма

$$\sum f(x_i,y_i)m(E_{1i}) + \sum f(u_i,v_i)m(E_{2i})$$

является интегральной суммой для функции f на множестве E. При измельчении разбиений в пределе получаем требуемое соотношение.

Свойство 6 ***(оценка модуля интеграла).***

$$\left|\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint\limits_E |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Доказательство. К очевидному неравенству

$$-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$$

применим свойство 4. Получим:

$$-\iint\limits_E |f(x,y)|\,dx\,dy \le \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_E |f(x,y)|\,dx\,dy,$$

что равносильно требуемому неравенству.

Свойство 7 ***(теорема о среднем).*** Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на компактном связном множестве E. Тогда $\exists P \in E$:

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = f(P)m(E).$$

Доказательство. Если $m(E) = 0$, то интеграл равен 0 и равенство справедливо для любой точки P. Пусть $m(E) \ne 0$. Непрерывная на компактном множестве функция ограничена и достигает своих точных граней. Пусть

$$\inf_E f(x,y) = f(P_1), \quad \sup_E f(x,y) = f(P_2), \quad f(P_1) \le f(x,y) \le f(P_2).$$

Применяя свойства 4 и 1, отсюда получаем:

$$f(P_1)m(E) \le \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy \le f(P_2)m(E),$$

$$f(P_1) \le \frac{1}{m(E)} \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy \le f(P_2).$$

Так как E — связное множество, то, по теореме о промежуточных значениях, $\exists P \in E: \; f(P) = \dfrac{1}{m(E)} \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy$, что и требовалось доказать.

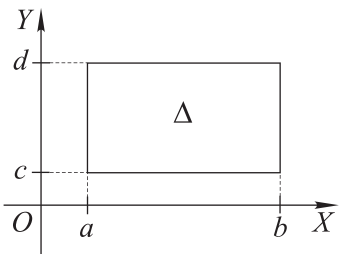
Дадим без доказательства очень важное достаточное условие интегрируемости функции.

Теорема 3. Если функция f непрерывна на измеримом компактном множестве E, то она интегрируема на E.

Как и в случае одномерного интеграла, доказательство проводится с помощью сумм Дарбу. Можно усилить теорему 3: даже если функция разрывна в отдельных точках или на некоторых кусочно-гладких кривых, она всё-таки будет интегрируемой. Для интегрируемости достаточно, чтобы множество точек разрыва имело меру 0. Кроме того, изменение значений функции в точках, множество которых имеет меру 0, не влияет ни на интегрируемость функции, ни на величину интеграла (если только функция остаётся ограниченной). В частности, интеграл не зависит от значений в граничных точках E.

Отметим, что мы рассматриваем интегралы только по ограниченным множествам, имеющим кусочно-гладкую границу. Можно доказать, что если функция интегрируема на таком множестве, то она ограничена — по крайней мере, на множестве $E \setminus E_0$, где E_0 — подмножество меры 0. Интегралы от неограниченных функций, интегралы по неограниченным множествам мы не рассматриваем. Хотя есть подходы к определению и работе с такими (***несобственными***) интегралами.

11.2.2. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах



Рассмотрим на плоскости прямоугольную область Δ:

$\Delta = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$.

Пусть на Δ определена функция $f(x, y)$. Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$, заданную в виде ***интеграла, зависящего от параметра***.

Теорема 4. Если $f(x, y)$ непрерывна на Δ, то $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Возьмём $x_0 \in [a, b]$. Дадим приращение Δx так, чтобы $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Вычислим приращение ΔF:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_c^d f(x_0 + \Delta x, y)\, dy - \int\limits_c^d f(x_0, y)\, dy =$$

$$= \int\limits_c^d (f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y))\, dy.$$

По теореме Кантора, $f(x, y)$ равномерно непрерывна на Δ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall P', P'' \in \Delta\ \ |P' - P| < \delta\ \Rightarrow\ |f(P') - f(P'')| < \varepsilon.$$

В нашем случае, конкретнее:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall y\ \ |\Delta x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

(Как обычно, оценка с помощью $\dfrac{\varepsilon}{d-c}$ имеет тот же смысл, что и с помощью ε.) Поэтому

$$|\Delta F| = \left|\int_c^d (f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y))\,dy\right| \le$$

$$\le \int_c^d |f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y)|\,dy \le \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\,dy = \varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad |\Delta x| < \delta \ \Rightarrow\ |\Delta F| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$, что и означает непрерывность функции $F(x)$.

Так как непрерывная функция интегрируема, то существует

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \ -$$

так называемый ***повторный*** интеграл. Последняя его запись экономит 2 скобки и является общепринятой, хотя, возможно, на первых порах лучше пользоваться записью со скобками. Можно рассматривать и другой повторный интеграл, соответствующий ***другому порядку*** интегрирования:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Научимся вычислять двойной интеграл по прямоугольной области с помощью повторных интегралов.

Теорема 5. Если $f(x,y)$ непрерывна на Δ, то

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Доказательство. Все написанные интегралы существуют, так как интегрируются непрерывные функции.

Рассмотрим разбиения отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$:

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n = b; \quad c = y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n = d.$$

Обозначим $\Delta_{ij} = \{(x,y)\,|\,x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}$. Тогда получим разбиение Δ на меньшие прямоугольники:

$$\Delta = \bigcup_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij}.$$

Возьмём один из повторных интегралов и проведём преобразования (а затем поясним каждое действие).

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{y_{j-1}}^{n} \int\limits_{y_{j-1}}^{y} f(x,y)\,dy \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \right) dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dy \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

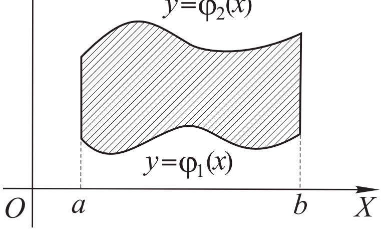
Пояснения: 1) заменили интеграл по $[a,b]$ на сумму интегралов по $[x_{i-1},x_i]$, т. е. использовали аддитивность; 2) то же самое для интеграла по $[c,d]$; 3) воспользовались линейностью: интеграл от суммы равен сумме интегралов; 4) по теореме о среднем, каждый из интегралов по $[x_{i-1},x_i]$ заменили на значение подинтегральной функции в некоторой точке ξ_i, умноженное на длину промежутка интегрирования $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; 5) аналогичное действие с каждым из интегралов по $[y_{j-1},y_j]$.

В результате получилась интегральная сумма для двойного интеграла $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy$, правда, для разбиения специального вида (на прямоугольники). Но интеграл существует, поэтому при измельчении разбиений интегральные суммы любого вида стремятся к интегралу. Переходя к пределу и учитывая, что в левой части равенства повторный интеграл не зависит от разбиений (это просто число), получим:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Теперь перейдём от прямоугольника к так называемым правильным областям. Множество точек E на плоскости, ограниченное кусочно-гладкой кривой, называется ***правильным*** в направлении оси OY, если любая прямая, проведённая через внутреннюю точку множества параллельно этой оси, пересекает её границу в двух точках. Из определения следует: существуют



функции $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ такие, что

$$E = \{(x, y)|\, a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}.$$

Двойной интеграл по области такого вида также можно вычислить с помощью повторного.

Теорема 6. Если $f(x, y)$ непрерывна на указанной области E, то

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Схема доказательства. Рассмотрим прямоугольник $\Delta = [a, b] \times [c, d]$, содержащий множество E. Пусть $f^*(x, y)$ — функция, определённая на Δ следующим образом:

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{если } (x,y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin E. \end{cases}$$

Функция $f^*(x, y)$ может иметь разрывы, но все они лежат на границе E. Значит, множество точек разрыва имеет меру 0. Поэтому $f^*(x, y)$ интегрируема на Δ.

Можно доказать (здесь это доказательство не приводится), что для функции $f^*(x, y)$ справедлива теорема 5:

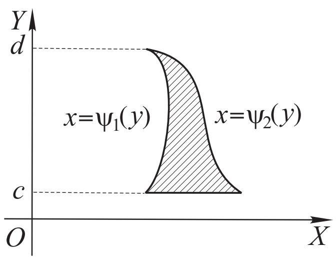
$$\iint\limits_\Delta f^*(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy \right) dx.$$

Так как из определения $f^*(x, y)$ и аддитивности интеграла следует:

$$\iint\limits_\Delta f^*(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy, \qquad \int\limits_c^d f^*(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

то мы получаем то, что требуется.

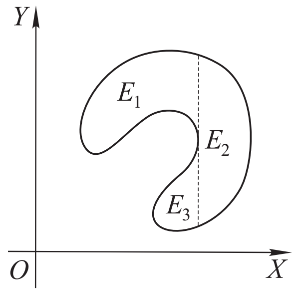
Обратим внимание: ***внешний*** интеграл (тот, который вычисляется в последнюю очередь) всегда имеет постоянные пределы. Отрезок $[a, b]$ — это проекция E на ось OX.



Если область является правильной в направлении оси OX, то справедлива аналогичная формула:

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

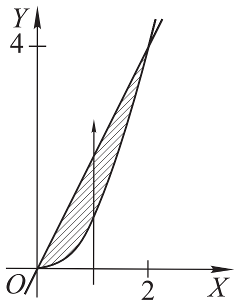
Если область имеет более сложную структуру, то её нужно представить в виде объединения правильных областей и воспользоваться свойством аддитивности интеграла. На рисунке:



$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3, \qquad \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{E_1} f(x,y)dx\,dy + \iint\limits_{E_2} f(x,y)dx\,dy + \iint\limits_{E_3} f(x,y)dx\,dy.$$

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_E (12x + 21y^2)\,dx\,dy$, если область E ограничена линиями $y = 2x$, $y = x^2$.



Решение. Сделаем чертёж. Область E является правильной в направлении любой оси, поэтому порядок интегрирования может быть любым. Будем, например, интегрировать сначала по y, а потом по x:

$$\iint\limits_E (12x + 21y^2)\,dx\,dy = \int \left(\int (12x + 21y^2)\,dy \right) dx.$$

Теперь нужно расставить пределы интегрирования. Внешний интеграл (по x) имеет постоянные пределы. Находим их: проецируя E на ось OX, получаем отрезок $[0, 2]$. Чтобы найти пределы внутреннего интеграла (по y), «прокалываем» E в направлении $0Y$ лучом. Видим, что y изменяется от параболы (на ней $y = x^2$) до прямой (на ней $y = 2x$). После расстановки пределов интеграл легко вычисляется:

$$\iint\limits_E (12x + 21y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2}^{2x} (12x + 21y^2)\,dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (12xy + 7y^3)\,\Big|_{x^2}^{2x} dx = \int\limits_0^2 (24x^2 + 56x^3 - 12x^3 - 7x^6)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (24x^2 + 44x^3 - 7x^6)\,dx = (8x^3 + 11x^4 - x^7)\,\Big|_0^2 = 64 + 176 - 128 = 112.$$

Вычисление ***тройных интегралов*** проводится по аналогичной схеме. Пусть тело T является правильным в направлении оси OZ, т. е. прямая, проведённая через любую его внутреннюю точку параллельно OZ, пересекает границу T в двух точках. Тогда

$$T = \{(x,y,z) | (x,y) \in T_{xy}, \;\; z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\},$$

где T_{xy} — проекция T на плоскость XOY, $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих T снизу и сверху. В этом случае

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{T_{xy}} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

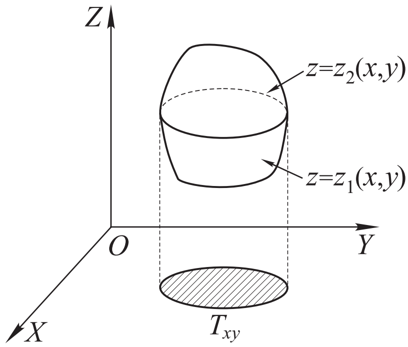
Подробнее, для вычисления тройного интеграла по указанной формуле необходимо:

1) найти проекцию T_{xy};

2) найти уравнения поверхностей, ограничивающих T снизу: $z = z_1(x,y)$ и сверху: $z = z_2(x,y)$;

3) вычислить внутренний интеграл, считая x, y постоянными и применяя формулу Ньютона – Лейбница;

4) вычислить двойной интеграл от полученного выражения по плоской области T_{xy}. Если же тело T удобнее проецировать на координатную плоскость XOZ или YOZ, то формулы (и порядок действий) аналогичны:

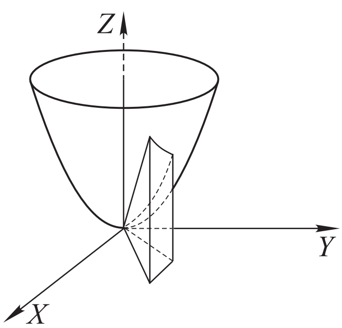


$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{T_{xz}} \left(\int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dx\,dz,$$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{T_{yz}} \left(\int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz.$$

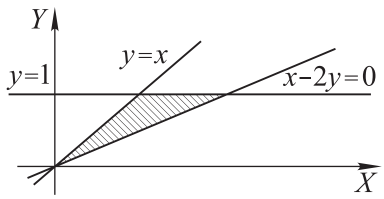
Пример 4. Вычислить $\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz$, если тело T ограничено поверхностями:

$$y = 1,\ \ y = x,\ \ x - 2y = 0,\ \ z = x^2 + y^2,\ \ z = 0.$$



Решение. Сделаем чертёж. Поверхности $y = 1$, $y = x$, $x - 2y = 0$ являются плоскостями, параллельными оси OZ, они образуют «вертикальные стенки» тела T. Плоскость $z = 0$ определяет «дно» T. Сверху тело T ограничено «крышей» — параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$.

Будем проецировать T на XOY. Проекцией является треугольник T_{xy}, изображённый на рисунке. Для определения пределов изменения z «прокалываем» T лучом, параллельным OZ. Луч входит через основание $z=0$, выходит через «крышу» $z=x^2+y^2$. Поэтому



$$\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{T_{xy}} \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} x\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{T_{xy}} xz \Big|_0^{x^2+y^2} dx\,dy = \iint\limits_{T_{xy}} (x^3+xy^2)\,dx\,dy.$$

Вычисляем полученный двойной интеграл, интегрируя сначала по x, а затем по y:

$$\iint\limits_{T_{xy}} (x^3+xy^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_y^{2y} (x^3+xy^2)\,dx \right) dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} \right) \Big|_y^{2y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(4y^4 + 2y^4 - \frac{y^4}{4} - \frac{y^4}{2} \right) dy = \frac{21}{4} \int\limits_0^1 y^4\,dy = \frac{21}{4} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{21}{20}.$$

11.2.3. Замена переменных в кратных интегралах

Рассмотрим подробно случай двойного интеграла. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на компактном множестве E с кусочно-гладкой границей. Тогда существует $\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy$. Пусть функции

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v)$$

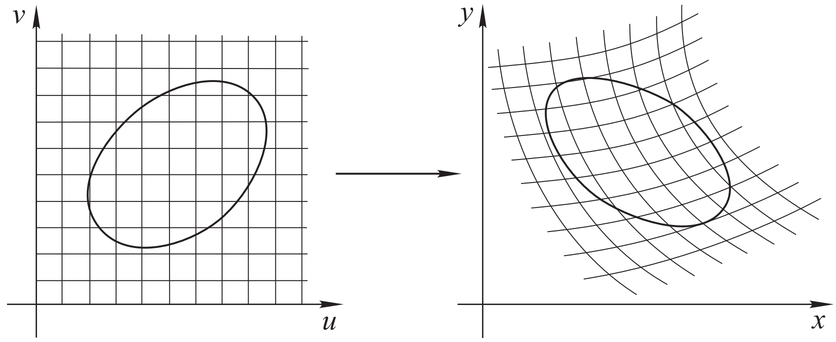
задают взаимно-однозначное отображение множества E' (на плоскости изменения переменных u, v) на множество E. Другими словами, каждой точке $(u,v) \in E'$ взаимно-однозначно соответствует точка $(x,y) \in E$. Пусть частные производные $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ непрерывны на E'.

Теорема 7. При указанных предположениях справедлива формула

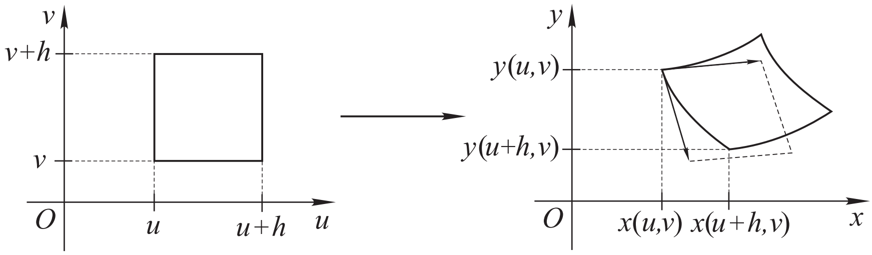
$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{E'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |D|\,du\,dv,$$

где $D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ — якобиан замены переменных.

Схема доказательства. Рассмотрим разбиение E' (на плоскости изменения переменных u, v) прямоугольной сеткой с шагом h. Применяя отображение $E' \to E$, получим разбиение E некоторыми (кусочно-гладкими) кривыми.



Возьмём один квадратик слева и рассмотрим фигуру, в которую он переходит (её можно назвать ***криволинейным параллелограммом***).



Пренебрегая бесконечно малыми величинами более высоких (по сравнению с h) порядков, заменим «секущий» вектор

$$(x(u+h,v) - x(u,v), y(u+h,v) - y(u,v))$$

на касательный вектор $\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot h,\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot h\right)$. Аналогично, «секущий» вектор $(x(u, v+h) - x(u,v), y(u, v+h) - y(u,v))$ заменим на касательный вектор $\left(\dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot h,\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot h\right)$. Найдём площадь параллелограмма, построенного на касательных векторах:

$$m = \left| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} h & \dfrac{\partial y}{\partial u} h & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} h & \dfrac{\partial y}{\partial v} h & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} h & \dfrac{\partial y}{\partial u} h \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} h & \dfrac{\partial y}{\partial v} h \end{vmatrix} \right| = h^2 \left| D \right|.$$

(Сначала вычисляется векторное произведение, затем его модуль, равный площади параллелограмма.) Можно доказать, что площадь «криволинейного параллелограмма» отличается от вычисленной на бесконечно малую более высокого порядка, чем h^2, т. е. равна

$$h^2|D| + \varepsilon(h,u,v)\cdot h^2,$$

где функция $\varepsilon(h,u,v)$ стремится к 0 при $h\to 0$ равномерно на множестве E', т. е.

$$\forall\varepsilon_0>0\ \ \exists\delta>0:\quad \forall h<\delta,\ \ \forall(u,v)\in E'\quad |\varepsilon(h,u,v)|<\varepsilon_0.$$

Так как мера границы E равна 0, то при построении интегральных сумм можно рассматривать только те элементы разбиения, которые не пересекаются с границей. Рассмотрим интегральную сумму для нашего разбиения области E (включая в неё лишь те параллелограммы, которые целиком принадлежат области):

$$\sum f(x_i,y_j)m(E_{ij}) = \sum f(x_i,y_j)(|D|\,h^2+\varepsilon(h,u,v)h^2) =$$
$$= \sum f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))\ \ |D|\cdot h^2 +$$
$$+\sum f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))\cdot\varepsilon(h,u,v)\cdot h^2. \quad (*)$$

Первое слагаемое здесь — интегральная сумма для интеграла $\iint\limits_{E'} f(x(u,v),y(u,v))\,|D|\,du\,dv$, соответствующая рассматриваемому разбиению E' на квадраты. Второе слагаемое стремится к 0 при неограниченном измельчении разбиения. Действительно, функция f непрерывна на компактном множестве, а следовательно ограничена: $|f(x,y)|\le M$. Пусть ε_0 — произвольное положительное число. Возьмём δ такое, чтобы

$$\forall h<\delta,\ \ \forall(u,v)\in E'\quad |\varepsilon(h,u,v)|<\frac{\varepsilon_0}{M\cdot m(E)}.$$

Тогда при $h<\delta$

$$\left|\sum f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))\cdot\varepsilon(h,u,v)\cdot h^2\right| \le M\frac{\varepsilon_0}{M\cdot m(E)}\sum h^2\le\varepsilon_0,$$

т. е. второе слагаемое в правой части формулы (*) при $h\to 0$ стремится к 0. Переходя к пределу, получим из (*) требуемую в теореме формулу.

Наиболее часто мы будем использовать замену переменных, связанную с переходом от декартовой системы координат к ***полярным координатам***. Напомним: декартова и полярная система координат называются согласованными, если полюс совпадает с началом декартовой системы, а полярная ось — с осью OX. В этом случае декартовы x, y и полярные ρ,φ координаты одной и той же точки связаны формулами

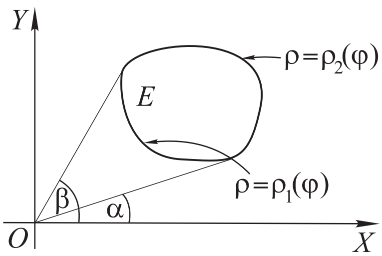
$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi.$$

Вычислим якобиан такой замены переменных:

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Формула, рассмотренная в теореме 7, принимает вид:

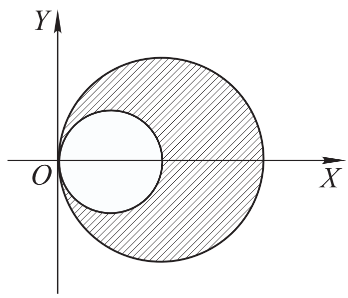
$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_E f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi.$$



Здесь можно не вводить новое обозначение для области интегрирования, так как область E остаётся неизменной, лишь её точки приобретают новые координаты. Как правило, сначала выполняется интегрирование по ρ (в пределах, зависящих в общем случае от φ), а затем интегрирование по углу φ — в пределах его наибольшего изменения:

$$\iint\limits_E f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho \right) d\varphi.$$

Пример 5. Вычислить $\displaystyle\iint\limits_E \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если область E ограничена окружностями $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$.



Решение. Выделяя полные квадраты, уравнения окружностей можно записать так:

$$(x-1)^2+y^2=1,\ (x-2)^2+y^2=4.$$

Теперь легко изобразить окружности, представить требуемую область E. Однако для того, чтобы вычислить интеграл в полярной системе координат, нам нужно эти уравнения тоже записать в полярных координатах. Подставляя $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим уравнения

$$\rho = 2\cos\varphi, \quad \rho = 4\cos\varphi.$$

Угол φ, очевидно, может принимать значения от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$. Переходим в полярную систему и вычисляем интеграл:

$$\iint\limits_E \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi \end{array}\right| = \iint\limits_E \frac{\rho\cos\varphi}{\rho}\cdot\rho d\rho d\varphi =$$

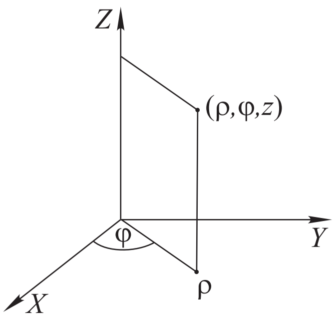
$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho\cos\varphi d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = 6\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= 6\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) = 6\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = 8.$$

В тройных интегралах замена переменных проводится по аналогичной формуле:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{E'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|D|\,du\,dv\,dw.$$

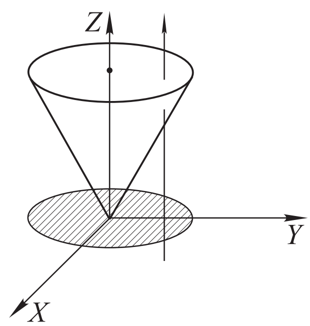
Наиболее часто приходится использовать переход в цилиндрическую или сферическую системы координат. ***Цилиндрические координаты*** точки — это полярные координаты ρ и φ её проекции на плоскость XOY, а также аппликата z. Таким образом, переход в цилиндрическую систему координат проводится по формулам:



$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z.$$

Легко подсчитать, что якобиан такого преобразования равен ρ. В большинстве случаев использование цилиндрических координат равносильно интегрированию по переменной z, а затем переходу в полярную систему координат в полученном двойном интеграле.

Пример 6. Вычислить $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, если тело T ограничено конической поверхностью $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z=1$.



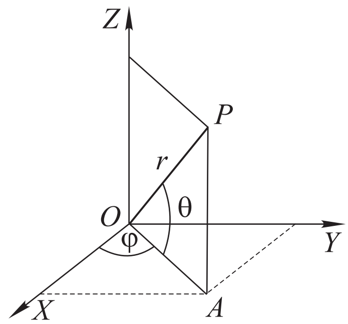
Решение. Сделаем рисунок. Можно интегрировать по z (z изменяется от поверхности конуса, на которой $z=\sqrt{x^2+y^2}$, до плоскости $z=1$), а затем, в двойном интеграле по кругу, перейти к полярным координатам. Или, что то же самое, перейти в цилиндрическую систему:

$$\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\\ z=z,\quad\ \ dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz\end{array}\right| =$$

$$= \iint\limits_{T_{XY}} \rho\,d\rho\,d\varphi \int\limits_\rho^1 z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_{T_{XY}} (1-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Важную роль играет ***сферическая система*** координат. В этой системе положение точки P задаётся числами r,φ,θ, причём $r=|OP|$ — расстояние от точки до начала координат ($r\geq 0$), φ — полярный угол проекции A точки P на плоскость XOY ($0\leq\varphi<2\pi$), θ — угол между вектором $\overline{OP}$ и плоскостью XOY $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$. Рассматривая соответствующие треугольники, легко видеть, что $|OA|=r\cos\theta$, а декартовы координаты x, y, z точки P выражаются через r,φ,θ следующим образом:



$$x=r\cos\theta\cos\varphi,\quad y=r\cos\theta\sin\varphi,\quad z=r\sin\theta.$$

Полезно заметить, что $x^2+y^2+z^2=r^2$.

Вычислим якобиан этой замены переменных:

$$D=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta\end{vmatrix} =$$

$$=\sin\theta\begin{vmatrix} -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi\\ r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\end{vmatrix} + r\cos\theta\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\end{vmatrix} =$$

$$=\sin\theta(r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi)+$$

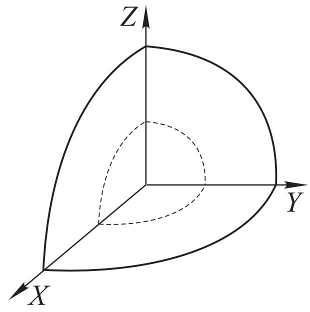
$$+(r\cos^2\theta\cos^2\varphi + r\cos^2\theta\sin^2\varphi) =$$

$$= r^2\sin^2\theta\cos\theta + r^2\cos^3\theta = r^2\cos\theta.$$

Пример 7. Вычислить $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, если тело T ограничено поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+z^2=4,$$

причём $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.



Решение. Данные поверхности являются сферами, их уравнения в сферической системе координат имеют вид $r=1$, $r=2$. Чтобы охватить все точки T, сферические координаты r, φ, θ должны принимать значения в пределах: $1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iiint\limits_T \frac{1}{r}\cdot r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^2 r\cos\theta\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \left(\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}\sin\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

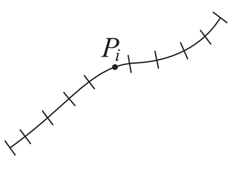
11.3. Криволинейные интегралы 1-го рода

Рассмотрим на плоскости XOY гладкую кривую Γ, заданную параметрическими уравнениями:

$$x=x(t),\ y=y(t),\quad t\in[a,b].$$

Напомним: гладкость означает, что производные $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны, причём одновременно в 0 не обращаются. В пункте 7.5.3 было доказано, что такая кривая спрямляема, т. е. имеет длину, которая вычисляется по формуле:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$



Пусть в каждой точке Γ определена функция $f(P)=f(x,y)$, которую мы будем считать непрерывной на Γ. Рассмотрим разбиение Γ конечным числом точек в объединение кривых Γ_i:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n.$$

Выберем произвольно на кривой Γ_i точку P_i. Обозначим ΔL_i — длину кривой Γ_i. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i.$$

Если существует предел таких сумм (при $\max \Delta L_i \to 0$), не зависящий от вида разбиений и от выбора точек P_i, то он называется ***криволинейным интегралом 1-го рода*** от функции f по кривой Γ:

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dL = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum f(P_i)\Delta L_i.$$

Уточнение понятия «предел», как всегда, можно дать на «$\varepsilon - \delta$»-языке. В точности так же определяется криволинейный интеграл по пространственной кривой.

Сравнивая определение нового типа интеграла с определениями интегралов, рассмотренных ранее, мы видим много общего. Поэтому и свойства криволинейных интегралов 1-го рода аналогичны свойствам уже знакомых интегралов. Например, если $f(P) \equiv 1$, то $\int\limits_{\Gamma} f(P)\,dL = \int\limits_{\Gamma} dL$ — длина кривой Γ. Интеграл обладает свойствами линейности:

$$\int\limits_{\Gamma} (\alpha f_1 + \beta f_2)\,dL = \alpha \int\limits_{\Gamma} f_1\,dL + \beta \int\limits_{\Gamma} f_2\,dL$$

и аддитивности: если $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причём $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dL = \int\limits_{\Gamma_1} f\,dL + \int\limits_{\Gamma_2} f\,dL.$$

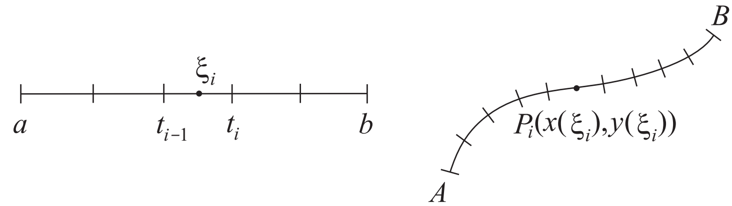
В некоторых задачах на кривой Γ выбирается положительное направление (ориентация). Однако из определения следует, что величина криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от ориентации кривой:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f\,dL = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f\,dL.$$

Выведем формулу для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода. Пусть кривая Γ задана параметрически:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b].$$

Рассмотрим интегральную сумму: $\sum f(P_i)\Delta L_i$. Разбиению Γ и выбору точек P_i соответствует разбиение отрезка $[a,b]$ и выбор точек ξ_i на нём:



Так как $\Delta L_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$, то

$$\sum f(P_i)\Delta L_i = \sum f(x(\xi_i), y(\xi_i)) \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt =$$

$$= \sum f(x(\xi_i), y(\xi_i)) \sqrt{(x'(\eta_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\Delta t_i.$$

Последнее равенство — результат применения теоремы о среднем, точка η_i (как и ξ_i) лежит на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$. Полученная сумма очень похожа на интегральную сумму для определённого интеграла, однако мешает «небольшое» различие точек ξ_i и η_i. Используя равномерную непрерывность, можно доказать (подробно такое рассуждение дано при выводе формулы для длины кривой в 7.5.3), что при измельчении разбиений эта сумма стремится к интегралу. Переходя к пределу, получаем:

$$\int\limits_{\Gamma} f(P)\,dL = \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Интеграл по пространственной кривой, заданной уравнениями

$$x = x(t),\;\; y = y(t),\;\; z = z(t),\quad t \in [a, b],$$

вычисляется аналогично:

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z)\,dL = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t)\;) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Если плоская кривая является графиком функции $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, то, рассматривая x в качестве параметра, получим:

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y) dL = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\; \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx.$$

Если плоская кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$ в полярной системе координат, то можно взять угол φ в качестве параметра:

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\;\; y = \rho(\varphi)\sin\varphi,\quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Подставляя в основную формулу, получим:

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dL = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Пример 8. Вычислить $\int\limits_{\Gamma}(x+y)\,dL$, если Γ — верхняя полуокружность $x^2+y^2=9$, $y \geq 0$.

Решение. Зададим полуокружность параметрически: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \leq t \leq \pi$. Вычисляем интеграл:

$$\int\limits_{L}(x+y)\,dL = \int\limits_{0}^{\pi}(3\cos t + 3\sin t)\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 9\int\limits_{0}^{\pi}(\cos t+\sin t)\,dt = 9(\sin t - \cos t)\Big|_0^{\pi} = 9(1+1) = 18.$$

11.4. Поверхностные интегралы 1-го рода

Мы рассмотрим ещё один тип интеграла, определяемый по той же схеме: разбиение, выбор точек, составление суммы, переход к пределу. Теперь областью интегрирования будет ***поверхность*** Σ в трёхмерном пространстве, в каждой точке которой определена функция

$$f(P) = f(x,y,z).$$

Однако для составления суммы нужно определить ***меру элемента разбиения***. Для двойного и тройного интегралов — это площадь и объём (мера Жордана), для криволинейного — длина кривой. Для поверхностного интеграла — это площадь поверхности, понятие для нас пока незнакомое.

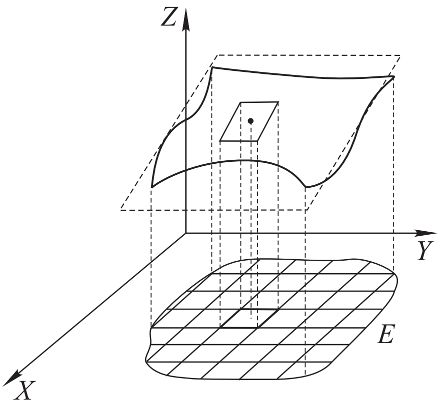
Напомним: длина кривой определена как предел длин вписанных в кривую ломаных. Оказывается, ***нельзя*** определить площадь поверхности как предел площадей многогранных поверхностей, вписанных в данную поверхность. Можно построить пример (даже очень простой поверхности), в котором такой предел ***зависит от способа построения*** вписанной многогранной поверхности. Поэтому для определения площади поверхности нужен другой подход.

Пусть поверхность Σ задана уравнением

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in E,$$

где E — компактное множество на плоскости, имеющее кусочно-гладкую границу. Будем считать, что функция $z(x,y)$ и её частные производные

z'_x, z'_y непрерывны на множестве E. При этих условиях поверхность является гладкой, т. е. в каждой своей точке имеет касательную плоскость.



Плоская область E является ***однозначной*** проекцией Σ на плоскость XOY: в каждую точку E проецируется только одна точка Σ. Рассмотрим разбиение E кусочно-гладкими кривыми:

$$E = E_1 \cup \ldots \cup E_n.$$

В каждом элементе E_i выберем произвольно точку $P_i(x_i, y_i)$. Пусть M_i — соответствующая P_i точка поверхности, её координаты $(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$. Построим в точке M_i касательную плоскость к Σ. Обозначим через Ω_i ту часть касательной плоскости, которая проецируется на E_i. Пусть $m(\Omega_i)$ — площадь (мера Жордана) плоской фигуры Ω_i. Составим сумму: $\sum\limits_{i=1}^{n} m(\Omega_i)$.

Площадью поверхности Σ называется предел таких сумм при условии, что мелкость λ исходного разбиения стремится к нулю:

$$S\,(\Sigma) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m(\Omega_i).$$

Как обычно, предел не должен зависеть от конкретного вида разбиений и от выбора точек P_i. Выведем формулу для вычисления площади поверхности. Пусть γ_i — угол между плоскостью элемента Ω_i и плоскостью XOY. Так как E_i — проекция Ω_i, то, как известно из элементарной геометрии,

$$m(E_i) = m(\Omega_i) \cos \gamma_i.$$

Так как γ_i совпадает с углом между осью OZ (т. е. вектором $\overline{k}$) и нормалью к поверхности (т. е. градиентом), то косинус можно вычислить с помощью скалярного произведения:

$$\cos \gamma_i = \frac{(\operatorname{grad} \Sigma,\ \overline{k})}{|\operatorname{grad} \Sigma| \cdot |\overline{k}|}.$$

Поверхность в нашем случае задана уравнением $z = z(x, y)$, или $z - z(x, y) = 0$. Поэтому градиент имеет координаты $(-z'_x, -z'_y, 1)$. Отсюда получаем

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

(конечно, частные производные вычисляются в точке (x_i, y_i)). Для площади поверхности Σ получаем выражение:

$$S(\Sigma) = \lim_{\lambda\to 0}\sum m(\Omega_i) = \lim_{\lambda\to 0}\sum \frac{m(E_i)}{\cos\gamma_i} = \lim_{\lambda\to 0}\sum \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, m(E_i).$$

Под знаком предела получена интегральная сумма для двойного интеграла по области E. Поэтому

$$S(\Sigma) = \iint\limits_E \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dx\, dy.$$

Множество E компактно, измеримо; подинтегральная функция непрерывна. Следовательно, интеграл существует. Фактически получено доказательство следующей теоремы.

Теорема 8. Пусть поверхность Σ задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in E$, где E — компактное множество на плоскости, имеющее кусочно-гладкую границу. Если функция $z(x, y)$ и её частные производные z'_x, z'_y непрерывны на E, то поверхность Σ является ***квадрируемой***, т. е. имеет площадь (которую можно вычислить по приведённой формуле).

Иногда удобнее проецировать поверхность на другую координатную плоскость, например XOZ. В этом случае её задают уравнением $y = y(x, z)$. Площадь находится по аналогичной формуле:

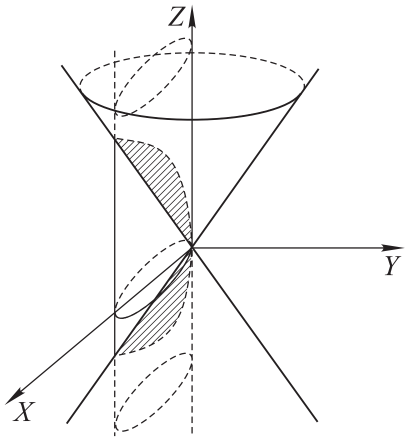
$$S(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma_{XOZ}} \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dx\, dz.$$

Если поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то нужно выбрать — на какую координатную плоскость её проецировать. Проекция должна быть однозначной; например, при проецировании на XOY это означает, что уравнение $F(x, y, z) = 0$ должно определять неявную функцию $z = z(x, y)$. По теореме 7 из 10.3, для этого необходимо, чтобы $F'_z \neq 0$. Частные производные z'_x, z'_y в этом случае удобно вычислять по формулам:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Пример 9. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2+y^2 = z^2$, находящейся внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

Решение. Сделаем чертёж (см. следующую страницу). Цилиндр смещён по оси OX и «вырезает» из поверхности конуса 2 симметричные части. Площади их равны, поэтому рассмотрим только верхнюю, заданную уравнением $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Её проекция E на XOY — круг радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$. Найденную площадь удвоим:



$$S(\Sigma) = 2\iint\limits_E \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy =$$

$$= 2\iint\limits_E \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= 2\sqrt{2}\iint\limits_E dx\,dy.$$

Полученный двойной интеграл легко вычислить — например, переходя к полярным координатам. Однако нам известно, что такой интеграл равен площади круга E, поэтому здесь можно обойтись и без интегрирования:

$$S(\Sigma) = 2\sqrt{2}\iint\limits_E dx\,dy = 2\sqrt{2}\cdot\pi R^2 = 2\sqrt{2}\pi.$$

Введём понятие краевой точки поверхности. Пусть поверхность Σ однозначно проецируется на какую-либо координатную плоскость, E — соответствующая проекция. Точка $Q \in \Sigma$ называется ***краевой*** точкой Σ, если проекция Q является граничной точкой E. Множество всех краевых точек называется ***краем*** поверхности.

Теперь можно перейти к определению нового типа интеграла. Пусть в каждой точке поверхности Σ определена функция $f(x,y,z)$. Разобьём Σ кусочно-гладкими кривыми в объединение: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n$ так, чтобы пересечения $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ были либо пустыми, либо состояли из краевых точек. На каждом элементе разбиения произвольно выберем точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Составим сумму $\sum f(x_i, y_i, z_i)\cdot S(\Sigma_i)$, где $S(\Sigma_i)$ — площадь поверхности Σ_i. Как обычно, мелкость разбиения определяется как максимальный из диаметров Σ_i:

$$\lambda = \max d(\Sigma_i), \quad d(\Sigma_i) = \sup_{P', P'' \in \Sigma_i} |P' - P''|.$$

Если существует предел интегральных сумм (при $\lambda \to 0$), не зависящий от вида разбиений и от выбора точек, то он называется ***поверхностным интегралом 1-го рода***:

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum f(x_i, y_i, z_i) S(\Sigma_i).$$

Общий подход к определению нескольких типов интегралов приводит и к общим свойствам: поверхностный интеграл обладает свойствами линейности, аддитивности. Если $f(x,y,z) \equiv 1$, то $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_\Sigma d\sigma =$ $= S(\Sigma)$ — площадь поверхности Σ.

Не проводя строгого рассуждения, покажем, как можно вывести формулу для вычисления поверхностного интеграла 1-го рода. Пусть, для определённости, поверхность Σ однозначно проецируется на область E в плоскости XOY, т. е. может быть задана уравнением $z = z(x, y)$. Разбиение $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n$ индуцирует разбиение $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, причём E_i является проекцией Σ_i. Преобразуем интегральную сумму:

$$\sum f(x_i, y_i, z_i) S(\Sigma_i) = \sum f(x_i, y_i, z_i) \iint\limits_{E_i} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy =$$

$$= \sum f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, m(E_i).$$

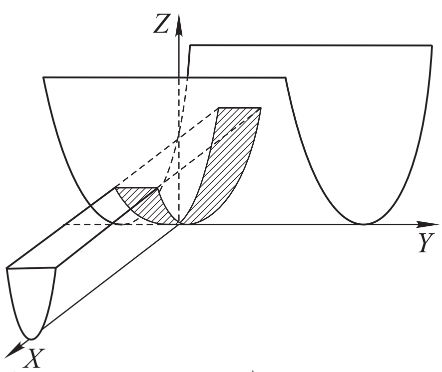
Последнее равенство — результат применения теоремы о среднем для двойного интеграла. Полученная сумма очень похожа на интегральную сумму для двойного интеграла. Разница лишь в том, что функция $f(x, y, z(x, y))$ вычисляется в точках $(x_i, y_i) \in E_i$, а $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ — в некоторых точках $(\xi_i, \eta_i) \in E_i$. Пользуясь равномерной непрерывностью рассматриваемых функций, можно доказать, что при измельчении разбиений это отличие стремится к нулю. Переходя к пределу по всё более мелким разбиениям, получим:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{E} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy.$$

Если поверхность Σ проецируется на другую координатную плоскость, то формулы аналогичны.

Пример 10. Вычислить $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^2}{\sqrt{2z+1}}\, d\sigma$, где Σ — часть поверхности $x^2 = 2z$, вырезанной поверхностями $z = y^2$ и $z = 2$.

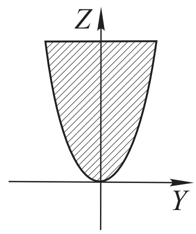
Решение. Сделаем чертёж. Поверхность $x^2 = 2z$ — цилиндрическая, её направляющая — парабола $x^2 = 2z$ в плоскости XOZ, а образующие параллельны оси OY. Аналогично строится цилиндрическая поверхность $z = y^2$, которая, вместе с плоскостью $z = 2$, вырезает из поверхности $x^2 = 2z$ две симметричные части Σ_1 и Σ_2. Удобно проецировать их на плоскость YOZ, хотя и придётся рассматривать только одну из частей (иначе проекция не будет однозначной).



Рассматриваем часть Σ_1, соответствующую положительным x: $x = \sqrt{2z}$. Тогда $x'_z = \dfrac{1}{\sqrt{2z}}$, $x'_y = 0$, и мы получаем:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{x^2}{\sqrt{2z+1}}\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{YOZ}} \frac{2z}{\sqrt{2z+1}} \sqrt{1+\frac{1}{2z}}\, dy\, dz = \iint\limits_{\Sigma_{YOZ}} \sqrt{2z}\, dy\, dz.$$

Проекция Σ_{YOZ} ограничена параболой $z = y^2$ и прямой $z = 2$. Вычислим полученный двойной интеграл:



$$\iint\limits_{\Sigma_{YOZ}} \sqrt{2z}\, dy\, dz = \int\limits_0^2 dz \int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \sqrt{2z}\, dy = \sqrt{2} \int\limits_0^2 2z\, dz = \sqrt{2} z^2 \Big|_0^2 = 4\sqrt{2}.$$

Вторая часть поверхности Σ_2 задана уравнением $x = -\sqrt{2z}$, имеет ту же проекцию. Подинтегральная функция и выражение для $d\sigma$ принимают в симметричных точках Σ_1 и Σ_2 одинаковые значения. Поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^2}{\sqrt{2z+1}}\, d\sigma = 2 \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{x^2}{\sqrt{2z+1}}\, d\sigma = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

11.5. Геометрические и физические приложения интегралов

Основные геометрические приложения интегралов уже рассмотрены: если подинтегральная функция тождественно равна 1, то интеграл равен «мере» фигуры, по которой он вычисляется. Итак, площадь плоской фигуры E:

$$m(E) = \iint\limits_E dx\, dy;$$

объём трёхмерного тела T:

$$V(T) = \iiint\limits_T dx\, dy\, dz;$$

длина кривой Γ (плоской или пространственной):

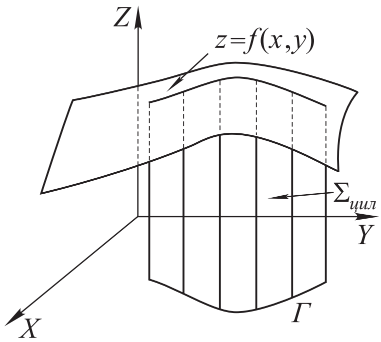
$$L(\Gamma) = \int\limits_\Gamma dL;$$

площадь поверхности Σ:

$$S(\Sigma) = \iint\limits_\Sigma d\sigma.$$

Тип интеграла определяется типом фигуры.

Ещё одно геометрическое приложение имеет криволинейный интеграл



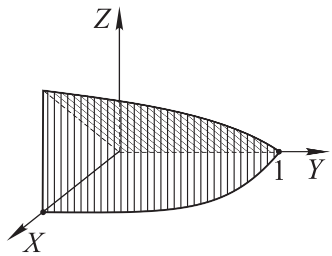
1-го рода по плоской кривой. Он вычисляет площадь части цилиндрической поверхности $\Sigma_{\text{цил}}$ (её образующие параллельны оси OZ, направляющая — кривая Γ в плоскости XOY), заключённой между плоскостью XOY и поверхностью $z = f(x, y)$:

$$S\left(\Sigma_{\text{цил}}\right) = \int\limits_{\Gamma} f(x, y)\, dL$$

(здесь предполагается, что $f(x, y) \geq 0$). Действительно, если в интегральной сумме криволинейного интеграла $\sum f(x_i, y_i)\Delta L_i$ заменить ΔL_i на длины звеньев вписанной ломаной, то получим площадь многогранной фигуры, составленной из прямоугольников. Можно доказать, что при измельчении разбиений площадь такой фигуры стремится к площади цилиндрической поверхности.

Пример 11. Найти площадь части поверхности $y = 1 - x^2$, расположенной в первом октанте между плоскостями $z = 0$ и $z = x$.

Решение. Направляющая Γ рассматриваемой цилиндрической поверхности — участок параболы $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Вычисляем площадь с помощью криволинейного интеграла:

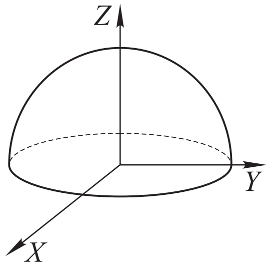


$$S = \int\limits_{\Gamma} x\, dL = \int\limits_{0}^{1} x\sqrt{1 + (-2x)^2}\, dx = \int\limits_{0}^{1} x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, d(1 + 4x^2) = \frac{1}{8}\,\frac{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\,\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{12}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

И геометрические, и физические приложения интегралов всегда связаны с вычислением некоторой величины Q, относящейся к данной фигуре (фигура может быть плоской, пространственным телом, кривой или поверхностью). Величина Q должна обладать свойством ***аддитивности***, т. е. при разбиении фигуры величина, относящаяся по всей фигуре, должна равняться сумме величин, относящихся к элементам разбиения. Хорошим примером является ***масса***. Масса всей фигуры, конечно, равна сумме масс её частей. Задача вычисления массы для случая тонкого стержня подробно рассмотрена в 7.5.4. Масса любой фигуры также равна интегралу (соответствующего типа) по этой фигуре от функции ***плотности***.

Пример 12. Найти массу полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq R$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.



Решение. В задаче речь идёт о пространственном теле T; значит, применяется тройной интеграл. По условию плотность $\rho(x,y,z) = kz$, где k — коэффициент пропорциональности. Тип интеграла и подинтегральная функция определены, осталось провести вычисления.

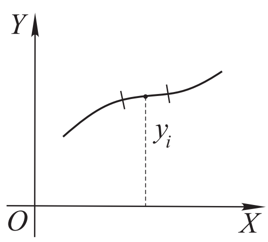
$$M = \iiint\limits_T kz\,dx\,dy\,dz = k\iint\limits_{T_{xy}} dx\,dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{k}{2}\iint\limits_{T_{xy}} (R^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

Проекция T_{xy} есть круг, поэтому лучше перейти в полярную систему координат.

$$M = \frac{k}{2}\iint\limits_{T_{xy}} (R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi \end{array} \right| = \frac{k}{2}\iint\limits_{T_{xy}} (R^2-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (R^2\rho - \rho^3)\,d\rho = \frac{k}{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{R^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^R = \pi k\frac{R^4}{4}.$$

Ещё одна аддитивная величина, играющая важную роль в механике, — статический момент. Рассмотрим сначала это понятие для объектов на плоскости. ***Статическим моментом*** материальной точки относительно некоторой оси называется произведение md, где m — масса точки, d — расстояние до оси. Для системы точек на плоскости с массами m_1, $m_2, \ldots, m_n$ статический момент равен $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i d_i$, причём расстояния d_i берутся со знаком «+» для точек, лежащих по одну сторону от оси, и со знаком «−» для точек, лежащих по другую сторону.



Распространим это понятие на произвольную материальную фигуру E на плоскости (это может быть плоская область или плоская кривая). Момент будем рассматривать относительно одной из координатных осей, например OX. Пусть распределение массы задано функцией плотности $\rho = \rho(x,y)$. Рассмотрим разбиение фигуры, выберем точку (x_i, y_i) в каждом элементе E_i. Масса элемента E_i приближённо равна $\rho(x_i,y_i)m(E_i)$ (здесь $m(E_i)$ — площадь или длина, в зависимости от фигуры). Статический момент элемента E_i приближённо равен:

$$\Delta M_i \approx y_i\rho(x_i,y_i)m(E_i)$$

(мы считаем, что масса сосредоточена в выбираемой точке). Суммируя, получаем:

$$M_{OX} \approx \sum y_i \rho(x_i, y_i) m(E_i).$$

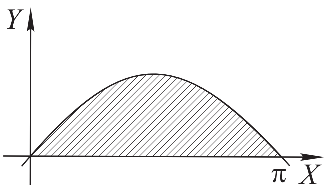
Переходя к пределу по всё более мелким разбиениям, находим точное выражение для статического момента через интеграл:

$$M_{OX} = \iint\limits_E y f(x,y)\,dx\,dy, \text{ если } E \text{ — плоская пластина;}$$

$$M_{OX} = \int\limits_E y f(x,y)\,dL, \text{ если } E \text{ — кривая.}$$

Заметим, что эти равенства являются ***определениями*** статических моментов для соответствующих фигур.

Пример 13. Найти статический момент однородной ($\rho = 1$) плоской пластинки, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$, относительно оси OY.



Решение. Элемент пластинки, имеющий координаты (x, y), имеет площадь $dx\,dy$, массу $\rho\,dx\,dy$, статический момент относительно OY: $x\rho\,dx\,dy$. Интегрируя, найдём момент фигуры:

$$M_{OY} = \iint x\,dx\,dy = \int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^{\sin x} x\,dy = \int\limits_0^\pi x\sin x\,dx \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin x\,dx \end{array} \right| =$$

$$= -x\cos x \Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x\,dx = \pi + \sin x \Big|_0^\pi = \pi.$$

Центром масс фигуры на плоскости называется такая точка, что если в ней сосредоточить всю массу, то статические моменты этой точки относительно координатных осей будут равны статическим моментам фигуры. Из определения легко следуют формулы для координат центра масс. Например, для плоской фигуры:

$$M \cdot x_c = M_{OY} \Rightarrow x_c = \frac{M_{OY}}{M} = \frac{\iint\limits_E x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_E \rho(x,y)\,dx\,dy},$$

$$M \cdot y_c = M_{OX} \Rightarrow y_c = \frac{M_{OX}}{M} = \frac{\iint y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint \rho(x,y)\,dx\,dy}.$$

Для фигуры, расположенной в трёхмерном пространстве (тело, поверхность или кривая), статические моменты рассматриваются ***относительно координатных плоскостей***. С их помощью, аналогично плоскому случаю, вводится понятие центра масс. Пусть M, M_{XOY}, M_{XOZ}, M_{YOZ} — масса и статические моменты относительно соответствующих плоскостей. Тогда координаты центра масс, например материального тела T, вычисляются так:

$$M\cdot x_c = M_{YOZ} \Rightarrow x_c = \frac{M_{YOZ}}{M} = \frac{\iiint\limits_T x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M},$$

$$M\cdot y_c = M_{XOZ} \Rightarrow y_c = \frac{M_{XOZ}}{M} = \frac{\iiint\limits_T y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M},$$

$$M\cdot z_c = M_{XOY} \Rightarrow z_c = \frac{M_{XOY}}{M} = \frac{\iiint\limits_T z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M}.$$

Для статических моментов и координат центра масс кривой или поверхности формулы те же, меняется лишь тип интеграла.

Пример 14. Найти координаты центра масс тонкого стержня L, расположенного по отрезку прямой $x = 2t$, $y = 3t$, $z = t$, $t \in [0,1]$, если плотность $\rho(x,y,z) = x+y+z$.

Решение. Так как объект — линия в пространстве, то используется криволинейный интеграл. Найдём массу стержня:

$$M = \int\limits_L (x+y+z)\,dL = \int\limits_0^1 (2t+3t+t)\sqrt{(2t)'^2+(3t)'^2+t'^2}\,dt = \sqrt{14}\int\limits_0^1 6t\,dt = 3\sqrt{14}.$$

Найдём статические моменты относительно координатных плоскостей:

$$M_{YOZ} = \int\limits_L x(x+y+z)\,dL = \int\limits_0^1 2t\cdot 6t\sqrt{14}\,dt = \sqrt{14}\cdot 4t^3\,\Big|_0^1 = 4\sqrt{14},$$

$$M_{XOZ} = \int\limits_L y(x+y+z)\,dL = \int\limits_0^1 3t\cdot 6t\sqrt{14}\,dt = \sqrt{14}\cdot 6t^3\,\Big|_0^1 = 6\sqrt{14},$$

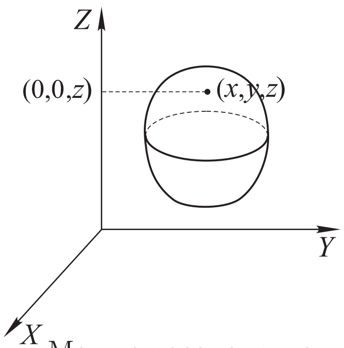
$$M_{XOY} = \int\limits_L z(x+y+z)\,dL = \int\limits_0^1 t\cdot 6t\sqrt{14}\,dt = \sqrt{14}\cdot 2t^3\,\Big|_0^1 = 2\sqrt{14}.$$

Теперь находим координаты центра масс:

$$x_c = \frac{M_{YOZ}}{M} = \frac{4}{3},\quad y_c = \frac{M_{XOZ}}{M} = 2,\quad z_c = \frac{M_{XOY}}{M} = \frac{2}{3}.$$

Ещё одно важное применение интегралов в механике — вычисление моментов инерции. ***Моментом инерции*** материальной точки с массой m относительно некоторой оси называется величина $J = md^2$, где d — расстояние до оси. Для системы точек момент инерции определяется как сумма

$\sum m_i d_i^2$. Если же масса не сосредоточена в отдельных точках, а распределена на некоторой фигуре, то определение даётся с помощью интеграла (по



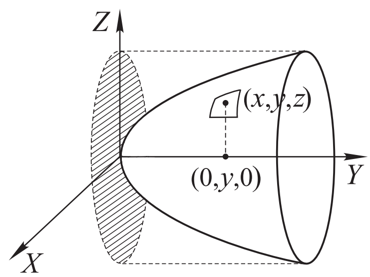
этой фигуре) от функции ρd^2 (ρ — плотность в текущей точке, d — расстояние от этой точки до оси). Например, пусть требуется найти момент инерции тела T относительно оси OZ. Элемент тела с координатами (x, y, z) имеет массу $\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$. Его расстояние от оси OZ равно $\sqrt{x^2 + y^2}$. Значит, момент инерции равен $J = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$.

Можно рассматривать момент инерции относительно точки (полярный момент инерции) или относительно плоскости. В этом случае d — расстояние до соответствующего объекта.

Пример 15. Найти момент инерции однородной ($\rho \equiv 1$) поверхности параболоида $\Sigma : 2y = x^2 + z^2,\ \ 0 \le y \le 2,$ относительно оси OY.

Решение. Рассматривается поверхность, поэтому будем применять поверхностный интеграл. Элемент поверхности с координатами (x, y, z) имеет массу $\rho(x, y, z)\,d\sigma = d\sigma$, его расстояние до оси OY равно $\sqrt{x^2 + z^2}$. Следовательно, момент инерции равен:

$$J = \iint (x^2 + z^2)\,d\sigma.$$



Будем вычислять поверхностный интеграл, проецируя поверхность на плоскость XOZ. Проекция есть круг $x^2 + z^2 \le 4$. Так как $y = \dfrac{1}{2}(x^2 + z^2)$, то

$$y'_x = x,\ \ y'_z = z,\ \ d\sigma = \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\,dx\,dz = \sqrt{1 + x^2 + z^2}\,dx\,dz.$$

Вычисления удобно проводить в полярной системе координат:

$$J = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + z^2)\,d\sigma = \iint\limits_{x^2+z^2\le 4} (x^2 + z^2)\sqrt{1 + x^2 + z^2}\,dx\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2\sqrt{1+\rho^2}\rho\,d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,d(\rho^2)\,\left|\rho^2 + 1 = t\right| =$$

$$= \pi\int\limits_1^5 (t-1)\sqrt{t}\,dt = \pi\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^5 = \pi\left(\frac{2\cdot 25\sqrt{5}}{5} - \frac{2\cdot 5\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) =$$

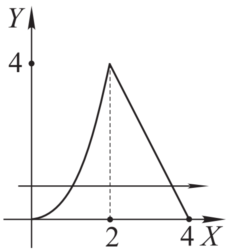
$$= \frac{\pi}{15}(100\sqrt{5} + 4).$$

11.6. Задачи с решениями

1. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_2^4 dx \int_0^{8-2x} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Изобразим область, по которой проводится интегрирование.

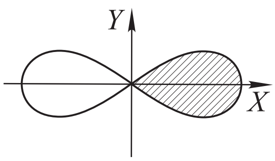


В первом слагаемом $0 \le x \le 2$, а y изменяется от $y=0$ (прямая) до $y = x^2$ (парабола). Во втором слагаемом $2 \le x \le 4$, y изменяется от $y=0$ (прямая) до $y = 8-2x$ (прямая). Вся область — объединение этих двух частей. Меняя порядок интегрирования, видим, что x изменяется от параболы (на ней $x = \sqrt{y}$) до прямой (на ней $x = \dfrac{8-y}{2}$). Пределы внешнего интегрирования (по y) постоянны: $0 \le y \le 4$. Итак, изменение порядка интегрирования позволило заменить сумму одним интегралом:

$$I = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\frac{8-y}{2}} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить $\iint\limits_E (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область E ограничена одним лепестком ***лемнискаты Бернулли*** $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$, соответствующим $x \ge 0$.

Решение. Запишем уравнение лемнискаты в полярной системе координат (подставляя $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$): $\rho^4 = 2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$, $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$, т. е. $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$.

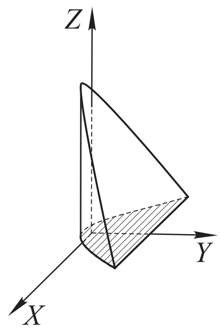


Теперь легче построить кривую. Обратим внимание, что в пределах указанного лепестка угол φ принимает значения от $-\dfrac{\pi}{4}$ до $\dfrac{\pi}{4}$. Вычисляем интеграл, переходя в полярную систему координат:

$$\iint\limits_E (x^2+y^2)\,dx\,dy \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi \end{array} \right| = \iint \rho^3\,d\rho\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho^3\,d\rho =$$

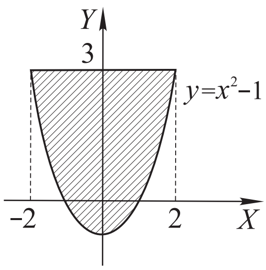
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Вычислить $I = \iiint\limits_T \frac{z(x+y)}{(3-y)^2}\,dx\,dy\,dz$, если тело T ограничено поверхностями $z=0$, $3y+z=9$, $y=x^2-1$.



Решение. Сделаем чертёж. Поверхность $y=x^2-1$ цилиндрическая, направляющей является парабола, образующие параллельны оси OZ. Плоскость $3y+z=9$ ограничивает тело сверху, плоскость $z=0$ — снизу. Интегрируя по z, переходим к двойному интегралу по проекции: $I = \iint\limits_{T_{xy}} \frac{x+y}{(3-y)^2}\,dx\,dy \int\limits_0^{9-3y} z\,dz =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{T_{xy}} \frac{x+y}{(3-y)^2}\cdot(9-3y)^2\,dx\,dy = \frac{9}{2}\iint\limits_{T_{xy}}(x+y)\,dx\,dy.$$



Проекция ограничена параболой $y=x^2-1$ и прямой $y=3$ (пересечение плоскостей $z=0$ и $3y+z=9$). Интегрируем, например, сначала по y, а затем по x:

$$I=\frac{9}{2}\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{x^2-1}^{3}(x+y)\,dy=\frac{9}{2}\int\limits_{-2}^{2}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2-1}^{3}dx=$$

$$=\frac{9}{2}\int\limits_{-2}^{2}\left(3x+\frac{9}{2}-x(x^2-1)-\frac{(x^2-1)^2}{2}\right)dx.$$

Интеграл от 1-го и 3-го слагаемых равен нулю, так как это нечётные функции, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля.

$$I=\frac{9}{4}\int\limits_{-2}^{2}(9-(x^2-1)^2)\,dx=\frac{9}{2}\int\limits_{0}^{2}(9-(x^2-1)^2)\,dx=$$

$$=\frac{9}{2}\int\limits_{0}^{2}(9-x^4+2x^2-1)\,dx=\frac{9}{2}\left(8x-\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{9}{2}\left(16-\frac{32}{5}+\frac{16}{3}\right)=72\left(1-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{336}{5}.$$

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma \frac{z}{\sqrt{4+xy}}\,dL$, если Γ — линия пересечения поверхностей $x^2+y^2=4$, $x-y+z-5=0$.

Решение. Плоскость $x - y + z - 5 = 0$ пересекает цилиндр $x^2 + y^2 = 4$. Ясно, что проекция Γ на XOY — окружность $x^2 + y^2 = 4$. Возьмём в качестве параметра t полярный угол проекции каждой точки. Тогда

$$x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ z = 5 - x + y = 5 - 2\cos t + 2\sin t,$$

причём $0 \le t \le 2\pi$. Вычислим dL:

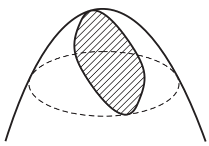
$$dL = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}dt = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (2\sin t + 2\cos t)^2}\,dt = \\ = \sqrt{4 + 4(1 + \sin 2t)}\,dt = 2\sqrt{2 + \sin 2t}\,dt.$$

Переходим к интегралу по параметру t:

$$\int\limits_\Gamma \frac{z}{\sqrt{4 + xy}}\,dL = \int\limits_0^{2\pi} \frac{5 - 2\cos t + 2\sin t}{\sqrt{4 + 4\sin t\cos t}} \cdot 2\sqrt{2 + \sin 2t}\,dt =$$

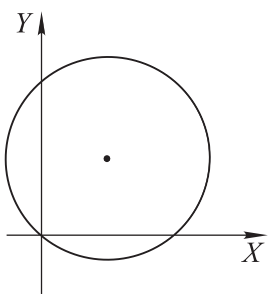
$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(5 - 2\cos t + 2\sin t)\,dt = \sqrt{2}(5t - 2\sin t - 2\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 10\pi\sqrt{2}.$$

5. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = 2 - x - y$, $2z = 4 - x^2 - y^2$.



Решение. Найдём проекцию линии, по которой плоскость $z = 2 - x - y$ пересекает параболоид $2z = 4 - x^2 - y^2$. Для этого исключим переменную z: $4 - x^2 - y^2 = 2(2 - x - y)$. После простых преобразований получим уравнение $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, которое задаёт окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром $(1, 1)$. Ясно, что проекция тела T на плоскость XOY ограничена этой окружностью. Проведём интегрирование по z.

$$V(T) = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \iint\limits_{T_{xy}} dx\,dy \int\limits_{2-x-y}^{2-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}} dz = \iint\limits_{T_{xy}}\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x + y\right)dx\,dy.$$



Удобнее вычислять этот интеграл в полярной системе координат. Уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0,\ \ x^2 + y^2 = 2(x + y),$$
$$\rho^2 = 2\rho(\cos\varphi + \sin\varphi),\ \ \rho = 2(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Правая часть этого уравнения положительна при $-\dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{3\pi}{4}$. Из рисунка также видно, что угол φ изменяется в этих пределах. Вычисляем интеграл:

$$V(T) = \iint\limits_{T_{xy}} \left(-\frac{1}{2}\rho^2 + \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)\right)\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int d\varphi \int \left(-\frac{1}{2}\rho^3 + \rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\right)\, d\rho =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{8}\rho^4 + \frac{\rho^3}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right)\Bigg|_0^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)} d\varphi =$$

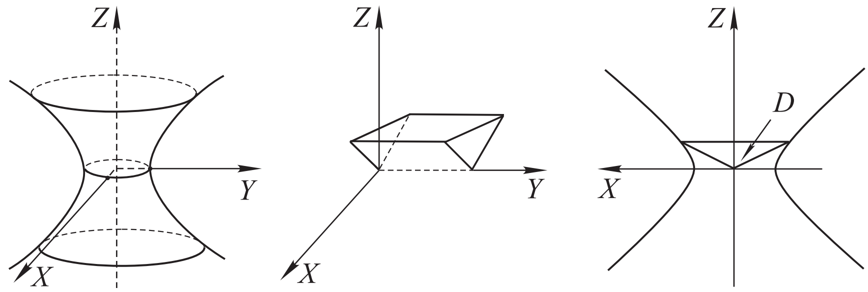
$$= \int \left(-\frac{16}{8} + \frac{8}{3}\right)(\cos\varphi + \sin\varphi)^4\, d\varphi = \frac{2}{3}\int (1+\sin 2\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\int (1 + 2\sin 2\varphi + \sin^2 2\varphi)\, d\varphi = \frac{2}{3}\left(\varphi - \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\int (1-\cos 4\varphi)\, d\varphi\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\varphi - \cos 2\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \pi.$$

6. Найти массу части поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, вырезанной плоскостями $x = 2z$, $x = -2z$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, если плотность $\rho(x,y,z) = |y|$.

Решение. Поверхность является однополостным гиперболоидом. Плоскости вырезают из неё 2 симметричных куска, проекция каждого из них



на плоскость XOZ есть треугольник D. Следовательно,

$$M(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} |y|\ d\sigma =$$

$$= 2\iint\limits_{D} \sqrt{1+z^2-x^2}\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dx\, dz.$$

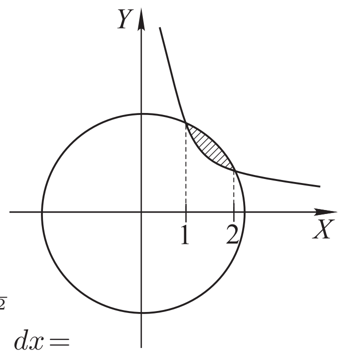
Вычислим $d\sigma$: $y'_x = \frac{-x}{\sqrt{1+z^2-x^2}}$, $y'_z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2-x^2}}$,

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1+z^2-x^2} + \frac{z^2}{1+z^2-x^2}}\, dx\, dz = \sqrt{\frac{1+2z^2}{1+z^2-x^2}}\, dx\, dz.$$

Заканчиваем вычисление:

$$M(\Sigma)=2\iint\limits_D \sqrt{1+2z^2}\,dx\,dz=2\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}dz\int\limits_{-2z}^{2z}\sqrt{1+2z^2}\,dx=2\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}4z\sqrt{1+2z^2}\,dz=$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+2z^2}\,d(1+2z^2)=2\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+2z^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{4}{3}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$



7. Найти координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=5$, $xy=2$ $(x>0)$, если плотность $\rho(x,y)=xy$.

Решение. Так как фигура симметрична относительно прямой $y=x$, а плотность в симметричных точках совпадает, то центр масс лежит на прямой $y=x$. Найдём сначала массу.

$$M=\iint xy\,dx\,dy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{2}{x}}^{\sqrt{5-x^2}}xy\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 xy^2\Big|_{\frac{2}{x}}^{\sqrt{5-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\left(5-x^2-\frac{4}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\left(5x-x^3-\frac{4}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-4\ln x\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(10-4-4\ln 2-\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}(24-16\ln 2-10+1)=\frac{1}{8}(15-16\ln 2).$$

Теперь найдём статический момент относительно какой-либо координатной оси. Например,

$$M_{OY}=\iint x\rho(x,y)\,dx\,dy=\iint x^2y\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2y^2\Big|_{\frac{2}{x}}^{\sqrt{5-x^2}}=$$

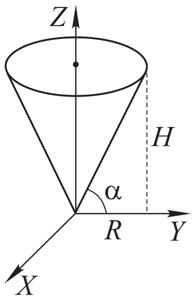
$$=\frac{1}{2}\int\limits_1^2(5x^2-x^4-4)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{5x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-4x\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{40}{3}-\frac{32}{5}-8-\frac{5}{3}+\frac{1}{5}+4\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{35}{3}-\frac{31}{5}-4\right)=\frac{11}{15}.$$

Пользуясь симметрией, находим:

$$x_c=y_c=\frac{M_{OY}}{M}=\frac{88}{15(15-16\ln 2)}.$$

8. ***Гравитационным потенциалом***, который создаёт материальная точка массой m в некоторой точке P, называется величина $U = G\dfrac{m}{r}$, где r — расстояние от материальной точки до P, G — гравитационная постоянная. Потенциал обладает свойством аддитивности. С помощью интегралов различных типов можно вычислять потенциал, который создаёт в данной точке трёхмерное тело, поверхность, плоская фигура или кривая.



Решим задачу: найти потенциал силы тяготения, создаваемый конусом высотой H и радиусом R в его вершине, если плотность пропорциональна квадрату расстояния до вершины.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы вершина конуса была в начале координат, а его ось совпадала с осью OZ. Уравнение поверхности такого конуса имеет вид: $x^2 + y^2 = az^2$. В пересечении с плоскостью $z = H$ должна получиться окружность радиуса R: $x^2 + y^2 = aH^2 = R^2 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{R^2}{H^2}$. Итак, конус ограничен поверхностью $x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H^2}z^2$ и плоскостью $z = H$. По определению, потенциал равен

$$U = \iiint\limits_T \frac{\rho(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = \\ = \iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Будем вычислять полученный тройной интеграл в сферической системе координат. Формулы перехода:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\; y = r\cos\theta\sin\varphi,\; z = r\sin\theta,\; dx\,dy\,dz = r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Уравнение $z = H$ принимает вид: $r\sin\theta = H$, поэтому $0 \le r \le \dfrac{H}{\sin\theta}$. Пусть α — угол наклона образующей конуса. Тогда:

$$U = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{H}{\sin\theta}} r^3\cos\theta\,dr = 2\pi \int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{H}{\sin\theta}} d\theta = \frac{\pi H^4}{2}\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^4\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi H^4}{2}\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin\theta)}{\sin^4\theta} = \frac{\pi H^4}{2}\left(-\frac{1}{3\sin^3\theta}\right)\Bigg|_\alpha^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi H^4}{6}\left(1 - \frac{1}{\sin^3\alpha}\right).$$

Так как $\sin\alpha = \dfrac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}$, то $U = \dfrac{\pi H^4}{6}\left(\dfrac{\left(H^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}{H^3} - 1\right)$.

11.7. Упражнения для самостоятельной работы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к повторному интегралу, расставить пределы интегрирования, если область E:

а) есть треугольник с вершинами $A(0,0)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$;

б) ограничена линиями $y=3x^2$, $y=12$, $x=0$ $(x\ge 0)$;

в) есть параллелограмм с вершинами $A(1,3)$, $B(2,6)$, $C(2,8)$, $D(1,5)$;

г) ограничена линиями $y^2=1-x$, $x-y+5=0$.

2. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_{-2}^{7} dx \int\limits_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)\,dy$; б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)\,dy$;

в) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2}^{3} f(x,y)\,dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{2}^{\frac{6}{x}} f(x,y)\,dy$.

3. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_E \sqrt{x+1}\,dx\,dy$, E ограничена линиями $y=x$, $y=-x$, $x=3$;

б) $\iint\limits_E (4-y^2)\,dx\,dy$, E ограничена линиями $x=0$, $y=2$, $2y=x^2$ $(x\ge 0)$;

в) $\iint\limits_E (4-x^2)\,dx\,dy$, E часть круга $x^2+y^2\le 4$, лежащая в первой четверти;

г) $\iint\limits_E \dfrac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, E ограничена линиями

$$(x^2+y^2)^3=4(x^4+y^4),\ x^2+y^2=1\ \ (x>0, y>0);$$

д) $\iint\limits_E (x^2+y)\,dx\,dy$, E ограничена линиями $y=2x$, $y=\dfrac{1}{2}x$, $y=\dfrac{2}{x}$ $(x>0)$;

е) $\iint\limits_E (3x+5y+2)\,dx\,dy$, E ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

4. Вычислить тройные интегралы. Тело T ограничено указанными поверхностями.

а) $\iiint\limits_T (10y-4x)\,dx\,dy\,dz$; $x=1$, $y=0$, $z=0$, $y=2x$, $z=3x^2+6y^2$;

б) $\iiint\limits_T \dfrac{dx\,dy\,dz}{(2x+3y+5z+1)^3}$; $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y+5z=1$;

в) $\iiint\limits_T \dfrac{8z}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy\,dz;\;\; z=0,\;\; z=\sqrt{xy},\;\; y=\sqrt{1-x^2};$

г) $\iiint\limits_T (x^2-y^2)\,dx\,dy\,dz;\; x^4+2x^2y^2+y^4=2xy,\; 0\le z\le xy,\; 0\le y\le x;$

д) $\iiint\limits_T (2x+3y+4z)\,dx\,dy\,dz;\;\; z=\sqrt{9-x^2-y^2},\;\; z=0;$

е) $\iiint\limits_T z^3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz;\;\; x^2+y^2+z^2=4,\;\; z=\sqrt{x^2+y^2}.$

5. Вычислить криволинейные интегралы:

а) $\int\limits_\Gamma (2x+3y)\,dL;$ Γ — отрезок прямой от точки $(-1,1)$ до точки $(2,7)$;

б) $\int\limits_\Gamma x^2\,dL;$ Γ — кривая $y=\ln x,\;\; \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8};$

в) $\int\limits_\Gamma y\,dL;$ Γ — арка циклоиды $x=t-\sin t,\;\; y=1-\cos t,\;\; 0\le t\le 2\pi;$

г) $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,dL;$ Γ — первый виток логарифмической спирали:

$$r=3e^{\varphi},\;\; 0\le\varphi\le 2\pi;$$

д) $\int\limits_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dL;$ Γ — дуга конической винтовой линии:

$$x=t\cos t,\;\; y=t\sin t,\;\; z=t;\;\; 0\le t\le\sqrt{2};$$

е) $\int\limits_\Gamma (z-2x^2+2x-2y)\,dL;$ Γ — часть линии пересечения поверхностей $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, лежащая между плоскостями $x=0$ и $x=0{,}5$.

6. Вычислить поверхностные интегралы.

а) $\iint\limits_\Sigma (x+y+z)\,d\sigma$, Σ — часть плоскости $2x+3y+z=5$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=4$;

б) $\iint\limits_\Sigma \dfrac{y^3}{\sqrt{1+z}}\,d\sigma$, Σ — часть поверхности $y=2\sqrt{z}$, вырезанная поверхностями $x=0,\;\; z=0,\;\; x+3z=6;$

в) $\iint\limits_\Sigma (xy+yz+xz)\,d\sigma$, Σ — часть поверхности $x=\sqrt{y^2+z^2}$, лежащая внутри цилиндра $y^2+z^2=2y$;

г) $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z^2\,d\sigma$, Σ — часть поверхности $x^2+y^2=1$, $0\le z\le 6$.

7. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной

а) линиями $x=0$, $y=8$, $x^2=4y$, $xy=16$;

б) линией $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$;

в) линией $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=x+y$ (при $x>0$, $y>0$) и осями координат;

г) линией $x^2+y^2=5$, касательной к ней в точке $(1,2)$ и осью OX.

8. Найти объём тела, ограниченного поверхностями:
а) $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$; б) $4z=x^2+z^2$, $y=z$, $y=2z$; в) $3x+2y=6$, $z=2x^2$, $y=0$, $z=0$; г) $x^2+y^2+z^2=6z$, $x^2+y^2=z^2$ (внутри конуса).

9. Найти длину:

а) участка цепной линии $y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in[-1,1]$;

б) астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t=[0,2\pi]$;

в) части линии $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

10. Найти площадь:

а) части поверхности $z=2-x^2-y^2$, лежащей выше плоскости $z=0$;

б) части поверхности $y^2=2z$, вырезанной поверхностями $x=\sqrt{z}$, $x=0$, $z=1$;

в) части поверхности $x^2+y^2+z^2=9$, лежащей внутри цилиндра $4x^2+9y^2=36$;

г) части плоскости $x+2y-5=0$, расположенной между плоскостью $z=0$ и поверхностью $z=25-x-y^2$.

11. Найти массу кольца между окружностями радиусов R и r, если плотность пропорциональна расстоянию от центра.

12. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z^2=x^2+y^2$, если плотность пропорциональна аппликате точки.

13. Найти массу верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\ge 0$, если поверхностная плотность в каждой точке равна сумме координат этой точки.

14. Найти массу линии $r=2\sin\varphi$, если плотность пропорциональна квадрату расстояния точки от полюса.

15. Найти статический момент относительно прямой $y=1$ плоской фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $y=1$, $x=\sqrt{y}$, если $\rho(x,y)=x$.

16. Найти статический момент относительно плоскости XOZ части однородной линии пересечения поверхностей $z^2=x^2+y^2$, $x+z=1$, лежащей в 1-м октанте.

17. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры ограниченной линиями $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$.

18. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $y = 1 - x^2 - z^2$, $y = 0$.

19. Найти координаты центра масс части поверхности $z = xy$, вырезанной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, если плотность $\rho(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

20. Найти координаты центра масс одного витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$, если плотность $\rho(x, y, z) = z$.

21. Найти момент инерции однородного круга радиуса R относительно его касательной.

22. Найти момент инерции однородной окружности радиуса R относительно её диаметра.

23. Найти момент инерции шара относительно его диаметра, если плотность пропорциональна расстоянию от центра.

24. Найти потенциал силы тяготения, создаваемый однородным контуром квадрата со стороной a в его центре.

25. Найти потенциал силы тяготения, создаваемый однородной поверхностью $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, $-1 \le z \le 1$ в начале координат.

11.8. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - |x|$, $y = 0$, если плотность $\rho(x, y) = 6|x|$.

2. Найти объём части шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$. Ответ округлить до сотых.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\displaystyle\int\limits_\Gamma \frac{x}{\sqrt{y^4 + 4}}\, dL$ по дуге гиперболы $xy = 2$ от точки $(1, 2)$ до точки $(2, 1)$.

4. Найти площадь той части плоскости $3x + 4y + 12z + 7 = 0$, которая проецируется на прямоугольник $[1, 7] \times [2, 6]$.

5. Момент инерции тела T (плотность $\rho(x, y, z) = 1$) относительно оси OY равен: 1) $\displaystyle\iiint\limits_T x^2\, dx\, dy\, dz$; 2) $\displaystyle\iiint\limits_T (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$; 3) $\displaystyle\iiint\limits_T y^2\, dx\, dy\, dz$; 4) $\displaystyle\iiint\limits_T (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$. Указать номер правильного ответа.

6. Пусть Σ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, Σ_{XOY} — её проекция на плоскость XOY. При каком k справедливо равенство

$$\iint\limits_\Sigma (y^2 + z^2)\, d\sigma = k \iint\limits_{\Sigma_{XOY}} \frac{9 - x^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy?$$

ГЛАВА 12

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

12.1. Потенциальное векторное поле

12.1.1. Основные понятия

В разделе 10.5 мы познакомились с понятием скалярного поля: с каждой точкой некоторой области (на плоскости или в пространстве) связывается числовая величина. Если ввести систему координат, то задание скалярного поля равносильно заданию функции $U(x, y)$ или $U(x, y, z)$.

Пусть теперь в каждой точке M области E (на плоскости или в пространстве) определён вектор $\overline{A}(M)$. В таком случае будем говорить, что в области E задано ***векторное поле***. Примерами векторных полей могут служить поле скоростей жидкости, поле, создаваемое электрическими зарядами, гравитационное поле и т. д. Если в области E введена система координат, то каждый вектор может быть задан своими координатами:

$$\overline{A}(M) = \overline{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}.$$

Для плоского поля координата $R(x, y, z)$, конечно, отсутствует.

Линия Γ в области E называется ***векторной линией***, если в каждой её точке направление вектора поля совпадает с направлением касательной. Если $\overline{A}(M)$ — поле какой-либо силы (***силовое поле***), то векторные линии также называются силовыми линиями. Можно доказать, что если функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то через каждую точку области проходит векторная линия, причём векторные линии не пересекаются.

Пусть в области E задано скалярное поле $U(x, y, z)$. Тогда в каждой точке E определён вектор

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}.$$

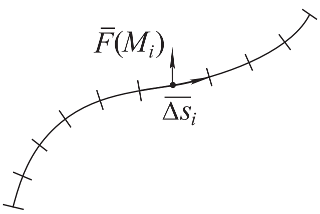
Получили векторное поле — поле градиента. Это очень важный пример векторного поля, поэтому вводится специальное понятие. Векторное поле $\overline{A}$ называется ***потенциальным***, если оно является полем градиента некоторой скалярной функции U:

$$\overline{A} = \operatorname{grad} U.$$

В этом случае функция $U = U(x, y, z)$ называется ***потенциалом*** поля $\overline{A}$. Мы должны научиться выяснять, является ли поле потенциальным, и находить его потенциал. Для этого потребуется рассмотреть новый тип криволинейных интегралов.

12.1.2. Криволинейные интегралы 2-го рода

Пусть в каждой точке M области $E \subseteq R^2$ задан вектор силы $\overline{F}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j}$ (т. е. плоское силовое поле). Рассмотрим линию Γ, лежащую в E, и поставим задачу: вычислить работу, которую совершает сила $\overline{F}(M)$, перемещая точку по кривой Γ. Разобьём Γ на n частей:



$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \quad \cup \Gamma_n.$$

Выберем произвольно точки $M_i \in \Gamma_i$. Допуская некоторую погрешность, будем считать, что сила на Γ_i постоянна и равна $\overline{F}(M_i)$ — силе в выбранной точке. Также допуская погрешность, заменим перемещение по Γ_i прямолинейным перемещением $\overline{\Delta s_i}$ (вектор, направленный из начала Γ_i в конец Γ_i). Работа постоянной силы на прямолинейном пути, как известно из школьного курса физики, вычисляется так:

$$\Delta A_i = |\overline{F}(M_i)| \cdot |\overline{\Delta s_i}| \cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\overline{F}(M_i)$, $\overline{\Delta s_i}$. Обозначая координаты вектора $\overline{\Delta s_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$, можно записать ΔA_i с помощью скалярного произведения:

$$\Delta A_i = (\overline{F}(M_i), \overline{\Delta s_i}) = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i.$$

Суммируя, получаем приближённую формулу для работы:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i.$$

Ошибка этого равенства уменьшается, если рассматривать всё более мелкие разбиения Γ. Переходя к пределу, получим:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i,$$

где $\lambda = \max |\overline{\Delta s_i}|$.

Пределы такого вида очень важны для приложений. Поэтому сформулируем общее определение. Пусть $\overline{F}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j}$ — векторное поле в области E, Γ — гладкая кривая в E. Разбивая Γ, выбирая точки M_i, составим сумму и перейдём к пределу так же, как при решении задачи о работе. Если существует конечный предел (не зависящий ни от вида разбиений, ни от выбора точек), то он называется ***криволинейным интегралом 2-го рода*** от векторной функции $\overline{F}(M)$ по кривой Γ:

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i.$$

В точности так же определяется и криволинейный интеграл для пространственного векторного поля

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Для вычисления криволинейного интеграла рассмотрим случай, когда кривая Γ задана параметрически:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a,b].$$

Разбиению Γ соответствует разбиение отрезка $[a,b]$ точками $t_0 = a$, t_1, $t_2, \ldots, t_n = b$. Выбранным точкам $M_i \in \Gamma_i$ соответствуют $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Пользуясь дифференцируемостью функций $x(t), y(t)$ и теоремой Лагранжа, можно записать:

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\mu_i)\Delta t_i, \quad \Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\nu_i)\Delta t_i.$$

Интегральная сумма приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^{n}[P(x(\xi_i), y(\xi_i))x'(\mu_i) + Q(x(\xi_i), y(\xi_i))y'(\nu_i)]\Delta t_i.$$

Она отличается от интегральной суммы Римана (для функции $P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)$ на $[a,b]$) лишь тем, что точки ξ_i, μ_i, ν_i различны, хотя и лежат на одном участке разбиения Δt_i. При неограниченном измельчении разбиений это отличие стремится к нулю (строгое доказательство — с помощью равномерной непрерывности). Поэтому, переходя к пределу, получим:

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b}[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Аналогичная формула справедлива и для интеграла $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Если плоская кривая Γ является графиком функции $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, то, рассматривая x как параметр, получаем:

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b}[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]\,dx.$$

Иногда удобнее рассматривать Γ как график функции $x = x(y)$, $y \in [c, d]$. В этом случае

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{c}^{d} [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]\,dy.$$

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, если Γ — один виток винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Так как $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$, $dz = dt$, то получаем:

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t)\cos t + (\cos t + \sin t + t)]\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t - 2\sin t\cos t + \cos t + \sin t + t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_{0}^{2\pi} dt - \int\limits_{0}^{2\pi} 2\sin t d(\sin t) + \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos t + \sin t + t)dt =$$

$$= \left(-t - \sin^2 t + \sin t - \cos t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = -2\pi + \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2 - 2\pi.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{AB} (x-y)\,dx + 3x^2\,dy$, если

а) AB – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 0)$, $B(0, 1)$;

б) AB – дуга параболы $y = 1 - x^2$, соединяющая те же точки.

Решение. а) Прямая, проходящая через точки A, B, имеет уравнение $y = 1 - x$. Значит, $dy = -dx$. На отрезке AB x изменяется от 1 до 0. Криволинейный интеграл сводится к интегралу по x:

$$\int\limits_{AB} (x-y)\,dx + 3x^2\,dy = \int\limits_{1}^{0} (x - 1 + x + 3x^2(-1))\,dx = \int\limits_{1}^{0} (2x - 1 - 3x^2)\,dx =$$

$$= (x^2 - x - x^3)\Big|_{1}^{0} = -(1 - 1 - 1) = 1.$$

б) Из уравнения $y = 1 - x^2$ находим: $dy = -2x\,dx$. Поэтому

$$\int\limits_{AB} (x-y)\,dx + 3x^2\,dy = \int\limits_1^0 (x - 1 + x^2 - 6x^3)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{6x^4}{4}\right)\Bigg|_1^0 = -\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{3}.$$

Среди свойств криволинейного интеграла 2-го рода необходимо подчеркнуть то, что при изменении направления интегрирования (как говорят, при изменении ориентации кривой) интеграл меняет знак:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{BA} P\,dx + Q\,dy.$$

Действительно, при определении интеграла в составлении интегральной суммы участвует вектор перемещения $\overline{\Delta s_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$. Если изменить направление интегрирования, то этот вектор, а вместе с ним и сумма, и интеграл изменят знак на противоположный. (Напомним: при вычислении криволинейного интеграла 1-го рода направление интегрирования не имеет значения.)

Из определения сразу следует, что криволинейный интеграл 2-го рода обладает свойством линейности (интеграл от линейной комбинации векторных функций равен сумме интегралов с соответствующими коэффициентами) и аддитивности (если $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причём $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, то интеграл по Γ равен сумме интегралов по Γ_1 и Γ_2). Разумеется, все эти свойства справедливы как для плоского, так и для пространственного случая.

Если кривая Γ замкнута, то криволинейный интеграл обозначается символом $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ и называется ***циркуляцией*** векторного поля $\overline{F} = (P, Q)$ по замкнутому контуру Γ. При этом ***положительным направлением*** обхода кривой Γ считается то, при котором область, ограниченная Γ, остаётся слева. При вычислении циркуляции $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ по пространственной кривой Γ направление интегрирования каждый раз следует указывать.

12.1.3. Формула Грина

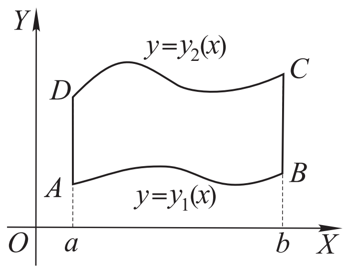
При вычислении двойных интегралов мы рассматривали области на плоскости, правильные в направлении данной оси. Расширим это понятие: область E на плоскости называется ***простой***, если её можно разбить кусочно-гладкими кривыми как в объединение областей, правильных в направлении OX, так и в объединение областей, правильных в направлении OY.

Теорема 1 (*теорема Грина*). Пусть E — простая область, Γ — её граница. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на E. Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{E} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy.$$

Интегрирование по Γ ведётся в положительном направлении.

Доказательство. Пусть сначала E — область, правильная по оси OY.



Интегрируем одно из слагаемых в правой части:

$$\iint\limits_{E} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\,dx.$$

Заметим, что интеграл $\int\limits_{a}^{b} P(x,y_2(x))\,dx$ можно заменить криволинейным (в соответствии с правилом вычисления криволинейных интегралов 2-го рода):

$$\int\limits_{a}^{b} P(x,y_2(x))\,dx = \int\limits_{DC} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{CD} P(x,y)\,dx.$$

Аналогично: $\int\limits_{a}^{b} P(x,y_1(x))\,dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$. Интегралы по вертикальным отрезкам BC и DA равны нулю, так как здесь $x = \mathrm{const}$, $dx = 0$:

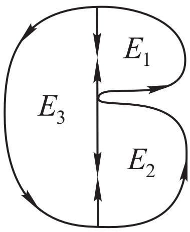
$$\int\limits_{BC} P(x,y)\,dx = 0, \qquad \int\limits_{DA} P(x,y)\,dx = 0.$$

Используя все эти соотношения, получаем:

$$\iint\limits_E \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b P(x,y_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))\,dx =$$
$$= -\int\limits_{CD} P(x,y)\,dx - \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx - \int\limits_{BC} P(x,y)\,dx - \int\limits_{DA} P(x,y)\,dx =$$
$$= -\oint\limits_\Gamma P(x,y)\,dx.$$

Обратите внимание: интегрирование ведётся в положительном направлении.

Докажем теперь, что формула $\iint\limits_E \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\oint\limits_\Gamma P(x,y)\,dx$ справедлива для любой ***простой*** области E. Для этого разобьём E



кусочно-гладкими кривыми: $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ так, что все E_i — правильные по направлению OY. Для каждой области E_i справедливо: $\iint\limits_{E_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\oint\limits_{\Gamma_i} P(x,y)\,dx$. Сложим эти равенства по всем элементам разбиения. В левой части, пользуясь аддитивностью, получим $\iint\limits_E \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$. В правой части интегрирование по любому участку линии разбиения ведётся дважды, в противоположных направлениях. Значит, криволинейные интегралы по линиям разбиения сокращаются, остаётся интеграл по внешней границе: $\iint\limits_E \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\oint\limits_\Gamma P(x,y)\,dx$, что и требовалось доказать.

В точности так же доказывается, что для любой простой области E справедливо

$$\iint\limits_E \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \oint\limits_\Gamma Q(x,y)\,dy.$$

Отличие лишь в том, что придётся разбивать E на области, правильные в направлении оси OX.

Складывая доказанные равенства, получаем ***формулу Грина***:

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy.$$

Замечание. Можно доказать, что формула Грина справедлива для любой области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. Интересно отметить, что интеграл в правой части ***по области*** E зависит, как мы видим, лишь от значений функции P, Q ***на границе*** области.

Если в формуле Грина взять $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = 0$, то получим способ вычисления площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла:

$$S(E) = \iint\limits_E dxdy = \oint\limits_\Gamma x\,dy.$$

Аналогично, при $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = 0$ имеем

$$S(E) = \iint\limits_E dxdy = -\oint\limits_\Gamma y\,dx.$$

Иногда удобно для вычисления площади воспользоваться одной из этих формул, особенно если фигура ограничена линией, заданной параметрически.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Эллипс можно задать параметрически:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Вычисляем площадь с помощью криволинейного интеграла 2-го рода:

$$S = \int\limits_\Gamma x\,dy = \int\limits_0^{2\pi} a\cos t\,d(b\sin t) = ab\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt =$$

$$= ab\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{ab}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\,\Big|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \pi ab.$$

12.1.4. Условия потенциальности плоского векторного поля

Напомним: векторное поле $\overline{A} = P\overline{i} + Q\overline{j}$ называется потенциальным, если существует функция $U = U(x, y)$ такая, что:

$$\overline{A}(x, y) = P(x, y)\,\overline{i} + Q(x, y)\,\overline{j} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\overline{j}.$$

Очевидно, это равносильно соотношениям

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Используя понятие дифференциала (полного дифференциала) функции: $dU = \dfrac{\partial U}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}\,dy$, можно дать определение потенциального поля следующим образом: поле $\overline{A} = P\,\overline{i} + Q\,\overline{j}$ в области $E \subseteq \mathbb{R}^2$ называется потенциальным, если выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции.

Получим теперь условие потенциальности векторного поля на языке криволинейных интегралов.

Теорема 2. Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — непрерывные функции. Интеграл $\int\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy$ не зависит от кривой Γ (а зависит лишь от начальной и конечной точек) $\Leftrightarrow$ выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом.

Доказательство. «$\Rightarrow$». Возьмём произвольную фиксированную точку (x_0, y_0) и рассмотрим функцию

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Здесь (x,y) — переменная, текущая точка. Не совсем обычная запись криволинейного интеграла 2-го рода объяснима — по условию он не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной и конечной точек. Вычислим частные производные функции $U(x,y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Q\,dy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Q\,dy\right].$$

Можно считать, что первый из написанных интегралов вычисляется по ломаной: от (x_0, y_0) до (x,y) и затем до $(x+\Delta x, y)$. Используя аддитивность, его можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых затем сокращается. Получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Q\,dy.$$

Можно считать, что здесь интегрирование проводится по отрезку, параллельному оси OX (т. е. при постоянном y). Поэтому $dy = 0$ и интеграл превращается в обычный интеграл Римана по отрезку $[x,\ x+\Delta x]$. Применяем для него теорему о среднем (см. 7.1) и затем переходим к пределу:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(x,y)\,dx=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}P(c,y)\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}P(c,y)=P(x,y).$$

Здесь $c\in[x,x+\Delta x]$, и поэтому $c\to x$ при $\Delta x\to 0$. В предельном переходе использована непрерывность функции $P(x,y)$.

Итак, $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)$. Аналогично вычисляется $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$. Следовательно, $Pdx+Q\,dy=\dfrac{\partial U}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial U}{\partial y}\,dy=dU$, что и требовалось доказать.

«$\Leftarrow$». Пусть $Pdx+Qdy=dU$. Рассмотрим произвольную гладкую кривую Γ, заданную параметрически:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[a,b].$$

Точки $A=(x(a),y(a))$, $B=(x(b),y(b))$ являются концами Γ. Вычисляем интеграл, пользуясь выведенной в 12.1.2 формулой и учитывая, что $P=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial U}{\partial y}$:

$$\int\limits_{\Gamma}Pdx+Q\,dy=\int\limits_{a}^{b}[P(x(t),y(t))x'(t)+(x(t),y(t))y'(t)]\,dt=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

Под интегралом получена производная функции $U(x(t),y(t))$, вычисленная по правилу дифференцирования сложной функции. Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma}Pdx+Q\,dy=\int\limits_{a}^{b}\frac{d\,U(x(t),y(t))}{dt}\,dt=U(x(t),y(t))\,\Big|_{a}^{b}=U(B)-U(A),$$

т. е. интеграл зависит не от кривой Γ, а лишь от её начальной и конечной точек. Теорема доказана.

Замечание. Установленная формула

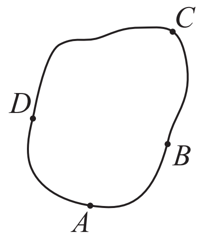
$$\int\limits_{\Gamma}Pdx+Q\,dy=\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=U(B)-U(A)$$

аналогична формуле Ньютона–Лейбница, основной формуле интегрального исчисления. Функцию $U(x,y)$ можно называть ***первообразной*** для дифференциального выражения $Pdx+Q\,dy$. В терминах теории векторных полей $U(x,y)$ — потенциал векторного поля $P\,\overline{i}+Q\,\overline{j}$.

Условие независимости криволинейного интеграла от пути можно сформулировать, используя понятие циркуляции.

Теорема 3. Интеграл $\int\limits_{\Gamma} P dx + Q\, dy$ не зависит от пути $\Leftrightarrow$ по любому замкнутому контуру L интеграл равен нулю: $\oint\limits_{L} P dx + Q\, dy = 0$.

Доказательство. «$\Rightarrow$». Возьмём на замкнутом контуре L произвольно 4 точки. По условию



$$\int\limits_{ABC} P dx + Q\, dy = \int\limits_{ADC} P dx + Q\, dy.$$

Пользуясь этим, получим: $\oint\limits_{L} P dx + Q\, dy =$

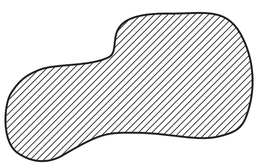
$$= \int\limits_{ABC} P dx + Q\, dy + \int\limits_{CDA} P dx + Q\, dy = \int\limits_{ABC} P dx + Q\, dy - \int\limits_{ADC} P dx + Q\, dy = 0.$$

«$\Leftarrow$». Возьмём две различные кривые ABC и ADC, начало и конец которых совпадают. По условию, интеграл по контуру $ABCDA$ равен нулю:

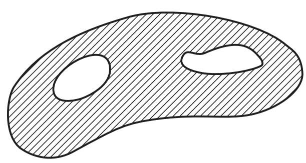
$$0 = \int\limits_{ABCDA} P dx + Q\, dy = \int\limits_{ABC} P dx + Q\, dy + \int\limits_{CDA} P dx + Q\, dy =$$
$$= \int\limits_{ABC} P dx + Q\, dy - \int\limits_{ADC} P dx + Q\, dy.$$

Значит, $\int\limits_{ABC} P dx + Q\, dy = \int\limits_{ADC} P dx + Q\, dy$, что и требовалось доказать.

Мы получили несколько условий потенциальности плоского векторного поля. Однако они не позволяют проверить: является ли потенциальным векторное поле $P(x, y)\,\bar{i} + Q(x, y)\,\bar{j}$? Для такой проверки удобно использовать признак полного дифференциала, который сейчас рассмотрим. Но сначала дадим определение односвязной области. Область E (на плоскости) называется ***односвязной***, если для любого замкнутого контура L, лежащего в E, часть плоскости, ограниченная L, является подмножеством E.



Односвязная область



Неодносвязная область

Можно объяснить, что такое односвязная область несколько по-другому. Любой замкнутый контур, лежащий в односвязной области, можно, непрерывно изменяя, стянуть в точку, оставаясь в пределах области.

Признак полного дифференциала содержится в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в каждой точке односвязной области E. Тогда

$$Pdx + Q\,dy \text{ — полный дифференциал} \Leftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доказательство. «$\Rightarrow$». Если $Pdx + Q\,dy = d\,U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}\,dy$, то $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$. Поэтому $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. По теореме о равенстве смешанных частных производных (теорема 14 из 9.4.3), $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Значит, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

«$\Leftarrow$». Пусть L — замкнутый контур, лежащий в E. Так как область односвязная, то L является границей для области $E_L \subseteq E$. Воспользуемся теоремой Грина: $\displaystyle\oint\limits_L Pdx + Q\,dy = \iint\limits_{E_L} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$. Из условия следует, что интеграл в правой части равен нулю. Значит, $\displaystyle\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0$. Так как это верно для любого замкнутого контура L, то теоремы 3 и 2 показывают, что $Pdx + Q\,dy$ — полный дифференциал.

Следствие. При указанных предположениях о функциях $P(x,y)$, $Q(x,y)$ поле $P\,\bar{i} + Q\,\bar{j}$ является потенциальным тогда и только тогда, когда выполнено условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Если область не односвязная, то признак полного дифференциала перестаёт быть справедливым.

Пример 4. Рассмотрим интеграл $\displaystyle\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где L — окружность произвольного радиуса R с центром в точке $(0,0)$. Здесь $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Однако полным дифференциалом (в области, где лежит окружность L) подынтегральное выражение не является, так как интеграл не равен нулю. Вычислим его, задавая окружность L параметрически:

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}{R^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

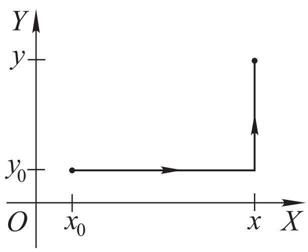
Причина здесь в том, что в точке $(0,0)$ функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ терпят разрыв. Если же эту точку удалить, то область, где лежат все такие окружности, перестаёт быть односвязной. Этот же интеграл по любой замкнутой кривой, не охватывающей точку $(0,0)$, равен 0.

12.1.5. Нахождение потенциала

Итак, мы научились определять, является ли выражение $Pdx + Q\,dy$ полным дифференциалом (или, что то же самое, является ли векторное поле $P\,\bar{i} + Q\,\bar{j}$ потенциальным). Теперь научимся находить потенциал $U(x,y)$ (т. е. функцию, для которой $dU = Pdx + Q\,dy$). Доказывая теорему 2, мы видели, что в качестве такой функции можно взять

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Q\,dy, \tag{$*$}$$

где (x_0, y_0) — произвольная точка (в области, где функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ обладают необходимыми свойствами), а интегрирование проводится по любому пути — результат от пути не зависит. Удобно интегрировать по ломаной, звенья которой параллельны координатным осям:



$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Q\,dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} Pdx + Q\,dy + \int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Q\,dy.$$

В первом слагаемом $y = y_0 = \text{const}$, поэтому $dy = 0$. Во втором слагаемом $x = \text{const}$, поэтому $dx = 0$. Значит,

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

Выбор начальной точки не играет роли, так как $U(x,y)$ определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

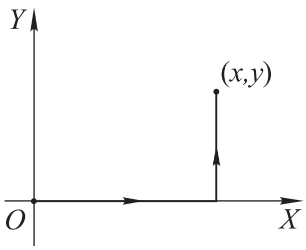
Пример 5. Найти потенциал векторного поля

$$\overline{F}(x,y) = (2x + 6xy + 5y^3)\overline{i} + (3x^2 + 15xy^2)\overline{j}.$$

Решение. Проверим сначала, что это поле потенциально.

$$(2x + 6xy + 5y^3)'_y = 6x + 15y^2; \quad (3x^2 + 15xy^2)'_x = 6x + 15y^2.$$

Действительно, по следствию из теоремы 4 поле потенциально. Ищем потенциал по формуле (∗). В качестве начальной точки можно взять точку $(0,0)$. Интегрируя по ломаной, получаем:



$$U(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (2x+6xy+5y^3)\,dx + (3x^2+15xy^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^x 2x\,dx + \int\limits_0^y 3x^2 + 15xy^2\,dy = x^2 + 3x^2y + 5xy^3 + C.$$

Здесь C – произвольная постоянная. При любом другом выборе начальной точки или пути интегрирования получился бы такой же результат.

12.2. Поток векторного поля

12.2.1. Ориентация поверхности

С понятием поверхности мы познакомились ещё при изучении аналитической геометрии. Были рассмотрены алгебраические поверхности 1-го порядка (плоскости) и 2-го порядка. Далее, при определении площади поверхности, при построении касательной плоскости мы требовали, чтобы поверхность была гладкой. Напомним: если поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$, то гладкость означает, что частные производные F'_x, F'_y, F'_z непрерывны и не обращаются в 0 одновременно. У гладкой поверхности в каждой точке можно построить касательную плоскость и нормаль.

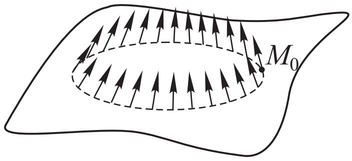
Наиболее просто устроена поверхность Σ, заданная уравнением вида $z = f(x,y)$. Фактически это график функции двух переменных $f(x,y)$, где (x,y) — точка некоторой области E на плоскости XOY. Если Γ — граница области E, то множество

$$\{(x,y,z)|\ z = f(x,y),\ (x,y) \in \Gamma\}$$

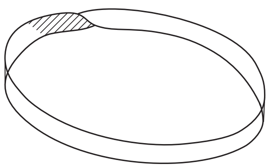
является краем поверхности Σ (понятие краевой точки введено в 11.4). У такой поверхности, очевидно, имеется 2 ***стороны***: «верхняя» и «нижняя».

Поверхность, заданная уравнением $F(x,y,z) = 0$, может быть ***замкнутой*** — ограничивающей некоторое тело. Такая поверхность тоже имеет 2 стороны: внутреннюю и внешнюю, но не имеет края.

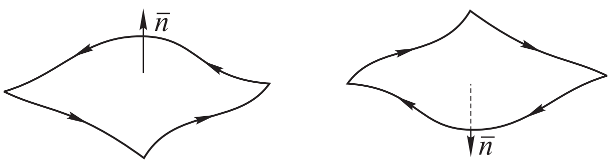
Постараемся уточнить понятие «сторона поверхности». Для этого на гладкой поверхности Σ рассмотрим точку M_0 и замкнутый контур L, проходящий через M_0 и не пересекающий край поверхности. Пусть $\overline{n}$ — один из двух возможных (противоположно направленных) единичных векторов нормали, построенных в точке M_0 к поверхности Σ. Будем «передвигать» вектор нормали по L, меняя точку M на L и строя вектор единичной нормали так, чтобы он менялся непрерывно. Возвращаясь к точке M_0, вектор нормали либо совпадёт с первоначально выбранным $\overline{n}$, либо будет ему противоположным.



Теперь можно дать определение. Если обход по любому замкнутому контуру (не пресекающему края) не меняет выбранного направления нормали, то поверхность называется ***ориентируемой***, или ***двусторонней***. Выбор определённого направления вектора нормали (в какой-нибудь из точек) равносилен выбору ***стороны*** поверхности. Если же существует контур, обход по которому меняет направление нормали на противоположное, то поверхность называется ***неориентируемой***, или ***односторонней***. Примером такой поверхности является ***лист Мёбиуса***, который легко сделать из полоски бумаги, если склеить её концы, предварительно перекрутив один из них на половину оборота. У листа Мёбиуса всего одна поверхность, его весь можно покрасить, не отрывая кисточки от бумаги и не переходя через край. В дальнейшем мы будем рассматривать только двусторонние поверхности.



Выберем одну из сторон двусторонней поверхности (или, что то же самое, определённое направление нормали). Будем говорить, что направление обхода контура, лежащего на поверхности, ***согласовано*** с выбранной стороной, если из конца вектора нормали обход кажется совершающимся против часовой стрелки.



Здесь направление обхода и выбор нормали согласованы. Указанный способ согласования называется ***правой ориентацией*** поверхности, он применяется, если в пространстве выбрана правая системе координат (т. е. орты координатных осей $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ образуют правую тройку).

Если поверхность замкнутая, то положительным считаем ***внешнее*** направление нормали, не согласовывая его с обходом каких-либо контуров.

12.2.2. Поверхностные интегралы 2-го рода

Рассмотрим движение жидкости в некотором объёме (например, в трубе). Пусть $\overline{A} = \overline{A}(x, y, z)$ — векторное поле скоростей, т. е. $\overline{A}(x, y, z)$ — скорость жидкости в точке (x, y, z). Пусть Σ — двусторонняя поверхность, помещённая в жидкость; Σ' — одна из её сторон. Выбор Σ' равносилен выбору положительного направления нормали $\overline{n}$. ***Потоком жидкости*** Π называется количество жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность Σ в выбранном направлении.

Для вычисления потока рассмотрим «элемент поверхности», имеющий площадь $d\sigma$ и координаты $(x,\, y,\, z)$. Количество протекающей через $d\sigma$ жидкости, очевидно, пропорционально проекции $\text{Пр}_{\overline{n}}\overline{A}$ вектора скорости $\overline{A}(x,\, y,\, z)$ на вектор нормали $\overline{n}(x,\, y,\, z)$:

$$d\Pi = \text{Пр}_{\overline{n}}\overline{A} \cdot d\sigma.$$

Если рассматривать единичную нормаль: $|\overline{n}| = 1$, то проекцию можно заменить скалярным произведением:

$$\text{Пр}_{\overline{n}}\overline{A} = |\overline{A}| \cos(\overline{A}, \overline{n}) = (\overline{A}, \overline{n}).$$

Перейдём к координатной записи векторов. Пусть

$$\overline{A} = P(x, y, z)\,\overline{i} + Q(x, y, z)\,\overline{j} + R(x, y, z)\,\overline{k}.$$

Вектор $\overline{n}$ зададим с помощью направляющих косинусов (т. е. косинусов углов, образованных $\overline{n}$ с осями координат). Если $|\overline{n}| = 1$, то

$$\overline{n} = \cos\alpha\,\overline{i} + \cos\beta\,\overline{j} + \cos\gamma\,\overline{k}.$$

Для «элемента потока» получаем формулу:

$$d\Pi = (\overline{A}, \overline{n})\, d\sigma = (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Поток через всю поверхность Σ в данном направлении равен:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\overline{A}, \overline{n})\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Конечно, можно было прийти к этому интегралу, рассматривая разбиение поверхности, составляя интегральную сумму и переходя к пределу.

Полученный интеграл похож на поверхностный интеграл 1-го рода. Однако подинтегральная функция зависит не только от координат текущей точки поверхности Σ, но и от вектора нормали в этой точке. Направляющие косинусы вектора нормали $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ меняются от точки к точке, зависят от уравнения поверхности Σ, а их знаки — от выбора её стороны.

Интегралы такого вида полезны не только при решении задач о движении жидкости. Можно, например, говорить о потоке тепла, рассматривая векторное поле $\overline{A} = \operatorname{grad} T$, где $T = T(x, y, z)$ — температура. Поэтому вводится обобщающее понятие. ***Потоком*** произвольного векторного поля $\overline{A} = P\,\overline{i} + Q\,\overline{j} + R\,\overline{k}$ через сторону Σ' двусторонней поверхности Σ называется величина

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma'} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Левый из интегралов — это обозначение для нового типа интеграла, ***поверхностного интеграла 2-го рода*** от векторной функции $\overline{A}$ через сторону Σ' поверхности Σ. Не давая строгого определения, мы вводим его как поверхностный интеграл 1-го рода, в котором подинтегральная функция зависит от нормали к поверхности Σ. Можно было пойти и обычным путём, вводя новый тип интеграла как предел интегральных сумм соответствующего вида. Для пояснения обозначения нового типа интеграла заметим, что $\cos\gamma\cdot d\sigma$ — площадь проекции элемента поверхности на плоскость XOY. Можно, поэтому, обозначить $dx\,dy = \cos\gamma\cdot d\sigma$. Аналогично, естественны обозначения: $dy\,dz = \cos\alpha\cdot d\sigma$, $dx\,dz = \cos\beta\cdot d\sigma$. Уточним эти рассуждения в следующей теореме.

Теорема 5. Пусть Σ — гладкая двусторонняя поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y)$, Σ' — её «верхняя» сторона (т. е. угол между нормалью и осью OZ острый). Пусть $R = R(x, y, z)$ — непрерывная функция, определённая на поверхности Σ. Тогда

$$\iint\limits_{\Sigma'} R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma_{XOY}} R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy.$$

Здесь в правой части — двойной интеграл по проекции Σ_{XOY}.

Доказательство. По определению поверхностного интеграла 2-го рода:

$$\iint\limits_{\Sigma'} R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma\,d\sigma.$$

Как мы знаем, $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy$. Так как Σ задана уравнением $z - z(x, y) = 0$, то её градиент

$$\operatorname{grad}\Sigma = (-z'_x,\ -z'_y,\ 1).$$

Градиент направлен по нормали, поэтому направляющие косинусы вектора нормали равны:

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},\ \cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}.$$

При выборе другого направления нормали знаки нужно изменить.

По условию, угол γ острый, поэтому $\cos\gamma > 0$. Используя формулы для $d\sigma$ и $\cos\gamma$, получаем то, что требовалось:

$$\iint\limits_{\Sigma'} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{XOY}} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy.$$

Если Σ' — «нижняя» сторона поверхности, т. е. $\cos\gamma < 0$, то

$$\iint\limits_{\Sigma'} R\,dx\,dy = -\iint\limits_{\Sigma_{XOY}} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy.$$

В точности так же можно получить формулы

$$\iint\limits_{\Sigma'} P\ dy\,dz = \pm\iint\limits_{\Sigma_{YOZ}} P(x(y,z),y,z)\ dy\,dz,$$

(если Σ задана уравнением $x = x(y,z)$);

$$\iint\limits_{\Sigma'} Q\,dx\,dz = \pm\iint\limits_{\Sigma_{XOZ}} Q(x,y(x,z),z)\,dx\,dz,$$

(если Σ задана уравнением $y = y(x,z)$). Знак перед интегралом выбирается в зависимости от выбора стороны поверхности.

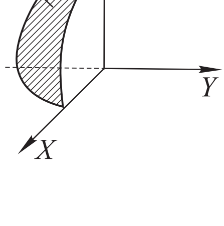
Итак, мы получили метод вычисления поверхностного интеграла 2-го рода (назовём его методом ***проецирования на все три координатные плоскости***):

$$\iint\limits_{\Sigma'} P\ dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy =$$

$$= \pm\iint\limits_{\Sigma_{YOZ}} P(x(y,z),y,z)\,dydz \pm \iint\limits_{\Sigma_{XOZ}} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz \pm \iint\limits_{\Sigma_{XOY}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy.$$

Этим методом удобно пользоваться, если поверхность Σ однозначно проецируется на любую координатную плоскость.

Пример 6. Найти поток векторного поля $\overline{A} = 2x^2\overline{i} + 2xz\overline{j} + 4z\overline{k}$ через внешнюю сторону части параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$.



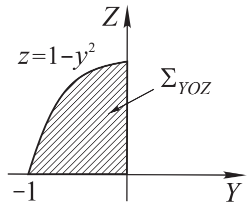
Решение. Поверхность однозначно проецируется на все координатные плоскости. Поэтому вычисляем поток как сумму трёх интегралов.

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma'} 2x^2\ dy\,dz + 2xz\,dx\,dz + 4zdx\,dy = I_1 + I_2 + I_3.$$

Для выбранного направления нормали $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta < 0$, $\cos\gamma > 0$. Значит, перед интегралом I_2 возьмём знак «$-$».

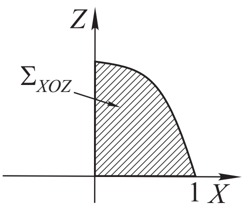
Вычисляем каждый интеграл, сводя его к двойному интегралу по соответствующей проекции.

$$I_1 = \iint\limits_{\Sigma'} 2x^2\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma_{YOZ}} 2(1-y^2-z)\,dy\,dz =$$



$$= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{1-y^2} 2(1-y^2-z)\,dz = \int\limits_{-1}^{0} dy(2z-2y^2z-z^2)\Big|_0^{1-y^2} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (2-2y^2-2y^2+2y^4-1+2y^2-y^4)\,dy = \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}.$$

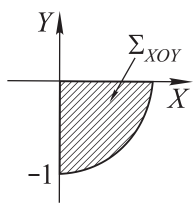


$$I_2 = \iint\limits_{\Sigma'} 2xz\,dx\,dz = -\iint\limits_{\Sigma_{XOZ}} 2xz\,dx\,dz =$$

$$= -\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} 2xz\ dz = -\int\limits_{0}^{1} dx(xz^2)\Big|_0^{1-x^2} =$$

$$= -\int\limits_{0}^{1} (x-2x^3+x^5)\,dx = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Sigma'} 4z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma_{XOY}} 4(1-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$



$$= \left|\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ dx\,dy = r\,dr\,d\varphi \end{array}\right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{1} 4\left(1-r^2\right) r\,dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \cdot 4\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi = \varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $\Pi = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{8}{15} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{11+15\pi}{30}$.

Можно вычислять поверхностный интеграл 2-го рода по определению, сводя его к интегралу $\iint (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$ и затем — к двойному интегралу по проекции на какую-нибудь координатную плоскость.

Будем называть этот метод вычисления поверхностных интегралов 2-го рода методом ***проецирования на одну координатную плоскость***. Например, если Σ задана уравнением $z = z(x, y)$, то, заменяя косинусы по формулам, указанным в доказательстве теоремы 5, получим:

$$\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma =$$
$$= \pm\iint\limits_{\Sigma_{XOY}}[P(x,y,z(x,y))(-z'_x) + Q(x,y,z(x,y))(-z'_y) + R(x,y,z(x,y))]\,dx\,dy.$$

Знак перед интегралом совпадает со знаком $\cos\gamma$. Аналогичные формулы справедливы, если Σ проецировать на другие координатные плоскости.

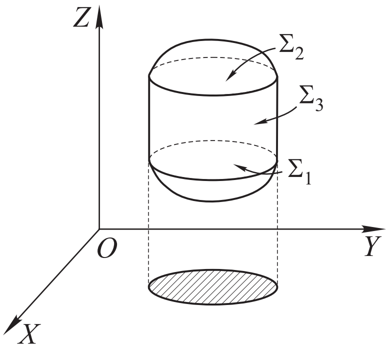
Пример 7. Вычислить поток, рассмотренный в примере 6, проецируя Σ на плоскость XOY.

Решение. Так как $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$, $\cos\gamma > 0$, то получаем:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma}(2x^2\cos\alpha + 2xz\cos\beta + 4z\cos\gamma)\,d\sigma =$$
$$= \iint\limits_{\Sigma_{XOY}}(2x^2\cdot 2x + 2x(1 - x^2 - y^2)\cdot 2y + 4(1 - x^2 - y^2))\,dx\,dy =$$
$$= 4\iint\limits_{\Sigma_{XOY}}(x^3 + xy(1 - x^2 - y^2) + (1 - x^2 - y^2))\,dx\,dy =$$
$$= 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi\int\limits_{0}^{1}[r^3\cos^3\varphi + r^2\cos\varphi\sin\varphi(1 - r^2) + (1 - r^2)]r\,dr =$$
$$= 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left[\frac{r^5}{5}\cos^3\varphi + \cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right) + \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi =$$
$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\frac{4}{5}\cos^3\varphi + \frac{1}{3}\cos\varphi\sin\varphi + 1)\,d\varphi = \left[\frac{4}{5}(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}) + \frac{1}{3}\frac{\sin^2\varphi}{2} + \varphi\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} =$$
$$= 0 - \frac{4}{5}(-1 + \frac{1}{3}) - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{11 + 15\pi}{30}.$$

12.2.3. Формула Гаусса – Остроградского

Пусть E — область в трёхмерном пространстве, правильная в направлении оси OZ. Напомним: это значит, что любая прямая, проведённая через внутреннюю точку, пересечёт границу дважды. Такое тело ограничено снизу поверхностью Σ_1 (задана уравнением $z = z_1(x, y)$), сверху — Σ_2 (задана уравнением $z = z_2(x, y)$), а также, возможно, цилиндрической поверхностью Σ_3, образующие которой параллельны OZ.



Пусть функции $R = R(x, y, z)$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на E. Тогда

$$\iiint\limits_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma_{XOY}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_{XOY}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))]\,dx\,dy.$$

Теперь от двойных интегралов перейдём к поверхностным интегралам 2-го рода, выбирая ***внешнюю*** (для E) нормаль:

$$\iiint\limits_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma_2^+} R(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{\Sigma_1^+} R(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Заметим, что $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_3^+} R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma_3^+} R(x, y, z)\cos\gamma\,d\sigma = 0$, так как в любой точке Σ_3 нормаль перпендикулярна оси OZ, а значит $\cos\gamma = 0$. Добавляя нулевое слагаемое к сумме двух интегралов и пользуясь аддитивностью, получим интеграл по замкнутой поверхности $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, т. е. по границе области E:

$$\iiint\limits_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma^+} R(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Здесь Σ^+, как и выше, обозначает внешнюю сторону поверхности Σ.

Пусть теперь E — ***простая*** область, т. е. её можно разбить кусочно-гладкими поверхностями в объединение правильных по оси OZ: $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$. Запишем доказанное соотношение для каждой области E_i:

$$\iiint\limits_{E_i} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma_i^+} R(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Здесь Σ_i — граница тела E_i, Σ_i^+ — её внешняя сторона. Суммируя все эти равенства для $i = 1, 2, \ldots, n$ и пользуясь аддитивностью, получим:

$$\iiint\limits_{E} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma^+} R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

так как поверхностные интегралы по поверхностям, осуществляющим разбиение, вычисляются дважды, с противоположными направлениями нормалей, а следовательно сокращаются.

Если же область E такова, что для любой оси её можно разбить в объединение областей, правильных по этой оси, то в точности так же доказываются соотношения:

$$\iiint\limits_{E} \frac{\partial P}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma^+} P(x,y,z)\,dx\,dy,$$

$$\iiint\limits_{E} \frac{\partial Q}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma^+} Q(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Сложим 3 полученные равенства:

$$\iiint\limits_{E} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy.$$

Эта формула называется ***формулой Гаусса – Остроградского***. Можно доказать, что она справедлива для любых областей в $\mathbb{R}^3$, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями.

Формула Гаусса – Остроградского даёт ещё один способ вычисления потока векторного поля — для случая, когда поток вычисляется через ***замкнутую*** поверхность.

Пример 8. Найти поток векторного поля

$$\overline{A} = (x+y)\overline{i} + (2y-z)\overline{j} + (x^2+3z)\overline{k}$$

через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в положительном направлении.

Решение. Положительное направление, как известно, это направление внешней нормали. Так как

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 2 + 3 = 6,$$

то поток, по формуле Гаусса – Остроградского, равен:

$$\Pi = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{T} 6\,dx\,dy\,dz.$$

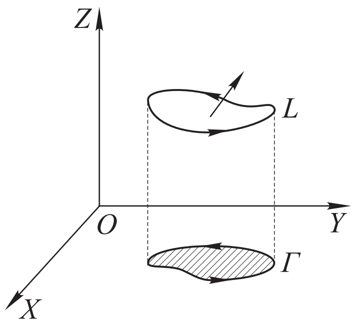
Здесь T — шар, ограниченный сферой S. Полученный тройной интеграл можно не вычислять, так как мы знаем, что $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz = V(T)$ — объём шара. Значит,

$$\Pi = 6\iiint\limits_T dx\,dy\,dz = 6\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\pi R^3 = 216\pi.$$

12.2.4. Формула Стокса

Пусть Σ — гладкая двусторонняя поверхность с краем L. Рассмотрим векторное поле $\overline{A}(x,y,z) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$, определённое в каждой точке поверхности Σ.

Выберем (и будем считать положительным) одно из двух возможных направлений нормали к поверхности и соответствующее ему направление обхода L (см. 12.2.1). Пусть сначала Σ задана уравнением $z = z(x,y)$, т. е. однозначно проецируется на плоскость XOY.



Рассмотрим и преобразуем

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

т. е. циркуляцию поля $\overline{A}$ по контуру L. Преобразования будем проводить для каждого слагаемого отдельно. Заметим, что

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx = \oint\limits_\Gamma P(x,y,z(x,y))\,dx,$$

где Γ — проекция L на плоскость XOY. Действительно, оба интеграла — криволинейные, 2-го рода. Если кривая Γ задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[a,b]$, то L можно задать так:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(x(t),y(t)).$$

По правилу вычисления криволинейных интегралов, каждый из них равен

$$\int\limits_a^b P(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))x'(t)\,dt,$$

что и доказывает их равенство между собой.

Нам удобнее ввести какое-либо обозначение для функции двух переменных $P(x,y,z(x,y))$. Пусть, например,

$$P(x,y,z(x,y)) = P_0(x,y).$$

Применим к интегралу $\oint\limits_\Gamma P_0(x,y)\,dx$ формулу Грина (при $Q=0$):

$$\oint\limits_{\Gamma} P_0(x,y)\,dx = -\iint\limits_{\Sigma_{XOY}} \frac{\partial P_0}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Вычисляем $\dfrac{\partial P_0}{\partial y}$ по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial P_0}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Это функция двух переменных, так как переменная z заменена выражением $z(x,y)$. Итак, имеем:

$$\oint\limits_{L} P(x,y,z)\,dx = \oint\limits_{\Gamma} P_0(x,y)\,dx = -\iint\limits_{\Sigma_{XOY}} \frac{\partial P_0}{\partial y}\,dxdy = -\iint\limits_{\Sigma_{XOY}} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y})\,dxdy.$$

Теперь перейдём к поверхностному интегралу:

$$-\iint\limits_{\Sigma_{XOY}} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y})\,dx\,dy = -\iint\limits_{\Sigma} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y})\cos\gamma\,d\sigma.$$

Как и раньше, мы обозначаем α, β, γ — углы между положительным направлением нормали и осями координат. Так как

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

то $\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma = z'_y\cos\gamma = -\cos\beta$. Продолжая преобразование интеграла, получаем:

$$\oint\limits_{L} P(x,y,z)\,dx = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma. \qquad (*)$$

Сделаем несколько замечаний о полученной формуле, не прибегая к строгим обоснованиям. Конечно, без всяких изменений вывод формулы справедлив для поверхностей, заданных уравнением $y = y(x,z)$ (однозначно проецирующихся на XOZ). Далее, если Σ можно разбить в объединение частей, для каждой из которых формула $(*)$ справедлива, то она справедлива и для Σ. Действительно, если написать $(*)$ для каждого элемента разбиения и сложить все равенства, то криволинейные интегралы по линиям разбиения сократятся, останется криволинейный интеграл по границе Σ (слева) и поверхностный интеграл по Σ (справа).

Наконец, рассмотрим поверхность, которую нельзя разбить указанным образом. Другими словами, элементы любого разбиения не проецируются однозначно ни на XOY, ни на XOZ. Достаточно ясно, что такая поверхность является частью плоскости $x = a = \text{const}$. Для неё формула $(*)$, очевидно, справедлива: в левой части — 0 (так как $x = \text{const}$, то $dx = 0$), в правой части — 0 (так как $\cos\beta = \cos\gamma = 0$).

Итак, формула (*) справедлива для любой кусочно-гладкой поверхности Σ с краем L. Аналогично доказываются соотношения

$$\oint\limits_L Q(x,y,z)\,dy = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)d\sigma,$$
$$\oint\limits_L R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)d\sigma.$$

Сложим все полученные равенства:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \iint\limits_\Sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma.$$

Или, записывая правую часть как поверхностный интеграл 2-го рода,

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \iint\limits_{\Sigma^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Эта формула называется ***формулой Стокса***. Напомним, что направление интегрирования на L и выбор стороны Σ^+ поверхности Σ согласованы. Интеграл в правой части формулы Стокса есть поток через поверхность Σ вектора

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

который называется ***ротором*** (или ***вихрем***) поля $\overline{A}$. Чтобы запомнить координаты ротора, можно использовать ***формальный определитель***:

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Здесь «умножение» символов второй строки на функции из третьей строки выполняется как дифференцирование по соответствующей переменной.

Используя терминологию теории векторных полей, теорему Стокса можно сформулировать так: циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную этим контуром.

Обратим внимание: формула Грина является частным случаем формулы Стокса. Она получается, если $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $R \equiv 0$, Σ — плоская область, ограниченная контуром L.

12.2.5. Условия потенциальности пространственного векторного поля

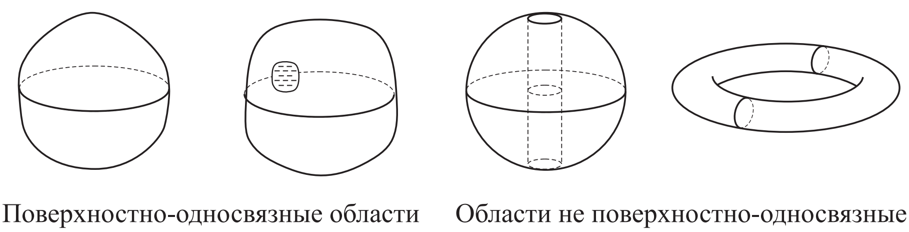
Определения потенциального поля и криволинейного интеграла 2-го рода были даны одновременно как для плоского, так и для трёхмерного случая. Практически без изменений для трёхмерного случая остаются справедливыми и формулировки, и доказательства теорем 2, 3. Другими словами, интеграл $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от пути (а значит по любому замкнутому контуру равен 0) тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x, y, z)$.

Если известно, что поле (P, Q, R) потенциально (т. е. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом), то его потенциал $U(x, y, z)$ находится в точности так же, как и для плоского поля:

$$U(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

причём интегрировать удобно по ломаной, звенья которой параллельны координатным осям.

В то же время признак полного дифференциала (теорема 4) сформулирован и доказан исключительно для плоского случая. Чтобы получить аналогичный результат для трёхмерного векторного поля, нам потребуется понятие поверхностно-односвязной области. Область в пространстве называется ***поверхностно-односвязной***, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, найдётся поверхность, ограниченная этим контуром и также целиком лежащая в области.



Поверхностно-односвязные области   Области не поверхностно-односвязные

Как и в случае плоской односвязной области, можно определение дать по-другому: область в $\mathbb{R}^3$ является поверхностно-односвязной, если любой замкнутый контур, лежащий в ней, можно, непрерывно изменяя, стянуть в точку, оставаясь в пределах области.

Теперь сформулируем и докажем признак потенциальности векторного поля.

Теорема 6. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в каждой точке поверхностно-односвязной области E. Тогда

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz \text{ — полный дифференциал} \quad \Leftrightarrow \quad \text{справедливы}$$

$$\text{равенства:} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Или, на языке теории поля:

$$\text{Поле } \overline{A} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k} \quad \text{потенциально} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot}\overline{A} = \overline{0}.$$

Доказательство.

«$\Rightarrow$». Допустим, $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU$. Это значит, что $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial U}{\partial z}$. Следовательно, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$. По теореме о равенстве смешанных частных производных, получаем: $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$. Аналогично проверяются соотношения $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

«$\Leftarrow$». Пусть теперь $\operatorname{rot}\overline{A} = \overline{0}$. Возьмём любой замкнутый контур L, лежащий в E. Рассмотрим поверхность Σ, ограниченную контуром L и также лежащую в области E (для существования такой поверхности и требуется, чтобы область E была поверхностно-односвязной). Применим теорему Стокса:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Так как $\operatorname{rot}\overline{A} = \overline{0}$, то получаем, что $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$. Теоремы 2, 3 (справедливые, как отмечалось, и для пространственного случая) показывают, что поле $\overline{A} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ потенциально.

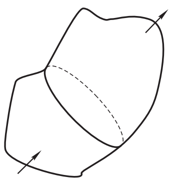
12.3. Обзор основных характеристик векторных полей

Мы уже познакомились с несколькими характеристиками векторного поля — циркуляцией, потоком, ротором. Рассмотрим здесь ещё одну величину — дивергенцию.

Пусть $\overline{A}$ векторное поле в некоторой пространственной области. Пусть Σ — замкнутая поверхность, E — часть пространства, ограниченная поверхностью Σ. Рассмотрим поток поля $\overline{A}$ через поверхность Σ:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\overline{A}, \overline{n})\, d\sigma.$$

Здесь $\overline{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности. Чтобы лучше понять дальнейшие рассуждения, будем считать, что $\overline{A}$ — поле скоростей частиц жидкости. Если поток через замкнутую поверхность Σ больше нуля, можно представить, что жидкость «возникает» в некоторых точках E, имеются «источники». Если же поток меньше нуля, то в некоторых точках E жидкость «исчезает», имеются «стоки». Считая, что в области E имеются как «источники», так и «стоки», можно интерпретировать поток Π как ***суммарную мощность*** «источников» и «стоков» (мощность «стоков» считается отрицательной).



Пусть $V(E)$ — объём области E. Тогда отношение $\dfrac{\Pi}{V(E)}$ естественно назвать средней мощностью (или ***плотностью***) «источников» и «стоков» в области E.

Пусть M — какая-либо точка E. Вычисляя плотность «источников» и «стоков» во всё меньших окрестностях точки M, можно перейти к пределу при $E \to M$ (при этом $V(E) \to 0$, конечно). Мы получим плотность «источников» и «стоков» в точке M. Эта величина называется ***дивергенцией*** поля $\overline{A}$ в точке M:

$$\operatorname{div} \overline{A} = \lim_{E \to M} \frac{\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (\overline{A}, \overline{n})\, d\sigma}{V(E)}.$$

Теорема 7. Если $\overline{A} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$, причём функции P, Q, R и их частные производные 1-го порядка непрерывны, то в любой точке

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Доказательство. Пусть M_0 — произвольная точка, E — какая-либо область, содержащая M_0, Σ — поверхность, ограничивающая E. По теореме Гаусса–Остроградского

$$\iint\limits_{\Sigma} (\overline{A}, \overline{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{E} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Воспользуемся теоремой о среднем для тройного интеграла
$$\iint\limits_{\Sigma}(\overline{A},\overline{n})\,d\sigma=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{M}\cdot V(E).$$
Здесь M — некоторая точка в E, $V(E)$ — объём E. Перейдём к пределу при $E\to M_0$, учитывая, что при этом
$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{M}\;\to\;\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_0}$$
(следует из непрерывности частных производных). Получим
$$\operatorname{div}\overline{A}(M_0)=\lim_{E\to M_0}\frac{\iint\limits_{\Sigma}(\overline{A},\overline{n})\,d\sigma}{V(E)}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_0},$$
что и требовалось доказать.

Заметим, что представление поля $\overline{A}$ в виде $\overline{A}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ зависит от выбора системы координат. При изменении системы координат то же самое поле $\overline{A}$ будет задаваться другими функциями P, Q, R.

Мы могли бы дать более простое определение дивергенции, сразу называя дивергенцией величину $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$. Однако тогда было бы неясно — зависит ли дивергенция от системы координат? Определение дивергенции с помощью предела (т. е. как «плотности источников и стоков») ***инвариантно*** относительно выбора системы координат.

Можно доказать, что ротор, как и дивергенция, тоже является характеристикой самого поля и не зависит от системы координат (хотя в данном выше определении ротора участвуют функции P, Q, R). Независимость от системы координат циркуляции и потока следует сразу из определений, если записать подинтегральные выражения через скалярное произведение:
$$\text{циркуляция:}\quad\oint\limits_{L}(\overline{A},d\overline{S});\qquad\text{поток:}\quad\iint\limits_{\Sigma}(\overline{A},\overline{n})\,d\sigma.$$

Мы подробно рассмотрели свойства векторного поля, у которого $\operatorname{rot}\overline{A}=\overline{0}$ в каждой точке, — это потенциальное поле. Теперь пусть векторное поле $\overline{B}$ таково, что $\operatorname{div}\overline{B}=0$ в каждой точке. Такое поле называется ***соленоидальным***, или трубчатым. Ясно, что соленоидальное поле не имеет ни «источников», ни «стоков». Поток такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если $\overline{A}$ — произвольное векторное поле, то $\operatorname{rot}\overline{A}$ — соленоидальное поле. Действительно,
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overline{A})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0.$$

Оказывается, справедливо и обратное: любое соленоидальное поле является полем ротора. Итак, можно доказать, что

$$\overline{B} \text{ -- соленоидально} \Leftrightarrow \quad \exists\overline{A}: \quad \overline{B} = \operatorname{rot}\overline{A}.$$

Укажем (также без доказательства), что ***любое*** векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей:

$$\forall\overline{C} \;\; \exists\overline{A} \text{ — потенциальное, } \exists\overline{B} \text{ — соленоидальное: } \overline{C} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Наконец, возможен случай, когда поле является ***одновременно*** и потенциальным, и соленоидальным. Такие векторные поля называются ***гармоническими***, их изучение связано с изучением гармонических функций. Функция $U = U(x, y, z)$ называется ***гармонической***, если

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Теорема 8. Векторное поле $\overline{A}$ является гармоническим тогда и только тогда, когда его потенциал — гармоническая функция.

Доказательство. Пусть U — потенциал $\overline{A}$, т. е.

$$\overline{A} = \text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}.$$

Тогда: $\overline{A}$ — гармоническое $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \;\operatorname{div}\overline{A} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

В заключение раздела рассмотрим удобный для работы с векторными полями способ записи — с помощью символического оператора Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}.$$

Знак ∇ читается «набла». Оператор «набла» можно «умножать» на скалярную функцию (вычисляя от неё частные производные), «умножать» скалярно и векторно на векторную функцию по обычным правилам векторной алгебры.

Используя оператор Гамильтона, приведём краткую и удобную запись для основных характеристик скалярных и векторных полей:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k} = \operatorname{grad} U;$$

$$(\nabla, \overline{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k},\;\; P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\overline{A};$$

$$[\nabla, \overline{A}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\overline{A}.$$

Применяя оператор «набла» повторно, можно вычислять и более сложные величины:

$$(\nabla, \nabla U) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U),$$
$$[\nabla, \nabla U] = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U),$$
$$\nabla \cdot (\nabla, \overline{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \overline{A}),$$
$$(\nabla, [\nabla, \overline{F}]) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \overline{F}),$$
$$[\nabla, [\nabla, \overline{F}]] = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \overline{F}).$$

Впрочем, как мы уже знаем, всегда

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \overline{0}, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \overline{F}) = 0.$$

Скалярный квадрат оператора ∇ называется ***оператором Лапласа*** Δ:

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Гармонические функции, с которыми мы уже встречались, можно определить как функции, удовлетворяющие ***уравнению Лапласа***:

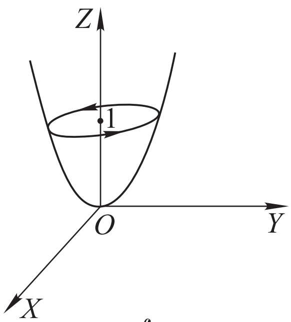
$$\Delta U = 0.$$

12.4. Задачи с решениями

1. Найти циркуляцию векторного поля

$$\overline{A} = (x - y - z)\overline{i} + 3z\overline{j} + (2x - y)\overline{k}$$

вдоль линии L пересечения поверхностей $4z = x^2 + 4y^2$, $z = 1$. Направление обхода — против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, 2)$.



Решение. Линия пересечения — эллипс, лежащий в плоскости $z = 1$. Его уравнение имеет вид: $4 = x^2 + 4y^2$, $z = 1$. Или: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = 1$. Зададим этот эллипс параметрически:

$$x = 2\cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = 1;\ \ t \in [0, 2\pi].$$

Циркуляцию вычисляем, сводя криволинейный интеграл к интегралу по параметру t:

$$\oint_L (x - y - z)\,dx + 3z\,dy + (2x - y)\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(2\cos t - \sin t - 1) - 2\sin t) + 3\cos t + 0]dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-4\cos t \sin t + 2\sin^2 t + 2\sin t + 3\cos t)\, dt =$$

$$= -4\int\limits_0^{2\pi} \sin t\, d(\sin t) + 2\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt - 2\cos t\,\Big|_0^{2\pi} + 3\sin t\,\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -4\frac{\sin^2 t}{2}\,\Big|_0^{2\pi} + \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

2. Найти функцию $U(x,y)$, если известен её дифференциал:

$$dU = \frac{x\,dx + 10y^4\,dy}{\sqrt{x^2+4y^5+1}}.$$

Решение. Доказывая теорему 2, мы видели, что $U(x,y)$ можно найти по формуле:

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU.$$

Начальная точка может быть произвольной — функция $U(x,y)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Интегрировать можно по любому пути, так как интеграл от полного дифференциала не зависит от пути.

Возьмём в качестве начальной точки $(0,0)$, интегрировать будем по ломаной.

$$U(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{x\,dx + 10y^4\,dy}{\sqrt{x^2+4y^5+1}} = \int\limits_0^x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int\limits_0^y \frac{10y^4\,dy}{\sqrt{x^2+4y^5+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{d(x^2+4y^5+1)}{\sqrt{x^2+4y^5+1}} = \sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^x + \sqrt{x^2+4y^5+1}\,\Big|_0^y =$$

$$= \sqrt{x^2+1} - 1 + \sqrt{x^2+4y^5+1} - \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+4y^5+1} + C.$$

3. Проверить, что поле

$$\overline{A} = \left(2xz^3 + \frac{3z}{y^2}\right)\bar{\imath} - \frac{6xz}{y^3}\bar{\jmath} + \left(3x^2z^2 + \frac{3x}{y^2}\right)\overline{k}$$

является потенциальным и найти его потенциал.

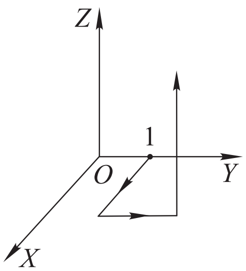
Решение. Для проверки потенциальности поля вычислим его ротор:

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^3 + \dfrac{3z}{y^2} & -\dfrac{6xz}{y^3} & 3x^2z^2 + \dfrac{3x}{y^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{6x}{y^3} + \frac{6x}{y^3}\right)\overline{i} - \left(6xz^2 + \frac{3}{y^2} - 6xz^2 - \frac{3}{y^2}\right)\overline{j} + \left(-\frac{6z}{y^3} + \frac{6z}{y^3}\right)\overline{k} = \overline{0}.$$

Значит, поле потенциально. Найдём потенциал по формуле

$$U(x,y,z) = \int\limits_{(0,1,0)}^{(x,y,z)} \left(2xz^3 + \frac{3z}{y^2}\right)\,dx - \frac{6xz}{y^3}\,dy + \left(3x^2z^2 + \frac{3x}{y^2}\right)\,dz.$$



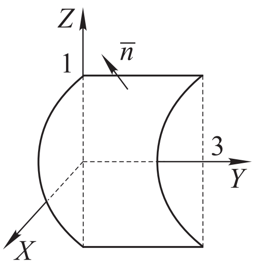
Интегрируем по ломаной:

$$U(x,y,z) = \int\limits_0^x \left(2xz^3 + \frac{3z}{y^2}\right)_{y=1,\,z=0} dx - \int\limits_1^y \left(\frac{6xz}{y^3}\right)_{z=0} dy +$$

$$+ \int\limits_0^z \left(3x^2z^2 + \frac{3x}{y^2}\right)dz = x^2z^3 + \frac{3xz}{y^2} + C.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Sigma'} y\,dx\,dz + (1 + xz)\,dy\,dz$, где Σ' — верхняя сторона части цилиндрической поверхности

$$x^2 + z^2 = 1, \;\; x \geq 0, \;\; 0 \leq y \leq 3.$$



Решение. Сделаем чертёж. Поверхность удобно проецировать на плоскость YOZ, поэтому будем вычислять интеграл, сводя его к двойному интегралу по переменным y, z. Уравнение Σ: $x = \sqrt{1 - z^2}$; элемент поверхности: $d\sigma = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\,dy\,dz$.

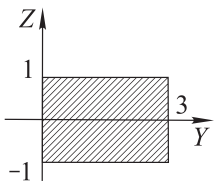
Направляющие косинусы вектора единичной нормали:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}}, \; \cos\beta = \frac{-x'_y}{\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}}, \; \cos\gamma = \frac{-x'_z}{\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}}.$$

Вычисляем интеграл:

$$\iint\limits_{\Sigma'} y\,dx\,dz + (1+xz)\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma}[(1+xz)\cos\alpha + y\cos\beta + 0\cdot\cos\gamma]\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma}(1+xz)\cos\alpha\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{YOZ}}(1+z\sqrt{1-z^2})\,dy\,dz.$$



Проекция Σ на плоскость YOZ — прямоугольник, двойной интеграл легко вычисляется:

$$\iint\limits_{\Sigma_{YOZ}}(1+z\sqrt{1-z^2})\,dy\,dz = \int\limits_{-1}^{1}dz\int\limits_{0}^{3}(1+z\sqrt{1-z^2})\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}(1+z\sqrt{1-z^2})\,dz = 3\left(z\,\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-z^2}d(1-z^2)\right) =$$

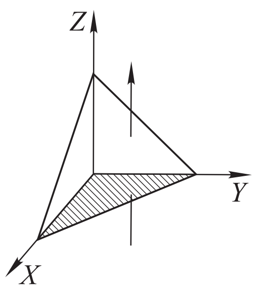
$$= 3\left(2 - \frac{1}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\,\Big|_{-1}^{1}\right) = 6.$$

5. Найти поток векторного поля $\overline{A} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j}$ через внешнюю сторону поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Решение. Так как поверхность замкнутая, то можно воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma'} x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz = \iiint\limits_{T}\operatorname{div}\overline{A}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T}(2x+2y)\,dx\,dy\,dz,$$

где T — пирамида. Вычисляем тройной интеграл:



$$\iiint\limits_{T}(2x+2y)\,dx\,dy\,dz = 2\iint\limits_{T_{xy}}dx\,dy\int\limits_{0}^{1-x-y}(x+y)\,dz =$$

$$= 2\iint\limits_{T_{xy}}(x+y)(1-x-y)\,dx\,dy = 2\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x}((x+y)-(x+y)^2)\,dy =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3}\right]\Big|_{0}^{1-x}dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)dx = 2\left(\frac{1}{6}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}\right)\Big|_{0}^{1} = 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}.$$

6. Найти в точке $M(1,2,3)$ дивергенцию и ротор векторного поля $\overline{F}=\dfrac{\overline{r}}{\overline{r}^2}$, где $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$.

Решение. $\overline{r}^2$ — скалярный квадрат вектора $\overline{r}$: $\overline{r}^2=(\overline{r},\overline{r})=x^2+y^2+z^2$. Поэтому $\overline{F}=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\,\overline{i}+\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\,\overline{j}+\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\,\overline{k}$.

Вычислим дивергенцию, используя формулу теоремы 7:

$$\operatorname{div}\overline{F}=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_x+\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)'_y+\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)'_z=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

В частности, в точке M: $\operatorname{div}\overline{F}(M)=\dfrac{1}{1+4+9}=\dfrac{1}{14}$.

Вычислим $\operatorname{rot}\overline{F}$, используя определение ротора:

$$\operatorname{rot}\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}\left[\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)'_y-\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)'_z\right]-\overline{j}\left[\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)'_x-\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_z\right]+$$

$$+\overline{k}\left[\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)'_x-\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_y\right]=0\overline{i}+0\overline{j}+0\overline{k}=\overline{0}.$$

Значит, поле потенциально — ротор во всех точках равен нулю.

12.5. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода:

а) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}(x^2+1)y^2\,dx+\frac{1}{y}\,dy$; Γ — дуга кривой $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(-1,\dfrac{1}{2})$;

б) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}y\,dx+\frac{x}{y}\,dy$; Γ — дуга кривой $y=e^x$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,e)$;

в) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}(x+z)\,dx+(y-x)\,dy+(z+2y)\,dz$; Γ — отрезок прямой $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ от точки $A(-5,0,1)$ до точки $B(1,4,-1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(x-y)\,dx+(2x+3y)\,dy$, если $A(1,0)$, $B(0,1)$, а интегрирование проводится

а) по прямой; б) по окружности $x^2+y^2=1$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F}=(3x+5y)\overline{i}+(2x-y)\overline{j}$:

а) вдоль окружности $x=2\cos t,\ \ y=2\sin t$;

б) вдоль окружности $(x-3)^2+(y+7)^2=25$.

4. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\overline{F}=(3x+2y)\overline{i}+(5x-2y)\overline{j}+(3z-y^2)\overline{k}$$

вдоль линии пересечения поверхностей $x^2+y^2=z^2$, $z=2$. Направление обхода — по часовой стрелке, если смотреть из начала координат.

5. Найти работу векторного поля $\overline{F}=\dfrac{2x^3y-1}{x^2}\,\overline{i}+\dfrac{x^2y^3-2}{y^3}\,\overline{j}$ по перемещению точки из положения $A(1,1)$ в положение $B(4,2)$. Зависит ли работа от траектории движения точки?

6. Найти функцию $U(x,y)$, если известен её дифференциал:

а) $dU=\dfrac{1+\sin x\sin y}{\cos^2 x}\,dx+\dfrac{\cos y}{\cos x}\,dy$; б) $dU=\dfrac{2x\,dx-4y\,dy}{x^2-2y^2}$.

7. Проверить, что данное векторное поле является потенциальным и найти его потенциал:

а) $\overline{F}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\,\overline{i}-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\,\overline{j}$; б) $\overline{F}=yxe^x\overline{i}+(x-1)e^x\overline{j}$;

в) $\overline{F}=(6x+5z)\overline{i}+\dfrac{4}{z}\overline{j}+(5x-\dfrac{4y}{z^2})\overline{k}$; г) $\overline{F}=\ln y\,\overline{i}+(\dfrac{x}{y}+\ln z)\overline{j}+\dfrac{y}{z}\overline{k}$.

8. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint\limits_{\Sigma'}(2x+y)\,dy\,dz+2z\,dx\,dz+(4z+9x+5)\,dx\,dy,$$

где Σ' – верхняя сторона части плоскости $3x-2y-2z+6=0$, соответствующей значениям $x\le 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0$.

9. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Sigma'}x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz$, если Σ' — нижняя сторона части поверхности $z=x^2$, проекция которой на плоскость XOY есть треугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,1)$, $(\frac{1}{2},1)$.

10. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma'}(7x+5y)\,dy\,dz+(8x-y)\,dx\,dz+(3xy-2z-2)\,dx\,dy,$$

если Σ' — внешняя сторона замкнутой поверхности, образованной поверхностями $x^2+y^2=(z+1)^2$, $z=-3$.

11. Найти поток векторного поля $\overline{F} = x^2y^2z\cdot\overline{k}$ через нижнюю сторону нижней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

12. Найти поток векторного поля $\overline{F} = x^2\overline{i} + z^2\overline{j} + y^2\overline{k}$ через внешнюю сторону полной поверхности призмы, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$, $x+y=1$.

13. Найти поток векторного поля $\overline{F} = 5z\overline{i} + 3y\overline{j} + (x^2+6z)\overline{k}$ через внешнюю сторону сферы $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=1$.

14. Найти поток векторного поля $\overline{F} = (1+xy)\overline{i} + z\overline{k}$ через внешнюю сторону части поверхности цилиндра $x^2+y^2=1$, соответствующей значениям $y\geq 0$, $0\leq z\leq 1$.

15. Найти дивергенцию и ротор векторного поля в указанной точке M:
а) $\overline{F} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}$, $M(2,3,7)$; б) $\overline{F} = x\overline{i} + x^2yz^2\overline{k}$, $M(-1,1,3)$;
в) $\overline{F} = \dfrac{\overline{r}}{|\overline{r}|}$, где $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $M(1,2,2)$; г) $\overline{F} = |\overline{r}|\overline{r}$, $M(x_0,y_0,z_0)$.

16. Вычислить ротор векторного поля $\overline{A} = \varphi\cdot\operatorname{grad}\varphi$, где $\varphi=\varphi(x,y,z)$ — произвольная функция.

17. В точке $M(4,0,-4)$ вычислить дивергенцию поля

$$\overline{F} = (x^2+y^2+z^2)\cdot\overline{C},$$

где $\overline{C}$ — постоянный вектор длины 5, образующий с радиусом-вектором точки M угол $\dfrac{\pi}{4}$.

12.6. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти работу, совершаемую силой $\overline{F} = x\overline{i} - y\overline{j}$ по перемещению точки из положения $A(0,0)$ в положение $B(2,8)$ вдоль кривой $y=x^3$.

2. При каком значении параметра α поле $\overline{F} = (\alpha y^2 + \dfrac{x}{y})\overline{i} + (6xy - \dfrac{x^2}{2y^2})\overline{j}$ является потенциальным?

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{A} = (x+y+z)\overline{i} + (2y+2z)\overline{j} + 3z\overline{k}$ через внешнюю сторону полной поверхности куба, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=2$, $z=2$.

4. Вычислить дивергенцию поля $\overline{A} = \ln(x+y)\overline{i} + (z+\ln y)\overline{j} + (x+\ln z)\overline{k}$ в точке $(1,1,1)$.

5. Найти модуль ротора поля $\overline{F} = \dfrac{x}{y^2}\overline{i} - \dfrac{1}{y}\overline{j}$ в точке $(\sqrt{2},1,5)$.

6. Какое из перечисленных векторных полей является соленоидальным?
1) $y\sin z\overline{i} + x\overline{j} + \cos z\overline{k}$; 2) $y\sin z\overline{j} - \cos y\overline{k}$;
3) $x\cos z\overline{i} + \sin(x+z)\overline{j} - \sin z\overline{k}$; 4) $z\sin y\overline{i} + x\sin z\overline{k}$.

ГЛАВА 13

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Мы начинаем изучать новую тему — теорию рядов. Понятие ряда обобщает понятие суммы, позволяя рассматривать суммы бесконечного числа слагаемых. Основа для такого обобщения у нас есть — это теория числовых последовательностей, рассмотренная в 1-й главе.

13.1. Сходимость числового ряда

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ — действительные числа. ***Числовым рядом*** называется выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots .$$

Можно записывать ряд и с помощью значка Σ:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Нумерацию слагаемых иногда начинают не с 1, а с 0 (или другого целого числа). Таким образом, числовой ряд — совершенно новый для нас объект. Пока это лишь символическая запись указанного вида, содержательный смысл этой записи нам предстоит определить. Рассмотрим числа:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1,\\
&S_2 = a_1 + a_2,\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Они называются ***частичными суммами*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Если последовательность $\{S_n\}$ сходится, т. е. существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***сходящимся***, а число S — ***суммой*** этого ряда.

Если $\lim S_n$ бесконечен или не существует, то ряд называется ***расходящимся***.

Пример 1. Ряд $1+2+3+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k$ расходится, так как последовательность его частичных сумм, очевидно, стремится к бесконечности.

Ряд $1-1+1-1+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ тоже расходится, его частичные суммы $S_1=1$, $S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0$, $\ldots$ образуют последовательность, не имеющую предела.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} aq^n.$$

Он представляет собой ***сумму геометрической прогрессии***. Напомним: a — первый член, q — знаменатель прогрессии. Попытаемся разобраться: сходится ли этот ряд?

Рассмотрим частичную сумму: $S_n=a+aq+\ldots+aq^{n-1}$. Умножим обе части равенства на q, а затем вычтем одно равенство из другого:

$$S_nq=aq+aq^2+\ldots+aq^n,$$
$$S_n-S_nq=a-aq^n.$$

Отсюда находим: $S_n=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$. Впрочем, эта формула для суммы первых n членов геометрической прогрессии рассматривается в школьном курсе математики. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n).$$

Как мы знаем, если $|q|<1$, то $q^n\to 0$ (при $n\to\infty$). Поэтому при $|q|<1$ ряд сходится:

$$S=\lim_n S_n=\frac{a}{1-q}\lim(1-q^n)=\frac{a}{1-q},$$

это сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Если же $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|q^n|=\infty$ и ряд расходится. Итак, запомним:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \text{ сходится} \quad\Leftrightarrow\quad |q|<1.$$

Пример 3. Рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Этот так называемый ***гармонический*** ряд. Чтобы решить вопрос о его сходимости, рассмотрим другой, вспомогательный ряд, полученный из гармонического уменьшением его слагаемых:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}}_{4\text{ слагаемых}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8\text{ слагаемых}}+\frac{1}{32}+\ldots .$$

Мы в гармоническом ряде оставили слагаемые 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … без изменения, а остальные уменьшили. Подсчитаем некоторые частичные суммы нового ряда:

$$S_1=1,\quad S_2=1+\frac{1}{2},\quad S_4=1+\frac{1}{2}\cdot 2,$$
$$S_8=1+\frac{1}{2}\cdot 3,\quad S_{16}=1+\frac{1}{2}\cdot 4,\ \ldots .$$

Ясно, что $S_{2^n}=1+\frac{1}{2}\cdot n$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n}=\infty$. Поэтому вспомогательный ряд расходится (последовательность S_n не может сходиться, если некоторая её подпоследовательность стремится к ∞). Частичные суммы гармонического ряда больше соответствующих S_n, поэтому ***гармонический ряд расходится.***

Перейдём к изучению свойств сходящихся рядов.

Теорема 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а также ряд, полученный из него отбрасыванием первых k слагаемых: $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Эти ряды или оба сходятся, или оба расходятся.

Доказательство. Обозначим S_n — частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, S'_n — частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Ясно, что тогда

$$S'_n=S_{n+k}-a_1-a_2-\ldots-a_k.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+k}-a_1-a_2-\ldots-a_k)$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+k}=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Следовательно, если существует и конечен один из пределов $\lim S'_n$, $\lim S_n$, то существует и конечен другой предел, что и требовалось доказать.

Итак, сходимость ряда (как и сходимость числовой последовательности) не зависит от первых членов. Сходимость или расходимость характеризует поведение слагаемых a_n при $n\to\infty$. Изучая сходимость ряда, можно вместо записи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ использовать более простую запись $\sum a_n$.

Теорема 2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda\, a_n)$. Здесь λ — действительное число.

Доказательство сразу следует из определения сходящегося ряда и свойств предела последовательности. Действительно, если S_n, S'_n — частичные суммы рядов $\sum a_n$, $\sum b_n$ соответственно, то $S_n+S'_n$, λS_n — частичные суммы рядов $\sum(a_n+b_n)$, $\sum(\lambda\, a_n)$. Значит, если $\lim S_n$, $\lim S'_n$ существуют и конечны, то существуют и конечны также пределы

$$\lim(S_n+S'_n)=\lim S_n+\lim S'_n, \quad \lim(\lambda S_n)=\lambda \lim S_n.$$

Теорема 3 ***(необходимое условие сходимости).*** Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Доказательство. По определению, сходимость ряда означает, что существует конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Но $a_n=S_n-S_{n-1}$. Поэтому

$$\lim a_n=\lim(S_n-S_{n-1})=\lim S_n-\lim S_{n-1}=S-S=0.$$

Замечание. Условие $\lim a_n=0$ ***не является достаточным*** для сходимости ряда — например, для гармонического ряда $\sum \frac{1}{n}$ оно, очевидно, выполнено, однако ряд расходится. Таким образом, с помощью теоремы 3 иногда можно убедиться в расходимости ряда, но доказать сходимость нельзя.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{10}+\frac{3}{20}+\frac{4}{30}+\frac{5}{40}+\ldots$.

Решение. Замечая закономерность в изменении слагаемых, можем записать ряд так:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{10(n-1)}.$$

Другими словами, $a_n=\dfrac{n}{10(n-1)}$. Вычислим предел:

$$\lim a_n=\lim\frac{n}{10(n-1)}=\lim\frac{1}{10\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{10}\neq 0.$$

Ряд расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости.

Теорема 4 (*критерий Коши* сходимости числового ряда).

$$\sum a_n \text{ сходится} \quad\Leftrightarrow\quad \forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_0\ :\ \forall\, k\geq n_0,\ \forall\, p\ \ \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\{S_n\}$ — последовательность частичных сумм. Сходимость ряда $\sum a_n$ означает сходимость $\{S_n\}$, а это равносильно тому, что последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists n_0 : \forall k_1 \geq n_0, \,\forall k_2 \geq n_0 \quad |S_{k_1} - S_{k_2}| < \varepsilon.$$

Мы воспользовались критерием Коши для числовых последовательностей (см. 1.4.4). Записывая последнее утверждение немного в другой форме, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 : \forall k \geq n_0, \;\forall p \quad |S_{k+p} - S_k| < \varepsilon,$$

или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 : \forall k \geq n_0, \;\forall p \quad \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что не только для каждого ряда $\sum a_n$ можно рассмотреть последовательность $\{S_n\}$, но и наоборот, зная последовательность частичных сумм, можно найти слагаемые ряда: $a_n = S_n - S_{n-1}$. Таким образом, ***каждому числовому ряду однозначно соответствует последовательность***. Причём сходимость ряда означает сходимость соответствующей последовательности. Поэтому многие свойства числовых рядов (например, теоремы 1, 3, 4) — это свойства последовательностей, сформулированные на «языке рядов».

13.2. Признаки сходимости рядов с положительными слагаемыми

Здесь мы установим несколько достаточных признаков, позволяющих доказывать сходимость (или расходимость) числовых рядов с положительными членами.

Теорема 5 (признак сравнения). Пусть даны два ряда: $\sum a_n$ и $\sum b_n$, причём

$$a_n \geq b_n \geq 0, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тогда если $\sum a_n$ сходится, то и $\sum b_n$ сходится. Если $\sum b_n$ расходится, то и $\sum a_n$ расходится.

Доказательство. Пусть S_n — частичные суммы ряда $\sum a_n$, S'_n — частичные суммы ряда $\sum b_n$. Если ряд $\sum a_n$ сходится, то существует конечный предел $S = \lim S_n$. Так как $\{S_n\}$ — возрастающая последовательность, то $S_n \leq S \,(\forall\, n)$. Из условия следует, что $S'_n \leq S_n \leq S$. Поэтому S'_n — возрастающая ограниченная сверху последовательность. По теореме Вейерштрасса (см. 1.4.2), она имеет предел. Значит, ряд $\sum b_n$ сходится.

Если же $\sum b_n$ расходится, то $\sum a_n$ не может сходиться (иначе, как мы доказали, $\sum b_n$ сходился бы), т. е. расходится.

Замечание. Признак сравнения можно применять и в том случае, если неравенство $a_n \geq b_n$ выполняется не для всех n, а лишь начиная с некоторого номера. Действительно, по теореме 1, сходимость ряда не зависит от величины первых нескольких слагаемых.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение. Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то, по признаку сравнения, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ тоже расходится.

Теорема 6 (*предельный признак сравнения*). Пусть даны два ряда: $\sum a_n$, $\sum b_n$, причём $a_n \geq 0$, $b_n > 0$. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$. Если A — конечное ненулевое число, то или оба ряда сходятся, или оба ряда расходятся.

Доказательство. По определению, равенство $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство можно записать так:

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - A < \varepsilon, \quad \text{или} \quad A - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon.$$

Учитывая, что $b_n > 0$, получим: начиная с некоторого n_0

$$(A - \varepsilon) b_n < a_n < (A + \varepsilon) b_n.$$

Допустим, что $\sum a_n$ сходится. Тогда, по признаку сравнения, сходится ряд $\sum (A - \varepsilon) b_n$ (можно взять ε таким, чтобы $A - \varepsilon > 0$). Постоянный множитель $A - \varepsilon$, по теореме 2, не влияет на сходимость ряда. Значит, $\sum b_n$ сходится. Аналогично, если $\sum a_n$ расходится, то расходится $\sum (A + \varepsilon) b_n$ и, следовательно, $\sum b_n$. Теорема доказана.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum \frac{1}{\sqrt{n} + 100}$.

Решение. В примере 5 мы установили, что $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится. Пусть $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + 100}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Вычислим предел отношения:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+100} = \lim \frac{1}{1+\dfrac{100}{\sqrt{n}}} = 1.$$

По теореме 6, «ряды ведут себя одинаково». Значит, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+100}$ расходится.

Замечание. В теореме 6 ничего не говорится о случаях, когда $A=0$ или $A=\infty$. Однако можно, анализируя доказательство, сделать полезные выводы и в этих случаях. Пусть, например, $A=0$. Используя то, что, начиная с некоторого номера, $a_n < (A+\varepsilon)b_n$, получаем: если $\sum a_n$ расходится, то расходится и $\sum b_n$. А если $\sum b_n$ сходится, то сходится и $\sum a_n$. Можно использовать и такое очевидное соображение: равенство $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, означает, что $a_n = o(b_n)$, т. е. a_n стремится к 0 «быстрее», чем b_n. Значит, из сходимости $\sum b_n$ вытекает сходимость $\sum a_n$.

Аналогичные рассуждения можно провести и в случае $A=\infty$.

Теорема 7 (*признак Даламбера*). Дан ряд $\sum a_n$, причём $a_n > 0$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$$

Если $p<1$, то ряд сходится, если $p>1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $p<1$. Возьмём число q, такое, что

$$p < q < 1.$$

Из определения предела следует, что $\exists N: \ \forall n \ge N \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Это означает, что $\frac{a_{N+1}}{a_N} < q$, т. е. $a_{N+1} < qa_N$; $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q$, т. е. $a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N$. Продолжая, получим: $a_{N+k} < q^k a_N$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Сравним ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{N+k} = \sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ с суммой геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k a_N$ (сходится, так как $q<1$). По признаку сравнения, $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ сходится. Значит, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ведь он отличается от $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ тем, что в $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ отброшены несколько первых слагаемых.

Если $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = p > 1$, то $\exists N: \forall n \ge N \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. То есть начиная с некоторого номера $a_{k+1} > a_n$. В этом случае, конечно, нарушено необходимое условие сходимости. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$, то ряд расходится.

Замечание. В признаке Даламбера ничего не сказано о возможности $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. В этом случае ряд может сходиться, а может и расходиться, т. е. нужно исследовать его другими методами. Например, гармонический ряд $\sum \dfrac{1}{n}$ расходится. Для него $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \dfrac{n}{n+1} = 1$. Мы скоро увидим, что ряд $\sum \dfrac{1}{n^2}$ сходится, хотя и для него $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Решение. Применим признак Даламбера. Так как $a_n = \dfrac{n}{3^n}$, то $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}}$. Вычислим предел:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{3}\lim \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}.$$

Так как предел меньше 1, то ряд сходится.

Теорема 8 (*признак Коши*). Дан ряд $\sum a_n$, причём $a_n \geq 0$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$$

Если $p < 1$, то ряд сходится, если $p > 1$, то расходится.

Доказательство. Пусть $p < 1$. Возьмём число q: $p < q < 1$. Из определения предела следует, что $\exists N: \ \forall n \geq N \ \ \sqrt[n]{a_n} < q$, т. е. $a_n < q^n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} q^n$ сходится, то, по признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ тоже сходится. Но этот ряд отличается от исходного ряда лишь тем, что отброшены несколько первых слагаемых. Поэтому исходный ряд сходится.

Если $\lim \sqrt[n]{a_n} = p > 1$, то $\sqrt[n]{a_n} > 1$, начиная с некоторого номера. Значит, $a_n > 1$ и $\lim a_n \neq 0$. Ряд расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{(\ln 2)^2} + \frac{1}{(\ln 3)^3} + \frac{1}{(\ln 4)^4} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Решение. Применим признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{\ln n} = 0.$$

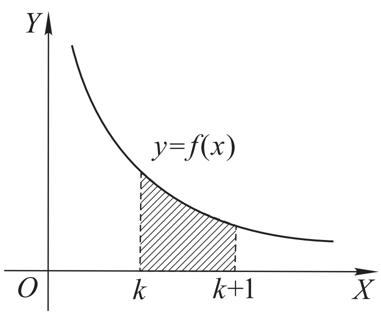
Так как предел меньше 1, то ряд сходится.

Замечание. Можно доказать, что признак Коши «сильнее» признака Даламбера. То есть если признак Коши не даёт результата $\left(\lim \sqrt[n]{a_n} = 1\right)$, то и признак Даламбера бесполезен $\left(\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1\right)$. Но есть примеры, когда признак Даламбера не даёт ответа, а признак Коши решает задачу. Однако признак Даламбера применять проще, поэтому он чаще используется.

Обратим внимание: имеется очень много общего между сходимостью числовых рядов и сходимостью несобственных интегралов. Напомним, в 8-й главе для несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ дано определение сходимости, рассмотрены признаки сравнения, полностью аналогичные признакам сравнения для числовых рядов. С другой стороны, несобственные интегралы иногда можно исследовать по определению: вычислить $\int\limits_1^{N} f(x)\,dx$ (с помощью формулы Ньютона – Лейбница), а затем перейти к пределу при $N \to \infty$. Поэтому важно научиться исследовать числовые ряды, опираясь на эту технику.

Теорема 9 (*интегральный признак сходимости*). Пусть функция $f(x)$ принимает положительные значения, монотонно убывает и непрерывна при $x \geq 1$. Тогда интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ или оба сходятся, или оба расходятся.

Доказательство. Пусть k — натуральное число. Так как $f(x)$ убывает,



то $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ $(\forall x \in [k, k+1])$. Так как $\int\limits_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)x\Big|_k^{k+1} = f(k)$, то, интегрируя по отрезку $[k, k+1]$, получим:

$$f(k) \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1).$$

(Впрочем, эти неравенства легко следуют из сравнения площадей: $\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx$ — площадь криволинейной трапеции, $f(k)$ и $f(k+1)$ равны площадям соответствующих прямоугольников.)

Запишем полученные неравенства для $k = 1, 2 \ldots, n$ и суммируем их.

Сумму интегралов, пользуясь аддитивностью, преобразуем в интеграл по объединению отрезков.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \qquad (*)$$

Допустим, интеграл $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится. Это значит, что существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} f(x)\,dx = I$. Так как $f(x) \geq 0$, то $\int_{1}^{n} f(x)\,dx$ — возрастающая последовательность, т. е. $\int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq I$ $(\forall n)$. Используя правую часть неравенства $(*)$, получим: $\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq I$. Значит, частичные суммы ряда $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ возрастают и ограничены. Такая последовательность всегда имеет предел (см. 1.4.2). Следовательно, ряд $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ сходится.

Обратно, пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, т. е. существует конечный предел последовательности частичных сумм: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) = S$. Так как эта последовательность, очевидно, возрастающая, то $\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq S$ $(\forall n)$. Отсюда и из левой части $(*)$ следует, что $\int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq S$ $(\forall n)$. Последовательность $\int_{1}^{n} f(x)\,dx$ возрастает, ограничена сверху, а значит имеет конечный предел: $\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$, несобственный интеграл сходится.

Пример 9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где α — некоторое постоянное число. Ряд такого вида называется ***обобщённым гармоническим***.

Решение. Ясно, что если $\alpha \le 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \ne 0$ и ряд, конечно, расходится. Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$. Все условия теоремы 9 выполнены, поэтому ряд и интеграл сходятся или расходятся одновременно (т. е. при одних и тех же α).

В пункте 8.1.1 мы выяснили, что $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$ (советуем читателю выполнить сейчас это простое вычисление интеграла). Поэтому можно сделать вывод:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ сходится} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Обобщённые гармонические ряды удобно использовать для исследования сходимости различных числовых рядов с помощью признаков сравнения (см. примеры ниже, в разделе 13.5).

Приведём ещё один пример использования интегрального признака.

Пример 10. Исследовать сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$. При $x \ge 2$ она удовлетворяет условиям теоремы 9, поэтому ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ и интеграл $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ или оба сходятся, или оба расходятся. Вычислим интеграл:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \int_2^\infty \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\,\Big|_2^\infty = \infty\,.$$

(Напомним: эта запись фактически означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(\ln x) = \infty$.) Интеграл расходится, значит, расходится и ряд.

Обратим внимание читателя на одно любопытное обстоятельство. Гармонический ряд $\sum \dfrac{1}{n}$ является в определённом смысле пограничным: он расходится, но стоит лишь хотя бы немного увеличить показатель (например, рассмотреть ряд $\sum \dfrac{1}{n^{1,001}}$) и ряд будет сходиться. С другой стороны, $\dfrac{1}{n\ln n}$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\dfrac{1}{n}$, однако ряд

$\sum \frac{1}{n \ln n}$ расходится. Более того, можно построить целую серию рядов

$$\sum \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}, \quad \sum \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n) \cdot \ln(\ln(\ln n))}, \ldots .$$

Все эти ряды расходятся — это легко проверить с помощью интегрального признака. Однако общий член a_n каждого последующего ряда стремится к 0 быстрее, чем у предыдущего ряда.

13.3. Знакопеременные ряды

Теперь будем рассматривать числовые ряды, члены которых могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Наиболее простой и важный случай — ряды, у которых знаки соседних слагаемых противоположны. Такие ряды называются ***знакочередующимися***. Будем записывать знакочередующиеся ряды так:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n.$$

Здесь числа a_n предполагаются положительными: $a_n \geq 0$.

Для знакочередующихся рядов основной является

Теорема 10 (*теорема Лейбница*). Пусть для знакочередующегося ряда $\sum (-1)^{n+1} a_n$ выполнены условия:

$$1)\ a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots, \qquad 2)\ \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Тогда ряд сходится, причём его сумма S не больше, чем первое слагаемое: $S \leq a_1$.

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы с чётными номерами. Можно записать:

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k}).$$

Из условия теоремы следует, что все скобки здесь положительны. Поэтому последовательность $\{S_{2k}\}$ возрастающая. Можно S_{2k} записать по-другому:

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}.$$

Так как из числа a_1 вычитаются положительные числа, то получаем: $S_{2k} \leq a_1$. В частности, последовательность $\{S_{2k}\}$ ограничена сверху. Возрастающая, ограниченная сверху последовательность имеет предел (1.4.2):

$$\lim_{k \to \infty} S_{2k} = S.$$

Так как $S_{2k} \leq a_1$ при любом k, то и $S \leq a_1$.

Заметим теперь, что частичные суммы с нечётными номерами тоже стремятся к S:

$$S_{2k+1} = a_{2k} + a_{2k+1}, \quad \lim S_{2k+1} = \lim S_{2k} + \lim a_{2k+1} = S + 0 = S.$$

(Мы используем условие теоремы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.) Теперь ясно, что число S является пределом всей последовательности $\{S_n\}$: в любой окрестности S находятся как чётные, так и нечётные (т. е. любые) частичные суммы с достаточно большими номерами. Теорема доказана.

Пример 11. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Решение. Ряд знакочередующийся, условия теоремы Лейбница, очевидно, выполнены. Значит, ряд сходится. В дальнейшем мы выясним, что его сумма равна $\ln 2$.

Замечание. Требование монотонности убывания a_n в теореме Лейбница является существенным. Одного лишь условия $\lim a_n = 0$ недостаточно для сходимости даже знакочередующегося ряда. Рассмотрим, например, знакочередующийся ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$$

Требование $\lim a_n = 0$ выполнено. Вычислим сумму первых $2n$ слагаемых:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = \\ = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{n}.$$

Как мы уже знаем, такая сумма стремится к бесконечности (при $n \to \infty$), так как это частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$. Следовательно, ряд расходится.

Используя то, что сумма ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, не превосходит первого слагаемого, можно приближённо вычислить сумму такого ряда с любой требуемой точностью. Действительно, пусть ряд $\sum (-1)^{n+1}a_n$ удовлетворяет теореме Лейбница, S — его сумма. Заменим точное равенство

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

приближённым:

$$S \approx S_N = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots - a_N.$$

При этом допускается ошибка

$$S - S_N = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \ldots .$$

Здесь в правой части — ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница. Его сумма не превосходит первого члена: $S - S_N \leq a_{N+1}$.

Отсюда получаем ***правило***: ошибка, допускаемая при замене суммы ряда (удовлетворяющего теореме Лейбница) его частичной суммой, ***не превышает первого отброшенного слагаемого.***

Пример 12. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Ясно, что условия теоремы Лейбница выполнены. Вычисляем слагаемые:

$$S = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \ldots .$$

Так как $\dfrac{1}{5040} < 0{,}001$, то все слагаемые, начиная с этого, можно отбросить:

$$S \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0{,}842.$$

Для произвольных знакопеременных (а не только знакочередующихся) рядов нет простого признака сходимости. В этом случае рассматривают ряд $\sum |a_n|$, составленный из модулей слагаемых исходного ряда.

Теорема 11. Если сходится ряд $\sum |a_n|$, то сходится и ряд $\sum a_n$.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши сходимости числового ряда (теорема 4):

$$\sum a_n \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall k \geq n_0, \ \forall p \ \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon,$$

$$\sum |a_n| \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall k \geq n_0, \ \forall p \ \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \varepsilon.$$

Но ведь $\left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \leq \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} |a_n|$, поэтому из второго условия (т. е. сходимости $\sum |a_n|$) вытекает первое — сходимость $\sum a_n$.

Итак, мы доказали: если $\sum |a_n|$ сходится, то сходится и $\sum a_n$. В этом случае говорят, что ряд $\sum a_n$ сходится ***абсолютно***. Но возможно $\sum a_n$ сходится, а $\sum |a_n|$ расходится. Тогда говорят, что $\sum a_n$ сходится ***условно***.

Пример 13. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2} = \sin\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin 3\alpha}{9} + \ldots,$$

где α — некоторое число.

Решение. Ряд является знакопеременным, но не знакочередующимся. Поэтому ни теорему Лейбница, ни изученные выше признаки сходимости применять нельзя. Рассмотрим ряд $\sum \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$. Теперь это ряд с положительными слагаемыми, поэтому можно применять признаки сходимости из раздела 13.2. Так как $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится (см.пример 9), то, по признаку сравнения, $\sum \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ тоже сходится. По теореме 11, ряд $\sum \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ сходится абсолютно.

Простой пример условно сходящегося ряда — это $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. По теореме Лейбница, он сходится, а ряд из модулей $\sum \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ — гармонический, расходится.

13.4. Перестановки в рядах

На бесконечные суммы (т. е. числовые ряды) переносятся не все свойства конечных сумм. В частности, на бесконечные суммы не распространяется коммутативность — при перестановке членов ряда сумма может измениться. Рассмотрим, например, сумму сходящегося ряда

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots.$$

Складывая равенства, получим:

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

В правой части — ряд, составленный из тех же чисел, что и исходный. Порядок членов изменён: после двух положительных идёт очередное отрицательное слагаемое. Как видим, в результате такой перестановки изменилась сумма ряда. В этом разделе мы убедимся, что такая ситуация возможна только для условно сходящихся рядов, а сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при перестановках.

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим:

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n > 0\}, \quad N_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \le 0\}.$$

Тогда объединение $N_1 \cup N_2 = \mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Обозначим теперь:

$S^+ = \sum\limits_{n \in N_1} a_n$ — положительная часть ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

$S^- = \sum\limits_{n \in N_2} (-a_n)$ — отрицательная часть ряда.

Величины S^+ и S^- могут быть конечными числами, а могут равняться бесконечности — если соответствующий ряд расходится.

Для более привычной и удобной записи положительной и отрицательной частей ряда введём ещё одно обозначение. Если a — действительное число, то обозначим

$$a^+ = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a > 0, \\ 0, & \text{если} \quad a \le 0; \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a, & \text{если} \quad a \le 0, \\ 0, & \text{если} \quad a > 0. \end{cases}$$

Тогда справедливо: $S^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad S^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Отметим очевидные свойства символов a^+, a^-:

$$0 \le a^+ \le |a|, \qquad 0 \le a^- \le |a|,$$

$$a = a^+ - a^-.$$

Теорема 12. Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow$ S^+, S^- — конечные числа.

Доказательство. «$\Rightarrow$». Так как $\sum |a_n|$ сходится, а $0 \le a_n^+ \le |a_n|$, то ряд $\sum a_n^+$ сходится по признаку сравнения. Значит, S^+ — конечное число. Аналогично, из неравенств $0 \le a_n^- \le |a_n|$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n^-$, т. е. конечность S^-.

«$\Leftarrow$». Заметим, что $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. Это легко проверить как для положительных, так и для отрицательных чисел a_n. Так как по условию ряды $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ сходятся, то сходится и ряд $\sum |a_n|$. Очевидно, его сумма равна $S^+ + S^-$.

Теорема 13. Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то $S^+ = \infty, \quad S^- = \infty$.

Доказательство. Оба числа $S^+,\ S^-$ конечными быть не могут — по теореме 12. Допустим, например, что $S^+ = \infty, \quad S^- < \infty$. Частичные суммы ряда $\sum a_n$ можно представить в виде:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{k} a_n^+ - \sum_{n=1}^{k} a_n^-.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n^+ - \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n^- = \infty,$$

так как $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n^+ = S^+ = \infty$. Получили противоречие со сходимостью ряда $\sum a_n$. Аналогично, невозможен случай $S^+ < \infty, \quad S^- = \infty$. Теорема доказана.

Перейдём теперь к изучению изменения суммы ряда при перестановках его членов. Сначала уточним понятие перестановки. ***Перестановкой*** множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется биективное (взаимно однозначное) отображение $\mathbb{N}$ на себя:

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Удобно обозначать перестановки следующим способом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots \end{pmatrix}.$$

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & \dots \end{pmatrix}$ — перестановка, при которой число 1 переходит в 2, число 2 в 1 и т. д. Теперь для данного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно рассматривать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(3)} + \dots,$$

состоящий из тех же слагаемых, но расположенных в другом порядке.

Теорема 14. Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, S — его сумма, то для любой перестановки $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $\sum a_{\sigma(n)}$ тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму S.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $a_n \geq 0 \quad (\forall n)$. Обозначим S_k — частичные суммы ряда $\sum a_n$, S'_k — частичные суммы ряда $\sum a_{\sigma(n)}$. По условию, последовательность $\{S_k\}$ возрастает и стремится к конечному пределу S. Пусть $p = \max\limits_{1\leq n\leq k}\{\sigma(n)\}$. Тогда

$$S'_k = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(k)} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_p = S_p,$$

так как в S_p есть все слагаемые суммы S'_k. Так как $S_p \leq S$, то получаем, что $\{S'_k\}$ — возрастающая ограниченная сверху последовательность. Значит, она имеет конечный предел $S' \leq S$. То есть ряд $\sum a_{\sigma(n)}$ сходится и его сумма не может быть больше суммы исходного ряда. Но, с другой стороны, ряд $\sum a_n$ тоже получен из ряда $\sum a_{\sigma(n)}$ в результате некоторой перестановки (обратного отображения σ^{-1}). Поэтому $S \leq S'$. Следовательно, $S' = S$.

Теперь рассмотрим общий случай: слагаемые a_n могут иметь произвольные знаки, ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится. Пусть S^+, S^- — положительная и отрицательная части ряда $\sum a_n$. По теореме 12, S^+ и S^- — конечные числа, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = S^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = S^- \quad —$$

сходящиеся ряды с положительными членами. Для таких рядов теорема уже доказана, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ = S^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- = S^-.$$

Так как эти ряды являются положительной и отрицательной частью ряда $\sum a_{\sigma(n)}$, то по теореме 12, ряд $\sum a_{\sigma(n)}$ абсолютно сходится, его сумма равна $S^+ - S^- = S$. Теорема доказана.

Пример, приведённый в начале раздела, показывает, что для условно сходящихся рядов перестановки слагаемых могут приводить к изменению суммы. Интересно, что этот пример не является исключением, так как справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 15 (*теорема Римана*). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится. Тогда для любого числа A существует перестановка $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что сумма ряда $\sum a_{\sigma(n)}$ равна A. Кроме того, существует перестановка, приводящая к расходящемуся ряду.

13.5. Задачи с решениями

1. Исследовать сходимость ряда $\sum \frac{3n+5}{n^3+2n^2-7n+5}$.

Решение. При $n \to \infty$: $3n+5 \sim 3n$, $n^3+2n^2-7n+5 \sim n^3$ (эквивалентные бесконечно большие последовательности). Поэтому данный ряд должен вести себя так же, как ряд $\sum \frac{3n}{n^3} = \sum \frac{3}{n^2} = 3\sum \frac{1}{n^2}$. Для уточнения этого рассуждения применим предельный признак сравнения, сравним наш ряд с рядом $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\dfrac{3n+5}{n^3+2n^2-7n+5}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \frac{3n^3+5n^2}{n^3+2n^2-7n+5} =$$

$$= \lim \frac{3+\dfrac{5}{n}}{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{7}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}} = 3.$$

Так как получилось конечное ненулевое число, то ряды ведут себя одинаково. Как мы знаем, ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится. Значит, исследуемый ряд тоже сходится.

2. Исследовать сходимость ряда $\sum \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[5]{n}}{2n+1}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, используем предельный признак сравнения. Опять будем сравнивать с обобщённым гармоническим рядом $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ при подходящем α. В числителе максимальная степень n равна $\frac{1}{3}$, в знаменателе — 1 . Поэтому возьмём $\alpha = \frac{2}{3}$. Ряд $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ расходится. Вычислим предел:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\left(n^{1/3}+n^{1/5}\right)\cdot n^{2/3}}{2n+1} = \lim \frac{n+n^{13/15}}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Так как $0 < \frac{1}{2} < \infty$, то исследуемый ряд тоже расходится.

3. Исследовать сходимость ряда

$$|\cos 2| + \frac{|\cos 4|}{2\sqrt{2}} + \frac{|\cos 8|}{3\sqrt{3}} + \ldots .$$

Решение. Общий член ряда, очевидно, можно записать так: $a_n = \frac{|\cos 2^n|}{n\sqrt{n}}$. Ясно, что $a_n \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Ряд $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, так как это обобщённый гармонический ряд с параметром $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$. По признаку сравнения (теорема 5) ряд $\sum \dfrac{|\cos 2^n|}{n\sqrt{n}}$ тоже сходится.

4. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 8 \cdot 13} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18} + \ldots .$$

Решение. Запишем общий член ряда:

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (5n-2)}.$$

Применим признак Даламбера. Так как

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (5n-2)(5n+3)},$$

то $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \dfrac{2n+1}{5n+3} = \dfrac{2}{5}$. Предел меньше 1, поэтому ряд сходится.

5. Исследовать сходимость ряда $\sum \dfrac{(2n)!}{((n+1)!)^2}$.

Решение. Если в записи общего члена ряда участвует факториал, полезно использовать признак Даламбера. Так как $a_n = \dfrac{(2n)!}{((n+1)!)^2}$, $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{((n+2)!)^2}$, то

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n+2)! \cdot ((n+1)!)^2}{((n+2)!)^2 (2n)!} = \lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+2)^2} = 4.$$

Предел больше 1, по признаку Даламбера ряд расходится.

6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

Решение. Попытаемся применить признак Даламбера:

$$a_n = \frac{\ln n}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2},$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\ln(n+1) \cdot n^2}{(n+1)^2 \ln n} = \lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

Вычислим этот предел с помощью предела функции действительной переменной и правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Из определения предела следует, что тогда и $\lim \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. Итак, признак Даламбера не даёт ответа на вопрос о сходимости. Не очень просто (хотя и можно) применить здесь признаки сравнения.

Применим интегральный признак сходимости. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Она удовлетворяет всем необходимым требованиям: положительна, непрерывна при $x \geq 1$. Чтобы убедиться в том, что $f(x)$ монотонно убывает, вычислим производную:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Ясно, что $f'(x) = 0$ при $x = \sqrt{e}$. В этой точке знак производной меняется с «+» на «−». Значит, при $x \geq \sqrt{e}$ $f(x)$ монотонно убывает. По интегральному признаку сходимости (теорема 9), ряд $\sum \dfrac{\ln n}{n^2}$ и интеграл $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ или оба сходятся, или оба расходятся. Вычислим интеграл, применяя интегрирование по частям:

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = \dfrac{1}{x^2}\,dx, & v = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x}\Big|_2^\infty + \int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_2^\infty = 0 + \frac{\ln 2}{2} - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1 + \ln 2}{2}.$$

Интеграл сходится; значит, сходится и ряд.

7. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \ldots .$$

Решение. Запишем ряд в более удобной форме: $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$.

Ряд знакочередующийся, но теорему Лейбница применить нельзя: $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$, т. е. не выполнено условие $\lim a_n = 0$. Так как это условие является необходимым для сходимости (теорема 3), то ряд расходится.

8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^n}$.

Решение. Рассмотрим «ряд из модулей»: $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^n}$. Здесь все слагаемые положительны. Удобнее всего применить признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Так как предел строго меньше 1, то ряд сходится. Следовательно, ряд $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^n}$ сходится абсолютно.

9. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Решение. «Ряд из модулей» $\sum \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ расходится по признаку сравнения с рядом $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (при $n \geq 3$). Применим теорему Лейбница. Необходимое условие сходимости выполнено. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Здесь мы с помощью правила Лопиталя вычислили предел функции непрерывного аргумента $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Из определения предела следует, что тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$.

Для применения теоремы Лейбница необходимо ещё убедиться в том, что последовательность $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ монотонно убывает. Вместо того чтобы доказывать справедливость неравенства $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$, опять рассмотрим функцию непрерывного аргумента $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Вычислим производную:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Ясно, что при $x > e^2$ производная $f'(x) < 0$, т. е. функция убывает. Значит, при $n \geq 9$ последовательность $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ является убывающей. По теореме Лейбница, знакочередующийся ряд $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ сходится.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

Решение. Ряд сходится — это легко установить, сравнив его (используя предельный признак) с рядом $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Представим каждое слагаемое в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right).$$

Используя это, вычислим частичную сумму S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}\right).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, найдём сумму ряда:

$$S = \lim S_n = \lim \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}\right) = \frac{1}{12}.$$

11. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$, используя сходимость соответствующего числового ряда.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum \dfrac{n!}{n^n}$. Исследуем его с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

По признаку Даламбера, ряд сходится. Значит, для него выполнено необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

13.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти общий член ряда, записать ряд с помощью символа $\sum$.

а) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{5}{8} + \dfrac{6}{11} + \ldots$; б) $\dfrac{7}{9} + \dfrac{8}{25} + \dfrac{9}{49} + \dfrac{10}{81} + \ldots$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 3} - \dfrac{1}{5\cdot 5} + \dfrac{1}{9\cdot 7} - \dfrac{1}{13\cdot 9} + \ldots$; г) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{8}{4} + \dfrac{27}{8} + \dfrac{64}{16} + \ldots$;

д) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$; е) $-\dfrac{1}{50} + \dfrac{2\sqrt{2}}{250} - \dfrac{3\sqrt{3}}{1250} + \ldots$.

2. Исследовать сходимость рядов с помощью признаков сравнения.

а) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$; б) $\sum \frac{n+3}{n^4+1}$;

в) $\sum \frac{n+1}{n^2 \cdot 3^n}$; г) $\sum \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$;

д) $\sum \frac{n}{2n+3}$; е) $\sum \frac{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{n^2+5}$;

ж) $\sum \frac{1+\sin^2 n}{\sqrt[3]{n}}$; з) $\sum \frac{\sqrt{n^5+7}}{n^3+n^2+n+1}$.

3. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера или признака Коши.

а) $\sum \frac{100n^2}{3^n}$; б) $\sum \frac{n!}{10^n}$;

в) $\sum \left(\frac{n+1}{2n^2+3}\right)^n$; г) $\sum \frac{n!\cdot(2n)!}{(3n)!}$;

д) $\sum \frac{(n+2)!}{2^n \cdot n!}$; е) $\sum \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{5^n}$;

ж) $\sum \frac{n^n}{n!}$; з) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot(3n-1)}$.

4. Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака.

а) $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$; б) $\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

в) $\sum \frac{1}{n\cdot \ln n\cdot \ln(\ln n)}$; г) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}}$.

5. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum \sin\frac{1}{n}$; б) $\sum \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot \ldots \cdot(2n+3)}{3\cdot 8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots \cdot(5n-2)}$;

в) $\sum n^3\cdot(0,3)^n$; г) $\sum \frac{\sqrt{n}}{(n+3)(n+5)}$;

д) $\sum \frac{4^n\cdot(n+1)!}{(2n)!}$; е) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

6. Исследовать сходимость рядов, приведённых в упражнении 1 этого раздела.

7. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum (-1)^n \dfrac{n+2}{n\sqrt{n}}$;

в) $\sum \dfrac{(1-n)^n}{n^{2n}}$; г) $\sum (-1)^n \dfrac{3n+10}{10n+3}$;

д) $\sum \dfrac{(-1)^{n+1} n!}{5^n}$; е) $\sum \dfrac{\sin(2^n)}{n^2}$;

ж) $\sum (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \dfrac{n^{10}}{3^n}$; з) $\sum (-1)^n \left(\sqrt[n]{e}-1\right)$.

8. Найти сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+5)(n+6)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n-1}{10^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$.

9. Найти приближённо сумму ряда с точностью до $0,01$:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{2^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

10. Рассматривая соответствующие числовые ряды, доказать:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{100}}{2^n} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100^n}{n!} = 0$.

13.7. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n$ предел частичных сумм 1) конечен; 2) бесконечен; 3) не существует. Указать номер правильного ответа.

2. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

3. Найти сумму ряда $3 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{8} + \ldots$.

4. Ряд $\sum (-1)^n \dfrac{n^2+n}{n^3+1}$ 1) сходится абсолютно; 2) сходится условно, 3) расходится. Указать номер правильного ответа.

5. Сколько первых слагаемых нужно сложить, чтобы получить приближённо сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{(2n)!}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}0001$?

6. Сколько рядов из перечисленных ниже являются сходящимися?

$$\sum \frac{n}{n+1}, \quad \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad \sum \frac{\sqrt[3]{n}}{n^3+1}, \quad \sum \frac{\sqrt[4]{n}}{n^4+1}.$$

ГЛАВА 14

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

До сих пор мы рассматривали только числовые последовательности и числовые ряды. Теперь будем изучать последовательности, элементы которых — функции, а также ряды, слагаемые которых являются функциями.

14.1. Поточечная и равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x), f_3(x),\ \dots\ ,$$

определённых на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$. Возьмём какое-либо $a \in E$. Подставляя a вместо x, получим числовую последовательность $\{f_n(a)\}$. Она может сходиться, а может и расходиться. Множество чисел a, при подстановке которых получается сходящаяся числовая последовательность, называется ***областью сходимости*** последовательности $\{f_n(x)\}$. Будем обозначать это множество буквой D:

$$D = \{\ a \ \mid \ \{f_n(a)\} - \text{сходящаяся последовательность}\}.$$

Для каждого $a \in D$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$, который мы обозначим $f(a)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

Мы употребили функциональную запись $f(a)$ при обозначении числа для того, чтобы подчеркнуть: этот предел зависит от a, т. е. это функция от a. Можно использовать более привычное обозначение переменной:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

не забывая, что $f(x)$ определена только на множестве D. Используется также запись без значка lim : $f_n(x) \underset{D}{\to} f(x)$. Такая сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ называется ***поточечной***. Дадим определение поточечной сходимости на языке «$\varepsilon - \delta$»:

$$f_n(x) \underset{D}{\to} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Теперь дадим определение ***равномерной*** сходимости, которую будем обозначать так: $f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ (читается: «последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на множестве D к функции $f(x)$»). По определению

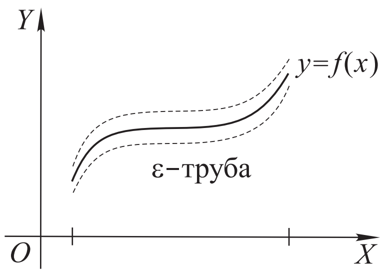
$$f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \;\; \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

На первый взгляд разница в определениях небольшая, однако она существенна. В первом определении требуется, чтобы для каждого $x \in D$ существовал номер n_0 с определённым свойством. Для разных x такие номера, возможно, будут разными. Во втором определении — более сильное требование: один и тот же номер n_0 должен годиться для любого $x \in D$. Таким образом, ясно, что из равномерной сходимости вытекает поточечная:

$$f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x) \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \underset{D}{\to} f(x).$$

Обратное — неверно, см. пример 1 ниже.

Дадим геометрическую иллюстрацию к понятию равномерной сходимости. Требование, содержащееся в определении:



$$\forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

означает, что, начиная с некоторого номера, графики функций $f_n(x)$ мало отличаются от графика $f(x)$ на всём множестве D, лежат в «ε–трубе» графика функции $f(x)$. Итак,

$$f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \;\; \text{графики } f_n(x) \text{ лежат в «}\varepsilon\text{–трубе» графика } f(x).$$

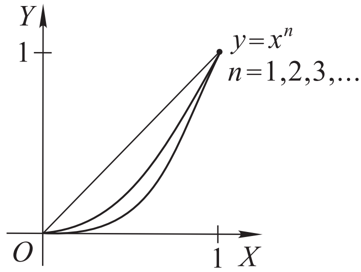
Пример 1. Рассмотрим последовательность функций

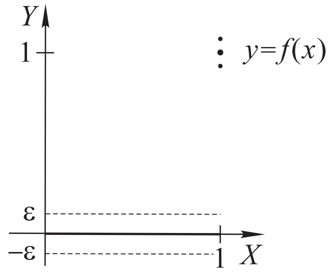
$$f_1(x) = x,\; f_2(x) = x^2,\; f_3(x) = x^3,\; \ldots,\; f_n(x) = x^n,\; \ldots .$$

Будем считать $x \in D = [0, 1]$. В каждой точке этого множества последовательность сходится:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x = 1. \end{cases}$$

Однако эта сходимость не является равномерной. Попробуем понять это, рассматривая графики функций.





Конечно, при любом $x \in [0,1]$ $x^n \to f(x)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n_0, $|x^n - f(x)| < \varepsilon$. Однако чем ближе x к 1 (но $x \neq 1$), тем больший номер n_0 приходится (для того же ε) выбирать. И нельзя взять такое n_0, которое годится для всех x. Более того, в этом примере в «ε–трубу» не попадает ни одна из функций x^n.

Если рассматривать ту же последовательность $\{x^n\}$ на множестве $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, то сходимость будет равномерной. Действительно, в этом случае предельная функция $f(x) \equiv 0$. Так как $x^n \le \frac{1}{2^n}$ для любого x из $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, то достаточно взять n_0 так, чтобы $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ (т. е. $n_0 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$). Тогда $\forall n \ge n_0$ неравенство $x^n < \varepsilon$ будет выполнено для всех x из $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Значит, $x^n \rightrightarrows 0$.

Теперь перейдём от последовательностей функций к рядам.

Функциональным рядом называется сумма вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Областью сходимости ряда называется множество D чисел, при подстановке которых вместо x получается сходящийся числовой ряд.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Зафиксируем x и рассмотрим числовой ряд $\sum \left|\frac{x^n}{n}\right|$. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{nx}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|\,.$$

По признаку Даламбера, если $|x| < 1$, то ряд сходится. Тогда сходится и ряд без модулей. Если $|x| > 1$, то ряд расходится. Причём ряд без модулей $\sum \frac{x^n}{n}$ тоже расходится — нарушено необходимое условие сходимости.

Остаётся проверить две точки: $x = 1$, $x = -1$. При $x = 1$ получаем $\sum \frac{1}{n}$ — гармонический ряд, он расходится. При $x = -1$ получаем $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ — ряд, сходящийся по теореме Лейбница. Итак, областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ является множество $D = [-1, 1)$.

Обозначим $S_n(x)$ — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$:

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).$$

Если $x \in D$, то существует $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$. Функция $S(x)$, определённая на области сходимости D, называется ***суммой*** ряда. Используется запись:

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Сходимость ряда к своей сумме может носить разный характер.

Ряд $\sum f_n(x)$ сходится на D к функции $S(x)$ ***поточечно***, если $S_n(x) \to S(x)$ поточечно.

Ряд $\sum f_n(x)$ сходится на D к функции $S(x)$ ***равномерно***, если $S_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} S(x)$. Оказывается, именно равномерно сходящиеся ряды обладают многими хорошими свойствами.

Замечание. Данные определения позволяют свойства рядов выводить из свойств последовательностей. Обратно, для каждой последовательности $\{g_n(x)\}$ можно рассмотреть ряд

$$g_1(x) + (g_2(x) - g_1(x)) + (g_3(x) - g_2(x)) + \ldots,$$

для которого $g_n(x)$ являются частичными суммами. Таким образом, многие свойства последовательностей можно сформулировать и на языке рядов, и наоборот. Мы будем пользоваться этим, выбирая наиболее удобный язык.

Теорема 1 (*критерий Коши равномерной сходимости*).

$$f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \;\; \forall m \geq 0 \;\; \forall x \in D \;\; |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. «$\Rightarrow$». По определению равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 : \; \forall n \geq n_0 \;\; \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно, что тем более $\forall m \geq 0\ \ \forall x \in D\ \ |f_{n+m}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Значит,

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |f_{n+m}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq$$
$$\leq |f_{n+m}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

«$\Leftarrow$». Возьмём $x_0 \in D$. Тогда $\{f_n(x_0)\}$ — числовая последовательность. По условию, она фундаментальна. По критерию Коши для числовых последовательностей, она сходится, т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$. Меняя x, получим функцию $f(x)$.

Докажем, что $f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x)$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Пусть n_0 — такой номер, что $\forall n \geq n_0\ \ \forall m \geq 0\ \ \forall x \in D\ \ |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Будем увеличивать m, не меняя n и x. Неравенство будет оставаться справедливым. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим:

$$\forall n \geq n_0\ \ \forall x \in D\ \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

что и означает равномерную сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$.

Теорема 1$'$ (*теорема 1 на языке рядов*).

$$\sum f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} S(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 :\ \ \forall n \geq n_0\ \ \forall m \geq 0\ \ \forall x \in D\ \ \left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство не требуется. Это теорема 1, сформулированная в других терминах.

На практике для доказательства равномерной сходимости чаще всего используется достаточный признак Вейерштрасса. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ***мажорируемым*** на множестве D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum a_n$ такой, что

$$|f_n(x)| \leq a_n\ \ (\forall n,\ \forall x \in D).$$

Теорема 2 (*признак Вейерштрасса*). Мажорируемый ряд сходится равномерно.

Доказательство. Пусть ряд $\sum f_k(x)$ мажорируется числовым рядом $\sum a_k$. Так как $\sum a_k$ сходится, то, по критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 :\ \ \forall n \geq n_0\ \ \forall m \geq 0\ \ \sum_{k=n}^{n+m} a_k < \varepsilon.$$

Для таких n, m и для любого $x \in D$ имеем:

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+m} a_k < \varepsilon.$$

Поэтому для ряда $\sum f_k(x)$ выполнено условие теоремы $1'$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \ \forall n \geq n_0 \ \ \forall m \geq 0 \ \ \forall x \in D \ \ \left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, ряд сходится равномерно.

Пример 3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{x^2+n^2}$ равномерно сходится на всей числовой прямой.

Решение. Подберём для данного ряда мажорирующий числовой сходящийся ряд. Ясно, что $\forall x$

$$\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Так как ряд $\sum \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum \dfrac{\sin nx}{x^2+n^2}$ сходится равномерно.

14.2. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 3. Пусть $f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x)$. Если все функции $f_n(x)$ непрерывны на D, то и $f(x)$ — непрерывная функция.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$. Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. По условию

$$\exists n_0 : \ \ \forall n \geq n_0 \ \ \forall x \in D \ \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зафиксируем какое-либо $n \geq n_0$. Так как $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\exists \delta : \ \ |x - x_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмём δ с таким свойством. Тогда при $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \ \ \Rightarrow\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, что и означает непрерывность $f(x)$ в точке x_0.

Замечание. В примере 1 была рассмотрена последовательность непрерывных функций $\{x^n\}$, предел которой — разрывная функция. Из теоремы 3 следует (мы ещё раз убеждаемся в этом), что последовательность $\{x^n\}$ на отрезке $[0, 1]$ сходится неравномерно.

Ясно, что теорему 3 можно сформулировать и на языке рядов.

Теорема 3′ (*о непрерывности суммы ряда*). Если $\sum f_n(x)$ сходится равномерно на множестве D и все функции $f_n(x)$ непрерывны на D, то сумма ряда $S(x)$ — тоже непрерывная функция.

Перейдём теперь к вопросу о почленном дифференцировании и интегрировании функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 4 (*о переходе к пределу под знаком интеграла*). Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $D = [a, b]$, причём $f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда

$$F_n(t) = \int\limits_a^t f_n(x)\,dx \underset{D}{\rightrightarrows} F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx.$$

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b \Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]\,dx.$$

Доказательство. Утверждение «в частности» легко следует из основного. Действительно, равномерная сходимость $F_n(t) \underset{D}{\rightrightarrows} F(t)$ предполагает и поточечную. Возьмём $t = b$ и получим то, что требуется:

$$\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]\,dx.$$

Докажем основное утверждение. По теореме 3, функция $f(x)$ непрерывна, поэтому $\int\limits_a^t f(x)\,dx$ существует для любого t. Условие $f_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ позволяет заключить, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0\ \ \forall x \in [a, b]\ \ \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Используя это, а также свойства определённого интеграла, оценим разность (при $n \geq n_0$):

$$\left|\int\limits_a^t f_n(x)\,dx - \int\limits_a^t f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^t (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_a^t |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int\limits_a^t \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot x\,\Big|_a^t = \frac{\varepsilon(t-a)}{b-a} \le \varepsilon.$$

Так как номер n_0, начиная с которого справедлива эта оценка, выбран независимо от t, то доказана равномерная сходимость последовательности $\int\limits_a^t f_n(x)\,dx$ к функции $\int\limits_a^t f(x)\,dx$.

Пример 4. Рассмотрим последовательность непрерывных функций

$$f_n(x) = nx\cdot e^{-nx^2}.$$

Ясно, что для каждого фиксированного x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}} = 0,$$

т. е. последовательность $f_n(x)$ поточечно сходится к нулевой функции. Рассмотрим последовательность интегралов (например, на отрезке $[0,1]$):

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \int\limits_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-nx^2}\,d(-nx^2) = -\frac{1}{2}\,e^{-nx^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-n} + \frac{1}{2}.$$

Теперь ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n}\right) = \frac{1}{2} \ne \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int\limits_0^1 0\,dx = 0.$$

Заключение теоремы 4 не выполнено. Значит, сходимость $f_n(x) \to 0$ не является равномерной (на отрезке $[0,1]$).

Мы будем чаще применять доказанную теорему 4 для функциональных рядов. Приведём соответствующую формулировку.

Теорема 4′ (*о почленном интегрировании ряда*). Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, причём ряд $\sum f_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$ к сумме $S(x)$. Тогда ряд $\sum \int\limits_a^t f_n(x)\,dx$ равномерно сходится на $[a,b]$ к сумме $\int\limits_a^t S(x)\,dx$. В частности,

$$\int\limits_a^b \Big(\sum f_n(x)\Big)\, dx = \sum \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, его слагаемые — непрерывные функции. Областью сходимости этого ряда является интервал $(-1,1)$. Действительно, для каждого $x \in (-1,1)$ ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Как известно,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

На концах интервала $(-1,1)$, а также вне него ряд расходится — нарушено необходимое условие сходимости.

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ на интервале $(-1,1)$ не является равномерной. Действительно, частичная сумма $S_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ отличается от суммы всего ряда $S(x)$ на величину

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x}\right| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right|.$$

Номер n_0, начиная с которого эта величина становится меньше заданного ε, зависит от x. Чем ближе x к 1, тем больше приходится брать n_0. Сходимость неравномерная.

Теперь рассмотрим отрезок $[-q,q]$, где $0 < q < 1$. На таком отрезке ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ является мажорируемым:

$$|x^n| \le q^n.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. Поэтому, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится равномерно. По теореме $4'$, его можно почленно интегрировать. Интегрируя по отрезку $[0, t]$, где $0 < t \le q$, получим:

$$\int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n\,dx,$$

$$-\ln(1-x)\,\Big|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^t,$$

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}.$$

Таким образом, мы нашли сумму ряда, рассмотренного выше в примере 2.

Изучим вопрос о почленном дифференцировании.

Теорема 5. Пусть функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, причём выполнены условия:

1) $\exists\, x_0 \in [a, b]$: последовательность $f_n(x_0)$ сходится;

2) последовательность $f_n'(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $u(x)$.

Тогда последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $f(x)$, причём $f'(x) = u(x)$.

Другими словами, при определённых условиях производная от предельной функции равна пределу производных.

Доказательство. Для последовательности производных $f_n'(x)$ выполнены все условия теоремы 4. Значит, $\int\limits_{x_0}^{t} f_n'(x)\,dx \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^{t} u(x)\,dx$. Вычисляя интеграл в левой части: $\int\limits_{x_0}^{t} f_n'(x)\,dx = f_n(x)\,\Big|_{x_0}^{t} = f_n(t) - f_n(x_0)$, получим: $f_n(t) - f_n(x_0) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^{t} u(x)\,dx$. По определению, это значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_1 : \;\; \forall n \ge n_1 \;\; \forall t \in [a, b] \quad \left| f_n(t) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{t} u(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, по условию последовательность $f_n(x_0)$ имеет предел. Обозначим его буквой c. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_2 : \;\; \forall n \ge n_2 \;\; |f_n(x_0) - c| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = c + \int_{x_0}^{t} u(x)\,dx$$

и докажем, что она искомая, т. е. $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ и $f'(t) = u(t)$. Второе — очевидно; по теореме Барроу о производной интеграла с переменным верхним пределом:

$$f'(t) = \left(c + \int\limits_{x_0}^{t} u(x)\,dx\right)' = u(t).$$

Чтобы доказать равномерную сходимость $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$, для данного $\varepsilon > 0$ рассмотрим $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда, при $n \geq n_0$ справедливы полученные выше неравенства, а значит

$$|f_n(t) - f(t)| = \left|f_n(t) - c - \int\limits_{x_0}^{t} u(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|f_n(t) - f_n(x_0) - \int\limits_{x_0}^{t} u(x)\,dx + f_n(x_0) - c\right| \leq$$

$$\leq \left|f_n(t) - f_n(x_0) - \int\limits_{x_0}^{t} u(x)\,dx\right| + |f_n(x_0) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как номер n_0 выбирается независимо от t, то равномерная сходимость доказана.

Теорема 5$'$ (*о почленном дифференцировании ряда*). Пусть функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, причём

1) $\exists\, x_0 \in [a, b]$: числовой ряд $\sum f_n(x_0)$ сходится;

2) ряд $\sum f_n'(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$.

Тогда $\sum f_n(x)$ тоже равномерно сходится, причём $\left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x)$.

14.3. Степенные ряды

Здесь мы применим полученные знания о функциональных рядах к важному частному случаю — случаю степенных рядов. ***Степенным*** рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots .$$

Числа c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются коэффициентами ряда. Наиболее простой вид имеет степенной ряд, если $a = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots .$$

В дальнейшем можно работать только с такими рядами, так как общий случай сводится к случаю $a = 0$ с помощью простой замены переменной: $x - a = t$.

Теорема 6 (*теорема Абеля*). Если ряд $\sum c_n x^n$ сходится при $x = x_0$, то он сходится (причём абсолютно) и при любом $x_1 : |x_1| < |x_0|$.

Доказательство. По условию, числовой ряд $\sum c_n x_0^n$ сходится. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0$ (необходимое условие сходимости). Так как любая сходящаяся числовая последовательность ограничена, то

$$\exists M : \ |c_n x_0^n| \le M \ \ (\forall n).$$

Пусть теперь $|x_1| < |x_0|$. Преобразуем слагаемые ряда $\sum c_n x_1^n$:

$$|c_n x_1^n| = \left| c_n x_0^n \cdot \frac{x_1^n}{x_0^n} \right| = |c_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x_1}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x_1}{x_0} \right|^n.$$

Но ряд $\sum M \left| \frac{x_1}{x_0} \right|^n$ сходится — это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. По признаку сравнения, сходится и ряд $\sum c_n x_1^n$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если ряд $\sum c_n x^n$ расходится при $x = x_0$, то он расходится и при любом $x_1 : |x_1| > |x_0|$.

Доказательство сразу вытекает из теоремы Абеля: ряд $\sum c_n x_1^n$ сходиться не может, так как тогда сходился бы и ряд $\sum c_n x_0^n$.

Следствие 2. Областью сходимости ряда $\sum c_n x^n$ является интервал $(-R, R)$, к которому, возможно, присоединены одна или обе концевые точки $x = \pm R$. В частности, областью сходимости такого ряда может быть одна точка $\{0\}$ (в этом случае ***радиус сходимости*** $R = 0$) или вся прямая $(-\infty, \infty)$ (в этом случае $R = \infty$).

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\{ \ |x| \ | \ \text{ряд} \sum c_n x^n \text{ сходится } \}.$$

Если это множество не ограничено сверху, то ряд сходится в любой точке. Действительно, если предположить, что он расходится в некоторой точке x_0, то следствие 1 даёт противоречие с неограниченностью указанного множества.

Пусть теперь это множество ограничено сверху. Тогда, как известно, у него существует точная верхняя грань. Обозначим

$$R = \sup\{ \, |x| \, | \ \text{ряд} \sum c_n x^n \text{ сходится } \}.$$

Допустим, $|x| < R$. Тогда, по определению супремума, найдётся точка x_0, в которой ряд сходится, причём $|x| < |x_0|$. По теореме Абеля, тогда и в точке x ряд сходится.

Допустим, $|x| > R$. Тогда ряд в точке x, очевидно, расходится.

Итак, доказано: внутри ***интервала сходимости*** $(-R, R)$ ряд сходится, вне отрезка $[-R, R]$ — расходится. Рассматривая примеры, мы убедимся, что концевые точки могут принадлежать области сходимости, а могут и не входить в неё. Напомним, в примере 2 найдена область сходимости ряда $\sum \frac{x^n}{n}$ — это множество $[-1, 1)$. В примере 5 рассмотрен ряд $\sum x^n$, его область сходимости — интервал $(-1, 1)$.

Замечание. Мы рассматриваем степенные ряды в области действительных чисел. Однако наши рассуждения остаются справедливыми и если коэффициенты c_n — комплексные числа, а неизвестная x может принимать комплексные значения. Теорема Абеля и следствие 1 переносятся на этот случай без изменений, вместе с доказательствами. В следствии 2 вместо интервала сходимости $(-R, R)$ следует рассматривать ***круг сходимости***: $\{x \mid \ |x| < R\}$. Доказательство не изменяется. Внутри круга сходимости ряд сходится абсолютно, снаружи — расходится. В граничных точках может быть разная ситуация.

В более общем случае ряда $\sum c_n(x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. Если ряд рассматривается в поле комплексных чисел, то получаем круг $\{x \mid |x - x_0| < R\}$ радиуса R с центром в точке x_0.

Пример 6. Найти интервал сходимости ряда $\sum \frac{(x+5)^n}{2^n\sqrt{n}}$, исследовать сходимость на концах интервала.

Решение. Применим признак Даламбера. Так как он справедлив лишь для рядов с положительными слагаемыми, то мы будем исследовать ряд $\sum \frac{|x+5|^n}{2^n\sqrt{n}}$. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+5|^{n+1}\cdot 2^n\cdot\sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}\cdot|x+5|^n} = \frac{|x+5|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{|x+5|}{2}.$$

По признаку Даламбера, ряд сходится, если $\frac{|x+5|}{2} < 1$. Решая неравенство, найдём интервал сходимости:

$$|x+5| < 2 \quad\Leftrightarrow\quad -2 < x+5 < 2 \quad\Leftrightarrow\quad -7 < x < -3.$$

Вне отрезка $[-7, -3]$ предел $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x+5|}{2} > 1$, поэтому ряд расходится.

Рассмотрим концы интервала. Пусть $x = -7$. Подставляем это значение в исходный ряд: $\sum \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. По теореме Лейбница, этот ряд сходится.

Пусть $x = -3$. Тогда получаем ряд $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, который расходится. Следовательно, область сходимости данного ряда — множество $[-7, -3)$.

Обобщая метод решения примера 6, выведем формулу для интервала сходимости степенного ряда.

Теорема 7. Рассмотрим степенной ряд $\sum c_n(x-x_0)^n$. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \rho$. Тогда радиус сходимости $R = \dfrac{1}{\rho}$, причём если $\rho = 0$, то $R = \infty$, а если $\rho = \infty$, то $R = 0$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum |c_n(x-x_0)^n|$. В фиксированной точке x это числовой ряд с положительными слагаемыми. Применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |x-x_0|\cdot\rho.$$

По признаку Даламбера, если $|x-x_0|\cdot\rho < 1$, т. е. $|x-x_0| < \dfrac{1}{\rho}$, то ряд сходится. Если $|x-x_0|\cdot\rho > 1$, т. е. $|x-x_0| > \dfrac{1}{\rho}$, то ряд расходится. Таким образом, величина $\dfrac{1}{\rho}$, по определению, является радиусом сходимости данного ряда. Легко разбираются и крайние случаи. Если $\rho = 0$, то, по признаку Даламбера, ряд сходится при любом x. Значит, $R = \infty$. Если же $\rho = \infty$, то предел $|x-x_0|\cdot\rho$ равен 0 при $x = x_0$ и равен ∞ при $x \neq x_0$. Значит, ряд сходится только при $x = x_0$, т. е. $R = 0$.

Если вместо признака Даламбера использовать признак Коши, то получается аналогичная формула: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

В некоторых случаях пределы, вычисляемые при применении признаков Даламбера и Коши, могут не существовать. Однако всегда справедлива ***формула Коши – Адамара***, которую мы приведём без доказательства:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}\,.$$

Напомним: символ $\overline{\lim} a_n$ означает ***верхний*** предел последовательности (т. е. наибольший среди пределов подпоследовательностей), а он всегда существует.

Несмотря на то, что имеется несколько формул для вычисления радиуса сходимости, мы советуем читателю при решении задач пользоваться непосредственно признаком Даламбера (или Коши) — так, как это сделано при решении примера 6.

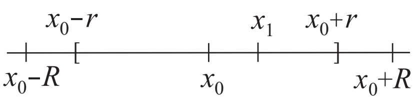
Установим теперь равномерную сходимость степенных рядов, чтобы применить к ним выводы предыдущего раздела.

Теорема 8. Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum c_n(x-x_0)^n$. Возьмём число $r : 0 < r < R$. Тогда на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. Пусть $x \in [x_0-r, x_0+r]$. Тогда $|x-x_0| \le r$. Значит, $|c_n(x-x_0)^n| \le |c_n|r^n$. Но $\sum |c_n|\, r^n$ — сходящийся числовой ряд (так как он получен из исходного ряда подстановкой $x = x_0 + r$, а внутри области сходимости ряд сходится абсолютно). Поэтому $\sum |c_n|\, r^n$ является мажорирующим для исходного ряда на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$. Значит, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum c_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно.

Следствие 1. Сумма степенного ряда есть непрерывная функция в любой точке внутри интервала сходимости.

Доказательство. Возьмём произвольную точку x_1 внутри интервала сходимости ряда $\sum c_n(x-x_0)^n$. Тогда существует r:



$$x_1 \in [x_0-r, x_0+r], \quad 0 < r < R.$$

На отрезке $[x_0-r, x_0+r]$ ряд сходится равномерно. По теореме $3'$, сумма ряда — непрерывная функция на этом отрезке. В частности, непрерывна в точке x_1. Следствие доказано.

Замечание. Пример геометрической прогрессии показывает, что на границе интервала сходимости сумма ряда может иметь разрыв:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Следствие 2. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему внутри интервала сходимости. Другими словами, если $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, R — радиус сходимости, числа a, b таковы, что $x_0 - R < a \le b < x_0 + R$, то

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b (x-x_0)^n\,dx.$$

Доказательство. При указанных условиях существует число r: $0 < r < R$, такое, что $[a,b] \subseteq [x_0-r, x_0+r]$. По теореме 8, на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$ ряд сходится равномерно. Значит, по теореме $4'$, его можно почленно интегрировать.

Замечание. Если интегрировать в постоянных пределах, то получается, конечно, числовой ряд. Можно интегрировать по отрезку $[x_0, x]$, где x — переменная, принимающая значения в интервале сходимости. Тогда получится снова степенной ряд:

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_{x_0}^{x} (x-x_0)^n\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\,\Bigg|_{x_0}^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

Радиус сходимости полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда. Действительно, предел, вычисленный при применении признака Даламбера, у нового ряда такой же, как и у исходного:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}\cdot(x-x_0)^{n+2}\cdot(n+1)}{(n+2)\,c_n(x-x_0)^{n+1}}\right| =$$

$$|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = |x-x_0|\lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.$$

Пример 7. Применим почленное интегрирование к известному нам ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Интегрируя по отрезку $[0,x]$, где $0<x<1$, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int\limits_0^x \frac{1}{1-x}\,dx = -\int\limits_0^x \frac{1}{1-x}\,d(1-x) = -\ln(1-x)\,\Bigg|_0^x = -\ln(1-x).$$

То же самое верно и если $-1<x<0$. Итак, на интервале $(-1,1)$ функция $-\ln(1-x)$ является суммой ряда:

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots,$$

или, как говорят, ***разлагается*** в этот ряд.

Следствие 3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке внутри интервала сходимости. Другими словами, если $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, то $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1}$. При этом радиус сходимости не изменится.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости исходного ряда. Тогда радиус сходимости ряда из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1}$ тоже равен R — это ясно, ведь исходный ряд можно получить из него интегрированием.

Любую внутреннюю точку интервала сходимости можно включить в отрезок $[x_0-r, x_0+r]$, где $0<r<R$. На таком отрезке ряд из производных сходится равномерно. Значит, по теореме $5'$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1} = S'(x)$.

Следствие 4. Сумма степенного ряда — бесконечно дифференцируемая функция в любой точке внутри интервала сходимости.

Доказательство очевидно: если $S(x)$ — сумма степенного ряда, то $S'(x)$ — тоже сумма степенного ряда, а значит — дифференцируемая функция. С помощью индукции получаем, что у функции $S(x)$ существуют производные всех порядков.

14.4. Разложение функций в ряд Тейлора

Напомним: при условии существования производных достаточно высоких порядков у функции $f(x)$ справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x).$$

Первые $n+1$ слагаемые в правой части составляют многочлен степени n. Для остаточного члена $r_n(x)$ в разделе 5.3 были получены 2 формы записи. Во-первых, $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. Кроме того, можно записывать $r_n(x)$ в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где c — некоторое число между x_0 и x.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные всех порядков. Тогда можно рассмотреть степенной ряд:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Он называется ***рядом Тейлора*** для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. В частном случае, при $x_0 = 0$, ряд Тейлора имеет наиболее простой вид и называется рядом Маклорена:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Возникает вопрос: является ли функция $f(x)$ суммой своего ряда Тейлора? Оказывается, есть примеры функций, для которых ряд Тейлора вообще не сходится ни в одной точке (кроме x_0). Кроме того, ряд Тейлора может сходиться, но к другой сумме.

Пример 8. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ При $x \neq 0$ она, конечно, дифференцируема и имеет производные всех порядков. Найдём $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\Delta x}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} =$$

$$= \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim \frac{-\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \dfrac{-2}{(\Delta x)^3}} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = 0.$$

Можно доказать, что $f^{(n)}(0) = 0$ для любого n. Значит, ряд Тейлора для $f(x)$ имеет нулевые коэффициенты: $0+0x+0x^2+\ldots$, т. е. сходится в любой точке. Но его сумма, очевидно, равна 0 и не совпадает с функцией $f(x)$ нигде, кроме точки $x = 0$.

Итак, мы должны найти дополнительные условия, при которых бесконечно дифференцируемая функция совпадает с суммой своего ряда Тейлора (т. е. ***разлагается в ряд Тейлора***). Одно из них — очевидно.

Теорема 9. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора на интервале D тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ $(\forall x \in D)$. Здесь $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора.

Доказательство. Пусть $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Тейлора. Тогда $r_n(x) = f(x) - S_n(x)$ и мы получаем:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \;\Leftrightarrow\; f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (f(x) - S_n(x)) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Более полезным является следующее достаточное условие.

Теорема 10. Пусть производные всех порядков функции $f(x)$ на интервале $D = (x_0 - R, x_0 + R)$ ***ограничены в совокупности***, т. е.

$$\exists\, M : |f^{(n)}(x)| \le M \;\; (\forall n,\ \forall x \in D).$$

Тогда на D функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора.

Доказательство. Запишем остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа и применим условие теоремы:

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \le \left| \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \le M \cdot \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$ — проще всего убедиться в этом, исследуя числовой ряд $\sum\dfrac{R^{n+1}}{(n+1)!}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$. По теореме 9, это равносильно разложимости $f(x)$ в ряд Тейлора.

Замечательным фактом является то, что если $f(x)$ является суммой какого-нибудь степенного ряда, то это обязательно её ряд Тейлора. В другой степенной ряд функцию разложить невозможно.

Теорема 11 (*о единственности разложения в степенной ряд*). Если $f(x)$ разложена в степенной ряд: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$, то этот ряд является рядом Тейлора для $f(x)$, т. е. $c_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Подставляя в ряд $x=x_0$, получим: $f(x_0)=c_0$. Применим почленное дифференцирование (следствие 3 из теоремы 8):

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n(x-x_0)^{n-1}\,.$$

Подставляя $x=x_0$, получим: $f'(x_0)=c_1$. Ещё раз дифференцируем:

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cdot n(n-1)(x-x_0)^{n-2}\,.$$

При $x=x_0:f''(x_0)=c_2\cdot 2!$, т. е. $c_2=\dfrac{f''(x_0)}{2!}$. Продолжая рассуждение, получим, что $c_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ для любого n.

Итак, каким бы способом мы ни разложили функцию в степенной ряд, получится всегда ряд Тейлора.

Теперь найдём разложения в степенной ряд некоторых основных элементарных функций. Удобнее всего рассматривать разложения в ряд Маклорена, т. е. в степенной ряд по степеням x.

1) $f(x)=e^x$.

Все производные этой функции одинаковы: $f^{(n)}(x)=e^x$. Рассмотрим произвольный интервал $(-R,R)$. На нём производные ограничены в совокупности:

$$|f^{(n)}(x)|=e^x\le e^R\ \ (\forall x\in(-R,R)).$$

По теореме 10, e^x раскладывается в ряд на интервале $(-R,R)$. Так как R — любое, то разложение справедливо на всей оси:

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\,.$$

2) $f(x) = \sin x$.

Вычислим производные этой функции, выражая их через синус:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\sin x)'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi);$$

$$(\sin x)''' = (\sin(x + \pi))' = \cos(x + \pi) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Ясно, что $\forall x \ \left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1$, все производные ограничены. По теореме 10, функция разлагается в ряд Маклорена. Так как

$$\sin^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ 1, & n = 4k+1, \\ -1, & n = 4k+3, \end{cases}$$

то получаем разложение, справедливое на всей числовой оси:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Замечание. Обратите внимание, как сильно могут отличаться свойства частичных сумм ряда и суммы всего ряда. Частичные суммы здесь — многочлены, функции неограниченные и непериодические. Сумма ряда — ограниченная периодическая функция.

3) $f(x) = \cos x$.

Применим к предыдущему разложению почленное дифференцирование:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Эта формула, как и разложение $\sin x$, справедлива для любого x.

4) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Разложение этой функции в степенной ряд нам уже встречалось, это сумма геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Теперь мы знаем: по теореме о единственности разложения, этот ряд является рядом Маклорена. На концах интервала ряд, очевидно, расходится.

5) $f(x) = \ln(1+x)$.

Разложить в ряд Маклорена функцию $\ln x$, конечно, нельзя — она не определена даже в самой точке $x = 0$. Поэтому рассматриваем функцию $\ln(1+x)$.

Сделаем в предыдущем разложении замену переменной. Обозначим: $t = -x$. Тогда получим:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

Разложение, очевидно, справедливо для $t \in (-1,\, 1)$. Применим почленное интегрирование по отрезку $[0, x]$, $x \in (-1,\, 1)$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\, dt.$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots .$$

Можно проверить, что это разложение справедливо не только для $x \in (-1,\, 1)$, но и при $x = 1$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

6) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

Найдём производные и их значения при $x = 0$:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\Big|_{x=0} = \alpha;$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Запишем ряд Маклорена:

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Найдём интервал сходимости этого ряда, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)\cdot x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\cdot x^n}\right| =$$
$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = |x|\,.$$

Значит, при $|x| < 1$ ряд сходится, при $|x| > 1$ — расходится. (Поведение ряда при $x = \pm 1$ зависит от значения α.)

Итак, при $x \in (-1,\,1)$ ряд Маклорена для функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ сходится. Но равна ли его сумма $(1+x)^\alpha$? Оказывается, равна. Можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ (при $x \in (-1,\,1)$). Но мы поступим по-другому. Обозначим искомую сумму через $S(x)$:

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Тогда

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\,.$$

Умножим обе части равенства на $(1+x)$:

$$(1+x)S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n =$$
$$= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right)\left(\frac{\alpha-n}{n}+1\right)x^n =$$
$$= \alpha + \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \alpha S(x).$$

Полученное равенство: $(1+x)S'(x) = \alpha S(x)$ можно записать так:

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\alpha}{1+x}, \quad \text{или} \quad [\ln S(x)]' = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Значит, можно найти $\ln S(x)$:

$$\ln S(x) = \int\frac{\alpha}{1+x}\,dx = \alpha\ln(1+x) + \mathrm{C}.$$

Так как при $x = 0$ $S(x) = 1$, т. е. $\ln S(x) = 0$, то $C = 0$. Значит, $\ln S(x) = \alpha \ln(1+x)$,

$$S(x) = e^{\alpha \ln(1+x)} = (1+x)^{\alpha}.$$

Получено так называемое ***биномиальное разложение***:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

С помощью найденных шести основных разложений можно разлагать в ряд и другие функции.

Пример 9. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить одно из основных разложений:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Разложение функции $\cos 2x$ можно получить из разложения косинуса подстановкой $2x$ вместо x:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

Поэтому

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!} = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \ldots .$$

Эта формула справедлива, как и разложение косинуса, для любого x.

Пример 10. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \ln(6 - x - x^2).$$

Решение. Заметим прежде всего, что $f(x)$ определена в окрестности точки $x = 0$ (её область определения — интервал $(-3,\ 2)$), поэтому задача имеет смысл. Проведём преобразования:

$$\ln(6 - x - x^2) = \ln[(x+3)(2-x)] = \ln(x+3) + \ln(2-x) = \\ = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) + \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

Воспользуемся основным разложением: $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$.

Переходя к другой переменной по формуле $x = \frac{t}{3}$, получим:

$$\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}.$$

Так как $x\in(-1,\,1)$, то $t\in(-3,\,3)$. Аналогично, после замены $x=-\dfrac{t}{2}$, найдём:

$$\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}=-\sum\frac{t^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}},\quad t\in(-2,\,2).$$

На интервале $(-2,\,2)$ справедливы оба разложения, поэтому при $x\in(-2,\,2)$:

$$\ln(6-x-x^2)=\ln 3+\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}=$$

$$=\ln 6+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln 6-\frac{1}{6}\,x-\frac{13}{72}\,x^2-\ldots.$$

Иногда легче разложить в степенной ряд не саму функцию, а её производную или её первообразную. Затем можно применить теоремы о почленном интегрировании или дифференцировании.

Пример 11. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

Решение. Рассмотрим $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Разложение этой функции легко получить из основного разложения $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, если перейти к новой переменной по формуле $x=-t^2$:

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots.$$

Ясно, что $x\in(-1,\,1)\ \Leftrightarrow\ t\in(-1,\,1)$, поэтому разложение справедливо на интервале $(-1,\,1)$. Проинтегрируем полученный ряд почленно на отрезке $[0,\,x]$, $x\in(-1,\,1)$:

$$\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,dt,$$

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots.$$

Разложение справедливо для $x\in(-1,1)$.

Подведём важные с практической точки зрения итоги. Для решения задачи о разложении функции в степенной ряд есть 3 метода:

1) использование известных, основных разложений (см. примеры 9, 10);

2) использование почленного дифференцирования или интегрирования (пример 11);

3) последовательное вычисление производных, т. е. использование ***определения*** ряда Тейлора. Так найдены разложения e^x, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$. Обычно это наиболее трудоёмкий путь.

Замечание. Степенные ряды дают нам ***новый способ задания функции***. Этим способом можно задавать и другие, неэлементарные функции. Мы получаем возможность работать (вычислять значения, дифференцировать, интегрировать) с такими важными функциями, как, например, ***интегральный синус***:

$$\operatorname{si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Через элементарные функции этот интеграл не выражается. Очень удобно представить интегральный синус в виде ряда. Так как

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ то}$$

$$\operatorname{si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} =$$

$$= x - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{600}x^5 - \ldots .$$

Многие применения степенных рядов основаны на том, что задание функции в виде суммы степенного ряда часто удобнее любого другого способа задания.

Мы рассмотрим на примерах 2 применения: приближённое вычисление значений функций и приближённое вычисление определённых интегралов.

Пример 12. Вычислить приближённо $\sqrt[4]{18}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Заметим: $\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{16+2} = 2\sqrt[4]{1+\dfrac{2}{16}} = 2\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{8}}$. Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}}$, разложим её в степенной ряд:

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}\,x + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\,x^2 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\,x^3 + \ldots .$$

Это биномиальное разложение справедливо, как мы знаем, при $x \in (-1,\ 1)$. Поэтому можно применить его при $x = \dfrac{1}{8}$:

$$\sqrt[4]{18} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} = 2 + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2}{2!}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \\ + \frac{2}{3!}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots.$$

Знаки слагаемых (кроме первого) чередуются. Кроме того, модули слагаемых убывают: неравенство

$$\left|\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n\right| \geq \\ \geq \left|\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)\left(\frac{1}{4}-n\right)}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right|$$

равносильно очевидному неравенству $1 \geq \left|\dfrac{\frac{1}{4}-n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{8}\right|$. По теореме Лейбница, погрешность, допускаемая при замене суммы такого ряда частичной суммой, не превышает первого отброшенного слагаемого. Поэтому четвёртое слагаемое уже можно отбросить:

$$\sqrt[4]{18} = 2 + 0{,}0625 - 0{,}0029 + 0{,}0002 - \ldots \approx 2 + 0{,}0625 - 0{,}0029 \approx 2{,}060.$$

Промежуточные вычисления выполняются с одним запасным знаком.

Пример 13. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^1 \cos(x^2)\,dx$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Разложим подинтегральную функцию в ряд Маклорена. Так как $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, то $\cos(x^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \cos(x^2)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(4n+1)(2n)!} = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216} - \frac{1}{9360} + \ldots \approx$$

$$\approx 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216} \approx 1 - 0{,}1 + 0{,}0046 \approx 0{,}905.$$

Обратите внимание: в примерах 12, 13 мы могли добиться ***любой*** требуемой точности.

14.5. Задачи с решениями

1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + 1}$.

Решение. Если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^n+1} = 1$ и ряд расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости. По этой же причине ряд расходится при $|x| = 1$.

Пусть теперь $|x| > 1$. Рассмотрим ряд $\sum \frac{1}{|x|^n}$. По признаку Коши он сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|x|^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} < 1$. Применим предельный признак сравнения к рядам $\sum \frac{1}{|x|^n}$, $\sum \frac{1}{|x^n+1|}$:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \left| \frac{x^n + 1}{x^n} \right| = \lim \left| 1 + \frac{1}{x^n} \right| = 1.$$

Так как получилось конечное ненулевое число, то ряд $\sum \frac{1}{|x^n+1|}$ сходится — потому что $\sum \frac{1}{|x|^n}$ сходится. Следовательно, при таких же x сходится и ряд $\sum \frac{1}{x^n+1}$.

Ответ: областью сходимости ряда $\sum \frac{1}{x^n+1}$ является множество

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)\,.$$

2. Найти круг сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n (z-2)^n}{n^2}$ в поле комплексных чисел.

Решение. Рассмотрим ряд с положительными действительными слагаемыми:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(3+4i)^n (z-2)^n}{n^2} \right| = \sum \frac{|3+4i|^n \, |z-2|^n}{n^2} = \sum \frac{5^n \, |z-2|^n}{n^2}.$$

Применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left|z-2\right|^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2 5^n\left|z-2\right|^n}=5\left|z-2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=5\left|z-2\right|.$$

Если $5|z-2|<1$, то ряд сходится. Это неравенство определяет круг $|z-2|<\dfrac{1}{5}$ радиуса $\dfrac{1}{5}$ с центром в точке $z=2$.

Так как из сходимости «ряда из модулей» следует сходимость самого ряда, то внутри найденного круга ряд сходится (абсолютно). Вне круга ряд расходится. На границе могут быть разные случаи. Однако для данного ряда исследование сходимости на границе провести легко: если $|z-2|=\dfrac{1}{5}$, то $|(3+4i)^n(z-2)^n|=1$ и ряд из модулей имеет вид $\sum\dfrac{1}{n^2}$, т. е. сходится. Значит, ряд сходится абсолютно на замкнутом круге $|z-2|\le\dfrac{1}{5}$.

3. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=7$. Указать интервал, на котором справедливо полученное разложение.

Решение. Чтобы воспользоваться известными нам основными разложениями, перейдём от ряда Тейлора к ряду Маклорена. Для этого рассмотрим новую переменную $t=x-7$. Тогда $f(x)=\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{3-(t+7)}=$ $=\dfrac{1}{-4-t}$. С помощью несложных преобразований и одного из основных разложений найдём разложение функции $\dfrac{1}{-4-t}$ в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{-4-t}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{t}{4}}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{t}{4}\right)}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{4^{n+1}}.$$

Теперь возвратимся к старой переменной x:

$$f(x)=\frac{1}{3-x}=\frac{1}{-4-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-7)^n}{4^{n+1}}.$$

Так как формула для суммы геометрической прогрессии, которой мы воспользовались, справедлива, если знаменатель $\left|-\dfrac{t}{4}\right|<1$, то полученное разложение справедливо при

$$\left|\frac{x-7}{4}\right|<1\;\Leftrightarrow\;|x-7|<4\;\Leftrightarrow\;7-4<x<7+4\;\Leftrightarrow\;x\in(3,\,11).$$

4. Написать 3 первых ненулевых члена разложения в ряд Маклорена функции $y = \ln(e^x + x)$.

Решение. Будем последовательно вычислять $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0), \ldots$. Нам нужно найти 3 первых ненулевых члена этой последовательности.

$$y(0) = \ln(e^0 + 0) = \ln 1 = 0\,;$$
$$y' = \frac{1}{e^x + x} \cdot (e^x + 1) \bigg|_{x=0} = 2;$$

$$y'' = \left(\frac{e^x + 1}{e^x + x}\right)' = \\ = \frac{e^x(e^x + x) - (e^x + 1)^2}{(e^x + x)^2} = \frac{e^{2x} + xe^x - e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + x)^2} \bigg|_{x=0} = -3\,;$$

$$y''' = \left(\frac{xe^x - 2e^x - 1}{(e^x + x)^2}\right)' = \\ = \frac{(e^x + xe^x - 2e^x)(e^x + x)^2 - (xe^x - 2e^x - 1) \cdot 2(e^x + x)(e^x + 1)}{(e^x + x)^4} \bigg|_{x=0} = 11\,.$$

Подставляя в общую формулу ряда Маклорена, получим:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\,x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots = \\ = \frac{2}{1!}\,x - \frac{3}{2!}\,x^2 + \frac{11}{3!}\,x^3 + \ldots = 2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11}{6}\,x^3 + \ldots.$$

5. Вычислить приближённо $\operatorname{arctg} 0{,}25$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем полученное в примере 11 разложение арктангенса в ряд Маклорена:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad x \in (-1,\, 1).$$

Подставим $x = \dfrac{1}{4}$:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \frac{1}{7 \cdot 4^7} + \ldots.$$

Полученный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Поэтому найдём слагаемое, которое меньше 0,001, и отбросим его и следующие за ним:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{192} + \frac{1}{5120} \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = \frac{47}{192} \approx 0{,}245\,.$$

14.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти область сходимости следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(x+1)^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{|x|}{x}\right)^n$;   г) $\sum n^2\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$.

2. Найти радиус и интервал сходимости, исследовать сходимость в граничных точках для следующих степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot x^n}{n^2}$;   б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+5)x^{2n}}{9^n}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$;   г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{2n+1}x^n}{n}$;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{10^{n+1}(x+1)^n}{n!}$;   е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x-7)^n}{\sqrt{2n+1}}$;   з) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x+3)^n}{2^n(10n+3)}$.

3. Найти круг сходимости (без исследования на границе) для степенных рядов в поле комплексных чисел:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$;   б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{2n}}(z-1)^n$;

в) $\sum \dfrac{(1+i)^n}{3n+1}(z+5)^n$;   г) $\sum \dfrac{(z+2)^n}{n!}$.

4. Построив мажорирующие ряды, доказать равномерную сходимость на указанных множествах следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n^2+x^2)}{n\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$;   б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2+n^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^2}$, $x \in [0,\infty)$;   г) $\sum \dfrac{x^2}{e^{nx}}$, $x \in [0,\infty)$.

5. Разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Указать интервалы, на которых справедливы полученные разложения.

а) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1;$ б) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 4;$

в) $f(x) = \sin 3x, \quad x_0 = \pi;$ г) $f(x) = e^{\frac{x}{3}}, \quad x_0 = 1;$

д) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}, \; x_0 = -1;$ е) $f(x) = \dfrac{1}{x + 5}, \quad x_0 = 2.$

6. Разложить функции в ряд Маклорена. Указать интервалы, на которых справедливы полученные разложения.

а) $f(x) = (1 + x)\ln(1 + x);$ б) $f(x) = (e^x + 3)^2;$

в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 3}{x^2 + x - 6};$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 6}{x^2 - 5x - 6};$

д) $f(x) = \operatorname{sh} x;$ е) $f(x) = \ln(15 - 2x - x^2);$

ж) $f(x) = \arcsin x;$ з) $f(x) = \dfrac{x^5}{(1 - x)^2};$

и) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt;$ к) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt.$

7. Написать 3 первых ненулевых члена разложения в ряд Маклорена следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1};$ б) $f(x) = e^x \cos x;$

в) $f(x) = \sqrt{\ln(x + e)};$ г) $f(x) = \operatorname{tg} x.$

8. Вычислить приближённо (с погрешностью, не превышающей ε) значения функций:

а) $\sin 3^\circ, \quad \varepsilon = 0{,}0001;$ б) $\ln 1{,}3\,, \quad \varepsilon = 0{,}001;$

в) $\sqrt[5]{40}, \quad \varepsilon = 0{,}001;$ г) $\cos 1, \quad \varepsilon = 0{,}001;$

д) $\sqrt{e}, \quad \varepsilon = 0{,}001;$ е) $\sqrt[10]{1280}, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

9. Вычислить приближённо (с погрешностью, не превышающей 0,001) следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; б) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$; г) $\int\limits_0^{0,5} \sin(4x^2)\,dx$.

10. Применяя почленное дифференцирование или интегрирование, найти суммы следующих рядов на интервале $(-1, 1)$:

а) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$; б) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$;

в) $2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + \ldots$; г) $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$;

д) $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots$; е) $\frac{1}{3} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{9} - \frac{x^9}{12} + \ldots$.

14.7. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^n x$. В ответе указать целое число, не лежащее в области сходимости.

2. Найти радиус сходимости ряда $\sum \frac{(n+1)\,x^n}{2^n \cdot 3^n + 1}$.

3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ на промежутке $[2,\ 3]$ 1) сходится равномерно; 2) сходится поточечно, но не равномерно; 3) сходится не во всех точках. Указать номер правильного ответа.

4. Найти коэффициент при x^4 в разложении функции $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ в ряд Маклорена.

5. Сколько членов в разложении косинуса в ряд Маклорена нужно взять, чтобы вычислить $\cos 10^\circ$ с ошибкой, не превышающей 0,0001?

6. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$ приближённо с точностью до 0,1.

ГЛАВА 15

РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

15.1. Тригонометрические ряды Фурье

15.1.1. Периодические функции и гармонические колебания

И в научных, и в технических задачах часто приходится встречаться с периодическими явлениями и процессами. Движение планет, механические колебания различных систем, электромагнитные колебания, многие другие явления имеют общее свойство — периодичность. Поэтому и в математике большое значение имеет изучение периодических функций.

Одной из самых простых периодических функций является функция

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

описывающая простейшее колебательное движение (***гармоническое колебание***). Иногда такую функцию называют ***гармоникой***. Число $A > 0$ называется амплитудой, ω — частота колебания, φ — начальная фаза. Заметим, что гармоника является периодической функцией с периодом $\dfrac{2\pi}{\omega}$:

$$f(t+\frac{2\pi}{\omega}) = A\sin(\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})+\varphi) = A\sin(\omega t+2\pi+\varphi) = A\sin(\omega t+\varphi) = f(t).$$

Гармонику можно записывать и в другой форме:

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin\omega t\cos\varphi + A\cos\omega t\sin\varphi = a\cos\omega t + b\sin\omega t,$$

где обозначено: $a = A\sin\varphi$, $b = A\cos\varphi$. Обратно, каждую функцию вида

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

можно представить как гармонику с амплитудой $A = \sqrt{a^2+b^2}$ и начальной фазой $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$.

Идея изучения более сложных периодических функций состоит в том, чтобы представлять их в виде суммы гармоник. Однако, складывая гармоники с произвольными частотами, в общем случае периодической функции мы не получим. Поэтому будем складывать гармоники с ***кратными*** частотами. Функция

$$A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin(2\omega t + \varphi_2)$$

является, очевидно, периодической с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Функцию с таким же периодом получим, складывая k гармоник с кратными частотами:

$$\sum_{n=1}^{k} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

Будем чаще записывать такие суммы в другой форме, добавляя постоянное слагаемое (которое на период, конечно, не влияет):

$$a_0 + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

Практика показывает, однако, что лишь немногие периодические функции можно представить в виде такой суммы. Другое дело, если рассматривать ***бесконечные*** суммы, т. е. ряды. Оказывается, очень широкий класс составляют периодические функции, каждую из которых можно представить в виде суммы сходящегося ряда:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

Прежде всего мы научимся разлагать функцию в ряд такого вида.

15.1.2. Ортогональность тригонометрической системы функций

Будем называть функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ ***ортогональными*** на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b f_1(t) \cdot f_2(t)\, dt = 0.$$

Система функций

$$f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ \ldots$$

называется ***ортогональной*** на отрезке $[a,\, b]$, если любые $f_i(t)$, $f_j(t)$ при $i \neq j$ ортогональны на $[a,\, b]$.

Лемма. Если $f(t)$ — периодическая интегрируемая функция, T — её период, то интегралы от $f(t)$ по любому отрезку длиной T равны. Другими словами, для любого a

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t)\, dt.$$

Доказательство. Воспользуемся аддитивностью интеграла:

$$\int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_a^0 f(t)\, dt + \int_0^T f(t)\, dt + \int_T^{a+T} f(t)\, dt.$$

В последнем слагаемом сделаем замену переменной:

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt \left| \begin{array}{l} t = u+T, \\ dt = du \end{array} \right| = \int_0^a f(u+T)\,du = \int_0^a f(u)\,du.$$

Так как $\int\limits_0^a f(u)\,du = -\int\limits_a^0 f(t)\,dt$, то, после сокращения, получим: $\int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt =$ $= \int\limits_0^T f(t)\,dt$, что и требовалось.

Теорема 1. Тригонометрическая система функций

$$1,\quad \cos t,\quad \sin t,\quad \cos 2t,\quad \sin 2t,\quad \cos 3t,\quad \sin 3t,\quad \ldots$$

ортогональна на любом отрезке длиной 2π.

Доказательство. Произведение любых двух функций системы — периодическая функция, с периодом вида $\dfrac{2\pi}{n}$, где n — натуральное число. Из леммы следует, что интегралы в этом случае по любому отрезку длиной 2π равны. Будем рассматривать, например, отрезок $[-\pi,\,\pi]$. Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nt\,dt = \frac{1}{n}\sin nt\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nt\,dt = -\frac{1}{n}\cos nt\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

то константа 1 ортогональна любой другой функции из нашей системы.

Далее, любые два косинуса ортогональны:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\cdot\cos nt\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t + \cos(m+n)t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)t + \frac{1}{m+n}\sin(m+n)t\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Аналогично проверяется ортогональность любых двух синусов, а также ортогональность любого синуса и любого косинуса:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt\cdot\sin nt\,dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt\cdot\cos nt\,dt = 0.$$

Последнее равенство совсем очевидно, так как под интегралом — нечётная функция, а пределы интегрирования симметричны относительно 0.

Замечание. Тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{\ell},\ \sin\frac{\pi x}{\ell},\ \cos\frac{2\pi x}{\ell},\ \sin\frac{2\pi x}{\ell},\ \ldots$$

ортогональна на любом отрезке длиной 2ℓ.

Действительно, интеграл от произведения любых двух функций по отрезку $[-\ell,\ell]$ с помощью замены переменной $t=\dfrac{\pi x}{\ell}$ сводится к аналогичному интегралу, рассмотренному в теореме. Например:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\ \left|\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi x}{\ell},\\ dt=\dfrac{\pi}{\ell}dx\end{array}\right| = \frac{\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\cdot\cos nt\,dt=0.$$

Последняя рассмотренная система функций — наиболее общий случай ортогональной тригонометрической системы. При $\ell=\pi$ получается система функций, рассмотренная в теореме 1.

15.1.3. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций

Пусть $f(t)$ — периодическая функция, причём её период $T=2\pi$. Пусть $f(t)$ разлагается в ряд:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nt+b_n\sin nt). \tag{$*$}$$

Напомним: это значит, что ряд в любой точке t сходится, причём его сумма равна $f(t)$. Первое (постоянное) слагаемое удобно, как мы вскоре убедимся, обозначать $\dfrac{a_0}{2}$.

Теорема 2. Если $f(t)$ разлагается в тригонометрический ряд $(*)$, причём этот ряд сходится равномерно на всей оси, то справедливы ***формулы Эйлера – Фурье***:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt,\quad n=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt,\quad n=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots.$$

Числа a_n, b_n называются коэффициентами Фурье функции $f(t)$, а ряд $(*)$ — её рядом Фурье.

Доказательство. Равномерная сходимость позволяет почленно интегрировать функциональный ряд:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\,dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\,dt\right).$$

Под знаком суммы все интегралы равны 0, поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dt = \frac{a_0}{2} t\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_0.$$

Отсюда следует требуемая формула для a_0 : $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$

Умножим обе части равенства $(*)$ на $\cos mt$:

$$f(t)\cos mt = \frac{a_0}{2}\cos mt + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt \cos mt + b_n \sin nt \cos mt).$$

Ряд в правой части сходится равномерно. Действительно, равномерная сходимость ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ к сумме $f(t)$, напомним, означает:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\, n_0 : \forall\, n \ge n_0\ \ \forall\, t\quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) - f(t)\right| < \varepsilon.$$

Но тогда и для ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\cos mt$ это условие выполнено:

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\, n_0 : \forall\, n \ge n_0\ \ \forall\, t\quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\cos mt - f(t)\cos mt\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) - f(t)\right| \cdot |\cos mt| < \varepsilon.$$

Следовательно, после умножения на $\cos mt$, ряд опять можно почленно интегрировать:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mt\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\,dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\,dt\right).$$

Из ортогональности тригонометрической системы функций следует, что все интегралы в правой части формулы равны 0, кроме одного:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt\,dt = \frac{a_m}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2mt)\,dt =$$

$$= \frac{a_m}{2}\left(t + \frac{1}{2m}\sin 2mt\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_m}{2}\cdot 2\pi = \pi a_m.$$

Отсюда следует требуемая формула для a_m:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt.$$

Аналогичная формула для b_m получается, если умножать ряд не на $\cos mt$, а на $\sin mt$. Теорема доказана.

Замечания. Если записать произвольный тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где a_n, b_n — некоторые числовые коэффициенты, то он может не быть рядом Фурье какой-либо функции (даже если сходится на всей прямой). Если же такой ряд сходится ***равномерно***, то это обязательно ряд Фурье некоторой функции.

С другой стороны, если функция интегрируема на $[-\pi, \pi]$ (а для этого достаточно, например, непрерывности), то для неё можно вычислить a_n, b_n и составить ряд Фурье. Но может оказаться, что он расходится в некоторых (даже во всех!) точках. Возможен также случай, когда ряд Фурье сходится при любом t, но его сумма не совпадает с $f(t)$. Поэтому важно знать условия, при которых функция $f(t)$ разлагается в свой ряд Фурье. Достаточные условия содержатся в теореме Дирихле, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 3 (*теорема Дирихле*). Пусть функция $f(t)$ имеет период 2π, причём на отрезке $[-\pi, \pi]$ у неё лишь конечное число экстремумов и лишь конечное число разрывов (все они 1-го рода). Тогда ряд Фурье для $f(t)$ сходится на всей оси, причём его сумма равна

1) $f(t)$, если в точке t функция непрерывна;

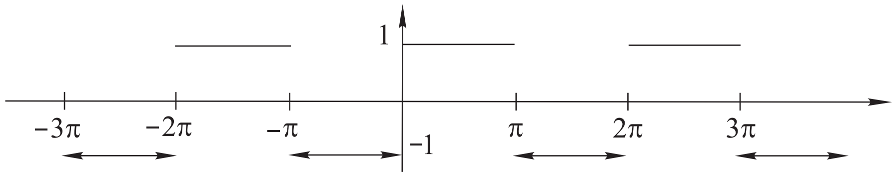
2) $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$, если в точке t функция терпит разрыв.

Здесь $f(t-0)=\lim\limits_{s\to t-0} f(s)$, $f(t+0)=\lim\limits_{s\to t+0} f(s)$ — односторонние пределы функции в точке разрыва t.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(t)$, период которой равен 2π , если на промежутке $(-\pi, \pi]$ функция задана так:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ \ \ 1, & \ \ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Построим график функции $f(t)$.



Стрелка на конце линии означает, что концевая точка линии не принадлежит.

Условия теоремы Дирихле, очевидно, выполнены. Поэтому $f(t)$ разлагается в свой ряд Фурье. Найдём коэффициенты a_n, b_n.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nt\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nt\,\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nt\,\Big|_{0}^{\pi} = 0.$$

Так как на номер n приходится делить, то a_0 нужно вычислить отдельно:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dt = \frac{1}{\pi}\left(-t\,\Big|_{-\pi}^{0} + t\,\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\,(-\pi+\pi) = 0.$$

Вычисление b_n аналогично:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos nt\,\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\,\cos nt\,\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi n}(1-\cos n\pi - \cos n\pi + 1) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\,(1-\cos n\pi) = \frac{2}{\pi n}\,(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n - \text{чётно;} \\ \dfrac{4}{\pi n}, & n - \text{нечётно.} \end{cases}$$

Подставляя коэффициенты в формулу ряда Фурье, запишем ответ:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)\sin nt =$$

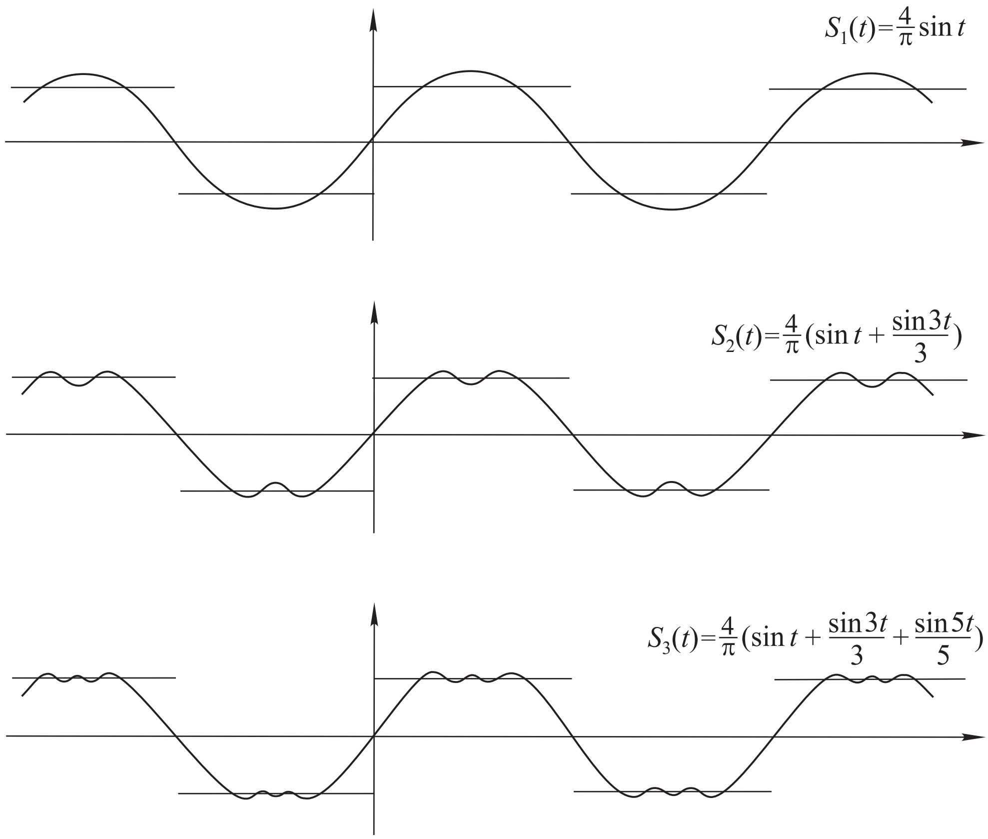
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)t = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \ldots\right).$$

По теореме Дирихле, сумма полученного ряда совпадает с $f(t)$ в точках, где $f(t)$ непрерывна. Например, при $t = 10$ получим:

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin 10 + \frac{\sin 30}{3} + \frac{\sin 50}{5} + \ldots\right) = f(10) = f(10-4\pi) = -1\,.$$

В точках разрыва $t = k\pi$ сумма ряда, очевидно, равна 0, что совпадает со средним арифметическим односторонних пределов $f(t)$ в этих точках.

Интересно проследить, как приближаются частичные суммы полученного ряда к функции $f(t)$. Сделаем это с помощью графиков



Рассмотрим теперь функцию $f(x)$ с произвольным периодом $T = 2\ell$. Пусть на отрезке $[-\ell,\, \ell\,]$ для неё выполнены условия теоремы Дирихле. Тогда эти условия, очевидно, выполнены для функции $f^*(t) = f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right)$ (полученной в результате замены переменной $x = \dfrac{\ell t}{\pi}$), период которой равен 2π:

$$f^*(t+2\pi) = f\left(\frac{\ell(t+2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{\ell t}{\pi} + 2\ell\right) = f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = f^*(t).$$

Следовательно, $f^*(t)$ разлагается в ряд Фурье:

$$f^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

$$\text{где} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(t)\sin nt\,dt\,.$$

Сделаем обратную замену: $t = \dfrac{\pi x}{\ell}$:

$$f^*(t) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\cos nt\,dt \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{\pi x}{\ell}, \\ dt = \dfrac{\pi}{\ell}\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cdot\frac{\pi}{\ell}\,dx = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Аналогичная формула справедлива и для коэффициента b_n.

Итак, всё сказанное выше справедливо не только для функции с периодом 2π, но и для функции с произвольным периодом $T = 2\ell$. Если выполнены условия теоремы Дирихле, то такая функция разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

причём коэффициенты находятся по формулам Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad n = 1,\,2,\,\ldots\,.$$

15.1.4. Ряды Фурье для чётных, нечётных, непериодических функций

Если функция обладает какой-либо симметрией, то техника вычислений при разложении её в ряд Фурье упрощается.

Теорема 4. Если $f(x)$ — чётная функция, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле на отрезке $[-\ell, \ell]$, то её коэффициенты Фурье можно вычислять по формулам:

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad b_n = 0\,.$$

В частности, ряд Фурье чётной функции не содержит синусов. Аналогично, ряд Фурье для нечётной функции не содержит косинусов:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — чётная. Тогда $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$ — нечётная функция, а значит интеграл по симметричному относительно 0 отрезку равен 0:

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = 0\,.$$

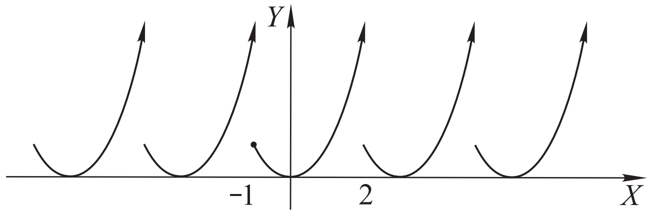
Функция $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}$ — чётная, поэтому интеграл по симметричному отрезку $[-\ell, \ell\,]$ равен удвоенному интегралу по отрезку $[\,0, \ell\,]$:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Аналогично получаются формулы для коэффициентов Фурье нечётной функции.

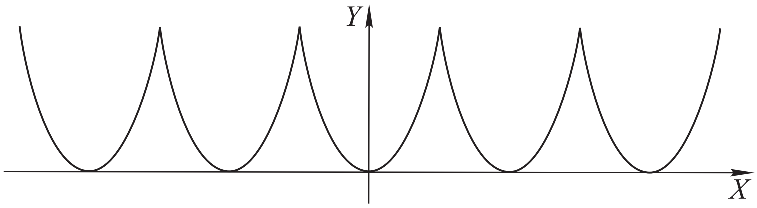
До сих пор мы рассматривали ряды Фурье для периодических функций. Однако любую функцию, определённую на отрезке $[a, b]$, можно продолжить на всю прямую так, чтобы получилась периодическая функция. Её ряд Фурье будет представлять исходную функцию на отрезке $[a, b]$ (возможно, за исключением граничных точек a, b).

Пример 2. Рассмотрим функцию, определённую на отрезке $[-1, 2]$ формулой $f(x) = x^2$. Имеется много способов построить для неё периодическое продолжение. Пусть $f_1(x)$ — функция, имеющая график:



На отрезке $[-1, 2]$ эта функция совпадает с $f(x)$ во всех точках, кроме $x = 2$. Значение в точке $x = 2$ приходится считать равным 1, иначе функция не будет периодической. Для функции $f_1(x)$ период $T = 2\ell = 3$, значит $\ell = 1{,}5$. Разлагая её в ряд Фурье, получим разложение функции $f(x)$ на интервале $(-1, 2)$. В точках $x = -1$, $x = 2$ сумма ряда будет, по теореме Дирихле, равна $\dfrac{4+1}{2} = 2{,}5$.

Можно рассмотреть другое периодическое продолжение функции $f(x)$ — функцию $f_2(x)$ с графиком, приведённым ниже.

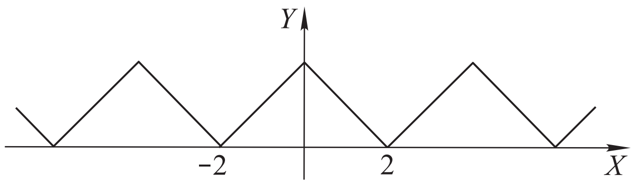


Это более удобное продолжение, так как, во-первых, ряд Фурье будет представлять $f(x)$ уже во всех точках отрезка $[-1, 2]$, а во-вторых, функция $f_2(x)$ чётная, её проще разложить в ряд Фурье.

Если функция определена на отрезке $[0, \ell]$, то её можно продолжить сначала на отрезок $[-\ell, \ell]$ так, чтобы она была чётной (или нечётной), а затем продолжить на всю прямую.

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = 2 - x$, определённую на отрезке $[0, 2]$, в ряд Фурье по косинусам.

Решение. Чтобы получить ряд Фурье по косинусам, нужно, чтобы продолжение $f(x)$ на всю прямую было чётной функцией. Таким продолжением является, например, функция $g(x)$:



Здесь $T = 2\ell = 4$, поэтому $\ell = 2$. По теореме 4, $b_n = 0$. Найдём a_n.

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} g(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \int\limits_0^{2}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\,.$$

Применим метод интегрирования по частям:

$$a_n = \int\limits_0^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = 2-x & dv = \cos\dfrac{n\pi x}{2}\,dx \\ du = -dx & v = \dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= (2-x)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,(-dx) =$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ — чётно;} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2}, & n \text{ — нечётно.} \end{cases}$$

Так как выполнялось деление на n, то a_0 нужно вычислить отдельно:

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} g(x)\,dx = \int\limits_0^2 (2-x)\,dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 4-2 = 2.$$

Осталось записать ответ:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos\frac{n\pi x}{2} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2} =$$

$$= 1 + \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right).$$

15.1.5. Комплексная форма ряда Фурье

Первое знакомство с комплексными числами у нас состоялось в курсе алгебры. Напомним: комплексное число может быть записано в алгебраической и тригонометрической формах:

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Здесь $r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ — модуль числа z, $\varphi = \arg z$ — аргумент числа z. Было доказано (АГ, 6.1.4), что при умножении чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это свойство аргументов комплексных чисел позволяет ввести следующее ***обозначение***:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Символ $e^{i\varphi}$ обладает обычным свойством экспоненты:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Мы получаем возможность использовать ещё одну форму записи комплексного числа — ***показательную***:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Так как $\cos\varphi$ — чётная функция, а $\sin\varphi$ — нечётная, то ясно, что

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Отсюда и из формулы для $e^{i\varphi}$ легко получить:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Заметим, что указанные соотношения между $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $e^{i\varphi}$ (***тождества Эйлера***) можно получить, если распространить на область комплексных чисел известные нам разложения функций в степенные ряды. Действительно, исходя из разложения действительной функции

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

можно определить функцию $e^{i\varphi}$ следующим образом:

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Применим тождества Эйлера для получения комплексной формы записи ряда Фурье. Пусть функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье. Проведём преобразования:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{int}+e^{-int}}{2} + b_n\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}\right) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{int}+e^{-int}}{2} - b_n i\frac{e^{int}-e^{-int}}{2}\right) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - b_n i}{2}\,e^{int} + \frac{a_n + b_n i}{2}\,e^{-int}\right).$$

Введём в рассмотрение коэффициенты a_n, b_n с отрицательными номерами:

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n.$$

Тогда для коэффициентов a_{-n}, b_{-n} справедливы формулы Эйлера – Фурье:

$$a_{-n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(-nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = a_n,$$

$$b_{-n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(-nt)\,dt = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = -b_n.$$

Продолжаем преобразования ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - b_n i}{2}\,e^{int} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{a_n - b_n i}{2}\,e^{int} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_n - b_n i}{2}\,e^{int}.$$

Обозначим: $c_n = a_n - b_n i$. Выведем формулу для c_n:

$$c_n = a_n - b_n i = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt - i\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt - i\cdot\sin nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}dt.$$

Итак, в комплексной форме ряд Фурье записывается следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt.$$

Сходимость такого ряда означает сходимость последовательности

$$S_k = \frac{1}{2}\sum_{n=-k}^{n=k} c_n e^{int}.$$

15.2. Приближение функций многочленами

Задача приближения функций более простыми функциями (например, многочленами) — одна из важнейших в математическом анализе. Мы уже обсуждали эту задачу, рассматривая ряды Тейлора и Маклорена. Если функция разлагается в степенной ряд

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

и отрезок $[a,\, b]$ лежит внутри интервала сходимости, то на $[a,\, b]$ ряд сходится равномерно (см. 14.3), т. е.

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,n_0:\forall\,n\geq n_0\ \ \forall x\in[a,\,b]\quad \Big|f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_kx^k\Big|<\varepsilon.$$

Другими словами, функцию можно приблизить многочленами равномерно на $[a,b]$ с любой точностью. Однако напомним: здесь необходимо, чтобы у функции $f(x)$ существовали производные всех порядков. Например, функцию $f(x)=|x|$ на отрезке, содержащем точку $x=0$, таким образом приблизить нельзя.

Тем не менее, задача приближения многочленами любой непрерывной функции разрешима. Но сначала нужно рассмотреть вопрос о приближении функции ***тригонометрическими многочленами***. Так называются функции вида

$$T_n(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos kt+d_k\sin kt),$$

$T_n(t)$ — тригонометрический многочлен порядка n; c_k, d_k — числовые коэффициенты.

Теорема 5 (*первая теорема Вейерштрасса*). Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\,\pi]$, причём $f(-\pi)=f(\pi)$, то

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,T_n(t):\forall\,t\in[-\pi,\,\pi]\quad |f(t)-T_n(t)|<\varepsilon.$$

Пояснение. В общем случае доказательство довольно сложно и здесь не рассматривается. Если же для $f(t)$ выполнены условия теоремы Дирихле ($f(t)$ кусочно-монотонна), то она разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье. В этом случае в качестве $T_n(t)$ можно взять частичную сумму ряда Фурье.

Для характеристики отличия функции $f(t)$ от функции $g(t)$ на отрезке $[a,\,b]$ вводится понятие ***среднего квадратичного отклонения***. Так называется число

$$I=\sqrt{\int_a^b(f(t)-g(t))^2\,dt}.$$

Ставится задача: для функции $f(t)$ среди всех тригонометрических многочленов порядка n найти такой, чтобы его среднее квадратичное отклонение от функции $f(t)$ было наименьшим.

Теорема 6. Пусть существует $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt$. Наименьшее среднее квадратичное отклонение от функции $f(t)$ среди всех тригонометрических многочленов порядка n имеет частичная сумма ряда Фурье

$$S_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kt+b_k\sin kt.$$

Доказательство. Пусть $T_n(t)$ — некоторый тригонометрический многочлен порядка n. Проведём вычисления:

$$I^2 = \int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - T_n(t)]^2\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t) + S_n(t) - T_n(t)]^2\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t)]^2\,dt + 2\int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t)]\cdot[S_n(t) - T_n(t)]\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}[S_n(t) - T_n(t)]^2\,dt.$$

Рассмотрим 2-е слагаемое. Выражение $S_n(t) - T_n(t)$ есть, очевидно, линейная комбинация функций $\sin kt$, $\cos kt$ ($k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$). После раскрытия скобок интеграл будет равен линейной комбинации интегралов вида

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t)]\sin kt\,dt, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t)]\cos kt\,dt.$$

Пользуясь ортогональностью тригонометрической системы, легко проверить, что все такие интегралы равны 0. Например:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t)]\sin kt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt - \int_{-\pi}^{\pi}S_n(t)\sin kt\,dt = \pi(b_k - b_k) = 0.$$

Следовательно, 2-е слагаемое равно 0. Так как 3-е слагаемое неотрицательно: $\int_{-\pi}^{\pi}[S_n(t) - T_n(t)]\,dt \geq 0$, то величина I^2 будет наименьшей в случае, если 3-е слагаемое равно 0, т. е. если $T_n(t) = S_n(t)$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 6 доказана для всех функций ***с интегрируемым квадратом***; неважно — сходится её ряд Фурье или нет.

Вычислим величину среднего квадратичного отклонения $f(t)$ от $S_n(t)$:

$$I^2 = \int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t)]^2\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt - 2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)S_n(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt - 2\int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - S_n(t)]\cdot S_n(t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(t)\,dt.$$

Здесь второе слагаемое, как и в доказательстве теоремы 6, равно 0. Третье слагаемое

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_1^2\cos^2 t\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_1^2 \sin^2 t\,dt + \ldots =$$

$$= \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi a_1^2 + \pi b_1^2 + \ldots = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2),$$

так как интегралы от удвоенных произведений равны 0 в силу ортогональности тригонометрической системы функций.

В результате вычислений получили:

$$I^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt - \left[\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right].$$

Ясно, что $I^2 \geq 0$. Поэтому справедливо неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt.$$

Следовательно, частичные суммы числового ряда с положительными слагаемыми

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

ограничены. Значит, этот ряд сходится. Переходя к пределу (при $n \to \infty$) в последнем неравенстве, получим

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt.$$

Это так называемое ***неравенство Бесселя***.

Следствие. Если $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом, a_k, b_k — её коэффициенты Фурье, то

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Доказательство. Используем необходимое условие сходимости числового ряда: ряд $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ сходится, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k^2 + b_k^2) = 0$. Так как

$$0 \leq a_k \leq a_k^2 + b_k^2, \quad 0 \leq b_k \leq a_k^2 + b_k^2,$$

то отсюда следуют требуемые равенства.

Теорема 7. Если $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом, то

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt,$$

т. е. в неравенстве Бесселя на самом деле имеется равенство. Оно называется ***равенством Парсеваля***.

Доказательство проведём только для случая, когда $f(t)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\,\pi]$, причём $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда, по первой теореме Вейерштрасса (теорема 5),

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,T_n(t):\,\forall\,t\in[-\pi,\,\pi]\quad|f(t)-T_n(t)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

т. е. $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T_n(t)]^2\,dt\le\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt=\varepsilon$. По теореме 6, отклонение частичной суммы ряда Фурье $S_n(t)$ от функции $f(t)$ ещё меньше. Учитывая это, проведём вычисление:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right]\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-S_n(t)]^2\,dt\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T_n(t)]^2\,dt<\varepsilon.$$

Это верно для любого ε, поэтому левая часть неравенства есть 0, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Равенство Парсеваля доказано.

Вернёмся вновь к вопросу о приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами. Тригонометрические многочлены здесь нам послужат промежуточным звеном.

Теорема 8 (*вторая теорема Вейерштрасса*). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,\,b]$, то

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,P(x)\ (\text{многочлен}):\,\forall\,x\in[a,\,b]\quad|f(x)-P(x)|<\varepsilon\,.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f^*(t)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}\,t\right).$$

Эта функция определена на отрезке $[0,\,\pi]$, так как при изменении t от 0 до π величина $x=a+\dfrac{b-a}{\pi}\,t$ пробегает отрезок $[a,\,b]$. Функция $f^*(t)$

непрерывна на $[0,\,\pi]$ — как суперпозиция непрерывных функций. Продолжаем $f^*(t)$ на отрезок $[-\pi, 0]$:

$$f^*(-t) = f^*(t).$$

Теперь $f^*(t)$ непрерывна на $[-\pi,\,\pi]$, причём $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$. Значит, по 1-й теореме Вейерштрасса,

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,T(t)\,(\text{тригонометрический многочлен}):\qquad \forall\,t\ \in[-\pi,\,\pi]\quad |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но $T(t)$ — линейная комбинация функций $\sin kt$, $\cos kt$. Поэтому $T(t)$ можно разложить в степенной ряд (ряд Маклорена), сходящийся к $T(t)$ на всей оси. Пусть многочлены $P_n(t)$ — частичные суммы этого степенного ряда. На любом конечном отрезке такой ряд сходится равномерно:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,n_0 : \forall\,n \ge n_0\ \ \forall t \in [-\pi,\,\pi]\quad |T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через $P(t)$ любой из многочленов с этим свойством. Например, $P(t) = P_{n_0}(t)$. Тогда

$$|f^*(t) - P(t)| = |f^*(t) - T_n(t) + T_n(t) - P(t)| \le$$
$$\le |f^*(t) - T_n(t)| + |T_n(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Осталось вернуться к переменной $x = a + \dfrac{b-a}{\pi}\,t$. Выразим отсюда t: $t = \pi\cdot\dfrac{x-a}{b-a}$ и подставим, учитывая, что $f^*\left(\pi\cdot\dfrac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,P(x) : \forall\,x \in [a,\,b]\quad \left|f(x) - P\left(\pi\cdot\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon.$$

Функция $Q(x) = P\left(\pi\cdot\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ тоже является, очевидно, многочленом от x, поэтому доказательство закончено.

Следствие. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,\,b]$ $\Leftrightarrow$ существует последовательность многочленов $P_n(x)$, равномерно сходящаяся на $[a,\,b]$ к функции $f(x)$. Здесь n — не степень многочлена, а его номер в последовательности.

Доказательство. Многочлены $P_n(t)$ — непрерывные функции. Поэтому утверждение «$\Leftarrow$» следует из теоремы (см. 14.2): предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией. Для доказательства утверждения «$\Rightarrow$» возьмём $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$.

Тогда, по теореме Вейерштрасса,

$$\forall\, n\ \ \exists\, P_n(x) : \forall\, x \in [a,\, b] \quad |f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n},$$

что и означает равномерную сходимость: $P_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

15.3. Абстрактные ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Мы подробно рассмотрели лишь одну — тригонометрическую — ортогональную систему функций. На практике приходится использовать и другие ортогональные системы. Кроме того, само понятие ортогональности в разных задачах приходится вводить по-разному. Поэтому представляет интерес более общий подход к рассмотренным методам. Дать некоторое представление о таком подходе — цель этого раздела.

Пусть L — **линейное пространство** над полем $\mathbb{R}$. Подробно линейные пространства изучались в курсе алгебры. Напомним: это множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа, причём операции должны обладать определёнными свойствами.

Пусть в пространстве L определено ***скалярное произведение***, т. е. отображение

$$(\ ,\ \ ) : L \times L \to \mathbb{R},$$

обладающее свойствами $(\forall\, x,\, y,\, z \in L,\ \forall\, \lambda \in R)$:

$$\begin{aligned}
&1)\ (x,\, y) = (y,\, x);\\
&2)\ (x,\, y + z) = (x,\, y) + (x,\, z);\\
&3)\ (\lambda x,\, y) = \lambda(x,\, y);\\
&4)\ (x,\, x) > 0,\ \text{если}\ x \neq \bar{0}.
\end{aligned}$$

Линейное пространство с операцией скалярного произведения называется ***гильбертовым*** пространством. Если гильбертово пространство L является конечномерным (т. е. имеет конечный базис), то оно называется евклидовым пространством. Евклидовы пространства также изучались в курсе алгебры (АГ, 7.5). Наиболее важным примером евклидова пространства, напомним, является $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$, где сложение и умножение на число определяются покоординатно, а скалярное произведение вводится формулой

$$(x,\, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

если $x = (\,x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\,)$, $y = (\,y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n\,)$. Это пространство n-мерно. Наиболее удобным является базис

$$e_1 = (1,\, 0,\, \ldots,\, 0),\ e_2 = (0,\, 1,\, \ldots,\, 0\,),\, \ldots,\, e_n = (0\,,0,\, \ldots,\, 1).$$

Пример 4. Рассмотрим теперь пример гильбертова пространства, не являющегося евклидовым. Пусть $L = C[a,\, b]$ — множество непрерывных на $[a,\, b]$ функций. Как известно, сложение и умножение на число не выводят за пределы этого множества. Необходимые аксиомы выполнены, L — линейное пространство. Определим скалярное произведение:

$$(f,\, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx\,.$$

Легко проверить, что все 4 аксиомы скалярного произведения выполняются. Значит, получили гильбертово пространство. Это пространство не является конечномерным. Действительно, система функций

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$$

линейно независима. Чтобы проверить это, предположим, что некоторая конечная линейная комбинация этих функций равна нулевой функции:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1} \equiv 0.$$

Очевидно, многочлен тождественно равен 0 только в случае, если все его коэффициенты равны 0. Поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, функции линейно независимы.

Пример гильбертова пространства $C[a,\, b]$ для нас важен. Рассматривая абстрактные понятия в произвольном гильбертовом пространстве, будем находить их конкретные аналоги в пространстве непрерывных функций.

В произвольном гильбертовом пространстве вводится понятие ***нормы*** элемента:

$$||x|| = \sqrt{(x,\, x)}.$$

Справедливы важные неравенства. Неравенство Коши – Буняковского:

$$(x,\, y) \le ||x|| \cdot ||y||;$$

неравенство Минковского или «неравенство треугольника»:

$$||x + y|| \le ||x|| + ||y||.$$

Доказательства этих неравенств для евклидовых пространств рассмотрены в курсе алгебры. В общем случае они аналогичны.

Система элементов гильбертова пространства

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots$$

называется ***ортогональной***, если $(\varphi_i,\, \varphi_j) = 0$ при $i \neq j$. В пространстве $C[a,\, b]$ примером ортогональной системы является тригонометрическая система функций.

Заметим, что ортогональная система ненулевых элементов обязательно линейно независима. Действительно, если

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n = \bar{0},$$

то, умножая это равенство скалярно на φ_i и пользуясь свойствами скалярного произведения и ортогональности, получим:

$$0 = (\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_n\varphi_n,\, \varphi_i) = \lambda_1(\varphi_1,\, \varphi_i) + \ldots + \lambda_n(\varphi_n,\, \varphi_i) = \lambda_i(\varphi_i,\, \varphi_i).$$

Отсюда следует, что $\lambda_i = 0$.

Ортогональная система $\{\varphi_n\}$ называется ***ортонормированной***, если норма каждого φ_i равна 1. Другими словами, если

$$(\varphi_i,\, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Последовательность элементов $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n,\, \ldots$ гильбертова пространства L ***сходится по норме*** к $f \in L$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0 \quad ||f_n - f|| < \varepsilon.$$

В пространстве $C[a,\, b]$ сходимость по норме называют также ***сходимостью в среднем квадратичном***:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0 \quad \int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))^2\, dx < \varepsilon.$$

Это другое, более слабое требование, чем равномерная сходимость.

Можно рассматривать ряды в гильбертовом пространстве. По определению, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится к сумме $f \Leftrightarrow$ последовательность частичных сумм сходится к f по норме.

Пусть $\varphi_1,\, \varphi_2,\, \ldots,\, \varphi_n,\, \ldots$ — ортонормированная система элементов в L. Допустим, что $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\varphi_i$ — сумма сходящегося ряда. Умножим обе части последнего равенства скалярно на φ_j (строгое обоснование такой возможности, основанное на непрерывности скалярного произведения, проводить не будем):

$$(f,\, \varphi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\varphi_i,\, \varphi_j) = \alpha_j.$$

Ряд с такими коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f,\, \varphi_i)\varphi_i$$

называется рядом Фурье элемента $f \in L$ по ортонормированной системе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Числа (f, φ_i) называются коэффициентами Фурье элемента f.

Коэффициенты Фурье (f, φ_i) можно вычислить для любого элемента $f \in L$. Однако не обязательно справедливо равенство $f = \sum (f,\, \varphi_i)\, \varphi_i$. Ряд может расходиться, а может сходиться, но к другому элементу. Однако частичные суммы ряда Фурье отличаются от f меньше любых других линейных комбинаций элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Другими словами справедлива общая теорема, доказанная выше для случая тригонометрической системы в пространстве $C[-\pi,\, \pi]$ (см. теорему 6).

Теорема 6′. Норма $||f - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i||$ принимает наименьшее значение, когда $\alpha_i = (f,\, \varphi_i)$ — коэффициенты Фурье. В этом случае

$$||f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i||^2 = ||f^2|| - \sum_{i=1}^{n}(f,\, \varphi_i)^2.$$

Доказательство. Проведём вычисления:

$$||f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i||^2 = \left(f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i,\, f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i\right) =$$

$$= (f, f) - 2\left(f, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i\right) =$$

$$= (f, f) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f,\, \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 =$$

$$= (f, f) + \sum_{i=1}^{n}[\alpha_i^2 - 2\alpha_i(f,\, \varphi_i) + (f,\, \varphi_i)^2 - (f,\, \varphi_i)^2] =$$

$$= (f,\, f) + \sum_{i=1}^{n}[\alpha_i - (f, \varphi_i)]^2 - \sum_{i=1}^{n}(f,\, \varphi_i)^2.$$

Ясно, что наименьшее значение это выражение принимает, если второе слагаемое равно 0, т. е. при $\alpha_i = (f,\, \varphi_i)$.

Следствие (*неравенство Бесселя*).

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f,\, \varphi_i)^2 \le (f,\, f).$$

Доказательство. Из полученного в теореме $6'$ соотношения видим, что для любого n

$$||f||^2 - \sum_{i=1}^{n}(f,\,\varphi_i)^2 \geq 0.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f,\,\varphi_i)^2 \leq ||f||^2 = (f,\,f).$$

Замечание. Полезно проследить аналогию в доказательствах общих теорем и рассмотренного выше частного случая (теорема 6, следствия из неё).

Рассмотрим ещё одно понятие. Система функций в гильбертовом пространстве L $\varphi_1,\,\varphi_2,\,\ldots,\,\varphi_n,\,\ldots$ называется ***полной***, если любой элемент f можно с любой точностью приблизить линейной комбинацией φ_i. Точнее, полнота системы $\{\varphi_i\}$ означает, что для любого $f \in L$

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_n \in \mathbb{R}: \quad ||f - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i|| < \varepsilon.$$

Для ортонормированной системы $\{\varphi_i\}$ полнота означает, что ряд Фурье по системе $\{\varphi_i\}$ любого элемента $f \in L$ сходится к самому элементу f. Действительно, по теореме $6'$

$$||f - \sum_{i=1}^{n}(f,\,\varphi_i)\varphi_i|| \leq ||f - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i||$$

и из полноты системы следует сходимость ряда Фурье. Обратное очевидно.

Теорема 9. Ортонормированная система $\{\varphi_i\}$ является полной $\Leftrightarrow$ для любого $f \in L$ справедливо равенство Парсеваля:

$$(f,\,f) = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\,\varphi_i)^2.$$

Доказательство. В теореме $6'$ получено соотношение:

$$||f - \sum_{i=1}^{n}(f,\,\varphi_i)\,\varphi_i|| = (f,\,f) - \sum_{i=1}^{n}(f,\,\varphi_i)^2.$$

Полнота системы $\{\varphi_i\}$ равносильна сходимости ряда Фурье, т. е. стремлению левой части равенства к 0 (при $n \to \infty$). Равенство Парсеваля равносильно стремлению к 0 правой части равенства. Отсюда следует справедливость теоремы.

Замечание. На языке полных систем функций можно сформулировать рассмотренные выше теоремы Вейерштрасса. Причём полноту здесь можно понимать в смысле ***равномерного*** приближения: система $\{f_i(x)\}$ является полной в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,\, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\forall f(x)\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_n\in\mathbb{R}:\quad \forall x\in[a,\,b]\quad \Big|f(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)\Big|<\varepsilon.$$

Теорема 5′ (*первая теорема Вейерштрасса*). Тригонометрическая система $1,\,\sin t,\,\cos t,\sin 2t,\,\cos 2t,\,\ldots$ является полной в пространстве непрерывных на $[-\pi,\,\pi]$ функций, для которых $f(-\pi)=f(\pi)$.

Теорема 8′ (*вторая теорема Вейерштрасса*). Система функций $1,\,x,\,x^2,\,x^3,\,\ldots$ является полной в пространстве непрерывных на $[a,\,b]$ функций.

Если рассматривать полноту в смысле ***среднего квадратичного***, то требование $f(-\pi)=f(\pi)$ в теореме 5′ можно убрать.

15.4. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ обладает свойствами:

1) $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, т. е. сходится интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\,;$$

2) на любом отрезке $[-\ell,\,\ell\,]$ функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье.

Проведём преобразования, используя известные формулы для коэффициентов a_n, b_n:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{n\pi t}{\ell}\,dt\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(t)\sin\frac{n\pi t}{\ell}\,dt\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\,dx+\frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(t)\left[\cos\frac{n\pi t}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}+\sin\frac{n\pi t}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\,dx+\frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{n\pi(x-t)}{\ell}\,dt\,.$$

Введём теперь новую переменную ω, непрерывную на $[0, \infty)$ и принимающую значения:

$$\omega_0 = 0,\ \omega_1 = \frac{\pi}{\ell},\ \omega_2 = \frac{2\pi}{\ell},\ \ldots,\ \omega_n = \frac{n\pi}{\ell},\ \ldots.$$

Обозначим: $\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \dfrac{\pi}{\ell}$. Тогда второе слагаемое можно представить в виде:

$$\frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{n\pi(x-t)}{\ell}\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{n\pi(x-t)}{\ell}\,dt\right)\cdot\frac{\pi}{\ell} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\omega_n(x-t)\,dt\right)\Delta\omega_n.$$

При $\ell \to \infty$ эта сумма в определённом смысле похожа на интегральную сумму для функции

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt.$$

(Промежуток $[0, \infty)$ разбит на равные отрезки длиной $\Delta\omega_n = \dfrac{\pi}{\ell}$, для составления суммы выбраны правые концы этих отрезков — числа $\omega_n = \dfrac{n\pi}{\ell}$.) Поэтому можно предположить, что при $\ell \to \infty$ (разбиение измельчается) эта сумма стремится к интегралу

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt.$$

Слагаемое $\dfrac{1}{2\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$ при $\ell \to \infty$ стремится к 0, так как

$$\left|\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx\right| \le \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|\,dx \le \frac{1}{2\ell}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx,$$

а $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ — по условию, конечная величина.

Левая часть исходного равенства — функция $f(x)$ — не изменяется при $\ell \to \infty$, поэтому, переходя к пределу, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt.$$

Эта формула — ***интегральная формула Фурье*** — справедлива в тех точках x, где функция $f(x)$ непрерывна. В точках разрыва вместо $f(x)$ слева нужно написать $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, как и для ряда Фурье.

Итак, не приводя строгого доказательства, мы пришли к следующему результату.

Теорема 10. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле на любом конечном промежутке, то в любой точке x справедлива интегральная формула Фурье:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt\,.$$

Чтобы показать аналогию интеграла Фурье и ряда Фурье, проведём некоторые преобразования. Для простоты рассматриваем точки x, где $f(x)$ непрерывна.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos\omega t\cdot\cos\omega x + \sin\omega t\cdot\sin\omega x]\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\right)\cos\omega x + \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\sin\omega x\right]d\omega\,.$$

Обозначим: $A(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$, $\quad B(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$.

Тогда получим:

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)\,d\omega\,.$$

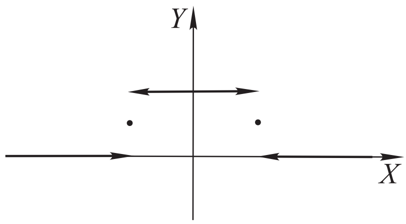
В такой записи интеграл Фурье очень похож на ряд Фурье. Частота ω здесь изменяется не дискретно (как в случае ряда Фурье), а непрерывно. Поэтому вместо суммы здесь интеграл. Формулы для коэффициентов $A(\omega)$, $B(\omega)$ вполне аналогичны формулам для коэффициентов Фурье a_n, b_n.

Наиболее важным, существенным отличием является то, что в ряд Фурье можно разложить лишь периодические функции. В виде интеграла Фурье можно представить и непериодическую функцию.

Пример 5. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1,\\ 0{,}5, & \text{если } |x| = 1,\\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. Построим график $f(x)$. Функция, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 10. Найдём коэффициенты $A(\omega)$, $B(\omega)$:



$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos\omega t\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi\omega}\sin\omega t\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega};$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sin\omega t\,dt = -\frac{1}{\pi\omega}\cos\omega t\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Значит, $f(x) = \int\limits_{0}^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)\,d\omega = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\sin\omega}{\omega}\cdot\cos\omega x\,d\omega.$
Полученное равенство справедливо и при $x = \pm 1$, так как в данном случае $f(1) = \dfrac{f(1+0)+f(1-0)}{2}$.

Замечание. При $x = 0$ из выведенной формулы следует, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Ранее этот интеграл был вычислен другим способом.

Обратим внимание: функция в примере 5 — чётная. Именно поэтому и получилось, что $B(\omega) = 0$. Действительно, если $f(x)$ — чётна, то $f(x)\cdot\sin\omega x$ — нечётна, а значит $B(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = 0$. В этом случае $f(x)\cdot\cos\omega x$ — чётна, поэтому

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt.$$

Аналогично, если $f(x)$ — нечётная функция, то

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Если требуется представить интегралом Фурье функцию, определённую на $[0, \infty)$, то можно продолжить её на всю ось так, чтобы она стала чётной (или нечётной, по желанию). Таким образом, функцию, заданную на $[0, \infty)$, можно представить различными интегралами Фурье.

Пример 6. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = e^{-kx} \quad (k > 0,\ x \geq 0).$$

Решение. Если продолжить $f(x)$ на отрицательную часть действительной оси чётным образом, то получится непрерывная функция. Так мы и поступим. Из-за чётности $B(\omega) = 0$. Найдём $A(\omega)$.

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-kt}\cos\omega t\,dt.$$

Применим формулу интегрирования по частям. Пусть $u = e^{-kt}$, $dv = \cos\omega t\,dt$. Тогда $du = -ke^{-kt}dt$, $v = \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t$, и мы получим:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{-kt}}{\omega}\sin\omega t\,\Big|_0^{\infty} + \frac{k}{\omega}\int\limits_0^{\infty} e^{-kt}\sin\omega t\,dt\right).$$

Первое слагаемое, очевидно, равно 0. Второе вычисляем опять с помощью интегрирования по частям: $u = e^{-kt}$, $dv = \sin\omega t dt$, $du = -ke^{-kt}dt$, $v = -\dfrac{1}{\omega}\cos\omega t$. Получим:

$$A(\omega) = \frac{2k}{\pi\omega}\left(-\frac{e^{-kt}}{\omega\cos\omega t}\,\Big|_0^{\infty} - \frac{k}{\omega}\int\limits_0^{\infty} e^{-kt}\cos\omega t\,dt\right) = \frac{2k}{\pi\omega}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{k}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2}A(\omega)\right).$$

Уравнение относительно $A(\omega)$ легко решается:

$$A(\omega) = \frac{2k}{\pi\omega^2} - \frac{k^2}{\omega^2}A(\omega) \;\Leftrightarrow\; A(\omega)\left(1 + \frac{k^2}{\omega^2}\right) = \frac{2k}{\pi\omega^2} \;\Leftrightarrow\; A(\omega) = \frac{2k}{\pi(k^2+\omega^2)}.$$

Подставляем найденное значение в формулу интеграла Фурье:

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \frac{2k}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Задача решена. Для положительных x отсюда, в частности, следует:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi e^{-kx}}{2k}.$$

Как и ряд Фурье, интеграл Фурье можно записать в комплексной форме. Так как внутренний интеграл в формуле Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt$$

является чётной функцией от ω, то можно записать:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt$ — нечётная функция от ω, то

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt.$$

Умножим последнее равенство на комплексное число i и прибавим к предыдущему. Используя тождество Эйлера: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos\omega(x-t)+i\sin\omega(x-t)]\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt.$$

Это и есть комплексная форма интеграла Фурье. Проведём в ней дальнейшие преобразования:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\,d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega.$$

Обозначим:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt. \qquad (*)$$

Тогда получим:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega. \qquad (**)$$

Функция $S(\omega)$ называется ***преобразованием Фурье*** функции $f(x)$. Часто преобразованием Фурье называют отображение: $f(x) \to S(\omega)$, задаваемое формулой $(*)$. Тогда обратное отображение, задаваемое формулой $(**)$, называется ***обратным преобразованием Фурье***.

Комплекснозначная функция $S(\omega)$, называемая также ***спектральной плотностью*** функции $f(x)$, несёт в себе значительную информацию о функции $f(x)$.

Иногда обозначают $S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$. В этом случае обратное преобразование Фурье имеет вид: $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{i\omega x}\, dx$. Мы пользуемся более симметричной записью.

В случае чётной функции $f(x)$ интегральную формулу Фурье можно записать так:

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\, d\omega =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\cos\omega x\, dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\cos\omega x\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt\right) d\omega.$$

Обозначим:

$$f^*(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt.$$

Тогда получим:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f^*(\omega)\cos\omega x\, d\omega\,.$$

Получили две совершенно симметричные формулы. Функция $f^*(\omega)$ называется ***косинус-преобразованием*** Фурье функции $f(x)$. Ясно, что

$$(f^*)^* \equiv f.$$

Аналогично, если $f(x)$ — нечётна, то можно рассмотреть ***синус-преобразование***:

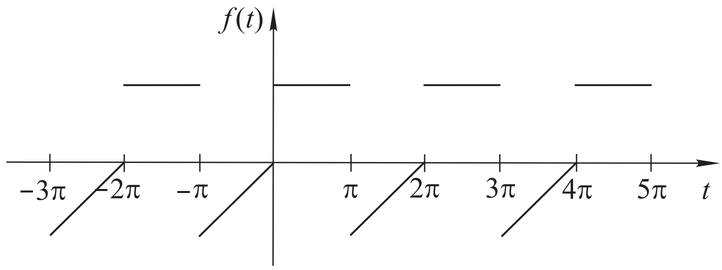
$$f_*(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt\,.$$

В этом случае также $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f_*(\omega)\sin\omega x\, d\omega$, повторное применение синус-преобразования возвращает к исходной функции: $(f_*)_* \equiv f$.

15.5. Задачи с решениями

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(t) = \begin{cases} t, & -\pi \le t \le 0\,; \\ \pi, & 0 < t < \pi. \end{cases}$

Решение. Продолжим $f(t)$ на всю прямую так, чтобы она стала периодической. Наиболее простой способ — периодическое продолжение с периодом 2π:



Функция, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Следовательно, разлагается в свой ряд Фурье: $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n = 0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots\,.$$

Найдём коэффициенты:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} t\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \pi\cos nt\,dt\,.$$

Второе слагаемое легко вычисляется. Первое слагаемое интегрируем по частям: $u = t$, $du = dt$, $dv = \cos nt dt$, $v = \dfrac{1}{n}\sin nt$. Продолжаем вычисление:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{n}\sin nt\,\Big|_{-\pi}^{0} - \int\limits_{-\pi}^{0}\frac{1}{n}\sin nt\,dt\right) +$$

$$+\,\frac{1}{n}\sin nt\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(0 - 0 + \frac{1}{n^2}\cos nt\,\Big|_{-\pi}^{0} + 0 - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{1}{\pi n^2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ \dfrac{2}{\pi n^2}, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Поскольку приходилось делить на n, то a_0 нужно вычислить отдельно:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} t\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \pi\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{t^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0} + t\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{\pi^2}{2}\right) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Вычисляем b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} t\sin nt\,dt \left|\begin{matrix} u = t, & dv = \sin nt\,dt \\ du = dt, & v = -\dfrac{1}{n}\cos nt \end{matrix}\right| + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \pi\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt\Bigg|_{-\pi}^{0} + \int\limits_{-\pi}^{0}\frac{1}{n}\cos nt\,dt\right) - \frac{1}{n}\cos nt\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nt\Bigg|_{-\pi}^{0}\right) - \frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}\cos n\pi - \frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}(1 - 2\cos n\pi) = \frac{1}{n}(1 - 2(-1)^n) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ \dfrac{3}{n}, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Запишем ответ:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}\cos(2k-1)t + a_{2k}\cos 2kt + b_{2k-1}\sin(2k-1)t + b_{2k}\sin 2kt) =$$

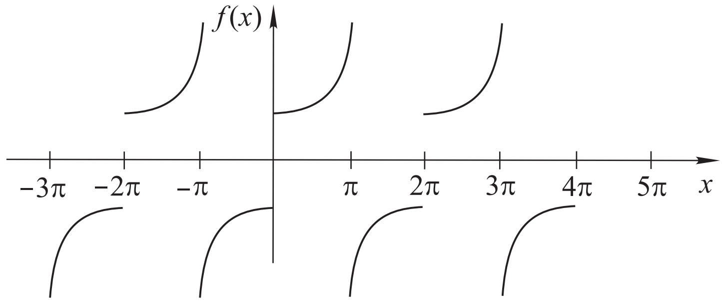
$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)t - \frac{3}{2k-1}\sin(2k-1)t + \frac{1}{2k}\sin 2kt\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos t + 3\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{9\pi}\cos 3t + \sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \ldots\,.$$

В точках разрыва сумма ряда равна не $f(t)$, а среднему арифметическому левого и правого пределов: $\dfrac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$. В точках $0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \ldots$ сумма ряда равна $\dfrac{\pi}{2}$; в точках $\pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi,\ \ldots$ сумма ряда равна 0.

2. Разложить функцию $f(x) = e^{2x}$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд Фурье по синусам.

Решение. Так как требуется разложить в ряд Фурье по синусам, то периодическое продолжение должно быть нечётным:



Для нечётной функции $a_n = 0$. Вычисляем b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{2x}\sin nx\,dx \left| \begin{matrix} u = e^{2x}, & dv = \sin nx\,dx \\ du = 2e^{2x}dx, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{e^{2x}}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi e^{2x}\cos nx\,dx\right) \left| \begin{matrix} u = e^{2x}, & dv = \cos nx dx \\ du = 2e^{2x}dx, & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{e^{2\pi}}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\left(\frac{e^{2x}}{n}\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi e^{2x}\sin nx\,dx\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{e^{2\pi}}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}\int_0^\pi e^{2x}\sin nx\,dx\right).$$

Получили: $b_n = -\dfrac{2e^{2\pi}}{\pi n}\cos n\pi + \dfrac{2}{\pi n} - \dfrac{4}{n^2}b_n$. Находим отсюда b_n:

$$b_n(1 + \frac{4}{n^2}) = \frac{2}{\pi n} - \frac{2e^{2\pi}}{\pi n}\cos n\pi,$$

$$b_n = \frac{2n}{(n^2+4)\pi}(1 - (-1)^n e^{2\pi}).$$

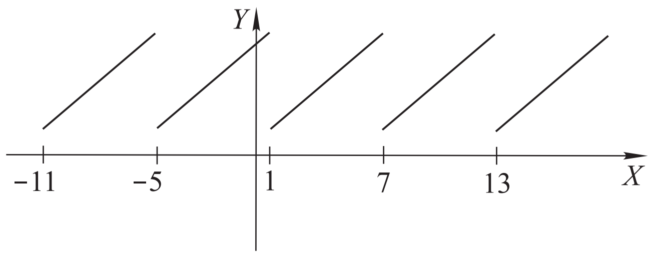
Ответ:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum \frac{n}{n^2+4}(1 - (-1)^n e^{2\pi})\sin nx,$$

за исключением точек $x = k\pi$. В них сумма ряда равна 0.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x - 2$, заданную на интервале $(7,\ 13)$.

Решение. Имеется много способов периодического продолжения функции. Выберем, например, тот, при котором получается период $T = 6$:



Функция разлагается в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{3} + b_n \sin\frac{n\pi x}{3} \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,.$$

Если периодическая функция с периодом T интегрируется по отрезку длиной T, то результат не зависит от положения отрезка. Здесь нам, конечно, удобнее интегрировать не по отрезку $[-3,\ 3]$, а по отрезку $[7,\ 13]$, так как именно на этом отрезке нам известна формула, определяющая $f(x)$.

Вычисляем коэффициенты:

$$a_n = \frac{1}{3}\int\limits_{7}^{13}(x-2)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = x-2, & dv = \cos\dfrac{n\pi x}{3}dx \\ du = dx, & v = \dfrac{3}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(x-2)\cdot 3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{7}^{13} - \frac{1}{3}\int\limits_{7}^{13}\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx =$$

$$= \frac{11}{n\pi}\sin\frac{13n\pi}{3} - \frac{5}{n\pi}\sin\frac{7n\pi}{3} + \frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{7}^{13} =$$

$$= \frac{11}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} - \frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{13n\pi}{3} - \cos\frac{7n\pi}{3}\right) = \frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Мы воспользовались периодичностью синуса и косинуса.

$$a_0 = \frac{1}{3}\int\limits_7^{13}(x-2)\,dx = \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2}-2x)\Big|_7^{13} = \frac{1}{3}\left(\frac{169}{2}-26-\frac{49}{2}+14\right) = 16.$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int\limits_7^{13}(x-2)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx \left|\begin{array}{ll} u = x-2, & dv = \sin\dfrac{n\pi x}{3}\,dx \\ du = dx, & v = -\dfrac{3}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{3}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(x-2)\cdot(-3)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_7^{13} + \frac{1}{3}\int\limits_7^{13}\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx =$$

$$= -\frac{11}{n\pi}\cos\frac{13n\pi}{3} + \frac{5}{n\pi}\cos\frac{7n\pi}{3} + \frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_7^{13} = -\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}\,.$$

Ответ:

$$f(x) = 8 + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi x}{3} - \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}\right).$$

В точках разрыва $x = 1+6k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ сумма ряда равна 8.

4. Представить функцию $f(x) = x^2$, $-4 \le x \le 4$, рядом Фурье в комплексной форме.

Решение. Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2\ell$, то представление задаётся формулой:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{\ell}}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\,e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}\,dx.$$

В нашем случае $T = 8$, $\ell = 4$. При вычислении интегралов можно обращаться с комплексной константой i так же, как с действительными числами. Обоснование этих действий будет дано позже, при изучении комплекснозначных функций. Если появляются какие–либо затруднения в работе с функцией $e^{i\varphi}$, следует обращаться к формуле Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

Найдём коэффициенты c_n:

$$c_n = \frac{1}{4}\int\limits_{-4}^{4} x^2 e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\,dx \left|\begin{array}{ll} u = x^2, & dv = e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\,dx \\ du = 2x dx, & v = -\dfrac{4}{in\pi}e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{4x^2}{in\pi}\,e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\Big|_{-4}^{4} + \frac{8}{in\pi}\int\limits_{-4}^{4} x\,e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{16}{in\pi}\,e^{-in\pi} + \frac{16}{in\pi}\,e^{in\pi} + \frac{2}{in\pi}\int\limits_{-4}^{4} x\,e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\,dx \left|\begin{matrix} u = x, & dv = e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\,dx \\ du = dx, & v = -\dfrac{4}{in\pi}\,e^{-i\frac{n\pi x}{4}} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{in\pi}\left(-\frac{4x}{in\pi}\,e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\Big|_{-4}^{4} + \frac{4}{in\pi}\int\limits_{-4}^{4} e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2}\left(-16e^{-i\pi n} - 16e^{i\pi n} - \frac{16}{in\pi}\,e^{-i\frac{n\pi x}{4}}\Big|_{-4}^{4}\right) = \frac{64}{n^2\pi^2}(-1)^n.$$

При $n = 0$ требуется отдельное вычисление:

$$c_0 = \frac{1}{4}\int\limits_{-4}^{4} x^2\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{4} = \frac{32}{3}.$$

Получаем, подставляя в общую формулу:

$$f(x) = \frac{16}{3} + \frac{32}{\pi^2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,e^{i\frac{n\pi x}{4}}\,.$$

5. Представить интегралом Фурье непериодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,\,\pi], \\ 0, & x \notin [0,\,\pi]. \end{cases}$$

Решение. Ясно, что функция абсолютно интегрируема на всей оси и на любом конечном промежутке разлагается в ряд Фурье (т. е. выполнены условия теоремы Дирихле). Значит, её можно представить интегралом Фурье:

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)\,d\omega,$$

где $\quad A(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,d,\quad B(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$

Так как $f(x)$ не является чётной или нечётной, то придётся вычислять и $A(\omega)$, и $B(\omega)$.

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t \cos\omega t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi [\sin(t+\omega t) + \sin(t-\omega t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(t+\omega t)}{1+\omega} - \frac{\cos(t-\omega t)}{1-\omega}\right]\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(\pi+\omega\pi)}{1+\omega} - \frac{\cos(\pi-\omega\pi)}{1-\omega} + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1-\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\omega\pi}{1+\omega} + \frac{\cos\omega\pi}{1-\omega} + \frac{2}{1-\omega^2}\right] = \frac{1+\cos\omega\pi}{\pi(1-\omega^2)}\,;$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t \sin\omega t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi [\cos(t-\omega t) - \cos(t+\omega t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(t-\omega t)}{1-\omega} - \frac{\sin(t+\omega t)}{1+\omega}\right]\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\pi-\omega\pi)}{1-\omega} - \frac{\sin(\pi+\omega\pi)}{1+\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega} + \frac{\sin\omega\pi}{1+\omega}\right] = \frac{\sin\omega\pi}{\pi(1-\omega^2)}\,.$$

Запишем ответ:

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{(1+\cos\omega\pi)}{\pi(1-\omega^2)}\cos\omega x + \frac{\sin\omega\pi}{\pi(1-\omega^2)}\sin\omega x\right]d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\omega x + \cos\omega\pi\cdot\cos\omega x + \sin\omega\pi\cdot\sin\omega x}{1-\omega^2}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\omega x + \cos\omega(\pi - x)}{1-\omega^2}\,d\omega.$$

6. Найти преобразование Фурье (спектральную плотность) функции $f(x) = x\,e^{-|x|}$, представить $f(x)$ интегралом Фурье в комплексной форме.

Решение. Интеграл Фурье в комплексной форме можно записать так:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega\,,$$

где $S(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt$ — преобразование Фурье (спектральная плотность) функции $f(x)$.

Найдём комплекснозначную функцию $S(\omega)$. При работе с комплексными числами будем иметь в виду замечания, сделанные при решении задачи 4.

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt\,.$$

Можно было бы, пользуясь формулой Эйлера: $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, записать:

$$S(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-|t|}\cos\omega t\, dt - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-|t|}\sin\omega t\, dt = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} t\, e^{-t}\sin\omega t\, dt.$$

Однако технически вычисления с комплексной экспонентой проще, хотя и приходится разбивать интеграл в сумму двух слагаемых:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} te^{t-i\omega t}dt + \int\limits_{0}^{\infty} t\, e^{-t-i\omega t}dt\right).$$

Вычислим каждое слагаемое:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} t\, e^{t(1-i\omega)}dt \left|\begin{array}{ll} u = t, & dv = e^{t(1-i\omega)}dt \\ du = dt, & v = \dfrac{1}{1-i\omega}e^{t(1-i\omega)} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{t}{1-i\omega}\, e^{t(1-i\omega)}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1-i\omega}\, e^{t(1-i\omega)}dt =$$

$$= -\frac{1}{(1-i\omega)^2}e^{t(1-i\omega)}\Bigg|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{(1-i\omega)^2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{t\to-\infty} t\, e^t = 0$. Так как модуль комплексного числа $|t\, e^{t(1-i\omega)}| = |t\, e^t||e^{-i\omega t}| = t\, e^t$ стремится к 0, то и само это число стремится к 0 (при $t \to -\infty$).

Аналогично:

$$\int\limits_0^\infty t\,e^{-t(1+i\omega)}dt \left| \begin{array}{ll} u=t, & dv=e^{-t(1+i\omega)}dt \\ du=dt, & v=-\dfrac{1}{1+i\omega}\,e^{-t(1+i\omega)} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{t}{1+i\omega}\,e^{-t(1+i\omega)}\Bigg|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+i\omega}e^{-t(1+i\omega)}dt =$$

$$= -\frac{1}{(1+i\omega)^2}e^{-t(1+i\omega)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{(1+i\omega)^2}.$$

Окончательно находим:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1+i\omega)^2} - \frac{1}{(1-i\omega)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}.$$

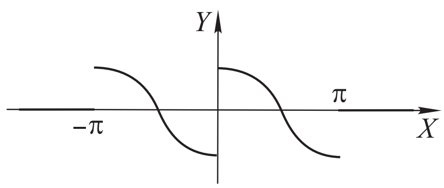
Теперь можно представить функцию комплексным интегралом Фурье:

$$f(x) = x\,e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}\,e^{i\omega x}d\omega = -\frac{2i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}\,e^{i\omega x}d\omega.$$

7. Найти синус–преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Решение. Синус-преобразование Фурье определено для нечётных функций. Поэтому продолжим $f(x)$ на всю ось так, чтобы она была нечётной. Используя связь синус-преобразования Фурье и спектральной плотности: $S(\omega) = -if_*(\omega)$, мы можем применять общую формулу для $S(\omega)$ (как в предыдущей задаче) или формулу для $f_*(\omega)$, что сейчас нам удобнее:



$$f_*(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\pi \cos t\sin\omega t\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi(\sin(\omega t+t)+\sin(\omega t-t))\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\cos(\omega t+t)}{\omega+1} - \frac{\cos(\omega t-t)}{\omega-1}\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\cos\omega\pi}{\omega+1} + \frac{\cos\omega\pi}{\omega-1} + \frac{1}{\omega+1} + \frac{1}{\omega-1}\right) = \frac{2\omega(1+\cos\omega\pi)}{\sqrt{2\pi}(\omega^2-1)}.$$

15.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. Разложить в ряд Фурье на интервале $(-\pi,\, \pi)$ функцию $f(x)$:

а) $f(x) = x$; б) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ 3x+2, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

в) $f(x) = \sin\dfrac{x}{3}$; г) $f(x) = x^2$.

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам:

а) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi; \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos t, & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$

3. Разложить в ряд Фурье на интервале $(a,\, b)$ заданную функцию:

а) $f(x) = e^x;\ x \in (-2,\, 2)$; б) $f(x) = \begin{cases} 2, & 2 \le x \le 6, \\ 3, & 6 < x < 12. \end{cases}$

4. Разложить в ряд Фурье по синусам:

а) $f(x) = 2x - 2;\ x \in (1,\, 2)$; б) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2};\ x \in (0,\, 3)$.

5. Представить функции рядом Фурье в комплексной форме:

а) $f(x) = x;\ \ x \in (-2,\, 2)$; б) $f(x) = e^{3x};\ \ x \in (-3,\, 3)$.

6. Представить интегралом Фурье следующие непериодические функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

в) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi/2, \\ 0, & |x| \ge \pi/2. \end{cases}$

7. Представить функцию $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{2}, & 0 < t < 2, \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$ интегралом Фурье, продолжая её на всю ось:

а) чётным образом; б) нечётным образом.

8. Найти преобразование Фурье (спектральную плотность) следующих функций, представить их интегралом Фурье в комплексной форме:

а) $f(x) = \begin{cases} 3, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{-|x|}$;

в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0\ , & x > \pi; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \ge 1, \\ 0, & |x| < 1. \end{cases}$

9. Найти синус–преобразование и косинус–преобразование Фурье следующих функций:

а) $f(x) = e^{-3x}$; $x > 0$; б) $f(x) = \begin{cases} 2\sin^2 x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0\ , & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

15.7. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Чему равен период функции, если её ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{3} + b_n \sin\frac{\pi n x}{3}\ ?$$

2. Найти коэффициент при $\sin x$ в разложении функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi,\, 0), \\ 5\pi, & x \in [0,\, \pi] \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\, \pi]$ (взять продолжение с периодом $T = 2\pi$).

3. Найти коэффициент при $\cos\dfrac{2\pi x}{5}$ в разложении функции $f(x) = x$, $x \in (0,\, 5)$, в ряд Фурье по косинусам (взять продолжение с периодом $T = 10$).

4. Найти норму элемента $f(x) = 6x\sqrt{x}$ в гильбертовом пространстве непрерывных на $[0,\, 1]$ функций.

5. Найти значение интеграла Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \in (0,\, 3), \\ 0, & x \notin (0,\, 3) \end{cases}$$

в точке $x = 3$.

6. Пределом равномерно сходящейся на отрезке $[a,\, b]$ последовательности алгебраических многочленов может быть: 1) только функция, имеющая производные всех порядков; 2) любая непрерывная на $[a,\, b]$ функция; 3) любая кусочно-непрерывная на $[a,\, b]$ функция. Указать номер правильного ответа.

ГЛАВА 16

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определённая на прямоугольнике

$$\Delta = [a,\, b] \times [c,\, d] = \{(x,\, y) \mid a \le x \le b,\, c \le y \le d\}.$$

Если для любого $y \in [c,\, d]$ существует интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то этот интеграл является функцией от переменной y (которая и называется здесь параметром):

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Таким образом, мы получаем новый способ задания функции — в виде интеграла, зависящего от параметра.

Пример 1. Рассмотрим функцию $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \sin\alpha x\,dx$. В этом примере интеграл легко вычислить:

$$\int\limits_0^1 \sin\alpha x\,dx = -\,\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\,\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{\alpha}(\cos\alpha - 1) = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}.$$

Значит, $I(\alpha)$ можно задать и обычным способом: $I(\alpha) = \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha}$.

Однако часто встречаются интегралы, которые не выражаются через элементарные функции. Тогда приходится работать с функцией, заданной в виде интеграла с параметром. Значит, нужно научиться работать с такими функциями — в частности, знать правила их дифференцирования и интегрирования.

Возможна и более сложная ситуация, когда от параметра зависит не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования:

$$I(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

16.1. Основные теоремы

16.1.1. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 1 (*о непрерывности интеграла с параметром*). Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta = [a, b] \times [c, d]$, то функция $I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.

Доказательство. По теореме Кантора, непрерывная на компактном множестве Δ функция является равномерно непрерывной, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x', x'', y', y''\ \ |x' - x''| < \delta,\ \ |y' - y''| < \delta\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ |f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Возьмём $x' = x'' = x$, $y' = y$, $y'' = y + \Delta y$. Тогда из равномерной непрерывности следует:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 :\ |\Delta y| < \delta\ \ \Rightarrow\ \ |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Оценим теперь приращение функции $I(y)$:

$$|\Delta I| = |I(y + \Delta y) - I(y)| = \left| \int\limits_a^b f(x, y + \Delta y)\, dx - \int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right| \le$$
$$\le \int\limits_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)|\, dx \le \frac{\varepsilon}{b - a} \int\limits_a^b dx = \varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0 :\ |\Delta y| < \delta\ \Rightarrow\ |\Delta I| < \varepsilon$, что и означает непрерывность функции $I(y)$.

Замечание. В теореме 1 требуется, чтобы $f(x, y)$ была непрерывна по обеим переменным ***в совокупности***, т. е. чтобы

$$\forall (x_0\,, y_0) \in \Delta\ \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Недостаточно, чтобы $f(x, y)$ была непрерывной ***по каждой*** из переменных. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0), \\ \quad 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

непрерывна по x (при любом фиксированном y), и непрерывна по y (при любом фиксированном x). Однако она не является непрерывной в точке $(0,\ 0)$ функцией (по совокупности переменных): предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ не существует. В данном случае несправедлив и вывод теоремы 1; например, функция

$$I(y) = \int\limits_0^1 \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx = y\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,d(x^2+y^2) = y\ln(x^2+y^2)\,\Big|_0^1 = y\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$$

разрывна в точке $y = 0$.

Так как непрерывность $I(y)$ означает, по определению, что $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$ в любой точке y_0, то непосредственно из теоремы 1 вытекает

Теорема 2 (*о предельном переходе под знаком интеграла*). Если $f(x,y)$ непрерывна на $\Delta = [a,\, b]\times[c,\, d]$, то для любого $y_0 \in [c,\, d]$

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx.$$

Если $\varphi(y), \psi(y)$ — непрерывные функции, а $f(x,y)$ непрерывна на множестве

$$\{\,(x,y)\ \mid\ \varphi(y)\le x\le \psi(y),\ c\le y\le d\}\,,$$

то можно доказать, что

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_{\varphi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)\,dx.$$

Это утверждение усиливает теоремы 1 и 2.

Ещё одно усиление теорем 1, 2 связано с заменой требования непрерывности $f(x,y)$ более слабым условием.

Теорема 3. Если $f(x,y)$ непрерывна по x (при любом фиксированном y) и $f(x,y)$ ***равномерно сходится*** к функции $g(x)$ при $y\to y_0$, то

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Равномерная сходимость: $f(x,y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$ означает:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ :\ \forall y\quad |y-y_0|<\delta\quad\Rightarrow\quad |f(x,y)-g(x)|<\varepsilon\quad(\forall\, x).$$

Доказательство просто — оно проводится с помощью той же оценки, что и доказательство теоремы 1.

Теорема 3 справедлива также в случае $y\to\infty$, лишь определение равномерной сходимости имеет другой вид:

$$f(x,y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)\ \text{ при }\ y\to\infty\quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon\ \exists M : \forall y\ge M\ \ |f(x,y)-g(x)|<\varepsilon\ \ (\forall x).$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{2y}^{3y+4}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

Решение. Так как функции $2y$, $3y+4$, $\sqrt{x^2+y^2}$ непрерывны при любых x, y, то возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{2y}^{3y+4}\sqrt{x^2+y^2}\,dx = \int\limits_{0}^{4}\sqrt{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = 8.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{y\to\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{xe^y}{e^x+e^y}\,dx$.

Решение. Подинтегральная функция непрерывна при любых x, y и при $y\to\infty$ стремится к $g(x)=x$:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{xe^y}{e^x+e^y} = x\lim_{y\to\infty}\frac{1}{e^{x-y}+1} = x.$$

Эта сходимость равномерная, так как $\forall x\in[0,\,1]$

$$\left|x-\frac{xe^y}{e^x+e^y}\right| = |x|\cdot\left|1-\frac{e^y}{e^x+e^y}\right| = |x|\cdot\frac{e^x}{e^x+e^y} \le \frac{e}{1+e^y} < \varepsilon\,,$$

если только $y > \ln\left(\frac{e}{\varepsilon}-1\right)$. Значит, возможен переход к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{y\to\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{xe^y}{e^x+e^y}\,dx = \int\limits_{0}^{1}x\,dx = \frac{1}{2}.$$

16.1.2. Дифференцирование по параметру

Теорема 4. Пусть функция $f(x,y)$ и её частная производная по переменной y непрерывны на $\Delta=[a,\,b]\times[c,d]$. Тогда

$$I'(y) = \left(\int\limits_{a}^{b}f(x,y)\,dx\right)' = \int\limits_{a}^{b}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,.$$

Другим словами, производную можно вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла.

Доказательство. Вычисляем производную по определению:

$$I'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int\limits_a^b f(x,y+\Delta y)\,dx-\int\limits_a^b f(x,y)\,dx}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\int\limits_a^b\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\,dx.$$

Осталось доказать, что можно перейти к пределу под знаком интеграла. Чтобы воспользоваться теоремой 3, докажем, что

$$\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Применим теорему Лагранжа:

$$\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,c)\cdot\Delta y}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,c),$$

где $c\in[y,y+\Delta y]$. По условию, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ — непрерывна, а значит, по теореме Кантора, и равномерно непрерывна. Отсюда следует, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0:\ |\Delta y|<\delta\ \ \Rightarrow\ \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,c)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|<\varepsilon\ \ (\forall\,x),$$

но это и означает равномерную сходимость:

$$\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,c)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Применяя теорему 3, получаем то, что требовалось: $I'(y)=\int\limits_a^b\dfrac{\partial f}{\partial y}\,dx$.

Пример 4. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\,dx$ в точке $y=2$.

Решение. Можно, вычислив интеграл, найти ***явное*** выражение для функции $I(y)$, а затем продифференцировать. Проще, однако, применить теорему 4:

$$I'(y)=\int\limits_0^1\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y dx=\int\limits_0^1\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)dx=-\int\limits_0^1\frac{x}{x^2+y^2}\,dx=$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,d(x^2+y^2) = -\,\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(\ln(1+y^2)-\ln y^2),$$

$$I'(2) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\Bigg|_{y=2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}.$$

При $x \in [0,\,1]$ и значениях y, близких к 2, функция $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ и её частная производная $\dfrac{-x}{x^2+y^2}$, очевидно, непрерывны.

Дифференцирование по параметру иногда можно применять для вычисления интегралов.

Пример 5. Вычислить $I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + a^2\cos^2 x)\,dx$ при $a > 1$.

Решение. Найдём производную интеграла по параметру a. Легко проверить, что требования теоремы 4 соблюдены, поэтому

$$I'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin^2 x + a^2\cos^2 x))'_a dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\cos^2 x}{\sin^2 x + a^2\cos^2 x}\,dx.$$

Применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1},\quad \sin^2 x = 1 - \frac{1}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1},\quad dx = d(\operatorname{arctg}\,t) = \frac{1}{t^2+1}\,dt.$$

Если $x \to 0$, то $t \to 0$, если $x \to \dfrac{\pi}{2}$, то $t \to \infty$. Продолжаем вычисление:

$$I'(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{2a\dfrac{1}{t^2+1}}{\dfrac{t^2}{t^2+1} + \dfrac{a^2}{t^2+1}} \cdot \frac{dt}{t^2+1} = \int\limits_0^{\infty} \frac{2a}{(t^2+a^2)(t^2+1)}\,dt =$$

$$= \frac{2a}{1-a^2}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{t^2+a^2} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{2a}{1-a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} - \operatorname{arctg} t\right)\Bigg|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{2a}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi(1-a)}{1-a^2} = \frac{\pi}{1+a}.$$

Теперь, вычисляя интеграл, получим:

$$I(a) = \int \frac{\pi}{1+a}\,da = \pi\ln(1+a) + C.$$

Константу C найти легко, так как

$$I(1) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = 0.$$

Отсюда: $\pi \ln 2 + C = 0$, т. е. $C = -\pi \ln 2$. Окончательно получаем:

$$I(a) = \pi \ln(1+a) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{1+a}{2}.$$

Научимся теперь вычислять производные в случае, если от параметра зависит не только подинтегральная функция, но и пределы интегрирования.

Теорема 5. Пусть $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $\Delta = [a,b] \times [c,d]$; пусть функции $\alpha(y), \beta(y)$ при $y \in [c,d]$ дифференцируемы, причём $a \leq \alpha(y) \leq b$, $a \leq \beta(y) \leq b$. Тогда

$$I'(y) = \left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) dx \right)' = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y).$$

Доказательство. Возьмём произвольную точку $y_0 \in [c,d]$ и воспользуемся аддитивностью интеграла:

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx = \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\, dx + \int\limits_{a(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\, dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx.$$

Найдём производную 3-го слагаемого по определению:

$$\left(\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx \right)' = \lim_{y \to y_0} \frac{\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx - \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\, dx}{y - y_0} =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{y-y_0} \cdot \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{y-y_0} \cdot (\beta(y) - \beta(y_0)) \cdot f(c,y) =$$

$$= \beta'(y_0) \cdot f(\beta(y_0), y_0).$$

Мы воспользовались теоремой о среднем для определённого интеграла, а затем — непрерывностью $f(x,y)$ и дифференцируемостью $\beta(y)$. В точности так же вычисляется и производная 1-го слагаемого:

$$\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\,dx\right)' = \left(-\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx\right)' = -\alpha'(y_0)\cdot f(\alpha(y_0),y_0).$$

Производная 2-го слагаемого вычисляется по теореме 4:

$$\left(\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx\right)' = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx.$$

Складывая все 3 слагаемые, получим требуемую формулу.

Пример 6. Найти производную функции $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}\,dy$.

Решение. Здесь требуется дифференцировать интеграл по параметру x. Действуем по формуле теоремы 5:

$$f'(x) = \int\limits_0^x \left(\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}\right)'_x dy + \frac{\sin(x+x)}{\cos(x-x)} =$$

$$= \int\limits_0^x \frac{\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y)\sin(x-y)}{\cos^2(x-y)}\,dy + \sin 2x =$$

$$= \int\limits_0^x \frac{\cos(x+y-x+y)}{\cos^2(x-y)}\,dy + \sin 2x = \int\limits_0^x \frac{\cos 2y}{\cos^2(x-y)}\,dy + \sin 2x.$$

16.1.3. Интегрирование по параметру

Теорема 6. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $\Delta = [a,b]\times[c,d]$. Рассмотрим $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Тогда

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Или, что то же самое,

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Докажем более общее соотношение. Пусть t — произвольная точка отрезка $[c,\, d]$. Докажем, что

$$\int_c^t dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^t f(x,y)\,dy. \qquad (*)$$

Найдём производную по t от каждой части этого равенства. Применяя теорему 5 (или давно известную нам теорему об интеграле с переменным верхним пределом), получим:

$$\left(\int_c^t dy \int_a^b f(x,y) dx\right)'_t = \int_a^b f(x,t)\,dx.$$

В правой части равенства $(*)$ — интеграл, зависящий от параметра t. Дифференцируем его, применяя теорему 4:

$$\left(\int_a^b dx \int_c^t f(x,y)\,dy\right)'_t = \int_a^b \left(\int_c^t f(x,y)\,dy\right)'_t dx = \int_a^b f(x,t)\,dx.$$

Одинаковые результаты говорят о том, что функции в левой и правой частях равенства $(*)$ отличаются лишь на константу: $\int_c^t dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^t f(x,y)\,dy + C$. Это верно $\forall\, t \in [c,d]$. В частности, при $t = c$ получим: $0 = 0 + C$, т. е. $C = 0$, и равенство доказано. Если применить его при $t = d$, получим утверждение теоремы.

Пример 7. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy$.

Решение. Интегрирование в указанном порядке затруднительно:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x^y}{\ln x}\bigg|_a^b \right) dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = ?$$

Пользуясь теоремой 6, изменим порядок интегрирования.

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y\,dx = \int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\bigg|_0^1 \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln|1+y|\,\bigg|_a^b = \ln\left|\frac{b+1}{a+1}\right|.$$

Интеграл вычислен. Попутно получено соотношение:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\left|\frac{b+1}{a+1}\right|.$$

Приведём пример, показывающий, что при нарушении непрерывности подинтегральной функции изменение порядка интегрирования может привести к другому результату.

Пример 8. Вычислим интеграл:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx = \int_0^1 dy \int_0^1 \left(\frac{-y-x}{(x+y)^3} + \frac{2y}{(x+y)^3}\right) dx =$$
$$= \int_0^1 dy \left(-\int_0^1 \frac{dx}{(x+y)^2} + 2y\int_0^1 \frac{dx}{(x+y)^3}\right) =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+y}\Bigg|_0^1 + \frac{2y}{-2}\frac{1}{(x+y)^2}\Bigg|_0^1\right) dy =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{y} - \frac{y}{(1+y)^2} + \frac{1}{y}\right) dy = \int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{1+y}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

При вычислении в другом порядке можно заметить, что если сменить знак подинтегральной функции, то получится уже рассмотренный интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dy = -\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = -\frac{1}{2}.$$

Разные ответы — из–за того, что подинтегральная функция в точке (0, 0) имеет разрыв.

16.2. Несобственные интегралы с параметром

Перейдём к изучению несобственных интегралов, зависящих от параметра. Наиболее простая запись такого интеграла — это по–прежнему

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

но здесь либо $b = \infty$, либо функция $f(x,y)$ не ограничена в окрестности точки $x = b$. Для краткости будем говорить, что интеграл имеет ***особенность*** в точке $x = b$. Переменная y принимает значения на отрезке $[c,d]$ (или на неограниченном промежутке, например $[c,\infty)$).

При изучении несобственных интегралов вида $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ мы обращали внимание на их аналогию с числовыми рядами. Аналогичны не только термины («сходится», «расходится»), но и существо дела. Например, признаки сравнения для несобственных интегралов и числовых рядов формулируются и доказываются одинаково. В интегральном признаке сходимости числовых рядов прямо сопоставляются несобственный интеграл и числовой ряд:

$$\int\limits_1^\infty f(x)\,dx \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

Похожая ситуация имеет место и для несобственных интегралов, зависящих от параметра. Но здесь аналогия устанавливается не с числовыми, а с ***функциональными*** рядами:

$$\int\limits_1^\infty f(x,y)\,dx \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty f(n,y).$$

Функциональные ряды мы изучали в 14-й главе, теперь можно сравнить и сопоставить их свойства со свойствами несобственных интегралов с параметром.

Важным в теории функциональных рядов было понятие равномерной сходимости. Оказывается, и здесь оно играет ключевую роль.

Дадим определения. Интеграл $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ с особенностью в точке $x = b$ ***сходится*** на $[c,d]$, если $\forall y \in [c,d]$ интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится, т. е. существует конечный $\lim\limits_{t\to b}\int\limits_a^t f(x,y)\,dx$. Будем говорить, что $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится ***равномерно*** на $[c,d]$, если $\int\limits_a^t f(x,y)\,dx \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} I(y)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists U(b)$ (окрестность точки $x = b$) $: \ \forall t \in U(b), \ \ \forall y \in [c,d]$

$$\left|\int\limits_a^t f(x,y)\,dx - \int\limits_a^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Пример 9. Рассмотрим интеграл $I(y) = \int\limits_0^\infty ye^{-xy}\,dx$, где $y \in [0,\infty)$. Он сходится в каждой точке $y \in [0,\infty)$. Действительно, если $y = 0$, то и $I(y) = 0$. Пусть $y \neq 0$:

$$I(y) = -\int\limits_0^\infty e^{-xy} d(-xy) = -e^{-xy}\Big|_0^\infty = -\left(\lim_{x\to\infty} e^{-xy} - 1\right) = -(0-1) = 1.$$

Возьмём какое-либо число $c > 0$ и покажем, что на промежутке $[c,\infty)$ наш интеграл сходится равномерно. Обозначим:

$$F(t,y) = \int\limits_0^t ye^{-xy}\,dx = -\int\limits_0^t e^{-xy}\,d(-xy) = -e^{-xy}\Big|_0^t = -e^{-ty} + 1.$$

Требуется доказать, что $F(t,y) \underset{[c,\infty]}{\rightrightarrows} I(y) = 1$, т. е.

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists M : \forall t > M, \;\; \forall y \in [c,\infty)$$
$$|F(t,y) - I(y)| = |-e^{-ty} + 1 - 1| = e^{-ty} < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство, найдём t:

$$-ty < \ln\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad ty > -\ln\varepsilon = \ln\tfrac{1}{\varepsilon} \quad\Leftrightarrow\quad t > \frac{1}{y}\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Итак, можно взять $M = \dfrac{1}{c}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда, если $t > M$, то $t > \dfrac{1}{y}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$, а значит будет выполнено $(\forall\, y \in [c,\infty))$ неравенство $|F(t,y) - I(y)| < \varepsilon$, что и означает равномерную сходимость.

Заметим, что на множестве $[0,\infty)$ равномерной сходимости нет. Действительно, для равномерной сходимости требуется, чтобы $\forall\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $t > \dfrac{1}{y}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$ при достаточно больших t. Однако ясно, что если $\varepsilon < 1$, то не существует числа t, для которого это выполняется при любом $y \in (0,\infty)$.

Доказательство равномерной сходимости несобственных интегралов удобно проводить с помощью признака Вейерштрасса — как и в случае функциональных рядов.

Теорема 7 (*признак Вейерштрасса равномерной сходимости*). Если для интеграла $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ существует ***мажорирующий*** его сходящийся интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, т. е. $|f(x,y)| \le \varphi(x)$ $(\forall x \in [a,b), \; \forall y \in \; [c,d])$, то $I(y)$ сходится на $[c,d]$ равномерно.

Доказательство не приводится. Покажем лишь применение признака Вейерштрасса на примерах.

Пример 10. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$ равномерно сходится на всей оси, так как $\forall y$ справедливо неравенство $\frac{1}{1+x^2+y^2}\le\frac{1}{1+x^2}$, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ сходится:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg}x\,\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)=\pi.$$

Пример 11. Интеграл $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx$, зависящий от параметра α, сходится равномерно на любом промежутке $[c,\infty)$, если $c>0$.

Проверим, что мажорирующим для данного является интеграл $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-cx^2}dx$ (здесь c, в отличие от α, постоянное число). Действительно,

$$e^{-\alpha x^2}\le e^{-cx^2}\quad(\forall\alpha\in[c,\infty)),$$

и нужно лишь доказать, что интеграл $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-cx^2}dx$ сходится. Так как $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-cx^2}dx=\int\limits_{0}^{1}e^{-cx^2}dx+\int\limits_{1}^{\infty}e^{-cx^2}dx$, то сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-cx^2}dx$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}e^{-cx^2}dx$ (функция e^{-cx^2} непрерывна, поэтому $\int\limits_{0}^{1}e^{-cx^2}dx$ — конечное число). Для интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}e^{-cx^2}dx$ применим признак сравнения: при $x\ge1$ выполнено неравенство $e^{-cx^2}\le e^{-cx}$, а интеграл

$$\int\limits_{1}^{\infty}e^{-cx}dx=-\frac{1}{c}\,e^{-cx}\,\Big|_{1}^{\infty}=\frac{e^{-c}}{c},$$

т. е. сходится. По признаку сравнения, сходится и $\int\limits_{1}^{\infty}e^{-cx^2}dx$.

Без доказательств сформулируем теоремы о непрерывности интеграла с параметром, о дифференцировании и интегрировании по параметру, аналогичные теоремам о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда, о почленном дифференцировании и интегрировании таких рядов.

С другой стороны, эти теоремы похожи на соответствующие теоремы раздела 16.1, где рассматриваются собственные интегралы с параметром. Отличие в том, что для несобственных интегралов везде требуется равномерная сходимость. В формулировках теорем $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ — несобственный интеграл с особенностью в точке $x = b$.

Теорема 8. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Delta = [a,b) \times [c,d]$, а интеграл $I(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$, то $I(y)$ — непрерывная на $[c,d]$ функция, и для любого $y_0 \in [c,d]$ справедливо:

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

Теорема 9. Пусть $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны на $\Delta = [a,b) \times [c,d]$. Если интеграл $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится в каждой точке $[c,d]$, а интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, то

$$I'(y) = \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)' = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

Теорема 10. Если $f(x,y)$ непрерывна на $\Delta = [a,b) \times [c,d]$ и $I(y)$ сходится равномерно на конечном отрезке $[c,d]$, то

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Замечание. Равномерной сходимости на ***бесконечном*** промежутке уже недостаточно — изменение порядка интегрирования в этом случае может привести к изменению результата.

16.3. Гамма-функция

Среди функций, которые не являются элементарными, одной из важнейших является так называемая гамма-функция, определяемая в виде несобственного интеграла, зависящего от параметра:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Мы рассмотрим наиболее важные свойства этой функции.

Область определения функции $\Gamma(s)$ состоит из тех чисел s, для которых несобственный интеграл сходится. Кроме бесконечного верхнего предела интеграл $\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ при $s < 1$ имеет ещё особенность в точке $x = 0$. Поэтому представим его в виде суммы:

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = I_1 + I_2.$$

Интеграл I_2 сходится при любом s. Действительно, вычислим предел (применяя, если нужно, несколько раз правило Лопиталя):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0.$$

Значит, при больших $x: \ x^{s-1}e^{-x} < \dfrac{1}{x^2}$. Но мы знаем, что $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{x^2}\,dx$ сходится.

Поэтому, по признаку сравнения, $\int\limits_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ тоже сходится.

Рассмотрим теперь $I_1 = \int\limits_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ и сравним его с интегралом $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^{1-s}}\,dx$ с помощью предельного признака сравнения (теорема $3'$ из 8.2):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{\dfrac{1}{x^{1-s}}} = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1.$$

Так как получилось конечное ненулевое число, то либо оба интеграла сходятся, либо оба расходятся. Легко установить (и это было сделано в 8.2), что $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{1-s}}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $1 - s < 1$, т. е. при $s > 0$. Следовательно, интеграл I_1, а вместе с ним и $\Gamma(s) = I_1 + I_2$ сходятся только при $s > 0$. Область определения $\Gamma(s)$ — все положительные действительные числа.

Без доказательства отметим, что функция $\Gamma(s)$ дифференцируема (а значит и непрерывна) в любой точке $s > 0$, причём

$$\Gamma'(s) = \int\limits_0^\infty (x^{s-1}e^{-x})'_s dx = \int\limits_0^\infty x^{s-1}\ln x \cdot e^{-x} dx.$$

Более того, существуют производные всех порядков:

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}(\ln x)^n e^{-x} dx.$$

Для вывода важного свойства гамма-функции, проведём вычисления:

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \left| \begin{array}{ll} u = e^{-x}, & du = -e^{-x}dx, \\ dv = x^{s-1}dx, & v = \dfrac{x^s}{s} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^s}{s}\,e^{-x}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \frac{x^s}{s}\,e^{-x}dx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^s}{s}\,e^x + \frac{1}{s}\int\limits_0^\infty x^s e^{-x}dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\,\Gamma(s+1) = \frac{1}{s}\,\Gamma(s+1).$$

Итак,

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma(s+2) = \Gamma(s+1)\cdot s\cdot\Gamma(s),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Gamma(s+n) = (s+n-1)(s+n-2)\dots(s+1)\cdot s\cdot\Gamma(s).$$

В частности, при $s = 1$ получаем:

$$\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1).$$

Значение $\Gamma(1)$ легко вычислить:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1.$$

Поэтому $\Gamma(n+1) = n!$. Мы получили, что дифференцируемая функция $\Gamma(s)$ является продолжением факториала (определённого лишь для натуральных чисел) на множество всех положительных действительных чисел.

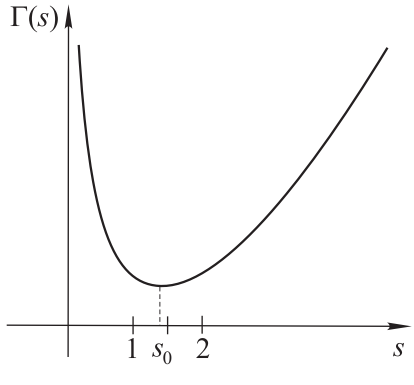
Так как $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$, то, по теореме Ролля, на отрезке $[1,2]$ есть точка, где производная обращается в 0. Вторая производная, очевидно, во всех точках положительна:

$$\Gamma''(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot \ln^2 x \cdot e^{-x} dx > 0$$

(так как подинтегральная функция положительна). Значит, точка s_0, где $\Gamma'(s_0) = 0$, является точкой минимума. Можно вычислить:

$$s_0 = 1{,}4616\ldots, \quad \Gamma(s_0) = 0{,}8856\ldots .$$

График функции $\Gamma(s)$ имеет следующий вид.



Приведём без доказательства ещё одну важную формулу, называемую ***формулой дополнения***:

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

В частности, при $s = \dfrac{1}{2}$: $\left(\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = \pi$, т. е. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Формула $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ и формула дополнения позволяют выразить любое значение гамма-функции через её значения на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Для использования Г-функции в практических расчётах составлены подробные таблицы.

16.4. Задачи с решениями

1. Найти производную функции $f(x) = \int\limits_x^{x^2} \ln(x^2 + y^2)\,dy$.

Решение. Здесь от параметра x зависит не только подинтегральная функция, но и пределы интегрирования. Поэтому применяем формулу, выведенную в теореме 5:

$$f'(x) = \int\limits_x^{x^2} (\ln(x^2 + y^2))'_x\,dy + (x^2)'\ln(x^2 + x^4) - (x)'\ln(x^2 + x^2) =$$

$$= \int\limits_x^{x^2} \frac{2x}{x^2 + y^2}\,dy + 2x\ln(x^2 + x^4) - \ln(2x^2).$$

В этом примере можно вычислить интеграл и записать ответ в явном виде:

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_x^{x^2} + 2x\ln(x^2 + x^4) - \ln(2x^2) =$$

$$= 2\operatorname{arctg} x - 2\operatorname{arctg} 1 + 2x\ln(x^2 + x^4) - \ln(2x^2) =$$

$$= 2\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} + 2x\ln(x^2 + x^4) - \ln(2x^2).$$

2. Вычислить $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, если $f(x) = \int\limits_1^3 y^x \ln y\,dy$.

Решение. Так как подинтегральная функция непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [1, 3]$, то можно изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^3 y^x \ln y\,dy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^1 y^x \ln y\,dx =$$

$$= \int\limits_1^3 (y^x)\Big|_0^1 dy = \int\limits_1^3 (y - 1)\,dy = \left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Big|_1^3 = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 = 2.$$

3. Доказать что несобственный интеграл $I(s) = \int\limits_1^\infty x^{s-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx$ равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Так как $\ln x < x$, то при $x \geq 1$

$$x^{s-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} < x^s e^{-x} \leq x\, e^{-x}.$$

Интеграл $\int\limits_1^\infty x\, e^{-x} dx$ сходится:

$$\int\limits_1^\infty x\, e^{-x} dx \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{-x} dx, & v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x\, e^{-x} \Big|_1^\infty + \int\limits_1^\infty e^{-x} dx =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} + e^{-1} - e^{-x} \Big|_1^\infty = e^{-1} + e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

Значит, интеграл $\int\limits_1^\infty x\, e^{-x} dx$ является мажорирующим для $I(s)$. По признаку Вейерштрасса, $I(s)$ равномерно сходится.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^{a-1} \ln x\, dx \quad (a > 0)$.

Решение. Интеграл является несобственным с особенностью в точке $x = 0$: при $x \to 0$ неограничен и логарифм, и функция x^{a-1} (при $a < 1$). Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 x^{a-1}\, dx$. Он сходится и легко вычисляется: $\int\limits_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{x^a}{a} \Big|_0^1 = \frac{1}{a}$. Искомый интеграл можно получить из этого путём дифференцирования по параметру a. Однако, чтобы применить теорему 9, нужно убедиться в равномерной сходимости интеграла $\int\limits_0^1 x^{a-1} \ln x\, dx$. Докажем, что этот интеграл равномерно сходится на любом промежутке $[a_0, \infty)$, где $a_0 > 0$. Для этого следует найти мажорирующий сходящийся интеграл. Заметим: так как $x \in (0, 1)$, то

$$|x^{a-1} \ln x| \leq x^{a_0 - 1} |\ln x|.$$

Теперь нужно доказать, что интеграл $\int\limits_0^1 x^{a_0-1}\,|\ln x|\,dx$ сходится. Сравним его с $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\varepsilon}\,dx$, где число $\varepsilon \in (1-a_0, 1)$. Вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{a_0-1}\,|\ln x|}{\dfrac{1}{x^\varepsilon}} = \lim_{x\to 0} x^{\varepsilon+a_0-1}\,|\ln x| = 0$$

(степень x положительна, неопределённость $0\cdot\infty$ легко раскрывается по правилу Лопиталя). Следовательно, при малых x

$$x^{a_0-1}\,|\ln x| < \frac{1}{x^\varepsilon},$$

а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\varepsilon}\,dx$ сходится. Поэтому $\int\limits_0^1 x^{a_0-1}\,|\ln x|\,dx$ сходится. Значит, $\int\limits_0^1 x^{a-1}\ln x\,dx$ сходится равномерно и можно применить теорему 9:

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}\ln x\,dx = \int\limits_0^1 (x^{a-1})'_a dx = \left(\int\limits_0^1 x^{a-1}dx\right)' = \left(\frac{1}{a}\right)' = -\frac{1}{a^2}.$$

5. Вычислить $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+2)^2}$.

Решение. Рассмотрим интеграл, зависящий от параметра:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a}.$$

Он легко вычисляется: $I(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$. Применим к нему теорему о дифференцировании по параметру:

$$I'(a) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{x^2+a}\right)'_a dx = -\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a)^2}\,dx.$$

С другой стороны, $I'(a) = \left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)' = -\dfrac{\pi}{4\sqrt{a^3}}$. Значит,

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+2)^2} = I'(2) = \frac{\pi}{4\sqrt{8}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\,.$$

Дифференцирование по параметру законно, так как при $a > 0$

$$\frac{1}{(x^2+a)^2} \le \frac{1}{x^4},$$

и сходящийся интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ является мажорирующим для $\int\limits_1^\infty \frac{1}{(x^2+a)^2}\,dx$. Поэтому $\int\limits_1^\infty \frac{1}{(x^2+a)^2}\,dx$, а следовательно и $\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a)^2}\,dx$, сходятся равномерно.

6. Вычислить интеграл Эйлера–Пуассона $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Решение. Сделаем замену переменной: $x = ut$, где $u > 0$ — параметр. Тогда

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-u^2t^2}u\,dt.$$

Умножим это равенство на e^{-u^2} и проинтегрируем в пределах от 0 до ∞:

$$\int\limits_0^\infty Ie^{-u^2}du = \int\limits_0^\infty du\int\limits_0^\infty e^{-u^2}e^{-u^2t^2}u\,dt.$$

Левая часть: $\int\limits_0^\infty Ie^{-u^2}du = I\cdot\int\limits_0^\infty e^{-u^2}du = I^2$. Вычисляем правую часть, изменяя порядок интегрирования:

$$I^2 = \int\limits_0^\infty du\int\limits_0^\infty e^{-u^2(t^2+1)}u\,dt = \int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty e^{-u^2(t^2+1)}u\,du =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dt\left(\frac{1}{t^2+1}\,e^{-u^2(t^2+1)}\Big|_0^\infty\right) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\,\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}\,.$$

Следовательно, $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Правомерность изменения порядка интегрирования оставляем здесь без доказательства.

7. Вычислить $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, не используя формулу дополнения для гамма-функции.

Решение. Сделаем замену переменной:

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx\ \left|x = t^2\right| = 2\int\limits_0^\infty t^{2s-2}e^{-t^2}\cdot t\,dt = 2\int\limits_0^\infty t^{2s-1}e^{-t^2}dt.$$

Подставим $s = \dfrac{1}{2}$ и воспользуемся интегралом Эйлера – Пуассона:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

16.5. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_0^1 te^{xt}dt$;

б) $\lim\limits_{\rho\to 0}\int\limits_0^2 \dfrac{x^2\cos\rho x}{x^3+1}\,dx$;

в) $\lim\limits_{y\to 1}\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x^2+y^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_1^2 \dfrac{t^3\ln(1+tx)}{x}\,dt$.

2. Найти производную функции:

а) $f(x) = \int\limits_3^x \cos(t^2+1)\,dt$;

б) $f(x) = \int\limits_3^5 \sin(x^2)\,dx$;

в) $f(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \sqrt{t^3+1}\,dt$;

г) $f(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$;

д) $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\ln(1+xt)}{t}\,dt$;

е) $f(x) = \int\limits_{3x}^{x^2} \dfrac{\sin(xt)}{t}\,dt$.

3. Найти $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$, если $f(x) = \int\limits_3^4 \dfrac{dy}{(x-y)^2}$.

4. Найти $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, если $f(x) = \int\limits_0^1 \dfrac{xdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

5. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{t\,dx}{1+x^2t^2}$ равномерно сходится на $[3,5]$.

6. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ равномерно сходится на $[0,\infty)$.

7. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$. Указание: см. задачу 4 из 16.4.

8. Вычислить $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+5)^3}$. Указание: см. задачу 5 из 16.4.

16.6. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти значение $f(\pi)$, если $f(x)=\int\limits_0^x \sin(x-t)\,dt$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_0^3 \sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

3. Вычислить $f'(0)$, если $f(x)=\frac{60}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(xt)}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

4. Вычислить $\int\limits_0^1 f(y)\,dy$, если $f(y)=\int\limits_1^2 \frac{x-y}{x^3}\,dx$.

5. Несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos(kx)\,dx$ на отрезке $[1,2]$ 1) сходится равномерно; 2) сходится, но не равномерно; 3) расходится в некоторых точках этого отрезка. Указать номер истинного высказывания.

6. Вычислить $\Gamma(5)$.

ИТОГОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Глава 1

1. Свойство непрерывности числовой прямой. Точные верхние и нижние грани.
2. Определение и простейшие свойства предела последовательности.
3. Свойства бесконечно малых последовательностей.
4. Арифметические свойства предела.
5. Теорема о пределе монотонной последовательности. Число e.
6. Теорема Больцано – Вейерштрасса.
7. Критерий Коши для числовых последовательностей.

Глава 2

8. Способы задания и общие свойства функций одной действительной переменной. Обращение и суперпозиция. Элементарные функции.
9. Различные определения предела функции.
10. Свойства предела функции.
11. Определение и свойства непрерывных функций. Классификация разрывов.
12. Непрерывность элементарных функций.

Глава 3

13. Первый замечательный предел.
14. Второй замечательный предел.
15. Сравнение бесконечно малых функций. Использование бесконечно малых при вычислении пределов.
16. Следствия из замечательных пределов.
17. Теорема о промежуточных значениях.
18. Теорема о непрерывности обратной функции.
19. Теоремы об ограниченности непрерывной функции и о достижении точных граней.
20. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

Глава 4

21. Определение производной, её геометрический и физический смысл.
22. Арифметические свойства производной.

23. Производная обратной функции.
24. Производная сложной функции.
25. Вычисление производных основных элементарных функций.
26. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрическим способом. Логарифмическое дифференцирование.
27. Дифференциал функции.

Глава 5

28. Теоремы о среднем значении.
29. Правило Лопиталя.
30. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
31. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
32. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.
33. Исследование функций с помощью первой производной. Возрастание, убывание, экстремумы.
34. Исследование функций с помощью второй производной. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
35. Асимптоты графика функции.

Глава 6

36. Первообразная и неопределённый интеграл. Простейшие свойства. Таблица основных интегралов.
37. Интегрирование по частям и с помощью замены переменной.
38. Интегрирование простейших рациональных дробей.
39. Разложение рациональной дроби в сумму многочлена и простейших дробей.
40. Интегрирование иррациональных выражений.
41. Интегрирование тригонометрических выражений.

Глава 7

42. Задача о площади криволинейной трапеции. Определение интеграла Римана.
43. Свойства определённого интеграла (ограниченность интегрируемой функции, линейность, аддитивность).
44. Свойства определённого интеграла (интегрирование неравенств, теорема о среднем).
45. Интегрируемость непрерывных функций.
46. Теорема Барроу и формула Ньютона – Лейбница.
47. Приёмы вычисления определённых интегралов (интегрирование по частям, замена переменной, интегрирование чётных и нечётных функций).

48. Вычисление площадей и объёмов с помощью определённого интеграла.
49. Определение и вычисление длины кривой.
50. Примеры применения интеграла для решения физических задач.

Глава 8

51. Определение и примеры вычисления несобственных интегралов двух видов.
52. Свойства несобственных интегралов. Критерий Коши.
53. Признаки сходимости несобственных интегралов.
54. Абсолютная сходимость. Пример условно сходящегося интеграла.

Глава 9

55. Пространство $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$.
56. Предел последовательности точек $\mathbb{R}^n$. Теорема о покоординатной сходимости. Предельные точки.
57. Компактные и связные множества в $\mathbb{R}^n$. Критерий компактности.
58. Предел и непрерывность функций нескольких переменных. Теорема о непрерывности сложной функции.
59. Свойства функций, непрерывных на компактном множестве.
60. Теорема о промежуточных значениях.
61. Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных.
62. Дифференцирование сложных функций.
63. Дифференциал, его свойства и применение в приближённых вычислениях.
64. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Глава 10

65. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.
66. Понятие экстремума. Необходимые условия экстремума.
67. Достаточные условия экстремума.
68. Теоремы о существовании и дифференцировании неявных функций.
69. Системы неявных функций.
70. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа.
71. Скалярное поле. Производная скалярного поля по заданному направлению.
72. Градиент скалярного поля.
73. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Глава 11

74. Определение и свойства меры Жордана. Мера гладкой кривой. Критерий измеримости.
75. Определение и свойства кратных интегралов.
76. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовой системе координат.
77. Замена переменных в двойном интеграле. Полярная система координат.
78. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической и сферической системах координат.
79. Криволинейные интегралы 1-го рода. Определение, свойства, вычисление, применения.
80. Определение площади поверхности, её вычисление с помощью двойного интеграла.
81. Поверхностные интегралы 1-го рода. Определение, свойства, вычисление, применения.
82. Геометрические и физические приложения интегралов.

Глава 12

83. Криволинейные интегралы 2-го рода. Определение, свойства, вычисление. Задача о работе.
84. Формула Грина.
85. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
86. Признак полного дифференциала. Отыскание первообразной для полного дифференциала.
87. Определение и способы вычисления поверхностного интеграла 2-го рода. Задача о потоке жидкости.
88. Формула Гаусса – Остроградского.
89. Формула Стокса.
90. Условия потенциальности векторных полей в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.
91. Дивергенция векторного поля. Различные подходы к её определению. Соленоидальные векторные поля.
92. Гармонические функции и гармонические векторные поля. Операторы Гамильтона и Лапласа.

Глава 13

93. Определение и свойства сходящихся числовых рядов. Пример гармонического ряда.
94. Признаки сравнения рядов с положительными слагаемыми.
95. Признаки Даламбера и Коши.

96. Интегральный признак сходимости.
97. Абсолютная и условная сходимость знакопеременного ряда.
98. Теорема Лейбница.
99. Свойства положительной и отрицательной частей числового ряда.
100. Перестановки в рядах.

Глава 14

101. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
102. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости.
103. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
104. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.
105. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
106. Равномерная сходимость степенных рядов и следствия из неё.
107. Ряды Тейлора. Условия разложимости функции в степенной ряд.
108. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

Глава 15

109. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций.
110. Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций; функций, определённых на произвольном отрезке $[a, b]$.
111. Комплексная форма ряда Фурье.
112. Приближение функций тригонометрическими многочленами.
113. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.
114. Приближение непрерывных функций алгебраическими многочленами.
115. Абстрактные ряды Фурье в гильбертовом пространстве.
116. Интеграл Фурье.
117. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье.

Глава 16

118. Понятие интеграла, зависящего от параметра. Непрерывность и переход к пределу.
119. Дифференцирование и интегрирование по параметру.
120. Свойства и примеры несобственных интегралов, зависящих от параметра.
121. Определение и основные свойства Г-функции.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

1. $\sup A = \sqrt{5}$, $\inf A = -\sqrt{5}$; $\sup B = 1$, $\inf B = \dfrac{1}{3}$; $\sup C = 1$, $\inf C = -2$.
2. $a_4 = a_5 = \dfrac{1}{9}$. **3.** а) $\inf a_n = -6{,}5$, $\sup a_n = 8$; б) $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = 4$.
4. в), г), е). **5.** а) 10; б)100; в) 1000.

8. а) 5; б) 2; в) 0,5; г) 2; д) 0; е) ∞; ж) 0,5; з) 0; и) e^3; к) e.
9. а) $\dfrac{a}{1-q}$; б) 0,5; в) 1. **10.** а) 3; б) $+\infty$, $-\infty$; в) 2, 3, 4; г) -6, 0, 4, 10; д) -1, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 1.

11. а) 0; б) $5b$; в) b^2; г) $\dfrac{1}{|b|}$, если $b \neq 0$; $+\infty$, если $b = 0$. **13.** 3.

Глава 2

1. а) $\mathbb{R}$; б) $(1, \infty)$; в) $\left\{x \,\middle|\, x \neq 2k - \dfrac{1}{2},\ k \in \mathbb{N}\right\}$; г) $\mathbb{R}$; д) $[-0{,}25,\ 0{,}5]$.

2. в), е) — чётные; а), д) — нечётные; б), г) — функции общего вида.

3. а) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; б) $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$; в) $f([-\pi, \pi]) = [-8, 12]$; г) $f(\mathbb{R}) = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; д) $f((0, 1)) = (0, 0{,}5]$; е) $f((0, 64)) = (-\infty, 6)$. Отображения в пунктах а), б), г), е) взаимно однозначны.

4. $\sup f_1(x) = 0{,}5$, $\inf f_1(x) = -0{,}5$; f_2 не ограничена; $\sup f_3(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\inf f_3(x) = 0$; f_4 ограничена снизу, $\inf f_4(x) = 0{,}5$; $\sup f_5(x) = 2$, $\inf f_5(x) = \dfrac{2}{3}$.

5. а) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < -2; \\ -x, & -2 \le x \le 2; \\ -2, & x > 2. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -2; \\ -x, & -2 \le x \le 0; \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$

7. $u(x) = 5^{\frac{x}{2}}$, $D = \mathbb{R}$, $u(D) = (0, \infty)$; $v(x) = 5^{\sqrt{x}}$, $D = [0, \infty)$, $v(D) = [1, \infty)$.

8. а) $f^{-1}(x) = 5 + \dfrac{3}{x}$; б) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-7}{2}$; в) $f^{-1}(x) = x^2 - 3$.

9. а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ x \ge N \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$;
б) $\forall M\ \exists N :\ x < N \ \Rightarrow f(x) > M$;
в) $\forall M\ \exists \delta :\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < M$;
г) $\forall M\ \exists N :\ x > N \ \Rightarrow\ f(x) < M$;

д) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$;
е) $\forall M\ \exists\delta > 0:\ x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow\ f(x) > M$.

11. а) $-3{,}5$; б) 0; в) $-\infty$. **12.** а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{1}{4}$; в) не существует; если $x \to 1+0$, то предел равен $+\infty$; если $x \to 1-0$, то предел равен $-\infty$; г) $+\infty$; д) $3{,}5$; е) $\dfrac{1}{3}$; ж) $\dfrac{1}{4}$; з) 0; и) $\dfrac{1}{3}$.

13. а) $x = 2$, $x = -2$ — точки разрывов 2-го рода; б) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода; в) $x = -1$ — точка устранимого разрыва; г) $x = 0{,}5$ — точка разрыва 2-го рода, $x = -3$ — точка устранимого разрыва; д) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода; е) функция непрерывна на своей области определения $(0, \infty)$; ж) $x = 0$ — точка устранимого разрыва; з) $x_k = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ — точки разрывов 2-го рода; и) $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода; к) $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода, $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода; л) $x = -1$ — точка устранимого разрыва; м) $x = -1$ — точка разрыва 2-го рода.

14. а) непрерывна во всех точках, кроме $x = -1$; в точке $x = -1$ непрерывна слева, справа имеет разрыв 1-го рода; б) непрерывна во всех точках, кроме $x = \pi$; в точке $x = \pi$ непрерывна слева, справа имеет разрыв 2-го рода; в) непрерывна во всех точках, кроме $x = 1, x = 2$; $x = 1$ — точка разрыва 2-го рода, $x = 2$ — точка разрыва 1-го рода; г) непрерывна во всех точках, кроме $x = -3$ (разрыв 2-го рода) и $x = -1$ (разрыв 1-го рода).

15. а) $-1{,}5$; б) 1; в) 2; г) $e^{-\frac{\pi}{4}}$. **16.** а) нельзя; б) можно, $f(0) = \dfrac{1}{4}$; в) нельзя. **17.** Обе функции непрерывны при $x \notin \mathbb{Z}$. Если $x = m$ — целое число, то функции непрерывны справа, а слева имеют разрывы 1-го рода.

18. В точке $x = 0$ функция непрерывна, в остальных точках — разрывы 2-го рода. **19.** $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода.

Глава 3

1. а) $\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{5}{8}$; в) 3; г) $\dfrac{1}{2}$; д) $\cos a$; е) 0.

2. а) e^2; б) e^{-2}; в) 0; г) e; д) $\sqrt{e}$; е) 4; ж) $e^{\frac{10}{3}}$; з) e; и) 1.

3. y_2, y_5 имеют более высокий порядок малости; y_1, y_4 имеют одинаковый с $\alpha(x) = x$ порядок малости; y_4 эквивалентна $\alpha(x)$.

4. а) $3x^2 - x^3 + 2x^5 \sim 3x^2$ (порядок малости равен 2);
б) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x$; в) $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$; г) $e^{\sin x} - 1 \sim x$; д) $\operatorname{tg} x + x^2 \sim x$; е) $\sqrt{\sin x} \sim x^{\frac{1}{2}}$. **5.** а), б), в). **6.** а) 2; б) 1; в) 2; г) $2{,}5$.

7. а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 0; г) $\dfrac{5}{\pi}$; д) $\dfrac{\ln 3}{2}$; е) $-\dfrac{1}{3}$; ж) -1; з) 3.

8. а) π; б) $0{,}5$; в) $\dfrac{2}{3\pi}$; г) $0{,}5$; д) $243 \ln 3$; е) $\dfrac{2}{e}$; ж) $\dfrac{8}{3}$; з) $-\dfrac{1}{4}$.

9. а) $e^{0,4}$; б) $\dfrac{1}{e}$; в) $e^{\frac{4}{\pi}}$; г) $+\infty$. **10.** а) 2,1; б) 4,9.

Глава 4

1. а) $4x-3$; б) $-\dfrac{5}{x^2}$; в) $3e^{3x}$; г) $-2\sin 2x$.

2. а) $5x^4 - 12x^3 - \dfrac{2}{x^3}$; б) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{-4x^2+4x+2}{(x^2-x+1)^2}$; г) $\dfrac{2\sin(2x+3)}{\cos^2(2x+3)}$; д) $e^x(\sin x + \cos x) - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} - \dfrac{\ln x}{\cos^2 x}$; е) $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; ж) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; з) $3\left(\arccos\dfrac{1}{1+x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}}$; и) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$;

к) $-\dfrac{2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\cdot\ln 2}{x^2\cos^2\dfrac{1}{x}}$; л) $2^{\operatorname{sh} x}\cdot\ln 2\cdot\operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} x$; м) $\operatorname{th} 3\left(\dfrac{\operatorname{th} 3x}{\operatorname{ch}^2 x} + \dfrac{3\operatorname{th} x}{ch^2 3x}\right)$.

3. а)$-0{,}16$; б) 15; в) 3; г) $-0{,}1$.

4. а) $f'(x) = \begin{cases} 0, & x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ 1, & x > \pi; \end{cases}$ б) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < -1, \\ 2x, & -1 < x \le 2, \\ 4, & x > 2. \end{cases}$

5. $f(x)$ станет недифференцируемой в точке $x=2$.

6. а) $\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}$; б) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x+1}\right)$;
в) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x) - (\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x - \ln\cos x)$;
г) $x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$.

7. а) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y'_x = -\operatorname{tg} t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y'_x = \dfrac{2t-t^4}{1-2t^3}, \end{cases}$ **8.** а) $y'_x = \dfrac{4x-3y}{3x+10y}$;

б) $y'_x = -\dfrac{e^{-y}\sin x + e^x\sin y}{e^{-y}\cos x + e^x\cos y}$. **9.** а) $y'' = 4(x-1)e^{2x}$, $y''(0) = -4$;
б) $y'' = -\dfrac{16x}{(1+4x^2)^2}$, $y''(-1) = 0{,}64$; в) $y' = -\dfrac{2x+3y}{3x+2y}$,
$y'' = -\dfrac{2(1+3y'+y'^2)}{3x+2y}$, $y''(2) = -\dfrac{5}{32}$; г) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y'' = -\dfrac{\sqrt{3}}{4\sin^3 t}, \end{cases}$ $y''(1) = -\dfrac{2}{3}$.

10. $4x-3y+1=0$, $4x+3y+1=0$. **11.** $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{27}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{27}\right)$.

12. а) $\operatorname{arctg} 3$; б) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **13.** $3x-y-4=0$; $x+3y-3=0$.

14. $y-4x+6=0$. **15.** $v_y = 30$.

16. $v_x = -\dfrac{2y}{\sqrt{100-y^2}}$; при $y = 6$ $v_x = -1{,}5$. **17.** а) $dy = \dfrac{1}{4}\,dx$; б) $dy = 3\,dx$. **18.** а) $-0{,}02$; б) $0{,}81$; в) $0{,}862$; г) $1{,}15$.

Глава 5

1. а) $-0{,}5$; б) ∞; в) 0; г) $-\dfrac{2}{\pi}$; д) 0; е) $0{,}5$; ж) 1; з) $\dfrac{1}{e}$.

2. а) $x + \dfrac{x^3}{6}$; б) $1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{5}{81}x^3$; в) $x + \dfrac{x^3}{6}$; г) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

3. Менее $0{,}06$. **4.** Менее $\dfrac{1}{128}$. **5.** а) $0{,}183$; б) $5{,}067$; в) $0{,}0175$.

6. а) Чётная, $y_{\max}(0) = 1$, $y_{\min}\left(\pm\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{8}$, точки перегиба $\left(\pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{67}{72}\right)$; б) асимптоты: $x = 0$, $y = -x$; $y_{\min}\left(-\sqrt[3]{2}\right) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$; в) асимптоты: $x = -1$, $y = 0$ (левая); $y_{\min}(0) = 1$; г) область определения $(-\infty, -4) \cup (0, \infty)$; асимптоты $x = -4$, $x = 0$; выпукла; д) область определения $[0, \infty)$; $y_{\max}(0) = 0$, $y_{\min}(1) = -2$; вогнута; е) асимптота $y = -x$; убывает; точки перегиба $(0, 1)$, $(1, 0)$; ж) нечётна; асимптота $y = 0$; $y_{\max}\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{e}}$; $y_{\min}\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{\dfrac{2}{e}}$; точки перегиба: $(0, 0)$, $\left(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}}\right)$; з) нечётна; асимптоты: $y = x + \pi$ (левая), $y = x - \pi$ (правая); $y_{\max}(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$, $y_{\min}(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$, точка перегиба $(0, 0)$; и) чётная, периодическая, период 2π; на $[0, \pi]$: $y_{\max}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$, $y_{\max}(\pi) = 0$; $y_{\min}\left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) = -\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$, $y_{\min}(0) = 0$; точки перегиба — с абсциссами $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\dfrac{\pi}{2}$; к) нечётна; асимптота $y = 0$; $y_{\max}(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $y_{\min}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, точки перегиба $(0, 0)$, $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(-1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. а) -65; 16; б) $\dfrac{1}{e}$; $\dfrac{4}{e^2}$; в) -4; 50; г) -3; $1{,}5$. **8.** $y = 2x^2 - 3$.

9. 4 и $\sqrt{35}$. **10.** $R = H = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. **11.** 40м и 20м. **12.** Уравнение прямой $y = 2y_0 - \dfrac{y_0}{x_0}x$. **13.** Высота конуса $H = \dfrac{4}{3}R$.

14. Через время $t = \dfrac{av_1 + bv_2}{{v_1}^2 + {v_2}^2}$ корабли окажутся на минимальном расстоянии $S = \dfrac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}$.

Глава 6

1. а) $2\sqrt{x}+\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+3x+C$; б) $\dfrac{3}{11}x^{\frac{11}{3}}+\dfrac{9}{4}x^{\frac{8}{3}}+\dfrac{36}{5}x^{\frac{5}{3}}+12x^{\frac{2}{3}}+C$;
в) $-\dfrac{1}{2^x\ln 2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$; г) $\ln(x+\sqrt{x^2-4})+\arcsin\dfrac{x}{3}+C$;
д) $-\dfrac{1}{3}\cos x-\dfrac{1}{3}\sin x+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$; е) $\dfrac{3}{10}\ln\left|\dfrac{x-5}{x+5}\right|+\dfrac{5}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}+C$.

2. а) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x-5)+C$; б) $-\dfrac{2}{15}(8-5x)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}e^{3x}+C$;
в) $-\dfrac{1}{4}\ln|2-4x|+C$; г) $\dfrac{1}{3}(x^2+25)^{\frac{3}{2}}+C$; д) $\ln|\ln x|+C$; е) $\dfrac{1}{2}e^{2\sin x}+C$;
ж) $\dfrac{1}{12}\operatorname{arctg}\dfrac{x^4}{3}+C$; з) $-\dfrac{\cos 2^x}{\ln 2}+C$; и) $\dfrac{1}{7}\operatorname{sh}(7x+3)+C$; к) $\ln(\operatorname{ch}x)+C$.

3. а) $\ln|x-1|-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3}{2(x-1)^2}-\dfrac{1}{3(x-1)^3}+C$;
б) $\left[-\dfrac{75}{4}+\dfrac{30}{7}(5-x)-\dfrac{3}{10}(5-x)^2\right](5-x)\sqrt[3]{5-x}+C$;
в) $-\dfrac{1}{2}(\arccos x+x\sqrt{1-x^2})+C$; г) $-\ln\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$.

4. а) $\dfrac{1}{5}\ln|1+\sin 5x|+C$; б) $x-\ln(e^x+1)+C$;
в) $-\dfrac{5}{48}(1-8x)\sqrt[5]{1-8x}+C$; г) $2e^{\sqrt{x}}+C$; д) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$; е) $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C$.

5. а) $(x+1)\sin x+\cos x+C$; б) $(x^2+x-1)e^x+C$; в) $\dfrac{x^6}{6}\left(\ln x-\dfrac{1}{6}\right)+C$;
г) $\dfrac{1}{4}(x^4-1)\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{12}(3x-x^3)+C$; д) $x\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}+\ln(x^2+4)+C$;
е) $\dfrac{1}{2}x\operatorname{tg}2x+\dfrac{1}{4}\ln\cos 2x+C$.

6. а) $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$; б) $\ln|(x+3)^2(x-2)|+C$;
в) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\dfrac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$; г) $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+6x^2+30x-\dfrac{27}{x-2}+$
$+72\ln|x-2|+C$; д) $\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\dfrac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$;
е) $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$; ж) $\dfrac{1}{2(x^2+1)}+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x\right)+C$;
з) $\dfrac{1}{x^2+2}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$.

7. а) $\dfrac{2(4+3x)}{9\sqrt{2+3x}}+C$; б) $\arcsin\dfrac{x-2}{3}+C$; в) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+$
$+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; г) $\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$;
д) не выражается через элементарные функции;

е) $10\left(\frac{\sqrt{x}}{5}-\frac{\sqrt[10]{x^3}}{3}+\sqrt[10]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[10]{x}\right)+C$; ж) $\frac{1}{2}x\sqrt{4+9x^2}+$ $+\frac{2}{3}\ln\left|x+\frac{1}{3}\sqrt{4+9x^2}\right|+C$; з) $\sqrt{x^2+6x+8}-4\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+8}\right|+C$.

8. а) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$; б) $\frac{1}{14}\cos^{14}x-\frac{1}{12}\cos^{12}x+C$;
в) $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$; г) $-\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$;
д) не выражается через элементарные функции; е) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-$ $-\frac{1}{4}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\right)+C$; ж) $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C$;
з) $\frac{1}{10}\left(13x+22\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|-11\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)\right)+C$.

9. а) $\frac{x^2-2}{3}\cdot\sqrt{1+x^2}+C$; б) $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$;
в) $x\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}-4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}+C$; г) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$;
д) $\sqrt{x^2-2x}-4\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C$; е) $\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\ln|x+1|+C$;
ж) $(x-1)\ln(1+\sqrt{x})+\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+C$; з) $-2\sqrt{\cos x}\left(1-\frac{2}{5}\cos^2 x+\frac{1}{9}\cos^4 x\right)+C$;
и) $\frac{1}{6}\operatorname{ch}^3 2x-\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x+C$; к) $2\sqrt{x}\operatorname{sh}\sqrt{x}-2\operatorname{ch}\sqrt{x}+C$;
л) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; м) $\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+\frac{1}{4(x^4+1)}+C$;
н) $-\frac{1}{25x^5}(5\ln x+1)+C$; о) $\frac{1}{32}(\sin 4x-4\sin 2x-4x\cos 4x+8x\cos 2x)+C$.

Глава 7

1. а) 6; б) $-\frac{1}{12}\ln 5$; в) π; г) $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$.

2. а) $2-\ln 2$; б) $\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$; в) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. а) $\frac{1}{4}(1-5e^{-4})$; б) 1; в) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $2e-1$.

4. а) 0; б) $\frac{1}{2}$. **5.** 12. **6.** $7{,}5-8\ln 2$. **7.** 1,25. **8.** 9.

9. $\frac{16}{3}\pi^3$. **10.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **11.** πab. **12.** $\frac{3}{8}\pi a^2$.

13. а) $\frac{\pi^2}{2}$; б) $\frac{3\pi}{2}$. **14.** а) $\frac{512\pi}{15}$; б) $\frac{64\pi}{5}$. **15.** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

16. $\frac{a\pi^2}{32}$. **17.** $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}))$. **18.** $\ln(1+\sqrt{2})$.

19. а) $\dfrac{3\pi}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}(e^{2\pi}-1)$. **20.** $\dfrac{G\,m\,M}{d\,(d+L)}$. **21.** $\dfrac{\rho g\pi R^2H^2}{2}\approx 10^6$(дж).

22. $25{,}6\cdot 10^6$(н). **23.** $k\pi R^4$. **24.** а) $\dfrac{Ma^2}{12}$; б) $\dfrac{MR^2}{2}$.

Глава 8

1. а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{1}{2}\ln 2$; в) 1; г) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{5}}$.

2. а) $2\sqrt{5}$; б) $\dfrac{16}{3}$; в) $-0{,}25$; г) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

3. а) сходится; б) расходится; в) сходится; г) расходится; д) расходится; е) сходится.

4. а) 2; б) 2; в) 2; г) фигура не имеет конечной площади.

5. а) расходится; б) $\dfrac{\pi}{2}$; в) -1; г) $\dfrac{\pi+2\ln 2}{4}$; д) $\ln 2-\dfrac{1}{2}$; е) расходится.

Глава 9

1. а) Замкнутая полуплоскость $\{(x,y)|x\geq 2y\}$; б) открытая часть плоскости, ограниченная параболой $y^2=8x$, не включающая фокус параболы; в) все точки плоскости, не лежащие на эллипсе $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$; открытое множество; г) прямоугольный треугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$, включая точки гипотенузы; не является открытым или замкнутым множеством; д) замкнутая вертикальная полоса $\{(x,y)|3\leq x\leq 5\}$; е) все точки, находящиеся вне круга радиуса $\sqrt{5}$ с центром $(2,1)$, замкнутое множество; ж) замкнутый октант $\{(x,y,z)|x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$; з) всё пространство, кроме точек оси OZ, открытое множество.

2. а) Не существует; б) 0,5; в) 0,25; г) не существует; д) 0; е) не существует; ж) $\sqrt{e}$; з) 0,5.

3. а) Непрерывна во всех точках, где определена; точки параболы $x^2=-2y$ являются предельными для области определения; б) имеет разрывы в точках прямых $x=1$, $y=2$; в) разрывна в точке $(0,0)$, а также в точках окружности $x^2+y^2=1$; г) точек разрыва нет, непрерывна везде, где определена; д) разрывна в точках прямой $x+y=0$, кроме точки $(2,-2)$; е) непрерывна.

4. а) $z'_x=-\dfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$, $z'_y=\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$; б) $z'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$; в) $z'_x=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; г) $z'_x=2\sin(x+y)+(4x+6y)\cos(x+y)$, $z'_y=3\sin(2x+y)+(2x+3y)\cos(2x+y)$; д) $z'_x=-\dfrac{5(x+y)\sin 5x+\cos 5x+3}{(x+y)^2}$, $z'_y=-\dfrac{3+\cos 5x}{(x+y)^2}$; е) $z'_x=\dfrac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=-\dfrac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$;

ж) $f'_x = y(x+2z)^{y-1}$, $f'_y = (x+2z)^y \ln(x+2z)$, $f'_z = 2y(x+2z)^{y-1}$;
з) $f'_x = f'_y = -\dfrac{z^2}{(x+y)^2}$, $f'_z = \dfrac{2z}{x+y} + \operatorname{ctg} z$.

5. а) $z''_{xx} = 20$, $z''_{xy} = -100$, $z''_{yy} = -238$; б) $z''_{xx} = 0$, $z''_{xy} = -0{,}25$, $z''_{yy} = 1{,}5$; в) $z''_{xx} = z''_{yy} = -\dfrac{2}{9}$, $z''_{xy} = -\dfrac{4}{9}$; г) $z''_{xx} = 18$, $z''_{xy} = -6$, $z''_{yy} = 2$.

6. а) $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3} = \dfrac{12x}{y^3} - \dfrac{6}{x^2}$; б) $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 0$; в) $\dfrac{\partial^9 z}{\partial x \partial y^8} = \sin(x+y) + {}$ $+x\cos(x+y)$; г) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$.

8. а) $dz = \dfrac{1}{x-y}(dx - dy)$, $d^2z = -\dfrac{1}{(x-y)^2}[(dx)^2 - 2dxdy + (dy)^2]$;
б) $dz = \operatorname{arctg} y \cdot dx + \dfrac{x}{1+y^2}dy$, $d^2z = \dfrac{2}{1+y^2}\,dxdy - \dfrac{2xy}{(1+y^2)^2}(dy)^2$;
в) $dz = 5^{xy}\ln 5(y\,dx + x\,dy)$,
$$d^2z = 5^{xy}\ln 5[y^2 \ln 5(dx)^2 + 2(xy\ln 5 + 1)\,dx\,dy + x^2\ln 5(dy)^2];$$
г) $df = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, $d^2f = 2(dxdy + dydz + dxdz)$.

9. а) $dz = 23\,dx + 32\,dy$, $d^2z = 16(dx)^2 + 28\,dxdy + 36(dy)^2$;
б) $dz \equiv 0$, $d^2z = \dfrac{1}{2}(dx)^2 - dxdy + \dfrac{1}{2}(dy)^2$;
в) $dz = -\dfrac{4}{\pi^2}dx$, $d^2z = \dfrac{16 - 2\pi^2}{\pi^3}(dx)^2 - \dfrac{4}{\pi}dxdy - \dfrac{2}{\pi}(dy)^2$;
г) $df = \dfrac{1}{2}dx + \dfrac{1}{2}dy + 2dz$, $d^2f = -\dfrac{1}{4}(dx)^2 - \dfrac{1}{4}(dy)^2 + dxdz + dydz$.

10. $\Delta f = 4{,}211$, $df = 4{,}1625$. **11.** $\Delta V \approx 1000\pi$ (см^3).

12. а) 24,465; б) 3,48; в) 7,789; г) 4,22; д) 0,533; е) 1,015.

Глава 10

1. а) $\ln(1+x+y) = x + y - \dfrac{1}{2}x^2 - xy - \dfrac{1}{2}y^2 + r_2$; б) $\dfrac{\cos x}{\cos y} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + r_2$.

2. а) В области определения нет стационарных точек; б) $(1, \frac{1}{2})$ — точка минимума, в стационарной точке $(0,0)$ экстремума нет; в) нет экстремума; г) $(0,0)$ — точка минимума, в точках $(-\frac{5}{3}, 0)$, $(1, \pm 4)$ экстремумов нет; д) $(1,1)$ — точка минимума; е) $(3,6)$ — точка максимума, в точке $(0,0)$ экстремума нет; ж) $(2,\ 1,\ 0)$ — точка минимума; в стационарных точках $(2,\ -1,\ 0)$, $(2,\ 0,\ \pm\sqrt{6})$ экстремумов нет; з) $(-4, 1, -2)$ — точка минимума.

3. а) $z(0,0) = 0$, $z(0,-3) = -9$; б) $z(-1,2) = z(2,-1) = 13$, $z(-1,-1) = -5$; в) $z = 0$ (в точках параболы $y^2 + 2x = 0$), $z(-1,0) = -\dfrac{2}{e}$; г) $z(-3,4) = 225$, $z(3,-4) = 25$.

4. а) $y' = \dfrac{5-4x}{2y+7}$, $y'(2) = \dfrac{3}{7}$; б) уравнение не определяет в окрестности P функцию $y = y(x)$; в) $y' = -\dfrac{y}{x}$, $y'(1) = -1$;

г) $y' = \dfrac{\cos(xy) - \pi y \cos \pi x - xy\sin(xy)}{\sin \pi x + x^2 \sin(xy)}$, $y'(1) = \dfrac{\pi}{2}(\pi - 1)$;

5. а) $z'_x = 0$, $z'_y = -2$; б) $z'_x = -2$, $z'_y = -e$; в) $z'_x = -5$, $z'_y = 0$.

6. (4, 0) — точка максимума, $(-\dfrac{32}{7}, 0)$ — точка минимума.

7. $y'(0) = \dfrac{1}{5}$, $z'(0) = -\dfrac{1}{5}$. **8.** а) $f_{\max}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $f_{\min}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$; б) $f_{\min}(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}) = \dfrac{2}{5}$; в) $f_{min} = -1$ (в точках $(1,-1)$, $(-1,1)$), $f_{max} = 1$ (в точках $(1,1)$, $(-1,-1)$); г) $f_{min}(-1,2,-2) = -9$, $f_{max}(1,-2,2) = 9$.

9. $H = R = \sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$. **10.** Наиболее удалена точка $(-3,0)$, наименее — точки (1,5, ±1,5). **11.** −0,3. **12.** 1. **13.** $\dfrac{6}{7}$.

14. Производная максимальна в направлении вектора $-\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, она равняется $\sqrt{3}$.

15. а) $\operatorname{grad} f = \bar{j}$, $f'_{\bar{g}} = 1$; б) $\operatorname{grad} f = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $f'_{\bar{g}} = \sqrt{13}$; в) $\operatorname{grad} f = 4\bar{i} + 3\bar{j} - 10\bar{k}$, $f'_{\bar{g}} = 5\sqrt{5}$; г) $\operatorname{grad} f = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$, $f'_{\bar{g}} = \sqrt{29}$.

16. а) $\dfrac{x+\pi}{1} = \dfrac{y}{\pi} = \dfrac{z-\pi}{-1}$; б) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-6}$; в) $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$; г) $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-8}{2} = \dfrac{z-6}{1}$.

17. а) $x - 2y + 2z = 9$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$; б) $x - 4y + 2z + 5 = 0$, $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z+1}{2}$; в) $6x + 3y - 4\sqrt{5}z + 25 = 0$, $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2\sqrt{5}}{-4\sqrt{5}}$; г) $4y - 3z = 12$, $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z-4}{-3}$.

18. $x + y = 1 \pm \sqrt{2}$. **19.** $x - y - 2z - 2 = 0$.

Глава 11

1. а) $\displaystyle\int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{-x} f(x,y)\,dy$; б) $\displaystyle\int_{0}^{2} dx \int_{3x^2}^{12} f(x,y)\,dy$; в) $\displaystyle\int_{1}^{2} dx \int_{3x}^{3x+2} f(x,y)\,dy$; г) $\displaystyle\int_{-3}^{2} dy \int_{y-5}^{1-y^2} f(x,y)dx$. **2.** а) $\displaystyle\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-2}^{7} f(x,y)\,dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx$; в) $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{2-x} f(x,y)\,dy$; г) $\displaystyle\int_{2}^{3} dy \int_{0}^{\frac{6}{y}} f(x,y)\,dx$.

3. а) $\dfrac{232}{15}$; б) $\dfrac{128}{21}$; в) 3π; г) $\dfrac{29}{30}$; д) $\dfrac{17}{6}$; е) $2\pi ab$.

4. а) $\dfrac{212}{5}$; б) $\dfrac{8\ln 2-5}{480}$; в) $1-\ln 2$; г) $\dfrac{1}{120}$; д) 81π; е) 12π.

5. а) $39\sqrt{5}$; б) $\dfrac{19}{3}$; в) $\dfrac{32}{3}$; г) $9\sqrt{2}(e^{6\pi}-1)$; д) $\dfrac{8\sqrt{2}-4}{3}$; е) $\dfrac{1-3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$.

6. а) $20\sqrt{14}\pi$; б) 32; в) $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}$; г) 18π. **7.** а) $\dfrac{32}{3}+16\ln 2$; б) $\dfrac{\pi}{2}(a^2+b^2)$; в) $\dfrac{ab}{8}(\pi a^2+\pi b^2+4ab)$; г) $5-\dfrac{5}{2}\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

8. а) $\dfrac{88}{105}$; б) 8π; в) 4; г) 27π. **9.** а) $e-\dfrac{1}{e}$; б) $6a$; в) $\sqrt{3}$.

10. а) $\dfrac{13\pi}{3}$; б) $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{3\sqrt{2}}$; в) $72\arcsin\dfrac{2}{3}$; г) $\dfrac{160\sqrt{5}}{3}$.

11. $\dfrac{2k\pi}{3}(R^3-r^3)$. **12.** $\dfrac{\pi}{12}$. **13.** πR^3. **14.** $4\pi k$. **15.** $\dfrac{1}{12}$.

16. $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{6}\rho$, где $\rho=\mathrm{const}$ — плотность. **17.** $\left(\dfrac{e^2+1}{4},\dfrac{e-2}{2}\right)$.

18. $\left(0,\dfrac{1}{3},0\right)$. **19.** $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{15}\right)$. **20.** $\left(0,-\dfrac{a}{\pi},\dfrac{4\pi b}{3}\right)$. **21.** $\dfrac{5\pi R^4}{4}$.

22. πR^3. **23.** $\dfrac{4\pi R^6}{9}$. **24.** $8\ln(1+\sqrt{2})$. **25.** 4π.

Глава 12

1. а) $-\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$; б) $e-\dfrac{1}{2}$; в) -4. **2.** а) 2,5; б) $1+\dfrac{3\pi}{4}$.

3. а) -12π; б) -75π. **4.** 12π. **5.** 29,5; не зависит.

6. а) $U(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{\cos x}+C$; б) $U(x,y)=\ln(x^2-2y^2)+C$.

7. а) $U(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y}+C$; б) $U(x,y)=y(x-1)e^x+C$; в) $U(x,y,z)=3x^2+\dfrac{4y}{z}+5xz+C$; г) $U(x,y,z)=x\ln y+y\ln z$.

8. 16,5. **9.** $\dfrac{3}{32}$. **10.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **11.** $\dfrac{2\pi R^7}{105}$. **12.** $\dfrac{1}{3}$. **13.** 12π. **14.** $\dfrac{2}{3}$.

15. а) $\operatorname{div}\overline{F}=0$, $\operatorname{rot}\overline{F}=6\overline{i}+14\overline{j}+4\overline{k}$; б) $\operatorname{div}\overline{F}=7$, $\operatorname{rot}\overline{F}=9\overline{i}+18\overline{j}$; в) $\operatorname{div}\overline{F}=\dfrac{2}{3}$, $\operatorname{rot}\overline{F}=\overline{0}$; г) $\operatorname{div}\overline{F}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$, $\operatorname{rot}\overline{F}=\overline{0}$.

16. $\operatorname{rot}\overline{A}=\overline{0}$. **17.** 40.

Глава 13

1. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n-1}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{(2n+1)^2}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n-3)(2n+1)}$; г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(2n)!}$; е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sqrt{n}}{10\cdot 5^n}$.

2. а) Расходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) расходится; е) сходится; ж) расходится; з) расходится.

3. а) Сходится; б) расходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) сходится; ж) расходится; з) сходится.

4. а) Сходится; б) расходится; в) расходится; г) сходится.

5. а) Расходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) сходится.

6. а) Расходится; б) расходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) сходится.

7. а) Сходится условно; б) сходится условно; в) сходится абсолютно; г) расходится; д) расходится; е) сходится абсолютно; ж) сходится абсолютно; з) сходится условно.

8. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{36}$; в) $\frac{5}{12}$. **9.** а) 0,16; б) 0,37.

Глава 14

1. а) $(-\infty,-2]\cup(0,\infty)$; б) $x\neq\pm1$; в) $(-\infty,0)$; г) $(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},\infty)$. **2.** а) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; б) $(-3,3)$; в) $\{2\}$; г) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$; д) $(-\infty,\infty)$; е) $(-4,4)$; ж) $(6,8]$; з) $(-5,-1]$. **3.** а) $|z|<1$; б) $|z-1|<2$; в) $|z+5|<\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) вся комплексная плоскость C.

5. а) $\sqrt{x}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(x-1)^n,\ x\in(0,2)$;

б) $\ln x=\ln 4+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-4)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)},\ x\in(3,5)$;

в) $\sin 3x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}3^{2n+1}(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty,\infty)$;

г) $e^{\frac{x}{3}}=\sqrt[3]{e}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^n n!},\ x\in(-\infty,\infty)$;

д) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^{2n},\ x\in(-2,0)$;

е) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-2)^n}{7^{n+1}},\ x\in(-5,9)$.

6. а) $(1+x)\ln(1+x)=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1},\ x\in(-1,1)$;

б) $(e^x+3)^2=16+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2^n+6)}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,\infty)$;

в) $\dfrac{x^2-3x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,\ x\in(-2,2)$;

г) $\dfrac{x^2+2x-6}{x^2-5x-6} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1)^n - \dfrac{1}{6^n})x^n,\ x \in (-1,1);$

д) $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in (-\infty,\infty);$

е) $\ln(15-2x-x^2) = \ln 15 + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{(-1)^n}{5^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}})\dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in (-3,3);$

ж) $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!}\cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in (-1,1);$

з) $\dfrac{x^5}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n+4},\ x \in (-1,1);$

и) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2},\ x \in (-1,1);$

к) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)},\ x \in (-\infty,\infty).$

7. а) $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{48}x^3 + \ldots;$ б) $e^x \cos x = 1 + x - \dfrac{1}{3}x^3 + \ldots;$ в) $\sqrt{\ln(x+e)} = 1 + \dfrac{1}{2e}x - \dfrac{3}{8e^2}x^2 + \ldots;$ г) $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \ldots.$

8. а) 0,0524; б) 0,262; в) 2,091; г) 0,540; д) 1,648; е) 2,044.

9. а) 0,497; б) 0,747; в) 0,072; г) 0,155.

10. а) $S(x) = \operatorname{arctg} x;$ б) $S(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|;$ в) $S(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2};$ г) $S(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2};$ д) $S(x) = 1 - \ln|x-1| + \dfrac{\ln|x-1|}{x};$ е) $S(x) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{3x^3}.$

Глава 15

1. а) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx;$

б) $\dfrac{3\pi}{4} + 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{3\pi+4}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x - \dfrac{6}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x - \dfrac{3}{2k}\sin 2kx\right);$

в) $\dfrac{9\sqrt{3}}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{9n^2-1}\sin nx;$ г) $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$

2. а) $\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\cos nt;$ б) $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos 2nt}{4n^2-1}.$

3. а) $\dfrac{e^2-e^{-2}}{4} + (e^2-e^{-2})\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2\cos\dfrac{n\pi x}{2} - n\pi\cdot\sin\dfrac{n\pi x}{2}}{\pi^2 n^2 + 4};$

б) $\dfrac{13}{5}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(\sin\dfrac{2\pi n}{5}-\sin\dfrac{6\pi n}{5}\right)\cos\dfrac{\pi nx}{5}+\left(\cos\dfrac{6\pi n}{5}-\cos\dfrac{2\pi n}{5}\right)\sin\dfrac{\pi nx}{5}\right]$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}-\dfrac{8}{n^2\pi^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{2}$ (если $f(x)=0$ при $0\le x\le 1$);

б) $8\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\cos\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{n}{4\pi^2n^2-9}\sin\dfrac{\pi nx}{3}$.

5. а) $\dfrac{2i}{\pi}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{\frac{in\pi x}{2}}$; б) $\left(\dfrac{e^3-e^{-3}}{2}\right)\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\dfrac{9+in\pi}{n^2\pi^2+81}e^{\frac{in\pi x}{3}}$.

6. а) $\int\limits_0^{\infty}e^{-2\omega}\sin\omega x\,d\omega$; б) $\int\limits_0^{\infty}e^{-\omega}\cos\omega x\,d\omega$;

в) $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{\omega^2+1}\,d\omega$; г) $-\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{\omega^2-1}\cos\omega x\,d\omega$.

7. а) $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{(1-\cos 2\omega)\cos\omega t}{\omega^2}\,d\omega$; б) $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{2\omega-\sin 2\omega}{\omega^2}\cdot\sin\omega t\,d\omega$.

8. а) $f(x)=\dfrac{3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}\,d\omega$; б) $e^{-|x|}=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{\omega^2+1}e^{i\omega x}\,d\omega$;

в) $f(x)=\dfrac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\pi\omega}{\omega^2-1}\cdot e^{i\omega x}\,d\omega$; г) $f(x)=\dfrac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}\,d\omega$.

9. а) $f^*(\omega)=\dfrac{6}{\sqrt{2\pi}(9+\omega^2)}$, $f_*(\omega)=\dfrac{2\omega}{\sqrt{2\pi}(9+\omega^2)}$;

б) $f^*(\omega)=2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}\omega\cdot\dfrac{2-\omega^2}{\omega(4-\omega^2)}$, $f_*(\omega)=2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{2-(2-\omega^2)\cos\frac{\pi}{2}\omega}{\omega(4-\omega^2)}$.

Глава 16

1. а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{2\ln 3}{3}$; в) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{31}{5}$. **2.** а) $\cos(x^2+1)$; б) 0; в) $3x^2\sqrt{x^9+1}-$ $-2x\sqrt{x^6+1}$; г) $-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\sin^2\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$; д) $\dfrac{2}{x}\ln(1+x^2)$; е) $\dfrac{3\sin(x^3)}{x}-\dfrac{2\sin(3x^2)}{x}$.

3. $\ln\dfrac{4}{3}$. **4.** $\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. **5.** Мажорирующий интеграл: $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{1}{3x^2}\,dx$.

6. Мажорирующий интеграл: $\int\limits_0^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **7.** 16. **8.** $\dfrac{3\pi}{400\sqrt{5}}$.

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

Задание	1	2	3	4	5	6
Глава 1	5	15	3	∞	3	$-0,5$
Глава 2	3	2	5	3	-5	2
Глава 3	6	0	$0,2$	2	3	$-0,25$
Глава 4	$0,28$	$0,5$	0	$-0,6$	$0,5$	1
Глава 5	$0,5$	6	2	10	-3	34
Глава 6	8	1	0	$0,25$	4	2
Глава 7	4	2	61	$0,6$	2	$3,2$
Глава 8	$0,125$	4	$1,25$	3	$0,5$	-1
Глава 9	2	6	$1,5$	-1	$-0,5$	$0,1$
Глава 10	6	$4,75$	4	$-2,5$	$1,5$	2
Глава 11	3	$6,28$	$0,75$	26	2	6
Глава 12	-30	3	48	$2,5$	3	3
Глава 13	3	$0,5$	2	2	3	3
Глава 14	0	6	1	$0,375$	2	$0,6$
Глава 15	6	10	0	3	$5,5$	2
Глава 16	2	$4,5$	10	$0,3125$	1	24

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985. 383 с.
2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1988. 432 с.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 464 с.
4. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Высш. шк., 1984. 200 с.
5. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. М.: Высш. шк., 1988. 288 с.
6. *Власова Е.А.* Ряды: Учебник для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 612 с.
7. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990. 624 с.
8. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2 ч. М.: Наука, 1998. Ч. 1. 616 с.; Ч. 2. 448 с.
9. *Киркинский А.С.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Академический Проект, 2006. 256 с.
10. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 3 т. М.: Высш. шк., 1988. Т. 1. 712 с.; Т. 2. 575 с.; Т. 3. 351 с.
11. *Морозова В.Д.* Введение в анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 408 с.
12. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. М.: Наука, 1985. Т. 1. 432 с.; Т. 2. 576 с.
13. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа/Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1993. 478 с.
14. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 366 с.
15. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Наука, Т. 1, 1969. 608 с.; Т. 2, 1970. 800 с.; Т. 3, 1970. 656 с.